GEOMETRIA

TRATTATO

DI

GEOMETRIA ELEMENTARE

DI A. AMIOT.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI GIOVANNI NOVI

Professore di Meccanica nell' I. e R. Liceo militare di Firenze.

CON UN ATLANTE DI 59 TAVOLE.

FIRENZE.

FELICE LE MONNIER.

1858.

AL LETTORE.

Le opere destinate ad iniziare i giovani nello studio di una scienza, debbono contenere le basi di quelle teoriche che per la loro generalità e fecondità vogliono esser considerate come fondamentali. E ciò rende ragione perchè di tratto in tratto sia necessario mutare i libri elementari; sendochè talune dottrine che per lo innanzi apparivano di grande rilievo, perdino col progresso del tempo buona parte della loro importanza; mentre per l'opposto altre dottrine prima ignote o poco apprezzate, si manifestino ricche di copiose conseguenze. Oggi siamo appunto in uno di quei periodi in cui sembra opportuna sì fatta rinnovazione dei trattati elementari; poichè di quelli che corrono per le scuole, si può dire che alcuni sieno già antichi per essere stati scritti prima della grande operosità scientifica degli ultimi trent' anni; ed altri non nuovi, quantunque di recente pubblicati, per non essere andati al di là delle idee di quei tempi.[1] In niuna parte delle matematiche apparisce di più cotesto inconveniente quanto nella Geometria pura; e basta por mente ai mirabili progressi in questa scienza operati nell'ultimo scor

[1] L'Italia possiede il migliore Trattato elementare di Meccanica razionale che vi sia oggidì nell'opera che l'illustre prof. MOSSOTTI va lentamente pubblicando; e fra breve speriamo sarà dotata dal nostro valentissimo prof. BETTI di un Trattato di Algebra superiore a livello dello stato presente di questo ramo importante delle matematiche.

cio di tempo, per consentire con noi che i trattati più riputati manchino affatto di quelle dottrine che si sono trovate più fruttuose nella Geometria moderna; talchè con ragione può dirsi che essi preparino i giovani più allo studio delle *Collezioni Matematiche* di PAPPO che a quello delle opere di CHASLES, MÖBIUS, PONCELET, STEINER, ec. Nè con ciò intendiamo enunciare un' opinione meno che riverente verso LEGENDRE i cui *Elementi* sono seguíti a preferenza nelle scuole italiane; ma soltanto ricordare come l'illustre Geometra, altamente benemerito dell' insegnamento, pubblicasse la prima edizione della sua opera nel 1794, e mancasse ai vivi nel 1834, cioè in quel tempo appunto in cui le novelle teoriche si venivano elaborando. Anzi noi teniamo per fermo che se egli fosse vissuto più a lungo, avrebbe coteste teoriche usufruttuate, come già fece, con nobile esempio, in altre più elevate dottrine.

Le cagioni del grave divario che corre tra le opere di Geometria elementare e lo stato attuale di questa scienza, sono diverse e di varia natura; talune generali ad ogni maniera di scienza, altre peculiari alla Geometria. Le prime ripetono la loro origine dal potere che ha sulla maggior parte degli animi umani l'abitudine, e dall'opinione volgare seguíta da molti che la scienza debba servire *esclusivamente* alla pratica; opinione onninamente falsa e che ove prevalesse annullerebbe ogni progresso. Le seconde riposano sopra il concetto che si ha della parte che la Geometria dovrebbe avere nell' insegnamento matematico. Taluni, e sono i pochi, vorrebbero principale lo studio della Geometria, secondario quello dell' Analisi, e della Geometria quella d' EUCLIDE, la sola buona, la sola adottabile. Altri, e sono i più, non solo dánno all' insegnamento dell' Analisi una decisiva preponderanza, ma rilegano la Geometria in un posto subalterno affatto, e la circoscrivono ai suoi primi elementi. Nulla abbiamo a dire rispetto ai primi che già non sia stato ampiamente detto da uomini più di noi autorevoli. Ma rispetto ai secondi ci sia permesso avvertire che se forse il loro modo di pensare appariva vero molti anni addietro, oggi però che, volere o non volere, la Geometria ha acquistato una grande estensione ed è divenuta un ramo importante delle matematiche, non ci sembra più possibile perseverare nelle stesse opinioni. Sono ancora innumerevoli i problemi che resistono agli sforzi incessanti dei geometri; non priviamo i giovani di un mezzo d' investigazione certo non ispregevole, e che in molti casi può tornare utilissimo. Lasciamo sempre principale l' insegnamento dell' Analisi; ma ampliamo quello della Geometria fra giusti limiti. I geometri moderni, sviluppando ed ampliando idee contenute in germe nelle opere dei Greci, e in quelle di qualche eminente intelletto del secolo sedicesimo, hanno formato del rapporto anarmonico e della teoria dell' involuzione le basi di una nuova Geometria che sta a quella degli antichi presso a poco come l' Astronomia moderna sta a quella d' Ipparco e di Tolomeo. Or dovranno i nostri giovani ignorare le nozioni fondamentali di queste due teorie? Di più si è veduto che introducendo nella Geometria pura i segni + e — per rappresentare la direzione dei segmenti fatti sopra una stessa retta, essa Geometria veniva ad acquistare una generalità per lo innanzi non che raggiunta, neppure sperata. Or dovremo noi passarci dall' adottare questi principii per tema d' incontrare il biasimo di taluni che proscrivono qualunque idea non esplicitamente contenuta negli scritti dei geometri greci? Da ultimo la trasformazione delle figure è uno dei più fecondi mezzi d' investigazione geometrica. Or dovranno i nostri scolari ignorarne le basi? Ma le novelle teoriche sono per avventura difficili e complicate per modo che oltrepassino i limiti di un insegnamento elementare? Sono inutili per la pratica? Sono inutili per le parti superiori delle matematiche? — Le nozioni fondamentali sul rapporto anarmonico, sulla involuzione, sulle divisioni omografiche e sui fasci omografici, sugli assi radicali e sui centri di similitudine, diremo senza tema di essere smentiti da chi le ha studiate, che sono più facili di molte parti della Geometria solida. — I nuovi metodi prestandosi con grande facilità e generalità alla soluzione dei problemi geometrici, giovano per questo lato alle applicazioni della scienza. BRIANCHON capitano di artiglieria (*Application de la Théorie des Transversales*), e STEINER (*Die geometrischen Konstructionen* ec.), hanno già mostrato come di essi possano trarre non lieve profitto i militari, gli ingegneri, gli agrimensori; altre importanti applicazioni si trovano nelle opere di DUPIN, PONCELET, ec. — La Geometria analitica, trattata come si deve ai dì nostri, si giova grandemente dei nuovi principii, come può vedersene un prezioso saggio nel *Treatise on Conic Section* del dotto SALMON. Molti stimano al dì d'oggi utile far precedere lo studio della Meccanica razionale da quello dei movimenti geometrici; e questa teoria si collega intimamente con talune parti delle dottrine geometriche moderne. Talchè a noi pare che nelle nuove teorie si riscontrino tutte le condizioni che le rendono atte ad essere proficuamente introdotte nell'insegnamento elementare.

Le ragioni con qualche larghezza discorse sinora, ci dispensano dal dilungarci nell'esporre le idee che ci hanno guidato, quando, invitati dall'Editore a proporre un Trattato di Geometria da servire per le scuole, abbiamo fra i molti prescelto quello del professore Amiot. Questo Trattato è essenzialmente un'opera di transizione, utilissima per cominciare a divulgare fra noi le nuove teoriche. In buona parte esso è quello di LEGENDRE meglio ordinato e purgato di talune mende che nel primo si riscontravano; per dippiù si veggono per la prima volta esposti nel testo con chiarezza e precisione i principii della teoria delle trasversali, dei rapporti armonici ed anarmonici, della involuzione, degli assi radicali e dei centri di similitudine. La teoria dei triangoli simili è data come caso particolare di quella dei poligoni; il che è bene; e vi è parlato dell'*omotetia diretta ed inversa* di CHASLES. Il metodo adottato dall' Autore è quello dei limiti; e qui ci sieno permesse altre poche parole. Taluni hanno una particolare predilezione pel così detto *metodo della riduzione all'assurdo*. Questo metodo è antico quanto la Geometria; esso è infatti il primo che si presenti nell' infanzia di una scienza e in mancanza di metodi più elevati e più razionali. Gli scrittori di logica hanno già avvertito che esso *convince ma non illumina lo spirito:* osservazione di gran rilievo. Altri ha luminosamente mostrato come in qualche caso cotesto metodo si allontani da quel rigore che è condizione indispensabile di qualunque dimostrazione matematica. — L'applicazione del metodo della riduzione all'assurdo è legittima ed utile nelle reciproche; è necessaria o semplicemente preferibile quando la dimostrazione diretta o non esiste o riesce lunga e complicata. Fuori di questi casi i ben pensanti la rigettano.

Alcune piccole aggiunte abbiamo fatte qui e là nel testo; e per di più abbiamo stimato utile finire il volume con dieci Note, che si possono considerare come una specie di Complemento di Geometria. Le prime due Note sono destinate, l' una a schiarire talune idee troppo concisamente esposte dall' Autore, l' altra a far conoscere i poliedri di specie superiore di POINSOT; la terza contiene un cenno delle proiezioni prospettiche, stereografiche e ortografiche; le quattro seguenti completano le nozioni di Geometria moderna esposte nel testo, e sono in gran parte estratte dalla *Geometria superiore* di CHASLES; l'ottava è diretta a rendere i giovani più familiari colla importante teoria dei poli e delle polari, che abbiamo considerati tanto sul piano che sulla sfera; la nona dà un cenno del metodo delle polari reciproche; l'ultima finalmente ha in mira di far conoscere le sezioni coniche e a fare intravedere come i metodi moderni si applichino mirabilmente a queste celebri curve. — Talune parti delle nostre Note presuppongono cognizioni di Trigonometria in chi legge, e possono essere tralasciate, senza che ciò noccia all'intelligenza del resto, da chi non sia al fatto di questi studi.

Vari fra i problemi coi quali abbiamo cercato illustrare le nuove teorie si ritrovano fra gli esercizi proposti da AMIOT nel testo. A tale scelta siamo stati spinti dall'importanza che taluni di questi problemi hanno per lo sviluppo ulteriore della scienza ed altresì perchè ci tornavano utili nell' ultima Nota. Lasciandoli poi stare nel testo abbiamo avuto in animo d'invitare i giovani a tentarne la soluzione per altre vie, non essendovi esercizio più utile in sè stesso e più efficace a promuovere gli studi moderni quanto il confronto fra i vari metodi.

Traducendo quest' opera e corredandola di Note, altro non è stato il nostro intendimento se non quello d'ispirare nei giovani l'amore a queste nuove, feconde e belle teorie di Geometria moderna, e di rialzare gli studi geometrici nelle nostre scuole. Se avremo raggiunto questo scopo modesto, saremo ampiamente ricompensati della noia che suole accompagnare l'effettuazione di simili lavori.

IL TRADUTTORE

NB. Le speranze che ci guidarono, quando offrimmo alla gioventù studiosa questa nostra traduzione, non sono state deluse. La Geometria di Amiot è stata adottata in molte scuole italiane, ed accolta con favore da giudici autorevoli.[1] E il desiderio da noi manifestato or son due anni, che venisse ampliato l'insegnamento della Geometria, ha già ricevuto un principio di attuazione nella creazione di cattedre di Geometria superiore in due fra le principali Università italiane, la Bolognese e la Napoletana, alle quali sono stati chiamati i professori Cremona e Battaglini, che pregevoli lavori indicavano alla scelta del Governo. Noi siamo lieti di aver contribuito, comunque assai modestamente, a questo rinascimento degli studii geometrici nel nostro paese.

1861.

[1] Fra questi ci piace citare il chiariss. prof. Luigi Cremona, il quale in un Opuscolo (*Considerazioni di Storia della Geometria in occasione di un libro di Geometria elementare* pubblicato recentemente in Firenze) scritto in proposito della presente Opera, ha con molta erudizione trattati vari punti della Storia della Geometria.

PRELIMINARI.

1. — Qualunque corpo ha forma e grandezza determinata. La sua grandezza, cioè *l' estensione del luogo* che esso occupa nello spazio, ha ricevuto il nome di *volume*. La sua forma dipende dalla *superficie* che lo separa dallo spazio.

Quando la superficie di un corpo è formata di più parti distinte, due parti contigue hanno limiti comuni, che chiamansi *linee*. Quindi la linea è il luogo dell' intersezione di due superficie.

Se due linee, tirate sulla medesima superficie, s' incontrano, si dà il nome di *punto* al luogo della loro intersezione.

Noi considereremo i volumi, le superficie e le linee, indipendentemente dai corpi di cui determinano le forme, e daremo loro il nome comune di *figure*.

Due *figure* sono *eguali* quando sovrapponendole si possono far coincidere; se hanno la medesima estensione ma non la stessa forma, si dicono *equivalenti*.

2.—Tra le diverse linee che si possono condurre da un punto a un altro, *si ammette che ve ne sia una sola, minore di tutte le altre.*

Si distinguono due specie di linee: la linea *retta* e la linea *curva*.

Una linea si dice *retta* quando una sua parte qualunque rappresenta la più corta distanza fra i suoi due punti estremi.

Da questa definizione e dall' assioma precedente risulta che: 1° *da un punto ad un altro si può condurre una sola linea retta;* 2° *se si applicano due punti di una retta sopra un' altra retta, queste due linee debbono coincidere in tutte le loro parti*, perchè i punti che si prendono sulla prima retta possono essere indefinitamente lontani uno dall' altro.

Per indicare un punto si fa uso di una lettera qualunque. Una linea retta si nomina enunciando due punti qualunque di questa linea. Talchè *(fig. 1)* la retta AB è quella che passa pe' punti A e B.

Una linea si dice *spezzata*, quando è formata da porzioni di rette.

Qualunque linea non retta nè spezzata, ha ricevuto il nome di *curva.*

3. — Si distinguono due specie di superficie: la superficie *piana*, o il *piano*, e la superficie *curva.*

Una superficie si dice *piana* quando la retta che passa per due punti qualunque di questa superficie, coincide con essa in tutta la sua estensione.

Dimostreremo in seguito che due piani coincidono: 1° Quando hanno a comune tre punti non in linea retta; 2° Quando hanno a comune una retta e un punto esterno a questa retta; 3° Quando hanno di comune due rette che s' incontrano.

Una superficie si dice *poliedrica* quando è formata dalla riunione di porzioni di superficie piane.

Qualunque superficie che non è nè piana nè poliedrica, ha ricevuto il nome di superficie *curva.*

4.—La *Geometria* ha per oggetto di studiare le proprietà delle figure e di misurare la loro estensione: è per questo che si definisce la scienza dell' estensione.

Noi la divideremo in due parti: la *Geometria piana* e la *Geometria solida.* Nella prima diremo delle proprietà delle figure piane, cioè di quelle di cui gli elementi sono in uno stesso piano; nella seconda studieremo le proprietà delle figure i cui elementi sono disposti in modo qualunque nello spazio.

5. — Quando si tirano due linee rette sopra un piano, queste linee prolungate indefinitamente s'incontrano o non s'incontrano. Nel primo caso, si dice che esse formano un *angolo;* nel secondo, che esse sono *parallele.*

L'*angolo* è la porzione indefinita del piano, compresa tra le due rette che si tagliano e che terminano al loro punto di concorso. Queste linee sono i *lati* dell'angolo, e il punto nel quale esse s'incontrano n'è il *vertice.* La grandezza di un angolo dipende solamente dalla lontananza dei suoi lati.

Un angolo s'indica col suo vertice, se altri angoli non concorrono in questo punto. Altrimenti si segna un punto sopra ciascun lato e si enuncia il vertice tra questi due punti. Così *(fig. 2)* l'angolo BAC ha il suo vertice nel punto A e i suoi lati passano per i punti B, C.

Due angoli *(fig. 3)* ABC, CBD sono adiacenti, quando hanno lo stesso vertice B, un lato BC comune, e gli altri due lati BA, BD situati l'uno da una parte e l'altro dall'altra del lato comune BC.

Due angoli *(fig. 4)* AEC, DEB si dicono opposti al vertice, quando i lati dell'uno sono prolungamenti dei lati dell'altro.

6. — Teorema dicesi una proposizione di cui è necessario provare la verità. Qualunque teorema contiene due parti, cioè: una *ipotesi* fatta sopra un soggetto, e una *conchiusione*, ch'è la conseguenza di questa ipotesi. Il ragionamento che si fa per dedurre la conchiusione dall'ipotesi, quando la loro dipendenza non è evidente, è chiamato la *dimostrazione* del teorema.

Se nell'enunciato di una proposizione si aggiunge una negazione all'ipotesi e alla conchiusione, si forma la *proposizione contraria.*

Si chiama *reciproca* di una proposizione un'altra proposizione, di cui l'ipotesi e la conchiusione sono conchiusione e ipotesi della prima.

La proposizione: « Se due angoli sono retti, sono eguali » ha per contraria: « Se due angoli non sono retti, non sono eguali » e per reciproca: « Se due angoli sono eguali, sono retti. »

Una proposizione essendo data, la proposizione contraria e la reciproca non sono sempre vere, perchè la conchiusione di una proposizione conviene talvolta a un maggior numero di casi dell'ipotesi. Noi ne abbiamo un esempio nella proposizione precedente, giacchè due angoli possono essere uguali senza essere retti.

Una proposizione, la contraria e le loro reciproche, hanno tra loro una tal dipendenza che, quando le due prime sono dimostrate vere, le altre due sono evidenti. Quindi facendo capo a questo fatto generale, che si può chiamare la *legge dei reciproci,* io enuncierò le reciproche più importanti, e dimostrerò solo quelle di cui avrò tralasciate come inutili le proposizioni contrarie.

Corollario è una conseguenza che si deduce da una, o da più proposizioni.

Scolio è una osservazione che si fa sopra una o più proposizioni precedenti. diretta a far conoscere il loro legame, la loro generalità, le restrizioni a cui vanno soggette, la loro utilità ec.

GEOMETRIA PIANA.

LIBRO PRIMO.

LA LINEA RETTA E LA LINEA SPEZZATA.

CAPITOLO I.

Della comune misura di due linee e del loro rapporto.

1.—Quando una grandezza è contenuta un numero esatto di volte in più grandezze della stessa specie, si dice che essa è la loro comune misura.

Cerchiamo *(fig. 5)* la massima comune misura di due linee rette A e B. A tal fine, portiamo la minore B sulla maggiore A; se la linea B è contenuta, per esempio, quattro volte esattamente in A, essa sarà la massima comune misura cercata.

Se invece A contiene quattro volte B con un resto R, si dimostrerà, con un ragionamento identico a quello che si fa in aritmetica per trovare il massimo comun divisore di due numeri, che le comuni misure di A e B sono le stesse di quelle di B e R, e reciprocamente; talchè la massima comune misura di A e B è la stessa di quella di B e R.

Per trovare quest' ultima, si porterà R sopra B; e se R_1 è il resto, le comuni misure di B e R saranno eguali a quelle di R e R_1. Si continuerà in tal guisa sino a che si pervenga ad un resto contenuto un numero esatto di volte nel precedente; l'ultimo resto sarà la massima comune misura di A e B.

Per determinare quante volte questa comune misura è contenuta in A e B, supponiamo che si sia trovato

$$\begin{aligned} A &= 4B + R \\ B &= 3R + R_1 \\ R &= 2R_1 + R_2 \\ R_1 &= 3R \end{aligned}$$

Avremo successivamente

$$\begin{aligned} R &= 6R_2 + R_2 = 7R_2 \\ B &= 21R_2 + 3R_2 = 24R_2 \\ A &= 96R_2 + 7R_2 = 103R_2 \end{aligned}$$

Conviene osservare che i moltiplicatori 24 e 103 debbono essere primi fra loro; giacchè se avessero un divisore comune, per esempio 3, le due linee A e B avrebbero 3 R_2 per comune misura; lo che è impossibile, poichè R_2 è la loro massima comune misura.

Da questi valori di A e B si deduce che il loro rapporto

$$\frac{A}{B} = \frac{103}{24}.$$

2. — Può accadere che cercando la massima comune misura di due linee, non si trovi alcun resto contenuto esattamente nel resto precedente. In questo caso le linee non hanno comune misura, e si dice che sono incommensurabili tra loro.

Il metodo precedente condurrebbe a due limiti del rapporto di queste linee; ma val meglio dividere una delle linee, B per esempio, in un certo numero di parti eguali e di cercare il massimo multiplo di questa frazione di B contenuto in A. Supponiamo diviso B in 10 parti eguali e A maggiore di 15 ma minore di 16 di queste parti, avremo

$$A > \frac{15B}{10}, \quad A < \frac{16B}{10};$$

dunque il rapporto di $\frac{A}{B}$ è compreso tra $\frac{15}{10}$ e $\frac{16}{10}$. (Vedi Nota I, in fondo al Volume).

3. — Si chiama *unità* la grandezza assunta come termine di paragone fra tutte le grandezze della stessa specie.

Misurare una grandezza, significa paragonarla alla sua unità, cioè cercare quante unità e parti di unità essa contiene. Il numero intero o frazionario che si trova, esprime il rapporto di questa grandezza all' unità.

L' unità lineare è la diecimilionesima parte del quarto della circonferenza della terra, ed ha ricevuto il nome di *metro*. Il metro è stato suddiviso in parti di dieci in dieci volte più piccole, che sono: il *decimetro,* decima parte del metro; il *centimetro,* decimo del decimetro o centesimo del metro; il *millimetro,* decimo del centimetro o millesimo del metro. Si sono anche formate mediante il metro unità di dieci in dieci volte più grandi, che sono: il *decametro* o dieci metri; l' *ettometro* o cento metri; il *chilometro* o mille metri; il *miriametro* o dieci mila metri.

Per misurare una linea retta maggiore del metro, si porta il metro su questa linea, e se vi è contenuta, per esempio, 7 volte esattamente, si dice che la lunghezza di questa retta è di 7 metri. Se questa retta non contiene esattamente il metro, essa conterrà un certo numero di metri, come 7, e un resto minore del metro. Si cerca poi quante volte questo resto contiene il decimetro; se è uguale a 5 decimetri aumentati di un resto minore del decimetro, si misurerà questo nuovo resto mediante il centimetro. Supponiamolo eguale a 6 centimetri; la lunghezza della retta sarà di 7 metri 56 centimetri.

Se la retta che si vuol misurare è minore del metro, si troverà la sua misura per via del decimetro, del centimetro, ec., come nell' esempio precedente.

Per misurare una linea spezzata, si valutano separatamente le lunghezze delle rette che la compongono e si fa la somma dei numeri che si sono trovati.

CAPITOLO II.

Angoli.

TEOREMA I.

Se due rette AB, CD *s' incontrano, gli angoli* AEC, BED *opposti al vertice sono eguali. (fig. 4).*

Infatti rivoltiamo il piano dei due angoli adiacenti BEC, BED e poniamolo sul piano dei due angoli adiacenti CEA, CEB, facendo coincidere i punti E e le rette DC, AB. I due angoli BEC, CEB essendo eguali, il lato EB del primo angolo prende la direzione di EC, lato del secondo. Dunque gli angoli BED, AEC sono eguali.

Corollario I. — Supponiamo che la linea CD, prima situata sulla retta AB, si muova girando intorno al punto E; è chiaro che la retta CD passerà una volta, ed *una volta sola*, per una posizione nella quale gli angoli adiacenti AEC, CEB sono uguali. Allora i quattro angoli formati da queste due linee sono uguali; giacchè gli angoli AEC e CEB sono rispettivamente eguali agli angoli BED e AED come opposti al vertice.

Corollario II. — Quando due linee rette che s' incontrano, formano quattro angoli eguali *(fig. 6.)*, si dice che l' una è perpendicolare all' altra, e si dà il nome di angolo retto a ciascuno dei quattro angoli.

Al contrario due rette sono *oblique* l' una all' altra quando incontrandosi formano angoli disuguali.

In virtù del Corollario precedente possiamo dunque dire che *da un punto preso sopra una retta si può inalzare una perpendicolare a questa retta e non se ne può inalzare che una sola.*

Corollario III. — Tutti gli angoli retti sono uguali.

Un angolo si dice *acuto* o *ottuso* secondochè è minore o maggiore di un angolo retto.

L' angolo retto è stato preso per unità d' angolo, perchè solo della sua specie; in guisa che per misurare un angolo bisogna cercare il suo rapporto all' angolo retto. Vedremo in seguito come al confronto diretto di due angoli, si sia sostituito il paragone di due linee che hanno cogli angoli una notevole relazione.

Due angoli sono *complementari* quando la loro somma è uguale a un angolo retto, e si dicono *supplementari* quando presi insieme equivalgono a due retti.

TEOREMA II.

Quando una linea retta AB *ne incontra un' altra* CD, *la somma di due angoli adiacenti* AEC, BEC, *formati da queste linee, è uguale a due angoli retti. (fig. 7.)*

Conduciamo la retta EF perpendicolare ad AB, avremo:

l'angolo AEC + CEB = AEF + FEC + CEB = AEF + FEB.

Ma gli angoli AEF, FEB sono retti, dunque la somma degli angoli adiacenti AEC, CEB è uguale a due angoli retti.

Corollario I. — Se *(fig. 8)* per un punto C di una retta AB conduciamo differenti rette da una stessa parte di AB, la somma degli angoli adiacenti consecutivi è uguale a due retti; infatti si ha:

ACD + DCE + ECF + FCB = ACF + FCB = 2 retti.

Corollario II. — Se *(fig. 9)* per un punto A di un piano si conducono sopra questa superficie più rette in differenti sensi, la somma degli angoli adiacenti consecutivi che esse formano è uguale a 4 angoli retti.

Prolunghiamo DA al di là del vertice A e sostituiamo all'angolo FAB i due angoli FAG, GAB dei quali esso è la somma. Gli angoli adiacenti consecutivi, situati da ciascuna parte di DG, valgono insieme due angoli retti; dunque la somma di tutti gli angoli formati attorno al punto A è uguale a 4 angoli retti.

TEOREMA III.

Se due angoli adiacenti ABC, CBD *sono supplementari, i loro lati non comuni* AB, BD *sono sulla medesima retta. (fig. 10.)*

Conduciamo pel punto B la retta BE perpendicolare ad AB; la somma degli angoli ABE, EBD è uguale a quella degli angoli ABC, CBD, cioè a due retti. Ma l'angolo ABE è retto, dunque EBD è anche retto e le due linee AB, BD che sono perpendicolari a BE, nello stesso punto B, formano una sola retta.

Corollario. — Se *(fig. 8)* più angoli ACD, DCE, ECF, FCB, adiacenti due a due, valgono insieme due angoli retti, i lati estremi AC, CB sono sulla medesima retta; giacchè i due angoli adiacenti ACF, FCB sono supplementari.

CAPITOLO III.

Della Perpendicolare e delle Oblique.

Si chiama *piede* di una perpendicolare e di una obliqua il punto in cui la perpendicolare o l'obliqua incontra la retta alla quale è condotta.

Se da un punto preso fuori di una retta conduciamo a questa retta una perpendicolare e diverse oblique, diremo che due oblique sono egualmente o disugualmente distanti dalla perpendicolare, quando i loro piedi sono a distanze eguali o disuguali da quello della perpendicolare.

Si chiama *luogo geometrico* una linea, retta o curva, di cui tutti i punti hanno una proprietà comune.

TEOREMA I.

Da un punto O, *posto fuori di una retta* AB, *si può condurre una perpendicolare a questa retta e non se ne può condurre che una sola. (fig. 11).*

Facciamo girare la parte superiore del piano della figura attorno alla retta AB, sino a che coincida colla parte inferiore. Sia O′ il posto che occupa il punto O. Riportiamo il piano nella sua prima posizione e uniamo i punti O ed O′ colla retta OO′; dico che OO′ è perpendicolare ad AB. Infatti, pieghiamo nuovamente il piano seguendo AB, la retta CO prende la direzione di CO′, poichè il punto O cade per ipotesi sul punto O′. Dunque gli angoli adiacenti OCB, BCO′ sono uguali e la retta OO′ è perpendicolare ad AB.

Qualunque altra retta OD, condotta dal punto O sino all' incontro di AB, è obliqua a questa linea; giacchè, condotta DO′, e piegata la figura seguendo AB, il punto O cade sul punto O′ e la retta DO coincide con DO′. Quindi l' angolo CDO è uguale all' angolo CDO′ e per conseguenza minore di CDE; laonde la retta OD forma con AB angoli disuguali.

TEOREMA II.

Se da un punto O, *preso fuori di una retta* AB, *conduciamo la perpendicolare e differenti oblique ad* AB,

1°. *La perpendicolare è minore di qualunque obliqua;*

2°. *Due oblique, egualmente distanti dalla perpendicolare, sono eguali;*

3°. *Di due oblique, disugualmente distanti dalla perpendicolare, la più lontana è la maggiore.*

1°. Siano *(fig. 11.)* OC la perpendicolare ed OD una obliqua qualunque, condotte dal punto O ad AB. Prendiamo sul prolungamento di OC la linea CO′ eguale ad OC, e tiriamo la retta DO′. Le due rette OD, O′D sono eguali, giacchè, se facciamo girare la figura OCD attorno ed AB per applicarla sopra O′CD, la retta OC prende la direzione di CO′, perchè gli angoli OCD, O′CD sono retti; e poichè OC è uguale a O′C il punto O coincide col punto O′; dunque OD è uguale a O′D.

Ma la retta OCO′ è minore della linea spezzata ODO′, dunque OC, metà di OCO′, è anche minore di OD, metà di ODO′.

2°. Prendiamo *(fig. 12)* sopra AB, da ciascun lato della perpendicolare OC, lunghezze uguali CD, CG e conduciamo le oblique OD, OG che si allontanano egualmente da OC. Per dimostrare che queste oblique sono eguali, facciamo girare OCD attorno ad OC sino a che l'angolo retto OCD coincida con OCG; poichè la retta CD è uguale a CG, il punto D si applica sul punto G, dunque le oblique OD, OG sono uguali.

3°. Consideriamo *(fig. 13)* le due oblique OD, OE che distano disugualmente dalla perpendicolare OC e conduciamo dal punto D la retta DF perpendicolare ad AB. Poichè l'angolo ODA è maggiore di ODC, la retta DF è situata nell'angolo ODA; dunque essa incontra OE in un punto F intermedio fra O ed E. La linea retta OD è minore di OF + FD; ma la perpendicolare FD è minore dell'obliqua EF; dunque la retta OD è a più forte ragione minore di OF + FE, ovvero di OE.

Corollario I. — La distanza fra un punto e una retta si misura per via della perpendicolare condotta da questo punto alla retta, perchè essa è la più corta linea che si possa condurre dal punto alla retta.

Corollario II. — Da un punto preso fuori di una retta si possono condurre a questa linea due sole oblique eguali.

Corollario III. — Le reciproche del teorema precedente sono evidenti, giacchè questo teorema dimostra che due oblique hanno fra loro la stessa relazione delle distanze dei loro piedi a quello della perpendicolare.

TEOREMA III.

Se, per il mezzo C *della retta* AB, *si conduce la perpendicolare* GE *a questa linea,*

1°. *Qualunque punto di* GE *è ugualmente lontano dall' estremità di* AB;

2°. *Qualunque punto esterno a* GE *è disugualmente distante dalle medesime estremità* A *e* B. *(fig. 14.)*

1°. Poichè CA è uguale a CB, le oblique DA, DB, che uniscono un punto qualunque D della perpendicolare GE ai punti A e B, sono uguali. Dunque qualunque punto D della retta GE è ugualmente lontano da A e B.

2°. Sia F un punto esterno a GE e conduciamo le rette FA, FB; la retta GE trovandosi fra i punti A, F, la retta AF incontra GE nel punto E, le cui distanze ai punti A e B sono uguali. Ma FB è minore di FE + EB, ovvero di FE + EA; dunque il punto F è disugualmente distante dall' estremità di AB.

Scolio. — La perpendicolare DE è il *luogo geometrico* dei punti egualmente lontani da' due punti A e B

TEOREMA IV.

1°. *La bisettrice di un angolo ha ciascuno dei suoi punti egualmente lontano dai due lati di quest' angolo.*

2°. *Qualunque punto esterno alla bisettrice, è disugualmente distante dai medesimi lati. (fig. 15.)*

1°. Da un punto qualunque D della retta BO, che divide l'angolo ABC in due parti eguali, conduciamo DE perpendicolare al lato BA, e DF perpendicolare al lato BC. Le rette DE, DF sono uguali, giacchè se facciamo girare l'angolo ABO attorno a BO e l'applichiamo sul suo eguale CBO, il lato BA coincide con BC e la retta DE perpendicolare ad AB prende la direzione di DF perpendicolare a BC; dunque i punti E, F coincidono, e il punto D è ugualmente distante dai lati AB, BC dell'angolo ABC.

2°. Da un punto G esterno a BO, conduco le rette GH e GN rispettivamente perpendicolari a BA e BC. La retta GH incontra la bisettrice BO nel punto L, dal quale tiro LM perpendicolare a BC, ed unisco il punto M con G. La perpendicolare GN è più corta dell'obliqua GM, la quale è minore di GL + LM; dunque a più forte ragione GN è minore di GL + LM ovvero di GL + LH; dunque il punto G è disugualmente distante dai lati dell'angolo ABC.

Scolio. — Il luogo geometrico dei punti egualmente lontani da due rette che si tagliano è il sistema delle bisettrici degli angoli formati da queste rette.

CAPITOLO IV.

Delle Rette parallele.

Quando *(fig. 16)* due linee rette AB, CD sono incontrate da una terza EF, formano con questa linea otto angoli che, considerati due a due, hanno ricevuto nomi particolari. Per rendere più semplici gli enunciati, indicheremo ciascuno di questi angoli con una lettera posta tra i suoi lati.

1°. Si chiamano *corrispondenti* due angoli non adiacenti H e N, che sono uno interno, l'altro esterno alle rette AB, CD e dallo stesso lato della secante EF.

2°. Due angoli non adiacenti H e R diconsi *alterni-interni* quando sono compresi tra le due rette AB, CD, e situati dalle due parti della secante.

3°. Due angoli non adiacenti N, L diconsi *alterni-esterni* quando non sono compresi tra AB e CD e si trovano a differenti lati della secante.

4°. Due angoli H, M diconsi *interni* quando sono situati tra le linee AB, CD e dalla stessa parte della secante.

5°. Due angoli G, N diconsi *esterni* quando, essendo situati dallo stesso lato della secante, non sono compresi tra AB e CD.

Ammetteremo come evidente che *se due rette (fig. 17)* DC, AF *sono una perpendicolare e l' altra obliqua sopra* AD, *queste due linee prolungate s' incontreranno* (¹).

TEOREMA I.

Da un punto A *si può condurre una parallela a una retta* BC, *ma non se ne può condurre che una sola. (fig. 17)*

Conduciamo pel punto A, la retta AD perpendicolare a BC e la retta GE perpendicolare ad AD. Le due linee BC. GE non possono incontrarsi, altrimenti pel

(¹) Il Sig. Amiot dimostra questa proposizione: noi, seguendo il parere di distinti Geometri, abbiamo stimato conveniente assumerla come evidente, tanto più che la dimostrazione dell'Autore non è interamente rigorosa. (T.)

punto di concorso si sarebbero condotte due perpendicolari sopra AD; lo che è impossibile. Dunque GE è parallela a BC.

Pel punto A non si può condurre un'altra parallela a BC; infatti una linea AF diversa da AE, sarebbe obliqua ad AD e per conseguenza incontrerebbe BC.

Corollario. — Due rette, parallele ad una terza, sono parallele tra loro.

Infatti se le due rette s'incontrassero, si sarebbero condotte due parallele da uno stesso punto ad una stessa retta.

TEOREMA II.

Se due rette AB, CD *fanno con una secante* GH *due angoli corrispondenti eguali* AEH, CFH,

1°. *Gli angoli alterni-interni sono eguali;*

2°. *Gli angoli alterni-esterni sono eguali;*

3°. *Gli angoli interni sono supplementari;*

4°. *Gli angoli esterni sono pure supplementari;*

5°. *Le rette* AB, CD *sono parallele. (fig. 18.)*

1°. L angolo AEH è uguale a CFH per ipotesi, l'angolo EFD è anche uguale a CFH come opposto al vertice. Dunque gli angoli alterni-interni AEH, EFD sono eguali.

2°. Similmente ciascuno degli angoli alterni-esterni CFH, GEB è uguale ad AEH; dunque essi sono uguali tra loro.

3°. L'angolo AEH è uguale per ipotesi a CFH che è il supplemento di CFE; dunque i due angoli interni AEH, CFE sono supplementari.

4°. Gli angoli esterni AEG, CFH valgono insieme due angoli retti, perchè l'angolo CFH è uguale ad AEF, che è il supplemento di AEG.

5°. Dal punto medio O della retta EF, conduciamo MN parallela ad AB e facciamo girare la figura NOFD attorno al punto O, nel suo piano, sino a che OF coincida con OE, che l'è uguale. I due angoli MOE, NOF essendo uguali, la retta ON prende la direzione di OM. Similmente la retta FD prende la direzione di EA, per l'uguaglianza degli angoli OFD, OEA. Ma la retta *EA* è parallela ad MN; dunque CD è anche parallela ad MN e per conseguenza ad AB ([1]).

TEOREMA III.

Se due rette AB, CD *sono parallele, formano con una secante qualunque* GH,

1°. *Gli angoli corrispondenti eguali;*

2°. *Gli angoli alterni-interni eguali;*

3°. *Gli angoli alterni-esterni eguali;*

4°. *Gli angoli interni supplementari;*

5°. *Gli angoli esterni anche supplementari. (fig. 19)*

1°. I due angoli corrispondenti AEH, CFH sono eguali. Infatti se dal punto E si conduca una retta che formi con EF un angolo eguale a CFH, questa linea è parallela a CD; dunque essa coincide con AB; e l'angolo AEH è uguale a CFH.

2°. Dall'eguaglianza degli angoli corrispondenti risulta che 1° gli angoli alterni-interni sono eguali; 2° gli angoli alterni-esterni sono eguali; 3° gli angoli interni

([1]) Questo quinto caso può dimostrarsi ancora nel seguente modo:
Dall'uguaglianza degli angoli AEH, CFH si deduce quella degli angoli GEB, GFD, che sono rispettivamente uguali ai primi. Quindi l'ipotesi fatta da una parte della secante, cioè che gli angoli corrispondenti AEH, CFH siano uguali, si riproduce *identicamente* dall'altra parte della secante medesima; talchè apparisce evidente, che se le rette AB, CD potessero incontrarsi da una parte, dovrebbero incontrarsi anche dalla parte opposta, lo che è impossibile. Dunque AB è parallela a CD (T.)

sono supplementari; 4° gli angoli esterni sono supplementari.

Scolio. — Le proposizioni contrarie delle due precedenti sono vere.

TEOREMA IV.

Due angoli i cui lati sono paralleli due a due sono eguali o supplementari. (fig. 20).

Consideriamo in prima gli angoli ABC, DEF i cui lati sono paralleli e diretti nello stesso senso; questi angoli sono eguali. Infatti prolunghiamo DE sino a che incontri BC; gli angoli ABC, DGC sono eguali come corrispondenti; gli angoli DEF, DGC sono anche eguali per la medesima ragione, dunque l'angolo ABC è eguale a DEF.

Gli angoli ABC, HEG i cui lati sono paralleli e diretti in senso contrario sono eguali; poichè entrambi questi angoli sono eguali all'angolo DEF.

Finalmente gli angoli ABC, DEH che hanno i lati AB, ED paralleli e diretti nello stesso senso e i lati *BC*, EH paralleli e diretti in senso contrario, sono supplementari. Infatti l'angolo ABC è uguale a DEF, supplemento di DEH. Dunque ABC, DEH sono supplementari.

TEOREMA V.

Due angoli che hanno i lati perpendicolari due a due sono eguali o supplementari. (fig. 21).

Siano *ABC, DEF* due angoli della medesima specie i cui lati sono rispettivamente perpendicolari; dico che essi sono eguali. Infatti conduciamo le linee BH e BK rispettivamente parallele ad EF e ad ED, e nello stesso senso; l'angolo KBH è uguale a DEF. Poichè gli angoli ABK, CBH sono retti, gli angoli KBH, ABC saranno eguali perchè complementi dello stesso angolo ABH; quindi ABC è uguale a DEF.

L'angolo DEG, supplemento di DEF, e l'angolo ABC hanno anche i loro lati perpendicolari ma sono supplementari.

CAPITOLO V.

Triangoli

Si chiama *triangolo (fig. 23)* la porzione di piano compresa fra tre rette che s' incontrano due a due. Le parti AB, BC, AC di queste rette comprese tra i punti d' intersezione sono i *lati* del triangolo. Gli angoli che formano queste linee e i vertici di questi angoli sono chiamati gli *angoli* e i *vertici* del triangolo.

In un triangolo si distinguono sei elementi: tre lati e tre angoli. — Il triangolo è *equilatero* o *equiangolo* quando i tre lati o i tre angoli sono eguali. È *isoscele* se ha due lati eguali; *rettangolo* se ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto ha ricevuto il nome d' *ipotenusa.*

TEOREMA I.

Ciascun lato di un triangolo è minore della somma degli altri due. (fig. 23.)

Infatti ciascun lato AB è minore della linea spezzata AC + BC formata dagli altri due lati.

Scolio. — Se si osserva che la relazione

$$AB < AC + BC$$

può scriversi nel seguente modo

$$BC > AC - AB;$$

si ha quest' altro enunciato del teorema precedente:

Ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due.

TEOREMA II.

La somma dei tre angoli di un triangolo qualunque è uguale a due angoli retti. (fig. 22.)

Prolunghiamo il lato AB del triangolo ABC al di là del vertice B e per questo punto conduciamo BE parallela ad AC. La somma dei tre angoli adiacenti ABC, CBE, EBD, è uguale a due angoli retti; ma l' angolo CBE è uguale ad ACB, come alterno-interno; EBD è uguale a CAB, come corrispondente, dunque

$$ABC + ACB + CAB = 2 \text{ retti}.$$

Corollario I. — L' angolo CBD formato dal lato BC e dal prolungamento BD del lato AB, è detto *esterno;* ed è uguale alla somma dei due angoli interni CAB, ACB che non gli sono adiacenti.

Corollario II. — Un triangolo può avere un solo angolo retto o un solo angolo ottuso; gli altri due angoli sono acuti. — I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.

Corollario III. — Ciascuno degli angoli di un triangolo equiangolo è uguale ai due terzi di un angolo retto.

Corollario IV. — Se due angoli di un triangolo sono rispettivamente eguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo angolo del primo triangolo è uguale al terzo angolo del secondo.

TEOREMA III.

Due triangoli sono eguali quando hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali. (fig. 23).

Siano ABC, DEF i triangoli dati, e sia il lato AB = DE il lato AC = DF e l'angolo A = D. Dico che questi triangoli sono eguali. Infatti sovrapponiamo il triangolo DEF sopra ABC e poniamo il punto D sul punto A, il punto E sul punto B; poichè l'angolo D è uguale ad A, il lato DF prende la direzione di AC; e i punti F e C coincidono a causa dell'eguaglianza dei lati DF, AC. Dunque i lati EF, BC coincidono anche essi, e i due triangoli ABC, DEF sono eguali.

Corollario I. — Dall'eguaglianza dei triangoli ABC, DEF si deduce che il lato EF è uguale a BC, l'angolo E è uguale a B e l'angolo F a C.

Corollario II. — Un triangolo è determinato quando sono dati due lati e l'angolo compreso.

TEOREMA IV.

Due triangoli sono uguali quando hanno un lato eguale adiacente respettivamente a due angoli eguali. (fig. 23).

Sia il lato EF = BC, l'angolo E = B, l'angolo F = C; dico che questi triangoli sono eguali.

Sovrapponiamo il triangolo DEF sopra ABC e poniamo il punto E sopra B, il punto F sopra C. Poichè i due angoli E, B sono eguali, il lato ED prende la direzione di BA; parimente il lato FD prende la direzione di CA per l'eguaglianza degli angoli F e C; dunque il punto D, comune alle due rette ED, FD, coincide con l'intersezione A delle due linee BA, CA, e i due triangoli ABC, DEF sono eguali.

Corollario I. — Da questa dimostrazione si deduce che l'angolo D=A, il lato DE=AB, il lato FD=AC

Corollario II. — Un triangolo è determinato quando sono dati un lato e i due angoli adiacenti.

Corollario III. — *Due triangoli rettangoli sono eguali se hanno l'ipotenusa ed un angolo acuto rispettivamente eguali.*

Infatti gli altri due angoli acuti di questi triangoli sono anche eguali, come complementi di angoli eguali. Dunque i triangoli sono eguali perchè aventi due angoli e il lato compreso rispettivamente eguali.

Quindi un triangolo rettangolo è determinato quando sono dati l'ipotenusa ed un angolo acuto.

TEOREMA V.

Due triangoli sono eguali se hanno i tre lati rispettivamente eguali. (fig. 24.)

Sieno ABC, ABD due triangoli aventi il lato AB comune, il lato AC eguale ad AD ed il lato BC eguale a BD; dico che essi sono eguali.

Infatti ciascuno dei punti A, B è egualmente distante da C e da D; dunque la retta AB è perpendicolare sul mezzo di CD. Se sovrapponiamo il triangolo DAB sopra CAB, facendolo girare intorno ad AB, la retta ED prende la direzione di EC e le loro estremità D, C coincidono, perchè queste rette sono perpendicolari ad AB ed eguali tra loro. Dunque il lato DB coincide con CB ed il lato DA con CA, e per conseguenza i triangoli sono eguali.

Corollario I. — Dall'eguaglianza dei due triangoli emerge quella degli angoli opposti ai lati eguali.

Corollario II. — Un triangolo è determinato quando sono dati i suoi tre lati.

Corollario III. — *Due triangoli rettangoli sono eguali, se hanno l'ipotenusa ed un altro lato rispettivamente eguali. (fig. 25.)*

Sieno ABC, ADC due triangoli rettangoli aventi il lato comune AC e le ipotenuse AB, AD eguali. Poichè gli angoli ACB, ACD sono retti, la linea BCD è retta e le due oblique eguali AB, AD si allontanano egualmente dalla perpendicolare AC. Dunque il lato BC è uguale a DC, e i due triangoli hanno tre lati eguali rispettivamente.

Quindi un triangolo rettangolo è determinato quando sono dati l'ipotenusa e un altro lato.

Scolio. — Due triangoli che hanno gli angoli rispettivamente eguali non sono necessariamente eguali; giacchè tirando una parallela a uno dei lati di un triangolo *(fig. 26)*, se ne forma un altro i cui angoli sono eguali a quelli del primo, senza che questi triangoli sieno eguali.

TEOREMA VI.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi fra questi lati disuguali, il lato opposto al maggiore dei due angoli è maggiore di quello che è opposto all'altro angolo. (fig. 27.)

Sieno i due triangoli ABC, ABD che hanno il lato AB comune, il lato AC eguale ad AD e l'angolo BAC maggiore di BAD; dico che il lato BC è maggiore di BD. Dividiamo l'angolo CAD in due parti eguali per via della retta AE. Questa linea, situata nell'angolo CAB maggiore di BAD, incontra il lato BC nel punto E, che uniamo a D colla retta DE. I due triangoli CAE, DAE avendo un angolo eguale compreso tra due lati eguali, sono eguali, e CE = DE. Ma BD è minore di BE + ED ovvero di BE + EC; dunque BD è minore di BC.

Corollario I. — Se due triangoli hanno un lato disuguale e gli altri due rispettivamente eguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto all'altro lato.

Questa reciproca è una conseguenza evidente delle due proposizioni precedenti.

Corollario II. — Il teorema III e il precedente provano, che *se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali, i terzi lati di questi triangoli hanno tra loro la stessa relazione degli angoli opposti*, cioè che questi lati sono eguali o disuguali a seconda che gli angoli opposti sono eguali o disuguali, e che, nel caso della disuguaglianza, il lato maggiore è opposto all'angolo maggiore.

TEOREMA VII.

Se un triangolo ha due angoli eguali, i lati opposti a questi angoli sono eguali. (fig. 25.)

Sia ABD il triangolo dato, l'angolo B uguale all'angolo D; dico che AB è uguale ad AD. Dividiamo l'angolo BAD in due parti eguali colla retta AC. Poichè l'angolo BAC è uguale a CAD e l'angolo ABC ad ADC per ipotesi, il terzo angolo ACB del triangolo ABC è uguale al terzo angolo ACD del triangolo ACD; dunque questi triangoli, che hanno un lato comune AC adiacente a due angoli eguali, sono eguali e si ha il lato AB uguale ad AD.

Corollario. — La bisettrice AC dell'angolo BAD divide in due parti eguali il lato opposto BD e gli è perpendicolare.

SCOLIO. — Un triangolo equiangolo è equilatero.

TEOREMA VIII

Se un triangolo ABC *ha due angoli disuguali* BAC, BCA, *il lato* BC, *opposto all' angolo maggiore* BAC, *è maggiore del lato* AB, *opposto all'altro angolo. (fig. 28.)*

Conduciamo dal punto A, nell' angolo BAC, la retta DA in guisa tale che l' angolo DAC sia eguale a BCA. Poichè il triangolo ADC ha due angoli eguali, i lati DA, DC, opposti a questi angoli, sono eguali. Ma nel triangolo ABD il lato AB è minore di BD + AD, ovvero di BD + DC; dunque AB è minore di BC.

SCOLIO. — Le reciproche delle due proposizioni precedenti sono evidenti. Quindi: *In un triangolo che ha due lati uguali, gli angoli opposti sono uguali. — Un triangolo equilatero è equiangolo. — In qualunque triangolo, che abbia due lati disuguali, il lato maggiore è opposto all' angolo maggiore.*

CAPITOLO VI.

Poligoni.

Si chiama *Poligono* una porzione di piano terminata da linee rette. L' insieme di queste linee, che diconsi *lati*, forma il contorno o il *perimetro* del poligono.

Gli *angoli* e i *vertici* di un poligono sono gli angoli formati dai suoi lati e i vertici dei suoi angoli.

Un poligono dicesi *regolare* quando ha i lati eguali e gli angoli eguali.

Il poligono di tre lati è il *triangolo;* quello di quattro si chiama *quadrilatero;* quello di cinque, *pentagono;* quello di sei, *esagono; ec.*

Un poligono dicesi *convesso*, quando si trova interamente da una stessa parte delle rette, indefinitamente prolungate, che lo terminano. Nel caso contrario si dice che è *concavo.*

Il perimetro di un poligono convesso ABCDE non può essere incontrato in più di due punti da una linea retta MN. *(fig. 29.)* Sieno G, F i punti nei quali MN interseca i due lati AB, CD; dico che MN non può incontrare il perimetro in altri punti. Infatti i due punti G, F sono da una medesima parte di ciascuna delle rette DE, AE, ec. Dunque la linea GF non incontra alcuna di queste rette.

Dicesi *diagonale* la retta che unisce due vertici non consecutivi di un poligono.

Tra i quadrilateri si distinguono:

Il *trapezio*, di cui due lati sono paralleli. *(fig. 30.)*

Il *parallelogrammo*, i cui lati opposti sono paralleli *(fig. 31.)*

La *losanga*, che ha i lati uguali e gli angoli disuguali. *(fig. 32.)*

Il *rettangolo*, che ha gli angoli eguali e i lati disuguali. *(fig. 33.)*

Il *quadrato*, che ha i lati eguali e gli angoli eguali *(fig. 34.)*

TEOREMA I.

La somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati meno due. (fig. 35.)

Tiriamo nel poligono ABCDEF e pel vertice A, le diagonali AC, AD, AE; verremo a decomporre il poligono in tanti triangoli quanti sono i lati meno due. Giacchè questi triangoli hanno il punto A per vertice comune e per base i differenti lati del poligono, eccettuati i due lati AB, AF. Poichè la somma degli angoli di ciascun triangolo è uguale a due retti, quella degli angoli di tutti i triangoli è uguale a due retti ripetuti tante volte quanti sono i triangoli. Ma la somma degli angoli del poligono è uguale a quella degli angoli di tutti i triangoli; dunque questa somma è uguale a tante volte due retti quanti sono i lati meno due.

COROLLARIO I. — Se indichiamo con n il numero dei lati del poligono, la somma dei suoi angoli è uguale a $2\,(n-2)$ retti, o a $(2\,n-4)$ retti.

COROLLARIO II. — Il valore di uno degli angoli di un poligono equiangolo si ottiene evidentemente dividendo il valore della loro somma pel loro numero. Così l'angolo di un poligono equiangolo di n lati avrà per valore $\frac{2n-4}{n}$ di un angolo retto.

SCOLIO. — La somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a quattro retti. Dunque ciascuno degli angoli del rettangolo o del quadrato è retto.

TEOREMA II.

Se si prolungano nella stessa direzione tutti i lati di un poligono convesso, la somma degli angoli esterni formati in tal guisa è uguale a quattro retti. (fig. 36.)

Poichè ciascun angolo esterno ABG è il supplemento del suo adiacente interno ABC, la somma degli angoli tanto esterni quanto interni, è uguale a due angoli retti ripetuti tante volte quanti sono i vértici del poligono; dunque questa somma è uguale a $2n$ retti, se n è il numero dei lati. Ma gli angoli interni valgono insieme $2n - 4$ retti; dunque l'eccesso di $2n$ retti sopra $(2n - 4)$ retti, cioè quattro retti, rappresenta la somma degli angoli esterni [1].

TEOREMA III.

Due poligoni della medesima specie sono eguali quando tutti i lati e gli angoli sono eguali e disposti nel medesimo ordine, eccetto due lati consecutivi e l'angolo compreso fra essi. (fig. 40)

Consideriamo i due pentagoni ABCDE, A'B'C'D'E'. Sieno il lato AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', e l'angolo A = A', B = B', C = C', D = D'. Per dimostrare l'eguaglianza di questi poligoni, sovrapponiamo gli angoli eguali E'A'B', EAB; poichè i lati A'B', AB sono eguali, il punto B' coincide con B e, per l'eguaglianza degli angoli B', B, il lato B'C' prende la direzione di BC. Ma B'C' è uguale a BC, dunque il punto C' si applica sopra C e il lato C'D' si dirige verso CD. Poichè questi lati e gli angoli D', D sono eguali, il punto D' coincide con D e il lato D'E' prende la direzione di DE. Dunque i vertici E', E coincidono e i due poligoni sono eguali.

SCOLIO. — L'eguaglianza di due poligoni di n lati è conseguenza dell'eguaglianza di $n - 2$ lati ed $n - 1$ an-

[1] Questo teorema può dimostrarsi con grande facilità nel seguente modo: Conduciamo per un punto O, preso nel piano del poligono, rette parallele ai lati del poligono e dirette secondo i prolungamenti dei medesimi; è chiaro che gli angoli fatti intorno al punto O saranno rispettivamente eguali agli angoli esterni del poligono: ma la somma dei primi equivale a quattro retti, quindi anche la somma dei secondi pareggia quattro retti.

Da questa proposizione o dalla precedente si deduce che *un poligono convesso non può avere più di tre angoli acuti.* (T.)

goli; dunque essa dipende da $2n - 3$ condizioni differenti [1].

TEOREMA IV.

Due poligoni della medesima specie sono eguali quando all' eccezione di un lato e dei due angoli adiacenti le altre parti sono eguali e disposte nello stess' ordine.

Questo teorema si dimostra per via della sovrapposizione diretta dei due poligoni.

TEOREMA V.

Due poligoni della medesima specie sono eguali quando, all' eccezione di tre angoli consecutivi, le altre parti sono eguali e disposte nel medesimo ordine.

La dimostrazione è analoga alla precedente [2].

(1) *Un poligono di* n *lati è determinato generalmente da* $2n-3$ *condizioni.* Questa proposizione può dimostrarsi direttamente nel seguente modo:

Supponiamo che il teorema sia provato per un poligono di $n - 1$ lati; dimostrerò ch' è vero anche per un poligono di n lati. Costruisco sopra un lato del poligono di $n - 1$ lati un triangolo, i cui lati non si trovino sul prolungamento di quelli adiacenti del poligono; così avrò aumentato il poligono di un lato ed aggiunto contemporaneamente due condizioni, quelle cioè necessarie per la determinazione del triangolo. Quindi possiam dire in generale che: se il numero dei lati di un poligono è aumentato di uno, il numero degli elementi necessarii per la determinazione del poligono cresce di due. Ora per un poligono di $n - 1$ lati il numero delle condizioni è dato da $2(n - 1) - 3$; quindi per un poligono di n lati questo numero sarà dato da $2n - 3$. Ma il teorema ha luogo pel triangolo, quindi, ec.

Laonde un quadrilatero è determinato in generale da 5 condizioni, il pentagono da 7, l'esagono da 9, ec.

È chiaro poi che un poligono regolare è determinato quando è conosciuto un solo dei suoi lati.

Osserviamo ancora che un trapezio è determinato da quattro condizioni, un parallelogrammo da tre, una losanga o un rettangolo da due, e finalmente un quadrato da una sola. (T.)

(2) Enuncio senza dimostrarlo quest'altro caso di eguaglianza dei poligoni: *Due poligoni* ABCDEF, A'B'C'D'E'F' *sono uguali quando hanno il lato*

TEOREMA VI.

I lati opposti e gli angoli opposti di un parallelogrammo sono eguali. (fig. 41.)

Tiriamo la diagonale AC del parallelogrammo ABCD; i due triangoli ABC, ADC hanno il lato AC comune, l' angolo BAC uguale ad ACD come alterni-interni rispetto alle parallele AB, CD, e gli angoli BCA, DAC eguali per la stessa ragione; dunque i triangoli ABC, ADC sono uguali e per conseguenza il lato AB è uguale a DC, il lato BC ad AD e l' angolo B a D. Gli angoli BAD, BCD sono anche uguali come aventi i lati paralleli e diretti in senso contrario.

Corollario I. — Le parallele AB, CD comprese tra due rette parallele DA, BC sono uguali.

Corollario II. — Due parallele AB, CD sono da pertutto egualmente distanti. *(fig. 42.)*

Infatti se da due punti qualunque E, F di AB si conducono le perpendicolari EG, FH a CD, queste rette sono parallele ed eguali, perchè comprese tra due parallele.

TEOREMA VII.

Un quadrilatero ABCD *è un parallelogrammo, se i lati o gli angoli opposti sono uguali. (fig. 41.)*

1°. Sieno il lato AB = CD e il lato AD = BC. La diagonale AC divide la figura in due triangoli eguali, perchè hanno tre lati rispettivamente eguali; dunque gli angoli BAC, DCA, opposti ai lati BC, AD, sono

AF = A'F' *e le distanze dell' estremità* A *ed* F, A' *ed* F' *di questi lati a tutti gli altri vertici* B, C, D, E, *e* B', C', D', E', *sieno rispettivamente uguali e similmente disposte.* (T.)

uguali. Ma questi angoli sono alterni-interni rispetto ad AB e CD; dunque questi lati sono paralleli. Parimente AD è parallela a BC.

2°. Siano l'angolo $A = C$ e l'angolo $B = D$; avremo $A + B = C + D$, cioè che la somma dei due angoli A e B è uguale alla metà della somma dei quattro angoli del quadrilatero; dunque gli angoli A e B sono supplementari. Ma questi angoli sono interni rispetto alle rette AD, BC; dunque queste linee sono parallele. Parimenti AB è parallela a CD.

Corollario I. — La losanga è un parallelogrammo, poichè i lati opposti sono uguali.

Corollario II. — Il rettangolo è un parallelogrammo, poichè gli angoli opposti sono uguali. — Il quadrato è ad una volta losanga e rettangolo.

TEOREMA VIII.

Un quadrilatero è un parallelogrammo, se due lati opposti sono uguali e paralleli. (fig. 41.)

Sia il lato AB uguale e parallelo a DC. La diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli ABC, ADC uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso tra due lati rispettivamente uguali; quindi $BC = AD$.

TEOREMA IX.

✠ *Le diagonali di un parallelogrammo sono disuguali e si dividono mutuamente in due parti uguali. (fig. 43.)*

1°. I due triangoli ADC, BCD hanno il lato DC comune, i lati AD, BC eguali e l'angolo ADC maggiore di DCB. Dunque il lato AC è maggiore di BD.

2°. I due triangoli ABE, CDE sono eguali, perchè il lato AB = CD, l'angolo ABE = CDE e l'angolo BAE = DCE. Dunque il lato AE, opposto all'angolo ABE, è uguale a CE, opposto all'angolo CDE. Parimenti il lato BE = DE.

COROLLARIO I. — Gli angoli ADC, BCD essendo retti nel rettangolo, i due triangoli ADC, BCD sono uguali e le diagonali AC, BD sono uguali ([1]).

COROLLARIO II. — Se il parallelogrammo è una losanga, la diagonale BD, avendo due punti B, D egualmente lontani dall'estremità di AC, è perpendicolare sul mezzo di questa retta. Dunque le diagonali di una losanga sono perpendicolari l'una all'altra.

COROLLARIO III. — Le diagonali del quadrato sono eguali e perpendicolari l'una all'altra.

SCOLIO GENERALE. — Due parallelogrammi sono uguali quand'hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente uguali. — Due rettangoli sono uguali se hanno due lati rispettivamente uguali. — Due losanghe sono uguali se hanno un lato e un angolo rispettivamente eguali. — Due quadrati sono eguali se hanno un lato eguale.

TEOREMA X*.

In un trapezio ABCD,

1°. *La retta* EF *che unisce i mezzi* E, F *dei lati concorrenti* AD, BC, *è parallela ai due altri lati* AB, CD, *ed eguale alla loro semisomma.*

2°. *La retta che unisce i mezzi delle diagonali, è parallela ai medesimi lati ed eguale alla loro semidifferenza.*

([1]) Da questo Corollario si deduce che *il punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo dista egualmente dai tre vertici del triangolo.* (T.)

1°. Pel punto F *(fig. 37)* conduciamo GH parallela ad AD. I triangoli CFH e FGB sono eguali come aventi il lato FC = FB per ipotesi e gli angoli eguali; dunque FH = FG, CH = GB. Ma DA = HG come parallele comprese fra parallele; quindi le loro metà DE, HF sono eguali, laonde EF è parallela a DC e per conseguenza ad AB.

Inoltre

$$EF = AB - GB$$
$$EF = DC + CH;$$

sommando e dividendo per 2, si ha

$$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

2°. Sieno *(fig. 38)* M, N i punti medii delle diagonali AC, BD. Conduciamo pel punto N la retta PQ parallela ad AC; i due triangoli PNB, DNQ sono uguali perchè hanno gli angoli eguali e il lato BN = ND per ipotesi; quindi PB = DQ, PN = NQ.

Ma AC = PQ, laonde AM = PN; quindi MN è parallela ad AB e per conseguenza a DC.

Si ha

$$MN = AB - BP$$
$$MN = DQ - CD;$$

sommando e dividendo per 2,

$$MN = \frac{AB - DC}{2}.$$

Corollario. — *La retta che unisce i mezzi di due lati di un triangolo, è parallela al terzo lato ed eguale* *alla sua metà;* giacchè un triangolo può essere considerato come un trapezio, di cui uno dei lati paralleli è divenuto nullo ([1]).

([1]) Giovandosi di questo Corollario si dimostra agevolmente il seguente teorema:

In qualunque quadrilatero ABCD, *la retta che unisce i mezzi* m, n *delle diagonali, e quelle che uniscono i mezzi* E *ed* F, G *ed* H *dei lati opposti, si tagliano mutuamente in due parti eguali nello stesso punto* (fig. 39.). (T.)

LIBRO SECONDO.

DELLA CIRCONFERENZA DEL CERCHIO.

CAPITOLO I.

Diametro e Corde.

Si chiama cerchio la porzione del piano terminata da una linea curva di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto situato all' interno del cerchio e chiamato *centro*. Questa linea curva è la *circonferenza* del cerchio.

Si dà il nome di *raggio (fig. 44)* a qualunque retta AC che unisce il centro C a un punto qualunque A della circonferenza. Tutti i raggi di un cerchio sono uguali.

Un *arco* è una porzione qualunque AMB della circonferenza, ed ha per *corda* la retta AB che unisce le sue estremità A e B. La corda AB ha i soli punti A e B comuni colla circonferenza, poichè dal centro a questa retta si possono tirare due sole oblique eguali al raggio.

Una corda corrisponde a due archi, la cui riunione forma la circonferenza. Noi, in generale, considereremo solamente il minore di questi archi.

Si chiama *diametro* qualunque corda che passa pel centro. Tutti i diametri sono uguali, poichè ciascuno di essi è doppio del raggio.

Si chiama *segmento* di cerchio la porzione del piano compresa tra un arco e la sua corda; *settore*, la parte del cerchio compresa tra due raggi.

TEOREMA I.

1°. *Il diametro è la massima corda del cerchio.*

2°. *Esso divide in due parti eguali il cerchio e la sua circonferenza. (fig. 45.)*

1°. Sia AB una corda qualunque; conduciamo il diametro AD ed il raggio CB; nel triangolo ACB si ha che AB è minore di AC + CB ovvero di AD.

2°. Facciamo girare la parte ABD del cerchio attorno ad AD, sino a che si applichi sopra AED; i due archi ABD, AED debbono coincidere, altrimenti avrebbero dei punti disugualmente distanti dal centro; dunque il diametro AD divide la circonferenza e il cerchio in due parti eguali.

TEOREMA II.

Il diametro DE, *perpendicolare ad una corda* AB, *divide in due parti eguali questa corda e gli archi che essa sottende. (fig. 46.)*

Pieghiamo la figura seguendo il diametro DE, e sovrapponiamo il semicerchio DAE sopra DBE; l'arco DAE coincide con DBE. Poichè gli angoli AFE, BFE sono retti, la linea FA prende la direzione di FB ed il punto A coincide con B; dunque la retta AF è uguale a BF, l'arco AD eguale a BD, e l'arco AE a BE.

Scolio. — Il centro di un cerchio, il punto medio di una corda e i punti medii dei due archi che essa sottende, sono sopra una medesima retta perpendicolare alla corda.

Corollario. — Il luogo dei punti medii delle corde parallele ad una retta data è il diametro perpendicolare a questa retta.

TEOREMA III.

Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, 1° gli archi eguali hanno corde eguali; 2° queste corde sono egualmente distanti dal centro; 3° gli angoli che hanno il loro vertice al centro e che intercettano questi archi sono eguali. (fig. 47.)

1°. Sieno AB, EF due archi eguali, presi sulle circonferenze eguali CA, GE. Poniamo il centro G sopra C e il punto E sopra A; poichè le due circonferenze coincidono e gli archi EF, AB sono eguali, il punto F cade sopra B. Dunque le corde EF, AB sono eguali.

2°. Le due corde EF, AB essendo sovrapposte, i loro mezzi H, D coincidono e la perpendicolare GH condotta dal centro G sopra EF, è uguale alla perpendicolare CD, condotta dal centro C sopra AB. Dunque le corde EF, AB sono egualmente distanti dal centro.

3°. Il raggio GE coincidendo con CA ed il raggio GF con CB, i due angoli EGF, ACB sono eguali.

TEOREMA IV.

Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, se due archi minori di una semicirconferenza sono disuguali, 1° il maggiore è sotteso dalla corda maggiore; 2° questa corda è la più vicina al centro; 3° l'angolo al centro che intercetta quest' arco è il maggiore. (fig. 48.)

Sieno la circonferenza CA eguale alla circonferenza OL e l'arco AB maggiore di LM. Prendiamo sopra AB un arco AD eguale ad LM; le corde AD, LM sono eguali.

1°. Dico che la corda AB è maggiore di AD; giacchè nei triangoli ACB, ACD l'angolo ACB è maggiore di ACD e i lati AC, CB sono eguali ai lati AC, CD. Dunque il lato AB, opposto all'angolo ACB, è maggiore di AD, opposto all'angolo ACD.

2°. Conduciamo CG perpendicolare ad AB e CK perpendicolare ad AD. Poichè il mezzo di AD ed il centro sono da differenti parti di AB, la retta CK incontra AB in un punto H, e si ha la perpendicolare CG minore dell'obliqua CH. Dunque, a più forte ragione, CG è minore di CHK.

3°. L'angolo ACB è evidentemente maggiore di ACD.

Scolio. — Le reciproche delle due proposizioni precedenti sono vere, considerando tuttavia i soli archi minori di una semicirconferenza; giacchè, per gli archi maggiori, le corde decrescono a misura che gli archi crescono.

TEOREMA V.

Per tre punti A, B, C, *non situati in linea retta, si può far passare una circonferenza, e non se ne può far passare che una sola. (fig. 49.)*

Tiriamo le rette AB. BC, e per i mezzi D, E di queste linee conduciamo DF perpendicolare ad AB, EG perpendicolare a BC. Le rette DF, EG debbono incontrarsi; giacchè se fossero parallele, le perpendicolari AB, BC condotte dal punto B a queste parallele dovrebbero coincidere, e i punti A, B, C sarebbero in linea retta, contro l'ipotesi.

Sia H il punto di concorso delle rette DF, EG. Questo punto appartenendo a ciascuna delle perpendicolari DF, EG, condotte dai mezzi di AB e BC, è ugualmente distante dai punti A, B, C; ed è il solo punto che goda di questa proprietà; poichè qualunque altro è esterno almeno a una delle rette DF, EG; per conseguenza si trova a distanze disuguali da A, B, C.

Dunque la circonferenza descritta dal punto H come centro col raggio AH, passa per i punti A, B, C, ed è la sola, perchè vi ha un sol punto egualmente distante dai punti A, B, C.

Corollario. — Due circonferenze che hanno tre punti comuni coincidono.

CAPITOLO II.

Tangente.

Quando una linea retta AD *(fig. 50.)* incontra una circonferenza in due punti, B, C, si dice che essa è *secante*. Se si fa girare attorno ad uno dei punti d'intersezione, B per esempio, sino a che l'altro coincida con B, la secante diviene *tangente* alla circonferenza. Da questa definizione risulta che la tangente ha un sol punto comune colla circonferenza.

TEOREMA I.

La tangente BD *alla circonferenza* CA *è perpendicolare al raggio* CA *del punto di contatto* A. *(fig. 51.)*

Infatti conduciamo dal punto A la secante AE, tiriamo dal centro la perpendicolare CF sopra AE, e facciamo girare la secante attorno al punto A, sino a che il punto E confondendosi con A, la retta AE coincida colla tangente BD. In tutte le posizioni di AE, la perpendicolare CF passa per il mezzo della corda AE; dunque essa prende la direzione del raggio CA, quando il punto E coincide con A, e la tangente BD è perpendicolare al raggio CA.

COROLLARIO. — Da un punto di una circonferenza si può condurre una sola tangente.

SCOLIO. — La tangente è parallela alle corde che sono divise per metà dal diametro che passa pel punto di contatto.

TEOREMA II.

Due linee rette parallele intercettano sulla circonferenza archi eguali. (fig. 52.)

1°. Se le due parallele sono le due secanti BC, DE, il diametro AH, perpendicolare a queste rette, divide in due parti eguali ciascuno degli archi BAC, DAE che sottendono, cioè si ha

$$AB = AC,$$

e $$AB + BD = AC + CE$$

dunque $$\text{arco } BD = \text{arco } CE.$$

2°. Se una delle parallele è la tangente FG e l'altra la secante BC, il raggio OA del punto di contatto della tangente è perpendicolare a questa retta e alla sua parallela BC. Dunque divide l'arco BAC in due parti eguali AB, AC.

3°. Quando le due parallele sono tangenti, sono perpendicolari allo stesso diametro AH, e l'arco ABH è uguale ad ACH.

CAPITOLO III.

Distanza di un punto da una circonferenza. Intersezione e contatto di due cerchi.

Chiamasi *normale* ad una curva la perpendicolare AC, condotta alla tangente AB dal punto di contatto A. *(fig. 53.)*

Se la curva è una circonferenza, la normale coincide con la direzione del raggio perpendicolare alla tangente; dunque essa passa pel centro. Per condurre una normale al cerchio per un punto A interno o esterno *(fig. 54.)*, si unisce questo punto col centro C per via di una retta; la quale prolungata incontra la circonferenza in due punti B, D, ed è perpendicolare alle tangenti condotte per questi punti: dunque AB, AD sono due normali le cui direzioni coincidono. Poichè le rette che uniscono il punto A agli altri punti E, F, ec. della circonferenza, non sono perpendicolari alle tangenti in questi punti, darò loro il nome di *oblique* e dirò che esse si allontanano egualmente o disugualmente da una normale, quando gli archi compresi tra questa normale e le estremità delle oblique saranno eguali o disuguali.

Due circonferenze sono *secanti* quando hanno due punti comuni; al contrario, sono tangenti in un punto quando in questo punto hanno una tangente comune. I centri delle circonferenze e il punto di contatto sono in linea retta.

TEOREMA I.

Se da un punto A *si conducono le due normali ed un'obliqua qualunque* AE *alla circonferenza* BC, *l'obli-*

qua è maggiore di una delle normali e minore dell' altra. (fig. 55.)

1°. Supponiamo in prima il punto A esterno al cerchio, ed uniamo il centro al punto E; nel triangolo AEC si ha, AE + EC maggiore di AB + BC, e quindi l' obliqua AE maggiore della normale AB, poichè CE è uguale a CB.

Si ha pure che AE è minore di AC + CE ovvero di AC + CD; dunque l' obliqua AE è minore della normale AD.

2°. Se il punto A è interno al centro, si ha EC, ovvero AB + AC minore di AE + AC: dunque AB è minore di AE.

Similmente AC + CE ovvero AD è maggiore di AE.

SCOLIO. — La normale AB è la più corta distanza, e la normale AD la maggior distanza del punto A alla circonferenza.

TEOREMA II.

Se da un punto A si conducono le normali e differenti oblique ad una circonferenza:

1°. *Due oblique egualmente lontane da una normale sono eguali;*

2°. *Di due oblique disugualmente lontane dalla normale minima, la maggiore è la più distante. (fig. 56.)*

1°. Sia AB la normale minima condotta dal punto A alla circonferenza BC; prendiamo, a cominciare da B, due archi eguali BE, BF, e congiungiamo le loro estremità E, F col punto A: le due oblique AE, AF sono eguali. Infatti, i due triangoli AEC, AFC sono eguali perchè hanno l' angolo ACE = ACF, come angoli al centro che intercettano sulla circonferenza archi eguali BE, BF, i lati CE, CF uguali come raggi, AC di comune. Dunque AE è uguale ad AF.

2° Se l'arco BG è maggiore di BF, l'obliqua AG è maggiore di AF; giacchè i due triangoli CAG, CAF hanno l'angolo ACG $>$ ACF, CG $=$ CF, CA di comune; dunque il lato AG, opposto all'angolo ACG, è maggiore di AF, opposto all'angolo ACF.

Scolio. — Per un punto si possono condurre ad una circonferenza due sole oblique eguali.

TEOREMA III.

Due circonferenze sono esterne l'una all'altra, quando la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi. (fig. 57.)

Sieno A il centro ed AB il raggio di uno dei cerchi; prendiamo sul prolungamento di AB la retta BC eguale alla differenza fra la distanza dei centri e la somma dei raggi, e la linea CD eguale al raggio del secondo cerchio; il punto D sarà il centro di questo cerchio. Ma DC è minore della normale minima DB, condotta da D alla circonferenza AB; dunque la circonferenza CD ha tutti i suoi punti esterni alla circonferenza AB.

TEOREMA IV.

Due circonferenze sono tangenti esteriormente, se la distanza dei loro centri è uguale alla somma dei loro raggi. (fig. 58.)

Sieno A il centro ed AB il raggio di uno dei cerchi; prendiamo, sul prolungamento di AB, la retta BC eguale al raggio dell'altro cerchio, che avrà per centro il punto C. Ma CB è uguale alla normale minima, condotta da C alla circonferenza AB; dunque la circonferenza CB ha il punto B comune con la circonferenza AB, e tutti gli altri suoi punti esterni al cerchio AB.

La perpendicolare BD, condotta dal punto B sulla retta AC è tangente ai due cerchi; dunque le circonferenze sono tangenti esteriormente.

TEOREMA V.

Due circonferenze sono secanti, quando la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. (fig. 59.)

Sieno A il centro ed AB il raggio della circonferenza minore. Prendiamo a cominciare da A sopra AB, una retta AC uguale alla distanza dei centri, e supponiamo il punto C esterno al cerchio AB. Il raggio del secondo cerchio è maggiore della normale minima CB e minore della normale massima CD, condotte da C alla circonferenza AB; poichè la distanza AC dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. Dunque la circonferenza C ha due punti E, F comuni con la circonferenza AB, e uno dei due archi di cui questi punti sono le estremità è interno alla circonferenza AB, mentre l'altro è esterno.

Similmente si proverebbe che le due circonferenze si tagliano, supponendo il punto C interno alla circonferenza AB o sopra questa linea.

Corollario. — La retta AC, che passa pei centri, è perpendicolare sul mezzo della retta EF che unisce i due punti d'intersezione; giacchè ciascuno dei due centri è egualmente distante dai due punti E, F.

TEOREMA VI.

Due circonferenze sono tangenti internamente, quando la distanza dei loro centri è uguale alla differenza dei loro raggi. (fig. 60.)

Sieno A il centro ed AB il raggio del maggiore dei due cerchi; prendiamo BC eguale al raggio dell'altro cerchio, che avrà il suo centro nel punto C. Ma il raggio CB è uguale alla normale minima condotta da C alla circonferenza AB; dunque il punto B è comune alle due circonferenze e gli altri punti della circonferenza CB sono interni al cerchio AB.

La perpendicolare BD, inalzata da B sopra AB, è tangente ai due cerchi; dunque le due circonferenze sono tangenti internamente.

TEOREMA VII.

Due circonferenze sono interne l' una all' altra quando la distanza dei loro centri è minore della differenza dei loro raggi. (fig. 61.)

Sieno A il centro ed AB il raggio del maggiore dei due cerchi; poichè la somma della distanza dei centri e del raggio del cerchio più piccolo è minore, per ipotesi, del raggio AB, se prendiamo sopra AB la retta AC uguale alla distanza dei centri e CD eguale al raggio del secondo cerchio, il punto D si trova dentro il cerchio AB. Ma il raggio CD è minore della normale minima CB, condotta da C alla circonferenza AB, dunque la circonferenza CD è interna alla circonferenza AB.

SCOLIO. — Le reciproche dei cinque teoremi che precedono sono evidenti.

CAPITOLO IV.

Misura degli Angoli.

TEOREMA I.

Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, il rapporto di due archi AB, A'B' *è uguale a quello dei due angoli al centro* ACB, A'C'B' *che intercettano questi archi. (fig. 62.)*

Supponiamo primieramente gli archi AB A'B' commensurabili. Troveremo la loro massima comune misura AD col metodo che abbiamo dato per due linee rette; se l'arco AD è contenuto tre volte in AB e cinque volte in A'B', il rapporto $\frac{AB}{A'B'}$ sarà eguale a $\frac{3}{5}$. Dividiamo l'arco AB in tre parti eguali ad AD e l'arco A'B' in cinque parti eguali pure ad AD, e uniamo i punti di divisione di AB al centro C e quelli di A'B' al centro C'. Poichè gli archi AD, DE, ec., A'D', D'E', ec., sono eguali, saranno eguali anche gli angoli al centro ACD, DCE, ec., A'C'D', D'C'E', ec.; dunque l'angolo ACD è contenuto tre volte in ACB e cinque volte in A'C'B', e si ha

$$\frac{ACB}{A'C'B'}=\frac{3}{5}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Se gli archi AB, A'B' non hanno comune misura, *(fig. 63.)* dividiamo l'arco A'B' in un numero qualunque di parti eguali, dieci per esempio, e sia A'D' una di queste parti; l'arco AB sarà compreso tra due multipli consecutivi di $A'D'$ come, per esempio, $6\,A'D'$ e $7\,A'D'$; dunque il rapporto $\frac{AB}{A'B'}$ è maggiore di $\frac{6}{10}$ e minore di $\frac{7}{10}$. Uniamo i punti di divisione dell'arco $A'B'$ al centro C' e quelli di AB al centro C. L'angolo $A'C'D'$ è contenuto dieci volte esattamente nell'angolo $A'C'B'$ e l'angolo ACB è maggiore di $6\,A'C'D'$, ma minore di $7\,A'C'D'$; dunque il rapporto $\frac{ACB}{A'C'B'}$ è compreso tra i numeri $\frac{6}{10}$ e $\frac{7}{10}$, e i due rapporti $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{ACB}{A'C'B'}$ contengono lo stesso numero di decimi. Similmente si proverebbe che essi contengono lo stesso numero di unità di un ordine qualunque; dunque questi rapporti sono eguali.

SCOLIO I. — Parimente si dimostra che *il rapporto dei due archi* AB, A'B' *è uguale a quello dei settori* ACB, A'C'B'.

SCOLIO II. — Il rapporto di due archi non è eguale a quello delle loro corde. Infatti *(fig. 64.)* consideriamo due archi AB, AC, di cui il primo sia il doppio del secondo; la corda AB è minore della linea spezzata $AC + CB$, che è il doppio della corda AC.

TEOREMA II.

L'angolo al centro ha la stessa misura dell'arco che intercetta sulla circonferenza. (fig. 65, 66.)

Osserviamo primieramente che se pel centro di una circonferenza si tirano due diametri perpendicolari l'uno all'altro, gli angoli al centro sono eguali come pure i quattro archi che essi intercettano; talchè un angolo retto il cui vertice è al centro di una circonferenza intercetta un arco eguale al quarto della circonferenza.

Misurare un angolo ACB, significa cercare quante unità d'angolo e parti di questa unità contiene; per unità d'angolo prenderemo l'angolo retto ACD. Per agevolare il paragone fra questi due angoli, descriviamo una circonferenza dal vertice C come centro con un raggio qualunque. Poichè il rapporto degli angoli al centro eguaglia quello degli archi intercetti, si ha

$$\frac{ACB}{ACD} = \frac{AB}{AD}.$$

Il rapporto $\frac{ACB}{ACD}$ è il numero astratto che esprime la misura dell'angolo ACB, laonde *se si conviene* di prendere per unità d'arco il quarto della circonferenza, cioè AD, il rapporto $\frac{AB}{AD}$ sarà anche il numero astratto che esprime la misura dell'arco AB; e l'angolo al centro ACB avrà la stessa misura dell'arco AB che intercetta.

Scolio.—Per esprimere più semplicemente gli archi in numeri, l'unità d'arco è stata divisa in 90 parti eguali chiamate gradi, talchè tutta la circonferenza ne contiene quattro volte 90, cioè 360.

Ciascun grado è stato diviso in 60 minuti; ciascun minuto in 60 secondi, dunque l'unità d'arco contiene 5400 minuti, o 324000 secondi.

Un arco di $7^\circ\ 15'$ è uguale ai $\frac{7}{90}$ dell'unità d'arco, aumentati dei $\frac{15}{5400}$ di questa unità, cioè è uguale ai $\frac{435}{5400}$ del quarto della circonferenza; quindi l'angolo al centro che intercetta quest'arco è uguale ai $\frac{435}{5400}$ di un angolo retto.

Quando un angolo è descritto sul piano di una circonferenza e che i suoi lati sono rette secanti o tangenti, per misurarli non è necessario descrivere una circonferenza dal suo vertice come centro, e si può fare uso della prima circonferenza, come ci proponiamo mostrare nelle seguenti proposizioni.

Il vertice dell'angolo può trovarsi sulla circonferenza, nell'interno o nell'esterno.

TEOREMA III.

Qualunque angolo ABD *formato da una tangente* BD *ed una corda* BA, *ha per misura la metà dell'arco* BFA *compreso tra i suoi lati. (fig. 67.)*

Uniamo il centro C al punto di contatto B e tiriamo il diametro FG perpendicolare alla corda AB. L'angolo ABD è uguale a BCF, perchè hanno lo stesso complemento CBH. Ma l'angolo al centro BCF ha per misura l'arco BF, metà dell'arco AB; dunque l'angolo ABD è misurato dalla metà dell'arco AB compreso tra i suoi lati.

L'angolo ABE che è uguale a BCG, perchè hanno supplementi eguali, ha anche per misura la metà dell'arco BGA compreso tra i suoi lati.

TEOREMA IV.

Qualunque angolo ABC *iscritto in un cerchio, ha per misura la metà dell'arco* AC *compreso tra i suoi lati. (fig. 68.)*

Conduciamo dal vertice dell'angolo ABC la tangente BD; quest'angolo è uguale alla differenza degli angoli ABD, CBD formati ciascuno da una tangente e da una corda. Ma l'angolo ABD è misurato dalla metà di

ACB, e l'angolo CBD dalla metà di CB; dunque l'angolo ABC ha per misura la metà di ACB — CB, cioè la metà dell'arco AC, compreso tra i suoi lati.

Corollario. — Similmente si dimostrerebbe che l'angolo CBE, formato da una corda BC e dal prolungamento BE di un'altra corda AB, ha per misura la metà della somma degli archi BC, AB, compresi tra i suoi lati e tra i loro prolungamenti.

Scolio. — Se uniamo per mezzo di rette i differenti punti di un arco alle sue estremità *(fig. 69)*, gli angoli ACB, ADB, ec., *iscritti* (1) in quest'arco, sono tutti eguali, perchè essi hanno per misura la metà dello stesso arco AB compreso tra i loro lati. Si dice che l'arco è capace dell'angolo iscritto.

Se l'arco dato è una semicirconferenza, gli angoli iscritti sono retti. Al contrario sono acuti o ottusi secondochè l'arco nel quale sono iscritti è maggiore o minore di una semicirconferenza.

TEOREMA V.

Qualunque angolo ABC *formato da due secanti che s' incontrano dentro il cerchio, ha per misura la metà della somma degli archi* AC, DE *compresi tra i suoi lati e i loro prolungamenti. (fig. 70.)*

Tiriamo la corda CD; l'angolo ABC, esterno al triangolo CBD, è uguale alla somma dei due angoli interni ADC, BCD che hanno rispettivamente per misura la metà degli archi AC e DE. Dunque l'angolo ABC è misurato dalla metà di AC + DE.

(1) Un angolo si dice *iscritto* in un cerchio, quando ha il suo vertice sulla circonferenza; e *circoscritto* ad un cerchio quando ha i suoi lati tangenti alla circonferenza.

Se si fa muovere un angolo invariabile in modo che i suoi lati passino costantemente per due punti fissi, il vertice di quest'angolo descrive una circonferenza che passa per questi due punti. (T.)

TEOREMA VI.

Qualunque angolo ABC, *formato da due secanti che s' incontrano fuori del cerchio, ha per misura la metà della differenza degli archi* AC, DE, *compresi tra i suoi lati. (fig. 71.)*

Conduciamo la corda DC; nel triangolo DBC, l'angolo interno ABC è uguale alla differenza dei due angoli iscritti ADC, DCB che sono rispettivamente misurati dalle metà degli archi AC, DE. Dunque l'angolo ABC ha per misura la metà di AC — DE.

Scolio. — Similmente si dimostrerebbe che l'angolo formato da una tangente e da una secante o da due tangenti ha per misura la semisomma degli archi compresi tra i lati.

CAPITOLO V.

Problemi sulle Perpendicolari, le Parallele, gli Angoli e gli Archi.

Problema I. — *Condurre, pel punto* A, *una perpendicolare alla linea* BC. *(fig. 72 e 73.)*

Dal punto A come centro, descrivete un arco di cerchio che incontra la retta BC. Dai due punti d' intersezione B e C, come centri, collo stesso raggio, maggiore della metà di BC, descrivete due archi che si taglino in D e tirate la retta AD; AD è la perpendicolare richiesta.

Infatti, ciascuno dei punti A e D è ugualmente distante dall' estremità B e C della retta BC.

Problema II. — *Condurre pel punto* A, *una parallela alla retta* BC. *(fig. 74.)*

Da un punto qualunque C della retta BC come centro, descrivete, col raggio CA, l'arco AB tra il punto A e la linea BC. Descrivete, collo stesso raggio e dal punto A come centro, l'arco indefinito CE; prendete su quest' arco una lunghezza CD uguale ad AB e tirate la retta AD, ch'è la parallela richiesta.

Infatti il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, poichè i lati opposti sono eguali.

Problema III. — *Nel punto* E *della retta* ED, *fare un angolo eguale all' angolo* BAC. *(fig. 75.)*

Dai punti A ed E, come centri, descrivete collo stesso raggio due archi BC, DG; prendete sopra DG una parte DF uguale all' arco BC compreso tra i lati dell'angolo BAC e tirate la retta EF; l'angolo DEF è uguale a BAC.

Infatti i due triangoli ABC, DEF hanno i tre lati rispettivamente uguali.

Problema IV. — *Dividere in due parti eguali una linea retta, un arco o un angolo. (fig. 76.)*

1° Per dividere la retta AB in due parti uguali, descrivete, dai punti A e B come centri, collo stesso raggio, maggiore della metà di AB, due archi che s' incontrano ai due punti C, D, e conducete la retta CD che divide AB in due parti eguali nel punto E.

Infatti, ciascuno dei punti C, D essendo egualmente distante dall' estremità di AB, la retta CD è perpendicolare sul mezzo di AB.

2° Debbasi dividere l' arco BC in due parti eguali. *(fig. 77.)*

Conducete la corda BC e dividetela in due parti eguali per mezzo della perpendicolare DE, che dividerà anche l'arco BC in due archi uguali BG, CG.

3° Per dividere l'angolo BAC in due parti eguali *(fig. 78)*, descrivete, dal vertice A come centro, con un raggio qualunque, l'arco BC tra i lati dell'angolo, e conducete, pel punto A, la perperdicolare AD alla corda BC. Questa linea divide l'arco BC e l'angolo BAC in due parti eguali.

Scolio. Applicando questo metodo alla metà, al quarto, all'ottavo, ec., di una retta, di un arco o di un angolo, si divide la retta, l'arco o l'angolo in 4, 8, 16, ec., parti eguali.

CAPITOLO VI.

Costruzione dei Triangoli e dei Parallelogrammi.

Problema I. — *Dati due angoli* A e B *di un triangolo, trovare il terzo. (fig. 79.)*

Fate nel punto C di una retta qualunque, l'angolo DCE eguale ad A, ed al punto D della stessa linea l'angolo CDE eguale a B; il terzo angolo E del triangolo CDE è l'angolo richiesto.

Problema II. — *Dati due lati* a e b *d'un triangolo, e l'angolo* C *che essi formano, descrivere il triangolo. (fig. 80.)*

Al punto D della retta indefinita DE, fate l'angolo EDF eguale a C; prendete il lato DE eguale ad *a*, DF eguale a *b*, e conducete la retta EF. La figura EDF è il triangolo richiesto.

Problema III. — *Dati un lato e due angoli di un triangolo, descrivere il triangolo. (fig. 81.)*

Se i due angoli dati A e B sono adiacenti al lato dato *c*, prendete, sopra una retta indefinita, una lunghezza DE eguale a *c;* fate al punto D l'angolo EDF eguale ad A ed al punto E l'angolo DEF eguale a B. La figura EDF è il triangolo richiesto.

Se i due angoli dati non sono adiacenti al lato C, si determinerà il terzo angolo del triangolo e il problema sarà ridotto al precedente.

Scolio. — Il problema può essere risoluto allora soltanto quando la somma dei due angoli A e B è minore di due retti.

Problema IV. — *Dati tre lati* A, B, C *di un triangolo, descrivere il triangolo. (fig. 82).*

Sopra una retta indefinita, prendete DE uguale ad A; dal punto D come centro, con un raggio eguale a B, descrivete un arco; dal punto E come centro, con un raggio eguale a C, descrivete un altr' arco sino all' incontro del primo ed unite il punto d'intersezione F ai punti D, E. La figura EDF è il triangolo richiesto.

Scolio. — Affinchè il triangolo possa costruirsi è necessario che gli archi s'incontrino; dunque la distanza dei loro centri, cioè il lato A, dev' esser minore della somma dei due raggi B, C e maggiore della loro differenza.

Problema V. — *Dati due lati* a, b *di un triangolo e l'angolo* A *opposto al lato* a, *descrivere il triangolo.*

Il lato a può essere maggiore, uguale o minore di b.

1°. *(fig. 83)* Se si ha $a > b$, fate l'angolo GDF uguale ad A; sopra DG prendete DE uguale a b e descrivete dal punto E come centro, col raggio a, un arco che incontri DF in due punti F, H, i quali, per essere ED minore del raggio a, sono situati da differenti parti del punto D. Il primo dei due triangoli DEF, DEH sodisfa solo a tutte le condizioni del problema.

2°. *(fig. 84)* Se il lato a è uguale a b, il triangolo può costruirsi solamente quando l'angolo A è acuto. In questa ipotesi, l'arco di cerchio descritto dal punto E come centro col raggio a, passa per D, e si ha DEF pel triangolo richiesto.

3°. *(fig. 85.)* Se $a < b$, è necessario ancora che l'angolo A sia acuto, e allora l'arco descritto dal punto E come centro, col raggio a, incontra DF in due punti F, H, i quali, per essere ED maggiore del raggio a, sono situati da una stessa parte del punto D. Ciascuno dei due triangoli DEF, DEH sodisfa alla quistione.

Se il lato a è uguale alla perpendicolare EK, abbassata dal punto E sopra DF, l'arco HF diventa tangente a DF, e il triangolo rettangolo DEK soddisfa alla quistione.

Il problema non ammette soluzione se il lato a è minore di EK.

PROBLEMA VI. — *Dati due lati adiacenti* A *e* B *di un parallelogrammo e l'angolo* C *da essi formato, descrivere il parallelogrammo. (fig. 86.)*

Fate l'angolo EDF eguale a C, prendete DE eguale ad A e DF eguale a B. Dal punto E come centro, col raggio B, descrivete un arco; dal punto F come centro, col raggio A, descrivete un altr' arco che incontra il primo in G; conducete le rette EG, FG. Il quadrilatero DEGF è il parallelogrammo richiesto.

CAPITOLO VII.

Problemi sul cerchio.

PROBLEMA I. — *Trovare il centro di un cerchio (fig. 87.)*

Prendete tre punti A, B, C sulla circonferenza; conducete le corde AB, BC e dividete queste rette in due parti eguali per mezzo delle perpendicolari DE, DF che s'incontrano nel centro del cerchio.

Scolio. — Questa costruzione fa conoscere il centro della circonferenza che passa per i vertici di un triangolo.

Problema II. — *Far passare per due punti A e B una circonferenza tale che uno dei due archi, aventi la retta AB per corda, sia capace di un angolo dato. (fig. 88.)*

Fate al punto B l'angolo ABE uguale all'angolo dato; dividete in due parti eguali la retta AB per via della perpendicolare DC e conducete pel punto B la perpendicolare BD a BE. Le due rette CD, BD s'incontrano nel punto D. La circonferenza descritta da questo punto come centro col raggio DB, è quella che cercavasi.

Infatti 1° essa passa pei due punti A e B, perchè DA è uguale a DB.

2°. Gli angoli iscritti nell'arco AMB hanno per misura la metà dell'arco AB e sono uguali all'angolo dato ABE, di cui il lato BE è tangente al cerchio BD.

Pboblema III. — *Condurre pel punto A una tangente al cerchio* CB.

1°. *(fig.89.)* Se il punto A è sulla circonferenza, tirate il raggio CA. La perpendicolare AD condotta dal punto A sopra CA è tangente al cerchio.

2°. *(fig. 90.)* Se il punto A è fuori del cerchio, tirate la retta CA e dal mezzo di questa retta come centro, con un raggio uguale alla metà di CA, descrivete una circonferenza che incontra la circonferenza BC in due punti B e D. Le rette AB, AD, che uniscono questi punti con A, sono tangenti al cerchio BC.

Infatti, ciascuno degli angoli ABC, ADC è retto, perchè iscritto in una semicirconferenza; quindi AB è perpendicolare all'estremità del raggio BC e AD all'estremità del raggio CD.

Corollario. — I due triangoli rettangoli ACB, ACD sono eguali perchè hanno l'ipotenusa comune AC e i due lati CB, CD eguali; dunque AB è uguale ad AD e l'angolo BAC all'angolo DAC. Lo che dà il seguente teorema:

Le tangenti condotte da uno stesso punto ad un cerchio sono eguali, e la retta che unisce questo punto al centro divide in due parti eguali l'angolo delle tangenti.

Problema IV. — *Descrivere un cerchio tangente ai tre lati del triangolo* ABC *(fig. 91).*

1°. Conducete le bisettrici degli angoli BAC, ABC; queste rette s'incontrano in un punto D che dista egualmente dai tre lati del triangolo. Abbassate DH perpendicolare sopra AB, e descrivete, dal punto D come centro col raggio DH, una circonferenza che sarà tangente ai tre lati del triangolo.

2°. Tirate le bisettrici degli angoli esterni BCM, CBL; queste rette s'incontrano, perchè la somma degli angoli interni BCE, CBE è minore di due retti, ed il loro punto di concorso E dista egualmente dalle tre rette AB, BC. AC. Dunque, il cerchio descritto dal punto E come centro col raggio EK, perpendicolare ad AB, è tangente al lato BC e ai prolungamenti BL, CM degli altri due lati.

In modo affatto simile si proverebbe che si possono descrivere due altri cerchi tangenti esternamente ai lati AB, AC. Dunque il problema ha quattro soluzioni.

Corollario. — Il punto di concorso delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo è il centro del cerchio *iscritto*. Il punto di concorso delle bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e di quella dell'angolo interno che ad essi non è adiacente, è il centro di uno dei tre cerchi *ex-iscritti*.

CAPITOLO VIII.

Poligoni iscritti e circoscritti

Un poligono è *iscritto* in un cerchio quando i suoi vertici sono situati sulla circonferenza. Reciprocamente, il cerchio è *circoscritto* al poligono.

Al contrario, un poligono è *circoscritto* ad un cerchio quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Reciprocamente il cerchio è *iscritto* nel poligono.

TEOREMA I.

In qualunque quadrilatero iscritto gli angoli opposti sono supplementari. Reciprocamente, se gli angoli opposti di un quadrilatero sono supplementari, questo poligono è iscrittibile. (fig. 92.)

Sia ABCD un quadrilatero iscritto; l'angolo ABC è misurato dalla metà dell'arco ADC, e l'angolo opposto ADC dalla metà dell'arco ABC; dunque la loro somma ha per misura $\frac{1}{2}$ (arco ADC + arco ABC), cioè la semicirconferenza, e gli angoli sono supplementari.

Reciprocamente, supponiamo gli angoli ABC, ADC del quadrilatero ABCD supplementari, e facciamo passare una circonferenza pei tre vertici A, B, C. L'angolo iscritto ABC ha per misura la metà dell'arco AEC, ed il suo supplemento ADC ha per misura la metà dell'arco ABC; dunque il vertice D si trova sull'arco AEC ed il quadrilatero è iscrivibile.

TEOREMA II.

In qualunque quadrilatero convesso e circoscritto ad un cerchio, la somma di due lati opposti è uguale a quella degli altri due.

Reciprocamente, *un quadrilatero convesso è circoscrivibile quando le somme dei lati opposti sono eguali.*

Poichè *(fig. 93)* il quadrilatero ABCD è circoscritto al cerchio EFGH, si ha

$$\begin{aligned} AE &= AH \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \end{aligned}$$

dunque

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH$$

o

$$AB + CD = AD + BC.$$

Reciprocamente il quadrilatero ABCD è circoscrivibile se abbiamo

$$AB + CD = AD + BC$$

Infatti *(fig. 94)*, se il cerchio che è tangente alle rette AD, AB, BC non lo fosse al lato DC, condurremmo per il punto D la retta DE tangente a questo cerchio; il quadrilatero ABED essendo circoscritto, ne risulterebbe

$$AB + DE = AD + BC + CE$$

e

$$DC + CE > DE.$$

Si avrebbe dunque

$$AB + DC + CE + DE > AD + BC + CE + DE$$
$$AB + DC > AD + BC,$$

lo che è contrario all'ipotesi. Dunque il quadrilatero ABCD è circoscrittibile.

TEOREMA III.

Qualunque poligono regolare è iscrittibile e circoscrittibile (fig. 95.)

Siano AP la bisettrice dell'angolo BAF e BQ quella dell'angolo ABC; poichè la somma degli angoli BAP, ABQ è minore di due retti, le linee AP, BQ concorrono in un punto O, che dico egualmente distante da tutti i vertici del poligono.

Infatti il triangolo OAB è isoscele, perchè gli angoli ABO, BAO sono eguali; quindi il lato AO è uguale a BO. Unisco il vertice C al punto O ed osservo che i triangoli ABO, CBO hanno un angolo eguale compreso tra due lati eguali; dunque essi sono eguali e il lato CO è uguale ad AO.

In modo analogo dimostrerei che le rette DO, ec., sono eguali ad AO. Laonde la circonferenza, descritta dal punto O come centro e col raggio AO, passa per tutti i vertici del poligono.

I lati AB, BC, CD, ec., sono corde eguali del cerchio circoscritto, quindi le perpendicolari OG, OH, ec., condotte dal centro di questo cerchio alle corde sono eguali; e la circonferenza descritta dal punto O come centro col raggio OG, è tangente ai lati del poligono.

Scolio. — Al punto O si è dato il nome di *centro* del poligono regolare; alle rette OA, OB, ec., quello di *raggi* del poligono; alle linee OG, OH, ec., quello d' *apotemi*.

Si chiama *angolo al centro* di un poligono regolare l'angolo di due raggi consecutivi OA, OB. Gli angoli al centro sono eguali e ciascuno di essi pareggia il quoziente della divisione di quattro retti pel numero dei lati del poligono.

Corollario. — Le bisettrici degli angoli di un poligono regolare e le perpendicolari inalzate sul punto medio dei lati, concorrono tutte in uno stesso punto.

TEOREMA IV.

Se una circonferenza è divisa in parti eguali AB, BC, CD, ec.,

1°. *Il poligono iscritto formato dalle corde* AB, BC CD, ec. *è regolare;*

2°. *Il poligono circoscritto* EFGH..... *formato dalle tangenti condotte da ciascun punto di divisione, è regolare (fig. 96.)*

1°. Poichè gli archi AB, BC, CD sono eguali, le loro corde sono pure eguali. L' angolo ABC ha per misura la semisomma degli archi AD e DC, e l' angolo BCD la semisomma degli archi AD ed AB; dunque questi angoli sono eguali. Lo stesso vale per gli altri angoli del poligono ABCD.....; laonde questo poligono è regolare.

2°. I triangoli isosceli ABE, BCF, CDG, ec., hanno una base eguale, adiacente a due angoli rispettivamente eguali; dunque sono eguali. Dal che segue: 1°, che gli angoli E, F, G ec. sono eguali; 2°, che

$$AE = BE = BF = CF = CG, \text{ ec.}$$

Laonde i lati EF, FG, ec. sono eguali, e il poligono circoscritto è regolare.

Scolio. — Se dividiamo ciascuno degli archi AB, BC, CD, ec. in due parti eguali, e che s'iscriva il poligono regolare di $2n$ lati, il perimetro e la superficie di questo poligono sono rispettivamente maggiori del perimetro e della superficie di quello di n lati. Vale il contrario pel poligono regolare circoscritto di $2n$ lati.

TEOREMA V.

Una circonferenza essendo divisa in n *parti eguali nei punti* A, B, C, D ec., *se uniamo questi punti, a cominciare da uno di essi,* A *per esempio, di* 2 *in* 2, *di* 3 *in* 3, *e in generale di* h *in* h, *si forma un poligono regolare di* n *lati, quando i numeri* n *ed* h *sono primi tra loro.* (*fig. 97.*)

Sia l'arco AD $=$ AB $\times h$; si ha per ipotesi circonferenza AO $=$ AB $\times n$. Poichè i numeri n ed h sono supposti primi tra loro, il minimo multiplo comune dell'arco AD e della circonferenza AO è AB $\times n \times h$; ma il prodotto AB $\times n \times h$ è uguale all'arco AD $\times n$ o alla circonferenza AO $\times h$. Dunque il poligono, formato dall'unire i punti di divisione della circonferenza di h in h, ha n lati, e il suo perimetro sottende h volte la circonferenza.

Corollario. — Se i numeri n ed h avessero un divisore comune d, si mostrerebbe con un ragionamento analogo, che il poligono formato dall'unire i punti di h in h ha solamente $\frac{n}{d}$ lati, e che il suo perimetro sottende $\frac{h}{d}$ volte la circonferenza.

SCOLIO. — Si dice che questi poligoni regolari concavi sono *stellati* [1].

TEOREMA VI.

Vi ha tanti poligoni regolari di n *lati quante unità vi sono nella metà del numero che esprime quanti numeri interi vi sono inferiori a* n *e primi con esso (fig. 98.)*

Siano 1, a, b, c, $n-c$, $n-b$, $n-a$, $n-1$ i numeri interi, minori di n e primi con esso. Dividiamo una circonferenza in n parti eguali, ed uniamo i punti di divisione di 1 in 1, di a in a, di b in b, ec. Ciascuno dei numeri 1, a, b, ec., essendo primo con n, passeremo per tutti i punti di divisione prima di ritornare al punto di partenza, in guisa che formeremo tanti poligoni regolari di n lati quanti numeri interi vi sono inferiori a n e primi con esso.

Questi poligoni sono eguali due a due; giacchè gli

(1) Intendendo col sig. Poinsot per poligono convesso quello che non ha angoli maggiori di due retti, anche i poligoni stellati di cui parla l'autore sono convessi.

Per formarsi un giusto concetto della teoria dei poligoni stellati, giova sapere che il sig. Poinsot distingue nei poligoni l'*ordine* e la *specie*. Due poligoni si dicono dello stesso ordine quando hanno un egual numero di lati e della stessa specie quando la somma degli angoli è eguale in entrambi. Siccome al variare di quest'ultima somma, in ciascun ordine, varia pure il numero di volte che il perimetro fa il giro della circonferenza, potremo indicare la specie con questo numero. Così un poligono di n lati lo diremo della prima specie quando il suo perimetro fa una volta sola il giro dello spazio angolare; della seconda specie quando fa due volte questo giro, ec.

La reciproca del teorema V è vera; cioè *se unendo di* h *in* h, n *punti* A, B, C, D, ec., *si passa per tutti questi punti prima di ritornare al punto di partenza, il numero* h *sarà necessariamente primo con* n. Laonde, se, unendo in tal guisa più punti a intervalli qualunque eguali, non si può mai ritornare al primo senza passare per tutti gli altri, potremo affermare che il numero di tutti questi punti è primo assolutamente, lo che, secondo una giudiziosa osservazione del signor Poinsot, costituisce una specie di definizione geometrica del numero primo. (T) archi AB $\times a$, AB $\times (n - a)$ come ABD, AED, la cui somma è uguale alla circonferenza, hanno corde uguali, e se si uniscono i punti di divisione di a in a, si forma lo stesso poligono che unendoli di $n - a$ in $n - a$, ma percorrendo la circonferenza in senso contrario.

Corollario. — Vi sono 2 pentagoni regolari, 3 ettagoni, 2 decagoni, ec.

TEOREMA VII.

La somma degli angoli interni, formati dai lati successivi di un poligono regolare di n *lati, è uguale a tante volte 2 angoli retti quante unità vi sono in* (n — 2 h), h *essendo l' intervallo costante pel quale si passa per andare da un vertice al seguente. (fig. 99.)*

Siano AD un lato e ADE un angolo del poligono regolare di n lati che si forma unendo di h in h i punti di divisione della circonferenza AO divsa in n parti eguali. L' arco AE compreso tra i lati dell' angolo ADE è uguale ad AB $\times (n - 2h)$, e la somma degli n angoli eguali del poligono ha per misura $\frac{n \times \text{AB} \times (n - 2h)}{2}$ ovvero $\frac{1}{2}$ circonferenza AO $\times (n - 2h)$. Dunque questa somma è uguale a tante volte 2 retti quante unità sono in $n - 2h$.

Corollario. — *La somma degli angoli esterni formati da ciascun lato e dal prolungamento del lato precedente è uguale a* 4 h *retti.*

Infatti, la somma degli angoli adiacenti, tanto esterni quanto interni, è uguale a 2R $\times n$. Diminuendo questa somma di quella degli angoli interni, espressa da $(n - 2h)$ 2 R, si ha 4 h R per la somma degli angoli esterni.

Scolio. — Se supponiamo $h = 1$, si ritrovano i teoremi relativi a un poligono convesso. — (Vedi le applicazioni della teoria dei poligoni stellati nelle memorie del sig. Poinsot.) ([1]).

([1]) Risolviamo n in fattori primi e sia $n = a^p\, b^q\, c^r \ldots$; il numero degli interi primi con n e minori di n è

$$a^{p-1}\, b^{q-1}\, c^{r-1} \ldots\ldots (a-1)\,(b-1)\,(c-1) \ldots .$$

Se quindi indichiamo con N il numero che esprime le specie di poligoni convessi di n lati, avremo

$$2N = a^{p-1}\, b^{q-1}\, c^{n-1} \ldots\ldots (a-1)\,(b-1)\,(c-1) \ldots .$$

Se n è un numero primo si ha

$$N = \frac{n-1}{2}.$$

Da queste due formole si deducono varie conseguenze: 1°. Vi è una sola specie di triangolo, di quadrilatero, di esagono. 2°. Vi sono due specie di pentagoni, tre di ettagoni, due di ottagoni, ec. Le due specie di pentagoni si formano unendo i punti di 1 in 1 e di 2 in 2; la prima specie è il pentagono ordinario, la seconda (*fig.* 100) è uguale a quella del triangolo, poichè ha per somma dei suoi angoli interni due retti. Le tre specie di ettagoni si formano unendo i punti di 1 in 1, di 2 in 2, e di 3 in 3; la prima specie è l'ettagono ordinario; la seconda (*fig* 101) è uguale a quella del pentagono ordinario, poichè la somma dei suoi angoli è sei retti; la terza (*fig* 102) è uguale a quella del triangolo. Le due specie di ottagoni appartengono l'una alla prima, che costituisce l'ottagono ordinario, l'altra alla terza (*fig.* 103), formata unendo i punti di 3 in 3, e ch'è uguale a quella del quadrilatero, ec. 3°. Vi ha sempre un poligono di un numero qualunque dispari di lati della stessa specie del triangolo. Infatti è chiaro che per $n = 2h + 1$ la somma degli angoli del poligono è uguale a 2 retti. 4°. Se si ha $n = 2(h+1)$, la somma degli angoli del poligono è 4 retti come nel quadrilatero. Avverto che h dev'essere un numero dispari, affinchè sia primo con n. 5°. Se si ha $n = 2(h+2)$, la somma degli angoli del poligono è 8 retti come per l'esagono. Anche qui h dev'essere un numero dispari.

Quindi, in ciascun ordine di poligoni di un numero dispari qualunque di lati, come

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$$

ve ne ha sempre uno della stessa specie del triangolo.

In ciascun ordine di poligoni d'un numero qualunque di lati della forma $2(h+1)$, ove h è un numero dispari, come

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \ldots$$

ve ne ha uno della stessa specie del quadrilatero.

In ciascun ordine di poligoni d'un numero qualunque di lati della forma $2(h+2)$, ove h è un numero dispari, come

$$6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ \ldots$$

ve ne ha sempre uno della stessa specie dell'esagono. (T.)

Problemi da risolvere.

1. — La somma delle rette condotte da un punto situato nell'interno di un triangolo alle estremità di un lato è minore della somma di due altri lati.

2. — La somma delle rette condotte da un punto situato nell'interno di un triangolo ai tre vertici è minore di quella dei tre lati, e maggiore della metà di quest'ultima somma

3. — Trovare sopra una retta un punto tale che la somma o la differenza delle linee che l'uniscono a due punti dati sia un *minimo* o un *massimo.* — Osservare che queste rette sono egualmente inclinate sulla retta data.

4. — La somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque della base di un triangolo isoscele agli altri due lati è costante. — La differenza delle perpendicolari condotte da un punto qualunque dei prolungamenti della base ai due altri lati è costante.

5. — La somma delle perpendicolari abbassate da un punto preso nell'interno di un triangolo equilatero sui tre lati è costante. — In che modo bisogna modificare l'enunciato del teorema per un punto esterno al triangolo?

6. — Costruire un triangolo di cui si conoscono il perimetro e gli angoli.

7. — Costruire un triangolo di cui sia noto un lato, l'angolo opposto e la somma o la differenza dei due altri lati.

8 — Costruire un triangolo essendo dati la bisettrice, la mediana e la perpendicolare condotte da un vertice fino all'incontro del lato opposto.

9. — Dividere un arco di cerchio in due parti tali che la somma e la differenza delle loro corde sia eguale a una retta data.

10. — Costruire un trapezio di cui si conoscano i quattro lati.

11. — Iscrivere in un cerchio dato un trapezio del quale si conosca la somma e la distanza di due lati paralleli.

12. — Se per i vertici di un triangolo si conducono delle parallele ai suoi lati, queste rette determinano un secondo triangolo eguale al quadruplo del primo. — Qual è il rapporto dei lati paralleli?

13. — Il parallelogrammo formato conducendo, per l'estremità di ciascuna diagonale d'un quadrilatero, delle parallele all'altra diagonale, è equivalente al doppio di questo quadrilatero. Dedurre da questo teorema che due quadrilateri sono equivalenti se le loro diagonali sono rispettivamente eguali ed egualmente inclinate l'una sull'altra.

14. — Le bisettrici degli angoli di un quadrilatero determinano incontrandosi un quadrilatero iscrittibile. Qual'è la natura del secondo quadrilatero, se il primo è un parallelogrammo o un rettangolo?

15. — In un poligono iscritto di un numero pari di lati, la somma degli angoli di posto dispari è uguale a quella degli angoli di posto pari.

16. — In un poligono circoscritto di un numero pari di lati, la somma dei lati di posto dispari è uguale a quella dei lati di posto pari.

17. — Le bisettrici degli angoli che formano i lati opposti d'un quadrilatero iscritto in un cerchio sono perpendicolari l'una sull'altra.

18. — La distanza di un punto della circonferenza, circoscritta a un triangolo equilatero, al vertice opposto, è uguale alla somma delle sue distanze dai due altri vertici.

19. — Le perpendicolari condotte dai vertici di un triangolo sopra i lati opposti concorrono nello stesso punto.

20. — Le perpendicolari tirate dai vertici di un triangolo sopra i lati opposti sono le bisettrici degli angoli del triangolo che ha per vertici i piedi di queste tre perpendicolari.

21. — Se si conducono da un punto qualunque della circonferenza a un triangolo delle perpendicolari sopra i lati, i piedi di queste perpendicolari sono in linea retta.

22. — Due circonferenze concentriche essendo date,

costruire un triangolo di cui gli angoli sien dati, e che abbia due vertici sopra l'una della circonferenze e il terzo sopra l'altra.

23. — Costruire un triangolo equilatero i di cui vertici sieno sopra tre circonferenze concentriche.

24. — Tirare da uno dei punti d'intersezione di due circonferenze una retta tale che la somma o la differenza delle corde intercette sia eguale a una retta data.

25. — Costruire un triangolo eguale a un triangolo dato e di cui i lati passino per tre punti dati.

26 — Per un punto dato sopra il piano d'un angolo tirare una retta tale che il perimetro del triangolo formato da questa linea e dai due lati dell'angolo sia eguale a una retta data.

27. — Condurre una tangente comune a due circonferenze date.

28. — Tirare una secante comune a due circonferenze, e tali che le corde intercette sieno eguali a linee date.

29. — Dati sopra una carta quattro punti di cui tre non sono in linea retta, segnare sopra questa carta una linea circolare che passi a egual distanza da ciascuno di questi punti.

30. — Sia A il centro di un cerchio; se il raggio AB si prolunga d'una quantità BC eguale ad AB, dal punto C si conduce poscia la perpendicolare ad una tangente qualunque al cerchio e si tira la retta che unisce il piede D di questa perpendicolare all'estremità B del raggio AB, l'angolo ABD esterno al triangolo BCD è costantemente eguale al triplo dell'angolo interno BDC.

31. — Se si descrivono quattro circonferenze tali che ciascuna passi per due vertici consecutivi d'un quadrilatero iscritto, queste curve si tagliano in quattro punti, diversi dai vertici del quadrilatero. Dimostrare che questi punti appartengono ad una stessa circonferenza.

32. — Tirare tra due circonferenze una retta eguale e parallela a una retta data.

33. — Descrivere da un punto dato come centro un cer-

chio che tagli ortogonalmente o diametralmente due cerchi dati.

34. — Descrivere con raggio dato una circonferenza

1°. Che passi per due punti dati;

2°. Che passi per un punto dato e che sia tangente a una retta o a una circonferenza;

3°. Tangente a una retta e a una circonferenza date;

4°. Tangente a due rette o a due circonferenze date.

35.* — Costruire un quadrilatero, conoscendo i quattro lati e una delle rette che uniscono i mezzi dei lati opposti.

36.* — Costruire un pentagono, conoscendo i mezzi dei suoi lati.

37.* — Costruire un quadrilatero, conoscendo due angoli opposti, le due diagonali e il loro angolo.

38.* — Iscrivere in un quadrato dato un altro quadrato dato.

39.* — Costruire un triangolo, conoscendo il perimetro, un angolo, e il raggio del cerchio iscritto.

40.* — Costruire un triangolo, conoscendo il cerchio iscritto e uno dei tre cerchi ex-iscritti.

41.* — Costruire un triangolo, conoscendo due dei tre cerchi ex-iscritti.

42.* — Costruire un triangolo, conoscendo i centri dei tre cerchi ex-iscritti a questo triangolo.

43.* — Dato un triangolo ABC e un punto O, condurre per questo punto una secante OMN tale, che la parte MN compresa nel triangolo ABC sia eguale alla somma delle due parti BM e CN.

44.* — Ad un triangolo dato circoscrivere un triangolo eguale ad un altro triangolo dato.

45.* — Dai vertici di un triangolo, come centri, descrivere tre circonferenze che si tocchino mutuamente.

46.* — Sia ABC un triangolo, e AE, BF, CG le bisettrici degli angoli esterni; dimostrare che se l'angolo $A > B > C$, l'angolo F è uguale alla somma degli angoli E, G.

47.* — Sia ABC un triangolo qualunque; AD, BE, CF le perpendicolari condotte da A, B, C ai lati opposti, e P il loro punto d'intersezione: il cerchio che passa pei piedi D, E, F, delle perpendicolari è tangente ai sedici cerchi iscritti e ex-iscritti dei triangoli ABC, APB, BPC e CPA.

LIBRO TERZO.

LINEE PROPORZIONALI.

CAPITOLO I.

Trasversali nel Triangolo.

Quando un punto qualunque C è situato sulla retta che passa per due punti A e B, si dà il nome di *segmento* della retta AB a ciascuna delle distanze di C all' estremità di AB. (*fig. 104.*)

Se il punto C si trova fra A e B, la retta AB è uguale alla somma dei due segmenti AC, BC; nel caso contrario, è uguale alla loro differenza.

Allorchè si tira una linea retta sul piano di un triangolo, essa può incontrare i tre lati o essere parallela a uno di essi: in tutti e due i casi le si dà il nome di *trasversale*. I segmenti che essa determina sui lati del triangolo godono proprietà importanti che ci proponiamo di studiare.

1°. Consideriamo primieramente una trasversale parallela a un lato del triangolo.

TEOREMA I.

Qualunque retta parallela a uno dei lati di un triangolo divide gli altri due in segmenti proporzionali. (fig. 105.)

Sia DE parallela al lato BC del triangolo ABC: dico che il rapporto di AD a DB è uguale a quello di AE ad EC.

Supponiamo in prima che le rette AD, DB sieno commensurabili, e che la loro massima comune misura AF sia contenuta tre volte in AD e due volte in DB, in guisa che il rapporto $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$. Per i punti di divisione F, G, H, conduciamo delle parallele a BC; queste linee e DE dividono AC in cinque parti eguali. Infatti, se si conduce FN parallela ad AC, i due triangoli AFK, FGN hanno un lato uguale, adiacente a due angoli uguali: dunque i lati AK, FN sono uguali. Ma FN è uguale a KL, come parallele comprese tra rette parallele; dunque KL è uguale ad AK.

Parimente si proverebbe l' eguaglianza di AK e di ciascuna delle linee EL, EM, MC. Dunque AK è contenuta tre volte in AE e due volte in EC; per conseguenza

$$\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}=\frac{AD}{DB}.$$

2°. *(fig. 106.)* Se le rette AD, DB non hanno comune misura, dividiamo DB in dieci parti eguali, e portiamo il decimo di BD sopra DA. Supponiamo che questa linea lo contenga diciassette volte con un resto DH minore di questo decimo; il rapporto $\frac{AD}{DB}$ sarà maggiore di $\frac{17}{10}$ e minore di $\frac{18}{10}$. Se per i punti di divisione di AB conduciamo delle parallele a AC, la retta EC vien divisa in dieci parti eguali; poichè una di queste divisioni è contenuta diciassette volte in AE con un resto GE, il rapporto $\frac{AE}{EC}$ è compreso tra $\frac{17}{10}$ e $\frac{18}{10}$. Dunque i due rapporti $\frac{AD}{DB}$, $\frac{AE}{EC}$ contengono lo stesso numero di decimi. Dividendo DB in 100, 1000, ec., parti, proveremmo egualmente che questi rapporti contengono lo stesso numero di unità decimali di un ordine qualunque, dunque sono uguali.

Corollario I. — Dalla proporzione

$$AD : DB :: AE : EC$$

si deduce

$$AD + DB : AD : DB :: AE + EC : AE : EC,$$

ovvero

$$AB : AD : DB :: AC : AE : EC.$$

Corollario II. — Delle rette parallele AD, BE, CF, intercettano sopra due linee rette qualunque AC, DF, segmenti proporzionali. *(fig. 107.)*

Sia AH parallela a DF; poichè la retta BG è parallela al lato CH del triangolo ACH, si ha

$$AB : AG :: BC : GH.$$

Ma AG è uguale a DE, e GH ad EF, come parallele comprese tra parallele; dunque

$$AB : DE :: BC : EF.$$

TEOREMA II.

Qualunque retta DE *che divide due lati* AC, AB *di un triangolo* ABC *in parti proporzionali è parallela al terzo lato* BC. *(fig. 108.)*

Per ipotesi si ha

$$AD : DB :: AE : CE$$

e dico che DE è parallela a BC. Giacchè, se DE non è parallela a BC, potremo condurre pel punto D la linea DF parallela a BC; allora avremo

$$AD : BD :: AF : CF,$$

e per conseguenza

$$AE : CE :: AF : CF.$$

Ma questa proporzione è falsa, perchè gli estremi AE, CF sono rispettivamente minori dei medi AF, CE. Dunque la retta DE è parallela a BC.

TEOREMA III.

I lati omologhi di due triangoli equiangoli ABC, DEF *sono proporzionali. (fig. 109.)*

Sieno l'angolo A eguale a D, l'angolo B eguale ad E, e l'angolo C eguale ad F. Prendiamo sul lato AB, la linea AG uguale a DE e sopra AC la linea AH eguale a DF, e conduciamo la retta GH. I due triangoli AGH, DEF, sono uguali come aventi un angolo eguale compreso fra due lati eguali; laonde l'angolo AGH è uguale a DEF e per conseguenza ad ABC. Dunque la retta GH è parallela a BC, e si ha

$$AB : AG :: AC : AH$$

ovvero

$$AB : DE :: AC : DF.$$

Similmente si proverebbe che

$$AB : DE :: BC : EF.$$

Dunque

$$AB : DE :: AC : DF :: BC : EF.$$

Corollario. — Se due triangoli hanno i loro lati rispettivamente paralleli o perpendicolari, questi lati sono proporzionali.

TEOREMA IV.

Due triangoli ABC, DEF *sono equiangoli se i loro lati sono proporzionali. (fig. 109.)*

Si ha per ipotesi

AB : DE : : AC : DF : : BC : EF.

Prendiamo sopra AB la retta AG uguale a DE, e conduciamo GH parallela a BC. I due triangoli ABC, AGH sono equiangoli e danno

AB : AG : : AC : AH : : BC : GH.

Gli antecedenti di queste due serie di rapporti sono eguali due a due, quindi i conseguenti sono proporzionali, e poichè le rette AG, DE sono uguali, il lato AH = DF, GH = EF. Dunque i triangoli AGH, DEF sono eguali, e i triangoli DEF, ABC sono equiangoli.

TEOREMA V.

Due triangoli ABC, DEF *che hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali sono equiangoli. (fig. 109.)*

Supponiamo l'angolo D uguale all'angolo A e i loro lati proporzionali, cioè che

AB : DE : : AC : DF.

Prendiamo sopra AB la retta AG uguale a DE e conduciamo GH parallela a BC; i due triangoli ABC, AGH sono equiangoli e danno

$$AB : AG :: AC : AH,$$

quindi $AH = DF$ e i triangoli AGH, DEF sono eguali come aventi un angolo eguale compreso tra due lati eguali. Dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli.

TEOREMA VI.

Le rette OA, OB, OC, ec., *condotte dal punto* O, *intercettano segmenti proporzionali sulle parallele* AD, EH. *(fig. 110-111.)*

I triangoli ABO, EFO sono equiangoli e si ha:

$$AB : EF :: OB : OF.$$

I triangoli BCO, FGO sono anche equiangoli: quindi

$$OB : OF :: BC : FG :: OC : OG.$$

Similmente i triangoli CDO, GOH danno la proporzione

$$OC : OG :: CD : GH.$$

Ma queste proporzioni hanno due a due un rapporto comune; dunque gli altri rapporti sono eguali, e si ha

$$AB : EF :: BC : FG :: CD : GH$$

Corollario. — Se le rette AE, BF, CG, ec., dividono le parallele AD, EH in segmenti proporzionali, concorrono in uno stesso punto.

Sia O il punto d'incontro delle due rette AE, BF; uniamolo al punto G per via della retta OG, dico che questa linea passa pel punto C. Infatti, sia C′ il punto nel quale OG incontra la retta AD, si ha

$$EF : AB :: FG : BC';$$

ma per ipotesi

$$EF : AB :: FG : BC,$$

dunque BC′ è uguale a BC e il punto C′ coincide con C.

2° Supponiamo ora che la trasversale incontri i tre lati del triangolo.

TEOREMA VII.

Qualunque trasversale DF *determina sui lati del triangolo* ABC *sei segmenti tali, che il prodotto di tre segmenti non contigui è uguale al prodotto degli altri tre. (fig. 112.)*

Conduciamo pel vertice C la retta CG parallela al lato AB, sino all'incontro di DF. I triangoli BDF, CDG sono equiangoli; dunque

$$BD : CD :: BF : CG.$$

I triangoli equiangoli AEF, CEG danno anche

$$AF : CG :: AE : EC;$$

laonde, moltiplicando queste proporzioni termine a termine

$$BD \times AF : CD \times CG :: BF \times AE : CG \times EC,$$

e per conseguenza

$$BD \times AF \times EC = CD \times BF \times AE.$$

Scolio I. — La trasversale incontra due lati e il prolungamento del terzo, o i prolungamenti dei tre lati.

Scolio II. — Quando si conduce la trasversale per un vertice, due segmenti consecutivi sono nulli e l'eguaglianza precedente diventa un'identità. Se questa trasversale coincide con una delle bisettrici degli angoli supplementari dal cui vertice essa è condotta, si ha il seguente teorema:

Tutta a casa

TEOREMA VIII.

La bisettrice di un angolo di un triangolo, o del suo supplemento, divide il lato opposto in due segmenti proporzionali ai due lati di quest' angolo (fig. 113).

1°. Sia AD la bisettrice dell' angolo BAC del triangolo ABC. Conduciamo pel vertice C la retta CE parallela al lato opposto AB, sino all' incontro di AD. I due triangoli ABD, CDE sono equiangoli, dunque

$$BD : CD :: AB : CE.$$

Ma ciascuno degli angoli CAD, CEA è uguale all' angolo BAD, dunque il triangolo ACE è isoscele, e

$$BD : CD :: AB : AC.$$

2°. Se la retta AD′ è la bisettrice di CAG, supplemento di BAC, e che si conduca dal punto C la retta CF parallela ad AB, i triangoli equiangoli ABD′, FCD′ danno:

$$BD' : CD' :: AB : CF.$$

Ma l'angolo GAD′ è uguale a ciascuno degli angoli CAF AFC, dunque il triangolo AFC è isoscele, e

$$BD' : CD' :: AB : AC.$$

Corollario. — La retta BC è divisa dai punti D, D′ in segmenti proporzionali, giacchè dalle due proporzioni precedenti si deduce

$$BD : CD : BD' : CD'.$$

TEOREMA IX.

Tre punti D, E, F *sono in linea retta se determinano sui lati del triangolo* ABC *sei segmenti tali, che il prodotto di tre segmenti non consecutivi sia uguale al prodotto degli altri tre. (fig. 112).*

Si ha per ipotesi,

$$AF \times DB \times CE = AE \times CD \times BF.$$

Se la retta che passa per i due punti D, E non incontrasse il lato AB al punto F, e che F′ fosse l'intersezione di DE con AB, si avrebbe,

$$AF' \times BD \times CE = AE \times CD \times BF'.$$

Dividendo membro a membro le due eguaglianze precedenti, si trova la proporzione

$$\frac{AF}{AF'} = \frac{BF}{BF'}$$

ch'è evidentemente falsa. Dunque i tre punti D, E, F sono in linea retta.

TEOREMA X.

Se tre rette AD, BE, CF, *condotte dai vertici di un triangolo, concorrono in uno stesso punto* G, *ciascuna determina sul lato opposto due segmenti tali,* *che il prodotto di tre segmenti non consecutivi è uguale al prodotto degli altri tre. (fig. 114).*

La trasversale AD divide il triangolo ABC in due altri ABD, ACD; il triangolo ABD e la trasversale CF danno:

$$AF \times BC \times DG = AG \times DC \times BF.$$

Il triangolo ACD e la trasversale BE danno anche

$$AG \times BD \times CE = AE \times BC \times GD.$$

Moltiplicando queste due eguaglianze membro a membro e riducendo si ha

$$AF \times BD \times CE = AE \times CD \times BF.$$

Dunque il prodotto dei tre segmenti non consecutivi AF, BD, CE è uguale al prodotto degli altri tre AE, CD, BF.

Scolio. — Le tre trasversali incontrano tutti e tre i lati, o un sol lato e i prolungamenti degli altri due. (1)

TEOREMA XI.

Se tre punti D, E, F *determinano sui lati del triangolo* ABC *sei segmenti, tali che il prodotto di tre segmenti non consecutivi sia uguale a quello degli altri tre; le rette che uniscono questi punti ai vertici opposti concorrono in uno stesso punto. (fig. 114.)*

(1) Se AD è una mediana, i punti F ed E si trovano sopra una retta parallela a BC. Infatti ponendo $BD = DC$ nell' ultima eguaglianza, si ottiene

$$AF \times CE = AE \times BF,$$

ovvero

$$AF : BF :: AE : EC. \qquad \text{(T.)}$$

Si ha per ipotesi,

$$AF \times BD \times CE = AE \times CD \times BF.$$

Sia G il punto d' incontro delle due trasversali BE, CF, dico che la retta AG passa pel punto D. Infatti, se questa linea incontrasse BC in un punto D' diverso da D, si avrebbe

$$AF \times BD' \times CE = AE \times CD' \times BF.$$

Ma, dividendo membro a membro le due eguaglianze precedenti, si trova

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'},$$

proporzione erronea, giacchè si ha $\frac{BD}{BD'} < 1$ e $\frac{CD}{CD'} > 1$; dunque la retta AG passa pel punto D e le tre rette AD, BE, CF concorrono nello stesso punto G.

Corollario. — Le mediane di un triangolo passano per lo stesso punto.

CAPITOLO II.

Trasversali considerate nel cerchio.

Si chiama *proiezione (fig. 115)* di un punto A sopra una retta qualunque xy, il piede della perpendicolare Aa abbassata dal punto sulla retta.

La proiezione di una retta finita AB sopra un asse indefinito xy è la porzione ab di quest' asse compresa tra le proiezioni delle estremità di AB.

TEOREMA I.

Se per un punto A *del piano di un cerchio si tira una secante qualunque* BC, *il prodotto dei due segmenti* AB, AC, *determinati dalla circonferenza sopra questa retta, è costante. (fig. 116.)*

Conduciamo pel punto A il diametro DE ed uniamo i punti D e B, E e C: i triangoli ABD, ACE sono equiangoli, giacchè hanno l' angolo A comune e gli angoli ABD, AEC eguali, perchè misurati dalla metà dell' arco CD; dunque

$$AB : AE :: AD : AC,$$

da cui

$$AB \times AC = AE \times AD,$$

cioè che il prodotto $AB \times AC$ è uguale a quello delle normali condotte dal punto A alla circonferenza.

Scolio. — I segmenti AB, AC della secante BC sono inversamente proporzionali ai segmenti AD, AE della secante DE.

Corollario. — La perpendicolare CD, condotta da un punto qualunque C della circonferenza ad un diametro AB, è media proporzionale tra i due segmenti del diametro. *(fig. 117.)*

Infatti, se prolunghiamo CD sino all' incontro della circonferenza, si ha

$$DA \times DB = DC \times DE = DC^2.$$

TEOREMA II.

Se pel punto A *si conducono al cerchio* BCD *la tangente* AB *e una secante qualunque* AD, *la tangente è* *media proporzionale tra la secante e la sua parte esterna. (fig. 118.)*

Conduciamo le rette BC, BD; i triangoli ABC, ABD sono equiangoli, perchè hanno l' angolo A comune e gli angoli ABC, ADB uguali; dunque

$$AD : AB : AB : AC.$$

SCOLIO. — Il quadrato della tangente AB è uguale al prodotto della secante AD per la sua parte esterna AC.

TEOREMA III.

Se due rette AD, BC *s' incontrano in un punto* E *tale che*

$$AE \times DE = BE \times CE,$$

le loro estremità, A, D, B, C *si trovano sulla stessa circonferenza. (fig. 119).*

Infatti, si ha per ipotesi

$$AE : BE :: CE : DE;$$

dunque i triangoli ACE, BDE sono equiangoli, perchè hanno un angolo eguale E compreso tra lati proporzionali. Per conseguenza, se sulla retta CD si descrive un arco di cerchio capace dell' angolo CAD, quest' arco passa pel punto B, ed i quattro punti A, B, C, D sono situati sulla stessa circonferenza.

TEOREMA IV.

Qualunque corda AB *è media proporzionale tra il diametro* AC *che passa per una delle sue estremità e la sua proiezione* AD *sopra questo diametro. (fig. 120.)*

I due triangoli rettangoli ABC, ABD sono equiangoli; dunque si ha

$$AC : AB :: AB : AD,$$

da cui

$$AB^2 = AC \times AD.$$

Corollario I. — Se per un punto A di una circonferenza si conducono il diametro AC e le corde AB, A B′, i quadrati del diametro e delle corde sono proporzionali al diametro e alle proiezioni delle corde sopra AC.

Si ha

$$AB^2 = AC \times AD$$
$$B'A^2 = AC \times AD',$$

dunque

$$CA^2 : BA^2 : B'A^2 :: CA^2 : AC \times AD : AC \times AD',$$

ovvero

$$CA^2 : BA^2 : B'A^2 :: AC : AD : AD'.$$

Corollario II. — Applicando quest' ultimo teorema a due corde AB, BC, condotte da uno stesso punto B della circonferenza all' estremità del diametro AC, si ha

$$CA^2 : AB^2 : CB^2 :: AC : AD : CD.$$

Ma

$$AC = AD + DC;$$

dunque

$$CA^2 = BA^2 + CB^2.$$

Lo che dà il teorema: *Il quadrato dell' ipotenusa* AC *del triangolo rettangolo* ABC *è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell' angolo retto* ABC.

Corollario III. — Il lato AB dell' angolo retto del triangolo rettangolo ABC è medio proporzionale tra l' ipotenusa AC e la sua proiezione AD sull' ipotenusa.

CAPITOLO III.

Divisione armonica delle Linee rette.

1.—Si dice che tre numeri formano *una proporzione armonica,* quando *il primo sta al terzo come l'eccesso del primo sul secondo sta all'eccesso del secondo sul terzo.* Il secondo numero ha ricevuto il nome di *medio armonico.*

La denominazione di proporzione armonica ritrae la sua origine dal perchè, per fare rendere ad una corda sonora i tre suoni *do, mi, sol,* che formano l'accordo perfetto maggiore, bisogna farne vibrare tre parti proporzionali ai numeri 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, che danno luogo alla proporzione armonica:

$$1 : \frac{2}{3} :: 1 - \frac{4}{5} : \frac{4}{5} - \frac{2}{3}.$$

2. — Quando una retta ac *(fig. 121)* è divisa da due punti b, d in segmenti proporzionali, in guisa che

$$ad : ab :: cd : cb$$

le tre linee ad, ac, ab formano una proporzione armonica, perchè la proporzione precedente si può scrivere come segue:

$$ad : ab :: ad - ac : ac - ab \ \text{[1]}.$$

[1] Da questa proporzione si ricava:

$$ab \,.\, ad - ab \,.\, ac = ad \,.\, ac - ad \,.\, ab \,.$$

ovvero

$$2ab \,.\, ad = ac \,.\, (ad + ab),$$

e dividendo per $2ab \,.\, ac \,.\, ad$

$$\frac{1}{ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ad}\right).$$

Chiamando con Maclaurin *reciproca* d'una linea il suo rapporto inverso con

Per questa ragione si dice che la retta *ac* è divisa armonicamente dai punti *d*, *c*, ai quali si dà il nome di *conjugati armonici* rispetto alla retta *ac*.

Reciprocamente, i punti *a*, *c* dividono la retta *bd* armonicamente. Infatti la proporzione precedente può scriversi

$$ad : cd :: ab : cb$$

ovvero

$$ad : cd :: ad - bd : bd - cd$$

dunque *a*, *c* sono conjugati rispetto a *bd*, e i quattro punti *a*, *b*, *c*, *d* formano ciò che dicesi un sistema armonico ([1]).

3. — Quattro rette, che partono da uno stesso punto, formano un *fascio armonico*, quando dividono armonicamente una trasversale qualunque. — Quelle che determinano, sulla trasversale, punti conjugati armonici, hanno ricevuto il nome di *conjugate armoniche*.

TEOREMA I.

