PIA NALLI

Pia Nalli formò la Sua preparazione scientifica alla scuola matematica palermitana in uno dei periodi di maggior fulgore di quell'Istituto, allorchè i Rendiconti di Palermo erano già una delle riviste matematiche di maggior prestigio internazionale ed in quella Università insegnavano matematici quali Michele De Franchis e Giuseppe Bagnera. Ed appunto alla scuola del Bagnera, la Nalli configurò la Sua personalità di analista. È innegabile che l'influenza di quell'eminente matematico fu determinante nella formazione della giovane allieva. Da lui certamente Ella derivò il senso del rigore sostanziale, scevro da inutili e fastidiose pedanterie, il gusto per il problema concreto, la finezza e l'acutezza nell'indagine analitica. Però chi conosca la produzione del Bagnera ed abbia altresì meditato i più significativi lavori di Pia Nalli, non può non constatare la grande differenza esistente fra la personalità scientifica del maestro e quella dell'allieva. Il primo è portato all'indagine macroscopica, al ragionamento sintetico ed ha una spiccata preferenza per le questioni « in grande ». Ricercatrice minuziosissima, invece, Pia Nalli, naturalmente portata al tipo di analisi caratteristico delle questioni di variabili reali, ove sa destreggiarsi con rara abilità. È, pertanto, certo che, se pure in molte questioni e problemi Pia Nalli venne ispirata ed iniziata dal Suo maestro Bagnera, l'analisi da Lei condotta per giungere alla soluzione dei problemi affrontati, rivela sempre uno spirito indipendente che sa trovare in una innata, straordinaria capacità analitica le maggiori risorse di successo.

La produzione scientifica di Pia Nalli ha inizio con un lavoro di geometria algebrica del 1911, ma dove Ella comincia a dare la misura delle Sue possibilità di sottile ricercatrice è in due Note, apparse nello stesso anno, dove studia il problema consistente nel caratterizzare tutti i domini limitati del piano la cui frontiera è una curva di Jordan semplice e chiusa. Ella non doveva, allora, essere a conoscenza del fatto che il problema era già stato esaurientemente risoluto da Schoenflies pochi anni prima, tuttavia la soluzione che Ella ne fornisce, diversa da quella di Schoenflies, è elegante e completa.

Negli anni immediatamente successivi, Pia Nalli si dedica ad uno studio profondo dei nuovi concetti sulla teoria dell'integrale, che, solo pochi anni prima, aveva ricevuto un formidabile impulso con le fondamentali ricerche di Borel, Lebesgue, De La Vallée Poussin, Vitali e Denjoy. Appare nel 1914 la Sua monografia « *Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no* », presentata come dissertazione per la libera docenza. Non esitiamo ad affermare che tale lavoro, ad oltre mezzo secolo di distanza dalla sua pubblicazione, può, a tutt'oggi, considerarsi pienamente attuale. È veramente singolare come una giovane analista, non ancora ventisettenne, abbia saputo penetrare e profondamente impadronirsi di una materia che a quell'epoca era ancora tutt'altro che assestata ed anzi in via di formazione. Eppure, ancora oggi, specie per quanto riguarda la teoria dell'integrazione secondo Denjoy (*totalisation*) sarebbe difficile indicare una trattazione che abbia gli stessi requisiti di rigore e perspicuità di quella della Nalli, il cui lavoro va ben oltre quello di un semplice compito espositivo. Assai spesso, invece, si tratta di una rielaborazione profonda ed originale della materia, che, al lettore attento, non può non indicare quanto acuta e brillante analista fosse l'Autrice. D'altra parte, che Pia Nalli si fosse a fondo impadronita dei nuovi metodi della variabile reale, stanno a dimostrare i problemi che Ella affronta e risolve in quel lasso di tempo, servendosi delle nuove tecniche. Infatti, Ella estende, nel 1915, il ben noto teorema di De La Vallée Poussin, relativo alle derivate seconde generalizzate, alle funzioni integrabili secondo Denjoy e deduce da tale estensione il teorema di unicità dello sviluppo in serie trigonometrica per siffatte funzioni. Nello stesso anno aveva affrontato il problema della sommazione secondo Cesaro della serie di Fourier di una funzione integrabile secondo Denjoy. È noto che tale questione era stata risoluta dal Lebesgue nel 1905 per le funzioni integrabili secondo la sua definizione. Egli aveva dimostrato il teorema, oggi classico, secondo cui la serie di Fourier di una siffatta funzione, sommata con il procedimento $(C, 1)$ converge quasi ovunque verso la funzione stessa. Più precisamente si ha tale convergenza nei punti x di $(0, 2\pi)$ dove riesce:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha | f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2f(x) | \, d\alpha = 0.$$

