Jacquet
Arithmetica

4

Illuſtriſſimo & Excellentiſſimo

PRINCIPI D. PAULLO FRANCONI

MARCHIONI DE SALCITO

S. P. D.

PRAESCRIPTA jamdudum conſuetudo eſt, EXCELLENTISSIME PRINCEPS, Regibus, atque Optimatibus, aliiſque niſi genere, ſaltem virtute conſpicuis Viris, ea, quæ propediem eduntur in lucem, Eru-

ditorum hominum opera commendari. Nec, meâ quidem ſententiâ, id fruſtra molitus eſt, quiſquis ille fuerit, qui hanc primus jecit aleam, multoque minus, quotquot idem ſubinde facere non ſunt veriti: permultum enim & ornamenti, & præſidii ab inclytis, ampliſſimiſque nominibus mutuantur; immo & decoris plurimum, ac ſplendoris laboribus ſuis Typographicis conciliant. Quapropter ipſe quoque, cum primum ANDREÆ TACQUET *Soc. Jeſu Matheſeos profeſſ. celeberrimi Arithmeticæ Theoriam, & Praxim*, meâ impensâ recudi, novam hanc

tan-

tanti auctoris editionem, ut perfectior, nitidiorque prodiret, Tuo præclariſſimo, ac nobiliſſimo nomine decorandam ſedulus curavi. Idque eo ſtudioſiùs feci, quo rariores eſſe intellexi homines Tui hac in Urbe loci, qui eam, qua Tu excellis, ad ſtudiorum ſtudioſorumque hominum favorem adferant eruditionem. Non temere profecto, meoque fretus judicio, quod prope nullum eſt, & ſine aliquo veritatis argumento de Te hæc, Excellentissime Princeps effudi. Tot enim habes Tuarum Laudum præcones, quot docti ſunt & ſapientes,

qui TE non ignorant, quibuſque aſſidue & familiariter uteris. Ab his, fateor, TUAM non modo Pietatem, Prudentiam, animi Moderationem, Conſtantiam, ſingularemque Comitatem; ſed omnigenam eruditionem, & præter cæteras Artis Poëticæ facultatem, & Matheſeos peritiam ad Cœlum extolli certe plus millies audivi: Hos paſſim Prudentiam, quæ in TE renidet, conjunctam cum Juſtitia prædicare, Eruditionem cum Modeſtia, Nobilitatem cum Innocentia, Opes cum fruendi arte, ita ut hac in re & optimi Civis impleas officium, & egregii Patris fa-

mi-

milias. Verum ne, quæ ſatis nota ſunt & omnibus comperta videar enarrare, aut ſingulas, quibus emines, naturæ & ingenii dotes recenſere, atque ita laudes TUAS pedetentim colligere, anguſtioribus terminis orationis curſum circumſcribere compellor. Nullus itaq; mihi ſupereſt locus de TE, PRINCEPS EXCELLENTISSIME, quidpiam dicendi; cum non ea mihi eloquentiæ facultas adſit, quæ aut Virtutum TUARUM eximium decus, aut TUAE nobiliſſimæ Franconum familiæ perenne jubar, honore verborum poſſim adſequi. Illud mihi duntaxat

ſpatium relinquitur, quo libellum hunc, etſi perexiguum, at Tuo ipſius illuſtri nomine inſignitum Tibi ſiſto. Eâdem, quæſo, facilitate illum ſuſcipe, qua auctorem ejus intra Tua limina admitteres, quîcum bonas horas contereres, qui Te reficeret, qui Te delectaret. Vale.

Neapoli. cIↃ IↃCC XXIV.
XII. Kal. Octobr.

Humillimus & addictiſſimus famulus
Bernardinus Geſsari.

AD LECTOREM.

TAcqueti *Arithmeticam, ſæpiùs recuſam, denuo tibi ſiſto, Benevole Lector; quum ſaltem in noſtris hiſce regionibus difficile eſſet eam comparare. Non hic te moror in Operis Auctore laudibus proſequendo; quippe quem, & ſua in inveniendo ſubtilitas, & ejuſdem in exponendo ſolertia jam omni fecit laude majorem. Multò minùs Editionem hanc meam tibi commendo; nam quantum præcedentibus ſit nitidior, & emendatior, vel ex ſola earum collatione liquebit. Id unum monitum te volo, Editioni huic Operam daſſe præclariſſimum Juvenem Nicolaum de Martino, qui in illuſtri*

Ly-

Lyceo Neapolitano magno applauſo publice Matheſim profitetur. Quumque eum rogaſſem, ut non ſineret, adeo præclarum Opus ſine aliquo comitatu iterum in lucem prodire, cogitabat ille brevi Algebræ ſpecimine novam ejus Editionem ornare. Sed deinde Opuſculum de Permutationibus, & Combinationibus, in calce Operis jam appoſitum, compoſuit; quia doctrina iſta, adeo utilis, viſa eſt ei leviter ab Auctore pertractata. Interim loco ſpeciminis integram, omnibusque numeris abſolutam Algebram tibi parat, quæ propediem lucem adſpiciet; quum primæ ejus paginæ jam ſub prælo reperiantur. Vale.

SYL-

SYLLABUS

LIBRORUM, ac CAPITUM.

ARITHMETICÆ.

Prolegomena.
Definitiones, & Axiomata.

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ.

Liber Primus; Euclid. Septimus.
Liber Secundus, Euclid. Octavus.
Liber Tertius, Euclid. Nonus.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

LIBER PRIMUS.

Logistica integrorum numerorum.

Cap. 1. *Notarum Arithmeticarum institutio.*
Cap. 2. *Numeratio.*
Cap. 3. *Porismata quædam ex quibus pendens*

dent rationes operationum logisticarum.
Cap. 4. *Additio.*
Cap. 5. *Subtractio.*
Cap. 6. *Tabula Pythagorica multiplicationi, divisionique inserviens.*
Cap. 7. *Multiplicatio.*
Cap. 8. *Multiplicatio expeditissima per laminas Tabulæ Pythagoricæ.*
Cap. 9. *Divisio.*
Cap. 10. *Divisio facillima per laminas Tabulæ Pythagoricæ.*
Cap. 11. *Additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis examina.*

LIBER SECUNDUS.

Logistica fractorum numerorum.

Cap. 1. *Fractorum numerorum definitio, scriptio, enunciatio.*
Cap. 2. *Fractorum prima theoria.*
Cap. 3. *Reductiones fractorum.*
Cap. 4. *Additio.*
Cap. 5. *Subtractio.*
Cap. 6. *Multiplicatio.*
Cap. 7. *Divisio.*
Cap. 8. *De fractis fractorum.*

LIBRORUM AC CAPITUM.
Cap. 9. *Fracti decimales.*
Cap. 10. *Requisita quædam ad demonstrationem logisticæ decimalis.*
Cap. 11. *Additio decimalis.*
Cap. 12. *Subtractio decimalis.*
Cap. 13. *Multiplicatio decimalis.*
Cap. 14. *Divisio decimalis.*
Cap. 15. *Usus fractorum decimalium.*

LIBER TERTIUS.

De Radicum extractione.

Cap. 1. *Radicis quadratæ extractio.*
Cap. 2. *Radicis quadratæ demonstratio.*
Cap. 3. *Radicis cubicæ extractio.*
Cap. 4. *Radicis cubicæ demonstratio.*
Cap. 5. *Cujuscumque Radicis extractio.*
Cap. 6. *Extractio quarumlibet radicum ex fractis etiam decimalibus.*
Cap. 7. *Approximatio radicum.*
Cap. 8. *De Tabulis quadratorum & cuborum.*
Cap. 9. *Usus laminarum Tabulæ Pythagoricæ in extractione radicum.*

SYLLABUS

LIBER QUARTUS.

De Regulis.

Cap. 1. *Regula simplex proportionum directa, & eversa.*
Cap. 2. *Regula proportionum composita, tam directa, quàm eversa.*
Cap 3. *Regula societatum.*
Cap. 4 *Regula alligationis.*
Cap. 5. *Regula falsi simplex.*
Cap. 6. *Regula falsi duplex.*

LIBER QUINTUS.

De Progressionibus

De Progressione Arithmeticæ.

Cap. 1. *Progressionis arithmeticæ affectiones.*
Cap. 2. *Progressionis arithmeticæ problemata.*
Cap. 3. *Quæstiones circa progressiones arithmeticas*

De

De Progreſſione geometrica, cùm finitâ, tum infinitâ.

Cap. 4. *Progreſſionis geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.*
Cap. 5. *Progreſſionis geometricæ finitæ, ac infinitæ problemata.*
Cap. 6. *Quæſtiones circa progreſſiones geometricas.*
Cap. 7. *De mediis quotcumque proportionalibus numeris inter duos datos.*
Cap. 8. *De permutationibus, & combinationibus.*

APPENDIX.

Additio.
Subtractio.
Multiplicatio.
Diviſio.
Tabulæ figurarum.

Ad Bibliopegum.

Figuras omnes operis calci apponendas cenſeo, ita quidem, ut ad uſum extra pagellas explicatæ promineant.

R.D.

R.D. Thomas Faenza, Prælector S. Theol. in Seminario Neap. Archiep. revideat, & referat. Neap. 20. Julii 1724.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. G.

D. Petrus Marcus Giptius Can. Dep.

EMINENTISSIME DOMINE

Jussu Em. T. legi librum, cui titulus *Andreæ Tacquet Arithmeticæ Theoria, & praxis*, nihilque in eo deprehendi, quod Christianæ pietati, aut fidei adversaretur; quapropter, si ita E.T. videbitur, illum iterum typis edi posse censeo.

E. T.

Humillimus. & obsequentiss. famulus
D. Thomas Faenza.

Attenta supradicta relatione, Reimprimatur. Neap. 30. Julii 1724.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. G.

D. Petrus Marcus Giptius Can. Dep.

REIMPRIMATUR. Neap. 26. Julii 1724. Verùm in publicatione servetur Regia Pragmatica.

ARGENTO REG. ET PRÆSES.
Pescarinus.

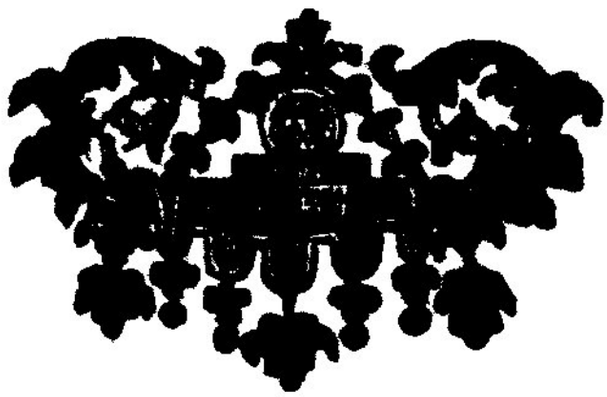
ARITH-

ANDREÆ TACQUET
Soc. Jesu Matheseos Prof.

ARITHMETICÆ THEORIA, ET PRAXIS

Editio noviſſima, præcedentibus nitidior, & emendatior, cui acceſſit

NICOLAI DE MARTINO DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS *OPUSCULUM.*



NEAPOLI MDCCXXIV.
Ex Typographia Felicis Moſca
Superiorum permiſſu.

Expenſis Bernardini Geſſari.

1. Arithmetica omnium Mathematicarum prima eſt, & veluti parens, dux, & domina. Hâc enim ſublatâ, evaneſcunt & cæteræ; ſed non contrà ſublatis cæteris, etiam hæc ipſa evaneſcit.

2. Nullius artis tam frequens, quam Arithmeticæ, actio eſt. Hæc agit, ſive quis negotio, ſive otio ſe dedat: hæc operam dat ſtudioſo, tum pecuniæ, tum artium liberalium: hæc privatam, & publicam vitam agenti fidelem miniſtram ſe præbet.

3. Floruiſſe apud Phænices propter mercaturam, referunt hiſtorici: floret eadem etiamnum in tabernis mercatorum. Turpe igitur jacere ſpretam, atque neglectam in Scholis, quibus ſcientiarum, & artium defenſionem, atque conſervationem Reſpublica commendavit.

4. Hæc diſciplina, ut mox incipiente mundo cæpit; ita nulli magis ætati, quam primæ convenit: eandem ob cauſam diſcenda inter ipſa ſtudiorum initia, & non poſt principia.

Objectum illius eſt numerus.

Species duæ: Vulgaris, & Coſſica. Hęc alterius temporis opus erit: Illa vero, de quâ nunc agitur, in duas partes dividetur, ſcilicet in Theoricam & Practi-

cam, ad quarum intelligentiam neceſſaria ſunt aliqua principia, ſive definitiones & axiomata, nec non quædam annotationes, quæ ſequuntur, & quæ ſparſim in hoc opere diſpergentur.

DEFINITIONES.

1. UNitas eſt, ſecundùm quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.

Omnis numeri principium unitas eſt.

2. Numerus eſt compoſita ex unitatibus multitudo.

3. Numerus numerum metiri dicitur, cùm minor aliquoties ſumptus majori æqualis fit.

4. *metitur* 12., *quia ter* 4. *facit* 12. *Unitas metitur omnes numeros.*

4. Numerus numeri multiplex eſt, cùm minor metitur majorem, ſive cùm major minorem aliquoties continet præcisè,

5. Pars aliquota numeri eſt, quæ numerum metitur; pars aliquanta, quæ non metitur.

Numerus 2. *eſt pars aliquota* 10. *quia*

me-

metitur 10. *acceptus nimirum quinquies.* 3. *verò eſt pars aliquanta* 10. *quia non metitur* 10. *nam ter acceptus facit* 9. *acceptus quater facit* 12.

6. Similes aliquotæ partes ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur: ſive, quæ in ſuis totis æquè ſæpe continentur.

2. & 3. *ſunt ſimiles aliquotæ* 10. 15. *numerorum* 10. & 15. *quia tam* 2 3 3. *in* 10. *quàm* 3. *in* 15. *continẽtur quinquies: ſive tam* 2. *totum ſuum* 10. *quàm* 3. *ſuum totum* 15. *metiuntur per eundem numerum* 5.

7. Similes partes aliquantæ ſunt, quæ in ſuis totis æquè ſæpè continentur, atque inſuper æquè multæ ipſarum partes aliquotæ ſimiles.

Vel: partes aliquantæ ſimiles ſunt, quæ æquè multas ſuorum totorum continent aliquotas ſimiles.

14 28 8 & 16. *ſunt ſimiles partes aliquantæ numerorum* 14 & 28. *quia ſicuti* 8 *continetur ſemel in* 14 *atque inſuper* 6 *ſeu ter* 2. *hoc eſt tres quartæ partes ipſius* 8. *ita* 16 *in* 28. *continetur ſemel, atque inſuper* 12, *ſeu ter* 4. *hoc eſt etiam tres quartæ partes* 16.

Vel ſic: 8 & 16. *ſunt ſimiles partes aliquan-*

quantæ totorum 14 *&* 28. *quia ſicuti* 8 *continet totius* 14 *quatuor ſeptimas partes, nempe quater* 2. *ita* 16 *continet totius* 28 *quatuor ſeptimas, nempe quater* 4.

8. In numeris ratio, ſive proportio eſt, duorum numerorum mutua quædam habitudo ſecundùm exceſſum, vel defectum, vel æqualitatem.

In omni proportione duo ſunt termini, quorum is dicitur antecedens, qui primo loco, ſiue in recto nominatur; alter conſequens. Cùm antecedens eſt major conſequente, dicitur proportio majoris inæqualitatis, ſeu majoris ad minus. Cùm antecedens eſt minor conſequente, proportio minoris inæqualitatis, ſeu minoris ad majus appellatur. Cùm antecedens conſequenti par eſt, dicitur æqualitatis proportio.

9. In numeris duæ proportiones ſunt æquales, eædem, ſimiles (idem iſta ſignificant) ſive quatuor numeri (A. B. C. D.) dicuntur proportionales, cùm minores utriuſque proportionis termini in majoribus eodem modo continentur. Continentur autem eodem modo, ſi minores (B, D) ſint majorum. (A, C) ſimiles partes *a* aliquotæ, vel ſimiles partes *b* aliquantæ.

A	8	2	B
C	16	4	D

a vide def. 6.

b vide def. 7.

A 14 8 B
C 28 16 D

Æquales proportiones ſic efferimus. 8. eſt ad 2. ut 16 eſt ad 4.

Vel 8 habet ad 2. eandem rationem, quam 16 ad 4.

10. Cùm plures extiterint æquales rationes, & prioris conſequens fuerit antecedens poſterioris (ſic ut medii termini bis ſumantur,) proportio continua dicitur; & numeri ipſi dicuntur continuè proportionales.

Continuas rationes ſic efferimus: 1. eſt ad 2. ut 2. ad 4. & 4. ad 8. & 8. ad 16. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32.

11. Quod ſi unius æqualium proportionum conſequens non ſit antecedens alterius, ac proinde medii termini non accipiantur bis, diſcreta proportio erit; & numeri ipſi proportionales dicuntur, nullo alio addito.

Diſcretas proportiones ſic efferimus. 9 eſt ad 3. ut 12. ad 4.

9. 3. 12. 4.

12. Cùm numeri fuerint continuè proportionales (A, B, C, D, E,) ratio primi A ad tertium C duplicata dicitur rationis, quam habet primus A ad ſecundum B; & ratio primi A ad quartum D dicitur tri-

A,	B,	C,	D,	E,
1	3	9	27	81
81	27	9	3	1

plicata rationis primi A ad ſecundum B, & ſic deinceps.

De rationum denominatoribus & compoſitione vide Elementa noſtra Geometrica l. 5. parte 3. *

* Pag. 265. Edit. ultimæ Amſtelod.

13. Numerus A multiplicare dicitur numerum B, cum B multiplicandus toties accipitur, quot ſunt unitates in A multiplicante.

Vel ſic: Numerus A multiplicat numerum B, cùm invenitur numerus C toties continens multiplicatum B, quoties A multiplicans continet unitatem.

Verùm univerſaliùs multiplicatio ſic definitur. Numerus A multiplicat numerum B, cum numerus reperitur C, qui ita ſit ad B multiplicatum, ut A multiplicans ad unitatem.

C 8 B 4
A 2 1

Numerus C, qui invenitur, dicitur productus, ſeu genitus. Porrò cùm multiplicans A eſt numerus integer, ſemper productus C major eſt multiplicato B, ut patet ex

4
C -- B 4
3
1
A -- 1
3

def. 1. & 2. Cùm verò multiplicans A eſt fractio minor unitate, productus C etiam erit minor multiplicato B, ut patet ex poſtrema definitione.

Plu-

Plures numeri ut 2, 4, 3, per invicem multiplicari dicuntur, ſi 2 in 4, faciat 8, & productum 8 ducatur in 3; productum enim ultimum 24 eſt id, quod fit ex multiplicatione numerorum, 2, 4, 3.

Porrò idem apud Arithmeticos eſt numerum in numerum ducere, quod numerũ per numerum multiplicare. Frequens etiã iſta locutio eſt, A per B, vel potius A in B: hoc eſt A ductus, ſeu multiplicatus per B.

14. Numerus A dicitur dividere numerum B, cùm numerus invenitur C, indicans quoties A diviſor in B contineatur.

Et ſic diviſor A eſt pars diviſi ſeu dividendi B, ab invento (qui proinde quotiens dicitur) denominata.

B 12 3 C
A 4 1

Vel univerſaliter: Numerus A dividit numerum B, cùm alius numerus invenitur C ita ſe habens ad unitatem, ut diviſus B ad A diviſorem.

15. Numerus A metiri dicitur numerum B per X numerum aliquem (qui quotiens appellatur) cùm metiens A toties ſumptus, quot in X quotiente ſunt unitates, menſum adæquat.

B 16 X 8
A 2 1

Hæc definitio differt à præcedenti, 1. *quòd*

quòd diviſio peragi poſſit, licèt diviſor dividendum non metiatur. 2 *licèt diviſor ſit major dividendo, ut ſuo loco tradetur. Latiùs igitur patet diviſio, quàm menſio.*

16. Par numerus eſt, qui bifariam dividi poteſt. *Omnem ergo parem numerum aliquis numerus metitur per* 2.

17. Impar numerus eſt, qui bifariam dividi non poteſt: ſive, qui unitate differt à pari.

18. Pariter par eſt, quem par per parem metitur. *Talis eſt* 24, *quem par numerus* 6 *metitur per parem* 4.

19. Pariter impar eſt, quem par metitur per imparem. *Talis eſt* 12, *quem* 4 *par metitur per* 3 *imparem.*

20. Impariter impar eſt, quem impar metitur per imparem. *Talis eſt* 21, *quem* 7 *impar metitur per imparem* 3.

21. Primus, ſeu incompoſitus numerus eſt, quem ſola unitas metitur, *ac proinde nullas habet partes aliquotas præter unitates.*

Tales ſunt, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, *& alii infiniti. Porrò omnis primus numerus neceſſariò impar eſt, aliàs eum metiretur binarius.*

22. Compoſitus numerus eſt, quem præter unitatem, aliquis numerus ab ipſo di-

diverſus metitur ; *ac proinde habet partes aliquotas ab unitatibus diverſas.*

Tales ſunt 4. 6. 8. 9. 10. 12. 14. 15. *& alii infiniti.*

23. Primi inter ſe numeri ſunt, quos nulla alia menſura communis metitur, quàm unitas.

Duo inter ſe primi ſunt 15. & 8. *quia licèt ſingulos aliqui numeri metiantur, ac proinde neuter primus ſit : tamen nullus numerus utrumque metitur. Pari modo* 8. 10. 15. *ſunt tres primi inter ſe, quia nullus numerus, illos tres metitur, & ſic deinceps.*

24. Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos præter unitatem aliquis numerus, communis menſura, metitur.

Poteſt autem menſura communis eſſe unus datorum numerorum.

Duo inter ſe compoſiti ſunt 8. & 10. *quia utrumque metitur* 2. *Similiter* 5. & 15. *ſunt duo compoſiti inter ſe: quia* 5. *metitur & ſeipſum*, & 15. *Tres inter ſe compoſiti ſunt* 3. 9. 12. *quia* 3. *metitur* 9. & 12. & *ſe.* 6. 10. 12. 16. *ſunt quatuor compoſiti inter ſe, quia* 2. *metitur omnes quatuor.*

25. Planus numerus eſt, qui ex duorum numerorum multiplicatione producitur. Numeri autem invicem multiplicantes plani latera dicuntur.

Omnis

Omnis ergo planus eſt compoſitus.
Sic planus eſt 12. *quia fit ex* 6. *per* 2. *item* 24. *quia fit ex* 4. *in* 6.

26. Solidus numerus eſt, qui ex trium numerorum multiplicatione producitur. Numeri verò ſe mutuò multiplicantes ſolidi latera dicuntur.

Omnis ergo ſolidus eſt compoſitus.
Solidus eſt 24, *quia fit ex multiplicatione trium numerorum* 2. 3. 4. *nam* 2. *in* 3. *facit* 6. 6 *autem in* 4. *facit* 24.

27. Similes plani & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

6. 24. *ſunt plani ſimiles, quorum latera ſunt,* 2. 3. & 4. 6. *eſt enim ut* 2 *ad* 3 *ſic* 4. *ad* 6. *Solidi ſimiles ſunt* 24. 192.

2	3	2. 4. 3.
	6	24
	24	192
2	6	2. 8. 6.

quia latera unius 2. 4. 3. *ſunt proportionalia lateribus alterius* 4. 8. 6.

28. Quadratus numerus eſt, qui fit ex multiplicatione duorum æqualium numerorum; ſive ex multiplicatione alicujus numeri per ſeipſum: qui radix quadrata dicitur.

Primus quadratorum eſt 4. *qui fit ex* 2. *in* 2. *ſive ex* 2. *in ſe. Secundus eſt* 9. *qui fit ex* 3. *in ſe: & ſic deinceps in infinitum.*

29. Cubus eſt, qui fit ex multiplica-

tio-

tione trium æqualium numerorum, ſive ejuſdem ter poſiti: qui radix cubica appellatur.

Primus cubus eſt 8. *fit ex multiplicatione binarii ter poſiti* (2. 2. 2.) *nam* 2. *in* 2. *facit* 4. *&* 4. *in* 2. *facit* 8. *Secundus eſt* 27. *qui fit ex multiplicatione ternarii ter poſiti*, (3. 3. 3.) *nam* 3. *in* 3. *facit* 9. *&* 9. *in* 3. *facit* 27.

30. Perfectus numerus eſt, qui omnibus ſuis partibus aliquotis æqualis eſt.

Primus perfectus eſt 6. *illius enim omnes aliquotæ partes ſunt* 1. 2. 3. *quæ ſimul faciunt* 6. *Secundus eſt* 28. *nam illius omnes aliquotæ ſunt* 1. 2. 4. 7. 14. *quæ ſimul efficiunt* 28. *de his vide prop. ultimam lib.* 9. *& ſcholium.*

AXIOMATA.

A B Z 1. Numeri A, B, æquè multiplices ejuſdem numeri Z, ſunt æquales. Et numeri, æquè multiplices æqualium numerorum, æquales ſunt.

2. Æquales ſunt numeri A, B, quotum æquè multiplex eſt idem numerus Z.

Et

Et æquales ſunt illi numeri, quorum æquè multiplices ſunt æquales.

3. Æquales ſunt numeri, qui ſunt ejuſdem numeri eadem pars, ut dimidia, vel tertia, vel quarta, &c.

Et illi numeri ſunt æquales, qui æqualium numerorum eadem pars ſunt.

4. Æquales ſunt numeri, quorum unus numerus eadem pars eſt.

Et illi numeri ſunt æquales, quorum æquales numeri eadem pars ſunt

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt, (hoc eſt per ipſum numerum,) metitur.

6. Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

7. Si numerus A multiplicans alium B genuerit aliquem C; multiplicatus B genitum C metitur per multiplicantem A.

4A B 3
C
12

Patet ex defin. 13. & 15.

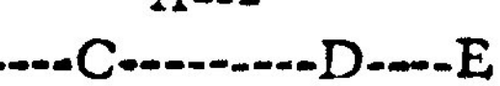
8. Si numerus A numerum C metiatur, ſeu dividat per quotientem B; etiam quotiens B, multiplicans metientem A, producet menſum C: ſive metiens A per quotientem B multiplicatus, reſtituit menſum C.

Patet ex defin. 13. 15. 14.

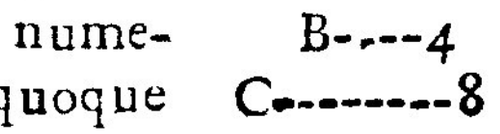
9. Quo-

9. Quolibet numero ſumi poteſt major.

10. Numerus A metiens quoſcumque numeros BC, CD, DE, etiam BE compoſitum ex ipſis metitur.



12. Numerus (A) metiens quemcunque numerum (B) metitur quoque omnem numerum (C) quem ille (B) metitur.



12. Numerus A metiens totum BC, & ablatum BD, metitur & reliquum DC.

ADMONITIO AD LECTOREM.

EXpoſitis Definitionibus, & Axiomatis, ex quibus tota numerorum ſcientia deducetur, ad propoſitiones ipſas progredior, ſi priùs quiddam monuero lectores, quod intereſt ipſos ſcire. Euclides pro numeris ubique litteras alphabeti aſſumit optimo ſanè conſilio: ſic enim propoſitionum

rum ac demonſtrationum univerſalitas meliùs exprimitur. At cùm numerum quempiam per alium multiplicat, A puta per B, productum tertiâ quâdam litterâ, puta C, deſignat. Ex quo id plerumque incommodi naſcitur, ut cùm plures inſtitui multiplicationes neceſſe eſt, memoriâ excidat, quæ producta ex quorum multiplicatione latorum genita ſint, quod moleſtum eſſe ſolet lectoribus & tenebras offundere. Sæpe igitur expediet productum multiplicationis eo modo exprimere, quo in logiſtica ſpecioſa utimur; ſolâ videlicet numerorum, qui ſe invicem multiplicant, appoſitione; ut ſi cupiam multiplicare numerum A per numerum B, productum erit AB. Primus (quod ſciam) logiſticam ſpecioſam vel invenit, vel certè adhibuit Franciſcus Vieta: ſed Renatus Carteſius ad commodiorem formam revocavit. Præcepta hujus methodi à Franciſco à Schooten conſcripta, jam in lucem ſunt edita per Fr. Bartholinum.

Porrò operationum ſpecioſarum prima rudimenta hæc ſunt. Si cupiam numerum A addere numero B, ſumma erit A + B. Signum enim (+) plus ſignificat. Si ſumma quæritur plurium A, B, C, ea erit A + B + C.

Si

Si à numero A ſubtrahendus eſt numerus B; reſiduum erit A —— B. Signum enim (——) ſignificat minus.

Si numerus A multiplicandus ſit per numerum B; productum (ut jam dixi ſupra) erit AB, ſeu BA.

Si A per A; productum erit AA.

Si AB per BC; productum erit ABBC.

Si AA per A, productum erit AAA.

Si A + B + C per D; ſingulis particulis appone D; & productum erit AD + BD + CD.

Si A, B, C, D, per invicem; productum erit A B C D.

Et ſic in aliis. Ubi id notandum eſt, perinde eſſe, quo ordine in producto litteræ ſibi mutuò apponantur. Ut ſi productum quæratur ex numeris A, B, C, D, inter ſe multiplicatis; illud erit, vel A B C D, vel A C B D, vel A D B C &c. Cùm enim appoſitio numerorum multiplicationem deſignet, ea verò inter plures numeros, quocunque ordine facta, idem ſemper productum exhibeat, (quod in ſcholio prop. 19. l. 8. demonſtrabimus) perinde etiam erit, quo ordine ſibi mutuo apponantur.

Denique ſi numerum A dividere oportet

teat per numerum B ; quotiens designabitur, si infra dividendum A, lineolâ interpositâ, scribatur divisor B.

A B A
B

Si AB per A ; quotiens erit B. A quippe ductum in B restituit A B.

Si AB † AC--AD per A ; quotiens erit B † C--D. Nam B†C-D, ductum in A, restituit AD † AB--AC.

Hac methodo, quod quidem ad multiplicationem attinet, in demonstrandis horum trium librorum propositionibus non paucis utemur, tum videlicet cùm facilitari inde demonstrationes poterunt; id quod sæpe accidet, cùm plurimum referat in decursu demonstrationis producti latera ante oculos observari. Verùm hoc observandum erit, duas litteras conjunctas aliquando tantùm simplicem numerum designare, ut in tribus primis prop. & paucis aliis, quod satis ex textu ipso, & sensu verborum colligetur.

Cæterùm non mihi propositum fuit hîc tradere præcepta Logisticæ speciosæ, de qua, atque Algebra tum numerosâ, tum speciosâ, si Deo placuerit, alio loco acturus sum; sed ea solùm attingere, quorum in his elementis, ac deinde in Arithmetica practica usus erit.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER PRIMUS.

EUCLIDI SEPTIMUS.

In citationibus librorum, Euclidis numeri retinentur.

PROPOSITIO PRIMA.

Si à duobus numeris inæqualibus detrahatur ſemper minor de majore alternâ quâdam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad ventum ſit ad unitatem; primi (a) inter ſe erunt dati numeri.

(a) vide defin. 14.

Dati ſint duo numeri AB, & CD; minor CD detractus ex AB, quoties poteſt, relinquat EB: EB verò detractus ex CD, quoties poteſt, relinquat FD: FD,

A----------E--G-B
C--F--D
H

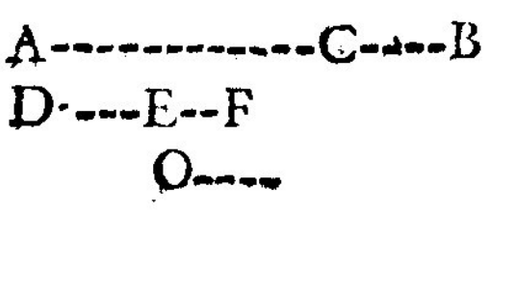
quoties poteſt, detractus ex EB relinquat unitatem. Dico numeros AB, CD eſſe primos inter ſe.

Eſto enim, ſi fieri poteſt, numerorum AB, CD communis menſura numerus aliquis H. Quoniam ergo H vis metiri CD, & CD metitur *b* AE, etiam H *c* metietur AE. Sed H vis metiri quoque totum AB. Ergo H metitur *d* etiam reliquum EB. Metitur autem EB ipſum *e* CF. Ergo & H *f* metitur CF. Quare cum H volueris metiri etiam totum CD; H quoque metietur reliquum *g* FD: FD autem metitur *h* EG. Ergo H quoque metitur *i* EG. Oſtendi verò ſupra H metiri etiam totum EB. Ergo H metitur *k* etiam reliquum GB, numerus unitatem, quod eſt abſurdum.

b hyp. *c* ax. 11. *d* ax. 12. *e* hyp. *f* ax. 11. *g* ax. 12. *h* hyp. *i* ax. 11. *k* ax. 12.

PROPOSITIO II.

DVobus numeris datis (AB, DF) non primis inter ſe; maximam eorum communem menſuram invenire.



Minor DF detractus ex majori AB, quoties poteſt, relinquat CB. CB de-

detractus, quoties potest, ex DF relinquat EF, & sic deinceps.

Hâc alternâ detractione relinquetur tandem aliquis numerus, qui præcedentem metiatur; nam si ad unitatem deveniretur, dati numeri *a* essent primi, contra hyp. Esto igitur reliquus EF, qui præcedentem CB metiatur. Dico EF esse maximam communem mensuram numerorum AB, & DF. Quod sic demonstrabitur. *a* præced.

EF metitur *b* CB, & CB metitur *c* DE. Ergo EF etiam *d* metitur DE. Metitur verò EF etiam se. Ergo EF. metietur *e* totum DF. Sed DF metitur *f* AC. Ergo EF metitur etiam *g* AC. Metitur autem EF etiam *h* CB. Ergo EF metitur quoque *i* totum AB. EF igitur ipsorum AB, & DF communis mensura est. *b* const. *c* const. *d* ax. 11. *e* ax. 12. *f* const. *g* ax. 11. *h* const. *i* ax. 10.

Quod verò sit maxima, sic ostenditur. Esto si fieri potest alia O major, quàm EF. Quouiam vis O metiri DF; DF verò metitur AC, etiam O metietur *k* AC. Vis autem O etiam metiri AB. Ergo O metietur quoque *l* CB. Sed CB *m* metitur DE. Ergo O etiam metitur *n* DE. Quare cùm O metiri velis etiam totum DF, metitur O quoque *k* ax. 11. *l* ax. 12. *m* const. *n* ax. 11.

a ax. 13. *o* reliquum EF, ſe minorem, quod eſt abſurdum.

Corollarium.

NUmerus (O) metiens duos numeros (A B, D F) metitur quoque maximam eorum communem menſuram (EF.)

PROPOSITIO III.

TRibus numeris datis, non primis inter ſe (C, D, E;) maximam eorum communem menſuram invenire.

C----------
D---------O
E------ -- P
S----

a præced. Inveniatur O maxima *a* communis menſura duorum C, D. Si O etiam metitur E, erit maxima communis menſura trium C, D, E: nam ſi eſſet aliqua S major, quam O, metiretur S etiam O per corol. præced., quod eſt abſurdum, cum S ponatur major, quàm O.

Quod ſi O non metiatur E, ſaltem O & E inter ſe compoſiti erunt. Cùm enim C, D, E, *b* ſint tres inter ſe compoſiti, aliqua menſura communis eos *c* metietur, ac proinde etiam *d* ipſum O.

b hyp.
c def. 24.
d corol. præc.

Duo-

Duorum igitur O, E inveni maximam communem menſuram P. Dico, P communem eſſe maximam trium C, D, E.

Cùm enim P *e* metiatur O; O verò metiatur *f* C, D; etiam P *g* metietur C, D. Metitur autem *h* P etiam E. Ergo P eſt menſura trium C, D, E. Quod verò maxima ſit, ſic oſtenditur. Sit alia S major, ſi fieri poteſt, quàm P. Quoniam ergo S metitur C, D, E, metietur *i* quoque ipſorum C, D maximam menſuram O. Quia ergo S metitur E, & O, metietur *k* rurſum S eorum maximam menſuram *l* P, major minorem. Quod eſt abſurdum.

e conſt.
f conſt.
g ax. 11.
h conſt.
i corol. præc.
k idem col.
l conſt.

D-----C----E---
O----S---
P--

Corollarium.

1. EOdem artificio reperietur quatuor, imò quotvis, non primorum inter ſe numerorum, menſura communis maxima.

2. Numerus (S) metiens quoſcunque numeros (E, D, C) metitur etiam eorum maximam communem menſuram (P). Patet ex ultimâ parte demonſtrationis.

PROPOSITIO IV.

ET reliquæ uſque ad 15. *incluſivè, continentur in propoſitionibus univerſalibus libri* 5. *Elem. Geom.*

PROPOSITIO XVI.

DUo numeri (A, B) ſe mutuò multiplicantes, æquales numeros producunt (C.D.)

Quoniam A multiplicans B facit D, erit *a* unitas ad A, ut B ad D. Igitur *b* permutando; ut unitas eſt ad B, ſic A ad D. Rurſus quia, B multiplicans A facit C; erit ut unitas *c* ad B, ſic A ad C. Ergo A ad D, & C eandem habet rationem. Ergo C & D *d* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a def. 13. l. 7.
b 16. l. 5.
c def. 14. l. 7.
d 9. l. 5.

unit. 1.
A 6 B 4
C 24 D 24

Corollarium.