La metà am *di una retta* ac *è media proporzionale tra le distanze del mezzo* m *di questa linea ai due punti* b, d *che la dividono armonicamente.* (*fig.* 122.)

Dalla proporzione

$$ad : cd :: ab : cb$$

l'unità, l'ultima relazione esprime che *la reciproca della distanza di un punto al suo coniugato è la media aritmetica delle reciproche delle distanze dello stesso punto agli altri due*. Lo stesso Maclaurin ha dato alla distanza *ac* il nome di *media armonica* delle distanze *ad*, *ab*; e Poncelet ha chiamato il punto *c* *centro delle medie armoniche* dei punti *b* e *d* rispetto al punto *a*. — Per la teoria dei centri delle medie armoniche vedi una Nota in fondo al Volume. (T.)

([1]) Se da uno stesso punto e in uno stesso senso si porta un numero qualunque di distanze, tali che tre qualunque fra esse, che sono consecutive, formino una proporzione armonica, la serie di tutte queste distanze formerà ciò che dicesi una *progressione armonica*. (T.)

si deduce la seguente:

$$ad + cd : ad - cd :: ab + cb : ab - cb$$

ovvero

$$2md : 2am :: 2am : 2mb$$

dunque

$$am^2 = md \times mb.$$

SCOLIO. — La reciproca è vera.

COROLLARIO. — La proporzione

$$ad : cd :: ab : cb$$

dà la serie dei rapporti uguali:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{cd}{cb} = \frac{ad - cd}{ab - cb} = \frac{ma}{mb}.$$

Innalzando a quadrato questi rapporti e sostituendo ad ma^2 il suo valore $md \times mb$, si ha:

$$\frac{ad^2}{ab^2} = \frac{cd^2}{cb^2} = \frac{md}{mb}.$$

TEOREMA II.

Se quattro rette OA, OB, OC, OD, *condotte dallo stesso punto* O, *sono tali che tre di esse dividano in due parti uguali una retta* EF *parallela alla quarta* OD, *queste linee formano un fascio armonico. (fig. 123.)*

Conduciamo per un punto b della retta OB una trasversale qualunque ad; i due triangoli aOd, aEb sono equiangoli; dunque

$$ad : ab :: dO : bE.$$

I triangoli bcF, Ocd sono anche equiangoli e danno

$$cd : bc :: dO : bF.$$

Ma, per ipotesi, le rette BE, BF sono uguali; dunque

$$ad : ab :: cd : bc$$

e la trasversale *ad* è divisa armonicamente dalle quattro rette OA, OB, OC, OD.

Scolio. — Si può sostituire nel fascio alla retta OD il suo prolungamento OD′, poichè esso è anche parallelo ad EF; dunque le quattro rette del fascio possono essere prolungate indefinitamente nell' uno e nell'altro verso.

Corollario. — Due rette OA, OC e le bisettrici dei loro angoli formano un fascio armonico.

Siano OB la bisettrice dell' angolo AOC e OD quella dell' angolo supplementario COA′. Conduciamo EF parallela ad OD; l' angolo BOD essendo retto, la linea EF è perpendicolare ad OB ed i triangoli O*b*E, O*b*F sono uguali, come aventi un lato comune, adiacente a due angoli uguali; dunque *b*E = *b*F e le rette OA, OC OB, OD, formano un fascio armonico.

TEOREMA III.

Se quattro rette OA, OB, OC, OD, *formano un fascio armonico, qualunque trasversale* EF, *parallela a una delle rette* OD *del fascio, è divisa dalle altre tre in due parti uguali. (fig. 123.)*

Infatti, conduciamo pel punto *b* una trasversale qualunque *ad;* avremo

$$ad : ab :: cd : cb.$$

I due triangoli equiangoli *ab*E, *ad*O danno

$$ad : ab :: dO : bE.$$

Parimente, i due triangoli bcF, cdO essendo equiangoli, abbiamo

$$cd : cb :: dO : bF.$$

Ma, per ipotesi, i rapporti $\frac{ad}{ab}$, $\frac{cd}{cb}$ delle due proporzioni precedenti sono uguali; dunque $bE = bF$.

Corollario I. — Se le due rette conjugate OB, OD del fascio sono perpendicolari l'una all'altra, esse dividono in due parti uguali ciascuno degli angoli formati dalle altre due rette conjugate OA, OC.

Infatti, sia EF parallela ad OD; i due triangoli rettangoli bOE, bOF sono eguali come aventi un angolo retto compreso tra due lati eguali; dunque gli angoli BOE, BOF sono uguali, ed OB è la bisettrice dell'angolo AOC.

Corollario II.—Dati un angolo BOD e un punto a, se per questo punto si conduce una trasversale ad e si fa girare attorno ad a, il luogo del conjugato armonico di a rispetto ai due punti d'intersezione della secante ad coi lati dell'angolo è la retta OC conjugata armonica di OA.

Per questa ragione, si è dato al punto a il nome di *polo* della retta OC e a questa linea quello di *polare* del punto a rispetto all'angolo BOD.

TEOREMA IV.

Se per un punto A *si conduce in un angolo* YOX *una coppia di secanti qualunque* ABD, AB'D' *e che si uniscano due a due i punti d' intersezione* B, D' *e* D, B', *il luogo del punto* M *è la polare del punto* A *rispetto all'* angolo YOX. *(fig. 124.)*

Sia C il conjugato armonico di A rispetto ai due punti B e D; le quattro rette MA, MB, MC, MD formando un fascio armonico, il punto E, intersezione delle rette MC, AD′, è il coniugato del punto A rispetto a B′ e D′; dunque la retta EMC è la polare del punto A rispetto all' angolo YOX.

COROLLARIO. — Si chiama quadrilatero completo un sistema di quattro rette indefinite AB, BA′, A′B′, AB′, *(fig. 125.)* Queste rette si tagliano in sei punti A, A′ B, B′, C, C′, che sono i vertici del quadrilatero. Unendo i vertici opposti due a due, si hanno le tre diagonali AA′, BB′, CC′.

Ciascuna di queste diagonali è divisa armonicamente dalle due altre, giacchè il punto M è il polo di AA′ rispetto all' angolo BAB′ e il punto A quello di MA′ rispetto all' angolo BMC.

TEOREMA V.

Se due punti D, E *dividono armonicamente il diametro* AB *di un cerchio, il rapporto delle distanze di un punto* M *della circonferenza ai due punti conjugati* D, E *è costante. (fig. 126.)*

Infatti le quattro rette MA, MD, MB, ME formano un fascio armonico poichè dividono AB armonicamente. Ma le due conjugate MA, MB sono rettangolari; dunque MB è la bisettrice dell' angolo DME e si ha

$$MD : ME :: BD : BE;$$

dunque il rapporto $\frac{MD}{ME}$ è costante.

COROLLARIO. — Il luogo dei punti M tali che il rapporto delle distanze di ciascuno a due punti fissi D, E sia costante, è la circonferenza descritta sulla distanza, come diametro, dei due punti conjugati A, B, che dividono DE armonicamente secondo il rapporto dato.

TEOREMA VI.

Se per un punto E *si conduce una secante qualunque al cerchio* AB, *il luogo del punto* M, *conjugato armonico di* E *rispetto ai due punti* F, G, *intersezione della secante e della circonferenza, è una retta perpendicolare al diametro* CE *(fig. 127).*

Sia D il conjugato armonico di E rispetto all' estremità A e B del diametro AB, dico che la retta DM è perpendicolare ad AB. Infatti, i punti D, E essendo conjugati relativamente ad A e B, e i punti F, G appartenendo alla circonferenza AB, si ha:

$$\frac{FD}{FE}=\frac{GD}{GE};$$

dunque la retta DE è la bisettrice dell'angolo FDH esterno al triangolo DGF, e, poichè le quattro rette DE, DF, DM, DG formano un fascio armonico, le rette DM, DE sono conjugate e rettangolari.

Dunque il luogo del punto M è la perpendicolare DM, condotta sul diametro CE dal conjugato del punto E, relativamente ad A e a B.

Scolio. — Il punto E è chiamato il *polo* della retta DM. Reciprocamente, questa retta è la *polare* del punto E rispetto al cerchio AB. Tra il raggio e le distanze del centro del cerchio al polo e alla polare si ha la relazione $CD \times CE = CA^2$.

Corollario. — Se il punto E è esterno al cerchio, la sua polare è la linea di contatto delle tangenti condotte da questo punto. *(fig. 128.)*

Infatti, nel triangolo rettangolo CEH si ha,

$$CH^2 = CD \times CE.$$

Se il punto E è sulla circonferenza, la polare coincide colla tangente in questo punto. Infine se il punto E e nell'interno del cerchio, la sua polare è esterna al cerchio e si allontana di più in più dal centro a misura che E se ne avvicina.

TEOREMA VII.

Le polari dei punti d'una retta, rispetto ad un cerchio, passano pel polo di questa retta.

Reciprocamente: *I poli delle rette che passano per uno stesso punto sono situati sulla polare di questo punto.*

Sia P il polo della retta DB *(fig. 129)* rispetto al cerchio CA, dico che la polare di un punto qualunque D di BD passa per P. Infatti, se conduco PE perpendicolare a CD, i due triangoli CBD, CEP sono equiangoli e danno:

$$CE : CB :: CP : CD;$$

dunque

$$CE \times CD = CB \times CP = CA^2,$$

e la retta EP è la polare del punto D.

Reciprocamente: La retta PE che passa pel punto P ha il suo polo sulla polare BD del punto P.

Giacchè conducendo CE perpendicolare a PE sino all'incontro di BD, i due triangoli CEP, CBD, che sono equiangoli, danno

$$CE : CB :: CP : CD,$$

dunque

$$CE \times CD = CB \times CP = CA^2,$$

e la retta PE ha per polo il punto D, situato sulla polare del punto P.

Corollario I. — Se dai differenti punti di una retta si conducono coppie di tangenti a un cerchio, le linee di contatto passano pel polo di questa retta. *(fig. 130.)*

Reciprocamente: Se per un punto si conducono delle secanti ad un cerchio, i punti d'incontro delle tangenti condotte dall'estremità di ciascuna secante sono situati sulla polare del punto dato. *(fig. 131.)*

Corollario II. — Il punto D intersezione di due rette BD, B'D ha per polare la retta che passa pei poli P, P' di queste rette. *(fig. 132.)*

TEOREMA VIII.

Se pel punto O *conduciamo una coppia di secanti qualunque* OBA, OB'A' *al cerchio* AB, *ed uniamo due a due i punti d'intersezione* B, A' *e* A, B', *o* B, B' *e* A, A'; *il luogo dei punti* M, M' *è la polare del punto* O. *(fig. 133.)*

Sia D il conjugato armonico di O rispetto ai due punti A e B; le quattro rette MA, MD, MB, MO formano un fascio armonico. Dunque il punto D', intersezione del prolungamento di MD con A'B', è il conjugato di O rispetto ai punti A', B' e la retta DMD' è la polare del punto O.

Similmente si dimostrerebbe che il punto M' è sulla polare del punto O.

Scolio. — Questo teorema dando un metodo grafico semplice per la costruzione della polare di un punto, ne risulta un nuovo mezzo di condurre una tangente al cerchio per un punto esterno.

CAPITOLO IV.

Asse radicale di due Cerchi. — Rapporto anarmonico Involuzione.

Steiner chiama *potenza* di un punto A, rispetto a un cerchio DE, il prodotto costante $AD \times AE$ dei segmenti d'una secante qualunque DE condotta per questo punto. *(fig. 134.)*

Per distinguere i punti esterni al cerchio dai punti interni, facciamo la convenzione di dare il segno $+$ o il segno $-$ ai segmenti AD, AE, secondo che sono contati in un senso o nell'altro a cominciare dal punto A; allora $+AD \times AE$ sarà la potenza di un punto A esterno al cerchio e $-AD \times AE$ quella di un punto interno.

TEOREMA I.

La potenza di un punto rispetto a un cerchio, è uguale all'eccesso del quadrato della distanza di questo punto al centro sul quadrato del raggio. (fig. 135.)

1°. Se il punto A è esterno al cerchio C, conducete la tangente AB. La potenza di A è uguale a $+AB^2$. Ma il triangolo rettangolo ABC dà

$$AB^2 = AC^2 - BC^2;$$

dunque la potenza di A è espressa da $AC^2 - BC^2$.

2°. Se il punto A è interno al cerchio *(fig. 136.)*, conducete la corda BB′ perpendicolare al raggio CAD. La potenza del punto A è uguale a $-AB^2$; ma il triangolo rettangolo ABC dà

$$AB^2 = BC^2 - AC^2;$$

dunque la potenza del punto A è espressa da $AC^2 - BC^2$.

TEOREMA II.

Il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a due cerchi, è una retta perpendicolare a quella che passa pe' centri.

1° Se i cerchi A e B si tagliano *(fig. 137.)*, qualunque punto E della retta che unisce i punti d' intersezione C e D ha la stessa potenza $\pm EC.ED$ rispetto ai due cerchi. Vale il contrario per qualunque punto F esterno a questa retta: giacchè se per questo punto si conduce la secante FCH, si ha

$$FC.FH > FC.FG;$$

dunque la retta CD è il luogo richiesto.

2° Se i cerchi sono tangenti *(fig. 138.)*, qualunque punto D della tangente comune ha la stessa potenza $+CD^2$ rispetto ai due cerchi; e per un punto qualunque E esterno alla tangente, si ha:

$$EC.EG > EC.EF;$$

dunque la retta CD è il luogo richiesto.

3° Se i due cerchi A e B *(fig. 139.)* sono esterni o interni e che M sia un punto del luogo, la potenza di questo punto rispetto al cerchio A è $MA^2 - AD^2$. Conducendo MC perpendicolare alla retta AB, si ha nel triangolo rettangolo AMC:

$$MA^2 = MC^2 + AC^2;$$

dunque la potenza di M rispetto al cerchio A, è uguale a

$$MC^2 + AC^2 - AD^2.$$

Similmente si troverebbe:

$$MC^2 + BC^2 - BE^2$$

per la potenza di M relativamente al cerchio B. Poichè questo punto ha, per ipotesi, la stessa potenza rispetto ai due cerchi, avremo:

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BE^2;$$

laonde C è altresì un punto d'egual potenza ed è il solo che sia situato sulla retta AB. Dunque il luogo richiesto è la perpendicolare condotta dal punto C ad AB [1].

[1] È chiaro che se dal punto M come centro e con raggio eguale ad una delle quattro tangenti che da M si possono condurre ai due cerchi A e B, si descrive una circonferenza di cerchio, questa taglia i cerchi dati ortogonalmente, cioè in modo che le tangenti condotte ai due cerchi nel punto d'intersezione sono perpendicolari fra loro. Giovandosi di questa osservazione, il teorema precedente può enunciarsi anche a questo modo:

Il luogo dei centri M dei cerchi che tagliano ortogonalmente due cerchi dati A, B, è una retta MC perpendicolare alla linea AB che unisce i centri dei cerchi dati.

Se quindi immaginiamo una serie di cerchi *(fig. 142)* P_1, P_2, P_3 .... che tagliano ortogonalmente due cerchi dati M_1, M_2; la retta $M_1 M_2$ sarà l'asse radicale di tutti questi cerchi. Cioè: il luogo geometrico dei centri dei cerchi (M_1, M_2, M_3 ....) che tagliano ortogonalmente tutti i cerchi P_1, P_2 .... è la retta $M_1 M_2$ che unisce i centri dei due cerchi dati M_1, M_2.

Le due serie di cerchi P_1, P_2, P_3 .... e M_1, M_2, M_3 .... hanno quindi una tale relazione rispettiva, che ciascun cerchio di una serie taglia ortogonalmente ciascun cerchio dell'altra, e che i cerchi di una serie hanno per asse radicale la linea dei centri dell'altra serie.

Poichè i cerchi P_1, P_2, P_3 .... hanno per asse radicale la linea dei centri M_1 M_2 M_3 .... ne segue che se due qualunque fra essi si tagliano, tutti gli altri si taglieranno negli stessi punti A e B e la corda comune AB è la linea dei centri M_1 M_2 M_3 .... Ma se i cerchi di una serie P_1, P_2 .... si tagliano fra loro, i cerchi della serie M_1, M_2 .... non possono incontrarsi. Cioè: Tutti i cerchi P_1, P_2, P_3 ...., ciascuno dei quali taglia ortogonalmente due cerchi esterni M_1, M_2, o due cerchi interni M_1, M_3, s'incontrano in due punti determinati A e B. — I cerchi M_1, M_2 .... che tagliano ortogonalmente due cerchi P_1, P_2 che s'intersecano, non possono incontrarsi.

Tutte le corde DC, EF .... che il cerchio M_1 ha di comune coi cerchi P_1, P_2, P_3 ...., si tagliano in un punto determinato M della linea $M_1 M_2$. (T.)

Scolio. — Questo luogo ha ricevuto il nome d'*asse radicale* dei due cerchi. — Due cerchi concentrici non hanno asse radicale.

TEOREMA III.

Gli assi radicali di tre cerchi considerati due a due, e i cui centri A, B, C *non sono in linea retta, concorrono nello stesso punto. (fig. 140.)*

Siano OD l'asse radicale dei due cerchi A, B e OE, quello dei due cerchi B, C; queste due rette, che sono rispettivamente perpendicolari alle linee AB, BC, s'incontrano in un punto O di egual potenza pe' tre cerchi; dunque questo punto è situato sull'asse radicale dei due cerchi A e C.

Scolio. — Il punto d'intersezione degli assi radicali di tre cerchi ha ricevuto il nome di *centro radicale* (1).

Corollario. — Il centro radicale serve a costruire l'asse radicale di due cerchi A e B, esterni o interni l'uno all'altro.

Infatti, descrivete *(fig. 141)* una circonferenza che incontri le due circonferenze A e B; conducete le corde d'intersezione DE, FG che si tagliano nel centro radicale M dei tre cerchi, e conducete MC perpendicolare ad AB. La retta MC è l'asse radicale dei due cerchi A e B.

Fa d'uopo osservare che il punto C è esterno ai due cerchi, e che è situato tra i due centri A e B quando i cerchi sono esterni l'uno all'altro; mentrechè esso è sul prolungamento di AB, e dal lato del centro B del cerchio minore, quando le due circonferenze sono interne l'una all'altra.

(1) Steiner chiama l'asse e il centro radicale *asse e centro d'egual potenza*. (T.)

Se tre punti a, b, b' sono situati sulla medesima linea retta *(fig. 143.)*, chiamerò *potenza* del punto a rispetto agli altri due, il prodotto $\pm ab \,.\, ab'$ delle distanze di a ai due punti *conjugati* b e b'. Queste distanze sono affette dal segno $+$ o dal segno $-$ secondochè sono contate in un senso o nell'altro a cominciare dal punto a.

TEOREMA IV.

Se quattro punti a, a′, b, b′ *conjugati due a due sono situati sulla medesima retta, vi ha su questa linea un punto* o *di egual potenza per i due sistemi di punti conjugati. (fig. 144.)*

Descrivete una circonferenza qualunque per i punti coniugati a, a'; ed un'altra per i punti coniugati b, b'. Il punto o, intersezione della retta ab con l'asse radicale dei due cerchi, è d'egual potenza rispetto a questi cerchi; dunque si ha

$$\pm oa \,.\, oa' = \pm ob \,.\, ob'.$$

Il punto o è situato dalla stessa parte dei quattro punti a, a', b, b' quando una delle rette aa', bb' è interna all'altra. Per qualunque altra posizione di queste linee, il punto o è situato tra a' e b'.

Scolio. — L'asse radicale dei due cerchi non incontra la retta ab *(fig. 145.)* quando i mezzi delle due rette aa', bb' coincidono; giacchè allora la linea ab è perpendicolare alla retta che passa per i centri dei cerchi e parallela all'asse radicale.

TEOREMA V.

Se il punto o *è di egual potenza rispetto ai due sistemi di punti conjugati* a, a′ *e* b, b′, *il rapporto* *delle sue distanze a due punti conjugati* a, a' *è uguale al rapporto delle potenze di* a *e* a' *relativamente ai punti* b, b'. *(fig. 144.)*

Si ha per ipotesi:

$$oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob',$$

da cui

$$\frac{oa}{ob} = \frac{ob'}{oa'} = \frac{oa \pm ob'}{ob \pm oa'} = \frac{ab'}{ba'}.$$

Similmente si dimostrerebbe che

$$\frac{oa'}{ob} = \frac{a'b'}{ab}.$$

Dividendo queste due eguaglianze membro a membro si trova:

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'}.$$

Ma i prodotti $\pm\, ab \,.\, ab'$, $\pm\, a'b \,.\, a'b'$ sono le potenze di a ed a' rispetto ai punti b, b', dunque le distanze del punto o ai punti conjugati a, a' sono tra loro come queste potenze.

SCOLIO. — La proporzione precedente dà il modo di calcolare le distanze del punto o ai punti a, a', b, b' quando sono conosciute le distanze rispettive dei punti a, a', b, b'.

Si chiama rapporto anarmonico di quattro punti a, b, c, d, *(fig. 146)* situati sulla medesima retta, il quoziente dei rapporti delle distanze di due di questi punti agli altri due. Con questi quattro punti si possono formare i tre rapporti anarmonici:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}$$

e i tre inversi.

Nel primo rapporto i punti a e b sono detti *conjugati*, c e d sono anche conjugati. Nel secondo al contrario a è il conjugato di c, e b quello di d.

TEOREMA VI.

Se è dato uno dei rapporti anarmonici di quattro punti a, b, c, d, *gli altri due sono determinati. (fig. 146.)*

Dall' identità

$$ac \,.\, bd = (ab + bc)(bc + cd)$$

si deduce

$$ac \,.\, bd = (ab + bc + cd)\, bc + ab \,.\, cd,$$

ovvero

$$ac \,.\, bd = ad \,.\, bc + ab \,.\, cd$$

Dividiamo quest' eguaglianza successivamente per $ad \,.\, bc$, $ab \,.\, cd$, $ac \,.\, bd$, avremo

$$\frac{ac \,.\, bd}{ad \,.\, bc} = 1 + \frac{ab \,.\, cd}{ad \,.\, bc}$$

$$\frac{ac \,.\, bd}{ab \,.\, cd} = \frac{ad \,.\, bc}{ab \,.\, cd} + 1$$

$$1 = \frac{ad \,.\, bc}{ac \,.\, bd} + \frac{ab \,.\, cd}{ac \,.\, bd}.$$

Dando il segno $+$ alle lunghezze contate nel senso ad, e il segno $-$ alle lunghezze contate in senso contrario, e indicando con x, y e z i tre rapporti anarmonici dei quattro punti a, b, c, d, avremo

$$x = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac \cdot bd}{ad \cdot bc}$$

$$y = \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = - \frac{ad \cdot bc}{ab \cdot cd}$$

$$z = \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{ab \cdot cd}{ac \cdot bd}$$

Quindi le tre relazioni trovate innanzi diventeranno

$$\frac{1}{y} = 1 - x$$

$$\frac{1}{z} = 1 - y$$

$$\frac{1}{x} = 1 - z$$

che dimostrano il teorema.

Si ha anche

$$x = \frac{y-1}{y}, \quad z = \frac{1}{1-y}$$

che danno due rapporti in funzione del terzo.

Corollario I. — Se uno dei rapporti anarmonici, y per esempio, si suppone eguale a -1, gli altri due sono eguali a $\frac{1}{2}$ e a 2 e i quattro punti a, b, c, d formano un sistema armonico, giacchè si ha:

$$ad : ab :: cd : cb.$$

Corollario II. — Se due sistemi di quattro punti a, b, c, d e a', b', c', d' hanno un rapporto anarmonico eguale e che si considerino come corrispondenti i punti che entrano nel modo stesso in questi rapporti, gli altri rapporti anarmonici sono anche due a due eguali [1].

TEOREMA VII.

Se due rette ad, a'd' *sono incontrate da quattro rette* oa, ob, oc, od *che partono dallo stesso punto* o, *il rapporto anarmonico* $\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}$ *dei quattro punti* a, b, c, d *della retta* ad *è uguale al rapporto anarmonico* $\frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'}$ *dei quattro punti* a', b', c', d' *della retta a'd'.* *(fig. 147.)*

[1] Se due sistemi di quattro punti a, b, c, d e a', b', c', d' presi sopra due rette in modo che si corrispondano uno a uno, hanno i loro rapporti anarmonici uguali, e se si pongono le due rette in modo che due punti omologhi a ad a' coincidano insieme, le tre rette bb', cc', dd' che uniscono rispettivamente gli altri tre punti b, c, d del primo sistema ai loro omologhi b', c', d' concorrono in uno stesso punto. *(fig. 164.)*

Sia O il punto di concorso di bb' e cc', e d'' il punto nel quale la retta Od incontra la retta ab'. I quattro punti a, b, c, d'' hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei quattro punti a, b, c, d, e quindi, per l'ipotesi fatta, a quello dei quattro punti $a\ b', c', d$. Dunque i punti d' e d'' coincidono.

Tenendo fermi i dati del Corollario II, è facile vedere che la corrispondenza dei punti dei due sistemi si può stabilire in quattro modi diversi, conservando l'eguaglianza dei rapporti anarmonici.

Il primo è dato dall'ipotesi che i due sistemi abbiano un rapporto anarmonico eguale, ed è

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'},$$

gli altri sono una semplice trasformazione di questo primo:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{b'd'}{b'c'} : \frac{a'd'}{a'c'}$$

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}$$

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{d'b'}{d'a'} : \frac{c'b'}{c'a'}\ . \text{(T.)}$$

Conduciamo pel punto a la retta ad'' parallela ad $a'd'$; la trasversale ob'' del triangolo acc'' dà l'eguaglianza:

$$ab \,.\, oc \,.\, b''c'' = bc \,.\, oc'' \,.\, ab''.$$

Sostituendo a $b''c''$ e ab'' le quantità proporzionali $b'c'$ e $a'b'$, questa eguaglianza diventa:

$$ab \,.\, oc \,.\, b'c' = bc \,.\, oc'' \,.\, a'b'.$$

Lo stesso triangolo acc'' e la trasversale od'' danno anche:

$$ad \,.\, oc \,.\, d'c' = dc \,.\, oc'' \,.\, a'd';$$

dividendo le due eguaglianze precedenti membro a membro, trovo:

$$\frac{ab \,.\, b'c'}{ad \,.\, d'c'} = \frac{bc \,.\, a'b'}{dc \,.\, a'd'},$$

da cui deduco:

$$\frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'}.$$

Scolio. — Le quattro rette oa, ob, oc, od formano un *fascio anarmonico;* esse sono due a due conjugate. Chiameremo *rapporto anarmonico di quattro rette* i rapporti anarmonici costanti che danno i punti d'intersezione delle quattro rette del fascio e d'una trasversale qualunque. Se uno di questi rapporti è uguale a -1, le quattro rette oa, ob, oc, od formano un fascio armonico. [1]

[1] Giovandosi dell'osservazione che il Teorema VI coi suoi corollari ha luogo anche pei fasci di quattro rette, si dimostra facilmente la seguente proposizione:

Se due fasci di quattro rette Oa, Ob, Oc, Od e $O'a$, $O'b$, $O'c$, $O'd$ che si corrispondono una a una rispettivamente, hanno i loro rapporti anar-

Quando un punto o è di egual potenza rispetto a tre sistemi di punti conjugati, situati sulla stessa retta, si dice che i sei punti di questi tre sistemi sono in *involuzione* e il punto o è chiamato *centro d' involuzione*.

L' involuzione è dovuta al geometra francese *Desargues*. Il signor *Chasles*, per via della considerazione del centro d' involuzione, ha reso semplice e facile questa teoria, altravolta sì confusa ed oscura.

Quando sei punti a, a', b, b', c, c' sono in involuzione, il centro può avere tre posizioni.

1°. Si trova da una stessa parte dei sei punti se il segmento cc' è interno a bb' e quest' ultimo interno ad aa'. *(fig. 148.)*

2°. Separa uno dei sistemi di punti conjugati dai due altri sistemi, se i segmenti aa', cc' sono uno in terno l' altro esterno a bb'. *(fig. 149.)*

3°. Separa tre punti a, b, c dai loro conjugati a', b', c', se il primo è il conjugato del quarto, il secondo del quinto e il terzo del sesto. *(fig. 150.)*

Nel primo caso, se $oc' = oc$, i due punti c, c' si confondono in un solo c_1 e i cinque punti a, a', b, b', c_1 sono in involuzione; ma si dice che c_1 è un punto doppio, e si ha: $oa \, . \, oa' = ob \, . \, ob' = oc_1^2$. *(fig. 151.)*

Supponendo nel secondo caso, $oc = oc'$ ovvero

monici eguali, e se si pongono in modo che due rette corrispondenti Oa, O$'a$ coincidano in direzione, le tre altre rette Ob, Oc, Od del primo fascio incontrano rispettivamente le tre rette corrispondenti O$'b$, O$'c$, O$'d$ del secondo fascio, in tre punti b, c, d situati in linea retta. *(fig. 165.)*

Infatti, supponiamo che la retta bc incontri OO$'$ in a e Od, O$'d$ in d$'$, d''. Poichè i due fasci hanno i loro rapporti anarmonici eguali, i quattro punti a, b, c, d' hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei quattro punti a, b, c, d''. Dunque i punti d' e d'' coincidono e per conseguenza le rette Od, O$'d$ si tagliano sulla retta bc.

Si proverebbe, come nella nota precedente, che la corrispondenza fra le rette di due fasci di quattro rette si può stabilire in quattro modi diversi, conservando l' eguaglianza dei rapporti anarmonici. (T)

$oa' = oa$, si ottengono *(fig. 152.)* due sistemi di cinque punti in involuzione, tra i quali c_1 e a_1 sono i punti doppi.

Se si prende simultaneamente $oc' = oc$, $oa' = oa$, il sistema dei sei punti si riduce a quattro, a_1, b, b', c_1, che si riguarda come se fosse in involuzione, e questo gruppo *(fig. 153.)* ha due punti doppi a_1, c_1 egualmente lontani dal centro d'involuzione.

Un punto doppio a_1, il suo simmetrico c_1, rispetto al centro d'involuzione, e due punti conjugati b, b' formano un sistema armonico; giacchè si ha:

$$oc_1^2 = ob \cdot ob'.$$

TEOREMA VIII.

Il rapporto anarmonico di quattro punti qualunque di un sistema di sei punti in involuzione è uguale al rapporto anarmonico dei loro conjugati. (fig. 148.)

Sia o il centro d'involuzione dei sei punti a, a', b, b', c, c'. Consideriamo in prima i quattro punti a, a', b, b' che formano due sistemi conjugati. È evidente che

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{a'b}{a'b'} = \frac{ab}{ab'} \cdot \frac{a'b'}{a'b} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{ab'}{ab};$$

dunque il rapporto anarmonico $\frac{ab}{ab'} : \frac{a'b}{a'b'}$ dei punti a, a', b, b' è uguale al rapporto anarmonico $\frac{a'b'}{a'b} : \frac{ab'}{ab}$ dei loro conjugati a', a, b', b.

Se i quattro punti dati sono a, a', b, c', che appartengono ai tre gruppi di punti conjugati, si ha, poichè il punto o è di egual potenza rispetto ai due sistemi di punti conjugati a, a' e b, b':

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'}.$$

I punti a, a' e c, c' formando due **sistemi di punti** conjugati, si ha anche:

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{ac \,.\, ac'}{a'c \,.\, a'c'};$$

dunque

$$\frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'} = \frac{ac \,.\, ac'}{a'c \,.\, a'c'},$$

e

$$\frac{ab}{ac'} : \frac{a'b}{a'c'} = \frac{a'b'}{a'c} : \frac{ab'}{ac}.$$

Quindi il rapporto anarmonico $\frac{ab}{ac'} : \frac{a'b}{a'c'}$ dei punti a, a', b, c' è uguale al rapporto anarmonico $\frac{a'b'}{a'c} : \frac{ab'}{ac}$ dei loro conjugati a', a, b', c.

TEOREMA IX.

Sei punti a, a', b, b', c, c', *situati sulla stessa retta e conjugati due a due sono in involuzione, quando quattro qualunque di questi punti e i loro conjugati hanno un rapporto anarmonico eguale. (fig. 154.)*

Consideriamo i quattro punti a, a', b, c e i loro conjugati a', a, b', c' e supponiamo che si abbia:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{ab'}{ac'}.$$

Sieno o il punto di egual potenza dei due sistemi di punti conjugati a, a', b, b' e c_1 il conjugato di c; dico che c_1 coincide con c'.

Infatti, i sei punti a, a', b, b', c, c_1 essendo in involuzione, si ha:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c_1} : \frac{ab'}{ac_1}.$$

Paragonando quest' eguaglianza alla precedente, si trova:

$$\frac{ac_1}{ac'} = \frac{a'c_1}{a'c'};$$

da cui

$$\frac{ac' - ac_1}{ac'} = \frac{a'c' - a'c_1}{a'c'},$$

cioè:

$$\frac{c'c_1}{ac'} = \frac{c'c_1}{a'c'}.$$

Ma quest' eguaglianza è possibile allora soltanto quando la linea $c'c_1$ è nulla; dunque i punti a, a', b, b', c, c' sono in involuzione ([1]).

([1]) Come conseguenza dei Teoremi VIII e IX si ha che fra sei punti in involuzione hanno luogo sette equazioni, e reciprocamente che ciascuna di queste equazioni esprime l'involuzione e dà le altre sei. Queste equazioni sono

$$\frac{ab \, . \, ab'}{ac \, . \, ac'} = \frac{a'b \, . \, a'b'}{a'c \, . \, a'c'}, \quad \frac{bc \, . \, bc'}{ba \, . \, ba'} = \frac{b'c \, . \, b'c'}{b'a \, . \, b'a'}, \quad \frac{ca \, . \, ca'}{cb \, . \, cb'} = \frac{c'a \, . \, c'a'}{c'b \, . \, c'b'},$$

$$ab' \, . \, bc' \, . \, ca' = - a'b \, . \, b'c \, . \, c'a,$$
$$ab' \, . \, bc \, . \, c'a' = - a'b \, . \, b'c' \, . \, ca,$$
$$ab \, . \, b'c' \, . \, ca' = - a'b' \, . \, bc \, . \, c'a,$$
$$ab \, . \, b'c \, . \, c'a' = - a'b' \, . \, bc' \, . \, ca.$$

Le prime tre si deducono come nel teorema VIII; le altre nel seguente modo:

Si hanno le relazioni:

$$\frac{oa}{ob} = \frac{ab'}{ba'}, \quad \frac{ob}{oc} = \frac{bc'}{cb'}, \quad \frac{oc}{oa} = \frac{ca'}{ac'};$$

TEOREMA X.

Se si unisce un punto qualunque a sei punti in involuzione, si forma un fascio di sei rette in involuzione, cioè un fascio tale che una secante condotta in una direzione qualunque a traverso di esso, è tagliata in sei punti in involuzione. (fig. 155.)

Sieno a, a', b, b', c, c' sei punti in involuzione; li unisco ad un punto o, esterno alla retta aa', e conduco la secante $\alpha\alpha'$. I punti α, β, γ, γ' e i loro corrispondenti a, b, c, c' hanno i rapporti anarmonici eguali due a due; vale lo stesso pe' punti α', β', γ', γ e i loro corrispondenti a', b', c', c. Ma i sei punti a, a', b, b', c, c' essendo in involuzione, i rapporti anarmonici dei punti a, b, c, c' e dei loro conjugati a', b', c', c sono eguali; dunque quelli dei punti α, β, γ, γ' e dei loro

moltiplicandole membro a membro ed avendo riguardo alla direzione dei segmenti, si ottiene la prima delle ultime quattro e così delle altre.

Se due punti c e c' coincidono in un solo c_1, le sette equazioni precedenti si riducono a quattro:

$$\frac{ab\,.\,ab'}{a'b\,.\,a'b'}=\frac{ac_1^2}{a'c_1^2},\quad \frac{ba\,.\,ba'}{b'a\,.\,b'a'}=\frac{bc_1^2}{b'c_1^2}$$
$$ab'\,.\,bc_1\,.\,c_1a'=-a'b\,.\,b'c_1\,.\,c_1a,$$
$$ab\,.\,b'c_1\,.\,c_1a'=-a'b'\,.\,bc_1\,.\,c_1a\,.$$

Ciascuna di quest'equazioni essendo di secondo grado, determina due punti c^1 che godono della proprietà di formare coi due sistemi una involuzione nella quale il conjugato di questo punto coincide con questo punto stesso. Indicando con c_2 questo secondo punto, avremo $\frac{ac_1^2}{a'c_1^2}=\frac{ac_2^2}{a'c_2^2}$, e $\frac{ac_1}{a'c_1}=-\frac{ac_2}{a'c_2}$, ove nel secondo membro abbiamo posto il segno $-$ perchè col segno $+$ i due punti c_1 e c_2 coinciderebbero necessariamente. Similmente si troverebbe $\frac{bc_1}{b'c_1}=-\frac{bc_2}{b'c_2}$.
Dunque *i due punti di cui ciascuno coincide col suo conjugato, dividono armonicamente i due segmenti aa', bb'.*

La reciproca di questa proposizione è ugualmente vera e si dimostra agevolmente giovandosi della Nota a pag. 86. (T.)

conjugati α', β', γ', γ sono anche eguali, in guisa che i sei punti α, α', β, β', γ, γ' sono in involuzione.

SCOLIO. — Il fascio può avere cinque sole rette ed anche quattro, poichè cinque punti ed anche quattro possono essere in involuzione. In tutti i casi le rette che passano per due punti conjugati sono dette *conjugate.*

CAPITOLO V.

Similitudine.

Due poligoni sono *simili* quando hanno gli angoli rispettivamente eguali, i lati, adiacenti agli angoli eguali, proporzionali, e queste parti, lati e angoli, disposti nello stesso ordine.

I vertici di due angoli uguali si dicono *omologhi.*

Due lati, due diagonali sono *omologhe* quando le loro estremità sono vertici omologhi.

Due poligoni regolari che hanno lo stesso numero di lati sono simili.

Si chiama *centro* di un poligono un punto che divide in due parti uguali qualunque retta condotta da questo punto sino all' incontro del perimetro del poligono. — Il punto d' intersezione delle diagonali di un parallelogrammo è un centro.

TEOREMA I.

Due poligoni sono simili se, eccettuati tre angoli consecutivi, hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati proporzionali. (fig. 156.)

Siano i due pentagoni ABCDE, A'B'C'D'E' nei quali suppongo

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{A'E'}$$

e l'angolo $B = B'$, l'angolo $C = C'$; dico che l'angolo $A = A'$, l'angolo $D = D'$, l'angolo $E = E'$, cioè che i poligoni sono simili.

Le diagonali condotte dai vertici A, A', decompongono i poligoni in triangoli, due a due equiangoli. Infatti, 1° I triangoli ABC, A'B'C' hanno, per ipotesi, gli angoli B e B' uguali e compresi tra lati proporzionali; dunque sono equiangoli e

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}.$$

2°. Poichè gli angoli BCD e B'C'D' sono uguali come pure gli angoli BCA, B'C'A', saranno uguali anche gli angoli ACD, A'C'D'; per conseguenza i triangoli ACD, A'C'D' che hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali, sono equiangoli e danno:

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{A'E'}.$$

Dunque, finalmente, i triangoli ADE, A'D'E' hanno i lati proporzionali e gli angoli rispettivamente uguali; talchè l'angolo $AED = A'E'D'$, l'angolo $EDC = E'D'C'$, l'angolo $BAE = B'A'E'$; e per conseguenza i due poligoni sono simili.

Corollario I. — Due triangoli che hanno i loro lati proporzionali sono simili.

Corollario II. — Due poligoni simili sono decomponibili in uno stesso numero di triangoli simili e disposti nel medesimo ordine.

Infatti, le diagonali condotte da due vertici omologhi A, A', dividono i poligoni in triangoli simili.

Reciprocamente, due poligoni sono simili se sono composti d'un egual numero di triangoli simili e similmente disposti.

Giacchè i loro angoli sono rispettivamente eguali e i loro lati omologhi proporzionali.

TEOREMA II.

Due poligoni sono simili, se, eccettuato un lato e due angoli adiacenti, i loro lati sono proporzionali e i loro angoli rispettivamente eguali.

Dimostrazione analoga alla precedente.

Corollario. — Due triangoli che hanno un angolo uguale compreso tra lati proporzionali, sono simili.

TEOREMA III.

Due poligoni sono simili se, eccettuati due lati e l'angolo compreso, i loro lati sono proporzionali e i loro angoli rispettivamente uguali.

Dimostrazione analoga alla precedente.

Corollario. — Due triangoli equiangoli sono simili.

Scolio. — La similitudine di due poligoni che hanno n lati risulta da $2n - 4$ condizioni distinte, mentre la loro eguaglianza ne richiede $2n - 3$.

TEOREMA IV.

Se si unisce un punto qualunque o *ai vertici di un poligono* abcde, *e se si prendono sulle rette* oa ob, oc, ..., *o sui loro prolungamenti, punti* a', b' c', ..., *tali che*

$$\frac{oa'}{oa} = \frac{ob'}{ob} = \frac{oc'}{oc} = \ldots\ldots = r;$$

il poligono a'b'c'd'e' *è simile ad* abcde. *(fig. 157.)*

Infatti, i due triangoli *oab*, *oa'b'*, che hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali, sono equiangoli; dunque il lato *a'b'* è parallelo ad *ab* e

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{oa'}{oa} = r.$$

Similmente si dimostrerebbe che *b'c'* è parallela a *bc*, *c'd'* a *cd*, ec., e che

$$\frac{b'c'}{bc} = r, \quad \frac{c'd}{cd} = r, \text{ ec.};$$

dunque i poligoni *abcde*, *a'b'c'd'e'* hanno i lati proporzionali; di più i loro angoli sono rispettivamente eguali, perchè formati da lati paralleli e diretti nello stesso senso o in senso contrario; dunque questi poligoni sono simili.

Scolio. — I poligoni sono simili e *similmente disposti* se i punti *a'*, *b'*, *c'*.... si trovano sulle rette *oa*, *ob*, *oc*....; sono simili e ***inversamente disposti*** se i punti *a'*, *b'*, *c'*, ... si trovano sui prolungamenti di *oa*, *ob*, *oc*, ...

Chasles ha dato a questa simiglianza di forma e di posizione il nome d'*omotetia diretta* nel primo caso, e *inversa* nel secondo. Il punto o è il centro di similitudine, e le rette oa, oa',..... sono i ***raggi vettori*** dei punti a, a',.....

Corollario I. — Due poligoni omotetici hanno i lati paralleli e proporzionali. Il rapporto di similitudine è uguale a quello di due lati omologhi.

Corollario II. — I punti $a, b, c, \ldots; a', b', c', \ldots$ formano due sistemi *omotetici* nei quali a e a' sono punti *omologhi.*

La retta che unisce due punti a e b è parallela a quella che unisce i loro omologhi a' e b', e il rapporto di ab ad $a'b'$ è uguale al rapporto di similitudine.

TEOREMA V.

Due poligoni abcd, a'b'c'd' *sono omotetici, se le rette che uniscono i vertici del primo a un punto* p *sono parallele e proporzionali a quelle che uniscono i vertici del secondo a un altro punto* p'. *(fig. 158-159.)*

Prendiamo sulla retta pp' o sul suo prolungamento, secondo che i lati ap, $a'p'$ sono diretti in senso contrario o nello stesso senso, un punto o tale che $\frac{op'}{op} = \frac{a'p'}{ap}$ e uniamolo ai punti a, a'. I triangoli apo, $a'p'o$ avendo un angolo eguale compreso tra lati proporzionali, sono equiangoli; dunque l'angolo cop è uguale a $a'op'$ e le rette ao, $a'o$ coincidono.

Parimente si proverebbe la coincidenza delle linee ob, ob', ec. Dunque i due poligoni sono omotetici ed il punto o è il centro di similitudine. L'omotetia è diretta se le rette ap, $a'p'$ sono dirette nello stesso senso; è inversa nel caso contrario.

SCOLIO. — I due punti p, p' si chiamano *poli conjugati* dei poligoni omotetici. Due poli conjugati sono in linea retta col centro d' omotetia.

TEOREMA VI.

Se due poligoni a centro sono omotetici diretti, saranno altresì omotetici inversi, e reciprocamente. (fig. 160.)

Infatti, supponiamo i due parallelogrammi $abde$, $a'b'd'e'$ omotetici diretti; c e c' essendo i loro centri, b e b' due vertici omologhi, prendiamo sul prolungamento di cb un punto e, tale che $ce = cb$; il punto e sarà un vertice del parallelogrammo $abde$. Ma $\frac{cb}{c'b'}$ ovvero $\frac{ce}{c'b'} = r$; dunque i raggi omologhi ce, $c'b'$ sono diretti in senso contrario, e i poligoni sono omotetici inversi.

Laonde essi hanno due centri di similitudine: 1° un centro *esterno* o situato sul prolungamento della retta cc', quando i due poligoni sono omotetici diretti; 2° un centro *interno* o' posto sulla retta cc', quando i due poligoni sono omotetici inversi.

COROLLARIO. — I punti o ed o' dividono armonicamente la distanza cc' dei centri dei due parallelogrammi; giacchè si ha

$$\frac{oc}{oc'} = r = \frac{o'c}{o'c'}.$$

TEOREMA VII.

Due poligoni omotetici ad un terzo sono omotetici tra loro. (fig. 161-162.)

Sia o il centro di similitudine dei due poligoni omotetici $abcd$, $a'b'c'd'$, e o' quello dei due poligoni omotetici $abcd$, $a''b''c''d''$. Le rette $a'b'$, $a''b''$, parallele ad una stessa linea ab, sono parallele tra loro; lo stesso vale per $a'c'$, $a''c''$, per $a'd'$, $a''d''$, ec. Si ha anche:

$$\frac{a'b'}{a\,b}=\frac{a'c'}{a\,c}=\ldots=r$$

$$\frac{a''b''}{a\,b}=\frac{a''c''}{a\,c}=\ldots=r'$$

dunque

$$\frac{a''b''}{a'\,b'}=\frac{a''c''}{a'\,c'}=\ldots=\frac{r'}{r}.$$

Le rette che uniscono il punto a' ai vertici b', c, d essendo parallele e proporzionali a quelle che uniscono a'' ai vertici b'', c'', d'', i poligoni $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ sono omotetici diretti o inversi, secondo che l'omotetia è dello stesso nome o di nome contrario nei due sistemi omotetici dati.

Corollario. — Se si suppone $r=r'$, si ha $a''b''=a'b'$, $a''c''=a'c'$, ec., e i poligoni $a''b''c''d''$, $a'b'c'd'$ sono eguali. Dunque si possono formare tutti i poligoni omotetici al poligono $abcd$ mediante il solo centro o di similitudine facendo variare r da o a ∞.

Scolio. — Dati tre poligoni omotetici, tra i tre sistemi omotetici che essi formano, ve ne ha solo un numero dispari la cui omotetia sia diretta.

TEOREMA VIII.

I centri di similitudine di tre poligoni due a due omotetici sono in linea retta. (fig. 163.)

Sieno P, P′, P″ i poligoni dati, O il centro di similitudine di P e P′, O′ quello di P e P″, e O″ quello di P′ e P″. Prendiamo sulla retta OO′ il punto O‴, polo conjugato di O′, per i due poligoni P, P′. I punti O′, O‴ sono anche due poli conjugati dei poligoni omotetici P″, P′; dunque il loro centro di similitudine O″ è situato sulla retta O′ O‴ e i tre centri O, O′, O″ sono sulla stessa retta.

Corollario. — Se tre poligoni a centro sono omotetici, essi hanno tre centri di similitudine esterni e tre centri di similitudine interni.

Considerando i tre sistemi come omotetici dello stesso nome, i loro centri d'omotetia sono esterni; dunque i tre centri di similitudine esterni sono in linea retta. Se i tre sistemi omotetici si suppongono di nome contrario, essi hanno due centri di similitudine interni e un centro esterno. Dunque due centri interni e un centro esterno, corrispondente al terzo centro interno, sono in linea retta.

Scolio. — La retta sulla quale sono i tre centri di similitudine esterni ha ricevuto il nome d'*asse d'omotetia diretta.* Ciascuna delle tre rette che passano per due centri interni e un centro esterno è chiamato *asse di similitudine inversa.*

TEOREMA IX.

1°. *La linea omotetica d'una circonferenza è un'altra circonferenza.*

2°. *Due circonferenze sono omotetiche dirette e inverse. (fig. 166.)*

Siano o il centro di similitudine, c il centro del cerchio dato ca, c' il suo omologo, r il rapporto di similitudine. Uniamo c' all'omologo a' di un punto qualunque a della circonferenza ca, avremo

$$\frac{c'a'}{ca} = r\,;$$

dunque la retta $c'a'$ ha una lunghezza costante, e il luogo del punto a' è una circonferenza di cerchio che ha per centro il punto c' e per raggio la retta $c'a'$.

Poichè i raggi omologhi ca, $c'a'$ sono diretti nello stesso senso, l'omotetia è diretta. Il raggio $c'd'$, prolungamento di $c'a'$, è parallelo a ca e si ha:

$$\frac{c'd'}{ca} = \frac{c'a'}{ca} = r\,,$$

dunque le due circonferenze sono anche omotetiche inverse.

COROLLARIO I. — Due archi omotetici ab, $a'b'$, cioè quelli le cui estremità sono punti omologhi, corrispondono ad angoli al centro uguali acb, $a'c'b'$; giacchè questi angoli hanno i loro lati paralleli, diretti nello stesso senso o in senso contrario.

COROLLARIO II. — Le tangenti ai punti omologhi di due circonferenze omotetiche sono parallele. — Le tangenti comuni a due circonferenze passano per l'uno o l'altro dei centri di similitudine.

COROLLARIO III. — I centri di similitudine o, o' dividono armonicamente la distanza cc' dei centri dei due cerchi.

SCOLIO. — I centri di similitudine di tre cerchi, considerati due a due, sono tre a tre in linea retta. La retta che passa per i centri esterni è l'asse di similitudine esterno; le tre altre rette, sopra a ciascuna delle quali si trovano due centri interni e il centro esterno corrispondente al terzo centro interno, sono gli assi di similitudine interni. (1)

TEOREMA X.

Se si conducono due secanti qualunque oa, od *per uno dei centri di similitudine di due cerchi* c, c', *tra gli otto punti d'intersezione quattro qualunque* a, d, b', e' *non conjugati sono situati sulla medesima circonferenza (fig. 167.)*

Infatti si ha per ipotesi:

$$oa : oa' :: od : od'.$$

I quattro punti a', b', e', d' appartenendo alla stessa circonferenza, si ha anche:

$$oe' : oa' :: ob' : od';$$

(1) *I centri di similitudine di due cerchi formano una involuzione con le due coppie di punti delle due circonferenze situati sulla linea dei centri.*

Infatti, si ha:

$$\frac{oM}{om} = r, \quad \frac{oN}{on} = r;$$

quindi

$$\frac{oM \,.\, oN}{om \,.\, on} = r^2.$$

Similmente,

$$\frac{o'M \,.\, o'N}{o'm \,.\, o'n} = r^2,$$

e per conseguenza,

$$\frac{oM \,.\, oN}{om \,.\, on} = \frac{o'M \,.\, o'N}{o'm \,.\, o'n} \,. \quad \text{(T.)}$$

dunque

$$oa : od :: oe' : ob',$$

e i punti a, d, b', e' sono sulla stessa circonferenza.

Vale lo stesso pei quattro punti b, e, a', d'; pei punti a, e, d', b', e infine per d, b, a', e'.

Corollario. — Se si fa girare la secante od attorno al centro o sino a che essa coincida con oa, ciascuna delle circonferenze $adb'e'$, $a'd'be$ diviene tangente alle due circonferenze date, e la retta che unisce i due punti di contatto passa pel centro di similitudine esterno o interno, secondo che i due contatti sono dello stesso genere o di genere differente.

CAPITOLO VI.

Problemi sulle Linee proporzionali.

Problema I. — *Costruire una quarta proporzionale alle tre rette* A, B, C *(fig. 168.)*

Sopra il lato DE d'un angolo qualunque EDG prendete DE = A, DF = B, e sopra l'altro lato la linea DG = C. Unite il punto E al punto G, e conducete FH parallela ad EG. La retta DH è la quarta proporzionale richiesta: giacchè si ha

$$DE : DF :: DG : DH.$$

Corollario. — Se le due linee B, C sono eguali, la linea DH prende il nome di terza proporzionale alle due rette A, B.

Problema II. — *Costruire una media proporzionale tra due rette* A, B. *(fig. 169.)*

Sopra una retta indefinita prendete CD = A e DE = B. Descrivete una semicirconferenza sopra CE come diametro e conducete pel punto D la retta DF perpendicolare a CE. La media proporzionale richiesta è uguale a DF.

Scolio. — La media proporzionale tra due linee disuguali CD, DE è minore della loro media aritmetica.

Problema III. — *Dividere una retta* A *in parti proporzionali a linee date* B, C, D *o in un certo numero di parti eguali. (fig. 170.)*

1°. Prendete sul lato EO di un angolo qualunque OER la retta EF = A e sull'altro lato la retta EK = B, KH = C, HG = D. Unite il punto F al punto G e conducete le rette HL, KM parallele a GF. I punti M, L dividono EF in segmenti proporzionali a B, C, D.

2°. Per dividere la retta A in un certo numero di parti eguali, tre per esempio, fate una costruzione analoga alla precedente, prendendo però per B, C, D tre linee eguali ad una stessa retta di grandezza qualunque.

Problema IV. — *Dividere la retta* AB *in media ed estrema ragione, cioè in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l' altra parte e la linea intera. (fig. 171.)*

Per l'estremità B della retta data AB, conducete a questa linea la perpendicolare BO eguale alla metà di AB; descrivete una circonferenza dal punto O come centro col raggio OB; conducete la secante AO, e prendete sopra AB una lunghezza AC eguale ad AD; il punto C divide AB in media ed estrema ragione.

Infatti, AB essendo tangente al cerchio, si ha:

$$AE : AB :: AB : AD;$$

da cui si deduce

$$AB : AE - AB :: AD : AB - AD;$$

ma il diametro DE è uguale ad AB, dunque

$$AB : AC :: AC : BC.$$

Corollario. — Se indichiamo con a la retta AB, il triangolo rettangolo ABO dà:

$$AO^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4};$$

ma AC = AO — BO, dunque

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Per l' altro segmento della retta AB si ha:

$$BC = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Scolio. — La secante AE è divisa dal punto D in media ed estrema ragione.

Problema V. — *Dividere una retta armonicamente, nel rapporto di due rette date. (fig. 172.)*

Per dividere la retta AB armonicamente e nel rapporto delle rette m, n, conducete pel punto A una retta qualunque AC eguale ad m, e pel punto B una parallela ad AC, sulla quale prenderete ciascuna delle rette BD, BE eguale ad n. Unite il punto C ai punti D, E; le rette CD, CE incontrano AB nei punti F, G che la dividono armonicamente.

Infatti, le quattro rette CA, CG, CB, CF, formano un fascio armonico, poichè CA è parallela a DE che le altre tre rette dividono in due parti eguali; e si ha GA : GB : : m : n.

Problema VI. — *Conoscendo tre rette di un fascio armonico, costruire la quarta. (fig. 173.)*

Sieno le tre rette date OA, OB, OC; conducete pel punto C della retta OC una parallela CE ad AO; prendete sul prolungamento di CE la linea CF eguale a CE e conducete la retta OF che sarà la quarta del fascio, poichè OA è parallela ad EF che le tre altre rette OB, OC, OD dividono in due parti eguali.

Corollario. — Questa costruzione fa conoscere il punto D conjugato armonico di B rispetto a una retta data AC. (1)

Problema VII. — *Costruire il polo di una retta e la polare di un punto rispetto a un cerchio. (fig. 176)*

1°. Per determinare il polo F della retta CD rispetto al cerchio AO, conducete il diametro AB perpendicolare a CD, e cercate il conjugato armonico di E rispetto alla retta AB.

2°. Per costruire la polare del punto F, determinate il punto conjugato armonico di F rispetto al dia-

(1) I due problemi:

1° Conoscendo tre punti di una proporzione armonica, costruire il quarto.

2° Conoscendo tre rette di un fascio armonico, costruire la quarta, si posson risolvere elegantemente giovandosi di una proprietà del quadrilatero completo dimostrata a pag. 91.

1° Siano A, B, C i tre punti dati; si cerca il quarto D conjugato con B. (*fig.* 174.) Da un punto qualunque M conduciamo le rette MA, MB, MC; prendiamo sopra MB un punto arbitrario N e conduciamo le rette ANL, CNH; la retta HL prolungata determina il punto D conjugato armonico di B rispetto alla retta AC.

2° Siano OA, OC, OD tre rette di un fascio; si tratta di costruire la quarta OB conjugata ad OD. (*fig.* 175.) Per un punto qualunque P di OD conduciamo le rette PNH, PLM ed uniamo i punti d'intersezione H, L ed M, N, il punto Q, in cui queste due rette si tagliano, determina la linea OQB conjugata armonica con OD.

Queste soluzioni si raccomandano ancora perchè richiedono l'uso solamente della riga. (T.)

metro AB e conducete la retta EC perpendicolare ad AB.

Problema VIII. — *Costruire sopra una retta data un triangolo o un poligono simile a un triangolo o un poligono dato.*

1°. Per costruire sulla retta *ab* un triangolo simile al triangolo ABC *(fig. 177.)*, supponete che *ab* sia omologo ad AB, e fate l'angolo *bac* eguale a BAC, l'angolo *abc* eguale ad ABC. Il triangolo *abc* è simile ad ABC.

2°. Debbasi costruire un poligono simile ad ABCDE sulla retta A'B', omologa al lato AB. *(fig. 156.)* Conducete le diagonali AC, AD: fate successivamente il triangolo A'B'C' simile ad ABC, il triangolo A'C'D' simile ad ACD e A'D'E' simile ad ADE. I due poligoni A'B'C'D'E', ABCDE, sono anche simili.

Problema IX. — *Condurre una tangente comune a due cerchi. (fig. 178.)*

Determinate i centri di similitudine O, O' dei due cerchi dividendo la distanza dei loro centri C, C' armonicamente e nel rapporto dei raggi CA, C'B. Conducete poscia, per ciascuno dei punti O, O', tangenti al cerchio C; queste linee toccheranno anche l'altro cerchio C', giacchè i punti E, E', nei quali ciascuna di queste rette incontra le due circonferenze, essendo omologhi, i raggi CE, C'E' sono paralleli, e la retta OE, perpendicolare a CE, è anche perpendicolare a C'E'. Dunque i due cerchi C, C' hanno la stessa tangente OE.

Scolio. — Il problema ha quattro soluzioni quando i due cerchi sono esterni l'uno all'altro, tre quando si toccano esteriormente, due se sono secanti, e una sola se si toccano internamente.

Problema X*. — *Trovare, in due serie di quattro punti che hanno i loro rapporti anarmonici eguali, uno di questi punti, quando tutti gli altri sono dati. (fig. 189.)*

Sieno a, b, c, d i quattro primi punti, e sopra una seconda retta, a', b', c' i tre punti che corrispondono uno ad uno ai tre a, b, c. Si vuol determinare il quarto punto d' corrispondente al quarto d, cioè il punto che soddisfa alla relazione

$$\frac{d'a'}{d'b'} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{da}{db} : \frac{ca}{cb}.$$

Conduciamo pel punto a una retta indefinita in una direzione qualunque, e prendiamo sopra questa retta i segmenti ab_1, ac_1 eguali rispettivamente ad $a'b'$, $a'c'$. Tiriamo le due rette bb_1, cc_1, e pel loro punto di concorso O la retta Od che incontrerà la retta ausiliaria ab_1 in un punto d_1. Finalmente prendiamo sulla retta $a'b'$ il segmento $a'd' = ad_1$, e il punto cercato d' sarà determinato.

Questa costruzione si applica al caso in cui i punti a', b', c' si trovano sulla stessa retta con a, b, c, d.

PROBLEMA XI*. — *Determinare in due fasci di quattro rette corrispondenti una ad una rispettivamente, che hanno i loro rapporti anarmonici eguali, il quarto raggio del secondo fascio, quando tutti gli altri sono conosciuti. (fig. 190.)*

Sieno OA, OB, OC, OD i quattro raggi del primo fascio, e O'A', O'B', O'C' i tre raggi del secondo fascio, corrispondenti ai tre OA, OB, OC del primo; bisogna determinare il quarto raggio O'D'.

Conduciamo per un punto O_1 del raggio OA due rette O_1B_1, O_1C_1 che facciano con OO_1 angoli eguali rispettivamente ai due angoli B'O'A', C'O'A'; uniamo con una retta i punti nei quali queste due rette incontreranno rispettivamente i due raggi OB, OC. Pel punto d'intersezione D_1 di questa retta e del raggio OD conduciamo la retta O_1D_1, la quale farà con OO_1 un angolo eguale a quello che il raggio cercato $O'D'$ del secondo fascio fa con $O'A'$. Questo raggio è dunque determinato.

Questa costruzione si applica al caso in cui i due fasci avrebbero lo stesso centro O.

PROBLEMA XII'. — *Costruire il punto centrale e il sesto punto d' una involuzione.*

1°. Dati due segmenti aa', bb' determinare il punto centrale.

Se i due segmenti aa', bb' sono come nella figura 150, si descriveranno sopra questi due segmenti come diametri due cerchi la cui corda comune determinerà il punto centrale.

Se i due segmenti sono come nelle figure 148 e 149, si faranno passare per un punto g, preso fuori della retta ab, due cerchi aventi per corde rispettive i due segmenti aa', bb'. Questi due cerchi si taglieranno in un secondo punto g', e la retta gg' determinerà sopra ab un punto o che sarà il punto centrale, poichè $og \,.\, og' = oa \,.\, oa' = ob \,.\, ob'$.

Una costruzione indipendente dalla posizione dei due segmenti è fondata sulla relazione $\dfrac{oa}{ob} = \dfrac{ab'}{ba'}$. Pei punti a e b si condurranno due parallele aa_1, bb_1 eguali rispettivamente ad ab', ba'; la retta $a_1\,b_1$ che unisce le loro estremità determina il punto o. — I due segmenti aa_1, bb_1 si prenderanno nello stesso senso o in senso contrario, secondochè i due ab', ba', ai quali sono eguali, saranno essi stessi nello stesso senso o in senso contrario.

2°. Date due coppie di punti conjugati a, a' e b, b' e un quinto punto c d' una involuzione, determinare il sesto c'.

Per un punto g qualunque si faranno passare due circonferenze di cerchi aventi per corde rispettive i due segmenti aa', bb' che s' incontreranno in un secondo punto g'; la circonferenza che passa pei tre punti g, g' e c taglierà la retta abc in un secondo punto c' che sarà il sesto punto dell' involuzione.

Problemi da risolvere.

1\. — Iscrivere in un cerchio un triangolo di cui due lati passino per due punti dati e il terzo sia parallelo a una retta data.

2\. — Iscrivere in un cerchio un triangolo i cui tre lati, prolungati s' è necessario, passino per tre punti dati.

3\. — Se, per i vertici di un triangolo iscritto in un cerchio, si conducono delle tangenti, esse incontreranno i lati opposti in tre punti che sono in linea retta.

4\. — Condurre da un punto preso sulla bisettrice di un angolo dato una retta di una lunghezza data.

5\. — Dati un cerchio e una retta EF esterna ad esso (*fig.* 179), conducete il diametro CA perpendicolare ad EF e pel punto A una secante qualunque ABD; conducete per i punti B, D le tangenti BF, DE, e dimostrate che queste rette incontrano EF a egual distanza dal punto A.

6\. — Se per il mezzo di una corda data in un cerchio si conducono due altre corde qualunque, la retta che unisce due delle loro estremità e quella che passa per le altre due, incontrano la corda data in punti egualmente distanti dal mezzo di questa corda.

7\. — Descrivere una circonferenza tangente ad una retta e che passi per due punti dati.

8\. — Descrivere una circonferenza che passi per un punto e sia tangente a due rette date.

9\. — Descrivere un cerchio tangente a due rette e a un cerchio dati.

10. — Descrivere un cerchio tangente a un cerchio dato e che passi per due punti dati.

11. — Descrivere un cerchio tangente ad una retta, a un cerchio dati, e che passi per un punto dato.

12. — Descrivere un cerchio tangente a una retta e a due cerchi dati.

13. — Descrivere un cerchio tangente a due cerchi dati e che passi per un punto dato.

14. — Descrivere un cerchio tangente a tre cerchi dati.

15. — Condurre per due punti dati sopra una circonferenza, due secanti che si taglino sopra la circonferenza e incontrino un diametro dato in punti egualmente distanti dal centro.

16. — Descrivere un cerchio che passi per due punti dati e che intercetti sopra un cerchio dato un arco la cui corda sia d'una lunghezza data.

17. — Iscrivere in un cerchio un triangolo isoscele nel quale la somma della base e dell'altezza sia eguale a una retta data.

18. — Iscrivere un quadrato in una semicirconferenza.

19. — Costruire un triangolo di cui si conosce la grandezza e la posizione della base, la somma dei due lati, e una retta sulla quale il vertice dev'essere situato.

20. — Se un diametro AB (*fig.* 180) di un cerchio è diviso armonicamente nei punti C, D, e che per questi punti s'inalzino due perpendicolari sopra AB, dimostrare che qualunque tangente al cerchio incontra le due perpendicolari in due punti P e Q, tali che il rapporto delle loro distanze PO, QO al centro O del cerchio è costante.

21. — Tre rette AA′, BB′, CC′ parallele e disuguali essendo date, dimostrare che i punti d'incontro di AB con A′B′, di AC con A′C′ e di AD con A′D′ sono in linea retta.

22. — Se per un punto preso sul piano di un cerchio si conducono due secanti perpendicolari l'una all'altra, la somma dei quadrati dei quattro segmenti è costante.

23. — I mezzi delle diagonali di un quadrilatero completo sono in linea retta.

24. — Il punto di contatto di una tangente e i tre punti nei quali essa è incontrata da due altre tangenti e dalla retta che unisce i loro punti di contatto formano un sistema armonico.

25. — I sei punti d'intersezione di una trasversale qualunque coi lati di un quadrilatero e le diagonali interne sono in involuzione.

26. — I sei punti d'incontro di una trasversale qualunque con una circonferenza e i lati di un quadrilatero iscritto sono in involuzione.

27. — Quattro punti a, b, c, d e un punto mobile m essendo dati sopra una circonferenza, dimostrare che i rapporti anarmonici delle quattro rette ma, mb, mc, md sono costanti.

28. — I rapporti anarmonici di quattro rette che passano per lo stesso punto sono eguali a quelli dei loro poli rispetto a un cerchio.

29. — Se un quadrilatero è circoscritto ad un cerchio, i rapporti anarmonici dei punti d'incontro dei suoi lati con una tangente mobile sono costanti.

30*. — Se si considerano sui lati di un triangolo avente per vertici i centri di tre circonferenze, i tre centri di similitudine esterni: 1° i tre centri interni sono in involuzione; 2° due centri interni e un centro esterno sono in involuzione.

31*. — Se i lati di un poligono qualunque sono tagliati da una trasversale, il prodotto dei segmenti che non hanno estremità comuni sarà uguale al prodotto degli altri segmenti.

32*. — In qualunque quadrilatero iscritto, il punto d'incontro delle diagonali, e i punti di concorso dei lati opposti, formano un triangolo di cui ciascun vertice è il polo del lato opposto.

33*. — In qualunque quadrilatero completo circoscritto, ciascuna delle diagonali è la polare del punto d'intersezione delle altre due.

34*. — Se due quadrilateri sono l'uno iscritto e l'altro circoscritto a uno stesso cerchio, in modo che i vertici del primo sieno i punti di contatto dei lati del secondo: 1° i punti di concorso dei lati opposti di questi quadrilateri sono situati sopra una medesima retta; 2° le diagonali del quadrilatero iscritto e quelle del quadrilatero circoscritto si tagliano in uno stesso punto, polo di questa retta; 3° i punti di concorso dei lati opposti del quadrilatero iscritto sono situati sulle diagonali del quadrilatero circoscritto.

35*. — In qualunque esagono iscritto al cerchio, i punti di concorso dei lati opposti presi due a due sono tutti e tre in linea retta.

36*. — In qualunque esagono circoscritto al cerchio, le diagonali condotte dai vertici opposti, presi due a due, si tagliano in uno stesso punto.

37*. — Prolungate la base BC di un triangolo isoscele ABC, d'una lunghezza CD eguale a BC; unite D col mezzo E di AB; la retta DE incontra AC in F e si ha $CF = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} AB$; prendete sopra AB una parte AG eguale a CF; conducete DG che incontra AC in H mezzo di AC; sia S il punto d'intersezione delle diagonali GF, EH del quadrilatero GHEF; conducete DT che incontra AB in K, si avrà

$$AB = 15GK = 10EK.$$

38*. — Dati due cerchi in uno stesso piano, nel triangolo formato dalle due tangenti interne e una tangente esterna, il rettangolo dei due lati che sono tangenti interne è equivalente alla somma del rettangolo delle due tangenti interne terminate al punto di contatto, e del rettangolo dei raggi.

39*. — Tutte le circonferenze che hanno i loro centri sopra una stessa retta e che tagliano ad angolo retto una circonferenza data hanno lo stesso asse radicale, e tutte queste circonferenze prese due a due e la circonferenza data hanno lo stesso centro radicale.

40*. — Dati un quadrilatero ABCD e un punto O nel suo piano, si unisca questo punto ai mezzi dei lati e delle diagonali del quadrilatero. Per ciascun punto medio si conduce una parallela alla retta che unisce O al mezzo dello lato opposto. Provare che le sei parallele concorrono nello stesso punto.

41*. — Sia ABCD un quadrilatero tagliato da una trasversale in α sul lato AB e in β sul lato opposto CD; sieno α' il conjugato armonico di α rispetto ai punti A, B, e β' il conjugato armonico di β rispetto ai punti C, D; conduciamo la retta $\alpha'\beta'$; facciamo una costruzione analoga sui lati opposti AC, BD e sulle diagonali AC, BD: le tre rette passano per lo stesso punto.

LUOGHI GEOMETRICI.

1. — Data una corda AB in un cerchio, se si conduce per una delle sue estremità, B, una secante, e che si prenda CM = CA, qual è il luogo del punto M? *(fig. 181.)*

2. — Qual è il luogo di quei punti che godono della proprietà che la somma o la differenza delle distanze di ciascuno d'essi a due rette date sia eguale a una linea data *m*?

3. — Sopra due rette rettangolari si fanno strisciare l'estremità dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo; qual è il luogo descritto dal vertice dell'angolo retto?

4. — Qual è il luogo di quei punti la cui distanza alla base di un triangolo isoscele è media proporzionale tra le sue distanze ai due altri lati?

5. — Trovare il luogo dei punti tali che due segmenti dati di una stessa retta sieno veduti da ciascuno di questi punti sotto angoli eguali.

6. — Trovare il luogo dei punti tali che due cerchi dati siano veduti da ciascuno di questi punti sotto angoli eguali.

7. — Per un punto A di un cerchio conducete una secante e prendete una lunghezza AM tale che $AM \times AB = K^2$. Qual è il luogo del punto M? *(fig. 182.)*

8. — Per un punto A di un cerchio conducete una se-

cante e prendete una lunghezza AM tale che si abbia AB : BM :: p : q. Qual è il luogo del punto M?

9. — Trovare il luogo dei punti M tali che unendo ciascuno di essi colle due estremità di due rette date AB, CD i triangoli MAB, MCD siano tra loro come due linee date.

10. — Qual è il luogo dei vertici dei triangoli che hanno a comune la base e la mediana di uno degli altri due lati?

11. — Sia AB un diametro del cerchio BO; conducete una secante BCD e prendete CD = BC; unite il punto D al centro O, il punto C al punto A e determinate il luogo del punto M, intersezione delle rette AC, OD. (*fig.* 183.)

12. — Da un punto qualunque A del prolungamento del diametro BD, conducete la tangente AC, la bisettrice dell'angolo CAO e cercate il luogo del punto M preso sulla perpendicolare OM, condotta dal centro O alla bisettrice AM. (*fig.* 184.)

13. — Per un punto O dell'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC, conducete una secante qualunque DE, descrivete i cerchi OBE, OCD e cercate il luogo del punto M nel quale i due cerchi si tagliano. (*fig.* 185.)

14. — Dal punto A conducete due rette qualunque AB, AM che formino fra loro un angolo dato; prolungate la prima retta sino all'incontro di una retta CD data e prendete sull'altra AM un punto M tale che si abbia AM : AB :: p : q, e determinate il luogo del punto M. (*fig.* 186.)

15. — Sostituite nell'enunciato precedente alla retta CD una circonferenza, e cercate il luogo del punto M.

16. — Due rette parallele OA, BE e la perpendicolare OB essendo date, prendete OA = OB, conducete pel punto O una secante qualunque OD, prendete OC = DB e cercate il luogo del punto M d'incontro delle rette DO, AC. (*fig.* 187.)

17. — Trovare il luogo dei mezzi delle corde intercette da un cerchio dato sulle secanti condotte per un punto dato.

18. — Trovare il luogo di punti tali che i piedi delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi sui lati di un triangolo dato siano in linea retta.

19. — Dati un cerchio BO e un diametro AC, condu-

cete un raggio qualunque OC, tirate CD perpendicolare ad AB e prendete OM = CD. Quale sarà il luogo del punto M? *(fig. 188.)*

20. — *La stessa figura.* Prendete OM = OD. Quale sarà il luogo del punto M?

21. — Se, per costruire il quadrato ABCD si danno solamente i tre lati AB, BC, CD, e la diagonale AC, il quadrilatero è indeterminato; 1° qual'è allora il luogo del quarto vertice D? 2° qual'è il luogo del mezzo della diagonale BD? qual'è il luogo del mezzo della retta che unisce i mezzi delle diagonali?

LIBRO QUARTO.

PROPRIETÀ METRICHE DELLE FIGURE.

CAPITOLO I.

Misura delle superficie piane.

Si chiama *area* di una figura la misura della sua estensione.

L'*altezza* d'un triangolo ABC è la perpendicolare AD condotta da un vertice A alla direzione del lato opposto BC preso per base. *(fig. 191.)*

Il trapezio AC ha per *basi* i suoi due lati paralleli AB, CD, e per *altezza* la perpendicolare EF che misura la distanza delle sue basi. *(fig. 192.)*

L'*altezza* di un parallelogrammo AC è la perpendicolare EF, che misura la distanza dei due lati opposti AB, CD che si prendono per basi del parallelogrammo. *(fig. 193.)*

TEOREMA I.

Il rapporto di due rettangoli AC, AE *che hanno la stessà altezza* AB *è uguale a quello delle loro basi* BC, BE.

1°. Suppongo in prima le basi commensurabili e la loro massima comune misura BG *(fig. 194)* contenuta 5 volte in BC, 3 volte in BE, di maniera che

$$BC : BE :: 5 : 3.$$

Per i punti di divisione delle basi conduco delle perpendicolari a BC; queste linee dividono il rettangolo AC in 5 rettangoli eguali ad ABGK perchè hanno basi ed altezze eguali. Il rettangolo AE contenendo 3 volte ABGK, si ha

$$\text{rett. } AC : \text{rett. } AE :: 5 : 3,$$

e per conseguenza

$$\text{rett. } AC : \text{rett. } AE :: BC : BE.$$

2°. Se le basi sono incommensurabili, divido una di esse, BE per esempio *(fig. 195)*, in 10 parti eguali, e suppongo BC maggiore di 16 volte ma minore di 17 volte $\frac{1}{10}$ di BE; il rapporto $\frac{BC}{BE}$ è compreso tra $\frac{16}{10}$ e $\frac{17}{10}$. Conducendo per i punti di divisione di BC delle perpendicolari a questa base, divido il rettangolo AE in 10 parti eguali; poichè il rettangolo AC contiene 16 volte il decimo del rettangolo AE con un resto minore di questo decimo, il rapporto $\frac{\text{rett. } AC}{\text{rett. } AE}$ è compreso tra $\frac{16}{10}$ e $\frac{17}{10}$; dunque i rapporti $\frac{\text{rett. } AC}{\text{rett. } AE}$, $\frac{BC}{BE}$ contengono lo stesso numero di decimi.

Similmente si proverebbe che essi contengono lo stesso numero d'unità decimali di un ordine qualunque; dunque questi rapporti sono eguali.

TEOREMA II.

Il rapporto di due rettangoli qualunque è uguale al prodotto dei rapporti delle basi e delle altezze. (fig. 196.)

Siano R, R′ due rettangoli, *a*, *a′* le loro altezze, *b*, *b′* le loro basi. Formo un rettangolo R″ avente l'altezza *a* del primo e la base *b′* del secondo. I due rettangoli R, R″ hanno la stessa altezza, dunque

$$\frac{R}{R''}=\frac{b}{b'}.$$

I due rettangoli R″, R′ le cui basi sono eguali danno anche:

$$\frac{R''}{R'}=\frac{a}{a'}.$$

Moltiplico queste due eguaglianze membro a membro e trovo:

$$\frac{R}{R'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}.$$

Corollario. — Supponendo

$$a=1^{m},5,\ b=3^{m},2,\ a'=1^{m},2,\ b'=2^{m},4,$$

si ha:

$$\frac{R}{R'}=\frac{1,5}{1,2}\times\frac{3,2}{2,4}=\frac{15\times32}{12\times24}=\frac{5}{3}.$$

Dunque il rettangolo R′ è uguale ai $\frac{3}{5}$ di R.

TEOREMA III.

L'area d'un rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, se si prende per unità di superficie il quadrato fatto sull'unità lineare. (fig. 197)

Poichè il metro è l'unità lineare, se si conviene di prendere per unità di superficie il quadrato fatto sul metro, la misura di un rettangolo è uguale al rapporto di questo rettangolo al metro quadrato.

Sia R un rettangolo avente b per base e a per altezza; se s'indica con Q il quadrato fatto sull'unità lineare m, il teorema precedente dà l'eguaglianza:

$$\frac{R}{Q}=\frac{a}{m}\times\frac{b}{m}.$$

Ma i rapporti $\frac{R}{Q}$, $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ rappresentano le misure del rettangolo, della sua altezza e della sua base; dunque il numero astratto che esprime l'area d'un rettangolo è uguale al prodotto dei numeri astratti che esprimono la sua altezza e la sua base. Lo che si enuncia in modo abbreviato, dicendo che un rettangolo è uguale al prodotto della sua altezza per la sua base.

Corollario. — L'area di un quadrato è uguale al prodotto della sua altezza per la sua base, cioè alla seconda potenza del suo lato.

Scolio I. — La base e l'altezza di un rettangolo hanno ricevuto il nome di *dimensioni* della sua superficie.

Scolio II. — Si chiama *rettangolo* di due linee A e B il prodotto dei due numeri che esprimono le lunghezze di queste linee riferite all'unità lineare; — *quadrato* di una linea A il quadrato del numero che esprime la lunghezza di A.

TEOREMA IV.

L' area di un parallelogrammo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza. (fig. 198.)

Per le estremità A e B della base AB del parallelogrammo AC, conduco delle perpendicolari a questa linea sino all' incontro di DC. I triangoli rettangoli BCE, ADF sono eguali perchè hanno l' ipotenusa ed un lato rispettivamente eguali. Se li tolgo successivamente dal quadrilatero ABCF, il parallelogrammo AC e il rettangolo AE che trovo per resti sono equivalenti.

Ma il rettangolo ha per misura $AB \times BE$; dunque l' area del parallelogrammo è anche uguale ad $AB \times BE$, cioè al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. — Due parallelogrammi che hanno le basi eguali stanno tra loro come le respettive altezze; — se le altezze sono eguali, questi parallelogrammi stanno tra loro come le respettive basi.

TEOREMA V.

L' area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza. (fig. 199.)

Sia ABC il triangolo dato; conduco AD parallela a BC e CD parallela ad AB. I triangoli ABC, ACD sono eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali; quindi il triangolo ABC è equivalente alla metà del parallelogrammo BD, la cui base ed altezza sono le medesime di quelle del triangolo; ma il parallelogrammo ha per misura $BC \times AE$; dunque l' area del triangolo ABC è uguale alla metà di $BC \times AE$, cioè alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza.

Scolio. — Due triangoli che hanno basi eguali stanno tra loro come le respettive altezze; — se le altezze sono eguali, questi triangoli stanno tra loro come le respettive basi.

TEOREMA VI.

L' area di un trapezio ABCD è *uguale al prodotto della sua altezza* AE *per la semisomma delle sue basi*, AB, CD. *(fig. 200.)*

Prolungo la base DC per una lunghezza CF eguale ad AB, ed unisco il punto A col punto F. I triangoli ABG, CGF sono eguali perchè hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali; se dunque li tolgo successivamente dalla figura intera ABGFD, il trapezio ABCD ed il triangolo ADF che ottengo per resti sono equivalenti. Ma il triangolo ha per misura $AE \times \frac{1}{2} DF$; dunque l'area del trapezio è anche eguale ad $AE \times \frac{1}{2} DF$, cioè al prodotto della sua altezza per la semi somma delle sue basi DC, AB.

Corollario. — Il trapezio ha anche per misura il prodotto della sua altezza AE per la retta GH che unisce i mezzi dei suoi lati non paralleli.

TEOREMA VII.

Misurare la superficie di un poligono qualunque. (fig. 201.)

Per valutare l'area di un poligono si decompone in triangoli, unendo un punto qualunque O dell'interno a tutti i vertici. Si calcolano le aree di questi triangoli e se ne fa la somma.

Si può anche procedere in un altro modo. Conduco la diagonale più lunga KC *(fig. 202)* del poligono che si vuol valutare ABCDHKL e dai vertici esterni a questa retta tiro delle perpendicolari sulla sua direzione. Queste perpendicolari decompongono la figura in triangoli rettangoli e in trapezi. Si calcolano le aree di queste figure parziali e se ne fa la somma.

Corollario. — Se il poligono è regolare e se, usando il primo metodo, si prende il centro per vertice dei triangoli, ciascuno di essi ha per altezza il raggio del cerchio iscritto e per base un lato del poligono. Dunque l' *area del poligono regolare è uguale al prodotto del suo perimetro per la metà del raggio del cerchio iscritto.*

TEOREMA VIII.

Il rapporto di due triangoli ABC, DEF *che hanno gli angoli* A *e* D *uguali, pareggia quello dei prodotti dei lati di ciascuno di questi angoli. (fig. 203.)*

Si conduca la retta BG perpendicolare ad AC e la retta EH perpendicolare a DF; ciascuno dei triangoli ABC, DEF avendo per misura la metà del prodotto della sua base per la sua altezza, si ha:

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC\times BG}{DF\times EH}=\frac{AC}{DF}\times\frac{BG}{EH}.$$

I triangoli rettangoli ABG, DEH sono equiangoli e danno:

$$\frac{BG}{EH}=\frac{AB}{DE};$$

dunque

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC\times AB}{DF\times DE}.$$

Corollario I. — *Il rapporto di due triangoli simili (fig. 204)* ABC, DEF *è uguale a quello dei quadrati dei lati omologhi* AB, DE.

Infatti, dall'eguaglianza degli angoli A e D e dalla proporzionalità dei loro lati, risulta:

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB\times AC}{DE\times DF}$$
$$\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE};$$

dunque

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB^2}{DE^2}.$$

Corollario II.* — *Il quadrato fatto sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti. (fig. 205.)*

Dal vertice A dell'angolo retto del triangolo rettangolo ABC conduciamo la perpendicolare AD sull'ipotenusa; i tre triangoli rettangoli ABC, ABD, ADC sono equiangoli e quindi simili; laonde avremo

$$ABC : ABD : ADC :: BC^2 : BA^2 : AC^2;$$

ma il triangolo ABC è uguale alla somma dei due triangoli ABD, ADC, quindi

$$BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

TEOREMA IX.

Il rapporto dei perimetri di due poligoni simili è uguale a quello di due lati omologhi, e il rapporto delle loro superficie è uguale a quello dei quadrati di questi lati. (fig. 206.)

1°. Dalla simiglianza dei poligoni ABCDE, FGHKL si deduce:

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}=\ldots\ldots=\frac{AB+BC+CD+\ldots}{FG+GH+HK+\ldots};$$

dunque il rapporto dei perimetri è uguale a quello di due lati omologhi.

2°. Conduciamo per due vertici omologhi A e F le diagonali in ciascuno dei poligoni. I triangoli ABC, ACD, ADE essendo rispettivamente simili ai triangoli FGH, FHK, FKL, abbiamo le seguenti eguaglianze:

$$\frac{ABC}{FGH}=\frac{AC^2}{FH^2}.$$

$$\frac{ACD}{FHK}=\frac{AC^2}{FH^2}=\frac{AD^2}{FK^2}.$$

$$\frac{ADE}{FKL}=\frac{AD^2}{FK^2}.$$

Poichè i rapporti precedenti sono eguali due a due, ne risulta

$$\frac{ABC}{FGH}=\frac{ACD}{FHK}=\frac{ADE}{FKL}=\frac{ABC+ACD+ADE}{FGH+FHK+FKL};$$

dunque il rapporto dei poligoni ABCDE, FGHKL è uguale a quello dei due triangoli simili ABC, FGH, cioè a quello dei quadrati di due lati omologhi AB, FG.

COROLLARIO I. — I perimetri di due poligoni regolari simili stanno fra loro come i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto; e le loro superficie come i quadrati di questi raggi. *(fig. 207.)*

Siano AB, *ab* i lati di due poligoni simili, e C, *c* i loro centri; i due triangoli ABC, *abc* sono equiangoli e per conseguenza simili. Lo stesso vale pe' triangoli rettangoli ADC, *adc;* dunque, indicando con P e *p* i perimetri e con S e *s* le superficie dei poligoni AB, *ab,* si ha:

$$\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd},$$
$$\frac{S}{s}=\frac{AB^2}{ab^2}=\frac{AC^2}{ac^2}=\frac{CD^2}{cd^2}.$$

COROLLARIO II.* — *La figura descritta sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sopra gli altri due lati.*

Questa proposizione è conseguenza evidente del teorema IX e del corollario II del teorema precedente.

CAPITOLO II.

Relazioni tra i lati di un triangolo.

LEMMA I. — *Il quadrato della somma di due linee rette è uguale alla somma dei quadrati di queste linee aumentata di due volte il loro rettangolo. (fig. 208.)*

Sulla retta AC, eguale alla somma delle rette AB, BC, costruisco un quadrato AD; prendo sul lato AE la retta AF eguale ad AB e conduco FG parallela ad AC, BK parallela ad AE. Queste due linee decompongono il quadrato AD in quattro parti: la prima ABHF è il quadrato di AB, la seconda GDKH è il quadrato di BC, e le altre due BCGH, EFHK sono rettangoli aventi per dimensioni linee eguali ad AB e a BC; dunque

$$(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times BC.$$

Corollario. — Se le rette AB, BC sono eguali, si ha:

$$AC^2 = 4\,AB^2.$$

Lemma II. — *Il quadrato della differenza di due linee rette è uguale alla somma dei quadrati di queste linee, diminuita di due volte il loro rettangolo. (fig. 209.)*

Sia AC la differenza delle due rette AB, BC. Sopra AB e sopra BC costruisco i quadrati ABDE, BCGF; prendo sopra AE la retta AL eguale ad AC e prolungo GC sino all'incontro di LH, parallela ad AB. La somma dei quadrati di AB e di BC è decomposta in tre parti: La prima ACKL è il quadrato di AC, e le altre due GKHF, DELH sono rettangoli aventi per dimensioni linee eguali ad AB e a BC; dunque

$$(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC.$$

Lemma III. — *La differenza di due quadrati è uguale al rettangolo della somma e della differenza dei lati dei due quadrati. (fig. 210.)*

Sieno ABCD, CEFG due quadrati; prolungo EF sino all'incontro di AD e AB per una quantità BK eguale a GF. I due rettangoli BELK, DGFH sono eguali, perchè hanno basi eguali ed altezze eguali; dunque il rettangolo AKLH è equivalente al poligono ABEFGD, differenza dei due quadrati dati, e si ha:

$$AB^2 - BK^2 = (AB + BK) \times (AB - BK).$$

TEOREMA I.

Il quadrato del lato opposto all' angolo retto di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati. (fig. 211.)

Costruisco un quadrato sopra ciascuno dei lati del triangolo rettangolo ABC e conduco dal vertice dell' angolo retto BAC la retta AM perpendicolare all' ipotenusa BC. La linea AM divide il quadrato BK fatto sull' ipotenusa in due rettangoli BM, CM rispettivamente equivalenti ai quadrati AE, AF, fatti sui lati dell'angolo retto.

Infatti prolungo le rette AM, BH sino all' incontro di ED; i due triangoli rettangoli ABC, EBO sono eguali, perchè il lato AB è uguale ad EB e l' angolo ABC eguale ad EBO; dunque le ipotenuse BC, BO sono eguali. Il rettangolo BM e il parallelogrammo ABON, sono equivalenti, perchè hanno basi eguali BH, BO e la stessa altezza BL; ma il parallelogrammo AO è equivalente al quadrato AE, perchè hanno la stessa base AB e la stessa altezza AD; dunque il rettangolo BM e il quadrato AE sono equivalenti.

Similmente si dimostrerebbe l' equivalenza del rettangolo CM e del quadrato AF; dunque si ha:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Il Sig.re

Altra dimostrazione. Conduciamo *(fig. 212)* dal vertice A dell' angolo retto la perpendicolare AM all' ipotenusa; il prolungamento MN di questa retta divide il quadrato BCDE in due rettangoli BENM, CDNM, equivalenti rispettivamente ai quadrati ABFG, ACHK. Infatti l'area del rettangolo BENM è il doppio di quella del triangolo ABE, perchè hanno la stessa base BE ed altezze uguali. Parimente l'area del quadrato ABFG è doppia di quella del triangolo CBF, perchè hanno la stessa base BF e la stessa altezza. Ma i triangoli ABE, CBF sono eguali come aventi il lato AB $=$ FB, il lato BE $=$ BC e l'angolo FBC $=$ ABE perchè entrambi pareggiano un angolo retto più l'angolo ABC; dunque il rettangolo BENM è equivalente al quadrato ABFG. Un ragionamento analogo proverebbe che il rettangolo CDNM è equivalente al quadrato ACHK; per conseguenza il quadrato BCDE fatto sull'ipotenusa BC è equivalente alla somma dei quadrati ABFG, ACHK fatti sugli altri due lati AB, AC.

Corollario I.—Il quadrato ABCD *(fig. 213)* è equivalente alla metà del quadrato della sua diagonale AC.

Infatti il triangolo rettangolo ABC dà:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2.$$

Da quest'eguaglianza risulta la proporzione:

$$AC^2 : AB^2 :: 2 : 1,$$

da cui

$$AC : AB :: \sqrt{2} : 1;$$

dunque il rapporto della diagonale al lato del quadrato è incommensurabile.

Corollario II. — *I quadrati fatti sui due lati dell'angolo retto del triangolo rettangolo* ABC *sono proporzionali alle projezioni di questi lati sull'ipotenusa.*

Infatti il rapporto dei quadrati ABFG, ACHK è lo stesso di quello dei rettangoli BENM, CDNM, ai quali essi sono equivalenti; per conseguenza, è uguale al rapporto delle basi BM, CM di questi rettangoli che hanno la stessa altezza MN.

Corollario III. — *I quadrati fatti sull' ipotenusa e sopra uno dei lati dell' angolo retto del triangolo rettangolo* BC, *sono proporzionali all' ipotenusa e alla projezione del lato dell' angolo retto sull' ipotenusa.*

Il rapporto dei quadrati BCDE, ABFG è lo stesso di quello del quadrato BCDE e del rettangolo BENM; per conseguenza è uguale al rapporto delle basi BC e BM di questi rettangoli che hanno la stessa altezza BE.

TEOREMA II.

Il quadrato del lato AB *opposto all' angolo acuto* C *del triangolo* ABC, *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC, BC *del triangolo, diminuita di due volte il rettangolo di uno di questi lati per la projezione del secondo sul primo. (fig. 214.)*

Sia BD perpendicolare ad AC; nel triangolo ABD si ha:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Ma

$$AD^2 = (AC - CD)^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \times CD;$$

dunque

$$AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2 - 2AC \times CD.$$

Dal triangolo rettangolo BCD si ha altresì:

$$CD^2 + BD^2 = BC^2;$$

dunque

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$$

Altra dimostrazione. — Sia *(fig. 215)* BAC un triangolo nel quale il lato BA è opposto all'angolo acuto BCA. Costruisco un quadrato sopra ciascuno dei lati di questo triangolo, e dai vertici A, B, C conduco le perpendicolari AS, BP, CN sui lati opposti; queste rette dividono i tre quadrati in sei rettangoli che sono equivalenti due a due, cioè quelli posti sui lati di uno stesso angolo. Consideriamo i due rettangoli AENM, AFPD. Il primo è doppio del triangolo CAE, perchè hanno la stessa base AE ed eguale altezza; il rettangolo AFPD è doppio del triangolo FAB per la stessa ragione; ma questi due triangoli sono equivalenti, dunque il rettangolo AENM è equivalente al rettangolo AFPD. Similmente si proverebbe che il rettangolo MBON è equivalente al rettangolo RSHB, e il rettangolo CRSK al rettangolo CDPG. Per conseguenza, il quadrato ABOE è equivalente alla somma dei rettangoli AFPD, BRSH, ovvero a quella dei quadrati CAFG, CBHK diminuita dei due rettangoli eguali CDPG, CRSK. Ma il rettangolo CDPG ha per misura il prodotto $CG \times CD = AC \times CD$; dunque

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times CD.$$

È evidente che CD è la projezione del lato BC dell'angolo acuto ACB sull'altro lato AC di quest'angolo.

TEOREMA III.

Il quadrato del lato AB, *opposto all' angolo ottuso* C *del triangolo* ABC, *è uguale alla somma dei quadrati dei due altri lati* AC, BC *del triangolo*, *au-*

mentata di due volte il rettangolo di uno di questi lati per la projezione del secondo sul primo. (fig. 216.)

Sia BD perpendicolare ad AC. Il triangolo rettangolo ABD dà:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Ma

$$AD^2 = (AC + DC)^2 = AC^2 + DC^2 + 2AC \times DC;$$

dunque

$$AB^2 = AC^2 + DC^2 + BD^2 + 2AC \times DC,$$

ovvero

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times DC,$$

poichè si ha

$$BC^2 = DC^2 + BD^2.$$

Altra dimostrazione. — Sia *(fig. 217)* ABC un triangolo nel quale il lato BA è opposto all'angolo ottuso ACB. Sopra ciascuno dei lati di questo triangolo costruisco un quadrato, e dico che il quadrato BAEO fatto sul lato BA è equivalente alla somma dei quadrati CAFG, CBHK, fatti sugli altri due lati AC, BC, aumentata di due volte il rettangolo avente per dimensioni il lato AC e la projezione del lato BC sopra AC.

Dai vertici del triangolo ABC conduco le perpendicolari AS, BP, CN ai lati opposti; queste rette dividono i tre quadrati in sei rettangoli. Come nel teorema precedente dimostrerò che due rettangoli consecutivi costruiti sui lati d'uno stesso angolo o sui loro prolungamenti sono equivalenti; per conseguenza il quadrato ABOE è equivalente alla somma dei rettangoli AFPD, BHSR, o a quella dei quadrati CAFG, CBHK aumentata dei due rettangoli eguali CGPD, CKSR. Ma il rettangolo CGPD ha per misura il prodotto $CG \times CD$ ovvero $AC \times CD$; si ha dunque

$$AB^2 = CB^2 + AC^2 + 2AC \times CD$$

La retta CD è la projezione del lato BC dell' angolo ottuso sull' altro lato AC di quest' angolo.

Scolio. — Dai tre teoremi precedenti risulta che *un angolo d' un triangolo non può essere acuto, retto, o ottuso senza che il quadrato del lato opposto non sia minore della somma dei quadrati degli altri due lati, eguale a questa somma, o maggiore.*

Se le misure dei tre lati d' un triangolo sono dati, i teoremi precedenti servono per calcolare la projezione d' un lato sopra uno degli altri due, e per conseguenza, la perpendicolare condotta da un vertice sul lato opposto. Per esempio, sia proposto di calcolare l' altezza BD del triangolo ABC, nel quale si ha $AB = 4$ metri, $BC = 3$ metri e $AC = 2$ metri. Osservo innanzi tutto che l' angolo ACB opposto ad AB è ottuso, perchè il quadrato di AB, o 16, è maggiore della somma dei quadrati di BC, AC, o $9 + 4$. Si ha dunque l' eguaglianza

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2\,AC\,.\,CD,$$

cioè

$$16 = 9 + 4 + 4\,.\,CD;$$

da cui

$$CD = 0^m,75.$$

Il triangolo rettangolo BCD dà

$$BD^2 = BC^2 - CD^2$$

ovvero

$$BD^2 = 8,4375,$$

da cui

$$BD = 2^m, 904$$

a meno di un semimillimetro.

TEOREMA IV.

Calcolare l' area d' un triangolo i cui tre lati sono dati (fig. 218.)

Siano a, b, c i lati del triangolo dato e $a < b < c$. L' angolo opposto al lato a è acuto; dunque, indicando con x la projezione del lato b sopra c, si ha l' eguaglianza:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.x,$$

da cui

$$2c.x = b^2 + c^2 - a^2,$$

e

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Sia h la perpendicolare condotta dall'estremità di b sopra c; si ha:

$$h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x);$$

dunque

$$h^2 = \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}\right),$$

ovvero

$$h^2 = \left[\frac{(b + c)^2 - a^2}{2c}\right]\left[\frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}\right],$$

e finalmente,

$$h^2 = \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)}{4c^2}.$$

Ma l'area del triangolo è uguale a $\frac{c \times h}{2}$: dunque

$$S = \frac{c \times h}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}.$$

A quest'espressione dell'area d'un triangolo possiamo dare una forma più semplice, introducendovi il perimetro del triangolo. Infatti sia:

$$a + b + c = 2p;$$

se ne deduce:

$$a + b - c = 2(p - c)$$
$$a + c - b = 2(p - b)$$
$$b + c - a = 2(p - a)$$

dunque

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Laonde si ha la regola: *Fate la semisomma dei tre lati del triangolo, diminuitela successivamente di ciascuno dei lati; calcolate il prodotto di queste tre differenze e del semiperimetro e prendete la radice quadrata di tale prodotto.* Questa radice è uguale all'area del triangolo.

Esempio. * Si abbia $a = 27^m,13$; $b = 19^m,24$; $c = 40^m,14$; avremo $2p = 86^m,51$, $p = 43^m,255$, $p - a = 16^m,125$, $p - b = 24^m,015$, $p - c = 3^m,115$.

Facendo uso dei logaritmi si ha

$$\begin{aligned}
\log.\ p &= 1,6360363\\
\log.\ (p-a) &= 1,2074997\\
\log.\ (p-b) &= 1,3804826\\
\log.\ (p-c) &= \underline{0,4934581}\\
& \quad\ 4,7174767\\
\log.\ S &= 2,3587383\\
S &= 228,4179
\end{aligned}$$

Quindi l'area del triangolo sarà, a meno di un diecimillesimo di metro quadrato, o a meno di un centimetro quadrato, $228^{mq},4170$.

COROLLARIO. — Se il triangolo è equilatero, si ha:

$$c = b = a,\ p = \frac{3a}{2} \text{ e } p - a = \frac{a}{2};\ \text{dunque } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

TEOREMA V.

La somma dei quadrati di due lati d'un triangolo è uguale a due volte la somma dei quadrati della metà del terzo lato e della sua mediana. (fig. 219.)

Sia M il mezzo del lato AB del triangolo ABC; la mediana CM divide questo triangolo in due altri che hanno al punto M due angoli supplementari AMC, BMC. Conduciamo la perpendicolare CD ad AB; il triangolo ACM, di cui l'angolo CMA è ottuso, dà:

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 + 2AM \times MD.$$

Il triangolo BCM di cui l'angolo CMB è acuto dà anche:

$$BC^2 = CM^2 + BM^2 - 2BM \times MD.$$

Aggiungendo quest' eguaglianze membro a membro, troveremo:

$$AC^2 + BC^2 = 2CM^2 + 2AM^2. \text{ [1]}$$

COROLLARIO. — Nei triangoli ABC che hanno una base comune AB e di cui la somma dei quadrati degli

[1] Indichiamo con a, b, c i lati del triangolo e con m, m', m'' le tre mediane; avremo

$$m^2 + m'^2 + m''^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).\ \text{(T.)}$$

altri due lati è costante, la retta CM ha anche un valore costante. Dunque *il luogo dei punti, tali che la somma dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi a due punti fissi sia costante, è una circonferenza di cerchio il cui centro coincide col mezzo della distanza dei due punti dati.*

SCOLIO. — L'eguaglianza precedente serve a calcolare la mediana CM quando i tre lati del triangolo sono dati.

TEOREMA VI.

La differenza dei quadrati di due lati d'un triangolo è uguale a due volte il rettangolo del terzo lato per la projezione della sua mediana sulla sua direzione. (fig. 219.)

Infatti, se nel triangolo ABC si conduce la mediana CM e la perpendicolare CD sul lato AB, si ha:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AM}^2 + 2AM \times MD,$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{BM}^2 - 2BM \times MD.$$

Sottraendo quest' eguaglianze membro a membro e riducendo, si trova, poichè AM è uguale a BM:

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4AM \times MD,$$

ovvero

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2AB \times MD.$$

COROLLARIO. — Nei triangoli ABC che hanno una base comune AB e di cui la differenza dei quadrati degli altri due lati è costante, MD ha anche un valore costante. Dunque, *il luogo dei punti, tali che la differenza dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi a due punti fissi sia costante, è una retta perpendicolare a quella che passa pei punti dati.*

TEOREMA VII.

Il rettangolo di due lati d' un triangolo è uguale al quadrato della bisettrice del loro angolo, aumentato del rettangolo dei due segmenti determinati dalla bisettrice sul terzo lato. (fig. 220.)

Sia CD la bisettrice dell' angolo ACB del triangolo ABC. Facciamo l' angolo DBE eguale a DCB e prolunghiamo CD sino all' incontro di BE. I due triangoli ACD, ECB sono equiangoli; giacchè i due angoli ACD, ECB sono eguali, come pure i due angoli CDA, CBE; dunque si ha

$$AC : CD + DE :: CD : CB,$$

da cui

$$AC \times CB = CD^2 + CD \times DE.$$

Ma i due triangoli ACD, EDB sono equiangoli, e si ha:

$$AD : DE :: CD : BD;$$

dunque

$$DE \times CD = AD \times BD,$$

e per conseguenza

$$AC \times CB = CD^2 + AD \times BD.$$

Scolio. — Quest' eguaglianza serve a calcolare la lunghezza della bisettrice CD, quando si conoscono i tre lati del triangolo.

TEOREMA VIII.

Il rettangolo di due lati d' un triangolo è uguale a quello del diametro del cerchio circoscritto e della *perpendicolare condotta sul terzo lato del vertice opposto. (fig. 221.)*

Sia ABC un triangolo iscritto nel cerchio di cui CD è un diametro; conduciamo CE perpendicolare ad AB ed uniamo A con D. I triangoli rettangoli ACD, BCE sono equiangoli, poichè gli angoli CDA, CBE sono iscritti nello stesso arco; dunque

$$\mathrm{CA} : \mathrm{CE} :: \mathrm{CD} : \mathrm{CB};$$

da cui

$$\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} = \mathrm{CE} \times \mathrm{CD}.$$

Corollario. — *Il raggio del cerchio circoscritto al triangolo* ABC *è uguale al prodotto dei tre lati diviso pel quadruplo dell' area del triangolo.*

Infatti, moltiplichiamo per AB i due membri dell' eguaglianza precedente; avremo:

$$\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} \times \mathrm{AB} = \mathrm{CD} \times \mathrm{CE} \times \mathrm{AB}.$$

Ma il prodotto CE $\times$ AB è uguale al doppio dell' area del triangolo ABC, dunque

$$\mathrm{CO} = \frac{\mathrm{CA} \times \mathrm{CB} \times \mathrm{AB}}{4\,\mathrm{ABC}},$$

ovvero, facendo uso delle notazioni del teorema IV:

$$\mathrm{R} = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

TEOREMA IX.

1°. *Il raggio del cerchio iscritto in un triangolo è uguale all' area di questo triangolo, divisa pel semiperimetro.*

2° *Il raggio d' un cerchio ex–iscritto è uguale all' area del triangolo divisa per l' eccesso del semiperimetro sul lato che questo cerchio tocca esteriormente (fig. 222.)*

Sia O il centro del cerchio iscritto al triangolo ABC; se si unisce ai tre vertici, ABC è decomposto in tre triangoli, aventi per altezza comune il raggio r del cerchio, e si ha:

$$AOB = \frac{AB}{2} \times r,$$

$$AOC = \frac{AC}{2} \times r,$$

$$BOC = \frac{BC}{2} \times r;$$

dunque

$$ABC = \left(\frac{AB + AC + BC}{2}\right) r.$$

Indicando con S la superficie e con $2p$ il perimetro del triangolo ABC, dall' eguaglianza precedente si deduce:

$$r = \frac{S}{p}.$$

2°. Sia O′ il centro del cerchio ex–iscritto che tocca esteriormente il lato BC. Supponendo $BC = a$, $O'E = r$, si ha:

$$ABO' = \frac{AB}{2} \times r',$$

$$ACO' = \frac{AC}{2} \times r',$$

$$BCO' = \frac{BC}{2} \times r';$$

da cui

$$ABC = ABO' + ACO' - BCO' = \left(\frac{AB + AC - BC}{2}\right) r',$$

dunque

$$r' = \frac{S}{p - a}.$$

Corollario. — *L'area di un triangolo è uguale alla radice quadrata del prodotto dei raggi del cerchio iscritto e dei tre cerchi ex-iscritti.*

Infatti se s' indicano con r'' e r''' i raggi dei cerchi ex-iscritti, che toccano esteriormente i lati b e c, si ha:

$$r = \frac{S}{p}, \ r' = \frac{S}{p - a}, \ r'' = \frac{S}{p - b}, \ r''' = \frac{S}{p - c},$$

da cui

$$r\ r'\ r''\ r''' = \frac{S^4}{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} = S^2,$$

e

$$S = \sqrt{r\ r'\ r''\ r'''}.$$

CAPITOLO III.

Relazioni tra i lati di un Quadrilatero.

TEOREMA I.

La somma dei quadrati dei lati d'un quadrilatero convesso è uguale alla somma dei quadrati delle dia-

gonali, aumentata di quattro volte il quadrato della retta che unisce il mezzo delle diagonali. (fig. 223.)

Siano M e N i mezzi delle diagonali BD, AC, e uniamo il punto M ai punti A, C, N. La retta AM essendo una mediana del triangolo ABD, si ha:

$$AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + 2DM^2.$$

Il triangolo BCD, di cui la retta CM è una mediana, dà anche:

$$BC^2 + CD^2 = 2CM^2 + 2DM^2.$$

Aggiungendo queste eguaglianze membro a membro, si ha:

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 2(AM^2 + CM^2) + 4DM^2.$$

Ma la retta MN è una mediana del triangolo AMC; dunque

$$AM^2 + CM^2 = 2MN^2 + 2CN^2$$

e

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 4MN^2 + 4CN^2 + 4DM^2,$$

ovvero

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 4MN^2 + AC^2 + BD^2.$$

Corollario. — Se il quadrilatero è un parallelogrammo, la retta MN è nulla, perchè le diagonali si tagliano nel loro mezzo. Dunque *la somma dei quadrati dei lati d' un parallelogrammo è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

La reciproca è evidente.

TEOREMA II.

Il prodotto delle due diagonali d' un quadrilatero iscritto è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti. (fig. 224.)

Facciamo nel punto B l'angolo CBE eguale ad ABD. La retta BE divide il triangolo ABC in due triangoli, che sono simili a quelli nei quali la diagonale BD decompone il quadrilatero. Infatti, i due triangoli BEC, BAD sono simili perchè equiangoli, avendo l' angolo EBC = ABD per costruzione, l'angolo BCE = BDA perchè iscritti nello stesso arco. Al modo stesso si prova la simiglianza degli altri due triangoli ABE, BDC. La similitudine di questi triangoli dà luogo alle seguenti proporzioni

$$BD : BC :: AD : CE$$
$$BD : BA :: DC : AE;$$

ovvero

$$BD \, . \, CE = BC \, . \, AD$$
$$BD \, . \, AE = BA \, . \, DC.$$

Aggiungendo quest'eguaglianze membro a membro, ed osservando che AE + CE = AC, si trova:

$$BD \, . \, AC = BC \, . \, AD + BA \, . \, DC.$$

TEOREMA III.

Le diagonali AC, BD *di un quadrilatero iscritto* ABCD *stanno tra loro come la somma dei prodotti dei due lati che passano per ciascuna delle estremità della prima diagonale, sta alla somma dei prodotti dei due* *lati che concorrono a ciascuna dell' estremità della seconda diagonale. (fig. 225.)*

Conduciamo BF perpendicolare alla diagonale AC del quadrilatero ABCD, sino all' incontro di DF, parallela a questa diagonale, e indichiamo con D il diametro del cerchio circoscritto. Il triangolo ABC essendo iscritto in questo cerchio, si ha:

$$AB \times BC = BE \times D,$$

Il triangolo ACD, iscritto nello stesso cerchio, dà anche:

$$AD \times DC = EF \times D;$$

dunque

$$AB \times BC + AD \times DC = BF \times D.$$

Considerando i due triangoli ABD, BCD nei quali la diagonale BD decompone il quadrilatero, e conducendo AH perpendicolare a BD, sino all' incontro di CH parallela a questa diagonale, si trova anche:

$$AB \times AD + BC \times DC = AH \times D;$$

dunque

$$\frac{AB \times BC + AD \times DC}{AB \times AD + BC \times DC} = \frac{BF}{AH}.$$

I triangoli rettangoli DBF, ACH sono equiangoli; giacchè i due angoli DBF, CAH sono eguali perchè hanno i loro lati perpendicolari; dunque

$$\frac{BF}{AH} = \frac{BD}{AC},$$

e si ha:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \times BC + AD \times DC}{AB \times AD + BC \times DC}.\ (^1)$$

(1) Se facciamo $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = \delta$, $AC = \delta'$,

Corollario. — Le due proporzioni precedenti fanno conoscere le diagonali d'un quadrilatero iscritto i cui lati sono dati. Si può calcolare poi il diametro del cerchio circoscritto e l'area del quadrilatero.

CAPITOLO IV.

Poligoni regolari.

Problema I. — *Iscrivere un quadrato in un cerchio. (fig. 226.)*

Conducete due diametri AC, BD perpendicolari l'uno

i teoremi II e III verranno rappresentati dalle seguenti relazioni:

$$\delta \cdot \delta' = b \cdot d + a \cdot c$$

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}$$

Osserviamo anzi tutto che la prima eguaglianza, che rappresenta il teorema di Tolomeo, contiene come caso particolare il teorema di Pitagora; poichè se il quadrilatero è un rettangolo si ha $\delta = \delta'$, $a = c$, $b = d$, e per conseguenza $\delta^2 = a^2 + b^2$.

Dalle due relazioni precedenti si ricava:

$$\delta^2 = \frac{(b \cdot d + a \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c},$$

$$\delta'^2 = \frac{(b \cdot d + a \cdot c)(a \cdot d + b \cdot c)}{a \cdot b + c \cdot d}.$$

Chiamando h la retta che unisce i mezzi delle diagonali, avremo pel teorema I,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \delta^2 + \delta'^2 + 4h^2.$$

Combinando insieme le tre ultime eguaglianze si ottiene il seguente valore di h

$$4h^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2 b \cdot d + (b^2 - d^2)^2 a \cdot c}{(a \cdot d + b \cdot c)(a \cdot b + c \cdot d)} \cdot \text{(T.)}$$

all'altro, ed unite l'estremità consecutive di questi diametri. Il quadrilatero ABCD è un quadrato, poichè la circonferenza è divisa in quattro archi eguali dai diametri perpendicolari.

Il triangolo ABO essendo rettangolo, si ha:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2AO^2;$$

dunque *il quadrato iscritto è il doppio del quadrat del raggio.*

Corollario. — Dall'eguaglianza precedente si deduce la proporzione:

$$AB : AO :: \sqrt{2} : 1,$$

che serve per calcolare uno dei termini AB, AO quando l'altro è dato.

Scolio. — Dividendo in 2, 4, 8, 16, ec., parti eguali ciascuno degli archi sottesi dai lati del quadrato, s'iscrivono i poligoni regolari di 8, 16, 32, ec., lati.

Problema II. — *Iscrivere un esagono regolare in un cerchio. (fig. 227.)*

Dico che il lato dell'esagono regolare iscritto è uguale al raggio. Infatti, sia AB un arco la cui corda è uguale al raggio AO; il triangolo ABO è equilatero e l'angolo AOB è uguale al terzo di 2 retti o al sesto di 4 retti. Dunque l'arco AB è la sesta parte della circonferenza.

Corollario. — *Il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto è uguale al triplo del quadrato del raggio.*

Se uniamo i vertici dell'esagono iscritto di due in due, avremo il triangolo equilatero BDF. Ma il triangolo rettangolo ABD dà:

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = 4AO^2 - AO^2,$$

dunque

$$BD^2 = 3AO^2,$$

e

$$BD : AO :: \sqrt{3} : 1.$$

Scolio. — Dividendo l'arco sotteso dal lato dell'esagono, in 2, 4, 8, 16 ec., parti eguali, s'iscrivono i poligoni regolari di 12, 24, 48, ec., lati.

Problema III. — *Iscrivere un decagono regolare in un cerchio. (fig. 228.)*

Il lato del decagono regolare è uguale al segmento maggiore OC del raggio OB diviso dal punto C in media ed estrema ragione. Infatti, sia AB una corda eguale ad OC; unisco il punto A ai punti O e C; si ha per ipotesi:

$$BO : CO :: CO : BC,$$

ovvero

$$AO : AB :: CO : BC;$$

dunque la retta AC divide l'angolo BAO del triangolo OAB in due parti eguali.

La stessa proporzione

$$BO : AB :: AB : BC$$

prova che i triangoli OAB, CAB hanno un angolo comune compreso tra lati proporzionali; dunque essi sono equiangoli e l'angolo BAC, metà di BAO, è uguale ad AOB. Ciascuno degli angoli BAO, ABO del triangolo isoscele OAB essendo il doppio di AOB, l'angolo al centro AOB è contenuto 5 volte in 2 retti o 10 volte in 4 retti. Dunque l'arco AB è uguale al decimo della circonferenza e la sua corda è il lato del decagono regolare.

Corollario. — Se R indica il raggio del cerchio, il lato del decagono regolare è uguale a $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Scolio. — Se uniamo due a due i vertici del decagono regolare, si forma il pentagono regolare.

Dividendo in 2, 4, 8, ec., parti eguali gli archi sottesi dai lati del decagono, s'iscrivono i poligoni regolari di 20, 40, 80, ec., lati. (¹)

(¹) La ricerca simultanea del lato del pentagono e del decagono regolare, si può ottenere nel seguente modo.

Supponiamo il problema risoluto e sia AOB l'angolo del pentagono ch'è uguale a 72° (*fig.* 229.) Facciamo nel punto A l'angolo OAD = AOB; l'angolo ADO è la metà di AOD. Uniamo il punto C nel quale AD incontra la circonferenza col centro O; i triangoli AOC, OCD sono anche isosceli: quindi CD = AO. I triangoli AOC, AOD sono equiangoli, quindi si ha:

$$AD : AO :: AO : AC;$$

ovvero

$$AO^2 = AD \,.\, AC = AD\,(AD - DC);$$

da cui

$$AD = \frac{AO}{2} + \sqrt{AO^2 + \left(\frac{AO}{2}\right)^2}.$$

Questo valore ci dà la seguente costruzione per ottenere il lato del pentagono regolare:

Dal centro O alzate la perpendicalare $OE = \frac{AO}{2}$ sopra AO; unite AE e prolungatela della quantità EF = EO; dai punti A e O come centri e con raggio AF descrivete due archi che si tagliano in D; AOD è l'angolo al centro del pentagono regolare; AOC quello del decagono: quindi AB è il lato del pentagono, AC quello del decagono.

Prolunghiamo CO sino a che incontri la circonferenza in P ed uniamo il punto A con P. Il triangolo rettangolo APC dà l'eguaglianza

$$CP \,.\, AN = AC \,.\, AP,$$

cioè, indicando con r il raggio del circolo

$$2r \,.\, \frac{1}{2}\, AB = AC \,.\, \sqrt{4r^2 - AC^2},$$

da cui

$$AB = \frac{AC}{r}\sqrt{4r^2 - AC^2};$$

ovvero, sostituendo per AC, lato del decagono, il suo valore, e facendo le riduzioni,

$$AB = \frac{1}{2}\, r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{(T.)}$$

Problema IV. — *Iscrivere un pentedecagono regolare in un cerchio dato. (fig. 230.)*

La frazione $\frac{1}{15}$ è uguale alla differenza delle frazioni $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{10}$; quindi prendete un arco AB eguale al sesto della circonferenza AO e diminuitelo dell'arco BC eguale al decimo di questa circonferenza, il resto ne sarà il quindicesimo; dunque la corda AC è il lato del pentedecagono regolare.

Scolio. — S'iscrivono i poligoni regolari di 30, 60, 120, ec. lati, dividendo in 2, 4, 8, ec. parti eguali gli archi sottesi dai lati del pentedecagono.

Problema V. — *Dati il raggio d'un cerchio e il lato d'un poligono regolare iscritto, calcolare il lato e l'area del poligono circoscritto simile. (fig. 231.)*

Sia ABC..... il poligono iscritto. Pei vertici A, B, C, ec., conduco le tangenti che formano il poligono circoscritto ADEC.... regolare e simile al poligono iscritto. Indico il raggio OB con r, il lato BA con l e il lato DE con L. I due triangoli rettangoli DBO, BFO essendo equiangoli, si ha:

$$DB : BF :: BO : FO,$$

ovvero

$$\frac{L}{2} : \frac{l}{2} :: r : \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

dunque

$$L = \frac{l\,r}{\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}}.$$

Siano n il numero dei lati del poligono, S la sua superficie. Poichè l'area del triangolo DEO è uguale a $BO \times BD$, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{nlr^2}{\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{1}{2}\,nrL\,.$$

Scolio. — Se supponiamo $n = 3$, $l = r\sqrt{3}$, si ha: $L = 2r\sqrt{3}$, $S = 3r^2\sqrt{3}$ pel lato e per l'area del triangolo equilatero circoscritto. (¹)

Problema VI. — *Dati i perimetri* p, P *d'un poligono regolare iscritto e del poligono simile circoscritto, calcolare i perimetri* p′, P′ *dei poligoni iscritto e circoscritto d'un numero doppio di lati. (fig. 232).*

Sia AB il lato del poligono iscritto nel cerchio AC. Conduco il raggio CF perpendicolare ad AB e la tangente DE al punto F, sino all'incontro dei raggi CA, CB. La retta DE è il lato del poligono circoscritto simile al poligono iscritto. Unisco il punto A con F e conduco le tangenti AG, BH. Le rette AF, GH sono i lati dei poligoni iscritto e circoscritto d'un numero doppio di lati.

1°. Sia n il numero dei lati del poligono AB; si ha:

$$p = AB \times n, \qquad P = ED \times n$$
$$p' = AF \times 2n, \qquad P' = GH \times 2n.$$

Poichè la retta ED è il doppio di DF, quest'eguaglianze danno:

$$P' : P :: GH : DF;$$

(¹) Indicando con p e s il perimetro e l'area del poligono iscritto e con P il perimetro del poligono circoscritto, si trovano facilmente le seguenti relazioni:

$$p = nl,\ P = nL = \frac{nrl}{\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}}$$

$$s = \frac{n}{2}\,l\,\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{nrl^2}{L}. \qquad \text{(T.)}$$

ma, la linea CG dividendo l'angolo FCD in due parti eguali, si ha:

$$GF : DG :: CF : CD :: p : P,$$

da cui:

$$2GF \text{ o } GH : DF :: 2p : P + p;$$

e per conseguenza:

$$P' : P :: 2p : P + p,$$

dalla quale proporzione si deduce:

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}.$$

2°. Dalle due eguaglianze $p = AB \times n$, $p' = AF \times 2n$, risulta che

$$p : p' :: AK : AF.$$

Ma i triangoli rettangoli AFK, CFG sono equiangoli, poichè gli angoli FAK, FCG hanno i loro lati perpendicolari, e si ha:

$$AK : AF :: CF : CG :: p' : P';$$

dunque

$$p : p' :: p' : P',$$

e

$$p' = \sqrt{p \times P'}.$$

Scolio. — Si ha: $P' - p' < \frac{1}{4}(P - p)$. (1)

(1) La proposizione contenuta in questo Scolio, cioè che *la differenza* $P' - p'$ *dei perimetri di due poligoni di* $2n$ *lati, iscritto e circoscritto a un cerchio dato, è minore del quarto della differenza* $P - p$ *tra i perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, iscritto e circoscritto allo stesso cerchio*, è data dall'Autore come conseguenza dei valori di P' e di p'; ma è facile ottenere lo stesso risultato mediante una costruzione geometrica dovuta al sig. Bertot.

Sieno (*fig.* 233) AB, CD i lati dei poligoni regolari di n lati, iscritto e

Problema VII. — *Date le aree* s, S *dei poligoni regolari simili, iscritto e circoscritto al medesimo cer-*

circoscritto; e AE il lato del poligono regolare iscritto di $2n$ lati. Se conduciamo la tangente FG parallela ad AE, e la terminiamo ai prolungamenti dei raggi OA, OE, questa tangente sarà il lato del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati. Avremo dunque

$$p = n \,.\, AB = 2n \,.\, AH, \qquad P = 2n \,.\, CE$$
$$p' = 2n \,.\, AE, \qquad P' = 2n \,.\, FG;$$

in guisa che basta dimostrare la seguente relazione:

$$FG - AE < \frac{1}{4}\,(CE - AH).$$

Conduciamo AML parallela a OE; avremo $FM = FG - AE$, $CL = CE - AH$; e la disuguaglianza diverrà $FM < \frac{1}{4}\,CL$.

Poichè la corda KE è bisettrice dell'angolo CEA, si ha $IK < \frac{1}{2}\,IN$; e per conseguenza, conducendo APQ parallela ad OKN : $AP < \frac{1}{4}\,AQ$. Laonde una parallela a CL, condotta dal punto P, e terminata ai lati dell'angolo CAL, sarebbe minore del quarto di CL. Ma FM essendo egualmente inclinata sui lati di quest'angolo è minore di questa parallela; dunque ec.

Dal problema VI si deduce una relazione utile a conoscere

Indichiamo infatti con p_n, p_{2n}, p_{4n} i perimetri dei poligoni regolari iscritti di n, $2n$, $4n$ lati, e con P_n, P_{2n}, P_{4n}, i perimetri dei poligoni regolari circoscritti corrispondenti. Si ha:

$$P_{4n} = \frac{2P_{2n}\,p_{2n}}{P_{2n} + p_{2n}},\quad p^2_{2n} = p_n \times P_{2n},\quad p^2_{4n} = p_{2n} \times P_{4n}.$$

Dalla seconda formola si deduce $P_{2n} = \frac{p^2_{2n}}{p_n}$; quindi la prima diventa

$$P_{4n} = \frac{2p^2_{2n}}{p_{2n} + p_n};$$

il quale valore sostituito nella terza, dà

$$p^2_{4n} = \frac{2\,p^3_{2n}}{p_{2n} + p_n}.$$

Rappresentando con m_k il rapporto del perimetro p_{4n} al perimetro p_{2n}, la relazione precedente può scriversi sotto la forma

$$m_k = \sqrt{\frac{2\,m_{k-1}}{m_{k-1} + 1}}. \qquad \text{(T.)}$$

chio, calcolare le aree s', S' dei poligoni regolari, iscritto e circoscritto d' un numero doppio di lati. (fig. 232.)

Facendo le medesime costruzioni che nel problema precedente si ha:

$$s = n \,.\, ABC, \qquad S = n \,.\, DEC$$
$$s' = 2n \,.\, AFC, \qquad S' = 2n \,.\, GHC,$$

dunque

$$s : s' :: ACK : AFC :: CK : CF.$$

e

$$s' : S :: AFC : DFC :: CA : CD.$$

Ma i triangoli equiangoli ACK, DCF danno:

$$CK : CF :: CA : CD;$$

dunque

$$s : s' :: s' : S,$$

e

$$s' = \sqrt{S \,.\, s}.$$

Si ha anche:

$$S' : S :: GCH : DCF :: 2GF : DF;$$

ma

$$GF : DG :: CF : CD :: CK : CF :: s : s',$$

da cui

$$2GF : DF :: 2s : s + s',$$

dunque

$$S' : S :: 2s : s + s',$$

e

$$S' = \frac{2S \,.\, s}{S + S'}$$

SCOLIO. — Si ha:

$$S' - s' < \frac{1}{4}(S - s).\ [1]$$

PROBLEMA VIII. — *Dati il raggio* r *e l' apotema* a *di un poligono regolare, calcolare il raggio* r' *e l' apotema* a' *del poligono regolare equivalente al poligono dato e d' un numero doppio di lati. (fig. 234.)*

Siano C il centro ed AB il lato del poligono dato;

[1] La proposizione contenuta in questo scolio, cioè che *la differenza* $S' - s'$ *tra le aree dei poligoni iscritto e circoscritto, di* $2n$ *lati, è minore del quarto della differenza* $S - s$ *tra le aree dei poligoni iscritto e circoscritto di* n *lati*, può dimostrarsi geometricamente nel seguente modo:

Osservando che $S' - s'$ e $S - s$ sono proporzionali ad AFG e ADFK; basta far vedere che il triangolo AFG è minore del quarto del trapezio ADFK, ovvero che si ha

$$FG < \frac{1}{4}(DF + AK).$$

Sia L il punto d' incontro della bisettrice CG con AK; avremo $FG = AG = AL = LF$, attesochè AF è la bisettrice dell'angolo GAB. La disuguaglianza precedente si riduce dunque a

$$FG < \frac{1}{2}(DG + LK).$$

Dalla somiglianza dei due triangoli rettangoli DAG, FLK si ha

$$\frac{DG}{FL} = \frac{AG}{LK} \text{ ovvero } \frac{DG}{GF} = \frac{GF}{LK}.$$

Ma la media per quoziente è sempre minore della media per differenza, dunque la disuguaglianza è dimostrata.

Con metodo analogo a quello seguito nella nota precedente, si trova

$$S^2_{4n} = 2\frac{S^3_{2n}}{S_{2n} + S_n}.$$

Indicando con μ_k il rapporto dell' area S_{4n} all' area S_{2n}, la relazione precedente si può scrivere sotto la forma:

$$\mu_k = \sqrt{2\frac{\mu_{k-1}}{\mu_{k-1} + 1}}.\ \text{(T.)}$$

si ha: AC $= r$, CD $= a$. Per costruire il poligono equivalente al poligono dato e d' un numero doppio di lati, trasformo il triangolo ACD, metà di ACB, in un triangolo isoscele GCE che gli sia equivalente. Allora GE è il lato e C il centro del poligono richiesto; dunque CE $= r'$, CF $= a'$.

Poichè i triangoli ACD, GCE sono equivalenti e hanno un angolo comune, si ha:

$$\overline{CE}^2 = CA \times CD;$$

dunque

$$r' = \sqrt{a \cdot r}.$$

I triangoli rettangoli AHD, CFE sono equiangoli, e danno:

$$CF : DH :: CE : AH,$$

ovvero

$$a' : a + r :: r' : \sqrt{2r(a+r)};$$

dunque

$$a' = \frac{(a+r)\,r'}{\sqrt{2r(a+r)}} = \sqrt{\frac{a(a+r)}{2}}.$$

Scolio. — Si ha:

$$r' - a' < \frac{1}{4}(r - a).$$

Problema IX. — *Dati il raggio* r *e l' apotema* a *d' un poligono regolare, calcolare il raggio* r' *e l' apotema* a' *del poligono regolare isoperimetro d' un numero doppio di lati. (fig. 235.)*

Siano C il centro e AB il lato del poligono dato; si ha: CA $= r$, CG $= a$. Conducete il raggio CD perpendicolare ad AB ed unite il punto D ai punti A e B. La retta EF che passa pei mezzi E, F delle corde AD, BD è parallela ad AB ed eguale alla metà di questa retta: dunque è il lato del poligono isoperimetro d' un numero di lati doppio. L'angolo ECF essendo la metà dell'angolo ACB, il punto C è anche il centro del poligono regolare, e si ha: $CE = r'$, $CK = a'$.

La retta EF divide DG in due parti eguali; dunque

$$CK = \frac{CD + CG}{2},$$

ovvero

$$a' = \frac{r + a}{2}.$$

Il triangolo rettangolo ECD dà anche

$$CE^2 = CD \times CK,$$

ovvero

$$r'^2 = r \cdot a';$$

dunque

$$r' = \sqrt{r \cdot a'}.$$

Scolio. — Si ha:

$$r' - a' < \frac{1}{4}(r - a). \text{ (}^1\text{)}$$

(1) Poichè $r > a$, dal valore di a' si deduce $a' > a$, $a' < r$, e dal valore di r', $r' < r$; quindi il raggio del secondo poligono è minore di quello del primo, e l'apotema del secondo poligono è maggiore di quello del primo; e per conseguenza la differenza tra il raggio e l'apotema diminuisce indefinitamente.

Dal punto C come centro descriviamo l'arco EOF; avremo $OK = r' - a'$. La corda EO è bisettrice dell'angolo DEF, dunque $OK < \frac{1}{2} DK$, $OK < \frac{1}{4} DG$, ovvero

$$r' - a' < \frac{1}{4}(r - a). \quad (T.)$$

CAPITOLO V.

Misura della circonferenza. — Area del cerchio.

Dicesi *variabile* qualunque quantità che in una data quistione può prendere successivamente differenti valori.

Una variabile è *indipendente*, quando i suoi valori sono affatto arbitrarii; è *dipendente* o *funzione* d' altre quantità, quando i valori che essa prende sono determinati da quelli di queste quantità. Così l'area di un triangolo è una variabile dipendente o una funzione della base e dell' altezza che sono variabili indipendenti.

Si chiama *limite* d' una quantità variabile una quantità fissa alla quale essa si avvicina indefinitamente senza poterla eguagliare.

Da questa definizione resulta che se una quantità variabile ha un limite, essa ne ha un solo, poichè non può tendere simultaneamente verso due quantità finite e disuguali.

Lemma I. — *Se due quantità variabili* v, v', *conservandosi sempre eguali fra loro, tendono verso i limiti* l, l', *questi limiti sono anche eguali.*

E invero poichè le variabili v, v' sono costantemente eguali, si ha:

$$l - v' = l - v;$$

Dunque v' si avvicina indefinitamente alla quantità fissa l, nel tempo stesso di v, e il suo limite l' è uguale a l.

Lemma II. — *Se due quantità variabili* v, v' *hanno per limiti* l *e* l', *la somma* v + v' *ha per limite* l + l'.

Infatti si ha

$$(l+l')-(v+v')=(l-v)+(l'-v').$$

Ma le differenze $l-v$, $l'-v'$ diminuiscono indefinitamente a misura che v e v' tendono verso i loro limiti l, l'; dunque la somma $v+v'$ si avvicina indefinitamente alla quantità fissa $l+l'$.

COROLLARIO. — Similmente si dimostra che la differenza $v-v'$ ha per limite $l-l'$.

LEMMA III. — *Se una quantità variabile* v *ha per limite* l *e se* m *è una quantità costante, il prodotto* $\mathrm{v}\times\mathrm{m}$ *ha per limite* $\mathrm{l}\times\mathrm{m}$.

Si ha

$$lm-vm=(l-v)\,m.$$

Ma la differenza $l-v$ diminuisce indefinitamente a misura che v si avvicina al suo limite l; dunque il prodotto vm tende indefinitamente verso lm.

COROLLARIO. — Similmente si dimostra che il quoziente $\frac{v}{m}$ ha per limite $\frac{l}{m}$.

Due archi sono *simili* quando sono intercetti sopra due circonferenze disuguali da angoli al centro eguali.

Due settori, due segmenti sono *simili* se gli angoli al centro corrispondenti sono eguali.

Una linea curva è *convessa* quando è tutta da uno stesso lato della sua tangente in ciascuno dei suoi punti. — La circonferenza del cerchio è una linea convessa.

Una linea curva convessa non può essere incontrata in più di due punti da una linea retta.

Dimostrazione analoga a quella del perimetro del poligono convesso.

TEOREMA I.

Qualunque linea poligonale convessa ABCD *è minore di una linea qualunque* AEFGD *che l'inviluppa e ha le stesse estremità* A *e* D. *(fig. 236.)*

Prolungo le rette AB, BC sino all' incontro della linea inviluppante, nei punti H e K. La più corta distanza di due punti essendo misurata dalla retta che li unisce, si hanno le disuguaglianze:

$$AB + BH < AE + EF + FH,$$
$$BC + CK < BH + HG + GK,$$
$$CD < CK + KD.$$

Aggiungendole membro a membro e sopprimendo le linee BH, CK comuni ai due membri della nuova disuguaglianza, si trova:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Scolio. — Similmente si dimostrerebbe che una linea poligonale convessa è minore di una linea qualunque che l' inviluppa da tutte le parti.

TEOREMA II.

1°. *La circonferenza è il limite dei perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti.*

2°. *Il cerchio è il limite delle loro superficie. (fig. 237.)*

1°. Sieno p e P i perimetri dei poligoni regolari di n lati, iscritto e circoscritto al cerchio AO. Se si fa crescere indefinitamente il numero n dei lati di questi poligoni, la variabile p cresce continuamente, restando tuttavia minore di circonferenza AO, mentre la variabile P decresce, restando sempre maggiore di circonferenza AO. Per dimostrare che questa circonferenza è un limite comune alle due variabili p, P, basta provare che la differenza P-p diminuisce indefinitamente a misura che il numero n aumenta.

Sieno AC il lato del poligono p e EG quello del poligono P, si ha:

$$P : p :: OF : OD,$$

da cui

$$P-p : P :: DF : OF,$$

e

$$P-p = \frac{P \times DF}{OF}.$$

Ma la linea DF è minore della corda dell'arco AF, cioè minore del lato del poligono regolare di $2n$ lati, e questo lato diminuisce indefinitamente a misura che n aumenta; di più il perimetro P va anche decrescendo e il raggio OF è costante; dunque P-p decresce indefinitamente. Per conseguenza la circonferenza è il limite dei perimetri P e p.

2°. S e s essendo le aree di questi stessi poligoni regolari, si ha:

$$S : s :: OF^2 : OD^2,$$

da cui

$$S - s : S :: OF^2 - OD^2 : OF^2,$$

e

$$S - s = \frac{S \times AD^2}{OF^2}.$$

Ma AD è minore del lato del poligono regolare di $2n$ lati, il quale diminuisce indefinitamente quando si fa crescere il numero n; dunque la differenza $S - s$ tende verso zero; e poichè le variabili S e s sono l'una sempre maggiore l'altra sempre minore del cerchio AO, ne segue che il cerchio è il limite delle aree S e s.

TEOREMA III.

1°. *Le circonferenze stanno tra loro come i raggi;*
2°. *I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi.*

1°. Sieno P e p i perimetri dei poligoni regolari di n lati, circoscritti l'uno al cerchio r e l'altro al cerchio R; se si suppone che il numero n cresca indefinitamente le variabili $\frac{P}{R}$, $\frac{p}{r}$ hanno rispettivamente per limiti $\frac{C}{R}$ e $\frac{c}{r}$, ove C è la circonferenza R, c la circonferenza r. Ma i perimetri di due poligoni regolari di un egual numero di lati, sono proporzionali ai loro raggi, quindi le due variabili $\frac{P}{R}$, $\frac{p}{r}$ sono costantemente eguali; dunque i loro limiti sono i medesimi e si ha:

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}.$$

2°. Indicando A ed a i cerchi di raggio R e r, si dimostrerebbe egualmente che,

$$\frac{A}{R^2} = \frac{a}{r^2}.$$

COROLLARIO I.—*Il rapporto di una circonferenza al suo diametro è costante.*

Infatti dall' eguaglianza

$$\frac{C}{R}=\frac{c}{r},$$

si deduce:

$$\frac{C}{2R}=\frac{c}{2r}.$$

Indicando questo rapporto con π, si ha:

$$\frac{C}{2R}=\pi, \text{ da cui } C=2\pi\, R.$$

COROLLARIO II. — Calcolare la lunghezza di un arco di cui sono dati il raggio R e il numero n di gradi.

La circonferenza o l' arco di 360° essendo eguale a $2\pi R$, la lunghezza dell' arco di un grado è espressa da $\frac{2\pi R}{360}$ e l' arco di n gradi è uguale a $\frac{\pi R n}{180}$.

TEOREMA IV.

1°. *Gli archi simili sono proporzionali ai raggi.*

2°. *I settori simili sono proporzionali ai quadrati dei raggi. (fig. 238.)*

1°. Se nei due cerchi AC, *ac*, gli angoli al centro ACB, *acb* sono eguali tra loro, gli archi AB, *ab* che essi intercettano sono simili.

Ma

$$ab : c :: acb : 4 \text{ retti}$$
$$AB : C :: ACB : 4 \text{ retti},$$

dunque

$$ab : AB :: c : C :: ac : AC.$$

2°. Sieno S, s le superficie dei settori ACB, acb; A, a le superficie dei cerchi rispettivi, avremo

$$s : a :: acb : 4 \text{ retti}$$
$$S : A :: ACB : 4 \text{ retti};$$

dunque

$$s : S :: a : A :: ac^2 : AC^2.$$

Corollario. — Due angoli ACB, acb (*fig. 239*) che hanno i loro vertici C, c nei centri di due cerchi differenti CA, ca sono tra loro come i rapporti $\frac{AB}{AC}$, $\frac{ab}{ac}$ degli archi che essi intercettano, ai raggi di questi cerchi.