La Nalli dimostra che si ha la convergenza della serie di Fourier di $f(x)$, con il procedimento di sommazione $(C, 2)$, nell'ipotesi che $f(x)$ sia integrabile secondo Denjoy, in tutti quegli x di $(0, 2\pi)$ nei quali

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha [f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha) - 2f(x)] \, d\alpha = 0.$$

La tecnica della dimostrazione è veramente mirabile, dovendo Ella superare la grave difficoltà costituita dalla non integrabilità di $|f(x)|$.

Fra il 1915 ed il 1918 le ricerche della Nalli si rivolgono alla sommazione delle serie, con speciale riguardo a quelle di Dirichlet. Particolarmente suggestivi appaiono i risultati riguardanti tali serie, dedotti dallo studio dello spazio hilbertiano delle funzioni $f(x)$ per le quali esiste finita la norma:

$$\| f \| = \left[\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} | f(x) |^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Di tale spazio, fin dal 1914, Ella aveva dimostrato la completezza.

Nel 1918 Pia Nalli intraprende lo studio dell'operatore integrale di *terza specie* a nucleo simmetrico

$$Su = k(x)u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

con l'intento di risolvere la corrispondente equazione integrale, problema questo, posto da Hilbert e rimasto insoluto anche dopo le fondamentali ricerche di Fredholm sulle equazioni integrali a limiti fissi. Il Suo forte intuito analitico Le fa immediatamente riconoscere che il problema della ricerca delle condizioni di risolubilità per l'equazione di terza specie è subordinato alla risoluzione di quello — ben più penetrante — consistente nel dare dell'operatore S quella che oggi, con linguaggio moderno, si direbbe una *risoluzione spettrale*. A tale questione, che Ella, allora, vedeva come il problema consistente nell'estendere all'operatore S lo sviluppo di Hilbert-Schmidt, vengono dapprima dedicate una memoria degli Annali di Matematica del 1918 e sei note lincee apparse nello stesso anno. Se l'analisi compiuta è assai spesso ingegnosa ed indubbiamente interessanti taluni dei risultati, appare evidente che gli strumenti analitici impiegati sono ancora inadeguati alla complessità del problema. Ciò fu certamente avvertito da Pia Nalli, che, in un'importante memoria del 1919, apparsa sui Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, abbandona completamente la via in precedenza seguita ed affronta la questione servendosi della tecnica dell'integrazione di Hellinger, che quest'autore aveva sviluppato fra il 1906 ed il 1909 per lo studio delle forme quadratiche limitate in infinite variabili. Per comprendere appieno il valore dei risultati della Nalli, occorre tener presente che la teoria degli spazi hilbertiani era a quell'epoca ancora assai poco sviluppata. Si pensi che l'attuale definizione di spazio di Hilbert astratto appare solo dieci anni dopo, nel 1929, per merito di von Neumann e che, pertanto, la via che oggi ci sembrerebbe più naturale, fondata sull'impiego della *funzione spettrale* dell'operatore, avente per valori *proiettori* dello spazio hilbertiano, non poteva allora presentarsi come la più spontanea, anche se l'aspetto sostanziale di tale metodo era già contenuto nell'opera di Hilbert. Nè, d'altronde, può affermarsi (e varrebbe la pena sincerarsene!) che l'uso di una *risoluzione dell'identità* porti a risultati più completi ed esaurienti di quelli ottenuti dalla Nalli. In verità la tecnica da Lei impiegata, fondata sull'uso dell'integrale di Hellinger — oggi, forse a torto, caduto in disuso — appare analiticamente complessa e svuotata di un contenuto geometrico, ma è indubbio che assai penetranti sono i risultati conseguiti e costruttivamente concrete le connessioni da Lei messe in luce fra l'operatore S e gli elementi che intervengono nella formola spettrale da Lei ottenuta. Questa si presenta come costituita da due parti: uno sviluppo in serie di Fourier di funzioni ortonormali (le autofunzioni) ed una parte integrale, espressa mediante integrazioni di Hellinger, che la Nalli chiama « *integrale di Fourier generalizzato* ». È evidente da tale rappresentazione il contributo delle componenti *puntuale* e *continua* dello spettro di S. La connessione con la risoluzione dell'identità relativa ad S può stabilirsi attraverso le autofunzioni dell'operatore e quelle che la Nalli chiama *funzioni fondamentali differenziali*, definite dalla relazione