1. Si numerus A, multiplicans numerum B, fecerit C; multiplicans A metietur productum C per B multiplicatum. Nam quia A in B fa-

A.B
C

cit C, etiam B in A facit C per hanc. Ergo cûm A, qui priùs erat multiplicans, jam ſit etiam multiplicatus, reſpectu ejuſdem producti C; patet ex axio. 7. A metiri B per C.

2. Si A metitur, ſeu dividit A.B. C per B; etiam B quotiens per C. A metietur eundem C.

Nam quia A per B metitur C, ergo per ax. 8, B multiplicans A faciet C. Ergo per hanc 16, etiam A multiplicans B faciet C. Ergo per ax. 7. B per A metitur C. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus (A) multiplicans quotcunque numeros (B,C) totidem genuerit numeros (AB,AC;) erunt geniti (AB,AC) multiplicatis (B,C) proportionales.

unitas 1 A / B. C. / AB AC.

Cum enim A, multiplicans B, fecerit AB, erit ut *a* unitas ad A, ſic B ad AB. Rurſus cùm A, multiplicans C, fecerit AC, erit ut *b* unitas ad A, ſic C ad AB. Ergo B eſt ad AB, ut *c* C ad AC. Igitur permutando eſt B ad C, *d* ut AB ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a def. 4. l. 7.
b ibid.
c 11. l. 5.
d 16. l. 5.

Scho-

Scholium.

CÆpimus hîc multiplicationis productum exprimere ſolâ numerorum multiplicantium mutuâ appoſitione; de quâ vide dicta ante principium hujus 7. libri. Hæc methodus cùm adhibebitur (quod ingenti plerumque compendio fiet) commodius efferetur propoſitione 17. hunc in modum.

Numeri quotcunque (AB , BC) commune latus habentes (B) eam inter ſe proportionem habent , quam latera reliqua A , & C.

Latera numeri ſunt, ex quorum multiplicatione producitur. Porrò, ut huic methodo, quæ (ut dixi) commodi permultum, ac compendii habet, tyrones meliùs aſſueſcant, præter exemplum in prop. adductũ, alia adhuc nonnulla viſum eſt ſubjungere.

1. *AA eſt ad AB ut A ad B.*
2. *AB eſt ad BB ut A ad B.*
3. *AAA eſt ad AAB ut A ad B.*
4. *ABB eſt ad BBB, ut A ad B.*

In 1. commune latus eſt A, reliqua verò ſunt A ſecundum, & B. In 2. latus commune eſt B; reliqua verò ſunt A, & B ſecundum. In 3. latus commune eſt AA, reliqua verò ſunt A tertium, & B. In 4. latus commune eſt BB; reliqua ſunt A, & B tertium.

5. *AA.*

5. *AA. AB. BB. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex* 1. *&* 2.

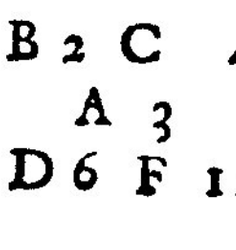
6. *AAA. AAB. ABB. BBB. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex* 3. *&* 4.

7. *AB, AC, AD, AE, AF eam inter ſe rationem habent, quam B, C, D, E, F. Patet ex ipſa propoſitione.*

Quantus ſit hujus ſcholii uſus ad demonſtrationes prolixas aliàs, & difficiles facillimè expediendas, tum in his libris deinceps, tum in Arithmetica Practica, plurimis locis apparebit.

PROPOSITIO XVIII.

SI quotcunque numeri (B,C) multiplicantes eundem numerum (A) totidem genuerint numeros (D, F;) erunt geniti (D,F) multiplicantibus (B,C) proportionales.



Nam cùm B per A fecerit D.; etiam A *a* per B facit D: & cùm C per A faciat F; etiam *b* A per C faciet F. Ergo *c* B eſt ad C, ut D ad F. Quod erat demonſtrandum.

a 16. l. 7.

b ibid.

c præced.

Co-

Corollarium.

Vide Schema pag. seq.

NUmerus A dividens, seu metiens quotcunque numeros (I, P) gignit quotientes (R, S) numeris divisis, seu mensis proportionales.

Nam, quoniam A ipsos I, P metitur, seu dividit per quotientes R, S; manifestum est ex 8. axio. A in R, & S ductum producere I & P. Ergò per 17. ut I est ad P, sic R est ad S.

Aliter.

I 12 P 20
A 4
R 3 S 5.
unit.
E

Cùm A metiens, seu dividens I fecerit R; erit
[a] def. 14. ut *a* unitas ad R, sic A ad
[e] 16. l. 5. I. Igitur *e* permutando, ut unitas est ad A, sic R est ad I. Rursum cùm A
[f] def. 14. metiens P, fecerit S; erit *f* unitas ad S, ut A ad P. Ergo permutando ut unitas est ad A, sic S est ad P. Quare cùm jam ostenderim, etiam R esse ad I, ut unitas est ad
[g] 11. l. 5. A, erit *g* R ad I, ut S ad P. Et permutando R ad S, ut I ad P. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri (A, B, C, D) proportionales fuerint; genitus (AD) ex primo (A) & quarto (D) genito (BC) ex secundo (B) & tertio (C) æqualis erit. Et è converso.

1. Pars. A multiplicans C faciat AC. AC eſt ad AD *a* ut C ad D: & AC eſt ad BC *b* ut A ad B. Quare cùm *c* A ſit ad B ut C ad D, etiam AC *d* eſt ad AD, ut AC eſt ad BC. Ergo BC, AD *e* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

A 3 B 2
C 6 D 4
BC 12 AD 12
AC

a 18. aut. 17. l. 7.
b per eand.
c hyp.
d 11. 5.
e 9. l. 5.

Pars 2. Quoniam geniti AD, BC jam ponuntur æquales; erit *f* AC ad B C, ut A C ad A D. Sed ut A C eſt ad B C, ſic *g* A eſt ad B: & ut AC eſt ad AD, ſic C eſt ad D. Ergo *h* A eſt ad B, ut C ad D. Quod erat demonſtrandum.

f 7. l. 5.
g 18. 7.
h 11. 5.

Corollarium 1.

SI duo numeri B, C metiantur, ſeu dividant eundem numerum A, per quotientes

A
B. C
O. P
O,

O, P; erit ut B ad C, ita reciprocè P ad O.

Nam quia B,C metiuntur, ſeu dividunt A per O, & P, ergo per ax. 8. tam B in O, quàm C in P, faciunt A. Ergo per hanc, B eſt ad C, ut P ad O.

Corollarium 2.

SI A ad B majorem rationem habeat, quàm C ad D; A D genitus ex primo A in quartum D major erit, quàm BC genitus ex ſecundo B in tertium C.

A 4 2 B
G 6 4 D
AD 16. 12 BC
A C

Et è converſo.

1. Pars. A in C faciat AC. AC ad BC eandem proportionem habet, quàm *a* A ad B; hoc eſt majorem *b*, quàm C ad D; hoc eſt majorem *c*, quàm rurſus A C ad A D. Ergo BC minor *d* eſt, quàm AC.

a ſchol. p. 17. l. 7.
b hyp.
c ſchol. p. 17.
d 10. l. 5.

2. Pars. Quoniam AD jam ponitur major, quàm BC; erit ratio AC ad BC *e* major ratione AC ad AD. Sed ratio AC ad BC eſt ratio *f* A ad B; & ratio AC ad AD eſt ratio *g* C ad D. Ergo etiam ratio A ad B major eſt ratione C ad D.

e 8. l. 5.
f ſchol.
g idem.

PRO-

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri (A, B, C) proportionales fuerint; (AC) genitus ab extremis æqualis eſt (BB) quadrato medii.

Et ſi genitus ab extremis quadrato medii æqualis eſt; tres numeri proportionales erunt.

A 4 B 8 Pars 1. Ponatur medius B bis. Igitur per hypoth. A eſt ad B, ut B ad C. Cùm ergò quatuor jam habeantur proportionales; erit *a* genitus ab exrremis AC par genito ex B ſecundo, & B tertio, hoc eſt quadrato ipſius B.

B 8 C 16

BB 64 AC 64

a 1. par. præced.

Pars 2. Eodem modo demonſtrabitur ex 2. parte præcedente.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri (A & B) omnium ſibi proportionalium minimi, numeros ſibi proportionales (C, & D) æquè metiuntur.

Nam quia per hyp. A eſt ad B, ut C ad D; etiam permutando A eſt ad C, ut B ad D.

D. Ergo A, & B ipſorum C, & D ſunt
a def. 9. *a* partes ſimiles, vel aliquotæ, vel aliquantæ. (Eſſe verò A, B minores ipſis C, D. patet ex hypotheſi.) Sed non ſunt ſimiles aliquantæ; quod ſic oſtendo: ſi A, B, ipſorum C, D ſint ſimiles aliquantæ, ergo
b def. 7. *b* A continet O talem aliquotam ipſius C, qualem B continet ipſius D, puta P, ac proinde
c def. 6. *c* O eſt ad C, ut P eſt ad D, &
d 16. l. 5. *d* permutando O eſt ad P, ut C eſt ad D; hoc eſt ut A ad B. Sed A, B continent ipſos O, P. Ergo A, B non ſunt minimi ſuæ proportionis. Quod evertit hypotheſim. Igitur A, B, non ſunt ipſorum C, D ſimiles aliquantæ. Reliquum eſt igitur, ut ſimiles aliquotæ ſint; ac proinde ipſos C, D æquè metiuntur. Quod erat demonſtrandum.

A	2	B	3
O		P	
C	6	D	9

Corollarium.

A.B.C.D.E.
O. P. Q. R. S.
F.G.H.I.K.

EOdem prorſus modo demonſtrabitur numeros (A, B, C, D, E) omnium ſibi proportionalium minimos, quocunque extiterint numero, totidem ſibi proportionales (F, G, H, I, K,) æqualiter metiri.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

CONtinetur *in prop.* 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XXIII.

PRimi a *inter ſe numeri* (*A*, *B*) *ſunt omnium ſibi proportionalium minimi.* a def. 23.

Sint enim alii (ſi fieri poteſt) C, D minimi, & proportionales ipſis A, B. Igitur C, D metiuntur *b* ipſos A, B æquè, hoc eſt per eundem numerum E. Quia ergo C metitur A per E; unitas eſt ad E, ut C ad A: & permutando, ut unitas eſt ad C, ſic E eſt ad A. Sed unitas metitur C. Ergo etiam E metitur A. Eodem modo oſtendam, E metiri B. Cùm igitur E metiatur A, & B; non erunt A, B primi inter ſe: quod evertit hypotheſim.

A 15 B 8
C D
E
unit.

b 21. l. 7. def. 15.

Corollarium.

EOdem prorſus modo demonſtrabitur, ſi quotvis fuerint numeri (A, B, C, D, E) primi inter

A. B. C. D.
F. G. H. I.
E.
unitas

ter se, eos fore quorumlibet sibi totidem proportionalium minimos.

PROPOSITIO XXIV.

NUmeri omnium sibi proportionalium minimi (A,B) sunt inter se primi.

Si non; communis mensura E metiatur A per C, & B per D. Ergo *d* ut A ad B, sic C ad D. Cùm ergo C, D sint minores, quàm A,B; non erunt A,B minimi omnium sibi propertionalium: quod evertit hypothesim.

A4. B5
E
C D

d cor. p. 18. l. 7.

Corollarium.

A.B.C.D
E
F.G.H.I

EOdem modo demonstrabitur, si quotcunque fuerint numeri (A, B, C, D) quorumlibet sibi totidem proportionalium minimi, eos fore inter se primos.

PROPOSITIO XXV.

NUmerus (N,) qui ex duobus (A,D) inter se primis metitur unum (A,) ad reliquum (E) primus est.

Nam

A B
N X

Nam ſi N, B non ſint primi inter ſe; utrumque metiatur X. Quoniam ergo X metitur N, & N metitur *a* A; etiam X metietur *b* A. Volebas autem X etiam metiri B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi: quod repugnat hypotheſi.

a hyp.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo numeri (A, B) ad quempiam (C) primi fuerint; etiam (A B,) ex iis genitus, ad eundem (C) primus erit.

A 7. B 3
C 8
A B 21
D-----F---

Si enim AB, & C non ſint inter ſe primi; utrumque metiatur D per F. Ergo D in *c* F facit AB. Atqui etiã *d* A in B facit AB: Ergo D eſt ad A, *e* ut B ad F. Jam verò, quia A & C ſunt inter ſe primi, & D volebas metiri ipſum C, erit *f* D ad A primus. Ergo D, & A in ſua proportione *g* ſunt minimi. Ergo ſibi proportionales *h* B, F æquè metiuntur; D nempe ipſum B; & A ipſum F. Quare cùm D volueris etiam metiri ipſum C, metietur D utrumque C, ac B. Ergo C, B non ſunt primi inter ſe: quod hypotheſim evertit.

c ax. 8.
d hyp.
e 19. l. 7.
f præc.
g 23. l. 7.
h 21. l. 7.

Primus ergo erit A B ad C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri (A,B) fuerint inter ſe primi; etiam (A A,) quadratus unius, ad reliquum (B) primus erit.

A 4 B 7
AA 16
A 4

Ponatur A bis. Quia igitur A *a* prior primus eſt ad B; etiam A poſterior ad B primus erit. Ergo factus ex A in A, hoc eſt AA ad B etiam *b* primus eſt.

a hyp.
b præc.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri (A, B) ad duos numeros (C, D,) uterque ad utrumque, primi fuerint; etiam ex iis geniti (AB,CD) inter ſe primi erunt.

A B
AB
C D
CD

Nam, quia *a* A,& B primi ſunt ad C; etiam *b* AB primus erit ad C. Rurſum, quia A, & B primi ſunt *c* ad D, etiam AB ad D primus erit. Cùm igitur C, & D ad AB primi ſint; etiam C D, ex

a hyp.
b 26. l. 7.
c hyp.

ex iis genitus, ad AB *d* primus erit. Quod erat demonſtrandum. *d* 26. l. 7.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri (A, B) inter ſe fuerint primi; etiam eorum quadrati (AA, BB,) cubi (AAA, BBB,) & ſic deinceps, inter ſe primi erunt.

Quoniam A, B ſunt primi inter ſe; etiam AA ad B *a* primus eſt. Et quoniam AA, ac B ſunt primi inter ſe; etiam *b* BB ad AA primus erit. Quod erat primum demonſtrandum.

A	B
AA	BB
AAA	BBB
AAAA	BBBB

a 27. l. 7.

b per eand.

Rurſus, quoniam A, B inter ſe primi ſunt; etiam BB ad A *c* primus erit. Ergo B, & BB ad A primi ſunt. Oſtenſum quoque eſt A, & AA ad B eſſe primos. Ergo AAA, genitus ex A in AA, ad BBB, genitum ex B in BB, *d* primus eſt. Quod erat alterum.

c per eand.

d 28. l. 7.

Denique, quia A, & AA ad B primi ſunt; etiam AAA, ex iis factus, ad *e* B primus eſt. Eodem modo, quia B, & BB ad A primi ſunt; etiam BBB ad A *f* primus erit. Quoniam igitur A, & AAA ad B, item B

e 26. l. 7.

f ibid.

ac BBB ad A, primi ſunt; etiam ex iis
g 18. l. 7. geniti AAAA, BBBB inter ſe *g* primi erunt. Et ſic deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri (A, B) inter ſe primi fuerint; etiam (A + B,) uterque ſimul, ad quemlibet illorum primus erit.

Et ſi uterque ſimul (A + B) ad alterutrum primus fuerit; etiam qui in principio dabantur numeri (A, B) inter ſe primi erunt.

Pars 1. Nam ſi A + B ad A, A + B non ſit primus, metietur eos C------ numerus C, qui proinde etiam
a ax. 11. *a* metietur B. Ergo A, B non ſunt inter ſe primi: quod repugnat hypotheſi.

Pars 2. Si primi non ſint A, B; metietur eos C, qui proinde metietur *b* etiam
b ax. 10. A + B: quod hypotheſim evertit.

Corollarium.

SI A + B ad A primus eſt; etiam A + B ad B primus erit. Nam, quia A + B ad A primus eſt; erunt A, B inter ſe primi per 2. part. Tum quia jam primi in-

inter ſe ſunt A, B ; etiam per 1. partem A + B ad B primus erit.

PROPOSITIO XXXI.

OMnis primus numerus (A) ad omnem numerum (B,) quem non metitur, primus eſt.

Nam ſi A, B non ſint primi inter ſe ; metietur eos aliquis numerus C, diverſus ab A: cùm A, per hypotheſim, non metiatur B. Ergo C non eſt *a* primus.

A. B
C

a def. 21.

PROPOSITIO XXXII.

SI planum a numerum (AB) aliquis primus (C) metiatur; is etiam è plani lateribus (A, B) alterutrum metietur.

a def. 25.

A. B
AB
C. D---------

Planum AB metiatur primus C per D ; ſi jam C non metiatur A, erunt C, A *b* primi inter ſe ; ideoque in ſua proportione *c* minimi. Quia autem C metitur AB per D, ergo C in D *d* facit AB. Sed etiam A in B facit AB. Ergo C eſt ad A, ut *e* B ad D.

b præc.
c 23. l. 7.
d ax. 8.
e 19. l. 7.

e 23. l. 7. Quare *e* cùm C, A ſint in ſua proportione
f 21. l. 7. minimi, C metietur B. Eodem diſcurſu probabitur C metiri A, ſi non metiatur B. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

OMnem compoſitum numerum aliquis primus metitur.

F
N------P---

Compoſitus quicunque
a def. 22. eſto F. Eum igitur *a* metiuntur unus, vel plures numeri, quorum minimus ſit N. Dico N primum eſſe. Si enim primus non eſt, eum metietur aliquis P; qui proinde,
b ax. 11. licèt minor ſit, quàm N, metietur *b* etiam F. Quod eſt abſurdum; cùm N ponatur minimus omnium, qui F metiuntur.

PROPOSITIO XXXIV.

OMnis numerus, aut primus eſt, aut ab aliquo primo menſuratur.

Patet ex præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

NUmeris datis quotcunque (A, B, C) minimos ipſis proportionales invenire.

Inveniatur *a* O maxima menſura communis datorum A, B, C; quæ eos metiens, ſeu dividens, faciat D, E, F. Dico hos datis A, B, C eſſe proportionales minimos. Si menſura communi careant, erunt ipſi inter ſe primi per 1.7; adeoque minimi in ſua proportione per 23. Eſſe proportionales D, E, F, patet ex corol. p. 18. Minimos eſſe, ſic oſtendo. Sint, ſi fieri poteſt, alii P, Q, R minimi proportionales ipſis A, B, C. Ergo P, Q, R metiuntur *b* A,B,C per eundem numerum, ut per X. Ergo P in X facit *c* A. Sed etiam D in O facit *d* A. Ergo *e* ut P eſt ad D, ſic O eſt ad X. Sed P volebas eſſe minorem, quàm D. Ergo etiam O minor eſt, quàm X. Jam quia P, Q, R metiuntur A, B, C per X, patet X in P, Q, R *f* producere A, B, C; ac proinde X metiri *g* A, B, C, per P, Q, R. Ergo O non eſt ipſorum A, B, C ma-

A. B C.
O ----
D. E. F
P. Q. R
X----

a 3. l. 7.

b 21. & coroll. l. 7.
c ax. 8.
d conſt. & ax. 8.
e 19. l. 7.
f ax. 8.
g ax. 7.

maxima communis menſura : quod evertit hypoteſim.

Corollarium .

MAxima menſura quotlibet numerorum ipſos metitur per minimos omnium ipſis proportionalium.

PROPOSITIO XXXVI.

D*Vobus numeris datis (A,B;) reperire minimum numerum , quem metiuntur .*

Si dati A , B ſunt inter ſe primi ; ab iis genitus AB, eſt quæſitus . Nam, quia A in B facit AB, A metietur *a* AB. Et quia B in A facit etiam *b* AB, B metietur AB. Ambo igitur A & B metiuntur AB. Quod verò minimus ſit AB, quem A , & B metiuntur , ſic oſtendo . Eſto , ſi fieri poteſt , O minor , metianturque A , & B ipſum O per N , & P. Quare *d* A eſt ad B , ut P ad N. Quia autem A, B ſunt *e* primi: erunt minimi in ſua *f* proportione ; ac proinde A metitur P, *g* & B metitur N. Jam quia A in B facit AB, & idem A in N facit O , ut oſtenſum ſupra,

A. B
AB
O
N. P

a ax. 7.
b 16. l. 7.
d coroll. p. 19. l. 7.
e hyp.
f 23. l. 7.
g 21. l. 7.

pra, erit ut *h* B ad N, ſic AB ad O. Sed jam oſtendi B metiri N. Ergo etiam AB metietur O ſe minorem: quod eſt abſurdum. *h* 17. l. 7.

Si dati A, & B non ſunt primi inter ſe; inveni C, D minimos *h* ipſis proportionales. Tum A in D faciat AD, & B in C gignat BC. Dico AD, ſeu BC (æquales *i* enim ſunt) eſſe minimum, quem A, B metiuntur. Nam ſi velis A & B metiri O minorem aliquem, quàm AD; eodem diſcurſu, quo ſupra, oſtendam AD metiri O ſe minorem.

A. B
C. D
AD vel BC
O
N. P

h præced.

i 19. l. 7.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri (A, & B) metiantur aliquem numerum (CO;) etiam (F) minimus, quem illi (A, & B) metiuntur, eundem (CO) metietur.

A. B
C------D------O.
F

Nam ſi F non metitur CO, O ablatus ex C, quoties poteſt, relinquat D O ſe minorem. Quoniam *a* verò, tam A, quàm

a hyp.

quàm B metiuntur F; F verò metitur
b ax. 11. C D; etiam *b* A, & B metientur ipſum C
c hyp. D. Atqui A, B metiuntur *c* etiam totum C O. Ergo metientur, & reliquum
d ax. 12. *d* D O minorem, quam F: quod evertit hypotheſim.

PROPOSITIO XXXVIII.

Datis tribus numeris (A, B, C) invenire minimum numerum, quem metiuntur.

a 36. l. 7. A. B. C. P R X

Inveni *a* minimum P, quem A, & B metiuntur. Si tertius C etiam metiatur P; erit P minimus, quem metiuntur A, B, C. Sit enim (ſi fieri poteſt) alius minor R, quem A, B, C metiantur. Ergo P non eſt minimus, quem metiuntur A, B. Quod eſt contra hypotheſim.

Quod ſi C non metiatur P, inveni
per eand. *b* R minimum, quem P, & C metiuntur; & erit R minimus, quem metiuntur A, B, C. Nam quia A, B metiuntur P, & P metitur R; etiam A, & B me-
c præc. tientur *c* R. Metitur autem & C ipſum R. Tres igitur A, B, C metiuntur R.

Quod

Quod verò R etiam minimus ſit, ſic oſtenditur. Eſto (ſi fieri poteſt) X minor, quàm R, quem A, B, C metiantur. Ergo P, minimus, quem metiuntur A, B, metietur etiam *d* X. Ergo cùm C, P, metiantur X (C ex hyp. & P ex jam demonſtratis) minorem quàm R, non erit R minimus, quem C, P metiuntur. Quod eſt abſurdum contra conſtructionem. *d* per eand.

Corollarium.

1. EOdem artificio datis quotcunque numeris, invenietur minimus, quem illi metiuntur.

2. Si tres numeri A, B, C, (imo quotlibet) aliquem numerum X metiantur; etiam R minimus, quem A, B, C metiuntur, metietur X.

Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, cùm A, B *e* metiantur R, etiam P *f* metietur X. Et cùm C, P metiantur X (C ex hypoteſi & R ex jam demonſtratis,) etiam R metietur X. Quod erat demonſtrandum. *e* hyp. *f* 27. l. 7.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerus (A) numerum (B) metiatur per quotientem (C;) quotiens erit pars menſi (B,) à metiente (A) denominata.

Nam cùm A metiatur B per C; etiam C metietur *a* B per A, hoc eſt C toties acceptus, quot ſunt unitates in A; faciet B; ac proinde C eſt pars ipſius B, ab A denominata.

A 3 B 24
(C 4

a ax. 9.

PROPOSITIO XL.

SI numerus (A) partem habuerit quamlibet (B;) metietur illum numerus (E,) partem denominans.

Quoniam B eſt pars numeri A denominata ab E, ergo B metitur A per E.

A 24 B 6
E 4

Ergo viciſſim E metitur *a* A per B.

a ax. 9.

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire minimum, qui partes habeat, à datis numeris (A, B, C) denominatas.

In-

Inveniatur *c* minimus G, quem partium denominatores dati A, B, C metiantur. Ajo G eum esse, qui quæritur.

A 2	B 3	C 4
G 12		
P 6	Q 4	R 3
X		

c 38. 7.

Metiantur enim A, B, C ipsum G per quotientes P, Q, R. Igitur P, Q, R erunt *d* partes ipsius G, ab A, B, C denominatæ. Quod autem G minimus sit, manifestum est: si enim X minor, quàm G, haberet partes à numeris A, B, C denominatas; A, B, C *e* metirentur ipsum X; adeoque G non esset minimus, quem metirentur: contra hypothesim.

d 39. 7.

e præc.

Corollarium.

MInimus numerus, quem dati quotcunque numeri A, B, C, metiuntur, est etiam minimus omnium, habentium partes, à datis numeris denominatas.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER SECUNDUS.

EUCLIDI OCTAVUS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint quotcunque numeri proportionales (A, B, C, D,) quorum extremi (A, D) ſint primi inter ſe; erunt (A, B, C, D,) omnium ſibi proportionalium minimi.

A, B. C. D.
E. F. G. H.

Sint enim (ſi fieri poteſt) alii E, F, G, H, minores, & proportionales ipſis A, B, C, D. Igitur ex æquo *a* erit A ad D, ut E ad H. Et quia A, & D ſunt inter ſe primi; erunt ſibi proportionalium *b* minimi; ac proinde metientur *c* ipſos E, H, ſe minores: quod eſt abſurdum.

a 22. 5.

b 23. 7.

c 21. 7.

Apud Euclidem numeri A, B, C, D ponuntur continuè proportionales, quod non requiri, patet ex demonſtratione.

PRO-

PROPOSITIO II.

NUmeros quot placuerit, in ratione data (A ad B,) continuè proportionales minimos reperire.

Un.			
A 2	B 3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.
8	12	18	27

Sint A, B minimi termini rationis datæ. A in A faciat AA. A in B faciat AB. B in B, faciat BB. Erunt AA, AB, BB tres minimi in ratione A ad B.

Quod enim proportionales ſint in ratione A ad B, patet ex 17. l. 7. ejuſque Scholio. Quod minimi, ſic oſtendo. Quia A, B ſunt *a* minimi in ſua proportione, erunt inter ſe *b* primi. Quare etiam eorum quadrati AA, & BB inter ſe *c* primi erunt: Ergo AA, AB, BB, ſunt tres *d* minimi ſibi proportionalium, hoc eſt in ratione A ad B.

a hyp.

b 24. l. 7.

c 29. l. 7.

d præc.

Multiplicans deinde A tres jam inventos, faciat AAA, AAB, ABB; tum B multiplicans tertium BB, faciat BBB. erunt hi qnatuor in ratione A ad B proportio-

nales minimi. Quod ſint proportionales in ratione A ad B, patet ex 17. l. 7. ejuſque Scholio. Quod minimi, patet ex 29. lib. 7. & ex præcedentibus.

e 29. l. 7. Nam AAA, BBB ſunt *e* primi inter ſe; ac proinde AAA, AAB, ABB, BBB

f præc. ſunt quatuor *f* minimi in ſua proportione, quæ eſt A ad B.

Eodem artificio invenientur minimi quatuor, quinque, & deinceps plures in infinitum.

Corollaria.

1. Trium minimorum numerorum (AA, AB, BB) continuè proportionalium, extremi ſunt quadrati; ſi quatuor fuerint, extremi erunt cubi; & ſic deinceps.

2. Numerorum minimorum continuè proportionalium, jam inventorum, extremi ſunt primi inter ſe, patet ex eorum geneſi, & ex 29. l. 7.

3. Duo rationis datæ minimi (A, B) metiuntur omnes reliquos infinitos. Cùm enim reliquos omnes gignant A, & B; eos quoque metientur, per ax. 7. & corol. p. 16. l. 7.

4. Unitas, A, AA, AAA, ſunt conti-

tinuè proportionales; ſimiliter & unitas, B, BB, BBB. Nam cùm A, multiplicans A, faciat AA; erit ut *g* unitas ad A, ſic A ad AA: & cùm A, multiplicans AA, faciat AAA; erit *h* ut unitas ad A (hoc eſt, ut A ad AA,) ſic AA ad AAA. Ergo &c.

g def. 13.

h per cand.

5. Inter extremos AAA, & BBB cadunt æquè multi medii, atque inter ipſos, & unitatem; patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO III.

SI fuerint quotcunque continuè proportionales (A, B, C, D) minimi eandem cum ipſis rationem habentium; extremi (A, D) inter ſe primi erunt.

Inveniatur *a* duo E, F minimi in ratione A ad B. Tum per præced. inveniantur O, P, Q, R totidem minimi in ratione E ad F. Quoniam igitur tam O, P, Q, R, quàm A, B, C, D, ſunt minimi in ratione E ad F, & æquè multi; eoſdem utrinque numeros illos eſſe neceſſe eſt. Sed extremi O, R ſunt inter ſe *b* primi. Ergo etiam

A. B. C. D.
E. F.
O. P. Q. R.

a 33. 7.

b cor. 2. præc.

etiam A, D inter ſe primi erunt. Quod erat demonſtrandum.

Porro ſeriem proportionalium continuè numerorum minimorum, quorum proinde extremi ſunt inter ſe primi, non poſſe ulteriùs continuari, demonſtrabitur. p. 17.9.

PROPOSITIO IV.

DAtis quotcunque rationibus in numeris minimis; eaſdem in minimis etiam numeris continuare.

1. Dentur in minimis terminis rationes duæ A ad B, & C ad D. Inveni O *c* minimum, quem metiuntur B, & C. Tum quoties B metitur O, toties A metiatur numerum N; & quoties C metitur O, toties D metiatur P. Dico N, O, P eſſe minimos, qui continuant rationes datas A ad B, & C ad D. Quod enim continuent rationes datas, patet ex ipſa eorum geneſi, vi cujus ut A eſt ad N, ſic B eſt ad O; & ut C eſt ad O, ſic D ad P. Quare permutando, ut A ad B, ſic N ad O; & ut C ad D, ſic O ad P. Quod minimi ſint, ſic oſtendo. Mi-

A ad B. C ad D
N. O. P.
Q. R. S.

c 36. 7.

no-

nores enim (ſi fieri poteſt) Q, R, S, continuent rationes datas. Quoniam igitur, ut A eſt ad B, ſic Q ad R; ſuntque A, B in ratione ſua minimi; liquet *d* A, B metiri ipſos Q, R. Eandem ob cauſam C, D metientur R, S. Quoniam ergo ambo B, C metiuntur R; etiam O minimus, quem metiuntur B, C, ipſum R *e* metietur, major minorem. Quod eſt abſurdum. *d* 21. 7. *e* 37. 7.

2. Dentur A ad B. C ad D. E ad F. in minimis N. O. P, Q terminis ra- R. S. T. V. tiones tres A ad B, C ad D, E ad F. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C; & quoties B, C metiuntur O, toties A, D metiantur numeros N, P. Tum ſi E metitur P, fiat ut toties F metiatur Q. Dico N, O, P, Q, eſſe minimos, qui tres rationes datas continuant.

Quod enim N ſit ad O, ut A ad B; & O ad P, ut C ad D; & P ad Q, ut E ad F, ex ipſa conſtructione patet. Quod minimi ſint, ſic oſtendo. Continuent minores alii R, S, T, V (ſi fieri poteſt) rationes datas. Oſtendam, ut ſupra, majorem O metiri minorem S. Quod eſt abſurdum.

Si verò E non metiatur P; inveniatur S minimus, quem P, & E metiuntur; & quoties P metitur S, toties O, N metiantur numeros R, Q: item quoties E metitur S, toties F metiatur T. Dico Q, R, S, T esse minimos, qui tres rationes datas continuant.

A ad B, C ad D. E ad F.
N. O. P.
Q. R. S. T.
V--- X--- Y--- Z----

Nam ex constructione patet, S esse ad T, ut E ad F; item Q, R, S proportionales esse ipsis N, O, P. Sed N, O, P continuant (ut ostensum supra) rationes A ad B, & C ad D. Ergo etiam Q, R, S easdem continuant: ac proinde, cùm etiam sit ut E ad F, sic S ad T; patet Q, R, S, T continuare tres rationes A ad B, C ad D, E ad F. Quod autem Q, R, S, T minimi sint, sic ostendo. Continuent (si fieri potest) tres rationes datas minores alii, V, X, Y, Z. Quoniam igitur A est ad B, ut V ad X, sintque A, B minimi *o* in ratione sua; B *f* metietur X. Eodem modo ostendam etiam, C metiri X. Ergo *n* etiam O minimus, quem metiuntur B ac C, metietur ipsum X. Jam quia ponitur, X

o hyp.
f 21. 7.
n 37. 7.

es-

esse ad Y, ut C est ad D, hoc est ut O ad P; etiam permutando X erit ad O, ut Y ad P. Cùm ergo O metiatur X, etiam P metietur Y. Sed etiam E metietur Y, (cùm E, F sint in ratione *g* sua minimi, & velis ut E ad F, sic Y esse ad Z.) Ergo etiam S minimus, quem E, & P metiuntur, metietur Y, minor majorem. Quod est absurdum. *g* hyp.

Eodem artificio in minimis terminis continuabuntur rationes quatuor, & plures deinceps in infinitum.

PROPOSITIO V.

PLani numeri (AB, CD) rationem inter se habent compositam ex laterum rationibus.

Nimirum ex rationibus A ad C, & B ad D; vel rationibus A ad D, & B ad C.

B, multiplicans C, faciat AB CD BC. Ratio AB ad CD BC composita est ex rationibus AB ad BC, & BC ad CD, ut demonstravi in Elem. Geom. l. 5. parte 3. n. 12. Sed ratio AB ad BC est *a* eadem cum ratione A ad C, & ratio BC ad CD eadem *b* est cum ratione B ad D. Er- *a* 17. 7. *b* ibid.

go etiam ratio AB ad CD compoſita eſt ex rationibus laterum A ad C, & B ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

SI numerorum continuè proportionalium (A,B,C,D,E) primus (A) ſecundum (B) non metiatur; neque ullus ullum metietur.

Quod nullus metiatur proximè inſequentem, patet ex ipſa hypotheſi. Quod verò nec ullus ullum metiatur, ſic oſtendo. Tribus A, B, C inveniantur *a* proportionales minimi N, O, P. Erunt ergo N, P primi inter ſe, eritque ex *o* æquo, ut A ad C, ſic N ad P. Quia verò A eſt ad B, ut N ad O; & A non metitur B; neque N metietur O; ac proinde N non eſt unitas. Quare cùm N, P ſint primi inter ſe, N non *b* metietur P. Atqui A eſt ad C, ut N ad P. Ergo neque A metitur C. Eodem modo oſtendam, neque B metiri tertium à ſe numerum D, neque C à ſe tertium E. Et ſi quatuor ſumantur minimi proportionales

A. B. C. D. E.
N. O. P.

A. B. C. D. E.
N. O. P.

a 35. 7.

b def. 22.

les datis A, B, C, D; ſimili viâ demonſtrabitur, neque A metiri quartum D, neque B à ſe quartum E, & ſic deinceps.

PROPOSITIO VII.

SI numerorum continuè proportionalium (A, B, C, D, E) aliquis quempiam aliorum à ſecundo (B) metiatur; etiam primus (A) ſecundum (B) metietur.

Nam ſi A non metiatur B; neque ullus ullum ex ſequentibus *c* metietur; Quod evertit hypotheſim. *c* prac.

PROPOSITIO VIII.

SI quatuor numeri in eadem ſuerint proportione (ut A ad B, ſic C ad D;) quot inter duos primos (A, & B) exiſtunt proportionales medii, totidem inter poſteriores duos (C & D) exiſtent.

A. P. Q. B. Inter A, B cadant me-
N. O. R. S. dii P, Q. Numeris A,
C. V. X. D. P, Q, B inveni *a* propor- *a* 35. 7.
tionales minimos N, O,
R, S. Igitur ex æquo *o* erit ut N ad *o* 22. 7.
S, ſic A ad B, hoc eſt C ad D. Sunt

au-

antem N, S *b* primi inter ſe, ac proinde in ſua *c* proportione minimi. Ergo N, S æquè metiuntur *d* ſibi proportionales C, D. Toties O, & R metiantur alios V, X. Quoniam igitur N, O, R, S, æquè metiuntur ipſos C, V, X, D; patet C, V, X, D, eſſe proportionales ipſis N, O, R, S, hoc eſt datis *e* A, P, Q, B. Quare cùm A, P, Q, B, ſint *f* continuè proportionales; etiam C, V, X, D totidem continuè proportionales erunt; ac proinde inter A, B, & inter C, D, æquè multi exiſtunt medii proportionales: quod erat demonſtrandum.

b 3. 8.
c 22. 7.
d 21. 7.
e hyp.
f hyp.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri (C, & D,) primi inter ſe fuerint; quot inter ipſos exiſtunt medii proportionales, totidem & inter eorum ſingulos, ac unitatem exiſtent.