Se dal punto C come centro si descrive, col raggio ac, l'arco DE tra i lati dell'angolo ACB, si ha:

$$ACB : acb :: DE : ab :: \frac{DE}{ac} : \frac{ab}{ac}.$$

Ma gli archi DE, AB sono simili, e

$$DE : ac :: AB : AC;$$

dunque

$$ACB : acb :: \frac{AB}{AC} : \frac{ab}{ac}.$$

TEOREMA V.

L'area del cerchio è uguale al prodotto della circonferenza per la metà del raggio.

Siano A e C l'area e la circonferenza del cerchio di raggio R; S e P l'area e il perimetro d'un poligono regolare circoscritto al cerchio medesimo. Se il numero dei lati di questo poligono cresce indefinitamente, la variabile S ha per limite A, e la variabile $P \times \frac{R}{2}$ ha per limite $C \times \frac{R}{2}$. Ma l'area di ciascun poligono essendo eguale al prodotto del suo perimetro per la metà del raggio del cerchio iscritto, le variabili S e $P \times \frac{R}{2}$ sono costantemente eguali; dunque i loro limiti sono eguali, e si ha:

$$A = C \times \frac{R}{2}.$$

Corollario I. — Se, in questa espressione dell'area del cerchio, si sostituisce $2\pi R$ a C, si trova:

$$A = \pi R^2,$$

formola più comoda della precedente per la risoluzione dei problemi relativi al cerchio.

Corollario. — *L'area di un settore è uguale al prodotto della lunghezza del suo arco per la metà del raggio. (fig. 240.)*

Indichiamo con S l'area del settore ACB; Si ha:

$$S : A :: AMB : C,$$

ovvero

$$S : C \times \frac{R}{2} :: AMB : C;$$

dunque

$$S = AMB \times \frac{R}{2}.$$

Siano r il raggio del cerchio AC, n il numero dei gradi dell'arco AB; si ha $\frac{\pi r n}{180}$ per la lunghezza di quest'arco; dunque il settore ACB è uguale a $\frac{\pi r n}{180} \times \frac{r}{2}$, cioè a $\frac{\pi r^2 n}{360}$.

Scolio. — Il segmento AMB è uguale alla differenza del settore ACB e del triangolo ACB.

Problema. — *Calcolare il rapporto della circonferenza al diametro con una data approssimazione.*

Le due formole

$$circ.\,\mathrm{R} = 2\pi\mathrm{R},\ cerc.\,\mathrm{R} = \pi\mathrm{R}^2,$$

dalle quali si deduce:

$$\pi = \frac{circ.\,\mathrm{R}}{2\mathrm{R}},\ \pi = \frac{cerc.\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2},$$

conducono a quattro soluzioni del problema proposto; giacchè si possono considerare come dati del problema, il raggio, la circonferenza o l'area del cerchio. Noi esporremo quella nella quale si conosce la circonferenza, e ch'è dovuta al geometra Schwab.

Proponiamoci di calcolare il valore del numero π a meno di $\frac{1}{10^m}$ e prendiamo una circonferenza eguale a 2 metri: indicando con x il suo raggio, avremo:

$$\pi = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

Dimostriamo in prima che x è il limite dei raggi e degli apotemi dei poligoni regolari il cui perimetro è uguale a 2 metri.

Siano r', r'', r'''..... i raggi e a', a'', a'''..... gli apotemi dei poligoni regolari di n, $2n$, $4n$..... lati, il cui perimetro è uguale alla circonferenza data. Poichè il perimetro di ciascuno di questi poligoni è minore della circonferenza che gli è circoscritta e maggiore della circonferenza iscritta, si ha per uno qualunque fra essi:

$$2\pi r_k > 2\pi x > 2\pi a_k\,,$$

ovvero

$$r_k > x > a_k\,;$$

dunque 1° il raggio x della circonferenza data è compreso tra l'apotema e il raggio di ciascun poligono regolare isoperimetro.

La figura o le formole $r'' = \sqrt{r'.a''}$, $a'' = \dfrac{r' + a'}{r}$, mostrano che ciascun raggio r'' è minore del precedente r', mentre l'apotema a'' è maggiore di a'. Laonde i raggi r', r'', r'''. . . . . formano una serie decrescente i cui termini sono maggiori di x, e gli apotemi a', a'', a'''. . . . . una serie crescente i cui termini sono, al contrario, minori di x. Ma la differenza di due termini dello stesso posto nelle due serie decresce indefinitamente se si aumenta indefinitamente il numero dei lati, giacchè si ha:

$$r'' - a'' < \frac{1}{4}(r' - a'),$$

$$r''' - a''' < \frac{1}{4}(r'' - a'') < \frac{1}{4^2}(r' - a'),$$

$$r'''' - a'''' < \frac{1}{4}(r''' - a''') < \frac{1}{4^3}(r' - a');$$

. . . .

dunque 2° queste due serie hanno lo stesso limite ch'è il raggio x.

Si tratta ora di calcolare un valore approssimato di questo limite, tale che il numero π o $\frac{1}{x}$ possa essere determinato a meno di $\frac{1}{10^m}$. Supponiamo $n = 4$ e calcoliamo i raggi e gli apotemi del quadrato, dell'ottagono regolare, del poligono di 16 lati, ... aventi ciascuno un perimetro di 2 metri. Pel quadrato si ha:

$$a' = \frac{1}{4}, \quad r' = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

per l'ottagono:

$$a'' = \frac{r' + a'}{2}, \quad r'' = \sqrt{r' \cdot a''};$$

pel poligono di 16 lati:

$$a''' = \frac{r'' + a''}{2}, \quad r''' = \sqrt{r'' \cdot a'''};$$

e così di seguito. Fermandosi al poligono di $4k$ lati, poichè il numero π è compreso tra $\frac{1}{a_k}$ e $\frac{1}{r_k}$, bisogna che si abbia:

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{r_k} < \frac{1}{10^m},$$

ovvero

$$r_k - a_k < \frac{a_k\, r_k}{10^m};$$

ma a_k e r_k sono minori di a', cioè minori di $\frac{1}{4}$; dunque si deve avere:

$$r_k - a_k < \frac{1}{16 \cdot 10^m}.$$

Si soddisfa a questa condizione determinando r_k e a_k in guisa che si abbia:

$$r_k - a_k < \frac{1}{10^{m+2}}.$$

Se si osserva che la media aritmetica dei numeri 0 e $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{4}$ e la media geometrica dei numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ è $\frac{\sqrt{2}}{4}$ si ha per calcolare il numero π con una data approssimazione, la seguente regola:

Formate una serie di numeri i cui due primi sieno 0 *e* $\frac{1}{2}$ *e tali che ciascuno dei seguenti sia alternativamente medio aritmetico e medio geometrico tra i due precedenti. Continuate il calcolo sino a che due termini consecutivi abbiano le* m + 2 *prime cifre decimali comuni, poi dividete il numero* 1 *per uno qualunque di questi termini, calcolando in questa divisione* m *cifre decimali. Il quoziente sarà il valore di* π *a meno di* $\frac{1}{10^m}$.

Ecco la tavola dei valori dei raggi e degli apotemi dei poligoni di 4, 8, 16, ... 8192 lati, per calcolare π a meno di un centomillesimo:

Numero dei lati	Apotemi	Raggi
4	$a_1 = 0.2500000$	$r_1 = 0,3535534$
8	$a_2 = 0,3017767$	$r_2 = 0,3266407$
16	$a_3 = 0,3142087$	$r_3 = 0,3203644$
32	$a_4 = 0,3162867$	$r_4 = 0,3188217$
64	$a_5 = 0,3180541$	$r_5 = 0,3184377$

La prima metà delle cifre di a_5 e r_5 essendo la medesima, si può sostituire alla loro media geometrica la loro media aritmetica che ne differisce al di là della settima cifra decimale. Operando al modo stesso per i termini seguenti, si riduce il calcolo a prendere medie aritmetiche, e si trova:

$$
\begin{array}{llll}
128 \ldots\ldots a_6 = 0{,}3182459 & \ldots\ldots r_6 = 0{,}3183418 \\
256 \ldots\ldots a_7 = 0{,}3182939 & \ldots\ldots r_7 = 0{,}3183178 \\
512 \ldots\ldots a_8 = 0{,}3183058 & \ldots\ldots r_8 = 0{,}3183118 \\
1024 \ldots\ldots a_9 = 0{,}3183088 & \ldots\ldots r_9 = 0{,}3183103 \\
2048 \ldots\ldots a_{10} = 0{,}3183096 & \ldots\ldots r_{10} = 0{,}3183099 \\
4096 \ldots\ldots a_{11} = 0{,}3183097 & \ldots\ldots r_{11} = 0{,}3183098 \\
8192 \ldots\ldots a_{12} = 0{,}3183098 & \ldots\ldots r_{12} = 0{,}3183098.
\end{array}
$$

Dunque il valore di π è:

$$\frac{1}{0{,}3183098} = 3{,}14159\,.$$

a meno di un centomillesimo.

Scolio. — Archimede è il primo geometra che abbia trovato due limiti del numero incommensurabile π; questi limiti sono $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$. Generalmente si fa uso del primo $\frac{22}{7}$ che supera π a meno di un centesimo.

Mezio ha dato per valore approssimato di questo rapporto la frazione $\frac{355}{113}$ che ne differisce solo per un centomillesimo. Infine altri geometri hanno trovato il numero π eguale a $3{,}14159265358979\ldots\ldots$

CAPITOLO VI.

Costruzione delle figure equivalenti

Problema I. — *Fare sulla retta* AB *un rettangolo equivalente al rettangolo* FDE. *(fig. 241.)*

Sia AC l' altezza ignota del rettangolo richiesto. I due rettangoli CB, FE dovendo essere equivalenti, bisogna che

$$CA \times AB = FD \times DE,$$

cioè che

$$AB : DE :: FD : CA .$$

Dunque l'altezza CA è una quarta proporzionale alle tre rette AB, DE, FD.

Problema II. — *Fare un rettangolo equivalente a un quadrato dato* A *di cui la somma della base e dell' altezza sia eguale a una retta data* BC. *(fig. 242.)*

Descrivete una semicirconferenza sulla retta BC come diametro; conducete BD perpendicolare a BC ed eguale al lato A del quadrato dato; conducete la retta DE parallela a BC sino all' incontro della circonferenza nel punto E e la retta EF perpendicolare al diametro BC. I due segmenti BF, CF della retta BC sono i lati del rettangolo, giacchè si ha:

$$BF \times CF = EF^2 = A^2.$$

Corollario. — Il problema è possibile allora soltanto quando BD è al più eguale al raggio della circonferenza, cioè che il lato del quadrato non deve superare la metà della retta AB.

Problema III. — *Fare un rettangolo equivalente* *a un quadrato dato A, e di cui la differenza della base e della altezza sia eguale a una retta data* BC. *(fig. 243.)*

Descrivete una circonferenza sopra BC come diametro; conducete per il punto B la tangente BE; prendete sopra questa retta una lunghezza BE eguale al lato A del quadrato dato, e tirate la secante EG che passi pel centro D del cerchio. Le rette EG, EF sono i due lati del rettangolo.

Infatti la loro differenza FG è uguale a BC e il loro prodotto EF $\times$ EG è uguale a BE^2.

Problema IV. — *Fare un quadrato equivalente a un triangolo, a un parallelogrammo, a un trapezio o a un poligono regolare. (fig. 244.)*

Sia X il lato del quadrato equivalente al triangolo ABC, si ha per ipotesi:

$$X^2 = \frac{1}{2} BC \times AD;$$

dunque

$$\frac{1}{2} BC : X :: X : AD;$$

cioè a dire che il lato del quadrato richiesto è una media proporzionale tra l'altezza del triangolo e la metà della base.

Similmente si dimostrerebbe 1° che il lato del quadrato equivalente a un parallelogrammo è una media proporzionale tra la sua base e la sua altezza; 2° che il lato del quadrato equivalente al trapezio è una media proporzionale tra l'altezza del trapezio e la retta che unisce i mezzi dei suoi lati non paralleli; 3° che il lato del quadrato equivalente a un poligono regolare è una media proporzionale tra il perimetro di questo poligono e la metà del suo apotema.

PROBLEMA V. — *Fare un triangolo equivalente a un poligono dato. (fig. 245.)*

Sia ABCDEF questo poligono: tirate la diagonale BF e la retta AG parallela a questa diagonale; unite quindi il vertice F al punto G intersezione della retta AG col prolungamento del lato BC. I triangoli GBF, ABF sono equivalenti perchè hanno la stessa base BF e le altezze eguali; dunque il pentagono GCDEF è equivalente all' esagono dato.

Con una simile costruzione si trasforma il pentagono in un quadrilatero e questo in un triangolo equivalente a l' esagono.

COROLLARIO. — *Fare un quadrato equivalente a un poligono dato.*

Costruite un triangolo equivalente a questo poligono; prendete una media proporzionale tra l' altezza del triangolo e la metà della sua base. Il quadrato costruito su questa media è equivalente al triangolo e per conseguenza al poligono.

SCOLIO. — Il problema della *quadratura* d' una figura piana, vale a dire la costruzione del quadrato equivalente a questa figura, è sempre possibile quando il suo perimetro è rettilineo. Il quadrato equivalente a un cerchio dato non si può costruire che approssimativamente.

PROBLEMA VI. *Descrivere un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati dati. (fig. 246.)*

1°. Per costruire un quadrato equivalente alla somma dei quadrati delle rette A e B fate un angolo retto C; prendete CD eguale a A, CE eguale a B e tirate la retta DE. Questa linea è il lato del quadrato richiesto; poichè si ha, nel triangolo rettangolo CDE :

$$DE^2 = CD^2 + CE^2.$$

2°. Per fare un quadrato equivalente alla differenza dei quadrati delle rette A e B, tirate due rette perpendicolari CG, CH; prendete sopra CH la retta CE eguale alla minore B delle due linee date e descrivete dal punto E come centro con un raggio eguale ad A, un arco di cerchio sino all' incontro di CG. La retta CD è il lato del quadrato richiesto; giacchè si ha nel triangolo rettangolo DCE:

$$DC^2 = DE^2 - CE^2.$$

PROBLEMA VII. — *Fare un quadrato il cui rapporto a un quadrato dato sia eguale a quello di due rette date. (fig. 247.)*

Siano A il lato del quadrato dato e B, C le due rette date. Prendete sopra una retta qualunque la linea DE eguale a B e poi la linea EF eguale a C. Descrivete sopra DF come diametro una semicirconferenza; conducete EG perpendicolare al diametro DF e le corde GF, GD. Prendete poi sopra GF una lunghezza GH eguale al lato A del quadrato dato e conducete HK parallela a DF, sino all' incontro della retta GD. La linea GK è il lato del quadrato richiesto.

Infatti, il triangolo KGH essendo rettangolo nel punto G, si ha:

$$GK^2 : GH^2 :: KL : LH.$$

Ma le parallele KH, DF sono divise in segmenti proporzionali dalla retta GL; laonde

$$KL : LH :: DE : EF;$$

dunque

$$GK^2 : GH^2 :: DE : EF,$$

ovvero

$$GK^2 : A^2 :: B : C.$$

Corollario. — Se il rapporto dei due quadrati fosse espresso da quello di due numeri, si prenderebbero per le rette B e C linee proporzionali ai due numeri dati, e si farebbe la costruzione precedente.

Problema VIII. — *Dati due poligoni simili, costruire un poligono simile ed equivalente alla loro somma o alla loro differenza (fig. 248.)*

Siano a, b e x tre lati omologhi dei poligoni dati A, B e del poligono ignoto X. Si ha per ipotesi:

$$X = A \pm B$$

e

$$X : x^2 : : A : a^2 : : B : b^2 .$$

Se ne deduce:

$$X : x^2 : : A \pm B : a^2 \pm b^2,$$

e

$$x^2 = a^2 \pm b^2;$$

dunque, per risolvere il problema, bisogna cercare il lato x d'un quadrato equivalente alla somma o alla differenza dei quadrati di a e b, poi costruire sopra questa retta x un poligono simile ad A.

Problema IX. — *Fare un poligono simile ad un poligono dato e tale che il suo rapporto a questo poligono sia eguale a quello di due linee date. (fig. 249.)*

Sieno a ed x due lati omologhi del poligono dato A e del poligono richiesto X. Sieno anche b e c le due rette date. Si ha per ipotesi:

$$X : A : : x^2 : a^2 ,$$

e

$$X : A : : b : c ,$$

dunque

$$x^2 : a^2 : : b : c .$$

Da ciò risulta questa costruzione: Cercate un quadrato che sia al quadrato di a come la linea b è alla linea c, e fate sul lato di questo quadrato un poligono simile al poligono dato A.

PROBLEMA X. — *Fare un poligono simile a un poligono* A *e equivalente a un altro poligono* B. *(fig. 250.)*

Sieno a ed x due lati omologhi del poligono A e del poligono ignoto X. Si ha per ipotesi:

$$A : X :: a^2 : x^2,$$

e

$$X = B.$$

Indicando con a' il lato del quadrato equivalente al poligono A, con b' quello del quadrato equivalente al poligono B e sostituendo nella proporzione precedente a'^2 ad A, b'^2 a X o B, si trova:

$$a'^2 : b'^2 :: a^2 : x^2,$$

e per conseguenza

$$a' : b' :: a : x.$$

Laonde si ha questa costruzione: Cercate una quarta proporzionale alle rette a', b', a e fate sopra questa linea un poligono simile ad A.

Problemi da risolvere.

1. — Dividere un triangolo in un numero qualunque di parti equivalenti con parallele a uno dei lati.

2. — Dividere un trapezio in un numero qualunque di parti equivalenti con parallele alle basi.

3. — Iscrivere in un cerchio dato un trapezio la cui altezza e la cui superficie sono date.

4. — Iscrivere un quadrato in un triangolo. Su qual lato del triangolo si trova il massimo quadrato iscritto?

5. — Dividere con una parallela alla base la superficie di un triangolo in media ed estrema ragione, cioè in tal guisa che il trapezio sia una media proporzionale tra il triangolo dato e il piccolo triangolo.

6. — Dati due triangoli equilateri, trovare sulla retta che unisce i loro centri, un punto tale che la somma dei quadrati delle distanze di questo punto ai lati del primo triangolo e la somma dei quadrati delle distanze dello stesso punto ai lati del secondo triangolo siano tra loro in un rapporto dato.

7. — Dividere un quadrilatero in un numero qualunque di parti proporzionali a linee date.

8. — Trovare il luogo geometrico dei punti tali che la somma dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi ai vertici di un triangolo sia costante.

9. — La somma dei quadrati delle distanze di un punto qualunque ai vertici di un poligono regolare di n lati è uguale a n volte la somma dei quadrati del raggio e della distanza del punto dato al centro del poligono.

10. — In un triangolo qualunque la somma delle tre perpendicolari, condotte dal centro del cerchio circoscritto sui lati, è uguale alla somma dei raggi dei cerchi iscritto e circoscritto.

11. — Il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo è uguale al quarto dell'eccesso della somma dei raggi dei tre cerchi ex-iscritti sul raggio del cerchio iscritto.

12. — La distanza dei centri dei cerchi iscritto e circoscritto a un triangolo è una media proporzionale tra il raggio del cerchio circoscritto e l'eccesso di questo raggio sul diametro del cerchio iscritto.

13. — La distanza dei centri del cerchio circoscritto a un triangolo e di uno dei cerchi ex-iscritti è una media proporzionale tra il raggio del cerchio circoscritto e la somma di questo raggio e del diametro del cerchio ex-iscritto.

14. — La somma dei quadrati delle distanze del centro del cerchio circoscritto a un triangolo, ai centri dei cerchi iscritto e ex-iscritto, è uguale a 12 volte il quadrato del raggio del cerchio circoscritto.

15. — L'area del dodecagono regolare è uguale al triplo del quadrato del suo raggio.

16. — Le diagonali di un pentagono regolare si dividono mutuamente in media ed estrema ragione.

17. — Il lato del decagono stellato è uguale al lato del decagono regolare convesso, aumentato del raggio.

18. — Il quadrato del lato del pentagono regolare è uguale alla somma dei quadrati del lato del decagono regolare e del raggio.

19. — Condurre, per un punto preso in un angolo, una secante tale che l'area del triangolo intercetto sia uguale a un quadrato dato.

20. — Costruire un triangolo le cui tre altezze sono date.

21. — Costruire un triangolo nel quale si conosca un lato, l'altezza corrispondente e il rettangolo dei due altri lati.

22. — Circoscrivere a un triangolo dato il triangolo massimo simile a un triangolo dato.

23. — Dividere un triangolo in due parti equivalenti con una retta perpendicolare sopra un lato.

24. — Trovare nell'interno d'un triangolo un punto tale che le rette che l'uniscono ai vertici dividano il triangolo in tre parti equivalenti.

25. — La somma o la differenza della diagonale e del lato di un quadrato essendo date, costruire il quadrato.

26. — Iscrivere in un cerchio un rettangolo equivalente a un quadrato dato.

27. — Dati un cerchio e un punto, condurre pel punto una secante che divida la circonferenza nel rapporto di 3 a 5, e calcolare la lunghezza della corda intercetta sulla retta.

28. — Dati una retta, un cerchio e un punto A, trovare sulla retta un punto B tale che il quadrato di AB sia eguale alla somma delle potenze di A e B rispetto al cerchio dato.

29. — Date due circonferenze concentriche, dimostrare

che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque di una delle circonferenze all'estremità d'un diametro dell'altra è costante.

30. — Due quadrilateri sono equivalenti quando le loro diagonali sono eguali e fanno tra loro angoli eguali.

31. — Condurre, per un punto dato sul piano d'un angolo, una retta che formi coi lati dell'angolo un triangolo d'area data.

32. — Date due rette parallele e due punti, condurre per questi punti due rette che s'incontrino sopra una delle parallele, e formino con l'altra un triangolo equivalente a un quadrato dato.

33. — Costruire un trapezio isoscele di cui si conosca la superficie, la lunghezza dei lati eguali e la somma delle basi.

34. — Costruire un triangolo, conoscendo la sua superficie, la base e il raggio del cerchio circoscritto.

35. * — Per un punto situato nel piano di un angolo, condurre una trasversale in modo da formare un triangolo equivalente a un quadrato dato.

36. * — Iscrivere in un angolo dato una retta di lunghezza data, in modo che il triangolo che ne risulta sia equivalente a un quadrato dato.

37. * — A un cerchio dato iscrivere un trapezio di cui sia conosciuta l'altezza, ed equivalente a un quadrato dato.

38. * — Iscrivere in un cerchio dato un triangolo i cui lati sieno paralleli a tre rette date.

39. * — Iscrivere in un cerchio dato un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati.

40. * — Iscrivere in un cerchio dato un poligono di cui un lato passi per un punto dato, e di cui tutti gli altri lati sieno rispettivamente paralleli a rette date.

41. * — Iscrivere in un cerchio dato un poligono di cui i lati passino rispettivamente per i punti dati.

42. * — Circoscrivere a un cerchio dato un triangolo i cui vertici sieno situati sopra tre rette date.

LUOGHI GEOMETRICI.

1. — Luogo geometrico dei centri dei cerchi che incontrano, in punti diametralmente opposti, due circonferenze date.

2. — Luogo geometrico dei centri dei cerchi che tagliano ortogonalmente due cerchi dati.

3. — Luogo geometrico dei centri dei cerchi che tagliano un cerchio dato in due punti diametralmente opposti e un altro cerchio ortogonalmente.

4. — Dati tre cerchi, trovare il luogo geometrico dei punti tali che le polari di ciascuno d'essi, rispetto ai tre cerchi, concorrano in uno stesso punto. — Luogo del punto di concorso delle polari.

5. — Luogo geometrico dei punti tali che la differenza dei quadrati delle tangenti, condotte da ciascuno d'essi a due cerchi dati, sia eguale a un quadrato dato.

6. — Date due rette in posizione ed in grandezza, trovare il luogo dei punti tali che unendo ciascuno di essi all'estremità delle rette date, formino due triangoli proporzionali a due rette m e n.

7. — Luogo geometrico dei punti tali che la somma dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi ai tre vertici d'un triangolo sia eguale a un quadrato dato.

8.* — È data una circonferenza D e un punto A di questa linea. Per questo punto si conduce una secante qualunque sulla quale si prende un punto C tale, che il rettangolo della secante intera e della sua parte esterna sia eguale a un quadrato dato m. Qual è il luogo geometrico del punto C?

9.* — Qual è il luogo geometrico di un punto M tale, che la sua distanza alla base AB d'un triangolo isoscele dato, sia media proporzionale tra le sue due distanze ai due altri lati?

10.* — Qual è il luogo dei punti M da cui due cerchi O, O' siano veduti sotto angoli eguali?

GEOMETRIA SOLIDA.

LIBRO QUINTO.

DEL PIANO E DELLA LINEA RETTA.

CAPITOLO I.

Della perpendicolare e delle oblique al piano.

Dalla definizione del piano risulta che una retta condotta per due punti qualunque di questa superficie coincide con essa in tutta la sua estensione. Quindi una retta che traversa un piano ha un sol punto comune con esso, giacchè se ne avesse due, coinciderebbe in tutta la sua lunghezza col piano.

TEOREMA I.

Il luogo dell' intersezione di due piani M *e* N *è una linea retta. (fig. 251).*

Conduco per due punti qualunque A e B di questa intersezione la retta indefinita AB ch' è situata in ciascuno dei piani M e N, e dico che tutti i punti comuni a queste due superficie debbono trovarsi sulla retta AB, altrimenti i piani coincidono in tutta la loro estensione.

Supponiamo infatti, che questi piani abbiano un punto comune C al di fuori della retta AB. Sia D un punto qualunque del piano M, situato rispetto al punto C dall'altro lato di AB; poichè la retta DC che unisce questi due punti incontra AB nel punto E, essa ha due punti comuni col piano N il quale contiene quindi anche il punto D.

Se prendiamo sul piano M e dalla stessa parte della retta AB del punto C, un punto qualunque G, che uniamo a D, dimostreremmo che G appartiene anche al piano N. Dunque i piani M e N coincidono, se hanno un punto comune esterno alla retta AB; talchè l'intersezione di due piani è una linea retta.

Corollario. — Dalla proposizione precedente potremo conchiudere che *due piani coincidono in tutta la loro estensione* 1° *se hanno una retta e un punto, esterno a questa linea, comuni;* 2° *se hanno tre punti comuni e non in linea retta;* 3° *se hanno due rette comuni, parallele o concorrenti.*

Scolio. — La posizione di un piano nello spazio non è determinata quando è soggetto solo a passare per una retta, poichè esso può girare attorno a questa linea e passare successivamente per tutti i punti dello spazio. Al contrario un piano è determinato, se contiene 1° una retta e un punto; 2° tre punti non in linea retta; 3° due rette parallele o concorrenti.

Per rappresentare un piano, il quale come illimitato non ha forma, si limita la sua estensione tracciandovi un contorno poligonale qualunque; ma bisogna concepirlo indefinitamente prolungato al di là di questa linea.

TEOREMA II.

Se conduciamo per una retta EF *differenti piani* EAB, EAC, EAD ..... *e per un punto* A *di questa retta, in ciascuno di questi piani, le perpendicolari* AB, AC, AD,.... *sopra* EF, *il luogo di queste perpendicolari è un piano. (fig. 252.)*

Consideriamo il piano delle due rette AB, AC; dico che esso contiene le altre perpendicolari, cioè che incontra un piano qualunque EAD, che passa per EF, seguendo una retta AD perpendicolare ad EF. Infatti, sul piano BAC conduco una retta BC che incontri le tre linee AB, AD, AC, ed unisco i punti d'intersezione B, D, C a due punti E, F della retta EF, egualmente distanti dal punto A. I triangoli BCE, BCF hanno il lato BC comune; i lati BE, BF eguali, poichè BA è perpendicolare sul mezzo di EF nel piano EAB; similmente i lati CE, CF sono eguali. Dunque i triangoli BCE, BCF sono eguali, e gli angoli EBC, FBC lo sono altresì.

I due triangoli EBD, FBD hanno allora un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali, laonde il lato DE è uguale a DF. Dunque la retta AD che ha due punti A e D egualmente distanti dall'estremità della retta EF è perpendicolare a questa linea e il piano BAC è il luogo delle perpendicolari condotte dal punto A ad EF.

SCOLIO.—Questo piano è detto *perpendicolare* alla retta EF, e reciprocamente quest'ultima è *perpendicolare* al piano. Il punto A nel quale la retta EF incontra il piano BAC, è il *piede* della perpendicolare.

COROLLARIO. — Dalla dimostrazione precedente risulta 1° che *una retta è perpendicolare ad un piano quando è perpendicolare a due rette qualunque condotte pel suo piede nel piano;* 2° che *per un punto d'una retta si può condurre un sol piano perpendicolare a questa linea, e reciprocamente.*

Quando una retta non è perpendicolare a un piano, le si dà il nome di *obliqua*, e il punto nel quale essa incontra il piano è il suo *piede*.

Scolio. — La retta EF perpendicolare al piano BAC e la retta BC che, condotta su questo piano, non passa pel punto A, non possono appartenere allo stesso piano. Dunque *due rette possono non essere parallele e non incontrarsi.*

TEOREMA III.

Se dal punto A *si conducono la retta* AB *perpendicolare al piano* MN, *e differenti oblique* AC, AD, AE, ec.

1°. *La perpendicolare* AB *è più corta di qualunque obliqua;*

2°. *Due oblique* AC, AD *che si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali;*

3°. *Di due oblique disugualmente distanti dal piede della perpendicolare, quella che più se ne allontana è la maggiore. (fig. 253.)*

1°. Nel piano ABC la retta AB è perpendicolare e AC obliqua alla linea BC; dunque la retta AB, perpendicolare al piano MN, è minore dell'obliqua AC.

2°. Se le distanze BC, BD sono eguali, l'obliqua AC è uguale ad AD; perchè i triangoli ABC, ABD avendo un angolo retto compreso tra due lati rispettivamente eguali, sono eguali.

3°. Sia la distanza BE maggiore di BD, l'obliqua AE è altresì maggiore di AD.

Infatti prendete sopra BE una lunghezza BF eguale a BD ed unite il punto A al punto F. Le oblique AF, AD, che si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare, sono eguali; ma, nel piano ABE, la maggiore delle due oblique AE, AF sulla retta BE è AE; dunque AE è maggiore di AD.

Corollario I. — La distanza di un punto da un-piano si misura per mezzo della perpendicolare condotta dal punto sul piano.

Corollario II. — Il luogo dei piedi delle oblique eguali ad AC e che passano per lo stesso punto A è la circonferenza del cerchio descritto dal piede della perpendicolare AB come centro con un raggio eguale a BC. Laonde si ha la seguente costruzione per condurre una perpendicolare sopra un piano per un punto esterno ad esso: Segnate sul piano dato tre punti C, D, F egualmente distanti da A, e determinate il centro della circonferenza che passa per C, D, F; questo punto è il piede della perpendicolare.

TEOREMA IV.

Se un piano MN *è perpendicolare sul mezzo* A *di una retta* BC,

1°. *Qualunque punto* D *del piano è egualmente lontano dall' estremità di questa retta;*

2°. *Qualunque punto* E *esterno al piano è disugualmente distante dalle medesime estremità* B *e* C. *(fig. 254.)*

1°. Unite il punto D ai punti A, B e C; la retta AD è perpendicolare sul mezzo di BC, nel piano DBC; dunque il punto D di questa retta è ugualmente distante dalle estremità di BC.

2°. Conducete le rette EB, EC; il piano EBC incontra il piano MN seguendo AD perpendicolare al mezzo di BC; dunque il punto E, ch' è esterno ad AD, si trova a distanze disuguali da B e da C.

Scolio. — Il piano MN condotto pel mezzo della retta BC perpendicolarmente a questa linea, è il luogo dei punti che sono ciascuno egualmente lontani dall' estremità di BC.

TEOREMA V.

Se per la retta AB *perpendicolare al piano* MN *si conduce un piano* ABC, *qualunque retta* EF, *condotta nel piano* MN *perpendicolarmente all' intersezione* BC *dei due piani, è anche perpendicolare al piano* ABC. *(fig. 255.)*

Infatti, prendete le distanze CE, CF eguali; conducete le rette BE e BF ed unite i punti C, F, E ad un punto qualunque A della retta AB. Nel piano MN, le due oblique BE, BF sono eguali perchè egualmente distanti dal piede della retta BC perpendicolare ad EF. Le rette AE, AF che sono oblique al piano MN e si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare AB, sono eziandio eguali. Ma la retta AC, di cui due punti A e C sono egualmente distanti dai punti E, F, è perpendicolare a EF; dunque la linea EF è perpendicolare alle rette BC, AC e quindi al piano ABC.

Scolio. — Qualunque retta AC che unisce il punto C a un punto qualunque A della linea AB, è perpendicolare ad EF.

CAPITOLO II.

Rette parallele. — Rette e piani paralleli.

TEOREMA I.

Se due rette AB, CD *sono parallele, qualunque piano* MN *perpendicolare ad una di esse* AB, *è anche perpendicolare all' altra* CD. (*fig.* 256.)

Il piano BACD delle due parallele AB, CD, incontra il piano MN seguendo la retta AC. Ma AB è per ipotesi perpendicolare ad AC; dunque CD, parallela ad AB, è altresì perpendicolare ad AC. Conducete per il punto C la retta EF perpendicolare all' intersezione AC dei piani MN e BAC. Questa linea EF è perpendicolare al piano BAC; dunque DC è anche perpendicolare ad EF, e per conseguenza al piano MN.

Corollario. — Pel punto C si può condurre una sola parallela a una retta AB. Infatti conducete per il punto C un piano MN perpendicolare ad AB; la parallela tirata da questo punto alla retta AB deve essere perpendicolare al piano MN; dunque la retta AB ha una sola parallela che passa pel punto C.

TEOREMA II.

Due rette AB, CD *perpendicolari allo stesso piano* MN, *sono parallele.* (*fig.* 256.)

Giacchè la parallela alla retta AB, condotta dal punto C nel quale CD incontra il piano MN, è perpendicolare a questo piano e coincide con CD.

Corollario. — Due rette A, B di cui ciascuna è parallela ad una terza C sono parallele tra di loro. Infatti se si conduce un piano perpendicolare a C, esso lo è anche alle rette A e B parallele a C; dunque queste linee sono parallele.

TEOREMA III.

Una retta AB *e un piano* MN *non possono incontrarsi se la linea* AB *è parallela ad una retta* CD *condotta su questo piano. (fig. 257.)*

Il piano delle due parallele AB, CD incontra il piano MN seguendo la retta CD; dunque la retta AB che, nel piano ABCD, è parallela a CD, non può incontrare il piano MN.

Scolio. — La retta AB e il piano MN si dicono *paralleli.*

Corollario. — Una retta AB ed un piano MN perpendicolari alla medesima retta AC, sono paralleli *(fig. 258)* Giacchè il piano BAC incontra il piano MN seguendo la retta CD perpendicolare ad AC; dunque AB e CD sono paralleli, e la retta AB è parallela al piano MN.

TEOREMA IV.

Se per una retta AB *parallela a un piano* MN *si fa passare un piano che incontri il piano* MN, *la loro intersezione* CD *è parallela ad* AB. *(fig. 257.)*

Le due rette AB, CD che sono nello stesso piano ABCD non possono incontrarsi, poichè la linea AB è parallela al piano MN; dunque AB, CD sono parallele.

Corollario I. — Se da un punto qualunque A *(fig. 258)* d'una retta AB parallela ad un piano MN, si conduce una perpendicolare AC a questo piano, questa retta è altresì perpendicolare ad AB.

Il piano delle due rette AB, AC incontra il piano MN seguendo CD parallela ad AB; ma la linea AC è perpendicolare a CD; dunque essa lo è pure ad AB.

COROLLARIO II. — L'intersezione EF di due piani condotti per due parallele AB, CD *(fig. 259)* è parallela a queste rette. Giacchè la retta AB è parallela a CD e per conseguenza al piano CF; dunque il piano AF incontra il piano CF seguendo EF parallela ad AB e a CD.

TEOREMA V.

Le parallele AC, BD *comprese tra una retta* AB *e un piano* MN *paralleli, sono eguali (fig. 260.)*

Il piano delle due parallele AC, BD incontra il piano MN seguendo la retta CD parallela ad AB: dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo e le rette AC, BD sono eguali.

COROLLARIO. — Una retta AB ed un piano MN paralleli, sono da per tutto egualmente distanti. Conducete, da due punti qualunque A e B della retta AB, le perpendicolari AC, DB sul piano MN; queste linee sono parallele ed eguali; dunque la retta AB ed il piano MN sono dappertutto egualmente distanti.

TEOREMA VI.

Se la retta AB *è parallela al piano* MN, *la retta* CD *condotta parallelamente ad* AB *da un punto* C *del piano* MN *è situata in questo piano. (fig. 257.)*

Infatti, il piano che passa per la retta AB ed il punto C incontra il piano MN seguendo una retta CD parallela ad AB; dunque la parallela ad AB condotta dal punto C è situata nel piano MN.

Corollario. — L' intersezione DE di due piani CDE, FDE *(fig. 261)* paralleli alla medesima retta AB, è eziandio parallela a questa retta. Giacchè se per un punto qualunque di DE si conduce una parallela ad AB, questa retta, dovendo trovarsi in ciascuno dei piani, coinciderà colla loro intersezione.

CAPITOLO III.

Piani paralleli.

Due piani sono *paralleli*, allorchè prolungati quanto si voglia non s' incontrano.

TEOREMA I.

Due piani EF, GH *perpendicolari alla medesima retta* AB *sono paralleli. (fig. 262.)*

Infatti conduciamo per questa retta un piano qualunque che incontri i piani EF, GH seguendo le rette AC, BD; queste linee sono perpendicolari ad AB e per conseguenza parallele; dunque i piani EF, GH non possono incontrarsi.

Corollario. — Se per un punto A si conducono le rette AB, AC, ec. parallele al piano EF, il luogo di queste rette è un piano parallelo al piano EF. *(fig. 263)*

Conducete AD perpendicolare al piano EF; le rette AB, AC, ec. parallele a questo piano, sono perpendicolari ad AD; dunque esse sono comprese in un piano perpendicolare ad AD e per conseguenza parallelo ad EF.

TEOREMA II.

Le intersezioni AB, CD *di due piani paralleli* EF, GH *con uno stesso piano* ABCD *sono parallele (fig. 264.)*

Infatti, le rette AB, CD, non possono incontrarsi perchè situate in due piani paralleli, e sono parallele perchè si trovano sullo stesso piano ABCD.

TEOREMA III.

Se due piani EF, GH *sono paralleli, qualunque retta* AB, *perpendicolare ad uno di essi* EF, *è anche perpendicolare al secondo* GH. *(fig. 262.)*

Conduciamo per AB un piano qualunque BACD; le intersezioni AC, BD di questo piano coi piani paralleli EF, GH sono parallele. Ma AB è perpendicolare ad AC, dunque essa è altresì perpendicolare a BD e per conseguenza al piano GH.

COROLLARIO. — Due piani A e B, paralleli a un terzo C, sono paralleli tra loro. Giacchè, se conduciamo una perpendicolare al piano C, questa retta è anche perpendicolare ai piani A e B che sono per conseguenza paralleli.

SCOLIO. — Per un punto si può condurre un solo piano parallelo a un piano dato.

TEOREMA IV.

Le parallele AC, BD, *comprese tra due piani paralleli* EF, GH, *sono eguali. (fig. 265.)*

Siano AB, CD le intersezioni parallele dei due piani

EF, GH col piano delle due rette AC, BD; il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo e le rette AC, BD sono eguali.

Corollario. — Due piani paralleli EF, GH sono dapertutto egualmente distanti. Da due punti qualunque A e B del piano EF conducete le perpendicolari AC, BD sul piano GH; queste rette sono parallele ed eguali; dunque i piani EF, GH sono dapertutto egualmente distanti.

TEOREMA V.

Due rette AC, DF *sono divise in segmenti proporzionali da tre piani paralleli* M, N, P. *(fig. 266.)*

Conducete pel punto A la retta AH parallela a DF; il piano ACH incontra i piani paralleli N, P seguendo le rette parallele BG, CH, e si ha nel triangolo ACH:

$$AB : AG :: BC : GH;$$

ma le parallele AG, DE, comprese tra i piani paralleli M e N, sono eguali; similmente la retta GH è uguale ad EF; dunque

$$AB : DE :: BC : EF.$$

TEOREMA VI.

Due angoli, i cui lati sono paralleli, hanno i loro piani paralleli e sono eguali o supplementari. (fig. 267.)

Sieno le rette DE e DF rispettivamente parallele ad AB ed AC; le due rette DE, DF sono parallele al piano BAC; dunque il loro piano EDF è anche parallelo al piano BAC.

Consideriamo i due angoli EDF, BAC i cui lati sono paralleli e diretti nello stesso senso, e conduciamo il piano BCFE parallelo alla retta AD che unisce i vertici di questi angoli. I quadrilateri ABED, ACFD, CBEF sono parallelogrammi perchè le rette EB, FC sono parallele a DA e quindi parallele tra loro. Laonde si ha AB = DE, AC = DF, BC = FE; e per conseguenza i triangoli ABC, DEF sono eguali e l'angolo BAC è uguale a EDF.

Gli angoli BAC, GDH i cui lati sono paralleli e diretti in senso contrario, sono eguali, poichè ciascuno d'essi è uguale all'angolo EDF.

Gli angoli BAC, GDF che hanno i lati AB, GD paralleli e diretti in senso contrario, i lati AC, DF paralleli e diretti nello stesso senso, sono supplementari, giacchè l'angolo BAC è uguale a EDF, supplemento di GDF.

CAPITOLO IV.

Angoli diedri.

Si chiama *angolo diedro* lo spazio indefinito compreso tra due piani ABC, BDC che s'incontrano *(fig. 268.)* La linea d'intersezione BC è la *costola* dell'angolo, e i piani ABC, DBC, terminati alla costola, ne sono le *facce*.

Un angolo diedro s'indica per mezzo della sua costola, se essa non appartiene ad altri angoli. Nel caso contrario, si prende un sistema di quattro punti A, B, C, D, i cui estremi sono situati sulle due facce e i medi B e C sulla costola.

Due angoli diedri sono *adiacenti* quando hanno la costola ed una faccia comune; sono *opposti*, se le facce dell'uno sono i prolungamenti di quelle dell'altro.

LEMMA. — *Se, per due punti qualunque* F *e* K *della costola dell' angolo diedro* ABCD, *si conducono due piani* EFG, HKL, *perpendicolari a questa costola, gli angoli* EFG, HKL, *formati dalle intersezioni di questi piani e delle facce dell' angolo diedro, sono eguali. (fig. 269.)*

Infatti, i piani EFG, HKL, perpendicolari alla retta BC, sono paralleli; dunque essi incontrano ciascuna delle facce dell'angolo diedro ABCD, seguendo due rette parallele, e gli angoli EFG, HKL, che hanno i lati paralleli e diretti nello stesso senso, sono eguali.

SCOLIO. — L' angolo costante EFG che ha i lati perpendicolari alla costola BC dicesi *angolo rettilineo* corrispondente all' angolo diedro ABCD.

TEOREMA I.

Due angoli diedri ABCD, EFGH *sono eguali, quando hanno gli angoli rettilinei* ABD, EFH *eguali. (fig. 270.)*

Poniamo l' angolo EFH sul suo eguale ABD; la retta FG, perpendicolare al piano EFH, prende allora la direzione di BC, perpendicolare al piano ABD, e i piani EFG, ABC coincidono, come pure i piani HFG, DBC; dunque gli angoli diedri BC, FG sono eguali.

COROLLARIO. — Se due piani ABC, ABE s' incontrano seguendo la retta AB, gli angoli diedri CABF, EABD, opposti alla costola, sono eguali. *(fig. 271.)*

Infatti se si conduce il piano CBEDF perpendicolare alla costola AB, gli angoli rettilinei CBF, EBD, opposti al vertice, sono eguali; dunque gli angoli diedri CABF, EABD sono altresì eguali.

SCOLIO. — Se i due piani ABC, ABE fanno due angoli diedri adiacenti eguali, i quattro angoli diedri che essi formano sono eguali; si dice allora che i piani sono *perpendicolari* l'uno all'altro, e si dà il nome d'angolo diedro *retto* a ciascuno dei quattro angoli diedri eguali. — L'angolo rettilineo d'un angolo diedro retto è altresì retto.

TEOREMA II.

Il rapporto di due angoli diedri qualunque ABCD, EFGH *è uguale a quello dei loro angoli rettilinei* ABD, EFH. *(fig. 272.)*

Supponiamo in prima gli angoli rettilinei ABD, EFH commensurabili e la loro comune misura ABK contenuta 3 volte in ABD e 2 volte in EFH; avremo:

$$\frac{ABD}{EFH} = \frac{3}{2}.$$

I piani che passano per la costola CB e ciascuna delle linee BK, BL dividono l'angolo diedro ABCD in tre angoli diedri eguali ad ABCK, poichè i loro angoli rettilinei sono eguali. Similmente il piano GFM divide l'angolo diedro EFGH in due angoli diedri che sono altresì eguali all'angolo ABCK: dunque

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{3}{2} = \frac{ABD}{EFH}.$$

Col consueto ragionamento si dimostrerà che questi rapporti sono eguali anche quando gli angoli rettilinei ABD, EFH non hanno comune misura.

Corollario. — Se si conviene di prendere l'angolo diedro retto per l'unità degli angoli diedri, *l'angolo diedro* ABCD *ha la stessa misura del suo angolo rettilineo* ABD. Infatti, supponiamo l'angolo diedro EFGH retto, il suo angolo rettilineo EFH è anche retto;

i rapporti $\frac{ABCD}{EFGH}$, $\frac{ABD}{EFH}$, che esprimono la misura dell'angolo diedro ABCD e quella dell' angolo rettilineo ABD essendo eguali, ne risulta che l' angolo diedro ha la stessa misura del suo angolo rettilineo.

TEOREMA III.

Se due piani ABC, ABE *s' incontrano, due angoli diedri adiacenti* EBAD, EABC *valgono insieme due angoli diedri retti. (fig. 271.)*

Infatti, se conduciamo il piano CDEF perpendicolare alla costola AB, gli angoli rettilinei adiacenti EBC, EBD sono supplementari; dunque gli angoli diedri EBAC, EBAD lo sono altresì.

COROLLARIO. — La somma degli angoli diedri formati da piani qualunque, condotti seguendo la stessa retta AB, è uguale a quattro angoli diedri retti, giacchè la somma dei loro angoli rettilinei è uguale a quattro ngoli retti.

TEOREMA IV.

Se due piani paralleli AB, CD *sono incontrati da uno stesso piano* EF, 1° *gli angoli diedri corrispondenti, alterni-interni o alterni-esterni, sono eguali*; 2° *gli angoli diedri interni o esterni dalla stessa parte del piano secante sono supplementari (fig. 273.)*

Poichè le linee d' intersezione GH, KL di ciascuno dei due piani paralleli AB, CD e del piano secante EF, sono parallele, conduciamo il piano BGF perpendicolare a queste rette; le linee BN, DO seguendo le quali esso incontra i due piani AB, CD, sono parallele e formano colla secante MF gli angoli rettilinei degli otto angoli diedri le cui costole sono GH e KL.

Gli angoli rettilinei corrispondenti, alterni-interni o alterni-esterni essendo eguali, gli angoli diedri corrispondenti, alterni-interni o alterni-esterni lo sono altresì. Poichè gli angoli rettilinei interni o esterni dalla stessa parte della secante sono supplementari, gli angoli diedri interni o esterni, sono pure supplementari.

Scolio. — Le cinque reciproche sono vere allora soltanto quando le costole dei due angoli diedri che si paragonano sono parallele.

TEOREMA V.

Due angoli diedri sono eguali o supplementari, se le loro costole sono parallele e le loro facce parallele o perpendicolari rispettivamente. (fig. 274.)

Conducete un piano perpendicolare alle due costole: esso incontra i piani paralleli seguendo rette parallele e i piani perpendicolari seguendo rette perpendicolari; laonde gli angoli rettilinei hanno i loro lati paralleli o perpendicolari, secondochè le facce degli angoli diedri sono parallele o perpendicolari; dunque gli angoli diedri sono eguali o supplementari come i loro angoli rettilinei.

CAPITOLO V.

Piani perpendicolari.

TEOREMA I.

Se una retta CD *è perpendicolare al piano* AB, *qualunque piano* ECD *che passa per questa retta è altresì perpendicolare ad* AB. *(fig. 275.)*

Conducete infatti nel piano AB e pel punto C la retta CG perpendicolare all' intersezione EF dei due piani; poichè la retta CD è per ipotesi perpendicolare al piano AB, l' angolo retto DCG è il rettilineo dell' angolo diedro DEFG, dunque il piano DEF è perpendicolare al piano AB.

TEOREMA II.

Se i piani AB, DE *sono perpendicolari, qualunque retta* CD, *condotta in uno di essi* DE *perpendicolarmente alla loro intersezione* EF, *è perpendicolare all' altro piano* AB *(fig. 275.)*

Conducete nel piano AB e pel punto C la retta CG perpendicolare all' intersezione EF dei due piani; questi piani essendo perpendicolari, il loro angolo rettilineo DCG è retto; dunque la retta DC, perpendicolare alle linee EF, CG, è altresì perpendicolare al piano AB che passa per queste due rette.

Corollario. — Il piano EFD, perpendicolare al piano AB, è il luogo delle perpendicolari condotte dai differenti punti della retta EF al piano AB.

Scolio. — Si chiama *proiezione* di un punto sopra un piano il piede della perpendicolare condotta dal punto a questo piano; — *proiezione* di una retta sopra un piano il luogo delle proiezioni dei suoi punti; questo luogo è la retta, seguendo la quale il piano condotto per la linea data, perpendicolarmente al piano dato, incontra quest' ultimo piano.

TEOREMA III.

Per una retta AB, *non perpendicolare al piano* MN, *si può condurre un piano perpendicolare al piano* MN, *ma non se ne può condurre che un solo. (fig. 276-277.)*

1°. Da un punto qualunque B della retta AB, conducete BC perpendicolare ad MN; il piano delle due rette AB, BC è perpendicolare al piano MN.

2°. Qualunque altro piano ABD che passa per AB è obliquo al piano MN, poichè la perpendicolare BD, condotta pel punto B nel piano ABD alla sua intersezione col piano MN è obliqua ad MN.

TEOREMA IV.

Se due piani AC, AD *che s' incontrano, sono perpendicolari ad un terzo* MN, *la loro intersezione* AB *è anche perpendicolare ad* MN. *(fig. 278.)*

Infatti la perpendicolare condotta al piano MN dal punto B comune ai tre piani, dovendo trovarsi in ciascuno dei piani AC, AD, questa linea è la loro intersezione; dunque AB è perpendicolare al piano MN.

TEOREMA V.

L' angolo formato da una obliqua a un piano e dalla sua proiezione su questo piano è il minore di tutti gli angoli che l' obliqua fa con le rette condotte dal suo piede nel piano dato. (fig. 279.)

Da un punto qualunque B dell' obliqua AB al piano MN, conducete BC perpendicolare ad MN, ed unite il punto A al punto C. L' angolo BAC è minore di qualunque altro angolo BAD formato da AB e da una retta qualunque AD, condotta pel punto A nel piano MN. Infatti prendete AD eguale ad AC ed unite D a B; l' obliqua BD è maggiore della perpendicolare BC, quindi i triangoli BAC, BAD hanno due lati rispettivamente eguali e il lato BC minore di BD; dunque l'angolo BAC è altresì minore di BAD.

Corollario. — L'inclinazione di una retta sopra un piano si misura per mezzo dell' angolo che essa fa colla sua proiezione su questo piano.

TEOREMA VI.

Se due rette AB, CD *non sono situate nello stesso piano,*

1°. *Si può condurre loro una perpendicolare comune; ma non se ne può condurre che una sola;*

2°. *Questa perpendicolare è la loro minima distanza. (fig 280.)*

1°. Per un punto qualunque F della retta CD conducete EF parallela ad AB; il piano RS che passa per le due rette CD, EF è parallelo ad AB. Conducete per ciascuna delle rette AB, CD, un piano perpendicolare al piano RS; l' intersezione KH dei due piani BAG, CDK è perpendicolare al piano RS e per conseguenza alle rette AB, CD.

Qualunque altra retta ID, condotta tra le due linee AB, CD, è obliqua almeno a una di queste rette. Infatti, conducete DL parallela ad AB; la retta ID, esterna al piano BAG, è obliqua al piano RS; dunque essa non è perpendicolare ad entrambe le linee CD e LD, nè per conseguenza alle rette CD e AB.

2°. La retta KH è la minima distanza tra la retta AB e il piano RS, dunque è anche la minima distanza tra AB e CD.

TEOREMA VII.

Se da un punto A *preso nell' interno d' un angolo diedro* BEFC, *si conducono le perpendicolari* AB, AC *alle sue facce, l' angolo di queste due rette è il supplemento dell' angolo rettilineo del diedro. (fig. 281.)*

Poichè le rette AB e AC sono perpendicolari rispettivamente alle facce BEF e CEF, il piano BAC è perpendicolare a ciascuna delle facce e per conseguenza alla costola EF dell' angolo diedro. Dunque l' angolo BDC è il rettilineo dell' angolo diedro EF ed ha per supplemento l' angolo BAC, poichè gli angoli B e C del quadrilatero ABDC sono retti.

Scolio. — Quando l' angolo diedro GEFC è ottuso *(fig. 282.)*, se la perpendicolare AB incontra il prolungamento della faccia GEF, non vi ha più quadrilatero convesso; ma i triangoli rettangoli BDO, ACO avendo un angolo opposto al vertice, i due angoli CAO, BDO sono eguali, e l' angolo BAC è ancora il supplemento dell' angolo rettilineo CDG.

TEOREMA VIII.

1°. *Qualunque punto A del piano bisettore d' un angolo diedro è ugualmente lontano dalle due facce di quest' angolo.*

2°. *Qualunque punto F, preso all' interno dell' angolo diedro e fuori del piano bisettore, è disugualmente distante dalle due facce del diedro. (fig. 283.)*

Conducete pel punto dato A o F, le perpendicolari alle facce dell' angolo diedro, il piano di queste rette è perpendicolare alla costola, ed incontra le facce ed il piano bisettore seguendo le rette CB, CD, CA.

Compiuta questa costruzione, fate una dimostrazione analoga a quella del Teorema IV, cap. III, lib. I.

TEOREMA IX.

Se quattro piani, che passano per la stessa linea retta MN, *vengono tagliati da un piano qualunque* ABE, *i rapporti anarmonici delle quattro rette d'intersezione* AB, AC, AD, AE *sono costanti. (fig. 284.)*

Infatti, conducete un piano FBE perpendicolare alla retta MN e sieno BE, FB, FC, FD, FE le linee seguendo le quali esso incontra il piano ABE e i quattro piani che passano per la retta MN. Il fascio delle quattro rette AB, AC, AD, AE e quello delle quattro rette FB, FC, FD, FE hanno una trasversale comune BE; dunque i loro rapporti anarmonici che sono due a due eguali ai rapporti anarmonici dei quattro punti B, C, D, E sono eguali tra loro. Ma i rapporti anarmonici del fascio FBCDE sono costanti, qualunque sia la posizione del piano FBE perpendicolare ad MN; dunque ec.

SCOLIO. — I quattro piani che passano per la stessa retta MN formano un *fascio* i cui diedri sono misurati dagli angoli corrispondenti del fascio delle quattro rette FB, FC, FD, FE.

Si chiamano *rapporti anarmonici di un fascio di quattro piani* quelli del fascio delle quattro rette, il cui piano è perpendicolare all'intersezione dei quattro piani.

COROLLARIO. — Se una retta qualunque BE incontra un fascio di quattro piani, i rapporti anarmonici dei punti d'intersezione B, C, D, E sono eguali a quelli del fascio dei quattro piani.

CAPITOLO VI.

Angoli poliedri.

1. Si chiama *angolo poliedro* la porzione dello spazio compresa tra molti piani SAB, SBC, SCD, SDE, SEA che passano per uno stesso punto S *(fig. 285.)* Il punto S n'è il *vertice*, e gli angoli ASB, BSC,..... ne sono le *facce*. Si dà il nome di *costola* dell'angolo poliedro all'intersezione di due facce consecutive.

Se l'angolo poliedro ha solamente tre facce, si dice angolo *triedro*.

2. I prolungamenti delle costole dell'angolo poliedro SABCDE, al di là del vertice S, formano un altro angolo poliedro SA'B'C'D'E'. Questi due angoli poliedri hanno le facce eguali due a due, e gli angoli diedri eguali due a due; ma la disposizione delle parti eguali non è la stessa, rispetto a due facce eguali qualunque. In virtù di questa differenza nell'ordine delle parti eguali i due angoli poliedri non sono sovrapponibili. Si dà loro il nome d'angoli poliedri *simmetrici*.

3. Un angolo poliedro è *convesso* quando è tutto da una stessa parte dei piani, indefinitamente prolungati, che lo formano. Nel caso contrario si dice che esso è *concavo*.

Se pel vertice S di un angolo poliedro convesso SABCD *(fig. 286.)* si conduce un piano tale che le costole SA, SB, SC,.... di quest'angolo si trovino dalla stessa parte di questo piano, qualunque piano che gli sarà parallelo incontrerà tutte le costole dell'angolo poliedro SABCDE da una stessa parte del vertice S.

Qualunque piano ABCDE che incontra tutte le costole d' un angolo poliedro convesso S taglia la sua superficie seguendo un poligono convesso ABCDE; giacchè l'angolo poliedro essendo tutto da una stessa parte di ciascuna delle sue facce, il poligono ABCDE è pure tutto da una stessa parte delle rette che lo formano; dunque è convesso.

TEOREMA I.

Una faccia qualunque di un angolo poliedro è minore della somma di tutte le altre.

1°. Consideriamo l'angolo triedro SABC *(fig. 287)*. Il teorema essendo evidente per la minore e la media delle tre facce, basta mostrare che la maggior faccia ASB è minore della somma delle due altre. Facciamo l'angolo BSD eguale a BSC, e tiriamo una retta BA che incontri le tre linee SB, SD, SA. Prendendo la retta SC eguale a SD e conducendo il piano ABC, abbiamo i triangoli eguali BSD, BSC; dunque il lato BD è uguale a BC e la differenza AD dei due lati AB, BC del triangolo ABC è minore del lato AC.

Nei triangoli ASD, ASC il lato AD è minore di AC e gli altri due lati sono rispettivamente eguali; dunque abbiamo l'angolo ASD $<$ ASC, e per conseguenza

$$ASD + DSB \text{ o } ASB < ASC + CSB.$$

2°. Se l'angolo poliedro ha più di tre facce, conduciamo per una delle sue costole, per esempio SB *(fig. 288)*, i piani diagonali SBE, SBD; i triedri SABE, SBDE, SBCD danno successivamente:

$$ASB < ASE + BSE,$$
$$BSE < ESD + BSD,$$
$$BSD < BSC + CSD.$$

Sommando queste disuguaglianze membro a membro, e riducendo avremo:

$$ASB < ASE + ESD + DSC + CSB.$$

TEOREMA II.

La somma delle facce di un angolo poliedro convesso è minore di quattro angoli retti.

1°. Si abbia l' angolo triedro SABC *(fig. 289.)*; prolunghiamo la costola SA oltre il vertice S; l' angolo triedro SA'BC dà:

$$BSC < BSA' + CSA'.$$

Aggiungendo ai due membri di questa disuguaglianza ASB + ASC ed osservando che gli angoli ASB, BSA' sono supplementari, come pure gli angoli ASC, CSA', troveremo

$$ASB + ASC + BSC < ASB + BSA' + ASC + CSA'$$

ovvero

$$ASB + ASC + BSC < 4 \text{ retti}.$$

2°. Consideriamo ora l' angolo poliedro convesso SABCDE *(fig. 290.)*. Sia SF l' intersezione delle due facce ASB, DSC che sono adiacenti alla stessa faccia BSC; nell' angolo triedro SBCF si ha:

$$BSC < BSF + FSC;$$

dunque la somma delle facce dell' angolo poliedro SABCDE è minore di quella delle facce dell' angolo poliedro SAFDE che ha una faccia di meno. Similmente, se la retta SG è l' intersezione dei due piani SAB, SDE, la somma delle facce dell' angolo poliedro SAFDE è minore di quella delle facce dell' angolo triedro SDGF. Ma quest' ultima è minore di quattro retti, dunque a più forte ragione la somma delle facce dell' angolo poliedro SABCDE è minore di 4 retti.

TEOREMA III.

Se da un punto O *preso nell' interno di un angolo triedro* SABC *si conducono le rette* OD, OE, OF, *rispettivamente perpendicolari ai piani* SBC, SAC, SAB, *l'angolo triedro* ODEF *ha per facce i supplementi degli angoli diedri dell' angolo triedro* S. *Reciprocamente le facce di* S *sono i supplementi degli angoli diedri di* O. *(fig. 291.)*

1°. L'angolo DOE è il supplemento dell' angolo diedro SC, poichè il suo vertice O è compreso tra le facce di quest' angolo diedro e i suoi lati OD, OE sono perpendicolari ai piani SBC, SAC che formano il diedro SC.

Similmente l'angolo EOF è il supplemento dell' angolo diedro SA e l' angolo DOF quello dell' angolo diedro SB.

2°. Il piano EOF è perpendicolare ai due piani SAB, SAC e per conseguenza alla loro intersezione SA. Parimenti la costola SB è perpendicolare al piano FOD e la costola SC al piano DOE; dunque, pel caso precedente, se il punto S è nell' interno dell' angolo triedro O, le facce dell' angolo triedro S sono i supplementi dei diedri di O.

Nel caso contrario, si condurranno per un punto S', preso nell' interno dell' angolo triedro O delle perpendicolari S'A', S'B', S'C', a queste facce, e l' angolo triedro S' avrà per facce i supplementi degli angoli diedri di O. Ma i due angoli triedri S ed S' hanno le facce eguali come aventi i loro lati paralleli diretti nello stesso senso; dunque etc.

SCOLIO. — I due angoli triedri SABC, ODEF diconsi *supplementari*. — Il teorema precedente è applicabile a un angolo poliedro convesso qualunque.

TEOREMA IV.

1°. *Ciascun angolo diedro di un angolo triedro, aumentato di due angoli diedri retti, è maggiore della somma degli altri due;*

2°. *La somma dei tre angoli diedri è compresa tra due e sei diedri retti.*

Siano A, B, C i tre angoli diedri di un angolo triedro; le facce dell' angolo triedro supplementario sono

$$2R-A,\quad 2R-B,\quad 2R-C.$$

Ma ciascuna di queste facce essendo minore della somma delle altre due, si ha:

$$2R-A < 2R-B+2R-C;$$

da cui si deduce:

$$B+C < A+2R.$$

2°. La somma delle facce dell' angolo triedro supplementario è minore di quattro retti, dunque si ha:

$$6R-(A+B+C) < 4R,$$

e per conseguenza

$$A+B+C > 2R.$$

Inoltre ciascun angolo diedro essendo minore di due retti, la loro somma $A+B+C$ è minore di 6 retti.

Scolio. — Un angolo triedro si dice *rettangolo* se ha un angolo diedro retto; *birettangolo* se ha due angoli diedri retti e *trirettangolo* se ha tre angoli diedri retti.

TEOREMA V.

Se un angolo S *ha due angoli diedri* SB, SC *eguali, le facce* ASC, ASB *opposte a questi angoli sono eguali. (fig. 292.)*

Conducete per un punto qualunque A della costola SA i piani ABD, ACD rispettivamente perpendicolari alle costole SB, SC; la loro intersezione AD è perpendicolare al piano BSC. I triangoli rettangoli ABD, ACD hanno il lato AD comune e gli angoli ABD, ACD eguali, perchè sono i rettilinei dei due angoli diedri eguali SB, SC: dunque le loro ipotenuse AB, AC sono eguali. I triangoli rettangoli ABS, ACS che hanno l'ipotenusa comune e un lato eguale rispettivamente, sono pure eguali; dunque l'angolo ASB è uguale a ASC.

Corollario. — Se i tre angoli diedri di un angolo triedro sono eguali, le sue tre facce sono eguali.

TEOREMA VI.

Se due angoli diedri SC, SB *di un angolo triedro* S *sono disuguali, la faccia* ASB, *opposta all' angolo maggiore* SC *è maggiore di* ASC, *opposta all' altro angolo* SB. *(fig. 293.)*

Infatti conduciamo per la retta SC il piano SCD che forma con BSC un angolo diedro eguale all' angolo diedro SB. L' angolo triedro SBDC avendo due diedri eguali, le facce BSD, CSD opposte a questi angoli sono eguali;

ora abbiamo nell' angolo triedro SACD,

$$ASC < ASD + DSC\ ;$$

dunque sostituendo l' angolo BSD a DSC avremo:

$$ASC < ASB\ .$$

Corollario. — Le proposizioni contrarie dei due precedenti sono evidenti.

Scolio. — Due angoli triedri simmetrici sono sovrapponibili, se uno di questi angoli ha due facce eguali o due angoli diedri eguali.

TEOREMA VII.

Due angoli triedri S, S′ sono eguali se hanno un angolo diedro eguale compreso tra due facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine. (fig. 294.)

Sieno l' angolo diedro SB = S′B′, l' angolo ASB = A′S′B′ e l' angolo BSC = B′S′C′. Dico che i due angoli triedri S, S′ sono eguali, dato che la disposizione delle parti eguali sia la stessa.

Infatti, ponete l' angolo A′S′B′ sopra l' angolo eguale ASB; gli angoli diedri S′B′, SB essendo eguali, il piano B′S′C′ coincide col piano BSC, e siccome gli angoli B′S′C′, BSC sono eguali, il lato S′C′ prende la direzione di SC; dunque le due facce A′S′C′, ASC coincidono e i due angoli triedri sono eguali.

Corollario. — Dalla dimostrazione precedente si deduce che 1° le facce A′S′C′, ASC sono eguali; 2° gli angoli diedri S′A′, SA sono eguali come pure gli angoli diedri S′C′, SC.

Scolio. — Se la disposizione delle parti eguali fosse differente, l' angolo triedro S darebbe eguale al simmetrico dell' angolo triedro S′.

TEOREMA VIII.

Due angoli triedri S, S′ *sono eguali, se hanno una faccia eguale adiacente a due angoli diedri eguali rispettivamente, e disposti nello stesso ordine.*

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Scolio. — Se la disposizione delle parti eguali fosse differente, l' angolo triedro S sarebbe eguale al simmetrico dell' angolo triedro S′.

TEOREMA IX.

Due angoli triedri S, S′ *sono eguali se hanno le tre facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine. (fig. 295.)*

Abbiasi l' angolo ASB eguale a A′S′B′, l' angolo BSC eguale a B′S′C′ e l' angolo ASC eguale ad A′S′C′. L' eguaglianza dei due angoli triedri S, S′ sarebbe evidente, se due angoli diedri SA, S′A′, che sono compresi tra due facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine, fossero eguali.

Per dimostrare l' eguaglianza degli angoli diedri SA, S′A′, conducete per un punto qualunque A della costola SA il piano BAC perpendicolare sopra questa retta; prendete la linea S′A′ eguale a SA e tirate il piano B′A′C′ perpendicolare sopra S′A′; dico che gli angoli rettilinei BAC, B′A′C′ degli angoli diedri SA, S′A′ sono eguali. Infatti, i triangoli rettangoli SAB, S′A′B′ sono eguali, perchè hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali; dunque il lato SB $=$ S′B′ e il lato AB $=$ A′B′. A causa dell' eguaglianza dei triangoli rettangoli SAC, S′A′C′ si ha pure il lato SC $=$ S′C′ e il lato AC $=$ A′C′. I triangoli SBC, S′B′C′, hanno allora un angolo eguale compreso tra due lati eguali e per conseguenza il lato BC è eguale a B'C'; dunque i triangoli ABC, A'B'C' hanno i tre lati rispettivamente eguali e l'angolo BAC è uguale a B'A'C'.

Scolio. — Ho supposto nella dimostrazione precedente che il piano BAC incontri le costole SB, SC lo che ha luogo tutte le volte che gli angoli ASB, ASC sono acuti.

Nel caso contrario, prendete sulle costole dei due angoli triedri S, S' delle lunghezze eguali SD, SE, SF, S'D', S'E', S'F' e conducete i piani DEF, D'E'F'. I triangoli isosceli SDE, S'D'E' sono eguali perchè hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali, dunque il lato DE è uguale a D'E'. Similmente DF = D'F' e EF = E'F'; laonde i triangoli DEF, D'E'F' sono eguali e l'angolo EDF è uguale a E'D'F'.

I due angoli triedri DSEF, D'S'E'F' hanno allora le facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine; di più gli angoli SDE, SDF sono acuti; dunque si può applicare la dimostrazione precedente per provare l'eguaglianza degli angoli diedri SD, S'D'.

Corollario I. — Se la disposizione delle facce eguali non fosse la stessa negli angoli tiedri S, S' questi angoli non sarebbero che simmetrici.

Corollario II. — *Due angoli triedri sono eguali o simmetrici se hanno le tre costole rispettivamente parallele e dirette nello stesso senso o in senso contrario.*

Infatti le loro facce sono eguali due a due e disposte nello stesso ordine o in modo differente.

TEOREMA X.

Due angoli triedri S, S' sono eguali se hanno i diedri rispettivamente eguali e disposti nello stesso ordine.

Sieno T e T′ gli angoli triedri rispettivamente supplementari a S e S′. I due angoli triedri S, S′ avendo i loro diedri rispettivamente eguali e disposti nello stess' ordine, gli angoli T, T′ hanno le loro facce rispettivamente eguali e disposte nello stess' ordine; dunque i loro angoli diedri sono eguali. Laonde le facce dell' angolo triedro S che sono i supplementi degli angoli diedri di T, sono eguali alle facce di S′ che sono pure i supplementi degli angoli diedri di T′; dunque S e S′ sono eguali.

SCOLIO. — Se la disposizione dei diedri eguali non fosse la stessa, l' angolo triedro S sarebbe eguale al simmetrico di S′.

Problemi da risolvere.

1. — Condurre per un punto dato una retta perpendicolare a un piano dato.

2. — Condurre per un punto dato un piano perpendicolare ad una retta data.

3. — Condurre per un punto dato una retta perpendicolare a una retta data.

4. — Condurre per un punto dato una retta che incontri due rette non situate nello stesso piano.

5. — Qualunque retta egualmente inclinata sopra tre rette che passano pel suo piede in un piano è perpendicolare a questo piano.

6. — Condurre per una retta data un piano parallelo a un' altra retta.

7. — Condurre per un punto un piano parallelo a due rette date.

8. — Condurre una retta parallela a una retta data e che incontri due rette non situate nello stesso piano.

9. — Due piani condotti perpendicolarmente a un terzo per due rette parallele, sono paralleli. — Le proiezioni di due rette parallele sullo stesso piano sono parallele.

10. — Se una retta è perpendicolare a un piano, la proiezione di questa retta sopra un piano qualunque è perpendicolare alla linea d'intersezione dei due piani.

11. — La somma degli angoli diedri d'un angolo poliedro di n facce è compreso tra $2(n-2)$ retti e $2n$ retti.

12. — Due angoli poliedri sono eguali se, eccettuati un angolo diedro e le due facce adiacenti, hanno gli angoli diedri eguali, le facce eguali ed una simile disposizione delle parti eguali.

13. — Due angoli poliedri sono eguali se, eccettuati una faccia e i due angoli diedri adiacenti, le facce sono eguali, gli angoli diedri eguali e disposti nello stess' ordine.

14. — Due angoli poliedri sono eguali se, eccetto tre facce o tre angoli diedri consecutivi, le facce e gli angoli diedri sono eguali e disposti nello stess' ordine.

15. — Tagliare un angolo poliedro a quattro facce con un piano tale che la sezione prodotta risulti un parallelogrammo.

16*. — In qualunque angolo triedro, i piani bisettori degli angoli diedri si tagliano seguendo una stessa retta.

17*. — In qualunque angolo triedro, i piani condotti per le costole e per le bisettrici delle facce opposte si tagliano seguendo una stessa retta.

18*. — In qualunque angolo triedro, i piani condotti per le bisettrici delle facce, perpendicolarmente a queste facce, si tagliano seguendo una stessa retta.

19*. — I piani condotti per le costole di un angolo triedro, perpendicolarmente alle facce opposte, si tagliano seguendo una stessa retta.

20*. — In qualunque angolo triedro, la somma degli angoli formati dalle costole colle bisettrici delle facce opposte, è minore della somma delle facce.

21*. — Qualunque angolo triedro è equivalente all'eccesso della semisomma dei suoi tre angoli diedri sopra un angolo retto.

22*. — Qualunque piano parallelo a due lati opposti di un quadrilatero storto, divide proporzionalmente gli altri due lati.

23*. — Se una prima retta divide proporzionalmente due lati opposti di un quadrilatero storto, e se una seconda retta divide proporzionalmente gli altri due lati del quadrilatero: 1° queste due rette sono in uno stesso piano; 2° ciascuna di esse è divisa dall'altra in due segmenti proporzionali ai segmenti dei lati che essa non incontra.

24*. — Qualunque piano trasversale determina sui quattro lati di un quadrilatero storto otto segmenti tali che il prodotto di quattro segmenti che non hanno estremità comuni, è uguale al prodotto degli altri quattro.

25*. — In qualunque esagono storto ABC *abc* che ha i lati opposti AB e *ab*, BC e *bc*, C*a* e *c*A eguali e paralleli, i mezzi D, E, F, *d*, *e*, *f*, dei lati sono in uno stesso piano.

26*. — In un poligono storto ABCD .... *abcd* ...., d'un numero pari di lati, che ha i lati opposti AB e *ab*, BC e *bc*, CD e *cd*, ec., eguali e paralleli, le rette A*a*, B*b*, C*c*, ec., che uniscono i vertici opposti, e quelle che uniscono i mezzi L, M, N, ec., *l*, *m*, *n*, ec., dei lati opposti, passano per un solo punto.

27*. — Le rette che passano per i mezzi dei lati opposti d'un quadrilatero storto s'incontrano, e il loro punto d'intersezione è situato nel mezzo della retta che unisce i mezzi delle diagonali.

28*. — Una retta è ugualmente inclinata sopra due piani che s'incontrano se incontra entrambi in punti egualmente distanti dalla loro intersezione. La reciproca è vera?

29*. — Il punto d'incontro delle altezze del triangolo che si ottiene tagliando un angolo triedro trirettangolo con un piano qualunque, è la proiezione del vertice dell'angolo triedro su questo piano.

30*. — Se un angolo triedro trirettangolo è tagliato da un piano che incontra le sue tre costole, 1° il triangolo intercetto sopra ciascuna delle facce è medio proporzionale tra la sua proiezione sul piano secante e la sezione che questo piano determina nell'angolo triedro; 2° il quadrato di questa sezione è uguale alla somma dei quadrati delle sue proiezioni sulle facce dell'angolo triedro.

LUOGHI GEOMETRICI.

1. Se pel piede di un'obliqua a un piano si conducono delle rette qualunque in questo piano e che per un punto dato sull'obliqua si conduca la perpendicolare a ciascuna di queste rette, quale sarà il luogo dei piedi di queste perpendicolari?

2. — Qual è il luogo dei punti tali che ciascuno di essi sia egualmente distante da tre punti dati non situati in linea retta?

3.—Trovare il luogo dei punti tali che la somma o la differenza dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi a due punti dati sia costante.

4. — Dati due piani e un punto esterno ad entrambi, se per questo punto si conduce una retta qualunque sino all'incontro dei due piani, qual è il luogo del punto armonico coniugato del punto dato rispetto ai due punti d'intersezione della retta e dei due piani?

5. — Qual è il luogo geometrico del mezzo di una retta di lunghezza costante, le cui estremità sono obbligate a restare sopra due altre rette rettangolari e non situate nello stesso piano?

6*. — Trovare il luogo dei punti le cui distanze a due piani paralleli sono proporzionali a due lunghezze date.

7*. Qual è il luogo dei punti egualmente distanti da tre piani le cui intersezioni sono parallele?

8*. Qual è il luogo dei punti egualmente distanti dalle tre facce di un angolo triedro?

9*. Qual è il luogo dei punti egualmente distanti dalle tre costole di un angolo triedro?

LIBRO SESTO.

POLIEDRI.

1. — *Poliedro* è un corpo terminato da tutte le parti da piani; i poligoni che questi piani formano mediante le loro intersezioni sono le *facce* del poliedro e il loro insieme costituisce la sua *superficie*.

Si sono dati in particolare i nomi di *tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro* ai poliedri di cui il numero delle facce è eguale a *quattro, sei, otto, dodici, venti.*

Si chiamano *angoli* di un poliedro gli angoli poliedri formati dalle sue facce; — *vertici* di un poliedro, i vertici dei suoi angoli; — *costole* di un poliedro, i lati delle sue facce; — *diagonali,* le rette che uniscono due vertici non situati sulla stessa faccia.

2. — Un poliedro è *regolare,* quando i suoi angoli sono eguali, e le sue facce sono poligoni regolari eguali.

3. — Un poliedro è *convesso,* se è tutto da una stessa parte di ciascuno dei piani, indefinitamente prolungati, che lo limitano. Nel caso contrario, si dice *concavo.*

Una linea retta non può incontrare la superficie di un poliedro convesso in più di due punti, e un piano la taglia sempre seguendo un poligono convesso, perchè questo poligono è tutto da uno stesso lato delle rette che lo formano.

4. — Fra i poliedri si distinguono: 1° il *prisma* 2° la *piramide*.

1°. LEMMA. — *Se per i lati di un poligono qualunque* ABCDE, *si conducono da una stessa parte del piano* ABC, *le rette* AF, BG, CH, DK, EL *parallele ed eguali, le loro estremità sono i vertici di un poligono eguale e parallelo al poligono dato. (fig. 296).*

Poichè, le rette AF, BG essendo eguali e parallele, il quadrilatero ABGF è un parallelogrammo; dunque FG è uguale e parallela ad AB; del pari le rette GH, HK, ec., sono rispettivamente eguali e parallele alle rette BC, CD, ec. Dunque i due poligoni AD, FK sono eguali e paralleli.

SCOLIO.—Si chiama *prisma* il poliedro ABCDEFGHKL che ha due facce AD, FK eguali e parallele, e di cui le altre facce sono parallelogrammi.

Le facce eguali e parallele sono le *basi* del prisma, e l'insieme delle altre facce forma la sua *superficie laterale*. La retta che misura la distanza delle due basi è l'*altezza* del prisma.

Un prisma è *retto* o *obliquo* secondochè i piani delle sue facce laterali sono perpendicolari o obliqui sopra le basi. — Le facce laterali di un prisma retto sono rettangoli.

Un prisma è *triangolare, quadrangolare, pentagonale*, ec., secondochè la sua base è un *triangolo*, un *quadrilatero*, un *pentagono*, ec.

Se si taglia un prisma con un piano non parallelo alla sua base, si chiama *tronco di prisma* la porzione del prisma compresa tra una delle basi e il piano secante.

Un prisma toglie nome di *parallelepipedo* quando le sue basi sono parallelogrammi; di modo che il parallelepipedo è compreso tra sei facce che sono parallelogrammi. *(fig 297.)*

Se il parallelepipedo è retto e se le sue basi sono rettangoli, gli si dà il nome di parallelepipedo *rettangolo (fig. 298)*. Si chiamano *dimensioni* di un parallelepipedo rettangolo le tre costole che passano per lo stesso vertice. — Il parallelepipedo rettangolo di cui le sei facce sono quadrati, è un *cubo* o *esaedro regolare*.

2°. Se si taglia un angolo poliedro S con un piano ABCDE che incontra tutte le costole, il poliedro SABCDE, formato dalle facce dell'angolo S e dal piano secante, ha ricevuto il nome di *piramide. (fig. 299.)*

Il poligono ABCDE è la base della piramide che ha per *superficie laterale* l'insieme delle facce triangolari SAB, SBC, ec. Dicesi *vertice* della piramide il punto S, e *altezza* la retta SF che misura la distanza del vertice alla base.

La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, ec., secondochè la base è un *triangolo*, un *quadrilatero*, un *pentagono*, ec. — Si dice che essa è *regolare* quando ha per base un poligono regolare, e che la retta che unisce il centro di questo poligono al vertice della piramide è perpendicolare alla base.

Se si taglia una piramide con un piano qualunque, la porzione di questo poliedro compresa tra la base e il piano secante, è chiamata *piramide troncata* o *tronco di piramide*.

CAPITOLO I.

Prisma e Parallelepipedo.

TEOREMA I.

Le sezioni MNOPQ, RSTUV *fatte in un prisma* ABCH *da due piani paralleli, sono poligoni eguali. (fig. 300.)*

Infatti, le intersezioni MN, RS dei due piani paralleli con la faccia AG del prisma sono parallele; inoltre sono eguali perchè comprese tra le due rette parallele AF, BG. Del pari si proverebbe che i lati ST, TU, ec. della sezione RSTUV, sono rispettivamente paralleli e eguali ai lati NO, OP, ec. della sezione MNOPQ. Questi poligoni hanno eziandio gli angoli eguali ciascuno a ciascuno; poichè questi angoli, considerati due a due, hanno i loro lati paralleli e diretti nello stesso senso; così l'angolo RST è uguale all'angolo MNO, l'angolo STU è uguale all'angolo NOP, ec. Laonde le sezioni MNOPQ, RSTUV che hanno i lati eguali e gli angoli rispettivamente eguali sono eguali.

Corollario I. — Qualunque sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alla base è uguale a questa base.

Corollario II. — Qualunque sezione fatta da un piano in un parallelepipedo è un parallelogrammo.

Scolio. — Si da il nome di *sezione retta* a qualunque sezione fatta in un prisma da un piano perpendicolare alle costole laterali.

TEOREMA II.

1°. *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele ed eguali;*

2°. *Gli angoli triedri opposti sono simmetrici. (fig. 301.)*

1°. Le basi AC, EG del parallelepipedo AG sono, in virtù della definizione di questo poliedro, eguali e parallele. Dico che vale lo stesso per due facce opposte qualunque BG e AH.

Infatti, le facce del parallelepipedo essendo parallelogrammi, le rette BF, AE sono eguali e parallele; vale lo stesso per BC e AD. Ora gli angoli EAD, FBC che hanno i lati paralleli e diretti nello stesso senso, sono eguali e i loro piani sono paralleli; dunque i parallelogrammi BG, AH hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali e sono eguali.

2°. Dico che gli angoli triedri opposti B e H sono simmetrici. Poichè se formo il simmetrico HD'E'G' dell'angolo HDEG, prolungando le sue costole al di là del vertice H, i due angoli triedri BACF, HD'E'G' hanno le costole parallele due a due e dirette nello stesso senso; dunque le loro facce parallele sono eguali e disposte nello stesso ordine. Laonde questi angoli triedri sono eguali.

Scolio. — Si possono prendere per basi di un parallelepipedo due facce opposte qualunque, poichè esse sono eguali e parallele.

TEOREMA III.

Le diagonali di un parallelepipedo sono disuguali e si dividono mutuamente in due parti eguali. (fig. 302.)

Consideriamo due diagonali qualunque AG, CE del parallelepipedo AG. Le costole AE, CG di questo poliedro sono eguali e parallele; dunque il quadrilatero ACGE è un parallelogrammo e le sue diagonali AG, CE che sono disuguali, si dividono scambievolmente in due parti eguali nel punto O.

Corollario. — Se il parallelepipedo è rettangolo i due quadrilateri ACGE, BDHF sono rettangoli eguali; dunque le diagonali del parallelepipedo rettangolo sono eguali e si dividono mutuamente in due parti eguali.

Scolio. — Si chiama *centro* di un parallelepipedo il punto d'incontro delle sue diagonali, perchè divide in due parti eguali qualunque retta tirata da questo punto fino all'incontro della superficie del parallelepipedo.

TEOREMA IV.

La somma dei quadrati delle diagonali di un parallelepipedo è uguale alla somma dei quadrati delle dodici costole. (fig. 302.)

Conduciamo per le costole opposte AE e CG, BF e DH del parallelepipedo AG, i piani ACGE, BDHF. Il quadrilatero ACGE essendo un parallelogrammo, abbiamo

$$AG^2 + CE^2 = 2AE^2 + 2AC^2.$$

Il parallelogrammo BDHF dà pure:

$$BH^2 + DF^2 = 2BF^2 + 2BD^2.$$

Aggiungendo queste eguaglianze membro a membro e osservando che BF è uguale ad AE, avremo:

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 2AC^2 + 2BD^2.$$

Ma AC e BD sono le diagonali del parallelogrammo ABCD; dunque

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2;$$

per conseguenza

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2.$$

Corollario. — Se il parallelepipedo è rettangolo, le sue diagonali sono eguali, e l'eguaglianza precedente si riduce a

$$AG^2 = AE^2 + AB^2 + AD^2,$$

vale a dire che il quadrato di una diagonale è uguale alla somma dei quadrati delle tre costole che partono da uno stesso vertice.

Scolio. — Il quadrato della diagonale di un cubo è uguale al triplo del quadrato del suo lato.

CAPITOLO II.

Misura del Parallelepipedo e del Prisma

—

TEOREMA I.

Due prismi sono eguali quando hanno un angolo triedro eguale compreso tra facce rispettivamente eguali. (fig. 303.)

Supponiamo, nei due prismi AK, A'K', l'angolo triedro A eguale all'angolo triedro A', il poligono ABCDE eguale al poligono A'B'C'D'E' e i parallelogrammi ABGF, AELF rispettivamente eguali ai parallelogrammi A'B'G'F', A'E'L'F'.

Per dimostrare l'eguaglianza di questi due prismi, poniamo il poligono A'B'C'D'E' sopra ABCDE; poichè gli angoli triedri A e A' sono eguali, il piano B'A'F' s'applica sopra BAF, il piano E'A'F' sopra EAF e la retta A'F' prende la direzione di AF. Ora il piano G'B'C'H' è parallelo alla retta A'F'; dunque coincide col piano GBCH parallelo ad AF; egualmente il piano H'C'D'K' s' applica sopra HCDK, ec. In oltre le rette AF, BG, ec., A'F', B'G', ec., sono eguali; dunque i due poligoni F'G'H'K'L', FGHKL coincidono, e i prismi AK, A'K' sono eguali.

Corollario. — *Due prismi retti sono eguali se hanno le basi uguali e le altezze eguali.*

Poichè hanno gli angoli triedri due a due eguali e compresi fra tre facce rispettivamente eguali.

La loro eguaglianza si può anche dimostrare colla sovrapposizione diretta.

Scolio. — Se n è il numero dei lati della base ABCDE del prisma AK, vi bisognano $2n-3$ condizioni per l'eguaglianza dei due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E', e per conseguenza $2n$ condizioni per l'eguaglianza dei due prismi AK, A'K'.

TEOREMA II.

Qualunque prisma obliquo è equivalente a un prisma retto, che ha per altezza una delle costole laterali del prisma obliquo e per base la sua sezione retta. (fig. 381.)

Sia AK un prisma obliquo che ha per base i poligoni ABCDE e FGHKL. Per l'estremità A ed F della costola laterale AF conduco i piani AB'C', FG'H' perpendicolari a questa retta. Le sezioni AB'C'D'E', FG'H'K'L' sono due poligoni eguali, poichè i loro piani sono paralleli; per conseguenza, il poliedro AK' è un prisma retto che ha per altezza la costola laterale AF del prisma obliquo AK e per base la sua sezione retta AB'C'D'E'. Dico che questi due prismi sono equivalenti.

Infatti, i due prismi AK, AK' hanno il poliedro ABCDEFG'H'K'L' di comune; quindi basta provare che il poliedro AD è uguale al poliedro FK. Sovrappongo le due sezioni eguali AB'C'D'E', FG'H'K'L' in modo che esse coincidano; le costole BB', GG' che sono rispettivamente perpendicolari a queste sezioni e che hanno la stessa lunghezza AF — BG' prendono allora la stessa direzione, e le loro estremità B, G si applicano l'una sull'altra. Accade lo stesso pei vertici C e H, D e K, E ed L. Laonde i due poliedri AD, EK avendo i medesimi vertici sono eguali; e per conseguenza i due prismi AK, AK' sono equivalenti.

TEOREMA III.

Due parallelepipedi rettangoli che hanno basi eguali stanno tra loro come le altezze. (fig. 304.)

Consideriamo i due parallelepipedi rettangoli ABCDE, ABCDK che hanno la stessa base ABCD e di cui le altezze sono AE, AK. Supponiamo in prima queste altezze commensurabili e la loro massima comune misura AO contenuta 5 volte in AE, 3 volte in AK; avremo

$$\frac{AE}{AK} = \frac{5}{3}.$$

Conduciamo per i punti di divisione della retta AE dei piani paralleli alla base AC; le sezioni sono eguali alla base, e il parallelepipedo ABCDE è diviso in 5 parallelepipedi rettangoli eguali ad ABCDO perchè hanno le basi eguali e le altezze eguali. Ma il parallelepipedo

ABCDK ne contiene 3; dunque

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{ABCDK}} = \frac{5}{3} = \frac{\text{AE}}{\text{AK}}.$$

Si dimostra col ragionamento ordinario che questi rapporti sono ancora eguali quando le altezze non hanno comune misura.

TEOREMA IV.

Due parallelepipedi rettangoli P, P′ *che hanno una dimensione comune stanno tra loro come i prodotti delle altre due dimensioni.*

Sieno a, b, c le tre dimensioni del parallelepipedo P e a, b', c' quelle di P′. Costruiamo un parallelepipedo rettangolo P″ avente per dimensioni a, b, c'; i parallelepipedi P e P hanno una faccia eguale di cui le dimensioni sono a e b; dunque:

$$\frac{\text{P}}{\text{P}''} = \frac{c}{c'}.$$

I parallelepipedi P″ e P′ hanno pure una faccia eguale che ha per dimensioni a e c'; dunque

$$\frac{\text{P}''}{\text{P}'} = \frac{b}{b'}.$$

Moltiplicando le eguaglianze precedenti membro a membro e sopprimendo il fattore P″ comune ai due termini del primo rapporto, si ha:

$$\frac{\text{P}}{\text{P}'} = \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'}.$$

TEOREMA V.

Due parallelepipedi rettangoli P, P′ *stanno tra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni.*

Sieno a, b, c le dimensioni del parallelepipedo P, a', b', c' quelle di P′ e a, b, c' quelle di un terzo parallelepipedo P″ che si paragona successivamente agli altri due. I parallelepipedi P, P″ hanno una faccia eguale che ha per dimensioni a e b; dunque

$$\frac{P}{P''}=\frac{c}{c'}.$$

I parallelepipedi P″ e P′ hanno una dimensione comune c'; dunque

$$\frac{P''}{P'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}.$$

Moltiplicando le eguaglianze precedenti membro a membro e riducendo, si ha:

$$\frac{P}{P'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'}.$$

Corollario I. — Se *si conviene* di prendere per unità di volume il cubo fatto sull'unità di lunghezza, e che P′ sia questo cubo, le sue dimensioni a', b', c' sono eguali all'unità lineare, e l'eguaglianza

$$\frac{P}{P'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'}$$

dimostra che il numero astratto che esprime la misura del parallelepipedo rettangolo P′ è uguale al prodotto dei tre numeri che rappresentano le misure delle dimensioni a, b, c di questo parallelepipedo. Questo resultato si enuncia ordinariamente nella maniera seguente: *il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle sue tre dimensioni.*

Corollario II. — Se *conveniamo* altresì di prendere per unità di superficie il quadrato fatto sopra l'unità lineare, e osserviamo che il prodotto $\frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$ è allora la misura di una delle facce del parallelepipedo P, avremo questo nuovo enunciato del teorema precedente: *il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Scolio. — L'unità di volume, vale a dire il *metro cubo* si divide in 1,000 *decimetri cubi;* il decimetro cubo in 1,000 *centimetri cubi*, e il centimetro cubo in 1,000 *millimetri cubi.*

TEOREMA VI.

Il volume di un parallelepipedo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

1°. Consideriamo il parallelepipedo retto ABCDEFGH *(fig. 305)* che ha per base il parallelogrammo ABCD e per altezza AE. Per un punto qualunque A della costola AB, che appartiene ad una delle basi, conduciamo un piano perpendicolare a questa costola; la sezione AEH'D' è un rettangolo, poichè le facce opposte BE, CH del parallelepipedo dato sono perpendicolari alle basi AC, EG. Il parallelepipedo proposto AG è equivalente al parallelepipedo retto che avrebbe la sezione AEH'D' per base e la costola AB per altezza. Ma quest'ultimo parallelepipedo retto è rettangolo, poichè la sua base è un rettangolo, ed ha quindi per misura il prodotto delle sue tre dimensioni AE, AD', AB. Dunque il parallelepipedo

AG ha altresì per misura AE $\times$ AD' $\times$ AB, cioè il prodotto della sua altezza AE per la base ABCD; giacchè l'area di questa base è uguale ad AD' $\times$ AB.

2°. Sia AG un parallelepipedo obliquo che ha per base il parallelogrammo ABCD *(fig. 306)* Per un punto qualunque E della costola EF che appartiene ad una delle basi, conduco un piano perpendicolare a questa costola, ed osservo che il parallelepipedo proposto è equivalente al parallelepipedo retto che avrebbe la sezione retta EKNO per base e la costola EF per altezza. Sia ER la perpendicolare condotta dal punto E al piano ABCD; questa retta è ad una volta l'altezza del parallelepipedo proposto AG e quella del parallelogrammo EKNO, giacchè essa è compresa nel piano di questo quadrilatero ed è perpendicolare al lato KN. Dunque il parallelepipedo retto ha per misura ER $\times$ EO $\times$ EF; e per conseguenza il volume del parallelepipedo AG è uguale ad ER $\times$ EO $\times$ EF, cioè al prodotto della sua altezza ER per la sua base EFGH che ha per misura EO $\times$ EF. (*)

Corollario. — Due parallelepipedi che hanno basi equivalenti stanno tra loro come le altezze. Reciprocamente, due parallelepipedi che hanno le altezze eguali stanno tra loro come le basi.

TEOREMA VII.

Il piano, condotto per due costole opposte di un parallelepipedo lo divide in due prismi triangolari equivalenti. (fig. 307.)

Nel parallelepipedo AG le due costole BF, DH sono

(*) Da questo teorema si deduce agevolmente la conseguenza che: *se da uno dei vertici di un parallelepipedo si abbassano delle perpendicolari sulle tre facce non adiacenti, il prodotto di ciascuna perpendicolare per la faccia corrispondente è costante.* (T.)

parallele e il piano di queste due rette divide il parallelepipedo in due prismi triangolari ABDEFH, BCDFGH, giacchè le facce laterali di questi poliedri sono parallelogrammi e le loro basi sono triangoli eguali e paralleli. Dico che questi prismi sono equivalenti.

1°. Supponiamo il parallelepipedo AG retto; i due prismi triangolari sono anche retti ed eguali perchè hanno le basi eguali e la medesima altezza.

2°. Se il parallelepipedo è obliquo, conduciamo il piano MNOP perpendicolare alle costole laterali del parallelepipedo, ed osserviamo che il prisma obliquo ABDEFH è equivalente al prisma retto che avrebbe per base la sezione retta MNP del prisma obliquo e per altezza la sua costola laterale BF; parimenti il prisma obliquo DBCHFG è equivalente al prisma retto che ha per base la sua sezione retta NOP e per altezza la sua costola laterale BF. Ma le basi MNP, NOP dei due prismi retti sono eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali; questi prismi hanno inoltre la stessa altezza BF; dunque sono eguali, e i prismi obliqui DBCHFG, ABDEFH sono per conseguenza equivalenti. (*)

(*) In virtù di questo teorema qualunque prisma può trasformarsi in un parallelepipedo rettangolo che abbia la stessa altezza e base equivalente; lo che corrisponde alla trasformazione di un poligono in un rettangolo che abbiamo dimostrata nella Geometria piana. Volendo spingere più oltre questa analogia bisognerebbe trasformare il parallelepipedo rettangolo in un cubo (che corrisponde alla trasformazione di un rettangolo in un quadrato) e costruire un cubo il cui volume fosse uguale alla somma dei volumi di due dati cubi (che corrisponde alla proposizione di Pitagora). Ma questi due problemi non possono essere costruiti mediante la linea retta e il cerchio; infatti, indichiamo con a, b, c le dimensioni del parallelepipedo rettangolo dato e con x il lato su cui dev'essere costruito il cubo che si cerca, avremo pel primo problema:

$$x^3 = a \cdot b \cdot c \quad \text{ovvero} \quad x = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c};$$

pel secondo problema, indicando con a, b, y i lati dei due cubi dati e di quello che si cerca, avremo:

$$y^3 = a^3 + b^3 \quad \text{ovvero} \quad y = \sqrt[3]{a^3 + b^3}.$$

Come si vede le soluzioni di questi due problemi richiedono un'estra-

Corollario. — Il prisma triangolare ABDE è equivalente alla metà del parallelepipedo AG che ha la medesima altezza del prisma ed una base doppia.

TEOREMA VII.

Il volume di un prisma è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia in prima il prisma triangolare ABCE *(fig. 308.)* Conduciamo per la costola BD un piano parallelo a CAF e per la costola CE un piano parallelo a BAF. Il parallelepipedo AK è doppio del prisma ABE e il suo volume è uguale al prodotto della sua base 2ABC per la sua altezza EG; dunque il prisma ABE ha per misura ABC $\times$ EG, vale a dire il prodotto della sua base per la sua altezza.

Consideriamo in secondo luogo il prisma poligonale ABCK *(fig. 309.)* Conduciamo per la costola AF e per ciascuna delle rette CH, DK che le sono parallele dei piani che dividono il poliedro in prismi triangolari della stessa altezza del prisma poligonale, e di cui le basi sono i triangoli ABC, ACD, ADE. Indicando con H l'altezza comune a questi prismi, avremo

$$\text{Prisma ABC} = \text{ABC} \times \text{H}.$$
$$\text{Prisma ACD} = \text{ACD} \times \text{H}.$$
$$\text{Prisma ADE} = \text{ADE} \times \text{H}.$$

zione di radice cubica, mentre tutte le costruzioni che si possono eseguire colla linea retta e col cerchio contengono solo radici quadrate; per conseguenza queste costruzioni non sono più bastevoli per le soluzioni dei due problemi precedenti, e si richiede per quest'oggetto l'aiuto di linee curve la cui legge di formazione è meno semplice. — Facendo $a = b$ nel valore di y, si ha $y = a\sqrt[3]{2}$, che esprime il problema della *duplicazione del cubo*, famoso presso gli antichi; siccome $\sqrt[3]{2}$ è un numero incommensurabile, questo problema non può essere risoluto che per approssimazione. (T)

Dunque il prisma poligonale è uguale a

$$(ABC + ACD + ADE) \times H,$$

vale a dire al prodotto della sua base per la sua altezza. (*)

COROLLARIO. — Due prismi che hanno basi equivalenti sono tra loro come le altezze. Reciprocamente due prismi della stessa altezza sono tra loro come le basi.

CAPITOLO III.

Piramide.

TEOREMA I.

1°. *Qualunque piano* abcde *parallelo alla base* ABCDE *di una piramide* SABCDE *divide le costole laterali e l' altezza in segmenti proporzionali.*

2°. *La sezione* abcde *fatta nella piramide è simile alla base. (fig. 310.)*

1°. Se per il vertice S della piramide si conduce il piano MN parallelo alla base, le costole SA, SB, ec., e l'altezza SF sono divise in segmenti proporzionali dai tre piani paralleli AD, *ad*, MN; dunque si ha:

$$Sa : aA :: Sb : bB :: \text{ec.} \ldots :: Sf : fF .$$

2°. I triangoli SAB, SBC, SCD, ec., essendo rispettivamente simili ai triangoli *Sab*, *Sbc*, *Scd*, ec., si ha:

$$AB : ab :: SB : Sb$$
$$BC : bc :: SB : Sb :: SC : Sc$$
$$CD : cd :: SC : Sc :: \text{ec.}$$

(*) Da questa proposizione risulta che: *la base di un prisma sta alla sezione retta, come la costola laterale sta all' altezza.* Laonde la sezione retta è minore della base, eccetto quando il prisma è retto. (T.)

dunque

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: \text{ec.}$$

L'angolo ABC è uguale ad *abc* perchè hanno i loro lati paralleli e diretti nello stesso senso; parimenti l'angolo BCD è uguale a *bcd*; l'angolo CDE a *cde*, ec. Dunque i due poligoni *abcde*, ABCDE che hanno gli angoli eguali e i lati omologhi proporzionali sono simili.

Corollario.—La sezione *abcde* essendo simile alla base, si ha:

$$abcde : ABCDE :: ab^2 : AB^2.$$

$$ab : AB :: Sb : SB :: Sf : SF.$$

dunque

$$abcde : ABCDE :: Sf^2 : SF^2.$$

Da ciò resulta questo teorema: *Le sezioni fatte in una piramide da due piani paralleli sono tra loro come i quadrati delle loro distanze al vertice della piramide.*

TEOREMA II.

Se due piramidi S, S′ *hanno altezze eguali, e si tagliano con piani paralleli alle basi e egualmente distanti dai vertici, le sezioni stanno tra loro come le basi. (fig. 311.)*

Supponiamo l'altezza SE della piramide SABC uguale all'altezza S′E′ della piramide S′A′B′C′D′ e prendiamo su queste linee lunghezze eguali S*e*, S′*e*′; conduciamo poscia pel punto *e* il piano *abc* parallelo ad ABC e pel punto *e*′ il piano *a*′*b*′*c*′*d*′ parallelo ad A′B′C′D′.

Abbiamo nella piramide SABC,

$$abc : ABC :: Se^2 : SE^2,$$

e nella piramide S'A'B'C'D'

$$a'b'c'd' : A'B'C'D' :: S'e'^2 : S'E'^2 .$$

dunque

$$abc : ABC :: a'b'c'd' : A'B'C'D' .$$

Corollario. — Se le basi delle due piramidi sono equivalenti, le sezioni abc, $a'b'c'd'$ lo sono altresì.

TEOREMA III.

Due piramidi sono eguali quando hanno un angolo diedro eguale, compreso fra la base e una faccia laterale rispettivamente eguali e disposte nello stesso ordine. (fig. 312.)

Supponiamo nelle piramidi SABCD, S'A'B'C'D' l' angolo diedro AB eguale all' angolo diedro A'B', il poligono ABCD eguale ad A'B'C'D' e il triangolo SAB eguale a S'A'B'.

Per dimostrare l' eguaglianza delle due piramidi S, S' poniamo il poligono ABCD sopra A'B'C'D'; gli angoli diedri AB, A'B' essendo eguali, e la disposizione delle facce eguali essendo la stessa nelle due piramidi, il piano SAB s'applica sopra S'A'B'. Ora i due triangoli SAB, S'A'B' sono eguali, dunque il lato AS prende la direzione di A'S' e i due punti S, S' coincidono. Da ciò resulta la coincidenza delle facce SBC, S'B'C', quella delle facce SDC, S'D'C' e infine quella delle facce SAD, S'A'D'; dunque le due piramidi S, S' sono eguali.

Scolio.—Se n è il numero dei lati della base della piramide SABC, bisognano $2n-3$ condizioni per l'eguaglianza dei poligoni ABCD, A'B'C'D', e per conseguenza $2n$ condizioni per l' eguaglianza delle piramidi S, S'.

TEOREMA IV.

Due piramidi triangolari che hanno le basi equivalenti e le altezze eguali sono equivalenti. (fig. 313.)

Sieno SABC, S'A'B'C' due piramidi triangolari poste sullo stesso piano; supponiamo le loro basi ABC, A'B'C' equivalenti e le loro altezze eguali alla retta AT perpendicolare al piano delle basi; dico che queste piramidi sono equivalenti.

Infatti, ammettiamo che sieno disuguali e che SABC sia la maggiore; indichiamo la loro differenza con un prisma avente per base il triangolo ABC e per altezza la retta Ax. Dividiamo la retta AT in parti eguali, minori di Ax e facciamo passare per i punti di divisione y, z, u dei piani paralleli alle basi; ciascuno di questi piani determina nelle due piramidi delle sezioni equivalenti, poichè le basi sono equivalenti. Conduciamo per il lato BC della base della maggior piramide un piano parallelo alla costola SA fino all'incontro del piano della sezione seguente DEF; questi piani formano colle facce dell'angolo triedro ABCD un prisma triangolare di cui una parte è esteriore alla piramide. Facendo la stessa costruzione su ciascuna sezione DEF, GHK, LMN, avremo tanti prismi quante sono le divisioni nell'altezza AT e la loro somma sarà maggiore della piramide SABC.

Se costruiamo pure un prisma sotto ciascuna sezione della piramide S'A'B'C' conducendo per le rette E'F', H'K', M'N' dei piani paralleli allo spigolo S'A', avremo tanti prismi iscritti nella piramide S'A'B'C' quante divisioni sono, meno una, nella altezza AT, e la somma di questi prismi sarà minore della piramide; dunque l'eccesso della somma dei prismi circoscritti a SABC sulla somma dei prismi iscritti in S'A'B'C' dev' essere maggiore della differenza delle due piramidi, vale a dire maggiore del volume del prisma $ABCx$.

Ora il primo prisma circoscritto SLMN è equivalente al primo prisma iscritto L'M'N'G', perchè hanno basi equivalenti e altezze uguali; così pure il secondo prisma circoscritto LGHK è equivalente al secondo prisma iscritto G'H'K'D', ec. Dunque la differenza delle due somme di prismi è uguale al prisma ABCD costruito sulla base ABC della maggior piramide; ma questo prisma dovendo essere maggiore del prisma $ABCx$, si avrebbe

$$ABC \times Ay > ABC \times Ax,$$

lo che è assurdo, poichè Ay è minore di Ax. Dunque le due piramidi SABC, S'A'B'C' non possono essere disuguali.

Altra dimostrazione. Di questo teorema può darsi un' altra dimostrazione fondata sul metodo dei limiti.

Sieno SABC, S'A'B'C' *(fig. 382)* due piramidi triangolari, che hanno le loro basi ABC, A'B'C' equivalenti e le loro altezze eguali. Poniamo queste piramidi sullo stesso piano e dividiamo una delle loro costole laterali in un numero qualunque di parti eguali, per esempio la costola SA in quattro parti eguali. Dai punti di divisione D, E, F conduciamo dei piani paralleli al piano ABC che contiene le basi; ciascuno di questi piani produce sezioni equivalenti nelle due piramidi, poichè le basi sono equivalenti.

Dai vertici G e H della sezione DGH tiriamo delle parallele alla costola SA sino all' incontro del piano della base ABC e uniamo i punti K ed L d' intersezione colla retta KL. Ciascuno dei quadrilateri ADGK, ADHL, GKLH è un parallelogrammo, e i triangoli AKL, DGH, compresi nei piani paralleli sono eguali come aventi i lati rispettivamente eguali; dunque il poliedro AKLDGH è un prisma triangolare. Costruiamo al modo stesso sotto ciascuna delle sezioni EMN, FRQ della piramide SABC un prisma che abbia questa sezione per base e le cui costole laterali sieno parallele ad SA e terminate al piano della sezione precedente. Iscriviamo parimenti nella piramide S'A'B'C' tanti prismi quante sono le sezioni che contiene, e prendiamo le loro costole laterali parallele ad S'A'.

Prima di procedere oltre è conveniente provare che la piramide SABCD è il limite verso il quale tende la somma dei prismi iscritti in questo poliedro, quando il numero di questi prismi cresce indefinitamente. Infatti la differenza fra la piramide e la somma dei prismi iscritti è evidentemente minore del tronco di piramide compreso tra i piani paralleli SBC, FKL. Ma la distanza di questi piani è minore di FS ovvero di una delle divisioni di SA, quindi la spessezza del tronco di piramide e per conseguenza il suo volume diminuisce indefinitamente quando si divide SA in parti eguali di più in più piccole. Dunque ec.

Ciò posto osserviamo che il prisma ADGH iscritto nella piramide SABC è equivalente al prisma A'D'G'H' iscritto nella piramide S'A'B'C', perchè hanno la stessa altezza e le basi DGH, D'G'H' equivalenti; e similmente sono equivalenti i prismi DEMN, D'E'M'N', e i prismi EFRQ, E'F'R'Q'; dunque la somma dei prismi iscritti nella piramide SABC è uguale a quella dei prismi iscritti nella piramide S'A'B'C'. Se ora raddoppiamo indefinitamente il numero delle divisioni della costola SA, e per conseguenza quello dei prismi iscritti in ciascuna piramide, la somma dei prismi iscritti in SABC non cessa di essere eguale a quella dei prismi iscritti in S'A'B'C'; laonde i limiti di queste due somme, cioè le piramidi SABC, S'A'B'C' sono equivalenti.

TEOREMA V.

Il volume di una piramide è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. (fig. 314.)

Consideriamo prima la piramide triangolare SABC. Conduciamo per il vertice S un piano parallelo alla base ABC e per la costola AC un piano parallelo alla retta SB; la piramide SABC è il terzo del prisma triangolare SDEABC. Infatti il prisma è uguale alla somma delle piramidi SABC, SACED; ma la piramide quadrangolare SACED è divisa dal piano SAE in due piramidi triangolari SADE, SACE equivalenti, poichè hanno lo stesso vertice S e le loro basi ADE, ACE, situate sullo stesso piano, eguali. Inoltre le due piramidi SABC, SADE hanno basi eguali ABC, SDE e la stessa altezza SO del prisma; dunque sono equivalenti, ed il prisma SDEABC è il triplo della piramide SABC.

Poichè il prisma ha per misura il prodotto $ABC \times SO$, il volume della piramide triangolare SABC è uguale a $\frac{1}{3} ABC \times SO$.

Consideriamo ora la piramide poligonale SABCDE, *(fig. 315)* e conduciamo dei piani per SA e ciascuna delle costole SC, SD; la piramide data verrà divisa in tante piramidi triangolari quanti lati meno due ha il poligono ABCDE, e tutte queste piramidi hanno la medesima altezza SO della piramide poligonale. Or noi abbiamo

$$\text{Pir. } SABC = \frac{1}{3} ABC \times SO$$

$$\text{Pir. } SACD = \frac{1}{3} ACD \times SO$$

$$\text{Pir. } SADE = \frac{1}{3} ADE \times SO ;$$

dunque il volume della piramide SABCDE è uguale a $\frac{1}{3}(ABC + ACD + ADE) \times SO$, cioè al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. (*)

(*) Il volume della piramide triangolare si può ottenere direttamente nel seguente modo.

Indichiamo con b la base e con h l'altezza della piramide data. Dividiamo quest'altezza in n parti eguali e per ciascuno dei punti di divisione conduciamo dei piani paralleli alla base. Sieno b_1, b_2, ... b_{n-1} le sezioni succesive prodotte da questi piani. Costruiamo adesso dei prismi che abbiano per basi rispettivamente b, b_1, b_2, ... b_{n-1}, per altezza comune $\frac{h}{n}$ e per costole rette parallele ad una delle costole della piramide; verremo così a formare un volume V che sarà evidentemente maggiore del volume P della piramide. Se, prendendo per basi successive b_1, b_2, ... b_{n-1}, costruiamo dei prismi interni, verremo a formare un volume v minore di quello della piramide. È chiaro che aumentando il numero n i volumi V e v subiscono delle variazioni inverse; il primo diminuisce mantenendosi però sempre maggiore del volume della piramide, il secondo aumenta restando sempre minore di P. Ora si ha:

$$V = \left(b + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\right)\frac{h}{n},$$

$$v = \left(b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n-1}\right)\frac{h}{n};$$

per conseguenza

$$V - v = b.\frac{h}{n};$$

il quale valore diminuisce indefinitamente al crescere di n. Dunque il volume P della piramide è il limite verso il quale tendono i volumi V e v quando n aumenta. Laonde potremo scrivere

$$P = lim.\left(b + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\right)\frac{h}{n}.$$

Indichiamo con b_k una qualunque delle sezioni b_1, b_2 ....; avremo

$$b_k : b :: \left(h - k.\frac{h}{n}\right)^2 : h^2;$$

da cui

$$b_k = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 b$$

Facendo in questa relazione $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$, e sostituendo i valori che ne risultano in quello di P, troveremo

$$P = lim. : \frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots\ldots + 2^2 + 1}{n^3}\,b.\,h$$

Per trovare questo limite, ricorderemo dall' Aritmetica (Bertrand, pa-

Corollario I. — Qualunque piramide è uguale al terzo di un prisma della medesima base e della medesima altezza.

Corollario II. — Per misurare il volume di un poliedro qualunque, decomponetelo in piramidi unendo tutti i suoi vertici ad un punto qualunque preso nell' interno del poliedro. Determinate quindi il volume di ciascuna di queste piramidi, e fate la somma delle loro misure.

gina 210) che

$$(p+1)^3-p^3=3p^2+3p+1,$$

quindi

$$(p+1)^3-p^3>3p^2.$$

Similmente

$$p^3-(p-1)^3=3p^2-(3p-1),$$

e quindi

$$p^3-(p-1)^3<3p^2$$

per ogni valore di p maggiore di $\frac{1}{3}$.

Talchè potremo scrivere:

$$(p+1)^3-p^3>3p^2>p^3-(p-1)^3.$$

Facendo in queste disuguaglianze successivamente $p=1, 2, 3, \ldots n$, e sommando, troviamo

$$(n+1)^3-1>3(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)>n^3;$$

ovvero, dividendo per $3n^3$,

$$\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\frac{1}{n^3}\right]>\frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}>\frac{1}{3}.$$

Ma il termine che moltiplica $\frac{1}{3}$ ha per limite 1, quindi

$$lim.\ \frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3},$$

e per conseguenza

$$P=\frac{1}{3}b.h.$$

Da questa formola si deduce agevolmente il volume di un tronco di piramide, il quale si può considerare come la differenza di due piramidi. Se B e H sono la base e l' altezza della piramide maggiore; b e h la base e l' altezza della

Se nell' interno del poliedro vi ha un punto egualmente distante da tutte le sue facce e che si prenda per vertice delle piramidi, il volume del poliedro è uguale al prodotto della sua superficie pel terzo della distanza di questo punto ad una faccia qualunque.

piramide minore, il volume T del tronco di piramide sarà dato da

$$T = \frac{1}{3} (B \, . \, H - b \, . \, h).$$

Chiamiamo k la distanza fra i due piani paralleli, avremo $K = H - h$. Dippiù

$$B : b :: H^2 : h^2;$$

da cui

$$\sqrt{\frac{B}{b}} = \frac{H}{h};$$

e per consegnenza

$$H = \frac{k \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}, \quad h = \frac{k \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Sostituendo questi valori di H e h in quello di T, si trova

$$T = \frac{1}{3} \left(B + \sqrt{Bb} + b \right) k.$$

Si può evitare il calcolo di una delle basi B e b, osservando che si ha:

$$b : B :: a^2 : A^2, \text{ da cui } b = B . \frac{a^2}{A^2},$$

essendo a ed A due lati omologhi di queste basi.

Laonde

$$T = \frac{1}{3} \left(B + \sqrt{B^2 . \frac{a^2}{A^2}} + B \frac{a^2}{A^2} \right) k$$

$$T = \frac{B \, . \, k}{3} \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right).$$

Questa formola si applica più facilmente della precedente. Il primo valore di T, messo sotto la forma

$$T = \frac{B + b}{2} . k - \left(\sqrt{B} - \sqrt{b} \right)^2 \frac{k}{6},$$

mostra chiaramente che nelle applicazioni numeriche, le quali non domandano grandissima esattezza, e nel caso in cui le basi differiscono poco l'una dall'altra, il volume del tronco di piramide è sensibilmente eguale alla semisomma delle basi moltiplicata per l'altezza. (T.)

TEOREMA VI.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il volume del tronco della piramide è uguale alla somma dei volumi di tre piramidi, che hanno per altezza comune l' altezza del tronco e per basi rispettive la base inferiore del tronco, la base superiore e una media proporzionale tra queste due basi. (fig. 316.)

Consideriamo in prima il tronco di piramide triangolare ABCDEF di cui le basi ABC, DEF, sono parallele, e tiriamo i piani ACE, CDE che dividono il tronco in tre piramidi triangolari EABC, CDEF, EACD. La prima EABC ha per base il triangolo ABC e per altezza quella del tronco, perchè il suo vertice E è sul piano DEF. La seconda piramide CDEF ha per base il triangolo DEF e per altezza quella del tronco, poichè il suo vertice C è situato sul piano ABC. In quanto alla terza piramide EACD trasformiamola in un' altra GACD della stessa base ACD e della stessa altezza, trasportando il suo vertice E al punto G dove la costola AB è incontrata dalla retta EG parallela ad AD.

Ma la piramide GACD ha la stessa altezza del tronco e la sua base AGC è media proporzionale tra i triangoli ABC, DEF; infatti i triangoli AGC, ABC hanno la stessa altezza, quindi

$$ABC : AGC :: AB : AG.$$

I triangoli AGC, DEF hanno un angolo eguale, dunque

$$AGC : DEF :: AG \times AC : DE \times DF :: AC : DF ;$$

ma i triangoli equiangoli ABC, DEF danno

$$AB : DE \text{ o } AG :: AC : DF,$$

dunque

$$ABC : AGC :: AGC : DEF.$$

Abbiasi in secondo luogo il tronco di piramide poligonale ABCDEFGH, *(fig. 317.)* Costruiamo sopra il piano ABC una piramide triangolare S'A'B'C' della stessa altezza della piramide SABCD e di cui la base A'B'C' sia equivalente ad ABCD. Le due piramidi SA, S'A' saranno equivalenti, e il piano EFG determinerà in esse due sezioni equivalenti EFGH, E'F'G'; dunque la piramide S'E'F'G' è equivalente alla piramide SEFGH e per conseguenza il tronco della piramide triangolare è equivalente a quello poligonale, dunque, ec.

Corollario. — Sieno B, b le basi del tronco della piramide e h l'altezza, il suo volume è uguale a $\frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb})$.

TEOREMA VII.

Il volume di un tronco di prisma triangolare ABCDEF *è uguale alla somma dei volumi di tre piramidi, aventi per base comune la base inferiore* ABC *del tronco e per vertici respettivi i vertici* D, E, F, *della base superiore del prisma troncato. (fig. 318.)*

Infatti conduciamo i piani ACE, CDE che decompongono il tronco di prisma in tre piramidi triangolari EABC, EACD, ECDF. La prima EABC ha per base il triangolo ABC e per vertice il punto E. La seconda EACD considerata come avente il triangolo ADC per base e il punto E per vertice è equivalente alla piramide BACD; e questa può essere riguardata come avente il triangolo ABC per base e il punto D per vertice. La terza piramide ECDF è equivalente alla piramide ABCF, perchè le loro basi EFC, BFC sono equivalenti e che i loro vertici D, A sono sopra una retta parallela al piano delle basi. Ora la piramide ABCF può essere considerata come avente per base il triangolo ABC e per vertice il punto F. Dunque il prisma triangolare troncato DABC è uguale alla somma di tre piramidi aventi per base comune il triangolo ABC e per vertici i punti D, E, F.

COROLLARIO I. — Sieno h, h', h'' le distanze dei punti D, E, F al piano ABC e b la base del prisma troncato; il suo volume è uguale a $\frac{1}{3}\, b\,(h + h' + h'')$. Laonde *il volume di un tronco di prisma triangolare è uguale al prodotto di una delle sue basi pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate sopra questa base, da ciascuno dei vertici della base opposta.*

COROLLARIO II. — *Il volume di un tronco di prisma triangolare è uguale al prodotto della sua sezione retta pel terzo della somma delle sue tre costole laterali.*

CAPITOLO IV.

Similitudine.

Due poliedri sono *simili* quando hanno gli angoli eguali, e le facce adiacenti agli angoli eguali, rispettivamente simili.

I vertici di due angoli eguali sono punti *omologhi*. Si chiamano costole *omologhe* quelle di cui le estremità sono punti omologhi; facce *omologhe* quelle che hanno per vertici punti omologhi o che sono simili.

Le costole omologhe di due poliedri simili sono proporzionali.

TEOREMA I.

Due piramidi sono simili quando hanno un angolo diedro, adiacente alla base, eguale e compreso tra due facce rispettivamente simili e disposte nello stesso ordine. (fig. 319.)

Sieno l'angolo diedro AB della piramide SABCD eguale all'angolo diedro *ab* della piramide *sabcd*, la base ABCD simile ad *abcd* e il triangolo SAB simile a *sab*; dico che le piramidi sono simili.

Infatti prendete sopra la costola SA la retta S*a'* eguale ad *sa* e conducete per il punto *a'* il piano *a'b'c'd'* parallelo alla base ABCD. Le piramidi SABCD, S*a'b'c'd'* sono simili, poichè le loro facce sono rispettivamente simili e i loro angoli triedri sono rispettivamente eguali, come aventi le loro costole parallele e dirette nello stesso senso.

Ora i triangoli S*a'b'*, *sab*, simili al triangolo SAB, sono eguali perchè hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali; parimente i poligoni *a'b'c'd'*, *abcd* sono eguali perchè simili ad ABCD e che i loro lati omologhi *a'b'*, *ab* sono eguali; dunque le piramidi S*a'b'c'd'*, *sabcd* sono eguali perchè hanno un angolo diedro, adiacente alla base, eguale e compreso tra due facce rispettivamente eguali e disposte nello stess' ordine, e la piramide *sabcd* è simile a SABCD.

Corollario I. — Le altezze SO, *so* delle piramidi simili SABC, *sabc* sono proporzionali a due costole omologhe.

Infatti il piano *a'b'c'* essendo parallelo ad ABC, si ha:

$$\mathrm{SO} : \mathrm{S}o' :: \mathrm{SA} : \mathrm{S}a'$$

ovvero

$$\mathrm{SO} : so :: \mathrm{SA} : sa.$$

Corollario II. — Se una piramide SABCD è tagliata da un piano $a'b'c'd'$ parallelo alla sua base ABCD, le due piramidi SABCD, $Sa'b'c'd'$ sono simili.

Poichè i due angoli diedri AB, $a'b'$ adiacenti alle basi, sono eguali e compresi tra due facce rispettivamente simili e disposte nello stess' ordine.

Scolio. — Se n è il numero dei lati della base ABCD, si richiedono $2n-4$ condizioni per la similitudine dei poligoni ABCD, *abcd* e per conseguenza $2n-1$ condizioni per la similitudine delle piramidi SA, *sa* mentre se ne richiedono $2n$ per la loro eguaglianza.

TEOREMA II.

Due poliedri simili possono esser decomposti in uno stesso numero di piramidi simili e disposte nello stess' ordine. (fig. 320.)

Siano ABE, *abc* due poliedri simili; decomponete il primo ABE in altrettante piramidi quante sono le facce, unendo tutti i vertici a un punto qualunque O preso all' interno di questo poliedro. Per determinare nel secondo *abc*, l' omologo *o* del punto O, conducete per la costola *ab*, nell' interno di questo poliedro, un piano che formi con la faccia *abc* un angolo diedro eguale all' angolo diedro OABC, fate in questo piano l' angolo *oab* eguale a OAB e prendete il punto *o* di maniera che

$$\frac{oa}{OA}=\frac{ab}{AB}.$$

Unendo questo punto a tutti i vertici del poliedro *abc*, lo decomporrete pure in tante piramidi quante sono le facce.

Le due piramidi OABCD, *oabcd* sono simili, perchè hanno un angolo diedro adiacente alla base eguale e compreso tra due facce rispettivamente simili e disposte nello stess'ordine; dunque il triangolo OBC è simile a *obc* e l'angolo diedro OBCD è uguale a *obcd*. Le due piramidi seguenti OBCHG, *obchg* sono simili per la stessa ragione, poichè le loro basi BH, *bh* sono simili per ipotesi, i triangoli OBC, *obc* lo sono altresì e l'angolo diedro OBCH, differenza dei due angoli diedri ABCH, ABCO, è uguale all'angolo diedro *obch*, differenza dei due angoli diedri *abch, abco*.

Si proverebbe del pari la similitudine delle altre piramidi che hanno per basi le facce simili dei due poliedri; dunque questi poliedri sono decomposti in uno stesso numero di piramidi simili e disposte nello stess' ordine.

Corollario. — Se in due facce simili ABCD, *abcd* si conducono le diagonali omologhe BD, *bd* e i piani OBD, *obd*, le piramidi simili OABCD, *oabcd* sono decomposte in tetraedri rispettivamente simili, perchè hanno un angolo, adiacente alla base, eguale e compreso tra due facce simili e disposte nello stess'ordine; dunque *due poliedri simili possono essere decomposti in uno stesso numero di tetraedri simili e disposti nello stess' ordine.*

Scolio. — Si può prendere il punto O sopra la superficie del poliedro ABE; se questo punto coincide con uno dei vertici, le costole delle piramidi, che partono dal punto O, sono diagonali del poliedro ABE; dunque *le diagonali omologhe di due poliedri simili sono proporzionali a due costole omologhe.*

TEOREMA III.

1°. *Due poliedri omotetici diretti sono simili;*
2°. *Due poliedri omotetici inversi hanno le facce*

omologhe simili e gli angoli poliedri omologhi simmetrici. (fig. 321.)

1°. Uniamo un punto qualunque O ai vertici d'un poliedro ABCDEFGHK e prendiamo sulle rette OA, OB, OC,.... punti a, b, c,....tali che

$$\frac{Oa}{OA}=\frac{Ob}{OB}=\frac{Oc}{OC}=\ldots=r;$$

il poliedro dato e il poliedro *abcdefghk*, formato mediante questa costruzione, sono omotetici diretti e dico che sono simili.

Infatti, consideriamo una faccia qualunque FGKH del poliedro dato e conduciamo pel punto f un piano parallelo a FGKH; questo piano divide le costole OF, OG, OH, OK della piramide OFGKH in parti proporzionali e passa pei punti g, h, k; dunque i punti omologhi dei vertici del poligono FGHK sono in uno stesso piano, e il poligono *fghk* che determinano è simile ad FGHK. In modo analogo si proverebbe che le altre facce omologhe sono simili.

Per dimostrare l'eguaglianza di due angoli poliedri omologhi come A e a, osserviamo che le loro costole omologhe sono parallele e dirette nello stesso senso; da ciò risulta che questi angoli poliedri hanno le facce omologhe eguali e gli angoli diedri omologhi eguali; dunque essi sono eguali ed i poliedri omotetici diretti ABC...., *abc*...., che hanno le facce omologhe simili e gli angoli poliedri eguali, sono simili.

2°. Se l'omotetia è inversa, cioè se i punti a, b, c.... sono sui prolungamenti di OA, OB, OC...., si dimostra come sopra la similitudine delle facce omologhe dei due poliedri; ma gli angoli poliedri omologhi come A, a hanno le loro costole omologhe parallele e dirette in senso contrario, in guisa che l'angolo a è eguale al simmetrico di A. Dunque i poliedri omotetici inversi ABC . . . . , *abc* . . . . hanno le facce omologhe simili e gli angoli poliedri omologhi simmetrici.

TEOREMA IV.

Due poliedri sono omotetici se le rette che uniscono i vertici del primo a un punto p *sono parallele e proporzionali a quelle che uniscono i vertici del secondo a un altro punto* p'.

Dimostrazione analoga a quella del teorema V, cap. V, libro III.

Scolio. — I punti p, p' si chiamano *poli coniugati* dei poliedri omotetici. Due poli coniugati sono in linea retta col centro di similitudine; essi si trovano da una stessa parte del centro di similitudine o da parti differenti secondochè l'omotetia è diretta o inversa.

Corollario. — Se il punto p si suppone nell'interno del primo poliedro, il suo coniugato p' sarà pure nell'interno del secondo, e i due poliedri saranno decomposti in uno stesso numero di piramidi omotetiche: dunque *due poliedri composti di uno stesso numero di piramidi simili e disposte nello stess' ordine sono simili.*

TEOREMA V.

Se due poliedri a centro sono omotetici diretti, sono pure omotetici inversi e reciprocamente.

Applicare la dimostrazione del teorema VI, cap. V, libro III, a due parallelepipedi omotetici.

Scolio. — La distanza dei centri dei poliedri è divisa armonicamente dai due centri d'omotetia diretta e inversa.

TEOREMA VI.

Due poliedri omotetici a un terzo sono omotetici tra loro.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VII, cap. V, libro III.

Scolio. — Fra i tre sistemi che formano tre poliedri omotetici ve ne ha solo un numero dispari di cui l'omotetia sia diretta.

TEOREMA VII.

I centri di similitudine di tre poliedri, due a due omotetici, sono in linea retta.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VIII, cap. V, libro III.

Corollario. — Tre poliedri a centri ed omotetici, hanno tre centri di similitudine esterni e tre centri di similitudine interni. Dunque questi poliedri hanno un asse d'omotetia diretta che passa per i tre centri esterni e tre assi d'omotetia inversa su ciascuno dei quali si trovano due centri interni e il centro esterno corrispondente al terzo centro interno.

TEOREMA VIII.

I sei centri di similitudine di quattro poliedri P, P′, P″, P‴, due a due omotetici, sono in uno stesso piano. (fig. 322.)

Supponiamo che O', O'', O''' sieno i centri di similitudine del poliedro P e di ciascuno degli altri tre P′, P″, P‴; che O_1'', O_1''' siano i centri di similitudine del poliedro P′ e di ciascuno degli altri due P″, P‴ e infine che

O_2''' sia quello dei poliedri P'', P'''. L'asse d'omotetia dei poliedri P, P', P'' che passa per i punti O', O'', O_1'' e quello dei poliedri P, P', P''' che passa per i punti O', O''', O_1''' s'incontrano nel punto O'. L'asse d'omotetia dei poliedri P, P'', P''', determinato dai punti O'', O''', O_2''', è situato nel piano dei due assi $O'O''$, $O'O'''$. Ciò vale pure per l'asse d'omotetia dei poliedri P', P'', P'''; dunque i quattro assi e per conseguenza i sei centri di similitudine sono in uno stesso piano.

Scolio. — Se i quattro poliedri sono omotetici diretti, hanno quattro assi d'omotetia diretta situati nello stesso piano che si chiama *piano d'omotetia diretta*. — Quando fra i poliedri dati tre solamente sono omotetici diretti, un asse è di omotetia diretta, e tre sono di omotetia inversa; il piano che li contiene è detto *piano di omotetia diretta e inversa*. Infine quando due poliedri sono omotetici inversi e che gli altri due lo sono egualmente, questi quattro poliedri hanno quattro assi d'omotetia inversa compresi in uno stesso piano, chiamato *piano d'omotetia inversa*.

Corollario. — Quattro poliedri a centri omotetici, hanno sei centri d'omotetia diretta, sei d'omotetia inversa, e per conseguenza quattro assi d'omotetia diretta e dodici assi d'omotetia inversa.

Questi poliedri hanno un piano d'omotetia diretta che contiene i sei centri esterni; quattro piani d'omotetia diretta e inversa ciascuno dei quali contiene tre centri esterni situati sullo stesso asse d'omotetia, e i tre centri interni corrispondenti agli altri tre centri esterni; essi hanno altresì tre piani d'omotetia inversa che contengono ciascuno due centri esterni non situati sullo stesso asse d'omotetia e i quattro centri interni corrispondenti ai quattro centri esterni.

TEOREMA IX.

Due piramidi simili P, p *stanno tra loro come i cubi di due costole omologhe* A e *a*.

Sieno B, *b* le basi di due piramidi P, *p* e H, *h* le loro altezze; ciascuna piramide avendo per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza, si ha:

$$P : p :: B \times H : b \times h.$$

Ma le basi B, *b* sono simili, e le altezze proporzionali a due costole omologhe; dunque

$$B : b :: A^2 : a^2,$$

e

$$H : h :: A : a.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, si trova

$$B \times H : b \times h :: A^3 : a^3,$$

e per conseguenza

$$P : p :: A^3 : a^3.$$

Corollario. — *Due poliedri simili* P, p *stanno tra loro come i cubi di due costole omologhe* A e *a*.

Decompongo i due poliedri in uno stesso numero di piramidi simili, e indico con V, V′, V″.... quelle che formano il poliedro P, con v, v', v'', ...le piramidi corrispondenti del poliedro *p*. Le piramidi essendo due a due simili, e le costole omologhe di due poliedri proporzionali, si ha:

$$V : v :: A^3 : a^3,$$
$$V' : v' :: A^3 : a^3,$$
$$V'' : v'' :: A^3 : a^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e per conseguenza

$$\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'} = \frac{V''}{v''} = \ldots\ldots = \frac{A^3}{a^3};$$

dunque

$$\frac{V + V' + V''}{v + v' + v''} = \ldots\ldots = \frac{A^3}{a^3},$$

ovvero

$$P : p :: A^3 : a^3.$$

Scolio. — Le superficie di due poliedri simili sono tra loro come i quadrati delle costole omologhe.

CAPITOLO V.

Simmetria.

1. — Se per un punto c si conduce una retta qualunque e si prendono su questa linea due punti a, a' egualmente lontani da c, si dice che i punti a e a' sono *simmetrici rispetto al punto* c *chiamato centro di simmetria. (fig. 323.)*

Due figure sono *simmetriche rispetto a un centro*, quando i loro punti sono due a due simmetrici per rapporto a questo centro.

2. — Due punti a, a' sono *simmetrici rispetto a una retta* xy, chiamata *asse di simmetria*, se la retta aa' che li unisce è perpendicolare a quest'asse e divisa da esso in due parti eguali. *(fig. 324.)*

Due figure sono *simmetriche rispetto a un asse*, quando i loro punti sono due a due simmetrici rispetto a quest'asse.

3. — Due punti a, a' sono *simmetrici rispetto a*

un piano MN, chiamato *piano di simmetria*, quando la retta aa' che li unisce è perpendicolare a questo piano e divisa da esso in due parti eguali. *(fig. 325.)*

Si dice che due figure son *simmetriche rispetto a un piano*, quando i loro punti sono due a due simmetrici rispetto a questo piano.

I punti simmetrici, in questi tre generi di simmetria, sono chiamati *omologhi*.

TEOREMA I.

Due poliedri simmetrici rispetto a un centro hanno le facce omologhe eguali e gli angoli poliedri omologhi simmetrici.

Poichè, due poliedri simmetrici rispetto a un centro sono omotetici inversi rispetto a questo punto, e il rapporto di similitudine è uguale all'unità; dunque le loro facce omologhe sono eguali e i loro angoli omologhi simmetrici.

Corollario I. — *Due poliedri* P, P′ *sono eguali se sono i simmetrici di uno stesso poliedro* P″ *rispetto a due centri differenti*, poichè i poliedri P, P′ hanno le facce eguali e gli angoli poliedri rispettivamente eguali.

Corollario II. — *Il piano determinato da due costole opposte* BD′, DB′ *di un parallelepipedo* AA′ *(fig. 326), divide questo poliedro in due prismi triangolari, simmetrici rispetto al punto* O *d'intersezione delle sue diagonali*, poichè questo punto divide ciascuna delle diagonali in due parti eguali.

TEOREMA II.

Due poliedri P, P′ *simmetrici rispetto ad un asse* xy *sono eguali. (fig. 327.)*

Infatti supponiamo il poliedro P legato invariabilmente all' asse xy e facciamolo girare intorno a questa retta; in questo movimento, i punti A, B, C,..... della superficie del poliedro P descrivono archi simili che hanno i loro centri sull' asse e di cui i piani sono perpendicolari a questa retta. Quando il punto A ha percorso una mezza circonferenza e coincide col suo simmetrico A′, i punti B, C..... si confondono pure coi loro simmetrici B′, C′..... e i due poliedri P, P′ coincidono; dunque sono eguali.

TEOREMA III.

Due poliedri P, P′ *simmetrici rispetto a un piano* MN *hanno le facce omologhe eguali e gli angoli omologhi simmetrici. (fig. 328.)*

Infatti, conducete per un punto qualunque o del piano MN una retta xy perpendicolare a questo piano, e fate girare il poliedro P′ intorno a questa retta fino a che ciascuno dei suoi punti abbia descritto una mezza circonferenza intorno ad xy. Dico che in questa nuova posizione il poliedro P′ è il simmetrico di P rispetto al punto o. Sieno a, a' due punti omologhi dei poliedri P, P′; b il mezzo della retta aa' e a'' la posizione che prende il punto a' nel piano $aa'xy$, dopo aver descritto la semicirconferenza ca' che ha il suo centro c situato sull' asse xy e il cui piano è perpendicolare a questa retta. I triangoli oab, oca'' hanno un angolo retto compreso tra due lati rispettivamente eguali; dunque le ipotenuse oa, oa'' sono eguali e l' angolo bao è uguale a coa''. Ma gli angoli bao, aox sono alterni interni rispetto alle rette parallele aa', xy, dunque l' angolo aox è uguale a coa'' e le due rette oa, oa'' sono l' una il prolungamento dell' altra. Laonde il punto a'' è simmetrico di a rispetto al centro o; dunque i poliedri P, P′ sono simmetrici relativamente al punto o e le loro facce omologhe sono eguali, i loro angoli omologhi simmetrici.

Corollario. — Se tre poliedri P, P′, P″ sono tali che P, P′ sieno simmetrici rispetto ad un piano, e P, P″ simmetrici rispetto ad un punto, i poliedri P′, P″ sono eguali.

Scolio. — La simmetria di due poliedri rispetto ad un asse è relativa solamente alla loro posizione, poichè sono eguali; ma la simmetria rispetto ad un centro o ad un piano modifica la forma dei poliedri mutando l'ordine delle loro parti omologhe. Noi studieremo le proprietà relative a questi ultimi poliedri che chiameremo semplicemente *simmetrici* senza indicazione di centro e di piano di simmetria.

Un poliedro ha un solo simmetrico.

TEOREMA IV.

Due poliedri P, P′ *simmetrici possono esser decomposti in uno stesso numero di piramidi simmetriche.*

Infatti, poniamo questi due poliedri in modo che sieno omotetici inversi, prendiamo due punti omologhi O, O′ all'interno di ciascuno di essi, e uniamo il punto O a tutti i vertici del poliedro P, il punto O′ a quelli del poliedro P′; i due poliedri saranno decomposti in uno stesso numero di piramidi omotetiche inverse e, per conseguenza, simmetriche, poichè il rapporto d'omotetia è uguale all'unità.

Corollario.—Se conduciamo le diagonali omologhe nelle facce omologhe dei due poliedri, questi poliedri potranno esser considerati come composti di uno stesso numero di tetraedri simmetrici aventi per vertici i punti omologhi O e O'.