$$Sf(x, \lambda) = \int_0^\lambda \mu d_\mu f(x, \mu)$$

e che Ella — circostanza importante — costruisce esplicitamente.

Come in precedenza con le Sue ricerche sulle variabili reali, così pure in tale questione di analisi funzionale, la Nalli dava prova di sapersi porre all'avanguardia con la Sua attività di ricercatrice. Ma purtroppo, forse proprio per questo, sfuggiva ai matematici che allora dovevano giudicarla, l'interesse del risultato da Lei conseguito. Fa fede di ciò una successiva nota della stessa Nalli, datata del 1926, nella quale Ella — con tono giustamente infastidito — risponde alle critiche che Le erano state mosse di non aver Ella risolto, con la Sua ricerca testè menzionata, l'equazione integrale di terza specie. Ella infatti ribadisce il giusto punto di vista secondo il quale siffatta soluzione è problema ben secondario rispetto a quello consistente nel fornire la risoluzione spettrale dell'operatore S, ché dal secondo facilmente discende la risoluzione del primo. Ma possono veramente biasimarsi i Suoi giudici di allora, quando si ponga mente al fatto che le Sue ricerche precorrevano i tempi di almeno dieci anni e che, d'altra parte, l'analisi delle trasformazioni funzionali in Italia, all'inizio degli anni venti, era ancora rimasta ferma a Volterra?

Tornando all'Opera di Pia Nalli, occorre dire che non sfuggì a Lei il fatto che i metodi impiegati nel caso particolare dell'operatore integrale di terza specie potevano estendersi ad una classe più ampia di operatori: le trasformazioni lineari simmetriche e limitate. A tale estensione è dedicata un'ampia memoria del 1922, apparsa sui Rendiconti di Palermo. Il programma intrapreso è però lasciato incompiuto ed una seconda annunciata memoria, la quale avrebbe dovuto contenere i risultati finali della teoria, non è mai, inspiegabilmente, apparsa. Ciò è tanto più strano, in quanto Ella ormai aveva tutti gli elementi per concludere la ricerca anche in questo caso più generale. Ma i motivi di ciò sono forse più di carattere psicologico che tecnico. Infatti, deve avere influito su Lei lo scoraggiamento originato dal vedere così poco apprezzate le Sue pur tanto profonde e belle ricerche in questo campo.

In diversi lavori apparsi fra il 1920 ed il 1926, Ella mette a partito l'abilità tecnica ormai acquisita nel campo delle trasformazioni lineari, per risolvere diversi tipi di equazioni funzionali lineari, di tipo soprattutto integrale. Fra queste va ricordata la seguente

$$u(x) = g(x)u(\alpha x) + \int_0^x N(x, y)u(y)dy + \int_0^{\alpha x} P(\alpha x, y)u(y)dy + f(x)$$

i cui risultati più completi sono quelli contenuti in una nota del 1923 dei Rendiconti di Palermo.