C. O. P. D.
1.
Unitas
A. B.
AA. AB. BB.
AAA. AAB. ABB. BBB.

Inter C, ac D exiſtant medii proportionales O, P. Inveni *a* duos A, B, minimos in

a 2. 8.

in ratione C ad D; deinde tres AA, AB, BB; demum quatuor AAA, AAB, ABB, BBB, donec inventorum multitudo par ſit multitudini datorum C, O, P, D. Quoniam ergo extremi C, D, ſunt *b* primi inter ſe; erunt C, O, P, *b* hyp.

C.	O.	P.	D.
	1.		
	Unitas		
A.		B.	
AA.	AB.	BB.	
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.

Deminimi ſibi proportionalium, hoc eſt minimi in *d* ratione A ad B. Quare cùm AAA, AAB, ABB, BBB ſint etiam *e* minimi in ratione A ad B; erunt hi illis æquales, ſinguli ſingulis. Deinde ex prop. 2. hujus, & defin. 13. patet unitatem, A, AA, AAA, itemque unitatem, B, BB, BBB eſſe continuè proportionales. Quare cùm tam multitudo AAA, AA, A, quàm BBB, BB, B, cum unitate par ſit multitudini AAA, AAB, ABB, BBB hoc eſt C, O, P, D; quot medii cadent inter C, & D, totidem cadent inter unitatem, & AAA, ſive C; itemque inter unitatem, & BBB, ſive D. Quod erat demonſtrandum.

c 23. 7.

d hyp.

e ex conſ.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI inter unitatem, & duos numeros (AAA, ac BBB,) æquè multi medii proportionales exiſtant; etiam inter ipſos (AAA, & BBB) æquè multi exiſtent medii.

Inſtituatur tota conſtructio propoſitionis. 2. hujus, eritque manifeſta demonſtratio ex corollario 4. & 5. propoſitionis ejuſdem.

Corollaria.

1. Si fuerint duo ordines ab unitate continuè proportionalium 1, A, AA, AAA, &c. 1, B, BB, BBB, &c.; erit ratio AA ad BB duplicata rationis A ad B, & ratio AAA ad BBB triplicata rationis A ad B, & ſic deinceps.

unit.		
1.		
A.		B.
AA.	AB.	BB.
AAA.	AAB.	ABB. BBB.

Nam AA, AB, BB ſunt continuè *a* proportionales in ratione A ad B. Ergo ratio AA ad BB eſt duplicata *b* rationis AA ad AB, hoc eſt A ad B. Similiter cùm

a ſcol. p. 17. 7.
b def. 12.

cùm AAA, AAB, ABB, BBB ſint continuè *c* proportionales in ratione A ad B; erit ratio AAA ad BBB triplicata *d* rationis AAA ad AAB, hoc eſt rationis A ad B. Et ſic deinceps. Quod erat demonſtrandum.

c ſchol. 17. 7.
d def. 22.

2. Verum eſt corollarium primum, à quocunque communi numero (C) inchoentur ſeries.

Cùm enim ſint in proportione continua A, B, C, item A, E, F; erit CA *a* par BB, & FA par EE. Sed ratio BB ad EE eſt duplicata rationis B ad E, per 11, quæ ab hac non dependet. Ergo etiam ratio CA ad FA (hoc eſt ratio *b* C ad F) duplicata eſt rationis B ad E: quod erat primum. Pari modo oſtendam, quod ratio DB ad GE ſit duplicata rationis C ad F, ac proinde quadruplicata rationis B ad E. Sed ratio DB ad GE, componitur ex rationibus D ad G, & B ad E. Ergo ratio D ad G cum ratione B ad E eſt quadruplicata rationis B ad E. Ergo ſola ratio D ad G eſt triplicata rationis B ad E: quod erat alterum.

A
B. E.
C. O. F.
D. P. Q. G.

a 20. 7.

b ſchol. 17. 7.

3. Si inter numerum A, & duos D, G æquè multi cadant medii proportionales

B,

B, C, E, F; etiam inter ipſos D, C, (licèt alteruter ſit unitas,) æquè multi medii cadent.

Patet ex corollario 2. Cùm enim ratio D ad G ſit triplicata rationis B ad E; inter D, & G cadent duo *c* medii proportionales in ratione B ad E.

c def. 12.

PROPOSITIO XI.

INter duos quadratos numeros (AA, BB) unus cadit medius proportionalis (AB;) & proportio quadrati numeri AA ad quadratum numerum BB duplicata eſt proportionis laterum (A, B.)

Pars 1. AA eſt ad AB *a*, ut A ad B; & AB eſt ad BB, ut A ad B.

AA. AB. BB.
A B.

a ſchol. 17. 7.

o 11. 5. Ergo *o* AA eſt ad AB, ut AB ad BB. Quod erat primum.

Pars 2. Patet ex 1. parte, rationem AA ad BB eſſe duplicatam *b* rationis AA ad AB, hoc eſt *c* rationis A ad B.

b def. 12. *c* ſchol. 17. 7.

Scholium.

EX *hac, & 8 præcedente demonſtrari poteſt theorema illud celeberrimum, quod Euclidi*

di eſt libri 10 *poſtremum*: In quadrato *diameter lateri incommenſurabilis eſt.*

Si enim id negatur, erit diameter ad latus, ut numerus ad numerum, puta ut a *ad* b, *ut* a. b. *patet ex definitione commenſurabilium. Ergo* aa. bb. *etiam (ut patet ex* 22. *l.* 6.*) quadratum diametri eſt quadratum lateris, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb; *quod fieri non poteſt; cùm enim (ut patet ex* 47. *l.* 1.*) quadratum diametri ſit ad quadratum lateris, ut* 2. *ad* 1, *ſi illud ad hoc eſſet, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *etiam* aa *eſſet ad* bb, *ut* 2 *ad* 1; *ac proinde cùm inter* aa, & bb *per hanc propoſitionem cadat unus medius integer, etiam inter* 2, & 1 *caderet medius integer unus, per* 8. *Quod eſt abſurdum.*

PROPOSITIO XII.

INter duos cubos numeros (AAA, & BBB,) duo cadunt medii proportionales (AAB, ABB;) & cubi AAA ad cubum BBB proportio eſt triplicata proportionis laterum (A, B.)

AAA. AAB. ABB. BBB.
A. B.

Per ſcholium p. 17. l. 7. AAA, AAB, ABB, BBB ſunt continuè proportionales in ratione A ad B, quod erat primum; ex quo, & definitione 12. patet etiam ſecundum.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

DEntur numeri continuè proporrionales quotcunque A,B,C, qui in ſeipſos ducti faciant AA,BB,CC; & in bos rurſum ducti faciant AAA, BBB, CCC; atque ita deinceps in infinitum.

Erunt AA, BB, CC, item AAA, BBB, CCC, & ſic deinceps continuè proportionales.

1.	1.	1.
A.	B.	C.
AA.	BB.	CC.
AAA.	BBB.	CCC.

Per corol. 4. p. 2. hujus tres ſeries, hic ab unitate incipientes, ſunt continuè proportionales. Ergo ratio AA ad BB *a* eſt duplicata rationis A ad B, hoc eſt *b* rationis B ad C. Sed etiam ratio BB ad CC duplicata *c* eſt rationis B ad C. Ergo *d* AA eſt ad BB, ut BB ad CC. Similiter, quia ratio AAA ad BBB eſt triplicata *e* rationis A ad B, hoc eſt *f* B ad C, cujus etiam triplicata *g* eſt ratio BBB ad CCC; erit quoque *h* AAA ad BBB, ut BBB ad CCC. Quod erat demonſtrandum.

a coroll. p. 10. 8.
b hyp.
c coroll. p. 10. 8.
d 34. 5.
e coroll. p. 10. 7.
f hyp.
g coroll. p. 10. 7.
h 34. 5.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus (AA) quadratum numerum (BB) metiatur; etiam (A) latus unius metietur (B) latus alterius.

Et ſi latus (A) metiatur latus (B;) etiam quadratus AA quadratum BB metietur.

AA. AB. BB.
A. B

Pars 1. A in B faciat AB. Per ſchol. p. 17. l. 7. AA, AB, BB ſunt propotionales in ratione A ad B. Quare cùm *a* AA metiatur BB, etiam *b* AA metietur AB. Sed ut AA eſt ad AB, *c* ſic A eſt ad B. Ergo etiam *d* A metitur B: quod erat primum.

a hyp.
b 7. 8.
c ſchol. p. 17. 7.
d ax. 11.

Pars 2. Ut A eſt ad B, ſic *e* AA eſt ad AB. Sed A jam ponitur metiri B. Ergo etiam AA metitur AB. Rurſum, quia ut A ad B, *f* ſic AB eſt ad BB, metiturque *g* A ipſum B; etiam AB metietur *h* BB. Ergo AA metietur quoque BB. Quod erat alterum.

e ſchol. p. 17. 7.
f ibid.
g hyp.
h ax. 11.

PROPOSITIO XV.

SI cubus numerus (AAA) cubum numerum (BBB) metiatur; etiam latus (A) metietur latus (B:) Et è converſo.

Pars 1. Inter utrumque cubum interpone numeros AAB, ABB, quorum geneſim litteræ ſatis indicant. Erunt omnes quatuor *a* continuè proportionales in ratione A ad B. Quare cùm AAA metiatur BBB, *p* etiam AAA *o* metitur AAB. Sed AAA eſt ad AAB, *q* ut A ad B. Ergo etiam A metitur B; quod erat primum.

AAA. AAB. ABB. BBB.
A. B.

a ſchol. 17. 7.
p hyp.
o 7. 8.
q ſchol. 17. 7.

Pars 2. Quia AAA eſt ad AAB, ut *b* A ad B, ponitur que jam A metiri B; etiam AAA metietur AAB. Pari modo quia AAB, ABB, BBB ſunt *c* inter ſe, ut A ad B; etiam AAB metietur ABB, & ABB ipſum BBB. Ergo etiam *d* AAA metitur BBB. Quod erat alterum.

b ibid.
c ibid.
d ax. 1.

PROPOSITIO XVI.

Si quadratus (AA) quadratum (BB) non metiatur; neque latus (A) metietur latus (B.) Et è converſo.

Pars 1. Nam ſi latus A tunc metiatur latus B; etiam AA *a* metiretur BB, contra hypotheſin.

AA. BB.
A. B.

a 2. par. 9. 13. 8.

Pars

Pars 2. Si latere A non metiente B, metiatur AA ipſum BB, ſequeretur etiam *b* A metiri B, contra hypotheſim.

b 1. par. ejuſd.

PROPOSITIO XVII.

SI cubus (AAA) cubum (DDD) non metiatur; neque latus (A) metietur latus (D.) Et è converſo.

Demonſtratur ab abſurdo per 15.

PROPOSITIO XVIII.

INter duos planos ſimiles (AB, CD) unus medius proportionalis eſt numerus: & plani ad planum ratio duplicata eſt rationis homologorum laterum (A, C.)

Pars 1. Quoniam AB. BC. CD. AB, CD ſimiles plani A. B. C. D. ſunt, erit latus *a* A ad latus B, ut latus C ad latus D; & permutando A ad C *b*, ut B ad D. Cùm igitur AB ſit ad BC, *c* ut A ad C, hoc eſt (quod jam oſtendi) ut B ad D; hoc eſt *d* ut BC ad CD; erit BC medius proportionalis inter AB, CD. Quod erat primum.

a def. 27.

b 16. 5.

c ſchol. p. 17. 7.

d ibid.

Pars 2. Per 1. partem Ratio AB ad

CD, eſt duplicata *e* rationis AB ad BC, hoc eſt *f* rationis A ad C. Quod erat alterum.

e defin. *f* ſchol. p. 17. 7.

PROPOSITIO XIX.

INter duos ſimiles ſolidos (ABC, DEF) duo cadunt medii proportionales (BDC, CDE:) & ratio ſolidi ad ſolidum eſt triplicata rationis laterum homologorum (A, & D.)

ABC. BCD. CDE. DEF. Pars 1.
A. B. C. D. E. F. quia ſimiles ſolidi

ſunt ABC, & DEF; erunt unius latera A, B, C proportionalia alterius lateribus D, E, F. Quare permutando A eſt ad D, ut B ad E, & C ad F. Jam per ſcholium p. 16. l. 7. eſt

ABC ad BCD ut A ad D	BCD ad CDE ut B ad E	CDE ad DEF ut C ad F

Sed jam oſtendi A eſſe ad D, ut B eſt ad E, & ut C eſt ad F. Ergo etiam ABC eſt ad BCD, ut BCD ad CDE, & CDE ad DEF; ac proinde BCD, CDE ſunt duo medii proportionales inter ABC, & DEF. Quod erat demonſtrandum.

Pars 2. Jam patet ex 2. parte, & definitio-

tione 12. rationem ABC ad DEF esse triplicatam rationis ABC ad BCD, hoc est *a* rationis A ad D. Quod erat demonstrandum. *a* schol. 17. 7.

Scholium.

VIdetur hic locus exigere, quando solidus numerus ex trium numerorum multiplicatione producitur, ut demonstremus ex tribus, imò quotlibet numeris, quocunque inter se ordine multiplicatis, eundem semper numerum produci. Insigne theorema est. & usûs permagni, quòd aliâ quâdam viâ, longèque expeditiori, quàm alii passim soleant, demonstrabimus. Sed quoniam ea pendet à permutationibus, quas datus rerum numerus subire potest, sit

Theorema 1.

Datæ sint res, seu litteræ quotcunque A, B, C, D, E, & ponantur totidem numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5. *Hi inter se ordinatim multiplicati producent numerum permutationum, quas res datæ A, B, C, D, E subire possunt.*

Theorematis hujus demonstrationem me audisse memini R. P. Ignatium Derkennis pulcherrimè deducentem, ex simplici duarum unitatum permutatione. Illius, dum hæc scribo, in lucem prodit opus Theologicum de Deo uno, trino, creatore conscriptum methodo planè eximiâ, longissimèque diversâ ab eâ, quam de simili scribentes argumento hactenus tenuerunt: In quo istud etiam lector clarè perspiciet, non

ſolùm Theologiæ Philoſophiam ubique ancillari; ſed quod non perinde fortaſſis ſibi homines perſuaſerint, etiam è Mathematicis ratiociniis, quantùm ſubinde ad ſublimes de Deo, diviniſque rebus quæſtiones enodandas poſſit lucis affundi. Ita porrò, quod ſuprà repoſui, deducebat.

Duæ litteræ (*has enim pro rebus aſſumemus*) a, b *poſſunt his permutari, quâlibet ſemel ultimum locum, vel primum occupante. Hinc*

Tres litteræ a, b, c *permutari poſſunt ſexies; nam quâlibet trium ſemel occupante ultimum locum, poſſunt duæ reliquæ bis permutari. Cùm enim* c *tenet ultimum locum, poſſunt duæ reliquæ* a, b *his permutari, ac proinde duo habentur diverſi ordines* a b c, b a c. *Rurſus* b *occupante ultimum locum, bis permutari poſſunt reliquæ* a, c, *& ſic duo novi exſurgunt ordines* a c b, c a b. *Denique* a *ultimum tenente locum, reliquæ* b, c *bis permutari poſſunt: undè rurſus duo alii exiſtunt ordines* b c a, c b a. *En ſimul omnes.*

a b c a c b b c a
b a c c a b c b a.

Quatuor litteræ a, b, c, d, *permutationes admittunt* 24. *Nam quælibet ex* 4 *datis litteris ſemel occupare poteſt locum ultimum, ac tum reliquæ tres ſexies permutari. Undè* 24. *diverſi ordines quatuor litterarum exiſtunt.*

Quinque a, b, c, d, e *permutationes ſubire poſſunt* 120. *Quâlibet enim ex* 5 *datis ultimũ tenente locum, reliquæ* 4 *vicibus* 24 *permutantur: undè litterarum* 5 *quinquies exiſtunt*

24 *diverſi ordines, hoc eſt* 120. *Atque ita in infinitum. Hoc præmiſſo ſit.*

Theorema 2.

Pars 1. *Tres numeri A, B, C, quocunque inter ſe ordine multiplicati, ſemper æquales gignunt numeros.*

Sex diverſos multiplicationum ordines exhibet tabella appoſita. Quod producta ſint æqualia, cùm eadem littera ultimum locum tenet, ut in a B c, & b a c *&c. patet ex* 16. *l.* 7. *Reſtat igitur, ut oſtendam producta* a B c, a C b, b C a, *æqualia eſſe.*

a B c	
b a c	
a C b	
c a b	
b C a	
c b a	

a B c *Comparemus primum* a B c, & a C b.
a C b a B *eſt ad a* a C, *ut* B *ad* C. *Sed* B, & C *ſunt iidem numeri, qui* b, & c. *Ergo* a B *eſt ad* a C, *ut* b *ad* c. *Ergo* b *productum ex primo* a B *in quartum* c (*hoc eſt* a B c) *æquatur producto ex ſecundo* a C *in* b *tertium* (*hoc eſt ipſi* a C b.) *Comparemus jam* a B c, & b C a. a B *eſt ad* b C, *ut* a *ad* C; *hoc eſt, ut* A *ad* c. *Ergo productum* a B c *æquatur producto* b C A. *Liquet igitur omnia ſex producta inter ſe æqualia eſſe.*

a ſchol. 17. 7. *b* 19. 7.

a B c	
b C A	

ſchol. p. 17. 7. 19. 7.

Pars 2. *Etiam* 4 *numeri* a, b, c, d, *quocumque inter ſe ordine multiplicati, æquales gignent numeros.*

Ex Theor. patet a, b. c, d *admittere* 4 *ſenarios diverſorum ordinum, hoc eſt ordines di-*

versos 24. Senarius primus exhibetur in tabella appoſita. Quoniam a, b, c quocunque inter ſe ordine multiplicati ſemper eundem gignunt numerum per. 1. partem, & ultimus in toto ſenario eſt idem, patet omnia primi ſenarii producta eſſe unum idemque. Eodem modo oſtendam ſex producta ſecundi ſenarii inter ſe convenire. Atque id ipſum de ſenario tertio, quartoque demonſtrabimus. Hoc igitur ſolùm reſtat, ut productum unius ſenarii conveniat cum producto cujuslibet ſenariorum trium reliquorum. Quod ſic oſtendo.

a b c d
b a c d
a c b d
c a b d
b c a d
c b a d

Comparemus ſenarium primum, in quo d tenet locum ultimum, cum ſenario quarto, in quo a locum poſtremum occupat. Scribe a infra d. Tum ante d pone A, & D, ante a, & reliqua præfige utriq; litteras b c. Igitur b c A eſt ad b c D, c ut A ad D, hoc eſt a ad d. Ergo producta c b c A d, & b c D a ſenarii primi, & quarti æqualia ſunt. Pari modo oſtendam omnium 4 ſenariorum convenire producta. Liquet ergo propoſitum.

b c A d
b c D a

c ſchol. 17. 7.
e 19. 7.

Pars 3. Eodem diſcurſu ex parte 2. oſtendam producta ex multiplicatione 5 numerorum, quæ ſunt 120, eſſe eadem, atque ita in infinitum, & in numeris 6. 7. 8. &c.

PRO-

PROPOSITIO XX.

SI inter duos planos (A, & B) cadat unus medius proportionalis (C;) ſimiles plani erunt.

Sumantur F, K, *a* minimi in ratione A ad C, & C ad B. Ergo *b* F, K æquè metiuntur tam ipſos A, C puta per X; quàm ipſos C, B, puta per Z. Igitur K in X, & Z *c* facit C, B; ac proinde ut X eſt ad Z, *d* ſic C eſt ad B, hoc eſt F ad K: & permutando F ad X, ut K ad Z. Quare cùm *e* F in X faciat A, & K in Z faciat B, ac proinde F, X, & K, Z ſint latera planorum A, & B; ſimiles *f* plani erunt A, B. Quod erat demonſtrandum.

A. C. B.
F. K.
X. Z.

a 35. 7.
b 21. 7.
c ax. 8.
d 17. 7.
e hyp. & ax. 8.
f def. 27.

PAULO ALITER.

SI inter duos numeros (A, B) unus cadat medius proportionalis (C;) ſimiles plani erunt.

Sumantur *a* D, E minimi in ratione A ad C, & C ad B. Igitur D, E æquè *b* metiuntur tam A, C,

A C. B.
D E
M. N
DM. EM. EN.

a 35. 7.
b 21. 7.

pu-

puta per M, quàm C, B, puta per N. Quare DM (productum nempe ex D in M) eſt *c* A; & EM *d* eſt C; & *e* EN eſt B. Jam in DM, & EM latus D eſt ad latus E, ut *f* DM ad EM; hoc eſt, ut A ad C; hoc eſt, ut *g* C ad B; hoc eſt, ut EM ad EN; hoc eſt, ut *h* latus M ad latus N. Ergo DM, EN, hoc eſt A, B ſunt plani *i* ſimiles. Quod erat demonſtrandum.

c ax. 8.
d idem.
e idem.
f ſchol. p. 17. 7.
g hyp.
h ſchol. p. 17. 7.
i def. 27.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros (A, B) duo medii proportionales exiſtant numeri (C, D;) ſimiles ſolidi erunt (A, B.)

Sumantur A. C. D. B.
a datis A, C, D tres minimi proportionales EP X. OQ. M N EPM. XM. XN. OQN.

a 35. 7.

EP, X, OQ, qui æquè *b* metientur ipſos A, C, D, puta per M: ac proinde EPM (productum nempe ex EP in M) *e* eſt A, & XM *d* eſt C. Quia autem C, D, B ſunt in eadem ratione, in qua A, C, D; erunt EP, X, OQ etiam minimi proportionales ipſis C, D, B, eoſque proinde *e* metien-

b corol. p. 21. 7.
c ax. 8.
d idem.
e corol. p. 21. 7.

tientur æquè, A. C. D. B.
puta per N. EP X. OQ.
Quare X N M. N.
(productum EPM. XM. XN. OQN.
nempe ex X
in N) eſt *f* D, & OQN eſt B. Cùm igitur EPM ſit A, & OQN ſit B, reliquum eſt, ut oſtendatur latera E, P, M eſſe proportionalia lateribus, O, Q, N. *f* ax. 8.

Quoniam inter EP, & OQ *g* eſt medius prop. X, erunt EP, OQ *h* plani ſimiles; ideoque *i* E eſt ad O, ut P ad Q. Deinde M eſt ad N, ut *k* XM ad XN; hoc eſt (ut jam oſtendi ſup.) ut C ad D; hoc eſt (ut *l* EP ad X. Sed EP eſt ad X, ut latus P ad latus Q: quia tam *m* EP ad X, quàm *n* P ad Q eſt in ratione dimidiata EP ad OQ. Ergo *o* ut P ad Q, (hoc eſt ut E ad O,) ſic M ad N. Similes igitur *p* ſolidi ſunt EPM, OQN, hoc eſt A, B. Quod erat demonſtrandum.

g conſt. *h* præc. *i* def. 27. *k* ſchol. p. 17. 7. *l* conſt. *m* def. 22. *n* 18. 8. *o* 11. 12. *p* def. 27.

PROPOSITIO XXII.

SI trium proportionalium numerorum (A, B, C) primus (A) ſit quadratus; tertius C etiam quadratus erit.

Radix, ſive latus quadrati A eſto O.

Quo-

A B. C.
O P
1

Quoniam igitur O multiplicans ſe facit A, erit ut unitas (1) ad O, ſic *a* O ad A: ac proinde tam inter A,& 1,quàm inter A,& C unus eſt medius proportionalis. Ergo etiam *b* inter 1, & C unus cadet medius P; qui proinde ductus in ſe *c* facit C. Ergo etiam C quadratus *d* eſt. Quod erat demonſtrandum.

a def. 13.

b corol. 3. 10. 8.

c patet ex def. 13.

d def. 28.

Corollarium.

Quadratus, radix, unitas ſunt continuè proportionales. Patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO XXIII.

Si quatuor continuè proportionalium numerorum (A,B,C,D) primus (A) ſit cubus; quartus etiam cubus erit.

A B. C. D.
P R
O Q
1

Cubi A latus eſto O. O in ſe faciat P. Igitur O in P *a* facit cubum A. Jam per coroll. præc. 1. eſt ad O, ut O ad P. Et quia O in P facit A, erit ut 1, ad O (hoc eſt ut O ad P) ſic *b* P ad

a def. 29.

b def. 13.

ad A. Ergo tam inter A, & 1, quàm inter A, & D cadunt duo medii proportionales. Ergo etiam inter 1, & D duo medii *c* cadent Q, R. Cùm ergo ſit, ut 1 ad Q, ſic Q ad R, patet *d* Q in ſe facere R. Et cùm ſit ut 1 ad Q, ſic R ad D, patet *e* Q in R facere D. Ergo *f* etiam D cubus eſt.

c corol. 3. 10. 8.
d def. 13.
e ex ead.
f def. 29.

Corollarium.

UNitas, radix, quadratum, cubus ſunt continuè proportionalia. Patet ex demonſtratis.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo numeri (A, B) eam inter ſe rationem habeant, quam quadratus aliquis (C) ad quadratum (D:) primus autem (A) ſit quadratus; etiam ſecundus (B) quadratus erit.

Quoniam A eſt ad B, ut C ad D; & inter C, & D unus cadit medius *a* proportionalis P; etiam inter *b* A, & B unus cadet O. Quia igitur primus A quadratus eſt, etiam tertius *c* B quadratus erit. Quod erat demonſtrandum.

A. O. B.
C. P. D.

a 11. 8.
b 8. 1. 8.
c 22. 8.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri (A, B) eam inter ſe rationem habeant, quam cubus (C) ad cubum (D:) primus autem (A) ſit cubus; etiam ſecundus (B) cubus erit.

Quia A eſt ad B, ut C ad D, atque inter cubos C. Q. R. D. *a* C, D duo cadunt medii proportionales Q, R; etiam inter A, B duo *b* medii cadent. Quoniam ergo A cubus eſt; etiam B cubus *c* erit: Quod erat demonſtrandum.

a 12. 8. *b* 8. 8. *c* 23. 8.

Corollaria.

1. RAtio quadrati numeri ad non quadratum nequit exprimi in duobus quadratis. Patet ex 25.

2. Ratio cubi ad non cubum nequit exhiberi in duobus cubis. Patet ex 25.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani (A, B) eam inter ſe rationem habent, quam quadratus aliquis ad quadratum.

In-

Inter A, & B cadit unus *a* medius proportionalis, qui eſto C. In ratione A ad C, ſeu C ad B accipiantur tres minimi D, E, F. Extremi D, F erunt *b* quadrati. Quoniam ergo A eſt ad C, ut *c* D ad E, & C ad B, *d* ut E ad F; erit ex æquo *e* A ad B, ut quadratus C ad quadratum F. Quod erat demonſtrandum.

A. C. B.
D. E. F.

a 18. 8.
b corr. 1. p. 2. l. 8.
c conſtr.
d conſtr.
e 22. 7.

PROPOSITIO XXVII.

Similes ſolidi (A, B) eam inter ſe rationem habent, quam aliquis cubus ad cubum.

Inter A, & B duo *a* cadunt medii proportionales, qui ſint C, D. In ratione A ad C capiantur quatuor minimi E, G, H, F. Extremi E, & F erunt *b* cubi; eritque ex æquo A ad B, ut E cubus ad cubum F. Quod erat demonſtrandum.

A. C. D. B.
E. G. H. F.

a 19. 8.
b corol. 1. p. 2.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER TERTIUS.

EUCLIDI VERO NONUS.

PROPOSITIO PRIMA.

DUo ſimiles plani (A, B,) ſe mutuo multiplicantes, quadratum producunt (AB)

A. O. B.
AA. P. AB.

A in ſe faciat AA. Erit igitur AA ad AB, ut *a* A ad B. Sed inter *b* A, & B cadit unus medius proportionalis, cùm ſint A, & B plani ſimiles. Ergo etiam inter *c* AA, & AB medius cadet P. Quare cum primus AA ſit quadratus per conſtructionem, etiam tertius AB quadratus *d* erit: quod erat demonſtrandum.

a ſchol. p. 17. 7.
b 18. 8.
c 8. 8.
d 22. 8.

PROPOSITIO II.

SI duo numeri (A,B) ſe invicem multiplicantes quadratum gignant (AB;) ſimiles plani erunt.

A. O. B.
AA. P. AB.

A in ſe ſit AA. Quoniam AA, AB ambo quadrati ſunt, cadet inter *a* eos medius proportionalis. Sed AA eſt ad AB, ut *b* A ad B. Ergo etiam inter A, & B *c* cadet medius proportionalis. Ergo A,B ſunt *d* plani ſimiles. Quod erat demonſtrandum.

a 11. 8.
b ſchol. 17. 7.
c 8. 8.
d 20. 8.

Corollaria.

1. DUo quadrati quadratum producunt. Sunt enim ſimi es plani. Ergo per. 1. hujus inter ſe mutuò multiplicati quadratum generant.

2. Si duo numeri A,B quadratum producunt, & alter eorum (puta A) ſit quadratus; etiam B quadratus erit.

Nam per 2. A, & B ſunt plani ſimiles. Ergo inter *a* A, B cadit medius proportionalis. Cùm ergo A primus ſit quadratus, etiam tertius B *b* quadratus erit.

a 18. 8.
b 22. 8.

3. Si duo numeri A, & B producant

non quadratum, A verò ſit quadratus; B quadratus non erit.

Nam ſi etiam B quadratus eſſet, duo A, & B per corollarium 1. producerent quadratum, contra hypotheſim.

4. Quadratus A, & non quadratus B producunt non quadratum. Aliàs per corollarium 2. etiam B quadratus foret, contra hypotheſim.

PROPOSITIO III.

CUbus numerus (CCC,) ſeipſum multiplicans, facit cubum (D.)

	CCC	Cubi radix, ſeu latus eſto C. Per corollarium p. 23. l. 8. 1, C, CC, CCC, ſunt continuè proportionales; adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales. Sed, quia CCC in ſeipſum fecit D, erit *a* ut 1 ad CCC, ita CCC ad D. Ergo etiam *b* inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare cùm primus CCC ſit cubus, etiam quartus D cubus *c* erit: quod fuit demonſtrandum.
*	CC	
*	C	
D	1	

a def. 13.
b 8. 8.
c 23. 8.

PROPOSITIO IV.

EX *cubo* (*A*) *in cubum* (*B*) *fit cubus* (*AB.*)

A in ſe ſit AA. Erit *a* AA cubus. Et quoniam A, & B cubi ſunt, cadent inter eos duo medii *b* proportionales. Sed AA eſt ad AB, *c* ut A ad B. Ergo & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cùm primus A ſit cubus, etiam quartus *e* AB erit cubus. Quod erat demonſtrandum.

A	B.
AA.	AB. *a* præc.

b 12. 8.
c ſchol. p. 17. 7.
d 8. l. 8.
e 23. 8.

PROPOSITIO V.

SI cubus (*A*) *multiplicans aliquem numerum* (*B*) *gignat* (*AB*) *cubum; etiam multiplicatus* (*B*) *cubus erit.*

Cubus A in ſe faciat AA. Erit *a* AA cubus. Quoniam igitur AA, & AB ambo cubi ſunt, inter eos cadent duo *b* medii proportionales. Sed AA eſt ad AB, *c* ut A ad B. Ergo etiam inter A, & B *d* cadent duo medii. Quare

A	B.
AA.	AB. *a* 3. 9.

b 12. 8.
c ſchol. p. 17. 7.
d 8. 8.

e 23. 8. cùm primus A cubus ſit, etiam *e* quartus B cubus erit. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

1. EX cubo (A) in non cubum (X) fit non cubus. Aliàs enim per 5 etiam X foret cubus, contra hypotheſim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per 4. etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypotheſim.

PROPOSITIO VI.

SI numerus (A,) in ſe ductus, facit cubum (B;) & ipſe cubus eſt.

A in B producat E. Quoniam A in ſe fecit B, & A rurſum in B fecit E; patet E *a* cubum eſſe. Et quia A in B cubum fecit E cubum; etiam B cubus in A facit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus eſt. Quod erat demonſtrandum.

A. B. E.

a def. 29.

b 17. 7.
c 5. 9.

PRO-

PROPOSITIO VII.

COmpoſitus numerus (A,) multiplicans quemvis numerum (B,) generat ſolidum (E.)

Compoſitum numerum A. B. E.
A aliquis (præter unitatem) C. D.
metiatur *a* numerus, qui ſit C, per aliquem numerum, qui ſit D. Ergo C in D eſt *b* A. Sed A in B *c* eſt E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C, D, B. Ergo E ſolidus *d* eſt. Quod erat demonſtrandum.

a def. 22.
b ax. 8.
c hyp.
d def. 26.

Lemma.

In ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium (1. A, B, C, D, E, &c.) numerus (A) primus ab unitate, multiplicans quemlibet (D,) producit ſequentem (E)

Erit enim *f* ut 1. ad A, ita D ad E: ex quo res patet. *f* def. 11.

PROPOSITIO VIII.

SI numeri quotcunque fuerint ab unitate continuè proportionales; (B) ſe-

cundus (unitate ſeclusâ) quadratus erit, & uno intermiſſo omnes (D, F, H, &c.)

Tertius autem (C) cubus eſt, & duobus intermiſſis omnes (F, K, &c.)

Sextus verò (F) cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermiſſis omnes.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1.A. B. C.D.E. F. G.H. K. L. M. N. O.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

Pars 1. Quoniam ut 1 eſt ad A, ſic
[a] def. 13. A eſt ad B; patet *a* A in ſe facere B,
[o] def. 28. ac *o* proinde B quadratus eſt. Deinde quia B, C, D ſunt continuè proportio-
[b] 22. 8. nales, & B quadratus eſt; etiam *b* D quadratus erit. Et ſic deinceps uno intermiſſo.

Pars 2. Quoniam A in ſe fecit B, & A
[c] hem. rurſum *c* in B facit C; erit *d* C cubus.
[d] def. 29. Deinde quia C, D, E, F ſunt quatuor continuè proportionales, & C cubus eſt;
[e] 23. 8. etiam F cubus *e* erit : & ſic deinceps duobus ſemper intermiſſis.

Pars 3. Patet ex 1, & 2.

Scho-

Scholium.

QUoniam primus in ſerie numerus A multiplicans quemcumque alium ex ſerie producit ſequentem; liquet continuè proportionalium ſeriem pulcherrimè exprimi ſolâ litteræ (A) numerum quemlibet deſignantis continuâ appoſitione, hunc in modum.

0 1 2 3 4 5
1. A. AA. AAA. AAAA. AAAAA. A 6.
A 7. A 8. A 9. A 10. A 11. A 12.

A quippe in ſeipſum, facit AA quadratum: A in AA, facit AAA cubum: & ſic deinceps. Quin verò ſic tota propoſitionis demonſtratio uno intuitu perſpicitur. Quoniam enim multiplicationis productum litterarum appoſitione exhibetur; liquet quadratum eſſe, cùm litterarum multitudo par eſt, quam proinde binarius metiatur, ut ſit loco ſecundo, quarto, & ſequentibus, uno intermiſſo. Rurſum liquet tum eſſe cubum, cùm numerum litterarum metitur ternarius, ac proinde triſecari poteſt, quod evenit loco tertio, ſexto & ſequentibus, binis ſemper interminis. Denique apparet, cùm litterarum multitudo eſt numerus primus, ut 5, 7, 11, 13, &c. nec cubum haberi, nec quadratum, quia nimirum cùm primos numeros nullus numerus metiatur, litterarum multitudo tum nequit, aut biſecari, quod ad quadraticam, aut triſecari, quod ad cubicam multiplicationem requiritur. Solent ab Arithmeticis hi numeri ſurdeſolidi, ſive ſuperſolidi appellari. Omnes autem reliqui progreſ-

ſionis termini, vel quadrati, vel cubi ſunt, vel utrumque; quia cùm numeri litterarum, ſeu dimenſionum, quibus conſtant, ſint compoſiti; eos vel binarius, vel ternarius, vel utrque metitur; ac proinde aut biſecari poſſunt, aut triſecari, aut utrumque.

Solent porrò numeri progreſſionis jam dictæ, vocari poteſtates, ac ſcribi ſupra eos numeri ordine naturali, qui locum, ſeu dimenſiones ſingulorum indicent, dicunturque exponentes. Itaque in priori ſerie, quâ ante Scholium uſi ſumus; A eſt primus terminus, vocaturque radix; B ſecundus, ſeu duarum dimenſionum, & quadratus dicitur; C tertius, ſeu trium dimenſionum, & cubus appellatur, &c. In altera ſerie ipſa litterarum multitudo locum, latera, ac dimenſiones poteſtatum ſingularum exprimit.

Ex dictis ſupra patet 1. *in quacunque ſerie continuè proportionalium terminum, cujus exponens eſt* 6, *eſſe ſimul cubum, & quadratum: numerus enim laterum ejus, cùm menſuretur à* 2. & 3., *poterit biſecari, ac triſecari.* 2. *Intermiſſis ſemper* 5, *reliquos omnes fore cubos ſimul, & quadratos, terminum videlicet* 12, 18, 24, *& cæteros, quorum exponentes ſenarius metitur. Cùm enim tam* 2, *quam* 3 *metiantur* 6, 6 *autem metiatur* 12, 18, 24, &c. *etiam tam* 2, *quàm* 3 *eoſdem omnes metientur, qui proinde, & biſecari poterunt, & triſecari. Ergo, &c.*

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI in ſerie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus (A) ſit quadratus; reliqui omnes quadrati erunt.