TEOREMA V.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti. (fig. 329.)

Prendiamo in prima due piramidi simmetriche e poniamole in modo che le loro basi coincidano e che i loro vertici S, S' sieno da differenti lati del piano della base comune ABCD. I vertici essendo due punti simmetrici rispetto al piano ABC, le altezze SF, S'F delle piramidi sono eguali; dunque queste piramidi sono equivalenti.

Consideriamo in secondo luogo, due poliedri simmetrici qualunque e decomponiamoli in uno stesso numero di piramidi simmetriche. Le piramidi simmetriche essendo equivalenti, i due poliedri sono pure equivalenti.

CAPITOLO VI.*

Problemi sui Poliedri. [1].

PROBLEMA I. — *Determinare l'altezza di un tetraedro, note che sieno le sue costole.*

Sia SABC un tetraedro *(fig. 421)*, nel quale prenderemo ABC per base e SP per altezza corrispondente. Dal punto P, proiezione del vertice S, conduciamo PD perpendicolare a BC, poi tiriamo SD: quest' ultima retta sarà perpendicolare a BC.

Immaginiamo adesso che la faccia SBC giri attorno

[1] Questi problemi sono estratti dalla Geometria del sig. Catalan. (T.)

a BC, sino a che essa venga a giacere nel piano ABC. In questo movimento, la retta DS sarà rimasta sempre perpendicolare a BC; dunque, quando i piani delle due facce coincideranno, questa retta DS cadrà in DS′ sul prolungamento di PD. Laonde allorchè si fa girare una delle facce di un tetraedro attorno alla costola comune a questa faccia e alla base, sino a che venga a coincidere colla base, il nuovo punto che occupa il vertice, e il piede dell'altezza del tetraedro, sono situati sopra una stessa perpendicolare all'asse di rotazione.

Rappresenti *(fig. 422)* ABC la base del tetraedro nella sua vera grandezza e sieno BCS′, ACS″, ABS‴ gli abbattimenti delle facce laterali. Avremo

$$AS'' = AS''', \quad BS' = BS''', \quad CS' = CS''.$$

Se dai punti S′, S″, S‴, abbassiamo delle perpendicolari sui lati corrispondenti, queste tre rette dovranno tagliarsi in uno stesso punto P, proiezione del vertice ignoto. Inoltre, l'altezza SP *(fig. 421)* è un lato dell'angolo retto del triangolo APS, nel quale $AS = AS''$ è l'ipotenusa. Se dunque descriviamo una semicirconferenza sopra AS″ come diametro, dal punto A come centro, descriviamo l'arco PD, e conduciamo S″D, questa retta sarà l'altezza cercata.

Se le costole sono date in numeri, con questa costruzione si potrà calcolare l'espressione dell'altezza del tetraedro. Ma poichè la formola generale è molto complicata, cerchiamola solamente in taluni casi particolari.

1° Caso. — Supponiamo che le costole SA, SB, SC sieno eguali tra loro. Allora il punto P, proiezione del vertice S, è evidentemente il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC; e la retta AP è il raggio R di questo cerchio. Se dunque rappresentiamo con a, b, c i lati BC, AC, AB della base; con δ la lunghezza comune delle costole; con h l'altezza cercata; e con A l'area della base ABC; avremo

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

$$R = \frac{abc}{4A}$$

$$h = \sqrt{\delta^2 - R^2}.$$

Il volume sarà dato dalla formola

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\delta^2 - a^2b^2c^2}.$$

2° Caso. — Ammettiamo che il triangolo ABC sia isoscele; allora i valori precedenti diverranno, facendo $c = b$,

$$A = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)(2b-a)} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

$$R = \frac{ab^2}{4A},\ h = \sqrt{\delta^2 - \frac{b^4}{4b^2 - a^2}}$$

$$V = \frac{a}{12}\sqrt{(4b^2 - a^2)\delta^2 - b^4}.$$

3° Caso. — Se il triangolo ABC è equilatero, facendo in queste ultime formole $b = a$, si trova

$$A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3},\ R = \frac{a}{\sqrt{3}},\ h = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{3}a^2},$$

$$V = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3\delta^2 - a^2}.$$

4° Caso. — Infine, supponiamo che tutte le costole del tetraedro divengano eguali tra loro; allora questo tetraedro dicesi *regolare*, e le ultime formole diventano supponendo $\delta = a$,

$$A = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad h = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

PROBLEMA II. — *Dato un parallelepipedo di cui tutte le facce sono losanghe eguali, si domanda il volume di questo poliedro in funzione delle diagonali delle facce. (fig. 423.)*

Questo parallelepipedo, di cui il cubo è un caso particolare, vien detto *romboedro* in *Cristallografia.*

Immaginiamo che al vertice A del romboedro si riuniscano tre angoli piani eguali BAD, DAE, EAB; che, per fissare le idee, supporremo ottusi. Conduciamo BD, DE, EB; queste rette saranno le grandi diagonali delle facce AC, AH, AF; e saranno eguali tra loro, perchè queste facce sono losanghe eguali.—Per queste rette facciamo passare un piano BDE; otterremo un tetraedro ABDE equivalente al sesto del romboedro.

Infatti, questo tetraedro è equivalente alla metà della piramide quadrangolare che ha per base ABCD e per vertice il punto E, e questa piramide è il terzo del romboedro.

Chiamiamo g la grande diagonale DE, e p la piccola diagonale AH: avremo

$$AB = AD = AE = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + p^2}.$$

Laonde pel problema precedente il volume del tetraedro sarà $\frac{1}{24} g^2 \sqrt{3p^2 - g^2}$; e per conseguenza il volume del romboedro è dato da

$$V = \frac{1}{4} g^2 \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Scolio I. — Il romboedro che abbiamo considerato si chiama *romboedro ottuso.* È facile vedere che colle stesse facce si può generalmente formare un altro romboedro nel quale i tre angoli piani eguali che si riuniscono in uno stesso vertice, sono acuti. Il volume di questo *romboedro acuto,* si otterrà dalla formola precedente permutandovi le lettere

$$V' = \frac{1}{4} p^2 \sqrt{3g^2 - p^2}.$$

Scolio II. — Il primo romboedro è sempre minore del secondo, eccetto quando $p = g$, nel qual caso i due poliedri si trasformano in due cubi eguali.

Scolio III. — V diverrebbe immaginario se si avesse $3p^2 < g^2$; dunque il romboedro ottuso è possibile allora soltanto quando il rapporto della grande diagonale alla piccola è minore di $\sqrt{3}$.

Problema III. — *Dato un dodecaedro di cui tutte le facce sono losanghe eguali, si cerca il volume di questo poliedro in funzione della costola.*

Questo poliedro, che s' incontra in natura, è detto *dodecaedro romboidale. (fig. 424.)*

Immaginiamo che nel vertice G si riuniscano, pel loro angolo ottuso, tre losanghe eguali. I lati di queste losanghe, non adiacenti al vertice, formeranno una linea spezzata AIBKCL i cui lati, paralleli due a due, non saranno in uno stesso piano. Pei vertici di questa linea spezzata, conduciamo sei rette parallele tra loro ed eguali ad AI: l' estremità di queste rette saranno i vertici di una nuova linea spezzata DMENFP, eguale alla prima. Infine, sopra questa linea presa come base, applichiamo una superficie poliedrica DM.... PH, eguale a LC....AG; il dodecaedro sarà formato; e se la direzione AD è stata convenientemente scelta, tutte le sue facce saranno eguali tra loro.

Ciò che precede avendo solamente per oggetto di far concepire la forma del dodecaedro romboidale, supponiamo questo poliedro costruito, ed esaminiamo quali sono le condizioni che potranno servire a determinarlo effettivamente.

Pel vertice G conduco, nell'interno del corpo, una retta GS, eguale e parallela alle costole laterali AD, IM,.... Unisco il punto S ai vertici D, E, F colle rette SD, SE, SF, e ottengo in tal guisa quattro romboedri, che dimostrerò eguali.

Infatti se i tre angoli eguali AGB, BGC, CGA sono ottusi, i due angoli MIA, MIB saranno eguali ai primi: dunque, nel romboedro AE, i tre angoli piani che si riuniscono in I sono ottusi. Parimente, nei romboedri CD, CE, SH, gli angoli piani in L, K e S sono ottusi. Dipiù questi angoli sono tutti eguali, dunque ec.

Osserviamo ora che, nei tre romboedri CD, CE, AE, gli angoli diedri che hanno per costola comune GS sono eguali, come opposti agli angoli diedri che hanno per costole rispettive LP, KN, IM, i quali sono eguali tra loro, e quindi ciascuno di questi angoli vale i $\frac{4}{3}$ di un angolo diedro retto.

Ciò posto, facciamo passare un piano pei vertici A, B, M, che distaccherà dal dodecaedro il tetraedro ABMI *(fig. 425)*, nel quale ciascuno degli angoli diedri AI, BI, MI vale $\frac{4}{3}$ di un retto. Dal vertice I abbassiamo la perpendicolare IO sul piano del triangolo equilatero ABM; e conduciamo perpendicolarmente alla costola AI le rette BT, MT, che s'incontreranno in uno stesso punto T, perchè i triangoli AIB, AIM sono eguali. E poichè l'angolo di queste rette misura l'angolo diedro AI, avremo $BTM = \frac{4}{3}$ *di un retto* $= BOA$. Laonde i triangoli isosceli BTM, AOB sono eguali; dunque $BT = BO = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

Finalmente se abbassiamo IU perpendicolare ad AM, i triangoli rettangoli AIU, AMT daranno

$$\frac{AI}{AM} = \frac{IU}{MT}.$$

Indichiamo con g la grande diagonale di ciascuna faccia e con p la piccola; avremo

$$AM = AB = g, \ IU = \frac{1}{2} p,$$

$$AI = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + p^2}, \ MT = BT = \frac{g}{\sqrt{3}};$$

e la proporzione precedente darà:

$$\sqrt{g^2 + p^2} = p\sqrt{3}; \text{ da cui } g = p\sqrt{2}.$$

Quindi, *nel dodecaedro romboidale, le diagonali delle facce sono tra loro come* $\sqrt{2}$ *sta a* 1.

Per conseguenza, indicando con c la costola del romboedro, avremo

$$c = \frac{1}{2} p \sqrt{3},$$

e reciprocamente

$$p = \frac{2}{3} c\sqrt{3}, \ g = \frac{2}{3} c\sqrt{6}.$$

La formola trovata nel problema precedente darà quindi, pel volume di uno dei quattro romboedri,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} c^2 \sqrt{4c^2 - \frac{8}{3} c^2} = \frac{4}{9} c^3 \sqrt{3}.$$

Il volume cercato sarà dunque

$$V = \frac{16}{9} c^3 \sqrt{3}.$$

PROBLEMA IV. — *Sulle costole di un cubo dato e a cominciare dai vertici, si prendano le distanze* EI, EK, EL, AM .... *eguali tra loro. Conducendo i piani* AIF, HLF, AKH, ... *si viene a formare un poliedro, avente per facce ventiquattro quadrilateri eguali, del quale si domanda di valutare la superficie e il volume. (fig. 426.)*

Il poliedro ottenuto colla costruzione che abbiamo indicata appartiene, come il romboedro e il dodecaedro romboidale, alla Cristallografia, ed ha ricevuto il nome di *trapezoedro*. È rappresentato nella figura *427*.

Le sei facce del cubo sono situate nello stesso modo rispetto al centro O di questo poliedro. Quindi, le ventiquattro facce del trapezoedro sono eguali tra loro e egualmente distanti da questo punto; e le piramidi aventi per base le facce e per vertice comune il centro, sono eguali tra loro. Basterà dunque valutare la base di una di esse, come pure l'altezza comune.

Consideriamo a parte il tetraedro AIFO *(fig. 428)*, che ha per base la sezione AIF fatta nel cubo da uno dei piani che limita il trapezoedro. Indichiamo con c la costola del cubo, e con b la distanza costante IE *(fig. 426)*, la quale è supposta minore di $\frac{1}{2}c$; avremo:

$$AF = c\sqrt{2},\ IA = IF = \sqrt{b^2 + c^2},\ OF = OA = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}c\sqrt{3};$$

$$OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c - b\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 - cb + b^2}.$$

Sia N il mezzo di AF *(fig. 428)*; conduciamo IN: abbassiamo OP perpendicolare a questa retta: OP sarà l'altezza comune delle nostre piramidi. Tiriamo anche IQ perpendicolare ad ON; il triangolo OIN darà:

$$\mathrm{OP} = \mathrm{IQ}\,\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{IN}}$$

Ma, nella *fig. 426*, ON è parallela ad EH; dunque $\mathrm{IQ} = \frac{1}{2}\,\mathrm{EB} = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}$.

Si ha anche

$$\mathrm{ON} = \frac{1}{2}\,c,\quad \mathrm{IN} = \sqrt{\overline{\mathrm{IE}}^2 + \overline{\mathrm{EN}}^2} = \sqrt{b^2 + \frac{1}{2}\,c^2};$$

dunque

$$\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{2}c^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\sqrt{c^2 + 2b^2}}.$$

Se conduciamo IL ed AH, avremo $\frac{\mathrm{IR}}{\mathrm{RA}} = \frac{\mathrm{IL}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{HE}}$

da cui

$$\frac{\mathrm{IR}}{\mathrm{IA}} = \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IE} + \mathrm{HE}}.$$

Quindi

$$\mathrm{IR} = \frac{b}{b+c}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Consideriamo ora in particolare il triangolo isoscele AIF *(fig. 429)*, nel cui piano si trova una faccia del trapezoedro. Il piano HLF taglia AIF seguendo la retta RF *(fig. 426)*; e se prendiamo IR′ = IR, la retta AR′ rappresenterà l'intersezione dei piani AIF, HKA. Inoltre, il piano che passa pei punti B, M, E taglia il piano AIF seguendo una retta che contiene N, e ch'è parallela ad IF. Se dunque, pel punto N *(fig. 429)* conduciamo NF′ parallela ad FI e NA′ parallela ad AI, il quadrilatero NSUT sarà, in vera grandezza, una delle facce del trapezoedro.

Per misurare questo quadrilatero, rappresentiamo AF con $2m$, AI con n, NI con h e IR con r; avremo, conducendo NX parallela ad FR.

$$\frac{\mathrm{UI}}{\mathrm{IN}}=\frac{\mathrm{IR}}{\mathrm{IX}}=\frac{r}{r+\frac{1}{2}(n-r)}=\frac{2r}{n+r};$$

da cui

$$\mathrm{UI}=\frac{2\ h\ r}{n+r}.$$

I quadrilateri IRUR′, NTUS sono evidentemente simili; dunque

$$\mathrm{NTUS}=\mathrm{IRUR}'\left(\frac{\mathrm{UN}}{\mathrm{UI}}\right)^2.$$

Ma, IRUR′ ha per misura

$$\frac{1}{2}\mathrm{UI}.\mathrm{RR}'=\frac{h\,r}{n+r}.\,2m\,\frac{r}{n}=\frac{2\ h\ m\ r^2}{n(n+r)}.$$

Dunque

$$\mathrm{NTUS}=\frac{2\ h\ m\ r^2}{n(n+r)}.\left(\frac{n-r}{2r}\right)^2=\frac{1}{2}\,\frac{hm}{n}.\frac{(n-r)^2}{n+r}=\mathrm{F},$$

chiamando F l'area di una faccia.

Ma

$$m=\frac{1}{2}c\sqrt{2},\ n=\sqrt{b^2+c^2},\ r=\frac{b}{b+c}\sqrt{b^2+c^2},$$

$$h=\sqrt{n^2-m^2}=\sqrt{b^2+\frac{1}{2}c^2};$$

dunque

$$\mathrm{F}=\frac{1}{4}\,\frac{c^3}{(2b+c)(b+c)}\sqrt{2b^2+c^2}.$$

Finalmente, se moltiplichiamo questa quantità per

$$\frac{24}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{c^2}{\sqrt{2b^2+c^2}},$$

avremo pel volume cercato

$$V = \frac{c^3}{(b+c)(2b+c)}.$$

Problema V. — *Determinare il volume di un poliedro che ha per facce due poligoni qualunque* ABC...., A'B'C'...., *situati in due piani paralleli, e una serie di triangoli* ABA', A'B'B, BCB',.... *(fig. 430.)*

Conduciamo per le costole dei piani perpendicolari ai piani delle due basi, verremo così a decomporre il poliedro in un prisma retto, proiettato in A'B'C'....., in una serie di prismi triangolari troncati, proiettati in ABA', BCB', CDB',....., e in un'altra serie di prismi triangolari troncati, proiettati in A'B'B, B'C'D, C'D'E....

Per conseguenza, se B, B' indicano le due basi del poliedro; H la distanza delle due basi, o l'*altezza* del poliedro; S, la somma delle proiezioni ABA', BCB',....; S', la somma delle proiezioni A'B'B, B'C'D, C'D'E,....; il volume cercato sarà espresso da

$$V = B'.H + \frac{1}{3}(S + 2S')H.$$

Per rendere più semplice questa formola, immaginiamo la sezione A''B''C''.... condotta ad egual distanza dalle due basi; se B'' è l'area di questa sezione, avremo

$$B - B'' = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}S', \quad B'' - B' = \frac{3}{4}S' + \frac{1}{4}S.$$

da cui

$$B - B' = S + S', \quad 2(B + B') - 2B'' = S - S'.$$

per conseguenza,

$$S + 2\,S' = \frac{1}{2}\,(B - 5\,B' + 4\,B''),$$

e finalmente

$$V = \frac{1}{6}\,(B + B' + 4\,B'')\,H$$

SCOLIO. — Se le due basi del poliedro sono due rettangoli, e le altre facce sono trapezi isosceli, avremo, indicando con a e b, a' e b' le dimensioni dei due rettangoli,

$$B = a\,.\,b,\ B' = a'\,.\,b',\ B'' = \frac{(a + a')(b + b')}{4}:$$

quindi

$$V = \frac{1}{6}\Big[\,(2\,a + a')\,b + (2\,a' + a)\,b'\,\Big]\,H$$

Se supponiamo $b' = o$, avremo

$$V = \frac{1}{6}\,(2\,a + a')\,H,$$

che esprime il volume di un tronco di prisma triangolare di cui le basi sono due triangoli isosceli eguali e che ha per facce laterali un rettangolo e due trapezi isosceli eguali.

Problemi da risolvere.

1. — I piani bisettori degli angoli diedri d'un tetraedro passano per lo stesso punto.

2. — I piani perpendicolari al mezzo delle costole di un tetraedro passano per lo stesso punto.

3. — Determinare nell'interno di un tetraedro un punto tale che, unendolo a tutti i vertici, si decomponga il tetraedro in quattro piramidi triangolari equivalenti.

4 — Le rette che uniscono i vertici di un tetraedro al punto d'incontro delle mediane delle facce opposte concorrono allo stesso punto. Questo punto è il centro di gravità del tetraedro.

5. — Tagliare un prisma triangolare in modo che la sezione sia un triangolo equilatero.

6. — Per due punti dati sopra due costole di un prisma triangolare, condurre un piano che divida il prisma in due parti equivalenti.

7. — La somma delle distanze dei vertici d'un tetraedro a un piano è uguale a quattro volte la distanza del centro di gravità del tetraedro allo stesso piano.

8. — La somma dei quadrati delle distanze di un punto qualunque ai vertici di un parallelepipedo è uguale a 8 volte il quadrato della distanza di questo punto al centro del parallelepipedo, più la somma dei quadrati delle distanze di questo centro ai vertici.

9. — Il piano bisettore di un angolo diedro di un tetraedro o del suo supplemento divide la costola opposta in segmenti proporzionali alle facce adiacenti.

10. — Se per il vertice S del tetraedro SABC si tira la retta SD in modo che formi degli angoli eguali con le facce SAB, SAC, SBC, e se si uniscono i vertici A, B, C della base al punto D nella quale questa retta incontra ABC, i triangoli DAB, DBC, DAC sono proporzionali alle facce SAB, SBC, SAC. (*fig.* 330.)

11. — Dividere un tronco di piramide a basi parallele in due parti proporzionali a due linee date m e n con un piano parallelo alle basi.

12. — Quale sarebbe la misura di una piramide, di un parallelepipedo, di un prisma, se si prendesse per unità di volume il tetraedro regolare di cui il lato è uguale all'unità di lunghezza?

13. — Le rette che uniscono i mezzi delle costole opposte di un tetraedro concorrono allo stesso punto.

14. — Qualunque piano che passa per i mezzi di due costole opposte di un tetraedro lo divide in due parti equivalenti.

15. — Il tetraedro che ha per vertici i punti d'incontro delle mediane delle facce di un tetraedro dato, è simile a questo tetraedro. Qual è il rapporto dei loro volumi?

16. — Sieno dati due tetraedri ABCD, A'B'C'D', tali che le rette AA', BB', CC', DD', che uniscono due a due i vertici corrispondenti, concorrano in uno stesso punto. Dimostrare che, se le facce corrispondenti si tagliano, le quattro rette d'intersezione sono situate in uno stesso piano.

17. — Da un punto qualunque preso al di dentro della base di una piramide regolare, si conduce una perpendicolare a questa base; questa perpendicolare incontra tutte le facce laterali della piramide, prolungata se ve ne ha bisogno. Dimostrare che la somma delle distanze dei punti d'incontro al piano della base è una quantità costante.

18 — Calcolare a meno di un centimetro le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, sapendo che esse sono proporzionali ai numeri $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ e che il suo volume è uguale a 2 metri cubi.

19.* — Trovare l'area della superficie convessa, e il volume di una piramide pentagonale regolare nella quale il raggio della base è uguale a 12 millimetri, e l'altezza è uguale a 7 millimetri.

20.* — Tagliare un cubo con un piano, in modo che la sezione sia un esagono regolare.

21.* — In qualunque tetraedro, la somma dei quadrati delle sei costole è uguale a quattro volte la somma dei quadrati delle linee che uniscono i mezzi delle costole opposte.

22.* — Se un tetraedro le cui sei costole sono rappresentate da a, b, c, d, e, f, è tagliato da tre piani in modo che ciascuna sezione è una losanga, e se m_1, m_2, m_3 sono i loro lati; si ha

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}.$$

23.* — Costruire una piramide quadrangolare SABCD che ha per base un trapezio ABCD, dati che sieno; 1° la faccia SAB; 2° le direzioni delle costole parallele AB, BC; 3° gli angoli della faccia SCD.

LIBRO SETTIMO.

SUPERFICIE CURVE.

CAPITOLO I.

Piano tangente.

1. — Quando una linea retta o curva si muove nello spazio, il luogo geometrico delle posizioni che essa occupa successivamente è una superficie; per questa ragione si dà a tale linea il nome di *generatrice* della superficie e quello di *direttrice* alle linee che dirigono il movimento della generatrice.

Noi considereremo soltanto le superficie di cui la generatrice è di forma invariabile.

Si distinguono due specie di superficie curve: 1° le superficie di cui la generatrice è una linea retta, e che si chiamano *rigate;* 2° quelle che non possono essere generate da una linea retta, e alle quali si è conservato in modo speciale il nome di superficie *curve.*

2. — Tra le superficie rigate sono da notarsi, 1° la superficie *conica;* 2° la superficie *cilindrica.*

Una superficie *conica* è generata dal movimento di una retta AB che passa costantemente per un punto fisso A e s'appoggia sopra una *direttrice curva* BCD. *(fig. 331.)*

Il punto fisso A è il centro della superficie conica, e la divide in due parti che si chiamano le *falde* di questa superficie.

Quando si taglia una superficie conica A la cui direttrice è una curva chiusa, con un piano BCD che incontra tutte le generatrici sulla stessa falda, il corpo compreso tra la superficie conica e il piano secante è un *cono*. La sezione BCD è la *base* di questo cono che ha per *vertice* il centro della superficie e per *altezza* la distanza del suo vertice alla sua base.

Si dice che un cono è *circolare* quando ha per base un cerchio; un cono circolare è *retto*, se la retta che unisce il vertice al centro della base è perpendicolare alla base. In caso diverso, il cono circolare è *obliquo*.

Una superficie *cilindrica*, è generata da una retta AA′ che si muove parallelamente a una retta fissa MN appoggiandosi costantemente sopra una *direttrice curva* ABC. *(fig. 332.)*

La retta MN è la *direttrice retta* della superficie cilindrica.

Quando si taglia una superficie cilindrica la cui direttrice curva è una linea chiusa con due piani paralleli ABC, A′B′C′, che incontrano tutte le generatrici, il corpo compreso tra la superficie cilindrica e i due piani paralleli è un *cilindro*. Esso ha per *basi* le sezioni ABC, A′B′C′ e per *altezza* la distanza delle sue basi.

Un cilindro è *circolare* quando ha per base un cerchio. Il cilindro circolare è *retto* o *obliquo* secondochè la retta che unisce i centri delle basi è perpendicolare o obliqua ai piani delle medesime.

Si chiama *sezione retta* qualunque sezione fatta in un cilindro da un piano perpendicolare alle generatrici.

3. — Tra le superficie curve propriamente dette, si distingue la *superficie di rivoluzione*, che è generata da una linea qualunque ABC che gira intorno ad una retta fissa xy alla quale è legata in modo invariabile. *(fig. 333.)*

Si dà il nome *d' asse di rotazione* alla retta xy e quello di *polo* a qualunque punto P d'intersezione della superficie e dell' asse di rotazione. Le superficie di rivoluzione di cui studieremo le proprietà sono: 1° la *superficie sferica;* 2° la *superficie conica di rivoluzione; 3° la superficie cilindrica di rivoluzione.*

La *superficie sferica* è generata da una mezza circonferenza AMB, che gira intorno al suo diametro AB: si chiama *sfera* il corpo terminato da questa superficie. *(fig. 334.)*

Tutti i punti della superficie sferica essendo egualmente distanti dal centro C della generatrice AMB, si dà al punto C il nome di *centro* della sfera. Le rette che uniscono il centro ai differenti punti della superficie sferica sono *raggi* eguali.

Qualunque retta che passa pel centro e termina ai due punti dove incontra la superficie è un *diametro.* Tutti i diametri sono eguali.

La *superficie conica di rivoluzione* è generata da una retta che incontra l'asse di *rotazione* e forma con esso un angolo costante.

La *superficie cilindrica di rivoluzione* è generata da una retta parallela all' asse di rotazione.

TEOREMA I.

Il luogo delle tangenti condotte da un punto A di una superficie alle differenti curve tirate da questo punto sulla superficie è un piano. (fig. 335.)

Pel punto A conduco sulla superficie la generatrice BAC e due linee qualunque ADE, AFG. Per dimostrare che la retta AT'', tangente alla curva AFG, è situata nel piano delle due rette AT, AT' che sono respettivamente tangenti alle curve BAC, ADE, considero la generatrice in un'altra posizione HDK. Quando la generatrice passa dalla posizione HDK alla posizione BAC, i punti D e F si confondono con A; allora la secante AF coincide con la tangente AT'', la secante AD con la tangente AT', e la secante DF con la tangente AT. Ora le rette AF, AD, DF sono costantemente nello stesso piano, dunque le tangenti AT'', AT', AT sono pure nello stesso piano.

Scolio I. — Questo piano è detto *tangente* alla superficie. Il punto A, comune alla superficie e al piano, è il loro *punto di contatto*. La retta condotta per il punto di contatto perpendicolarmente al piano tangente è *normale* alla superficie.

Scolio II. — Per condurre il piano tangente in un punto d'una superficie, tirate per questo punto e sopra la superficie due curve qualunque, poi le tangenti a queste curve, e conducete un piano per queste due rette.

Corollario I. — *Il piano tangente a una superficie rigata contiene la generatrice rettilinea che passa per il punto di contatto. (fig. 336.)*

Infatti se la generatrice BAC è una linea retta, il ragionamento precedente prova che le rette AF, AD, DF essendo situate nello stesso piano, le loro posizioni limite, vale a dire le rette AT'', AT', AB, sono pure nello stesso piano.

Corollario II. — Per condurre il piano tangente in un punto di una superficie rigata, tirate per questo punto e sopra la superficie una curva qualunque, poi la tangente a questa curva, e conducete un piano per questa retta e la generatrice rettilinea del punto dato.

TEOREMA II.

Le sezioni ABC, A'B'C' *fatte in una superficie conica qualunque* S *da due piani paralleli*, *sono curve omotetiche. (fig. 337.)*

Infatti se conduciamo per il centro S un piano MN, parallelo ai piani paralleli ABC, A'B'C', questi tre piani dividono le generatrici SA, SB, SC, ec., in parti proporzionali, e si ha:

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\text{ec.}$$

dunque le linee ABC, A'B'C' sono omotetiche e il loro centro di similitudine è il punto S.

Corollario I. — L'omotetia è inversa se il centro della superficie è situato tra i due piani paralleli; essa è diretta nel caso contrario.

Corollario II. — Le due sezioni ABC, A'B'C' essendo omotetiche, le loro tangenti BT, B'T' ai punti omotetici B e B' sono parallele. Dunque *il piano tangente in un punto* B *d'una generatrice* SB *della superficie conica è tangente nell'altro punto* B' *di questa retta.*

TEOREMA III.

Le sezioni ABC, A'B'C' *fatte in una superficie cilindrica qualunque* ABCA' *da piani paralleli, sono curve eguali. (fig. 338.)*

Infatti per un punto qualunque O del piano della sezione ABC, conducete la retta OO' parallela alle generatrici fino all'incontro del piano dell'altra sezione A'B'C'. Qualunque piano AA'OO' che passa per la retta OO' e per una generatrice qualunque AA' della superficie cilindrica taglia i piani delle due sezioni seguendo due rette AO, A'O' parallele e uguali poichè il quadrilatero AA'OO' è un parallelogrammo. Sovrapponete i piani ABC, A'B'C', ponendo il punto O sopra O' e il punto A sopra A', le curve ABC, A'B'C' coincideranno poichè i loro raggi paralleli, come OB, O'B', sono eguali.

COROLLARIO I. — Le tangenti BT, B'T' ai punti omologhi B, B' delle due sezioni sono parallele. Dunque *il piano tangente in un punto B d'una generatrice BB' della superficie cilindrica è tangente in qualunque altro punto B di questa retta.*

COROLLARIO II. — *Le basi di un cilindro sono eguali.*

TEOREMA IV.

Le sezioni fatte in una superficie di rivoluzione da piani perpendicolari all' asse sono circonferenze di cerchio, e l' asse è il luogo geometrico dei loro centri. (fig. 339.)

Sieno xy l'asse e AMB la generatrice di una superficie di rivoluzione; da un punto qualunque M della linea AMB conduco la retta MC perpendicolare all'asse. La generatrice AMB essendo invariabilmente unita all' asse xy, la retta MC di cui la grandezza è costante descrive un piano perpendicolare a xy e il punto M descrive in questo piano una circonferenza di cerchio di cui il punto C è il centro. Dunque qualunque sezione MNK fatta da un piano perpendicolare all' asse è una circonferenza di cerchio che ha il suo centro sull' asse.

SCOLIO I. — Le sezioni perpendicolari all'asse d' una superficie di rivoluzione son chiamate *paralleli* della superficie.

Si dà il nome di *meridiano* a qualunque piano che passi per l' asse, e quello *di linea meridiana* all' intersezione della superficie di rivoluzione col piano meridiano. *Tutte le linee meridiane sono eguali.*

SCOLIO II. — Quando si taglia una superficie conica di rivoluzione con un piano BC perpendicolare all' asse xy, si ha *il cono circolare retto* che si può riguardare come generato dal triangolo ABC che gira intorno al lato AC dell' angolo retto ACB. L' ipotenusa AB è l' *apotema* del cono. *(fig. 340.)*

Se si taglia una superficie cilindrica di rivoluzione con due piani AD,BC, perpendicolari all' asse xy, si forma il *cilindro circolare retto* che si può riguardare come generato dal rettangolo ABCD che gira attorno al suo asse CD. *(fig. 341.)*

TEOREMA V.

Qualunque sezione fatta da un piano nella sfera CA *e un cerchio. (fig. 342.)*

1°. Se il piano secante passa per il centro della sfera, esso incontra la sua superficie in due punti egualmente distanti dal centro. Dunque la sezione è un cerchio che ha lo stesso centro e lo stesso raggio della sfera.

2°. Sia DEF la sezione fatta da un piano che non passa per il centro della sfera CA; conducete il diametro AB perpendicolare al piano DEF della sezione; qualunque piano ADB condotto per questa retta incontra la superficie sferica seguendo un cerchio di cui il raggio è uguale a quello della sfera. Se questo cerchio gira intorno al diametro AB, genera la sfera; dunque il diametro AB è un asse e la sezione DEF un parallelo di questa superficie di rivoluzione.

Scolio I.—Si chiama *cerchio massimo,* qualunque sezione fatta nella sfera CA da un piano che passa per il centro C; *cerchio minore* qualunque sezione il cui piano non passi per il centro della sfera.

Il centro G d' un cerchio minore DEF e il centro C della sfera sono sopra una stessa retta AB perpendicolare al piano del cerchio minore.

Si dà il nome di *zona* alla porzione di superficie sferica compresa tra due cerchi paralleli. La zona ha per *basi* i due cerchi e per *altezza* la perpendicolare che misura la distanza delle sue basi.—Se uno dei cerchi è nullo, la zona ha una sola base.

Scolio II.—Se un cerchio qualunque DEF si considera come un parallelo, il diametro AB della sfera perpendicolare al piano di questo cerchio, è un asse di rotazione, e le sue estremità A e B sono due poli della superficie sferica.

Si dà alla retta AB il nome d'*asse* e alle sue estremità A e B il nome di *poli* del cerchio DEF; da ciò resulta che *i cerchi paralleli hanno lo stesso asse e gli stessi poli.*

Corollario I. — *Per due punti della superficie d' una sfera si può condurre una circonferenza di cerchio massimo.* Poichè il piano che passa per i due punti dati e il centro della sfera taglia quest' ultima seguendo un cerchio massimo.

Se i due punti della superficie e il centro non sono in linea retta, non si può tirare che una sola circonferenza di circolo massimo. Nel caso contrario, si possono condurre per i due punti infiniti cerchj massimi aventi ciascuno per diametro la retta che unisce i due punti dati.

Nei seguenti teoremi considereremo solamente il minore dei due archi di circolo massimo che uniscono due punti dati sulla sfera.

Corollario II. — *Qualunque cerchio massimo* ABD *divide la sfera* AC *e la sua superficie in due parti eguali (fig. 343.)* Poichè se si fa girare la zona inferiore ABDEN intorno al diametro AD fino a che essa sia al di sopra del piano ABD e che la sua base ABDE coincida con la base ABDE della zona ABDEM, queste zone dovranno coincidere, altrimenti la superficie della sfera avrebbe dei punti disugualmente distanti dal centro C.

COROLLARIO III. — *Due cerchi massimi si dividono scambievolmente in due parti eguali.* Infatti, la loro intersezione passando per il centro della sfera, è un diametro comune ai due cerchi.

TEOREMA VI.

1°. *Due cerchi minori eguali sono ugualmente distanti dal centro della sfera.* 2°. *Di due circoli minori disuguali il maggiore è il più vicino allo stesso centro. (fig. 344.)*

Poichè il piano che passa per il centro C della sfera e per i centri F, G dei due circoli minori incontra la sfera seguendo un circolo massimo ABED e i due circoli minori seguendo i loro diametri AB, DE; dunque 1° le distanze CF, CG sono uguali se la corda DE è uguale ad AB; 2° la retta CG è minore di CF quando la corda DE è maggiore di AB.

TEOREMA VII.

Il piano tangente a una superficie di rivoluzione è perpendicolare al meridiano che passa per il punto di contatto. (fig. 345.)

Sia xy l'asse d'una superficie di rivoluzione; conducete per un punto A di questa superficie il parallelo AB, il meridiano ACD e le loro tangenti rispettive AT, AT'. Il parallelo AB essendo perpendicolare all'asse e per conseguenza al meridiano ACD, la sua tangente AT è perpendicolare al piano BAC; dunque il piano tangente TAT' e il meridiano ACD sono perpendicolari l'uno all'altro.

Corollario I. — La normale a una superficie di rivoluzione incontra l' asse di questa superficie.

Corollario II. — *Qualunque piano* TAT′ *tangente a una sfera è perpendicolare al raggio* CA *del punto di contatto* A. *(fig. 346.)*

Infatti se conduciamo dal punto A le rette AT, AT′ tangenti a due circoli massimi qualunque ADB, AEB e che passano pel diametro AB, il raggio CA perpendicolare a ciascuna di queste tangenti, è altresì perpendicolare al piano tangente TAT′.

Corollario III. — Da un punto N interno o esterno alla sfera CA, si possono condurre due normali NA, NB di cui le direzioni coincidono, perchè passano per il centro C della sfera.

TEOREMA VIII.

Tutti i punti della circonferenza ABC *d' un parallelo di una superficie di rivoluzione* PABC *sono egualmente lontani da un polo qualunque* P *di questa superficie. (fig. 347.)*

Infatti se conduciamo dal centro O della circonferenza ABC i raggi OA, OB, OC, ec., e se uniamo il polo P ai punti A, B, C, ec., le rette PA, PB, PC, ec., oblique al piano ABC, sono uguali perchè s' allontanano ugualmente dalla retta PO perpendicolare sullo stesso piano. Dunque il polo P è ugualmente distante dai punti della circonferenza del parallelo ABC.

Scolio I. — Gli archi PA, PB, PC, ec., delle linee meridiane che passano per i punti A, B, C, ec. sono eguali in conseguenza del modo di generazione della superficie.

Scolio II. — Se la superficie di rivoluzione è sferica, e se il parallelo ABC è un circolo massimo, gli archi

PA, PB, ec., sono dei quarti della circonferenza o dei *quadranti*, poichè gli angoli al centro POA, POB, ec., sono retti.

La proprietà che ha il polo d'un cerchio d'essere egualmente lontano dai punti della circonferenza di questo cerchio, permette di descrivere gli archi di cerchio sopra una sfera come sopra un piano. Si prende per la distanza delle punte del compasso la retta che unisce il polo a un punto della circonferenza che si vuole descrivere; nel caso di una circonferenza di circolo massimo questa retta è uguale alla corda d'un quadrante, vale a dire al lato del quadrato iscritto in questo cerchio.

Dei due poli di un circolo minore noi considereremo solamente quello che è situato sullo stesso emisfero di questo cerchio, e chiameremo *distanza polare* d'un cerchio l'arco di circolo massimo condotto dal suo polo a un punto qualunque della sua circonferenza.

CAPITOLO II.

Triangolo sferico.

1. — *Si chiama angolo di due archi di circoli massimi* l'angolo diedro formato dai loro piani. Quest'angolo ha per *lati* gli archi di circoli massimi e per *vertice* il loro punto d'intersezione.

2. — Un *poligono sferico* è una porzione della superficie della sfera, compresa tra più archi di circoli massimi.

Questi archi di circoli massimi sono i *lati* del poligono; gli angoli che essi formano e i vertici di questi angoli sono gli *angoli* e i *vertici* del poligono sferico.

Il poligono sferico che ha tre lati è il *triangolo sferico.*

3. — Si dice che un poligono sferico è *convesso*, quando è situato da uno stesso lato di ciascuna delle circonferenze di circoli massimi che lo formano. Nel caso contrario, è *concavo.*

Il perimetro d'un poligono sferico convesso non può essere incontrato in più di due punti da un arco di circolo massimo. (Dimostrazione analoga a quella data per il poligono rettilineo convesso. Libro I, cap. VI.)

4. — I piani degli archi di circoli massimi che formano un poligono sferico ABCD *(fig. 349.)* determinano al centro O della sfera un angolo poliedro OABCD, di cui gli angoli diedri sono gli angoli stessi del poligono. e di cui le facce AOB, BOC, ec., hanno per misura i lati corrispondenti AB, BC, ec., di ABCD.

Se si prolungano le costole dell'angolo poliedro OABCD al di là del vertice O, l'angolo poliedro simmetrico OA'B'C'D' intercetta sulla superficie della sfera un poligono A'B'C'D' di cui gli angoli e i lati sono uguali a quelli del poligono ABCD; ma la disposizione delle parti eguali essendo inversa nei due poligoni, come nei due angoli poliedri simmetrici, questi poligoni non si possono sovrapporre; si dice che essi sono *simmetrici.*

5. — Sia OABC *(fig. 350.)* un angolo triedro di cui il vertice O è situato al centro della sfera OA; se da un punto qualunque M preso nell'interno di quest'angolo si tirano le rette MA', MB', MC' rispettivamente perpendicolari alle facce BOC, COA, AOB, e se si conducono parallelamente a queste rette, nello stesso senso, i raggi O*a*, O*b*, O*c*, gli angoli triedri O*abc*, MA'B'C' sono eguali e gli angoli triedri O*abc*, OABC supplementari.

I triangoli ABC, *abc* intercetti sulla superficie della sfera dagli angoli triedri OABC, O*abc*, son pure *supplementari;* vale a dire che gli angoli dell' uno sono i supplementi dei lati dell' altro, poichè i lati di ciascun triangolo misurano le facce dell' angolo triedro corrispondente.

I triangoli ABC, *abc* hanno pure questa proprietà che i vertici dell' uno sono i poli dei lati dell' altro. Infatti le retta O*a* essendo perpendicolare al piano BOC, il punto *a* è un polo dell' arco di circolo massimo BC, e dei due poli di BC è quello che non si trova dallo stesso lato dell' arco BC che il vertice A del triangolo ABC, poichè i raggi O*a*, OA sono da differenti lati del piano BOC. Vale lo stesso pei due altri vertici *b* e *c* del triangolo *abc* rispetto ai lati AC, AB del triangolo ABC.

Si proverebbe similmente che i vertici A, B, C del triangolo ABC sono i poli dei lati di *abc*. Per questa ragione si è dato ai triangoli supplementari ABC, *abc* il nome di triangoli *polari*.

TEOREMA I.

L' angolo BAD *di due archi di circoli massimi* AB, AD *ha per misura l' arco di cerchio massimo* BD, *descritto dal suo vertice* A *come polo tra i lati. (fig. 351.)*

Il punto A essendo il polo dell' arco di circolo massimo BD, ciascuno degli archi AB, AD è un quadrante, e gli angoli al centro AOB, AOD sono retti. Dunque l' angolo BOD è il rettilineo dell' angolo diedro BACD e l' arco BD che misura l' angolo rettilineo BOD, misura anche l' angolo BAD, formato dai due archi di circoli massimi AB, AD.

COROLLARIO I.—Se prendiamo sulla circonferenza BD e nello stesso senso ciascuno degli archi BP, DP', eguali a un quadrante, il punto P è un polo dell'arco AB, il punto P′ un polo dell'arco AD, e l'arco di cerchio massimo PP′ è uguale a BD. Dunque *l'angolo* BAD *ha per misura l'arco di cerchio massimo che unisce i poli* P *e* P′ *dei suoi lati.*

Corollario II. — Il luogo dei poli dei circoli massimi che formano col cerchio massimo BAE un angolo eguale a BAD è la circonferenza descritta dal punto P come polo con la distanza polare PP′.

Il luogo degli assi degli stessi circoli è la superficie conica di rivoluzione di cui il punto O è il centro, OP l'asse e OP′ una delle generatrici.

Corollario III. — Se si prolungano gli archi BA, DA al di là del loro punto d'intersezione A, gli angoli BAD, EAF, opposti al vertice sono eguali, e gli angoli adiacenti BAD, DAE sono supplementari.

TEOREMA II.

Ciascun lato d'un poligono sferico convesso ABCDE *è minore della metà della circonferenza d'un cerchio massimo. (fig. 352.)*

Poichè se si supponesse un lato qualunque AE di questo poligono maggiore di una mezza circonferenza del circolo massimo, l'arco AB prolungato incontrerebbe AE in un secondo punto F situato tra i punti A e E, di modochè il poligono sferico non sarebbe interamente da uno stesso lato della circonferenza AB; ciò che contradice l'ipotesi. Dunque, ec.

Scolio I. — La reciproca è falsa.

Scolio II. — Noi considereremo i soli poligoni sferici convessi.

TEOREMA III.

1°. *Ciascun lato di un triangolo sferico* ABC *è minore della somma degli altri due.*

2°. *La somma dei tre lati è minore della circonferenza di un cerchio massimo. (fig. 353.)*

Infatti se si unisce il centro O della sfera ai tre vertici del triangolo si forma l' angolo triedro OABC di cui le facce son misurate dai lati corrispondenti del triangolo ABC; ma l'angolo AOB è minore della somma dei due angoli BOC, COA, dunque l'arco AB è altresì minore della somma degli archi BC, CA.

Il perimetro del triangolo ABC, è minore della circonferenza d' un circolo massimo, perchè la somma dei tre angoli AOB, BOC, COA è minore di 4 retti.

Corollario. — La stessa dimostrazione applicata a un poligono convesso prova 1° che ciascun lato è minore della somma degli altri lati; 2° che il perimetro del poligono è minore della circonferenza d' un circolo massimo.

TEOREMA IV.

1°. *Ciascun angolo d' un triangolo sferico* ABC *è maggiore dell' eccesso della somma degli altri due sopra due angoli retti.*

2°. *La somma dei tre angoli di questo triangolo è maggiore di due angoli retti e minore di sei. (fig. 353.)*

Infatti ciascun angolo diedro dell' angolo triedro OABC che si forma unendo il centro della sfera ai vertici del triangolo ABC, è maggiore dell' eccesso della somma degli altri due diedri sopra due diedri retti, e la somma dei tre angoli diedri è maggiore di due diedri retti, ma minore di sei.

Scolio. — Un triangolo sferico è *rettangolo* quando vi è un angolo retto, e si chiama *ipotenusa* il lato opposto all' angolo retto.

Si dà il nome di birettangolo, di trirettangolo a un triangolo che ha due o tre angoli retti.

TEOREMA V.

Se il triangolo sferico ABC *ha due angoli eguali* A *e* C, *i lati* BC, AB *opposti a questi angoli sono eguali. (fig. 353.)*

Unendo i vertici del triangolo ABC al centro O della sfera, si forma un angolo triedro OABC nel quale gli angoli diedri OC, OA sono eguali; dunque le facce BOC, AOB opposte a questi angoli sono eguali, e gli archi BC, AB sono eguali.

Scolio. — Un triangolo equiangolo è equilatero.

TEOREMA VI.

Se il triangolo sferico ABC *ha due angoli disuguali* A *e* C, *il lato* AB *opposto all' angolo maggiore* C, *è più grande del lato* BC, *opposto all' altro angolo. (fig. 353.)*

Infatti se si uniscono i vertici del triangolo ABC al centro O della sfera, si forma un angolo triedro OABC nel quale l' angolo diedro OC è maggiore dell' angolo diedro OA, dunque la faccia AOB è maggiore della faccia BOC e l' arco AB più grande di BC.

Scolio. — Le reciproche dei due teoremi precedenti sono evidenti.

TEOREMA VII.

Due triangoli ABC, A′B′C′ *descritti sulla stessa sfera o sopra sfere eguali, sono eguali o simmetrici, quando hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali. (fig. 354.)*

Sieno l' angolo A eguale ad A′, il lato AB eguale ad A′B′, e il lato AC eguale ad A′C′; supponiamo in prima le parti eguali dei due triangoli disposte nello stess' ordine, e uniamo il centro O della sfera OA ai vertici del triangolo ABC, il centro O′ della sfera O′A′ ai vertici del triangolo A′B′C′. I due angoli triedri OABC, O′A′B′C′ sono uguali perchè hanno un angolo diedro eguale compreso tra due facce rispettivamente eguali e disposte nello stess'ordine: di più i raggi O′A′, OA delle due sfere sono uguali per ipotesi; per conseguenza se sovrapponiamo gli angoli triedri OABC, O′A′B′C′, il vertice A′ coinciderà con A, il vertice B′ con B, e il vertice C′ con C. Dunque i triangoli ABC, A′B′C′ sono eguali.

Se la disposizione delle parti eguali non è la stessa nei triangoli ABC, A′B′C′, con un ragionamento analogo al precedente si dimostra, che il triangolo A′B′C′ è uguale al simmetrico di ABC.

TEOREMA VIII.

Due triangoli, descritti sulla stessa sfera o sopra sfere eguali, sono eguali o simmetrici, se hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali.

Dimostrazione analoga alla precedente.

TEOREMA IX.

Due triangoli, descritti sulla stessa sfera o sopra sfere eguali, sono eguali o simmetrici, se hanno i tre lati rispettivamente eguali.

Dimostrazione analoga alla precedente.

TEOREMA X.

Due triangoli, descritti sulla stessa sfera o sopra sfere eguali, sono eguali o simmetrici, se hanno tre angoli rispettivamente eguali.

Dimostrazione simile alla precedente.

Corollario I. — Se, come nella geometria piana, chiamiamo triangoli *sferici simili* quelli che sono equiangoli e i cui lati, adiacenti agli angoli eguali, sono proporzionali, la proposizione precedente dimostra che se due triangoli simili appartengono alla stessa sfera, sono eguali.

Corollario II. — Se un angolo triedro OABC *(fig. 355)* ha il suo vertice al centro O di due sfere concentriche OA, OA′, esso intercetta sulla loro superficie due triangoli ABC, A′B′C′ che sono simili. Infatti, questi triangoli sono evidentemente equiangoli; inoltre i loro lati AC, A′C′ sono archi simili, proporzionali ai raggi OA, OA′; accade lo stesso dei lati BC, B′C′ e dei lati AB, A′B′; dunque si ha

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'B'}{AB},$$

e i triangoli A′B′C′, ABC sono simili.

TEOREMA XI.

Se due triangoli sferici hanno un angolo disuguale compreso tra due lati eguali, il lato opposto al maggiore dei due angoli è maggiore del lato opposto all' altro angolo.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VI, cap. V, libro I.

Corollario. — Se due triangoli hanno un lato disuguale e gli altri due rispettivamente eguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto all' altro lato.

È una conseguenza dei teoremi IX e XI.

CAPITOLO III.

Intersezione e contatto di due cerchi di una sfera. — Della più corta distanza di due punti della sfera.

1. — Se da un punto A della superficie di una sfera *(fig. 356)* si conduce il cerchio massimo BAB′ perpendicolare al cerchio BCD, ciascuno degli archi AB, AB′ è perpendicolare alla circonferenza BCD, talchè, per un punto di una sfera, si possono condurre due archi perpendicolari alla stessa circonferenza. Questi due archi sono eguali allora soltanto quando il punto dato A coincide col polo del cerchio BCD, e in questo caso tutti gli archi di cerchi massimi che passano per questo punto sono perpendicolari alla circonferenza BCD.

2. — Due circonferenze di cerchio descritte sulla stessa sfera sono *secanti*, quando esse hanno due punti

comuni; sono *tangenti* in un punto, quando hanno la stessa tangente.

I poli P, P' *(fig. 357)* di due circonferenze tangenti CA, C'A' e il punto di contatto A sono sopra un arco di cerchio massimo, il cui piano è perpendicolare alla tangente comune AT. Giacchè, i raggi CA, C'A essendo perpendicolari ad AT, il piano CAC' che passa per i due poli P, P' è anche perpendicolare alla tangente comune.

TEOREMA I.

Se da un punto A *della superficie di una sfera, si conducono gli archi di cerchi massimi* AB, AB' *perpendicolari, e un arco di cerchio massimo* AC *obliquo alla circonferenza* BCD, *l' arco* AC *è maggiore di* AB *e minore di* AB'. *(fig. 358.)*

Unendo il polo P del cerchio BCD al punto C con un arco di cerchio massimo, si forma un triangolo sferico PAC, nel quale si ha

$$PC \quad o \quad PA + AB < PA + AC,$$

e per conseguenza,

$$AB < AC.$$

Lo stesso triangolo sferico dà altresì

$$AC < AP + PC,$$

ovvero

$$AC < AB'.$$

SCOLIO. — AB è il minore e AB' il maggiore degli archi di cerchi massimi che si possono condurre dal punto A alla circonferenza BCD.

TEOREMA II.

Se da un punto A *preso sulla superficie di una sfera si conducono gli archi di cerchi massimi perpendicolari e differenti archi di cerchi massimi obliqui ad una circonferenza,*

1°. *Due archi obliqui egualmente lontani da un arco perpendicolare sono eguali;*

2°. *Di due archi obliqui, disugualmente lontani dal minore degli archi perpendicolari, il più distante è il maggiore. (fig. 359.)*

Sia AB il minore arco di cerchio massimo, condotto dal punto A perpendicolarmente al cerchio BCE. Prendiamo a cominciare da B due archi eguali BC, BD e tiriamo gli archi di cerchi massimi AC, AD. Per dimostrare l' eguaglianza di questi archi, uniamo i punti C e D al polo P del cerchio BCE con archi di cerchi massimi; i due triangoli sferici PAC, PAD hanno il lato PA comune, il lato PC eguale a PD per ipotesi, e l' angolo APC eguale ad APD perchè il piano PAB, perpendicolare al mezzo dell' arco CD, divide l' angolo CPD in due parti eguali; dunque i triangoli PAC, PAD hanno tutte le loro parti rispettivamente eguali, e l' obliqua AC è uguale all' obliqua AD.

2°. Se l' arco BE è maggiore di BC, l' arco di cerchio massimo AE è maggiore di AC. Infatti, i due triangoli sferici PAE, PAC hanno il lato AP comune, il lato PE eguale a PC, e l' angolo APE maggiore di APC; dunque l' arco AE è maggiore dell' arco AC.

Scolio. — Per un punto d' una sfera, si possono condurre ad una circonferenza due soli archi di cerchi massimi obliqui ed eguali.

TEOREMA III.

Due circonferenze descritte sulla stessa sfera sono esterne l' una all' altra, quando l' arco di cerchio massimo che unisce i loro poli è maggiore della somma delle loro distanze polari. (fig. 360.)

Sieno P il polo e PA la distanza polare di uno dei cerchi; prendete sul prolungamento di PA l' arco AB eguale all' eccesso dell' arco di cerchio massimo che unisce i poli dei due cerchi sulla somma delle loro distanze polari; prendete poi l' arco BP′ eguale alla distanza polare del secondo cerchio; il punto P′ sarà il polo di questo cerchio. Ma l' arco P′B è minore di P′A, il più piccolo dei due archi condotti da P′ perpendicolarmente alla circonferenza PA; dunque la circonferenza P′B ha tutti i suoi punti esterni alla circonferenza PA.

SCOLIO. — La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del teorema III, cap. III, libro II.

TEOREMA IV.

Due circonferenze descritte sulla stessa sfera sono tangenti esteriormente, se l' arco di cerchio massimo che unisce i loro poli è uguale alla somma delle loro distanze polari.

Dimostrazione analoga a quella del teorema IV, cap. III. libro II.

TEOREMA V.

Due circonferenze descritte sulla stessa sfera sono secanti, quando l' arco di cerchio massimo che unisce *i loro poli è minore della somma delle loro distanze polari e maggiore della loro differenza.*

Dimostrazione analoga a quella del teorema V, cap. III, libro II.

TEOREMA VI.

Due circonferenze descritte sulla stessa sfera sono tangenti internamente, quando l'arco di cerchio massimo che unisce i loro poli è uguale alla differenza delle loro distanze polari.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VI, cap. III, libro II.

TEOREMA VII.

Due circonferenze descritte sulla stessa sfera sono interne l'una all'altra, quando l'arco di cerchio massimo che unisce i loro poli è minore della differenza delle loro distanze polari.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VII, cap. III, libro II.

TEOREMA VIII.

La linea più corta che, sulla sfera, unisce il polo P *di una circonferenza* BAC *a un punto qualunque di questa curva, è costante. (fig. 361.)*

Infatti, sia PMB la linea più corta che si possa condurre sulla sfera dal polo P alla circonferenza BAC; facendola girare attorno all'asse PA, questa linea genera una superficie di rivoluzione che non è altro che la zona PBC, poichè tutti i punti della generatrice PMB sono egualmente distanti dal centro della sfera, e il punto B descrive la circonferenza BAC. Dunque le più corte distanze del polo P ai differenti punti della circonferenza BAC sono eguali.

TEOREMA IX.

La linea più corta che si possa condurre sulla sfera da un punto A *della sua superficie a un altro punto* B *è il più piccolo arco di cerchio massimo* AB *che unisce questi due punti. (fig. 362.)*

Infatti, dico che qualunque punto C dell' arco AB è situato sulla linea più corta che si possa condurre sulla sfera dal punto A al punto B. Per dimostrarlo suppongo prima l' arco AB minore di una mezza circonferenza, e descrivo dai punti A e B come poli, con le distanze polari AC, BC, due cerchi che sono tangenti esteriormente, poichè l' arco di cerchio massimo AB che unisce i loro poli è uguale alla somma delle loro distanze polari. La più corta distanza del punto A al punto B, misurata sulla superficie della sfera, è composta di tre parti che sono 1° la più corta distanza del polo A alla circonferenza AC; 2° la più corta distanza del polo B alla circonferenza BC; 3° la più corta distanza delle due circonferenze AC e BC. Ma i poli A e B sono egualmente distanti da tutti i punti delle rispettive circonferenze AC e BC; dunque la linea minima descritta sulla sfera dal punto A al punto B, passa pel punto C, poichè per questo punto solo la distanza delle due circonferenze è nulla. Laonde l' arco di cerchio massimo AB è la linea più corta che si possa descrivere sulla sfera dal punto A al punto B.

Se i due punti A e B sono l' estremità d' un diametro della sfera, le due circonferenze AC, BC coincidono in tutta la loro estensione, in guisa che la più corta distanza dei due punti A e B è una delle semicirconferenze di cerchi massimi che uniscono i due punti A e B.

CAPITOLO IV.

Distanza di un punto ad una sfera. — Intersezione e contatto di due sfere.

1. — Se per un punto A esterno o interno ad una sfera BO *(fig. 363)*, si conducono le normali AB, AB′ e differenti rette AC, AD,.... sino all'incontro della superficie sferica, le rette AC, AD,.... sono *oblique* a questa superficie, e si dice che due oblique si allontanino egualmente o disugualmente da una normale AB, quando gli archi di cerchi massimi, BC, BD...., descritti dal piede della normale all'estremità delle oblique, sono eguali o disuguali.

2. — Due superficie qualunque sono tangenti in un punto, quando in questo punto hanno lo stesso piano tangente.

TEOREMA I.

Se da un punto A *si conducono le due normali e una obliqua qualunque* AE *ad una sfera, l'obliqua è maggiore di una delle normali e minore dell'altra. (fig. 364.)*

Infatti, il piano che passa per l'obliqua AE e la normale AB′, incontra la sfera seguendo un cerchio massimo CB. Ma la rette AB, AB′ sono normali, e la retta AE obliqua a questo cerchio; dunque AE è maggiore della normale minima AB e minore della normale massima AB'.

Scolio. — La normale AB è la più corta distanza, e la normale AB' la maggiore distanza del punto A alla superficie della sfera.

TEOREMA II.

Se dal punto A si conducono le normali e differenti oblique ad una sfera OB,

1°. *Due oblique egualmente distanti dalla normale minima sono eguali;*

2°. *Di due oblique disugualmente distanti dalla normale minima, la maggiore è la più distante. (fig. 365.)*

1°. Conducete la normale minima AB, e prendete due archi di cerchi massimi eguali BC, BD; dico che le oblique AC, AD sono eguali. Infatti, se facciamo girare il piano ADB' attorno alla retta AB' sino a che coincida col piano ACB', la circonferenza BDB' si applica sopra BCB' e le due oblique AD, AC coincidono a causa dell' eguaglianza degli archi BD, BC.

2°. Se l' arco BE è maggiore di BC, l' obliqua AE è maggiore di AC. E invero, prendete sopra BE l' arco BD eguale a BC e conducete l' obliqua AD che è uguale ad AC; delle due oblique AD, AE allo stesso cerchio BE, la maggiore è AE; dunque ec.

Corollario. — Il luogo dei piedi delle oblique eguali ad AD condotte dal punto A alla sfera BO è la circonferenza di cerchio descritta dal piede della normale AB come polo colla distanza polare BD.

Le oblique eguali AD, AC,.... sono situate sopra una superficie conica di rivoluzione il cui centro è il punto A; la circonferenza CDF è una delle linee d' intersezione di questa superficie conica e della sfera. Dimostreremo poi che la sfera è altresì incontrata dalla superficie conica seguendo un' altra circonferenza di cerchio.

TEOREMA III.

Due sfere sono esterne l' una all' altra, quando la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi.

Dimostrazione analoga a quella del teorema III, cap. III, libro II.

TEOREMA IV.

Due sfere sono tangenti esteriormente, se la distanza dei loro centri è uguale alla somma dei loro raggi.

Dimostrazione analoga a quella del teorema IV, cap. III, libro II.

TEOREMA V.

Due sfere s' incontrano seguendo una circonferenza di cerchio, quando la distanza dei loro centri è minore della somma e maggiore della differenza dei loro raggi. (fig. 366.)

Siano A e B i centri delle due sfere; conducete per la retta AB un piano qualunque che incontrerà la sfera A seguendo il cerchio massimo AM e la sfera B seguendo il cerchio massimo BN. Questi due cerchi si tagliano nei punti C e D, poichè la distanza dei loro centri è minore della somma e maggiore della differenza dei loro raggi; dunque, se consideriamo le sfere come generate dalla rotazione dei cerchi AM, BN attorno all'asse AB, il punto C d'intersezione di questi cerchi descrive un parallelo comune alle due superficie sferiche e le sfere si tagliano seguendo questo parallelo.

Scolio. — I centri delle sfere e il centro della circonferenza CE, seguendo le quali esse s' incontrano, sono situate sopra una medesima retta perpendicolare al piano della circonferenza.

TEOREMA VI.

Due sfere sono tangenti internamente, quando la distanza dei centri è minore della differenza dei loro raggi.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VI, cap. III, libro II.

TEOREMA VII.

Due sfere sono interne l' una all' altra, quando la distanza dei centri è minore della differenza dei loro raggi.

Dimostrazione analoga a quella del teorema VII, cap. III, libro II.

TEOREMA VIII.

1°. *Le tangenti alla sfera* OB, *condotte dallo stesso punto* A, *sono eguali.*

2°. *Il luogo di queste rette è una superficie conica di rivoluzione tangente alla sfera. (fig. 367.)*

1°. Sieno AB, AC due tangenti alla sfera OB; unite i loro punti di contatto B e C al centro O. I due triangoli rettangoli ABO, ACO sono eguali, perchè hanno l' ipotenusa AO comune e i due lati BO, CO eguali; dunque la tangente AB è uguale ad AC.

2°. Dall'eguaglianza dei triangoli ABO, ACO risulta quella altresì degli angoli BAO, CAO; dunque le tangenti, condotte da uno stesso punto, fanno angoli eguali col diametro AO della sfera, che passa pel punto dato A; per conseguenza il luogo di queste rette è una superficie conica di rivoluzione che tocca la superficie della sfera in ciascuno dei punti del parallelo BCD, comune a queste due superficie.

Scolio. — Si dice che la superficie conica ABCD è *circoscritta* alla sfera, e reciprocamente che la sfera è *iscritta* nella superficie conica.

TEOREMA IX.

Il luogo delle tangenti alla sfera, parallele ad una retta data xy, *è una superficie cilindrica di rivoluzione, tangente alla sfera. (fig. 368.)*

Infatti, se conduciamo pel centro O della sfera il piano ABC perpendicolare ad *xy* e per i punti della circonferenza del cerchio massimo ABC delle parallele a *xy*, ciascuna di queste rette è perpendicolare al raggio corrispondente e per conseguenza tangente alla sfera; dunque il luogo di queste tangenti che sono parallele al diametro *xy*, è una superficie cilindrica di rivoluzione, eziandio tangente alla sfera.

Scolio. — La superficie cilindrica è detta *circoscritta* alla sfera, la quale, reciprocamente, è *iscritta* nella superficie cilindrica.

TEOREMA X.

Se l' intersezione d' una sfera ABCD *e d' un cono* SCD *è composta di due curve distinte* AMB, CND *e che* *una di queste linee sia una circonferenza di cerchio, l' altra è anche una circonferenza. (fig. 369.)*

Infatti, se la base CND del cono è un cerchio, dico che la seconda curva d' intersezione AMB è altresì un cerchio. Sieno SN una generatrice del cono ed M il punto nel quale questa retta incontra la curva AMB; conduco SE perpendicolare al piano della base CND, unisco il punto E al punto N e conduco MF perpendicolare ad SN nel piano SEN, sino all' incontro della retta SE; il quadrilatero EFMN i cui angoli opposti M ed E sono retti, è iscrivibile e si ha:

$$SF \times SE = SN \times SM.$$

Conducendo dal vertice del cono la retta SG tangente alla sfera e facendo passare un piano per le due rette SG, SN, si ha altresì, nel cerchio MGN,

$$SN \times SM = SG^2,$$

e per conseguenza

$$SF \times SE = SG^2.$$

Dunque la retta SF ha una lunghezza costante per tutti i punti della curva AMB; ma, poichè l' angolo SMF è retto, ciascuno dei punti di AMB appartiene alla sfera descritta sulla retta SF come diametro; dunque la curva AMB è l' intersezione di due sfere, cioè una circonferenza di cerchio.

Corollario. — Se il vertice S del cono si allontana indefinitamente dalla base CND supposta fissa, strisciando lungo una generatrice come BD, questo cono si trasforma in un cilindro avente CND per base e BD per generatrice. Dunque *se l' intersezione d' una sfera e d' un cilindro è composta di due curve distinte e che una sia una circonferenza di cerchio, l' altra è anche una circonferenza.*

Scolio. — Una delle due curve d'intersezione è chiamata *curva d'entrata* del cono e del cilindro, l'altra *curva d'uscita.*

CAPITOLO V.

Problemi sui cerchi della sfera.

Problema I. — *Determinare la lunghezza del raggio di una sfera. (fig. 370.)*

Prendete due punti qualunque M e N sulla sfera; da ciascuno di essi come polo, con una distanza polare maggiore della metà dell'arco di cerchio massimo che unisce M ad N, descrivete due archi che s'incontrano in un punto A che dista egualmente da M e da N. Determinate similmente due altri punti B e C egualmente distanti da M e da N; il piano che passa pei tre punti A, B, C è perpendicolare al mezzo della retta MN; dunque la sezione che fa nella sfera è un cerchio massimo.

Misurate le distanze rettiline AB, BC, AC e costruite un triangolo con queste tre rette; il raggio del cerchio circoscritto a questo triangolo è uguale al raggio della sfera.

Problema II. — *Descrivere una circonferenza di cerchio massimo che passi per due punti* A *e* B *della superficie di una sfera. (fig. 371.)*

Dai punti A e B come poli, descrivete due archi di cerchi massimi; essi s'incontrano nel punto P, polo dell'arco di cerchio massimo che passa per A e B. Conosciuto questo polo, tracciate la circonferenza AB.

Corollario. — Se due punti A e B *(fig. 372)* sono l'estremità di un diametro della sfera, i cerchi massimi descritti dai punti A e B come poli, coincidono e allora il problema è indeterminato; giacchè qualunque punto del cerchio massimo CDE è il polo d'un cerchio massimo che passa per A e B.

Scolio. — La costruzione precedente serve a trovare il polo di un cerchio massimo dato.

Problema III. — *Condurre da un punto* A *della superficie di una sfera un arco di cerchio massimo perpendicolare a un cerchio massimo dato* CBD. *(fig. 373.)*

Dal punto A come polo, descrivete un arco di cerchio massimo sino all' incontro della circonferenza data CBD; l' arco di cerchio massimo descritto dal punto d' intersezione P come polo sarà perpendicolare a CBD.

Problema IV. — *Condurre, per un punto* A *della superficie di una sfera, un cerchio massimo che faccia un angolo dato con un cerchio massimo dato* BCD. *(fig. 374.)*

Determinate il polo P del cerchio BCD, che si trova sull' emisfero ABCD; descrivete la circonferenza EFH, luogo dei poli dei cerchi massimi che fanno col cerchio BCD un angolo eguale all' angolo dato, e tracciate, dal punto A come polo, un arco di cerchio massimo sino all' incontro della circonferenza EFH. I punti d' intersezione E ed F sono i poli dei cerchi massimi che formano con BCD l' angolo dato e che passano pel punto A.

Il problema ha due soluzioni quando l' arco PK è maggiore di CA, complemento dell' arco PA; ha una soluzione se PK è uguale a CA. Finalmente, è impossibile se PK è minore di CA.

Problema V. — *Dividere un arco di cerchio massimo in due parti eguali. (fig. 375.)*

Determinate sulla sfera due punti C e D egualmente lontani dalle estremità dell' arco dato AB e conducete il cerchio massimo CD. Questo cerchio è perpendicolare all'arco AB e lo divide in due parti eguali.

Corollario. — Il cerchio CD divide altresì in due parti eguali ciascuno degli archi di circoli minori che passano pei due punti A e B. Giacchè il suo piano è perpendicolare al mezzo della corda AB, comune a tutti gli archi le cui estremità sono A e B.

Problema VI. — *Descrivere il circolo minore che passa per tre punti* A, B, C *dati sulla superficie d'una sfera. (fig. 376.)*

Conducete l'arco di circolo massimo DE perpendicolare al mezzo dell'arco AB e l'arco di circolo massimo FG perpendicolare al mezzo dell'arco BC; gli archi DE, FG s'incontrano in un punto P egualmente distante dai tre punti A, B, C; dunque la circonferenza descritta dal punto P come polo, con la distanza polare PA, passa pe' punti dati.

Corollario. — Questo problema serve per descrivere il circolo circoscritto a un triangolo sferico.

Broblema VII. — *Descrivere per un punto dato* A *un circolo massimo tangente al circolo minore* PB.

1°. Se il punto A è dato sulla circonferenza PB *(fig. 377)*, conducete per questo punto e pel polo P del circolo minore PB un arco di cerchio massimo; prendete sopra questo arco un punto C tale che CA sia eguale a un quadrante e descrivete, dal punto C come polo, un circolo massimo che sarà tangente al circolo minore dato PB. Giacchè la distanza dei loro poli è uguale alla differenza delle distanze polari CA, PA.

2°. Supponete il punto A esterno al cerchio PB e sia P il polo del circolo minore PB *(fig. 378)*; da questo punto come polo, con una distanza polare eguale al complemento dell'arco PB, descrivete una circonferenza CD e tracciate dal punto A come polo, un arco di cerchio massimo che incontra la circonferenza CD nei punti C, D. Questi punti sono i poli di due cerchi massimi tangenti al circolo minore PB, giacchè la distanza dei poli P e C è uguale alla differenza delle distanze polari CA, AB. — Similmente la distanza dei poli P e D è uguale alla differenza delle distanze polari DA, PB.

Problemi da risolvere.

1. — Se il maggiore degli angoli di un triangolo sferico è uguale alla somma degli altri due, il polo del cerchio circoscritto a questo triangolo è sul lato maggiore.

2. — Se il maggiore degli angoli di un triangolo sferico è maggiore della somma degli altri due, il polo del cerchio circoscritto è situato all'esterno del triangolo, tra i prolungamenti dei lati dell'angolo maggiore.

3. — Se il maggiore degli angoli di un triangolo sferico è minore della somma degli altri due, il polo del cerchio circoscritto è situato all'interno del triangolo.

4. — Qualunque punto dell'arco bisettore dell'angolo di due archi di cerchi massimi è ugualmente lontano dai due lati di quest'angolo. — Qualunque punto esterno all'arco bisettore è disugualmente distante dai due lati dell'angolo.

5. — Gli archi bisettori dei tre angoli di un triangolo sferico passano per lo stesso punto ch'è il centro del cerchio iscritto. — Gli archi bisettori dei supplementi di due angoli di un triangolo sferico e l'arco bisettore del terzo angolo s'incontrano in uno stesso punto, centro di un cerchio ex-iscritto.

6. — Se un cono a base circolare è iscritto in una sfera, qualunque sezione fatta nel cono da un piano perpendicolare al diametro della sfera, che passa pel vertice della sfera, è una circonferenza di cerchio.

7. — Se per un punto A situato nell'interno di una sfera

si conducono tre piani due a due perpendicolari, la somma delle aree dei tre cerchi che essi determinano nella sfera è costante.

8. — Descrivere sopra una sfera una circonferenza tangente a una circonferenza data e che passi per due punti dati.

9. — Due sfere sono omotetiche dirette e inverse.

10.— Quattro sfere hanno sei centri d'omotetia diretta, sei centri d'omotetia inversa e, per conseguenza, quattro assi d'omotetia diretta e dodici assi d'omotetia inversa.

11. — Quattro sfere hanno un piano d'omotetia diretta, quattro piani d'omotetia diretta e inversa di cui ciascuno contiene tre centri esterni situati sullo stesso asse e i tre centri interni corrispondente agli altri tre centri esterni. Esse hanno anche tre piani d'omotetia inversi di cui ciascuno contiene due centri esterni non situati sullo stesso asse e i quattro centri interni corrispondenti ai quattro altri centri esterni.

12. — Condurre per un punto dato un piano tangente ad una sfera.

13. — Condurre per un punto un piano tangente a due sfere.

14. — Condurre un piano tangente a tre sfere.

LUOGHI GEOMETRICI.

1. — Luogo geometrico dei punti dello spazio egualmente illuminati da due luci d'intensità differenti.

2. — Luogo geometrico dei vertici dei coni eguali e circoscritti a due sfere differenti.

3. — Luogo dei centri delle sezioni fatte in una sfera da piani che passano per un punto dato.

4. — Luogo delle proiezioni di un punto, esterno ad un piano, sopra rette condotte dallo stesso punto in questo piano.

5. — Luogo dei centri delle sfere che tagliano due sfere date seguendo circoli massimi.

6. — Luogo dei centri delle sfere che tagliano tre sfere date seguendo circoli massimi.

LIBRO OTTAVO.

MISURA DEL CILINDRO, DEL CONO E DELLA SFERA. POLIEDRI REGOLARI.

CAPITOLO I.

Cilindro.

1.—La proiezione del perimetro di una figura piana sopra un piano determina un' altra figura che si chiama la *proiezione* della prima su questo piano.

Le proiezioni di una figura piana sopra due piani paralleli sono eguali, giacchè possiamo considerarle come basi di un prisma o di un cilindro retto. Da ciò segue che una figura piana è uguale alla sua proiezione, quando i loro piani sono paralleli.

2. — Un prisma è *iscritto* in un cilindro, quando le sue basi sono iscritte in quelle del cilindro. Al contrario, un prisma è circoscritto a un cilindro, se ha per basi poligoni circoscritti alle basi del cilindro. Le facce laterali del prisma circoscritto sono tangenti al cilindro.

3.—Due cilindri retti o due coni retti sono *simili*, quando le loro altezze sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

Due cilindri simili si possono considerare come generati da due rettangoli simili, e due coni simili da due triangoli rettangoli simili.

LEMMA I. — *La proiezione di un triangolo* ABC *sopra un piano* MN, *non parallelo ad* ABC, *è minore di questo triangolo.*

Supponete prima il lato AB del triangolo ABC *(fig. 379)* parallelo al piano di proiezione e conducete per questa retta un piano M'N' parallelo ad MN; la proiezione di ABC sul piano MN è uguale ad ABC', proiezione dello stesso triangolo sul piano M'N'. Conducete C'D perpendicolare ad AB e unite il punto D al vertice C; la retta CD è anche perpendicolare ad AB. Ma i triangoli ABC, ABC' hanno la stessa base AB e sono tra loro come le altezze CD, C'D; dunque il triangolo ABC' è minore di ABC.

Sia, in secondo luogo, A'B'C' *(fig. 380)* la proiezione di un triangolo qualunque ABC sul piano MN; conducete pel vertice C e nel piano ABC la retta CD parallela al piano di proiezione. Questa linea decompone il triangolo ABC in due parti BDC, ADC le cui proiezioni sono B'D'C', A'D'C'. Ma, B'D'C' è minore di BDC, A'D'C' è minore di ADC, dunque il triangolo A'B'C' è minore di ABC.

COROLLARIO I. — *La proiezione di un poligono* ABCD *sopra un piano non parallelo ad* ABC, *è minore di questo poligono. (fig. 383.)*

Sia A'B'C'D'E' la proiezione del poligono ABCDE sul piano MN; conducete le diagonali AC, AD e le loro proiezioni A'C', A'D'; i triangoli A'B'C', A'C'D', A'D'E' sono rispettivamente minori dei triangoli ABC, ACD, ADE; dunque il poligono A'B'C'D'E' è minore di ABCDE. (1)

COROLLARIO II. — *Una faccia qualunque di un poliedro è minore della somma delle altre facce.*

Infatti essa è al più eguale alla somma delle proiezioni delle altre facce del poliedro sul suo piano.

(1) Il Lemma I è una conseguenza evidente dell' osservazione contenuta nella Nota a pag. 217. (T.)

LEMMA II. — *Qualunque superficie poliedrica convessa* ABCDEFGH *è minore di una superficie poliedrica qualunque* ABCDKLMN *che l' inviluppa e che termina allo stesso contorno* ABCD. *(fig. 384.)*

Se prolunghiamo i piani che formano la superficie interna sino all'incontro della superficie esterna, il piano EFGH vi determina la sezione OPQR; il piano ADGH incontra le facce ABKN, CDML seguendo le rette AS, DT e i piani ABEH, CDGF tagliano la faccia BCLK seguendo le rette BX, CY.

La faccia BEFC del poliedro BEFBXY essendo minore della somma delle altre facce, la superficie poliedrica ABCDEFGH è minore di ABCDGHXY; similmente quest' ultima è minore della superficie ABCDPQTS, la quale è essa stessa minore di ABCDOPQR. Ma quest' ultima superficie è altresì minore di ABCDKLMN; dunque la superficie convessa ABCDEFGH è minore di ABCDKLMN.

COROLLARIO.—Parimenti si dimostrerebbe che una superficie poliedrica convessa e chiusa è minore di qualunque altra superficie poliedrica che l'inviluppi da tutte le parti.

SCOLIO.—Poichè il teorema è vero quali che siano il numero e la grandezza delle facce delle due superficie poliedriche, io l' applicherò alle superficie curve convesse.

TEOREMA I.

La superficie laterale di un prisma retto è uguale al prodotto del perimetro della sua base per la sua altezza. (fig. 385)

Infatti, il prisma ABC′D′ essendo retto, la sua superficie laterale è la somma dei rettangoli AB′, BC′, CD′, ..., che hanno per altezza l' altezza del prisma e per basi i lati AB, BC, CD, ... della base ABCD di questo poliedro; dunque essa ha per misura (AB + BC + CD + ...) AA′, cioè il prodotto del perimetro della base del prisma per la sua altezza.

Corollario. — Le superficie laterali di due prismi retti che hanno la stessa altezza stanno come i perimetri delle respettive basi. — Le superficie laterali di due prismi retti che hanno basi eguali, stanno fra loro come le altezze.

TEOREMA II.

1°. *La superficie totale di un cilindro retto è il limite delle superficie totali dei prismi regolari iscritti e circoscritti.*

2°. *Il volume del cilindro è il limite dei volumi di questi prismi. (fig. 386.)*

Iscrivete nella base inferiore del cilindro retto ABCDA′B′C′D′ un poligono regolare ABCD e conducete pei lati di questo poligono piani perpendicolari alla sua superficie sino all' incontro della base superiore del cilindro; il prisma ABCDA′B′C′D′ è retto e iscritto nel cilindro che l' inviluppa da tutte le parti; dunque la superficie totale e il volume del cilindro sono maggiori della superficie totale e del volume del prisma.

Circoscrivete al cerchio ABC un poligono simile al poligono iscritto, e conducete pei suoi lati piani tangenti al cilindro, sino all' incontro del piano A′B′C′. Il prisma EFGHE′F′G′H′ è retto e circoscritto al cilindro che inviluppa da tutte le parti; dunque la sua superficie laterale e il suo volume sono maggiori della superficie totale e del volume del cilindro.

Sieno s e S le superficie totali dei prismi iscritto e circoscritto; v e V i loro volumi; p e P i perimetri delle loro basi b, B e h la loro altezza comune. Se si raddoppia il numero dei lati delle basi b, B, la superficie s e il volume v crescono, restando tuttavia minori della superficie totale e del volume del cilindro, mentre la superficie S e il volume V decrescono, ma restando maggiori della superficie e del volume del cilindro. Ma si ha: 1°

$$S = 2B + P \cdot h$$
$$s = 2b + p \cdot h;$$

dunque

$$S - s = 2(B - b) + (P - p)\,h.$$

Ma se il numero dei lati delle basi b, B cresce indefinitamente, le variabili $B - b$, $P - p$ hanno per limite zero (Libro IV, cap. V, teorema II), mentre i fattori 2 e h sono costanti; dunque la differenza $S - s$ decresce indefinitamente e la superficie totale del cilindro è il limite delle superficie totali dei prismi iscritti e circoscritti.

2°. Si ha

$$V = B \cdot h$$
$$v = b \cdot h$$

e per conseguenza

$$V - v = (B - b)\,h.$$

Ma, se il numero dei lati delle basi B, b aumenta indefinitamente, la varabile $B - b$ ha per limite zero e il fattore h è costante; dunque $V - v$ decresce indefinitamente, e il volume del cilindro è il limite dei volumi dei prismi iscritti e circoscritti.

Corollario.—Le basi del cilindro essendo i limiti delle basi dei prismi iscritti e circoscritti, *la superficie laterale del cilindro è il limite delle superficie laterali dei prismi iscritti e circoscritti.*

TEOREMA III.

La superficie laterale di un cilindro retto ha per misura il prodotto della circonferenza della sua base per la sua altezza. (fig. 387.)

Sieno S la superficie laterale e P il perimetro della base di un prisma regolare, circoscritto al cilindro di raggio R e di altezza H. Se supponiamo che il numero dei lati della base del prisma aumenti indefinitamente, le variabili S e P . H hanno rispettivamente per limiti la superficie laterale del cilindro e *cir.* R . H. Ma la superficie laterale di un prisma retto essendo eguale al prodotto del perimetro della sua base per la sua altezza, le due variabili S e P . H sono costantemente eguali; talchè hanno i medesimi limiti; e si ha:

$$\textit{sup. lat. del cil.} = \textit{cir.}\, R \,.\, H = 2\pi R \,.\, H.$$

Corollario. — La superficie totale del cilindro ha per misura il prodotto della circonferenza della sua base per la somma dell'altezza e del raggio del cilindro.

Giacchè la somma delle due basi è uguale al prodotto della circonferenza della base pel suo raggio.

TEOREMA IV.

Il volume di un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Sieno V il volume e B la base di un prisma regolare circoscritto al cilindro di altezza H e di raggio R.

Se il numero dei lati della base cresce indefinitamente, le variabili V e B . H hanno rispettivamente per limiti il volume del cilindro e *cerchio* R . H. Ma il prisma retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza; dunque le variabili V e B . H sono sempre eguali e i loro limiti lo sono altresì, cioè si ha:

$$cilindro\ R = cerchio\ R \,.\, H.$$

Corollario I. — Si ha:

$$cerchio\ R = \pi R^2;$$

dunque

$$cilindro\ R = \pi R^2 \,.\, H.$$

Corollario II. — Due cilindri che hanno la medesima altezza stanno fra loro come le basi. — Due cilindri che hanno basi eguali stanno fra loro come le altezze.

TEOREMA V.

Se un cilindro retto si taglia con un piano EGF *non parallelo alla sua base, il volume del tronco di cilindro retto* ABFE *è uguale al prodotto della base* AC *del cilindro per la porzione* CD *dell' asse, compresa tra le basi del tronco (fig. 388.)*

Conducete pel punto D un piano parallelo alla base AC; la sezione KGLH prodotta da questo piano nel cilindro è un cerchio, e dico che il cilindro ABLK è equivalente al cilindro troncato ABFE. Infatti questi due corpi hanno una parte comune ABLGHE e le altre due parti GHLF, GHKE sono eguali. Per dimostrarlo, fo girare il volume GHLF attorno all' intersezione GH dei due piani KGL, EGF sino a che il semicerchio GHL coincida col semicerchio GHK. Allora la superficie cilindrica GLFH si applica sulla superficie cilindrica GKEH, perchè entrambe sono perpendicolari al piano KGL; inoltre, i due angoli diedri FGHL, EGHK essendo eguali, il piano FGH prende la direzione del piano EGH; dunque i due volumi GHLF, GHKE sono eguali e il cilindro retto ABLK è equivalente al cilindro troncato ABFE.

Corollario. — *La superficie laterale del tronco di cilindro retto* ABEF *ha per misura il prodotto della circonferenza* CA *della base del cilindro per la porzione* CD *dell' asse compresa tra le basi del tronco.*

Giacchè essa è equivalente alla superficie laterale del cilindro retto ABLK.

TEOREMA VI.

1°. *Le superficie laterali di due cilindri simili stanno tra loro come i quadrati dei raggi delle loro basi.*

2°. *I volumi di questi cilindri stanno tra loro come i cubi dei medesimi raggi.*

Sieno S e s le superficie laterali, V e v i volumi, H e h le altezze di due cilindri simili; e R, r i raggi delle loro basi.

1°. Si ha:

$$S = 2\pi R \,.\, H$$
$$s = 2\pi r \,.\, h,$$

e per conseguenza,

$$S : s :: R \,.\, H : r \,.\, h.$$

Poichè i cilindri sono simili, ne risulta che

$$H : h :: R : r;$$

dunque

$$S : s :: R^2 : r^2.$$

2°. Si ha:

$$V = \pi R^2 . H,$$
$$v = \pi r^2 . h,$$

e quindi

$$V : v :: R^2 . H : r^2 . h;$$

ovvero

$$V : v :: R^3 : r^3,$$

Corollario. — Le superficie totali di due cilindri simili stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle rispettive basi.

CAPITOLO II.

Cono.

Una piramide è *iscritta* in un cono quando ha per base un poligono iscritto nella base del cono e per vertice quello del cono. — Le costole della piramide che passano pel vertice sono generatrici della superficie conica.

Al contrario, una piramide è *circoscritta* ad un cono, quando la sua base è un poligono circoscritto alla base del cono e il suo vertice coincide con quello della superficie conica; ciascuna delle facce laterali della piramide è tangente al cono, poichè essa passa pel vertice del cono e per una tangente alla sua base.

Si chiama *apotema* di una piramide regolare SABC (*fig. 389*) la perpendicolare SD che misura la distanza del suo vertice S a un lato qualunque AB della sua base ABC; *apotema* o *lato* di un cono la parte della generatrice della superficie del cono compresa tra il vertice e la base.

TEOREMA I.

La superficie laterale di una piramide regolare SABCDE *ha per misura la metà del prodotto del perimetro della sua base* ABCDE *pel suo apotema* SG. *(fig. 390.)*

Sia F il centro del poligono regolare ABCDE; la retta SF è l'altezza della piramide regolare SABC e le costole SA, SB, SC, SD, SE che si allontanano egualmente dalla retta SF perpendicolare al piano ABC sono eguali; dunque i triangoli SAB, SBC, ... sono isosceli ed eguali tra loro. Ma la retta SG essendo l'apotema della piramide, si ha

$$SAB = AB \times \frac{SG}{2},$$

$$SBC = BC \times \frac{SG}{2},$$

$$SCD = CD \times \frac{SG}{2}, \text{ ec.:}$$

dunque

$$SAB + SBC + SCD + \ldots = (AB + BC + CD + \ldots) \times \frac{SG}{2}.$$

Corollario. — Le superficie laterali di due piramidi regolari che hanno la stessa base stanno fra loro come i rispettivi apotemi e reciprocamente

TEOREMA II.

1°. *La superficie totale di un cono retto è il limite delle superficie totali delle piramidi regolari iscritte e circoscritte.*

2°. *Il volume del cono è il limite dei volumi di queste piramidi. (fig. 391.)*

Iscrivete nella base ABCD del cono SABCD un poligono regolare ABCD e conducete per ciascuno dei suoi lati un piano che passi pel vertice S del cono; la piramide SABCD è regolare ed iscritta nel cono che l'inviluppa da tutte le parti; dunque la superficie totale e il volume del cono sono maggiori della superficie totale e del volume della piramide.

Circoscrivete al cerchio ABC un poligono EFGH simile al poligono iscritto e conducete per ciascuno dei suoi lati un piano tangente al cono; la piramide SEFGH è regolare e circoscritta al cono che essa inviluppa da tutte le parti; dunque la sua superficie totale e il suo volume sono maggiori di quelli del cono.

Sieno s e S le superficie totali delle piramidi iscritta e circoscritta, v e V i loro volumi, p e P i perimetri delle basi b, B; a e A gli apotemi SL, SK e h l'altezza comune. Se si raddoppia il numero dei lati delle basi b, B, la superficie s e il volume v crescono, restando sempre minori della superficie totale e del volume del cono, mentre la superficie S e il volume V decrescono, restando maggiori della superficie totale e del volume dello stesso cono. Ma si ha: 1°

$$S = B + \frac{1}{2} P . A$$

$$s = b + \frac{1}{2} p . a;$$

dunque

$$S - s = B - b + \frac{1}{2} (P . A - p . a).$$

Diminuendo e aumentando simultaneamente il secondo membro di questa eguaglianza del prodotto $\frac{1}{2}p \cdot A$, si trova:

$$S - s = B - b + \frac{1}{2}(P - p)\,A + \frac{1}{2}(A - a)\,p.$$

Se il numero dei lati delle basi b, B cresce indefinitamente, le variabili $B - b$, $P - p$ hanno per limite zero; lo che avviene pure della differenza $A - a$, perchè la variabile SL ha per limite SK. Dunque la differenza $S - s$ decresce indefinitamente, e la superficie totale del cono è il limite delle superficie totali delle piramidi iscritte e circoscritte.

2°. Si ha

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

$$v = \frac{1}{3}b \cdot h,$$

$$V - v = \frac{1}{3}(B - b)\,h.$$

Se supponiamo che il numero dei lati delle basi aumenti indefinitamente, la variabile $B - b$ ha per limite zero; e poichè il fattore h è costante, si vede che la differenza $V - v$ diminuisce indefinitamente; dunque il volume del cono è il limite dei volumi delle piramidi iscritte e circoscritte.

Corollario. — Poichè la base del cono è il limite delle basi delle piramidi, *la superficie laterale del cono è il limite delle superficie laterali delle piramidi regolari iscritte e circoscritte.*

TEOREMA III.

La superficie laterale di un cono retto ha per misura la metà del prodotto del perimetro della sua base pel suo apotema.

Sieno S la superfice laterale e P il perimetro della base di una piramide regolare circoscritta al cono che ha per apotema A e per raggio della base R. Se il numero dei lati della base della piramide cresce indefinitamente, le variabili S e $\frac{1}{2}$ P . A hanno rispettivamente per limiti la superficie laterale del cono e

$$\frac{1}{2}\ \textit{cerchio}\ \mathrm{R}\ .\ \mathrm{II}\ ;$$

ma, poichè la superficie laterale di una piramide regolare è uguale alla metà del prodotto del perimetro della sua base pel suo apotema, le due variabili S e $\frac{1}{2}$ P . A sono costantemente eguali; dunque hanno lo stesso limite e si ha:

$$\textit{sup. lat. del cono} = \frac{1}{2}\ \textit{cer.}\ \mathrm{R}\ .\ \mathrm{A}\ .$$

Corollario I. — *La superficie laterale del cono retto ha per misura il prodotto dell' apotema per la circonferenza del parallelo che dista egualmente dal vertice e dalla base.* Giacchè il raggio di questo parallelo è la metà di quello della base.

Corollario II. — La superficie totale del cono retto ha per misura la metà del prodotto della circonferenza della sua base per la somma dell' apotema e del raggio della base.

TEOREMA IV.

Il volume di un cono retto è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Sieno V il volume e B la base di una piramide regolare circoscritta al cono di altezza H e di raggio R. Se il numero dei lati della base B cresce indefinitamente, le variabili V e $\frac{1}{3}$ B . H hanno rispettivamente per limiti il volume del cono e $\frac{1}{3}$ *cerchio* R . H; ma la piramide ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza; dunque le variabili V e $\frac{1}{3}$ B . A sono costantemente eguali e i loro limiti lo sono altresì, cioè si ha:

$$\text{cono } R = \frac{1}{3} \text{ cerchio } R . H,$$

Corollario I. — Poichè il cerchio R è uguale a πR^2, si ha:

$$\text{cono } R = \frac{1}{3} \pi R^2 . H.$$

Corollario II. — Due coni retti che hanno le altezze eguali, stanno tra loro come le basi. — Se due coni retti hanno basi eguali, stanno tra loro come le altezze.

Scolio. — Un cono retto è uguale al terzo del cilindro retto della stessa base e della stessa altezza.

TEOREMA V.

La superficie laterale di un tronco di cono retto a basi parallele ha per misura il prodotto della semi-

somma delle circonferenze delle sue basi pel suo apotema. (fig. 393.)

Sia ABED un tronco di cono, eguale alla differenza dei due coni retti SAC, SDF le cui basi AB, DE sono parallele. Per l'estremità A della generatrice SA conducete a questa retta una perpendicolare qualunque AG, eguale alla circonferenza AC della base inferiore del cono troncato; unite il punto G al vertice e pel punto D in cui la generatrice SA incontra la base superiore del cono troncato, conducete DH parallela ad AG; dico che la retta DH è uguale alla circonferenza DF.

Infatti, la retta SC essendo l'asse del cono SAC, i triangoli rettangoli SAC, SDF sono equiangoli e si ha:

$$SD : SA :: DF : AC :: cir.\ DF : cir.\ AC.$$

I triangoli rettangoli SDH, SAG sono altresì equiangoli e danno:

$$SD : SA :: DH : AG;$$

dunque

$$cir.\ DF : cir.\ AC :: DH : AG.$$

Ma la retta AG è uguale a *cir.* AC; dunque la retta DH è eziandio eguale a *cir.* DF.

La superficie laterale del cono SAC che ha per misura $\frac{1}{2}$ *cir.* AC $\times$ SA, è equivalente al triangolo rettangolo SAG che ha per misura $\frac{1}{2}$ AG $\times$ SA. Similmente la superficie laterale del cono SDF è equivalente al triangolo rettangolo SDH; dunque la superficie laterale del tronco di cono ABDE è equivalente al trapezio AGHD. Ma il trapezio ha per misura $AD \times \left(\frac{AG + DH}{2}\right)$; dunque la superficie laterale del tronco di cono ABED è uguale al prodotto del suo apotema AD per la semisomma delle circonferenze AC, DF delle sue basi.

Corollario. — Se pel mezzo K dell'apotema AD si conduce la retta KN parallela ad AG e il piano KL parallelo alle basi del tronco di cono, la linea KN è uguale alla circonferenza KL. Ma il trapezio AGHD ha per misura AD $\times$ KN; dunque *la superficie laterale di un tronco di cono retto, a basi parallele, è uguale al prodotto del suo apotema per la circonferenza del parallelo egualmente distante dalle basi.*

TEOREMA VI.

Un tronco di cono retto, a basi parallele, è equivalente a tre coni retti che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la base superiore e una media proporzionale tra queste due basi. (fig. 394.)

Sia ABFD un tronco di cono eguale alla differenza dei due coni retti SAB, SDF le cui basi sono parallele. Costruite sul piano della base inferiore del cono troncato una piramide triangolare GHLK la cui base HLK sia equivalente al cerchio AC e l'altezza GR eguale all'altezza SC del cono SAB. Il piano della base superiore del tronco di cono determina nella piramide una sezione MNO equivalente al cerchio DE. Infatti,

$$\textit{cerchio}\ AC : \textit{cerchio}\ DE :: AC^2 : DE^2 :: SC^2 : SE^2$$

e

$$HKL : MNO :: GR^2 : GP^2.$$

Ora si ha $GR = SC$, $GP = SE$; dunque

$$\textit{cerchio}\ AC : \textit{cerchio}\ DE :: HKL : MNO.$$

Ma per ipotesi il triangolo HKL è equivalente al cerchio AC; dunque il triangolo MNO è altresì equivalente al cerchio DE.

Il cono SAC che ha per misura $\frac{1}{3}$ *cerchio* AC $\times$ SC è equivalente alla piramide GHLK misurata da $\frac{1}{3}$ HKL $\times$ GR. Parimenti, il cono SDE e la piramide GMNO sono equivalenti; dunque il tronco di cono è equivalente al tronco di piramide. Ma il tronco di piramide ha per misura

$$\frac{1}{3}\,PR\,(HKL + MNO + \sqrt{HKL \times MNO}\,)$$

dunque il volume del tronco di cono è uguale a

$$\frac{1}{3}CE(\textit{cerchio}\,AC + \textit{cerchio}\,DE + \sqrt{\textit{cerchio}\,AC \times \textit{cerchio}\,DE}),$$

ovvero è uguale alla somma dei volumi di tre coni che hanno per altezza quella del tronco e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore e una media proporzionale tra queste due basi.

COROLLARIO. — Sieno R e r i raggi delle basi del tronco di cono, h la sua altezza e V il suo volume; si ha:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

TEOREMA VII.

1°. *Le superficie laterali di due coni simili stanno tra loro come i quadrati dei raggi delle loro basi.*

2°. *I volumi di questi coni stanno tra loro come i cubi dei medesimi raggi.*

Dimostrazione analoga a quella del teorema VI del capitolo precedente.

Corollario. — Le superficie totali di due coni simili sono altresì tra loro come i quadrati dei raggi delle basi.

CAPITOLO III.

Superficie e volume generati da un poligono regolare che gira attorno ad un diametro.

Si chiama *linea poligonale regolare* una linea spezzata, piana e convessa, che ha i lati eguali e gli angoli eguali.

Qualunque linea poligonale regolare è iscrittibile o circoscrittibile come il perimetro di un poligono regolare, con la sola differenza che il suo angolo al centro non è generalmente una parte aliquota di quattro angoli retti.

Una linea poligonale regolare ha un *centro*, un *raggio* e un *apotema* che sono il centro e i raggi delle circonferenze circoscritta e iscritta.

La porzione del piano compresa tra una linea poligonale regolare e i due raggi estremi di questa linea è un *settore poligonale regolare.*

TEOREMA I.

Se due rette, una delle quali AB *è limitata e l'altra xy indefinita, sono situate in uno stesso piano, e che* AB *sia tutta da una stessa parte di xy, la superficie di rivoluzione, generata dalla retta* AB *che gira attorno all'asse xy, ha per misura la metà del prodotto* *di* AB *per la circonferenza del parallelo che descrive il mezzo* **M** *di questa retta.*

La retta AB può avere tre differenti posizioni rispetto all'asse xy.

1°. Supponiamo AB parallela ad xy *(fig. 395)*; in questa posizione, essa genera la superficie laterale di un cilindro di rivoluzione, e si ha:

$$sup.\ AB = AB \times cir.\ MO.$$

2°. Se la retta AB non è parallela all'asse e non ha alcun punto comune con esso *(fig. 396)*, genera la superficie laterale di un tronco di cono retto, a basi parallele, e si ha ancora:

$$sup.\ AB = AB \times cir.\ MO.$$

3°. Se la linea AB ha una delle sue estremità sull'asse xy, genera la superficie laterale di un cono retto; dunque

$$sup.\ AB = AB \times cir.\ MO.$$

Scolio. — Se pel punto M conduciamo MD *(fig. 396 e 397)* perpendicolare ad AB, ed AC parallela ad xy, è chiaro chè avremo $AB \times cir.\ MO = AC \times cir.\ MD$; quindi il teorema precedente può enunciarsi nel seguente modo:

La superficie di rivoluzione, descritta da una retta AB *che gira intorno ad un asse* xy *che non la taglia, ha per misura il prodotto della proiezione* AC *di* AB *sull' asse per la circonferenza che ha per raggio la perpendicolare* MD *condotta alla retta* AB *e dal suo mezzo sino all' incontro dell' asse.*

TEOREMA II.

La superficie di rivoluzione generata da una linea poligonale regolare BCDE *che gira attorno ad un diametro* xy *che non la taglia, ha per misura il prodotto della circonferenza iscritta per la proiezione* KP *della linea poligonale sull' asse* xy. *(fig. 398.)*

Sieno O il centro e OG il raggio della circonferenza iscritta nella linea poligonale BCDE. La superficie generata da BCDE che gira attorno al diametro xy è uguale alla somma delle superficie di rivoluzione generate dalle rette BC, CD, DE. Ma se dai punti B, C, D, E si conducono le perpendicolari BK, CL, DN, EP ad xy, si ha

$$\begin{aligned} sup.\,\mathrm{BC} &= \mathrm{KL} \times cir.\,\mathrm{GO}\,, \\ sup.\,\mathrm{CD} &= \mathrm{LN} \times cir.\,\mathrm{GO}\,, \\ sup.\,\mathrm{DE} &= \mathrm{NP} \times cir.\,\mathrm{GO}\,; \end{aligned}$$

dunque, se sommiamo quest'eguaglianze membro a membro, avremo

$$sup.\mathrm{BCDE} = (\mathrm{KL} + \mathrm{LN} + \mathrm{NP}) \times cir.\mathrm{GO} = \mathrm{KP} \times cir.\mathrm{GO}.$$

Corollario. — Se la linea poligonale regolare data è il semiperimetro ABCF di un poligono regolare di un numero pari di lati, e che l'asse xy passi per due vertici opposti A e F, la proiezione di questa linea sull'asse è uguale al diametro AF del cerchio circoscritto. Dunque la superficie di rivoluzione generata dal semiperimetro del poligono regolare ABCF ha per misura il prodotto della circonferenza iscritta pel diametro della circonferenza circoscritta a questo poligono.

TEOREMA III.

Il volume generato dalla rivoluzione di un triangolo ABC *che gira attorno all' asse* xy, *condotto nel suo piano da uno dei suoi vertici* A, *ha per misura il prodotto della superficie di rivoluzione descritta dal lato* BC *opposto al vertice* A, *pel terzo dell' altezza* AD *corrispondente a questo lato.*

Il triangolo ABC può avere tre posizioni differenti rispetto all' asse xy ch' è esterno ad esso.

1°. Supponiamo il lato AB situato sull'asse *(fig. 399)* e conduciamo la retta CE perpendicolare ad xy. Il volume generato dalla rivoluzione del triangolo ABC è uguale alla somma o alla differenza dei volumi dei coni retti generati dai triangoli rettangoli ACE, BCE; ora, si ha:

$$vol.\,\mathrm{ACE} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{CE}^2 \times \mathrm{AE},$$

$$vol.\,\mathrm{BCE} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{CE}^2 \times \mathrm{BE},$$

dunque

$$vol.\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{CE}^2 \times \mathrm{AB}.$$

Poichè i due rettangoli $\mathrm{CE} \times \mathrm{AB}$ e $\mathrm{BC} \times \mathrm{AD}$, che equivalgono al doppio del triangolo ABC, sono eguali, si ha altresì:

$$vol.\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{CE} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AD};$$

ma la superficie di rivoluzione generata dalla retta BC ha per misura $\pi CE \times BC$; dunque

$$vol.\ ABC = sup.\ BC \times \frac{1}{3} AD.$$

2°. Se il lato AB non coincide con l'asse xy *(fig. 400)*, e che la base BC prolungata incontri l'asse nel punto F, il triangolo ABC è uguale alla differenza dei triangoli ACF, ABF; ora si ha:

$$vol.\ ACF = sup.\ CF \times \frac{1}{3} AD$$

$$vol.\ ABF = sup.\ BF \times \frac{1}{3} AD;$$

dunque

$$vol.\ ABC = sup.\ BC \times \frac{1}{3} AD.$$

3°. Se il lato BC è parallelo all'asse *(fig. 401)*, conduciamo le rette BH, CG perpendicolari ad xy; il cono retto generato dal triangolo rettangolo ABH è uguale al terzo del cilindro retto generato dal rettangolo ADBH; dunque il triangolo ABD genera un volume eguale ai due terzi del cilindro retto ADBH. Parimente il volume generato da ACD è uguale ai due terzi del cilindro retto ADCG; per conseguenza il volume predetto dalla rotazione del triangolo ABC è uguale ai due terzi del cilindro generato dal rettangolo BCGH, cioè che si ha:

$$vol.\ ABC = \frac{2}{3} \pi AD^2 \times BC;$$

ma la superficie di rivoluzione descritta da BC è uguale a *cir.* $AD \times BC$ o a $2\pi AD \times BC$; dunque

$$vol.\ ABC = sup.\ BC \times \frac{1}{3} AD.$$

Corollario. — Se il triangolo ABC è isoscele *(fig. 402)*, conducendo le rette CM, BN perpendicolari all' asse xy e l' altezza AD del triangolo, avremo.

$$sup.\ \mathrm{BC} = \mathrm{MN} \times cir.\ \mathrm{AD};$$

dunque

$$vol.\ \mathrm{ABC} = \frac{2}{3}\pi \mathrm{AD}^2 \times \mathrm{MN}.$$

Quindi, *il volume generato dalla rivoluzione di un triangolo isoscele che gira attorno ad un asse condotto pel suo vertice, è uguale ai due terzi del prodotto della proiezione della sua base sull' asse pel cerchio che ha per raggio l' altezza del triangolo.*

TEOREMA IV.

Il volume generato dalla rotazione di un settore poligonale regolare OBCDE, *che gira attorno ad un diametro* xy *esterno ad esso, ha per misura il prodotto della superficie di rivoluzione descritta dal perimetro del settore poligonale, moltiplicato pel terzo del raggio del cerchio iscritto. (fig. 403.)*

Sieno O il centro e OG il raggio del cerchio iscritto nella linea poligonale regolare BCDE. Il volume generato dal settore poligonale OBCDE è uguale alla somma dei volumi generati dai triangoli OBC, OCD, ODE. Ma è noto che

$$vol.\ \mathrm{OBC} = sup.\ \mathrm{BC} \times \frac{1}{3}\mathrm{OG},$$

$$vol.\ \mathrm{OCD} = sup.\ \mathrm{CD} \times \frac{1}{3}\mathrm{OG},$$

$$vol.\ \mathrm{ODE} = sup.\ \mathrm{DE} \times \frac{1}{3}\mathrm{OG};$$

dunque, sommaando quest'eguaglianze membro a membro, si ha:

$$vol.\ \mathrm{OBCDE} = (sup.\,\mathrm{BC} + sup.\,\mathrm{CD} + sup.\,\mathrm{DE}) \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OG},$$

ovvero

$$vol.\ \mathrm{OBCDE} = sup.\ \mathrm{BCDE} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OG}.$$

Corollario I. — Se conduciamo pei punti B ed E le rette BL, EM perpendicolari all' asse xy, si ha:

$$sup.\ \mathrm{BCDE} = \mathrm{LM} \times cir.\ \mathrm{OG};$$

dunque

$$vol.\ \mathrm{OBCDE} = \frac{2}{3}\,\pi\,\mathrm{OG}^2 \times \mathrm{LM},$$

cioè, *il volume generato da un settore poligonale regolare che gira attorno ad un diametro è uguale ai due terzi del prodotto della proiezione della linea poligonale regolare per l' area del cerchio iscritto in questa linea.*

Corollario II. — Se il settore poligonale dato è un semipoligono regolare ABCF di un numero pari di lati, e se l' asse xy passa per due vertici opposti, il volume che esso genera è uguale alla superficie di rivoluzione descritta dal semiperimetro ABCF moltiplicato pel terzo del raggio OG del cerchio iscritto.

Questo volume è altresì eguale ai due terzi del prodotto del cerchio iscritto pel diametro del cerchio circoscritto.

CAPITOLO IV.

Sfera.

1. — Si chiama *fuso* la porzione della superficie di una sfera compresa tra due semicirconferenze di circoli massimi terminati allo stesso diametro.

L' angolo di queste due circonferenze prende il nome di *angolo del fuso.*

Nella stessa sfera o in sfere eguali due fusi sono eguali se hanno angoli eguali.

2. — *Unghia sferica* è la parte di sfera compresa tra due semicircoli massimi terminati allo stesso diametro.

L' angolo dei piani di questi due cerchi è l' *angolo* dell' unghia sferica, e il fuso che lo termina le serve di *base.*

Nella stessa sfera o in sfere eguali due unghie sono eguali quando hanno angoli eguali.

3. — *Segmento sferico* è la porzione di sfera compresa tra due piani paralleli; esso ha per *basi* i due cerchi che lo terminano, e per *altezza* la minor distanza delle sue basi.

Se uno dei due piani paralleli è tangente alla sfera, il segmento sferico corrispondente ha una sola base.

4. — Il volume generato del settore circolare DCE *(fig. 404)* che gira attorno al diametro AB ad esso esterno ha ricevuto il nome di *settore sferico;* ed ha per *base* la zona descritta dall' arco DE del settore circolare.

5. — Un poliedro è circoscritto ad una sfera, quando

ciascuna delle sue facce è tangente alla sfera. — Reciprocamente la sfera è *iscritta* nel poliedro.

Al contrario, un poliedro è iscritto in una sfera, quando tutti i suoi vertici sono situati sulla superficie della sfera che è allora *circoscritta* al poliedro.

6. — Un cilindro o un cono è circoscritto ad una sfera quando la sua superficie laterale e le sue basi sono tangenti alla sfera.

Se l'apotema di un cono retto è uguale al diametro della sua base, qualunque sezione fatta nel cono da un piano che contiene l'asse è un triangolo equilatero; si dice allora che il cono è *equilatero*.

Un cono equilatero circoscritto ad una sfera ha per apotema il lato del triangolo equilatero circoscritto a un cerchio massimo della sfera.

TEOREMA I.

Una zona ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo massimo della sfera. (fig. 405.)

1°. Consideriamo la zona ad una base generata dall'arco di cerchio AD che gira attorno al diametro AM.

Iscriviamo nell'arco AD la linea poligonale regolare ABCD e circoscriviamo allo stesso arco una linea poligonale FGHK simile ad ABCD. La superficie generata dalla linea FGHKD, che gira attorno ad AM, è maggiore della zona AD, perchè essa è terminata allo stesso contorno e l'inviluppa; ma la superficie generata dalla linea ABCD è minore della zona. Se si raddoppia il numero dei lati dei poligoni iscritto e circoscritto, la superficie FGHKD diminuisce mentre la superficie ABCD aumenta, e dico che la zona è il limite di queste superficie.

Infatti, indichiamole con S e s; abbiamo:

$$s = \mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OI}$$

$$\mathrm{S} = sup.\ \mathrm{FGHK} + sup.\ \mathrm{KD}.$$

Ma la superficie generata dalla linea poligonale regolare FGHK ha per misura $\mathrm{FL} \times cir.\ \mathrm{OA}$; dunque

$$\mathrm{S} = \mathrm{FL} \times cir.\ \mathrm{OA} + sup.\ \mathrm{KD},$$

e

$$\mathrm{S} - s = \mathrm{FL} \times cir.\ \mathrm{OA} - \mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OI} + sup.\ \mathrm{KD}.$$

Diminuiamo e aumentiamo simultaneamente del prodotto $\mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OA}$ il secondo membro dell' ultima eguaglianza, avremo:

$$\mathrm{S} - s = (\mathrm{FL} - \mathrm{AE})\, cir.\ \mathrm{OA} + (cir. \mathrm{OA} - cir. \mathrm{OI})\, \mathrm{AE} + sup.\ \mathrm{KD}.$$

Supponiamo ora che si raddoppi indefinitamente il numero dei lati delle linee poligonali iscritta e circoscritta; le variabili $\mathrm{FL} - \mathrm{AE}$ e $cir.\ \mathrm{OA} - cir.\ \mathrm{OI}$ hanno per limite zero. Accade lo stesso della superficie laterale del tronco di cono generato da KDEL, perchè il punto K si avvicina indefinitamente al punto D. Dunque la variabile $\mathrm{S} - s$ tende verso zero e la zona AD è il limite delle superficie S e s.

Osserviamo finalmente che le due variabili s e $\mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OI}$, che hanno per limiti la zona AD e il prodotto $\mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OA}$, sono costantemente eguali; dunque i loro limiti lo sono altresì, cioè si ha:

$$zona\ \mathrm{AD} = \mathrm{AE} \times cir.\ \mathrm{OA}.$$

2°. Abbiasi la zona a due basi descritta dall'arco BD che gira attorno al diametro AM; avremo:

$$zona\ AD = AE \times cir.\ OA$$
$$zona\ AB = AN \times cir.\ OA;$$

dunque

$$zona\ BD = (AE - AN)\ cir.\ OA = NE \times cir.\ OA.$$

SCOLIO. — Le superficie generate dalle linee FGHKD, FGHK, che girano attorno al diametro AM, tendono verso lo stesso limite quando si raddoppia indefinitamente il numero dei lati della linea FGHK. Giacchè la differenza di queste superficie è uguale a *sup.* DK che ha per limite zero.

TEOREMA II.

La superficie di una sfera CA *ha per misura il prodotto del suo diametro* AG *per la circonferenza di un circolo massimo. (fig. 406.)*

Infatti, se tagliamo la sfera con un piano BE perpendicolare al diametro AG, si ha:

$$sup.\ sfe.\ CA = zona\ AB + zona\ BG;$$

dunque

$$sup.\ sfe.\ CA = AE \times cir.\ CA + EG \times cir.\ CA,$$

ovvero

$$sup.\ sfe.\ CA = AG \times cir.\ CA.$$

COROLLARIO. — *La superficie della sfera è uguale a quattro volte l' area di un circolo massimo.*

Giacchè un circolo massimo ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio o pel quarto del diametro.

SCOLIO. — Sieno R il raggio, D il diametro e S la superficie di una sfera; si ha:

$$S = 4\pi R^2, \text{ ovvero } S = \pi D^2.$$

Il triangolo sferico trirettangolo, che è uguale all'ottavo della superficie della sfera, ha per misura $\frac{1}{2}\pi R^2$ o $\frac{1}{8}\pi D^2$.

TEOREMA III.

Il rapporto di un fuso alla sfera è uguale al rapporto dell'arco di circolo massimo che misura l'angolo del fuso all'arco della circonferenza di un circolo massimo. (fig. 407.)

Abbiasi il fuso ABDE determinato sulla sfera CA dai due semicircoli massimi BAD, BED. Conducete il circolo massimo CA perpendicolare al diametro BD, e supponete prima che la circonferenza CA e l'arco AE che misura l'angolo del fuso sieno commensurabili. Se la loro comune misura è contenuta 16 volte nella circonferenza CA e 3 volte nell'arco AE, si ha:

$$\textit{arco}\ \mathrm{AE} : \textit{cir.}\ \mathrm{CA} :: 3 : 16.$$

Pel diametro BD e per ciascuno dei punti di divisione della circonferenza CA, conducete dei piani che divideranno la superficie della sfera in 16 fusi eguali perchè hanno angoli eguali; ma il fuso ABDE ne contiene 3 esattamente, dunque

$$\textit{fuso}\ \mathrm{ABDE} : \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA} :: 3 : 16,$$

e quindi

$$\textit{fuso}\ \mathrm{ABDE} : \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA} :: \textit{arco}\ \mathrm{AE} : \textit{cir.}\ \mathrm{CA}.$$

Se l' arco AE e la circonferenza CA non hanno comune misura, il teorema si dimostra col ragionamento consueto.

Corollario I.—*L' area di un fuso* ABDE *è uguale al prodotto del diametro della sfera per l' arco di circolo massimo* AE *che misura l' angolo del fuso.*

Moltiplichiamo pel diametro BD i due termini del secondo rapporto della proporzione

$$\textit{fuso}\ \mathrm{ABDE} : \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA} :: \textit{arco}\ \mathrm{AE} : \textit{cir.}\ \mathrm{CA}.$$

Poichè la superficie della sfera è uguale al prodotto $\mathrm{BD} \times$ *cir.* CA, avremo:

$$\textit{fuso}\ \mathrm{ABDE} = \mathrm{BD} \times \textit{arco}\ \mathrm{AE}.$$

Corollario II. — *Il rapporto di un fuso al triangolo sferico trirettangolo è uguale al rapporto del doppio del suo angolo all' angolo retto.*

Sieno R il raggio della sfera, A il rapporto dell'angolo del fuso all' angolo retto, e T l' area del triangolo sferico trirettangolo. L' arco di cerchio massimo che misura l' angolo del fuso essendo eguale a $\frac{\pi R}{2} \,.\, A$, abbiamo:

$$\textit{fuso}\ \mathrm{A} = \pi R^2 \,.\, A.$$

Ma il triangolo trirettangolo T è uguale a $\frac{\pi R^2}{2}$; dunque

$$\frac{\textit{fuso}\ \mathrm{A}}{\mathrm{T}} = 2A\,.$$

TEOREMA IV.

Due triangoli sferici simmetrici ABC, A'B'C', *sono equivalenti. (fig. 408)*

Determinate il polo P del circolo minore circoscritto al triangolo ABC; unitelo ai vertici A, B e C con gli archi di circoli massimi PA, PB, PC; il triangolo ABC è decomposto in tre triangoli PAB, PAC, PBC, che sono isosceli, poichè il polo P è ugualmente distante dai tre punti A, B e C.

Conducete il diametro POP′ e unite la sua estremità P′ ai vertici del triangolo A′B′C′ con gli archi di cerchi massimi P′A′, P′B′, P′C′. Questo triangolo è decomposto in tre triangoli P′A′B′, P′A′C′, P′B′C′ che sono rispettivamente eguali ai triangoli PAB, PAC, PBC; infatti, PAB è uguale al suo simmetrico P′A′B′ perchè è isoscele; parimenti, PAC è uguale a P′A′C′, e PBC a P′B′C′. Dunque i triangoli ABC, A′B′C′ sono equivalenti.

Scolio. — Si farebbe una dimostrazione analoga alla precedente, se il polo P fosse situato sul lato maggiore del triangolo ABC o all' esterno del triangolo.

Corollario. — *Due triangoli sferici* ACB, ECF *che hanno un angolo opposto al vertice e i cui lati* AB, EF, *opposti a quest' angolo, sono situati sulla stessa circonferenza di circolo massimo, formano insieme il fuso di cui l' angolo è* ACB. *(fig. 409.)*

Infatti, i triangoli sferici ECF, ABD sono equivalenti perchè simmetrici; dunque si ha:

$$\text{ABC} + \text{ECF} = \textit{fuso}\ \text{ABCD}.$$

TEOREMA V.

L' area di un triangolo sferico è uguale al prodotto del raggio della sfera per l' arco di circolo massimo che misura la somma dei suoi angoli, diminuito di due angoli retti. (fig. 410.)

Abbiasi il triangolo sferico ABC; prolunghiamo i lati BC, AC sino all' incontro della circonferenza AB, avremo:

$$ABC + BCD = \textit{fuso } A,$$
$$ABC + ACE = \textit{fuso } B,$$
$$ABC + CDE = \textit{fuso } C.$$

Sommiamo quest' eguaglianze membro a membro; la somma dei triangoli ABC, BCD, ACE, CDE essendo uguale alla superficie di una semisfera, troveremo:

$$2ABC + \frac{1}{2}\textit{ sup. sfe.} = \textit{fuso } A + \textit{fuso } B + \textit{fuso } C,$$

ovvero

$$ABC = \frac{1}{2}(\textit{fuso } A + \textit{fuso } B + \textit{fuso } C) - \frac{1}{4}\textit{ sup. sfe.}$$

Indichiamo con R il raggio della sfera e con a, b, c gli archi di circoli massimi che misurano gli angoli del triangolo sferico ABC; abbiamo:

$$\textit{fuso } A = 2R \,.\, a,$$
$$\textit{fuso } B = 2R \,.\, b,$$
$$\textit{fuso } C = 2R \,.\, c,$$

e

$$\textit{sup. sfe. } R = 2R \times \textit{cir. } R;$$

dunque

$$ABC = R\left(a + b + c - \frac{\textit{cir. } R}{2}\right).$$

Corollario. — *L' area di un triangolo sferico qualunque* ABC *sta a quella del triangolo trirettangolo come la somma degli angoli del triangolo* ABC, *diminuita di due angoli retti, sta all' angolo retto.*

Sieno A, B, C i rapporti degli angoli del triangolo

ABC all' angolo retto; abbiamo;

$$a+b+c=\frac{\pi R}{2}(A+B+C),$$

e

$$\frac{cir.\,R}{2}=\pi R.$$

Sostituiamo questi valori di $a+b+c$ e di $\frac{cir.\,R}{2}$ nell'espressione dell'area del triangolo ABC; troveremo:

$$ABC=\frac{\pi R^2}{2}(A+B+C-2).$$

Ma l' area T del triangolo trirettangolo è uguale a $\frac{\pi R^2}{2}$; dunque

$$\frac{ABC}{T}=A+B+C-2.$$

SCOLIO. — Il numero $A+B+C-2$ è chiamato *eccesso sferico* del triangolo ABC. Esso esprime l' area di questo triangolo, quando si prende per unità di superficie il triangolo sferico trirettangolo.

TEOREMA VI.

L'area di un poligono sferico ABCDE *è uguale al prodotto del raggio della sfera per l' arco di circolo massimo che misura la somma dei suoi angoli, diminuita di tante volte due angoli retti quanti lati vi sono nel poligono meno due. (fig. 411.)*

Conducete gli archi di circoli massimi AC, AD che decompongono il poligono sferico in tanti triangoli quanti lati vi sono meno due. L' area di ciascun triangolo è uguale al prodotto del raggio della sfera per l' arco di circolo massimo che misura la somma dei suoi angoli diminuita di due angoli retti; inoltre, la somma degli angoli di tutti i triangoli ABC, ACD, ADE è uguale a quella degli angoli del poligono; dunque l' area del poligono è uguale al prodotto del raggio della sfera per l' arco di circolo massimo che misura la somma dei suoi angoli, diminuita di tante volte due angoli retti quanti lati vi sono nel poligono meno due.

COROLLARIO. — *L' area di un poligono sferico sta a quella del triangolo trirettangolo come la somma degli angoli di questo poligono, diminuita di tante volte due angoli retti quanti lati vi sono meno due, sta all' angolo retto.*

Sieno R il raggio della sfera, S l' area del poligono sferico, n il numero dei suoi lati e A il rapporto della somma dei suoi angoli all' angolo retto; l' arco di cerchio massimo che misura la somma degli angoli del poligono essendo eguale a $\frac{\pi R}{2}.A$, si ha:

$$S = R\left[\frac{\pi R}{2}.A - \pi R(n-2)\right],$$

ovvero

$$S = \frac{\pi R^2}{2}\left[A - 2(n-2)\right].$$

Ma l' area T del triangolo trirettangolo è uguale a $\frac{\pi R^2}{2}$; dunque si ha:

$$\frac{S}{T} = A - 2(n-2)$$

Scolio. — Il numero $A-2(n-2)$, cioè l' *eccesso sferico* del *poligono* S, esprime l' area di questo poligono quando si prende il triangolo sferico trirettangolo per unità di superficie.

TEOREMA VII.

Il volume di un settore sferico è uguale al prodotto della zona che gli serve di base, pel terzo del raggio della sfera. (fig. 412.)

1°. Consideriamo il settore sferico generato dal settore circolare OAD che gira attorno al diametro AE.

Iscriviamo nell' arco AD la linea poligonale regolare ABCD e circoscriviamo allo stesso arco una linea poligonale FGHK simile ad ABCD. Il volume generato dal settore poligonale OFGHK è maggiore del settore sferico poichè l' inviluppa da tutte le parti; ma il volume generato dal settore poligonale OABCD è minore del settore sferico. Se si raddoppia il numero dei lati dei poligoni iscritto e circoscritto, il volume OFGHK diminuisce mentre il volume ABCDO aumenta, e dico che il settore sferico è il limite di questi volumi.

Infatti, indichiamo con V e v questi volumi e con S e s le superficie generate dai poligoni FGHK, ABCD; avremo:

$$V = S \cdot \frac{1}{3} OA$$

$$v = s \cdot \frac{1}{3} OL,$$

e per conseguenza,

$$V - v = S \cdot \frac{1}{3} OA - s \cdot \frac{1}{3} OL.$$

Diminuendo e aumentando simultaneamente il secondo membro di questa eguaglianza del prodotto $s . \times \frac{1}{3}$ OA, avremo:

$$V - v = (S - s)\frac{1}{3} OA + \frac{1}{3}(OA - OL)\, s,$$

Supponiamo ora che si raddoppi indefinitamente il numero dei lati delle linee poligonali iscritta e circoscritta, le variabili $S - s$ e $OA - OL$ hanno per limite zero; dunque la differenza $V - v$ tende indefinitamente verso zero, e il settore sferico OAD è il limite delle variabili V e v.

Osserviamo finalmente che le due variabili V e $S . \frac{1}{3}$ OA, che hanno per limite il settore sferico OAD e il prodotto *zona* AD $\times \frac{1}{3}$ OA, sono costantemente eguali; dunque i loro limiti lo sono altresì, cioè si ha:

$$\textit{sett. sfe. } OAD = \textit{zona } AD \times \frac{1}{3} OA.$$

2°. Sia il settore sferico generato dal settore circolare OMD che gira attorno al diametro AE; abbiamo

$$\textit{sett. sfe. } OAD = \textit{zona } AD \times \frac{1}{3} OA,$$

$$\textit{sett. sfe. } OAM = \textit{zona } AM \times \frac{1}{3} OA,$$

dunque

$$\textit{sett. sfe. } OMD = (\textit{zona } AD - \textit{zona } AM) \times \frac{1}{3} OA = \textit{zona } MD \times \frac{1}{3} OA.$$

Corollario. — Sieno R il ragggio della sfera e II l' altezza della zona che serve di base al settore sferico; si ha

$$zona\ H = 2\pi R \,.\, H$$

e

$$sett.\ sfe.\ H = \frac{2}{3}\pi R^2 \,.\, H.$$

TEOREMA VIII.

Il volume della sfera è uguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio. (fig. 413.)

Infatti, se tagliamo la sfera con un piano BE perpendicolare al diametro AD, si ha:

$$sfera\ CA = sett.\ sfe.\ CAB + sett.\ sfe.\ CBD;$$

dunque

$$sfera\ CA = zona\ AB \times \frac{1}{3}CA + zona\ BD \times \frac{1}{3}CA,$$

ovvero

$$sfera\ CA = sup.\ sfe.\ CA \times \frac{1}{3}CA.$$

Corollario — Indicando con R il raggio di una sfera, con D il suo diametro e con V il suo volume, si ha:

$$V = 4\pi R^2 \,.\, \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

ovvero

$$V = \pi D^2 \,.\, \frac{D}{6} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Scolio. — La piramide sferica trirettangola che è uguale all' ottavo della sfera ha per misura $\frac{1}{6}\pi R^3$ o $\frac{1}{48}\pi D^3$.

TEOREMA IX.

Il rapporto di un' unghia sferica alla sfera è uguale al rapporto dell' arco di circolo massimo che misura il suo angolo, alla circonferenza di un circolo massimo.

Dimostrazione analoga a quella del teorema II,

COROLLARIO. — *Il volume di un' unghia sferica* DABE *è uguale al prodotto del fuso che le serve di base pel terzo del raggio. (fig. 414.)*

Infatti, si ha:

$$\textit{unghia}\ \mathrm{DAE} : \textit{sfera}\ \mathrm{CA} :: \textit{arco}\ \mathrm{DE} : \textit{cir.}\ \mathrm{CD};$$

ma

$$\textit{fuso}\ \mathrm{DAE} : \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA} :: \textit{arco}\ \mathrm{DE} : \textit{cir.}\ \mathrm{CD},$$

e per conseguenza

$$\textit{unghia}\ \mathrm{DAE} : \textit{sfera}\ \mathrm{CA} :: \textit{fuso}\ \mathrm{DAE} : \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA}.$$

Moltiplicando i due termini dell' ultimo rapporto di questa proporzione per $\frac{1}{3}$ CA e osservando che si ha:

$$\textit{sfera}\ \mathrm{CA} = \textit{sup. sfe.}\ \mathrm{CA} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{CA},$$

si trova:

$$\textit{unghia}\ \mathrm{DAE} = \textit{fuso}\ \mathrm{DAE} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{CA}.$$

SCOLIO. — *Il rapporto di un' unghia alla piramide sferica trirettangola è uguale al rapporto del doppio del suo angolo all' angolo retto.*

Sieno R il raggio della sfera, A il rapporto dell' angolo dell' unghia all' angolo retto e P il volume della piramide trirettangola; si ha:

$$\textit{fuso}\ A = \pi R^2 . A\,;$$

$$\textit{unghia}\ A = \frac{1}{3} \pi R^3 . A\,.$$

Ma la piramide sferica trirettangola P è uguale a $\frac{1}{6} \pi R^3$; dunque si ha:

$$\frac{\textit{unghia}\ A}{P} = 2A\,.$$

TEOREMA X.

Due piramidi sferiche triangolari e simmetriche sono equivalenti.

Dimostrazione analoga a quella del teorema III. A ciascun triangolo sferico si sostituirà la piramide sferica corrispondente.

Corollario. — Due piramidi sferiche triangolari OABC, OBEF *(fig. 415.)* che hanno un angolo diedro opposto e le cui due facce AOC, EOF fanno parte dello stesso piano, formano insieme l' unghia ABDC di cui l' angolo è ABC.

Giacchè la piramide OBEF è equivalente alla piramide OACD perchè sono simmetriche.

TEOREMA XI.

Il volume di una piramide sferica triangolare OABC *è uguale al prodotto della sua base* ABC *pel terzo del raggio* OA *della sfera. (fig. 416.)*

I piani delle facce AOC, BOC dividono l' emisfero

ABCD in quattro piramidi sferiche triangolari OABC, OACD, OCDE, OBCE, e si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{OABC} + \mathrm{OBCE} &= \textit{unghia}\ \mathrm{A} \\ \mathrm{OABC} + \mathrm{OACD} &= \textit{unghia}\ \mathrm{B} \\ \mathrm{OABC} + \mathrm{OCDE} &= \textit{unghia}\ \mathrm{C}. \end{aligned}$$

Sommando quest' eguaglianze membro a membro e riducendo, si trova:

$$2\mathrm{OABC} + \frac{1}{2}\,\textit{sfera} = \textit{unghia}\ \mathrm{A} + \textit{unghia}\ \mathrm{B} + \textit{unghia}\ \mathrm{C},$$

e per conseguenza,

$$\mathrm{OABC} = \frac{1}{2}(\textit{unghia}\ \mathrm{A} + \textit{unghia}\ \mathrm{B} + \textit{unghia}\ \mathrm{C}) - \frac{1}{4}\,\textit{sfera}.$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned} \textit{unghia}\ \mathrm{A} &= \textit{fuso}\ \mathrm{A} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA}, \\ \textit{unghia}\ \mathrm{B} &= \textit{fuso}\ \mathrm{B} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA}, \\ \textit{unghia}\ \mathrm{C} &= \textit{fuso}\ \mathrm{C} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA}, \\ \textit{sfera}\ \mathrm{OA} &= \textit{sup. sfe.} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA}; \end{aligned}$$

dunque

$$\mathrm{OABC} = \left(\frac{\textit{fuso}\ \mathrm{A} + \textit{fuso}\ \mathrm{B} + \textit{fuso}\ \mathrm{C}}{2} - \frac{1}{4}\,\textit{sup. sfe.}\right) \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA},$$

ovvero

$$\mathrm{OABC} = \textit{tri.}\ \mathrm{ABC} \times \frac{1}{3}\,\mathrm{OA}.$$

Corollario. — *Il volume di una piramide sferica* OABC *sta a quello della piramide trirettangola* *come la somma degli angoli della piramide* OABC, *diminuita di due angoli diedri retti, sta all' angolo diedro retto.*

Sieno A, B, C i rapporti degli angoli della piramide OABC all' angolo retto e R il raggio della sfera; si ha:

$$tri.\ ABC = \frac{\pi R^2}{2}(A + B + C - 2),$$

e per conseguenza,

$$pir.\ OABC = \frac{\pi R^3}{6}(A + B + C - 2);$$

ma il volume V della piramide sferica trirettangola è uguale a $\frac{\pi R^3}{6}$; dunque si ha:

$$\frac{pir.\ OABC}{V} = A + B + C - 2.$$

SCOLIO. — Se si prende la piramide trirettangola per unità di volume, il numero $A + B + C - 2$ esprime la misura della piramide OABC.

TEOREMA XII.

Il volume di una piramide poligonale sferica OABCDE *è uguale al prodotto della sua base* ABCDE *pel terzo del raggio della sfera. (fig. 417.)*

Conducete i circoli massimi OEB, OEC; essi decompongono la piramide poligonale OABCDE in piramidi triangolari che hanno per basi i differenti triangoli nei quali il poligono ABCDE è diviso dagli archi EB, EC. Ciascuna piramide triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio della sfera; dunque il volume della piramide poligonale OABCDE è uguale al prodotto della somma delle basi delle piramidi triangolari pel terzo del raggio, cioè eguale al prodotto della sua base pel terzo del raggio.

Corollario. — *Il volume di una piramide poligonale* OABCDE *sta a quello della piramide trirettangola come la somma degli angoli diedri della piramide poligonale, diminuita di tante volte due angoli diedri retti quanti lati ha la sua base meno due, sta all' angolo diedro retto.*

Sieno R il raggio della sfera, n il numero delle facce laterali della piramide e A il rapporto della somma dei suoi angoli diedri all' angolo diedro retto; si ha:

$$\textit{polig.}\ \mathrm{ABCDE} = \frac{\pi R^2}{2}\Big[A - 2(n-2)\Big],$$

e per conseguenza

$$\mathrm{OABCDE} = \frac{\pi R^3}{6}\Big[A - 2(n-2)\Big].$$

Ma il volume V della piramide trirettangola è uguale a $\frac{\pi R^3}{6}$; dunque

$$\frac{\mathrm{OABCDE}}{V} = A - 2(n-2).$$

Scolio. — Se si prende la piramide sferica trirettangola per unità di volume, il numero $A-2(n-2)$ esprime la misura della piramide OABCDE.

Corollario. — Nella stessa sfera o in sfere eguali, il rapporto di due piramidi sferiche è uguale a quello delle loro basi.

TEOREMA XIII.

Il volume generato da un segmento circolare BMD, *che gira attorno ad un diametro* AH *esterno ad esso, è uguale alla metà del cono la cui base ha per raggio la corda* BD *del segmento e che ha per altezza la proiezione* EF *di questa corda sull' asse* AH. *(fig. 418.)*

Il segmento circolare BMD essendo uguale alla differenza del settore circolare CBMD e del triangolo isoscele CBD, il volume che esso genera rotando attorno ad AH è uguale alla differenza dei volumi generati dal settore circolare e dal triangolo. Si ha:

$$vol.\ \mathrm{CBMD} = \frac{2}{3}\pi\,\mathrm{CD}^2 \times \mathrm{EF}.$$

Sia CG l'altezza del triangolo isoscele CBD, si ha anche:

$$vol.\ \mathrm{CBD} = \frac{2}{3}\pi\,\mathrm{CG}^2 \times \mathrm{EF};$$

dunque

$$vol.\ \mathrm{BMD} = \frac{2}{3}\pi\,(\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CG}^2) \times \mathrm{EF};$$

ma il triangolo rettangolo CDG dà:

$$\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CG}^2 = \mathrm{DG}^2 = \frac{\mathrm{BD}^2}{4},$$

per conseguenza,

$$vol.\ \mathrm{BMD} = \frac{1}{6}\pi\,\mathrm{BD}^2 \times \mathrm{EF}.$$

Scolio. — Se il segmento circolare è uguale a un semicircolo, il volume che esso genera è quello della sfera, e si ha, sostituendo AH a BD e EF nella formola precedente,

$$\textit{sfera}\ CA = \frac{1}{6}\pi AH^3,$$

espressione già trovata pel volume della sfera in funzione del suo diametro.

TEOREMA XIV.

Il volume di un segmento sferico, compreso tra due piani paralleli, è uguale ad una sfera che ha per diametro l'altezza del segmento, aumentata della semisomma di due cilindri che hanno per altezza e per basi l' altezza e le basi del segmento. (fig. 419.)

Sieno BE, DF i raggi delle sezioni circolari fatte nelle sfera CA da due piani perpendicolari al diametro AG; la retta EF è l' altezza del segmento sferico che ha per basi i cerchi BE e DF.

Il volume del segmento sferico EF è uguale alla somma dei volumi generati dal segmento circolare BMD e dal trapezio EBDF. Ora è noto che:

$$\textit{vol.}\ BMD = \frac{1}{6}\pi BD^2 \times EF,$$

$$\textit{vol.}\ EBDF = \frac{1}{3}\pi(BE^2 + DF^2 + BE \times DF)\,EF;$$

dunque

$$\textit{seg. sfe.}\ EF = \frac{1}{6}\pi(BD^2 + 2BE^2 + 2DF^2 + 2BE \times DF)\,EF.$$

Conducendo la retta BH perpendicolare a DF, troviamo

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 = EF^2 + (DF - BE)^2,$$

e per conseguenza,

$$BD^2 = EF^2 + DF^2 + BE^2 - 2DF \times BE.$$

Se sostituiamo questo valore di BD^2 nell'espressione del volume del segmento sferico EF, avremo:

$$seg.\ sfe.\ EF = \frac{1}{6}\pi(EF^2 + 3BE^2 + 3DF^2)\,EF$$

ovvero

$$seg.\ sfe.\ EF = \frac{1}{6}\pi EF^3 + \frac{1}{2}(\pi BE^2 \times EF + \pi DF^2 \times EF).$$

Ma il termine $\frac{1}{6}\pi EF^3$ esprime il volume della sfera il cui diametro è uguale all'altezza EF del segmento sferico e i prodotti $\pi BE^2 \times EF$, $\pi DE^2 \times EF$ sono le misure di due cilindri aventi per altezza la retta EF e per basi i cerchi BE, DF. Dunque ec.

Corollario.—Se la base BE del segmento sferico è nulla, cioè se il piano BE perpendicolare all'asse AG diventa tangente alla sfera, *il segmento sferico* ADF *ad una sola base è uguale alla sfera che ha per diametro l'altezza del segmento, più la metà di un cilindro della stessa base e della stessa altezza di questo segmento.*

Giacchè si ha:

$$seg.\ sfe.\ ADF = \frac{1}{6}\pi AF^3 + \frac{1}{2}\pi DF^2 \times AF.$$

TEOREMA XV.

1°. *La superficie di una sfera e le superficie totali del cilindro retto e del cono equilatero circoscritti a questa sfera, stanno tra loro come i numeri* 4, 6 *e* 9.