Sempre in questo campo di ricerche sono da ricordare due note lincee sulle applicazioni dell'equazione integrale di terza specie alle equazioni differenziali ordinarie (1928) ed una nota lincea (1929) nella quale si propone di riottenere, attraverso la Sua teoria spettrale, il concetto di valore principale, secondo Cauchy, di un integrale singolare. Il punto di vista è assai interessante e forse meriterebbe di essere ripreso, tuttavia le conclusioni cui la Nalli perviene non sono tutte condivisibili, ad esempio non lo è quella contenuta nell'affermazione « ... *Ciò fa ritenere che sia superflua l'introduzione nell'analisi del concetto di valore principale di un integrale* », anche se recentissime, importanti ricerche sugli operatori integrali singolari, tendenti ad evitare l'uso dell'integrale singolare di Cauchy (Lax, Nirenberg, Kohn, Hörmander), sembrano confermare il punto di vista espresso da Pia Nalli più di trentacinque anni fa.

La produzione scientifica di Pia Nalli dal 1928 in poi è quasi esclusivamente dedicata al calcolo differenziale assoluto. Prima di occuparci di tale parte dell'attività di Pia Nalli, dobbiamo ricordare la Sua bella memoria del 1923: *Sopra un procedimento di calcolo analogo alla integrazione*, dove definisce due operazioni funzionali che generalizzano quella della derivazione e dell'integrazione di una funzione di una variabile (formalmente distinte da quelle di Riemann-Liouville e M. Riesz) e mediante le quali introduce nuove classi di funzioni speciali.

Altri lavori di avanguardia sono le due note pubblicate (in collaborazione con G. Andreoli), nel 1927, sulla formola di Green nel campo complesso e, nel 1928, sull'area delle superficie. Il primo di questi lavori può considerarsi come uno dei capostipiti della imponente serie di lavori che l'analisi moderna ha dedicato alla teoria integrale delle funzioni analitiche di più variabili complesse. Nel secondo appare il concetto di coppia di funzioni a variazione limitata, che doveva essere ripreso ed esteso dal Caccioppoli e da altri ricercatori nella teoria dell'area delle superficie. Ed è un peccato che i due Autori, dopo avere affacciato idee tanto interessanti, non abbiano ulteriormente approfondito le loro ricerche in questi campi.

Come dicemmo, dal '28 in poi la produzione di Pia Nalli muta completamente indirizzo ed è quasi esclusivamente dedicata a ricerche di calcolo differenziale assoluto. I motivi di tale netto cambiamento furono diverse volte spiegati a chi scrive dalla stessa Nalli. Alla base di essi sta l'amarezza per lo scarso successo che le Sue precedenti ricerche, pur così profonde e ricche di risultati, avevano incontrato presso il pubblico matematico. Numerose sono le questioni delle quali Ella si occupò in questo nuovo campo di ricerca: parallelismo di Levi Civita e sue estensioni, metrica superficiale di una varietà, trasporti rigidi di vettori, derivazioni generalizzate, etc. Ella portò in queste ricerche il Suo spirito finemente critico, la Sua capacità a saper cogliere l'essenziale, la Sua non comune abilità algoritmica.

Nè mancano, qua e là, l'affacciarsi di nuove idee e la proposta di nuove ricerche e di nuovi problemi da investigare. Chi scrive non ha certo la competenza per dare un giudizio approfondito sulle ricerche di Pia Nalli in tale campo. Riteniamo però possa onestamente affermarsi che la Sua opera in tale indirizzo non tocca gli stessi altissimi livelli raggiunti dai risultati da Lei ottenuti nelle questioni di variabili reali e di analisi funzionale. Tuttavia essa serve a completare la Sua figura di analista, versatile ed acuta, capace di dedicarsi con serietà e competenza a problemi appartenenti anche a campi fra loro assai lontani. Nè va dimenticata la Sua monografia sul calcolo differenziale assoluto, la quale, ancorchè tenuta su un piano puramente istituzionale, certo costituisce, per il rigore e la chiarezza dell'esposizione, una utilissima lettura per chi voglia introdursi allo studio dell'analisi tensoriale.