Si primus eſt cubus; reliqui etiam omnes cubi erunt.

1. A. B. C. D. E. F.

Pars 1. Quoniam A per hypotheſim, & B per præc. quadrati ſunt, & A in B facit C; etiam *a* C quadratus erit. Rurſum quia quadratus A, in quadratum C, *o* facit D; etiam D quadratus erit. Et ſic deinceps.

a cord. 1. 2. 9.
o lem.

Pars 2. Quoniam A per hypotheſim cubus eſt, & A in ſe facit B; etiam B cubus *c* erit. Et quia A cubus in B cubum *n* facit C; etiam *d* C cubus erit. Et ſic deinceps.

c 3. 9.
n lem.
d 4. 9.

PROPOSITIO X.

SI continuè proportionalium ab unitate numerorum primus (A) quadratus non ſit, neque alius ullus quadratus erit, præter ſecundum (B,) & reliquos uno ſemper intermiſſo ſequentes (D, F) &c.

Et

Et ſi primus A non ſit cubus, neque alius ullus cubus erit præter tertium C, & reliquos duobus intermiſſis ſequentes (F, &c.)

Pars 1. Sit enim, ſi fieri poteſt, E quadratus. Quoniam igitur E eſt ad D, ut B ad A, ſuntque quadrati *a* E, *b* D, B, etiam *g* A quadratus erit, contra hypotheſim.

1. A. B. C. D. E. F. G.

a quia ponitur.
b 18. 9.
g 24. 8.

Pars 2. Eſto (ſi fieri poteſt) D cubus. Cùm ergo etiam cubi ſint *c* F, & C, ſitque per hypotheſim, & ex æquo, ut F ad C, ſic D ad A; etiam A *d* cubus erit, contra hypotheſim.

c 8. 9.
d 25. 8.

PROPOSITIO XI.

IN ſerie numerorum ab uuitate continuè proportionalium minor quilibet (C) quemlibet majorem (G) metitur per aliquem numerum, qui eſt in ſerie.

1. A. B. C. D. E. F. G.

Ex æquo enim C eſt ad G, ut 1 ad D. Ergo C metitur *f* G per D.

f def. 15.

Co-

Corollaria.

1. QUantum major (G) diſtat à metiente (C,) tantùm (D), is per quem minor majorem metitur, diſtat ab unitate.

2. Primus (A) metitur quemlibet (D) per præcedentem (C.)

3. Quivis in ſerie numerus (C,) ſeipſum multiplicans, producit numerum (F,) eodem à ſe intervallo diſtantem, quo ipſe ab unitate.

4. Si quivis in ſerie numerus (B) multiplicet quemvis (D) etiam in ſerie; quantùm diſtat 1 à minore (B,) tantùm diſtabit major (D) à producto (F.)

PROPOSITIO XII.

SI ab unitate fuerint numeri quotcumque continuè proportionales; primus numerus (E,) qui metitur ultimum (D,) metietur & unitati proximum (A.)

1. A. B. C. D.
E. H. G. F.

Ponatur enim (ſi fieri poteſt) E primus non metiri A. Ergo a E, & A ſunt primi inter ſe. Quoniam a 31. 7

ve-

verò E metitur D, metiatur eũ per F. Metitur autem & A eundem *b* D per C. Ergo E eſt ad A, ut *n* reciprocè C ad F. Sed quia E, & A ſunt primi inter ſe, erunt minimi *d* in ſua proportione. Ergo E metitur C, *e* puta per G. Quare cùm eundem C metiatur *f* A per B, rurſum erit E ad A, *g* ut B ad G. Ergo quia E, A ſunt in ſua proportione minimi, iterum E metitur *h* B, puta per H. Atqui etiam A metitur B per A; (nam A in ſe facit B, ut patet ex 8.) Ergo rurſum *k* E eſt ad A, ut A ad H.

Quare, cùm E, A ſint in proportione ſua minimi, E *l* metitur A. Quod erat demonſtrandum.

b corol. 2. præc.
n corol. 19. 7.
d 23. 7.
e 21. 7.
f corol. 2. præc.
g corol. 19. 7.
h 21. 7.
k corol. 19. 7.
l 21. 7.

A. A.
E. H.

Scholium.

PUlchra, & ſubtilis hæc demonſtratio eſt, in qua ex contradictorio aſſertionis aſſertio ipsâ directâ demõſtratione infertur. De hoc genere demonſtrationis vide, ſi lubet, quæ diſſeruimus in appendice poſt Elemẽta Geometriæ.

PROPOSITIO XIII.

SI numerorum ab unitate continuè proportionalium proximus unitati (A) primus eſt; maximum (D) nullus alius metie-

tietur præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

1. Metiatur enim (ſi fieri poteſt) E diverſus ab ipſis A, B, C, maximum D. Non erit E primus, aliàs etiam E metiretur *a* A, ac proinde A non eſſet primus, contra hypotheſim. Igitur E compoſitus eſt; ac proinde eum metitur *b* aliquis primus.

1. A. B. C. D.
E. F. G. H.
O

a præc.

b 34. 7.

2. Quem dico eſſe A; ſi enim alius primus O metiretur E, quoniam E metitur D, etiam O *c* metiretur D, adeoque *d* & ipſum A, quod eſt abſurdum, cùm A primus ſit. Metiatur jam E ipſum D. per H.

c ax. 11.

d præc.

3. Erit H diverſus ab A, B, C. Sit enim (ſi fieri poteſt) H idem cum aliquo ipſorum A, B, C, puta cum C. Ergo E metitur D per C; ac proinde etiam C *e* metitur D per E. Ergo E eſt unus *f* ex ſerie A, B, C. Quod eſt abſurdum, cùm E volueris eſſe non unum ex ſerie A, B, C. Ergo H diverſus eſt ab ipſis A, B, C.

1. A. B. C. D.
E. F. G. H.
O.

e ax. 9.

f 11. 9.

4. Deinde H non erit primus, aliàs

cùm

g prac. cùm H metiatur D, metiretur g quoque A, primum ex hypotheſi, quod eſt abſurdum. H igitur compoſitus eſt.

5. Quia autem H compoſitus eſt, metietur eum aliquis primus, quem dico eſſe A. Si enim alius primus O metiretur H, cùm H metiatur D (nam quia E per H metitur D, etiam H h per E metietur D) metietur quoque i O ipſum D, ac proinde etiam k ipſum A primum: quod eſt abſurdum.

h ax. 9.

i ax. 11.

k prac.

l coroll. 2. 11. 9. 6. Jam quia A metitur l D per C, itemque E metitur D per H; erit ut A ad E m, ita reciprocè H ad C. Quare cùm (ut oſtendi num. 1.) A metiatur E, etiam H metietur C, puta per G. Quoniam igitur, ſicut E diverſus ab A, B, C metiebatur poſtremum D per H, ita nunc H (quem jam oſtendi num. 3. diverſum eſſe ab A, B, C,) metitur ipſorum A, B, C poſtremum C per G. Oſtendam eodem modo G diſtinctum eſſe ab A, B, & non eſſe primum, & menſurari ab A, quo hæc tria oſtendi de numero H.

m coroll. 19. 7.

n coroll. 2. 11. 9. Quia ergo A metitur C n per B, & H metitur C per G; erit ut o A ad H, ita reciprocè G ad B. Sed oſtendi num. 5. A metiri H. Ergo etiam G metitur

o coroll. 19. 9.

B,

B, puta per F. Oſtendam rurſus F diverſum eſſe ab A, planè, ut oſtendi num. 3. H eſſe diverſum ab A, B, C, & G ab A, B.

Quoniam igitur A per A (hoc eſt per ſe) metitur B, & G per F metitur B; erit ut A ad G, *p* ſic reciprocè F ad A. Sed eſt oſtenſum num. 6. A metiri G. Ergo etiam F metitur A, quod eſt abſurdum, cùm A primus ſit. Sed hoc abſurdum inde deductum eſt, quod poneretur E, diverſus ab A, B, C, metiri D. Liquet ergo nullum ab A, B, C diverſum metiri D. Quod erat demonſtrandum.

p corol. 19. 7.

Scholium.

HÆc demonſtratio, quæ ratiocinationis flexu mirabili tandem infert quæſitum, merito è difficilioribus una videri poteſt. Breviorem aliam ſubſtituit Claudius Richardus noſter, Euclidis commentator præclarus; ſed eâ non confici propoſitum, facilè intelliget, qui legerit.

PROPOSITIO XIV.

MInimum numerum (A,) quem primi numeri (B, C, D) metiuntur, nullus alius primus præter datos metitur.

Me-

A. B. C. D. E. F.

Metiatur (ſi fieri poteſt) minimum A alius quiſpiam primus E per F. Ergo E in F facit *a* A, ac proinde E, F ſunt lat ra ipſius A. Quoniam ergo B, C, D metiuntur A, metientur quòque *b* alterutrum E, F. Non E primum. Ergo F. Sed F minor eſt, quàm A ; nam F in E facit A. Ergo A non eſt minimus ; quem metiuntur B, C, D. Quod hypotheſim evertit.

a ax. 8.

b 32. 7.

PROPOSITIO XV.

SI fuerint tres proportionales in ratione ſuâ minimi (AA, AB, BB;) duo quilibet compoſiti ad reliquũ primi erunt.

A. B. AA. AB. BB.

Ex prop. 2. l. 8 manifeſtum eſt, ſi A, B duo minimi ponantur in ratione data ; AA, AB, BB fore tres minimos in eâdem ratione. Jam quia A, & B ſunt *a* primi inter ſe, etiam *c* A + B ad B primus eſt. Sed etiam A ad B primus eſt. Ergo etiam *d* factus ex A+B in A, (nempe AA + BB,) ad B primus eſt. Quare AA + AB ad BB etiam *e* primus erit.

a 24. 7.

c 30. 7.

d 26. 7.

e 27. 7.

erit. Eodem planè modo oſtendam, BB † AB ad AA eſſe primum.

Reliquum eſt, ut etiam AA † BB ad AB primus ſit. Quoniam A, B ſunt primi inter ſe, ac proinde *f* etiam tam A, quàm B ad A † B primus eſt; erit quoque AB, genitus ex A in B, ad A † B *g* primus. Ergo AB ad *h* ipſius A † B quadratum, hoc eſt ad *i* AA † BB † 2 AB, primus eſt. Ergo dividendo AB primus *k* eſt ad AA † BB † AB. Ergo rurſum *n* dividendo AB primus eſt ad AA † BB. Quod erat demonſtrandum.

f 30. 7.
g 26. 7.
h 4. 2.
i 27. 7.
k 30. 7.
n ibid.

PROPOSITIO XVI.

DUobus numeris inter ſe primis (A, & B) nequit tertius proportionalis exhiberi.

Sit enim (ſi fieri poteſt) ut A ad B, ſic b ad alium C. Quia primi ſunt inter ſe A, & B, erunt *a* minimi ſibi proportionalium. Ergo A *b* metitur b. Sed etiam A metitur ſe. Ergo A, & b ſunt inter *c* ſe compoſiti, contra hypotheſim. Quod eſt abſurdum.

A B. b. C.
5. 7. 7.

a 23. 7.
b 21. 7.
c def. 24.

PROPOSITIO XVII.

SI in continuè proportionalium ſerie extremi (A, D) ſunt primi inter ſe; ea non poterit ulteriùs continuari.

Sit enim (ſi fieri poteſt) ut A ad B, & B ad C &c., ſic D ad alium E. Igitur permutando, ut A ad D, ſic B ad E. Sed A, & D ſunt *a* inter ſe primi, ac proinde *b* minimi in ſuâ ratione. Ergo *c* A metitur B. Sed B metitur *d* C, & C metitur D. Ergo A *e* metitur D. Sed & A metitur ſe. Ergo *f* A, & D ſunt inter ſe compoſiti; contra hypotheſim.

A. B. C. D. E.

a hyp.
b 23. 7.
c 21. 7.
d 1. 9.
e ax. 11.
f def. 24.

PROPOSITIO XVIII.

DVobus numeris datis (A, B) conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis exhiberi.

Si A, B ſunt primi inter ſe, non poſſe reperiri tertium, patet ex 16.

A. B. X.
BB.

Si A, B ſunt inter ſe primi, B in ſe faciat BB. Si A metitur BB, puta per X; erit

erit X tertius proportionalis. Nam X in A *a* faciet BB. Sed & B in ſe facit BB. Ergo *b* A eſt ad B, ut B ad X.

a ax. 8.
b 20. 7.

Si A non metitur BB, non poterit exhiberi tertius proportionalis. Detur enim (ſi fieri poteſt) Z. Ergo A in Z facit BB, eundem *c*, quem B in ſe. Quia ergo A in Z eſt BB; A per Z metietur *d* BB; contra hypotheſim.

A. B. Z.
BB.

c ibid.
d ax. 7.

PROPOSITIO XIX.

TRibus numeris datis (A, B, C) conſiderare, an quartus proportionalis poſſit exiberi.

A. B. C. X.
BC.

Secundus B, in tertium C ductus, faciat BC. Si primus A metitur BC, puta per X; erit X quartus proportionalis. Nam tunc A in X *a* faciet BC, æquè ac B in C. Ergo *b* ut A ad B, ſic C ad X.

a ax. 8.
b 19. 7.

A. B. C. Z.
BC.

Si A non metitur BC, non poterit exhiberi quartus proportionalis. Detur enim Z, ſi fieri poteſt. Ergo A in Z *c* faciet BC, eundem, quem B facit

c 19. 7.

d ax. 7. in C. Ergo A *d* metietur BC per Z; contra hypoteſim.

Scholium.

PRopoſitiones 4 *præcedentes intelligendæ ſunt de numeris integris. Quibuſvis enim duobus numeris tertius, & quibuſvis tribus quartus proportionalis exhiberi poteſt per fractiones, ut docebitur in Arithmetica practica.*

o Arith. pract. l. 5. c. 7. *Hoc verò obſervatu dignum eſt, quod ſuo loco demonſtrabimus, quamvis duobus quibuslibet tertius proportionalis & tribus quartus, ſaltem fractus dari poſſit, tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi.*

Datis tribus numeris, A, B, C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum.

A. B. C. Z. D.

Primus A, dividens ſecundum B, faciat quotientem D. Tertius C, multiplicans D, gignat Z. Hic eſt quæſitus.

i ax. 8. m 17. 7. n 17. 7. *Cùm enim A dividat B per D, etiam* i *A in D faciet B. Sed & C in D* m *gignit Z. Ergo A eſt ad B,* n *ut C ad Z.*

Impoſſibilis erit quartus proportionalis integer, non ſi A non metitur B, ſed ſi factus ex C in D non ſit integer, aut ad integrum reducibilis.

PRO-

PROPOSITIO XX.

PRimi numeri ſunt infiniti.

A. B. C. Dentur primi tres A, B,
X ✝ 1. C. Inveni X minimum,
Z. *k* quem A, B, C metiuntur, cui adde unitatẽ. Si X ✝ 1 primus eſt, jam quartus habebitur primus. Si X ✝ 1 non eſt primus, eum aliquis *a* primus metietur, puta Z. Hic erit primus, à datis A, B, C diverſus. Sit enim (ſi fieri poteſt) idem cum datorum aliquo C. Ergo quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X ✝ 1. Ergo Z metietur *b* quoque 1, quod eſt abſurdum. Ergo Z novus primus eſt. Eodem modo invenientur plures ſine termino.

k 38. 7.

a 34. 7.

b ax. 12.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri *pares quotcunque* (*A, B, C*) *componunt parem.*

A. B. C. Quoniam A, B, C pa-
N. O. P. res ſunt, eorum *a* ſemiſſes ſint N, O, P. Quia

a def. 16.

igitur eſt, ut A ad ad N, ſic B ad O, & C ad P; erit ut A ad N, *b* ſic ſumma A, B, C ad ſummam N, O, P. Sed A eſt duplus ipſius N. Ergo ſumma A, B, C dupla eſt ſummæ N, O, P; adeoque ſumma N, O, P eſt ſemiſſis ſummæ A, B, C. Ergo ſumma A, B, C *c* par numerus eſt. Quod erat demonſtrandum.

b 12. 5.

c def. 16.

PROPOSITIO XXII.

IMpares (A, B, C, D,) multitudine pari, componunt parem.

A. B. C. D.

Aufer à ſingulis unitatem. Tum & *a* reliqui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præced. reliqua, & ablata ſimul (hoc eſt ipſi A, B, C, D) component parem.

a def. 17.

b hyp.

PROPOSITIO XXIII.

IMpares (A, B, C,) multitudine impari, componunt imparem.

Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C--1 par. Sed & impa-

def. 17.

A. B. C.

C--1

res

res A, B *d* componunt parem. Ergo A, B, C--1 componunt parem. Sed ſumma A, B, C--1 ab ſumma A, B, C differt unitate. Ergo ſumma A, B, C eſt numerus *e* impar. Quod erat demonſtrandum. *d* præc. *e* def. 17.

Corollarium.

PAri ratione impar additus pari componit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

SI à pari numero (D) ſubtrahatur par (E;) reliquus (F) par erit.

Nam ſi reliquus F foret impar, cum pari E componeret *a* imparem. Sed F cum E componit D. Ergo D impar eſſet; contra hypotheſim.

D
E *a* coroll.
F præc.

PROPOSITIO XXV.

SI à pari numero (A) impar (B) ſubtrahatur; reliquus (C) erit impar.

Nam ſi reliquus C eſſet par, is cum impari B faceret *b* imparem. Sed C cum B facit A. Ergo A foret impar; contra hypotheſim.

A
B *b* coroll. 23. 9.
C

PROPOSITIO XXVI.

SI ab impare (E) ſubtrahatur impar (F;) reliquus (G) erit par.

Nam ſi G foret impar, is cum impare F componeret E *e* parem. Quod evertit hypotheſim.

E
F
G

c 22. 9.

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare (A) ſubtrahatur par (B;) reliquus (C) erit impar.

A
B
C

Nam ſi C foret par, is cum pari B componeret *a* A parem; contra hypotheſim.

a 21. 9.

PROPOSITIO XXVIII.

PAr, & impar (A, B,) invicem multiplicantes, producunt (C) parem.

A 2. B 3. C 6.

Componitur *b* enim C ex pari A toties ſumpto, quot ſunt unitates in B.

b def. 14.

Ergo C par *c* eſt.

c 21. 9.

Co-

Corollaria.

1. PAr multiplicans parem gignit parem. Patet eodem modo ex 21.

2. Omnis pariter impar eſt par. Patet ex def. 19. axiomatis 7. & hac propoſitione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar (D,) *multiplicans imparem* (E,) *producit imparem* (F.)

D 3. E 5. F 15 Compouitur *a* enim F ex D impare toties ſumpto, quot ſunt unitates in impare E. Ergo F impar *b* eſt. *a* def. 13. *b* 23. 9.

Corollaria.

12 B { C 4. 3 A {

1. IMpar (A) metiens parem(B)eum metitur per parem(C.)Nam ſi C foret impar, quia A in C *c* producit B, eſſet B *d* impar (utpotè genitus ex impare A in imparem C.) Quod repugnat hypoteſi. *c* ax. 8. *d* 29. 9.

2. Im-

15 E
3 D { F

2. Impar (D), metiens 5. imparem(E,)eum metitur per imparem (F.) Nam ſi F foret par, quoniam D impar in F parem gignit *a* E, eſſet E *b* par; contra hypotheſim.

a ax. 8.
b 28. 9.

Scholium.

EX *his demonſtrari jam poterit, nullum numerum* (*AB*) *ita ſecari poſſe, ut genitus ex toto* (*AB*) *in unam partem* (*CB*) *ſit æqualis quadrato partis alterius* (*AC:*) *ac proinde propoſitionem* 11, *l.* 2. *nullo modo poſſe numeris applicari, quamvis* 10 *primæ ejuſdem libri propoſitiones omnes etiam in numeris ſint veræ.*

A——C——B
D---E--

Sit enim (ſi fieri poteſt) genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par eſt, & CB impar.
Vel AC impar, & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Eſto primum AC par, & CB impar. Ergo totus AB eſt a *impar. Ergo genitus ex AB impare in CB imparem, impar* b *eſt. Eſt* c *verò par quadratus, ex AC pari. Ergo impar, genitus ex AB in CB, æquatur pari, nempe quadrato ex AC. Quod eſt abſurdum.*

a coroll. 23. 9.
b 29. 9.
c coroll. 28. 9.

Sit deinde AC impar, & CB par. Ergo totus AB d *impar eſt. Ergo factus ex impare AB in CB parem par* e *eſt. Atqui quadratus im-*

d coroll. 23. 9.
e 28. 9.

Imparis AC impar f *eſt. Ergo rurſum hic impar illi pari æqualis eſt. Quod eſt abſurdum.* f 29. 9.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergo totus AB g *par eſt. Ergo factus ex AB pari in imparem CB par* h *eſt. Imparis autem AC quadratus* i *impar eſt. Ergo rurſum hic impar illi pari ex AB in CB æqualis eſt. Quod eſt abſurdum.* g 22. 9. h 28. 9. i 29. 9.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumantur duo minimi D, E, in ratione AC ad CB. Erunt D, E, primi k *inter ſe; ac proinde nequeunt ambo eſſe pares, aliàs metiretur eos binarius; ſed vel ambo ſunt impares; vel D par, E impar; vel D impar, E par. Jam quia AB in CB æquatur quadraato AC, erit ut AB ad AC, ita AC ad CB. Et quia E eſt ad D, ut BC ad CA, erit componendo E cum D ad D, ut BA ad AC; hoc eſt ut* l *AC ad CB, hoc eſt ut* m *D ad E. Quoniam igitur D cum E eſt ad D, ut D ad E, erit genitus ex D cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fieri non poſſe, tribus primis partibus demonſtratum eſt.* k 24. 7. l oſtendi ante. m hyp.

At quiſpiam ſuſpicabitur ita ſecari fortaſſis numerum poſſe in duas partes, quibus fractiones adhæreant. Verùm ſi illæ partes reducantur ad duas fractiones ejuſdem denominationis, ut docebitur in Arithm. Pract l. 2. c. 3. prob. 2. facilè apparebit, ne id quidem eſſe poſſibile.

PROPOSITIO XXX.

SI impar (B) metiatur parem (A,) & illius dimidium metietur.

Im-

Impar B metiatur A parem per C. Erit *a* C par; & C metietur quoque A *b* per B. Ergo & dimidium ipsius C metietur dimidium ipsius A per B (est enim ut C ad A, sic dimidium C ad dimidium A.) Ergo etiam B per dimidium C metietur *c* dimidium A. Quod erat demonstrandum.

A 12 C 4
B 3

a corol. 1. 29. 9.

b ax. 9.

c Idem.

PROPOSITIO XXXI.

SI impar (A) ad aliquem (B) primus est; etiam ad illius duplum (C) primus erit.

Nam si A, & C non sint primi inter se, metiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D necessariò impar, aliàs D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (est enim C par, cùm duplus sit B,) etiam D metietur *b* B ejus dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non sunt primi inter se; contra hypothesim.

A 3. B 5.
C 10. D. E.

a 28. 9.

b præc.

Co-

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolùm ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur in infinitum (1, 2, 4, 8, 16, *&c.*) *habentur omnes pariter pares tantùm.*

1. A. B. C. D. E. F.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
1. R. P. O.

Quod ſinguli ſint pariter pares, patet ex 11. l. 9. Per hanc enim 2 metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem 18.

Quod ſint pariter pares tantùm, patet ex 13. l. 9. Cùm enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8 &c. præter eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem 18.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tan-

1. A. B. C. D. E. F.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.
1. R. P. O.

tantùm, ſic oſtendo. Eſto tantùm pariter par quicunque O, cujus dimidium ſit P, hic erit par; aliàs ſi P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O eſſet pariter impar; contra hypoteſim. Semiſſis ergo ipſius P eſto R. Hic rurſum erit par; ſi enim R eſſet impar, cùm ſit quarta pars ipſius O, numerus 4 per imparem R metiretur O, rurſus contra hypotheſim. Atque ita ſemper ſemiſſis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo 1 ſemiſſis ipſius R. Erunt igitur R, P, O ab unitate dupli, ac proinde O unus ex ſerie. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantùm (4.6.10.&c.)

3. 5. 7. 9. 11.
6. 10. 14. 18. 22.
A. B. C. D. E.
7 N. 2.
N. Q.

Singuli pariter impares ſunt, quia eorum ſemiſſis eſt *a* impar, adeoque metie-

a hyp.

tietur binarius ſingulos per ſemiſſem imparem.

Eſſe pariter impares tantùm, ſic oſtendo. Sumatur quilibet ex illis, puta D, cujus ſemiſſis eſto N, & apponatur binarius. Si ergo D eſt etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur N per 2 metitur eundem D, erit *c* Q ad N, ut 2 ad P. Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: Quod eſt abſurdum contra 21, l. 9.

b def. 18.

c corol 19. 7.

Quod nullus præter hos ſit pariter impar tantùm, ſic oſtendo. Si quis præter hos eſſet alius, is deberet *d* eſſe par. Pares autem numeri, aut habent partes dimidias, ac proinde ſunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem ſunt pariter pares tantum; aut habent dimidios impares, & ſic per ſequentem ſunt pariter pares, & pariter impares. Ergo &c.

d corol. 28. 9.

PROPOSITIO XXXIV.

PAres numeri (A.B.C.D.E,) qui nec à binario dupli ſunt, nec dimidium habent imparem, ſunt pariter pares, & pariter impares. Et præter hos alius nullus.

Sin-

Singuli pariter pares 12. 20. 24. 28. 36. 40. 44. 48. A. B. C. D. E. F. G. H. ſunt; quia cùm eorum dimidii pares ſint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem 18.

Quod etiam pariter impares ſint, ſic oſtendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem ſi dividas bifariam, & dimidium rurſus bifariam, ac ſic deinceps; tandem incides in aliquem imparem (ſi enim incideremus ſemper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B eſſet ab unitate duplus, contra hypotheſim) impar autem ille metietur parem B per *b* parem. Ergo B pariter impar eſt.

b corol. 1. 29. 9.

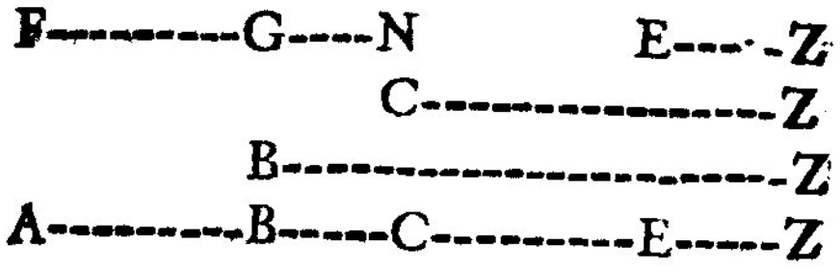
Atque ex his patet 3. pars præcedentis.

Quod præter hos alii nulli ſint pariter pares, & pariter impares, patet ex duabus præcedentibus propoſitionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcunque (EZ, CZ, BZ, AZ;) erit ut (CE) exceſſus ſecundæ (CZ) ſupra primam, ſive minimam (EZ) ad minimam (EZ;) ita exceſſus (AE) maximæ (AZ)

(AZ) ſupra minimum, ad omnes ſimul reliquas (BZ, CZ, EZ.)



Trasferantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ. Quoniam AZ eſt ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ; erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & CE ad EZ. Quare *b* ut una AB ad unam BZ, ſive ut CE ad EZ, ita ſimul omnes AB, BC, CE (hoc eſt AE) ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ. Quod erat demonſtrandum.

a 17. 5.

b 12. 5.

Ex hac propoſitione, cujus fœcunditatem non videntur priores Arithmetici obſervaſſe, ſequentia deducemus.

Corollaria.

1. Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales (EZ, CZ, BZ, AZ;) erit ut denominator poportionis, unitate multactus, ad uuitatem; ita minimi, & maximi termini differentia (AE) ad ſummam omnium, dempto maximo (AZ.)

Denominatorem referat FN, unitatem verò GN. Igitur ut FN eſt ad GN, ita CZ eſt ad EZ; & dividendo, ut FG, denominator ſcilicet unitate multactus, eſt ad CN unitatem; ita CE eſt ad EZ; hoc eſt, per hanc propoſitionem, ita eſt AE ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ.

2. Iiſdem poſitis dato denominatore (FN,) & maximi, ac minimi termini differentiâ (AE,) habetur ſumma omnium dempto maximo, ſi (AE) maximi, & minimi differentia dividatur per denominatorem unitate multatum (FG.)

c corol. 1. præc. Cùm enim ſit *c*, ut FG ad GN unitatem, ita AE ad omnium ſummam dempto AZ, ea exhibebitur, ſi quartus proportionalis inveniatur; is verò obtinetur, ſi *d* terminus ſecundus, nempe unitas, ducatur in AE tertium, & productus, qui manet ipſe AE, dividatur per primum FG.

d 19. 9.

3. Quod ſi termini proportionalis fuerint magnitudinis, habebitur ſumma omnium demptâ maximâ, ſi fiat ut (CE) duarum collateralium differentia ad minorem (EZ,) ita (AE) maximæ, & minimæ differentia ad aliam. Patet ex ipſa propoſitione.

4. Si data ſeries proportionalium, ſeu nu-

numerorum, ſeu magnitudinum ſit proportionis duplæ, habetur omnium ſumma demptâ maximâ, ſi minima auferatur à maxima.

Per hanc enim 35, ut CE eſt ad EZ; ita AE eſt ad omnes BZ, CZ EZ. Atqui hîc CE par eſt EZ. Ergo etiam AE par eſt omnibus BZ, CZ, EZ.

5. Iiſdem poſitis, ut (AB) differentia duorum maximorum terminorum (AZ, EZ) eſt ad maximum; ita (AE) maximus, dempto minimo, eſt ad omnium ſummam, dempto minimo.

Oſtenſum eſt enim in propſitione, ut AB eſt ad BZ, ita AE eſſe ad omnes BZ, CZ, EZ. Ergo ut AB eſt ad AZ, ita AE eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ; hoc eſt ad omnes demptâ minimâ EZ.

Scholium.

QUi hanc propoſitionem, ejuſque corollaria contulerit cum iis, quæ ſcripſi ad propoſitionem 11. *l.* 6, *facilè intelliget hinc deduci poſſe totam contemplationem illam, quâ ſerici infinitarum proportionalium quantitatum una exhibetur omnibus æqualis. Nam cùm finitus eſt proportionalium numerus, tum ut* f *ſ* per hanc *CE eſt ad EZ, ſeu ut AB ad BZ; ita AE (hoc* 35. *eſt maxima demptâ minimâ, ſeu ultimâ) eſt ad*

omnes BZ, CZ, EZ. Cùm verò numerus proportionalium infinitus eſt, tunc ut AB eſt ad BZ, ita maxima tota AZ eſt ad omnes BZ, CZ, EZ, &c. Ubi hoc ſolùm intereſt, quod tertio loco maxima jam accipiatur tota, quia nimirum minima, quæ prius à maxima auferebatur, jam nulla ſit; ac proinde auferri nequeat.

8 cor. 5. prec. *Rurſus cùm finitus eſt numerus proportionalium, ut AB g eſt ad AZ maximam, ita AE (hoc eſt maxima demptâ minimâ) eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, (hoc eſt ad omnes demptâ minimâ). At verò cùm infinitus eſt proportionalium numerus, tum ut AB eſt ad maximam AZ, ita maxima AZ eſt ad omnes AZ, BZ, CZ, EZ. Ubi rurſum hæc una differentia eſt, quod minima jam evaneſcat, ac nulla ſit; adeoque auferri nequeat.*

PROPOSITIO XXXVI.

SI numerorum ſeries in ratione dupla ab unitate continuè proportionalium (A, B, C, D) continuetur, donec eorum ſumma (E) ſit primus numerus; ſumma (E) in maximum (D) multiplicata faciet numerum perfectum.

Quot ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E dupli: nimirum E, O, N, P.

1. A. B. C. D.
E. O. N. P. F.
M. Q.

P.

P. Ex æquo *a* igitur est ut A ad D, sic E ad P. Quare ex A in P idem *b* fiet numerus, qui ex D in E, nempe F. Ergo P metitur F per A binarium; ac proinde E, O, N, P, F sunt continuè proportionales in ratione dupla. Ergo F minùs E, æquatur *c* ipsis E, O, N, P. Sed E æqualis est *d* ipsis 1, A, B, C, D. Ergo F minùs E ipsis 1, A, B, C, D, & O, N, P æqualis est. Adde utrisque E, erit F omnibus 1, A, B, C, D, E, O, N, P æqualis. Sunt autem dicti numeri partes aliquotæ ipsius F: nam cùm E, O, N, P, F sint continuè prop., singuli metiuntur *e* F. Ob eandem causam singuli 1, A, B, C metiuntur D. D autem metitur F, nam D *f* in E fecit F. Ergo & singuli 1, A, B, C, D *g* metiuntur F.

a 22. 5. *b* 19. 7. *c* corol. 4. præc. *d* hyp. *e* 11. 9. *f* hyp. *g* ax. 11.

Reliquum est, ut ostendatur, numeri F nullam esse aliam partem aliquotam. Esto M quævis aliquota ipsius F. Ostendam eam esse eandem cum aliquâ ipsarum A, B, C, D, E, O, N, P eo ipso, quo id negatur. Ponatur enim, M non esse eandem cum ulla ipsarum A, B &c. Quoniam igitur M metitur F, metiatur per Q. Ergo M in Q *h* facit F. Sed etiam E in D fecit F. Ergo est ut E ad Q, sic M ad D. Sed quia B unitati

h ax. 8.

1. A. B. C. D.
E. O. N. P. F.
M. Q.

proximus eſt primus, *k* utpote 2, & M ponitur eſſe diverſus ab omnibus A, B, C, non metitur *l* M ipſum D. Ergo neque E metietur Q. Quare *t* cùm B primus ſit, erunt E, Q *m* primi inter ſe; ideoque in *n* ratione ſuâ minimi. Ergo E metitur M, & Q *o* metitur D. Ergo cùm A primus ſit, Q eſt aliquis *p* ipſorum A, B, C. Sit ergo Q idem cum B: & quot ſunt B, C, D, tot ſumantur ab E dupli E, O, N. Igitur ex æquo, ut B eſt ad D, ſic E eſt ad N. Idem ergo fit ex B in N, qui fit ex D in E, nempe F. Sed quia M metitur F per Q, etiam Q in M facit F. Quare cum idem F fiat ex Q in M, & ex B in N, erit ut Q ad B, ita N ad M. Sed oſtendi Q eſſe idem cum B. Ergo N eſt idem cum M.

k hyp.
l 13. 9.
t hyp.
m 31. 7.
n 23. 7.
o 21. 7.
p 13. 9.

Nullas igitur F partes aliquotas habet, præter 1, A, C, D, E, O, N, P, quibus omnibus cùm F ſit æqualis, perfectus eſt. Quod erat demonſtrandum.

Quemadmodum in 12. *propoſitione hujus libri, ita & in hac ex contradictoria ſua directè aſſertio concluditur. Quod miror à Clavio, aliiſque non fuiſſe obſervatum.*

Scho-

Scholium.

EX *hoc theoremate invenientur omnes numeri perfecti. Quia ſumma ex* 1, 2, *eſt* 3 *numerus primus*, 3 *in ultimum* 2 *facit* 6 *primum perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt* 1, 2, 3. *Et quia ſumma ex* 1, 2, 4 *eſt* 7 *primus numerus*, 7 *in maximum* 4 *facit* 28 *ſecundum perfectum, cujus partes aliquotæ ſunt* 1, 2, 4, 7, 14. *Rurſum quia ſumma ex* 1, 2, 4, 8, 16, *eſt* 31 *primus*, 31 *in* 16 *facit* 496 *perfectum tertium, cujus aliquotæ partes ſunt* 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Summa habetur facillimè, ſi numerus ſequens multetur unitate, ut patet ex corollario 4 *præcedente. Partes aliquotas cujuſvis perfecti ſic invenies: quot numeri accepti ſunt ab unitate dupli ſeclusâ unitate, totidem à primo, ſive ſummâ accipiantur dupli annumerato primo. Hi dupli cum duplis ab unitate, atque ipſa unitate, ſunt partes aliquotæ perfecti dati.*

Porrò Inventio perfectorum ex hac propoſitione, & corollario 4 *præcedente breviſſimè exponitur hunc in modum. Ratio dupla ab unitate continuetur in infinitum. Vide qui numeri progreſſionis abjectâ unitate fiant primi; hi namque ducti in præcedentes dabunt perfectos.*

De multitudine perfectorum hactenus inventorum Marinus Merſennus in Præf. num. 9. *hæc ſcribit: hactenus inventos eſſe tantum* 11: *nimirum*, 6. 28. 496. 8128. 23 (550, 336. 8, 589 (869, 056. 137, 438 (691, 328. 2 (385. 843 (08, 139 (952, 128, *& tres alios, quorum*

Tom. I. Phyſico. Mathem.

rum poſtremus ſit ex progreſſionis duplæ termino 257mo unitate mulctato in terminum 256um: ex illis 28, quos Petrus Bungus cap. 28. de myſteriis num recenſet, tantum 8 primos eſſe perfectos, (eos videlicet, quos ſupra dedimus,) reliquos 20 imperfectos. Hæc ille.