2°. *I volumi di questi tre corpi stanno tra loro come gli stessi numeri* 4, 6 e 9. *(fig. 420.)*

Indichiamo con S, S', S'' queste tre superficie, con V, V', V'' i tre volumi e con R il raggio CA della sfera data; abbiamo:

$$S = 4\pi R^2.$$

Osservando che l'altezza del cilindro retto ABDE, circoscritto alla sfera, è uguale al diametro AE, e la base eguale a un circolo massimo, troveremo che

$$S' = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2.$$

Conduciamo per l'asse SA del cono equilatero SAL, circoscritto alla sfera CA, un piano qualunque SAL che incontra la sfera seguendo il circolo massimo ANO e il cono seguendo il triangolo equilatero SLM circoscritto al cerchio ANO; il triangolo che s'iscrive nello stesso cerchio unendo i punti di contatto del triangolo circoscritto, è altresì equilatero; dunque la retta LM è il doppio di NO e la retta SA il doppio di AP. Da ciò risulta che

$$AL = R\sqrt{3},\ SA = 3R,$$

e

$$S'' = \pi R\sqrt{3}\,(2R\sqrt{3} + R\sqrt{3}) = 9\pi R^2;$$

dunque abbiamo:

$$S : S' : S'' :: 4 : 6 : 9.$$

2°. Il volume della sfera è uguale a $\frac{4}{3}\pi R^3$; quello del cilindro circoscritto è uguale a $2\pi R^3$, e quello del cono equilatero a $3\pi R^3$; dunque avremo anche

$$V : V' : V'' :: \frac{4}{3} : 2 : 3$$

ovvero

$$V : V' : V'' :: 4 : 6 : 9.$$

SCOLIO. — Poichè il numero 6 è la media proporzionale geometrica tra i numeri 4 e 9, abbiamo i seguenti teoremi:

1°. *La superficie del cilindro retto circoscritto ad una sfera è uguale alla media proporzionale tra le superficie della sfera e del cono equilatero circoscritto.*

2°. *Il volume del cilindro retto circoscritto ad una sfera è uguale alla media proporzionale tra i volumi della sfera e del cono equilatero circoscritto.*

COROLLARIO I. — *Il volume di un poliedro circoscritto ad una sfera è uguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio di questa sfera.*

Giacchè se uniamo il centro della sfera a tutti i vertici del poliedro, lo decomporremo in tante piramidi quante sono le facce; ma queste piramidi possono essere considerate come aventi per altezza comune il raggio della sfera e per basi le differenti basi del poliedro. Dunque ec.

COROLLARIO II. — *I volumi di due poliedri, circoscritti alla stessa sfera o a sfere eguali, stanno tra loro come le superficie.*

Infatti, sieno V e v i volumi di due poliedri circoscritti ad una sfera di raggio R, S e s le loro superficie; abbiamo:

$$V = \frac{1}{3} S . R, \quad v = \frac{1}{3} s . R;$$

dunque

$$V : v :: S : s.$$

Il teorema precedente, relativo al cilindro retto e al cono equilatero circoscritti alla stessa sfera, è un caso particolare di quest' ultimo.

CAPITOLO V.

Poliedri regolari.

TEOREMA I.

La somma del numero delle facce di un poliedro convesso e del numero dei suoi vertici è uguale al numero delle sue costole, aumentato di due unità.

Sieno C il numero delle costole di un poliedro convesso, F il numero delle sue facce e V il numero dei suoi vertici.

Decomponiamo questo poliedro in tante piramidi quante sono le facce, unendo tutti i suoi vertici a un punto qualunque preso nell'interno del poliedro, e descriviamo da questo punto come centro, con un raggio qualunque R, una sfera la cui superficie sarà divisa dalle facce laterali delle piramidi in tanti poligoni sferici quante sono le piramidi.

Consideriamo il poligono sferico di n lati e indichiamo con a il rapporto della somma dei suoi angoli all'angolo retto; la sua superficie ha per misura

$$\frac{\pi R^2}{2}\Big[a-2(n-2)\Big].$$

Parimente avremo per le superficie degli altri poligoni sferici che hanno n', n'', ... lati

$$\frac{\pi R^2}{2}\Big[a'-2(n'-2)\Big],$$

$$\frac{\pi R^2}{2}\Big[a''-2(n''-2)\Big],$$

. . . .

i numeri a', a'',..... rappresentando i rapporti delle somme degli angoli di ciascun poligono all'angolo retto. Ma la somma di questi poligoni è uguale alla superficie della sfera; dunque

$$\frac{\pi R^2}{2}\left[a+a'+a''+\ldots-2(n+n'+n''\ldots-2F)\right]=4\pi R^2.$$

Osserviamo 1° che nel numero $n+n'+n''+\ldots$ ciascuna costola è contata due volte, perchè essa è comune a due poligoni, in guisa che si ha

$$n+n'+n''+\ldots=2C.$$

2° che la somma degli angoli dei poligoni sferici, riuniti attorno a ciascun vertice, è uguale a quattro angoli diedri retti, e per conseguenza che si ha altresì:

$$a+a'+a''+\ldots=4V.$$

Sostituendo i valori delle somme $n+n'+n''+\ldots$, $a+a'+a''+\ldots$ nell'eguaglianza precedente, troveremo

$$4V-2(2C-2F)=8,$$

ovvero

$$V+F=C+2.$$

SCOLIO. — Questo Teorema è dovuto ad EULERO.(*)

(*) Il teorema di Eulero è vero anche pei poliedri non convessi. Il signor POINSOT fin dal 1809 (*Mémoire sur les polygones et les polyèdres :* Journal de l'École Polytech. Cahier X, pag. 46) aveva osservato che questo teorema è applicabile a tutti quei poliedri nel cui interno si può trovare un punto che sia il centro di una tale sfera che proiettando sulla sua superficie le facce del poliedro (mediante linee che passano pel centro), niuna di queste proiezioni sia in parte o in tutto sopra la proiezione di un'altra faccia. Recentemente (*Compte-Rendu*, 11 janvier 1858), lo stesso Autore ha dato una dimostrazione generale del teorema di Eulero, che riportiamo in una Nota sui Poliedri. CAUCHY nella sua seconda Memoria sui poligoni e i poliedri osserva che se s'immagina la superficie di un poliedro decomposta in più parti, ciascuna delle quali può essere o una faccia sola, o il sistema di più facce vicine conside-

TEOREMA II.

1°. *Tutte le facce di un poliedro convesso non possono avere più di cinque lati.*

2°. *Tutti gli angoli di un poliedro convesso non possono avere più di cinque facce.*

1°. Infatti, supponiamo che tutte le facce di un poliedro convesso abbiano almeno sei costole; poichè ciascuna costola appartiene a due facce adiacenti, il numero 6F sarà minore di 2C o al più eguale a 2C, lo che si esprime con la seguente notazione:

$$6F \leqq 2C.$$

Ma il teorema di Eulero dà

$$6F + 6V = 6C + 12;$$

dunque bisognerebbe che si avesse:

$$6V \geqq 4C, \text{ ovvero } 3U \geqq 2C,$$

lo che è impossibile, poichè ciascun angolo poliedro ha almeno tre costole e ciascuna di queste costole è comune a due angoli poliedri.

Dunque tutte le facce di un poliedro convesso non possono avere più di cinque lati.

2°. Supponiamo, in secondo luogo, che tutti gli

rate come formanti un sol gruppo, il teorema d'Eulero ha luogo tra il numero delle parti di cui è parola, il numero delle costole che limitano queste parti e il numero dei vertici compresi tra queste costole.

Il teorema di Eulero è un caso particolare del seguente: Se decomponiamo un poliedro in più altri, prendendo nuovi vertici nel suo interno, e indichiamo con P il numero dei nuovi poliedri, con V il numero totale dei vertici, con F il numero totale delle facce, e con C il numero totale delle costole; si avrà $V + F = C + P + 1$. (Vedi Cauchy, *Recherches sur les polyèdres*, Journal de l'École Polyt., Cahier XVI). (T.)

angoli di un poliedro convesso abbiano almeno sei costole, avremo:

$$6V \leqq 2C;$$

ma abbiamo altresì

$$6V + 6F = 6C + 12;$$

dunque bisognerebbe avere

$$6F \geqq 4C, \text{ ovvero } 3F \geqq 2C,$$

risultato assurdo, poichè ciascuna faccia del poliedro ha almeno tre lati e ciascuno di questi lati è comune a due facce.

Dunque tutti gli angoli di un poliedro convesso non possono avere più di cinque facce.

SCOLIO 1°. — Un poliedro regolare non può avere per facce che triangoli equilateri, quadrati o pentagoni regolari.

2°. Ciascuno degli angoli di un poliedro regolare ha solo tre o quattro o cinque angoli piani (*).

(*) Indichiamo con A il numero degli angoli piani del poliedro dato ch'è uguale al numero dei lati di tutte le facce. Poichè ogni costola è lato di due facce consecutive, avremo $A = 2C$.

Ciascuna faccia contiene almeno tre angoli; ciascun angolo poliedro contiene almeno tre angoli piani; quindi il minimo numero di angoli piani che può contenere un poliedro convesso è espresso tanto da $3F$ quanto da $3V$; talchè $A \geqq 3F$, $A \geqq 3V$; ovvero,

$$2C \geqq 3F, \quad 2C \geqq 3V.$$

Queste due disuguaglianze, avuto riguardo al teorema di EULERO, si trasformano nelle altre

$$3F \leqq 2C \leqq 6F - 12 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$3V \leqq 2C \leqq 6V - 12 \quad \ldots\ldots (2)$$

La disuguaglianza (1) mostra che *tutte le facce di un poliedro convesso non possono avere più di cinque lati;* poichè se ne avessero almeno sei, si

TEOREMA III.

La somma degli angoli delle facce di un angolo poliedro convesso è uguale a tante volte quattro angoli retti quanti vertici ha il poliedro meno due.

Sieno n, n', n'', ... i numeri dei lati delle differenti facce del poliedro dato; la somma degli angoli del poligono di n lati è uguale a $2n - 4$. Si ha parimente

$$\begin{array}{c} 2n' - 4, \\ 2n'' - 4, \\ \cdots\cdots \end{array}$$

per la somma degli angoli delle altre facce del poliedro; dunque il numero

$$2(n + n' + n'' + \ldots.) - 4F$$

esprime la somma degli angoli di tutte le facce. Ma si ha

$$2(n + n' + n'' + \ldots.) - 4F = 4C - 4F,$$

e pel teorema di EULERO,

$$4A - 4C = 4(V - 2);$$

avrebbe $2C \geqq 6F$. La disuguaglianza (2) mostra che *tutti gli angoli di un poliedro convesso non possono avere più di cinque angoli piani;* poichè se ne avessero almeno sei, si avrebbe A ovvero $2C \geqq 6V$.

Se nella disuguaglianza (1) sostituisco per C il suo valore $V + F - 2$, trovo

$$4 + F \leqq 2V \leqq 4F - 8 \ldots . (3)$$

Le disuguaglianze (1) e (3) permettono di rispondere alla quistione: quanti poliedri si possono costruire con un dato numero di facce? Supponiamo p. e. che le facce sieno sei, cioè che si abbia $F = 6$; allora avremo

$$\begin{array}{c} 5 \leqq V \leqq 8, \\ 9 \leqq C \leqq 12. \end{array}$$

Quindi possiamo porre $V = 5, \ 6, \ 7, \ 8$
e allora troveremo $C = 9, \ 10, \ 11, \ 12.$ (T.)

per conseguenza la somma degli angoli delle facce di un poliedro convesso è uguale a tante volte quattro angoli retti quanti vertici vi sono meno due.

SCOLIO. — Questo teorema è dovuto ad EULERO.

TEOREMA IV.

I poliedri regolari sono cinque.

Sieno C il numero delle costole di un poliedro regolare, F il numero delle sue facce, aventi ciascuna l lati, e V il numero dei vertici dei suoi angoli poliedri di cui ciascuno ha a angoli piani eguali. Il doppio del numero delle costole di questo poliedro è uguale a $F . l$ e anche a $V . a$; dunque si ha:

$$F = \frac{2C}{l} \text{ e } V = \frac{2C}{a};$$

ma il teorema di EULERO dà:

$$F + V = C + 2;$$

quindi

$$\frac{2C}{l} + \frac{2C}{a} = C + 2;$$

da cui si deduce:

$$C = \frac{2al}{2a + 2l - al}.$$

Poichè il numero l dei lati di ciascuna faccia del poliedro è compreso tra 3 e 5, se supponiamo prima $l = 3$, avremo:

$$C = \frac{6a}{6 - a};$$

ma il numero degli angoli piani che formano ciascuno angolo poliedro è altresì compreso fra 3 e 5; dunque, se facciamo successivamente:

$$a = 3, a = 4, a = 5,$$

avremo:

$$C = 6, C = 12, C = 30,$$

e

$$F = 4, F = 8, F = 20,$$
$$V = 4, V = 6, V = 12,$$

per conseguenza il triangolo equilatero può servire a formare tre poliedri regolari che sono il *tetraedro*, l'*ottaedro*, e l'*icosaedro*.

Supponendo $l = 4$, troviamo:

$$C = \frac{4a}{4 - a};$$

in questo caso particolare, il valore di a dev'essere minore di 4; ora se facciamo $a = 3$, si ha:

$$C = 12, F = 6, V = 8;$$

dunque col quadrato si può formare un solo poliedro regolare ch'è l'*essaedro*.

Finalmente, se supponiamo $l = 5$, abbiamo:

$$C = \frac{10a}{10 - 3a}.$$

Come nel caso precedente, il valore di a dev'essere minore di 4; se prendiamo $a = 3$, troviamo:

$$C = 30, F = 12, V = 20;$$

per conseguenza col pentagono regolare si può formare solamente il *dodecaedro regolare* (*).

SCOLIO. — Questa dimostrazione è stata data da LAPLACE, nelle sue lezioni alla Scuola normale.

TEOREMA V.

Qualunque poliedro regolare può essere iscritto nella sfera e può esserle circoscritto. (fig. 431.)

Sieno C e C′ i centri di due facce di un poliedro regolare, adiacenti seguendo la costola AB; il piano CMC′, che passa pei due centri C, C′ e il mezzo M della costola AB, è perpendicolare alle due facce adiacenti CAB, C′AB; dunque le perpendicolari condotte dai punti C, C′ a queste facce s'incontrano in un punto O, e dico che questo punto è ugualmente distante 1° dalle facce del poliedro, 2° dai suoi vertici.

1°. I due triangoli rettangoli CMO, C′MO sono eguali, perchè hanno l'ipotenusa comune e i lati CM, C′M eguali; dunque la retta CO è uguale a C′O e la retta OM è la bisettrice dell'angolo rettilineo CMC′ dell'angolo diedro AB. Unisco il punto O al centro C″ di un'altra faccia, adiacente alla faccia CAB per la costola DE, e dico che OC″ è perpendicolare alla faccia C″DE ed eguale ad OC.

Infatti, il piano OCN, perpendicolare al mezzo della costola DE, passa pel punto C″, e i triangoli rettangoli OCM, OCN sono eguali, perchè hanno un angolo retto compreso tra due lati eguali; dunque l'angolo CNO è uguale a CMO e per conseguenza eguale alla metà dell'angolo rettilineo CNC″ del diedro DE. Similmente i

(*) Oltre questi cinque poliedri regolari, ve ne sono altri quattro di specie superiore dovuti al sig. Poinsot. Cauchy ha dimostrato il primo che non vi ha altri poliedri regolari fuori di questi nove: noi daremo di questo teorema una dimostrazione dovuta al sig. Bertrand. (T.)

triangoli OCN, OC''N hanno gli angoli ONC, ONC'' eguali e compresi tra due lati rispettivamente eguali, dunque il lato OC'' è uguale ad OC e l'angolo OC''N eguale a OCN, cioè che la retta OC'' è perpendicolare alla faccia C''DE.

Con un ragionamento analogo si dimostrerebbe che il punto O dista egualmente dalle altre facce nel poliedro; dunque la sfera descritta dal punto O come centro, col raggio CO, è iscritta nel poliedro.

2°. Se uniamo il punto O a tutti i vertici del poliedro, le rette OA, OB,.... corrispondenti ai vertici di una stessa faccia sono eguali, perchè esse si allontanano egualmente dalla perpendicolare OC a questa faccia; dunque il punto O dista egualmente da tutti i vertici del poliedro, cioè la sfera descritta da questo punto come centro col raggio OA, passa per tutti i vertici del poligono regolare.

SCOLIO. — Il punto O è il *centro* del poliedro regolare; la retta OA n'è il *raggio,* e la retta OC l'*apotema.*

COROLLARIO. — I piani bisettori degli angoli diedri di un poliedro regolare passano pel centro di questo poliedro.

TEOREMA VI*.

Con un lato dato si può sempre costruire un tetraedro regolare (fig. 432.)

Descriviamo un triangolo equilatero ABC col lato dato. Pel centro O di questo triangolo inalziamo una perpendicolare indefinita, e prendiamo su questa retta un punto D tale che AD = AB; conduciamo poscia BD e CD.

Il tetraedro ABCD è regolare, giacchè tutte le sue costole sono eguali tra loro.

TEOREMA VII*.

Con un lato dato si può sempre costruire un essaedro regolare (fig. 433.)

Costruiamo un quadrato ABCD col lato dato. Sui lati di questo quadrato inalziamo piani perpendicolari ad esso; poi tagliamo quest' ultimi con un piano EFGH parallelo ad ABBD e distante da esso per una quantità AE = AB. Otterremo in tal guisa un cubo cioè un essaedro regolare.

TEOREMA VIII*.

Con un lato dato si può sempre costruire un ottaedro regolare (fig. 434.)

Descriviamo un quadrato ABCD col lato dato. Dal centro O inalziamo la perpendicolare EF al piano ABCD e prendiamo OE = OF = OA. Uniamo finalmente i punti E, F ai vertici del quadrato. La figura ABCDEF sarà un ottaedro regolare.

Infatti la retta EF è l' asse del cerchio circoscritto al quadrato ABCD; dunque EA = EB = ... AB. Così tutte le facce dell' ottaedro sono triangoli equilateri eguali tra loro.

Inoltre gli angoli poliedri sono eguali, giacchè gli angoli A, E, per esempio appartengono alle due piramidi regolari ABEDF, EABCD, le quali sono evidentemente sovrapponibili, perchè hanno la stessa base e la stessa altezza

TEOREMA IX*.

Con un lato dato si può sempre costruire un dodecaedro regolare. (fig. 435.)

Col lato dato formiamo dei pentagoni regolari eguali tra loro. Riuniamo tre di questi pentagoni in modo che i loro piani determinino un angolo triedro avente per vertice il punto A. Le facce di quest' angolo essendo eguali, gli angoli diedri che esse formano saranno eguali tra loro. Quindi gli angoli triedri B, A sono eguali perchè hanno un angolo diedro eguale compreso tra due facce rispettivamente eguali e similmente disposte. Laonde le due rette BK, BC formano tra loro un angolo eguale ad ABC.

Segue da ciò che dopo aver riuniti intorno al punto A tre dei nostri pentagoni regolari, potremo collocarne un quarto nell' angolo KBC, poi un quinto nell' angolo MCD ec. Otterremo così una superficie poliedrica aperta, che termina al contorno FGHI.....

Costruiamo ora un' altra superficie eguale alla prima e ravviciniamo queste due figure in modo che l' angolo *rientrante* L'M'N' coincida coll' angolo *saliente* FGH. Allora l' angolo triedro G sarà uguale a ciascuno degli angoli triedri A, B, C,.... e l' angolo diedro avente M'N'P', GHA per facce e di cui GH è la costola, sarà eguale all' angolo diedro avente per facce GHI, GHA, e per costola GH. Dunque N'P' coinciderà con HI, poi P'Q' con IK, ec.

Si vede che l' insieme delle due superficie poliedriche *(fig. 436)* determinerà una figura chiusa avente per facce dodici pentagoni regolari eguali e i cui angoli poliedri sono eguali tra loro. Questa figura è dunque un dodecaedro regolare.

TEOREMA X*.

Con un lato dato si può sempre costruire un icosaedro regolare.

Costruiamo un pentagono regolare MNPQR *(fig. 437.)* Dal centro O inalziamo sul piano del pentagono una perpendicolare OS tale che MS = MN. Unendo il punto S a tutti i vertici del pentagono, otterremo una piramide regolare le cui facce saranno triangoli equilateri eguali tra loro.

Abbiasi ora il triangolo equilatero ABC, il cui lato è uguale ad MN *(fig. 438.)* Costruiamo in ciascuno dei vertici di questo triangolo una piramide eguale ad S, prendendo per una delle facce di questa piramide il triangolo ABC.

È facile vedere che determineremo in tal guisa una superficie poliedrica aperta secondo DEFGHI, nella quale l'angolo *rientrante* EFG è uguale all'angolo *saliente* FGH, attesochè ciascuno di essi è uguale all'angolo FBH.

Se dunque immaginiamo una seconda superficie eguale alla prima, potremo far coincidere queste due figure colle loro estremità ec.

Problemi da risolvere.

1. — Calcolare a meno di un millimetro le dimension del litro, sapendo che esso ha la forma cilindrica e che la sua altezza è uguale al doppio del diametro della sua base.

2. — Calcolare a meno di un millimetro le dimensioni del decalitro e dell'ettolitro, sapendo che essi hanno la forma cilindrica e che la loro altezza è uguale al diametro delle loro basi.

3. — Dividere la superficie di una sfera in media ed estrema ragione con un piano perpendicolare ad un diametro dato.

4. — Qualunque zona ad una base è equivalente a un cerchio avente per raggio la corda dell'arco che genera la zona. — Questo teorema è applicabile alla zona a due basi?

5. — Postochè la terra sia una sfera esatta, calcolare il suo raggio, la sua superficie, il suo volume e il suo peso, la densità della terra essendo $4\frac{1}{2}$ secondo CAVENDISH.

6. — I diametri della terra, della luna e del sole stanno tra loro come i numeri 100, 27 e 10993. Calcolare le superficie e i volumi della luna e del sole.

7. — Qual'è la porzione della superficie o del volume della terra compreso tra l'equatore e l'eclittica sapendo che questi due cerchi formano un angolo di 23° 28'?

8. — Determinare l'angolo dei meridiani di Parigi e di Londra sapendo che il fuso terrestre che essi formano è uguale a 3367 miriametri quadrati.

9. — Calcolare l'area di un triangolo sferico ABC, sapendo che il raggio della sfera è uguale 1^m, 2 e che gli angoli A, B, C, sono rispettivamente eguali a 78° 15', a 62° 45' e a 72° 40'. — Calcolare il volume della piramide sferica corrispondente.

10. — Calcolare gli angoli di un triangolo sferico, sapendo che essi sono tra loro come i numeri 4, 6 e 7, e che questo triangolo è uguale al quarto del triangolo trirettangolo della stessa sfera.

11. — Se in un semicerchio iscriviamo un semipoligono regolare di un numero pari di lati e circoscriviamo ad esso un semipoligono simile, la superficie della sfera generata dal semicerchio che gira attorno al suo diametro è media proporzionale tra le superficie generate dai poligoni.

12. — Iscrivere in un cono retto un cilindro retto di cui la superficie laterale o totale è data. — Massimo di questa superficie.

13. — Iscrivere in una sfera un cilindro la cui superficie laterale o totale è data. — Massimo di questa superficie.

14. Iscrivere in una sfera un cono retto tale che le sezioni fatte nel cono e nella sfera da un piano dato parallelamente alla base del cono abbiano tra loro un rapporto dato.

15. — Circoscrivere ad una sfera un cono retto la cui superficie laterale o totale è data. — Massimo di questa superficie.

16. — Calcolare il raggio del segmento sferico massimo tra i segmenti sferici che sono terminati da zone di superficie costante e ad una sola base.

17. — Condurre una parallela alla base di un triangolo, in guisa tale che i volumi generati dalle due parti del triangolo che gira attorno alla sua base, sieno equivalenti.

18. — Calcolare i raggi delle basi di un tronco di cono retto iscritto in una sfera data, conoscendo il volume e l'altezza del cono troncato.

19. — Conoscendo la costola di un poliedro regolare di specie data, calcolare i raggi delle sfere iscritte e circoscritte a questo poliedro.

NOTA I.

Sulla comune misura di due rette.

Due rette si dicono *commensurabili* quando hanno una comune misura; *incommensurabili* quando non hanno comune misura.

Per vedere se due rette hanno una comune misura si usa il procedimento del testo; dal quale si deduce che: *se uno dei resti* R, R_1, R_2, ... *è nullo, le linee* A *e* B *sono commensurabili e l'ultimo resto che non è zero è la loro comune misura.*

Se niuno dei resti R, R_1, R_2 .... è zero, le due linee A e B non hanno comune misura e sono quindi incommensurabili. Per provarlo, supponiamo che m sia una comune misura di A e B. Procediamo come nel testo, e, per maggiore generalità, indichiamo con q, q_1, q_2.... i quozienti delle divisioni successive; avremo

$$\begin{aligned} A &= Bq + R \\ B &= Rq_1 + R_1 \\ R &= R_1q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2q_3 + R_3 \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

Adoperando un ragionamento analogo a quello di cui abbiamo fatto uso nell'Aritmetica (Bertrand, pag. 80), si prova facilmente che i resti R, R_1, R_2 .... debbono essere tutti multipli di m; in guisa che, indicando con μ, μ_1, μ_2 .... numeri interi, deve aversi

$$R = \mu m, \; R_1 = \mu_1 m, \; R_2 = \mu_2 m \; \ldots .$$

E poichè i resti R, R_1, R_2.... formano una serie decrescente, dovrà aversi

$$\mu m > \mu_1 m > \mu_2 m > \ldots.$$

ovvero

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 \ldots.$$

Ma se una serie di numeri interi decresce continuamente, uno di essi deve per necessità essere zero; dunque uno dei resti dovrebbe essere zero, lo che contradice all'ipotesi fatta. Dunque le linee A e B non hanno comune misura.

E qui cade in acconcio dimostrare una notevole proprietà dei resti R, R_1, R_2, ..., cioè che la loro somma ha sempre un limite finito. Infatti sommando insieme l'eguaglianze di sopra, si ha

$$A - B(q-1) = Rq_1 + R_1 q_2 + R_2 q_3 + \ldots.$$

Se i quozienti q_1, q_2, q_3.... sono eguali fra loro, si ha, indicando con Q il valore comune,

$$R + R_1 + R_2 + \ldots. = \frac{A - B(q-1)}{Q}.$$

Se poi i quozienti non sono eguali,

$$R + R_1 + R_2 + \ldots. < Rq_1 + R_1 q_2 + R_2 q_3 + \ldots.;$$

dunque

$$R + R_1 + R_2 + \ldots. < A - B(q-1)$$

e per conseguenza la somma dei resti ha un limite finito

Comunque le due linee A e B non abbiano comune misura, pure possiamo determinare il loro rapporto con una approssimazione indefinita. Infatti, togliamo dalla linea A la linea B tante volte quanto è possibile, q volte p. es., e sia R ciò che rimane; avremo

$$A = Bq + R.$$

Prendiamo un multiplo di R convenientemente scelto, per esempio 10R, e portiamo B sulla nuova linea 10R tante volte quante è possibile. Poichè B ed R non hanno comune misura, si otterrà un resto R_1 ed avremo una eguaglianza della forma

$$10R = Bq_1 + R_1,$$

ove q_1 indica quante volte B è contenuta in 10R. Procedendo con R_1 in un modo affatto analogo a quello che abbiamo tenuto per R, avremo

$$10R_1 = Bq_2 + R_2.$$

Continuando in tal guisa, avremo una serie di eguaglianze della forma

$$10R_2 = Bq_3 + R_3$$
$$10R_3 = Bq_4 + R_4$$
ec.

Dividiamo adesso la seconda eguaglianza per 10, la terza per 10^2, la quarta per 10^3 e così di seguito, avremo

$$A = Bq + R$$

$$R = \frac{q_1}{10}B + \frac{R_1}{10}$$

$$\frac{R_1}{10} = \frac{q_2}{10^2}B + \frac{R_2}{10^2}$$

$$\frac{R_2}{10^2} = \frac{q_3}{10^3}B + \frac{R_3}{10^3}$$

$$\frac{R_3}{10^3} = \frac{q_4}{10^4}B + \frac{R_4}{10^4}$$

. . . .

$$\frac{R_{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{q_n}{10^n}B + \frac{R_n}{10^n}.$$

Sommando insieme quest' eguaglianze e togliendo i termini comuni ai due membri, si ottiene

$$A = qB + \frac{q_1}{10}B + \frac{q_2}{10^2}B + \ldots + \frac{q_n}{10^n}B + \frac{R_n}{10^n},$$

ovvero

$$A = \left(q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_n}{10^n}\right)B + \frac{R_n}{10^n}.$$

Quindi evidentemente

$$A > \left(q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots \frac{q_n}{10^n}\right)B,$$

ovvero

$$\frac{A}{B} > q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_n}{10^n}.$$

Se adesso nel valore di A sostituiamo B ad R_n, avremo

$$A < \left(q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right)B,$$

da cui

$$\frac{A}{B} < q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

Laonde il rapporto $\frac{A}{B}$ è contenuto fra due limiti che differiscono fra loro per $\frac{1}{10^n}$. Prendendo per n un numero di più in più grande, è chiaro quindi che potremo ottenere il rapporto $\frac{A}{B}$ con quella approssimazione che vogliamo.

Per dare un' applicazione di quel che precede, dimostriamo che il rapporto della diagonale del quadrato al lato è incommensurabile. Indichiamo con d la diagonale e con l il lato; poichè d è $> l$ e $< 2l$, è chiaro ohe portando la retta l sopra d, vi sarà contenuta un volta più un resto r;

quindi avremo

$$d = l + r.$$

Adesso se sulle linee l ed r procediamo come nel caso generale, avremo l' eguaglianze

$$\begin{aligned} d &= l + r \\ l &= rq_1 + r_1 \\ r &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

Per dimostrare che il rapporto fra d ed l è incommensurabile, bisogna provare che niuno dei resti r, r_1, $r_2 \ldots$ è zero.

Descrivendo un cerchio cho abbia per raggio il lato del quadrato è facile vedere che l sarà media proporzionale tra $2l + r$ e r; talchè si avrà

$$l^2 = (2l + r)r,$$

da cui

$$\frac{l}{r} = 2 + \frac{r}{l}.$$

Ma si ha anche

$$\frac{l}{r} = q_1 + \frac{r_1}{r};$$

dunque

$$q_1 + \frac{r_1}{r} = 2 + \frac{r}{l}.$$

Ma affinchè questa eguaglianza si verifichi è necessario che si abbia

$$q_1 = 2 \text{ e } \frac{r_1}{r} = \frac{r}{l}.$$

Dunque r_1 non è zero.

Si ha:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{l}{r} = 2 + \frac{r}{l};$$

ovvero, poichè

$$\frac{r}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

l'eguaglianza precedente diventa

$$q_2 + \frac{r_2}{r_1} = 2 + \frac{r}{l};$$

dalla quale, come sopra, si trae che

$$q_2 = 2, \frac{r_2}{r_1} = \frac{r}{l}.$$

Dunque r_2 non è zero. Procedendo in questo modo si dimostrerà che i quozienti q_1, q_2, q_3.... sono eguali a 2 e che nessuno dei resti è nullo.

Questa dimostrazione è di Léger.

In questo caso verificandosi che i quozienti q_1, q_2,.... sono eguali tutti a 2, si ha immediatamente

$$r + r_1 + r_2 + \ldots . = \frac{d}{2};$$

la qual relazione dimostra l'elegante teorema:

Il limite della somma dei resti che si ottengono cercando la massima comune misura tra la diagonale del quadrato e il suo lato, è uguale alla semi-diagonale.

Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che i resti r, r_1, r_2,.... formano una progressione geometrica decrescente che ha per ragione $\frac{r}{l}$. Ora per un noto teorema di Aritmetica (Bertrand, pag. 296) il limite della somma $r + r_1 + r_2$ ec. è uguale a

$$\frac{r}{1 - \frac{r}{l}} = \frac{rl}{l - r};$$

e dalla relazione $l^2 = (rl + r)r$, trovata di sopra, si ricava agevolmente

$$\frac{rl}{l-r} = \frac{d}{r}.$$

In modo simile si proverebbe che il rapporto dei due segmenti di una retta divisa in media ed estrema ragione è incommensurabile, e che il limite della somma dei resti ottenuti nella ricerca della comune misura di questi segmenti, è uguale al segmento maggiore.

NOTA II.

Poliedri.

I.

Nei poliedri, come nei poligoni, si distinguono l'ordine e la specie; l'ordine è determinato dal numero delle facce; la specie, restringendoci a parlare dei poliedri regolari, è data dal numero di volte che le proiezioni di queste facce sulla sfera iscritta o circoscritta (proiezioni fatte mediante raggi), ricoprono uniformemente la superficie sferica. Così i poliedri ordinari sono della prima specie; di seconda specie diconsi quei poliedri nei quali le proiezioni delle facce ricoprono due volte esattamente la superficie della sfera, ec. La specie poi degli angoli solidi dipende da quella dei poligoni provenienti dalla sezione delle loro facce con un piano.

Teorema I. — *I piani delle facce di un poliedro regolare di specie superiore formano mediante le loro intersezioni un poliedro regolare dello stesso ordine e di prima specie.*

Sia P un poliedro regolare di specie superiore; è chiaro che i piani delle sue facce formeranno con le loro intersezioni un poliedro di prima specie che indicheremo con p; dico che questo poliedro è regolare e dello stesso ordine del poliedro dato.

A questo oggetto immaginiamo costruito un secondo poliedro di specie superiore P′ eguale al dato; avremo così parimente formato un nuovo poliedro di prima specie p' eguale a p. Dalla definizione dei poliedri regolari risulta chiaro che in qualsiasi modo facciamo coincidere i poliedri P e P′, i due poliedri p e p' coincideranno altresì; e poichè possiamo far coincidere i primi ponendo una faccia qualunque del secondo sopra una faccia determinata del primo, ne segue che potremo far coincidere nello stesso modo i poliedri p e p'. Laonde le differenti facce dei poliedri p e p' sono tutte eguali tra loro, egualmente inclinate l'una sull'altra e riunite nello stesso numero intorno a ciascun vertice. Resta a provare che queste facce sono poligoni regolari.

Supponiamo che il numero dei lati di ciascuna faccia dei poliedri P e P′ sia n; vi saranno n maniere differenti per provare la coincidenza di due facce di questi poliedri, e per conseguenza n maniere per provare la coincidenza delle facce corrispondenti dei poliedri p e p'. Ora perchè questo possa avvenire è necessario che le facce dei poliedri p e p' sieno eguali o a poligoni regolari dell'ordine n, o a poligoni semi-regolari di un ordine almeno eguale a $2n$. Quest'ultima ipotesi però non è ammissibile perchè $2n$ dovrebbe essere almeno eguale a 6, cioè i poliedri p e p' dovrebbero avere tutte le facce con sei lati almeno, lo che è impossibile. Dunque, ec.

Teorema II. — *I poliedri regolari di specie superiore risultano necessariamente dal prolungamento delle costole o delle facce dei poliedri regolari dello stesso ordine e di prima specie.*

Questo teorema è conseguenza evidente del precedente.

Scolio.—1° Prolungando il piano che contiene ciascuna faccia del dodecaedro regolare di prima specie sino all'incontro dei piani delle cinque facce che circondano la faccia opposta, si vengono a formare dei pentagoni regolari di prima e di seconda specie; l'insieme dei primi produce un *dodecaedro regolare della terza specie*, e l'insieme dei secondi produce un *dodecaedro stellato della quarta specie*. Il primo solido ha dodici angoli pentaedri della seconda specie e trenta costole; il secondo ha venti angoli triedri e trenta costole. Il secondo poliedro si potrebbe anche ottenere dal primo prolungando in quest'ultimo i lati delle facce. 2° Prolungando i lati dei dodici pentagoni del dodecaedro ordinario, si viene a formare un *dodecaedro stellato della seconda specie*, composto di pentagoni della seconda specie riuniti per cinque attorno a ciascun vertice. 3° Finalmente prolungando ciascuna faccia dell'icosaedro ordinario sino all'incontro dei piani dei tre triangoli che circondano la faccia opposta a quella che si considera, si viene a formare un *icosaedro della settima specie*, composto di triangoli riuniti per cinque in modo che le loro basi formino un pentagono della seconda specie: questo solido ha dodici angoli della seconda specie e trenta costole.

Questi quattro nuovi poliedri regolari di specie superiore sono stati trovati da Poinsot.

Teorema III. — *I vertici di un poliedro regolare di specie superiore sono altresì i vertici di un poliedro regolare convesso.*

Per dimostrare questo teorema giova premettere il seguente

Lemma. — *Dati più punti nello spazio, si può sempre trovare un poliedro convesso i cui vertici sieno presi tra i punti dati e che contenga tutti gli altri punti nel suo interno.*

Infatti facciamo passare un piano per tre fra i punti dati, per esempio A, B, C, in modo che tutti gli altri si trovino da una stessa parte di esso; poi un secondo piano che passi pei punti A, B e un terzo D scelto in modo da contenere nell'angolo diedro così formato i punti rimanenti; procedendo in tal guisa è chiaro che si verrà a costruire un poliedro convesso che inviluppa tutti i punti dati che non sono suoi vertici.

Ciò posto osserviamo che i vertici di un poliedro regolare essendo situati sopra una stessa sfera, qualunque poliedro convesso i cui vertici saranno presi tra questi punti, non potrà contenere gli altri nel suo interno; dunque, in virtù del lemma precedente, i vertici del poliedro regolare considerato appartengono ad un poliedro convesso. Resta a provare che questo poliedro è regolare.

Immaginiamo costruito il poliedro convesso che abbia per vertici quelli del poliedro dato, e indichiamo con P il solido così formato. Sia Q una figura affatto eguale alla precedente. Queste figure sono sovrapponibili per ipotesi, e la coincidenza potrà effettuarsi ponendo un vertice qualunque di Q sopra un vertice di P. Inoltre, posti che sieno due vertici uno sull' altro, la coincidenza dei due poliedri regolari che fanno parte di P e di Q e per conseguenza quella delle figure totali potrà farsi in tre modi almeno, poichè ai vertici considerati concorrono tre facce almeno dei poliedri regolari, e possiamo porre una faccia del primo sopra una qualunque del secondo. Laonde i due angoli solidi dei nostri poliedri convessi non solo sono eguali, ma altresì capaci di coincidere in tre modi diversi. Ma questi angoli solidi sono triedri, tetraedri o pentaedri, e in ciascuno di questi tre casi la triplice coincidenza sarebbe impossibile se non avessero le facce eguali ed egualmente inclinate; dunque tutte le facce che concorrono ad uno stesso vertice del poliedro convesso sono sovrapponibili. E poichè la coincidenza dei due poliedri convessi può farsi ponendo un vertice arbitrario dell' uno sopra un vertice dell' altro, una faccia può coincidere con un' altra in modo che due vertici arbitrarii sieno l' uno sull' altro. Da ciò risulta che le facce sono poligoni regolari, e per conseguenza il poliedro convesso sodisfa alle condizioni che formano la definizione del poliedro regolare, e il teorema è dimostrato.

Corollario. — Da questo teorema risulta che per ottenere i poliedri regolari di specie superiore, bisogna evidentemente prendere i poliedri regolari convessi e procedere nel modo seguente: scegliere un vertice sopra uno di questi poliedri e cercare se vi sono altri vertici che riuniti ad esso possino formare un poligono regolare; questo poligono è la sola faccia possibile del poliedro regolare di specie superiore avente i medesimi vertici del proposto. Il numero di poligoni eguali a cui può appartenere uno stesso vertice sarà il numero delle facce che compongono un angolo solido del nuovo poliedro.

Questa osservazione conduce ai seguenti teoremi.

Teorema IV. — *I vertici del tetraedro non possono appartenere ad altro solido.*

Questo teorema è evidente.

Teorema V. — *I vertici dell' ottaedro non possono appartenere ad altri poliedri regolari (fig. 434).*

Infatti un vertice qualunque A dell' ottaedro appartiene a due quadrati ABCD, AECF, i quali non possono evidentemente formare le facce di un poliedro.

Teorema VI. — *I vertici del cubo appartengono altresì a tetraedri regolari; ma non possono formare nuovi poliedri regolari. (fig. 433.)*

Infatti un vertice qualunque A del cubo non può formare coi rimanenti che tre triangoli equilateri AHC, AHF, ACF, i quali appartengono ad un tetraedro regolare, la cui quarta faccia è il triangolo FHC.

Teorema VII. — *I vertici del dodecaedro regolare riuniti tre a tre non possono formare altri poliedri regolari che tetraedri (fig. 436.)*

Ciascun vertice del dodecaedro non può esser vertice comune di più triangoli equilateri che in due modi soli: o unendolo ai vertici appartenenti a due delle facce che vi si riuniscono, o collegandolo con vertici appartenenti a facce contigue a quelle che contengono il vertice dato. Nel primo caso non si formerà alcun nuovo solido, nel secondo si otterranno due tetraedri regolari.

1°. Caso. — Le facce che si riuniscono nel punto A sono AC, AI, AG; combinando il vertice A coi vertici K e C, I e G, F e D, appartenenti a due delle facce precedenti, vengono a formarsi tre triangoli equilateri AKC, AIG, AFD, i quali non avendo costola comune non possono formare un angolo poliedro.

2°. Caso. — Il vertice A combinato con vertici appartenenti a facce contigue ad AC, AI, AG, forma sei triangoli APL, AMQ, AD'M, ALC', APC', AQD' che sono equilateri perchè per andare da un vertice ad un altro si passa sempre per tre costole consecutive del dodecaedro non situate nello stesso piano. I tre triangoli APL, ALC', APC' appartengono al tetraedro APLC', il quale avendo gli angoli piani eguali, ha altresì i diedri eguali e per conseguenza è regolare. Lo stesso vale pel tetraedro formato dagli altri tre triangoli AMQ, AD'M, AQD'.

Teorema VIII. — *I vertici del dodecaedro riuniti cinque a cinque formano il dodecaedro regolare di quarta specie.* (*fig.* 436.)

Ciascun vertice del dodecaedro può formare coi rimanenti sei pentagoni regolari solamente; tre di prima specie e tre di seconda. Così il vertice A appartiene a tre pentagoni di prima specie AKE'B'F, ACNB'G, AIE'ND; e a tre pentagoni di seconda specie AE'FKB', ANGCB', AE'DIN. I primi tre pentagoni sono regolari; infatti essi hanno evidentemente i lati eguali; di più le tre diagonali AE', AN, AB' sono eguali, perchè i tre punti E', N, B' appartengono a un circolo minore della sfera circoscritta al dodecaedro i cui due poli sono l'estremità A ed A' del diametro AA'. (*) I tre pentagoni stellati avendo i medesimi vertici dei tre precedenti, sono anch'essi regolari.

I pentagoni ordinari non formano angolo solido perchè non hanno costola comune. Quelli stellati avendo le costole comuni formano un angolo triedro; ed è chiaro che il loro insieme compone il dodecaedro regolare di quarta specie.

Teorema IX. — *I vertici dell'icosaedro riuniti tre a tre formano l'icosaedro di settima specie.* (*fig.* 438.)

Ciascun vertice dell'icosaedro non può essere vertice comune di più triangoli equilateri che in un sol modo, cioè prendendo per lati le rette più corte che si possono condurre tra i vertici dopo quelle che formano i lati delle facce. Così, applicando questa costruzione al vertice A si trovano i cin-

(*) Supposto già costruito metà del dodecaedro, circoscriviamo ad esso la sfera e formiamo sei piramidi aventi tutte per vertice il centro della sfera e per basi le facce date. È chiaro che prolungando al di là del vertice queste piramidi, le loro intersezioni con la sfera determineranno le altre facce del dodecaedro. Da questa costruzione segue evidentemente che due vertici opposti A ed A' sono l'estremità di uno stesso diametro della sfera.

que triangoli AIB', AIC', AC'K, AKG, AGB', che dico essere equilateri.

Infatti, consideriamo per esempio il triangolo AIB'. I punti A e B' sono vertici dei due triangoli equilateri AED, B'ED che hanno il lato ED comune. Se da questi punti abbassiamo le perpendicolari sopra ED, esse s' incontreranno in un certo punto M e l' angolo AMB' sarà il rettilineo dell' angolo diedro ED. Parimente se dai punti B', I conduciamo le perpendicolari ad A'K, queste perpendicolari s' incontreranno nel punto N medio di A'K, e l' angolo B'NI sarà il rettilineo del diedro A'K. Laonde i due triangoli AMB', B'NI saranno eguali, per avere un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali, e per conseguenza AB' = B'I. Un ragionamento analogo proverebbe che B'I = AI. Dunque, ec....

Le cinque basi di questi triangoli, cioè B'I, IC', C'K, KG, GB' formano un pentagono di seconda specie. Di più i medesimi triangoli hanno le costole comuni AI, AC', AK, AG, AB'. Dunque formano un angolo solido di seconda specie. È chiaro che l' insieme di questi angoli solidi forma l' icosaedro di settima specie.

Teorema X. — *I vertici dell' icosaedro riuniti cinque a cinque danno luogo a due nuovi poliedri regolari: il dodecaedro di terza specie, e il dodecaedro stellato di seconda specie.*

Ciascun vertice dell' icosaedro può formare coi rimanenti dieci soli pentagoni regolari. Così il punto A è vertice comune dei cinque pentagoni di prima specie

ADB'C'F, ADKIB, ABGC'E, AEB'KC, ACIGF;

e dei cinque pentagoni di seconda specie

AB'FDC', AKBDI, AGEBC', AB'CEK, AIFCG.

Questi pentagoni hanno evidentemente i lati eguali; dico dippiù che hanno altresì gli angoli eguali e che per conseguenza sono regolari.

Consideriamo il pentagono ADB'C'F. L' angolo AFC' = FC'B'; poichè i triangoli AFC', FC'B' sono eguali come aventi tre lati rispettivamente eguali, cioè FC' comune, $AF = CB'$, e $AC' = FB'$. (Quest' ultima eguaglianza si proverebbe come nel teorema precedente.) In un modo simile si mostra l'eguaglianza degli altri angoli. Dunque i pentagoni di prima specie sono regolari, e per conseguenza lo sono altresì quelli di seconda.

I cinque pentagoni ordinarii formano un angolo solido le cui costole sono AD, AB, AE, AC, AF; quest' angolo solido è di seconda specie perchè le estremità D, B, E, C, F appartengono ad un pentagono di seconda specie. L' insieme di questi angoli solidi forma evidentemente il dodecaedro di terza specie.

I cinque pentagoni stellati formano un angolo solido le cui costole sono AC', AG, AI, AK, AB'; l' insieme di questi angoli solidi forma evidentemente il dodecaedro stellato di seconda specie.

Teorema XI. — *Vi sono quattro soli poliedri di specie superiore.*

Questo teorema è una conseguenza evidente del Corollario del teorema terzo e dei teoremi seguenti.

Osservazione Quest' ultimo teorema poteva dedursi immediatamente dal secondo; bastando a quest' uopo mostrare che il prolungamento delle facce o delle costole dei cinque poliedri regolari di prima specie non può produrre altri poliedri regolari fuori di quelli dovuti a Poinsot. E invero è stata questa la via seguita dall' illustre Cauchy, quando, primo fra tutti, dimostrò l' impossibilità di nuovi poliedri regolari il cui numero di facce non fosse uno dei numeri 4, 6, 8, 12, 20; impossibilità ch' era stata semplicemente presentita da Poinsot. Ma non può negarsi che la dimostrazione di Cauchy, comunque assai ingegnosa, riesce poco chiara quando non si abbiano presenti i modelli in rilievo del dodecaedro e dell' icosaedro regolare. Da questo difetto è scevra l' elegante dimostrazione di Bertrand ch' è contenuta nei teoremi terzo, quarto, ... sino all' undecimo; ed è per questa ragione che l' abbiamo preferita.

II.

Poinsot ha esposte recentemente talune considerazioni generali sulla teorica dei poliedri, le quali ci sembrano abbastanza semplici ed importanti da non doversi tralasciare in un trattato elementare di Geometria.

Un poliedro si può considerare come una rete di triangoli ciascuno dei quali si unisce al precedente mediante un lato comune, e il cui insieme forma una superficie chiusa da tutte le parti. Questa superficie può essere traversata da una retta in più punti. — Ciascuno dei triangoli è una *faccia* del poliedro; il lato comune a due triangoli è una *costola*; i punti di concorso di più costole sono i *vertici* del poliedro.

Un poliedro si dice *convesso* quando ha tutti i suoi angoli diedri minori di due retti. Se gli angoli diedri fossero tutti maggiori di due retti, non per questo il poliedro cesserebbe di essere *convesso*, nel nuovo senso che attribuiamo a questa parola; poichè allora nulla impedisce di prendere per angoli diedri i supplementi a quattro angoli retti dei precedenti. Talchè un poliedro allora soltanto si dirà non convesso quando i suoi angoli diedri saranno parte maggiori, parte minori di due retti. Questa definizione dei poliedri convessi concorda con quella che abbiamo dato nella Nota a pag. 64 sulla convessità dei poligoni.

Chiamando F il numero delle facce triangolari di un poliedro e C quello delle costole, è chiaro che si ha la relazione

$$3F = 2C \ldots . (1)$$

Se V è il numero dei vertici del poliedro dato, si ha:

$$2V - F = 4 \ldots . (2)$$

Infatti, se dal poliedro dato togliamo un vertice con le f facce triangolari che vi si riuniscono; e nel poligono (piano o storto) formato dalle basi di questi f triangoli, conduciamo da uno qualunque dei suoi vertici, le $f-3$ diagonali che lo dividono in $f-2$ triangoli, avremo per resto un nuovo poliedro a facce triangolari che avrà $V-1$ vertici e $F-2$ facce. La differenza fra i numeri $2(V-1)$ e $F-2$ essendo $2V-F$, possiamo dir che la differenza $2V-F$ è costante pel poliedro dato e per tutti quelli che se ne possono dedurre con la costruzione precedente. Ma nel tetraedro questa differenza è uguale a 4, dunque ec.

Dall' uguaglianza (1) e (2) si deducono le altre

$$C = 3V - 6 \ldots. (3)$$
$$V + F = C + 2 \ldots. (4).$$

Le formole (1), (2) e (3) convengono solamente ai poliedri a facce triangolari, ma la quarta è vera per poliedri a facce qualunque; poichè se supponiamo riunite due o più facce triangolari consecutive in una sola, il numero totale delle facce e quello delle costole diminuisce egualmente.

Questa dimostrazione semplicissima e affatto generale del teorema di Eulero, è quella cui alludevamo nella Nota a pag. 369.

Consideriamo adesso dei poliedri di cui tutti gli angoli solidi abbiano lo stesso numero c di costole. Siccome ciascuna costola appartiene a due vertici, avremo

$$Vc = 2C = 6V - 12,$$

da cui

$$V = \frac{12}{6-c},$$

essendo $c \geqq 3$.

Da questa eguaglianza e dalle (3) e (4) si deducono varie conseguenze:

1°. Vi ha un solo poliedro a facce triangolari che possa avere tutti i suoi angoli solidi triedri; e questo è il *tetraedro;* poichè se facciamo $c = 3$, troveremo $V = 4$, $C = 6$, $F = 4$.

2°. Ve ne ha un solo che possa avere tutti i suoi angoli tetraedri, e questo è l'*ottaedro;* poichè fatto $c = 4$, troveremo $V = 6$, $C = 12$, $F = 8$.

3°. Ve ne ha un solo che possa avere tutti i suoi angoli solidi pentaedri ed è l'*icosaedro;* poichè per $c = 5$, troviamo $V = 12$, $C = 30$, $F = 20$.

4°. Non vi possono essere poliedri che abbiano tutti gli angoli essaedri, ottaedri, ec., poichè per $c = 6$ si trova V uguale all'infinito, e per $c > 6$ si ha per V un valore negativo.

Dalle formole (1) e (2) si ricava

$$C = \frac{3}{2}F, \quad V = \frac{F}{2} + 2,$$

le quali mostrano che i poliedri a facce triangolari non possono avere un numero dispari di facce; talchè questi poliedri saranno *tetraedri, essaedri, ottaedri, decaedri, dodecaedri* ec.

Inoltre, siccome V punti si possono riunire due a due in $\frac{V(V-1)}{2}$ modi differenti; così dati V punti potremo in generale costruire $\frac{V(V-1)}{2}$ poliedri diversi che avranno però lo stesso numero di facce e di costole. Talchè avremo un solo tetraedro, dieci essaedri, quindici ottaedri, ventuno decaedri, ec.

Ciò posto, Poinsot si è proposta la quistione: Cercare fra i $\frac{V(V-1)}{2}$ poliedri dell'ordine F se ve ne ha di quelli che non possano esser veduti come formati dalla riunione di più poliedri d'ordine inferiore appoggiati sopra facce comuni. A questi poliedri ha dato il nome di *semplici* o *primitivi*.

È chiaro che il tetraedro è semplice, perchè non vi sono poliedri di ordine inferiore a quattro.

Dei dieci essaedri possibili non ve ne ha nessuno primitivo. Infatti è chiaro che in qualsiasi modo si riuniscano cinque punti con sei triangoli si verrà sempre a formare un poliedro composto di due tetraedri appoggiati l'uno sull'altro per una faccia comune.

Supponiamo di avere un essaedro ABCDEF, ed immaginiamo congiunto un sesto punto M coi vertici di una delle facce triangolari del poliedro dato, verremo così a formare un ottaedro composto di un essaedro e di un tetraedro uniti da una base comune.

Dunque se vi è un ottaedro primitivo, esso non può avere angoli triedri; ma ciascuno dei suoi angoli solidi dev' essere almeno tetraedro. Ora è facile vedere che tutti gli angoli debbono essere tetraedri; poichè fatta questa supposizione il numero delle costole risulta di 12 (dalla relazione $Vc = 2C$), ch' è il numero esatto delle costole di qualunque ottaedro possibile.

Dunque fra i quindici ottaedri possibili ve ne ha un solo primitivo che ha tutti gli angoli tetraedri.

Un decaedro primitivo, se è possibile, non può avere angoli solidi triedri nè essaedri. La prima proposizione non ha bisogno di dichiarazione; la seconda è facile ad essere provata. Sia M un angolo solido essaedro e ABCDEF l'esagono formato dalle sei basi di questi triangoli; AB dovendo esser costola comune di due facce, una delle quali è MAB, è chiaro che il vertice della seconda deve necessariamente coincidere con uno dei punti C, D, E, F, altrimenti il numero totale delle facce del poliedro formato sarebbe maggiore di dieci. Supponiamo che coincida con F; allora nel decaedro vi sarebbe un tetraedro MABF, e per conseguenza non potrebbe esser semplice.

Dunque un decaedro primitivo deve avere i suoi angoli tetraedri e pentaedri. Indichiamo con t il numero dei primi angoli e con p quello dei secondi; avendo presente che il decaedro ha 15 costole e 7 vertici, sono evidenti le relazioni

$$4t + 5p = 30,$$
$$t + p = 7$$

dalle quali si trae $t = 5$, $p = 2$.

Se dunque vi è un decaedro primitivo, esso deve avere cinque angoli tetraedri e due pentaedri. Or questo solido esiste realmente. Infatti, sieno M, A, B, C, D, E, M' i sette punti dati; conduciamo le cinque rette MA, MB, MC, MD, ME e costruiamo il pentagono ABCDE; unendo il settimo punto M' coi vertici di questo pentagono avremo formato il decaedro che ha due angoli pentaedri e cinque tetraedri.

Se dunque ammettiamo che, la specie di un poliedro primitivo dipenda dalla natura dei suoi angoli solidi, possiamo dire che fra i ventuno decaedri possibili vi ha una sola specie di decaedro primitivo, che ha due angoli pentaedri e cinque tetraedri.

In un modo analogo si continuerebbe pel dodecaedro, ec. A noi basta l'avere accennate queste idee che potrebbero forse servire di base ad una nuova, più semplice e più generale teorica dei poliedri, e rinviamo coloro che sono curiosi di queste dottrine alla Nota dell'Autore pubblicata nel tomo 46 dei *Comptes-Rendus* pag. 65 e seguenti.

NOTA III.

Sul metodo delle proiezioni.

1. Conduciamo da un punto qualunque un fascio di rette a tutti i punti del perimetro di una data figura; l'intersezione di questo fascio con una superficie piana o curva, determina una seconda figura che dicesi *proiezione* della prima. Il vertice del fascio vien detto *centro di proiezione*, e la superficie intersecata *superficie di proiezione*.

Già a priori si vede che fra la figura data e la sua proiezione vi debbano essere delle relazioni, in virtù delle quali da note proprietà della prima si possa passare facilmente ad analoghe proprietà della seconda. Ed invero il metodo delle proiezioni torna in molti casi di grande utilità, come quello che dà il modo di trasportare ad una figura più complicata talune proprietà dimostrate per una figura più semplice, e particolarmente di trasferire a figure sferiche proprietà appartenenti a figure piane. Per lo che noi crediamo non fare opera inutile pei giovani studiosi riunendo in questa Nota i principi elementari di tale metodo, prezioso mezzo d'investigazione, e di cui i geometri moderni hanno fatto grande uso.

2. Le seguenti proposizioni sono conseguenze evidenti delle definizioni date di sopra.

1°. Due punti qualunque di una figura e i due corrispondenti della proiezione sono veduti dal centro di proiezione sotto angoli eguali o supplementarii. Dal che segue che *una tangente in qualunque punto di una curva è proiettata in una tangente in un punto corrispondente della nuova curva.*

2°. La proiezione di una linea retta sopra un piano è una linea retta, a meno che il centro di proiezione non sia sul prolungamento della retta data, nel qual caso la proiezione è un punto.

3°. La proiezione di una linea retta sopra una superficie sferica il cui centro è centro di proiezione, è un cerchio massimo.

4°. Le proiezioni di più linee rette concorrenti in un punto sopra una superficie piana o sferica (in questo secondo caso il centro di proiezione essendo il centro della sfera) passano per la proiezione del punto dato.

5°. Se la figura data è considerata come giacente sopra una superficie, essa sarà la proiezione della nuova figura; talchè ciascuna delle due figure è la proiezione dell'altra.

Se una delle superficie è una sfera noi supporremo sempre che il suo centro sia il centro di proiezione, a meno che non avvertiamo il contrario; ciò posto possiamo dire che *la proiezione di un circolo massimo sopra un piano è una linea retta.*

3. Se la figura che si vuol proiettare è un cerchio, le linee rette condotte dal centro di proiezione a tutti i punti della circonferenza del cerchio formano un cono.

È evidente che un circolo minore della sfera può esser considerato come la base di un cono retto il cui vertice è al centro della sfera. È anche evidente che un piano tangente alla sfera nel polo del circolo minore taglierà il cono in un secondo circolo che può essere riguardato come la proiezione del primo, e anche come avente il primo per sua proiezione.

4. *Se due circoli massimi sono ad angolo retto ed un piano è condotto tangente alla sfera in un punto qualunque di uno di essi, le proiezioni dei due cerchi su questo piano saranno anche ad angolo retto.*

Sieno PQ e QR i circoli massimi (*fig.* 439), e P il dato punto; se noi immaginiamo descritto un circolo minore avente P per polo e PQ come raggio sferico, questo cerchio toccherà l'arco QR, poichè PQR è un angolo retto. Ora proiettiamo il circolo minore e i circoli massimi sul piano tangente in P; avremo un circolo, un raggio, ed una tangente. Ma il raggio e la tangente sono ad angolo retto, cioè le proiezioni dei due circoli massimi sono perpendicolari; dunque ec.

5. *Due linee rette che concorrono in uno stesso punto si proietteranno in linee parallele quando il piano di proiezione è parallelo alla linea retta che unisce il centro di proiezione al punto di concorso;* perchè il punto nella figura proiettata, corrispondente al punto di concorso, essendo all'infinito, le linee proiettate sono parallele.

Più serie di linee concorrenti rispettivamente in punti situati sopra una linea retta, si proietteranno in altrettante serie di linee parallele, purchè il piano di proiezione sia parallelo a quello determinato dalla linea retta suaccennata, e dal centro di proiezione. Per esempio, qualunque quadrilatero può essere proiettato in un parallelogrammo prendendo il piano di proiezione parallelo a quello che passa pel centro di proiezione e pel punto di concorso dei lati opposti del quadrilatero.

Da quel che precede segue che *tutti i punti all' infinito in un dato piano* possono essere considerati come le proiezioni di punti in linea retta, e perciò si può dire che essi stessi sono in una linea retta.

6. *L' angolo formato da due rette si proietta in un angolo*

eguale, quando la linea che unisce il centro di proiezione al vertice dell'angolo dato fa angoli eguali in opposte direzioni col piano di proiezione e il piano dell'angolo dato, ed è perpendicolare all'intersezione dei due piani.

Supponiamo prima che il vertice dell'angolo dato sia nel piano di proiezione. Siano O il centro di proiezione (*fig.* 440), BAC l'angolo dato, e PB'Q il piano di proiezione. Con centro A e raggio AO descriviamo una sfera, la quale sarà tagliata nel cerchio ODD'O' da un piano condotto pel punto A perpendicolarmente alla intersezione PQ del piano dell'angolo dato e del piano di proiezione. L'angolo OAD, che misura l'inclinazione della retta OA sul piano dell'angolo dato, è per ipotesi eguale all'angolo O'AD' che misura l'inclinazione di O'A sul piano di proiezione; quindi l'arco OD = O'D' e per conseguenza il triangolo BOD è uguale al triangolo B'O'D', perchè sono rettangoli in D e D' rispettivamente ed hanno l'angolo BOD = B'O'D'; laonde l'arco BD = B'D'. Nel modo stesso si proverebbe che l'arco CD = C'D', e per conseguenza l'arco CB = C'B' e quindi l'angolo CAB = C'AB'.

Se il vertice dell'angolo dato non si trova nel piano di proiezione, conduciamo per esso un piano parallelo a quest'ultimo; allora l'angolo dato sarà eguale alla sua proiezione sul piano ora condotto, e sarà per conseguenza anche eguale alla sua proiezione sul piano dato poichè un angolo si proietta in un angolo eguale sopra un piano parallelo.

7. Un cerchio si proietta sopra un piano parallelo in un altro cerchio il cui centro corrisponde a quello del cerchio dato; le che è caso particolare della proposizione generale che *la proiezione di una figura piana qualunque sopra un piano parallelo è simile alla figura data.* Ma pel cerchio è notevole che esso si può proiettare in un altro cerchio anche quando il piano di proiezione non è parallelo a quello del cerchio dato.

Infatti, sia MN il cerchio dato e O il centro di proiezione (*fig.* 441). Facciamo passare una superficie conica per questo cerchio e pel punto O, e sia OMN la sezione fatta in questa superficie da un piano condotto perpendicolarmente a quello della base pel punto O e pel centro della base. Prendiamo per piano di proiezione un piano PQR perpendicolare ad MON e tale che l'angolo OQP sia eguale all' angolo OMN. La proiezione del cerchio MN su questo piano è la curva PQR, che dico essere un cerchio.

Per un punto qualunque R della sezione PQR conduciamo un piano parallelo a quello della base MN, che taglierà il cono in un cerchio M'N' e il piano PQR in una retta CR, perpendicolare al piano MON. Le due rette M'N', PQ essendo nel piano MON, CR sarà perpendicolare ad entrambe, e poichè M'RN' è un cerchio, $CR^2 = M'C \times CN'$. Ma i due triangoli PCM', QCN' sono equiangoli; quindi $M'C \times CN' = PC \times CQ = CR^2$, e per conseguenza la figura PQR è un cerchio avente per diametro PQ, poichè il punto R è qualunque.

La sezione circolare PQ di un cono obliquo ha ricevuto il nome di sezione *antiparallela;* i piani condotti pel vertice O parallelamente alle due sezioni circolari sono stati chiamati da Chasles *piani ciclici* del cono.

Se pel cerchio MN e pel punto O facciamo passare una sfera, è chiaro che il piano tangente alla sfera nel punto O è parallelo al piano di proiezione; quindi possiamo dire che: *Una sfera condotta per la circonferenza della base circolare di un cono e pel suo vertice, è tangente al piano ciclico parallelo al piano della sezione antiparallela.*

La reciproca di questa proposizione è vera e facilmente dimostrabile; cioè: *Qualunque sfera che passa pel vertice di un cono, e che tocca uno dei piani ciclici, taglia il cono in un cerchio il cui piano è parallelo all' altro piano ciclico.*

8. *Date due serie di linee* A, B, C, ...; a, b, c, ... *appartenenti ad una stessa figura e tali che due linee corrispondenti qualunque* A, a *sieno sopra una medesima linea retta e che i due sistemi di rette abbiano le medesime estremità, se si ha*

$$\frac{A \, . \, B \, . \, C \, ...}{a \, . \, b \, . \, c \, ...} = K,$$

ove K *è un numero dato,*

1°. *La stessa relazione ha luogo per qualunque proiezione della figura sopra un piano, sostituendo alle linee* A, B, C...., a, b, c,.... *le loro rispettive proiezioni.*

2°. *La relazione si verifica anche per una proiezione sferica, quando si sostituisca a ciascuna linea il seno dell' arco nel quale la linea è proiettata.*

Per rendere più chiara la dimostrazione considererò un caso particolare.

Sia ABC un triangolo ed FED una trasversale che incontra i suoi lati nei punti F, E, D (*fig.* 442). Sappiamo che si ha (pag. 78, teor. VII)

$$\frac{\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{AF}\,.\,\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}\,.\,\mathrm{BF}\,.\,\mathrm{AE}}=1,\ldots.\,(1)$$

la quale relazione soddisfa alle condizioni volute dall' enunciato. Sia O il centro di proiezione; conduciamo le rette OB, OC, OD e la perpendicolare OP sul lato BC; avremo

$$\mathrm{BD}=\frac{\mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OD}\,sen\,\mathrm{BOD}}{\mathrm{OP}},\quad \mathrm{CD}=\frac{\mathrm{OC}\,.\,\mathrm{OD}\,sen\,\mathrm{COD}}{\mathrm{OP}};$$

da cui

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{OB}\,sen\,\mathrm{BOD}}{\mathrm{OC}\,sen\,\mathrm{COD}}.$$

Al modo stesso si troverà

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}}=\frac{\mathrm{OA}\,sen\,\mathrm{AOF}}{\mathrm{OB}\,sen\,\mathrm{BOF}},\quad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{OC}\,sen\,\mathrm{COE}}{\mathrm{OA}\,sen\,\mathrm{AOE}}.$$

E per conseguenza l' espressione (1) si trasforma nell' altra

$$\frac{sen\,\mathrm{BOD}\,.\,sen\,\mathrm{AOF}\,.\,sen\,\mathrm{COE}}{sen\,\mathrm{COD}\,.\,sen\,\mathrm{BOF}\,.\,sen\,\mathrm{AOE}}=1\ldots.\,(2)$$

Questa relazione, senza bisogno di ulteriori schiarimenti, prova la seconda parte della proposizione; poichè ai seni degli angoli BOD, AOF, ec., potremo sostituire i seni degli archi ottenuti dalle proiezioni di BD, EF ec., sulla superficie sferica che ha per centro il centro di proiezione.

Per provare la prima parte, supponiamo che sia B'D' la proiezione di BD sopra un piano qualunque; e conduciamo OP' perpendicolare a B'D'; avremo

$$sen\,\mathrm{BOD} = sen\,\mathrm{B'OD'} = \frac{\mathrm{B'D'}\,.\,\mathrm{OP'}}{\mathrm{OB'}\,.\,\mathrm{OD'}},$$

e

$$sen\,\mathrm{COD} = sen\,\mathrm{C'OD'} = \frac{\mathrm{C'D'}\,.\,\mathrm{OP'}}{\mathrm{OC'}\,.\,\mathrm{OD'}};$$

da cui

$$\frac{sen\,\mathrm{BOD}}{sen\,\mathrm{COD}} = \frac{\mathrm{B'D'}\,.\,\mathrm{OC'}}{\mathrm{C'D'}\,.\,\mathrm{OB'}}.$$

Similmente si troverà

$$\frac{sen\,\mathrm{AOF}}{sen\,\mathrm{BOF}} = \frac{\mathrm{A'F'}\,.\,\mathrm{OB'}}{\mathrm{B'F'}\,.\,\mathrm{OA'}},\quad \frac{sen\,\mathrm{COE}}{sen\,\mathrm{AOE}} = \frac{\mathrm{E'C'}\,.\,\mathrm{OA'}}{\mathrm{A'E'}\,.\,\mathrm{OC'}}.$$

Talchè l' espressione (2) diventa

$$\frac{\mathrm{B'D'}\,.\,\mathrm{A'F'}\,.\,\mathrm{C'E'}}{\mathrm{C'D'}\,.\,\mathrm{B'F'}\,.\,\mathrm{A'E'}} = 1;$$

lo che dimostra il teorema.

In qualunque altro caso si procederebbe in un modo analogo.

9. In quel che precede abbiamo supposto sempre che se la superficie di proiezione è una sfera, il centro di proiezione sia il centro della sfera. Ora noi supporremo che il centro di proiezione sia il polo di un circolo massimo sul cui piano si vuol proiettare una figura situata sulla sfera; questa specie particolare di proiezione si distingue col nome di *proiezione stereografica.*

I principii fondamentali della proiezione stereografica sono i seguenti:

1°. *La proiezione stereografica di un cerchio che non passa pel centro di proiezione è un cerchio.*

Sia O il centro di proiezione (*fig.* 443); OO' il diametro della sfera perpendicolare al piano di proiezione, P il polo del cerchio che si vuol proiettare; AB e DE le intersezioni rispettive del piano che passa pei punti O, P, O' col piano di proiezione e col piano del cerchio da proiettare. Se immaginiamo un cono che abbia per vertice il punto O e per base il cerchio DE, e se osserviamo che il piano di proiezione è perpendicolare al piano del triangolo DOE e che l'angolo D'E'O = OO'E = ODE, ne segue che la proiezione del cerchio dato è la sezione antiparallela del cono, cioè è un circolo.

Se il cerchio da proiettare passa pel punto O, è chiaro che la sua proiezione sarà una linea retta.

2°. *Se un cono è circoscritto ad una sfera, la proiezione del suo vertice è il centro del cerchio che forma la proiezione stereografica della curva circolare di contatto.*

La dimostrazione di questo teorema si riduce a provare che la linea D'E' (*fig.* 443) è divisa per metà dalla retta OP' che unisce il centro di proiezione O al vertice P' del cono. Ora, poichè O è il polo della tangente OK rispetto al cerchio OPO', e P' il polo di DE rispetto allo stesso cerchio, la linea OP' è la polare di K (pag. 94, Corr. II), e per conseguenza DK è tagliata armonicamente e le rette OK, OE, OP', OD formano un fascio armonico. Laonde D'E' essendo parallela ad OK, ne segue che essa è divisa per metà da OP'.

3°. *Se da un punto qualunque della sfera si conducono due tangenti, l'angolo contenuto fra esse è proiettato in un angolo eguale.*

Sia D il punto dal quale sono condotte le tangenti. Poichè il piano tangente in D è perpendicolare a CD, e il piano di proiezione è perpendicolare a CO, l'intersezione di questi piani è perpendicolare al piano del triangolo DCO, e perciò perpendicolare alla linea OD. Dippiù, gli angoli COD e CDO essendo eguali, i loro complementi sono altresì eguali, cioè gli angoli fatti dalla linea OD col piano tangente e col piano di proiezione sono eguali e in direzione opposta. Quindi l'angolo fatto in D dalle tangenti è uguale all'angolo proiettato.

4°. *Le proiezioni di due cerchi di una sfera si tagliano sotto un angolo eguale a quello dei due cerchi.*

Siano C e C' le due circonferenze date; c, c' le loro proiezioni. Immaginiamo condotte pel centro di proiezione O e per uno dei punti A d'intersezione di questi due cerchi, due circonferenze c_1, c_2 rispettivamente tangenti ai cerchi C, C' nel punto A. L'angolo fatto dalle tangenti t e t' a queste circonferenze nel punto O, è evidentemente eguale a quello che fanno le tangenti in A ai cerchi dati. Inoltre il piano di proiezione è parallelo a quello delle tangenti t e t'; ed è facile vedere che l'angolo sotto il quale si tagliano le circonferenze c, c' è uguale a quello di queste rette; dunque ec.

10. Se il centro di proiezione è all'infinito, si ottiene una specie particolare di proiezione che ha ricevuto il nome di *proiezione ortografica*. Le proiezioni considerate nel testo appartengono alla proiezione ortografica; e noi non aggiungeremo altro a quello detto dall' Autore.

I principii esposti in questa Nota ricevono numerose applicazioni; ma noi per amore di brevità e perchè nelle Note che seguono occorrerà più volte di giovarsene, lasciamo ai giovani la cura di esercitarsi in queste applicazioni.

NOTA IV.

Rapporto anarmonico

I.

1. Il segmento compreso fra due punti a, b può essere rappresentato con ab e con ba; nel primo caso diremo che a è la sua *origine*, nel secondo b.

2. Se sopra una stessa retta si considerano più segmenti, indicheremo la loro direzione riguardando come *positivi* tutti quelli che saranno diretti in un senso convenuto a comin-

ciare dalle loro *origini*, e come *negativi* quelli diretti in senso contrario; cioè daremo il segno $+$ ai primi, e il segno $-$ agli altri. Talchè se il segmento compreso tra due punti a, b, si assume come positivo quando è rappresentato da ab, sarà negativo se espresso da ba; in guisa che si dirà che $ab = - ba$.

3. L'angolo formato da due rette A, B può rappresentarsi con (A, B) e con (B, A); nel primo caso il lato A sarà la sua *origine*, nel secondo il lato B.

L'angolo (A, B), che ha per vertice il punto O, può considerarsi come generato dalla retta B, la quale prima in contatto con la retta A, si mova girando attorno al vertice O. Se nel punto O si suppone situato uno spettatore che guardi il lato A, preso per origine, la retta B può girare da sinistra a destra o da destra a sinistra; se nel primo caso l'angolo si assume come *positivo*, nel secondo dovrà considerarsi come *negativo*.

4. *Fra più punti* a, b, c, d....k, l *comunque disposti sopra una stessa retta, vi ha sempre la relazione*

$$ab + bc + cd + \dots + kl + la = o, \qquad \dots\dots (1)$$

Consideriamo prima tre punti a, b, c. Se questi tre punti si trovano nell'ordine a, b, c, è chiaro che

$$ac = ab + bc\,;$$

ma $ac = - ca$; dunque

$$ab + bc + ca = o\,.$$

La disposizione dei punti dati deve necessariamente essere una delle tre seguenti

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c \\ a,\ c,\ b \\ c,\ a,\ b\,; \end{array}$$

dalla prima si passa alla seconda mutando b in c e c in b, e dalla seconda si passa alla terza cambiando a in c e c

in a. Ma queste permutazioni di lettere non inducono alcuna mutazione nella relazione proposta; dunque questa relazione è dimostrata qualunque sia la posizione rispettiva dei punti a, b, c.

Adesso proveremo che se la relazione (1) si verifica per $n-1$ punti $a, b, c, d, \ldots k$, sarà pur vera per n punti.

Per ipotesi

$$ab + bc + cd + \ldots ik + ka = o.$$

Considerando i tre punti a, k, l, si ha

$$ak + kl + la = o.$$

Sommando queste due eguaglianze ed osservando che $ak = -ka$, troveremo la relazione (1).

Ma il teorema ha luogo per tre punti, dunque ec.

5. Se sopra una retta prendiamo due punti qualunque a, c, il loro punto medio α e un punto arbitrario O, abbiamo le identità

$$\mathrm{O}a = \mathrm{O}\alpha + \alpha a,$$

$$\mathrm{O}c = \mathrm{O}\alpha + \alpha c = \mathrm{O}\alpha - \alpha a;$$

le quali una volta sommate, un'altra volta moltiplicate fra loro danno le notevoli relazioni

$$\frac{\mathrm{O}a + \mathrm{O}c}{2} = \mathrm{O}\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}c = \mathrm{O}\alpha^2 - \alpha a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

6. Se sopra una retta prendiamo due segmenti ac, bd, i loro rispettivi punti medii α, O, ed un punto arbitrario m, abbiamo

$$m\alpha = \frac{ma + mc}{2}, \quad m\mathrm{O} = \frac{mb + md}{2};$$

le quali sottratte l'una dall'altra danno

$$m\mathrm{O} - m\alpha = \frac{mb + md - ma - mc}{2},$$

ovvero

$$\alpha O = \frac{ab + cd}{2} = \frac{ad + cb}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

osservando che $mb - ma = ab$ ec.

7. ***Fra i sei segmenti formati da quattro punti*** **a, b, c, d,** ***situati sopra una linea retta, ha luogo sempre la relazione***

$$ab \; . \; cd + ae \; . \; db + ad \; . \; bc = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Per un punto qualunque O conduciamo le quattro rette Oa, Ob, Oc, Od. Se una trasversale incontra queste rette rispettivamente nei punti a', b', c', d', sappiamo che si hanno le relazioni (pag. 103, teor. VII).

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'} \;\; \text{e} \;\; \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{a'd'}{a'b'} : \frac{c'd'}{c'b'} \, ,$$

le quali si possono scrivere ancora

$$\frac{ac \, . \, db}{cb \, . \, ad} = \frac{a'c'}{b'c'} \, . \, \frac{b'd'}{a'd'} \;\; \text{e} \;\; \frac{ab \, . \, cd}{cb \, . \, ad} = \frac{b'a'}{b'c'} \, . \, \frac{c'd'}{a'd'} \, .$$

Queste relazioni sussistono qualunque sia la posizione della trasversale, quindi anche se essa è parallela ad una delle rette del fascio, p: e: ad Od. In questa ipotesi il punto d' è all'infinito e i rapporti $\frac{b'd'}{a'd'}$ e $\frac{c'd'}{a'd'}$ si assumono eguali all'unità: talchè le relazioni precedenti diventano

$$\frac{ac \, . \, db}{cb \, . \, ad} = \frac{a'c'}{b'c'} \, , \; \frac{ab \, . \, cd}{cb \, . \, ad} = \frac{b'a'}{b'c'} \, ;$$

le quali sommate membro a membro danno

$$\frac{ac \, . \, db}{cb \, . \, ad} + \frac{ab \, . \, cd}{cb \, . \, ad} = \frac{b'a' + a'c'}{b'c'} = 1 \, ,$$

poichè

$$b'a' + a'c' + c'b' = 0 \, .$$

Quindi moltiplicando tutta l'eguaglianza per $cb \, . \, ad$ si ha la relazione (5).

8. Al rapporto anarmonico di quattro rette OA, OB, OC, OD si può dare una forma utile a conoscere. Se questo fascio è tagliato da una trasversale nei punti a, b, c, d, *(fig. 444)* sappiamo che il rapporto anarmonico delle quattro rette è rappresentato da

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}.$$

Conduciamo pel punto b una trasversale parallela ad OA, e sieno c', d' i punti nei quali questa trasversale incontra OC, OD rispettivamente; avremo le proporzioni

$$ac : bc :: aO : bc'$$
$$ad : bd :: aO : bd';$$

da cui

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{bd'}{bc'}.$$

(Questa eguaglianza fornisce una dimostrazione del teorema VII pag. 103, più semplice di quella data dall'Autore.)

Ma si ha

$$\frac{bd'}{bc'} = \frac{bd'}{bO} \cdot \frac{bO}{bc'} = \frac{sen\,(B,\,D)}{sen\,(A,\,D)} \cdot \frac{sen\,(A,\,C)}{sen\,(B,\,C)};$$

quindi

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{sen\,(A,\,C)}{sen\,(A,\,D)} : \frac{sen\,(B,\,C)}{sen\,(B,\,D)}.$$

Al modo stesso si dimostra che

$$\frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = \frac{sen\,(A,\,D)}{sen\,(A,\,B)} : \frac{sen\,(C,\,D)}{sen\,(C,\,B)},$$

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{sen\,(A,\,B)}{sen\,(A,\,C)} : \frac{sen\,(D,\,B)}{sen\,(D,\,C)}.$$

9. Se i punti a, c dividono armonicamente la retta bd, sappiamo che $\frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = -1$; quindi la relazione

$$\frac{sen\,(A,\,D)}{sen\,(A,\,B)} : \frac{sen\,(C,\,D)}{sen\,(C,\,B)} = -1,$$

esprime che le quattro rette A, B, C, D formano un fascio armonico. Nella medesima ipotesi si ha pure (pag. 102)

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = 2, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{1}{2};$$

quindi

$$\frac{sen\,(A, C)}{sen\,(A, D)} : \frac{sen\,(B, C)}{sen\,(B, D)} = 2$$

$$\frac{sen\,(A, B)}{sen\,(A, C)} : \frac{sen\,(D, B)}{sen\,(D, C)} = \frac{1}{2},$$

che si possono anche scrivere

$$sen\,(A, C)\, sen\,(D, B) = 2\, sen\,(A, D)\, sen\,(B, C)$$
$$sen\,(A, C)\, sen\,(D, B) = 2\, sen\,(A, B)\, sen\,(D, C).$$

10. La relazione

$$ad \,.\, bc + ab \,.\, cd + ac \,.\, db = 0,$$

che ha luogo fra i quattro punti a, b, c, d, può scriversi sotto la forma

$$\frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} + \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} - 1 = 0;$$

e sostituendo pei rapporti anarmonici i valori trovati nel n. 8,

$$\frac{sen\,(A, D)}{sen\,(A, B)} : \frac{sen\,(C, D)}{sen\,(C, B)} + \frac{sen\,(A, C)}{sen\,(A, B)} : \frac{sen\,(D, C)}{sen\,(D, B)} - 1 = 0,$$

$$sen\,(A, D)\, sen\,(B, C) + sen\,(A, B)\, sen\,(C, D) + sen\,(A, C)\, sen\,(D, B) = 0,$$

che esprime la relazione che vi ha tra i seni dei sei angoli fatti da quattro rette che si tagliano in un punto.

11. I rapporti anarmonici ed armonici di quattro punti o di un fascio di quattro rette, si possono porre sotto una nuova forma.

Prendiamo sulla retta che contiene i quattro punti a, b, c, d un quinto punto arbitrario m; avremo

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{db}{da} : \frac{cb}{ca} = \left(\frac{db}{da} : \frac{mb}{ma}\right) : \left(\frac{cb}{ca} : \frac{mb}{ma}\right).$$

Ma tra i quattro punti a, b, d, m si ha la relazione

$$ab \,.\, dm + ad \,.\, mb + am \,.\, bd = 0,$$

da cui

$$\frac{db}{da} : \frac{mb}{ma} = 1 - \frac{ab}{ad} : \frac{mb}{md}.$$

Similmente fra i quattro punti a, b, c, m si ha

$$\frac{cb}{ca} : \frac{mb}{ma} = 1 - \frac{ab}{ac} : \frac{mb}{mc};$$

quindi

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{1 - \frac{ab}{ad} : \frac{mb}{md}}{1 - \frac{ab}{ac} : \frac{mb}{mc}} = \frac{1 - \frac{ab}{mb} : \frac{ad}{md}}{1 - \frac{ab}{mb} : \frac{ac}{mc}}; \quad \ldots \ldots (6)$$

moltiplicando numeratore e denominatore della frazione del secondo membro per $\frac{mb}{ab}$, si ottiene la relazione richiesta

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\frac{mb}{ab} - \frac{md}{ad}}{\frac{mb}{ab} - \frac{mc}{ac}} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Siccome l'eguaglianza (6) contiene solamente rapporti anarmonici, sarà vera anche pei seni degli angoli di un fascio di cinque rette, A, B, C, D, M; quindi il rapporto anarmonico del fascio di quattro rette A, B, C, D si può porre sotto la forma

$$\frac{sen(A, C)}{sen(A, D)} : \frac{sen(B, C)}{sen(B, D)} = \frac{\frac{sen(M, B)}{sen(A, B)} - \frac{sen(M, D)}{sen(A, D)}}{\frac{sen(M, B)}{sen(A, B)} - \frac{sen(M, C)}{sen(A, C)}}. \quad (8)$$

Se nell'espressione (6), supponiamo che il punto m sia all'infinito, i rapporti $\frac{mb}{md}$, $\frac{mb}{mc}$ sono eguali all'unità, e si ha la notevole relazione

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ad}}{\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Similmente se la retta M si prende perpendicolare alla retta A, l'espressione (8) si trasforma nell'altra

$$\frac{sen\,(A, C)}{sen\,(A, D)} : \frac{sen\,(B, C)}{sen\,(B, D)} = \frac{cot\,(A, B) - cot\,(A, D)}{cot\,(A, B) - cot\,(A, C)} \quad . \; . \; . \; (10)$$

poichè $sen\,(M, B) = cos\,(A, B)$ ec.

12. Nel caso del rapporto armonico, l'espressioni (7), (8) diventano

$$2\,\frac{mc}{a\,c} = \frac{mb}{a\,b} + \frac{md}{a\,d}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

$$2\,\frac{sen\,(M . C)}{sen\,(A, C)} = \frac{sen\,(M . B)}{sen\,(A, B)} + \frac{sen\,(M, D)}{sen\,(A, D)} \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

I segmenti *mc*, *mb*, *md* sono proporzionali alle perpendicolari condotte dai punti *c*, *b*, *d* ad una retta che passa per *m*; quindi potremo ai primi sostituire le seconde nella relazione (11); e poichè il punto *m* è arbitrario, ne segue che indicando con γ, β, δ le perpendicolari abbassate dai tre punti *c*, *b*, *d* sopra una retta qualunque, si ha

$$2\,\frac{\gamma}{ac} = \frac{\beta}{ab} + \frac{\delta}{ad}.$$

Se nell'espressione (12) supponiamo che la retta M sia perpendicolare alla retta A, avremo

$$2\,cot\,(A, C) = cot\,(A, B) + cot\,(A, D) \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

13. L'espressione $\frac{ad}{ab} = -\frac{cd}{cb}$ dà luogo ad una relazione che ci sarà utile in seguito.

Se sulla retta dei punti a, c, d, b prendiamo un punto arbitrario m, abbiamo

$$ad = md - ma,\ ab = mb - ma$$

$$cd = md - mc,\ cb = mb - mc\ ;$$

quindi

$$\frac{md - ma}{mb - ma} = -\frac{md - mc}{mb - mc}\ ;$$

da cui

$$(mb + md)(ma + mc) = 2ma\ .\ mc + 2mb\ .\ md\ .$$

Se indichiamo con α il punto medio del segmento ac, e con O quello del segmento bd, è noto che

$$m\alpha = \frac{ma + mc}{2},\ mO = \frac{mb + md}{2}\ ;$$

per conseguenza

$$ma\ .\ mc + mb\ .\ md = 2m\alpha\ .\ mO.\ \ldots\ldots\ (14)$$

ch' è la relazione richiesta.

14. Il teorema I pag. 87, è una conseguenza di questa espressione. Infatti se in essa facciamo coincidere il punto m con O, troveremo

$$Od^2 = Oa\ .\ Oa\ .$$

Questa eguaglianza combinata con la relazione (3) dà

$$O\alpha^2 = Od^2 + \alpha a^2,$$

ovvero (n^o 6).

$$(ad + cb)^2 = ac^2 + db^2\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ (15)$$

notevole relazione fra quattro punti in proporzione armonica.

15. Se nella stessa relazione (14) il punto m si suppone coincidere con b, si ha

$$ba \, . \, bc = 2b\alpha \, . \, bO = b\alpha \, . \, bd \, \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Ora bd è la media armonica delle distanze dei due punti a, c dal punto b (pag. 86, Nota); $b\alpha$ dicesi la *media distanza* di questi due punti allo stesso punto b; dunque l' ultima relazione esprime che:

Il prodotto delle distanze di due punti ad una origine comune, presa sulla stessa retta, è uguale al prodotto della media armonica e della media distanza di questi due punti relativi all' origine.

16. L' eguaglianza dei rapporti anarmonici di due sistemi di quatro punti a, b, c, d e a', b', c', d' può esprimersi in più modi.

1°

$$\left.\begin{aligned} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} &= \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}, \\ \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} &= \frac{a'd'}{a'b'} : \frac{c'd'}{c'b'}, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} &= \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

2°

$$\left.\begin{aligned} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} &= 1, \\ \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} + \frac{a'c'}{a'b'} : \frac{d'c'}{d'b'} &= 1, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} + \frac{a'd'}{a'c'} : \frac{b'd'}{b'c'} &= 1, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Quest' ultime si deducono dalle precedenti, giovandosi del teorema VI, pag. 101.

3°

$$ab\,.\,cd\,.\,\frac{m'b'}{a'\,b'} + ac\,.\,db\,.\,\frac{m'c'}{a'\,c'} + ad\,.\,bc\,.\,\frac{m'd'}{a'\,d'} = 0 \quad \text{— (19)}$$

$$a'b'\,.\,c'd'\,.\,\frac{mb}{a\,b} + a'c'\,.\,d'b'\,.\,\frac{mc}{a\,c} + a'd'\,.\,b'c'\,.\,\frac{md}{a\,d} = 0 \quad \text{— (20)};$$

$$\frac{ab\,.\,cd}{a'b'} + \frac{ac\,.\,db}{a'c'} + \frac{ad\,.\,bc}{a'd'} = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (21)$$

$$\frac{a'b'\,.\,c'd'}{a\,b} + \frac{a'c'\,.\,d'b'}{a\,c} + \frac{a'd'\,.\,b'c'}{a\,d} = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (22)\,.$$

La relazione (19) è conseguenza facilissima della seguente

$$\frac{\dfrac{1}{ab} - \dfrac{1}{ad}}{\dfrac{1}{ab} - \dfrac{1}{ac}} = \frac{\dfrac{m'b'}{a'\,b'} - \dfrac{m'd'}{a'\,d'}}{\dfrac{m'b'}{a'\,b'} - \dfrac{m'\,c'}{a'\,c'}},$$

il cui primo membro esprime il rapporto anarmonico dei quattro punti a, b, c, d (eq: 9), e il secondo il rapporto anarmonico dei quattro punti a', b', c', d' (eq: 7); (si è preso il punto arbitrario m' sopra la retta $a'\,b'$).

Infatti l'espressione precedente può scriversi sotto la forma

$$\frac{bd}{ad}\cdot\frac{m'b'}{a'\,b'} - \frac{bd}{ad}\cdot\frac{m'c'}{a'\,c'} = \frac{bc}{ac}\cdot\frac{m'b'}{a'\,b'} - \frac{bc}{ac}\cdot\frac{m'd'}{a'\,d'},$$

che equivale all' altra

$$\frac{bc\,.\,ad - ac\,.\,bd}{ad\,.\,ac}\cdot\frac{m'b'}{a'\,b'} - \frac{db}{ad}\cdot\frac{m'c'}{a'\,c'} - \frac{bc}{ac}\cdot\frac{m'd'}{a'\,d'} = 0;$$

avendo riguardo alla nota relazione

$$ab\,.\,cd + ac\,.\,db + ad\,.\,bc = 0,$$

e moltiplicando tutta l' eguaglianza per $ad\,.\,ac$ si ottiene immediatamente la (19).

Se sulla retta ab si prende un punto arbitrario m, un procedimento analogo dà la (20).

Le (21) e (22) si deducono dalle (19) e (20) supponendo che i punti m ed m' siano a distanza infinita.

17. Se nell'espressioni (17) e (18) sostituiamo ai rapporti anarmonici dei punti a, b, c, d e a', b', c', d' i rapporti anarmonici eguali dei fasci delle rette corrispondenti A, B, C, D e A', B', C', D', si otterranno relazioni analoghe che esprimeranno l'eguaglianza fra i rapporti anarmonici di due fasci di quattro rette.

Si otterranno altresì formole analoghe alle (19) e (20), poichè queste ultime si possono scrivere in modo da contenere soli rapporti anarmonici; così la (19) può scriversi nel modo seguente.

$$\left(\frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}\right)\left(\frac{m'b'}{m'd'}:\frac{a'b'}{a'd'}\right)+\left(\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}\right)\left(\frac{m'c'}{m'd'}:\frac{a'c'}{a'd'}\right)-1=0.$$

18. Se nell'espressioni (17), (18), (19), (20) sostituisco al rapporto anarmonico dei quattro punti a, b, c, d quello delle quattro rette A, B, C, D otterremo le seguenti relazioni che esprimeranno l'eguaglianza del rapporto anarmonico delle quattro rette A, B, C, D a quello dei quattro punti a', b', c', d'.

$$\frac{sen\,(A\,,C)}{sen\,(A\,,D)}:\frac{sen\,(B\,,C)}{sen\,(B\,,D)}=\frac{a'c'}{a'd'}:\frac{b'c'}{b'd'}$$

$$\frac{sen\,(A\,,C)}{sen\,(A\,,D)}:\frac{sen\,(B\,,C)}{sen\,(B\,,D)}+\frac{a'b'}{a'd'}:\frac{c'b'}{c'd'}=1$$

$$sen\,(A\,,B)\,.\,sen\,(C\,,D)\,.\,\frac{m'b'}{a'b'}+sen\,(A\,,C)\,.\,sen\,(D\,,B)\,.\,\frac{m'c'}{a'c'}$$
$$+\,sen\,(A\,,D)\,.\,sen\,(B\,,C)\,.\,\frac{m'd'}{a'd'}=0$$

$$a'b'\,.\,c'd'\,.\,\frac{sen\,(M\,,B)}{sen\,(A\,,B)}+a'c'\,.\,d'b'\,.\,\frac{sen\,(M\,,C)}{sen\,(A\,,C)}$$
$$+\,a'd'\,.\,b'c'\,.\,\frac{sen\,(M\,,D)}{sen\,(A\,,D)}=0$$

Se nella penultima formola si suppone che il punto m' sia preso all'infinito, si ha

$$\frac{sen\,(A\,,B)\,.\,sen\,(C,\,D)}{a'b'}+\frac{sen\,(A\,,C)\,.\,sen\,(D,\,B)}{a'c'}$$
$$+\frac{sen\,(A\,,D)\,.\,sen\,(B,\,C)}{a'd'}=0\,.$$

Queste relazioni servono anche per esprimere l'eguaglianza dei rapporti anarmonici di due fasci di quattro rette quando uno di questi fasci è formato da rette parallele.

II.

19. Si chiama *rapporto anarmonico* di quattro punti situati sopra una circonferenza di cerchio il rapporto anarmonico del fascio di quattro rette ottenute unendo un punto qualunque della circonferenza ai quattro punti dati. È facile mostrare che questo rapporto anarmonico è costante.

Sieno *(fig. 445)* A, B, C, D i quattro punti dati; prendiamo sulla circonferenza un quinto punto O qualunque. La proposizione è evidente per tutte le posizioni del punto O comprese nell'arco AMD; supponiamo quindi che O si trovi p. e. in O' fra A e B. È chiaro che gli angoli che O'A fa con O'D, O'C, O'B, sono rispettivamente eguali agli angoli che A'O, prolungamento di AO, fa con OD, OC, OB; quindi il fascio delle quattro rette OA, OB, OC, OD è uguale a quello delle rette O'A, O'B, O'C, O'D.

Laonde il rapporto anarmonico dei punti A, B, C, D si potrà esprimere sotto una di queste due forme

$$\frac{sen\ AOD}{sen\ AOB}:\frac{sen\ COD}{sen\ COB},$$

$$\frac{sen\,\frac{1}{2}\,AD}{sen\,\frac{1}{2}\,AB}:\frac{sen\,\frac{1}{2}\,CD}{sen\,\frac{1}{2}\,CB}.$$

20. Il rapporto anarmonico di quattro punti situati sulla circonferenza di un cerchio può esprimersi per mezzo delle corde che uniscono i punti dati. Questa proposizione si dimostra con grande facilità per mezzo della trigonometria. Infatti, indicando con R il raggio del cerchio, si ha

$$sen\,AOD = \frac{AD}{2R},\quad sen\,AOB = \frac{AB}{2R},$$

$$sen\,COD = \frac{CD}{2R},\quad sen\,COB = \frac{CB}{2R};$$

laonde

$$\frac{sen\,AOD}{sen\,AOB} : \frac{sen\,COD}{sen\,COB} = \frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB}.$$

Ma sarà bene darne una dimostrazione puramente geometrica.

Sieno *(fig. 446)* A, B, C, D i quattro punti dati che uniremo colle rette AB, BC, CD, AC, AD. Prendiamo il punto O in modo che AB' risulti eguale ad AB; conduciamo B'E parallela a CD e tiriamo AE. Il quadrilatero OAB'E è iscrittibile in un cerchio, perchè l'angolo AOE = ADC = C'B'E è supplementario dell'angolo AB'E. Quindi l'angolo AB'E = ABC; dippiù l'angolo AOB' = AEB' perchè entrambi iscritti nello stesso segmento di cerchio AOEB'; talchè l'angolo AEB' = ACB e per conseguenza i due triangoli ABC, AB'E sono eguali e BC = B'E. Laonde si ha

$$\frac{C'D}{C'B'} = \frac{CD}{CB};\ \text{e poichè}\ \frac{AD}{AB'} = \frac{AD}{AB},$$

si ottiene

$$\frac{AD}{AB'} : \frac{C'D}{C'B'} = \frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB};$$

ma il primo membro rappresenta il rapporto anarmonico dei quattro punti A, B, C, D, dunque ec.

Giovandosi di una relazione dimostrata nel n° 10, si vede che fra i seni della metà degli archi formati da quattro punti presi sopra una circonferenza di cerchio, ha luogo la seguente eguaglianza:

$$sen\frac{1}{2}AB.sen\frac{1}{2}CD+sen\frac{1}{2}AC.sen\frac{1}{2}DB+sen\frac{1}{2}AD.sen\frac{1}{2}BC=0$$

Se i punti A, B, C, D si uniscono al centro del cerchio, si forma un fascio di quattro rette, e gli angoli compresi da queste rette sono misurate dagli archi AB, CD ec.; quindi si ha l'altra notevole relazione:

$$sen\,AB\,.\,sen\,CD+sen\,AC\,.\,sen\,DB+sen\,AD\,.\,sen\,BC=0.$$

Da quest' ultima eguaglianza si possono dedurre le formole fondamentali della trigonometria rettilinea, come ha mostrato Chasles nella sua *Geometria superiore.*

III.

21. Il rapporto anarmonico di quattro piani A, B, C, D che passano per la stessa linea retta (pag. 218, teorema IX) è espresso da

$$\frac{sen\,(A,D)}{sen\,(A,B)}:\frac{sen\,(C,D)}{sen\,(C,B)},$$

ove con (A, D) s'intende l'angolo compreso tra i piani A e D ec.

22. Se da un punto della superficie di una sfera si conducono quattro archi di circoli massimi, i quali vengano tagliati da un quinto arco di cerchio massimo nei punti A, B, C, D *(fig. 447)*, l'espressione

$$\frac{sen\,AD}{sen\,AB}:\frac{sen\,CD}{sen\,CB}$$

si chiama *rapporto anarmonico del fascio sferico formato dai quattro cerchi massimi.* È facile provare che questo rapporto è costante.

Infatti questa frazione esprime il rapporto anarmonico del fascio formato dalle rette che uniscono i punti A, B, C, D al centro della sfera, il quale rapporto è costante perchè uguale al rapporto anarmonico dei piani dei quattro cerchi massimi dati.

Se O è il vertice del fascio sferico, il rapporto anarmonico di questo fascio può anche essere espresso nel seguente modo:

$$\frac{sen\ \mathrm{AOD}}{sen\ \mathrm{AOB}} : \frac{sen\ \mathrm{COD}}{sen\ \mathrm{COB}};$$

perchè l'angolo formato da due circoli massimi è uguale a quello dei loro piani.

Per *rapporto anarmonico di quattro punti* A, B, C, D *di un cerchio massimo*, s'intende il rapporto anarmonico di un fascio formato da quattro archi di cerchi massimi che passano per questi punti e che sono condotti per un punto qualunque della superficie della sfera.

23. Se i piani dei quattro cerchi massimi formano un sistema armonico, il fascio che ne nasce si chiama *fascio sferico armonico*, ed è rappresentato dalla relazione

$$sen\ \mathrm{AOD} \,.\, sen\ \mathrm{BOC} = sen\ \mathrm{AOB} \,.\, sen\ \mathrm{COD}\,.$$

Se gli angoli fatti da due cerchi massimi sono divisi per metà, i due cerchi massimi e i due archi bisettori formano un fascio sferico armonico. (fig. 447).

Siano, infatti, OA, OC i due archi dati, e OB, OD gli archi bisettori; abbiamo $sen\ \mathrm{AOD} = sen\ \mathrm{A'OD} = sen\ \mathrm{DOC}$ e $sen\ \mathrm{AOB} = sen\ \mathrm{BOC}$; e perciò

$$sen\ \mathrm{AOD} \,.\, sen\ \mathrm{BOC} = sen\ \mathrm{AOB} \,.\, sen\ \mathrm{COD}.$$

Reciprocamente, *se in un fascio armonico sferico due archi coniugati sono perpendicolari fra loro, essi divideranno per metà gli angoli fatti dagli altri due archi.*

Infatti si ha

$$\frac{sen\ \mathrm{AOD}}{sen\ \mathrm{AOB}} = \frac{sen\ \mathrm{COD}}{sen\ \mathrm{COB}};$$

e supponendo l'angolo BOD retto,

$$\frac{sen\ \mathrm{A'OD}}{cos\ \mathrm{A'OD}} = \frac{sen\ \mathrm{COD}}{cos\ \mathrm{COD}},$$

ovvero

$$tan\ \mathrm{A'OD} = tan\ \mathrm{COD},$$

o ancora

$$\mathrm{A'OD} = \mathrm{COD}, \text{ ovvero } \mathrm{AOB} = \mathrm{COB}.$$

24. Siano AD (*fig. 448*) un arco tagliato armonicamente nei punti A, B, C, D da un fascio sferico; A*d* l'intersezione del piano del cerchio massimo AD col piano tangente la sfera nel punto A; O il centro di questa sfera. Le rette OA, OB, OC, OD formano un fascio armonico; quindi i punti A, *b*, *c*, *d* sono in proporzione armonica, e

$$\frac{\mathrm{A}d - \mathrm{A}c}{\mathrm{A}d} = \frac{\mathrm{A}c - \mathrm{A}b}{\mathrm{A}b};$$

ovvero, prendendo il raggio OA della sfera eguale all'unità

$$\frac{tan\ \mathrm{AD} - tan\ \mathrm{AC}}{tan\ \mathrm{AD}} = \frac{tan\ \mathrm{AC} - tan\ \mathrm{AB}}{tan\ \mathrm{AB}},$$

cioè:

Se un arco AD *è tagliato armonicamente, le tangenti di* AB, AC, AD *sono in proporzione armonica.*

25. Siano N il punto medio dell'arco AC, e A'D' l'intersezione del piano tangente alla sfera in N col piano dell'arce AD. I punti A', B', C', D' sono in proporzione armonica e N è il punto medio del segmento A'C'; quindi

$$\mathrm{NC'}^2 = \mathrm{NB'} \,.\, \mathrm{ND'};$$

ovvero

$$tan^2\mathrm{NC} = tan\ \mathrm{NB} \,.\, tan\ \mathrm{ND}.$$

26. Abbiasi sulla sfera un cerchio minore. Per questo cerchio e pel centro N della sfera facciamo passare una superficie conica. Per una generatrice qualunque NO di questa superficie conduciamo quattro piani, i quali segneranno

sulla superficie della sfera gli archi di cerchi massimi OA, OB, OC, OD *(fig. 449)*. Il *rapporto anarmonico di questo fascio sferico si dice il rapporto anarmonico dei quattro punti del circolo minore.* È facile provare che questo rapporto è costante.

Infatti il rapporto anarmonico degli archi OA, OB, OC, OD è uguale a quello dei quattro piani condotti per questi archi, il quale ultimo rapporto è costante perchè uguale a quello dei quattro punti ottenuti dalla loro intersezione colla base circolare del cono.

Il rapporto anarmonico dei quattro punti del circolo minore può esprimersi in funzione dei lati del quadrilatero sferico di cui questi quattro punti sono i vertici.

Sappiamo dalla Trigonometria che indicando con A, B, C gli angoli, con a, b, c i lati di un triangolo sferico, con R il raggio sferico del circolo circoscritto a questo triangolo, si ha

$$sen\, C = \frac{cot\, R \,.\, sen \frac{1}{2} c}{cos \frac{1}{2} a \,.\, cos \frac{1}{2} b}. \text{ (}^1\text{)}$$

Applicando questa formola ai due triangoli AOD, BOC, otterremo due nuove formole che moltiplicate fra loro daranno

$$sen\, AOD \,.\, sen\, BOC = \frac{cot^2 R \,.\, sen \frac{1}{2} AD \,.\, sen \frac{1}{2} BC}{cos \frac{1}{2} AO \,.\, cos \frac{1}{2} DO \,.\, cos \frac{1}{2} BO \,.\, cos \frac{1}{2} CO}.$$

Similmente dai due triangoli AOB, COD si ottiene

$$sen\, AOB \,.\, sen\, COD = \frac{cot^2 R \,.\, sen \frac{1}{2} AB \,.\, sen \frac{1}{2} CD}{cos \frac{1}{2} AO \,.\, cos \frac{1}{2} BO \,.\, cos \frac{1}{2} CO \,.\, cos \frac{1}{2} DO}.$$

(¹) Vedi trigonometria di Serret, pag. 198 della traduzione italiana.

Dividendo queste due formole l' una per l' altra si trova finalmente

$$\frac{sen\,AOD\,.\,sen\,BOC}{sen\,AOB\,.\,sen\,COD}=\frac{sen\,\frac{1}{2}\,AD\,.\,sen\,\frac{1}{2}\,BC}{sen\,\frac{1}{2}\,AB\,.\,sen\,\frac{1}{2}\,CD},$$

che è la relazione cercata.

IV.

Per illustrare le teoriche svolte in questa Nota, daremo qualche esempio; avvertendo che per brevità il rapporto anarmonico di un fascio di quattro rette OA, OB, OC, OD sarà da noi rappresentato con O . ABCD.

27. *Se due triangoli hanno i loro vertici due a due sopra tre rette concorrenti in uno stesso punto, i loro lati s' incontreranno due a due in tre punti situati in linea retta.*

Sieno (*fig.* 450) ABC, A'B'C' i due triangoli i cui vertici sono due a due sulle tre rette AA', BB', CC' che s' incontrano nello stesso punto O: dico che le intersezioni P, Q, R dei tre lati BC, AC, AB del primo triangolo coi tre lati B'C', A'C', A'B' rispettivamente del secondo sono in una stessa linea retta.

Uniamo il punto P coi punti A, A', O, avremo evidentemente che A . PCA'B = A' . PC'AB'; dunque (pag. 104, Nota) i punti P, Q, R sono in una stessa linea retta.

Reciprocamente: *Se due triangoli sono tali che i loro lati si tagliano due a due rispettivamente in tre punti situati in linea retta, i loro vertici si trovano sopra tre rette concorrenti in uno stesso punto.*

I triangoli CQC', BRB' hanno i vertici due a due sopra tre rette BC, B'C', RQ che concorrono in uno stesso punto P, quindi i tre lati CC', CQ, QC' del primo incontreranno rispettivamente i tre lati BB', BR, RB' del secondo in tre punti O, A, A' situati in linea retta.

Questi teoremi, attribuiti a Desargues, è chiaro che avranno altresì luogo se i triangoli sono in piani differenti. Infatti affinchè le rette BB', CC' s'incontrino è necessario che sieno in uno stesso piano; quindi anche le rette BC e B'C' dovranno essere in uno stesso piano e per conseguenza dovranno incontrarsi nella linea d'intersezione dei piani dei due triangoli. Al modo stesso si proverebbe che le rette AB, A'B' e AC, A'C' debbono incontrarsi in punti situati sulla medesima linea d'intersezione; dunque ec.

Poncelet ha dato il nome di figure *omologiche* a due figure tali che i punti omologhi siano sopra rette concorrenti in uno stesso punto, detto *centro d'omologia*, e le cui linee omologhe s'incontrino sopra una stessa retta, chiamata *asse d'omologia*. Quindi i triangoli ABC, A'B'C' sono due figure omologiche, di cui O è il centro d'omologia e PQR l'asse d'omologia.

28. Data una figura si può costruire la sua omologica giovandosi del seguente teorema dovuto a Chasles:

Preso nel piano d'una figura un punto O *e un asse fisso* X, *se sul raggio condotto da* O *a ciascun punto* m *della figura si determina un secondo punto* m' *mediante la relazione*

$$\frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m'} = \lambda \frac{\mu m}{\mu m'},$$

ove λ *è una costante e* μ *è il punto d'intersezione di* Om *col-l'asse* X, *il punto* m' *apparterrà ad una figura omologica alla prima. Il punto* O *e l'asse* X *saranno il centro e l'asse d'omologia delle due figure.*

La dimostrazione di questo teorema si riduce a provare che due rette omologhe delle due figure s'incontrano sul-l'asse fisso; poichè, in virtù della fatta costruzione, i punti omologhi già si trovano sopra rette concorrenti ad uno stesso punto.

Siano a ed a'; m ed m' due coppie di punti corrispondenti; avremo

$$\frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}a'} = \lambda \frac{\alpha a}{\alpha a'} \text{ e } \frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}m'} = \lambda \frac{\mu m}{\mu m'};$$

da cui

$$\frac{Oa}{Oa'} : \frac{\alpha a}{\alpha a'} = \frac{Om}{Om'} : \frac{\mu m}{\mu m'} .$$

Dunque le due serie di punti O, a, α, a' e O, m, μ, m' hanno lo stesso rapporto anarmonico, e per conseguenza (pag. 103, Nota) le due rette am, $a'm'$ concorrono sull'asse fisso $\alpha\mu$. Laonde le rette omologhe nelle due figure s'incontrano sopra una medesima retta; ma per la costruzione fatta i punti omologhi si trovano sopra rette concorrenti ad uno stesso punto, dunque le due figure sono omologiche.

Chasles dà alla costante λ il nome di *coefficiente di omologia* delle due figure.

Se è dato un punto a' della figura che si vuol costruire, corrispondente ad un punto a della figura proposta, questa costante è determinata dalla relazione:

$$\frac{Oa}{Oa'} : \frac{\alpha a}{\alpha a'} = \lambda .$$

29. Nel testo abbiamo considerato le figure *omotetiche*; ora è facile vedere che l'omotetia è un caso particolare dell'omologia, che corrisponde all'ipotesi che l'asse d'omologia sia all'infinito. Infatti, facendo questa ipotesi il rapporto $\frac{\mu m}{\mu m'}$ diventa eguale all'unità, e la relazione si riduce a

$$\frac{Om}{Om'} = \lambda ,$$

ch'è il rapporto di similitudine delle due figure.

30. Per le figure sferiche si verificano teoremi che hanno molta analogia coi precedenti: ne accennerò due soli.

1°. *Se gli archi di circoli massimi che uniscono i vertici corrispondenti di due triangoli sferici si tagliano in uno stesso punto, i punti di concorso dei lati opposti sono situati sopra una stessa circonferenza di circolo massimo.*

2°. *Se due poligoni sferici sono composti di uno stesso numero di triangoli tali, che i punti di concorso di due lati omologhi qualunque, presi in due triangoli corrispondenti, sieno tutti situati sopra una medesima circonferenza di cerchio massimo, gli archi di circoli massimi che uniscono i vertici omologhi di questi due poligoni si tagliano tutti in uno stesso punto.*

La reciproca del primo teorema è vera; quella del secondo non sempre.

Questi teoremi si ottengono immediatamente applicando i metodi della Nota precedente; tuttavia è utile esercizio pei giovani il cercarne la dimostrazione diretta.

31. *Se un esagono è iscritto in un cerchio, le intersezioni dei lati opposti sono tre punti in linea retta. (fig. 451).*

Sieno ABCDEF l'esagono iscritto, e P, Q, R i punti d'intersezione dei lati opposti. È chiaro che $Q.CDER = F.CDER = F.CDEA = B.CDEA = B.CDEP = Q.CDEP$; quindi i punti P, Q, R sono in linea retta.

Questo teorema appartiene a Pascal. La linea PQR si chiama *linea di* Pascal.

32. Dati n punti sopra un piano potremo con essi formare tanti poligoni di n lati quante sono le permutazioni di n lettere, cioè $1.2.3 \ldots (n-1)n$; questi poligoni però non saranno tutti differenti fra loro. Infatti siccome in ognuno dei punti dati concorrono due lati del poligono, a cominciare da ciascun punto si potranno formare due poligoni eguali; quindi il numero dei poligoni eguali sarà $2n$; e per conseguenza il numero dei poligoni differenti di n lati che si possono formare con n punti è $3.4 \ldots (n-1)$. Con sei punti dunque si possono costruire sessanta esagoni differenti; è facile provare che il teorema di Pascal ha luogo per tutti questi esagoni.

Sieno infatti *(fig. 452)* ABCDEF un di questi esagoni, e L, M, N le intersezioni rispettive dei lati AB, DE; DC, AF; BC, EF. È chiaro che

$$M.FNCE = C.FBDE = A.FBDE = M.ALDE;$$

e per conseguenza L, M, N sono in linea retta.

Da questo teorema segue che le linee di PASCAL sono 60.

Il numero totale dei punti d'intersezione dei lati opposti è 180; ma essi non sono tutti diversi. Infatti, consideriamo l'intersezione del primo e del quarto lato, è chiaro che rimanendo immutati questi due lati, coi 6 punti dati potremo costruire quattro soli poligoni differenti; dunque ciascun punto d'intersezione di due lati opposti appartiene a 4 poligoni differenti; per conseguenza il numero totale dei punti d'intersezione distinti è $\frac{180}{4} = 45$.

Dato un esagono ABCDEF una linea di PASCAL la rappresenteremo con

$$\left|\begin{matrix} AB, & CD, & EF \\ DE, & FA, & BC \end{matrix}\right|$$

33. *Le sessanta linee di* Pascal *sono composte di venti serie di tre, ciascuna delle quali passa per un punto.*

Sia ABCDEF un esagono; la linea di PASCAL corrispondente è

$$\left|\begin{matrix} AB, & CD, & EF \\ DE, & FA, & BC \end{matrix}\right| \text{ ovvero } LMN$$

Formiamo i triangoli PQR, P'Q'R' che hanno rispettivamente per lati AB, CD, EF; e DE, FA, BC; i lati corrispondenti di questi triangoli incontrandosi in punti disposti in linea retta, ne segue che le rette che uniscono i vertici omologhi, cioè PP', QQ', RR', debbono concorrere in un punto. Ora è facile vedere che queste rette sono le tre seguenti linee di PASCAL.

$$\left|\begin{matrix} AB, & ED, & CF \\ DC, & FA, & BE \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} BA, & DE, & FC \\ EF, & CB, & AD \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} CD, & FA, & EB \\ EF, & BC, & DA \end{matrix}\right|,$$

che appartengono ai tre esagoni, ABEDCF, BADEFC, CDAFEB. Dunque le tre linee di PASCAL

$$\left|\begin{matrix} AB, & ED, & CF \\ DC, & FA, & BE \\ EF, & CB, & AD \end{matrix}\right|$$

s'incontrano in un punto.

Una dimostrazione analoga potrebbe farsi per le altre linee. Questo teorema è di STEINER.

Sulle linee di PASCAL si possono dimostrare molti altri interessanti teoremi, pei quali noi rinviamo i lettori alla pregevole Nota pubblicata dal Sig. KIRKMAN nel 5° Volume del *Cambridge and Dublin Mathe: Journal: Sull' esagono completo iscritto in una sezione conica.*

34. 1° *Se tre archi di circoli massimi condotti dai vertici di un triangolo sferico, passano per lo stesso punto, ciascuno determina sul lato opposto due segmenti tali che il prodotto dei seni di tre segmenti non consecutivi è uguale al prodotto dei seni degli altri tre segmenti ;*

2° *Un cerchio massimo che taglia i tre lati di un triangolo sferico, determina sopra di essi sei segmenti tali, che il prodotto dei seni di tre segmenti non contigui è uguale al prodotto dei seni degli altri segmenti.*

Il secondo teorema è stato già dimostrato (Nota III n° 8); in un modo analogo si dimostra il primo.

Ciò posto, sieno ABC un triangolo sferico (*fig.* 453) e AD, BE, CF tre archi di circoli massimi condotti dai vertici e passanti per uno stesso punto O; conduciamo gli archi di circoli massimi ED, EF, FD e siano M, N, P i punti nei quali questi archi incontrano rispettivamente AB, CB, AC. È chiaro che vi sono due punti M, due N, due P. L'arco ME tagliando i lati del triangolo ABC nei punti E, D, M si ha pel teorema 2°.

$$sen\ AM.\ sen\ DB.\ sen\ CE = sen\ BM.\ sen\ CD.\ sen\ EA\ ,$$

e pel teorema 1°

$$sen\ FA.\ sen\ EC.\ sen\ DB = sen\ FB.\ sen\ CD.\ sen\ AE\ ;$$

dividendo queste due relazioni l' una per l' altra

$$\frac{sen\ AM}{sen\ FA} = \frac{sen\ BM}{sen\ FB};$$

da cui

$$sen\ AM.\ sen\ FB = sen\ BM.\ sen\ FA\ ;$$

dunque i quattro punti A, F, B, M sono in proporzione armonica. Al modo stesso si proverebbe che i quattro punti C, D, B, N e P, C, E, A sono altresì in proporzione armonica.

Dipiù osservando che C. AFBM = C. EFDM, ne segue che anche l' arco EM è diviso armonicamente; e per la stessa ragione EF, FD sono tagliati armonicamente. Similmente CF, AD, BE sono tagliati armonicamente.

Se finalmente prendiamo MC, MA, ME come archi di un fascio sferico armonico (i primi due essendo coniugati), il quarto arco deve necessariamente passare pei punti N e P; cioè i punti M, N, P sono sopra uno stesso circolo massimo.

35. Sia CEOD un quadrilatero sferico *completo*. In virtù di quello che abbiamo dimostrato nel n° precedente si vede che ciascuna delle tre diagonali ED, OC, AB è tagliata armonicamente dalle altre due; supponiamo ora che ED, OC sieno respettivamente eguali a un quadrante; dico che anche AB è un quadrante. Infatti poichè EM è tagliato armonicamente abbiamo cot EM + cot EM' = 2 cot ED = o; quindi EM è il supplemento di EM', e per conseguenza M'D = MD. Similmente si trova M'O = FO. Ora poichè l' arco di cerchio massimo AOD taglia i lati del triangolo FM'M, abbiamo
sen AM. sen FO. sen M'D = sen AF. sen M'O. sen MD;
ovvero sen AM = sen AF; e per conseguenza AM ed AF sono supplementari. Ma AM essendo tagliata armonicamente, dà 2 cot AB = cot AF + cot AM = o, perchè due archi supplementari hanno le cotangenti eguali e di segno contrario; dunque AB è uguale ad un quadrante; ed abbiamo il teorema:

Se due delle tre diagonali di un quadrilatero sferico completo sono quadranti, la terza è altresì un quadrante.

NOTA V.

Involuzione.

1. *Dati sei punti* a, a'; b, b'; c, c' *in involuzione, se prendiamo due altri punti* d, d' *che formino colle due prime coppie* a, a' *e* b, b' *una involuzione,* d *e* d' *formeranno anche una involuzione colla terza coppia e una delle due prime.*

Infatti, si ha

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{cb}{cb'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{c'b'}{c'b},$$

e

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{db}{db'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{d'b'}{d'b};$$

da cui si deduce

$$\frac{cb}{cb'} : \frac{db}{db'} = \frac{c'b'}{c'b} : \frac{d'b'}{d'b},$$

la quale ultima eguaglianza prova che i quattro punti b, b', c, d hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei punti b', b, c', d'. Dunque le tre coppie b, b'; c, c'; d, d' formano una involuzione.

2. Sieno e ed f due punti, ciascuno dei quali forma coi quattro a, a'; b, b' una involuzione di cinque punti in cui questo punto e o f coincide col suo coniugato. In virtù del teorema precedente, questi due punti hanno la stessa proprietà rispetto ai due sistemi b, b'; c, c'. Dunque essi dividono armonicamente tutti e tre i segmenti aa', bb', cc'; talchè si ha il teorema:

Se tre sistemi di due punti a, a'; b, b'; c, c' *sono in involuzione, vi sono due punti che dividono armonicamente i tre segmenti* aa', bb', cc'.

Questi due punti sono stati chiamati da Chasles i *punti doppi* della involuzione. Tra ciascuno di essi e due qualunque delle tre coppie di punti in involuzione, hanno luogo tutte le relazioni date a pag. 108 (Nota); e ciascuna di queste relazioni potrà servire per determinare i punti doppi.

3. *I punti doppi* e *ed* f *dell' involuzione alla quale appartengono le due coppie di punti coniugati* a, a' *e* b, b', *formano una involuzione di sei punti colle due coppie* a, b' *e* a', b.

Infatti, i due punti e, f dividono armonicamente ciascuno dei due segmenti aa', bb'; quindi si ha

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f} \text{ e } \frac{be}{bf} = -\frac{b'e}{b'f};$$

da cui

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = \frac{b'e}{b'f} : \frac{be}{bf},$$

cioè il rapporto anarmonico dei quattro punti a, a', e, f è uguale a quello dei quattro punti b', b, e, f. Dunque le tre coppie a, b'; a', b; e, f formano una involuzione.

La medesima proprietà ha luogo anche pei segmenti ab, $a'b'$; laonde i due punti e, f appartengono, come punti coniugati, a due involuzioni differenti, in ciascuna delle quali gli altri quattro punti sono a, a', b, b', ma accoppiati differentemente.

4. *Dati sei punti* a, a'; b, b'; c, c', *coniugati due a due, in involuzione, se prendiamo un punto qualunque* m *sulla stessa retta, avremo sempre, chiamando* α, β, γ *i mezzi dei tre segmenti* aa', bb', cc', *la relazione*

$$(1) \quad ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta = 0.$$

nella quale si osserva la regola generale dei segni.

Sieno e, f i punti doppi dell' involuzione. Poichè questi due punti dividono armonicamente ciascuno dei tre segmenti aa', bb', cc', si hanno le relazioni (Nota IV, n° 13.)

$$ma \cdot ma' + me \cdot mf = 2m\alpha \cdot mO,$$
$$mb \cdot mb' + me \cdot mf = 2m\beta \cdot mO,$$
$$mc \cdot mc' + me \cdot mf = 2m\gamma \cdot mO,$$

O essendo il centro d' involuzione.

Moltiplicando queste eguaglianze rispettivamente per

$\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ e sommandole membro a membro, si ottiene la (1), avendo riguardo alle identità

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0\,,$$
$$m\alpha \,.\, \beta\gamma + m\beta \,.\, \gamma\alpha + m\gamma \,.\, \alpha\beta = 0\,.$$

Se i punti b, b' coincidono col punto doppio e, e i due punti c, c' col secondo punto doppio f, la relazione (1) diventa

$$(2) \quad ma \,.\, ma' \,.\, ef + me^2 \,.\, f\alpha + mf^2 \,.\, \alpha e = 0\,.$$

5. Se nella (1) si suppone che il punto m coincida col punto a, si ha

$$ab \,.\, ab' \,.\, \gamma\alpha + ac \,.\, ac' \,.\, \alpha\beta = 0\,;$$

da cui

$$\frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}\,.$$

Al modo stesso si dimostrerebbero le altre relazioni

$$\frac{bc \,.\, bc'}{ba \,.\, ba'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}\,, \quad \frac{ca \,.\, ca'}{cb \,.\, cb'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}\,,$$

$$\frac{a'b \,.\, a'b'}{a'c \,.\, a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}\,, \quad \frac{b'c \,.\, b'c'}{b'a \,.\, b'a'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}\,, \quad \frac{c'a \,.\, c'a'}{c'b \,.\, c'b'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}\,.$$

le quali forniscono una nuova dimostrazione delle formole date nella Nota a pag. 108.

6. *Se sopra una retta si prendono due segmenti* aa', bb', *il loro punto centrale* O *e i loro mezzi* α, β, *si ha, per un punto qualunque* m *della retta, la relazione*

$$(3) \quad ma \,.\, ma' - mb \,.\, mb' + 2\alpha\beta \,.\, mO = 0\,.$$

Questa eguaglianza è un caso particolare della (1); ma può trovarsi direttamente.

Sieno e, f i due punti doppi; il loro punto medio è il punto centrale O; quindi si hanno le due relazioni

$$me \,.\, mf + ma \,.\, ma' = 2m\alpha \,.\, mO\,,$$
$$me \,.\, mf + mb \,.\, mb' = 2m\beta \,.\, mO\,.$$

le quali sottratte l'una dall'altra, membro a membro, danno la (3).

L'eguaglianza (3) può servire a costruire il punto centrale di una involuzione determinata da due segmenti aa', bb'. Se il punto m coincide col punto a, si ha

$$(4)\qquad \frac{ab \,.\, ab'}{a\mathrm{O}} = 2\alpha\beta$$

7. Le relazioni date a pag. 108 nella Nota, supposto il punto c all'infinito e indicando il suo conjugato c' con O, diverranno,

$$\frac{ab \,.\, ab'}{a'b \,.\, a'b'} = \frac{a\mathrm{O}}{a'\mathrm{O}},\quad \frac{ba \,.\, ba'}{b'a \,.\, b'a'} = \frac{b\mathrm{O}}{b'\mathrm{O}},\quad \mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}a' = \mathrm{O}b \,.\, \mathrm{O}b'$$

$$\frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}b} = \frac{ab'}{ba'},\quad \frac{\mathrm{O}a'}{\mathrm{O}b'} = \frac{a'b}{b'a},\quad \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{O}b'} = \frac{ab}{b'a'},\quad \frac{\mathrm{O}a'}{\mathrm{O}a} = \frac{a'b'}{ba}.$$

La terza eguaglianza mostra che il punto O è il centro d'involuzione; dunque il *centro di un sistema di punti in involuzione è il conjugato di un punto a distanza infinita.*

8. Dal teorema X pag. 109 risulta che fra i seni degli angoli formati dalle sei rette di un fascio in involuzione hanno luogo relazioni analoghe a quelle date nella Nota a pag. 108; così

$$\frac{sen\,(\mathrm{A},\mathrm{B})\,sen\,(\mathrm{A},\mathrm{B}')}{sen\,(\mathrm{A},\mathrm{C})\,sen\,(\mathrm{A},\mathrm{C}')} = \frac{sen\,(\mathrm{A}',\mathrm{B})\,sen\,(\mathrm{A}',\mathrm{B}')}{sen\,(\mathrm{A}',\mathrm{C})\,sen\,(\mathrm{A}',\mathrm{C}')},$$

$$sen\,(\mathrm{A},\mathrm{B})\,sen(\mathrm{B}',\mathrm{C})\,sen(\mathrm{C}',\mathrm{A}') = -\,sen(\mathrm{A}',\mathrm{B}')\,sen\,(\mathrm{B},\mathrm{C}')\,sen(\mathrm{C},\mathrm{A}),$$

ec.

Ciascuna di queste eguaglianze dà le altre e basta per definire l'involuzione di sei rette.

Pei fasci in involuzione vi sono due *raggi doppi*, i quali hanno la proprietà di formare un fascio armonico con due raggi coniugati qualunque.

9. *In un fascio di sei rette in involuzione, se due rette*

sono perpendicolari alle loro coniugate rispettivamente, le altre due rette coniugate sono altresì ad angolo retto.

Infatti, una trasversale taglierà le sei rette in sei punti *a*, *a'*, *b*, *b'*, *c*, *c'* in involuzione, e le circonferenze descritte sui due segmenti *aa'*, *bb'* come diametri, passeranno pel vertice del fascio, poichè i due raggi OA, OA' si suppongono perpendicolari, come pure OB, OB'. Dunque la circonferenza descritta sul terzo segmento *cc'* passa altresì per il punto O e per conseguenza i due raggi OC, OC' sono rettangolari.

Laonde possiamo dire che *se tre angoli retti hanno lo stesso vertice, i loro sei lati formano un fascio in involuzione.*

Osservazione. — La dimostrazione precedente suppone che le rette date si trovino disposte nell'ordine seguente. OA, OB, OC, OA', OB', OC', la prima essendo coniugata alla quarta, la seconda alla quinta e la terza alla sesta. Negli altri due casi il teorema non può aver luogo.

10. *Se gli angoli che due raggi di un fascio in involuzione fanno coi loro coniugati respettivamente hanno la stessa bisettrice questa retta è altresì la bisettrice dell'angolo formato dagli altri due raggi coniugati.*

I due angoli AOA', BOB' hanno la stessa bisettrice; bisogna provare che l'angolo COC' è altresì diviso in due parti uguali da questa retta. Infatti questa retta e la sua perpendicolare dividono armonicamente ambedue gli angoli AOA', BOB'; per conseguenza sono i raggi doppi dell'involuzione, e dividono quindi armonicamente il terzo angolo COC'. Ma sono rettangolari, dunque sono le bisettrici di quest'angolo e del suo supplemento.

Passiamo a dare qualche applicazione della teoria dell'involuzione.

11. *Qualunque trasversale condotta nel piano di un quadrilatero incontra i suoi quattro lati e le sue due diagonali in sei punti che sono in involuzione. (fig. 454.)*

Sia ABCD il quadrilatero. Una trasversale R incontra i lati opposti AB, CD in *a* e *a'*; gli altri due lati AD, BC in *b* e *b'*; e le due diagonali AC, BD in *c* e *c'*. I sei punti *a*, *a'*; *b*, *b'*; *c*, *c'*, coniugati due a due, sono in involuzione.

Infatti, si ha: $A \,.\, abc'c = A \,.\, BDc'c = C \,.\, BDc'c = C \,.\, b'a'c'c = C \,.\, a'b'cc'$. Dunque i sei punti a, a'; b, b'; c, c' sono in involuzione.

Se la trasversale passa pel punto d'intersezione delle diagonali, questo punto sarà un punto doppio del sistema determinato dalle coppie di punti a, a'; b, b'.

Se prendiamo per trasversale la retta che unisce i punti di concorso dei lati opposti, ciascuno di questi due punti è nell'involuzione un punto doppio. Essi dividono dunque armonicamente il segmento compreso tra le due diagonali.

12. *Le sei rette condotte da uno stesso punto ai quattro vertici e ai punti di concorso dei lati opposti di un quadrilatero, formano un fascio in involuzione (fig. 455.)*

Sia ABCD il quadrilatero; O il punto dal quale si conducono le sei rette OA, OB, ec. OAFB è un quadrilatero, di cui OF, AB sono le due diagonali. La retta DC incontra i quattro lati e le diagonali di questo quadrilatero in sei punti in involuzione. Dunque le sei rette OA, OC; OB, OD; OE, OF, che passano per questi sei punti, sono in involuzione.

13. Il punto O può essere all'infinito, allora le sei rette condotte pei vertici e i punti di concorso dei lati opposti del quadrilatero sono parallele, ma incontreranno sempre una stessa retta in sei punti in involuzione. Dunque: *Le proiezioni dei quattro vertici e dei due punti di concorso dei lati opposti di un quadrilatero, sopra una retta, sono sei punti in involuzione.*

14. Supponiamo che il punto dal quale si conducono le rette ai vertici e ai punti di concorso dei lati opposti di un quadrilatero sia uno dei punti d'intersezione delle due circonferenze di cerchio descritte sulle due diagonali come diametri. Le rette condotte da questo punto a ciascuna coppia di vertici opposti saranno rettangolari; quindi le altre due rette dell'involuzione saranno altresì rettangolari, e per conseguenza, la circonferenza descritta sulla retta che unisce i punti di concorso dei lati opposti, come diametro, passerà per gli stessi punti delle due altre circonferenze. Si ha dunque il teorema;

Le tre circonferenze di cerchio che hanno per diametri le diagonali, e la retta che unisce i punti di concorso dei lati opposti di un quadrilatero, hanno tutte e tre gli stessi punti d' intersezione.

Dal quale si deduce l' altro:

I punti medii delle due diagonali di un quadrilatero e il mezzo della retta che unisce i punti di concorso dei lati opposti sono in linea retta.

15. *I sei punti d' intersezione di una trasversale che incontra un cerchio e un quadrilatero iscritto in esso sono in involuzione.*

Sia (*fig.* 456) OPO'P' il quadrilatero dato ed R la trasversale che incontra i lati opposti OP', PO' in a, a'; i lati opposti OP, O'P' in c, c'; e la circonferenza nei punti b, b'; i punti a, a'; b, b'; c, c' sono in involuzione.

Infatti si ha:

$O \,.\, abcb' = O \,.\, P'bPb' = O' \,.\, P'bPb' = O' \,.\, c'ba'b' = O' \,.\, a'b'c'b$; dunque ec.

Sieno d e d' i punti nei quali le due diagonali incontrano la trasversale; allora tre qualunque delle quattro coppie di punti a, a'; b, b'; c, c'; d, d' sono in involuzione.

Questa proposizione è conosciuta sotto il nome di teorema di DESARGUES sull' involuzione.

Fra i sei punti ha luogo la relazione (pag. 108, Nota)

$$\frac{bc \,.\, bc'}{ba \,.\, ba'} = \frac{b'c \,.\, b'c'}{b'a \,.\, b'a'}.$$

16. Il teorema espresso dall' ultima eguaglianza è un caso particolare del seguente:

Quando un poligono di un numero pari di lati è iscritto in un cerchio, se si conduce una trasversale che incontra i lati di posto pari in punti α, α', α'' ...., i lati di posto dispari in punti β, β', β'' ...., e la circonferenza nei punti b *e* b', *si avrà:*

$$\frac{b\alpha \,.\, b\alpha' \,.\, b\alpha'' \,.....}{b\beta \,.\, b\beta' \,.\, b\beta'' \,.....} = \frac{b'\alpha \,.\, b'\alpha' \,.\, b'\alpha'' \,.....}{b'\beta \,.\, b'\beta' \,.\, b'\beta'' \,.....}$$

Supponiamo che il teorema si verifichi per un poligono di $2n$ lati, dico che sarà vero per uno di $2n+2$ lati. Infatti quest' ultimo potrà sempre essere decomposto con una diagonale in un quadrilatero e in un poligono di $2n$ lati; dalle relazioni corrispondenti a questi due poligoni si deduce immediatamente quella generale.

17. Dal teorema di Desargues si trae la conseguenza che: *In qualunque quadrilatero le due coppie di lati opposti e le due diagonali formano tre coppie di rette che danno luogo, relativamente agli angoli che fanno tra loro, a tutte le relazioni d' involuzione di un fascio di sei rette.*

Infatti, conducendo una trasversale qualunque si ottengono sei punti in involuzione, e le rette condotte da uno stesso punto a questi sei punti formano un fascio in involuzione. Se la trasversale si allontana all' infinito, queste sei rette sono parallele ai quattro lati e alle due diagonali del quadrilatero. Dunque ec.

18. *Dati quattro punti in linea retta, determinare sopra questa retta un quinto punto tale, che il prodotto delle sue distanze a due dei quattro punti dati, stia al prodotto delle sue distanze agli altri due, in un rapporto costante.*

Sieno a, a', b, b' i quattro punti dati, λ la ragione costante; si tratta di determinare un punto m tale, che si abbia

$$\frac{am\,.\,a'm}{bm\,.\,b'm}=\lambda.$$

È chiaro che questa relazione è soddisfatta da due punti m ed m'; infatti se m è determinato, il punto m' che insieme ad esso e alle due coppie a, a' e b, b' forma una involuzione soddisfarà all' eguaglianza (Nota a pag. 108.)

$$\frac{am\,.\,a'm}{bm\,.\,b'm}=\frac{am'\,.\,a'm'}{bm'\,.\,b'm'},$$

e quindi

$$\frac{am'\,.\,a'm'}{bm'\,.\,b'm'}=\lambda.$$

Ciò posto, sieno μ il punto medio del segmento compreso fra i due punti m ed m' e α, β quelli dei due segmenti aa', bb'; avremo (n° 5).

$$\frac{am \,.\, a'm}{bm \,.\, b'm} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu};$$

dunque

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \lambda.$$

Questa relazione dà il punto μ; ed allora la quistione è ridotta a quest'altra: *dati due segmenti* aa', bb' *e il mezzo* μ *di un terzo, determinare quest'ultimo.* Un modo di risolvere questo problema è il seguente:

Per un punto g preso arbitrariamente si fanno passare due circonferenze aventi per corde rispettive i due segmenti aa', bb'; e per lo stesso punto g e il secondo punto d'intersezione delle due circonferenze, se ne farà passare una terza avente il suo centro sulla perpendicolare alla retta aa' condotta pel punto μ. Questa circonferenza determinerà sulla retta aa' i due punti cercati m ed m'.

Un altro modo si deduce dalla relazione (1). Infatti se indichiamo con n un punto arbitrario, avremo nel caso attuale

$$na \,.\, na' \,.\, \beta\mu + nb \,.\, nb' \,.\, \mu\alpha + nm \,.\, nm' \,.\, \alpha\beta = 0;$$

se per maggiore semplicità supponiamo che il punto n coincida con μ, avremo

$$\mu m^2 \,.\, \alpha\beta = \mu a \,.\, \mu a' \,.\, \beta\mu + \mu b \,.\, \mu b' \,.\, \mu\alpha,$$

che determina il segmento μm.

In taluni casi il problema non ammette soluzioni; per una completa discussione vedi la *Geom. sup.* di Chasles pag. 205.

Questo problema celebre è conosciuto sotto il nome di problema della *sezione determinata* di Apollonio.

---

19. Se sei punti A, A', B, B', C, D', situati sopra uno stesso circolo massimo e coniugati due a due, sono tali che quattro fra essi abbiano il loro rapporto anarmonico eguale

a quello dei loro coniugati, diremo che i sei punti sono in *involuzione sferica.*

Proiettando il circolo massimo sopra un piano qualunque, si ottengono immediatamente teoremi affatto analoghi a quelli trovati per l'involuzione sopra una retta. Così è facile vedere che sul circolo massimo vi saranno quattro punti doppi, due dei quali non diametralmente opposti formano con una coppia di punti coniugati un sistema armonico.