Se l'attività scientifica di Pia Nalli può essere motivo di meditazione per gli analisti, non meno significativo è l'insegnamento che può venire dalla Sua vita. Insegnamento, in verità, amaro, chè esso dimostra come il solo valore scientifico e l'importanza dei risultati raggiunti, da soli, a volte, non bastino ad assicurare fama e prestigio ad uno studioso, se essi sono disgiunti da quel *savoir faire* e da quella tendenza all'accomodamento, dai quali taluni spiriti rifuggono. E fra questi certo vi fu Pia Nalli, dotata di un temperamento intransigente, incapace di qualsiasi compromesso, inflessibilmente rigida verso i mediocri e gli inetti. Tali aspetti del Suo carattere vennero certo inaspriti dalle difficoltà che Ella incontrò sempre nella Sua carriera, dal mancato riconoscimento dei Sui indubbi meriti, dalle umiliazioni alle quali venne a volte, ingiustamente, sottoposta.

Ternata in un concorso universitario nel 1923, venne nominata professore presso l'Università di Cagliari, dalla quale solo dopo diversi anni potè trasferirsi nella Sua amata Sicilia, presso l'Università di Catania, dove rimase fino alla fine del Suo insegnamento. La Sua aspirazione ad insegnare nella Sua città natale, Palermo, venne sempre frustrata e fu per Lei motivo di grande amarezza vedersi preferire matematici di statura ben diversa dalla Sua.

Ritiratasi dall'insegnamento, non ebbe dalla Facoltà di Catania, che per trenta anni Ella aveva servito, il riconoscimento della proposta di nomina a Professore Emerito.

Ma anche in campo nazionale Pia Nalli fu lasciata nel più completo oblio. Nessuna Accademia pensò di accoglierLa mai fra i suoi membri, mai fu chiamata a giudicare un concorso universitario (sia al tempo in cui le commissioni erano prescelte dal ministero, sia, in quello più recente, nel quale sono elettive), mai ebbe un incarico di distinzione e di prestigio. D'altra parte Ella possedeva l'orgoglio dell'autentico scienziato di razza, che Le impediva di mendicare i riconoscimenti e le cariche.

Esauritosi con lo scorrer degli anni il risentimento verso chi Le era stato ostile, risentimento cui il Suo esuberante temperamento meridionale aveva, a volte, dato toni vivaci, si chiuse sempre più in se stessa, in una vita desolatamente solitaria, non allietata da affetti familiari. Ma i pochissimi che furono Suoi amici sanno che dietro l'asprezza esteriore del Suo carattere si celava un'anima sensibile alle più delicate sfumature dei sentimenti.

Chi ebbe la ventura di avvicinarLa negli ultimi anni della Sua vita, potè vedere come Ella si fosse già distaccata dalle amarezze e dalle vicissitudini non liete della Sua vita ed ormai considerasse con bonaria ironia fatti e persone del passato e del presente. Gravemente ammalata agli occhi, sopportò con fermezza e rassegnazione interventi chirurgici e cure dolorose. Esprimeva, invece, a chi veniva a visitarLa, la gioia di poter ancòra — con la poca vista rimastaLe — godere dei bei colori della natura siciliana, che tanto amava.

Si spense serenamente lo scorso anno in quella che era ormai diventata la Sua città, Catania, quando già l'estate si ritraeva dalle assolate spiagge dell'isola per cedere il posto all'autunno i cui colori, così mirabili alle pendici dell'Etna, Ella non avrebbe riveduto.

GAETANO FICHERA