Quod autem plures hactenus non ſint reperti, inde fit, quòd in ſerie progreſſionis duplæ intervalla numerorum, qui abjectâ unitate primi fiant, valde magna ſint; undecimus enim ejuſmodi eſt terminus ab unitate (ut dictum ſupra) 257us excluſivè; ac proinde numerus ingens, qui primus an ſit, longiſſimi laboris eſt diſcernere. Sanè, ſi 20 notis conſtet numerus, Merſennus aſſerit, huic examini ne integrum quidem ſæculum ſufficere, quocunque modo hactenus cognito utaris.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

Quid potissimum hoc in opere spectaverim, initio præfatus sum: nimirum, ut Arithmeticæ praxim universam, & clarè, breviterque exponerem, & (quod nullus huc usque fecit) demonstrarem. Quia porrò, quod in tribus elementorum libris compendio (ut opinor) non spernendo jam feci, logisticæ speciosæ rudimentis primis non semel utar etiam hìc, revocanda in memoriam erunt ea, quæ habentur ante elementorum librum, nobis primum, Euclidi septimum; quibus hoc jam accedet unum, quod fractiones etiam speciosas subinde adhibebimus. Nihil est tamen, quod difficultatem hìc aliquam sibi quispiam imaginetur, cùm operationes earum à communium fractionum operationibus in nullo differant.

In citandis elementorum Arithmeticorum libris Euclidis ordinẽ retinui. Quare

re cùm citatur ſeptimus, adeundus eſt primus noſter hic, & ſic de duobus reliquis: primus numerus propoſitionem, ſecundus librum deſignat.

LOGISTICA

Integrorum Numerorum.

IN omni numero, pluribus notis conſtante, ea nota, quæ maximè dextra eſt, prima dicetur; ultima verò, quæ maximè ſiniſtra.

CAPUT I.

Notarum Arithmeticarum Inſtitutio.

DEcem notæ, ſeu characteres ſunt, (alii digitos, alii figuras appellant,) quibus omnes numeri exprimuntur.

0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Prima nota (1) unitatem ſignificat; 2, ſignificat unitates duas; 3, unitates

tes tres ; 4, unitates quatuor ; & ſic deinceps.

Poſtrema o, quæ cyfra dicitur , nihil ſignificat ; ſed aliis notis præpoſita , earum auget valorem , ut mox dicemus.

Præter hunc valorem ſimplicem notæ jam dictum , alium inſuper habent ratione loci , quem ſingulæ occupant. Porrò locorum valor creſcit ſecundùm proportionem decuplam , in infinitum continuatam. Itaque nota quælibet, primo loco poſita, ſignificat (ut dictum eſt) unitates ; poſita ſecundo loco , ſignificat tot decades , quot habet unitates ; tertio loco , tot centenas ; quarto loco , tot millia ; quinto loco , tot dena millia ; ſexto , tot centena millia ; ſeptimo , tot mille milia , ſeu decies centena millia , ſeu millones , quot unitates habet ; atque ita deinceps ſequentium locorum valor in proportione decupla in infinitum procedit.

Eſto numerus A : prima hujus nota 6 ſignificat ſex unitates ; ſecunda 9, valet novem decades unitatum, hoc eſt (90) nonaginta ; tertia 7 valet ſeptem centenas , hoc eſt (700) ſeptingenta ; quarta 5 valet quinque millia (5000) ; quin-

ta

ta 3 valet tres decades millium, ſeu ter dena millia, hoc eſt (30000) triginta millia; ſexta 8 valet octo centenas millium, hoc eſt (800000) octingenta millia; ſeptima 2 valet unum millionem, ſeu mille millia, ſeu decies centena millia (100000); octava 4 valet quadraginta milliones (40000000.)

A. 4 1 8 3 5 7 9 6.

9 0. Nonaginta.
7 0 0. Septingenta.
5 0 0 0. Quinque millia.
3 0 0 0 0. Triginta millia.
8 0 0 0 0 0. Octingenta millia.

1 0 0 0 0 0 0. Mille millia, ſeu mill.
40 0 0 0 0 0 0. Quadraginta million.
1 Unitas.
10 Decem.
100 Centum.
1000 Mille.
10000 Decem millia.
100000 Centum millia.

LOCUS	VALOR.
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centenæ
Quartus	Millia
Quintus	Decades millium
Sextus	Centenæ millium
Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum
Nonus	Centenæ millionum
Decimus	Millia millionum
Undecimus	Decades millium millionum
Duodecim.	Centenæ millium millionũ
13us	Milliones millionum, ſive biliones
14us	Decades bilionum
15us	Centenæ bilionum
16us	Millia bilionum
17us	Decades millium bilionum
18us	Centenæ millium bilionum
19us	Milliones bilionum, ſive triliones
20us	Decades trilionum
21us	Centenæ trilionum
22us	Millia trilionum
23us	Decades millium trilionum
24us	Centenæ millium trilionum
25us	Milliones trilionum, ſive quatriliones
Etc.	Etc.

POR-

Porrò ſingulorum locorum valor tabellâ hîc appoſitâ exibetur, quam viſum eſt commodiſſimum ita partiri, ut ſingula quaſi membra locorum ſenarii ſinguli conſtituerent. In ſecundo igitur ſenario, ſeu membro ſunt milliones; in tertio biliones; in quarto triliones; in quinto quatriliones; atque ita in infinitum. *Valor enim cujusvis membri, ſeu ſenarii à numero membrorum, ſeu ſenariorum præcedentium denominabitur*. Ut ſi quæris valorem ſenarii ſeptimi, is erit ſextilio, quia ſeptimum ſenarium ſex ſenarii præcedunt.

Si magis placet valorem membrorum per ſolos milliones exprimere, toties itera vocem *millio*, quot ſunt membra præcedentia. Ut ſi quæratur, quis ſit valor in quarto ſenario, oportet tertio dicere millio, quia quartum ſenarium tres ſenarii, ſeu membra antecedunt. Itaque valor quarti ſenarii eſt millio millionis millionis.

CAP.

CAP. II.

Numeratio.

DOcet Numeratio datum numerum ſcribere, & enuntiare. Utrumque facili negotio perficiet is, qui notarum numeratnm valorem, tum ſimplicem, cum loci potiſſimum, primo capite explicatum, rectè perceperit. Sed quia in magnis numeris proclive eſt, ut hæreant etiam periti, variæ praxes huic rei facilitandæ ſunt excogitatæ. Nos hîc eam dabimus, quæ viſa eſt inter cæteras expeditior.

Ante omnia dabit operam tyro Arithmeticus, ut expeditè ſcribat, ac enuntiet primi ſenarii locos, hoc eſt numeros conſtantes notis, vel ſex, vel quinque, vel quatuor, &c.

In quo juvabitur hâc praxi. Pronuntiandi dentur numeri A, B, C. Poſt tres primas notas comma interpone, ut duo quaſi membra exiſtant, ſive ſecundum tribus conſtet notis, ſive paucioribus. Pronuntia deinde ſecundum membrum, tanquam

370, 517. A
49, 304. B
7, 059. C

quam ſi eſſet ſolum ; ſed adde ſemel hanc vocem *mille*, vel *millia* ; primum verò membrum pronuntia, ut jacet. Datos igitur numeros A, B, C ita enunciabis.

A. Trecentia ſeptuaginta millia, quingenta decem & ſeptem.
B. Quadraginta novem millia, trecenta & quatuor.
C. Septem millia, quinquaginta novem.

Hoc præmiſſo : numerus enuntiandus eſto quantumvis magnus.

D.

96, 638 (908, 003 (030, 460 (243, 709.

Poſt ſex quaſque notas, à dextris incipiendo, lunulâ aut virgulâ interpoſitâ, numerum partire in quædam quaſi membra, quorum ſingula ſenis conſtabunt notis, dempto ultimo, quod conſtare poteſt paucioribus, imo unicâ. Tum ſingula membra, à ſiniſtris incipiendo, pronuncia, (ut jam docui,) ac ſi eſſent ſola, ſed adiunge ſingulis valo-

lorem iplis competentem, quem ſubjecta tabella indicat.

MEMB.	*VALOR.*	*MEMB.*	*VALOR.*
Primum		Septimum	Sextilio
Secundum	Millio	Octavum	Septilio
Tertium	Bilio	Nonum	Octilio
Quartum	Trilio	Etc.	Etc.
Quintum	Quatrilio		
Sextum	Quintilio.		

Numerus igitur D ſic pronuntiabitur.

Membr. 4.

Nonaginta ſex millia, ſexcenti triginta octo triliones.

Membr. 3.

Nongenta octo millia,& tres biliones.

Membr. 2.

Triginta millia, quadringenti, ſexaginta milliones.

Membr. 1.

Ducenta quadraginta tria millia, ſeptingenta novem.

Cùm numerus multas ad dextram, & non interruptas habet cifras, brevior est pronuntiatio. Ut si detur Numerus E.

E.

1 (000000'000000'000000(000000
(000000(000000.

(major is est numero arenarum, orbem terræ componentium.) Quoniam is ultimum, hoc est septimum membrum, constans unitate, solum habet significativum, eum totum pronuntiaveris, dicendo: unus sextilio.

Quod si missis bilionum, ac trilionum vocibus, malis per solos milliones enuntiare; eâdem partitione factâ, quæ supra, pronuntia membra singula, ac si essent sola, toties adjunctâ voce *millio*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Itaque numerus D per milliones sic pronuntiabitur.

Membr. 4.

96, 638 Milliones millionum millionum.

Membr.

Membr. 3.

908, 003 Milliones millionum.

Membr. 2.

030, 460. Milliones.

Membr. 1.

243, 709.

Numerus verò E pronuntiabitur hunc in modum: unus millio millionum millionum millionum millionum. Prior modus brevior, & expeditior eſt; alter uſitatior.

Omnium facillima, at cæteris longior, eſt enuntiatio per ſola millia. Poſt ſingulas ternas notas, initio facto à dextris, interpone comma; tum membra ſingula, incipiendo à ſiniſtris, ita pronuntia, ac ſi eſſent ſola; ſed toties adjunge hanc vocem *mille*, vel *millies*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Datus ſit numerus F enuntiandus per millia. Membrum ultimũ eſt 96*ies* millies millies millena millia: penultimum, 63*ies* millies millena millia.

F 96, 638, 000, 000, 000.

Ratio horum omnium ex capite primo eſt manifeſta.

Scriptio dati numeri nullo negotio perficitur, ſubſidio tabellæ capitis præcedentis. Scribendus eſto hic numerus, *quadraginta quinque milliones, ſeptem millia.*

In tabella reperies, decades millionum obtinere locum octavum, milliones ſeptimum, millia quartum. Scribe igitur 4 loco octavo: 5 ſeptimo: 7 quarto. Et loca vacua citris reple.

45: 007, 000.

CAP. III.

Poriſmata quædam, ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.

PORISMA I.

Si numero (A,) pluribus notis conſtanti, præponatur una nota; illius valor augetur in decuplum; ſi duæ in centuplum; ſi tres in

		243	0
A	243	243	00
		243	000

in millecuplum; & sic deinceps, semper in proportione decupla.

Demonstratio. Cùm enim toti numero A præponitur una nota (cifræ quaslibet hìc notas repræsentant,) singulæ ejus notæ ad unum locum promoventur: sic, ut 3 jam secundo consistat loco, 4 tertio, 2 quarto; ac proinde singularum valor augetur in decuplum, ut patet ex primâ notarum Arithmeticarum institutione, capite primo expositâ. Ergo valor totius numeri A augetur in decuplum. Similiter cùm numero A duæ notæ præponuntur, ascendunt singulæ ad duo loca. Ergo valor singularum, ac proinde etiam numeri totius A, augetur in centuplum. Et sic deineeps.

Corollarium. Hinc patet, si ante duos numeros *a*, & *b* ponantur æquè multæ cifræ, ut fiant *c*, & *d*, fore *c*, & *d* ipsorum *a*, & *b* æquè multiplices. Si enim præponatur singulis una cyfra, erunt pariter *c*, & *d* ipsorum *a*, & *b* decupli; si duæ cyfræ, ambo centupli; & sic deinceps.

a	32.	3200. c
b.	7.	700. d

PORISMA II.

1000 A.
999 B

DVorum numerorum ille major eſt, qui pluribus notis conſtat.

Patet ex prima inſtitutione notarum. Sic A major eſt, quàm B.

PORISMA III.

C. 2000
D. 1999

NUmerorum, æquè multis notis conſtantium, ille major eſt, cujus poſtrema nota major eſt.

C 34399
D 34390

Sic C major eſt, quàm D. Patet ex inſtitutione prima notaram numeralium.

PORISMA IV.

A 2999
B 2000
E 20001 0

SI duo inæquales numeri A, B æquè multis notis conſtent; continebitur minor in majore minus, quàm decies.

De-

Demonſtratio. Adjicia- A 2999
tur enim minori B una B 2000
cifra, & fiat E. Per Po- E 20001 0
riſma 2. E major eſt, quàm
A. Sed E præcisè decuplus eſt dati minoris B, per Poriſma I. Ergo A non eſt decuplus dati B. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA V.

A 2999
B 300
E 3001 0

DAti ſint numeri, A major, B minor; & major A ſuperet minorem B unâ notâ; ſed minoris B nota ultima (3) ſit major notâ ultimâ majoris A. Dico minorem B in majori A contineri minùs, quàm decies.

Demonſtratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Poriſma 3. E major erit, quàm A. Sed E præcisè decuplus eſt dati minoris B, per Poriſma 1. Ergo A minor eſt, quàm decuplus ipſius B. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA VI.

DAti ſunt duo numeri A, & B. Si prima unius nota c multiplicet ali-

quã numeri alterius notam d *primâ altiorem, ſed acceptã ſimpliciter; & productum* e *ad locum notæ* d *attollatur, tot videlicet notis ante ipſũ poſitis, quot ſunt ante* d, *ut fiat* f. *Dico* f *eſſe verum productum, quod fit ex nota* c, *multiplicante notam* d, *ſecundum loci valorem æſtimatam.*

d
3,042. A
c
517 B
e. 21
f. 21.000

Demonſtratio. Nota *d*, ſecundùm loci valorem æſtimata, eſto *g*. Tum *c*, multiplicans *g*, faciat *z*. Oſtendendum eſt *f* eſſe *z*. Quoniam *c* multiplicans numeros *d*, & *g* genuit numeros *e*, & *z*; per 17. 7, ut *d* eſt ad *g*, ita *e* eſt ad *z*. Atqui etiam, ut *d* ad *g*, ita *e* eſt ad *f*. (Cùm enim *g*, & *f* ſint ipſi numeri *d*, & *e*, ſed æqualiter ſublimati, hoc eſt æquè multas ante ſe notas per hypothelim habentes; patet ex Poriſmatis 1. corollario *g*, & *f* ipſarum *d*, & *e* eſſe æquè multiplices.) Ergo *e* ad *z*, & ad *f* eandem habet proportionem. Ergo per 9. 5. *z*, & *f* ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

d 3 3,000, *g*
c 7
e 21 *z*
f 21,000

PO-

PORISMA VII.

DAti rursum sint duo numeri *A*, & *B*. Si duæ quælibet utriusque numeri notæ k, & d invicẽ multiplicẽtur simpliciter acceptæ, & productum c attollatur ad locum, ex notarum multiplicantium locis compositum, tot videlicet notis ante c positis, quot utramque k, & d antecedunt. Dico haberi in (f) productum verum, quod fit ex notis k, & d juxta loci valorem æstimatis.

d
3,042. A
k
5, 17. B
---
c. 15 m, 15,000
f, 15, 000, 00

k. 5 5, 00. h
g. 3, 000.
c c
m. 15, 000. 15, 000, 00, f
z

Demonstratio. Notæ *k*, & *d* secundùm loci valorem æstimatæ sint *h*, & *g*. Tum *h* in *g* sit *z*. Ostendendum est *f* esse *z*. Ante *c* productum ex *k* in *d* ponantur tot notæ, quot antecedunt notam *d*, & fiat

fiat *m*. Erit per Poriſma præcedens *m* productum ex *k* in notam *d* ex loco æſtimatam, hoc eſt ex *k* in *g*. Deinde quoniam per conſtructionem *m* eſt *c* cum tot notis ante ſe, quot ſunt in numero A ante *d*; *f* verò per hypotheſim eſt idem *c*, ſed cùm tot notis ante ſe, quot in numeris A, & B antecedunt utramque *d*, & *k*, manifeſtum eſt notas, quæ in *f* ponuntur ante *c*, excedere eas, quæ in *m* ſunt ante *c*, tot notis, quot ſunt in B ante *k*, hoc eſt tot notis, quot ſunt in *h* ante *k*, cùm *h* ſit ipſum *k*, ex loco æſtimatum. Ergo per corollarium Poriſmatis 1. *h*, & *f* ſunt ipſorum *k*, & *m* æquè multiplices; ac proinde ut *k* eſt ad *h*, ſic *m* eſt ad *f*. Atqui etiam per 18. 7. ut *k* eſt ad *h*, ita *m* eſt ad *z*. Nam, ut oſtendi ſupra, *k* multiplicans *g* produxit *m*, & per hypotheſim *h* multiplicans *g* genuit *z*. Ergo *m* eodem modo ſe habet ad *f*, & ad *z*. Ergo per 9. 5. *f*, & *z* æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Ex hoc poriſmate, & præcedenti multiplicatio demonſtrabitur capite 7.

PO-

PORISMA VIII.

DAti sint duo numeri AB, & C: si C dividat membrum A simpliciter acceptum, & quotiẽs d *attollatur ad locum membri A, hoc est ponantur ante* d *tot notæ, quot sunt ante membrum A, ut fiat* f. *Dico* f *esse quotientem verum, qui habetur ex membro A, æstimato secundùm loci valorem, diviso per C.*

A, B 360, 5897 { 60.C / 6. d / 6,0000 f

Demonstratio. Membrum A, juxta loci valorem æstimatum, esto g. Tum C, dividens g, faciat quotientem z. Ostendendum est *f* esse z.

A 360 — g 360,0000
C 60
d.6. — 6,0000.f
z------

Quoniam C, dividens numeros A, & g, genuit quotientes *d*, & z; erit per corol. p. 18. l. 7. ut A ad g, ita *d* ad z. Atqui etiam est, ut A ad g, ita *d* ad *f*; (Cùm enim g & *f* sint ipsi numeri A & *d* ad æqualem locum sublimati, hoc est, æquè multas per hypothesim notas ante se habentes; patet ex corollario Porisma-

risſmatis 1. *g*, & *f* ipſorum A, & *d* eſſe æquè multiplices.) Ergo *d* eodem modo ſe habet ad *f*, & ad *z*. Ergo per 9. 5. *f* eſt *z*. Quod erat demonſtrandum.

Ex hoc poriſmate diviſio demonſtrabitur capite 9.

PORISMA IX.

Operationum logiſticarum, hoc eſt additionis, ſubtractionis, multiplicationis, & diviſionis artificiũ in eo poſitum eſt, quod tantiſper, dum operamur, loci valore neglecto, notæ accipiantur juxta valorem ſimplicem, ſic tamen, ut ſummæ in additione, reſidua in ſubtractione, producta in multiplicatione, quotientes in diviſione ſuis quæque reponantur locis: quo fit, ut valor ſingulis ex loco debitus reſtituatur.

PORISMA X.

Nota ſimplex, quemcunque numerum multiplicans, aut dividens, non niſi unicâ notâ, ſeu loco eum auget, minuitve.

A, 365
10
3650

Detur numerus A quicunque. Hîc mul-

multiplicatus per 10 non niſi uno gradu, ſeu loco attollitur, ut patet ex 1 poriſmate. Ergo neque multiplicatus per notam ſimplicem attolletur altiùs gradu uno.

A 365 { 10 { 36 5/10

Rurſum 10, dividens datum A, eum non deprimit infra gradum unum. Ergò neque nota ſimplex: quo enim diviſor eſt minor, eò quotiens major eſt.

CAP. IV.

Additio.

ADditio eſt plurium numerorum in unam ſummam collectio.

PRAXIS.

DAti ſint numeri A, B, C in unam ſummam colligendi.

Ita ſcribantur, ut primæ notæ reſpondeant primis, (hoc eſt unitates unitatibus;) ſecundæ ſecundis, (hoc eſt decades decadibus;) tertiæ tertiis, (hoc

97063. A
8002. B
5041. C
110106. D

(hoc eſt centenæ centenis;) & ſic deinceps.

Subductâ deinde lineâ, notæ primi loci addantur, & ſi numerus ex his compoſitus unicâ notâ conſtet, ea primo loco infra lineam ſcribatur: Si verò duabus conſtet, ſola earum prima infra lineam ſcribetur, altera reſervabitur, ſequenti loco reponenda: Si tribus (quod rarius accidit) ſecunda ad ſecundum, tertia ad tertium locum pertinebit.

Poſt hæc addantur notæ ſecundi loci, unà cum illâ, quæ fuerat reſervata, numeruſque ex his compoſitus ſcribatur infra lineam ſecundo loco, juxta cautionem jam traditam. Atque eundem planè in modum locorum cæterorum additio peragetur.

Exemplo præcepta fient clariora.

Exemplum.

PRimi loci notæ 1, 2, 3 faciunt 6, quæ ſcribo iufra lineam.	97063. A 8002. B 5041. C
Notæ ſecundi loci 4, 0, 6 faciunt 10; qui numerus quia duobus notis conſtat, primam 0 infrà lineam ſcribo,	110106. D

bo, ſecundam 1 ſervo tertio loco reponendam.

Loco tertio nullam reperio notam ſignificativam. Notam igitur ſervatam 1 infra lineam ſcribo in loco tertio.

In quarto loco reperio 5, 8, 7, quæ ſimul efficiunt 20; qui numerus quia binis conſtat notis, primam o ſcribo infra lineam quarto loco; ſecundam verò 2 ſervo ſequenti loco.

In loco quinto reperio 9, cui addo notam ſervatam 2, & fiunt 11, quæ ut jacent quinto, & ſexto loco ſubſcribo. Atque ita operatione totâ peractâ provenit numerus D, ſumma datorum A B, C.

* *Additio poteſt etiam fieri à ſiniſtra in dextram; & hac operatio, ſivè à ſiniſtra, ſivè à dextra incipiat, iiſdem principiis* a *demonſtratur, primaque operatio eſt proba ſecundæ, ſicut ſecunda primæ. Quod forſan pluribus novum apparebit.*

Si multi fuerint numerorum addendorum ordines, expediet lineis inter-

97062.	A	* *Deſaiguiliers Prof. Mathem. Amſtelod. Tract. de Scientia numerorum. a* axiom. 2. 3. 4.
8002.	B	
5041.	C	
110106.	D	

9
20
0
10
6
110106 D

terpoſitis in tres, quatuorve eos claſſes dividere, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligere, quæ deinde ad unum redactæ, ſummam ſummarum exhibeant.

Demonſtratio.

COlligitur ex poriſmate 9. cap. 3. Quamvis enim in operatione notarum valor localis neglectus tantiſper fuerit, is tamen fuit reſtitutus, dum ſingulorum locorum ſummæ ſuis quæque locis fuêre collocatæ, ut ex operatione ipsâ manifeſtum eſt.

SPECIES DIVERSÆ.

Libr.	Flo.	Aſſ.
8	7	5
5	3	6
2	8	9
3	2	8
21.	3.	8.

SI addendæ ſint ſpecies diverſæ, ut libræ, floreni, aſſes, ſimilia ſub ſimilibus ſcribe, & minimam ſpeciem (nempe aſſes) primo loco, tum ordine reliquas. Deinde à minimæ ſpeciei ſummâ., quæ hîc eſt aſſium 28, abjice ſpeciem ſequentem, nempe florenum, quoties potes, & reſi-

ſiduum ſcribe infra lineam ſub aſſibus; quod verò abjectum fuit, hîc nempe florenus 1, ſervetur addendum ſpeciei ſequenti, nempe florenis.

Proxima ſpecies in unum collecta facit florenos 20, quibus ſi addamus unum à priori ſpecie abjectum, fiunt floreni 21. Ab his abjici poſſunt tres libræ, quas addo ſpeciei ſequenti, libris videlicet, & reſiduos florenos 3 florenis ſubſcribo.

Tertiæ ſpeciei ſumma eſt librarum 18, quibus adde 3 ex priori ſpecie abjectas; & fiunt libræ 21, quas libris ſubſcribe. Ergo ſumma eſt lib. 21, Flor. 3, Aſſ. 8.

Eâdem methodo addi poſſunt gradus, minuta prima, ſecunda, tertia &c.

CAP. V.

Subtractio.

DOcet minorem numerum à majori ſubtrahere, & reſiduum exhibere. Duplex verò eſt modus, quo minor numerus à majori ſubtrahitur.

PRAXIS MODI I.

MInor numerus ſcribatur ſub majore ſic, ut primæ notæ primis, ſecundæ ſecundis, & ſic deiuceps reſpondeant.

Subductâ deinde lineâ, primam inferiorem notam aufer à prima ſuperiore, & reſiduum ſcribe infra lineam primo loco; tum ſecundam aufer ex ſecunda, & reſiduum ſubſcribe ſecundo loco; & ſic deinceps.

Quod ſi in ſuperiori numero reſtent aliquæ notæ, quibus nullæ reſpondeant numeri inferioris; etiam illæ infra lineam ſcribantur.

Si autem nota aliqua inferior ſit major ſuperiore, ad ſuperiorem mente adjicies decem. Tum verò proxima ad ſiniſtram nota ſignificativa ſuperioris numeri æſtimanda eſt minor unitate, quàm reverâ ſit: & ſi intermediæ eſſent cifræ, una, vel plures, omnes illæ ad notam ſignificativam uſque æſtimandæ erunt tamquam 9.

Exem-

Exempla.

1. ESto B auferendus ab A. Aufer 5 ex 6; reſtat 1, quod ſcribe infra lineam. Tum 7 aufer ex 9; reſtant 2, quæ ſubſcribe ſecundo loco. Supereſt in ſuperiori numero nota 4, cui nulla reſpondet in numero inferiore. Subſcribe igitur 4 loco tertio. Reſiduum quæſitum eſt C.

496.	A
75.	B
421.	C

2. Detur E auferendus ex D. Quia 8 ex 4 auferri nequit; ad 4 mente adjicio decem, atque ita 8 aufero ex 14; reſtant 6, quæ ſubſcribo. Quia verò ad 4 adjeci decem mutuata à numero ſequente, proximam notam ſignificantem 3 reputabimus ut 2, & cifras intermedias ut totidem 9. Aufero igitur 7 ex 9, & reſiduum 2 ſubſcribo. Tum 5 aufero ſimiliter ex 9, & reſiduum 4 ſubſcribo. Tandem 2 aufero non ex 3, ſed ex 2, & nihil reſtat. Reliquum igitur quæſitum eſt F.

3004.	D
2578.	E
426.	F

3. Oporteat H auferre ex G. Quia 9 ex 3 auferri nequit, adjectis mente 10

85003	G
69	H
84934.	I

ad 3, ſubduco 9 ex 13, & reſiduum ſubſcribo. Quapropter 5 fit 4, & 00 vertuntur in 9. Ergo 6 aufero ex 9, & reſiduum 3 ſubſcribo. Tum quia nullæ notæ inferioris numeri H ſuperſunt auferendæ, reliquas ſuperioris, quæ jam ſunt, non 850, ſed 849, ſubſcribo. Erit I quæſitum reſiduum.

4. Proponatur L auferendus ex K. Quia 3 nequit auferri ex 0, adjectis mente 10 ad 0, aufero 3 ex 10, & remanent 7. Tum verò, quia in majore numero K nota proxima ſignificativa eſt 1, ea evaneſcit, & cifræ intermediæ vertuntur in 9, à quibus ſubtrahes, ut ſuprà; & erit M reſiduum quæſitum.

100000.	K
51243.	L
48757.	M

Demonſtratio Modi 1.

QUod in reſiduorum ſcriptione locorum valor ſervatus ſit, ex operatione ipſa patet. Solùm reſtat, ut declaremus id, quod mirum videri ſolet Tyronibus, quare nota ſignificativa, ad ſiniſtram proxima, minuatur unitate; & cifræ, ſiquæ fuerint mediæ, in totidem 9 commutentur, quando nota inferior demi nequit ex ſuperiore. Inſpiciatur

3004. D
2578. E
426. F

tur ſecundum exemplum Quia 8 demi nequit ex 4, ad 4 adjicio decem mutuata à ſequente numero, qui eſt tria millia. Liquet autem, cùm à tribus millibus ſubduco decem, remanere duo millia, nongenta, nonaginta, quæ quia Arithmeticè exprimuntur hiſce notis 2990; patet, quare in ſuperiori numero 3 vertantur in 2, & cifræ 00 in 99.

D. 3004	96	At dicet quiſpiam, ſi
E. 2578	91	ante numeri D primã
F. 426	55	notam 4 ponerentur aliæ duæ 9, 6; & ante

numeri E primam 8 duæ 9, 1; tunc 4 valeret 400, & 8 valeret 800; ac proinde ut 800 auferri poſſint ex 400, adjicienda eſſent non decem, ſed mille, ut ſic 800 ex 1400 ſubducantur. Verùm reſpondeo eôdem recidere, ſive 8 auferas ex 14, ſive 800 ex 1400, quia reſiduum 6 ſcribitur infra lineam eo loco, qui debetur notis 4, & 8, nempe tertio: unde fit, ut reſidunm 6 eo loco poſitum valeat 600, quantum nempe ſupereſſet, ſi 800 ex 1400 ſubduceren tur.

MODI II. PRAXIS.

HÆc in eo tantùm à priore differt, quòd quando nota inferior auferri nequit à ſuperiore, ac proinde illi decem adjiciuntur; nullâ in ſuperioribus notis ſequentibus mutatione factâ, ſequens inferior nota unitate augeatur; aut certè, ſi nulla nota ſignificativa ſequatur, in loco ſequenti unitas reponatur. Res exemplo declarabitur.

Exemplum.

8068. K
476. L
7492. M

DEtur L, auferendus ex K. 6 ex 8 relinquit 2. 7 ex 6 ſubduci nequit. Adjicio ergo 10, & 7 demo ex 16: reſtant 9. Jam quia adjeci 10, ſequens nota inferior 5 augenda eſt unitate, & ſic 5 fit 6. Rurſum 6 ex 0 auferri nequit. Aufero igitur 6 ex 10, & reſtant 4. Quia verò rurſum adjeci 10, repono ſequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7. Reſiduum ergo quæſitum eſt M.

Hæc methodus expeditior plerumque eſt præcedenti; quæ tamen commodior

erit,

erit, cùm in majore numero plures occurrent cyfræ continuæ.

Demonſtratio Modi 2.

DEntur binæ quantitates
E-----A-----L-----B
I-----C-----F
AB major, CF minor, quæ ambæ æqualibus quantitatibus EA, IC augeantur. Si IF auferas ex EB, idem erit reſiduum LB, quod fuiſſet, CF ablato ex AB. Hoc ſi uumeris applicetur, operationis ratio continuò eluceſcet. Nam ſuperiori notæ 6 adjicere decem ſic, ut fiat 16, nihil eſt aliud, quàm ſequenti poſt illam loco (qui hîc tertius eſt) apponere unitatem. Quare cùm etiam loco, notam inferiorem 7 ſequenti, qui & ipſe tertius hîc eſt, apponatur unitas; manifeſtum eſt utrumque numerum æqualiter augeri, ac proinde reſiduum, hac ratione obtentum, illud ipſum eſſe, quod numero L à numero K ſubducto remanet.

Subtractio à ſiniſtra in dextrã etiam fieri poteſt, & iiſdem principiis demonſtrari, ut patet hoc exemplo.

59
8068. K
576. L

7492. M

Detur L, *auferendus*

ex K, 5 *ex* 80 *relinquit* 75, *ex quibus* 7 *infra repono*, *&* 5 *retineo*, *vel potius ſupra ſcribo. Poſtea* 7 *ex* 56 *aufero*, *&* 5 *reſtant* 49. 5 *ſi ſupra ſcriptum ſit*, *deleo*; 4 *infra ſcribo*, *&* 9 *retineo vel ſupra ſcribo. Denique* 6 *ex* 98 *relinquit* 92, *qui cum ultimus ſit numerus*, *infra totaliter reponitur*, *& reſiduum quæſitum* M *oſtendit*, *ſicut in exemplo præcedenti. Plura alia videri poſſunt apud* a *ſupradictum Autorem.*

a Deſaig. pag. 143. cit.

SPECIES DIVERSÆ.

UT libræ, floreni, aſſes ſubducantur; minor ſumma ſubſcribatur majori, ſic ut ſimilia ſimilibus reſpondeant: & ſi ſimile à ſimili ſubtrahi nequeat, à ſpecie majori proximâ unum mutuetur.

Lib.	Flor.	Aſſes.
25	12	13
10	14	18
14	4	15

Exemplum

18 Aſſes, quia nequeunt auferri ex 13, à florenis 12 unum mutuò acceptum adjicio ad 13 aſſes, & fiunt 33. Jam 18 ex 33 ablati relinquũt 15. Rurſum quia 14 flo-

floreni ex 11 (unum quippe ſuſtulimus) demi nequeunt, ad flor. 12 adjicio 1 libram mutuatam à libris 25, & fiunt floreni 18; à quibus ſi ſubducantur 14, remanent 4. Poſtremò 10 libras ſubduco ex 24 (nam una mutuò data eſt,) & reſtant 14 libræ.

Simili ratione ſubtrahentur gradus, minuta prima, ſecunda, &c.

CAP. VI.

Tabula Pythagorica, multiplicationi, diviſionique inſerviens.

ABacus, qui ab auctore Pythagoricus dicitur, in vertice ſeu ſupremo ordine A C habet novem primordiales notas Arithmeticas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & ſub ſingulis ponitur ſingulorum duplum, triplum, quadruplum, &c. uſque ad noncuplum. Uſus eſt eximius, tradeturque cap. 7, & 9.

Quod ſi hujus abaci columnæ AB, DE, &c. ab invicem ſeparentur, ut poſſint inter ſeſe quovis ordine permiſceri, multiplicationis, ac diviſionis compendium admirabile exhibebitur. Hanc tabulæ Pythagoricæ diſſectionem primus ex-

excogitavit, adhibuitque Johannes Neperus Baro Merchiſtonius, tum hoc invento ſuo, tum logarithmis à ſe itidem excogitatis, de Matheſi præclarè meritus.

Porrò hujus abaci diſſecti, ſive mobilis conſtructio eſt hujusmodi. Præparentur ex ære, chartâ ſolidâ, aut aliâ quâvis materiâ idoneâ laminæ plures oblongæ, & tenues (AB,) quæ dividantur in novem quadrata æqualia, & quadrata ſingula ductis diametris in duo triangula ſecentur ſic, ut inferius triangulum (BNP) ad dextram ſit. Primæ laminæ inſcribatur prima columna tabulæ Pithagoricæ, nempe 1, 2, 3, 4, &c.; & in altera ejus facie columna ſecunda 2, 4, 6, 8, &c. In ſecunda lamina deſcribatur columna tertia tabulæ Pythagoricæ 3, 6, 9, 12, &c.; in altera verò ejuſdem facie columna quarta 4, 8, 12, 16, &c. Et ſic deinceps in reliquis laminis abaci Pythagorici reliquæ columnæ deſcribantur, eâ ſemper lege, ut cùm numerus unicâ notâ conſtat, is reponatur in triangnlo inferiori; cum verò duâbus (exempli gra. 18) prima nota (8) inſcribatur triangulo inferiori, ſecunda (1) triangulo ſuperiori. Ex ſingulis autem hujuſmodi la-

laminis plures ejuſdem formæ erunt conſtruendæ. Sed uniuſcujuſque formæ ad maximas etiam diviſiones, ac multiplitiones peragendas ſufficient. Præter has autem alia inſuper præparanda eſt lamina XZ, quam hîc expreſſam vides. Ea reliquis ad ſiniſtram in omni multiplicatione, ac diviſione apponitur, ſingulos numerorum ordines denominans, quam proinde ab officio exponentem nominabo.

Harum laminarum primum iſtud, atque præcipuum artificium eſt, ex quo uſus reliqui omnes emanant, quòd datum numerum per novem primordiales notas momento penè multiplicatum exhibeat. Datus eſto numerus 597. Laminæ hunc numerum gerentes in vertice ſibi mutuò apponantur, præfixâ ad lævam virgulâ exponente XZ. Stabit igitur in primo, ſive ſupremo ordine numerus datus 597, atque infra ipſum alii numerorum ordines octo multiplices primi 597, juxta numeros laminæ exponentis; ut cap.8. demonſtrabitur.

Modus legendi, & exſcribendi ordines numericos laminarum.

TRia obſerva. 1. Primum inferius triangulum, quod nempe ad dextram eſt, conſtituere primum locum; rhombos intermedios ſingulos, loca ſingula intermedia; poſtremum ſuperius triangulum, locum ultimum. Ex quo ſtatim apparet, quot notis conſtet numerus, quem ordo quilibet laminarum continet. 2. Notas in eodem rhombo exiſtentes (Exempl. gr. in NM) coaleſcere. Quod ſi coaleſcentes, hoc eſt in unum collectæ, numerum efficiant binis notis conſtantem, illius notam ſecundam ad ſequentem rhombum, aut triangulum rejici oportere.