Il punto medio dell'arco compreso fra due punti doppi non diametralmente opposti lo chiameremo *centro;* è chiaro che sul cerchio massimo vi sono quattro *centri.* Per trovare la proprietà di questi punti giova prendere per piano di proiezione il piano tangente alla sfera in uno di essi. Sia O questo punto *(fig. 457)*; O sarà il centro del sistema proiettato, ed avremo, indicando con E, E', i due punti doppi nel cui mezzo è O, $\tan \mathrm{OA} \,.\, \tan \mathrm{OA}' = \tan^2 \mathrm{OE}$, cioè che *il prodotto delle tangenti degli archi compresi fra il centro e qualunque coppia di punti coniugati è costante.* Da ciò segue che se OA diventa zero, OA' dev' essere uguale ad un quadrante: qundi *un centro di un sistema di punti in involuzione sferica è il coniugato di un punto alla distanza di un quadrante.*

Se da un punto della sfera conduciamo sei archi che sieno tagliati da un arco trasversale in sei punti in involuzione, diremo che questi archi formano *un fascio in involuzione sferica.*

I teoremi che abbiamo dati come applicazione delle teoriche risguardanti l'involuzione sopra una retta hanno i loro analoghi sulla sfera, come i giovani potranno agevolmente verificare.

NOTA VI.

Divisione omografica.

1. Chasles dice che due rette sono divise *omograficamente*, quando sono divise in punti che si corrispondono uno ad uno e in tal guisa che il rapporto anarmonico di quattro punti qualunque dell'una sia eguale al rapporto anarmonico dei quattro punti corrispondenti dell'altra: si dice ancora che questi punti formano due *divisioni omografiche*.

Lo stesso autore chiama *omografici* due fasci le cui rette si corrispondano una ad una ed in tal guisa, che il rapporto anarmonico di quattro rette qualunque del primo fascio sia eguale a quello delle quattro rette corrispondenti del secondo.

2. La costruzione di due divisioni omografiche si effettua facilmente. Infatti sieno date due rette R, R′ *(fig. 458)* delle quali la prima è divisa nei punti a, b, c, d ....; uniamo un punto qualunque O situato nel piano delle due rette ai punti a, b, c, d ....; le intersezioni a', b', c', d' ...., delle rette Oa, Ob, Oc, Od .... con R′ determineranno sulla seconda retta una divisione omografica alla prima, poichè quattro punti qualunque a, b, c, d, della retta R hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei quattro punti corrispondenti della retta R′. Se le due rette R ed R′ s' incontrano, il loro punto d' intersezione O′ rappresentando due punti di divisione omologhi coincidenti, lo diremo punto *comune* alle due divisioni.

Se pel punto O conduciamo due rette P e Q rispettivamente parallele a R′ ed R, è chiaro che il punto p sarà corrispondente al punto a distanza infinita nel quale P incontra R′; e il punto q' sarà corrispondente al punto a distanza infinita nel quale Q incontra R.

Il ragionamento fatto per costruire due divisioni omografiche, conduce al teorema che:

Un fascio di rette che incontra due altre rette, forma sopra queste ultime due divisioni omografiche.

Avendo presente la nota a pag. 103, risulta evidente la reciproca di questo teorema, cioè:

Allorchè due rette sono divise omograficamente, se il loro *punto di concorso, considerato come appartenente alla prima divisione, è il suo omologo nella seconda divisione, le rette che uniranno uno ad uno rispettivamente tutti i punti di divisione omologhi, concorrono in uno stesso punto.*

3. Per costruire un fascio omografico ad un fascio dato, si può procedere nel seguente modo. Sieno A, B, C, D,.... le rette del fascio dato, O il loro punto di concorso *(fig. 459)*; prendiamo sulla retta A per esempio, un punto qualunque *a* e per esso conduciamo una traversale R che taglia tutte le rette del fascio dato nei punti *b, c, d* ....; unendo un punto qualunque O' ai punti *a, b, c, d*...., le rette O'*a*, O'*b*, O'*c*, O'*d*, ... formeranno un fascio omografico al primo, perchè il rapporto anarmonico di quattro rette del primo fascio è eguale a quello delle rette corrispondenti del secondo.

Da ciò segue che:

Se due fasci di raggi che partono da due punti fissi s'incontrano due a due in punti situati in linea retta, questi raggi formano due fasci omografici.

La retta OO' rappresentando due rette omologhe dei due fasci, le quali coincidono, diremo che essa è un raggio *comune* ai due fasci.

La reciproca del teorema precedente è vera, cioè:

Se due fasci omografici sono disposti in tal guisa che la retta che unisce i loro centri considerata come appartenente al primo fascio, sia la sua omologa nel secondo, le altre rette del primo fascio incontreranno respettivamente le loro omologhe in punti situati in linea retta. (Nota a pag. 104).

I.

Le divisioni omografiche fatte sopra due rette e l'omografia di due fasci si possono esprimere in vari modi che tornano di grande utilità nelle applicazioni. Per lo che stimiamo bene darne un qualche cenno.

4. *Se due rette* R *ed* R' *sono divise omograficamente nei punti* a, b, c, ... ; a', b', c', ... ; *e se* m *ed* m' *sono due punti omologhi arbitrari presi sulle due rette; il rapporto* $\frac{\mathrm{am}}{\mathrm{bm}}$ *delle*

distanze di m *a due punti fissi* a, b *di* R *sta al rapporto* $\frac{a'm'}{b'm'}$ *delle distanze di* m' *ai due punti fissi* a', b' *omologhi ad* a, b, *in una ragione costante.*

E reciprocamente, *se due punti variabili* m, m' *dividono due rette* R *ed* R' *in segmenti i cui rapporti* $\frac{am}{bm}$, $\frac{a'm'}{b'm'}$ *stiano tra loro in una ragione costante, questi due punti formano sulle due rette due divisioni omografiche.*

1°. Fra i punti a, b, c, m della retta R, e i corrispondenti a', b', c', m', della retta R' ha luogo la relazione

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'},$$

da cui

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}\right);$$

ma $\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}$ è una quantità costante; dunque se rappresentiamo questa quantità con λ, avremo

$$\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2°. Sia c, c' un sistema particolare dei due punti m, m', avremo

$$\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}, \quad \frac{ac}{bc} = \lambda \frac{a'c'}{b'c'};$$

da cui

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'};$$

la quale relazione mostra che i punti m ed m' formano due divisioni omografiche.

5. L'espressione (1) può scriversi

$$am = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \frac{bm}{b\,c} \left(ac : \frac{a'c'}{b'c'}\right).$$

Se supponiamo che il punto b della retta R sia preso all'infinito, il rapporto $\frac{bm}{b\,c}$ è uguale all'unità, e si ha

$$am = \frac{a'm'}{b'm'}\left(ac : \frac{a'c'}{b'c'}\right) = \lambda\,\frac{a'm'}{b'm'} \quad \ldots\ldots. (2),$$

che può porsi sotto la forma

$$am = \frac{ac \,.\, b'c'}{b'm'} \cdot \frac{a'm'}{a'c'}.$$

Se ora supponiamo che il punto a' della retta R' sia preso all'infinito, il rapporto $\frac{a'm'}{a'c'}$ sarà eguale all'unità e si avrà:

$$am = \frac{ac \,.\, b'c'}{b'm'} = \frac{\lambda}{b'm'}$$

Il punto a è un punto della retta R che corrisponde all'infinito di R', e b' è il punto di R' che corrisponde all'infinito di R; indichiamo questi due punti respettivamente con P e Q'; l'espressione precedente dà

$$\lambda = Pm \,.\, Q'm' \ldots. (3$$

Laonde, *quando due rette sono divise omograficamente, se prendiamo sopra ciascuna il punto che corrisponde all'infinito dell'altra, il prodotto delle distanze di due punti omologhi qualunque ai due punti così determinati, è costante.*

Reciprocamente: *Se, a cominciare da due punti fissi* P *e* Q' *sopra due rette* R *ed* R', *prendiamo due punti* m *ed* m', *tali che il prodotto delle loro distanze a* P *e* Q' *rispettivamente, sia costante, questi due punti divideranno le due rette omograficamente.*

Sieno, infatti, a ed a' due posizioni corrispondenti dei due punti m ed m', avremo

$$Pm \,.\, Q'm' = \lambda, \; Pa \,.\, Q'a' = \lambda;$$

da cui

$$\frac{Pm}{Pa} = 1 : \frac{Q'm'}{Q'a'}.$$

Se u e v' sono i punti situati all'infinito sulle due rette, $\frac{um}{ua}$ e $\frac{v'm'}{v'a'}$ saranno eguali all'unità; e quindi l'espressione precedente si potrà scrivere

$$\frac{Pm}{Pa} : \frac{um}{ua} = \frac{v'm'}{v'a'} : \frac{Q'm'}{Q'a'} .$$

Questa relazione mostra che se i punti P, u, a e i loro corrispondenti Q', u', a' sono fissi, gli altri due punti m ed m' dividono omograficamente le due rette.

6. Abbiamo veduto (Nota IV, n° 6) che l'eguaglianza dei rapporti anarmonici di due sistemi di quattro punti a, b, c, m e a', b', c', m' può rappresentarsi ancora con la relazione

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1 ;$$

ma $\frac{bc}{ac}$ e $\frac{b'a'}{c'a'}$ sono quantità costanti; quindi indicandole con λ e μ avremo

$$\lambda \frac{am}{bm} + \mu \frac{c'm'}{b'm'} = 1 \;\ldots\ldots (4)$$

Laonde se prendiamo sopra una retta due punti fissi a, b e sopra un'altra retta due punti fissi c', b', dei quali il primo è arbitrario, ma il secondo è l'omologo del punto b della prima retta, la relazione (4) esprimerà la divisione omografica delle due rette.

7. L'espressione

$$\frac{bc}{bm} : \frac{ac}{am} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1 ,$$

supponendo il punto a all'infinito diventa

$$\frac{bc}{bm} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1 ;$$

la quale può scriversi

$$\frac{bc}{bm} + \frac{b'a'}{b'm'} : \frac{c'a'}{c'm'} = 1 ;$$

Se in quest' ultima supponiamo una volta b', un' altra volta c' all' infinito, avremo nel primo caso

$$\frac{bc}{bm} + \frac{c'm'}{c'a'} = 1 ,$$

e nel secondo

$$\frac{bc}{bm} + \frac{ba'}{b'm'} = 1 .$$

Indicando con λ e μ due costanti che in generale variano passando da una relazione all' altra, l' espressioni precedenti diventano

$$\frac{\lambda}{bm} + \mu \cdot \frac{c'm'}{b'm'} = 1 \ldots . (5)$$

$$\frac{\lambda}{bm} + \mu \cdot c'm' = 1 \ldots . (6)$$

$$\frac{\lambda}{bm} + \frac{\mu}{b'm'} = 1 \ldots . (7).$$

8. Quest' ultima conduce ad una interessante proprietà di due divisioni omografiche, cioè che *possiamo sempre prendere, a cominciare da un punto dato* a *della prima divisione, due segmenti* a m, aM *che sieno rispettivamente eguali ai loro omologhi* a'm', a'M' *nella seconda divisione, ma uno collo stesso segno, e l' altro con segno contrario.*

Infatti abbiamo

$$\frac{\lambda}{am} + \frac{\mu}{a'm'} = 1 , \frac{\lambda}{aM} + \frac{\mu}{a'M'} = 1 .$$

Se vogliamo che am sia eguale ad $a'm'$ e dello stesso segno, e che aM sia eguale e di segno contrario ad $a'M'$, i punti m ed M saranno determinati dalle relazioni

$$am = \lambda + \mu , aM = \lambda - \mu .$$

La proprietà che abbiamo dimostrata di due divisioni omografiche, conduce ad una notevole conseguenza.

9. Chasles dice che due divisioni omografiche a, b, c, d....; a', b', c', d'.... fatte sopra una medesima retta sono *in involuzione*, quando un punto c' della seconda considerato come appartenente alla prima, abbia per suo omologo nella seconda c.

Premessa questa definizione, dimostreremo che:

Due rette divise omograficamente possono sempre esser poste l'una sull'altra in modo che le due divisioni siano in involuzione.

Abbiansi due rette divise omograficamente e in esse due punti omologhi a ed a'; prendiamo due altri punti omologhi b, b' tali che i segmenti ab e $a'b'$ sieno eguali. Poniamo poi la seconda retta sulla prima in modo che il punto b' coincida con a e a' con b. Il punto a considerato come appartenente alla prima divisione, avrà per omologo nella seconda il punto a', e considerato come appartenente alla seconda divisione avrà per omologo nella prima lo stesso punto a'.

Sia c un nuovo punto della prima divisione e c' il suo omologo nella seconda, dico che la proprietà di cui godono i punti a ed a', ha luogo anche pei punti c e c'.

Infatti, i quattro punti a, a', b, c della prima divisione avendo per corrispondenti nella seconda i punti a', a, b', c', i rapporti anarmonici di queste due serie di quattro punti sono eguali, e per conseguenza le tre coppie di punti a, a'; b, b'; c, c' sono in involuzione. Dunque (pag. 106, teor. VIII) le due serie di quattro punti a, b, c, c' e a', b', c', c hanno i loro rapporti anarmonici eguali; e per conseguenza se il punto c si considera come appartenente alla seconda divisione, esso ha per omologo nella prima il punto c'.

Lo stesso potrebbe dimostrarsi per gli altri punti; dunque ec.

10. Le divisioni omografiche in involuzione si possono costruire agevolmente.

Infatti, sappiamo che date due coppie di punti a, a'; b, b' se ne possono trovare infinite altre c, c'; d, d';.... tali che ciascuna sia in involuzione con a, a', e b, b'. Ora io dico che: *Le due serie di punti* a, b, c, d.... *e* a', b', c', d'...., *formano due divisioni omografiche in involuzione.*

Infatti è noto che se indichiamo con O il punto centrale dell'involuzione, si ha (pag. 105)

$$Oa \,.\, Oa' = Oc \,.\, Oc' = \textit{costante};$$

dunque (n° 5) i due punti c e c' formano due divisioni omografiche. Ma la relazione precedente sussiste quando si cambia c in c' e c' in c; per conseguenza se il punto c' è considerato come appartenente alla prima divisione, il suo omologo nella seconda divisione è il punto c.

11. Se pei punti di due divisioni omografiche in involuzione conduciamo delle rette concorrenti ad uno stesso punto, avremo ciò che Chasles chiama *fasci omografici in involuzione*. Essi godono della proprietà che una retta, considerata successivamente come raggio dei due fasci, ha, nei due casi, lo stesso raggio coniugato.

II.

12. L'omografia di due fasci si può esprimere con relazioni analoghe a quelle che abbiamo date per rappresentare l'omografia di due divisioni.

Così se A, B, C, M sono quattro raggi del primo fascio e A', B', C', M' i corrispondenti del secondo, si ha

$$\frac{sen\,(A,\,M)}{sen\,(B,\,M)} : \frac{sen\,(A,\,C)}{sen\,(B,\,C)} = \frac{sen\,(A',\,M')}{sen\,(B',\,M')} : \frac{sen\,(A',\,C')}{sen\,(B',\,C')},$$

da cui

$$\frac{sen\,(A,\,M)}{sen\,(B,\,M)} = \lambda\,\frac{sen\,(A',\,M')}{sen\,(B',\,M')}, \ldots\ldots (A)$$

$$\text{essendo } \lambda = \frac{sen\,(A,\,C)}{sen\,(B,\,C)} : \frac{sen\,(A',\,C')}{sen\,(B',\,C')}.$$

Due rette M ed M' che passano per due punti fissi e sodisfano alla condizione (A) producono due fasci omografici.

Se le rette fisse A e B; A' e B sono perpendicolari fra loro, i rapporti $\frac{sen\,(A\,,M)}{sen\,(B\,,M)}$ e $\frac{sen\,(A'\,M')}{sen\,(B'\,M')}$ diventano rispettivamente $tan\,(A\,,M)$ e $tan\,(A', M')$, talchè si avrà

$$tan\,(A\,,M) = \lambda\; tan\,(A', M') \ldots . (B).$$

Per fare uso di questa relazione bisogna convenire del senso nel quale si contano gli angoli positivi intorno ai due centri O, O'.

Se le rette del secondo fascio sono parallele fra loro, si taglierà questo fascio con una trasversale qualunque che l'incontra nei punti a', b', c', m'.... e nella formula (A) si sostituiranno ai seni degli angoli relativi a queste rette i segmenti che essi determinano sulla trasversale; allora, avendo riguardo a ciò che abbiam detto nel n. 4, avremo

$$\frac{sen\,(A\,,M)}{sen\,(B\,,M)} = \lambda . \frac{a'm'}{b'm'},\; \frac{sen\,(A\,,M)}{sen\,(B\,,M)} = \lambda .\, a'\,m',\; \frac{sen\,(A\,,M)}{sen\,(B\,,M)} = \frac{\lambda}{b'\,m'};$$

le quali relazioni servono ad esprimere l'omografia di due fasci quando uno di questi ha le sue rette parallele.

13. *Due fasci sono omografici se gli angoli dell'uno sono eguali rispettivamente a quelli degli altri*; poichè in questo caso è evidente che il rapporto anarmonico di quattro raggi del primo fascio è uguale a quello dei quattro raggi omologhi del secondo.

In questo caso quindi l'omografia si esprimerà con la relazione

$$angolo\,(A\,,M) = \pm\, angolo\,(A', M') \ldots . (C)$$

I due fasci possono presentare due casi differenti, relativamente al senso nel quale rotano i loro raggi rispettivi. Se i raggi rotano nello stesso senso, i due fasci, che supponiamo abbiano lo stesso centro, possono farsi coincidere con una semplice rotazione di uno di essi. E se i raggi rotano in senso contrario, si ha sempre due raggi di cui ciascuno, considerato come appartenente al primo fascio, è esso stesso il suo omologo nel secondo fascio: questi due raggi sono rettangolari, e i due fasci sono posti *simmetricamente* da una parte e dall' altra di ciascuno di essi. Nel primo caso CHASLES chiama i due fasci *simili*; nel secondo *simmetrici*.

14. È noto che l'eguaglianza dei rapporti anarmonici di due fasci di rette, può anche esprimersi colla relazione

$$\frac{sen\,(A\,,M)}{sen\,(B,\,M)} : \frac{sen\,(A\,.\,C)}{sen\,(B\,,\,C)} + \frac{sen\,(C',\,M')}{sen\,(B',\,M')} : \frac{sen\,(C',\,A')}{sen\,(B',\,A')} = 1,$$

dalla quale si deduce

$$\lambda\,\frac{sen\,(A\,.\,M)}{sen\,(B,\,M)} + \mu\,\frac{sen\,(C',\,M')}{sen\,(B',\,M')} = 1,\,\ldots\,(D)$$

$$\text{ove}\ \lambda = \frac{sen\,(B\,,\,C)}{sen\,(A\,,\,C)}\ \text{e}\ \mu = \frac{sen\,(B',\,A')}{sen\,(A',\,C')}.$$

Quindi date due rette fisse A, B, due altre rette fisse C', B' e due costanti λ e μ, la relazione (D) esprime che le due rette M, M' formano due fasci omografici. In questi due fasci le rette B, B' sono due raggi corrispondenti, ma i raggi A, C' non si corrispondono e sono presi arbitrariamente.

Se gli angoli (A, B) e (C', B') sono retti, si ha

$$\frac{\lambda}{tan\,(B,\,M)} + \frac{\mu}{tan\,(B',\,M')} = \ldots.(E)$$

o ancora

$$\lambda\,tan\,(A\,,\,M) + \mu\,tan\,(C',\,M') = 1\,\ldots.(F).$$

Facendo uso di quest' ultima relazione, bisogna avvertire che quando i due fasci sono dati, A e C' non sono due rette qualunque; giacchè le perpendicolari B e B' a queste due rette rispettivamente, debbono essere raggi corrispondenti dei due fasci.

15. Dall' espressione (E) si deduce la seguente proprietà di due fasci omografici: *Dato un raggio del primo fascio, si possono sempre determinare due altri raggi facienti con quello dato due angoli eguali rispettivamente ai loro omologhi nel secondo fascio, ma uno collo stesso segno l' altro con segno contrario* Questi due angoli sono determinati dalla relazione,

$$tan\,(B, M) = \lambda \pm \mu.$$

16. Se finalmente il secondo fascio ha il suo centro all' infinito, l' omografia dei due fasci si esprimerà con una delle seguenti relazioni

$$\lambda \frac{sen\,(A, M)}{sen\,(B, M)} + \mu . \frac{c'm'}{b'm'} = 1,$$

$$\lambda \frac{sen\,(A, M)}{sen\,(B, M)} + \mu . c'm' = 1,$$

$$\lambda \frac{sen\,(A, M)}{sen\,(B, M)} + \frac{\mu}{b'm'} = 1.$$

III.

Passiamo adesso a dimostrare talune proprietà geometriche di due rette divise omograficamente e di due fasci omografici.

17. *Allorchè due rette sono divise omograficamente nei punti* a, b, c .... *e* a', b', c' .... *che si corrispondono uno ad uno rispettivamente; se prendiamo sopra una retta* a a', *che unisce due punti corrispondenti, due punti fissi*, P, P', *le rette* Pb, Pc, ... *incontreranno rispettivamente le rette* P'b', P'c', ... *nei punti* β, γ ...., *che saranno in linea retta.*

Infatti queste rette formano due fasci omografici, perchè quattro raggi del primo fascio hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei quattro raggi corrispondenti del secondo. Ma due raggi corrispondenti Pa e P'a' coincidono in direzione; dunque gli altri raggi del primo fascio incontrano rispettivamente i raggi corrispondenti del secondo in punti situati in linea retta (n° 3).

18. *Dati due fasci omografici, se pel punto d' intersezione di due raggi omologhi si conducono due rette trasversali fisse che incontrano rispettivamente i due fasci in due serie di punti, le rette che uniranno i punti d' incontro della prima trasversale ai punti d' incontro della seconda, uno ad uno rispettivamente, concorrono in uno stesso punto.*

Giacchè questi punti formano due divisioni omografiche nelle quali il punto d'incontro delle due trasversali rappresenta due punti omologhi.

19. *Se due rette sono divise omograficamente nei punti* a, b, c, d,.... *e* a', b', c', d',...., *che si corrispondono uno a uno rispettivamente, due rette come* ab' *e* ba' *che vanno da due punti qualunque della prima ai due punti corrispondenti della seconda, presi inversamente, s'incontrano sempre sopra una stessa retta. (fig.* 460.*)*

Nel punto d'intersezione delle due rette R ed R' porremo due lettere A e B'; la lettera A apparterrà alla prima retta, e la lettera B' alla seconda. Sia A' sopra R' il punto corrispondente al punto A di R, e B sopra R il punto corrispondente al punto B' della seconda. Dimostreremo che il punto d'intersezione di due rette come *a'b* e *b'a* si trova sulla retta fissa A'B.

Infatti, i due fasci *aa'*, *ab'*, *a*A', *a*B' e *a'a*, *a'b*, *a'*A, *a'*B sono omografici; ma due raggi omologhi *aa' a'a*, sono sopra una stessa retta; dunque gli altri tre raggi del primo fascio incontrano, uno ad uno rispettivamente, gli altri tre raggi del secondo fascio in tre punti situati in linea retta. Laonde il punto *m* è situato sulla retta fissa A'B.

20. *Se sopra due linee rette si prendono due serie di tre punti qualunque* a, b, c *e* a', b', c' *che si corrispondano uno ad uno, i tre punti d'intersezione delle diagonali* ab' *e* a'b, ac' *e* a'c, bc' *e* b'c *sono in linea retta.*

Questo teorema è un corollario evidente del precedente, osservando in questo ultimo che i tre punti *a'*, *b'*, *c'*, che corrispondono uno ad uno ai tre *a*, *b*, *c* possono essere presi arbitrariamente.

La figura *a b' c a' b c'* rappresenta un esagono iscritto alle due rette R, R'; quindi si ha il teorema: *i tre punti di concorso dei lati opposti di un esagono iscritto a due rette sono in linea retta.*

21. Se i punti di divisione *a*, *b*, *c*,....; *a'*, *b'*, *c'*,...., sulle due rette R, R' *(fig.* 461*)* sono determinati da trasversali che partono da uno stesso punto O, è evidente che la

retta mn, luogo dei punti d'incontro delle diagonali dei quadrilateri $aa'b'b$, $bb'c'c$, ec., passa pel punto di concorso delle due rette.

È chiaro pure che i punti α, β, ... sono i coniugati armonici del punto O sui segmenti aa', bb', ... (pag. 90 Cor. II).

22. *Dati due fasci omografici, se prendiamo nel primo due raggi qualunque*, A, B, *e nel secondo, i due raggi omologhi* A', B', *la retta che unirà il punto d'intersezione dei due raggi non omologhi* A, B' *al punto d'intersezione degli altri due* B, A' *passerà sempre per uno stesso punto fisso. (fig. 462.)*

Sia x il punto d'intersezione dei due raggi A, B', e y il punto d'intersezione dei due B, A'; dico che la retta xy passa sempre per uno stesso punto. Prendiamo il raggio OΩ che nel primo fascio corrisponde alla retta O'O del secondo fascio, e il raggio O'Ω che corrisponde nel secondo fascio alla retta OO' del primo. Il punto di concorso Ω di queste due rette è il punto fisso pel quale passa la retta xy.

Infatti, i quattro raggi del primo fascio OA, OB, OO', OΩ hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei loro omologhi O'A', O'B', O'Ω, O'O. Tagliamo i quattro primi col raggio O'A' e gli altri quattro col raggio OA; si avranno due serie di quattro punti α, y, O', ω, e α, x, ω', O, i cui rapporti anarmonici saranno eguali. Ma in queste due serie il punto α è comune; dunque le tre rette xy, O'ω', ω O che uniscono gli altri tre punti della prima serie ai loro omologhi della seconda, concorrono in uno stesso punto. Dunque ec.

23. *Se tre angoli* A, B, C *sottendono una stessa corda* OO', *le tre corde* mm', nn', pp', *che essi sottendono due a due, concorrono in uno stesso punto.* (fig. 463.)

Questo teorema è un corollario evidente del precedente, osservando che nei due fasci, tre rette del secondo possono essere prese arbitrariamente per corrispondere a tre rette del primo.

IV.

La teoria delle divisioni omografiche e dei fasci omografici, dovuta all'eminente geometra Chasles, è una delle più feconde della Geometria moderna; ma la sua piena importanza non può essere valutata che procedendo nello studio della scienza. Tuttavia gioverà mostrarne fin d'ora qualche applicazione.

24. *Una retta che si muove mantenendosi sempre tangente ad un cerchio, incontra due tangenti fisse in due punti che formano due divisioni omografiche.* (fig. 464.)

Sieno A ed A' le due tangenti fisse, *am* la tangente mobile. L'angolo aCa' è supplemento dell'angolo AmA'; ma gli angoli AmA' sono tutti uguali o supplementarii l'uno all'altro, dunque lo stesso avverrà degli angoli aCa'; talchè le due rette Ca, Ca' formano due fasci omografici e per conseguenza i due punti a ed a' formano due divisioni omografiche.

Da questo teorema si deduce che: *I quattro punti d'intersezione di una tangente mobile con quattro tangenti fisse hanno il loro rapporto anarmonico costante.* A questa quantità costante Chasles ha dato il nome di *rapporto anarmonico delle quattro tangenti fisse.*

25. *Il rapporto anarmonico di quattro tangenti a un cerchio è eguale a quello dei quattro punti di contatto.* (fig. 465.)

Sieno A, B, C, D le quattro tangenti, a, b, c, d i rispettivi punti di contatto, a', b', c', d' i punti nei quali le tangenti date incontrano rispettivamente una quinta tangente M. Uniamo il centro O ai punti a', b', c', d' e il punto m ai punti a, b, c, d. I due fasci ma, mb, mc, md e Oa', Ob', Oc', Od' sono omografici, dunque il rapporto anarmonico dei quattro punti a', b', c', d', ch'è quello delle quattro tangenti, è uguale al rapporto anarmonico dei punti di contatto a, b, c, d.

26. *Il prodotto delle distanze di una tangente mobile a due vertici opposti di un quadrilatero circoscritto al cerchio sta al prodotto delle sue distanze agli altri due vertici, in un rapporto costante.* (fig. 466.)

Sia $abb'a'$ il quadrilatero circoscritto e mm' la tangente mobile che incontra i suoi lati opposti ab, $a'b'$ in m, m'. Poichè questi due punti formano due divisioni omografiche, si ha

$$\frac{ma}{mb} = \lambda \frac{m'a'}{m'b'},$$

Ma il rapporto $\frac{ma}{mb}$ è uguale al rapporto $\frac{ad}{bc}$ delle distanze dei punti a, b dalla tangente mobile, e $\frac{m'a'}{m'b'}$ è eguale al rapporto $\frac{a'd'}{b'c'}$ delle distanze della stessa tangente ai punti a' e b'; dunque

$$\frac{ad \cdot b'c'}{bc \cdot a'd'} = \lambda.$$

Al valore di λ possiamo dare un' altra forma.

In virtù di quello che abbiamo veduto nel n°. 24, si ha $sen\ aCm = sen\ a'Cm'$ e $sen\ mCb = sen\ m'Cb'$. Dippiù i triangoli aCm, mCb stanno fra loro come le basi, e per conseguenza (Serret, Trig. pag. 133)

$$\frac{ma}{mb} = \frac{Ca \cdot sen\ mCa}{Cb \cdot sen\ mCb}.$$

Similmente

$$\frac{m'a'}{m'b'} = \frac{Ca' \cdot sen\ m'Ca'}{Cb' \cdot sen\ m'Cb'};$$

laonde

$$\lambda = \frac{Ca}{Cb} : \frac{Ca'}{Cb'} = \frac{Ca \cdot Cb'}{Ca' \cdot Cb};$$

cioè:

La quantità costante λ è uguale al prodotto delle distanze del centro del cerchio ai due primi vertici opposti del quadrilatero, diviso pel prodotto delle distanze dello stesso centro agli altri due vertici.

27. Il teorema precedente è un caso particolare del seguente:

Dato un poligono di un numero pari di lati circoscritto ad un cerchio, se conduciamo una tangente qualunque, il prodotto *delle sue distanze ai vertici di posto pari starà al prodotto delle sue distanze ai vertici di posto dispari, in un rapporto costante, eguale al prodotto delle distanze dei vertici di posto pari dal centro del cerchio, diviso pel prodotto delle distanze dei vertici di posto dispari dallo stesso centro.*

Supponiamo che questo teorema abbia luogo per un poligono di $2n$ lati, dico che si verificherà anche per un poligono di $2n+2$ lati. Infatti quest' ultimo lo potremo sempre decomporre in un quadrilatero e in un poligono di $2n$ lati; le relazioni relative a queste due figure danno immediatamente quella relativa al poligono di $2n+2$ lati. Ma il teorema è vero per un quadrilatero, dunque ec.

28. *In un quadrilatero iscritto in un cerchio, il prodotto delle distanze di ciascun punto della circonferenza a' due lati opposti è uguale al prodotto delle distanze dello stesso punto agli altri due lati opposti.*

Sieno PA, P'A e PB, P'B due coppie di raggi omologhi fissi, e Pm, P'm due raggi omologhi variabili; è chiaro che i fasci formati da questi ultimi saranno omografici, poichè gli angoli dell' uno sono eguali a quelli dell' altro; quindi (12)

$$\frac{sen\ m\mathrm{PA}}{sen\ m\mathrm{PB}}=\frac{sen\ m\mathrm{P'A}}{sen\ m\mathrm{P'B}};$$

ma il primo membro è uguale al rapporto delle distanze di m ai due lati PA, PB del quadrilatero PAP'B; il secondo, al rapporto delle distanze dello stesso punto agli altri due lati P'A, P'B; dunque ec.

29. Questo teorema è un caso particolare del seguente:

Se un poligono di un numero pari di lati è iscritto in un cerchio, il prodotto delle distanze di un punto qualunque della circonferenza ai lati di posto pari è uguale al prodotto delle distanze dello stesso punto ai lati di posto dispari.

Dimostrazione analoga a quella del teorema (27).

30. *Dati un angolo* AVB *e due punti* P, P' *in linea retta col suo vertice, se facciamo rotare attorno ad un punto fisso* O *una trasversale che incontri i lati dell' angolo in* a, a', *il punto*

di concorso m *delle due rette* Pa, P'a' *descriverà una linea retta. (fig. 467.)*

Infatti i punti *a*, *a'* formano sulle due rette VA, VA' due divisioni omografiche; e per conseguenza i raggi P*a*, P'*a'* formano due fasci omografici. Ma il punto V è la riunione di due punti di divisione omologhi; dunque i due fasci hanno due raggi omologhi coincidenti nella direzione PP'; e per conseguenza i loro raggi omologhi si tagliano due a due sopra una retta.

È chiaro che questa retta passerà per il punto *n* intersezione di VA e OP' e pel punto *p* intersezione di VA' e OP.

31. *Se intorno ad un punto fisso* O *facciamo girare una trasversale che incontri due rette fisse in due punti* a, a', *e che da due altri punti fissi* P, P', *in linea retta col primo si conducano dei raggi a questi due punti; il punto d'intersezione di questi due raggi descriverà una linea retta che passa pel punto di concorso delle due rette fisse. (fig. 468.)*

Infatti, i due punti *a*, *a'* segnano sulle due rette due divisioni omografiche, e per conseguenza i due raggi P*a*, P'*a'* formano due fasci omografici. Ma questi due fasci hanno due raggi coincidenti nella direzione PP'; dunque il punto d'intersezione *m* descrive una linea retta, la quale passa pel punto di concorso delle due VA, VA', perchè due raggi omologhi passano per questo punto.

Sieno α ed α' i punti nei quali le rette P*a*, P'*a'* incontrano rispettivamente VA', VA. Poichè questi due punti formano due divisioni omografiche nelle quali il punto V rappresenta due punti omologhi coincidenti, ne segue che le rette $\alpha\alpha'$ concorrono in uno stesso punto, il quale deve trovarsi sopra OPP', perchè questa retta è una delle posizioni della linea $\alpha\alpha'$.

Il teorema precedente può essere enunciato ancora nel seguente modo:

Se un triangolo a'ma *si muove in modo che i suoi tre lati passino per tre punti fissi* O, P, P' *situati in linea retta e che due vertici* a, a' *si trovino sempre sopra due rette fisse; il terzo* m *descrive una linea retta.*

Questo teorema si estende ad un poligono qualunque.

NOTA VII.

Centro di gravità. Centro delle medie armoniche.

I.

1. *Se sopra due rette* SA, SA' *che si tagliano nel punto* S *e sulle quali* A *e* A' *sono due punti fissi, prendiamo due punti variabili* M *e* M', *uniti fra loro mediante la relazione*

$$m \cdot \frac{AM}{SM} + m' \cdot \frac{A'M'}{SM'} = \mu, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ove m, m' *e* μ *sono coefficienti costanti, la retta* MM' *passerà sempre per uno stesso punto* O. *(fig. 469.)*

Infatti questa relazione esprime la divisione omografica delle due rette SA, SA', e in questa divisione due punti omologhi coincidono in S. Per conseguenza la retta MM' passa sempre per uno stesso punto O.

2. *Date due rette* SA, SA' *concorrenti in un punto* S *e sulle quali* A *e* A' *sono due punti fissi; se intorno ad un punto* O *facciamo girare una trasversale che incontra queste rette in punti* M, M', *si avrà la relazione*

$$m \cdot \frac{AM}{SM} + m' \cdot \frac{A'M'}{SM'} = \mu,$$

ove m, m', μ *sono quantità costanti, delle quali una è arbitraria.*

Infatti, la trasversale segna sulle due rette due divisioni omografiche, nelle quali due punti omologhi coincidono in S; dunque la relazione precedente deve aver sempre luogo.

Per determinare le costanti, supponiamo che μ sia presa arbitrariamente; pel punto O conduciamo due rette OP', OQ rispettivamente parallele ad SA, SA'; P' è il punto d'incontro di OP' con SA', Q il punto d'incontro di OQ con SA; avremo le due relazioni

$$m + m' \cdot \frac{A'P'}{SP'} = \mu, \; m \cdot \frac{AQ}{SQ} + m' = \mu,$$

le quali determinano completamente *m* ed *m'*.

3. Se $\mu = o$, l'espressione

$$m\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + m'\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} = o,$$

mostra che il punto pel quale passa la retta MM' è situato sopra AA'. Infatti da essa si ha

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} = \lambda\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}},$$

la quale esprime che nella divisione omografica delle due rette SA, SA', i punti A e A' sono due punti omologhi. (Nota VI, n° 4.) Dunque la retta AA' è una delle posizioni della retta mm', e per conseguenza il punto O si trova sopra AA'.

4. *Date più rette* SA, SA', SA''.... *che passano tutte per uno stesso punto* S, *e sulle quali si prendono arbitrariamente dei punti fissi* A, A', A'',....; *se attorno ad un punto* O *si fa girare una trasversale che incontra queste rette in punti* M, M', M'',.... *si avrà la relazione costante*

$$m\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + m'\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} + m''\,\frac{\mathrm{A''M''}}{\mathrm{SM''}} + \ldots = \mu \,.\,. \quad (2)$$

m, m', m'',...., μ *essendo quantità costanti, le quali, ad eccezione di due, possono essere prese arbitrariamente. (fig. 470.)*

Supponiamo che la proposizione si verifichi per n rette; dimostreremo che essa deve necessariamente esser vera per $n+1$ rette.

Sieno m e m' i due coefficienti indeterminati. Facciamo astrazione dalla prima retta SA; avremo un asse di meno, e per ipotesi, la proposizione sarà vera; in guisa che i coefficienti m'', m'''.... essendo dati, potremo sempre determinare i due m'_1 e μ_1 in modo che si verifichi la relazione,

$$m'_1\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} + m''\,\frac{\mathrm{A''M''}}{\mathrm{SM''}} + \ldots = \mu_1.$$

Ma se consideriamo due sole rette SA, SA', possiamo determinare due coefficienti m, m'_2 in modo che si abbia sempre l'eguaglianza

$$m\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + m'_2\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} = (\mu - \mu_1)$$

Sommando le due ultime relazioni si trova

$$m\,.\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + (m'_1 + m'_2)\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} + m''\,\frac{\mathrm{A''M''}}{\mathrm{SM''}} + \ldots\ldots = \mu$$

Questa espressione, relativa a $n+1$ rette, avrà sempre luogo, poichè risulta da due che si verificano sempre; e i coefficienti dei suoi due primi termini, i soli che non sieno dati, hanno valori determinati.

Supponiamo ora che le quantità indeterminate sieno m e μ. Facciamo astrazione dalla prima retta SA e determiniamo due quantità m'_1 e μ_1 in modo che si abbia

$$m'_1\,.\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} + m''\,.\,\frac{\mathrm{A''M''}}{\mathrm{SM''}} + \ldots\ldots = \mu_1\,.$$

Considerando le due rette SA, SA', determineremo due quantità m e μ_2 tali che si abbia

$$m\,.\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + (m' - m'_1)\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} = \mu_2\,.$$

Sommando le due ultime eguaglianze, si ha

$$m\,.\,\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{SM}} + m'\,.\,\frac{\mathrm{A'M'}}{\mathrm{SM'}} + m''\,.\,\frac{\mathrm{A''M''}}{\mathrm{SM''}} + \ldots\ldots = \mu_1 + \mu_2\,,$$

nella quale le due costanti m e $(\mu_1 + \mu_2)$ sono completamente determinate.

Laonde la relazione fra $n+1$ rette ha luogo sempre che sia vera quella per n rette; ma il teorema si verifica per due rette, dunque ec.

Poichè le indeterminate sono due è chiaro che se la relazione (2) si verifica per due posizioni della trasversale passanti per uno stesso punto, si verificherà per qualunque altra trasversale condotta per lo stesso punto.

La reciproca di questo teorema è vera e si dimostra facilmente.

II

5. Se dai punti A, A', A'',.... S conduciamo delle perpendicolari alla retta OM, che indicheremo rispettivamente con p, p', p''... e q, è chiaro che i rapporti $\frac{AM}{SM}$, $\frac{A'M'}{SM'}$ ec. saranno rispettivamente eguali ai rapporti $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q}$ ec. Quindi l' espresssione (2) diventa

$$m \,.\, p + m' \,.\, p' + m'' \,.\, p'' + \ldots\ldots - \mu \,.\, q = 0, \quad \ldots\ldots (3)$$

la quale dà il teorema:

Se una retta gira attorno ad un punto, le sue distanze a più punti fissi soddisfano alla relazione (3), *ove* m, m', m'',.... μ *sono quantità costanti che, ad eccezione di due, possono essere prese arbitrariamente.*

E reciprocamente, *se le distanze di una retta variabile di posizione, a più punti fissi, soddisfano alla relazione* (3), *questa retta passa sempre per un punto.*

Facendo uso dell' espressione (3) bisogna badare ai segni che debbono avere le distanze p, p'....; la regola è la seguente: si darà un segno arbitrario a q, e alle distanze p, p'..... si daranno segni simili o contrarii secondo che i punti A, A',.... saranno dalla stessa parte della trasversale che il punto S, o dall' altra parte.

6. *Dati punti qualunque* A, A, A'.... *e quantità costanti* m, m', m'',..., *vi ha sempre un punto* O *tale, che condotta per esso una retta qualunque, la somma delle sue distanze ai punti* A, A',...., *moltiplicate rispettivamente per le costanti* m, m',.... *sia sempre nulla.*

Infatti, abbassiamo dai punti dati delle perpendicolari sopra una retta qualunque e sieno a, a', a'',.... i piedi rispettivi di queste perpendicolari. Sulla retta $aa'a''$ potremo sempre trovare un certo punto O' tale che sia soddisfatta la relazione

$$m \,.\, O'a + m' \,.\, O'a' + m'' \,.\, O'a'' + \ldots\ldots = 0\,.$$

Se da questo punto conduciamo una parallela alle perpendicolari e indichiamo con p, p'.... le sue distanze ai punti A, A',...., la relazione

$$m \cdot p + m' \cdot p' + \ldots\ldots = 0$$

sarà soddisfatta, e per conseguenza tutte le rette così determinate passeranno per uno stesso punto O.

Se i punti A, A', A'',... si suppongono materiali ed aventi per masse rispettive le costanti m, m', m''...., il punto O dicesi *centro di gravità* dei punti dati.

Se $m = m' = m'' = \ldots\ldots = 1$, il punto O prende il nome di *centro delle medie distanze* dei punti A, A',.... Quindi possiamo dire che *la somma delle distanze di più punti ad una retta condotta pel centro delle medie distanze di questi punti è nulla*; e anche, *se una retta è situata in modo che la somma delle sue distanze a punti dati sia nulla, questa retta contiene il centro delle medie distanze di questi punti.*

I seguenti teoremi sono una conseguenza evidente di questa osservazione.

1° *Il centro delle medie distanze di un triangolo è il punto d'intersezione delle tre mediane.*

2° *Il centro delle medie distanze di un quadrilatero è il punto d'incontro delle rette che uniscono i mezzi dei lati opposti.*

3° *Il centro delle medie distanze dei vertici di un poligono regolare è il centro di figura di questo poligono.*

7. Se i punti dati sono in linea retta, è chiaro che il loro centro di gravità è un punto O di questa retta determinato dalla relazione

$$m \cdot AO + m' \cdot A'O + \ldots\ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Infatti, se indichiamo con p, p',.... le distanze rispettive di A, A'.... ad una retta qualunque condotta per O, avremo $\dfrac{AO}{p} = \dfrac{A'O}{p'} = \ldots\ldots$, e quindi

$$m \cdot p + m' \cdot p' + \ldots\ldots = 0 \,.$$

Il centro delle medie distanze di più punti A, A'.... situati in linea retta, si troverà sopra di essa e sarà determinato dalla relazione

$$AO + A'O + \ldots = 0 .$$

8. *La proiezione del centro di gravità di più punti sopra una retta qualunque è il centro di gravità delle proiezioni di questi punti sulla medesima retta.*

Per maggiore generalità supporremo che le proiezioni siano fatte mediante oblique parallele fra loro. Indichiamo con a, a', a''.... o le proiezioni rispettive dei punti A, A', A''.... e del loro centro di gravità O; è chiaro che $\frac{AO}{ao} = \frac{A'O}{a'o} = \frac{A''O}{a''o} = \ldots$; quindi avremo

$$m \, . \, ao + m' \, . \, a'o + m'' \, . \, a''o + \ldots = 0 ;$$

la quale relazione esprime che il punto o è il centro di gravità dei punti a, a', a''...., aventi per masse m, m', m''....; dunque ec.

Un teorema analogo ha luogo pel centro delle medie distanze.

9. Da questo teorema risulta il seguente metodo per determinare il centro di gravità di più punti A, A', A''....: proiettate questi punti sopra due rette e prendete i centri di gravità delle due serie di punti in proiezione; i due punti così determinati saranno le proiezioni del centro di gravità richiesto. Un simile metodo si può adoperare per la ricerca del centro delle medie distanze di più punti.

10. Sieno A, A', A''.... più punti, O il loro centro di gravità, p, p', p''.... le loro distanze ad una retta OX; avremo

$$m \, . \, p + m' \, . \, p' + m'' \, . \, p'' \ldots = 0 .$$

Conduciamo ora una retta parallela ad OX e indichiamo con P, P', P''.... le sue distanze ai punti A, A', A''.... e con G la sua distanza al punto O; avremo $p = P - G, p' = P' - G \ldots$, e per conseguenza

$$m \, . \, P + m' \, . \, P' + m'' \, . \, P'' + \ldots = (m + m' + m'' + \ldots) \, G .$$

Quindi:

Il centro di gravità di un sistema di punti materiali è un *punto la cui distanza a una retta qualunque, moltiplicata per la somma delle masse di tutti i punti, è uguale alla somma delle distanze di questi punti alla stessa retta, moltiplicate rispettivamente per le masse di questi punti.*

Nel caso del centro delle medie distanze, se i punti sono n, avremo

$$G = \frac{P + P' + P'' + \ldots}{n}.$$

Questa relazione mostrando che la distanza del punto O ad una retta qualunque è il valor medio delle distanze di tutti i punti A, A',.... alla stessa retta, giustifica il nome dato a questo punto.

11. Sieno A, A', A''.... più punti le cui masse sono m, m', m''.... Il centro di gravità dei due punti A ed A' sarà un punto o della retta AA' determinato dalla relazione

$$m \cdot Ao + m' \cdot A'o = 0.$$

Questa espressione può scriversi

$$\frac{Ao}{m'} = \frac{oA'}{m},$$

e mostra che se dividiamo la retta AA' in due segmenti Ao, oA' proporzionali ai numeri m', m; il punto o così determinato è il centro di gravità dei punti A ed A'.

Conduciamo la retta oA'', e dividiamo la distanza oA'' in parti oo', $o'A''$ proporzionali ai numeri m'' e $(m + m')$; il punto o' così determinato è il centro di gravità del punto A'' di massa m'' e di un punto o di massa $m + m'$: dico che o' è il centro di gravità dei tre punti A, A', A''.

Infatti, abbassiamo dai punti A, A', A'', o, o' le perpendicolari P, P', P'', g, g' sopra una retta XY qualunque; è chiaro che avremo la proporzione

$$A''o' : oo' :: g' - P'' : g - g';$$

ovvero

$$m + m' : m'' :: g' - P'' : g - g',$$

che dà

$$(m + m')g + m'' \cdot P'' = (m + m' + m'')g'.$$

Ma o è il centro di gravità dei punti A, A' e per conseguenza

$$(m + m')\, g = m \,.\, P + m' \,.\, P' \;;$$

dunque

$$m \,.\, P + m' \,.\, P' + m'' \,.\, P'' = (m + m' + m'')\, g' \;;$$

la quale relazione dimostra quel che volevamo.

Se adesso sulla distanza $o'A'''$ prendiamo due segmenti $o'o''$, $A'''o''$ proporzionali ai numeri m''', $(m + m' + m'')$; un ragionamento analogo proverebbe che o'' è il centro di gravità dei punti A, A', A'', A'''; ec. L'ultimo punto O trovato a questo modo è il centro di gravità dei punti dati.

12. Da quel che precede segue che per trovare il centro delle medie distanze di più punti A, A', A''.... si potrà procedere nel seguente modo;

Dividete la retta AA' ***in due parti eguali*** Ao, A'o; ***dividete la retta*** oA'' ***in due parti*** oo', A''o' ***proporzionali ai numeri*** 1 e 2; ***dividete la retta*** o'A''' ***in due parti*** o'o'', A'''o'' ***proporzionali ai numeri*** 1 e 3, ec. ***L'ultimo punto di divisione*** O ***trovato a questo modo è il centro delle medie distanze dei punti dati.***

III.

13. Se sulle rette A, A', A''.... prendiamo rispettivamente punti arbitrarii R, R', R''...., potremo sostituire alle costanti m, m', m'',.... le altre $m \,.\, \frac{SR}{AR}$, $m' \,.\, \frac{SR'}{A'R'}$,...., ed allora la relazione (2) acquisterà la forma

$$m \,.\, \frac{AM}{SM} : \frac{AR}{SR} + m' \,.\, \frac{A'M'}{S'M'} : \frac{A'R'}{SR'} + \dots = \mu.$$

Supponiamo che i punti R, R',.... sieno presi tutti sopra una stessa retta L (fig. 472) e pel punto O nel quale questa retta è incontrata da una delle trasversali MM' che passano pel punto fisso Ω conduciamo delle rette ai punti A, A',.... S. Una trasversale qualunque T taglia le rette OA, OA' .... OS, OΩ, OR respettivamente nei punti a, a', ... s, ω, r, ed avremo

$$\frac{AM}{SM}:\frac{AR}{SR}=\frac{a\omega}{s\omega}:\frac{ar}{sr},\quad \frac{A'M'}{SM'}:\frac{A'R'}{SR'}=\frac{a'\omega}{s\omega}:\frac{a'r}{sr},\ \text{ec.};$$

talchè la relazione precedente diverrà

$$m.\frac{a\omega}{ar}+m'.\frac{a'\omega}{a'r}+\ldots .=\mu.\frac{s\omega}{sr}$$

Questa eguaglianza non contiene più le rette SA, SA'..., ma sibbene i punti a, a' .... s,ω determinati sopra una trasversale qualunque T da più rette passanti per uno stesso punto O, mobile sulla retta fissa L, e giranti attorno ai punti fissi A, A', ... S, Ω; quindi essa esprime il seguente teorema:

Dati più punti fissi A, A', ... Ω, *e una retta* L, *se conduciamo da ciascun punto di essa dei raggi a questi punti ed una traversale che incontra questi raggi in punti* a, a', ..., ω, *e la retta* L *in un punto* r, *tra i segmenti formati dai punti* a, a', ..., *a cominciare da uno di essi* ω *e dal punto* r, *avrà sempre luogo la relazione*

$$m.\frac{a\omega}{ar}+m'\frac{a'\omega}{a'r}+\ldots .=o\ldots\ldots\ldots (5)$$

ove le costanti m, m', ..., *sono tutte arbitrarie ad eccezione di due, e rimangono immutate variando la trasversale.*

Reciprocamente;

Dati più punti fissi A, A', A''..., *delle costanti* m, m', m'',... *e una retta* L, *se per ciascun punto* O *di questa retta conduciamo a questi punti le rette* OA, OA', OA'', ..., *che incontreranno una trasversale in punti* a, a', a'', ..., *e prendiamo sopra questa trasversale il punto* ω *determinato dalla relazione* (5), *nella quale* r *è il punto d' incontro della trasversale e della retta* L, *la retta* Oω *passerà sempre per uno stesso punto fisso, qualunque sia la posizione della trasversale.*

Poncelet ha chiamato il punto ω, determinato dalla relazione (5), *centro delle medie armoniche dei punti* a, a', ...

relativo al punto r, e il punto Ω, pel quale passano tutte le rette Oω, *centro delle medie armoniche dei punti* A, A', ... *relativo alla retta* L.

Giovandosi di queste definizioni, il teorema esprime che:

Dato un sistema di punti A, A', ... *e il loro centro delle medie armoniche* Ω, *relativo ad una retta* L, *se conduciamo da un punto di questa retta dei raggi ai punti* A, A', ... Ω *e tiriamo una trasversale che incontri questi raggi in punti* a, a', ... ω *e la retta* L *in un punto* r, *il punto* ω *sarà il centro delle medie armoniche dei punti* a, a', ... *relativo al punto* r.

14. L' espressione (5), avendo riguardo alle identità

$$a\omega = r\omega - ra,\ a'\omega = r\omega - ra',\ \text{ec.},$$

diventa

$$\frac{m + m' + \ldots.}{r\omega} = \frac{m}{ra} + \frac{m'}{ra'} + \ldots \ldots \quad (6)$$

Se supponiamo $m = m' = \ldots. = 1$, l' ultima relazione si riduce a

$$\frac{1}{r\omega} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{ra} + \frac{1}{ra'} + \ldots.\right), \ldots \ldots \quad (7)$$

posto che i punti a, a', ... sieno in numero di n. Ed allora il segmento $r\omega$ ha ricevuto da Maclaurin il nome di *media armonica* tra le distanze ra, ra', ...; e si vede che *la media armonica fra più distanze è uguale alla media aritmetica delle reciproche di queste distanze.*

15. Se nella relazione (5), dopo averla moltiplicata per ar, supponiamo che il punto r sia all' infinito, lo che equivale a supporre le trasversali parallele alla retta L, avremo

$$m \,.\, a\omega + m' \,.\, a'\omega + \ldots. = o,$$

la quale esprime che il punto ω è il centro di gravità dei punti a, a', ..., le cui masse sono m, m', ...

Se la retta L è all' infinito, il punto r è altresì all' infinito e i raggi OA, OA', ... sono paralleli; quindi l'ultimo risultato combinato col teorema (8) mostra che il punto Ω è il centro di gravità dei punti A, A', ...

16. Una relazione ancora più notevole delle precedenti fra i due centri di gravità e delle medie armoniche è data dal teorema:

Il centro delle medie armoniche di un sistema di punti materiali A, A', A'', ..., *relativo ad una retta* L, *è il centro di gravità di questi medesimi punti aventi altre masse eguali rispettivamente alle prime divise per le distanze dei punti alla retta.*

Infatti, se dividiamo la relazione (5) per $\frac{a\omega}{ar}$ ed osserviamo che

$$\frac{a'\omega}{a'r} : \frac{a\omega}{ar} = \frac{sen\ A'OM}{sen\ A'OL} : \frac{sen\ AOM}{sen\ AOL},$$

è facile vedere che quella relazione si trasforma nell'altra

$$m \cdot \frac{sen\ AOM}{sen\ AOL} + m' \cdot \frac{sen\ A'OM}{sen\ A'OL} + \ldots . = 0 .$$

Se ora indichiamo con p, p', ... le perpendicolari abbassate dai punti A, A', ... sopra la retta ΩOM, e P, P', ... le perpendicolari abbassate dai medesimi punti sopra la retta L, è chiaro che avremo

$$\frac{sen\ A'O\Omega}{sen\ A'OL} = \frac{p'}{P'}, \quad \frac{sen\ AO\Omega}{sen\ AOL} = \frac{p}{P}, \text{ ec.},$$

dunque

$$\frac{m}{P} \cdot p + \frac{m'}{P'} \cdot p' + \ldots . = 0,$$

la quale relazione dimostra il teorema.

Per le applicazioni elementari di queste teoriche e per altri particolari si può consultare la Memoria del professore Chelini: *Sui centri dei sistemi geometrici.* Applicazioni di ordine più elevato e di maggior momento si troveranno nella *Mémoire sur les Centres des moyennes harmoniques* di Poncelet, pubblicata nel 3° vol. del Giornale di Crelle.

NOTA VIII.

Poli e polari. Piani polari.

I.

1. *Se da un punto qualunque* O *conduciamo quattro trasversali ad un cerchio, il rapporto anarmonico di quattro punti qualunque d'intersezione come* A, B, C, D *è eguale a quello degli altri quattro* A', B', C', D'. (fig. 473.)

Conduciamo AB', AC', AD', A'B, A'C, A'D. Le intersezioni di AB' con A'B, di AC' con A'C e di AD' con A'D si trovano sulla polare del punto O (pag. 94, teo. VIII); quindi il rapporto anarmonico del fascio delle quattro rette AA', AB', AC', AD' è eguale a quello delle quattro rette A'A, A'B, A'C, A'D; lo che dimostra il teorema.

Il ragionamento è lo stesso se il punto O è dentro il cerchio.

Questa proposizione si esprime anche nel seguente modo:

$$\frac{sen\frac{1}{2}\mathrm{AD}.sen\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{sen\frac{1}{2}\mathrm{AB}.sen\frac{1}{2}\mathrm{CD}}=\frac{sen\frac{1}{2}\mathrm{A'D'}.\,sen\frac{1}{2}\mathrm{B'C'}}{sen\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}.\,sen\frac{1}{2}\mathrm{C'D'}}.$$

2. *Quattro punti in linea retta hanno il loro rapporto anarmonico eguale a quello delle loro polari.*

Le quattro polari formano un fascio il cui vertice è il polo della retta data (pag. 93, teor. VII). Ma *l'angolo formato da due rette che vanno dal centro del cerchio a' due poli è eguale a quello delle polari rispettive*; dunque il fascio formato unendo il centro del cerchio ai quattro poli ha lo stesso rapporto anarmonico di quello formato dalle quattro polari.

Da questo teorema segue che *se vi sono due divisioni omografiche sopra due rette, le polari dei punti di divisione formano due fasci omografici.*

3. *Se in un cerchio si prendono i poli P e P' di due rette AB e A'B', le distanze di ciascuna di queste rette al polo dell' altra stanno tra loro come le distanze dei due poli al centro del cerchio; cioè si ha (fig. 474.)*

$$\frac{PC}{P'C} = \frac{PB'}{P'B}.$$

Conduciamo PD perpendicolare a CP' e P'E perpendicolare a CP. Si ha

$$CA' : CA :: CP : CP' :: CD : CE,$$

da cui

$$CA' - CD : CA - CE :: CD : CE :: CP : CP$$

ovvero

$$PB' : P'B :: CP : CP'$$

dunque ec.

4. *Se una corda di un cerchio gira intorno ad un punto fisso, la somma algebrica delle reciproche delle distanze delle sue estremità alla polare di questo punto, è costante.* (fig. 475.)

Sieno O il punto fisso, aa' la corda, O' il punto nel quale essa incontra la polare di O; avremo (pag. 86, Nota.)

$$\frac{1}{O'a} + \frac{1}{O'a'} = \frac{2}{O'O}$$

Ma i tre segmenti $O'a$, $O'a'$, $O'O$ sono rispettivamente proporzionali alle distanze ap, $a'p'$ Oq dei tre punti a, a', O alla polare; dunque

$$\frac{1}{ap} + \frac{1}{a'p'} = \frac{2}{Oq} = \textit{costante}.$$

Le perpendicolari avranno lo stesso segno o segno diverso secondochè saranno dirette nello stesso senso o in senso contrario a cominciare dai punti a ed a'.

5. Se indichiamo con d, d' le distanze rispettive del punto p e della sua polare P al centro C del cerchio di raggio k; abbiamo veduto che

$$d \,.\, d' = k^2.$$

Partendo da questa relazione si può fare completamente astrazione dal cerchio e dire che la retta P è la polare del punto p rispetto al punto C e alla quantità costante k^2. Fatta questa ipotesi, nulla impedisce che questa costante sia negativa, cioè $-k^2$; ciò vorrà dire solamente che le distanze d, d' sono prese a parti opposte del punto C. Questa osservazione è di molta importanza.

6. *Se un quadrilatero è circoscritto ad un cerchio, e un quadrilatero iscritto è formato unendo i punti di contatto; 1° le diagonali dei due quadrilateri s' intersecano nello stesso punto; 2° le quattro diagonali formano un fascio armonico; 3° i quattro punti d' intersezione dei lati opposti si trovano sopra una stessa linea retta.* (fig. 476.)

1° Sieno PQRS il quadrilatero circoscritto, e ABCD quello iscritto; e sia O il punto di concorso dei lati AB, DC. Poichè AB e DC sono le polari dei punti P e R, il punto O è il polo della retta PR; la quale perciò passerà per il punto V intersezione delle diagonali del quadrilatero iscritto. Similmente si prova che SQ è la polare di O' e che quindi passa anch' essa pel punto V.

2° Poichè PR è la polare di O, prolungandola deve passare per O', intersezione di AD e BC; ma O' è il polo di SQ, quindi AO' è tagliata armonicamente (pag. 92, teo. VI.); e per conseguenza le rette VA, VS, VD, VR formano un fascio armonico.

3° OO' e O''O''' si trovano sopra una stessa retta perchè sono ambedue polari del punto V.

Da questa proposizione segue che se *un quadrilatero è circoscritto ad un cerchio, le due diagonali e la retta che unisce i punti di concorso dei lati opposti formano un triangolo di cui ciascun vertice ha per polare il lato opposto.*

7. *Se un quadrilatero è iscritto in un cerchio, il quadrato della linea che unisce i punti di concorso dei lati opposti è uguale alla somma dei quadrati delle tangenti condotte dalle sue estremità.* (fig. 477.)

Sieno ABCD il quadrilatero iscritto, EF la linea che unisce i punti di concorso dei lati opposti, ET, ET' le tangenti condotte da E, FT″ quella condotta da F. La retta TT′ essendo la polare del punto E passa per F; quindi avremo: (pag. 154, teor. VI).

$$EF^2 - ET^2 = FT \,.\, FT' = FT''^2,$$

da cui

$$EF^2 = ET^2 + FT''^2.$$

8. *Se due triangoli* ABC, A′B′C′ *sono tali che i vertici e i lati di uno sieno i poli e le polari dei lati e dei vertici dell'altro, i tre punti* P, Q, R, *intersezione dei lati corrispondenti sono in linea retta; e le linee che uniscono i vertici corrispondenti concorrono in un punto.* (fig. 478.)

Uniamo C′R, C′A, AA′. Il punto E intersezione di AB e di B′C′ è il polo di AC′; il punto P il polo di AA′; quindi i quattro punti in linea retta P, E, C′, B′, sono i poli delle quattro linee AA′, AC′, AB, AC, e perciò il rapporto anarmonico R . PEC′B′ = A . A′C′FQ = R . B′C′FQ = R . QEC′B′ e per conseguenza RQ e RP sono in una linea retta.

I punti P, Q, R, sono i poli delle rette AA′, BB′, CC′; ma P, Q, R sono in linea retta, dunque AA′, BB′, CC′ s'incontrano in uno stesso punto.

II.

9. *Se per un punto* O *situato sulla superficie di una sfera si conduce una secante sferica* OA′ *ad un cerchio minore* C, *il luogo del punto* R *coniugato armonico di* O *rispetto ai due punti* A *e* A′, *intersezione della secante e del cerchio, è un arco di cerchio massimo perpendicolare ad* OC. (fig. 479.)

Sia O′ il coniugato armonico di O rispetto ai punti B, B′; conduciamo O′R; dico che O′R è perpendicolare ad OC. Descriviamo CP perpendicolare ad OR; avremo

$$\tan OP = \cos COP \,.\, \tan OC.$$

Se il triangolo OO′R è rettangolo in O′, avremo anche

$$\tan OO' = \cos COP \,.\, \tan OR;$$

talchè la quistione è ridotta a provare la seguente formola:

$$\frac{tan\ OP}{tan\ OO'} = \frac{tan\ OC}{tan\ OR} \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

Facciamo $tan \frac{1}{2}\ OA\ .\ tan\ \frac{1}{2}\ OA' = tan\ \frac{1}{1}\ OB\ .\ tan\ \frac{1}{2}\ OB' = K$;

avremo

$$tan\ OP = tan\ \frac{1}{2}\ (OA + OA') = \frac{tan\ \frac{1}{2}\ OA + tan\ \frac{1}{2}\ OA'}{1 - K},$$

$$tan\ OC = tan\ \frac{1}{2}\ (OB + OB') = \frac{tan\ \frac{1}{2}\ OB + tan\ \frac{1}{2}\ OB'}{1 - K}$$

Poichè R è coniugato armonico di O rispetto ai punti A ed A' abbiamo. (Nota IV, n° 24.)

$$cot\ OR = \frac{1}{2}\ (cot\ OA + cot\ OA');$$

ma

$$cot\ OA = \frac{1}{2}\left(cot\ \frac{1}{2}\ OA - tan\ \frac{1}{2}\ OA\right),$$

quindi

$$cot\ OR = \frac{1}{4}\ (cot\ \frac{1}{2}\ OA - tan\ \frac{1}{2}\ OA + cot\ \frac{1}{2}\ OA' - tan\ \frac{1}{2}\ OA')$$

$$= \frac{1 - K}{4\,K}\ (tan\ \frac{1}{2}\ OA' + tan\ \frac{1}{2}\ OA).$$

Per la medesima ragione si ha

$$cot\ OO' = \frac{1 - K}{4\,K}\ (tan\ \frac{1}{2}\ OB' + tan\ \frac{1}{2}\ OB).$$

Queste quattro formole dimostrano la relazione (a). Dunque O'R è il luogo del punto R.

Se il punto O fosse interno al circolo avremmo

$$OP = \frac{1}{2}(OA' - OA) \text{ e } cot\ OR = \frac{1}{2}(cot\ OA - cot\ OA');$$

il resto del ragionamento sarebbe lo stesso.

Il punto O si chiama il *polo* dell' arco O'R; e l'arco O'R *polare* del punto O rispetto al cerchio ABB'A'.

Il punto O' essendo coniugato armonico di O rispetto ai punti B e B', si ha $tan\ CO \,.\, tan\ CO' = tan^2\ CB$.

Se proiettiamo la figura precedente sopra un piano che tocchi la sfera nel punto C, il punto O e l'arco polare corrispondente saranno proiettati in un polo e nella sua polare rispetto alla proiezione del cerchio sul piano tangente.

10. L'arco polare di un punto O della circonferenza del cerchio minore, è l'arco tangente condotto in quel punto.

L'arco polare di un punto O esterno al cerchio è l'arco che unisce i punti di contatto dei circoli massimi condotti da esso tangenti al cerchio minore.

Questo apparisce evidente mediante la proiezione; ma può provarsi direttamente nel seguente modo.

Sieno OT, OT' gli archi tangenti. L'arco TT' è perpendicolare a CO e lo taglia in un certo punto O'; e i due triangoli rettangoli CO'T e COT danno

$$cos\ TCO = \frac{tan\ CO'}{tan\ CT} = \frac{tan\ CT}{tan\ CO};$$

quindi

$$tan^2\ CT = tan\ CO \,.\, tan\ CO';$$

la quale relazione prova che TT' è l'arco polare del punto O.

11. Dal teorema dato nel n° 7 si deducono agevolmente le seguenti proposizioni, analoghe a quelle dimostrate nel Libro VIII, cap. III.

1° *Gli archi polari dei punti di un cerchio massimo rispetto a un circolo minore, passano pel polo di questo circolo massimo.*

Sia P (fig. 129; le rette rappresentano archi di cerchi massimi) il polo dell' arco di cerchio massimo BD rispetto al cerchio minore C; dico che la polare di un punto qualunque D di BD passa per P. Conduciamo l' arco di cerchio massimo PE perpendicolare all'arco CD; i triangoli CPE, CBD essendo rettangoli ed avendo l' angolo C di comune danno

$$\cos C = \frac{\tan CE}{\tan CP} = \frac{\tan CB}{\tan CD},$$

da cui

$$\tan CE \,.\, \tan CD = \tan CP \,.\, \tan CB = \tan^2 CA,$$

poichè P è il polo del cerchio massimo BD. Dunque il circolo massimo PE è il polare del punto D.

Dal che segue che *l' arco che unisce due punti ha per suo polo il punto d' intersezione delle loro polari.*

2° *Il luogo dei poli dei circoli massimi che passano per un punto è l' arco polare del dato punto.*

Dimostrazione simile alla precedente.

3° *Se per un punto preso sulla sfera si conducono due archi di cerchi massimi che taglino un circolo minore, e uniamo con archi i punti d' intersezione due a due, il luogo dei punti d' intersezione di questi archi è il polare del punto dato.*

Dimostrazione analoga a quella del teo. VIII, pag. 94.

4° *Se da uno stesso punto della sfera conduciamo quattro archi che taglino un cerchio minore, il rapporto anarmonico di quattro qualunque dei punti d' intersezione è lo stesso di quello degli altri quattro.* (n.° 1.)

5° *Se sopra un circolo massimo si prendono quattro punti, i loro archi polari rispetto a un cerchio minore formeranno un fascio sferico, il cui rapporto anarmonico è lo stesso che quello dei quattro punti.* (n.° 2.)

I teoremi precedenti si ottengono immediatamente proiettando la figura sferica sul piano del cerchio minore. In un modo analogo dai teoremi dimostrati sui quadrilateri iscritti e circoscritti al cerchio si deducono quelli relativi ai quadrilateri sferici iscritti e circoscritti ad un circolo minore.

12. Daremo qualche applicazione per mostrare l'uso delle teorie precedenti.

1° Dato un punto O e un cerchio minore (fig. 479), si conduca un arco qualunque OA' che tagli il cerchio, e si prenda una porzione OX tale che $cot\ \mathrm{OX} = cot\ \mathrm{OA} + cot\ \mathrm{OA'}$; si domanda il luogo di X.

Costruiamo il polare di O e sia R il punto ov'esso taglia OA'. Abbiamo (n.° 9.)

$$cot\ \mathrm{OX} = cot\ \mathrm{OA} + cot\ \mathrm{OA'} = 2\ cot\ \mathrm{OR}.$$

Ora se conduciamo dal punto X un arco X S perpendicolare ad OC, avremo

$$cos\ \mathrm{XOS} = \frac{tan\ \mathrm{OS}}{tan\ \mathrm{OX}},\quad cos\ \mathrm{XOS} = \frac{tan\ \mathrm{OO'}}{tan\ \mathrm{OR}},$$

quindi

$$\frac{tan\ \mathrm{OS}}{tan\ \mathrm{OO'}} = \frac{tan\ \mathrm{OX}}{tan\ \mathrm{OR}} = \frac{cot\ \mathrm{OR}}{cot\ \mathrm{OX}} = \frac{1}{2};$$

il luogo richiesto è perciò un cerchio massimo perpendicolare ad OC nel punto S, che è determinato dall'ultima relazione.

2° Dato un punto O e un cerchio minore il cui centro sferico è C (fig. 480), trovare un altro punto O' sulla sfera tale che se pel punto O, per es., si conduca un arco qualunque O PQ, si abbia

$$\frac{sen\ \mathrm{OP}}{sen\ \mathrm{OQ}} = \frac{sen\ \mathrm{O'P}}{sen\ \mathrm{O'Q}}.$$

Costruiamo l'arco polare del punto O; il punto O' ove questo arco incontra CO è il punto richiesto.

Infatti dalla trigonometria sappiamo che se un angolo di un triangolo sferico è bisecato internamente o esternamente, i seni dei segmenti del lato opposto sono tra loro come i seni degli altri due lati. Quindi, poichè POQR è tagliato armonicamente e che l'angolo OO'R è retto, OO' è l'arco bisettore dell'angolo PO'Q, e perciò

$$\frac{sen\ \mathrm{OP}}{sen\ \mathrm{OQ}} = \frac{sen\ \mathrm{O'P}}{sen\ \mathrm{O'Q}}$$

L'angolo $Q'OQ$ è altresì bisecato da OO', quindi il triangolo POQ' dà

$$\frac{sen\ PO'}{sen\ Q'O'}=\frac{sen\ PO}{sen\ Q'O}.$$

III.

13. *Se per un punto* O *conduco una secante qualunque alla sfera* C, *il luogo del punto* P, *coniugato armonico di* O *rispetto ai punti* M ed N *nei quali la secante incontra la sfera, è un piano perpendicolare al diametro* CO. *(fig. 481.)*

Se per la secante e pel centro C facciamo passare un piano, esso segnerà sulla sfera un cerchio massimo. Il luogo del punto P rispetto a tutte le secanti che si possono condurre in questo piano è (pag. 92) la polare del punto O rispetto al cerchio MNBA. Ora se facciamo variare la posizione della secante MN, troveremo che per ciascuna posizione il luogo del punto P è la polare del punto O rispetto al cerchio corrispondente. Tutte queste polari passano per lo stesso punto O', coniugato armonico dei punti A e B nei quali OC incontra la sfera; sono tutte perpendicolari ad OC; dunque il luogo richiesto è un piano perpendicolare ad OC che passa pel punto O'.

Il piano ottenuto colla costruzione precedente si chiama *piano polare* del punto O rispetto alla sfera data; e il punto O è detto *polo* del piano.

È evidente che fra le distanze CO e CO' ha luogo la relazione $CO\,.\,CO'=R^2$, ove R è il raggio della sfera.

Da questa relazione apparisce evidente che se il polo è interno alla sfera, il piano polare sarà esterno, e che se il polo è sulla sfera, il piano polare è tangente alla sfera nel polo.

14. Se pel punto O conduciamo le tangenti al cerchio MNBA, e se facciamo rotare tutta la figura intorno alla retta OC, vedremo facilmente che:

Quando il polo è esterno alla sfera, il piano polare taglia la superficie della sfera in una circonferenza di cerchio ch'è la *curva di contatto di un cono retto circoscritto alla sfera, avente il vertice al polo.*

15. *I piani polari dei punti di un piano, rispetto ad una sfera, passano pel polo di questo piano. (fig. 482.)*

Sia P il piano polare del punto p rispetto alla sfera di centro C, e p' un punto qualunque di questo piano: dico che il piano polare di p' è il piano P' condotto dal punto p perpendicolarmente alla retta Cp'. Il teorema è dimostrato quando avremo provato che il punto a d'intersezione di P' colla retta Cp' è il coniugato armonico di p' rispetto ai punti D, E nei quali Cp' incontra la sfera. Ora se per la retta Cp' conduciamo un terzo piano Q perpendicolare ai piani P e P', esso taglierà questi ultimi rispettivamente nelle rette Π e Π'. La retta Π' passerà pel punto p e la retta Π sarà la polare di p rispetto al cerchio prodotto nella sfera dal piano Q. Ora sappiamo che il punto p' ha per polare rispetto a questo cerchio la retta Π'; dunque il punto a è il coniugato armonico di p' rispetto ai punti D, E e per conseguenza il teorema è dimostrato.

Da questo teorema segue che: *se più coni circoscritti ad una sfera hanno i loro vertici sopra uno stesso piano* P, *i piani delle loro basi passano per uno stesso punto* p, *polo del piano* P.

16. Poichè i piani polari dei punti della retta Π passano tutti pel punto p, e sono perpendicolari a quello che contiene la linea Π e il centro C della sfera, ne segue che tutti questi piani passano per una stessa linea retta $\Pi_{,}$ condotta pel punto p perpendicolarmente al piano anzidetto. Le rette Π e $\Pi_{,}$ si chiamano *reciproche*; talchè:

I piani polari dei punti di una retta rispetto ad una sfera, passano per un' altra linea retta, reciproca della prima.

17. *I poli dei piani che passano per uno stesso punto sono situati sul piano polare di questo punto.*

Dimostrazione analoga a quella del teorema (13).

Da questo teorema segue che: *se più coni sono circoscritti ad una sfera in modo che i loro piani passino per uno stesso punto* p, *il luogo dei loro vertici è il piano* P, *piano polare di* p.

18. Dal teorema precedente, ragionando come nel n° 14 si deduce il seguente teorema:

I poli dei piani che passano per una stessa linea retta sono sopra un' altra linea retta reciproca della prima.

19. Immaginiamo condotto per la retta Π (*fig.* 482) una serie di piani che tagliano nella sfera i cerchi C, C', C''....; e pel centro C un piano perpendicolare alla retta Π, che incontra questa retta nel punto A e la sfera nel cerchio C_1. Quest' ultimo piano incontra i primi seguendo rette che passano pei centri delle rispettive circonferenze e pel punto A. Indichiamo con M, N; M', N'; M'', N'' i punti nei quali ciascuna di queste rette incontra la circonferenza corrispondente. I poli della retta Π rispetto alle circonferenze C, C'.... dovendo essere i coniugati armonici del punto A rispetto ai punti M, N; M', N'; ec., ne segue evidentemente che essi dovranno trovarsi sulla polare del punto A rispetto al cerchio C_1. Quindi:

Il luogo dei poli di una retta Π, *rispetto a tutti i cerchi situati sopra una sfera e passanti per* Π, *è la retta reciproca di* Π.

20. In modo analogo si prova che:

Il luogo delle polari di un punto rispetto a tutti i cerchi situati sopra una sfera e passanti per questo punto, è il piano polare di questo stesso punto.

21. *Se quattro punti presi come poli sono in linea retta, il loro rapporto anarmonico è uguale a quello dei loro quattro piani polari.*

Infatti questi quattro piani passano per una stessa retta; dippiù le quattro rette condotte dal centro della sfera ai quattro poli fanno fra loro angoli eguali a quelli dei quattro piani polari; dunque ec.

NOTA IX.

Metodo delle polari reciproche.

1. Sia ABCD un poligono qualunque *(fig. 483)*. Da un punto O del suo piano conduciamo ai suoi lati le perpendicolari, Oa, Ob, Oc, Od, sulle quali prendiamo punti A', B', C', D' tali che si abbia $OA' . Oa = OB' . Ob = OC' . Oc = OD' . Od = k^2$, ove k^2 è una quantità costante: i punti A', B', C', D' sono i poli delle rette AB, BC, CD, AD relativamente ad un cerchio di centro O e di raggio k; e reciprocamente i punti A, B, C, D sono i poli delle rette A'D', A'B', B'C', C'D'. Quindi i due poligoni ABCD e A'B'C'D' hanno la proprietà che i vertici e i lati dell'uno sono i poli e le polari dei lati e dei vertici dell'altro.

Due figure rettilinee diconsi *polari reciproche* quando ciascuna linea dell'una ha per suo polo rispetto a un dato cerchio un punto corrispondente dell'altra e reciprocamente. I poligoni ABCD e A'B'C'D' sono quindi figure polari reciproche; e la costruzione precedente mostra che si può sempre formare la figura polare reciproca ad un poligono dato.

2. Sia S una curva piana qualunque *(fig. 484)*. Da un punto O del suo piano conduciamo alla tangente PT nel punto P la perpendicolare OT, sulla quale prendiamo un punto p tale che si abbia $Op . OT = k^2$, ove k^2 è una quantità costante: il punto p è il polo della tangente PT rispetto al cerchio di centro O e di raggio k. Il luogo del punto p è una curva s tale che ciascuna tangente pt ad essa è la polare del punto corrispondente P della curva data S. Infatti, poichè p e p' sono i poli delle rette PT e P'T', il punto Q sarà il polo della corda pp'. Supponiamo ora che il punto P' si avvicini costantemente al punto P; allora il punto Q e la corda pp' tenderanno rispettivamente verso il punto P e la tangente pt; dunque al limite il punto P sarà il polo della tangente pt.

Due curve diconsi *polari reciproche* quando ciascuna tangente ad una di esse ha per polo rispetto a un dato cerchio un punto corrispondente dell' altra e reciprocamente. Le curve S e *s* sono quindi polari reciproche.

Il metodo delle polari reciproche, caso particolare della trasformazione generale delle figure, è stato usato con molto successo dai geometri moderni e precipuamente da Poncelet. Comunque la sua maggiore utilità si riscontri veramente nelle parti superiori delle matematiche; tuttavia è bene conoscerne fin d' ora i principii elementari, che noi verremo dichiarando sopra qualche esempio.

3. Siano ABCDEF *(fig. 485)* un esagono iscritto in un cerchio e *abcdef* l' esagono circoscritto formato dalle tangenti condotte dai vertici del primo: questi due poligoni sono figure polari reciproche. Le diagonali *ad*, *be*, *cf* dell' esagono circoscritto sono le polari dei punti di concorso dei lati opposti dell' esagono iscritto; ma pel teorema di Pascal questi punti sono in linea retta; dunque:

Le linee che uniscono i punti opposti di un esagono circoscritto ad una circonferenza s' incontrano in un punto.
Questo teorema è dovuto a Brianchon. I teoremi di Pascal e di Brianchon sono quindi mutuamente polari, talchè uno è conseguenza dell' altro.

4. Sieno ABC, *abc* due triangoli polari reciproci rispetto ad un cerchio di centro O *(fig. 487)*. Sappiamo che le altezze AM, BN, CP del primo triangolo s' incontrano in uno stesso punto I; quindi i poli *m*, *n*, *p* di queste tre altezze sono in linea retta. La ricerca di questi poli è agevolissima avendo presenti i seguenti principii.

1°. *I poli di più rette concorrenti in un punto si trovano sulla polare di questo punto* (pag. 93);

2°. *I poli di due rette perpendicolari si trovano sopra due raggi perpendicolari.*

In virtù del primo principio il polo di AM deve trovarsi sopra *bc* polare di A; in virtù del secondo questo polo deve trovarsi altresì sulla perpendicolare O*m* al raggio O*a;* dunque sarà nel punto *m* intersezione di O*m* con *bc*. Al modo stesso si procederebbe per trovare p e n. Quindi abbiamo il seguente teorema:

Se da un punto O *si conducono delle rette ai vertici di un triangolo* abc *e delle perpendicolari a queste rette; e se ciascuna perpendicolare si prolunga sino a che incontri il lato opposto al vertice che le corrisponde; i tre punti* m, n, p *così ottenuti sono sopra una medesima linea retta.*

5. I due esempi che abbiamo dati sono sufficienti per far comprendere ai giovani lo spirito del metodo in discorso; e far loro manifesto come tutti i teoremi risguardanti proprietà *descrittive* delle figure si possano raddoppiare trasformandoli col detto metodo. Il quale si applica anche alla trasformazione delle proprietà *metriche* delle figure; così il teorema 19 Nota IV e il teorema 25 Nota VI sono reciprocamente polari; come lo son pure il teorema di Desargues (pag. 440) e il seguente: *le quattro rette condotte da un punto qualunque ai vertici di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza e le due tangenti condotte da questo stesso punto al cerchio dato formano un fascio in involuzione.* Questi esempi sono facilissimi e non hanno bisogno di dichiarazioni. Per mostrare però come si possa procedere in casi più complicati proverò che i teoremi 26 e 28 Nota VI sono reciprocamente polari. Supporrò conosciuto il secondo e sia $abcd$ il quadrilatero polare reciproco al quadrilatero ABCD rispetto a circonferenza O *(fig. 486)*. Dai vertici del poligono circoscritto abbasso le perpendicolari aa', bb', cc', dd' sulla tangente TT' polare del punto m dato sulla circonferenza. Poichè m e d sono i poli di TT' e di AD e m e b i poli di TT' e di BC, abbiamo (Nota VIII, n°. 3),

$$\frac{dd'}{mp}=\frac{d\,O}{mO},\ \frac{bb'}{mq}=\frac{b\,O}{mO};$$

da cui

$$\frac{dd'\,.\,bb'}{mp\,.\,mq}=\frac{dO\,.\,bO}{mO^2}.$$

Al modo stesso troviamo

$$\frac{cc' \cdot aa'}{mr \cdot ms} = \frac{cO \cdot aO}{mO^2};$$

e per conseguenza

$$\frac{dd' \cdot bb'}{cc' \cdot aa'} = \frac{dO \cdot bO}{cO \cdot aO};$$

la quale relazione dimostra il teorema 26.

6. I metodi precedenti tuttavia non sono applicabili alla trasformazione di *qualunque* proprietà metrica. Un metodo generale per eseguire questa trasformazione è dovuto all'uffiziale di artiglieria Mannheim; gioverà darne un cenno.

Sia AmB un angolo ed o un punto qualunque nel suo piano (*fig.* 488). La figura polare reciproca dell'angolo dato rispetto ad un cerchio di centro o è la retta ab, i cui estremi a, b sono rispettivamente i poli di Am e di mB. Dal punto o conduciamo una trasversale qualunque cd e la retta om ch'è perpendicolare ad ab; finalmente dai punti a e b abbassiamo le perpendicolari ac_1 e bd_1 sopra cd. Osservando che ac_1 è la polare del punto c e bd_1 la polare di d e supposto eguale ad 1 il raggio del cerchio direttore, abbiamo $od_1 = \frac{1}{od}, oc_1 = \frac{1}{oc}$.

D'altra parte

$$sen\, dom = sen\, bac_1 = \frac{c_1 d_1}{ab} = \frac{od_1 - oc_1}{ab},$$

in virtù della relazione $c_1 d_1 + d_1 o + oc_1 = 0$.

Quindi

$$ab = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{sen\, dom} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Poichè ab dipende solamente dall'angolo dato e dalla posizione del punto o, ne segue che $\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{sen\, dom}$ è costante qualunque sia la trasversale condotta dal punto o. Ma nel caso in cui la trasversale sia od'' parallela ad Am, quel-l'espressione è uguale a $\frac{1}{od'' \operatorname{sen} d''om} = \frac{1}{d''r}$, $d''r$ essendo perpendicolare ad om; dunque in generale

$$\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} dom} = \frac{1}{d''r}.$$

Per una trasversale ef condotta da un altro punto p di om, avremo

$$\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} fpm} = \frac{1}{f''r'}.$$

Ma $\frac{d''r}{f''r'} = \frac{om}{pm}$; quindi

$$ab = \frac{pm}{om}\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe}\right)\frac{1}{\operatorname{sen} fpm} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Se la trasversale ef è perpendicolare ad om o parallela ad Am, avremo nel primo caso,

$$ab = \frac{pm}{om}\left(\frac{1}{pf} - \frac{1}{pe'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

e nel secondo

$$ab = \frac{pm}{om}\cdot\frac{1}{pf''}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} f''pm} = \frac{pm}{om}\cdot\frac{1}{f''r'} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Se la trasversale è $c'd'$ perpendicolare ad om, l'espressione (1) diventa

$$ab = \frac{1}{od'} - \frac{1}{oc'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

e in quest'ultimo caso ab esprime anche la perpendicolare abbassata dal punto b sopra la polare del punto c' rispetto al cerchio o. Talchè la relazione (5) può considerarsi come una trasformazione della distanza di un punto ad una retta.

I valori precedenti di ab servono a trasformare le proprietà metriche delle figure, come mostreremo con qualche esempio. Ma prima osserverò che nella formazione del secondo membro dell' eguaglianza (1) bisogna cominciare dal reciproco del segmento *od*, che termina alla retta B polare della seconda estremità di *ab*.

7. Dati tre punti *a*, *b*, *c* situati sopra una linea retta M, sappiamo che si ha

$$ab + bc + ca = 0 .$$

Sieno A, B, C le polari dei tre punti *a*, *b*, *c* rispetto al cerchio *o*, che passano pel punto *m* polo della retta M. Conduciamo la retta *om* che indicheremo con D, e una trasversale qualunque che incontra le quattro rette A, D, B, C in punti che per semplicità rappresenteremo con *a*, *b*, *c*, *d*. Trasformando i segmenti *ab*, *bc*, *ca* mediante l' espressione (2), la relazione proposta si trasformerà nell'altra

$$\left(\frac{1}{db} - \frac{1}{da}\right) + \left(\frac{1}{dc} - \frac{1}{db}\right) + \left(\frac{1}{da} - \frac{1}{dc}\right) = 0 ;$$

la quale si vede facilmente che può scriversi

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc = 0,$$

espressione già da noi trovata per altra via nella Nota IV.

8. Sappiamo (Nota IV) che il rapporto anarmonico di quattro punti *m*, *n*, *p*, *q* posti in linea retta può scriversi sotto la forma

$$\frac{\dfrac{1}{qm} - \dfrac{1}{qp}}{\dfrac{1}{qn} - \dfrac{1}{qp}} .$$

Indichiamo con M, N, P, Q le polari dei punti *m*, *n*, *p*, *q* che concorrono nel punto *s* polo della retta data rispetto al cerchio di centro *o*. Conduciamo *os* che chiameremo C e una trasversale qualunque che taglia M, N, P, Q, C in punti che per semplicità indicheremo anche con m, n, p, q, c. Dalla relazione (2) avremo

$$qm = \frac{cs}{os}\left(\frac{1}{cm} - \frac{1}{cq}\right)\frac{1}{sen\,\beta},$$
$$qp = \frac{cs}{os}\left(\frac{1}{cp} - \frac{1}{cq}\right)\frac{1}{sen\,\beta};$$
ec.;

e per conseguenza la proposta relazione si trasforma nell' altra

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{cm}-\dfrac{1}{cq}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{cp}-\dfrac{1}{cq}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{cn}-\dfrac{1}{cq}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{cp}-\dfrac{1}{cq}}};$$

la quale, come è facile verificare, (Nota IV, n° 11, eq: 7), esprime il rapporto anarmonico dei quattro punti m, n, p, q in funzione delle loro distanze ad un punto arbitrario c.

Trasformando ora i segmenti cm, cq, ec. colla solita espressione (2), l' ultima relazione si trasformerà nell' altra

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{am}-\frac{1}{ac}} - \dfrac{1}{\frac{1}{aq}-\frac{1}{ac}}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{ap}-\frac{1}{ac}} - \dfrac{1}{\frac{1}{aq}-\frac{1}{ac}}}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{an}-\frac{1}{ac}} - \dfrac{1}{\frac{1}{aq}-\frac{1}{ac}}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{ap}-\frac{1}{ac}} - \dfrac{1}{\frac{1}{aq}-\frac{1}{ac}}}}$$

che rappresenta il rapporto anarmonico dei quattro punti m, n, p, q in funzione delle loro distanze a due punti arbitrarii a, c.

Sieno m, n, p, q; m', n', p', q' punti corrispondenti di due divisioni omografiche fatte sopra due rette; a, c due punti arbitrari della prima; b', d' due punti arbitrari della seconda. Se l'eguaglianza dei rapporti anarmonici dei due sistemi di punti si rappresenta con l'espressione precedente, e se si suppone che tutti i punti sieno fissi eccetto m, m', avremo

$$\frac{\beta}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{am}-\dfrac{1}{ac}}-\gamma}-\alpha=\frac{\beta'}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{b'm'}-\dfrac{1}{b'd'}}-\gamma'}-\alpha',$$

ove α, β, γ, α', β', γ' sono costanti. Questa espressione, indicando con λ, μ, ν nuove costanti espresse per mezzo delle precedenti, può scriversi sotto la forma

$$\left(\frac{1}{am}-\frac{1}{ac}\right)\left(\frac{1}{b'm'}-\frac{1}{b'd'}\right)+\lambda\left(\frac{1}{am}-\frac{1}{ac}\right)+\mu\left(\frac{1}{b'm'}-\frac{1}{b'd'}\right)+\nu=o.$$

$$\text{Ma } \frac{1}{am}-\frac{1}{ac}=\frac{mc}{am\,.\,ac},\ \frac{1}{b'm'}-\frac{1}{b'd'}=\frac{m'd'}{b'm'\,.\,b'd'};$$

quindi l'espressione precedente diventa

$$\frac{am}{cm}\cdot\frac{b'm'}{d'm'}+\lambda\,\frac{am}{cm}+\mu\,\frac{b'm'}{d'm'}+\nu=o\ldots.(a)$$

Se nella medesima espressione di sopra si effettuano le moltiplicazioni indicate, troveremo

$$\frac{1}{am}\cdot\frac{1}{b'm'}+\frac{\lambda}{am}+\frac{\mu}{b'm'}+\nu=o,$$

che può scriversi

$$am\,.\,b'm'+\lambda\,.\,am+\mu\,.\,b'm'+\nu=o,\ldots.(b)$$

Le relazioni (a) e (b) sono dovute a Chasles e servono per rappresentare la divisione omografica di due rette. È chiaro che le costanti λ, μ e ν hanno valori diversi nelle relazioni precedenti.

9. Dato un triangolo rettangolo *abc* (*fig.* 489), sappiamo che

$$cb^2 = ac^2 + ba^2;$$

si vuol trasformare quest' eguaglianza.

Sia $a'b'c'$ il triangolo polare reciproco di *abc* rispetto alla circonferenza *o*. I punti b' e c' essendo poli di *ac*, *ab* l'angolo $b'oc'$ è eguale all'angolo *cab*, cioè è retto. Quindi applicando la relazione (5) troveremo

$$ac = \frac{1}{oc''} - \frac{1}{oc'}, \quad ba = \frac{1}{ob'} - \frac{1}{ob''}.$$

Condotta per *o* la retta *mn* perpendicolare ad oa' avremo parimente

$$cb = \frac{1}{on} - \frac{1}{om}.$$

Quindi l'espressione proposta si trasforma nell'altra

$$\left(\frac{1}{on} - \frac{1}{om}\right)^2 = \left(\frac{1}{oc''} - \frac{1}{oc'}\right)^2 + \left(\frac{1}{ob'} - \frac{1}{ob''}\right)^2;$$

cioè: *Se in un triangolo qualunque* a'b'c' *si prenda un punto* o *tale, che l'angolo* b'oc' *sia retto*, si ha

$$\left(\frac{1}{on} - \frac{1}{om}\right)^2 = \left(\frac{1}{oc''} - \frac{1}{oc'}\right)^2 + \left(\frac{1}{ob'} - \frac{1}{ob''}\right)^2.$$

Se il punto *b* si confonde col punto *o*, i lati *cb*, *ab* passeranno per *o*, e per conseguenza i loro poli rispettivi a', c' vanno all'infinito; laonde $\frac{1}{on}$, $\frac{1}{oc'}$, $\frac{1}{ob''}$, sono uguali a zero, e l'espressione precedente diventa

$$\frac{1}{om^2} = \frac{1}{oc''^2} + \frac{1}{ob'^2}.$$

Ma il triangolo $oc''b'$ è rettangolo in o, e om è l'altezza di questo triangolo perchè oa' è parallela a $b'a'$; quindi

In un triangolo rettangolo, la somma delle reciproche dei quadrati dei lati dell'angolo retto è uguale alla reciproca del quadrato dell'altezza.

Applicando questo teorema al triangolo rettangolo abc, e osservando che la perpendicolare $a\,p$ è data da $\frac{1}{oa'} - \frac{1}{oa''}$ avremo,

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa'} - \frac{1}{oa''}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{oc''} - \frac{1}{oc'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{ob'} - \frac{1}{ob''}\right)^2},$$

la qual relazione ha luogo per un triangolo qualunque $a'b'c'$ e per un punto o tale che l' angolo $b'oc'$ sia retto.

Per altri particolari vedi Mannheim, *Transformation des propriétés métriques des figures.*

NOTA X.

Sezioni coniche.

Nel Libro VII sono state considerate le intersezioni del cono con piani passanti per l'asse o con piani perpendicolari allo stesso. In questa Nota ci proponiamo di studiare le intersezioni del cono con piani inclinati all'asse.

Avvertiamo che per brevità useremo la parola cono per indicare il cono circolare retto; tutte le volte che vorremo parlare del cono obliquo, lo dichiareremo espressamente.

I.

Sia *(fig.* 490; 491, 492*)* A' O' B' la *sezione principale* del cono, cioè quella formata da un piano condotto per l'asse perpendicolarmente alla base. Tagliamo il cono con un piano perpendicolare a quello della sezione principale ed obliquo all'asse; e sia AB l'intersezione di questi due piani; l'angolo A''AB può essere minore, maggiore o eguale all'angolo A''O'B'. Nel primo e nell'ultimo caso il piano secante taglia solo una metà della superficie conica; nel secondo entrambe le parti. Nel primo caso la linea d'intersezione è una curva chiusa che si chiama *ellisse*; nel secondo la linea d'intersezione si compone di due curve distinte e dicesi *iperbole*; nel terzo finalmente è una curva detta *parabola* che è chiusa da una parte e dall'altra si estende all'infinito.

Le tre curve si distinguono poi col nome generico di *sezioni coniche* o semplicemente *coniche*.

L'intersezione AB del piano della sezione principale col piano secante si chiama *asse* della sezione conica. Nell'ellisse l'asse ha una lunghezza determinata AB. Nell'iperbole l'asse è veramente una retta illimitata; ma per analogia coll'ellisse s'intende per asse dell'iperbole la parte di questa retta compresa fra i punti A e B nei quali essa incontra la curva. Nella parabola l'asse non ha lunghezza determinata.

I punti nei quali l'asse incontra il perimetro della curva diconsi *vertici*. La parabola ha un sol vertice A; l'ellisse e l'iperbole ne hanno due A e B.

Nell'ellisse e nella iperbole il punto ad egual distanza dai vertici dicesi *centro*. La parabola non ha centro, o in altre parole il suo centro è all'infinito.

Se nel piano della sezione principale descriviamo un cerchio GFG' tangente alle due generatrici opposte O'A', O'B' e all'asse AB, il punto di contatto F di questo cerchio con l'asse si chiama *fuoco* della sezione conica. È chiaro che la parabola ha un solo fuoco, mentre l'ellisse e la iperbole ne hanno due.

Se facciamo girare il cerchio GFG' intorno all'asse del cono, verremo a descrivere una sfera iscritta nel cono. Sia GKG' la curva di contatto; sappiamo che essa è un cerchio il cui piano è perpendicolare all'asse del cono. Questo piano incontra quello della sezione conica in una retta NL perpendicolare all' asse della sezione conica. Questa retta ha ricevuto il nome di *direttrice*. È manifesto che la parabola ha una sola direttrice, mentre l'ellisse e la iperbole ne hanno due.

Il punto in cui la direttrice incontra l' asse della sezione conica si chiama *piede* della direttrice.

La distanza fra un punto di una sezione conica e il fuoco dicesi *raggio vettore*.

Nell' ellisse e nell' iperbole la distanza fra un fuoco e il centro dicesi *eccentricità*.

---

1. Da un punto qualunque M di una sezione conica conduco il piano CMC′ perpendicolare a quello della sezione principale; l' intersezione MP dei piani CMC′ e AMB essendo perpendicolare al piano della sezione principale, è altresì perpendicolare alle due rette AB e CC′.

Ciò posto, le rette NG′ e PC′ essendo parallele, avremo, per l' ellisse e l' iperbole

$$\frac{BN}{BG'} = \frac{NP}{G'C'};$$

e per la parabola

$$\frac{NP}{G'C'} = 1 .$$

Ma $BG' = BF$, $G'C' = MK = MF$; quindi per l' ellisse e la iperbole

$$\frac{BN}{BF} = \frac{NP}{MF}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

per la parabola

$$\frac{NP}{MF} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

La relazione (2) si poteva dedurre dalla (1) osservando che nella parabola il punto B essendo all' infinito, il rapporto $\frac{NB}{FB}$ è eguale all' unità.

Poichè NP è la distanza fra il punto M e la direttrice NL, le relazioni (1) e (2) esprimono la seguente proprietà generale delle sezioni coniche:

In qualunque sezione conica il rapporto fra le distanze di ciascun punto della curva al fuoco e alla direttrice corrispondente è costante.

2. In virtù di questo teorema si ha

$$\frac{BN}{BF} = \frac{AN}{AF};$$

cioè:

Nell' ellisse e nell' iperbole i punti N *ed* F *dividono armonicamente l' asse* AB.

3. Nell' ellisse BF $<$ BN, quindi AF $<$ AN.

Nella iperbole BF $>$ BN, quindi AF $>$ AN.

Nella parabola AF $=$ AN.

Dunque:

La distanza del vertice A *al fuoco* F *di una sezione conica è minore, maggiore o uguale alla distanza dello stesso vertice alla direttrice* NL, *secondo che la curva è una ellisse, una iperbole o una parabola;* o in altri termini:

La sezione conica è una ellisse, una iperbole o una parabola secondochè il rapporto costante delle distanze di un punto della curva al fuoco e alla direttrice corrispondente è minore, maggiore o eguale all' unità.

Per questa ragione al rapporto $\frac{MF}{NP}$ è stato dato il nome di *rapporto o ragione determinante.*

4. Da quel che precede segue che:

Il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto e da una retta fissi è una sezione conica di cui il punto e la retta dati sono il fuoco e la direttrice corrispondente.

Questo teorema permette di costruire le coniche sopra un piano, dati che sieno la direttrice, il fuoco corrispondente e la ragione determinante.

Si confronti questa genesi delle sezioni coniche con quella del cerchio (pag. 91).

5. Prolungando MP sino a che incontri di nuovo la curva nel punto M'; avremo $MF = M'F$, e quindi $MP = M'P$; dunque:

Le sezioni coniche sono simmetriche rispetto al loro asse.

Alla stessa conseguenza si giunge osservando che il cono è simmetrico relativamente al piano della sezione principale.

6. I quattro punti N, A, F, B formando una proporzione armonica, se indichiamo con O il centro dell'ellisse e della iperbole avremo (pag. 87, teor. 1)

$$OA^2 = ON \times OF;$$

cioè:

Nell' ellisse e nella iperbole il semi-asse è medio proporzionale fra le distanze del centro al fuoco e alla direttrice corrispondente.

7. La relazione precedente si può scrivere

$$\frac{OF}{OA} = \frac{OA}{ON},$$

da cui

$$\frac{OF}{OA - OF} = \frac{OA}{ON - OA} \text{ ovvero } \frac{OF}{OA} = \frac{AF}{AN};$$

ma OF è l' eccentricità; dunque:

Nell' ellisse e nella iperbole la ragione determinante è uguale al rapporto dell' eccentricità al semi-asse.

8. Chiamando N' il punto nel quale la seconda direttrice incontra l' asse, avremo

$$\frac{AF}{AN} = \frac{OF}{OA} = \frac{2OA}{2ON} = \frac{AB}{NN'};$$

cioè:

Nell' ellisse e nella iperbole la ragione determinante è uguale al rapporto dell' asse alla distanza delle due direttrici.

9. Per l' ellisse e l' iperbole si ha

$$\frac{MF'}{PN'} = \frac{MF}{PN};$$

da cui, per l' ellisse

$$\frac{MF' + MF}{PN' + PN} = \frac{MF}{PN} = \frac{AB}{NN'},$$

e per l' iperbole

$$\frac{MF' - MF}{PN' - PN} = \frac{MF}{PN} = \frac{AB}{NN'};$$

quindi per l' ellisse

$$MF' + MF = AB,$$

e per l' iperbole

$$MF' - MF = AB;$$

dunque:

Nell' ellisse la somma e nella iperbole la differenza dei raggi vettori di un punto qualunque della curva è uguale all' asse.

Da questo teorema si deduce una costruzione dell' ellisse e della iperbole per punti, dati che sieno l' asse corrispondente e i fuochi.

10. Dal centro O dell' ellisse conduciamo CD perpendicolare ad AB (*fig.* 493). È facile vedere che la curva è simmetrica rispetto a CD: per questa ragione si dice che l' ellisse ha un secondo *asse* CD. Inoltre si ha $CD < 2\,CF$; ma $2\,CF = AB$; dunque $CD < AB$; laonde gli assi AB e CD si distinguono col nome di *asse maggiore* e *asse minore* rispettivamente.

Da ciò segue anche che *le distanze dei vertici dell' asse minore ai fuochi sono eguali al semi-asse maggiore.*

11. Costruiamo il rettangolo COFT; poichè $OT = FC = OA$, il punto T appartiene alla circonferenza che ha per centro O e per raggio OA; e per conseguenza $AF \times FB = FT^2 = OC^2$, cioè; *l'asse maggiore di una ellisse è diviso da un fuoco in due segmenti il cui prodotto è uguale al quadrato del semi-asse minore.*

12. Conducendo pel centro della iperbole una perpendicolare all'asse, la curva sarà simmetrica rispetto a questa retta ma non la incontrerà. Se sopra questa retta prendiamo due punti C e D equidistanti da O e tali che $OC^2 = AF \times FB$, per conservare l'analogia con l'ellisse, si dice che la porzione di retta CD è un secondo *asse* della iperbole: AB si dice asse *trasverso*, CD *non trasverso.*

13. Sia N un punto esterno all'ellisse; conduciamo NF, NF', MF'. Nel triangolo NMF' si ha $MN + NF' > MF'$ e per conseguenza $NF + NF' > MF + MF' > 2a$. Per un punto interno N' si troverebbe $N'F + N'F' < 2a$. Dunque: *per un punto esterno o interno all'ellisse la somma dei raggi vettori è nel primo caso maggiore*, nel *secondo minore dell'asse* AB.

Un ragionamento analogo applicato alla iperbole conduce al teorema: *per un punto esterno o interno all'iperbole la differenza dei raggi vettori è nel primo caso minore, nel secondo maggiore dell'asse trasverso.*

Le proprietà precedenti permettono di descrivere per punti una ellisse e una iperbole, dati che sieno i due assi.

14. Sul prolungamento di MF *(fig. 494)* prendiamo una porzione $MG = MF'$, e conduciamo GF' e la bisettrice MD' dell'angolo GMF'. Sia N un punto qualunque di MD'; tiriamo NG, NF', NF. È chiaro che $D'G = D'F'$ e per conseguenza $NG = NF'$. Ma $NG + NF > FG$, cioè $NF' + NF > AB$; dunque il punto N è esterno alla curva, e la retta NMD' è tangente all'ellisse nel punto M. Laonde:

Se da un punto dell'ellisse si conducono i raggi vettori, la retta che divide per metà l'angolo formato da uno di questi raggi e dal prolungamento dell'altro, è tangente alla curva.

L'inversa di questa proposizione è evidente.

La reciproca è vera; cioè:

Una tangente ND' *all'ellisse fa coi raggi vettori condotti al punto di contatto* M *gli angoli* NMF, D'MF' *eguali.*

Con un ragionamento analogo si dimostra che:

Una tangente alla iperbole è bisettrice dell'angolo formato dai raggi vettori condotti al punto di contatto.

15. Conducendo OD' si ha $OD' = \frac{1}{2} FG = OA$; dunque:

Le proiezioni dei fuochi di una ellisse sopra una tangente qualunque sono situati sopra la circonferenza che ha per diametro l'asse maggiore.

Da questo teorema segue che:

Se un angolo retto D_1DD' *si muove in guisa che il suo vertice* D *descriva la circonferenza fatta sopra* AB *come diametro e uno dei suoi lati* DD_1 *passi pel punto* F, *l'altro lato* D'D *tocca costantemente una ellisse di cui* F *è uno dei fuochi.*

16. Poichè l'angolo iscritto D_1DD' è retto, la linea D_1D' passa pel centro O; quindi i triangoli OF'D' e OFD_1 sono eguali, e per conseguenza $D'F' = D_1F$; ma $D_1F \times FD = AF \times FB$; dunque (12) *il prodotto delle distanze di una tangente qualunque ai due fuochi è uguale al quadrato del semi-asse minore.*

I teoremi (15) e (16) hanno altresì luogo per l'iperbole.

17. Conduciamo da un fuoco F della iperbole le due tangenti FH, FH' a circonferenza OA *(fig. 495)*; ed uniamo i punti di contatto H e H' col centro. Le rette PQ, RS in tal guisa ottenute toccano la curva perchè gli angoli FHQ, FH'S sono retti; dico che il loro punto di contatto è all'infinito. Infatti, supponiamo per un momento che il punto di contatto di PQ sia M, in guisa che si abbia $MF' - MF = AB$. Dal punto F' conduciamo F'G parallela a PQ ed uniamo il punto G nel quale questa parallela incontra FH con M; avremo $MG = MF$. Ma $F'G = 2OH = AB$; dunque dovrebbe aversi $MF' - MG = F'G$; lo che essendo impossibile, il punto di contatto è all'infinito.

Ora una retta che si accosta continuamente ad una curva indefinita senza poterla mai raggiungere si chiama *asintoto.* Dunque:

La iperbole ha due asintoti.

Quando l'angolo compreso fra gli asintoti è retto l'iperbole si dice *equilatera*.

18. I teoremi precedenti dànno il modo di condurre una tangente all'ellisse e alla iperbole per un punto situato sulla curva o al di fuori di essa. Noi considereremo il solo secondo caso, poichè il primo è troppo facile per aver bisogno di dichiarazioni.

Condurre da un punto N *esterno all'ellisse una tangente a questa curva. (fig.* 496.*)*

Dal punto N e con raggio NF descrivo una circonferenza; dal fuoco F' con raggio AB descrivo una seconda circonferenza che taglia la prima nei punti C, D. Conduco le rette CF', DF' e unisco i punti M ed M' in cui esse incontrano l'ellisse al punto N; le rette NM, NM' sono le tangenti richieste.

La costruzione è uguale per la iperbole.

Lascio le dimostrazioni agli studiosi.

19. Sull'asse maggiore AB di una ellisse descrivo la circonferenza ANB *(fig.* 497*)*; da un punto N di questa circonferenza conduco NP perpendicolare ad AB che incontra l'ellisse nel punto M e sia Q'ML la tangente in questo punto. I triangoli simili MF'Q', MFQ danno

$$MQ' : MQ :: F'Q' : FQ :: LQ' : LQ.$$

Laonde *la tangente ad un punto dell'ellisse è divisa armonicamente dal punto di contatto, dall'asse maggiore e dalle perpendicolari abbassate sopra di essa dai due fuochi.* Da ciò segue che NP è la polare del punto L; quindi NL è tangente al cerchio in N.

Ora i triangoli simili PML, F'Q'L, FQL danno

$$MP : LP :: F'Q' : LQ',$$
$$MP : LP :: FQ : LQ;$$

da cui

$$MP^2 : LP^2 :: FQ \times F'Q' : LQ \times LQ';$$

ma

$$FQ \times F'Q' = OC^2, \ LQ \times LQ' = LN^2,$$

dunque

$$MP : OC :: LP : LN :: NP : ON,$$

per la similitudine dei triangoli OPN, NPL; e per conseguenza

$$\frac{MP}{NP} = \frac{OC}{ON} = \frac{OC}{OA};$$

cioè:

Le perpendicolari MP, NP *all' asse maggiore, che si corrispondono nell' ellisse e in circonferenza* OA, *stanno fra loro* come OC : CA.

20. Poichè NP è la polare del punto L si ha che

L' asse maggiore dell' ellisse è diviso armonicamente, dalla curva e dai punti nei quali è incontrato dalla tangente e dalla perpendicolare abbassata sopra di esso dal punto di contatto.

In virtù di questa proposizione si ha $OA^2 = OP \times OL$, dunque:

Il semi-asse maggiore dell'ellisse è medio proporzionale fra le distanze del centro ai punti nei quali è incontrato dalla tangente e dalla perpendicolare abbassata dal punto di contatto sopra di esso.

I teoremi contenuti nei due numeri precedenti hanno altresì luogo per la iperbole.

21. *Se un punto è esterno o interno alla parabola, la sua distanza al fuoco sarà maggiore nel primo caso e minore nel secondo della sua distanza alla direttrice.*

Dimostrazione facilissima.

22. Dal punto M della parabola *(fig. 498)* conduciamo il raggio vettore MF, la perpendicolare MQ alla direttrice, la bisettrice MT dell' angolo QMF e la retta QF; uniamo un punto qualunque G di MT coi punti Q ed F e tiriamo GO perpendicolare alla direttrice. È chiaro che MT è perpendicolare

sul mezzo di QF; quindi GQ = GF, ma GQ > GO; dunque il punto G è fuori la parabola, e per conseguenza GMT è tangente alla parabola; talchè:

La bisettrice dell' angolo compreso fra il raggio vettore MF *e la perpendicolare* MQ *alla direttrice è tangente alla parabola nel punto* M.

L' inversa di questa proposizione è evidente.

Da questo teorema si deducono le conseguenze:

1° *La tangente alla parabola è ugualmente inclinata sull' asse e sul raggio vettore del punto di contatto.*

2° *Il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco sulle tangenti alla parabola, è la tangente al vertice dell' asse.*

Infatti, poichè AF = NA, FE = EQ, la retta AE è perpendicolare ad NF ed è per conseguenza la tangente al vertice della parabola. Ma il punto E è il piede della perpendicolare condotta dal fuoco sulla tangente MT: dunque ec.

Da questo teorema segue che: *se un angolo retto* FEM *si muove in guisa tale che il suo vertice* E *descriva la retta* Ay *e il lato* MF *passi pel punto* F, *l' altro lato* MT *toccherà costantemente una parabola avente per fuoco il punto* F.

23. Ora possiamo condurre una tangente alla parabola per un punto situato sulla curva o al di fuori di essa: tralasciamo il primo caso come facilissimo e ci occupiamo solamente del secondo.

Sia N il punto dato esterno alla parabola *(fig. 499)*; con centro in N e raggio NF descriviamo una circonferenza, e sieno C e D i punti nei quali essa taglia la direttrice. Conduciamo per questi punti due parallele all' asse che incontrano la curva rispettivamente nei punti M, M': le rette NM, NM' sono tangenti alla parabola. Lascio la dimostrazione ai giovani.

Premesse queste nozioni fondamentali sulle sezioni coniche, passiamo a mostrare rapidamente come a queste curve si applichino il metodo delle polari reciproche e quello delle proiezioni.

II.

Il principio sul quale si fonda l'applicazione del metodo delle polari reciproche alle sezioni coniche è il seguente:

24. *La polare reciproca di una circonferenza è una conica che ha per fuoco il centro della circonferenza direttrice.*

Avendo presente la definizione delle figure polari reciproche, è chiaro che potremo dimostrare questo teorema o cercando l'inviluppo delle posizioni della polare di un punto della circonferenza data, o il luogo dei poli delle tangenti a questa circonferenza: daremo entrambi i metodi.

1° Sieno (*fig.* 500) CA la circonferenza data e F il centro della circonferenza direttrice. Uniamo F con un punto qualunque M di circonferenza CA e sia P la polare di M rispetto al cerchio direttore; avremo

$$FM \,.\, FM' = FA'^2, \quad FM \,.\, FN = FT^2,$$

da cui

$$\frac{FM'}{FN} = \frac{FA'^2}{FT^2} = \lambda,$$

indicando con λ una quantità costante. Conduciamo M'O parallele ad NC, avremo

$$\frac{FO}{FC} = \frac{M'O}{NC} = \frac{FM'}{FN} = \lambda;$$

e quindi

$$FO = \lambda \,.\, FC, \quad M'O = \lambda \,.\, NC;$$

dunque M' descrive circonferenza M'O quando il punto M si muove sulla circonferenza data; e per conseguenza il lato P dell'angolo retto PM'F che ha il suo vertice sopra una circonferenza e l'altro lato FM' passa nel punto F, tocca costantemente una conica che ha il punto F per fuoco, il punto O per centro e M'O per semi-asse maggiore. Ma FO è maggiore o minore di OM' secondochè FC è maggiore o minore di CN, dunque la conica è una ellisse se il centro F è interno alla circonferenza data, ed una iperbole se è esterno.

Supponiamo ora che il punto F sia sulla circonferenza data *(fig. 501)*. Sia R l'asse radicale delle due circonferenze: la retta FM incontra quest' asse nel punto M'. Poichè il quadrilatero MM'BA è iscrittibile nella circonferenza, si ha

$$FM \,.\, FM' = FA \,.\, FB = FS^2;$$

per conseguenza, quando il punto M si muove sopra circonferenza CA, il suo coniugato M' descrive l' asse R; e poichè il lato M'F passa pel centro F, l' altro lato M'P dell' angolo retto FM'P, cioè la polare del punto M tocca costantemente una parabola di cui F è il fuoco.

2° Sieno d e f i centri della circonferenza data e di quella direttrice *(fig. 502)*, D la polare del centro d e m il polo di una tangente MT alla prima circonferenza. Il raggio $dM = \rho$ essendo perpendicolare alla tangente MT si ha (Nota IX, n° 6.)

$$\frac{1}{fm} - \frac{1}{fm'} = \rho, \text{ da cui } \frac{mm'}{fm \,.\, fm'} = \rho \,.$$

Se dai punti f ed m abbassiamo le perpendicolari fd', e mr sopra D, avremo

$$\frac{mm'}{fm'} = \frac{rm}{d'f} \,;$$

e per conseguenza

$$\frac{rm}{d'\,f \,.\, fm} = \rho, \text{ cioè } \frac{rm}{fm} = \rho \,.\, d'f = cost.$$

Dunque: *il luogo del punto* m *è una conica avente per fuoco il punto* f, *centro del cerchio direttore, e per direttrice la polare* D *del centro* d.

La polare del punto M è la retta mt che unisce il punto *m* col punto *t* nel quale la direttrice è incontrata dalla perpendicolare *ft* ad *fm*: *mt* è tangente alla conica.

Questo secondo caso si può anche dimostrare giovandosi della proprietà data nel n° 3, Nota VIII; i giovani faranno bene di trovare questa dimostrazione.

Conseguenza evidente del teorema che abbiamo dimostrato è che una conica non può essere tagliata in più di due punti da una retta; perchè altrimenti da un punto si potrebbero condurre tre tangenti ad un cerchio.

25. Dati un cerchio e un esagono circoscritto, la figura polare reciproca rispetto a un cerchio di centro *f*, sarà una conica di fuoco *f* ed un esagono iscritto; ma nel primo esagono le tre diagonali concorrono in un punto; dunque nell'esagono iscritto nella conica, i tre punti d'incontro dei lati opposti sono situati in linea retta; e per conseguenza:

In qualunque esagono iscritto in una conica, i tre punti di concorso dei lati opposti sono situati in linea retta. — Teorema di Pascal.

26. Questo teorema permette di risolvere il seguente problema.

Far passare una conica per cinque punti dati a, b, c, d, e. *(fig.* 503.*)*

Pel punto di concorso *o* dei lati *ab*, *ed*, conduco arbitrariamente una retta *mn*, che taglia in *n* e *m* le rette *bc*, *cd*; conduco poscia le rette *ma ne*; la loro intersezione *f* appartiene alla conica, giacchè nell'esagono *abcdef* i punti di concorso *o*, *m*, *n*, dei lati opposti sono in linea retta. Si otterranno così tanti punti quanti se ne vogliono; e la conica potrà essere una ellisse, una iperbole o una parabola.

Da ciò segue che *due coniche non possono tagliarsi in più di quattro punti.*

27. Dati un cerchio ed un esagono iscritto, la figura reciproca polare rispetto ad un cerchio di centro F, è una conica di fuoco F e un esagono circoscritto. Ma nel primo poligono i punti di concorso dei lati opposti sono in linea retta. dunque nell'esagono circoscritto alla conica le tre diagonali concorrono nello stesso punto. Talchè:

In qualunque esagono circoscritto ad una conica, le tre diagonali si tagliano in uno stesso punto.

28. Se i punti di contatto dei lati AF, FE si confondono in uno che indico con F, l'esagono si trasforma in un pentagono e si ha che:

In qualunque pentagono ABCDE *circoscritto ad una conica, la retta* CF *condotta da un vertice* C *al punto di contatto* F *del lato opposto, e le due diagonali* AD, BE *che uniscono gli altri quattro vertici, concorrono nello stesso punto.* Infatti la figura si può considerare come un esagono i cui sei vertici sono A, B, C, D, E, F.

29. Questo teorema permette di risolvere il seguente problema:

Descrivere una conica tangente a cinque rette date.

Coll' ultimo teorema si determinano i cinque punti di contatto, e la quistione è ridotta a far passare una conica per cinque punti.

Da ciò segue che *due coniche non possono avere più di quattro tangenti comuni.*

30. Sieno in una conica AA', BB', CC' tre corde parallele qualunque *(fig. 504.)* La figura ABCC'B'A' essendo un esagono iscritto, i punti di concorso dei lati opposti sono situati in linea retta; ma il punto di concorso dei lati AA', CC' è per ipotesi all' infinito, dunque la retta PQ è parallela alle corde. Quindi la retta MN che unisce il punto M al mezzo N della retta PQ divide per metà tutte le corde parallele AA', BB', CC'.

Ma una retta che divide per metà un sistema di corde parallele di una conica si chiama *diametro;* dunque:

In qualunque conica il luogo dei mezzi delle corde parallele ad una retta qualunque è un diametro della curva. Si vede anche che *in qualunque conica vi sono infiniti diametri.*

È chiaro che nell' ellisse e nella iperbole i diametri passano tutti pel centro e nella parabola sono paralleli all'asse.

31. Nell' ellisse e nella iperbole due diametri si dicono coniugati quando ciascuno di essi divide per metà le corde parallele all' altro. Volendo costruire due diametri coniugati, si conduce un diametro qualunque AB *(fig. 505)* e si uniscono i punti A, B con un punto M della curva, i diametri PQ, RS paralleli alle corde AM, MB sono coniugati, poichè AE = EM, MF = FB.

Gli assi sono un sistema di *diametri coniugati rettangolari.*

32. *Le corde che un diametro divide in due parti eguali, sono parallele alle tangenti condotte per gli estremi di questo diametro*; poichè se la tangente PT non fosse parallela ad AM, potremmo pel punto P condurre una parallela PT' a questa retta, ed allora il punto medio di P*m* dovrebbe trovarsi sopra PQ, lo che è impossibile.

33. Da un punto *m* esterno al cerchio *d* conduciamo le tangenti H, E, e tiriamo le rette A, B, C, F *(fig. 506)*.

Costruiamo la figura polare reciproca alla data rispetto al cerchio di centro *o*. Sappiamo che

1°. $(B, A) = (A, C)$,
2°. $(A, H) = (E, A)$
3°. $(H, F) = (F, E)$;

quindi

$$(ob, oa) = (oa, oc)$$
$$(oa, oh) = (oc, oa)$$
$$(oh, of) = (of, oc)$$

ove le rette *ob*, *oa*, *oc*, *ec* si considerano indefinitamente prolungate; e si hanno i seguenti teoremi:

Se da un punto esterno a, *si conducono due tangenti* N, P *ed una conica,*

1° *Le rette* ob, oc *che vanno dal fuoco ai punti nei quali queste tangenti tagliano la direttrice sono egualmente inclinate sulla linea* oa;

2° *la linea* oa *che va dal fuoco della conica al punto* a *è bisettrice dell' angolo delle rette* oe, oh *che vanno dal fuoco ai punti di contatto delle tangenti*;

3° *la linea* of *che va dal fuoco al punto* f *nel quale la corda di contatto* eh *incontra la direttrice, è la bisettrice dell' angolo delle rette* ob, oc *che vanno dal fuoco ai punti nei* *quali le tangenti* N, P *tagliano la direttrice, e dell' angolo delle rette che vanno dal fuoco ai punti di contatto.*

Questi teoremi si possono dimostrare anche direttamente giovandosi delle relazioni date nel numero 6 Nota IX: il quale facilissimo ed utile esercizio lasciamo a cura degli studiosi.

III.

L' applicazione del metodo delle proiezioni alle sezioni coniche si fonda sul seguente teorema:

34. *Qualunque conica può considerarsi come la proiezione di un cerchio;* o in altri termini:

Una conica data si può sempre considerare come sezione di un piano con un cono.

Accenno, lasciando agli studiosi la cura di rintracciarne le dimostrazioni, i seguenti teoremi relativi a questo oggetto:

Il luogo dei vertici di tutte le superficie coniche sulle quali si può applicare una data ellisse, è una iperbole, il cui piano è perpendicolare a quello dell' ellisse, e di cui i vertici e i fuochi sono rispettivamente i fuochi e i vertici dell' ellisse data. Gli assi di queste superficie coniche sono tangenti all' iperbole.

Il luogo dei vertici di tutte le superficie coniche sulle quali si può applicare una data iperbole, è una ellisse situata in un piano perpendicolare a quello dell' iperbole, e di cui i vertici e i fuochi sono rispettivamente i fuochi e i vertici dell' iperbole data. Gli assi di queste superficie coniche sono tangenti all' ellisse.

Il luogo dei vertici di tutte le superficie coniche sulle quali si può applicare una data parabola, è una seconda parabola situata in un piano perpendicolare a quello della parabola data, e di cui il vertice e il fuoco sono rispettivamente il fuoco e il vertice della prima parabola. Gli assi di queste superficie coniche sono tangenti alla seconda parabola.

A me basterà dimostrare che:

Qualunque curva conica può essere proiettata in un cerchio, il cui centro è uno dei fuochi.

Sieno AB l' asse maggiore e CD il semi-asse minore di una data ellisse (*fig.* 507); F uno dei fuochi. Per AB fo passare un piano perpendicolare a quello dell'ellisse, e in questo piano conduco da uno dei due vertici, per es., da B, una linea BF' eguale a BF e la prolungo sino a che $F'A' = BF'$; unisco AA' e FF' e indico con O il punto di concorso di queste due ultime linee. Sopra A'B come diametro, descrivo in un piano perpendicolare al piano AA'B un cerchio che prendo per base di un cono il cui vertice sia O: l'ellisse data è una sezione di questo cono.

Per provarlo conduco dal punto C un piano parallelo alla base del cono, che lo taglierà in un cerchio avente HI per diametro e conterrà evidentemente l'asse minore dell'ellisse. Condotta AS parallela ad A'B, avrò $CI = \frac{1}{2}AS = AR = AF$, e $HC = \frac{1}{2}A'B = BF' = BF$, e perciò $HC \cdot CI = BF \cdot FA = CD^2$; dunque il punto D è sulla circonferenza del cerchio HI, e per conseguenza sulla superficie del cono. Inoltre è evidente che la sezione fatta nel cono dal piano della data ellisse è una ellisse avente AB per uno dei suoi assi e l'altro coincidente con CD; laonde queste due ellissi avendo i semi-assi eguali sono identiche; dunque ec.

Lo stesso metodo ed una dimostrazione leggermente differente si applica all'iperbole e alla parabola.

35. Questo teorema è un caso particolare del seguente: *data qualunque sezione conica e un punto nel suo piano, possiamo proiettarla in un cerchio di cui questo punto è il centro.* (Vedi SALMON, *Trattato sulle Sezioni Coniche*, Londra, terza edizione, pag. 308.)

36. Giovandosi del teorema precedente e dei principii sviluppati nella Nota III, si ottengono immediatamente i seguenti teoremi:

1° *In qualunque sezione conica, il rapporto anarmonico di quattro linee rette condotte da quattro punti fissi della curva a un quinto punto variabile è costante.* Questo rapporto costante si dice *rapporto anarmonico dei quattro punti della sezione conica.*

Conseguenza evidente di questo teorema è che:

Se intorno a due punti qualunque di una sezione conica facciamo girare due raggi che s' incontrano sulla curva, questi due raggi descrivono due fasci omografici.

Reciprocamente:

Il luogo dei punti d' intersezione dei raggi omologhi di due fasci omografici è una sezione conica che passa pei centri dei due fasci.

Siano O ed O' i centri dei due fasci; OA, OB, OC, OD.... i raggi del primo fascio; O'A', O'B', O'C', O'D' .... i raggi corrispondenti del secondo; α, β, γ, δ.... i punti d' intersezione dei raggi omologhi: i punti O, O', α, β, γ, δ, ec. sono sopra una sezione conica.

Facciamo passare una conica pei cinque punti O, O', α, β, γ; se la conica tagliasse O'D' in un punto δ' diverso da δ, la retta Oδ' sarebbe raggio omologo ad O'D', lo che è impossibile; dunque ec. ec.

Da questa reciproca si deducono due nuove descrizioni per punti di qualunque conica, conosciute l'una sotto il nome di metodo di Maclaurin, comecchè taluni ne attribuiscano il merito a Braikenridge; l' altra sotto quello di metodo di Newton:

1°. *Il luogo del vertice* M *di un triangolo* Mab, *i cui lati passano per tre punti fissi* A, B, C *e la cui base* ab *si muove sopra due rette fisse* OP, OQ, *è una conica (fig.* 508.*)*

2°. *Due angoli dati* NOM, NO'M *girano intorno ai loro vertici* O *ed* O', *in modo che l' intersezione di due lati* ON, O'N *si muova sopra una retta fissa* PQ; *il luogo del punto* M, *intersezione degli altri due lati sarà una conica che passa pei punti* O *ed* O'. *(fig.* 509.*)*

Le dimostrazioni lascio per esercizio agli studiosi.

37. 2° *I sei punti d' intersezione di una trasversale che incontra una conica e un quadrilatero inscritto in essa sono in involuzione.*

Fra le numerose conseguenze che si possono dedurre da questo importante teorema, accenneremo le seguenti:

Una trasversale qualunque taglia due sezioni coniche cir-

coscritte allo stesso quadrilatero e due lati opposti di questo quadrilatero in sei punti in involuzione.

Una trasversale taglia tre sezioni coniche circoscritte allo stesso quadrilatero in sei punti in involuzione.

E in generale:

Una trasversale taglia n *coniche circoscritte allo stesso quadrilatero in* n *punti in involuzione.*

Supponiamo che la trasversale incontri i lati opposti del quadrilatero nei punti a, a'; b, b' e le sezioni coniche rispettivamente nei punti α, α'; β, β'; γ, γ'; .....

Indicando con o il centro d'involuzione dei punti a, a'; b, b'; α, α', ch'è evidentemente comune a tutti gli altri sistemi, avremo

$$ao\,.\,oa' = bo\,.\,ob' = \alpha o\,.\,o\alpha'$$
$$ao\,.\,oa' = bo\,.\,ob' = \beta o\,.\,o\beta'$$
$$ao\,.\,oa' = bo\,.\,ob' = \gamma o\,.\,o\gamma'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quindi, 1° $ao\,.\,oa' = \alpha o\,.\,o\alpha' = \beta o\,.\,o\beta'$, che prova la prima proposizione; 2° $\alpha o\,.\,o\alpha' = \beta o\,.\,o\beta' = \gamma o\,.\,o'\gamma$, che dimostra la seconda; la terza poi risulta dalla serie di eguaglianze $\alpha o\,.\,o\alpha' = \beta o\,.\,o\beta' = \gamma o\,.\,o\gamma' = \delta o\,.\,o\delta' = \ldots$

Se una retta incontra i lati di un quadrilatero dato nei punti a, b, a', b' *ed è mobile attorno ad un quinto punto* c, *il luogo del punto* c' *che forma un sistema di sei punti in involuzione coi rimanenti è una sezione conica che passa pei vertici del quadrilatero dato e pel punto* c.

Facciamo passare una sezione conica pei vertici del quadrilatero e pel punto c questa curva taglierà la trasversale nel sesto punto dell'involuzione i cui altri cinque punti sono a, b, a', b', c; cioè si confonderà con c'; dunque ec.

38. 3° *Una retta che si muove, mantenendosi sempre tangente ad una conica, incontra due tangenti fisse in due punti che formano due divisioni omografiche.*

Da questo teorema risulta che:

Il rapporto anarmonico dei quattro punti nei quali una tangente mobile ad una sezione conica è tagliata da quattro *tangenti fisse è costante.* Questo rapporto dicesi il *rapporto anarmonico delle quattro tangenti fisse.*

La reciproca del teorema 3° è vera; cioè:

Se due rette M, M′ *situate nello stesso piano sono divise omograficamente nei punti* a, b, c, d, ...; a′, b′, c′ d′, ...; *le rette* M, M′, aa′, bb′, cc′, dd′ ec., *sono tangenti ad una stessa sezione conica.*

Infatti, descriviamo una conica tangente alle cinque rette M, M′, *aa*′, *bb*′, *cc*′; se *dd*′ non è altresì tangente alla stessa conica, conduciamo dal punto *d* una tangente alla conica e sia δ il punto nel quale essa incontra la retta M′. Il rapporto anarmonico dei punti *a*′, *b*′, *c*′, δ è uguale a quello dei punti *a*′, *b*′, *c*′ *d*′ poichè entrambi i sistemi hanno lo stesso rapporto anarmonico dei punti *a*, *b*, *c*, *d*; dunque i punti δ e *d*′ debbono coincidere.

Date due tangenti fisse OP, OQ *ad una conica, se un triangolo a* Mb *la cui base* ab *è tangente in questa conica, si muove in modo che i lati* Ma, Mb *passino per due punti fissi* O′ *ed* O″, *mentre i vertici* a, b, *percorrono* OP, OQ; *il luogo del vertice* M *è una conica che passa pei punti* O, O′, O″.

Questa nuova genesi delle coniche, dovuta a Chasles, è conseguenza facilissima dell'ultimo teorema.

39. 4° *Se per un punto si conduce una retta, il luogo del coniugato armonico di questo punto rispetto ai due punti nei quali la linea taglia una data conica, è una linea retta.* Il punto dato si chiama *polo*, e il luogo del suo coniugato *polare* rispetto alla curva. Quindi *il punto e la sua polare rispetto ad una curva conica si possono considerare come le proiezioni di un punto e la sua polare rispetto ad un cerchio.* Da questa osservazione segue che molte delle proprietà dei poli e delle polari rispetto al cerchio si applicano a qualunque curva conica.

Il teorema che il raggio di un cerchio è medio proporzionale fra le distanze del centro al polo e alla polare, ha per corrispondente rispetto a qualunque conica il seguente: *il semi-diametro sul quale si trova il polo è medio proporzionale tra le distanze prese su questo semi-diametro dal centro al polo e alla polare.*

Il teorema che la polare è perpendicolare al diametro condotto pel polo può esprimersi anche così: *La polare di un punto rispetto ad un cerchio è parallela alla tangente condotta per l'estremità del diametro che passa pel punto dato;* e si vede che ha per corrispondente: *La polare di un punto rispetto a qualunque conica è parallela alla tangente che passa per l'estremità del diametro condotto pel punto dato.* Da ciò si vede che la direttrice è la polare del fuoco corrispondente; per questa ragione la direttrice ha ricevuto da taluni il nome di *polare focale.* È noto che una corda di un cerchio che sottende un angolo costante al centro, tocca un cerchio concentrico, e che le tangenti alle sue estremità s'intersecano sopra un terzo cerchio anche concentrico al dato. Il corrispondente è: *Se una corda di una data sezione conica sottende un angolo costante ad uno dei fuochi, essa è tangente ad una altra conica, e il luogo dell'intersezione di tangenti, alle sue estremità è una terza conica; tutte e tre queste coniche hanno fuoco e direttrice a comune.*

40. *La proiezione ortografica di un cerchio è una ellisse, il cui asse maggiore è il diametro del cerchio, e l'asse minore è la proiezione del diametro perpendicolare all'intersezione dei due piani.*

Infatti se indichiamo con a il diametro del cerchio, con b la proiezione del diametro perpendicolare e con λ l'angolo compreso fra i due piani, è chiaro che avremo $b = a \cos \lambda$. Parimente se y' è la perpendicolare abbassata da un punto M del cerchio sul diametro parallelo all'intersezione dei due piani e se y è la perpendicolare abbassata sopra a dal punto m proiezione di M, avremo $y = y' \cos \lambda$; e per conseguenza $\frac{y}{y'} = \frac{b}{a}$. Quindi la curva è una ellisse.

41. *Se un cerchio è proiettato ortograficamente in una ellisse, due diametri rettangolari qualunque del primo sono proiettati in una coppia di diametri coniugati della seconda.*

Infatti sieno A' e B' i due diametri rettangolari del cerchio a', b' le proiezioni corrispondenti; i primi sono tali che ciascuno biseca le corde parallele all'altro. Ora è chiaro che colla proiezione ortografica linee parallele sono proiettate in linee altresì parallele; e di più se indichiamo con MN una corda parallela al diametro A′ e con P il suo punto medio, con mn la corda corrispondente dell' ellisse che sarà parallela ad a', e con p la proiezione di P; avremo $mp = \mathrm{MP} \cos\lambda$, $pn = \mathrm{PN} \cos\lambda$, λ essendo sempre l' inclinazione dei due piani, e per conseguenza $mp = pn$. Dunque b' taglia per metà tutte le corde parallele ad a', e a' e b' sono diametri coniugati dell' ellisse.

I vertici di un quadrato circoscritto ad un cerchio di raggio R sono sopra una circonferenza concentrica alla data il cui raggio è uguale a $\mathrm{R}\sqrt{2}$. Quindi: *i vertici del parallelogrammo formato dalle tangenti condotte all' estremità di due diametri coniugati di una data ellisse avente per semi-assi* a, b *sono sopra una data ellisse concentrica alla data e similmente disposta, e avente per semi-assi* a $\sqrt{2}$ e b $\sqrt{2}$.

FINE.

INDICE.

Avvertimento del Traduttore . . . . Pag. III
Preliminari 1

GEOMETRIA PIANA.

Libro I. — La linea retta e la linea spezzata.

Capitolo I. Della comune misura di due linee e del loro rapporto 5
» II. Angoli 8
» III. Della Perpendicolare e delle Oblique 11
» IV. Delle Rette parallele 15
» V. Triangoli 20
» VI. Poligoni 26

Libro II. — Della circonferenza del cerchio.

Capitolo I. Diametro e Corde 36
» II. Tangente 40
» III. Distanza di un punto da una circonferenza. Intersezione e contatto di due cerchi 42
» IV. Misura degli Angoli 47
» V. Problemi sulle Perpendicolari, le Parallele, gli Angoli e gli Archi 52
» VI. Costruzione dei Triangoli e dei Parallelogrammi. 54
» VII. Problemi sul cerchio 56
» VIII. Poligoni iscritti e circoscritti 59

Libro III. — Linee proporzionali.

Capitolo I. Trasversali nel Triangolo 72
» II. Trasversali considerate nel cerchio 82
» III. Divisione armonica delle Linee rette 86
» IV. Asse radicale di due Cerchi. — Rapporto anarmonico. Involuzione 95
» V. Similitudine 110
» VI. Problemi sulle Linee proporzionali 120

Libro IV. — Proprietà metriche delle figure.

Capitolo I. Misura delle superficie piane 134
» II. Relazioni tra i lati di un triangolo 143
» III. Relazioni tra i lati di un Quadrilatero 158
» IV. Poligoni regolari 162
» V. Misura della circonferenza. — Area del cerchio. 174
» VI. Costruzione delle figure equivalenti 187

GEOMETRIA SOLIDA.

Libro V. — Del piano e della linea retta.

Capitolo I. Della perpendicolare e delle oblique al piano. Pag. 197
» II. Rette parallele. — Rette e piani paralleli. 203
» III. Piani paralleli. 206
» IV. Angoli diedri. 209
» V. Piani perpendicolari. 213
» VI. Angoli poliedri. 219

Libro VI. — Poliedri.