Exemplum.

OPorteat ordinem IX deſcribere. In primo triangulo inferiori reperio 3, quæ ſcribo primo loco. In ſequenti rhombo notæ ſunt 6, & 1, quæ coaleſcentes faciunt 7. Scribo ergo 7 ſecundo loco. In rhombo ſequenti notæ ſunt 8, & 5, quæ coaleſcentes faciunt 13; hu-

hujus ſummæ primam notam 3 ſcribo loco tertio ; alteram 1 rejicio ad ſequens ultimum triangulum, ac ad notam iſthic repertam 4 adjicio, & fiunt 5, quæ ſcribo loco quarto. Ordo igitur nonus continet numerum 5373.

Ratio hujus exſcriptionis dabitur in demonſtratione cap.8.

CAP. VII.

Multiplicatio.

QUid ſit multiplicatio, expoſitum eſt defin. 13. l. 7., qui nobis eſt Arithmeticorum primus.

Ut expeditè fiat multiplicatio numerorum pluribus notis conſtantium, prænoſcenda eſt notarum ſimplicium multiplicatio, quæ præſidio tabulæ Pythagoricæ momento abſolvitur. Oporteat multiplicare 7 per 8. In latere AB quære 7 ; in latere AC 8 : in concurſu offertur 56, productum ex 7. per 8.

PRAXIS.

DEntur numeri A, B inter ſe multiplicandi. Si inæquali conſtant notaſ-

tarum numero, eum alteri ſubſcribe, qui paucioribus conſtat notis. Tum prima nota inferioris B multiplicet notas ſingulas ſuperioris A, & producta ſcribe infra lineam à dextra in ſiniſtram, eâ lege, ut ſi productum conſtet duâbus notis, primam ſubſcribas ſervatâ alterâ, quæ ſequenti producto addenda erit.

Pari modo reliquæ notæ inferioris B multiplicent ſiugulas notas ſuperioris A; ſed producta ſic ſcribentur, ut producti ſecundi D prima nota eo loco reponatur, quem habet nota multiplicans (1), hoc eſt ſecundo, producti tertii E nota prima ſtatuatur eo loco, quem habet nota (5) multiplicans, hoc eſt tertio: & ſic deinceps.

Denique producta C, D, E collige in unam ſummam F. Hæc erit productum quæſitum ex multiplicatione numerorum A, B.

Exemplum.

3042	A
517	B
21294	C
3032.	D
15210..	E
1572814	F

DEntur multiplicandi inter ſe A, & B. Minoris B nota prima 7 multiplicet totum A. 7 in 2 facit 14: primam notam 4 ſcri-

ſcribo infra lineam; alteram, nempe 1, ſervo. 7 in 4 facit 28, quibus addo notam ſervatam 1, & fit 19. Scribo 9 ſecundo loco infra lineam; & ſervo 2. 7 in 0 facit 0. Ergo notam ſervatam 2 ſubſcribo tertio loco ſolam. 7 in 3 facit 21; quæ ſubſcribo quarto,& quinto loco, ut jacent.

3042	A	Eodem prorſus mo-
517	B	do numeri B nota ſe-
		cunda 1, multiplicans
21294	C	totũ A, gignet produ-
3042.	D	ctum D, cujus prima
15210..	E	nota 2 ſcribatur ſecun-
		do loco,nimirum infra
1572714	F	ipſam ſuam notã mul-
		tiplicantem,quæ eſt 1.

Neque aliter numeri B nota tertia 5 multiplicans totum A, gignet productum E, cujus prima nota 0, ſcribatur loco tertio, nempe infra notam ſuam multiplicantem 5: cæteræ verò locis ordine ſuo conſequentibus reponantur.

Demonſtratio.

MAnifeſta eſt ex Poriſm. 6. & 7. cap. 3. Quod enim valorem ſibi ex loco

co debitum habeant notæ omnes producti primi C, itemque nota prima producti D, & nota prima producti E, patet ex Poriſm. 6. Quod verò reliquæ notæ productorum D, & E valorem quoque habeant ex loco ſibi debitum, patet ex Poriſm. 7. Liquida ſanè res erit, ſi operandi ratio, jam præſcripta, cum Poriſmatis jam dictis conferatur.

Multiplicationis Compendia.

1. Cùm utriuſque numeri dati G, H, vel unius tantùm, primæ notæ ſunt cifræ una, vel plures non interruptæ; multiplicatio peragetur inter notas ſignificantes ſolas, & producto præponentur omnes cifræ utriuſque numeri.

12000	G
400	H
4800000	K
23	G
5000	H
115000	K

2. Cùm datorum unus (M) conſtat unitate, & cifris; habetur productum (P,) ſi alteri (N) adjiciantur omnes cifræ prioris (M.)

2340	N
1000	M
2340000	P

3. Si

3. Si in numero multiplicante R una, pluresve cifræ mediæ, & continuæ occurrant; illis omissis, per notam sequentem 5 multiplicabis totum Q, & producti T notam primam 5 scribes infra notam suam multiplicantem, (quæ etiam hîc est 5,) nimirum quarto loco.

8013 Q
5006 R
48078 S
40065 T
40113078

Horum compendiorum demonstratio ex iisdem 6, & 7 Poris. manifesta similiter est.

SPECIES DIVERSÆ.

UT Libræ, Floreni, Asses; prius ad minimam speciem, puta asses, reducendæ; reductæ per regulas jam traditas multiplicentur: productum verò ad majorem, quæ placuerit, speciem ope divisionis, cap. 9. tradendæ, reducetur: ut si productum sint 3400 asses, dividendo 3400 per 20, reduces ad florenos 170: hos dividendo per 6, reduxeris ad libras 28, cum una tertia, hoc est ad Lib.28. Flor.2.

Eâdem methodo fiet multiplicatio Astro-

nomica, graduum videlicet, minutorum primorum, ſecundorum &c.

Scholium.

Multiplicatio à ſiniſtra in dextram uſum habet non levem in diviſione. Fit hunc in modum. 1. *Nulla nota reſervatur, id enim commodiùs.* 2. *Si notæ ultimæ multiplicatione peractâ, ex multiplicationibus reliquorum productum aliquod oriatur, duabus notis ſcribendum, ejus nota ſiniſtra ſcribatur infra eam, quæ in priori producto eſt prima, ſeu dextra.*

183
6

688
41

1098

Oporteat 183 *ducere in* 6. 6 *in* 1 *eſt* 6. *Scribo ergo* 6 *infra lineam.* 6 *in* 8 *eſt* 48. *Quia hoc productum conſtat duabus notis, ſiniſtram* 4 *ſcribo infra* 6, *&* 8 *ante* 6. 6 *in* 3 *eſt* 18. *Rurſus* 1. *ſcribo infrà* 8, *&* 8 *ante* 8. *Factâ igitur additione, productum quæſitum eſt* 1098. *Demonſtratio ex ſupra dictis colligitur.*

CAP. VIII.

Multiplicatio expeditiſſima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

LAminarum conſtructio tradita eſt cap. 6, jam uſus earum planè eximius deinceps exponetur.

PRA-

PRAXIS.

A.597
B 48
4776 C
2388 D
28656 E

DEntur numeri A, B inter ſe multiplicandi. 1. *Quærantur lami*næ, quæ dati majoris A notas *habent in vertice*, & ſibi mutuo apponantur, adjectâ ad lævam laminâ exponente XZ, *a* ſic ut in primo, ac ſupremo ordine ſtet numerus datus A.

a tabellam vide c. 6.

2. Minoris dati B notam primam 8 quære in lamina exponente XZ, ordinemque illi reſpondentem, octavum nempe, exſcribe, infraque lineam repone, & ſit C. Pari modo numeri B notam ſecundam 3 quære in lamina exponente, ordinemque illi reſpondentem, nempe quartum, deſcribe, ſitque D. Sed prima ejus nota 8 ſcribenda eſt infra ſecundam producti primi C. Quod ſi numerus B plures haberet notas, eæ ſimiliter in exponente lamina repertæ exſcribendos numerorum ordines reliquos indicarent.

3. Producta demum C, D in unam

collecta ſummam E, multiplicationis A per B productum quæſitum exhibebunt.

Demonſtratio.

FAcilis eſt, tum ex ipsâ laminarum conſtructione, traditâ cap. 6., tum ex iis, quæ de multiplicatione communi demonſtrata ſunt. Numerus enim 56 repertus in laminæ primæ quadrato VIII, eſt octies 7, ac proinde fit ex 8 in 7. Sed, quia 56 duabus conſtat notis; primam 6, quæ in inferiori triangulo eſt ſcribo infra lineam; alteram verò 5, quæ eſt in triangulo ſuperiori, ſervo. Pari modo numerus 72, in ſecundæ laminæ quadrato VIII repertus, eſt octies 9; ac proinde eſt is, qui fit ex 8 in 9. Sed, quia 72 duabus notis conſtat, ejus nota ſecunda 7 ad tertium, prima verò 2 ſola ad ſecundum locum pertinet. Ad eundem verò etiam pertinet nota 5 ſervata. Ergo hæ duæ notæ 5, & 2 in unam ſunt colligendæ, 7, quæ ſecundo loco infra lineam ſcribetur. Atque hæc cauſa eſt, cur ſemper nota trianguli ſuperioris cum nota ſequentis trianguli inferioris coaleſcat; ac proinde cur no-

A. 597
B 48
4776 C
2388 D
28656 E

notæ, in eodem rhombo exiſtentes, ad locum eundem pertineant, ſaltem quoad primam aggregati notam. Nam ſi notæ alicujus rhombi collectæ numerum faciant binis notis conſtantem, ſecunda nota ad ſequentem rhombum rejicitur. Poſtremò numerus 40, repertus in VIII quadrato laminæ tertiæ, eſt is, qui fit ex 8 in 5: cujus ſola prima nota o pertinet ad locum tertium: ad quem quia etiam pertinet nota ſervata 7, in eodem cum, o, rhombo exiſtens, eæ rurſum debent coaleſcere. Sed quia o addito ad 7 manet 7, infra lineam ſcribe 7 loco tertio; alteram verò 4, quæ in ultimo eſt ſuperiori triangulo, quarto loco. Octavus igitur ordo in laminis, hoc eſt numerus ipſe C, eſt is, qui fit ex A, 597, ducto in 8 primam notam ipſius B. Pari ratione oſtendam ordinem IV, hoc eſt numerum D, eum eſſe qui fit ex A, 597, in 4 ſecundam notam ipſius B. Ergo eorum ſumma E eſt is, qui fit ex A in totum B. Quod erat demonſtrandum.

Laminarum igitur artificium in his duobus conſiſtit. Primò, quòd laminæ

quælibet componi inter ſe poſſint, ac proinde quivis numerus ſtatui in ſupremo ordine. Secundò, quod numeri, duabus notis conſtantes, in laminis ita deſcripti ſint, ut prima nota in triangulo inferiori, altera in ſuperiori ſit repoſita. Undè fit, ut quia triangulum quodlibet ſuperius, cum laminæ ſequentis triangulo inferiori unum rhombum conſtituit, nota ſuperior laminæ præcedentis, (quæ ſemper eſt ea ipſa, quæ mente reſervanda eſſet,) reperiatur in eodem rhombo cum laminæ ſubſequentis notâ inferiori, ſeu primâ, cum qua debet coaleſcere, ut eodem, quo ipſa, loco ſcribatur.

Cæterùm quàm expedita, facilis, ſecura hæc methodus ſit, uſu ipſo docebitur, quiſquis voluerit experiri.

CAP. IX.

Diviſio.

QUid ſit diviſio, expoſitum eſt defin. 14. lib. 7., qui nobis primus eſt.

Duos proponam modos, quorum primus minùs uſitatus eſt, ſed melior; alter uſitatior quidem, ſed implicatior.

PRA-

PRAXIS MODI I.

NUmerus detur AC dividendus per numerum Z.

1. Ex dividendo accipe tot notas poſtremas, quot conſtat notis diviſor; vel, ſi hæ numerum efficiant diviſore minorem, (ut in exemplo noſtro accidit, cùm 459 minor ſit, quàm Z, 597,) illis unam adhuc appone (o.) Atque ita conſtituitur primum diviſionis membrum AB, quod puncto ſecerne.

		Z		
a	b c	597	*Diviſ.*	
4590.	9.3.			
4179		{ 769		
		{ X		
d 411.	9			
358	2			
e 537.	3			
537	3			
0				

2. Vide, quoties diviſor Z in membro AB contineatur. Id ſi non appareat, quære ultima diviſoris nota (5) quoties contineatur in ultimis duabus notis membri AB. (Quod ſi diviſor & membrum æquè multis conſtarent notis, quæ-

```
                Z
a   b   c       597 Divis.
4590. 9.3.
4179            { 769
                { X
-----------
d 411.9
  358 2
-----------
e   537. 3
    537  3
-----------
      0
```

rendum esset, quoties divisoris nota ultima (5) contineatur in membri ultima.) Reperies contineri septies. Scribe igitur 7 post lunulam. Non licebit autem post lunulam scribere unquam simul plus, quàm 9; quia, ut demonstrabo infra, divisor in membro nunquam continetur sæpiùs, quàm novies.

3. Per notam (7,) jam in quotiente scriptam, multiplica totum divisorem Z, à sinistra in dextram. Productum (4179,) quod membro esse debet minus, vel æquale, ipsi membro subscribe, ab eoque aufer, & residuum D (411,) quod minus sit oportet divisore Z, scribe infra lineam, ante primam ejus notam, puncto adjecto. Hæc omnia si succedant, legitima erit uota (7) post lunulam in quotiente scripta, & primi membri divisio peracta.

4. Quod si nota in quotiente scripta, di-

diviſorem multiplicans, exhibeat productum membro majus, rejicietur, minori ſubſtitutâ: ſi verò productum exhibeat nimis parvum, quod nimirum, ubi à membro ſubtraxeris, reſiduum det diviſore majus, vel æquale, illâ ſimiliter rejectâ, major ſubſtituetur. Examen porrò illud notæ poſt lunulam ſcribendæ expeditius redditur multiplicatione à ſiniſtra in dextram, ut ſupra præceptum eſt, inſtitutâ.

Itaque diviſionis difficultas in hoc potiſſimum conſiſtit, ut talis in quotiente nota ſcribatur, per quam diviſor multiplicatus à membro ſubduci poſſit, & cùm ſubductus fuerit, reſiduum exiſtat, vel nullum, vel diviſore minus: Talis enim nota indicabit, quoties diviſor contineatur in membro.

5. Membrorum reliquorum ſimilis eſt diviſio. Ad reſiduum (411) D membri prioris A B dextrorſum adſcribe notam (9,) quæ membrum AB jam diviſum antecedit. Atque ita ſecundum membrum conſtituitur (411.9,) circa quod eadem operatio inſtituetur, quæ circa primum.

Quæres nimirum, quoties diviſor Z in eo cõtineatur. Reperies ſexies. Scribe ergo

6 *poſt*

6 post lunulam ante 7. Divisorem multiplica per 6, & productum 3582 membro 412. 9 subscribe, ab eoque subtrahe, residuo E, 537, infra lineam repositio, punctoque ante ipsum notato.

Denique notam (3,) quæ dextrorsum sequitur in dividendo AC, residuo E 537 adscribe, ut habeatur membrum tertium 537.3. Rursum quære quoties divisor in tertio membro contineatur. Reperies novies. Igitur 9 quotienti adscribe. Divisorem deinde multiplica per 9, & productum 5373 à membro 5373 subtrahe, & nihil restat,

His peractis absoluta est divisio tota numeri dati AC per datum Z.

6. Si divisione peractâ superfit aliquid, (ut in exemplo hîc appositio supersunt 5,) residuum (5) scribe supra divisorem (13) lineolâ interpositâ, ut fiat fractio (N.) Quotiens erit integer numerus, post lunulam scriptus, unà cum dicta fractione (N.)

51.2 13 *Divis.*
39
12.2 { 5
11 7 { 39 5/13 N
5

7. Si operatione primâ absolutâ, contingat in sequentium membrorum aliquo (0.4) divisorem (5) ne semel quidem

dem contineri, quotienti post lunulam adscribetur cifra, & membro apponetur adhuc una dividendi nota (5) lineolâ interpositâ, ut appareat (0.45) membrum esse geminatum, atque ita membrorum numerus appareat.

10.4.5 5 *Divis.*
10

0.45 } 209.
45

0

8. Ut minor numerus per majorem dividatur, (ut 3 per 7,) scribendus minor supra majorem, lineolâ interpositâ, ut fiat fractio (R) Demonstrabitur lib. 2. cap. 2. theor. 1. coroll. 2.

$\frac{3}{7}$ R

Demonstratio.

a b c
4590.9.3.
4179
---
d 411.9
358 2
---
e 537.3
537 3

0

Z
597 *Divis.*
{769 •
{X

Tot scribuntur notæ post lunulam, ac proinde tot notis constat quotiens X, quot sunt membra divisionis, ut ex operatione

ne præſcripta patet. Tot verò ſunt membra, quot notæ in dividendo AC primum membrum AB antecedunt, quod quidem per ſe manifeſtum eſt. Ergo tot notis conſtat quotiens X, quot notæ primum membrum dividendi antecedunt. Liquet igitur ex Poriſm. 8. cap. 3., numeri X, poſt lunulam ſcripti, notam ultimam 7 verum eſſe primi membri AB quotientem, qui nimirum indicet, quoties diviſor Z in primo membro AB contineatur. Pari modo idipſum oſtendam de reliquis notis numeri X, poſt lunulam ſcripti, reſpectu membrorum cæterorum. Ergo numerus X verus eſt quotiens, proveniens ex diviſione numeri AC per Z. Quod erat demonſtrandum.

Quod verò, cùm diviſor non metitur dividendum, verus quotiens nihilominus ſit numerus integer (39) unà cum fracto (N,) cujus numerator eſt is, qui peractâ diviſione reſtat, nominator verò diviſor ipſe; ſic demonſtro. Ut unitas eſt ad *a* quotientem integrum (39,) ita diviſor (13) eſt ad dividendum (512) dem-

51.2	13	*Diviſ.*
39		
12.2	39 $\frac{5}{13}$ N	
11 7		
5		

a patet ex def. 14. l. 7. & ex jam oſtenſis.

dempto reſiduo (5). Rurſum, ut unitas eſt ad fractum N, ſic *b* nominator (13) ad numeratorem 5, hoc eſt diviſor ad reſiduum. Ergo, ut unitas ad *c* integrum cum fracto; ita eſt diviſor (13) ad totum dividendum. Ergo integer ille cum fracto verus *d* quotiens eſt. Quod erat demonſtrandum.

b patebit ex theor. 1. cap. 2. l. 2.

c 24. 5.

d defin. 14. 7.

Cur autem nunquam ſimul ad quotiẽtem liceat adſcribere plus, quàm novem; ita fiet manifeſtum. Vel membrum A, & diviſor B æquè multis conſtant notis; vel membrum excedit unâ: *f* neque enim poteſt unquam pluribus excedere. Si æquè multis notis conſtant, liquet ex Poriſmate 4. cap. 3, B in A contineri minùs, quàm decies. Si membrum A unâ notâ excedat diviſorem B, tunc ultima nota diviſoris major eſt ultimâ notâ membri, ut patet ex num. 1.; ac proinde per Poriſma 5. cap. 3. rurſum continetur B in A minùs, quàm decies. Quare cùm diviſor in membro quolibet contineatur ſemper minùs, quàm decies, cauſa jam manifeſta eſt, cur non liceat unquam ad quotientem plus ſimul adſcribere, quàm 9.

A	2996
B	1000

f patet ex num. 1.

A	2999
B	300

PRA-

PRAXIS MODI II.

OPorteat numerum A dividere per numerum B.

1. Diviſorem ſubſcribe dividendo ad ſiniſtram, ſic ut nota ultima ultimæ reſpondeat, penultima penultimæ, & ſic deinceps. Quod ſi numerus ſupra diviſorem poſitus (370) *k* tunc minor eſſet diviſore, oportebit diviſorem ad unum locum promovere dextrorſum, ut in exemplo cernitur.

k Scem. 1.

Cenſetur autem ſupra diviſorem eſſe poſitum, quidquid illi ad lævam eſt. Undè ſupra 821 eſt 3702; ſupra 8 eſt 37; ſupra 2 eſt 370.

Nota. Characteres, quibus ad dextram hìc virgula eſt, cenſentur deleti.

Scema 1.

A 37029
B 821 ⟨ 4

Sce. 2.

5
37029
821 ⟨

Sce. 3.

4
82
37029
821 ⟨ 4

Sce. 4.

41
828
37029
821 ⟨ 4

2. Quære quoties diviſor in notis ſupra

pra ipſum poſitis contineatur. Sed quia plerumque hoc judicatu difficile eſt, quære quoties ultima diviſoris nota (8) in numero ſupra ipſam ſcripto (37) contineatur. Reperies contineri quater. Scribe ergo 4 poſt lunulam.

3. Per notam (4,) in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem, & productum ſubtrahe à notis (3702,) ſupra diviſorem ſcriptis; tum reſiduo ſupra eaſdem ſcripto, dele tam diviſorem, quàm notas ſupra ipſum poſitas. Malunt autem plerique ſingulas ſeorſim notas diviſoris, per quotientem (4) multiplicatas, à numeris ſupra ipſas poſitis ſubducere, ſubtractione vicelicet multiplicationi alternatim interpoſitâ.

Exemplum.

a 8 in 4 facit 32, quæ ſubtracta ex 37 relinquunt 5: dele *b* 37, & 8; 5 verò ſcribe ſupra 7. Rurſum 2 in 4 faciunt 8, quæ ſubtracta ex 50 relinquunt 42: dele *c* igitur 50, & in diviſore 2; reſiduum verò 42 ſcribe ſupra 50. Denique 1 in 4 facit 4, quæ ſubtracta à 422 relinquunt 418: dele *d* igitur 422, & 1; reſiduum autem 418 ſcribe ſupra 422.

a Sce. 1. *b* Sce. 2. *c* Sce. 3. *d* Sce. 4.

At-

Atque ita diviſoris applicatio una peracta eſt.

e Sec. 2. 2. Verùm *e*, quia ultimâ diviſoris notâ (8,) per quotientem (4) multiplicatâ, & ſubtractâ (ex 37 ,) etiam nota penultima (2,)per eundem quotientem (4)multiplicata , ſubtrahi debet à reſiduo (50) ſupra ipſam poſito ; itemque & prima
f Sec. 3. (1)multiplicata *f* per quotientem eũdem (4) ſimiliter à reſiduo ſupra ipſum ſcripto (422) ſubducenda eſt ; hinc fit , ut dum quæritur , quoties diviſoris nota ultima (8) in notis ſupra ipſam exiſtentibus (37) contineatur , talis poſt lunulam nota in quotiente ſit reponenda , per quam ſingulæ notæ diviſoris multiplicatæ, poſſint ſubtrahi à numeris ſupra ipſas ſcriptis , & eâ quidem adhuc lege , ut ultimâ ſubtractione peractâ , reſiduum
g Sec. 4. (418) *g* ſit vel nullum , vel diviſore minus , quemadmodum num. 4. modi 1 eſt traditum . Quare ſi primâ ſubtractione factâ , nequeat peragi ſecunda , aut his peractis , tertia ; nota poſt lunulam ſcripta minuenda eſt unitate eò uſque , donec ſubtractiones ſingulæ poſſint abſolvi. Priùs igitur , quàm opereris ſeriò , tota operatio , num. 3. præſcripta , erit mentaliter peragenda , ut

no-

nota in quotiente adſcripta examinetur. Quod ſanè non tyronibus modò, ſed etiam non rarò exercitatis ſubmoleſtum eſt. Undè ſatiùs erit, hoc examen notando ſeorſim inſtituere.

Exemplo jam dicta declaremus. Detur M dividendus per N. Quæro, quoties N in notis ſupra ipſum poſitis 738 contineatur. Reperio ter. Scribo ergo 3 poſt lunulam. 2 in 3 facit 6, quæ ablata à 7, relinquunt 1. 4 in 3 facit 12, quæ ablata à 13, relinquunt 1. 9 in 3 eſt 27, quæ ex 18 auferri nequeunt. Nota igitur 3, ad quotiẽtem ſcripta, nimis magna eſt. Quare hâc rejectâ, ſubſtituo 2, & examen repeto. 2 in 2 ſunt 4, quæ ſubtracta à 7, relinquũt 3. 4 in 2 ſunt 8, quæ ſubtracta ex 33, relinquunt 25. 9 in 2 ſunt 18, quæ ſubtracta à 258, relinquunt 240. Nota igitur 2 legitima eſt.

Sce. 5.

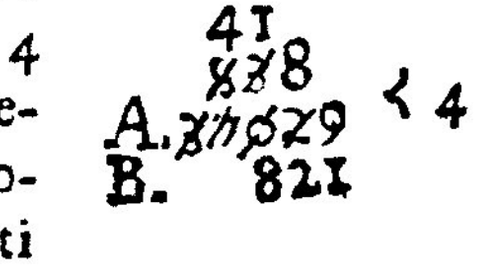
Sce. 6.

Quamvis autem plerique, ut dixi ſupra, ſubtractionem multiplicatione per-

miſceant, modo jam explicato; mihi tamen videtur conſultius, ut multiplicatio tota ſimul abſolvatur, & quidem à ſiniſtra in dextram, adhibitâ cautione, numero 4 modi 1. præſcriptâ.

5. Applicatione primâ diviſoris abſolutâ, quæ Scem. 1, 2, 3, 4 exhibetur, promovebitur diviſor B unâ notâ verſùs dextram, uti

Scem. 7.



factum vides in Scem. 7, & operatio inſtituetur per omnia ſimilis hactenus traditæ. Atque ita deinceps applicationes reliquæ, ſi plures eſſent faciendæ, abſolventur.

6. Si factâ aliquâ promotione diviſoris, is ne ſemel quidem in notis, ſupra ſe poſitis, contineatur; ad quotientem ſcribatur cifra, & diviſor uno adhuc loco promoveatur, nullâ in dividendo notâ deletâ.

7. Siquid ſuperſit diviſione peractâ, fiet quod præſcriptum num. 6. modi 1.

Scemate 8 *exhibetur numeri A per numerũ B diviſio tota, quæ ſupra, tãtùm de-*

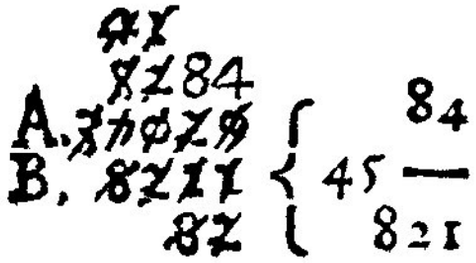
cla-

clarandi gratiâ, pluribus ſcematis fuit exhibita.

Demonſtratio.

HUjus modi ſimilis eſt demonſtrationi præcedentis.

Scem. 8.



Quamvis autem hæc ratio dividendi paſſim ſit uſitata, priorem tamen illam longè meliorem ſentio: uſitata ſiquidem, dum notas expungit, veſtigia diviſionis, ac membra confundit, ut ſi quid erratum ſit, correctio adhiberi plerumque vix poſſit; ut ex ſcemate 8 ſatis apparet. Prior verò illa, & ſingula diviſionis membra, & ſingularum producta multiplicationum, & quæ ſubtractione factâ ex membris ſingulis manent reſidua, diſtinctè exhibet. Quo fit, ut facilis ſit correctio, ſi error irrepſerit.

Plures alii modi diviſionis, qui non minus ingenii, quàm utilitatis habent, apud præfatum authorem a videri poſſunt. a Deſalg. pag. 143.

Usus TABULÆ PYTAGORICÆ

Communis in Divisione.

DAtus sit numerus quicumque, duabus notis constans, 62 E 8 F E, & nota quævis simplex F. Quæritur quoties F in E continetur?

Quæratur *o* in latere AB nota F, & in linea numerica illi respondente numerus E, aut eo proximè minor (56.) Ab hoc numero sursum ascendendo ad latus AC, incides in quotientem quæsitum (7.)

a vide tabel. c. 6.

Ratio patet ex constructione tabulæ, cap. 6. tradita.

DIVISIONIS COMPENDIA.

C 2889 | 829 D 1000

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{829}{1000} \\ 2889 - G \end{array}\right.$$

1. CUm ultima nota divisoris D est unitas, & reliquæ omnes cifræ; à dividendo C aufer tot ad dextram notas (829), quot cifras habet divisor; reliquas (2889) scribe post lunulam, quibus ap-

appone notas abjectas (829) ſupra diviſorem (1000) ſcriptas, lineolâ interpoſitâ: quotiens erit (2889) numerus integer, poſt lunulam ſcriptus, unà cum fractione O. Quod ſi notæ abjectæ etiam cifræ ſunt, ut in exemplo, quotiens erunt ipſæ notæ ad ſiniſtram reſiduæ 342.

Demonſtratio.

Diviſ.
342 | 000 1000
{342 *quotiens.*

FAcilè colligitur ex Poriſm. 8. c. 3. Quin etiam patet ex ſecundo compendio multiplicationis c. 7. Nam 1000 multiplicans 342, producet 342000. Ergo 1000 dividens 342000 facit quotientem 342: ut patet ex definitione 13, & 14. l. 7. Per defin. quippe 13. l. 7., ut unitas eſt ad 1000, ita 342 eſt ad productum 342000. Ergo *a* permutando, ut unitas eſt ad 342, ita 1000 eſt ad 342000. Ergo per defin. 14. 1000, dividens 342000, dat quotientem 342. *a* 16. 5.

2. Cùm diviſor B conſtat aliis notis ſignificativis unâ, vel pluribus diverſis ab unitate, ad dextram verò habet cifras;

A. 2. 4. 9 | 46 B 2 | 00

2

—

0.4

—

0.9

9

—

1

{ 146 / 144 — m / 200

à dividendo A rursum aufer ad dextram tot notas (46,) quot habet cifras divisor, & notæ reliquæ 249 dividantur per solas divisoris notas significativas. Divisione peractâ, siquid supersit, quemadmodum hîc supereſt 1, id cum notis abjectis 46 quotienti integro 124 appone, divisore scripto inferiùs, & lineolâ interpositâ. Quotiens erit integer 124 cum fracto *m*.

Demonstratio.

EX Porism. 8. c. 3; vel etiam ex compendio 1 multiplicationis c. 7. discursu simili, ut paulò ante, elicitur.

C. 27. 2. 000 4 D

24

—

3. 2.

3. 2

—

0

{ 68000

3. Cùm

3. Cùm dividendus habet cifras ad dextram, & nihil ex notis ſignificativis ſupereſt; tot quotienti adſcribentur cifræ, quot poſt ultimum membrum ſignificativum cifræ reſtant in dividendo.

Eſto C dividendus per D, 4. 4 in primo membro 27 continetur ſexies. Scribo ergo 6 poſt lunulam. 4 in 6 eſt 24, quæ ſubſcribo membro 27, ab eoque ſubtraho, & reſiduum 3 repono infra lineam, eique adſcribo notam dividendi proximam 2, ut habeam ſecundum membrum 32. 4 in 32 continetur octies. Scribo 8 in quotiente. 4 in 8 facit 32, quæ ſubtracta à membro 32, nihil relinquunt. Quia verò in dividendo jam nihil reſtat præter cifras, adſcribo quotienti cifras totidem, & peracta eſt diviſio.

Demonſtratio ex Poriſm. 8. cap. 3.

SPECIES DIVERSÆ.

EUndem ad modum tractandæ, qui traditur in multiplicatione cap. 7.

CAP. X.

Diviſio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

IN opere diviſionis præcipuum faceſſit negotium inventio quoti, ſeu quotientis, per quem multipli andus eſt diviſor. Hunc quotum, qui etiam productum ipſum ex diviſore, in quotum multiplicato, admirabili compendio laminæ exhibent. Cætera omnia peraguntur, ut in modo primo cap. præcedent., qui aptior eſt huic methodo, quàm ſecundus.

		Z	Datus ſit
a	b c	597 *Diviſ.*	numerus AC
4590	9 3		dividendus
4179		{769	per nume-
		{X	rum Z.
d 411	9		1. Appo-
358	2		ne ſibi mu-
e 537	3		tuò laminas,
537	3		quæ in pri-
			mo, eoque ſu-
	0		premo ordine
			exhibeant

di-

diviſorem Z. Præter ſcema hîc appoſitum inſpice tabellam AX cap. 6.

2. Determina membrum primum AB, ut num. 1. modi primi cap. 10.

3. Vide, quis ordo in laminis numerum contineat membro æqualem, vel proximè minorem. Is autem ordo eſt proximè minor membro, quem immediatè ſequitur ordo, membro major. Numerus laminæ exponentis XZ, ordinem denominans, eſt quotus, poſt lunulam ſcribendus.

In exemplo noſtro reperis, ordinem, proximè minorem membro, eſſe ſeptimum. Scribe ergo 7 poſt lunulam.

4. Ordinem inventum, (qui eſt ipſum productum ex diviſore in quotum 7,) exſcribe infra membrum AB, ab eoque ſubtrahe, & infra lineam ſcribe reſiduum (411); cui adjice, puncto interpoſito, notam (9,) quæ in dividendo membrum primum AB antecedit, ut habeatur membrum ſecundum (411.9.)

5. Diviſio ſecundi membri, & ſequentium eodem modo peragetur, quo primi.

6. Si membrum eſt minus ipſo diviſore, ac proinde & primo laminarum ordine, qui nimirum continet diviſorem,

rem ; quotienti cifra adſcribetur , & membro adhuc una adjicietur nota ex dividendo , ut membrum habeatur novum.

7. Si nonus ordo eſt membro minor , in quotiente ſcribatur 9.

Porrò , exercitatione vel minimâ accedente , momento cernitur , quis ordo proximè minor , aut major membro ſit. Revocanda ſunt in memoriam Poriſmata 2 , ac 3. cap. 3 : item quæ monui cap. 6 de modo exſcribendi , ac legendi ordines . Deinde reflectendum eſt maximè ad ultima loculamenta ordinum , quanta nimirum ſit nota in poſtremo ad lævam triangulo : & an ſumma notarum Rhombi proximi excedat novem , adeoque num aliqua indè nota in triangulum poſtremum ſit reijcienda , &c.

Demonſtratio.

FAcilè colligitur ex demonſtratis cap. 9., & ex ipſa diviſionis definitione, quam vide. ante lib. 7. def. 14.

Quàm verò præſtans ſit hæc dividendi ratio , nemo certiùs intelliget , quàm qui fuerit expertus . Plures ſanè diviſiones unâ, alterâve horâ ſic expediet, quàm die in-

integro viâ communi. Ad hoc temporis, atque operæ ingens compendium accedit operationis ſecuritas, quæ errori, ex incuria & hallucinatione orto, vix locum ullum relinquit.

CAP. XI.

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Diviſionis examina.

TUtiſſimum eſt, ut per invicem hæ ſpecies examinentur, cùm reliquæ praxes ſint errori obnoxiæ.

ADDITIONIS EXAMEN.

123 A
25 B
148 X
25
123 C

FIt per ſubtractionem. Eſto ſumma X, facta ex additione duorum numerorum A, & B. Alterutrum additorum, puta B, ſubtrahe à ſummâ X. Si reſiduus C ſit idem cum altero A, rectè peracta fuit additio. Erratum eſt, ſi non eſt idem.

Quod ſi exiſtat ſumma Z ex additione trium numerororum D, E, F, aut plurium; examen inſtituetur hunc in modum

297 D
835 E
476 F
——
1608 Z
——
210

dum. Incipe à ſiniſtra, & dic 2, 8, 4 ſunt 14; hæc ſubtracta ex 16 relinquunt 2, quæ cum 0 faciunt 20. Dein 9, 3, 7 faciunt 19; hæc ablata ex 20 relinquunt 1, quod cum 8 facit 18. 7, 5, 6 faciunt 18, quæ ablata ex 18 nihil relinquunt. Proba igitur fuit additio, cùm ſumma Z æqualis reperiatur omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

SUBTRACTIONIS EXAMEN.

234. G
52. H
——
182. X
52.
——
234. K

FIt per additionem reſidui (X) ad numerum ſubtractum H: ſi enim ſumma K, inde facta, conveniat cum numero (G,) à quo facta eſt ſubtractio, proba eſt ſubtractio; mala, ſi non conveniat.

Licebit etiam ſubtractionem examinare per ſubtractionem. Reſiduum X ſubtrahe ab G, & novum reſiduum ſit L. Si hoc conveniat cum numero H, priùs

234 G
52 H
——
182 X
——
52 L

ſub-

ſubtracto, bona fuit prior ſubtractio. Ratio utriuſque examinis manifeſta eſt.

EXAMEN MULTIPLICATIONIS.

FIt per diviſionem. Numeri ſe mutuò multiplicantes ſint N, P. Per multiplicantem P divide productum Q. Si quotiens R conveniat cum multiplicato N, rectè inſtituta fuit multiplicatio; malè verò, ſi non conveniat.

523 N
6 P (523. R
3138 Q

Ratio patet ex notione prima *a* multiplicationis, ac diviſionis, & 16. l. 7. *a* def. 13, & 14. 7.

Si per laminas facta eſt multiplicatio, vix opus ullo examine: adeò ſecura eſt ab errore iſta methodus. Si tamen volueris examinare, nullum erit examen faciliùs, quàm ipſa multiplicationis iteratio.

EXAMEN DIVISIONIS.

FIt per multiplicationem. Diviſor B multiplicetur per quotientem C. Si producatur numerus diviſus A, proba

ba est divisio ; ut patet ex definitione *f* divisionis, ac multiplicationis, & 16. l. 7.

f def. 13. & 14. 7.

A	B
2. 4. 8.	2 *Divis.*
2	
0.4	124 C
4	
0.8	
8	
0	

Si post divisionem aliquid supersit ; divisorem E multiplica per quotientem F : producto G addo resi-

A	E	
24.1.1.	3.*Divis.*	
24	(803 F	
0.1.1.	G.	
9	2409.	
2	2	
	H.2411	

duum 2. Si summa H sit æqualis dividendo A, proba est divisio.

Quod si per laminas peracta divisio est, vix opus erit examine ullo. Si tamen examinare placuerit, multiplicatio ad examen requisita, iisdem manentibus laminis, quæ divisioni inservierunt, perficietur.

Scholium.

Modus examinandi per abjectionem novenarii, quoniam fallaces sunt, hic non lu-

lubuit adſcribere. Nituntur tamen inſigni proprietate ejuſdem uumeri.

1. *Metitur enim novenarius omnem numerum, cujus notæ acceptæ, tanquam ſimplices, conficiunt* 9. *Tales numeri ſunt* 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, *& alii infiniti.*

2. *Imò cujuſcunque numeri, à novenario numerati, notæ ſimpliciter acceptæ conficiunt* 9: *illis tantùm numeris exceptis, quorum omnes notæ ſunt* 9, *cujuſmodi ſunt* 99, 999 *&c.*

3. *Si numerus quicunque, duobus notis conſtans, quem* 9 *non metitur, dividatur per* 9; *idem erit reſiduum cum eo, quod remanet, ſi notæ ſimpliciter acceptæ dividantur per* 9. *Ut ſi* 64 *dividantur per* 9, *remanet* 1. *Accipiantur jam notæ ſecundùm valorem ſimplicem.* 6, *&* 4 *faciunt* 10, *quæ diviſa per* 9, *etiam relinquunt* 1. *Patet ex* 1, *&* 2.

4. *Quod ſi notæ, numerum datum componentes, ſimpliciter acceptæ, conficiunt minus, quàm* 9; *hoc, quod conficiunt, erit ipſum reſiduum, quod relinquetur, numero dato per* 9 *diviſo. Dentur* 33: *hæc diviſa per* 9 *relinquunt* 6, *quantum videlicet conficiunt ipſæ notæ ſimplices* 3, *&* 3.

5. *Atque ex his demum conſequens eſt, ex quovis numero, diviſo per* 9, *idem relinqui, quod relinquitur ex notis ejuſdem numeri ſimpliciter acceptis, ſi per* 9 *dividantur.*

Neminem legi, qui horum cauſam aperiet. Indicabo fontem verbo. Novenarius eſt unitate minor denario. Hoc ritè ſi expendas, & applices, proprietates inde jam recenſitas non difficulter deduces.

Porro quamvis hæc proprietas, & pulchra

ſit,

ſit, & veriſſima: examina tamen per illam inſtituta fallunt. A notis ſiquidem omnium numerorum addendorum ſimpliciter acceptis 9 abjiciuntur, quoties poſſunt; hoc eſt dividuntur illæ per 9, & reſiduum ſervatur. Similiter à notis ſummæ ſimpliciter acceptis abjiciuntur 9, quoties poſſunt. Quod ſi reſiduum idem ſit cum priori reſiduo, concluditur ritè fuiſſe peracta additio. Sed fallit concluſio quia licèt plerumque tum erratum non ſit, infiniti tamen caſus dari poſſunt, in quibus hoc examen indicet additionem eſſe bonam, quæ mala eſt. Ratio eſt, quia poteſt novenarius, (imò & quivis numerus,) dividendo duos numeros inæquales, idem exhibere reſiduum; quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

En Exemplum.

In numeris A, B, C. 3, & 5 ſunt 8, *& 8 ſunt* 16. *Abjectis* 9 *reſtant* 7, *quæ cum* 2 *faciunt* 9: *quibus abjectis* 3, *& 4 faciunt* 7. *Numeris igitur A, B diviſis per* 9, *reſtant* 7.

358	A
234	B
835	C

Jam in numero C 8, *& 3 faciunt* 11: *abjectis* 9. *reſtant* 2; *quæ cum* 5 *faciunt* 7. *Utrobique igitur tam ex addendis A, B, quàm ex ſumma prætenſa C ſuperſunt* 7: *neque tamen C vera ſumma eſt A, B; conficiunt enim illi* 592. *Pari modo in ſubtractione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione hujus examinis fides ſuſpecta eſt.*

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER II.

LOGISTICA

FRACTORUM NUMERORUM.

CAPUT I.

Fractorum Numerorum Definitio, Scriptio, Enunciatio.

Numerus fractus, qui etiam fractio, & minutia dicitur, est pars, vel partes unitatis, aliquod totum divisibile repræsentantis. Ut si totum aliquod sectum sit in quinque partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit tres; dicentur illæ tres quintæ partes, numerus fractus.

Quoniam igitur fractus numerus eſt pars, parteſve alicujus totius; duobus numeris ſcribi debet, quorum unus indicet quot partes ex toto accipiantur alter quales. Scribuntur porrò duo illi numeri ſupra invicem, lineolâ interpoſitâ. Ut vides in his exemplis.

$$A\frac{1}{2} \qquad B\frac{2}{3} \qquad C\frac{4}{7} \qquad D\frac{11}{13}.$$

Superior numerus indicat, quot ex toto partes accipiantur; inferior deſignat, in quot partes totum ponatur diviſum, ac proinde quales ſint partes illæ, quæ ex toto ſunt acceptæ.

Superior igitur, quia partium ex toto acceptarum indicat numerum, numerator dicitur; inferior autem, quia partium acceptarum deſignat ſpeciem, nominator, ſeu denominator appellatur.

Fracti A, B, C, D ſic enuntiantur. A: una ſecunda, ſeu una dimidia. B: duæ tertiæ. C: quatuor ſeptimæ. D: undecim decimæ tertiæ.

Quamvis autem pro toto diviſibili plerumque unitas ſupponatur, numerus tamen quicunque ſupponi poteſt. Quare

$\frac{5}{8}$ E re E fractus, ſi totum ſint 64 aurei, ſignificat quinque octavas partes 64 aureorum.

Denique ad fractorum naturam penitùs intelligendam, id erit ſtudiosè obſervandum, fractos ab integris numeris quoad rem non differre. Ea ſola differentia eſt, quod fracti deſignent res, quæ ſint partes rerum ab integris numeris deſignatarum, ac proindè quòd unitates fracti numeri ſint relativæ; integri verò numeri unitates ſint abſolutæ. Dentur exempli gratiâ floreni 125, & fractio *a*, hoc eſt 4 vigeſimæ unius floreni. Numerus integer 125 continet centum viginti quinque unitates, quarum ſingulæ florenum deſignant. Fractus ſimiliter *a*, hoc eſt quatuor vigeſimæ partes floreni, continet quatuor unitates, quarum ſingulæ deſignant unam partem vigeſimam floreni, hoc eſt aſſem unum; ac proindè quatuor vigeſimæ floreni ſignificant 4 aſſes, quitam eſt numerus integer, quàm 125 floreni. Imò quilibet numerus integer, res quantas deſignans, fractus eſt, ſi cum

$\frac{4}{20}$ a

$\frac{1}{3}$ b

$\frac{3}{5}$ c

$\frac{2}{5}$ d

majori toto comparetur. Nam 2 floreni ſunt una tertia unius libræ, ſive *b*; & 3 pedes ſunt tres quintæ unius paſſus, ſive *c*; & 2000 paſſuum ſunt duæ quintæ unius milliarii Italici, ſive *d*. Ad hæc tyrones advertere, multùm intereſt. Cauſa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis, & obſcura videri ſoleat, ea eſt, quòd priùs ad operationes fractorum, ac regulas addiſcendas proſiliant, quàm illorum naturam perſpexerint.

Monitum generale.

CUm duæ fractiones, aut plures inter ſe comparantur, ſemper intelligendæ ſunt eſſe partes ejuſdem totius, niſi contrarium indicetur.

CAP. II.

Fractorum Theoria prima.

THEOREMA I.

FRactus omnis eſt ad totum, ſeu unitatem, ut numerator ad denominatorem.

De-

Demonſtratio.

PAtet ex definitione numeri fracti, capite præcedenti explicata. Denominator enim deſignat ipſum totum ſectum in tot partes æquales, quot in denominatore unitates ſunt. Numerator verò indicat, quot partes ex toto ita, ſecto accipiantur. Quare cùm fractus nihil aliud ſit, quàm ille ipſe partium numerus, quas acceptas eſſe ex toto, numerator indicat; manifeſtum eſt, fractum eſſe ad totum, ut numerator eſt ad nominatorem. Ex hoc ritè intellecto exiſtunt.

Corollaria.

I.

$\frac{30}{20}$ a CUm numerator eſt minor denominatore, fractus ſuo toto minor eſt.

$\frac{20}{20}$ b Cùm numerator nominatore major eſt, fractus eſt major toto. Sic fractus *a*, id eſt triginta vigeſimæ, exemp. gr., floreni, (hoc eſt 30 aſſes,) ſunt majores toto, nempe floreno, ſeu 20 aſſibus.

$\frac{3}{3}$ c

$\frac{4}{4}$ d

Cùm numerator nominatori æqualis eſt fractus toti æquivalet. Sic *b* id eſt 20 vigeſimæ floreni, (hoc eſt 20 aſſes,) conficiunt florenum. Sic *c*, *d* æquivalent unitati, ſeu toti, quod unitas repræſentat.

II.

$\frac{2}{3}f$

Ex theoremate colligitur veritas illius, quod num. 8. cap. 9. in modo primo diviſionis traditur: nimirum cùm numerus (2) minor per majorem (3) dividendus eſt, quotientem haberi, ſi major minori ſubſcribatur, ut fiat fractio *f*. In omni ſiquidem diviſione quotiens eſt ad unitatem, ut dividendus, qui hic eſt 2, ad diviſorem, qui hic eſt 3. Sed etiam fractio *f* eſt ad unitatem, ut 2 ad 3. Ergo *f* hic eſt quotiens.

def. 14. l. 7.

THEOREMA 2.

Si fracti unius numerator (a) *eſt ad nominatorem* (b), *ut fracti alterius numerator* (c) *eſt ad ſuum numeratorem* (d); *fracti æquales erunt.*

	E	F
a	2	3 c
b	$\frac{}{4}$	$\frac{}{6}$ d

De-

Demonſtratio.

FRactus E eſt ad totum, ut numerator *a* ad nominatorem *b* per theor. 1; hoc eſt per hyp. ut numerator *c* ad nominatorem *d*; hoc eſt per theor. 1, ut fractus F ad idem totum. Quare cùm ambo fracti E, & F ad totum, quod in utroque idem eſſe ſupponitur, eandem habeant proportionem, per 9. lib. 5. æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

Itaque valor fractorum, non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, ſed ex proportione eorundem æſtimandus eſt; quod ulterius ex theor. 3. 4. 5. innoteſcet.

THEOREMA 3.

FRactus ille (A) major eſt altero (B,) cujus numerator (e) *ad nominatorem* (f) *majorem habet proportionem, quàm alterius numerator* (g) *ad nominatorem ſuum* (h.)

	A	B	
e	8	2	g
f	16	6	h

Demonſtratio.

NAm per theor. 1. fractus A ad totum eandem proportionem habet,

quàm *e* ad *f*; hoc eſt ex hyp. majorem, quàm *g* ad *b*; hoc eſt per theor. 1. majorem, quàm fractus B ad totum idem. Ergo per 10. l. 5. fractus A fracto B major eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 4.

Fracti, quorum numeratores, in mutuos denominatores ducti, eundem gignunt numerum, æquales ſunt.

Dentur fracti E, F; & tam *a* in *d*, quàm *c* in *b* producant eundem numerum *k*. Dico fractos E, F æquales eſſe.

	E	F
	a 2	3 c
	b 4	6 d
	k 12	

Demonſtratio.

PEr 19 l. 7. erit *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. 2. fracti E, F æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 5.

Fractus ille (A) altero (B) major eſt, cujus numerator, multiplicans alterius nominatorem, majorem gignit numerum.

Pro-

Producat *g* in *n* majorem numerum *c*, quàm *m* in *b*. Dico A fractum majorem esse fracto B.

A	B
g 2	3 m
—	—
h 4	9 n
c. 18.	12. d

Demonstratio.

Quia *c*, genitus ex *g* in *n*, major est *d*, genito ex *m* in *b*; habebit per corol. 2. p. 19. l. 7. *g* ad *b* majorem rationem, quàm *m* ad *n*. Ergo per theor. 3. fractus A major est fracto B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

EX 4, & 5 theoremate modus habetur facillimus examinandi, fractione æquales sint, an inæquales, & uter major sit.

THEOREMA 6.

FRacti (D, G,) idem nomen habentes (P,) eam inter se proportionem habent, quam numeratores (m, n.)

De-

Demonſtratio.

PEr theor. 1. fractus D eſt ad totum, ut *m* ad *p*. Idem verò totum eſt ad fractum G, ut idem *p* eſt ad *n*: Ergo ex æquo per 22. 5. fractus D eſt ad fractum G, ut *m* ad *n*. Quod erat demonſtrandum.

D	G
m 7	5 n
—	—
p 8	8 p

THEOREMA 7.

DEntur fracti P, R: *primi numerator* a, *multiplicans alterius nominatorem* o, *faciat* a o; *alterius verò numerator* c, *multiplicans nominatorem primi* n, *producat* c n. *Erit fractus P ad fractum R, ut* a o *ad* c n.

Demonſtratio.

NOminatores *n*, & *o*, invicem multiplicantes, producant *n o*. Fractus P eſt ad totum, ut *a* ad *n*, per theor. 1. Sed etiam per ſchol. p. 17. l. 7. *a o* eſt ad *n o*, ut

no	
ao	cn
a	c
P----	----R
n	o

Totum:

a ad

a ad *n*. Ergo fractus P eſt ad totum, ut *a o* eſt ad *n o*. Atqui per ſchol. p. 17. *n o* eſt ad *c n*, ut *o* ad *c*; hoc eſt per theor. 1, ut totum eſt ad fractum A. Igitur ex æquo per 22. 5. fractus P eſt ad fractum R, ut *a o* eſt ad *c n*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 8.

SI duo fracti (C, D) eundem numeratorem habuerint (a;) *erit prior (C) ad poſteriorem (D,) ut reciprocè poſterioris nominator* (o) *ad prioris nominatorem* (n.)

Demonſtratio.

EX *a* in *o* fiat *a o*, & *a n* ex *a* in *n*. Per præced. fractus C eſt ad fractum D, ut *a o* ad *a n*; hoc eſt (per ſchol. p. 17. l. 7.) ut *o* ad *n*. Qnod erat demonſtrandum.

a	a
C----	----D
n	o
ao.	an.

CAP. III.

Reductiones fractorum.

PROBLEMA I.

Reductio fractorum ad minimos terminos.

DIcitur fractio ad minimos terminos reduci, cùm reperitur ei æquivalens alia, minimis numeris expressa.

Datus sit fractus A, ad minimos terminos reducendus. Per prop. 35. l. 7. inveniantur numeratori *r*, ac nominatori *p* proportionales minimi *r*, & *t*, ex quibus fractus constituatur B. Hic est quæsitus.

A	B
n 27	3 r
p 36	4 t

Demonstratio.

NAm quia per constr. *r* est ad *t*, ut *n* ad *p*, æquales erunt fracti A, & B, per theor. 2. cap. præced. Neque potest alius fractus, qui minoribus terminis constet, fracto A æqualis exiberi; ad hoc enim, ut patet ex 2 theor., requirerentur duo numeri ipsis *n*, *p* proportionales,

&

& minores minimis jam repertis *r*, *t*: quod fieri non poteſt.

Quod ſi *n*, *p* termini fractionis datæ A ſint in proportione ſuâ minimi, non poterit fractio data in terminis minoribus exhiberi. Utrum verò *n*, *p* ſint in ratione ſua minimi, innoteſcet ex ipſa conſtructione prop. 35. l. 7. Et univerſim per 23. l. 7. omnes numeri inter ſe primi ſunt in ſua proportione minimi.

PROBLEMA II.

Reductio fractorum ad nomen idem.

PARS I.

DAti ſint duo quilibet fracti N, P, ad commune nomen reducendi.

N	P
a 3	5 c
b 4	6 d

Denominatores, invicem multiplicantes, dabunt nominatorem communem *b d*. Tum numerator *a* ductus in nominatorem *d* producat *a d*: erit fractus R æqualis dato N. Rurſum numerator *c* du-

ad	cb	18	20
bd	bd	24	24
R	T	R	T

N	P
a 1	3 c
b 4	6 d

ductus in nominatorem *b* gignat *c b*: erit fractus T par dato P.

Demonſtratio.

R $\frac{6}{24}$ $\frac{12}{24}$ T R $\frac{ad}{bd}$ $\frac{cb}{bd}$ T

PEr ſchol. p. 17. l. 7. *a d* eſt ad *b d*, ut *a* ad *b*. Ergo per theor. 2. cap. præc. fracti N, & R æquales ſunt. Similiter, quia per idem ſchol. *c b* eſt ad *b d*, ut *c* ad *d*, rurſum per theor. 2. fracti P, & T æquales erunt. Datos igitur N, P ad idem nomen reduximus. Quod erat faciendum.

PARS 2.

DAti ſint tres fracti G, H, I, aut plures ad nomen idem reducendi.

R	T	V
144	160	24
192	192	192

G	H	I
a 3	c 5	e 1
b 4	d 6	f 8
R	T	V
adf	cbf	ebd
bdf	bdf	bdf

Denominatores *b, d, f* inter ſe multi-

pli-

plicati dabunt denominatorem communem *b d f*. Numeratores ſinguli provenient, ſi numerator uniuſcujuſque fractionis datæ multiplicet productum ex nominatoribus reliquarum.

Sic ut fractus G reducatur ad nomen *bdf*, ejus numerator *a* ductus in *d f*, genitum ex nominatoribus reliquorum H, I, producat *adf*: erit fractus R facto G æqualis. Ut reducatur H, ejus numerator *c* ductus in *b f*, genitum ex denominatoribus reliquorum G, I, producat *c b f*: proveniet fractus T par dato H. Pari modo V æqualis proveniet dato I.

Demonſtratio.

adf eſt ad *bdf*, ut *a* ad *b* per ſchol. p. 17. l. 7. Ergo per theor. 2. cap. præc. R, G æquales ſunt. Pari ratione *cbf* eſt ad *bdf*, ſeu (per ſchol. p. 19. l. 8.) *dbf*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. 2. etiam fracti T, H æquales ſunt. Denique quia *ebd* eſt ad *bdf*, ſeu *fbd*, ut *e* ad *f*, æquales erunt fracti V, I. Reducti ſunt igitur fracti G, H, I, ad nomen idem. Quod erat faciendum.

Operationem totam utriuſque partis, ipſe litterarum conſpectus exhibet: qui ſanè

nè logiſtices ſpecioſæ fructus eſt proprius, & longe nobiliſſimus.

PARS 3.

DEntur fracti quotcunque A, B, C, quos oporteat ad idem nomen reducere, & in minimis terminis.

Inveni per 36, & 38 l. 7. minimum numerum 24, quem nominatores dati 4, 6, 8 metiuntur. Is erit communis nominator. Hunc nominatores dati 4, 6, 8 dividant per quotientes 6, 4, 3, qui ſi multiplicentur per numeratores datos 3, 5, 1, provenient 18, 20, 3 numeratores novi, eruntque fracti D, E, F ejuſdem nominis datis A, B, C æquales, in terminis minimis.

	A	B	C
	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$
			24
	6	4	3
	18	20	3
	—	—	—
	24	24	24
	D	E	E

Demonſtratio.

QUod ſint æquales, ſic oſtendo. Ex conſtr. & ex ſcholio p. 19 l. 9. patet, tribus hiſce numeris 4, 24, 3 quartum eſſe proportionalem 18. Undè permu-

mutando 4 est ad 3, ut 24 ad 18. Ergo per theor. 2. fracti A, D æquales sunt. Pari argumento B, & E; C, & F æquales erunt.

Quod etiam sint in minimis terminis, sic demonstro. Ut habeantur fracti ejusdem nominis, & æquales datis A,B,C; necesse est, ut denominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividant nominatorem communem futurum; sic enim proveniunt quotientes, qui ducti in numeratores datos 3, 5, 1 exhibent novos numeratores quæsitos. Atqui per constr. nominator ille communis 24, jam inventus, est minimus, quem nominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividunt. Ergo non possunt alii fracti, nominis ejusdem, datis A, B, C æquales inveniri, in terminis minoribus, quàm reperti jam D, E, F.

PROBLEMA III.

Fractionis reductio ad nomen datum.

DAta sit fractio F reducenda ad fractionem, cujus nominator sit d.

Per 19. l. 9, ut *b* ad *a*, sic fiat *d* ad

F		G
a 2		8 c
----	----	----
b 3	12 d	12 d
	24 e	

alium *c*: quod fit ducendo *a* in *d*, & productum *e* dividendo per *b*. Quotiens enim *c* erit numerator quæsitus, qui cum nominatore dato *d*, dabit fractum G æqualem dato F, ut patet ex theor. 2. cap. præced.

			m.p
a 4	8 d	6 n	2 1
—		—	—
b 5		8 d	5 8
	32.e	{ n 2	
		{ 6--m	
		5	

Quod si *b* non metiatur *e*, ut contingit in hoc exemplo, ubi *b* dividens *e* dat quotientem *n*, *m*; quotientem integrum *n* scribe supra denominatorem *d*, erit fractus *n*, *d* ∔ *m*, *p*, (hoc est sex octavæ, cum duabus quintis ex una octava) æqualis facto *a*, *b*.

Demonstratio.

QUoniã, ut *b* est ad *a*, ita *d* est ad *n*, *m*; manifestum est hunc numerum *n*, *m* designare, quot partes à *d* denominatas, nempe quot octavas partes ex toto oporteat accipere, ut facto *a*, *b* æqualis fractus habeatur nominis *d*. Cùm igitur unitates singulæ integri numeri *n* designent

ex

ex toto accipi ſingulas octavas partes ; liquet id , quod in numeratore *n* , *m* eſt minus unitate , nempe *m* , deſignare ex toto accipi inſuper aliquid minus unâ octavâ parte , videlicet *m* , *p* , id eſt duas quintas ex una octava , quæ eſt fractio fractionis. Sed de his cap. 8. plura.

		l	7	
			—	
			8	
p		q	r	
17	†	1		1
—		--		
20		2		20

Hujus reductionis uſus præcipuus eſt , ut valor fractionis datæ cognoſcatur in partibus ejuſdem totius notioribus. Ut ſi offerantur l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ* 20 *pedum : reducantur* l *ad vigeſimas , provenient* p † q , r ; *hoc eſt pedes* 17 *cum dimidio , quibus æquivaleant* l, *id eſt ſeptem octavæ unius perticæ.*

PROBLEMA IV.

Reductio fracti toto majoris ad integrum.

ESto fractus A toto major. Numerator (*b*) per denominatorem (*c*) dividatur. Quotiens (*d*) æquivalet fracto (A.) Def. 14. l. 7.

Demonſtratio.

A
b 12
--- (3. d
c 4

FRactus A eſt ad totum, ſeu unitatem pro toto ſuppoſitam, ut numerator *b* ad nominatorem *c* per th. 1. cap. præc. Atqui etiam quotiens *d* eſt ad unitatem, ut numerator *b*, diviſus ad nominatorom *c*, qui diviſor eſt. Ergo fractus A, & quotiens integer *d* eandem rationem habent ad unitatem. Ergo per 9. 5. æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſi numeratore per nominatorem diviſo, quotiens ſit integer cum fracto, ut contingit in fractione B; tunc non poterit fractio data reduci tota ad integrum, ſed æquivalebit integro, & fracto ſimul ſumptis. De monſtratio eadem eſt.

B
c 14 --- d 4
e 2
3 --
4

Eâdem ratione reducuntur aſſes ad ſolidos, florenos, pattacones; floreni ad aureos, libras &c.; pedes ad paſſus; pedes, & paſſus ad milliaria, &c. Ut ſi velim 40000 pedum reducere ad milliaria 5000 pedum continentia, divido 40000 per 5000, proveniunt 8 milliaria.

PRO-

PROBLEMA V.

Integri numeri reductio ad fractum nominis dati.

DAtus ſit numerus integer *a*, reducendus ad fractum, cujus nominator ſit *b*.

				E
				28 c
				—
a 7	b 4	4	b	

Integer (*a*) datus multiplicet (*b*) nomen datum, & producto (*c*) ſubſcribatur nomen datum (*b*): fractio (E) indè nata æquivalet integro (*a*.)

Demonſtratio.

PEr definit. multiplicationis, ut productum *c* eſt ad multiplicatum *b*, ita multiplicans *a* eſt ad unitatem. Sed etiam, ut *c* eſt ad *b*, ita fractus E eſt ad unitatem. Ergo integer *a*, & fractus E eandem rationem habent ad unitatem; ac proinde æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum. Def. 15. l. 7.

Si cuivis integro, ut 8, ſupponatur unitas, fit fractio, vel potiùs quaſi fractio, æquivalens integro 8.

Hunc in modum ſolidi, floreni, pattacones, aurei reducuntur ad aſſes; aurei, & floreni ad libras, &c.; milliaria ad paſſus, & pedes, &c.; gradus ad minuta prima, & hæc ad ſecunda, & ſic deinceps.

CAP. IV.

Additio Fractorum.

Addendus ſit.

I.

FRACTUS FRACTO.

	2	6	
	—	—	B
A	5	5	
C		8/5	

SI ejuſdem ſint nominis, (ut A, B,) numeratores (2, 6) adde. Tum ſummæ (8) ſubſcribe nominatorem communem (5.) Fractus inde natus (C) erit ſumma datorum A, & B.

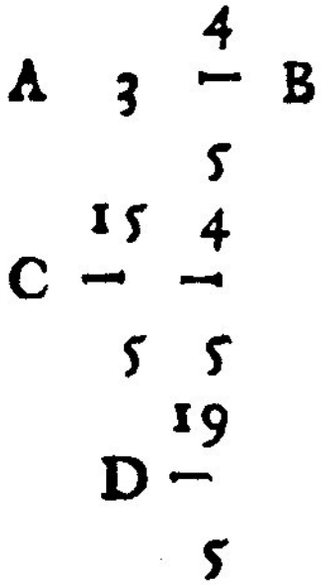
D	2/5	3/7	E
F	14/35	15/35	G
H		29/35	

Si diverſi ſint nominis, (ut D, E,) per prob. 2. c. 3, reducantur ad alios ejuſdem nominis (F, G:) horum ſumma (H) æquivalet datis (D, E.)

II.

II.

INTEGER FRACTO.



INteger (A) reducatur ad fractum (C,) dato fracto (B) cognominem, per probl. 5. cap. 3. Tum additio peragatur, ut numer. 1.

III.

PLURES INTEGRI, ET FRACTI.

COlligantur seorsim integri in unam summam, & seorsim fracti in summam suam, ut num. 1. Tum hæ duæ summæ addantur, ut num. 2.

Demonstratio horum omnium per se est manifesta.

CAP. V.

Subtractio Fractorum.

Subtrahendus ſit.

I.

FRACTUS A FRACTO.

$$I\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ K \qquad L\ \frac{\ }{\ }\ \frac{1}{5}$$

SI ejuſdem ſunt nominis, (ut I, & K,) minor numerator (2) ſubducatur à majori (3,) & reſiduo (1) ſubſcribatur communis nominator (5:) fractus indè natus (L) remanet, minore dato (I) ſubtracto ex dato majori (K.)

$$M\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{5}\ N \qquad O\ \frac{10}{15}\ \frac{9}{15}\ P \qquad \frac{1}{15}\ Q$$

Si diverſi ſint nominis, (ut M, & N;) reducantur ad alios (O, P) nominis ejuſdem, per probl. 2. cap. 3., inter quos ſubtractio peragatur, ut ſuprà.

II.

II.

FRACTUS (S) UNITATE MINOR AB INTEGRO (R.)

EX integro (R) accipiatur unitas, à quâ ſubtrahatur fractio data (S); quod fiet, ſi ejus numerator *a* ſubducatur ex nominatore *b*, & reſiduo *c* ſubſcribatur idem nominator *b*.

	S	
	15 a	17 b
R 25	—	—
	17	17 b
24	2 c	
	—	
	17 b	
	T	

Fractio (T) indè orta, cum integro unitate mulctato, (nempe cum 24,) eſt reſiduum quæſitum.

Demonſtratio.

UNitas æquivalet fracto *b*,*b*, ut patet ex corol. 1. theor. 1. cap. 1. Ergo cùm S ſubtraho ex *b*,*b*, ſubtraho S ab unitate. Atqui, ut patet ex num. 2., ſubtraho S ex *b*,*b*, ſi ſubtraham *a* ex *b*. Ergo ſubtraho S ab unitate, dum ſubtraho numeratorem *a* ex nominatore *b*. Reliqua ſunt meniſeſta.

III.

III.

FRACTUS UNITATE MAJOR AB INTEGRO, VEL INTEGER A FRACTO.

$$X\ 12\frac{18}{4}\ V \qquad Y\ \frac{48}{4}\ \frac{18}{4} \qquad Z\ \frac{30}{4}$$

INteger (X,) per prob. 5. c. 3., reducatur ad fractum (Y,) dato fracto (V) cognominem. Tum fractus datus (V) subtrahatur ab integro sic reducto, (nempe ab Y,) ut numero 1.

Pari modo subtrahetur numerus integer à fracto, qui integro dato major sit.

IV.

INTEGER CUM FRACTO EX INTEGRO.

$$A\ 6\frac{2}{3} \qquad C\ \frac{20}{3}$$

16. B.

INteger cum fracto (A,) per n. 2. c. 4, colligatur in unam summam (C,) quæ subtrahatur ab

ab integro dato (B,) ut numero præcedenti.

V.

INTEGER AB INTEGRO CUM FRACTO.

E F
4
D 8 13 —
5
4
5 —
5

SI integer (D) auferendus minor eſt integro (E,) cui fractus (F) adhæret ; integrum ab integro aufer : reſiduum (G,) cum fracto dato (F,) erit reſiduum quæſitum.

G F
I. K
9.
H 12 10 —
2
24 29
M — — L
2 2
5
— N
2

Si verò integer auferendus (H) major eſt integro (I,)cui adhæret fractus ; tunc redigantur fractus (K,) & cui adhæret integer (I) in unam ſummam (L,) per num. 2. cap. 4. Integer verò (H) reducatur ad fractum (M,) ſummæ (L) cognominem , per probl. 5. cap. 3. Tum fiat ſubtractio (M ab L,) ut num. 1.

Vel

I. K.

9

H. 12 10—

2

PN

1 1

2— 14—

2 2

O.N.

Vel sic : quoniam H auferendus est ab I cum K, erit H minor, quàm I cum K. Quia igitur ponitur H major, quàm I; fractus K necessariò superat excessum ipsius H supra I; ac proindè unitate major est. Itaque, per probl. 4. cap. 5, in fracto K, quidquid integrum est, eximatur, addaturque ipsi I, ut fiat O cum N æquale I cum K. Quia jam H necessariò est non major, quàm O, aufer H ab O. Residuum P unà cum fracto N est residuum quæsitum.

VI.

INTEGER CUM FRACTO AB INTEGRO CUM FRACTO.

2 3

A 5— B D 8 — E

3 4

17 35

C — F —

3 4

INteger auferendus (A,) & fractus illi adhærens (B,) per n. 2. cap. 4, colligantur in unam sum-

ſummam (C.) Pari modo ex duobus aliis (D, E) fiat ſumma (F.) Hæ ſummæ ad nomen idem reducantur, per prob. 2. cap. 3., ac tum ſubtractio peragatur, ut num. 1.

Horum omnium ratio per ſe clara eſt.

CAP. VI.

Multiplicatio Fractorum.

Eſto multiplicandus.

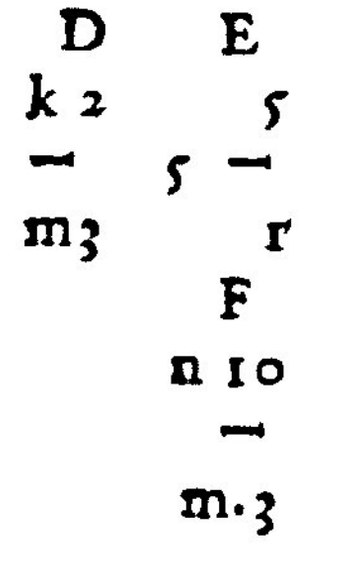
I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A	B	
02	4m	VIdelicet A per B. Numeratores *o*, *m* invicem multiplicantes faciant *om*; item nominatores
—	—	
p3	5n	*p*, *n* faciant *pn*. Erit *om*
C	C	numerator, *pn* verò nomi-
8	om	nator fractionis C, produ-
—	—	ctæ ex multiplicatione fra-
15	pn	ctionum A, B.

II.

FRACTUS PER INTEGRUM.



NImirum D per E. Integer (E) multiplicet (*k*) numeratorem fracti (D.) Producto (*n*) subscribe (*m*) nominatorem fracti (D.) Erit fractio (F) indè orta productum quæsitum.

Vel sic. Integro (E) supponatur unitas, & multiplicatio fiat, ut num. 1.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM.

INteger, & adhærens fractus colligantur in unam summam, per num. 2. cap. 4. Tum multiplicatio fiat, ut num. præcedenti.

Vel seorsim multiplica integrum per integrum, ac deindè fractum per integrum.

IV.

IV.

INTEGRUM CUM FRACTO PER INTEGRUM CUM FRACTO.

PEr num.2. cap. 4., integrum unum, & adhærentem ei fractum collige in unam ſummam. Alterum deindè integrum, & fractum illi adhærentem ſimiliter collige. Tum hæ ſummæ multiplicentur, ut num.1.

Demonſtratio.

pnm. omn
o m om
uni. A---B--C---
p n pn.

SOla numeri 1 operatio demonſtranda eſt, reliqua ſiquidem ex illa patent. Oſtendendum eſt igitur fractum B eſſe ad fractum C, ut unitas eſt ad fractum A. Hoc enim eſt, B multiplicatum per A producere C, ut patet ex defin. 13. l.7.

Ducatur *m* in *pn*: productum erit *pnm.*

pnm. Pari modo *om* ducatur in *n* productum erit *omn*. Igitur, per theor. 7. cap. 3, B eſt ad C, ut *pnm* eſt ad *onm*: hoc, eſt per ſchol. p. 17. l. 7, ut *p* eſt ad *o*; hoc eſt, per theor. 1. cap. 2, ut unitas eſt ad fractum A. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

CUm fracti multiplicandi ſinguli minores ſunt unitate, productum utrolibet minus eſt; id quod mirari ſolent tyrones. Sed res ex definitione multiplicationis illico cernitur.

Def. 13. l. 7.

un. -- A 2/3 -- B 3/4 — C 6/12

Cùm enim exem. gr. A multiplicans B producit C; unitas eſt ad A, ut B ad C. Sed unitas ponitur major, quàm A. Ergo etiam B major eſt, quàm productum C. Quod ſi A multiplicans B producat C; erit rurſum, ut unitas ad B, ita A ad C. Atqui unitas ponitur major, quàm B. Ergo etiam A major eſt, quàm productum C.

Si multiplicandorum unus eſt unitate major; tunc productum erit hôc minus, ſed altero majus.

CAP.

CAP. VII.

Diviſio Fractorum.

Dividendus Sit

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A	B	C
a6	m2	o3
—	per —	—
c8	n4	p2

NImirum A per B. Si diviſoris (B) termini *m*, & *n* metiantur dividendi (A) terminos *a*, & *c*; Numeri (*o*, & *p*,) per quos metiuntur, conſtituent fractum (C) quotientem quæſitum.

A	B	E
a4	m3	n5
—	per —	—
c9	n5	m3

Si verò diviſoris (B) termini non metiantur terminos dividendi (A;) diviſorem (B) inverte, (& fiat E,) perque eum ſic inverſum multiplica dividendum (A.) Productum (D) erit quotiens quæſitus.

D	an 20
	———
	cm 27

II.

FRACTUS PER INTEGRUM, SEU INTEGER PER FRACTUM.

2 -- per 3 = 6 — 1 { 2 — 18

INtegro ſupponatur unitas, & diviſio fiat, ut num. 1.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM, VEL PER INTEGRUM CUM FRACTO.

REdigantur utrimque ad unam ſummam, per num. 2. cap. 4. Tùm inter utramque ſummam peragatur diviſio, ut num. 1.

IV.

INTEGER MAGNUS CUM FRACTO PER INTEGRUM.

EXempli gratia 598 cum fracto A per 3. Commodius ſic operabere.