Capitolo I. Prisma e Parallelepipedo. 235
» II. Misura del Parallelepipedo e del Prisma. . . . 238
» III. Piramide. 247
» IV. Similitudine. 259
» V. Simmetria. 268
» VI. Problemi sui Poliedri. 272

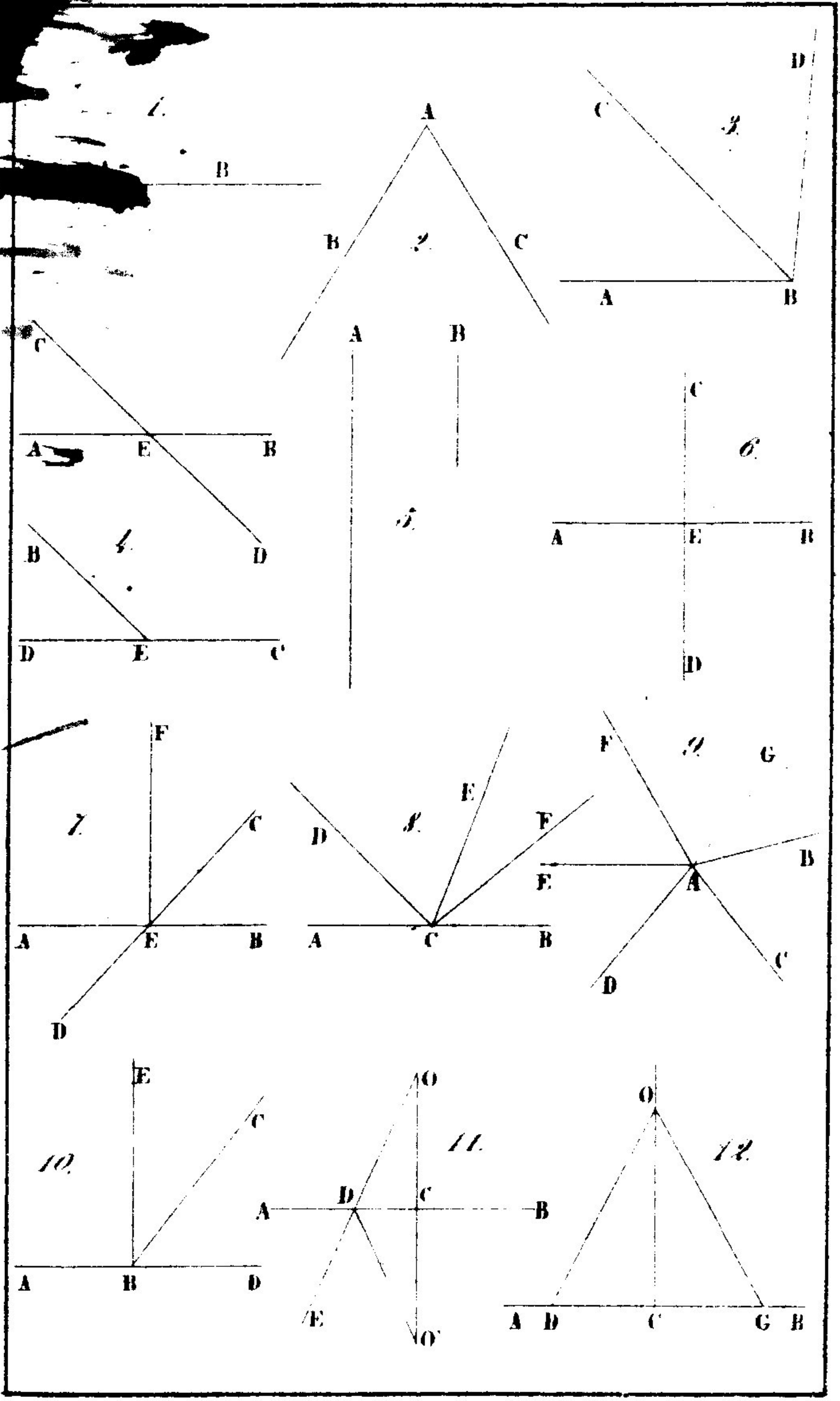
Libro VII. — Superficie curve.

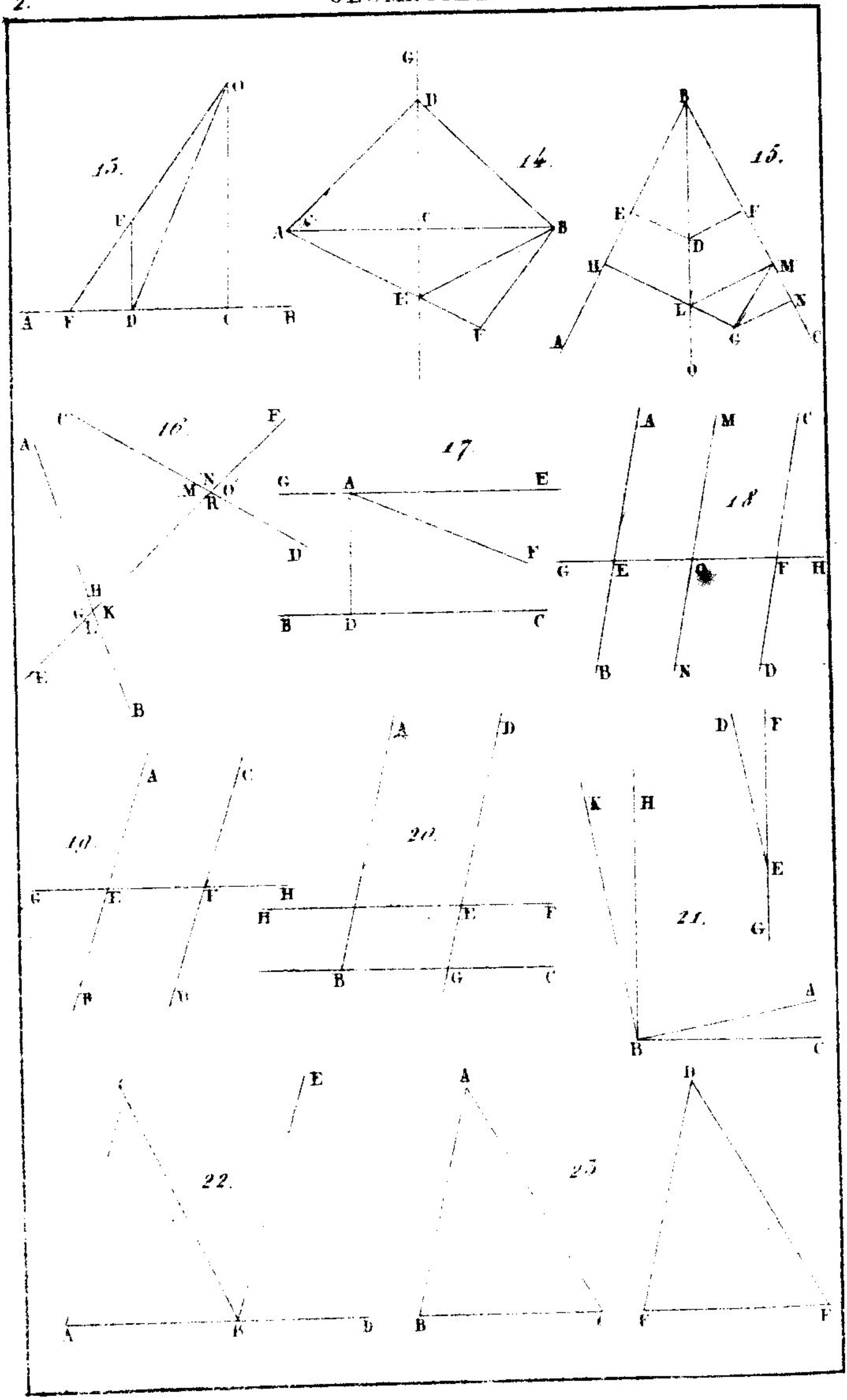
Capitolo I. Piano tangente. 286
» II. Triangolo sferico. 296
» III. Intersezione e contatto di due cerchi di una sfera. — Della più corta distanza di due punti della sfera. 304
» IV. Distanza di un punto ad una sfera. — Intersezione e contatto di due sfere. 310
» V. Problemi sui cerchi della sfera. 316

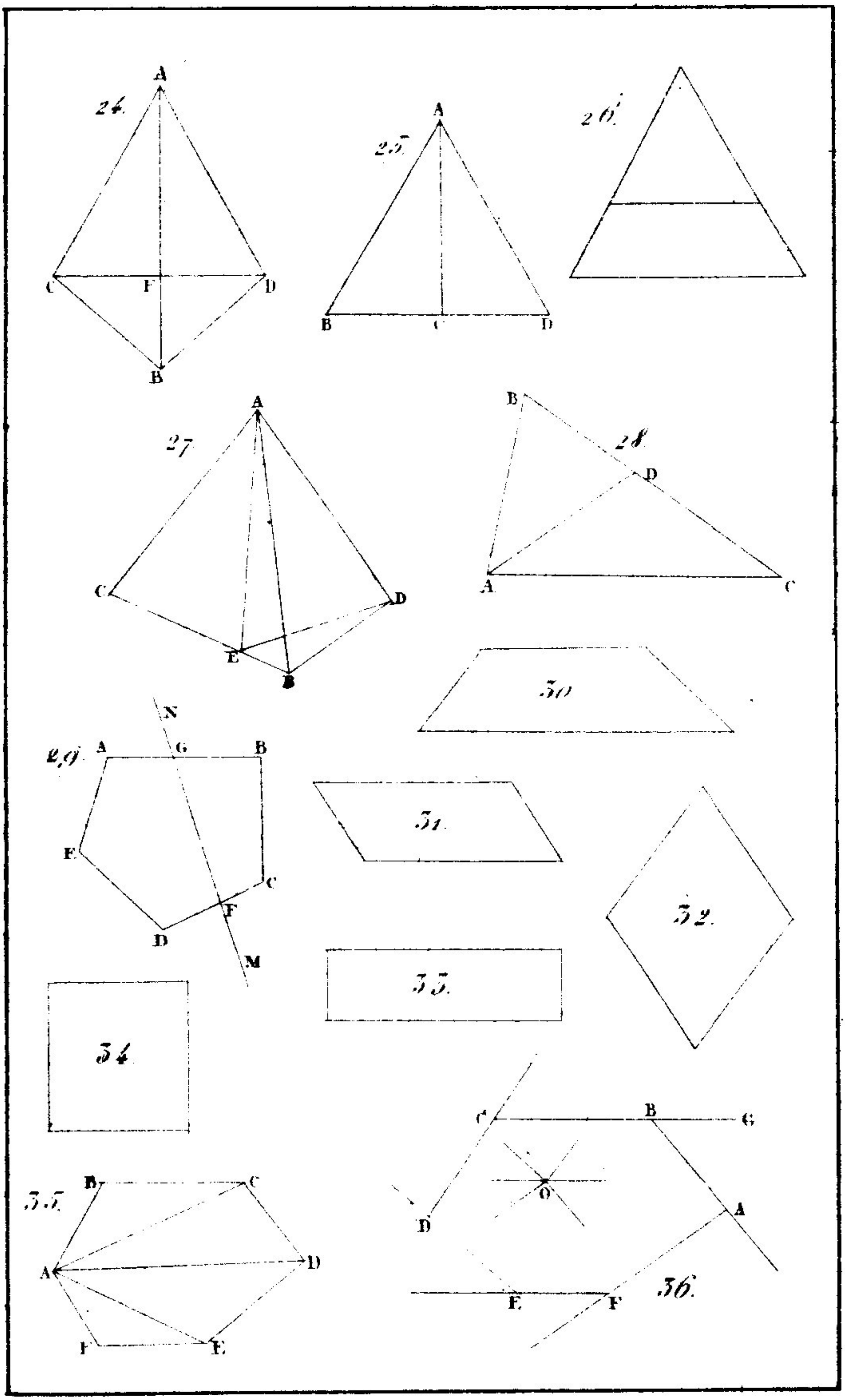
Libro VIII. — Misura del cilindro, del cono e della sfera. Poliedri regolari.

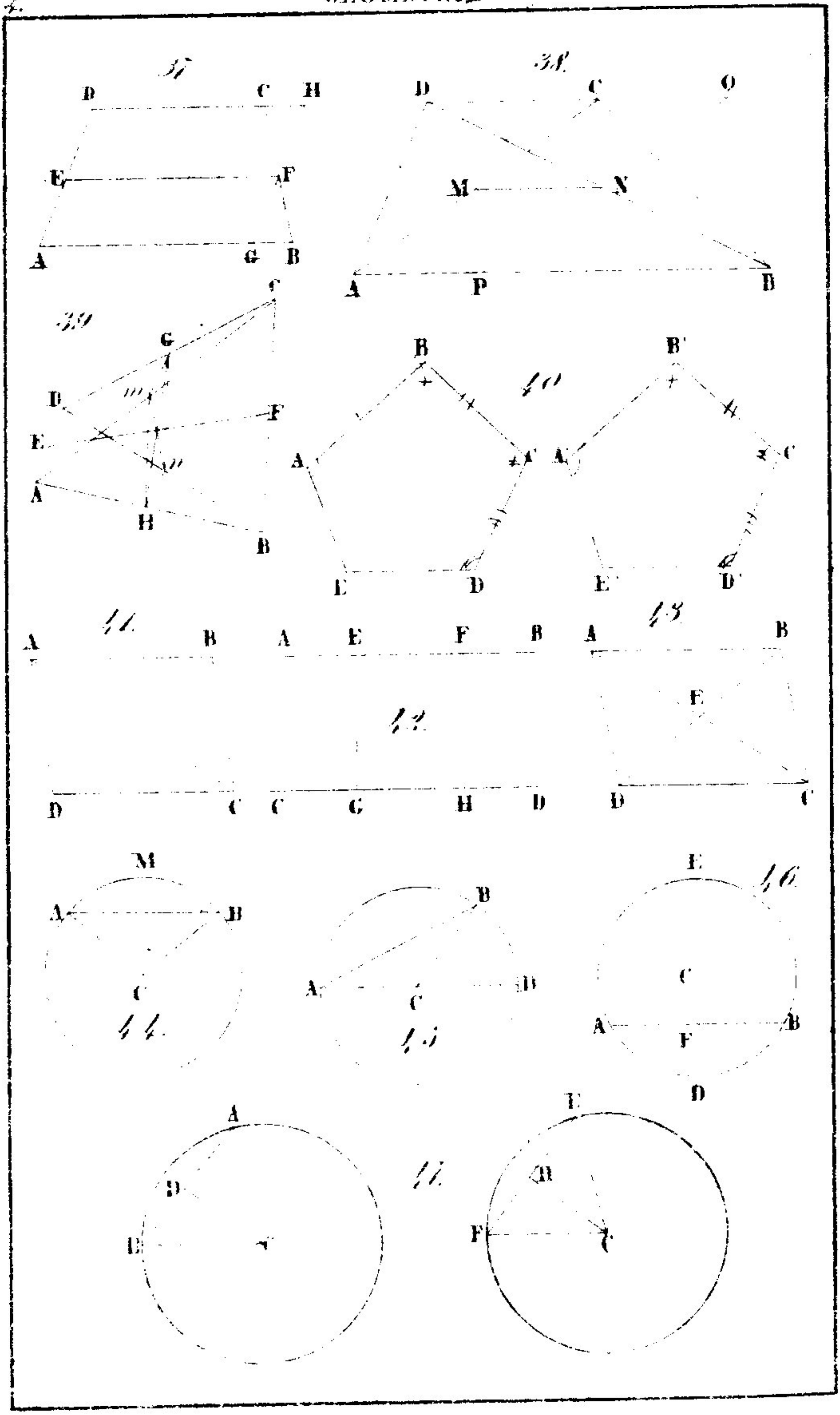
Capitolo I. Cilindro. 321
» II. Cono. 329
» III. Superficie e volume generati da un poligono regolare che gira attorno ad un diametro. . 338
» IV. Sfera. 345
» V. Poliedri regolari. 368

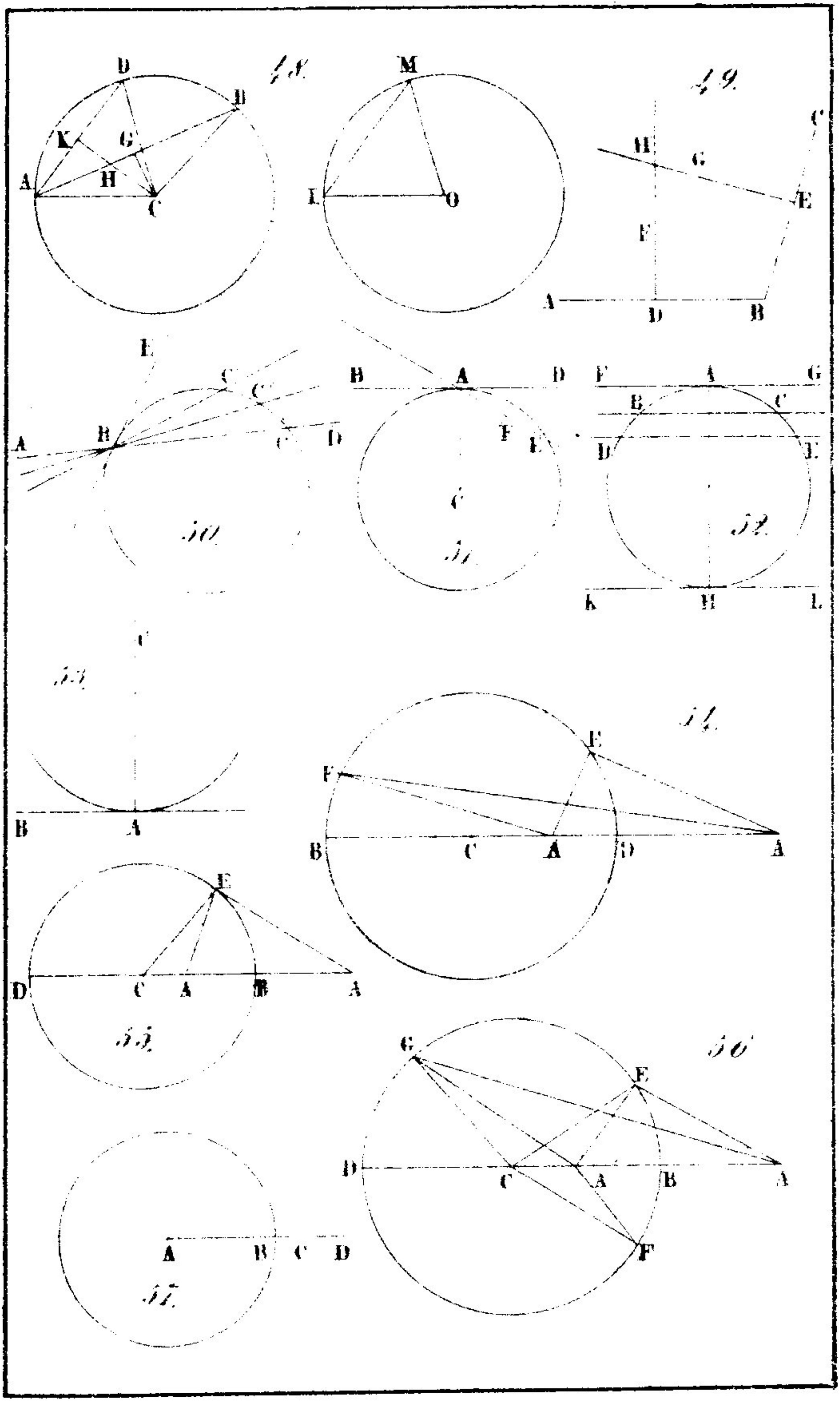
Nota I. Sulla comune misura di due rette. 383
» II. Poliedri. 389
» III. Sul metodo delle proiezioni. 401
» IV. Rapporto anarmonico. 409
» V. Involuzione. 434
» VI. Divisione omografica. 444
» VII. Centro di gravità. Centro delle medie armoniche. 461
» VIII. Poli e polari. Piani polari. 472
» IX. Metodo delle polari reciproche. 483
» X. Sezioni coniche. 492

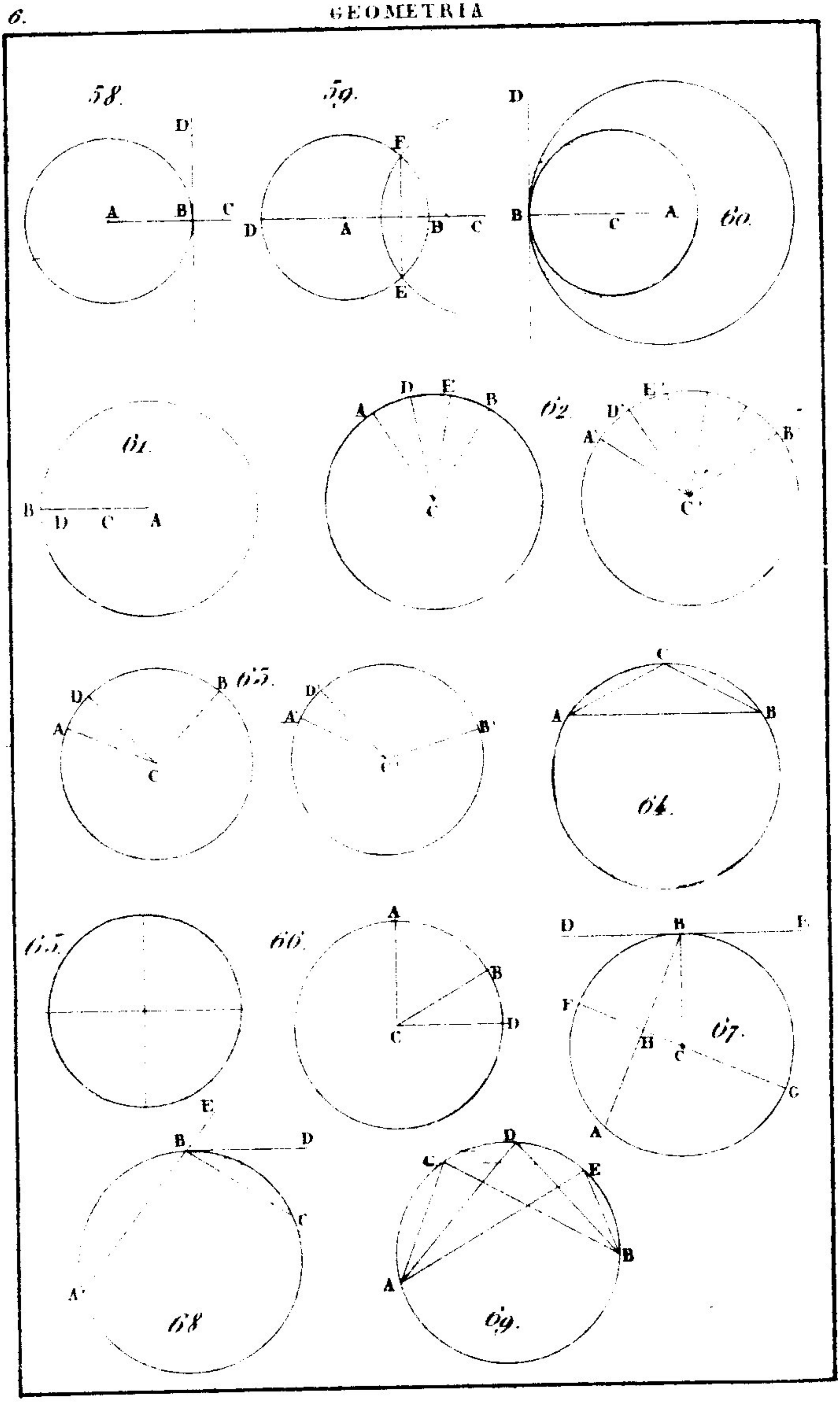

1.
B
A
B
2.
C
D
C
3.
A
B
C
A
E
B
D
B
4.
D
E
C
A
B
5.
C
6.
A
E
B
D
F
7.
C
A
E
B
D
D
8.
E
F
A
C
B
F
9.
G
E
B
A
D
C
E
C
10.
A
B
D
O
11.
D
C
A
B
E
O'
O
12.
A
D
C
G
B

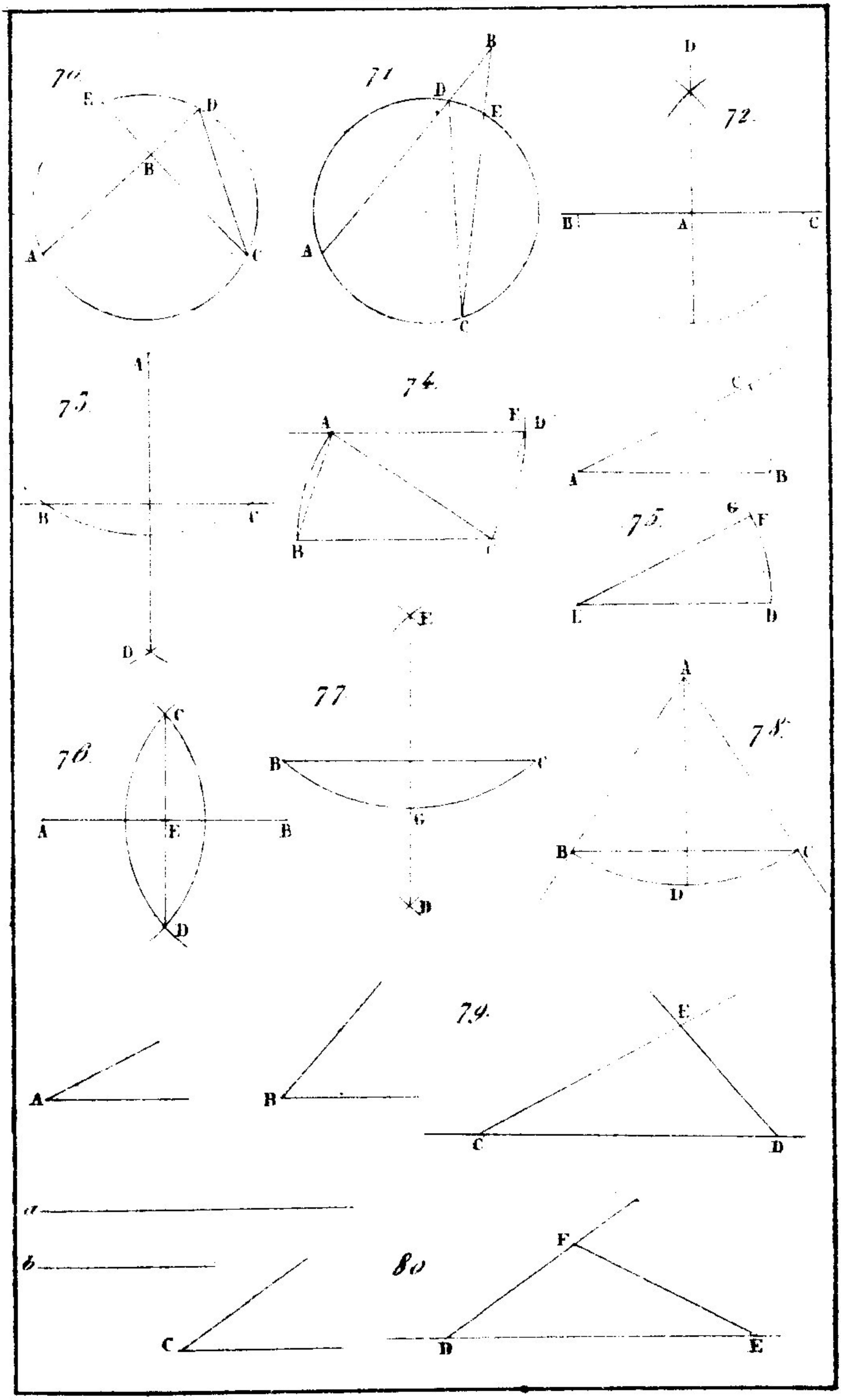

13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.

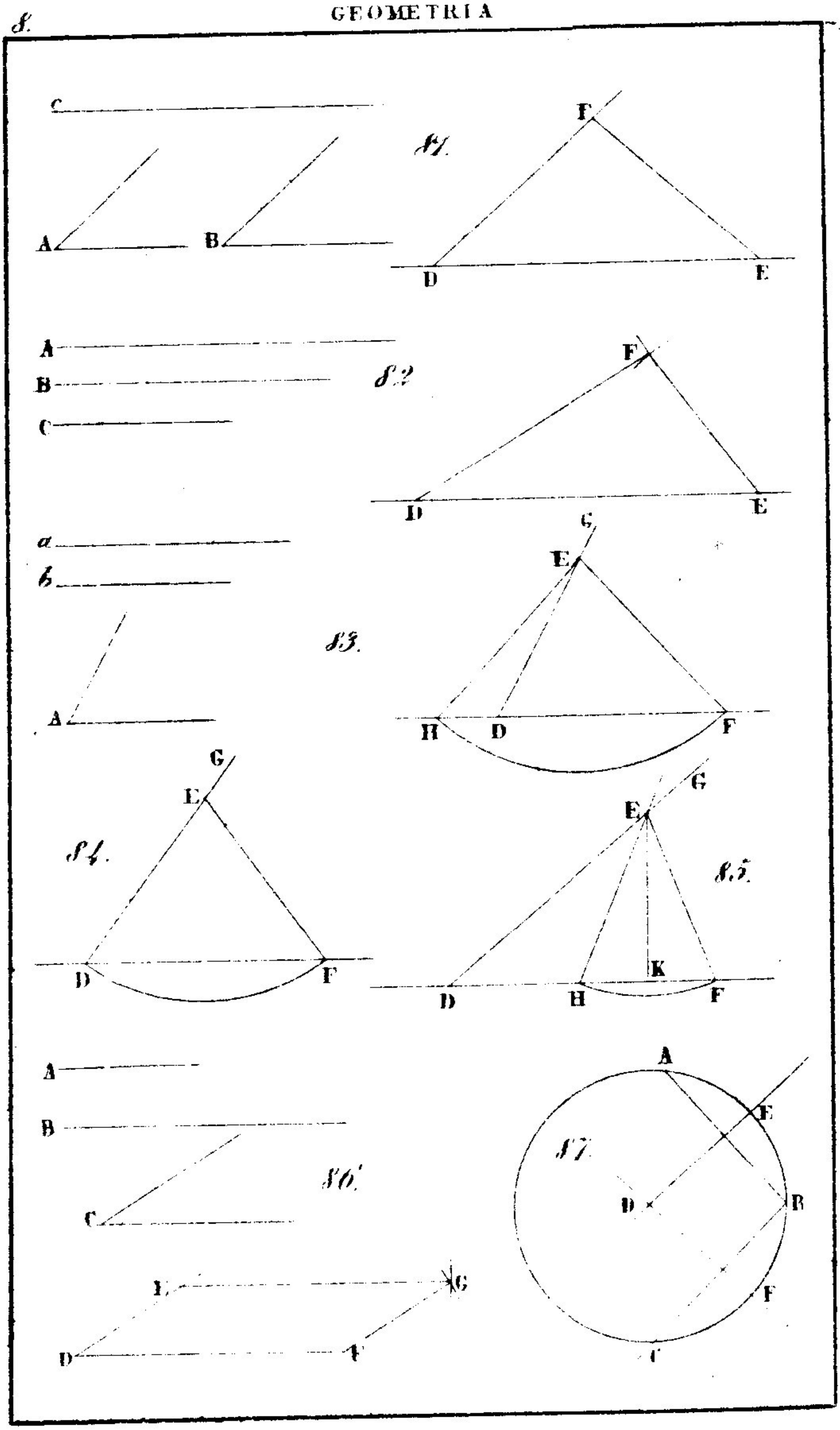

24. A C F D B
25. A B C D
26.
27. A C D E B
28. B D A C
29. N A G B E C F D M
30.
31.
32.
33.
34.
35. B C A D F E
36. C B G O D A E F

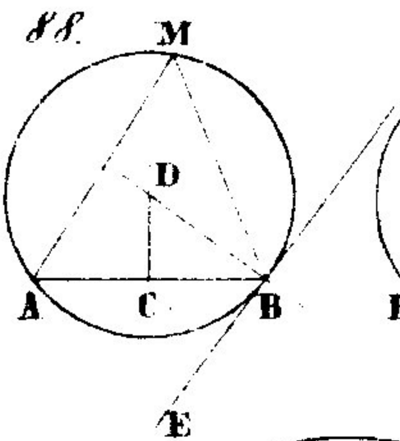


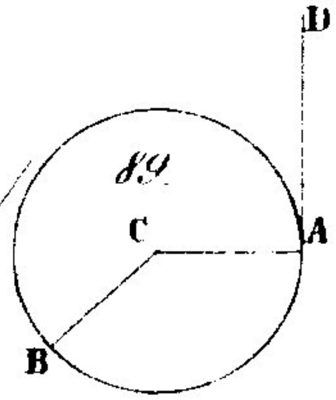

48.
D
D
K
G
A
H
C
M
L
O
49.
C
H
G
E
F
A
D
B
E
C
C
A
B
C
D
50.
B
A
D
F
E
C
51.
F
A
G
B
C
D
E
52.
K
H
L
C
53.
B
A
54.
E
F
B
C
A
D
A
E
D
C
A
B
A
55.
G
56.
E
D
C
A
B
A
F
A
B
C
D
57.

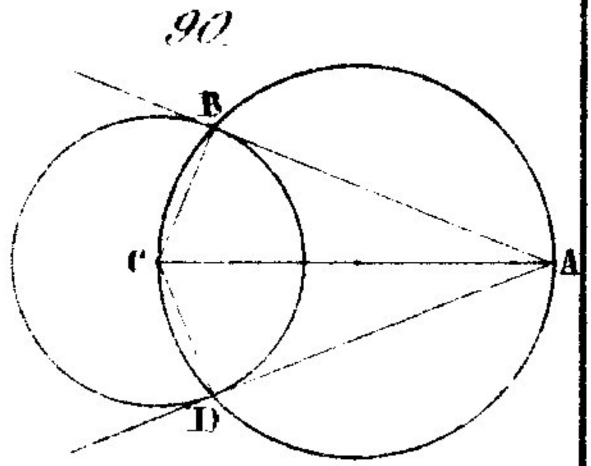

58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.

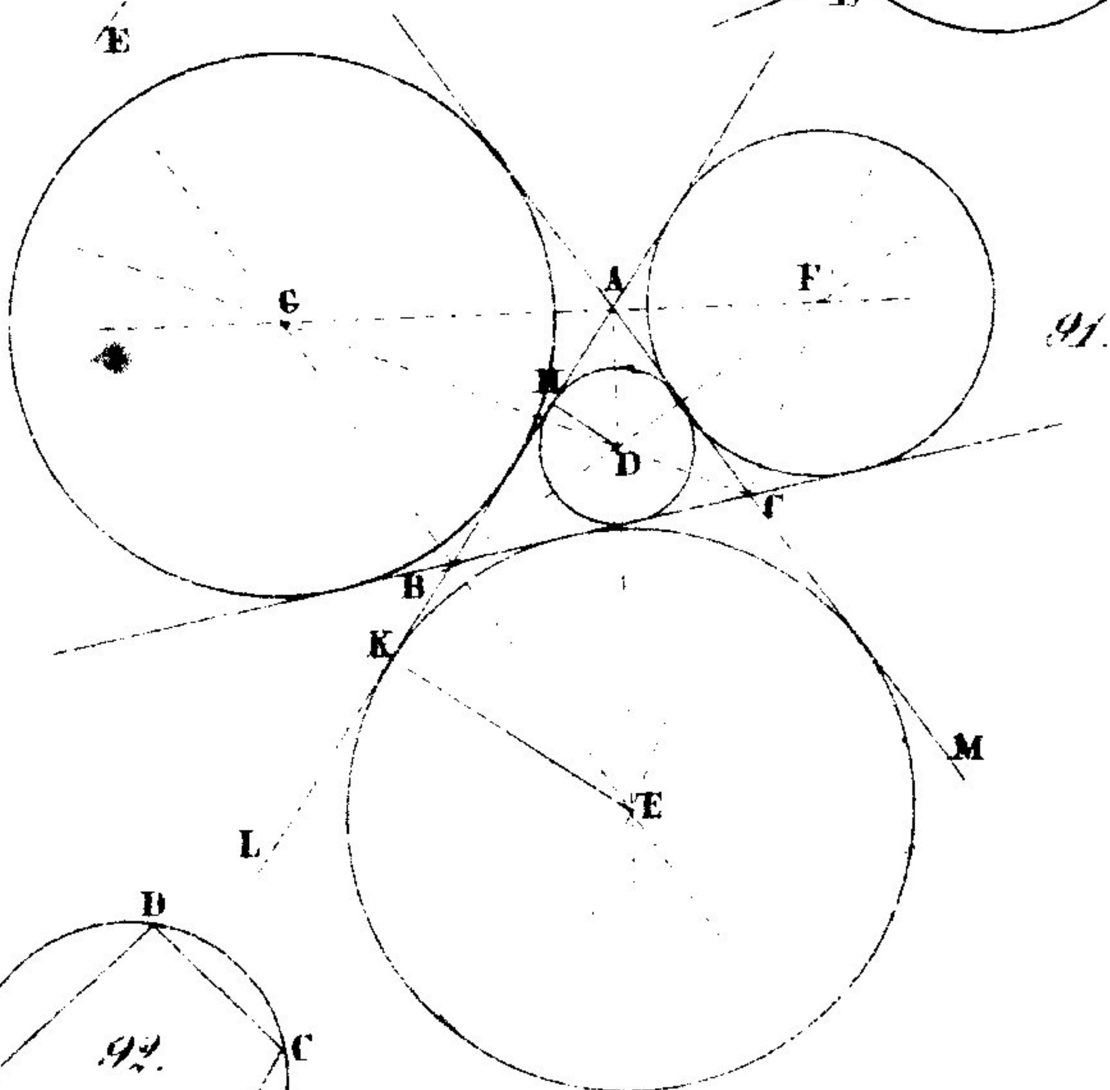

70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80

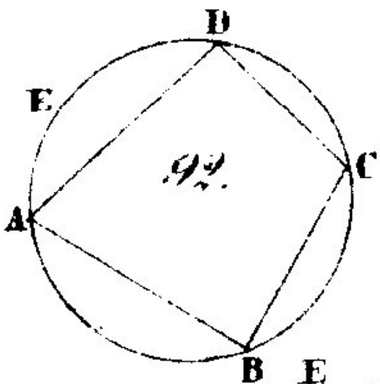

81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
a
b

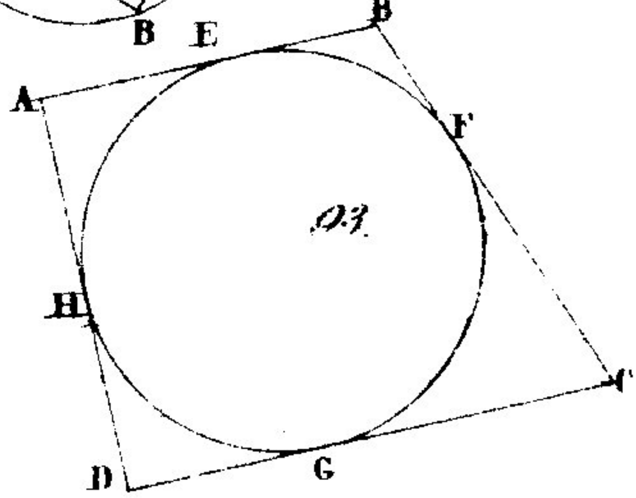

88.
M
D
A
C
B
E

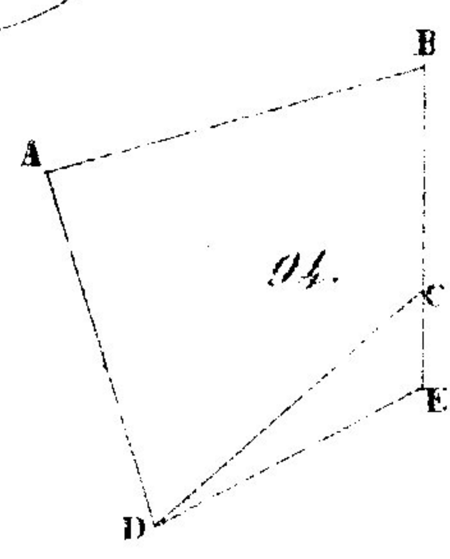

89.
D
C
A
B

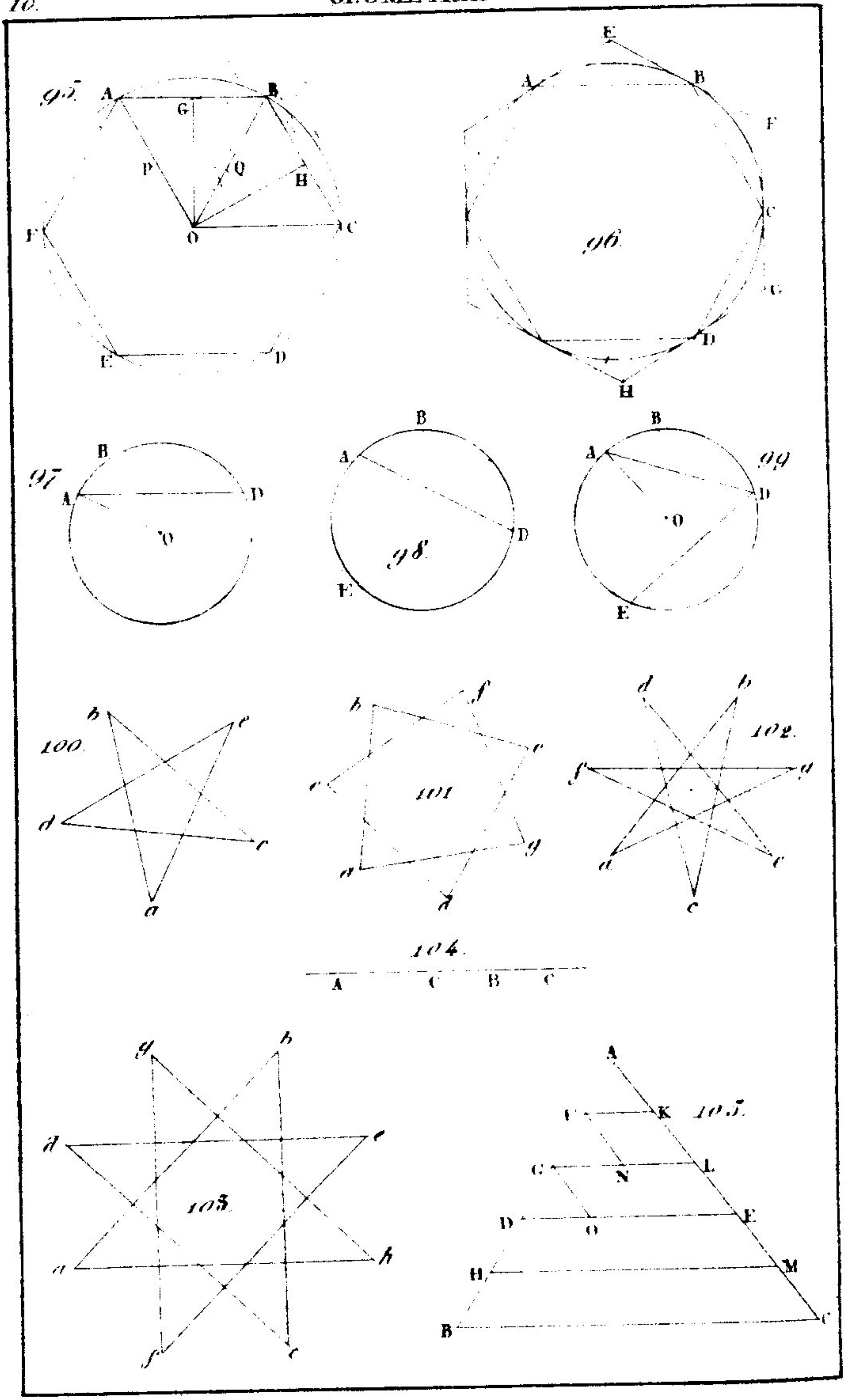

90.
B
C
A
D

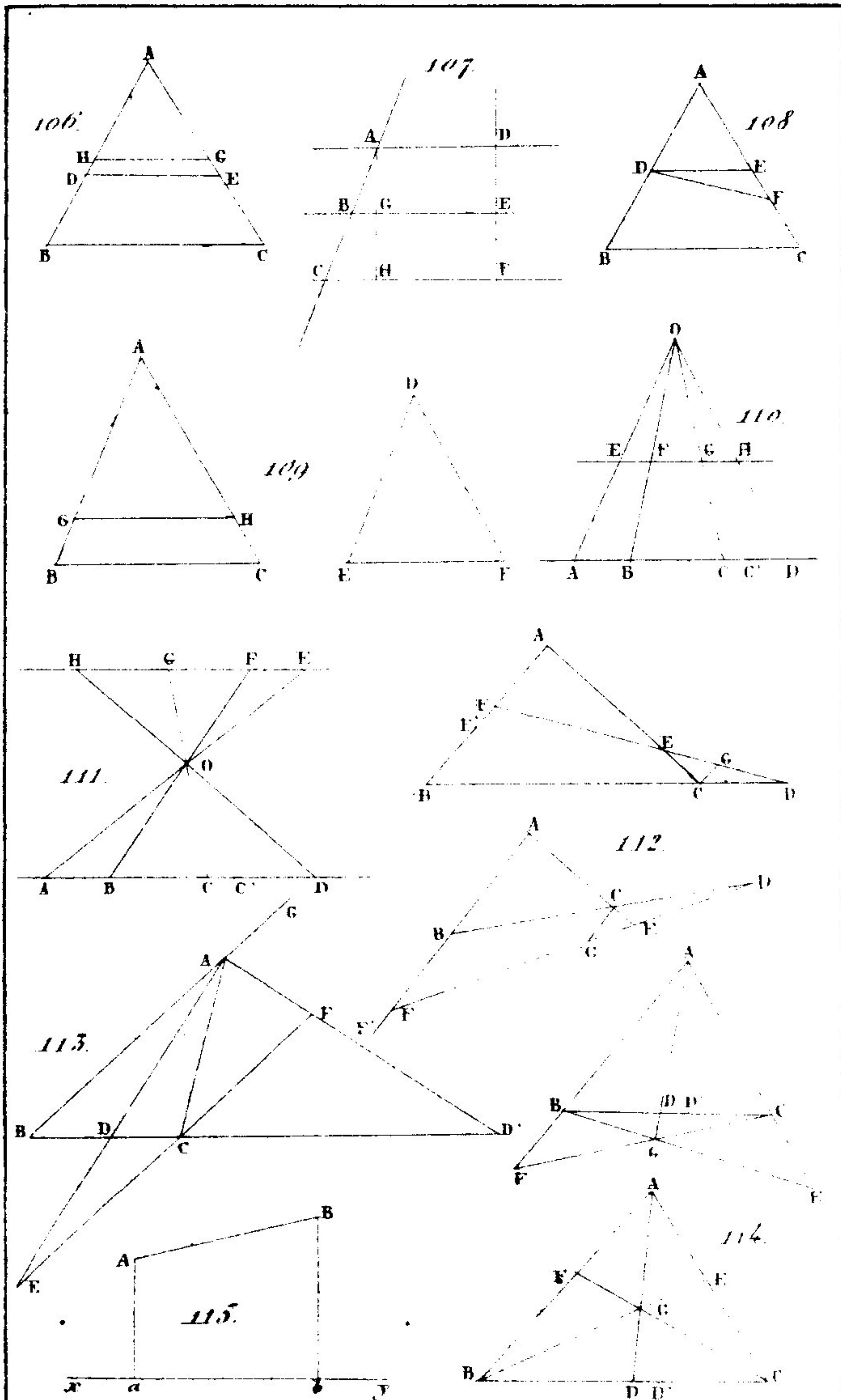

91.
G
A
F
H
D
C
B
K
M
E
L

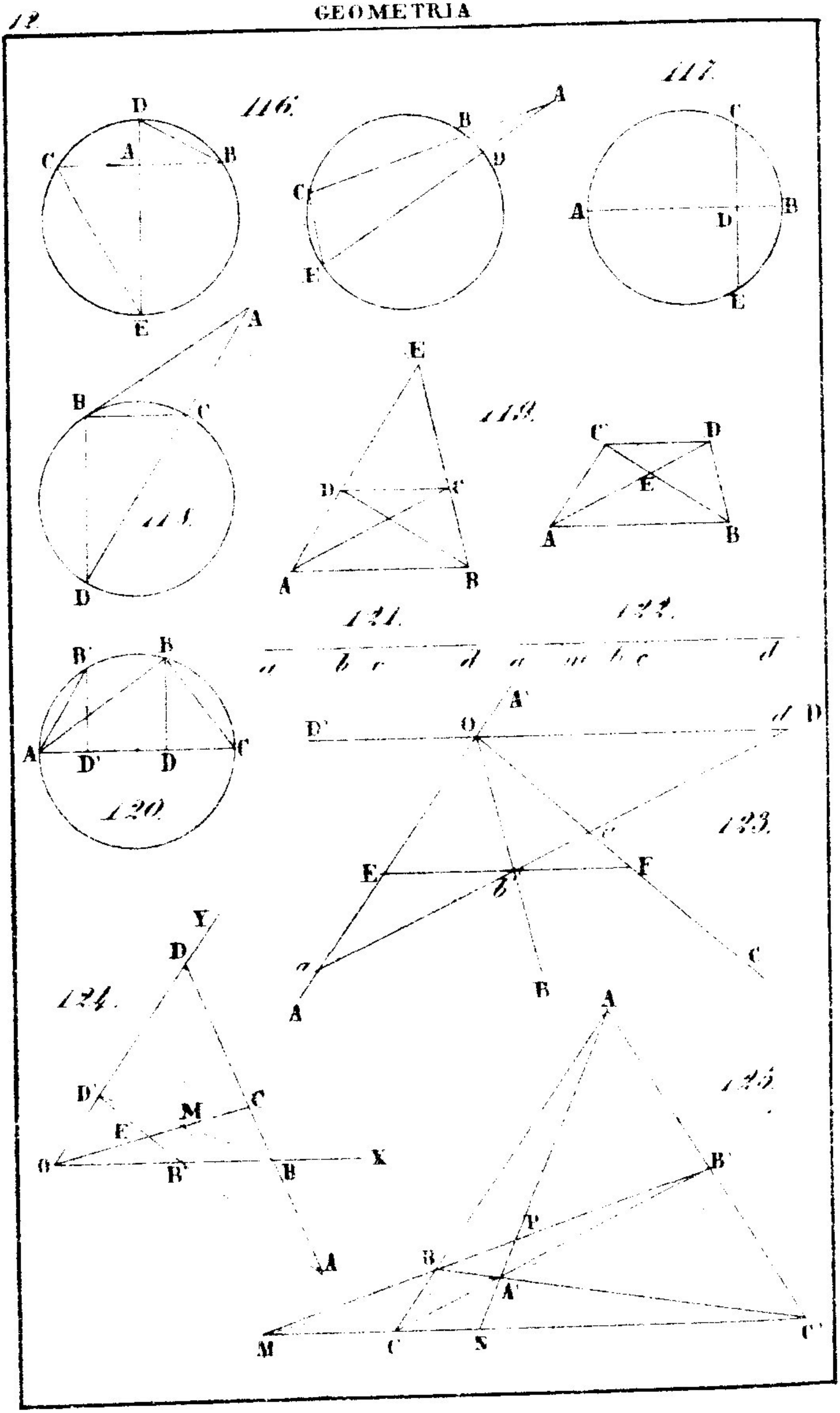

92.
D
E
C
A
B

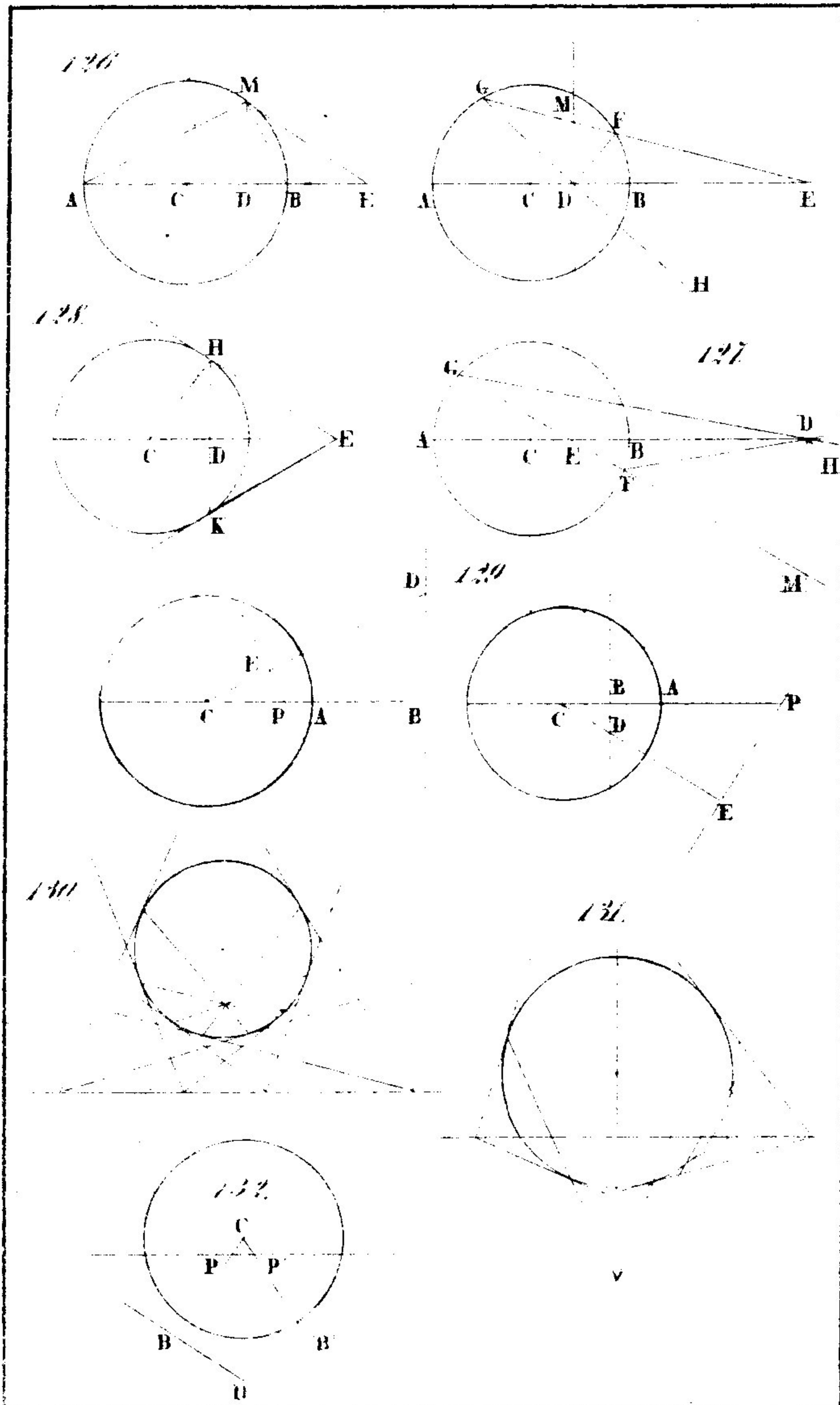

93.
B
E
A
F
H
C
D
G

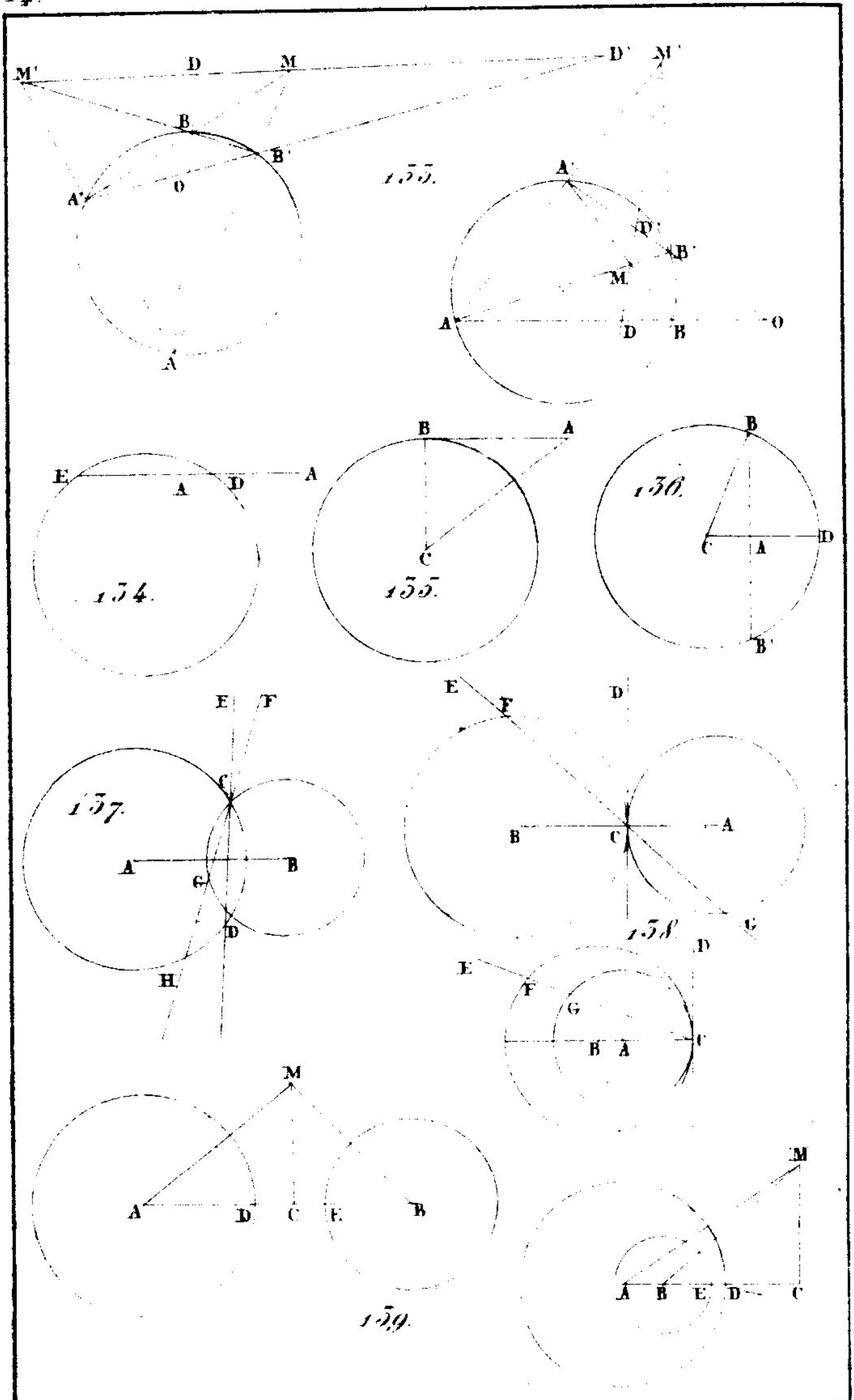

94.
B
A
C
E
D


95
A B G P Q H O C F E D
96
E A B F C G D H
97
B A D O
98
B A D E
99
B A D O E
100
b e d c a
101
h f e c g a d
102
d b f g a e c
104.
A C B C
103
g h d e a k f c
105.
A K C L N G E D O H M B C

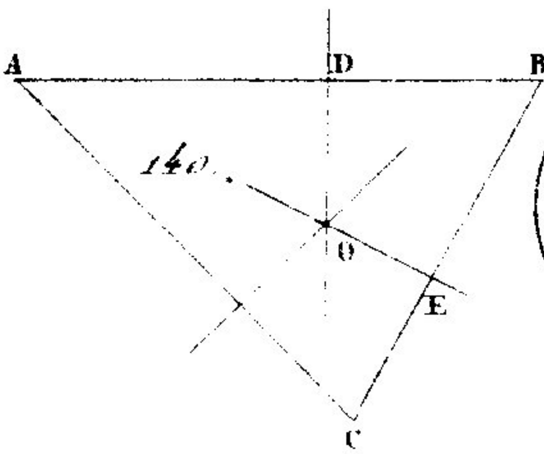

106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.


116.
D
C
A
B
E
117.
A
B
C
D
E
118.
119.
120.
121.
a b c d
122.
a m b c d
123.
124.
125.

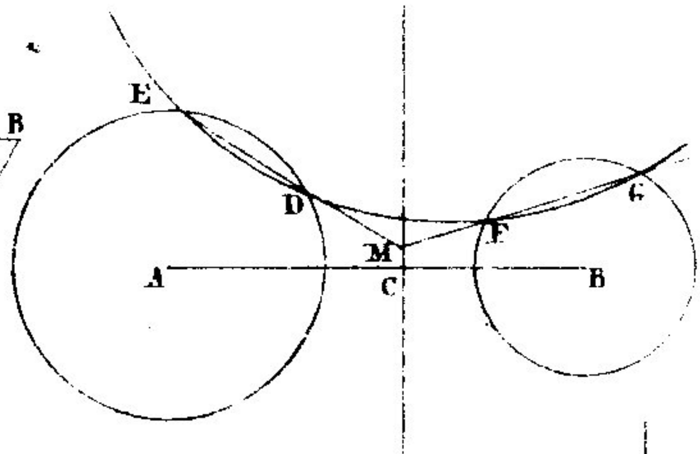

126
M
A C D B E
G M F
A C D B E
H
H
C D E
K
127
G
A C E B D
F H
D
M
B A P
C D
E
E
C P A B
131
C
P P
B B
D

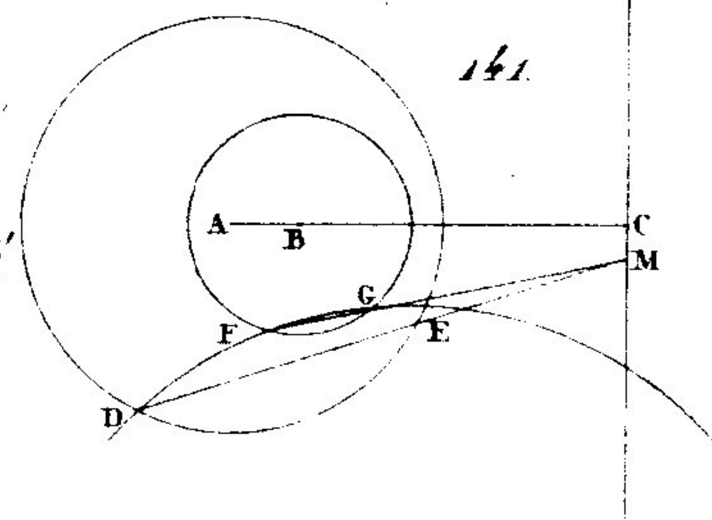


133. 134. 135. 136. 137. 138. 139.

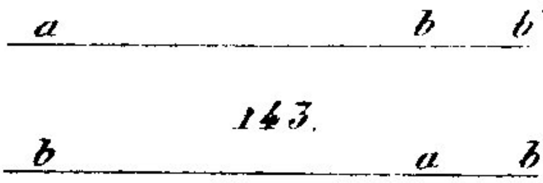


140.

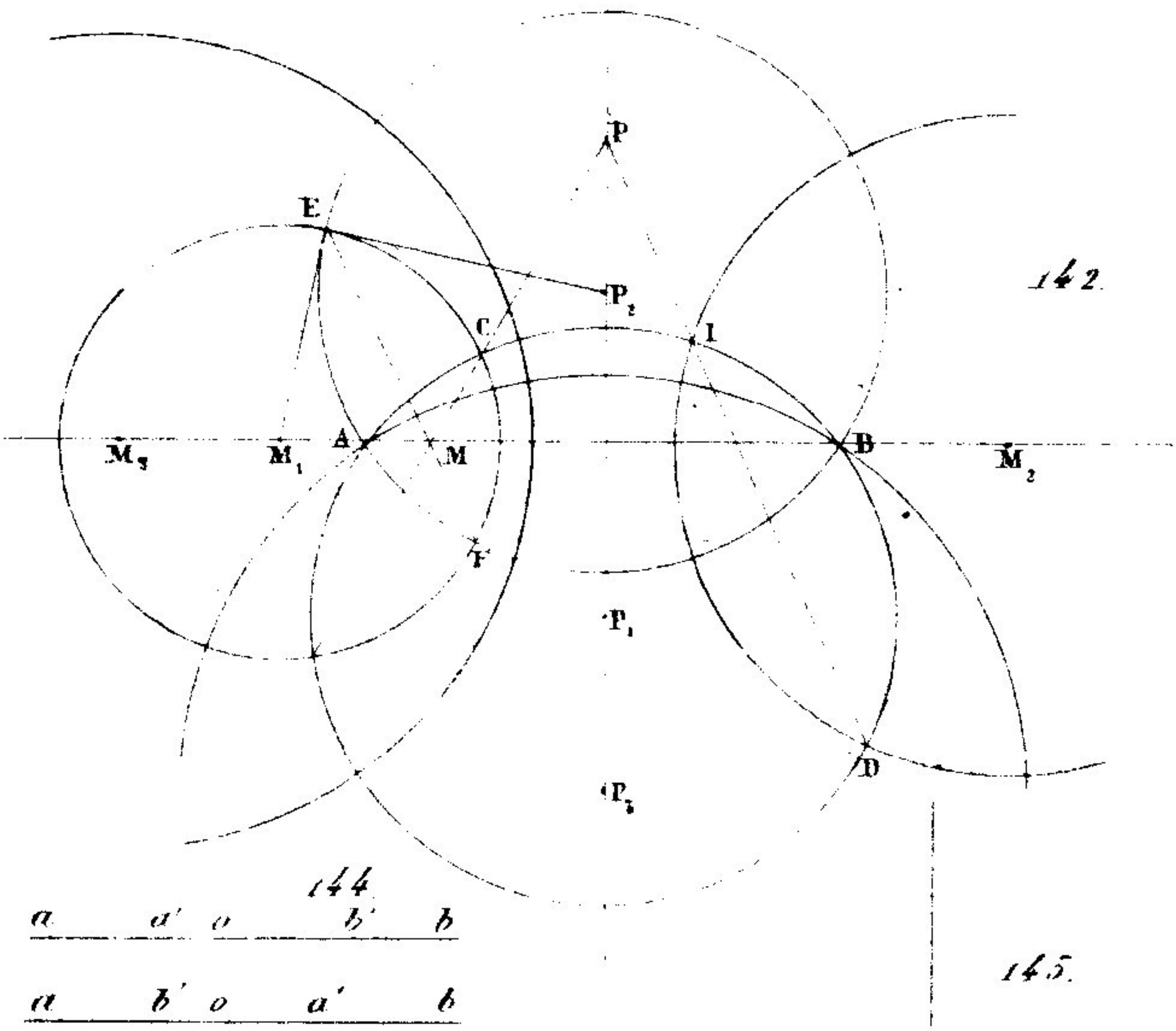




141.

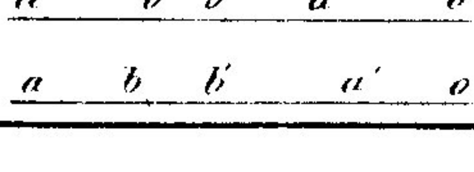


143.



142.

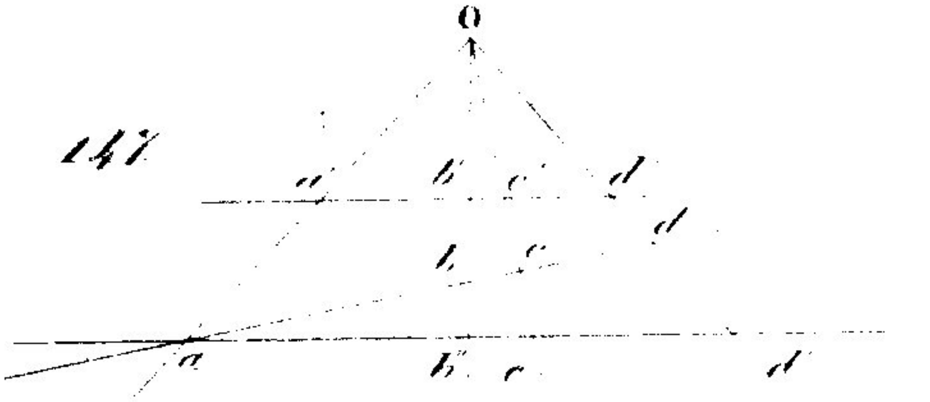
144.



145.

146

147

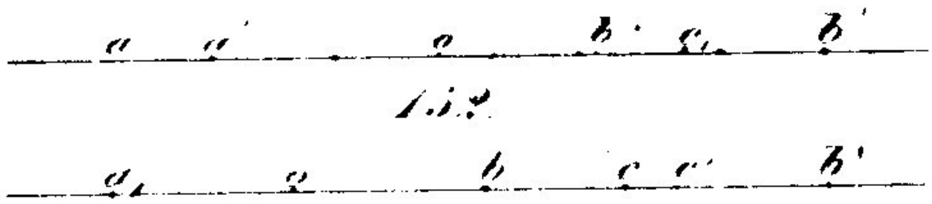


148.

149.

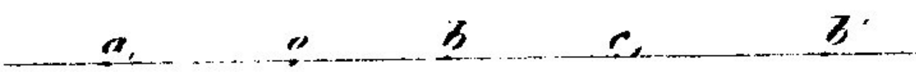
150.

151.

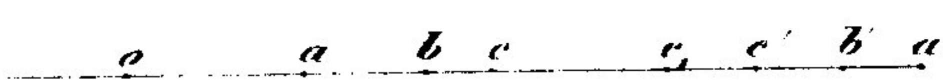


152.

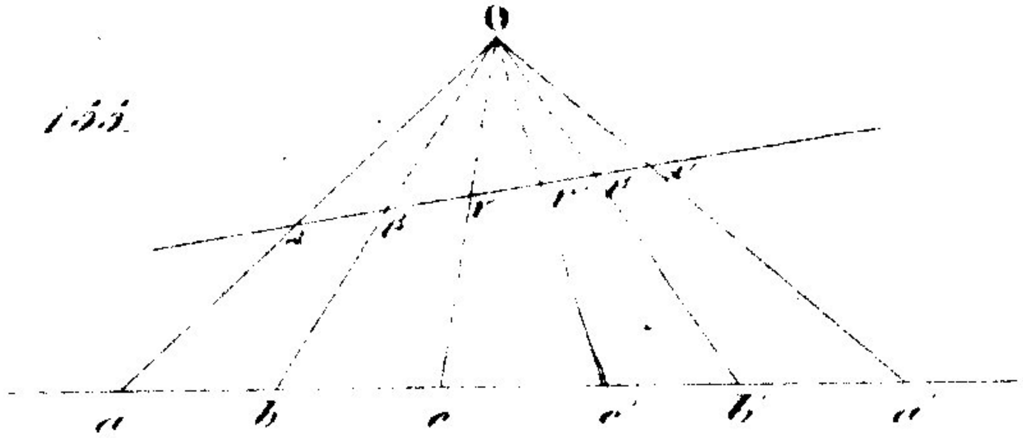
153.

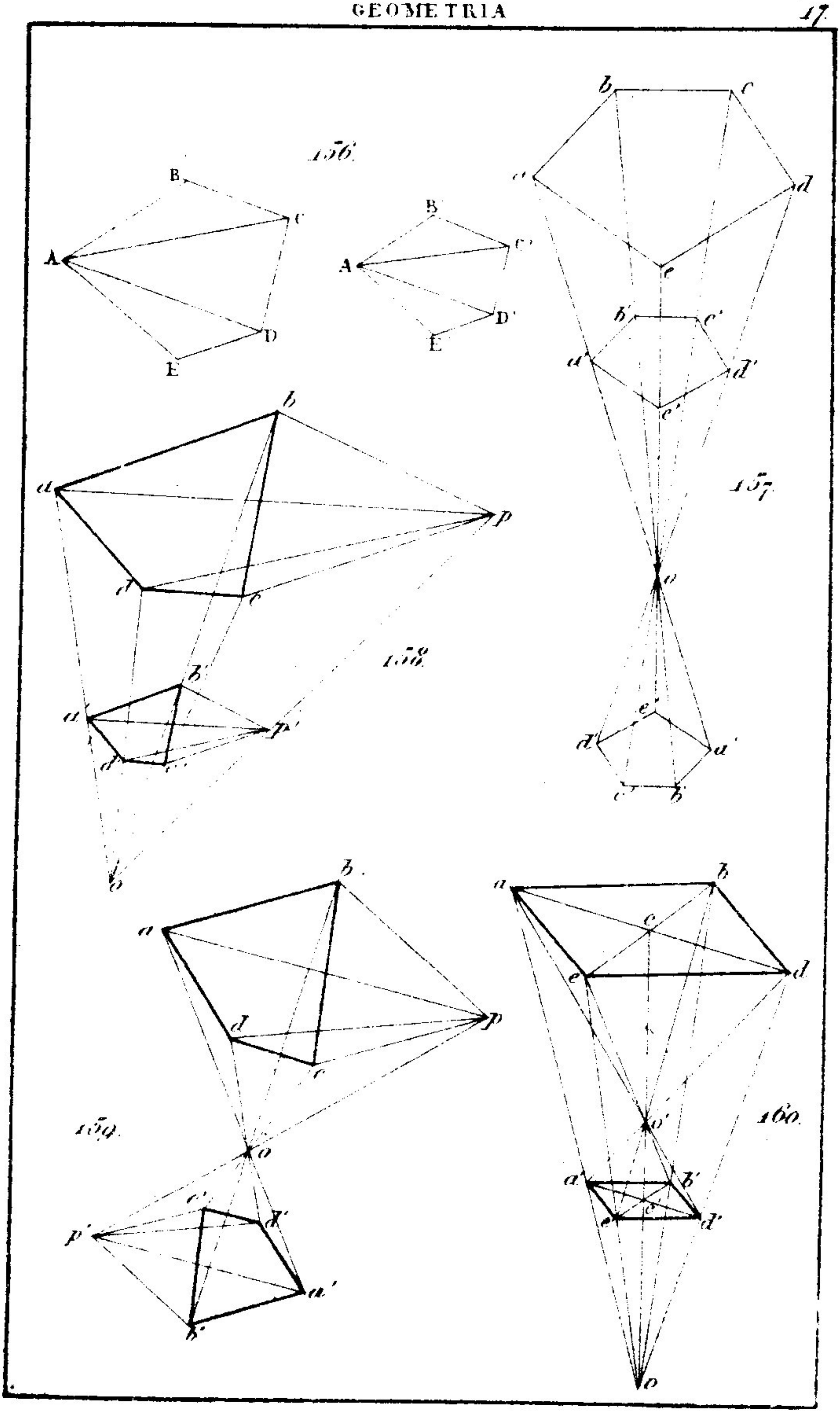


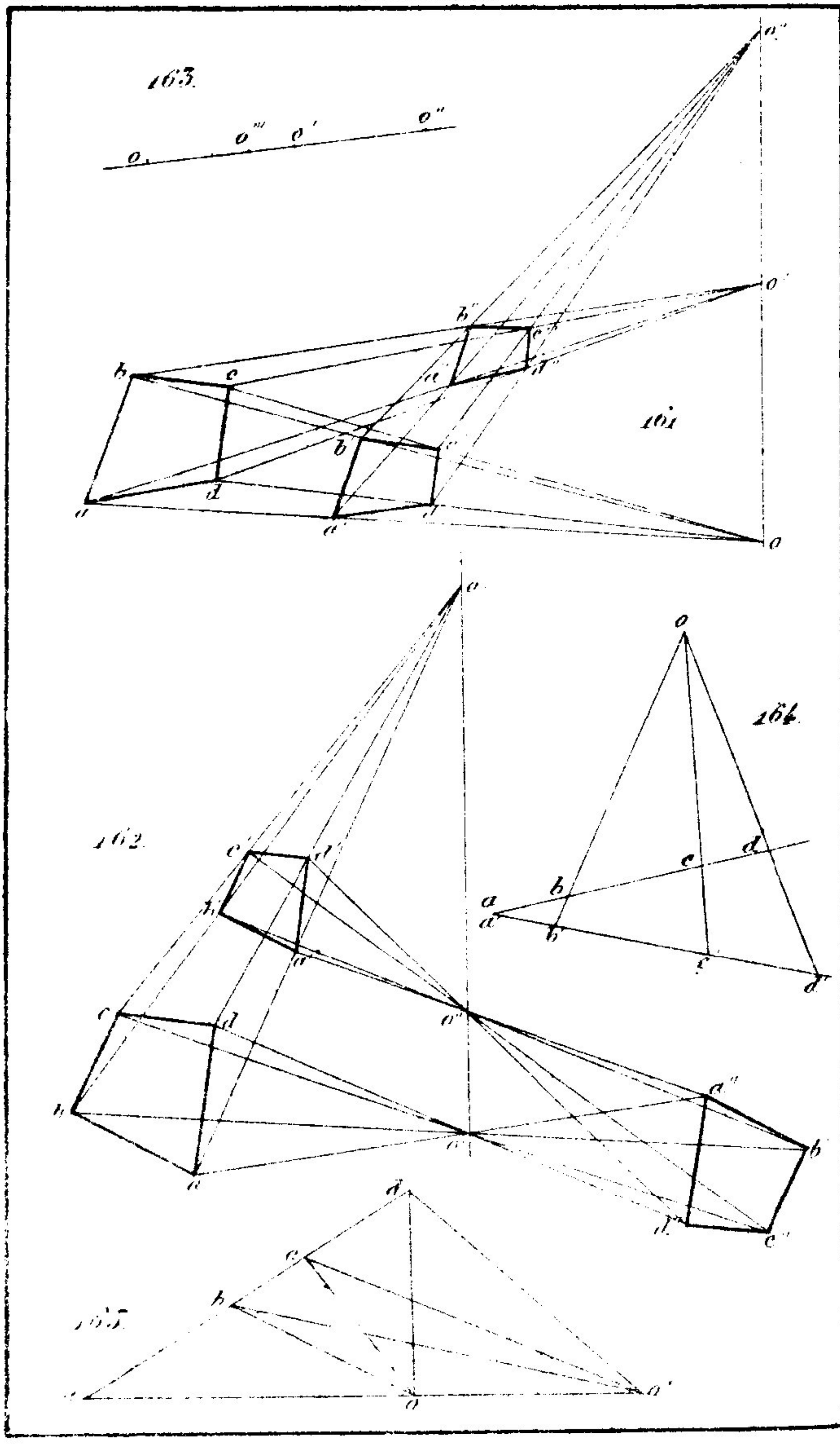
154.



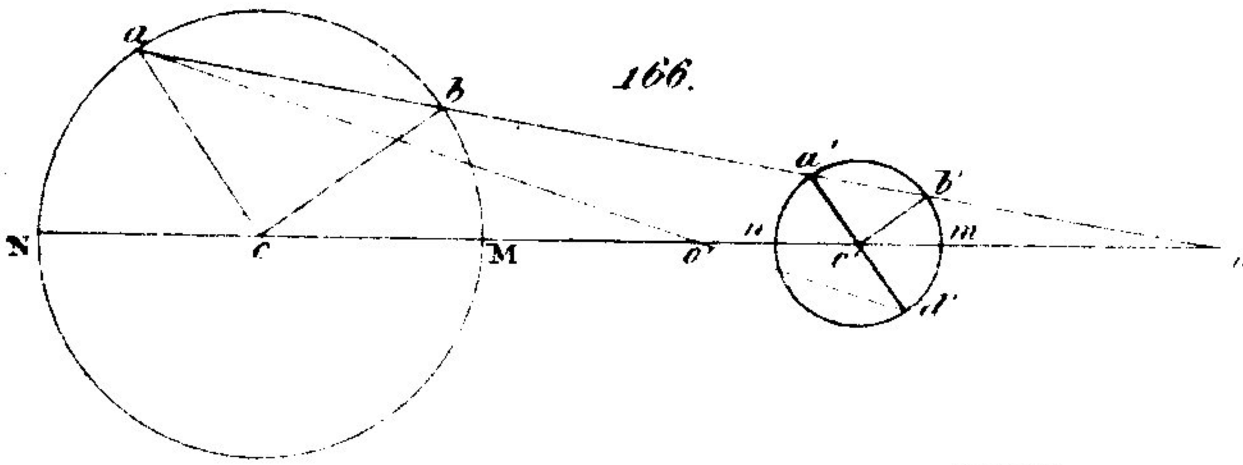
155.



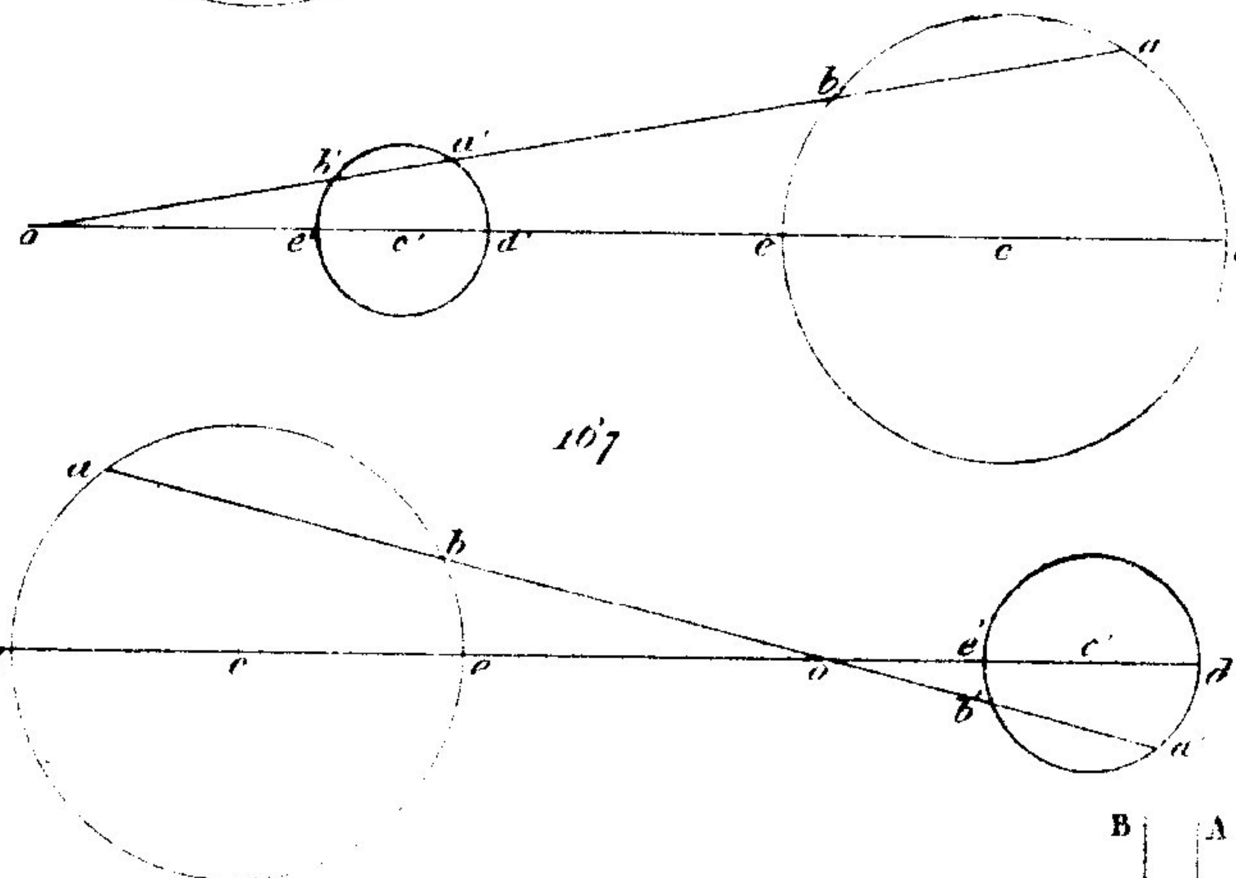

156.
157.
158.
159.
160.


163.
161
162.
164.
165.

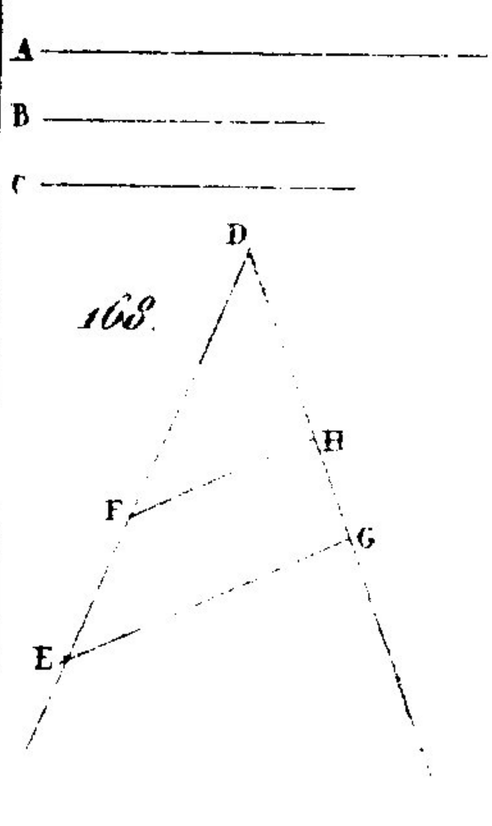
166.



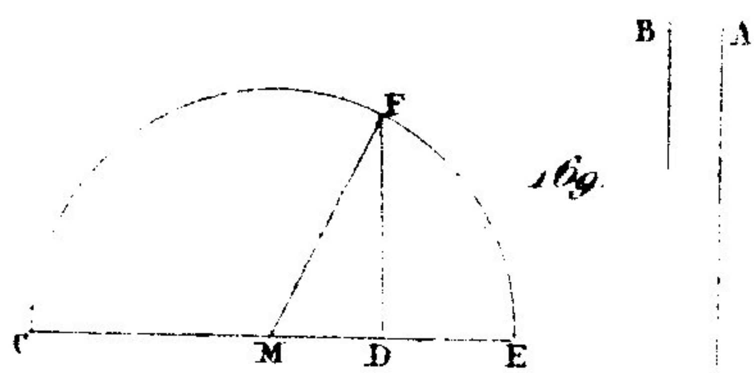
167



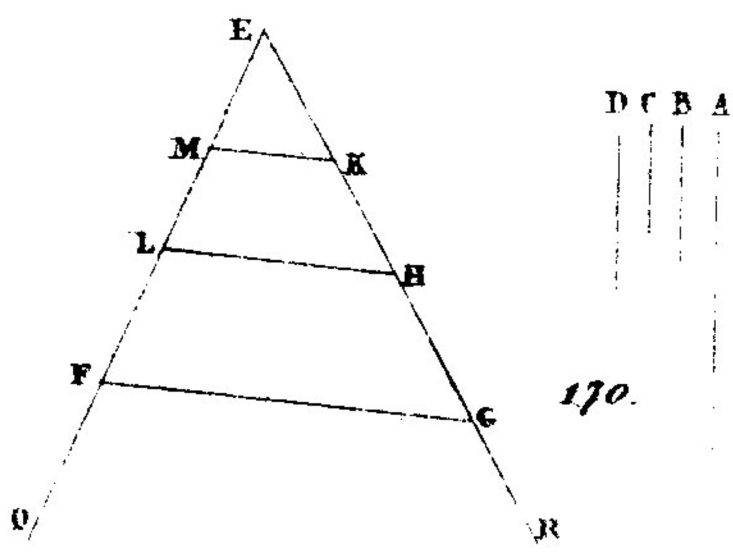
168.

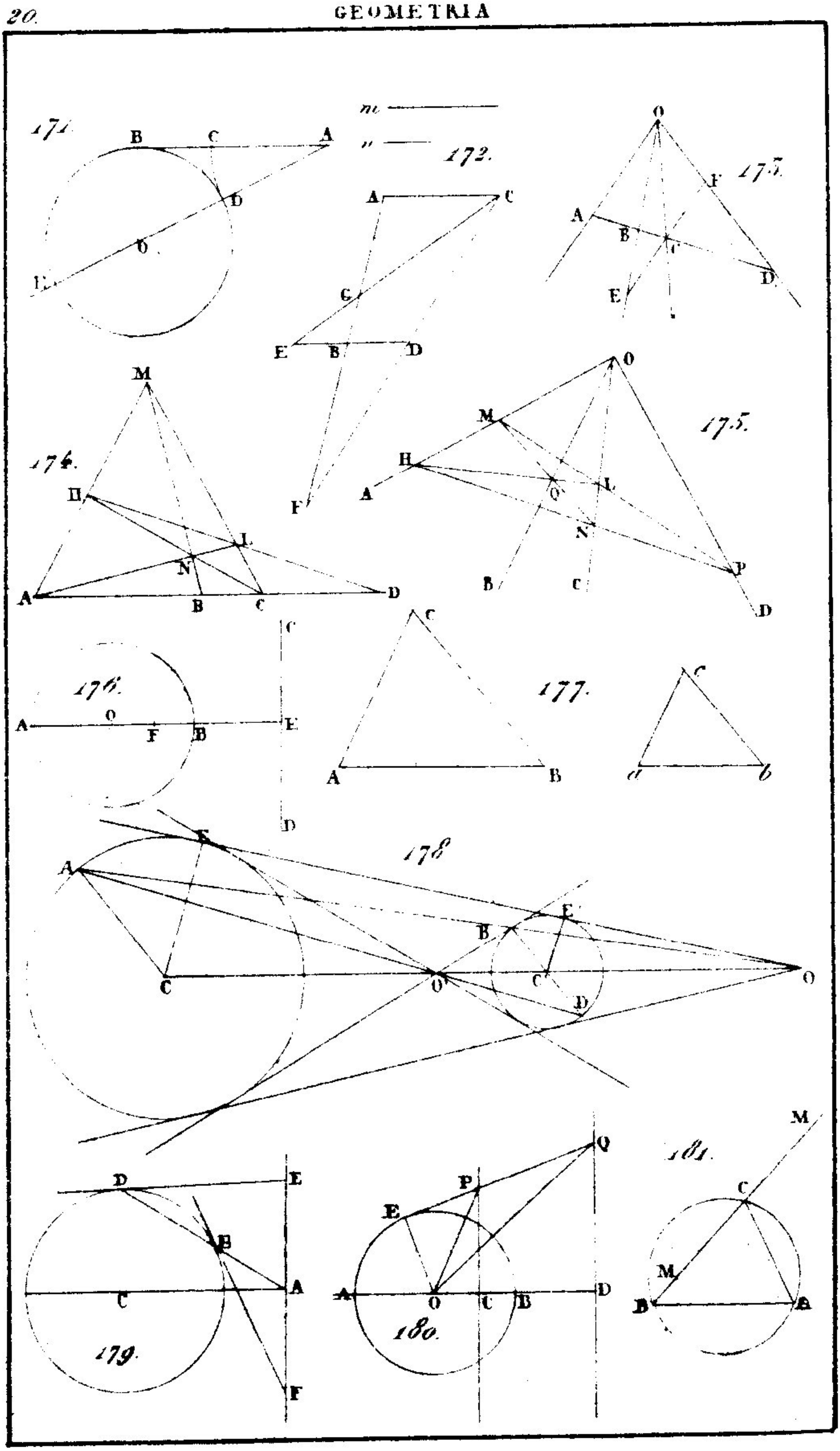


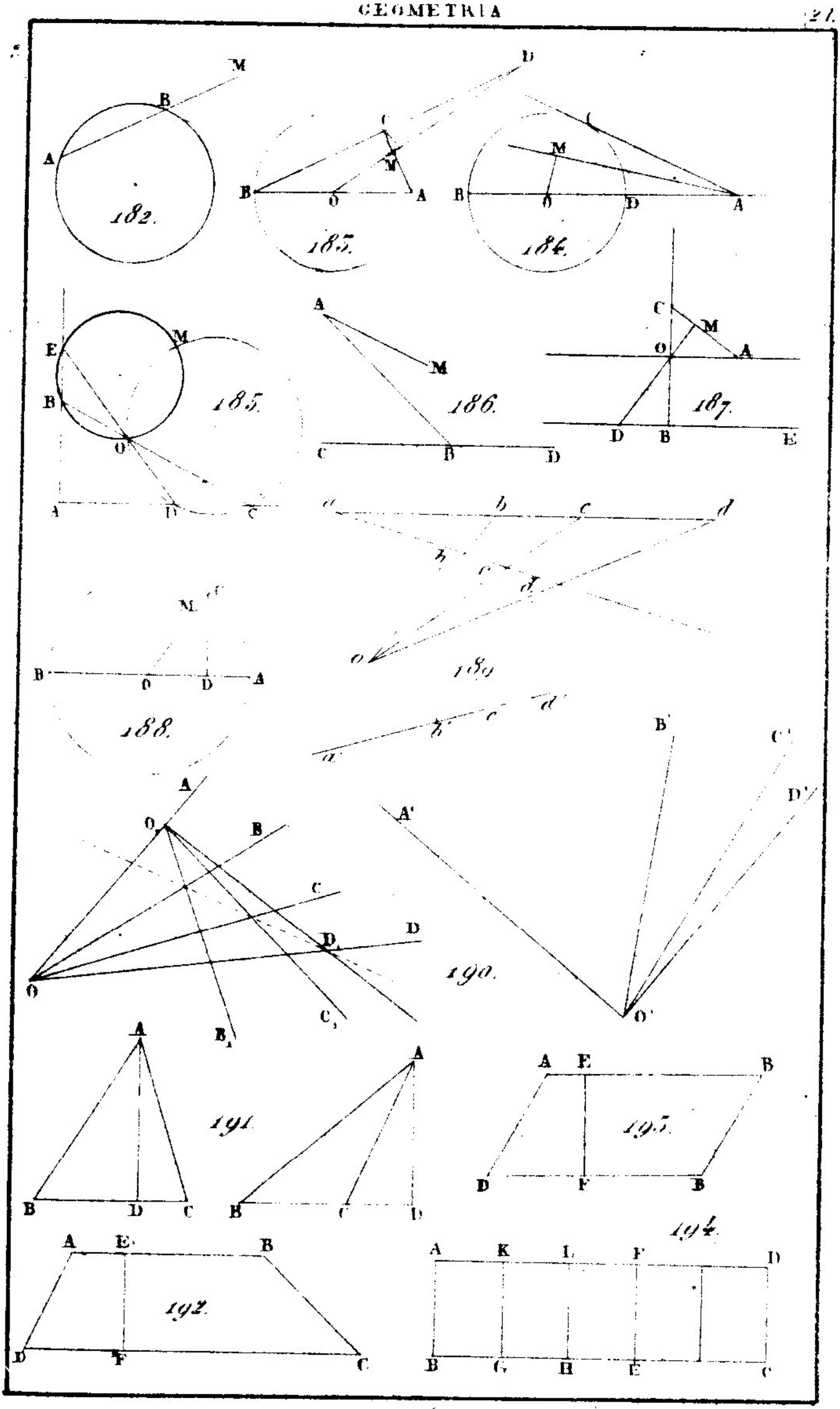
169.

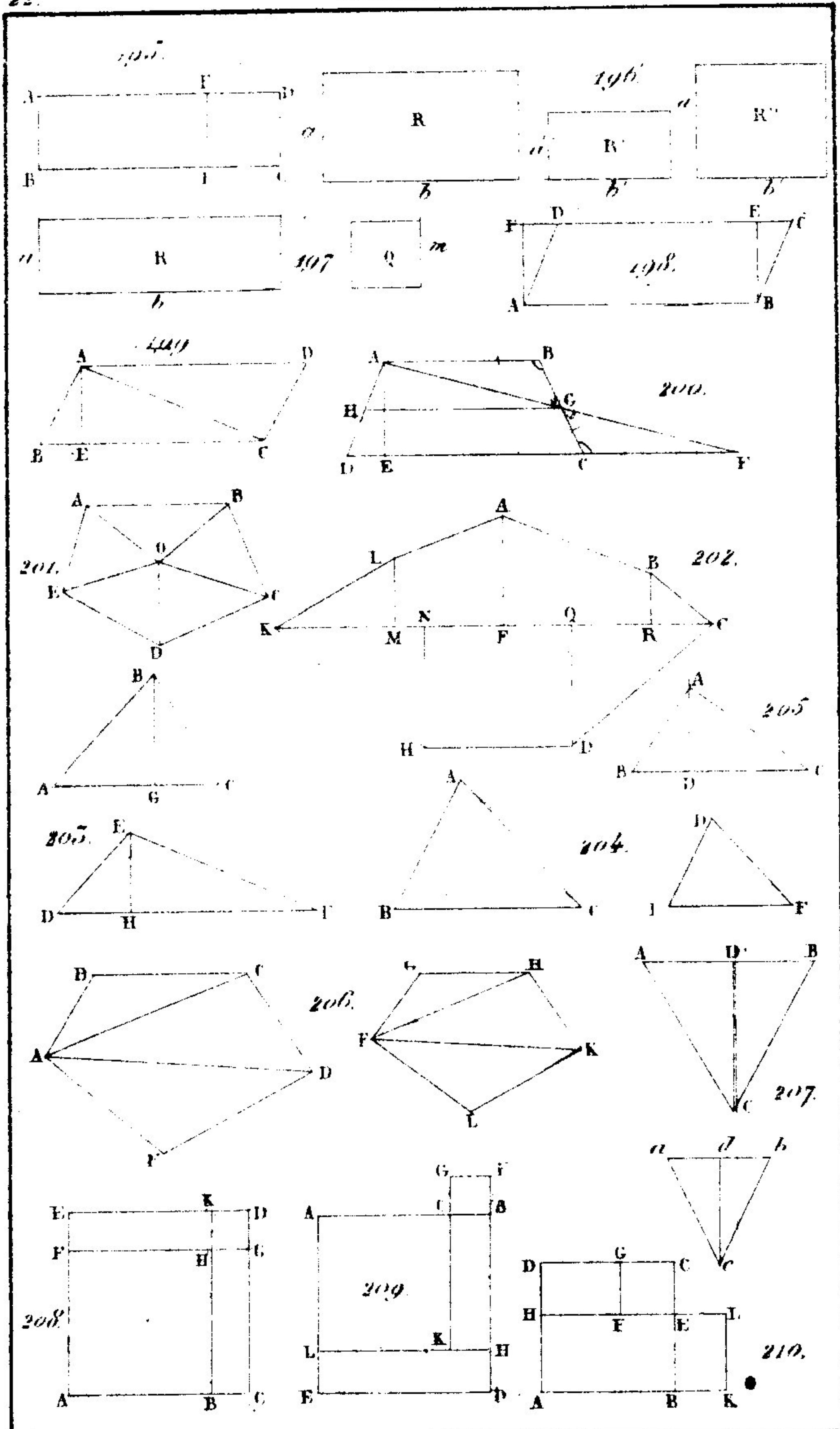


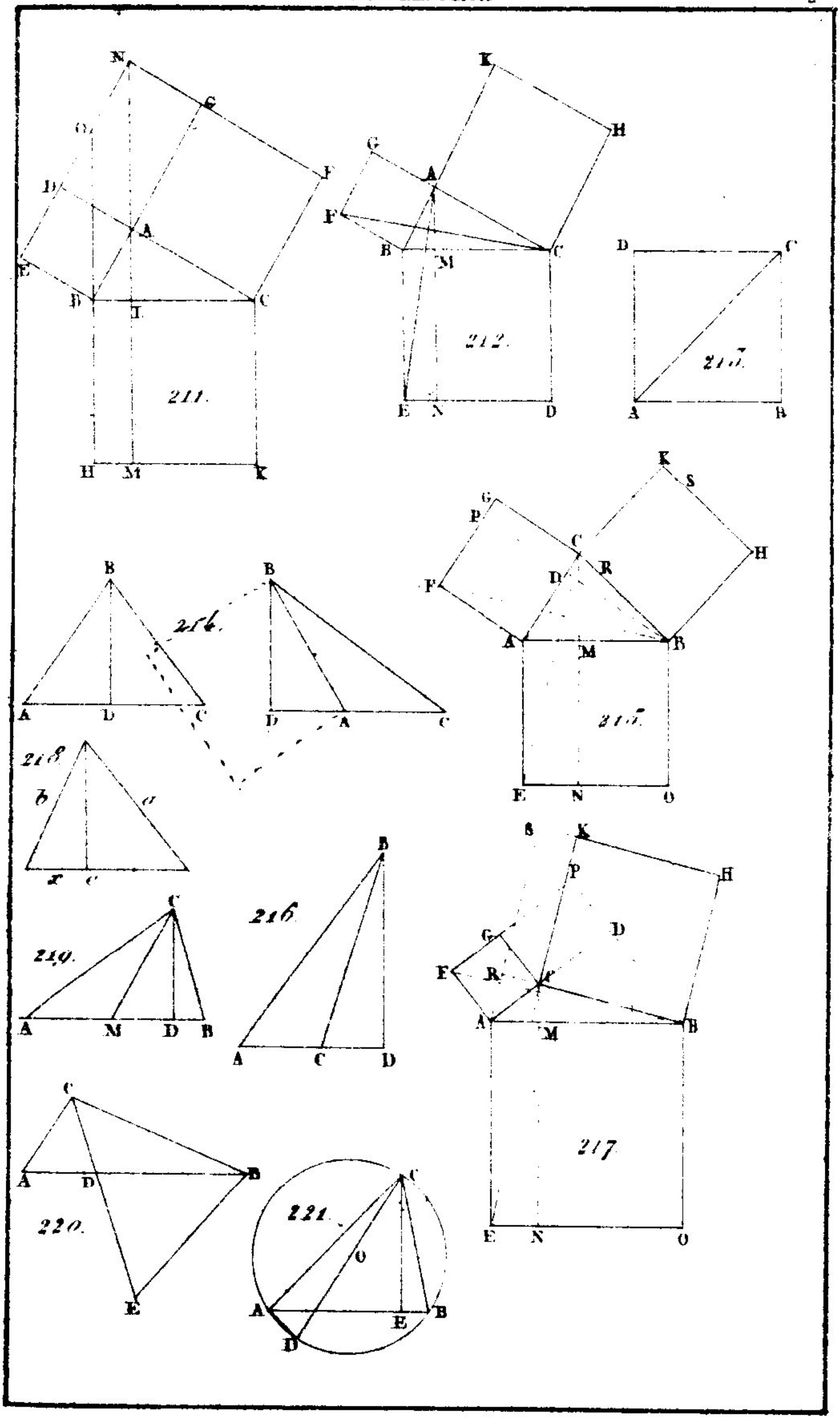
170.

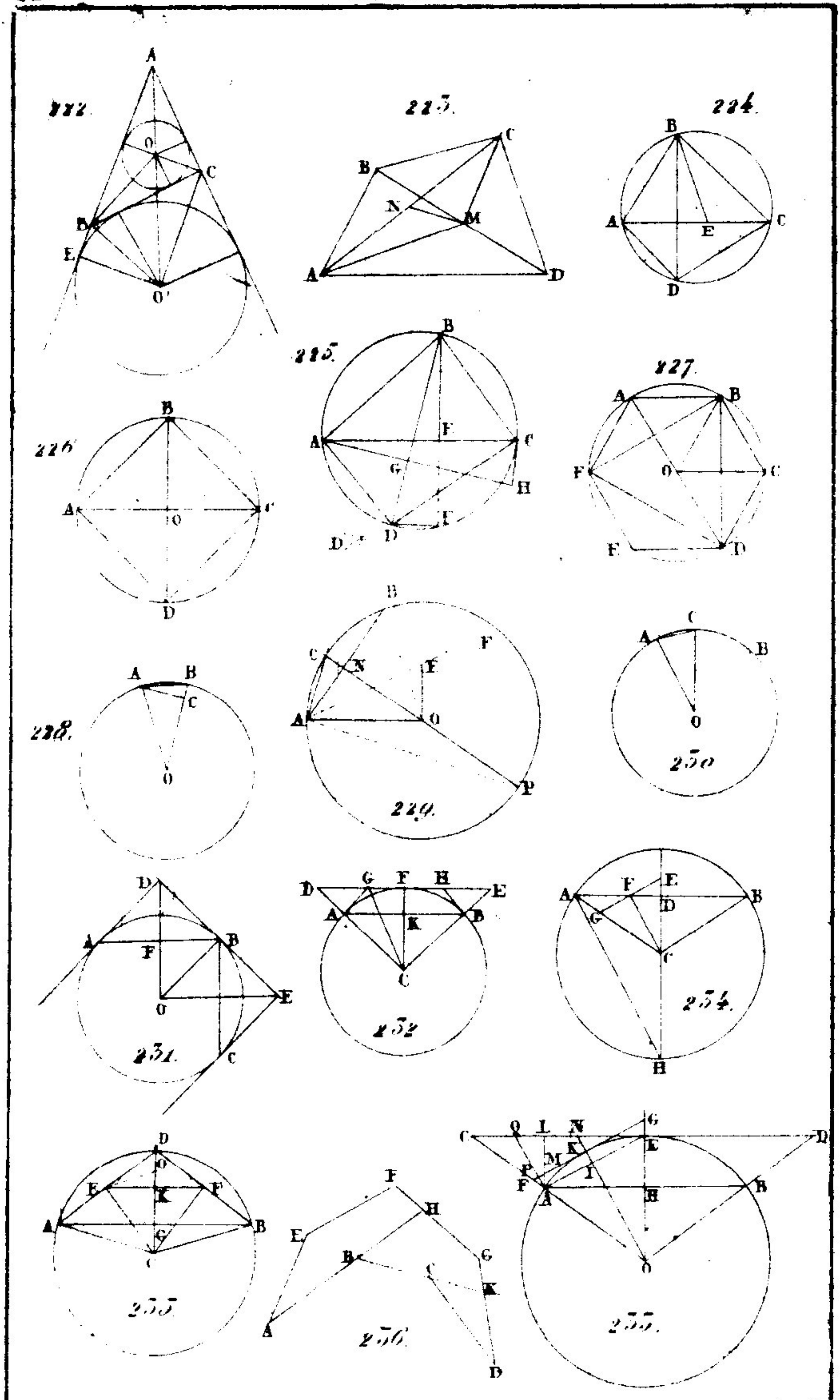


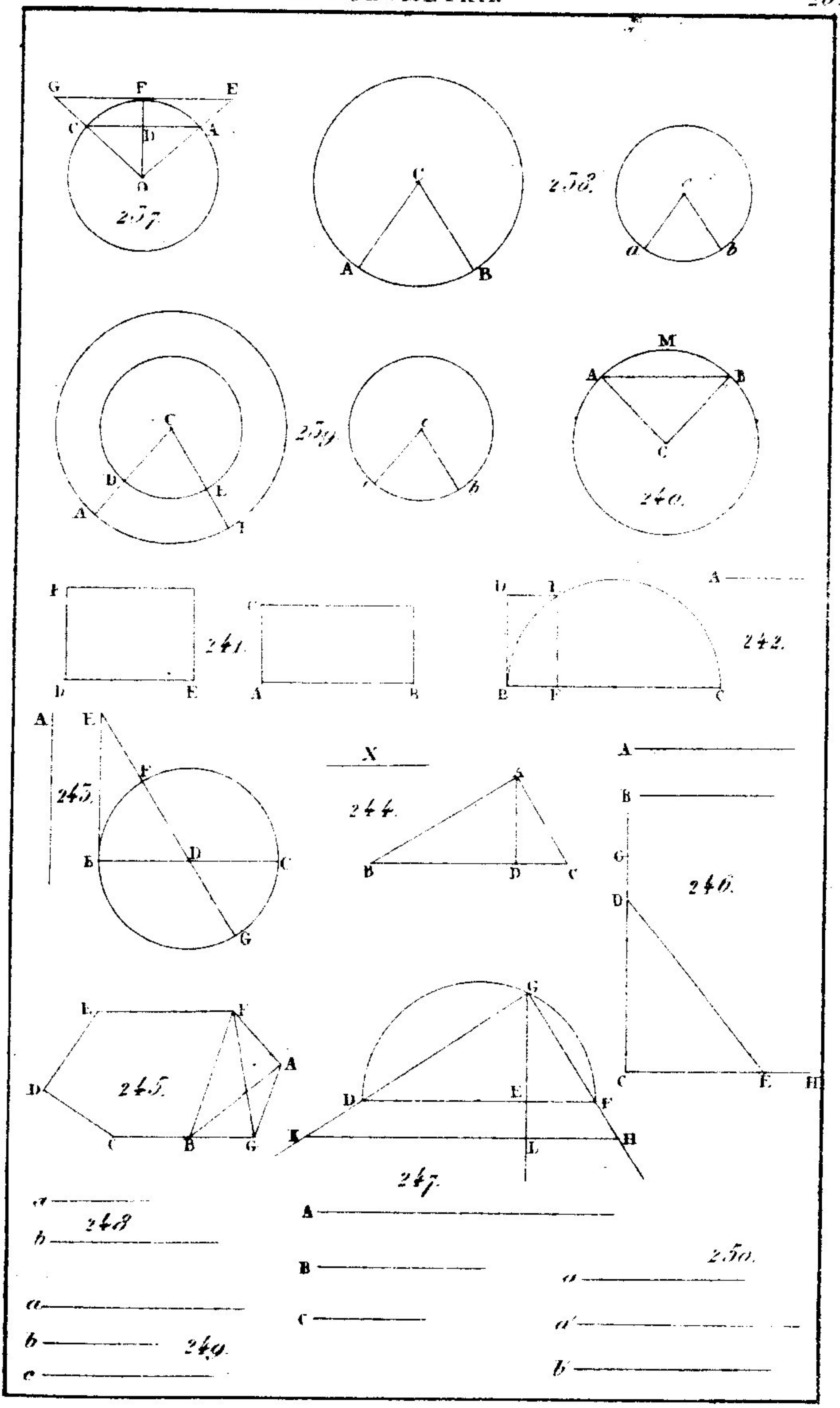

171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.

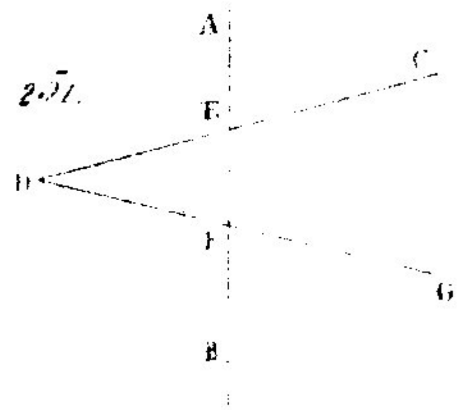

182.
M B A
183.
D C M B O A
184.
C M B O D A
185.
M E B O A D C
186.
A M C B D
187.
C M O A D B E
188.
M B O D A
189.
a b c d
b c d
o
b c d
a
190.
A O B C D D₁ O C₁ B₁
A' B' C' D' O'
191.
A B D C
A B C D
192.
A E B D F C
193.
A E B D F B
194.
A K L F D B G H E C


196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210

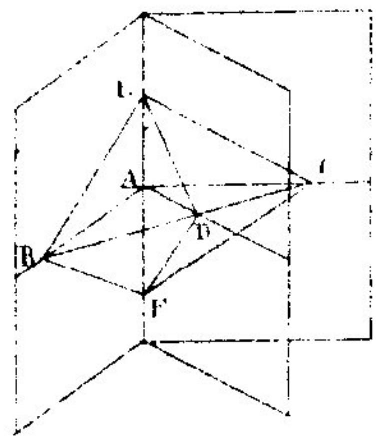

211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.



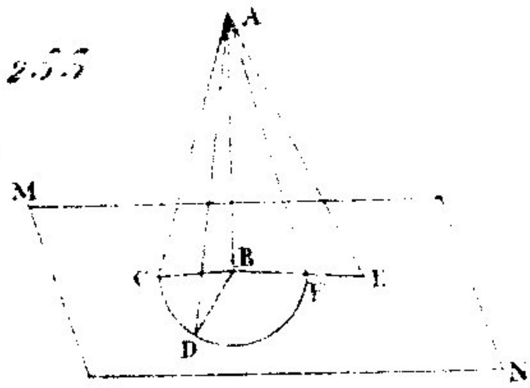

237.
238.
239.
240.
241.
242.
243.
244.
245.
246.
247.
248.
249.
250.



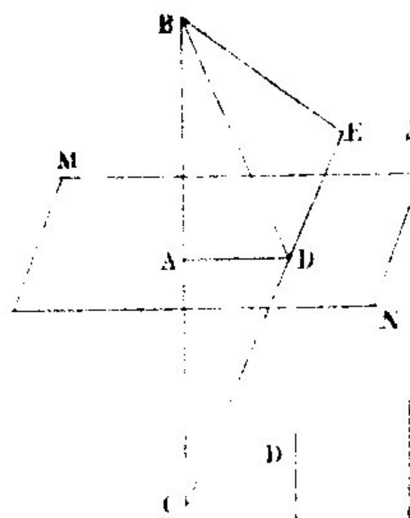
251.



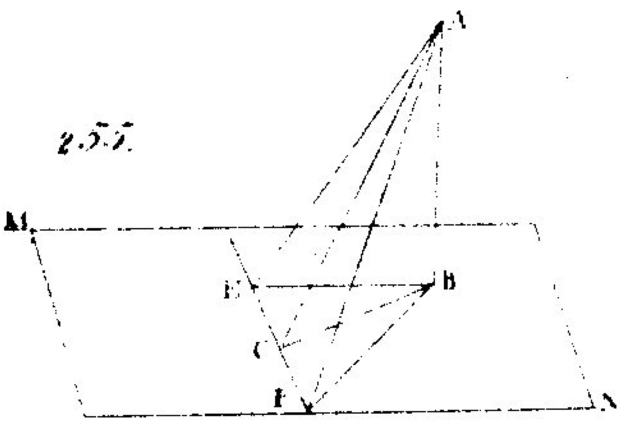
252.



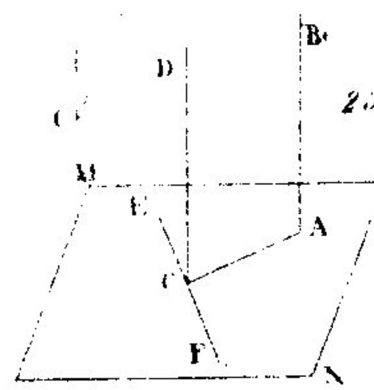
253.



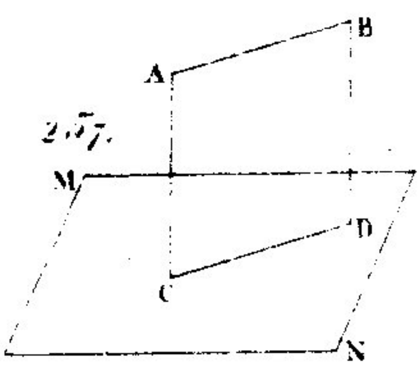
254.



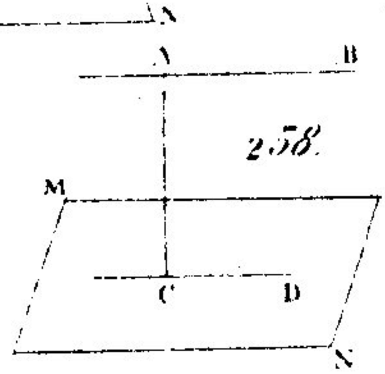
255.



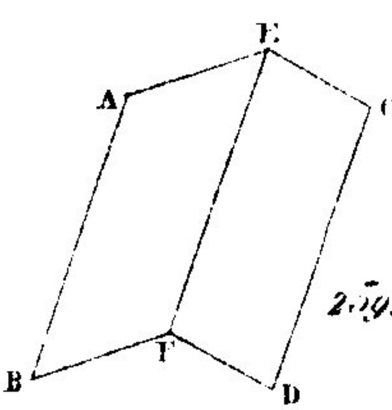
256.



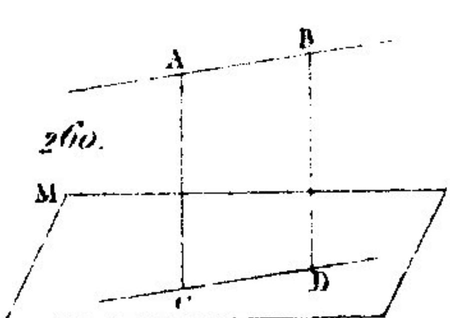
257.



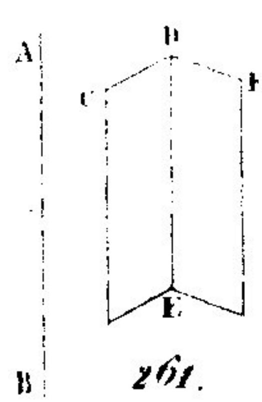
258.



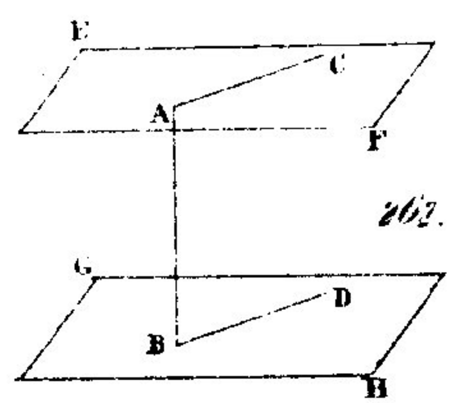
259.



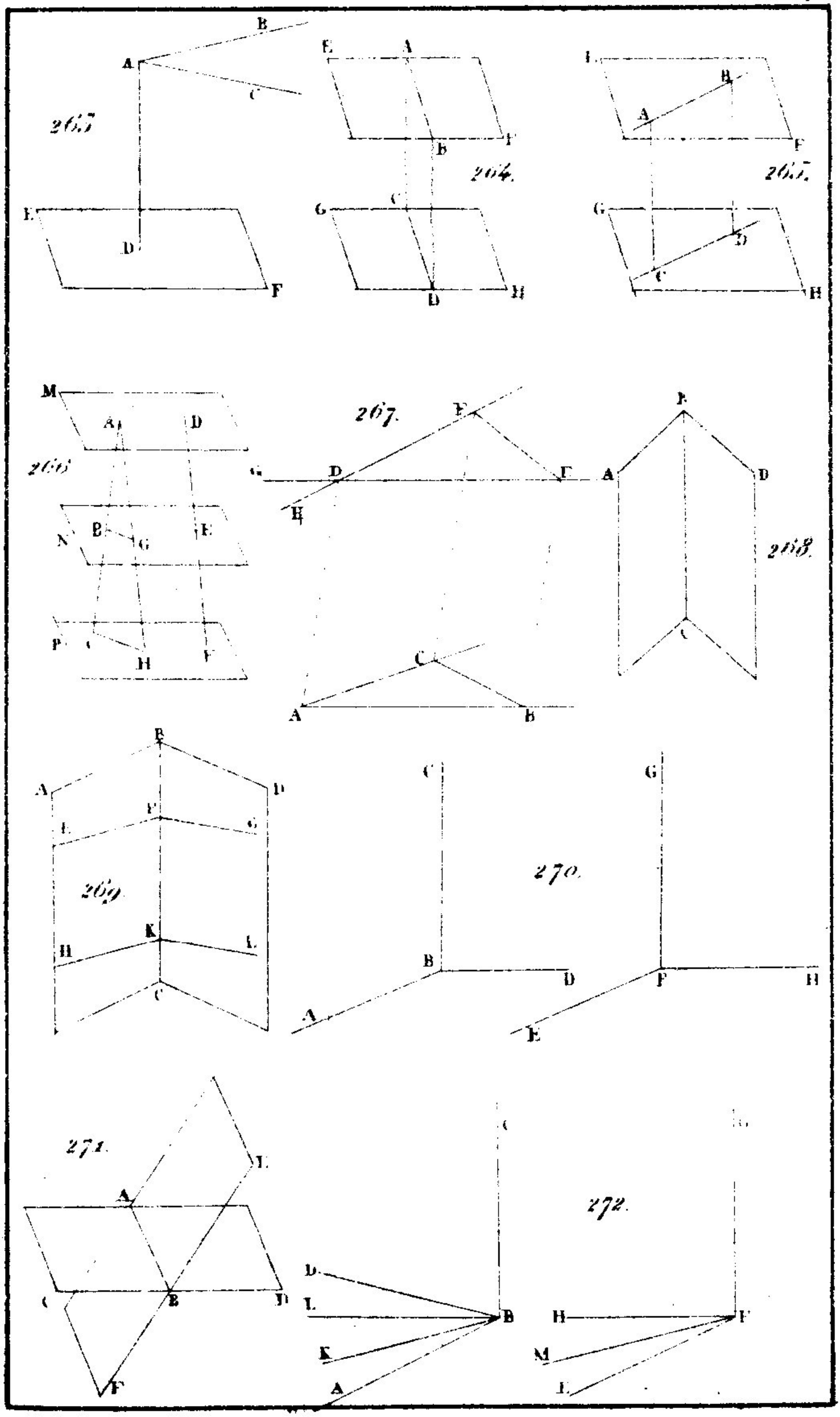
260.

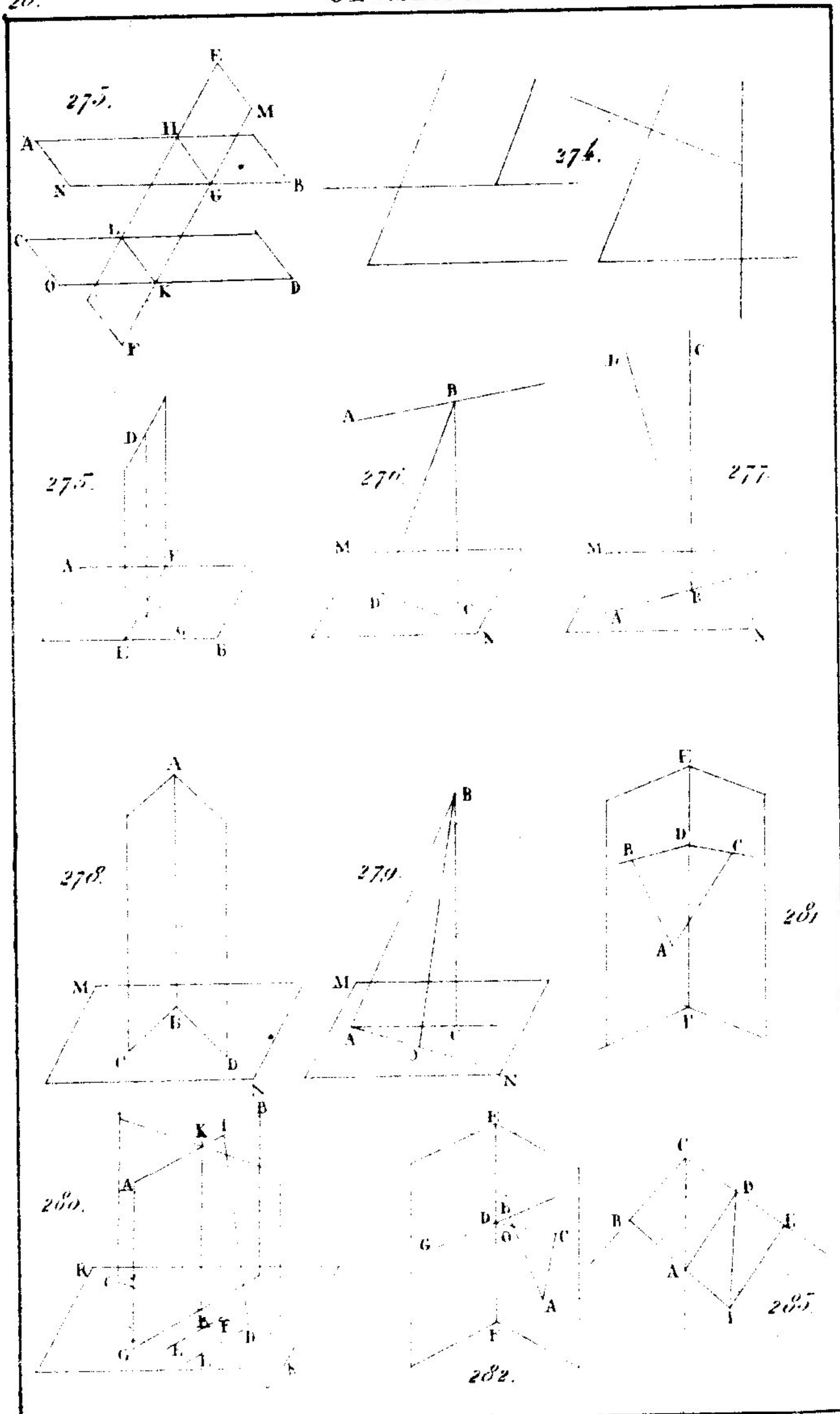


261.



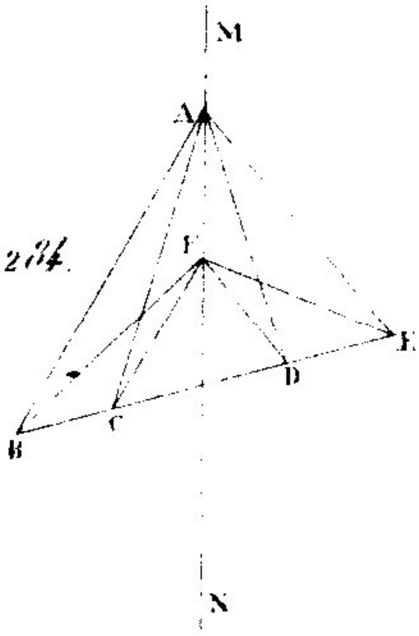
262.


263
264.
265.
266
267.
268.
269.
270.
271.
272.

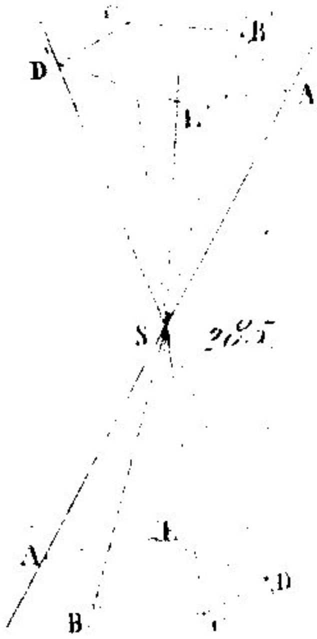


273.
274.
275.
276.
277.
278.
279.
280.
281.
282.
283.

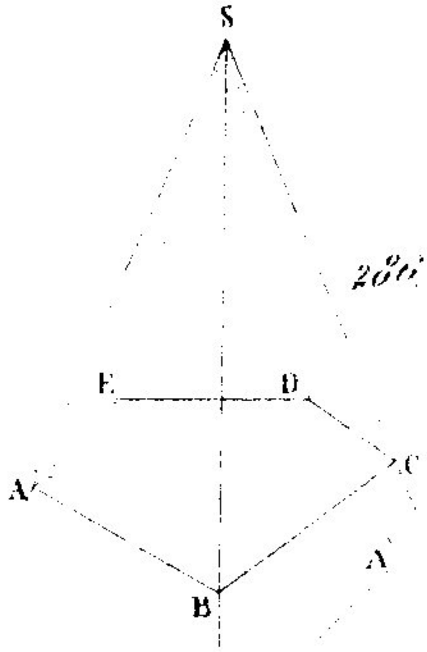
284.



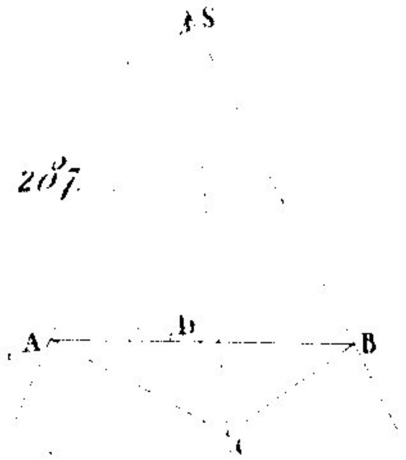
285.



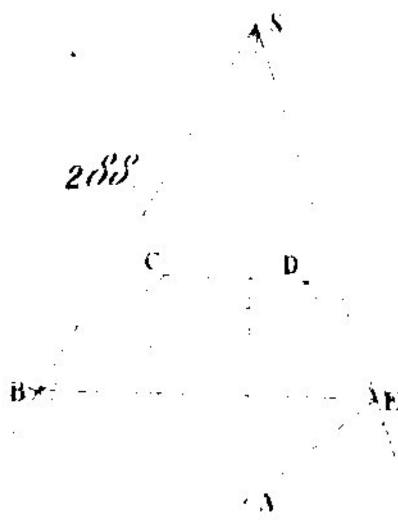
286.



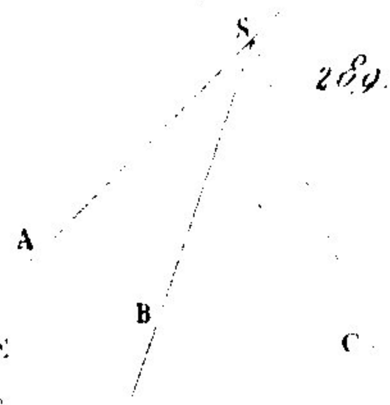
287.



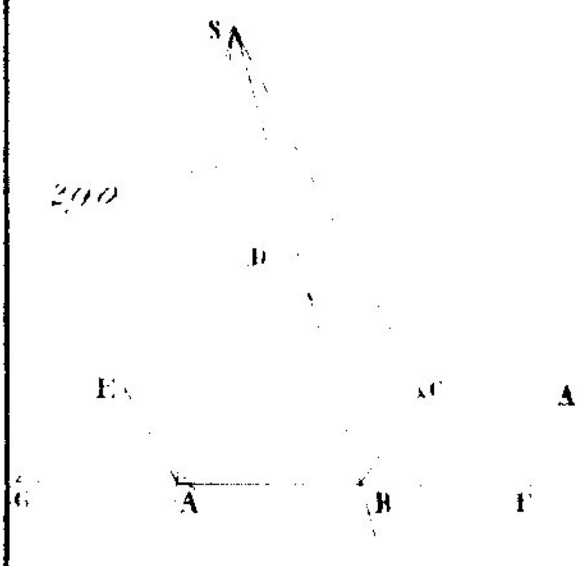
288.



289.

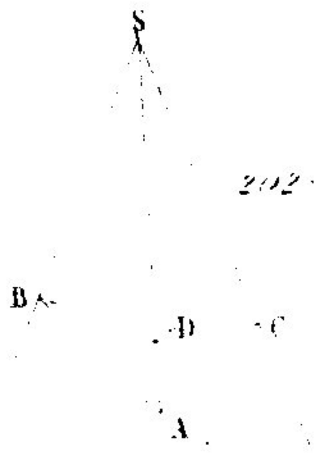


290

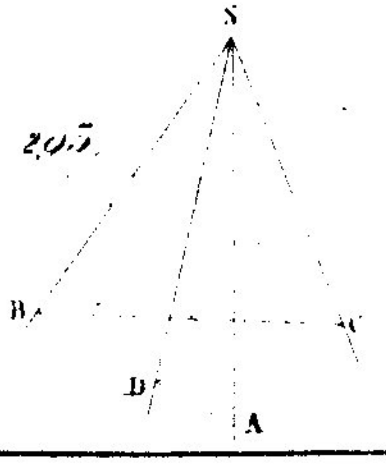


291

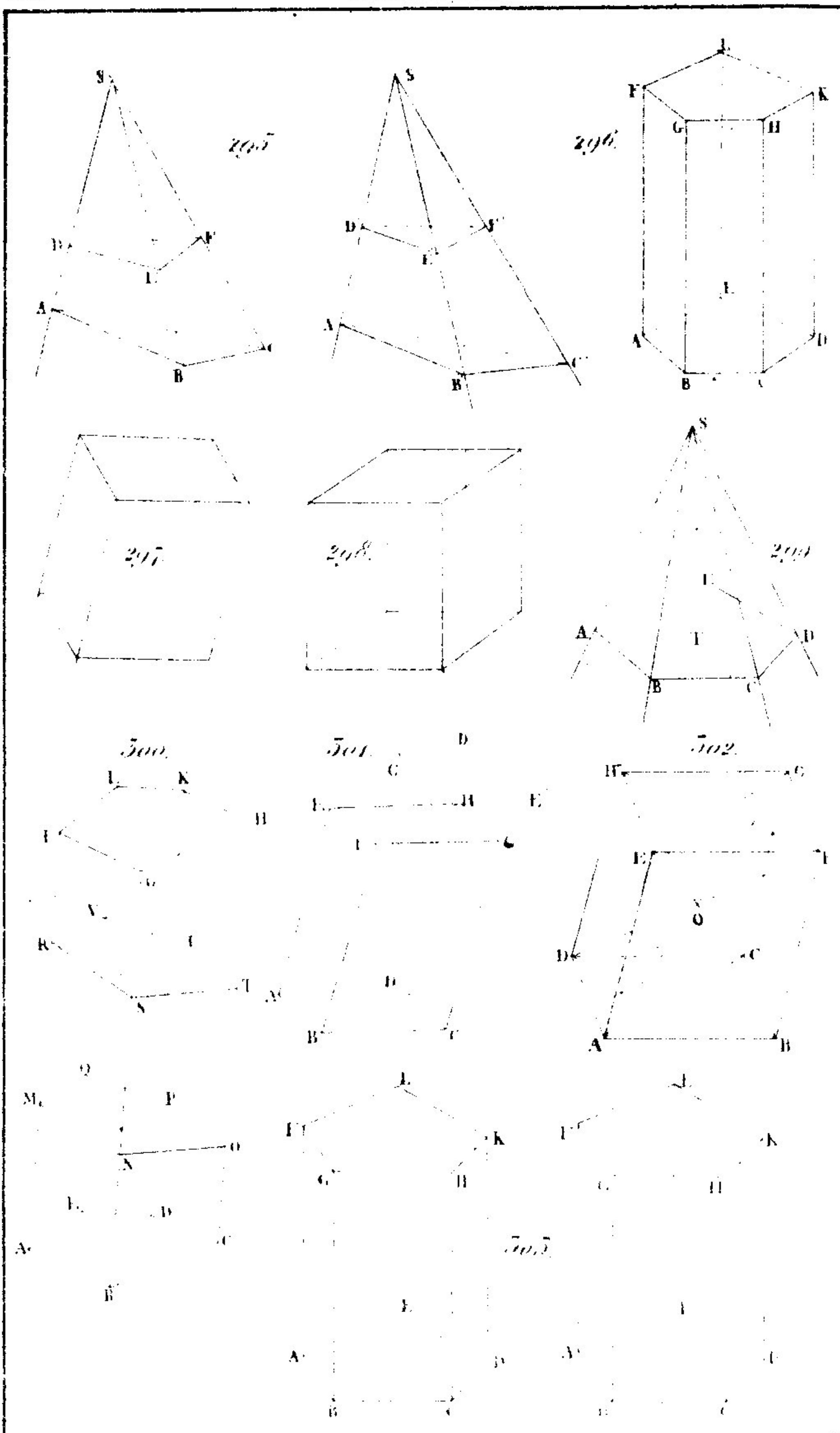
292

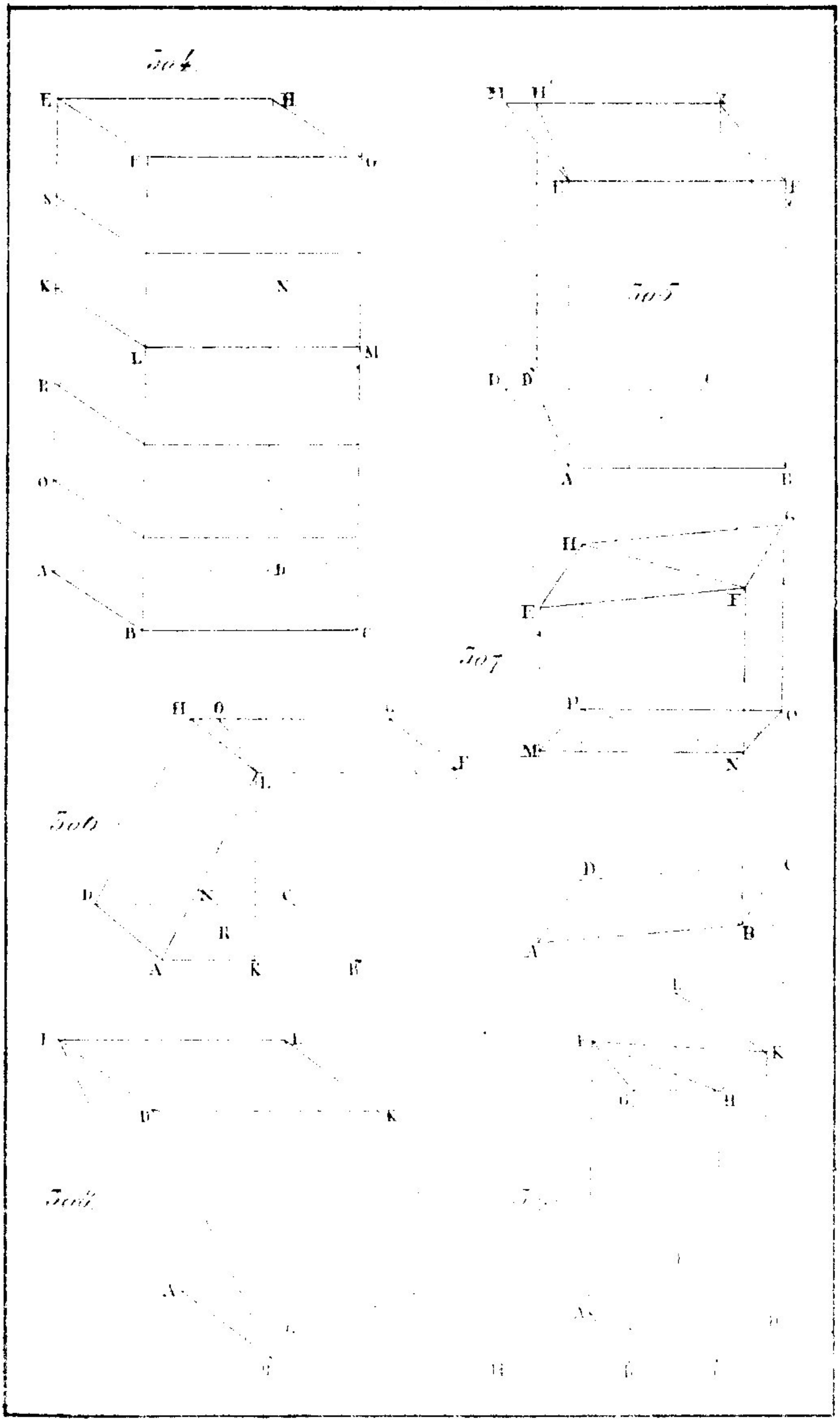


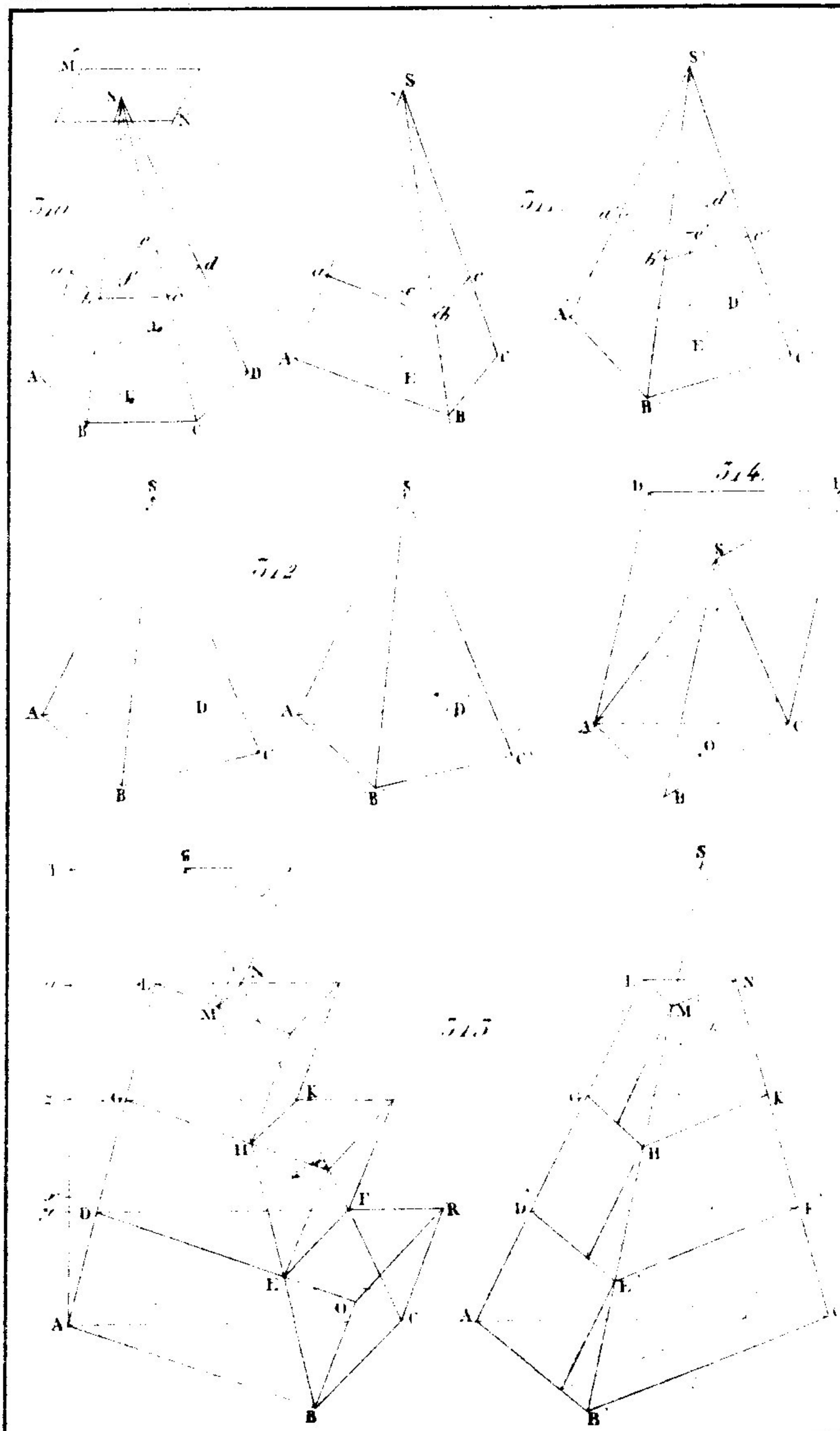
293.

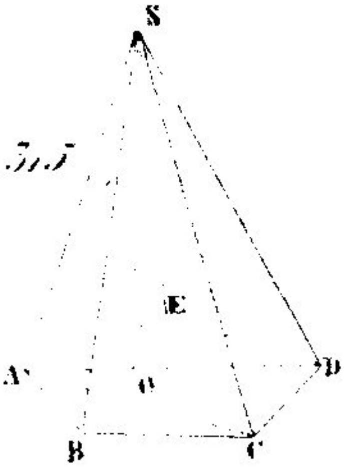


294

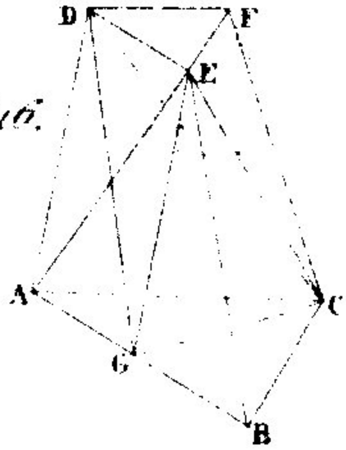

295
296
297
298
299
300
301
302
303


504
505
507
506
508

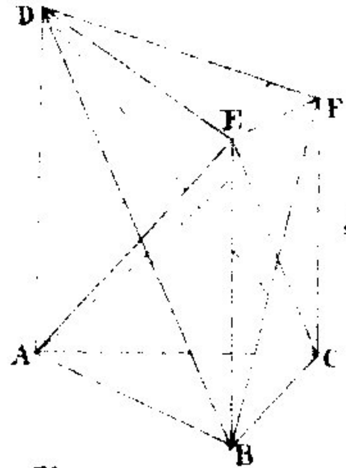

310
311
312
314
315



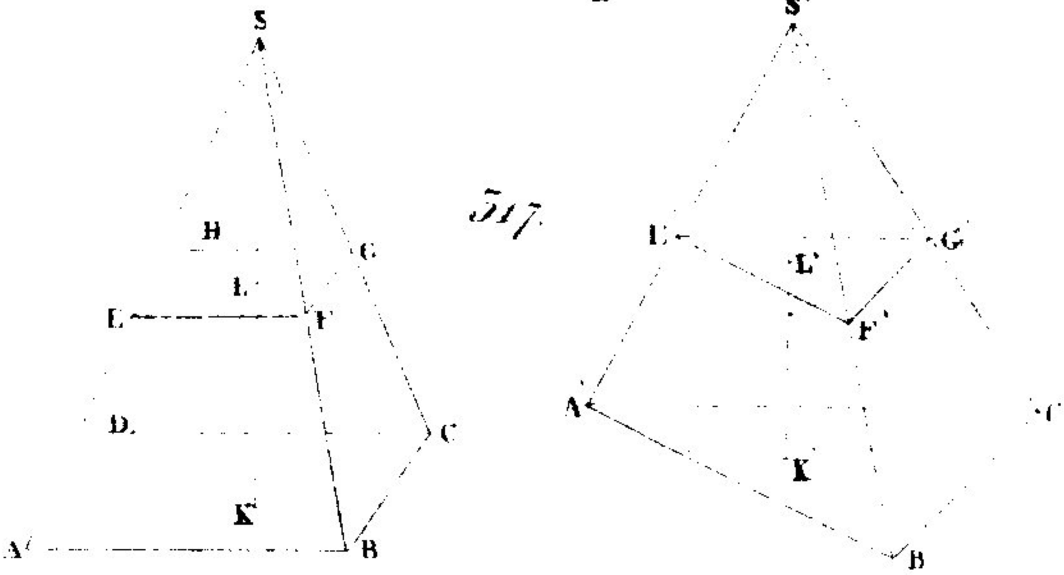
315.



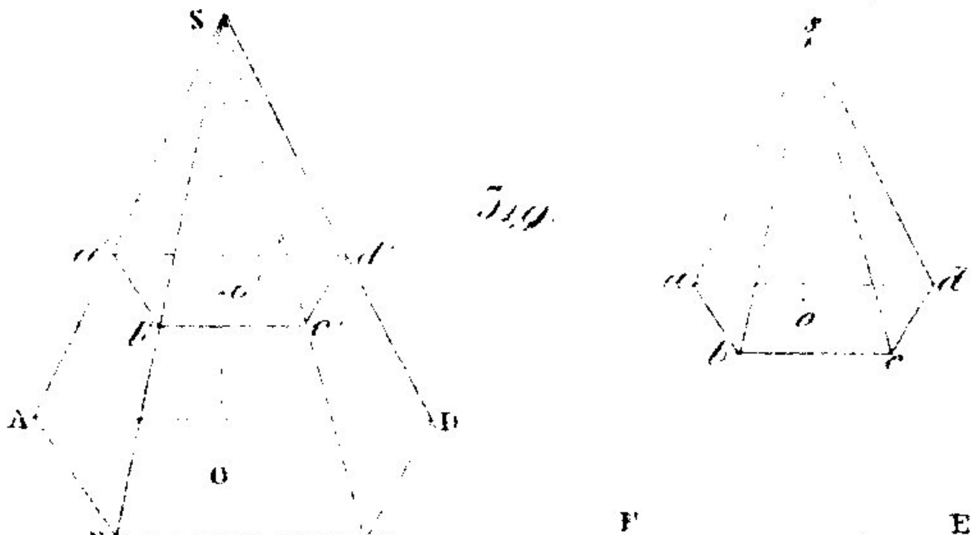
316.



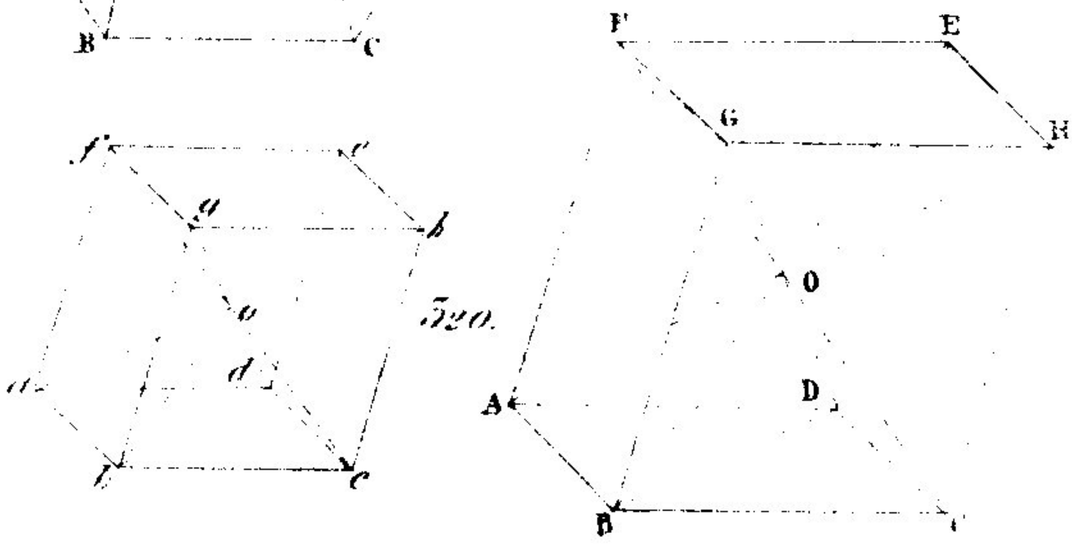
318.



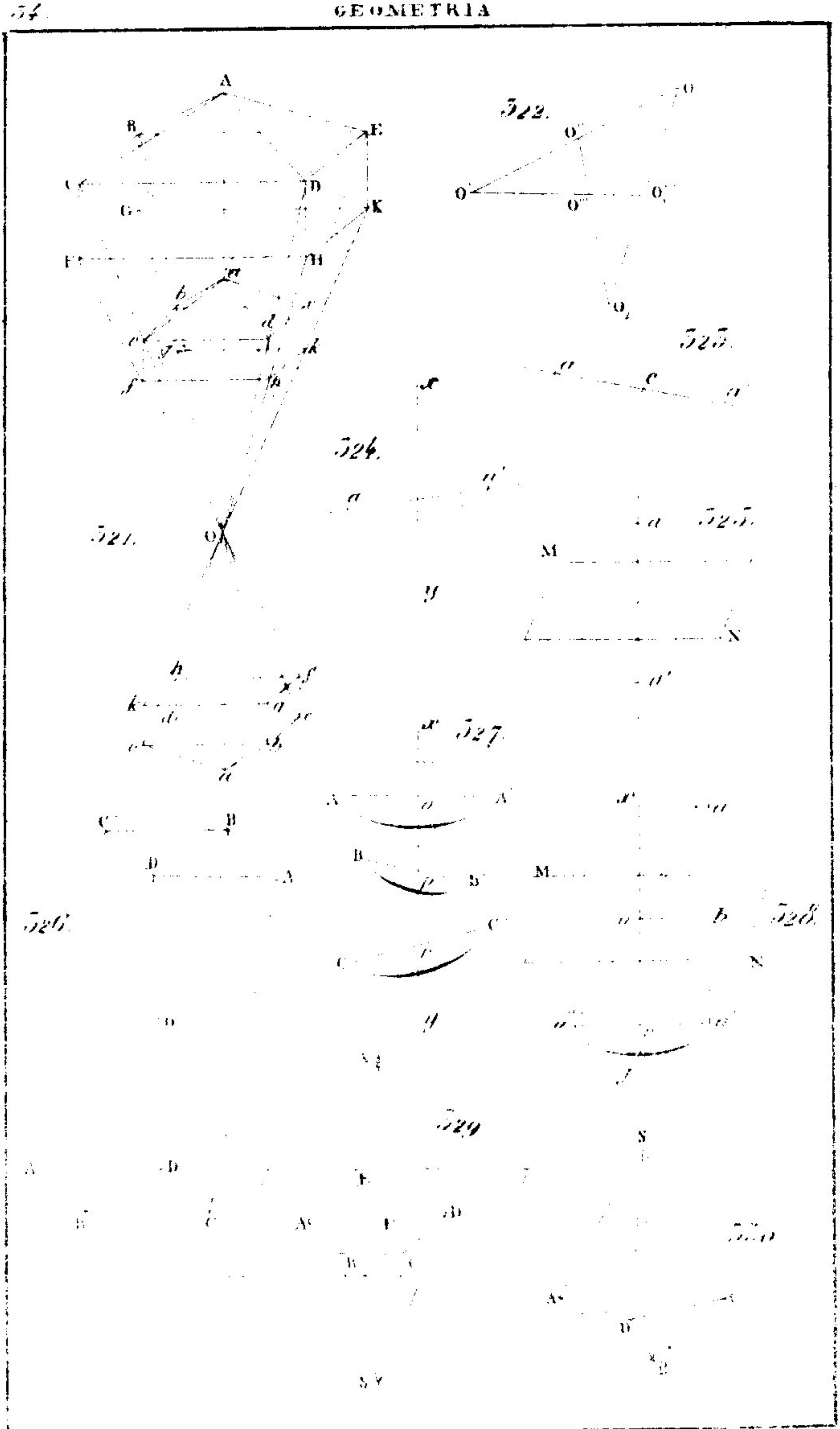
317.

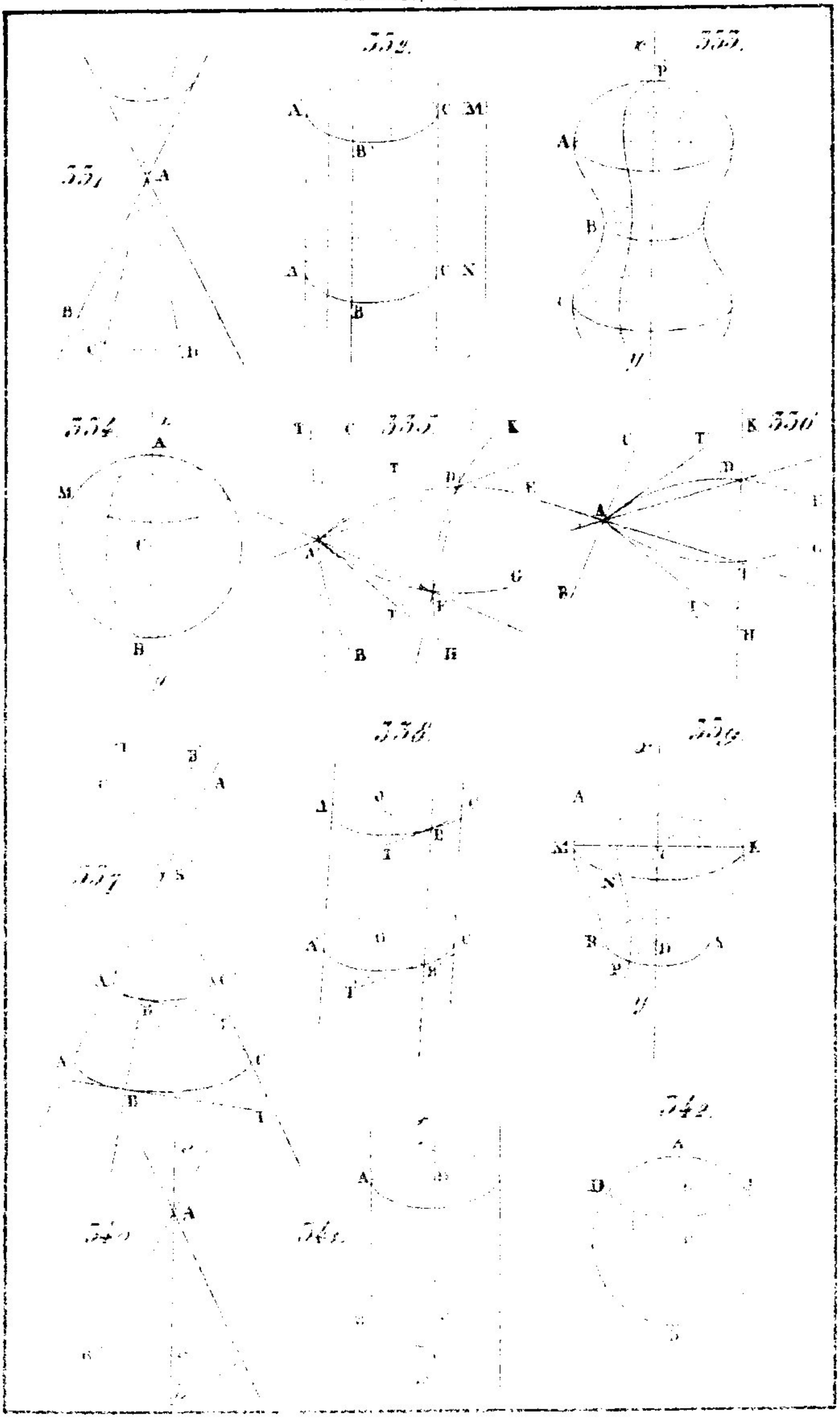


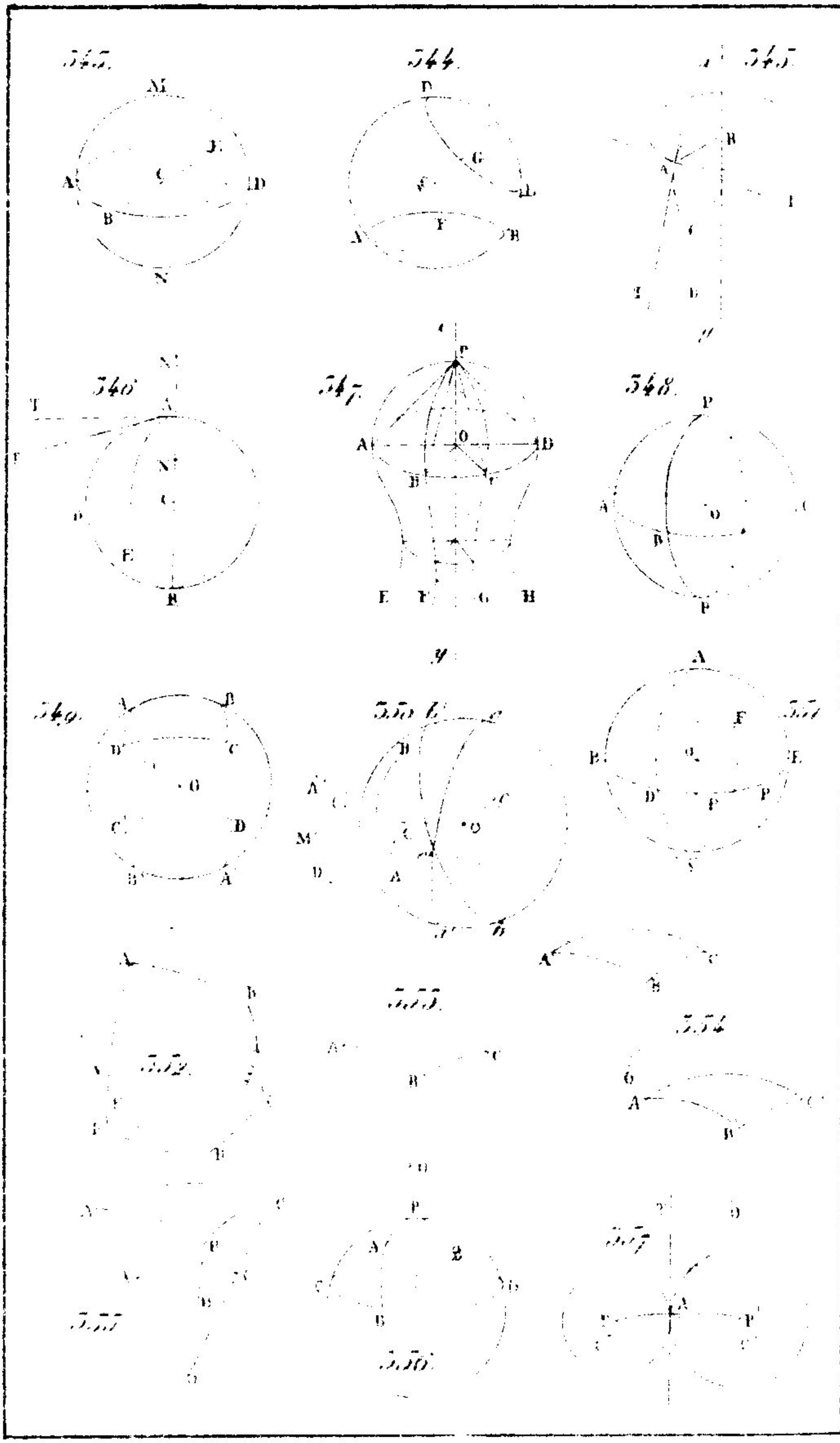
319.

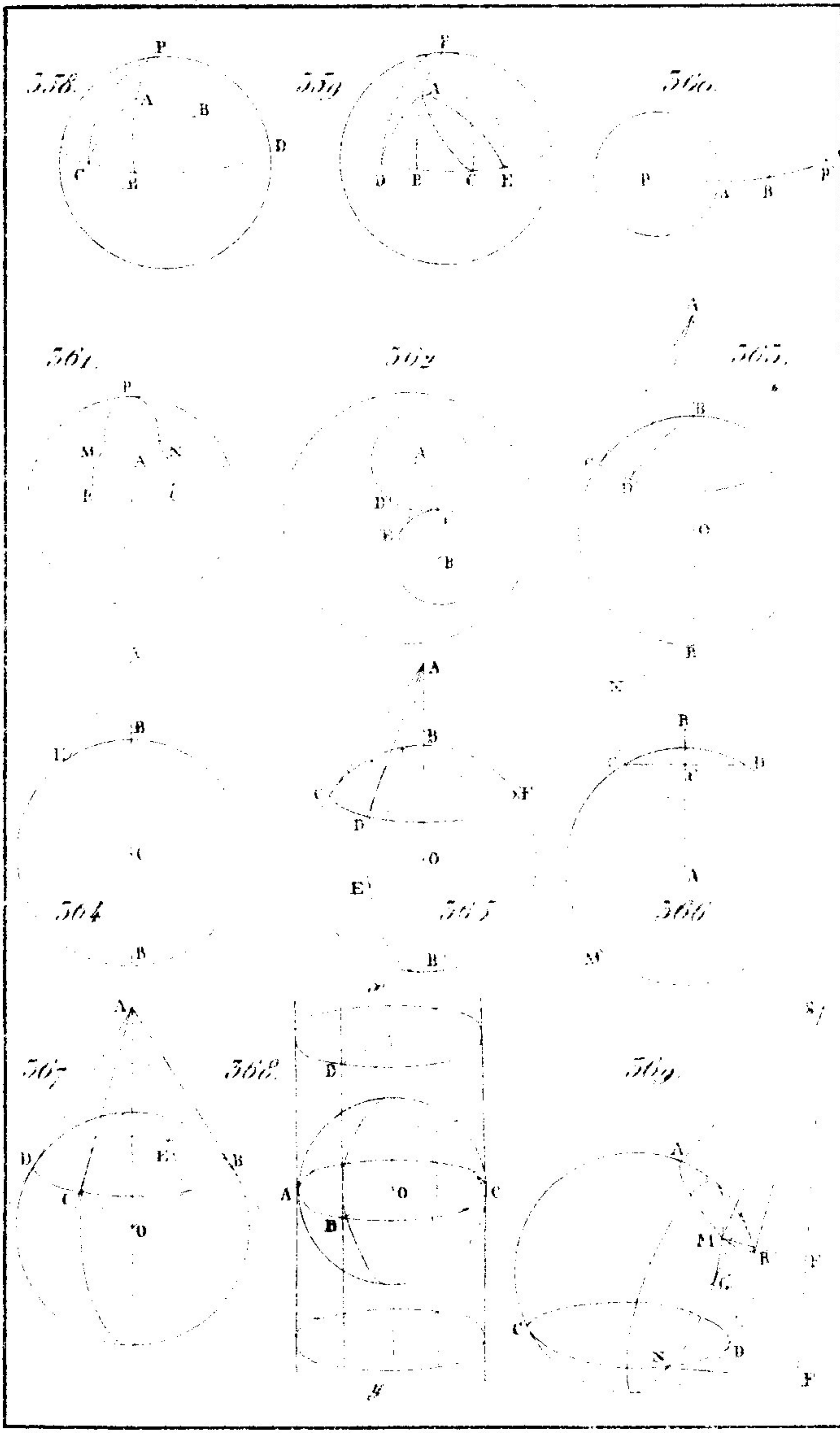


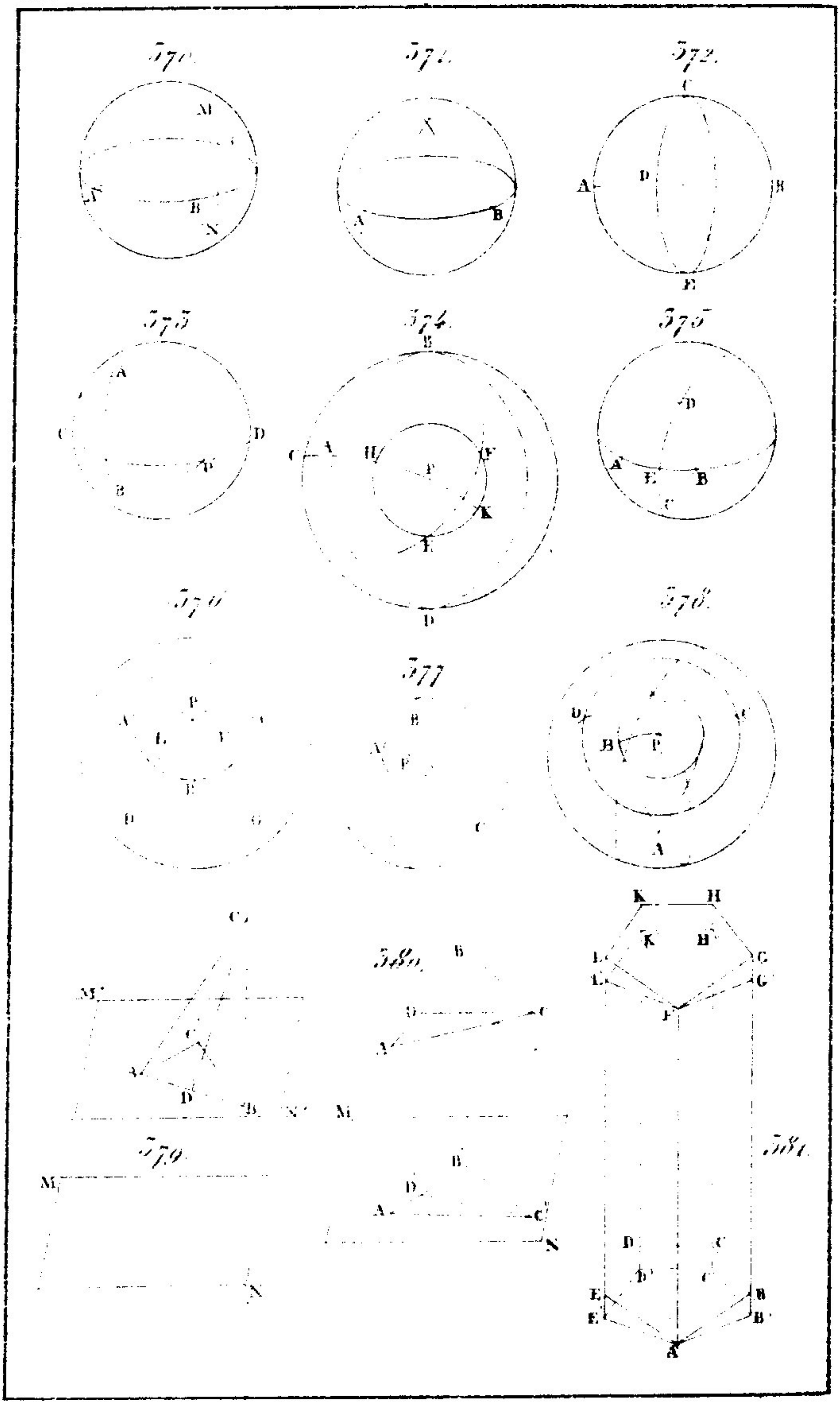
320.


322.
323.
324.
325.
321.
327.
328.
326.
329

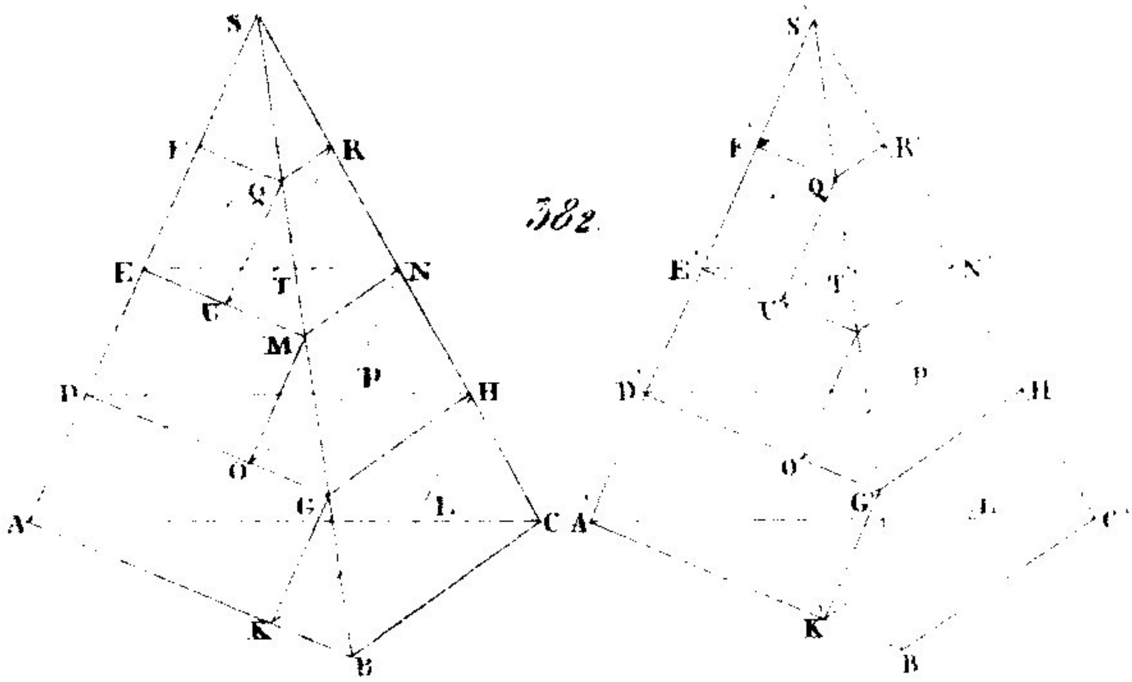

331.
332.
333.
334.
335.
336.
337.
338.
339.
340.
341.
342.


343.
344.
345.
346.
347.
348.
349.
350.
351.
352.
353.
354.
355.
356.
357.


558.
559.
560.
561.
562.
563.
564.
565.
566.
567.
568.
569.

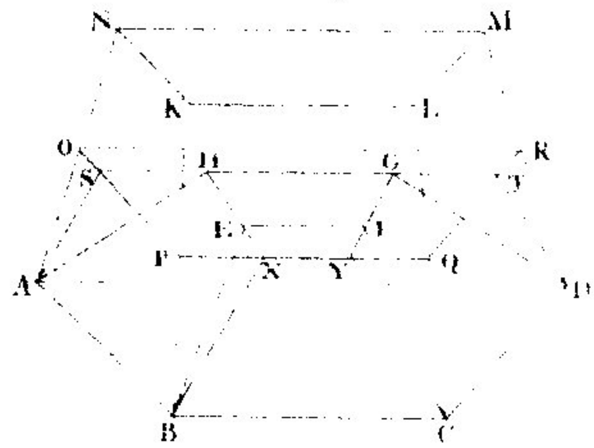

370.
371.
372.
373.
374.
375.
376.
377.
378.
379.
380.
381.

382.

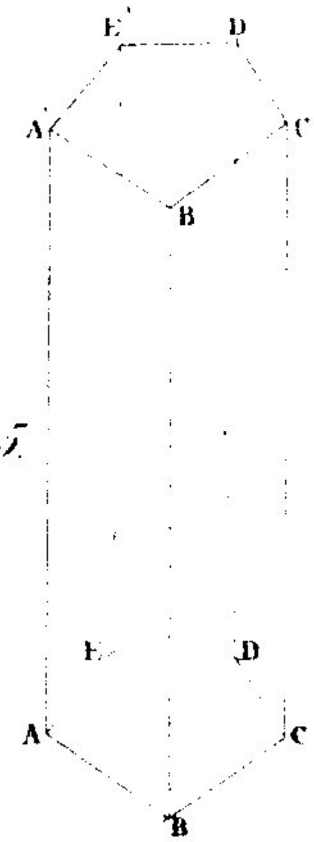


383.

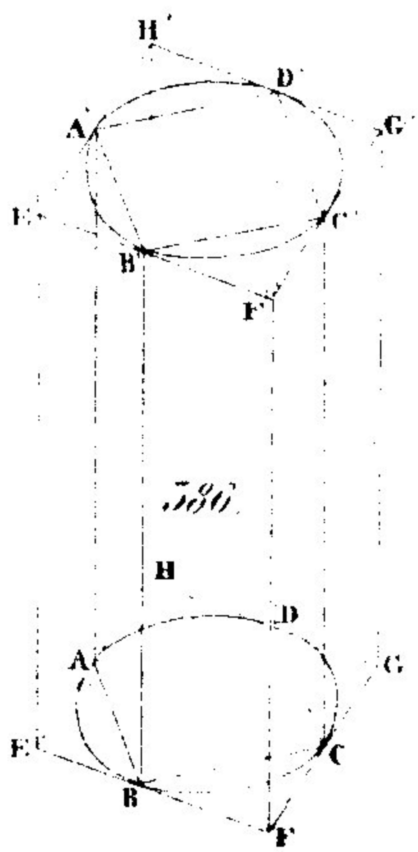
384.



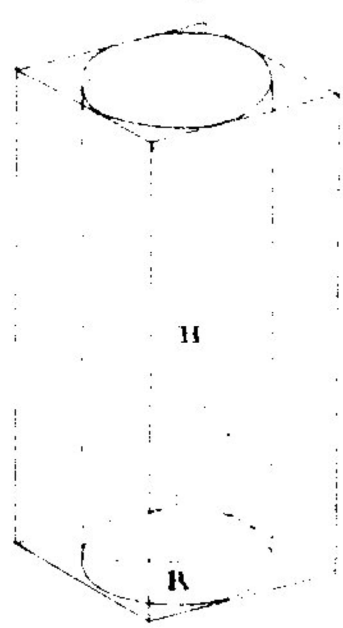
385.

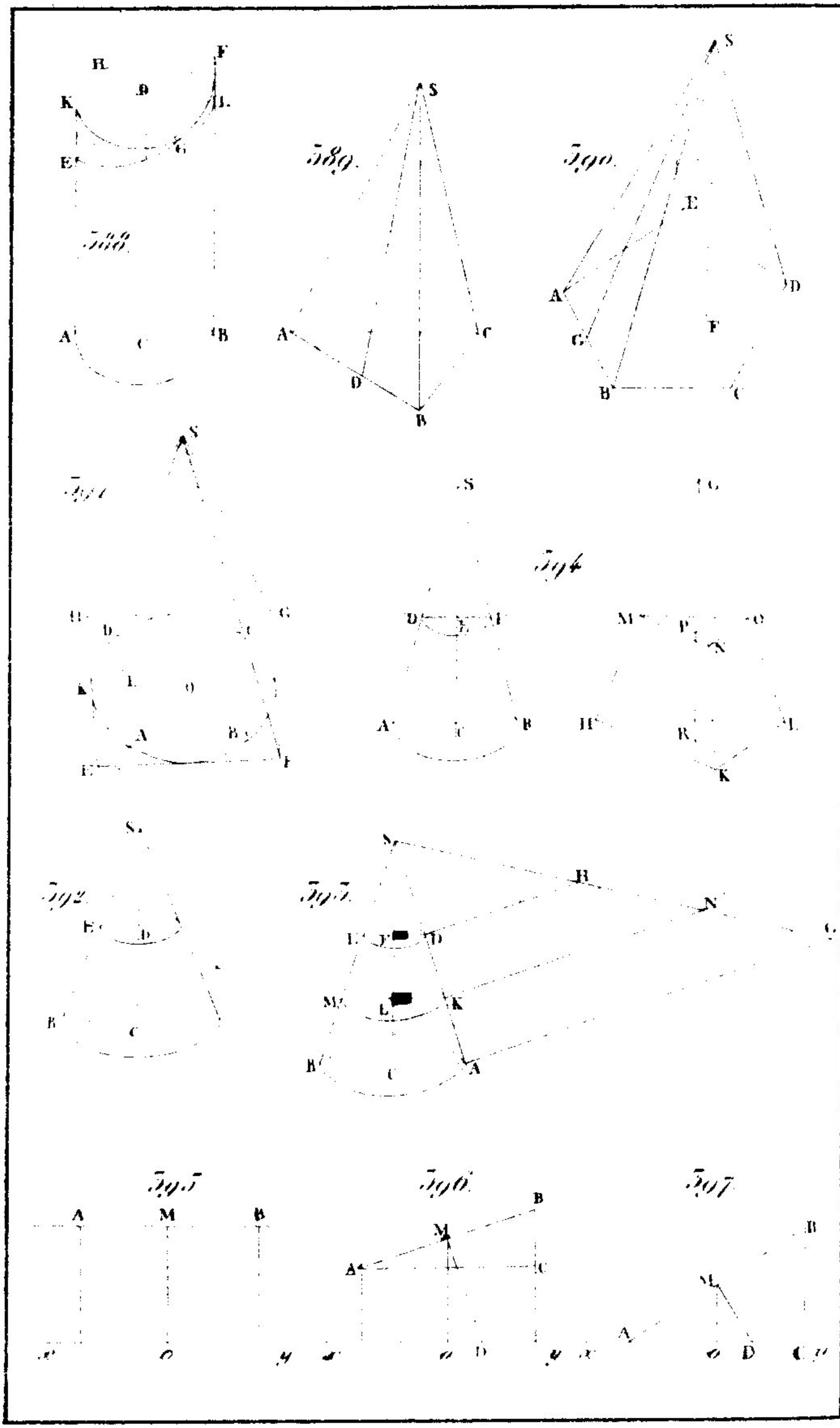


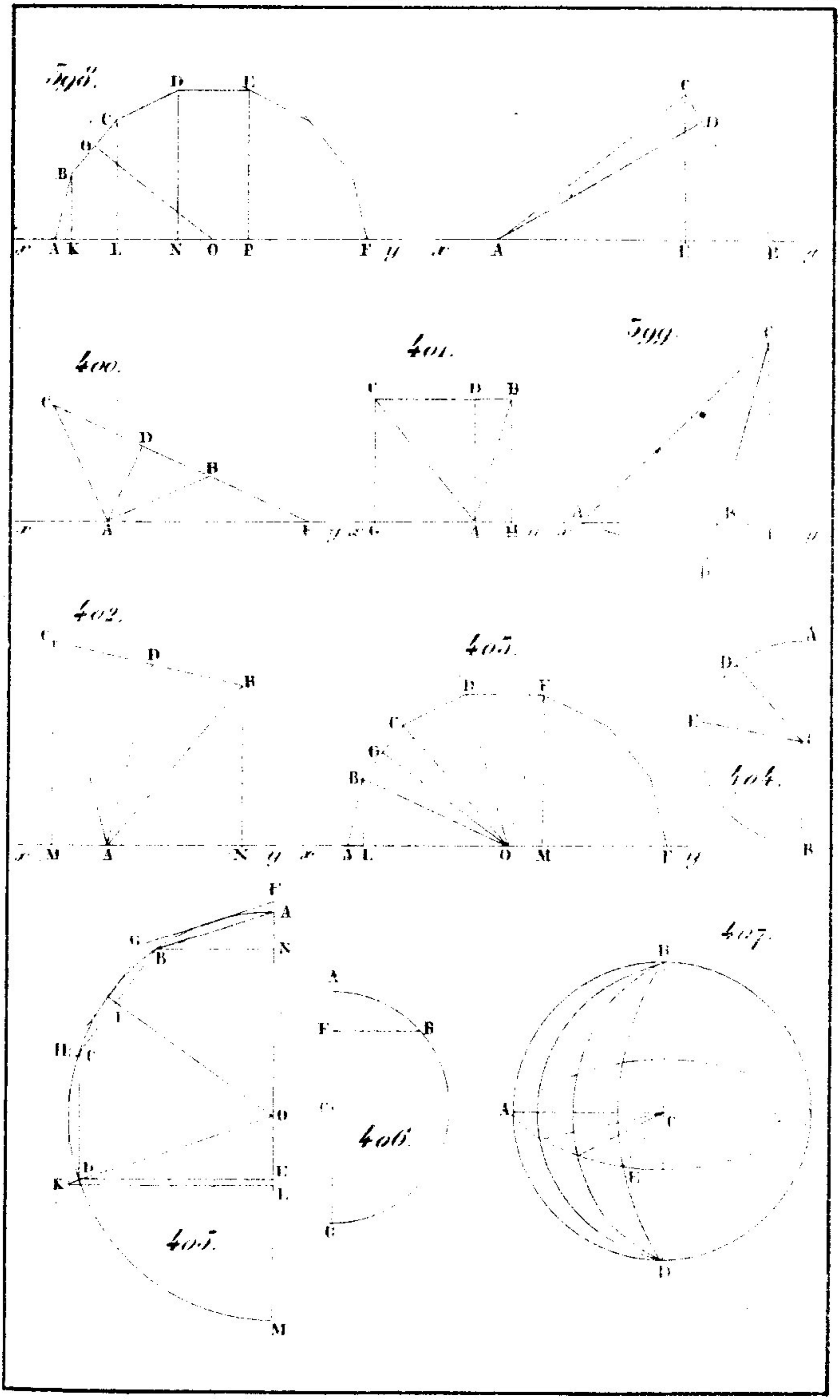
386.



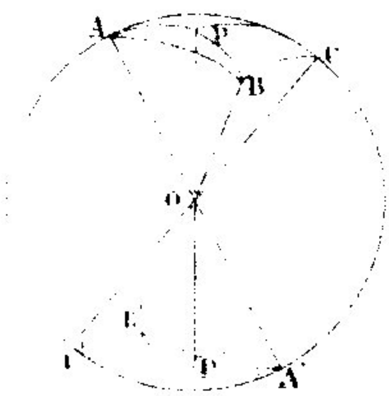
387.



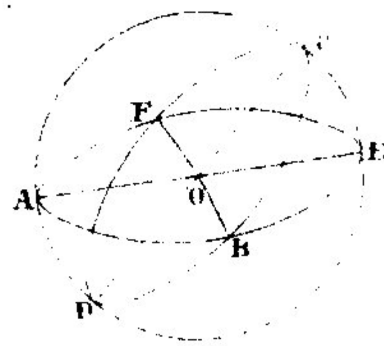

588.
589.
590.
591.
592.
593.
594.
595.
596.
597.


398.
399.
400.
401.
402.
403.
404.
405.
406.
407.

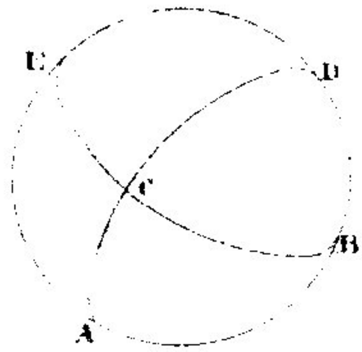
408.



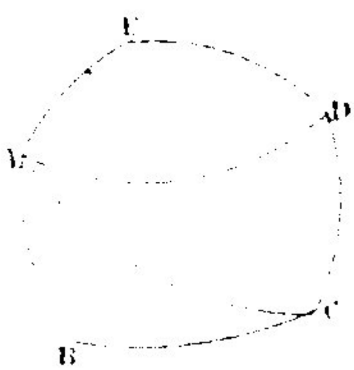
409.



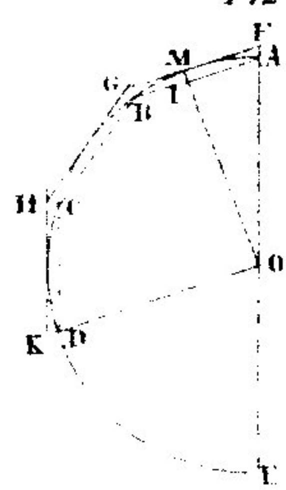
410.



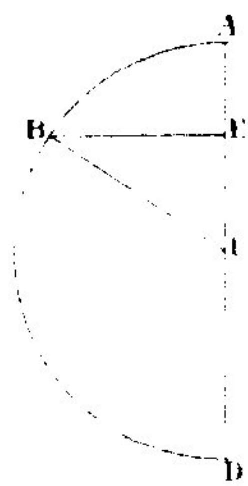
411.



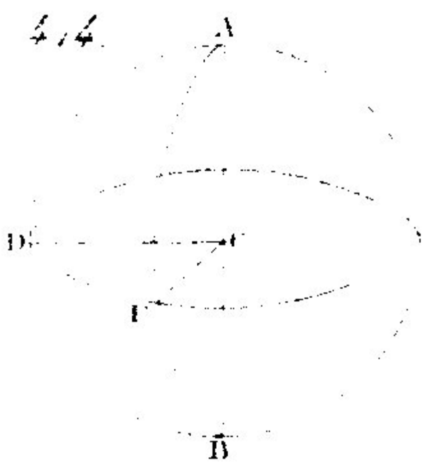
412.



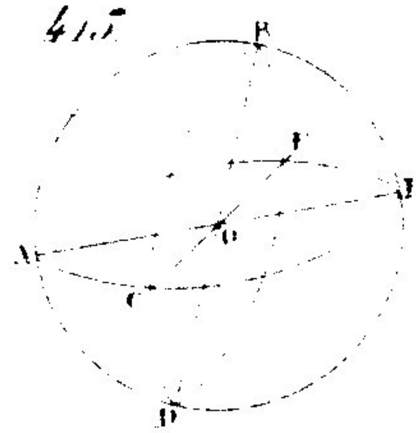
413.



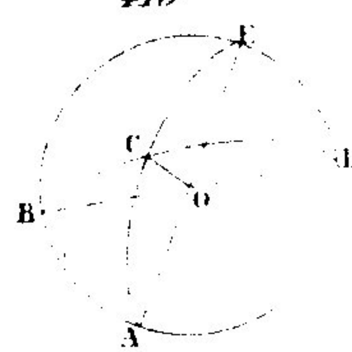
414.



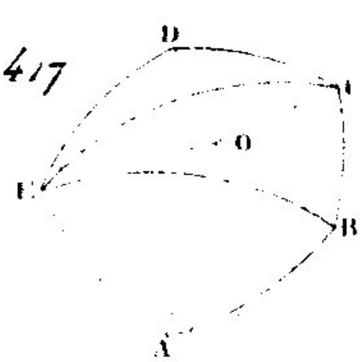
415.

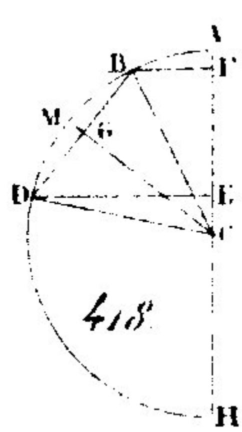


416.

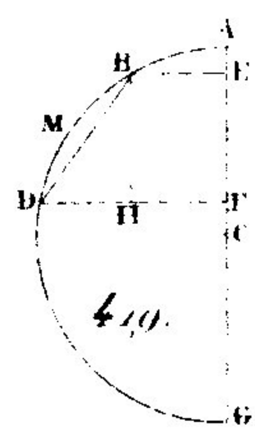


417



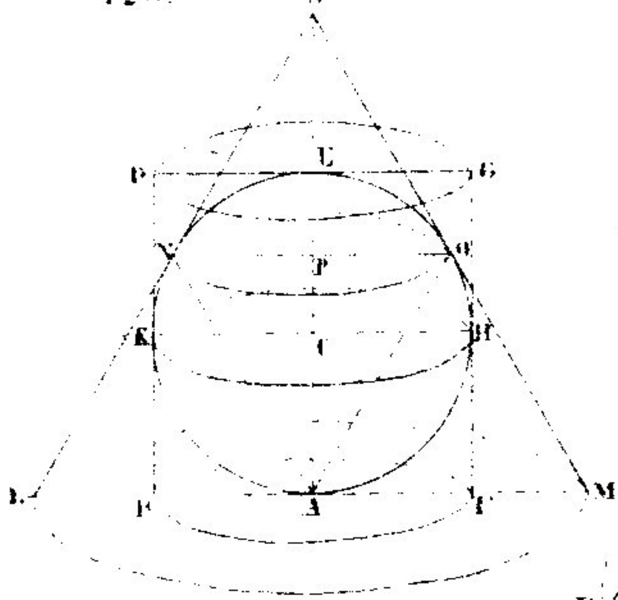


418.

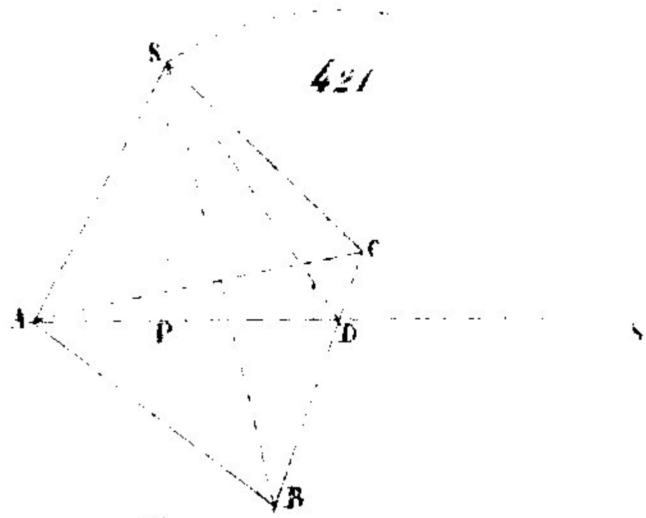


419.

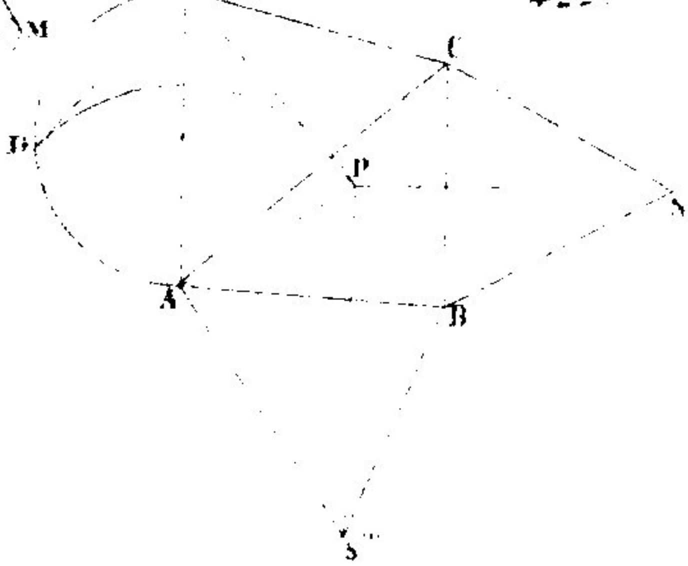
420.



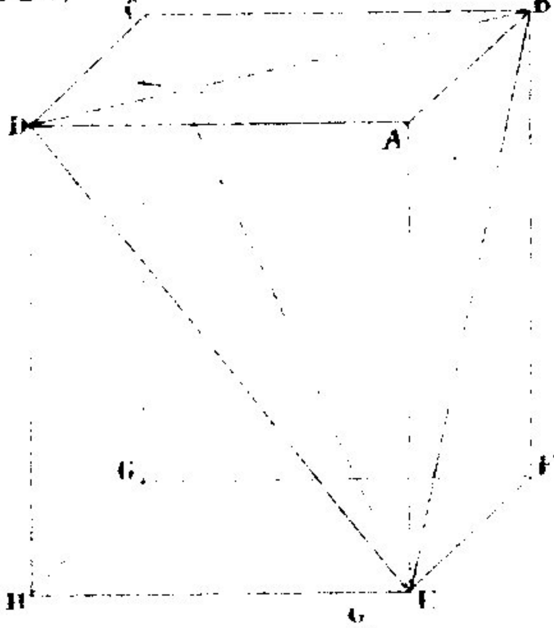
421



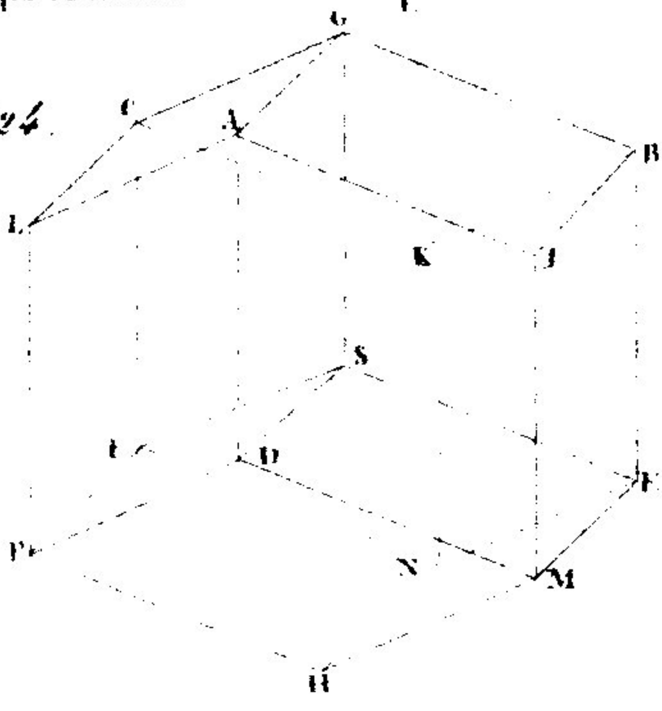
422.

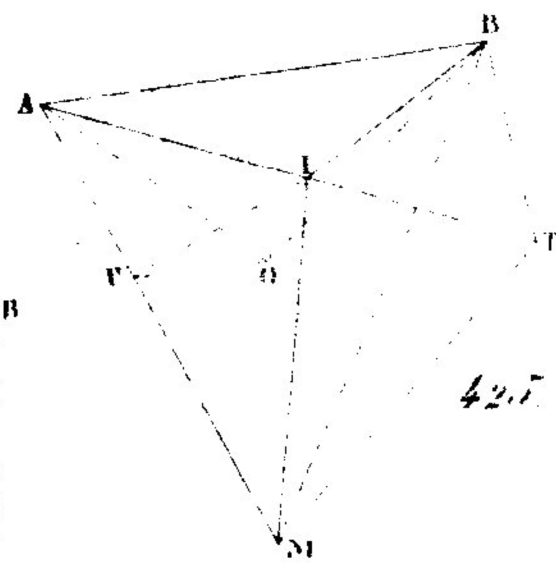


423.



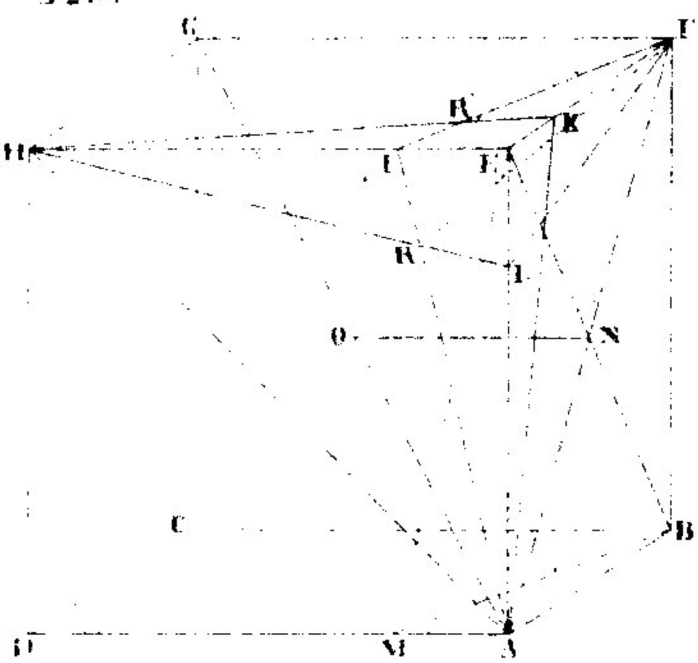
424.



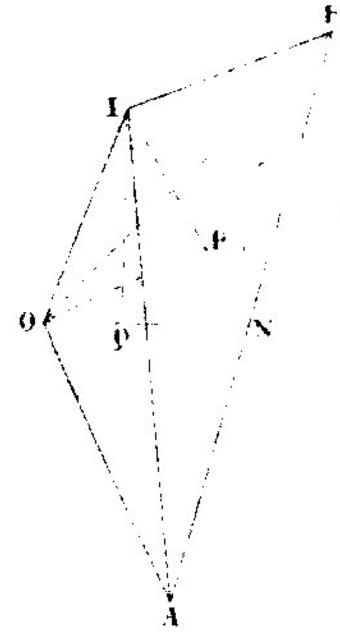


425.

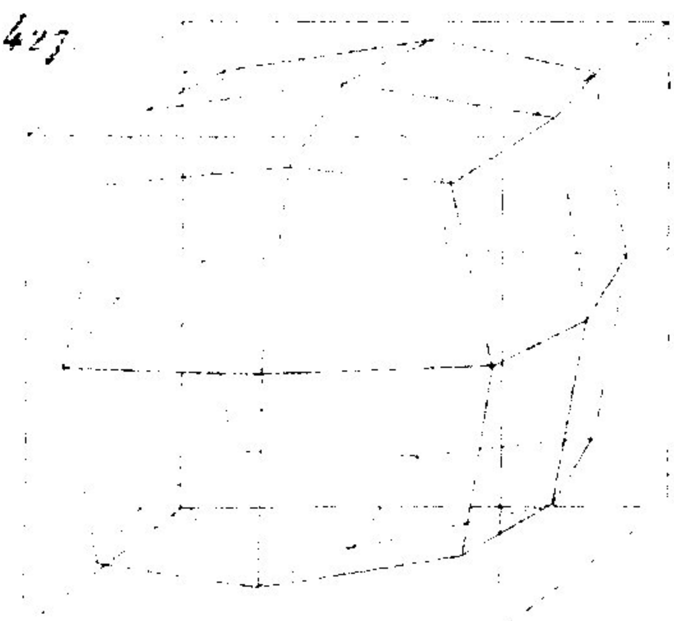
426.



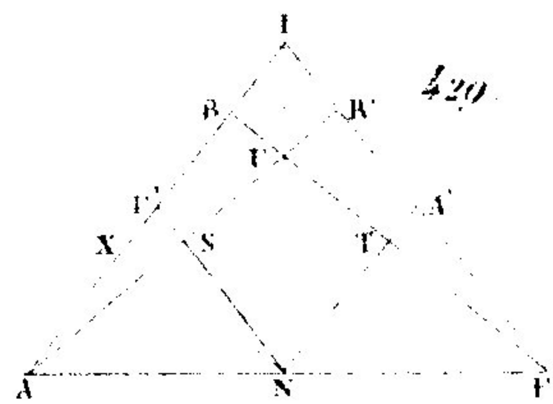
428.



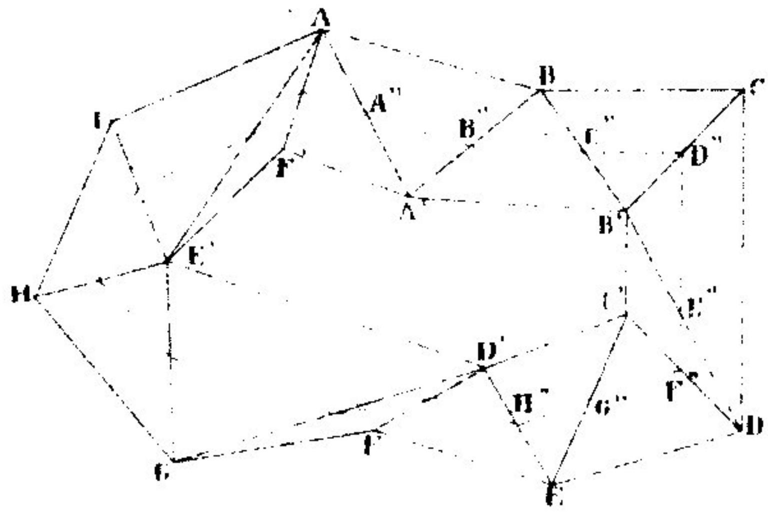
427.



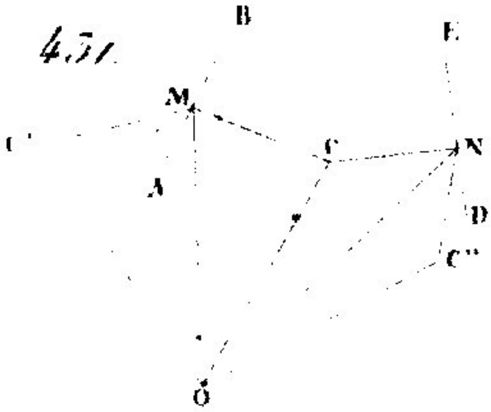
429.



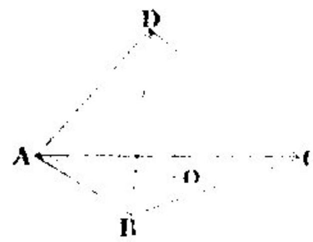
430.



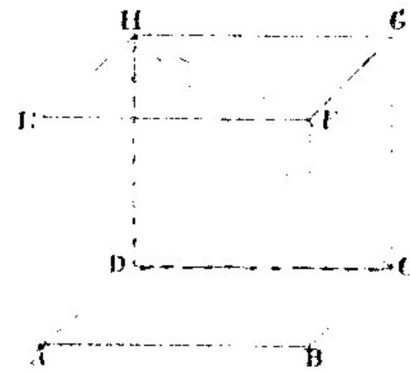
431.



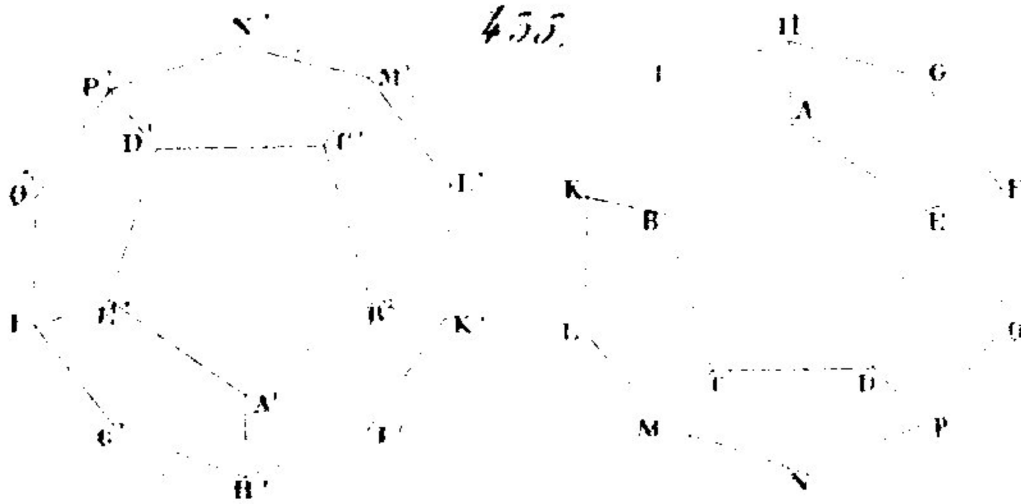
432.



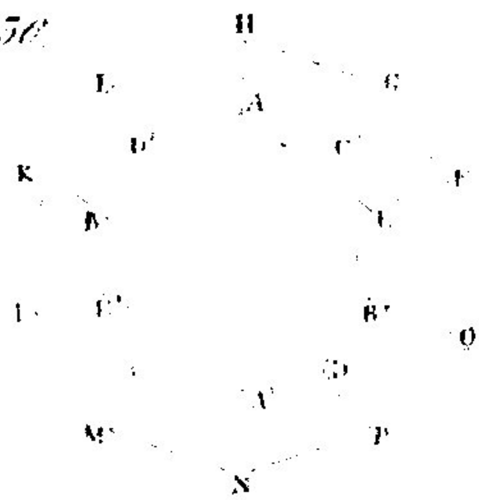
433.



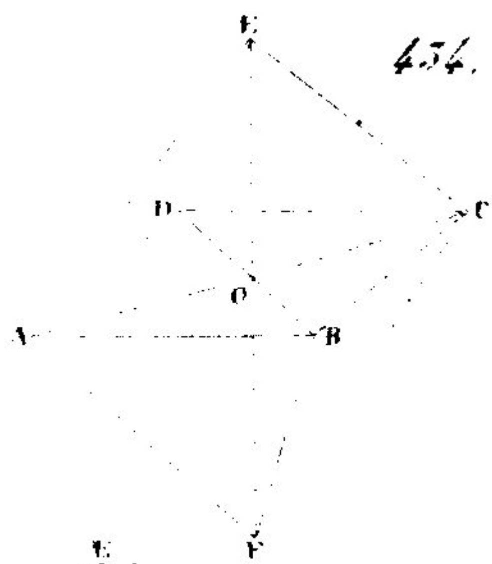
435.



436.

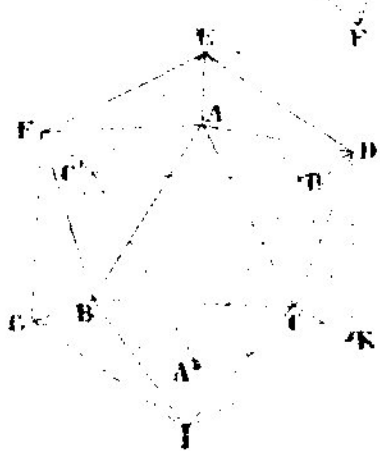


434.

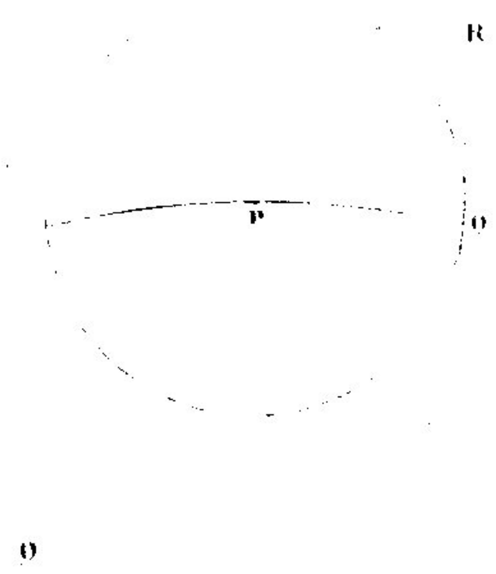


437.

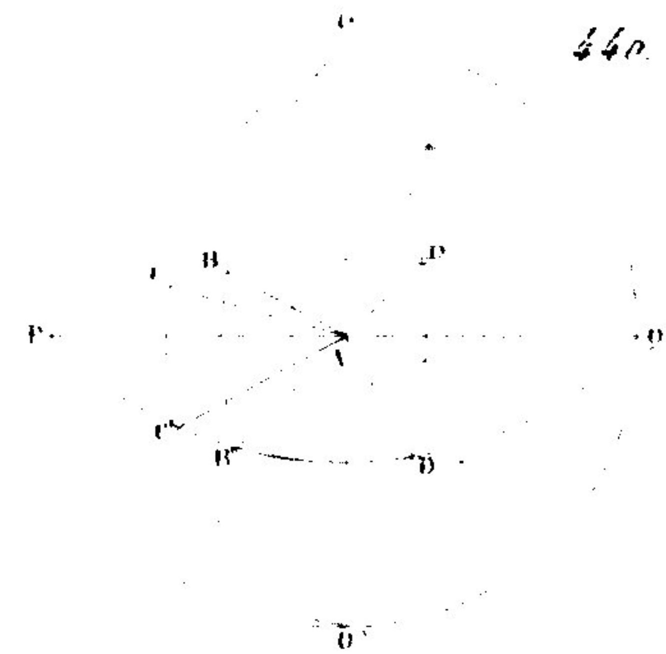
438.



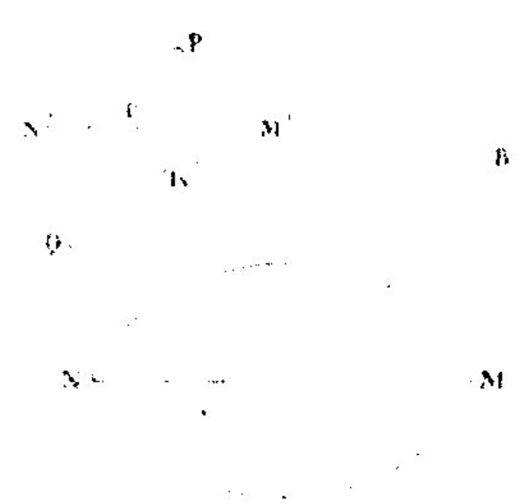
439.



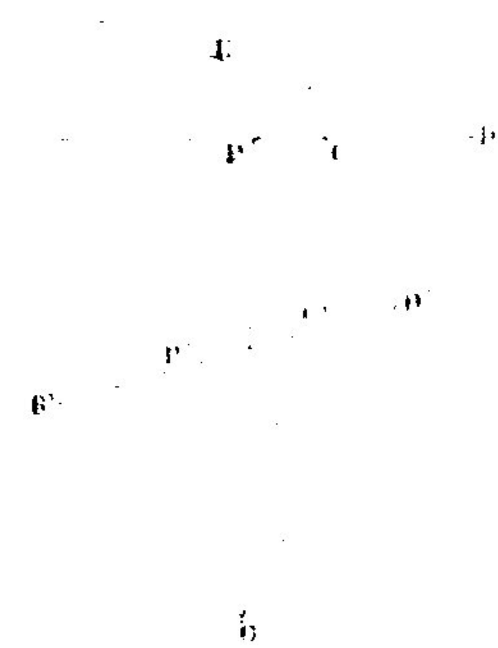
440.

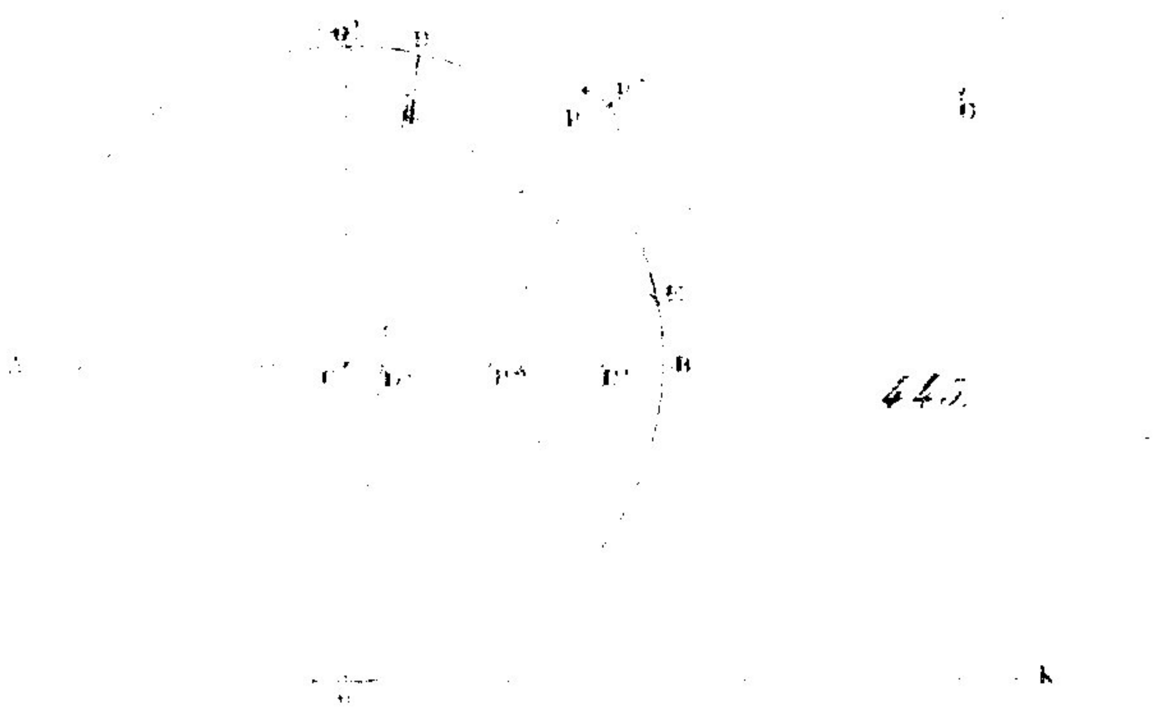


441.



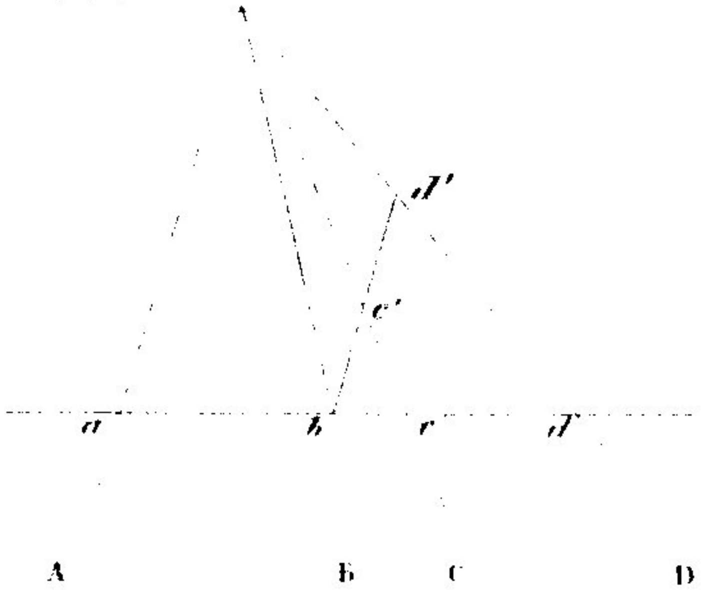
442.



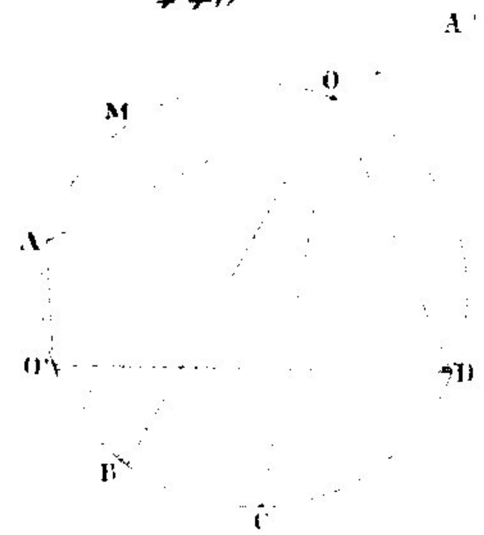


443.

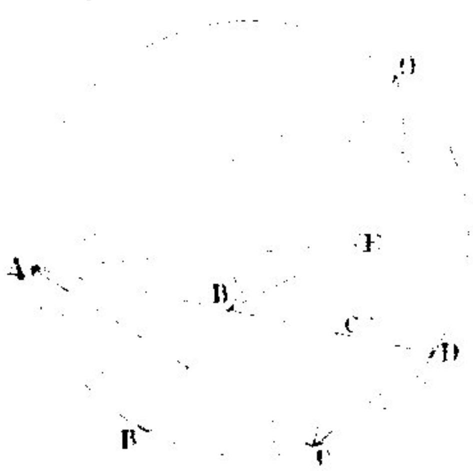
444.



446



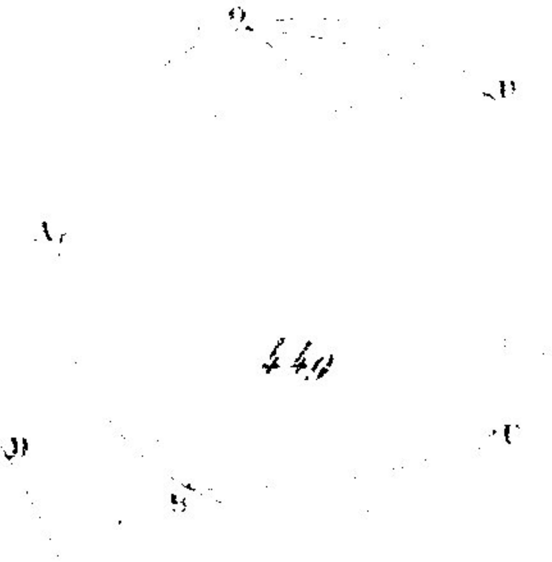
447.

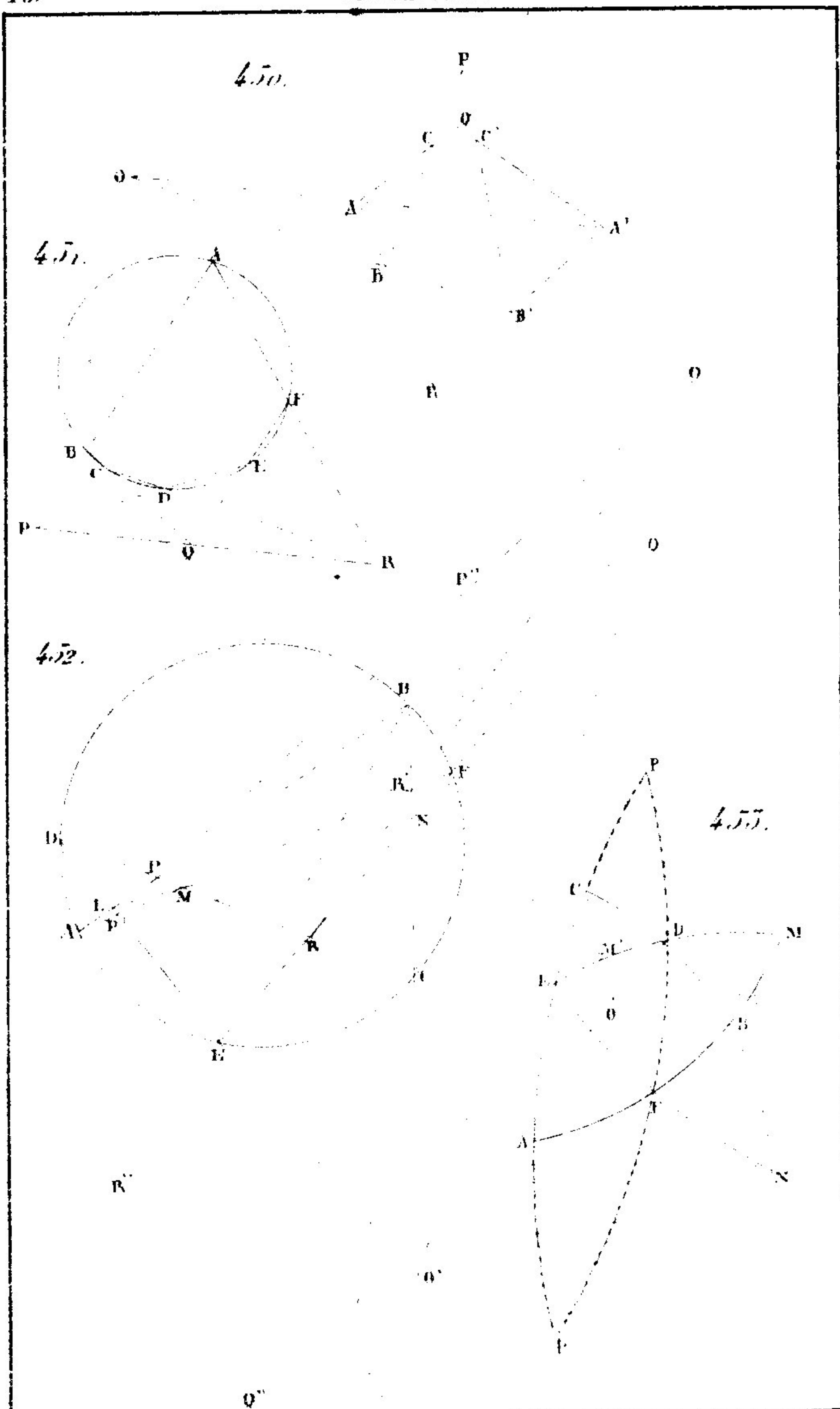


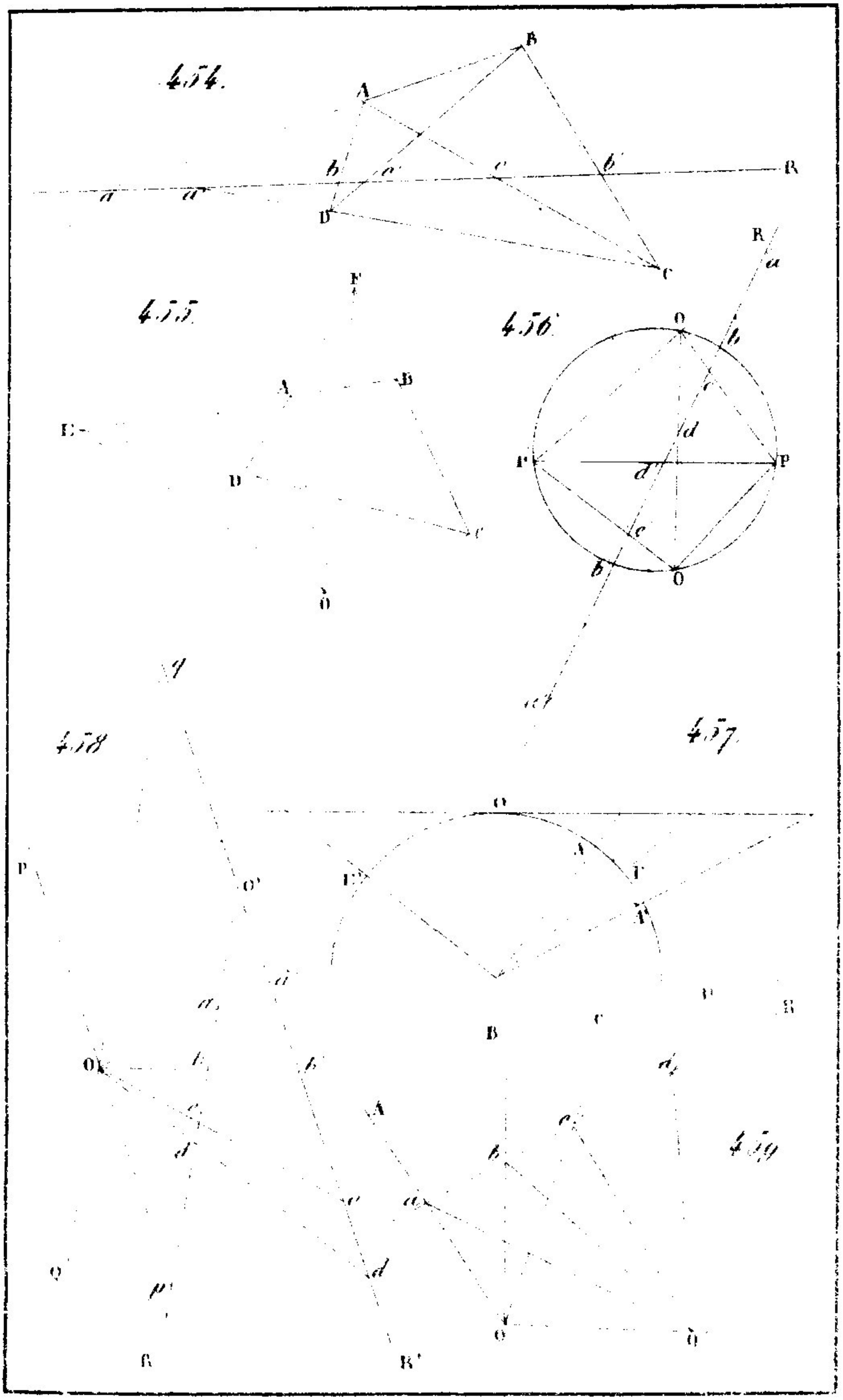
445.

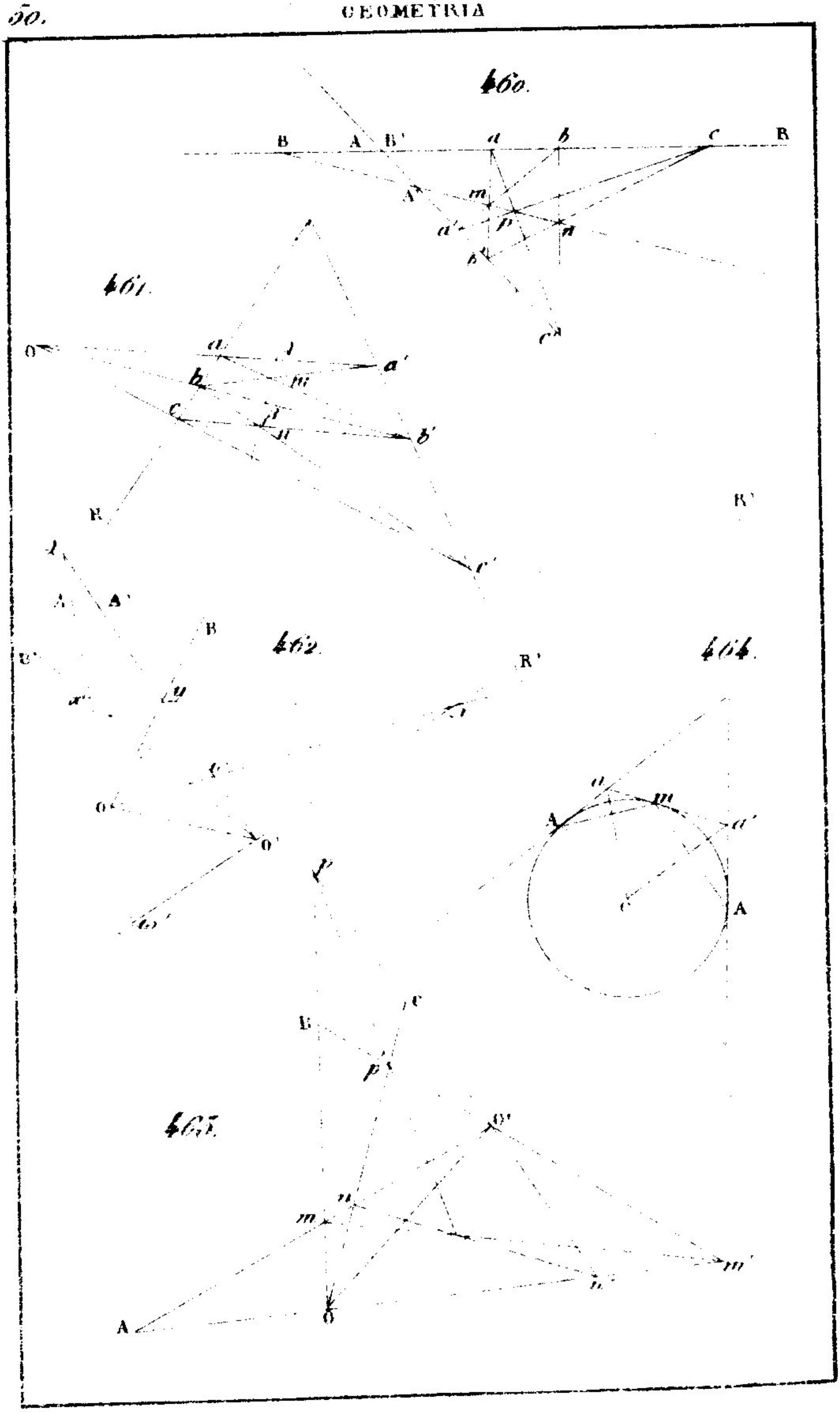
448

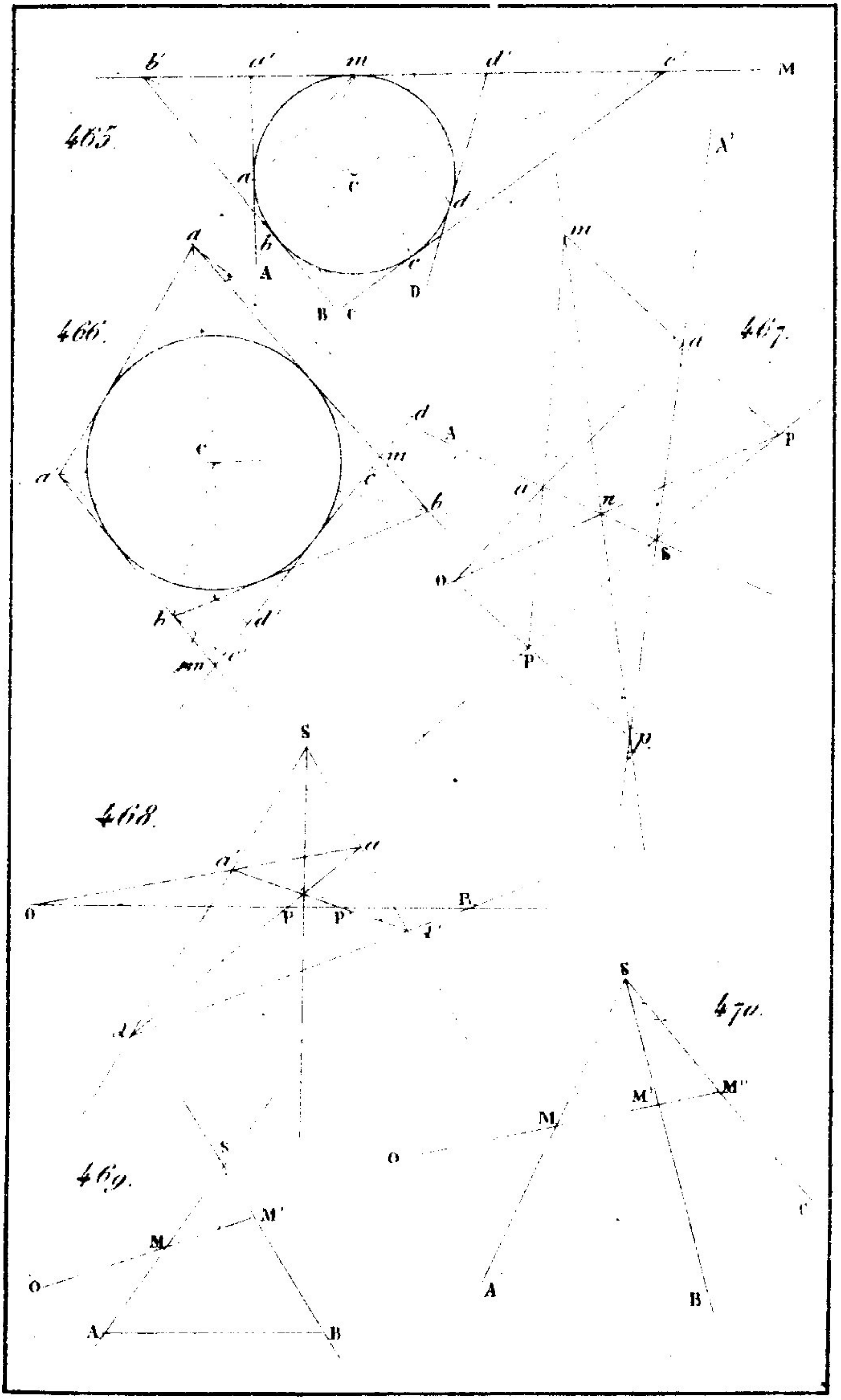
449



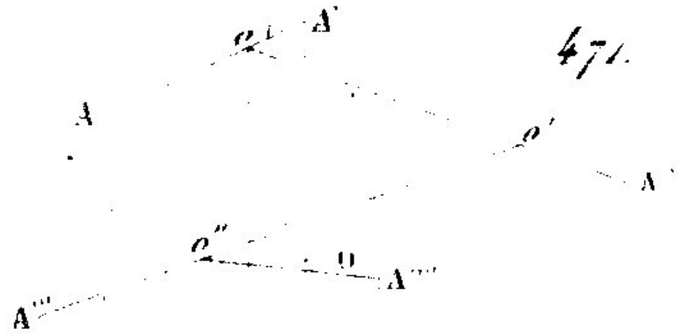

450.
451.
452.
453.


454.
A
B
C
D
R
455.
456.
O
P
457.
458.
459.

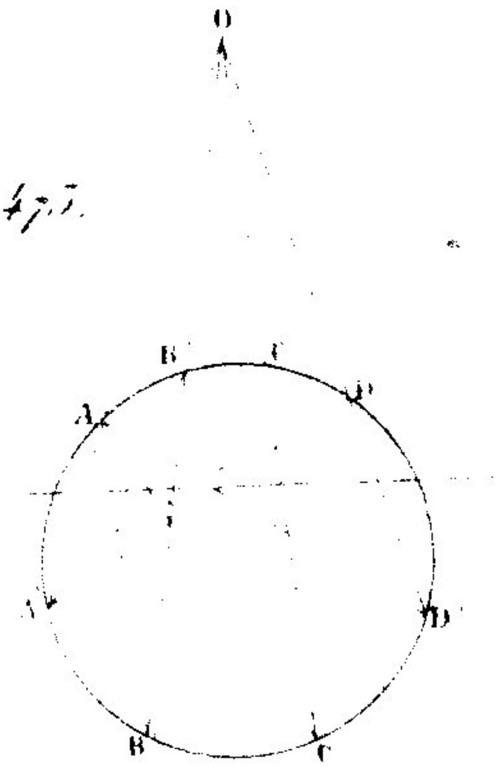

460.
461.
462.
464.
465.


465.
466.
467.
468.
469.
470.

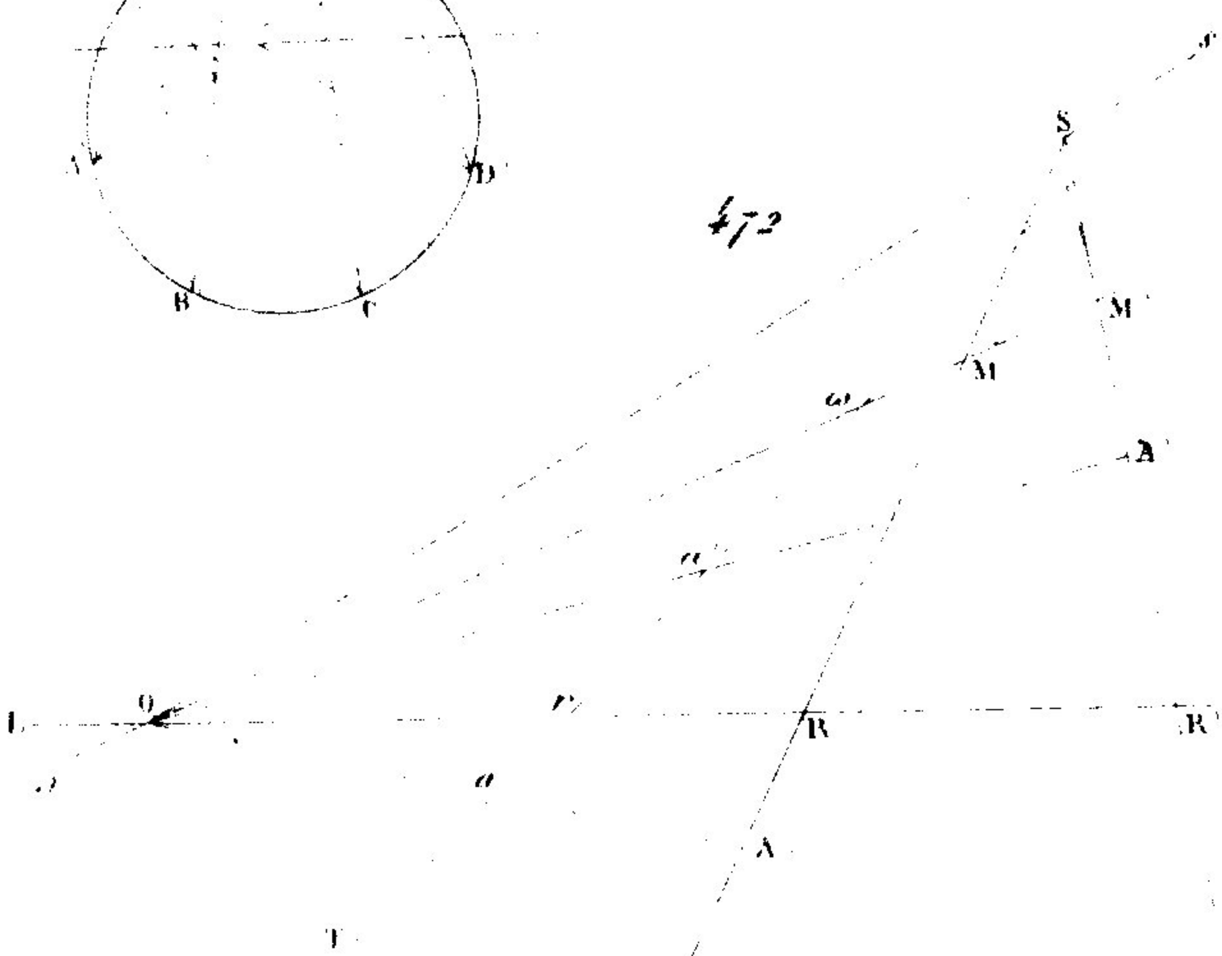
471.



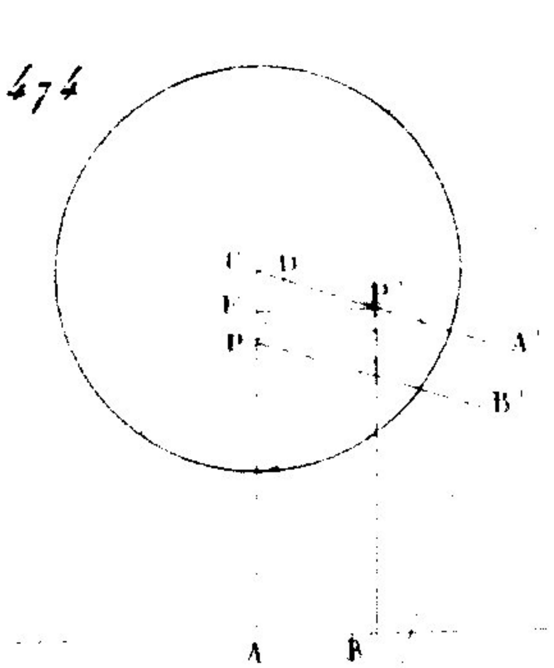
473.



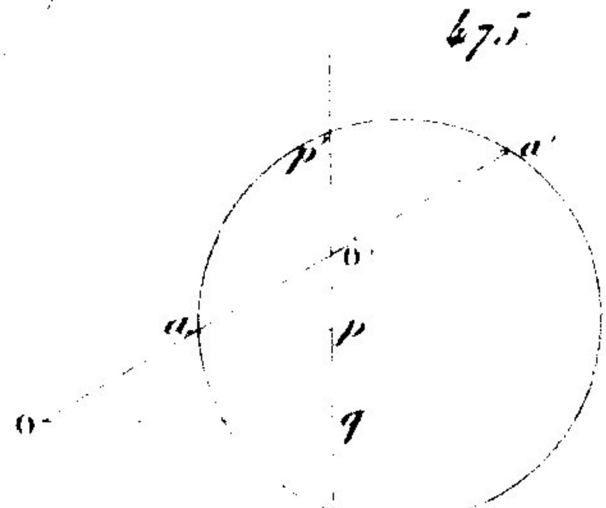
472



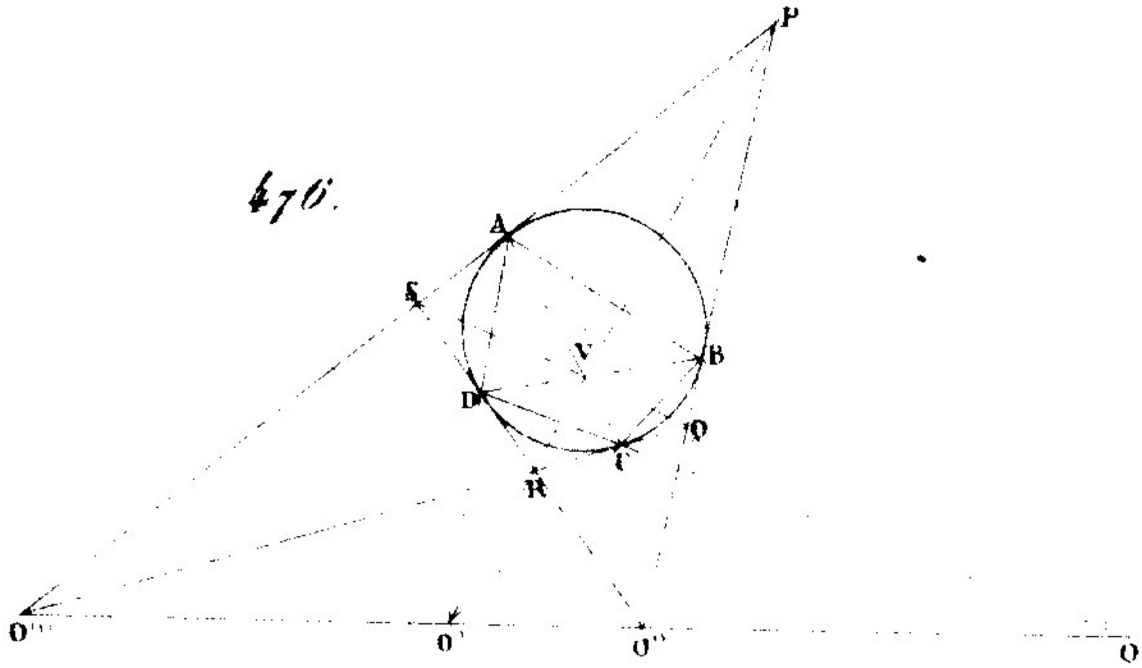
474



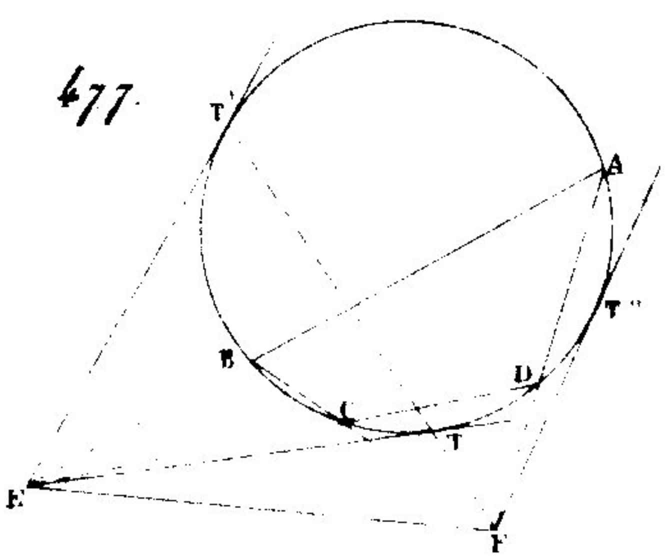
475



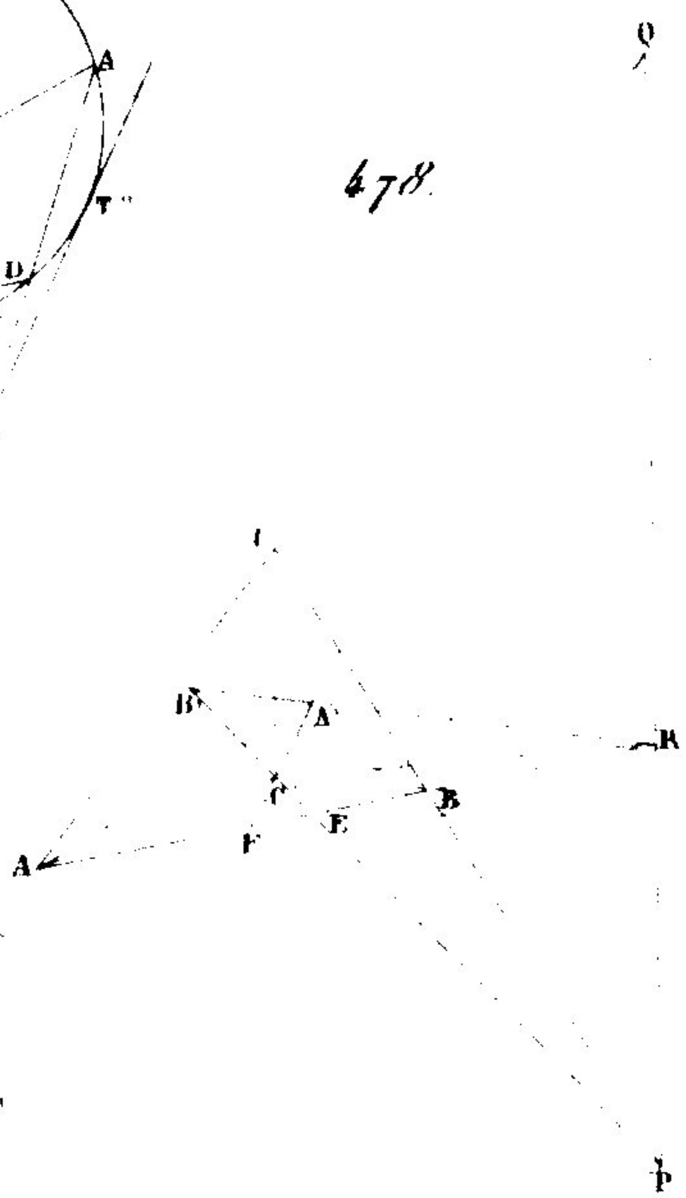
476.



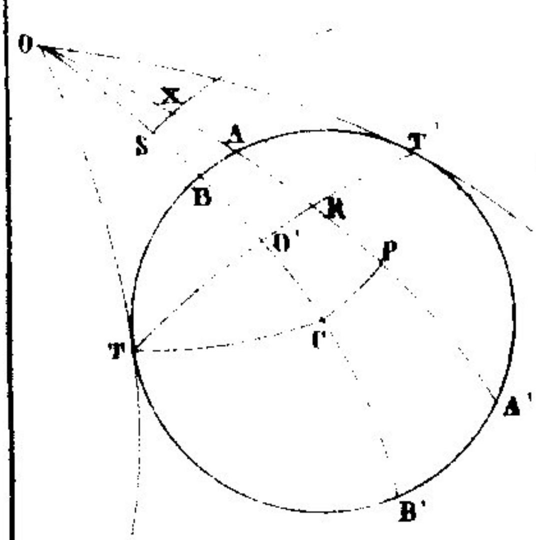
477.

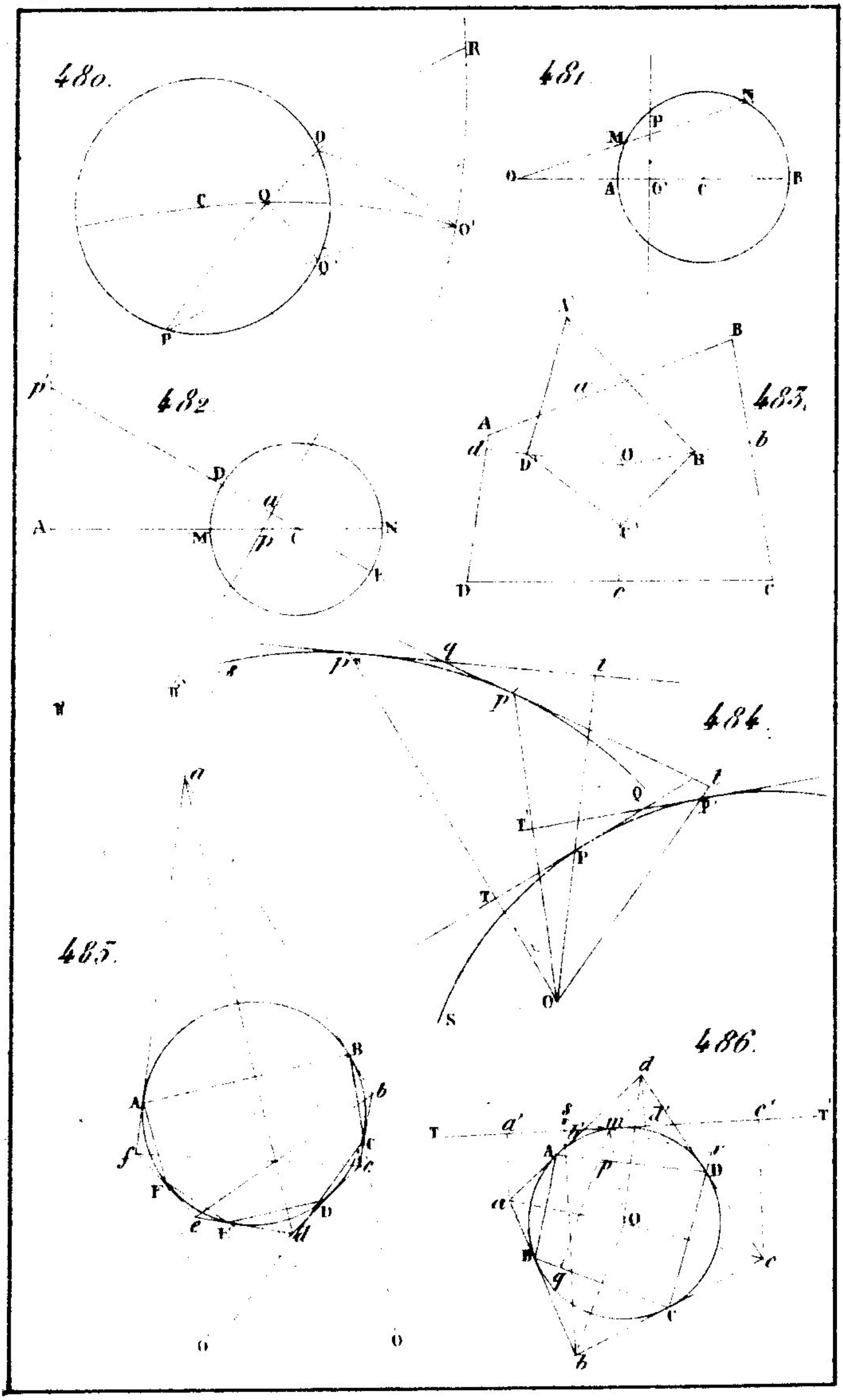


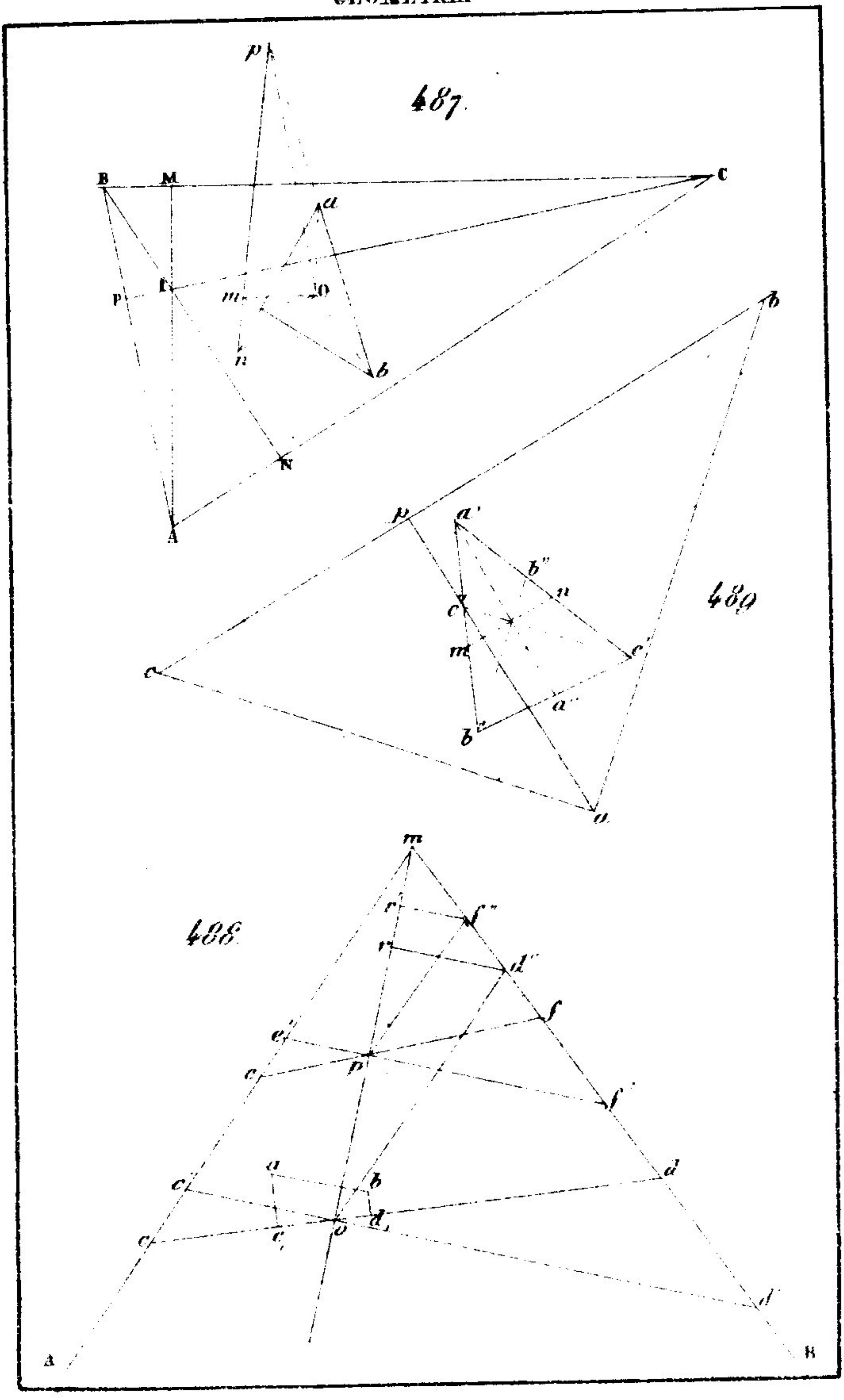
478.

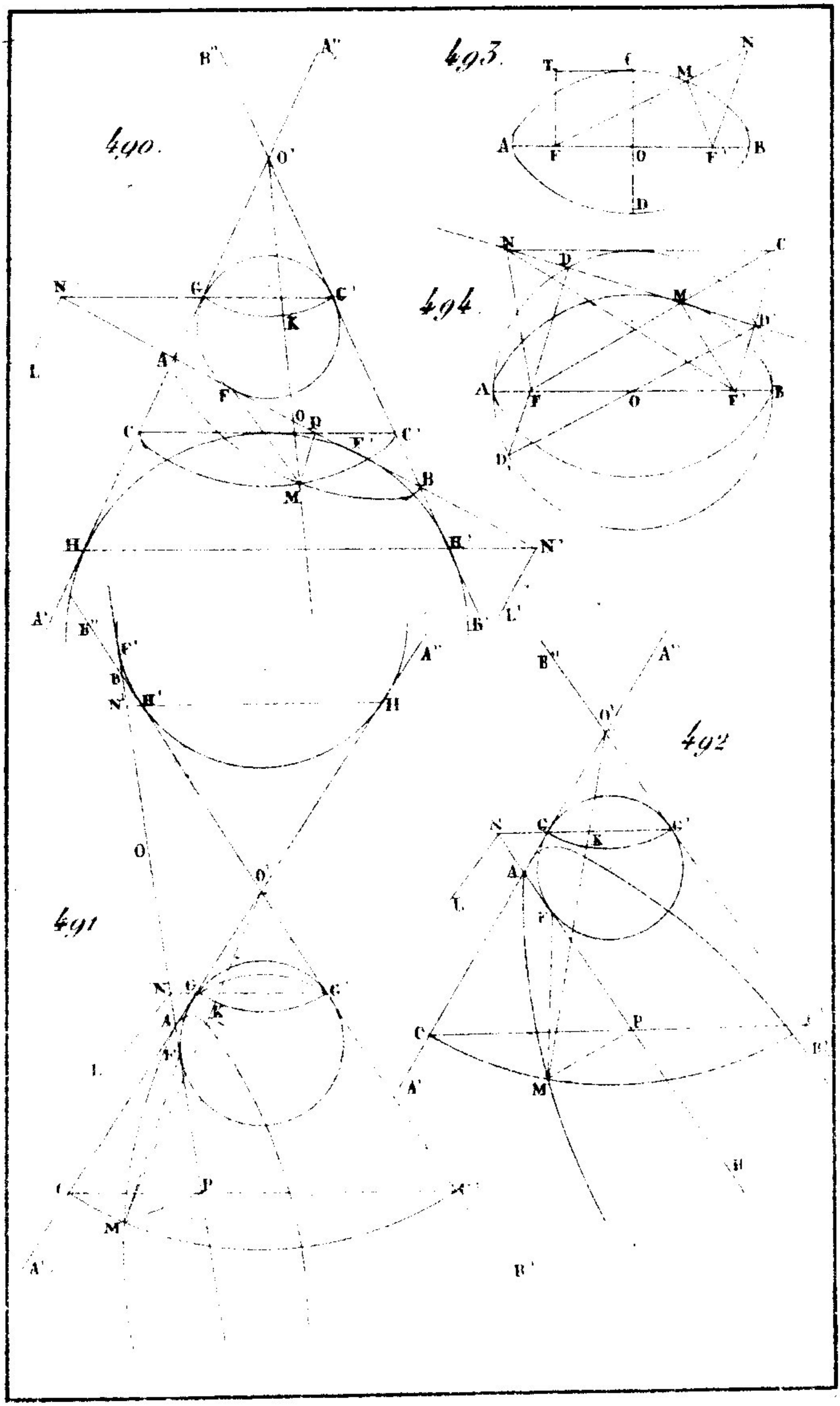


479.

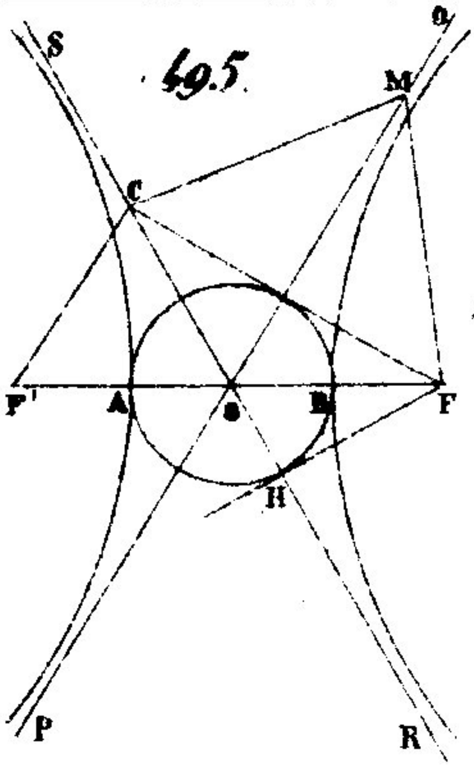



480.
481.
482.
483.
484.
485.
486.

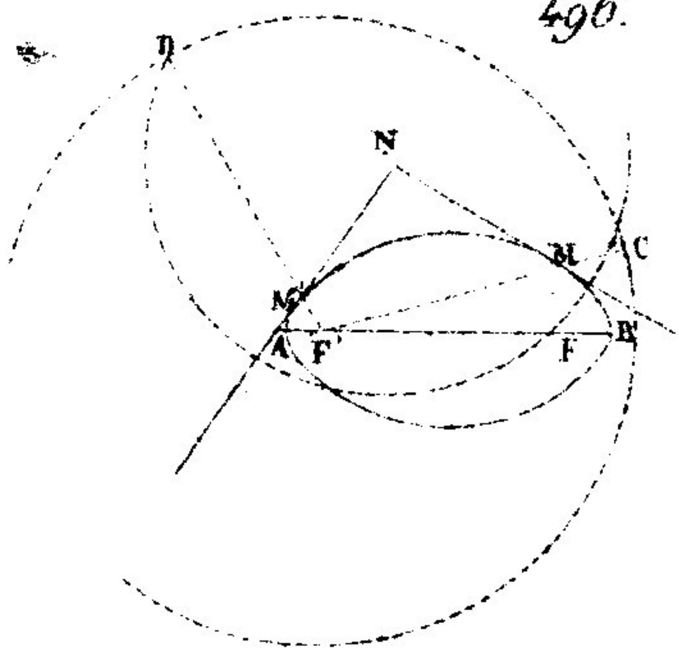

487.
489
488.


490.
491
492
493.
494.

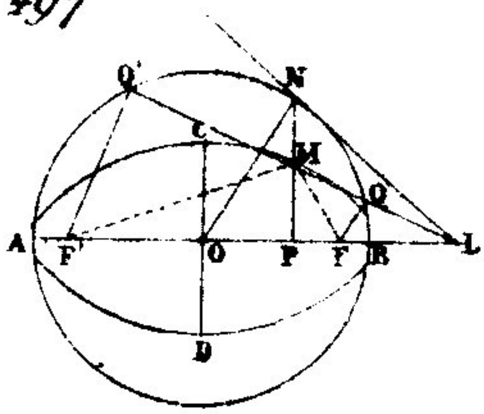
495.



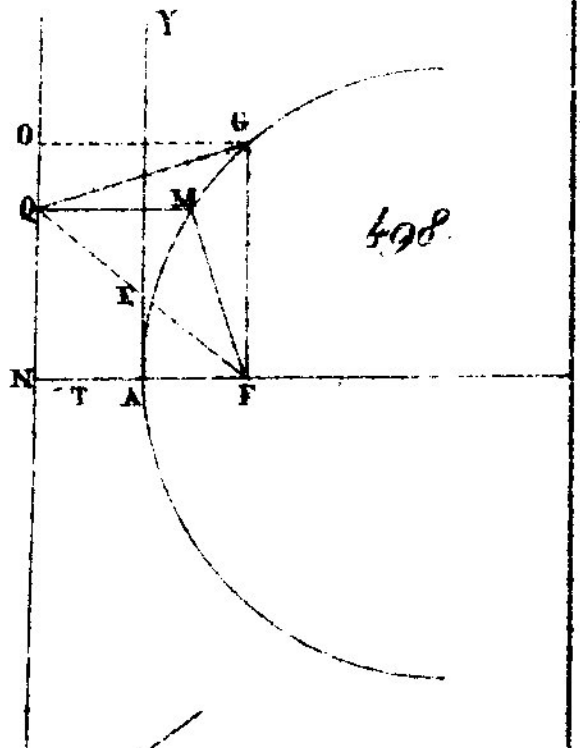
496.



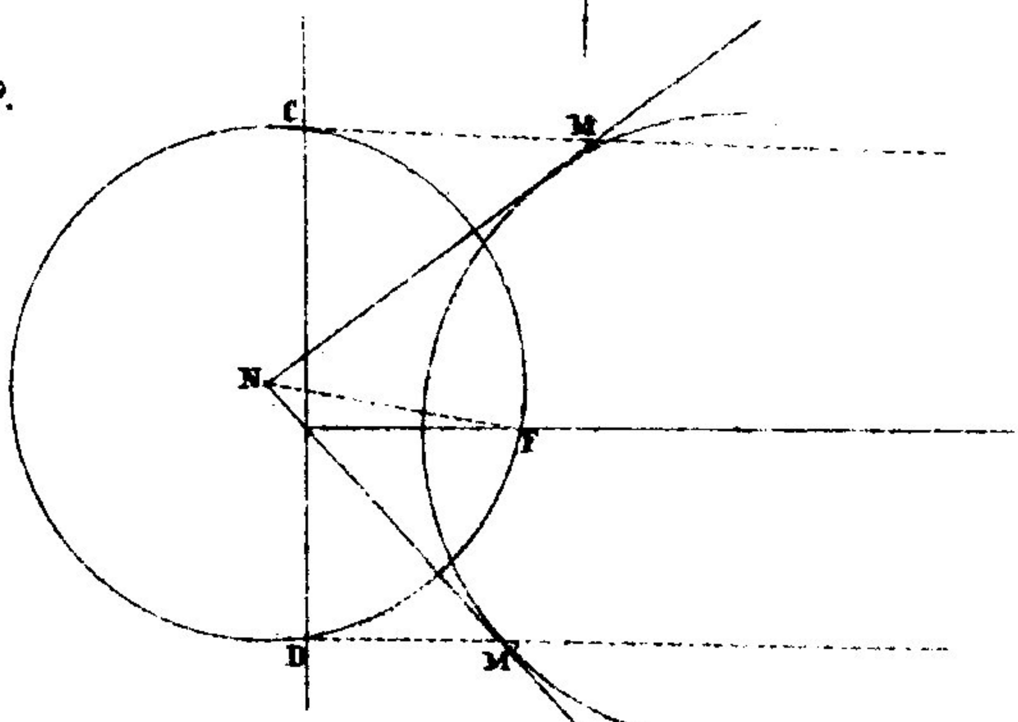
497

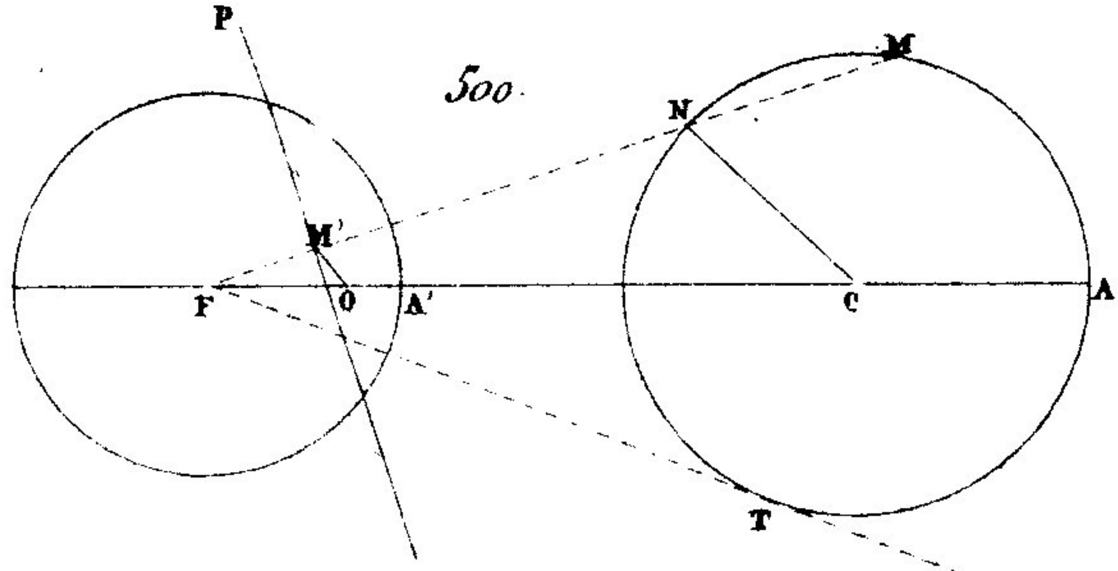


498.

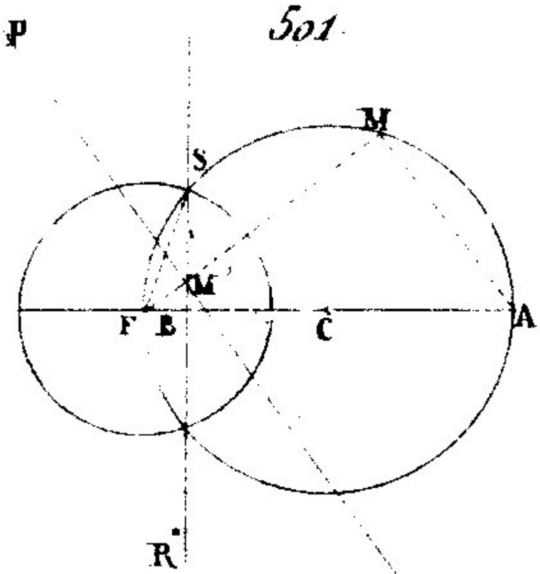


499.

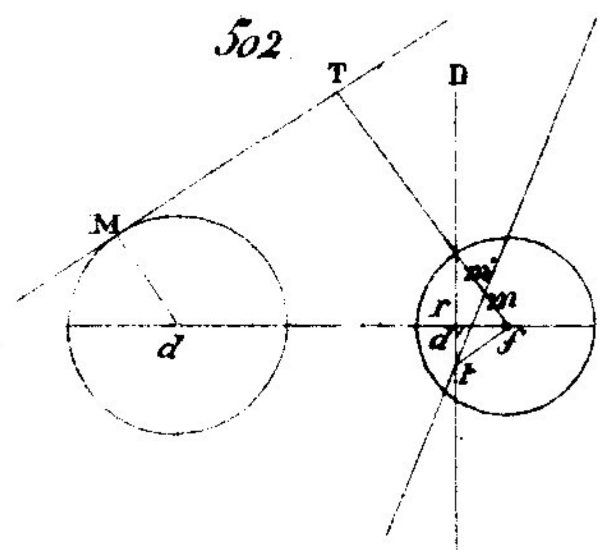




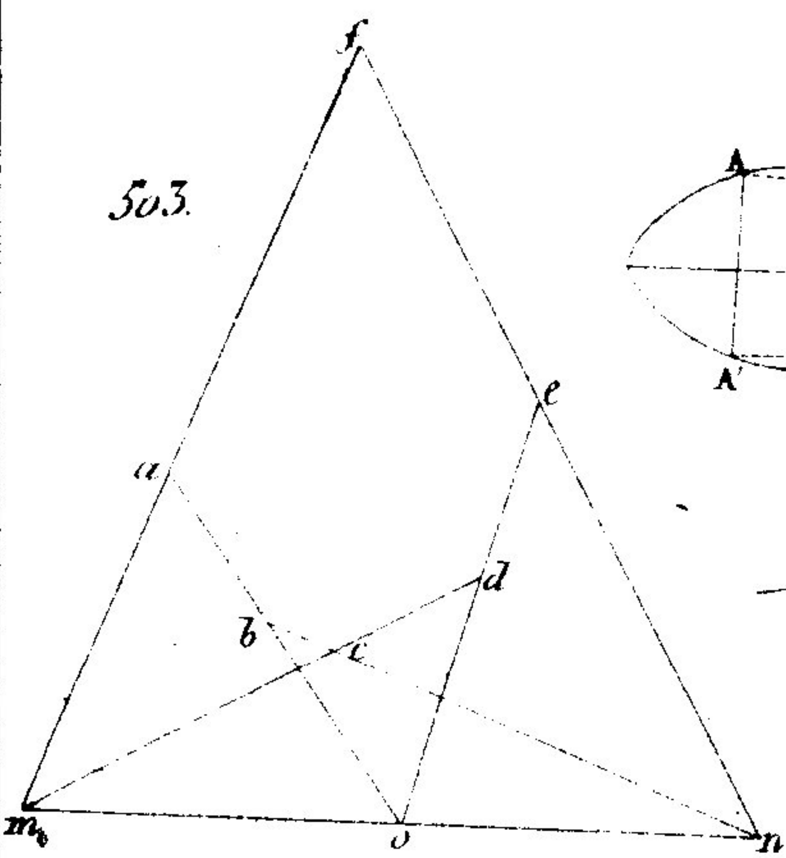
500.



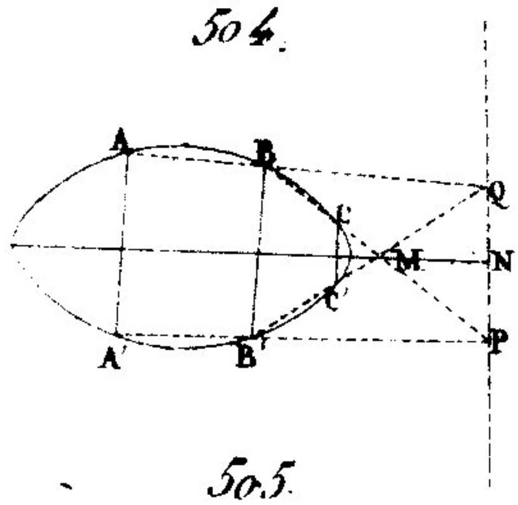
501.



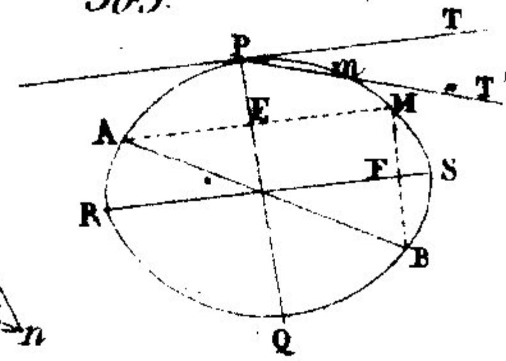
502.



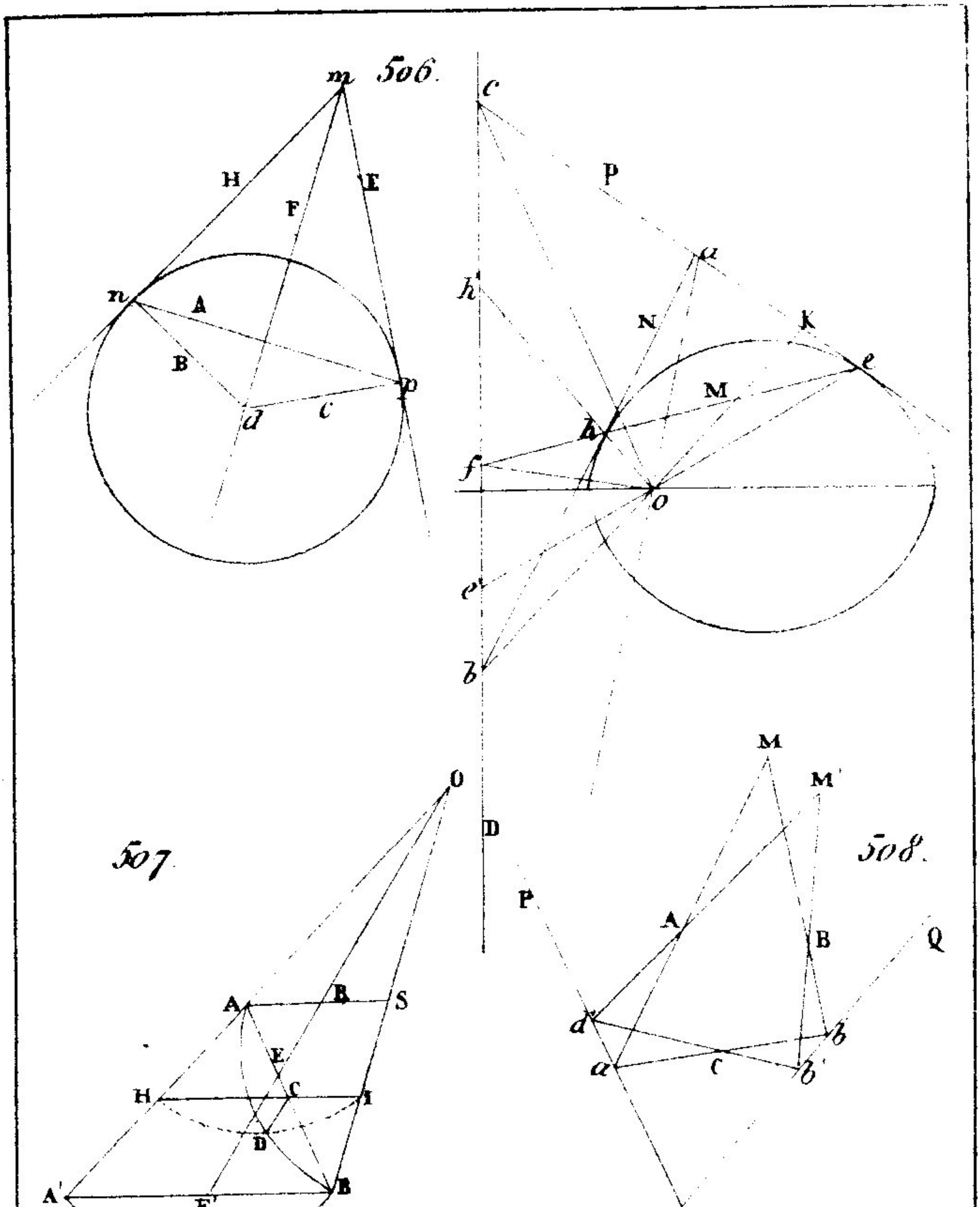
503.



504.



505.


506.
507.
508.
509.
m
H
F
E
n
A
B
d
C
p
c
P
a
h
N
K
M
e
f
o
b
O
D
S
I
A'
F'
M'
Q
N'
O'