In

A
2
598--per 3
3
C
5 5 5
-- B -- C (199 --
3 9 9

Integer 599 per 3 dividatur, & quotiens ſit 199. Si quid ſuperſit, ut hîc 1, id addatur fracto A, per num. 2. cap. 4, ut habeatur ſumma B: quam divide per 3, ut num. 2. Quotientem C appone quotienti integro priori; eritque 199 cum C quotiens quæſitus.

Demonſtratio.

A B
a m { o
--per-- { --C
c n p

SOla operatio num. 1. demonſtranda eſt, reliquæ enim ex hac ſunt manifeſtæ. Metiantur primò *m*, & *n* ipſos *a*, & *c* per *o*, & *p*. Quoniam ergo *m* metitur *a* ex ſuppoſitione per *o*; *m* in *o* producet *a* per axio. 8. l. 7. Rurſum quoniam *n* metitur *c* per *p*; *n* in *p* gignet *c*. Ergo per demonſtrationem cap. præced. fractus B, multiplicans fractum C, producit fractum A. Ergo per defin. multip. unitas eſt ad B, ut C eſt ad A. Igitur permutando, unitas eſt ad C, ut diviſor B eſt ad dividendum def. 13. 7.

def. 14. 7. A. Ergo per defin. divis. C est quotiens divisionis A per B.

$$F \begin{array}{c} mna \\ \hline mnc. \end{array} \quad m\ n.$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & E \\ t & m & n \\ \text{--per--} & \multicolumn{2}{c}{\text{———}} \\ c & n & m \end{array}$$

$$D \left\{ \begin{array}{c} an \\ - \\ cm \end{array} \right.$$

At cùm termini divisoris B non metiuntur terminos dividendi A, tum admirabilior operatio videri solet, quòd divisio per multiplicationem peragatur. Demonstrandum est igitur, si A multiplicetur per divisorem B inversum, hoc est per E, productum D fore ipsum quotientem divisionis A per B.

Termini divisoris *m*, *n* in se mutuo ducti faciant *mn*. Tum *mn* in *a*, & *c* producat *mna*, & *mnc*, ex quibus fiat fractus F. Per schol. p. 17. l. 7. *mna* est ad *mnc*, ut *a* est ad *c*. Ergo per theor. 2. cap. 2. F, & A æquales sunt. Atqui numeraror m divisoris B, dividens *mna*, dat quotientem *na*, (quemadmodum enim multiplicatio speciosa perficitur sola litterarum appositione, ita divisio solâ earundem subtractione absolvitur,) & nominator *n* ejusdem B divisoris, dividens *mnc*, quotientem dat *cm*. Ergo per

1 par-

1 partem fractus B dividet fractum F, per quotientem D fractum. Quare cùm ostenderim fractos F, & A æquales esse; etiam B dividet A per quotientem D, natum videlicet ex multiplicatione ipsius A per divisorem B inversum, hoc est per E. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Mirari solent etiam hîc Arithmetices imperiti in fractorum divisione, quotientē reperiri plerumque majorem numero ipso, qui dividitur: quod semper accidit, cum divisor est unitate minor. Verùm ex definitione ipsâ divisionis ratio est manifesta. A divisum per B, quotientem exhibeat C. Ergo per defin. divis. unitas est ad quotientem C, ut divisor B est ad divisum A. Igitur permutando, ut unitas est ad divisorem B, ita quotiens C est ad divisum A. Atqui ponitur unitas major esse divisore B. Ergo etiam quotiens C major est diviso A.

$$A\ \frac{5}{4}\ \text{per}\ \frac{2}{3}\ B \left\{ \begin{array}{c} C \\ \frac{15}{8.\ 1.} \end{array} \right.$$

CAP. VIII.

De Fractis Fractorum.

QUemadmodum integris in partes ſectis, fracti numeri oriuntur; ita ex partibus integrorum in alias minores partes ſubdiviſis habentur fracti fractorũ: ut ſi ſumã A ex B, hoc eſt 3 quartas ex 16 vigeſimis unius floreni. Scribuntur ut vides in exemplis hîc appoſitis. A, B ſunt 3 quartæ ex 16 vigeſimis. C, D ſunt 2 quintæ ex una ſexta. E, F, G ſunt 2 quintæ unius ſextæ ex 3 ſeptimis.

A	B	C	D	E	F	G
3	16	2	1	2	1	3
4	20	5	6	5	6	7

Compendii gratiâ, fractio fractionis appellari poterit fractio ſecunda; fractio fractionis fractionis dicatur fractio tertia.

Ut verò circa fractiones fractionum logiſticæ operationes inſtituantur, reducendæ prius erunt ad ſimplices.

Reductio Fractionis ſecundæ ad ſimplicem.

B D
2a p3
—
3c n4
Z
ap b
E — 6
cn 12

DAta ſit fractio ſecunda B, D. Numeratores *a*, & *p* in invicem ducti faciant *ap*, & nominatores *c*, *n* faciant *en*. Fractus E æquivalet fractioni ſecundæ B, D.

Demonſtratio.

FIat ut *p* ad *n*, ita *c* ad *z*. Manifeſtum eſt fractionis ſecnndæ B, D totum eſſe D, ac proinde fractionem ſecundam B, D eſſe ad ſuum totum D, ut eſt numerator *a* ad nominatorem *c*. Sed per theor. 1. cap. 2. fractus ſimplex D eſt ad unitatem, ut *p* ad *n*: hoc eſt per conſt. ut c ad *z*. Ergo ex æquo fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem; ut *a* ad *z*. Deinde, quia per conſtr. ut *p* eſt ad *n*, ita *c* eſt ad *z*, erit per 19 l.7. *pz* factum ex *p* in *z* æquale *cn* facto ex *c* in *n*. Quoniam igitur *p* multiplicans *a* facit *ap*, & *p* multiplicans *z* facit *cn*, erit per 17.l.7. ut *a* ad *z*, ita *ap* ad *cn*. Sed ut *a* eſt ad *z*, ita (quod jam oſten-

ſtendi) fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem ; & ut *ap* eſt ad *cn*, ita per th. 1. c. 3, fractus E eſt ad unitatem. Ergo per 11. l. 5. fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem, ut fractus E eſt ad unitatem. Ergo per 9. l. 5. Fractio ſecunda B, D, & ſimplex E æquales ſunt. Quod erat propoſitum.

Reductio fractionis tertiæ, quartæ &c. ad ſimplicem.

Data ſit fractio tertia C, D, E reducenda ad ſimplicem. Fractio ſecunda D, E reducatur ad ſimplicem I. Igitur jam C eſt fractio fractionis I. Rurſum igitur fractio ſecunda C, I reducatur ad ſimplicem G. Erit hæc æqualis datæ fractioni tertiæ C, D, E, ut ex conſtructione ipsâ patet.

C	D	E
3 a.	n 4	x 5
—	—	—
5 b	p 6	z 7
	anx.	nx
G	—	— I
	bpz	pz

Operatio tota abſolvitur hunc in modum : numeratores in invicem ducti *a*, *n*, *x* faciant *anx* ; numeratores verò *b*, *p*, *z* gignant *bpz*. Fractio G indè nata quæſitum exhibet.

CAP.

CAP. IX.

Fracti Decimales.

LOgiſtica fractorum numerorum, cujus tam praxim, quàm theoriam jam expoſuimus, quamvis ſcitu & neceſſaria, nec injucunda ſit: tamen in calculo longiori, & ſæpius repetendo quantum faceſſat negotii, ſciunt omnes, qui numeros tractant. Verùm quemadmodum dividendi labor per Neperi laminas rabdologicas, & logarithmos propè omnis evanuit; ita moleſtiis fractorum Simonis Stevinii præclaro invento liberati ſumus. Is enim docuit loco fractionum vulgarium decimales adhibere, quas inſigni compendio ita prorſus tractare liceat, ac ſi integri eſſent numeri. Hoc verò inventum ſuum Auctor nec ſatis exactè, ac planè expoſuit, nec demonſtravit: neque enim cùm demonſtrare ſe dicit, aliud agit, quàm exemplum afferre. Utrumque ſupplere conabimur.

Quid

Quid ſint, & quomodo ſcribantur.

FRactiones, ſeu numeri decimales ſunt totius cujuſpiam partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. denominatæ videlicet à numeris progreſſionis decuplæ, ab 1 incipientis, 10, 100, 1000 &c: quæ quidem more communi ita ſcriberentur, ut *a*, id eſt tres decimæ: ut *b*, id eſt ſeptem centeſimæ. Sed quia horum fractorum nominatores non aliis notis conſtant, quàm unitate, & cifris; expeditior calculus redditur, ſi non infra numeratores, ſed ſupra ipſos, ut fit in ſcrupulis aſtronomicis, exprimantur ſignis quibuſdam, quæ hîc vides expreſſa.

$$\frac{3}{10}\,a \qquad \frac{7}{100}\,b$$

Decimæ. Centeſimæ. Milleſimæ.
Decimilleſ. Centimill. &c.

Signa.	I	II	III	IV	V	&c.
Valor.	10	100	1000	10000	100000	

Igi-

I II III IV V VI
3 4 6 2 9 4
a b c d e f

Igitur Decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hic valor eſt: *a*, tres decimæ: *b*, quatuor centeſimæ: *c*, ſex milleſimæ: *d*, duæ decimilleſimæ: *e*, novem centimilleſimæ: *f*, quatuor millioneſimæ. Quod ſi notis ſignatis aliæ non ſignatæ ad ſiniſtram adhæreant, ut *g*, *h*; integros illæ numeros deſignant.

I II
8 3. 2 1
g h. k l

Cùm igitur fractio decimalis exprimenda eſt, duo ſcribuntur, numerus, & ſignum. Numerus ſignificat, quot partes decimales ex toto accipiantur; ſignum, quales.

Finis Decimalium.

EST, omnes operationes Arithmeticas, ad uſum humanæ vitæ pertinentes, ſine fractis abſolvere.

Modus utendi exponetur infra cap. 15.

CAP.

CAP. X.

Requiſita quædam ad demonſtrationem Arithmeticæ decimalis.

SI methodicè procedatur facilis redditur operationum decimalium demonſtratio.

Definitiones.

I II III
2 3 4
a b c

1. Notæ, ſignis affectæ, non æſtimantur ex loco, (hoc eſt juxta loci valorem,) ſed ut ſimplices (hoc eſt, ac ſi ſingulæ primo ſtarent loco.) Itaque ſi dentur decimales notæ *a*, *b*, *c*, licet *a* tertio loco conſiſtat, decimas ſignificat, non 200, ſed duas: ſimiliter 3, licèt exiſtat loco ſecundo, centeſimas ſignificat, non 30, ſed tres.

I II
4 8. 2 9
p q. a b

2. Integri verò numeri, qui decimalibus adhærent, eodem valore ſunt æſtimandi, quo, ſi decimales abeſſent, æſtimarentur. Sic notæ *p*, *q*, licèt præcedant eas notæ decimales,

les *a*, *b*, valent quadraginta octo, non verò 4800.

11
6 6 n
e —
100 m

3. Cùm nota decimalis ſcribitur modo conſueto fractionum vulgarium, denominator præter unitatem habet tot cifras, quot indicuntur à ſigno. Sic nota decimalis *e*, vulgari modo ſcripta, eſt fractio *n*, *m*, cujus nominator *m* habet duas cifras, tot nimirum, quot à ſigno deſignantur.

III
K 3
1000

4. Valor ſigni decimalis eſt unitas cum tot cifris, quot indicantur à ſigno, ut ſi detur numerus decimalis *k*, valor ſigni eſt 1000.

Patet ex defin. 3.

Axioma.

B	I	II	III
23	0	0	0
1	II	III	IV
57	0	0	0
B		C	

SI numero cuicunque (B,) ſive is ſit purè integer, ſive ex integro, & particulis decimalibus compoſitus, adjiciãtur cifræ C ſignis decimalibus affectæ, ejus valorem illæ non immutabunt-

bunt. Nam neque cifræ ipsæ ullum ex se valorem habent, neque integro B præpositæ ejus locum attollunt, ut patet ex defin. 2. Axioma illustrabitur infra.

		I	IV		
A	4	3	5		
	I	II	III	IV	
	4	3	0	0	5

Pari modo cùm series decimalis (A) interrupta est, si ea per cifras interpositas continuetur, valor dati (A) non immutatur.

THEOREMA I.

Particulæ decimales (a, b, c, d) *æquivalent fractioni* (O) *cujus numerator sint ipsæ notæ datæ* (a, b, c, d) *signis abjectis, & juxta loci valorem æstimatæ; nominator verò ipse maximi signi valor; hoc est unitas cum tot cifris, quot à signo maximo* (IIII) *indicantur.*

Demonstratio.

Decimales numeri *d*, *c*, *b*, *a* scribantur explicitè: hoc est, fiant fracti E, F, G, H, quorum numeratores sint ipsæ notæ simpliciter acceptæ, nominatores

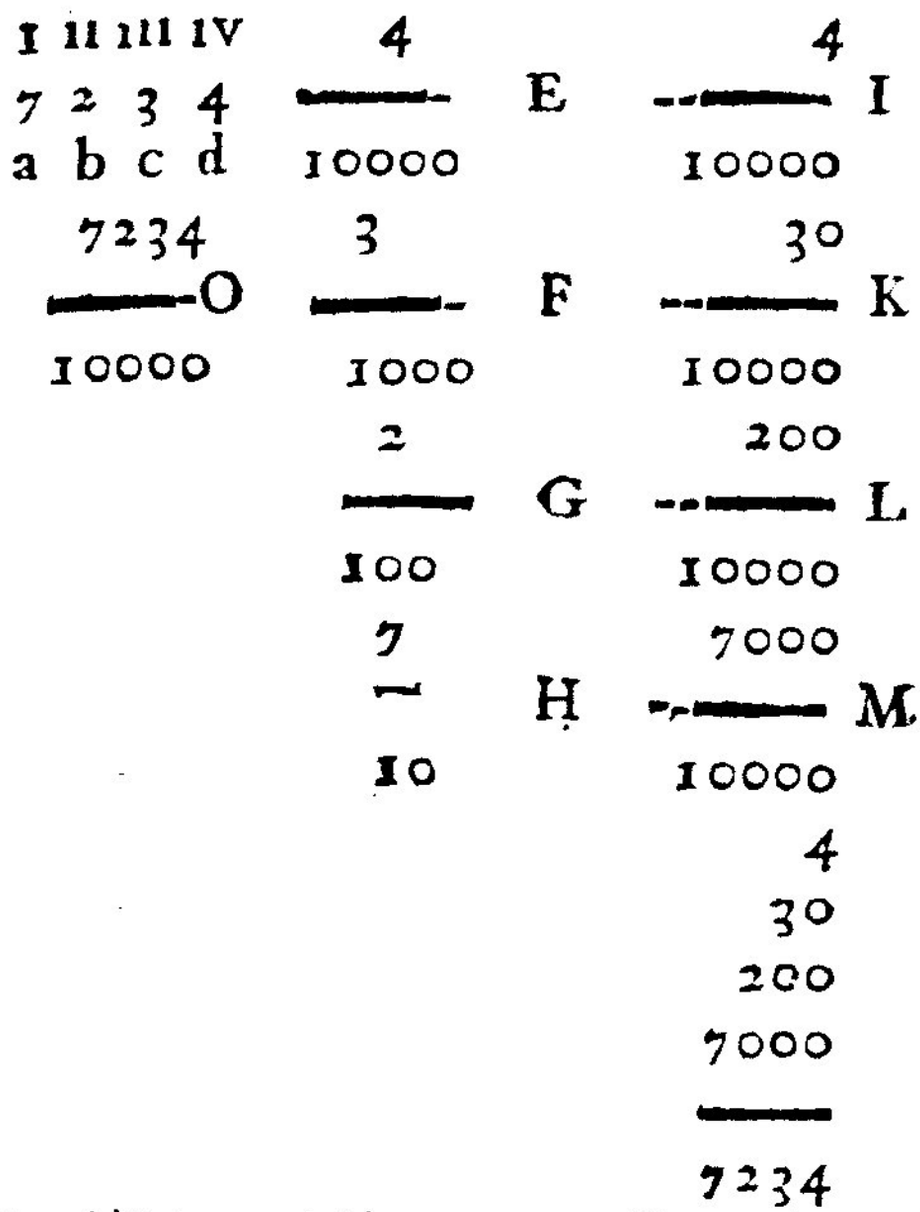
I II III IV
7 2 3 4
a b c d
7234
—O
10000

4
E
10000
3
F
1000
2
G
100
7
H
10

4
I
10000
30
K
10000
200
L
10000
7000
M
10000

4
30
200
7000
7234

res verò ſint valores ipſi ſignorum. Fiant deinde alii fracti I, K, L, M, quorum numeratores ſint eædem notæ, ſed ſecundùm loci valorem æſtimatæ; nominator verò communis ſit valor ipſe ſigni maximi. Oſtendam fractos I, K, L, M, æquales eſſe fractis E, F, G, H. Comparemus duos L, & G. Quoniam locorum valor ſecundùm progreſſionem decuplam procedit à dextra in ſiniſtram; valor autem ſignorum de-



decimalium eâdem progreſſione decuplâ procedit à ſiniſtra in dextram; manifeſtum eſt, quod valor notæ *b* ex loco æſtimatæ, (numerator videlicet (200) fractionis L,) ita excedat valorem ſimplicem ejuſdem notæ *b*, (hoc eſt numeratorem fractionis G,) ut valor ſigni maximi (IV) (ipſe videlicet fractionis, L nominator) excedit valorem ſigni (II) quo ſignata eſt nota *b*, (hoc eſt ipſum nominatorem fra-

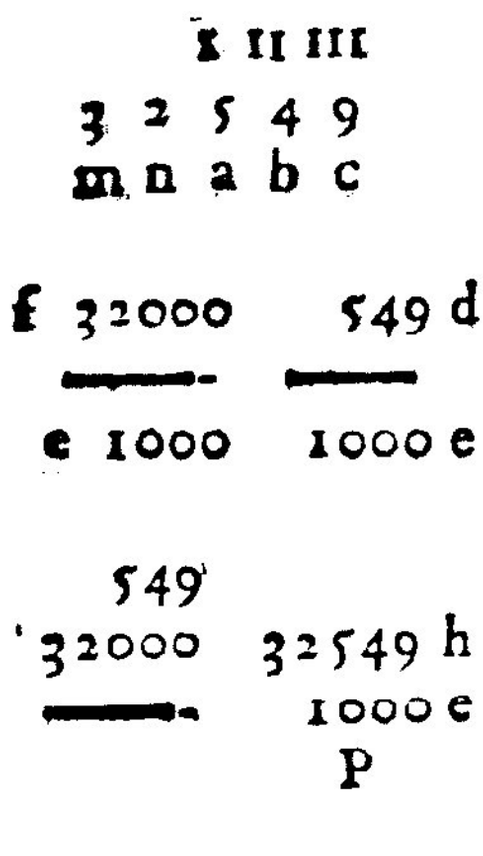
cti

cti G.) Ergo per theor. 2. c. 2. fracti L, & G æquales ſunt. Simili planè argumento I, & E; K, & F; M, & H æquales erunt. Atqui fractiones I, K, L, M conficiunt fractionem O, quia (10000) valor ſigni maximi (IV) eſt communis earum denominator; numeratores verò earum collecti faciunt 7234, ut per ſe patet. Ergo etiam fracti E, F, G, H, hoc eſt decimales dati *d*, *e*, *b*, *a*, conficiunt fractionem O. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 2.

SI integro numero (m, n) *adhæreant decimales particulæ* (a, b, c;) *integer cum decimalibus æqualis erit fracto* (P,) *cujus numerator ſint omnes notæ datæ* (m, n, a, b, c) *ſignis, ubi adſunt, abjectis, & juxta loci valorem acceptæ; nominator verò ipſe maximi* (III) *ſigni valor* (1000.)

Demonſtratio.



PEr theor. 1 decimales *a*, *b*, *c* ſunt æquales fracto *d*, *e*. Quod ſi integro *m*, *n* ducto in *e* fiat *f*, & ſubſcribatur *e*, ut fiat fractus *f*, *e*; erit is par integro *m*, *n* per prob. 5 cap. 3. Sed fracti *f*, *e*; & *d* *e* conficiunt fractum P. Cùm enim nominator *e* ſit commnnis, ſoli numeratores *f*, *d* ſunt addendi, quorum ſumma neceſſariò ſemper conſtat notis datis *m*, *n*, *a*, *b*, *c*, ut patet vel leviter rem expendenti. Ergo etiam integer *m*, *n* cum decimalibus *a*, *b*, *c*, conficiunt fractum *P*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3.

	I IV	II V
a	2 3	a 5 2 7 5
	I II III IV	I II III IV V
c	2 0 0 3 c	5 2 0 7 0 0 5
	2 0 0 3 e	5 2 0 7 0 0 5 e
	1 0 0 0 d	1 0 0 0 0 0 0 d

CUm decimalis progreſſio a *interrupta eſt; tunc cifris interpoſitis interruptio progreſſionis tollatur, ut fiat* c; *& ſignis abjectis, infra* e *ſcribatur* d, *maximi* (IV) *ſigni valor. Fractio* e, d *erit æqualis* a.

Demonſtratio eadem eſt, quæ in 1, & 2 theoremate.

Corollarium.

EX his ampliùs declarabitur axioma ſupra poſitum. Eſto *d*, cui adjiciantur tres cifræ ſignis notatæ, ut fiat *f*; per theor. 2. æquatur facto *g*, *h*; *f*

I		I II III IV
d. 35	f	3 5 0 0 0
g. 35	k	35000
h. 10	m	10000

verò facto k, m per idem theor. Quot verò cifris k excedit g, totidem quoque cifris necessariò m excedit h. Ergo per theor. 1. cap. 3. l. 1. k est ad g, ut m ad h: & permutando k est ad m, ut g ad h. Ergo per theor. 2. cap. 2. lib. 2. facti k, m; & g, h æquales sunt. Quare cùm k, m sit f; & g, h, sit d; etiam d, & f æquales sunt.

Est quidem id per se manifestum: undè & tanquam axioma proposui. Visum est nihilominus, quia maximus hujus axiomatis usus erit, declaratiunculam istam apponere.

CAP. XI.

Additio Decimalis.

ADdendi offerantur A, B, C. Ubi signorum progressio vel interrumpitur, ut in C, vel deficit, ut in B; ea aut cifris interpositis, ut in F, aut cifris adjectis, ut in E, continuetur. Quâ qui-

Per axioma.

	I	II	III	IV
A	3	5	2	4 7 1
B	8	6	1	

	II	IV
C	7	4 9

	I	II	III	IV
D	.	3	5	2 4 7 1

	I	II	III	IV
E	8	6	1	0 0 0 0

	I	II	III	IV
F	.	.	7	0 4 0 9

	I	II	III	IV
G	9	0	3	2 8 8 0

I	K	L
352471	8610000	70409
10000. p	10000. p	10000. p

$$N = \frac{9032880.\ g}{10000.\ p}$$

quidem ſuppletione valor ipſius C, aut B non immutatur. Tunc ſimilia ſcribantur ſub ſimilibus, eo ordine, quem vides in D, E, F. Peragatur deinde additio, ac ſi omnes eſſent numeri integri. Summæ G notas primas iiſdem ſignis affice, eritque hæc ſumma quæſita.

Demonſtratio.

PEr theoremata ſuperiori capite demonſtrata D, E, F æquantur fractis I, K, L, quorum numeratores ſunt ipſi D, E, F abjectis ſignis accepti ut integri, nominator verò communis *p*, maximi ſigni valor. Sed ut horum fractorum habeatur ſumma, tantùm opus eſt addere numeratores, hoc eſt ipſos D, E, F, tanquam integros, & ſummæ ſubſcribere nominatorem communem *p*. Ergo etiam, ut habeatur ſumma datorum D, E, F, tantùm opus eſt ipſos D, E, F acceptos velut integros addere, & ſummæ *g* ſubſcribere *p*, maximi ſigni valorem; ut ſumma habeatur fractio N. Sed fractio N per theoremata cap. præc. æqualis eſt ſummæ G: nam ejus numerator conſtat iiſdem notis, quibus G; & nominator *p* eſt ipſe maximi ſigni (IV) valor, per hyp. utrobique. Ergo G eſt ſumma quæſita datorum D, E, F, ſeu A, B, C. Quod erat propoſitum.

Patet ex c. 4. n. 1.

Quamvis inetrruptio ſignorum in praxi vix unquam, aut rarò offeratur, nihilominus ut plena habeatur cognitio Logiſticæ de-

decimalis, etiam hunc casum tum hic, tum deinceps proponere, ac demonstrare voluimus.

CAP. XII.

Subtractio Decimalis.

	I II		I II III IV V
A	9 8 4 2	C	9 8 4 2 0 0 0
	II III V		I II III IV V
B	4 5 9 4	D	4 0 5 9 0 4
			I II III IV V
		Q	9 4 3 6 0 9 6

$$E\ \frac{9842000}{100000.p} \qquad F\ \frac{405904}{100000.p}$$

$$T\ \frac{9436096.q}{100000.p}$$

OPorteat subtrahere B ex A. Integer minor subscribatur majori, ut solet. Tum decimales similes sub similibus collocentur, & loca signis vacantia, tam in principio, ut in A, quàm in medio, ut in B, cifris signatis suppleantur, ut

I II I II III IV V

A 9 8 4 2 C 9 8 4 2 0 0 0

II III V I II III IV V

B 4 5 9 4 D 4 0 5 9 0 4

I II III IV V

Q 9 4 3 6 0 9 6

$$E\ \frac{9842000}{100000.p} \qquad F\ \frac{405904}{100000.p}$$

$$T\ \frac{9436096.\ q}{100000.\ p}$$

factum vides in C,& D.Quâ quidem suppletione datorum A, & B valor non immutatur, per axioma. Subducatur deinde D ex C, perinde ac si ambo toti essent numeri integri, seu absoluti. Residui verò Q primæ notæ iisdem signis afficiantur. Erit hoc residuum quæsitum.

Demonstratio.

PEr theoremata cap. 10. C, & D æquantur fractis E, & F, quorum numeratores sunt ipsi C, & D accepti ut in-

te-

tegri, nominator verò communis *p*, ipſe valor ſigni communis maximi. Ut autem F ſubtrahatur ab E, tãtùm opuseſt numeratorem à numeratore ſubtrahere, hoc eſt D tanquam integrum à C tanquam integro, & reſiduo ſubſcribere communem nominatorem *p*, maximi nempe ſigni valorem. Ergo ut D ſubtrahatur à C, hoc eſt, per axioma, A ex B, etiam tantùm opus erit D tanquam integrum ſubducere à C tanquam integro, & reſiduo Q ſubſcribere *p* maximi ſigni valorem, ut habeatur reſiduum fractus T. Sed fractus T, per theorema 2, æquatur Q: nam per hypotheſim, & numerator *q* iiſdem conſtat notis, quibus Q, & nominator *p* eſt valor ſigni maximi. Ergo etiam fractus T eſt reſiduum quæſitum. Quod erat propoſitum.

Patet ex c. 5. n. 1.

CAP. XIII.

Multiplicatio Decimalis.

DEtur multiplicandus A per B. Nulla ſignorum habitâ ratione ita multiplicatio inſtituatur, ac ſi A, & B eſſent integri numeri, ſublatâ priùs per cifras in-

I III			
74	A	G	H
I II III		704	52
704.	A		
I		1000. e	10. p
52.	B		
			36608 k
I II III IV			
36608	C	10000 f	
		N	

interpoſitas (ut in A ſecundo) progreſſionis decimalis interruptione, ſi quæ eſſet. Maxima deinde datorum A, B numerorum ſigna ſibi adde. Eorum quippe ſumma dabit (IV) ſignum maximum, quo producti C nota prima ſignari debeat, indicabitque pariter, quot notæ ſignis ordine decreſcentibus ſint afficiendæ.

Demonſtratio.

PEr theoremata cap. 10. A, & B æquantur fractis G, & H, quorum numeratores ſunt ipſi A, & B accepti tanquã integri, nominatores verò ipſi valores maximorum ſignorum A, & B. Atqui ut hi fracti G, & H inter ſe multiplicentur, tantùm opus eſt, ut numeratores eorum,

hoc

hoc eſt A, & B, accepti tanquam integri, invicem multiplicantes, novum faciant numeratorem *k* (ipſum nempe C ſignis abjectis) cui deinde ſubſcribatur nominator *f*, conſtans unitate, & cifris *e*, *p* ſimul ſumptis, valor ſcilicet utriuſque ſigni maximi A, B. Ergo etiam ut decimales A, & B invicem multiplicentur, tantùm opus eſt, ut A, & B accepti tanquam integri invicem multiplicantes faciant numeratorem *k*, cui ſubſcribatur nominator *f*, ipſe nimirum valor utriuſque ſimul maximi ſigni A, B, ut habeatur productum fractio N. Atqui per theor.2.cap. 10. N æqualis eſt C: nam & numerator *k* iiſdem conſtat notis, quibus C, & nominator *f* conſtat unitate, & cifris *e*, *p*, hoc eſt per hyp.tot cifris, quot deſignantur ab utriſque ſimul maximis ſignis A, B; hoc eſt per conſt. tot cifris, quot indicantur à ſigno maximo C. Ergo etiam C eſt productum quæſitum ex multiplicatione datorum A, & B. Quod erat demonſtrandum.

Si datorum unus eſt numerus integer, cui nulli adhæreant decimales, producti nota prima ſignabitur ſigno maximo alterius dati, & reliquæ ſignis ordine deſcribentibus.

CAP.

CAP. XIV.

Diviſio Decimalis.

I IV V
A 2 5 8 7 9

I II III IV V I II
A 2 5 8 0 0 7 9 B 5 7 3

III IV V I II III
X 4 3 3 (4 5 0 2 C
2580079 p 573. q
D E
100000 f 100. g
433
Z
100000
4502 h
N
1000 k

OPorteat A dividere per B. 1 Progreſſionis decimalis interruptio, ſi quæ ſit, cifris interpoſitis, tollatur (ut in A ſecundo.) Divide deinde A per B, perinde ac ſi ambo eſſent integri. Si jam diviſor B ſignum maximum minus eſt ſigno maximo dividendi A, ab hoc illud auferſi-

signo reſiduo (III) notabitur nota prima quotientis C, reliquæ verò ſignis ordine decreſcentibus.

	I	II	III	IV
k	2	3	0	0
	I			
h.	2	3		

	I	II
m	5	6
		I
n (	I	0

Quod ſi (*m*) diviſoris maximum ſignum majus ſit ſigno maximo (*h*) dividendi aliquot cifris dividendo adjectis, ut in (*k*) ſigna, quæ deſunt, ſuppleantur, donec ſubductio fieri poſſit.

	I	II
p.	8	2 5
		I
q.	9	4 2

Idem fiat cùm diviſor (*q*) eſt abſolutè major dividendo (*p*), quomodocunque ſigna ſe habeant.

Demonſtratio.

PEr theor. 2. cap. 10. Dati A, & B æquantur fractis D, & E, quorum numeratores *p*, & *q* ſunt ipſi A, & B accepti tanquam integri; nominatores verò *f*, *g*, valores ipſi maximorum ſignorum (V, & II.) Atqui ut D dividatur per E, oportet ſolummodo *p* dividere per *q*, hoc

(hoc eſt A tanquam integrum per B tanquam integrum) & *f* dividere per *g*, quod fit auferendo cifras *g* à cifris *f*, hoc eſt ſignum maximum dati B à ſigno maximo dati A. Ergo etiam ut A dividatur per B, oportet ſolùm A, acceptum ut integrum, dividere per B ut integrum, & quotienti *h* ſubſcribere unitatem cum cifris, quæ reſtant cifris *g* ablatis à cifris *f*, ut ſic habeatur pro quotiente fractio N. Sed per theor. 2. cap. 10. fractio N æqualis eſt C: nam & numerator *h* iiſdem conſtat notis, quibus C, (nati enim ſunt ex eorundem numerorum diviſione) & nominator *k*, ut mox oſtendam, eſt valor maximi ſigni ipſius C. Ergo C eſt quotiens ortus ex diviſione A per B. Quod erat demonſtrandum. Quod autem *k* ſit valor maximi ſigni quotientis C, ſic oſtendo. Per conſtr. ſignum maximum C eſt id, quod remanſit ſigno maximo ipſius B, ablato à ſigno maximo ipſius A. Atqui *g*, & *f* ſunt valores maximorum ſignorum A, & B; ac proinde per defin. 4. totidem conſtant cifris, quot indicantur à ſignis maximis ipſorum A, & B. Manifeſtum eſt igitur cifris *g* ablatis ex cifris *f*, remanere *k* valorem ſigni maximi quotientis C.

In

In altero caſu, quo cifræ dividendo *b* ſunt adjiciendæ, ut fiat *k*, ſic demonſtrabimus. Per 1. partem iam demonſtratam *m* dividat *k*, & producat quotientem *n*: *k* æquatur *b* per axioma. Atqui *m* dividens *k* fecit quotientem *n*. Ergo etiam *m* dividens *b* gignet quotientem *n*: quod erat demonſtrandum.

Porrò ex conſtructione jam traditâ patet, cùm diviſor eſt integer, quotientem iiſdem ſignis notari, quibus dividendus: item cùm diviſoris, & dividendi ſigna maxima æqualia ſunt, quotientem eſſe integrum totum.

2. Si divitione peractâ aliquid ſuperfuit (ut in exemp. 1, ſuperfuit X;) ejus notæ iiſdem ſignis ſunt notandæ, quibus totidem primæ notæ dividendi A.

Demonſtratio.

NAm A eſt D, & B eſt E: E verò dividens D relinquit Z, hoc eſt X per theor. 1. cap. 10. Clara ſunt iſta, ſi prior demonſtratio fuerit intellecta.

	I	II	III	IV	V		I	II
A.	2	5.	8	0	0	7 9 B	5.	7 3

	II	IV	V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV	V	VI
X.	4	3	3	0	0	0	4.	5	02	7	5	5
				t				C		I		

	VI	VII	VIII
V.	3	5	5

3. Si reſiduum diviſionis adhuc alicujus momenti ſit, adjiciantur ei aliquot cifræ decimales, & diviſio continuetur, ut num. 1. traditum eſt.

Ex diviſione A per B ſuperfuit X. Hoc ſi placuerit ulteriùs exhaurire, adjice aliquot cifras ſignatas, ut fiat X *t*; quod divide, ut num. 1, & quotientem indè natum *r* acſcribe quotienti C; erit C *r* quotiens ex diviſione A per B. V, quod tum ſupererit; jam multò erit minus priori reſiduo X, ſeu *z*, ut patet ex num. præced., & hoc ipſum pluribus adjectis cifris, aut penitus evaneſcet, aut certè fiet quovis dato minus.

De-

Demonſtratio.

QUoniam valor reſidui X, adjectis cifris *t*, non immutatur; X *t* æquivalebit ſoli X. Atqui X *t* diviſo per B, provenit quotiens *r*. Ergo etiam X diviſo per B, proveniet quotiens *r*. Atqui ex A minus X, diviſo per B, provenit quotiens C; (nam A diviſo per B ſuperfuit X.) Ergo ex A toto, diviſo per B, provenit quotiens C *r*.

Praxim paucis ſic complector.

AD reſiduum ex diviſione decimali, adjectis aliquot cifris, diviſionem proſequere, & notas quotienti primo accedentes nota ſignis, ordine creſcentibus.

Corollaria.

1. EOdem planè artificio poterit evanaſcere reſiduum ex diviſione integri per integrum; eademque erit demonſtratio.

2. Quævis fractio eodem artificio reducetur ad partes decimas. Detur fractio *a*, *b*. Numeratori *a* aliquot cifras adjice, eumque sic auctum divide per nominatorem *b*, ut traditur num. 1. Quotiens *d* æquivalat fractioni *a*, *b*.

3 a	1 11 111	
--	f. 3 0 0 0	
7 b		
	1 11 111	
	d (4 2 8	

Nam quia per axioma *a*, & *f* æquales sunt; etiam *b* illos dividens, quotientes æquales dabit. Atqui *b* dividens *a*, dat in quotiente fractionem *a*, *b* per corollar. 2. theor. 1. cap. 1; dividens autem *f*, dat *d*. Æquatur ergo fractio *a*, *b* ipsi *d*.

Reductio fractionis datæ etiam continetur probl. 3. cap. 3.

CAP. XV.

Usus Decimalium numerorum.

1. MEnsuræ, & pondera dividantur in 10 partes æquales; & singulæ decimæ rursum in alias æquales 10, quæ jam erunt centesimæ totius; Atque harum

rum ſingulæ iterum in 10, quæ proinde jam erunt milleſimæ totius. Menſuris, hunc in modum diviſis, ſi utamur in dimenſione quacunque linearum, planorum, ſolidorum, liquidorum, ponderum, &c., nuſquam calculo fractiones ſeſe ingerent; ſed earum loco integris numeris adhærebunt particulæ decimales, quas licebit tractare, ut integros numeros; quemadmodum per plura jam capita explicavimus.

B	C	
I II III	14 | 560	Quod ſi ſub finem totius operationis lubeat decimales particulas reducere ad fractionem denominationis datæ, exempli gr. ſi lubeat cognoſcere,
7 2 8	—	
	20	
728	14	
—— A	—	
1000	10	

particulæ B, unius virgæ 20 pedum, quot pedes ejuſdem virgæ conficiant, quæſitum facillimè obtinebitur hunc in modum. Denominator datus 20 multiplicans 728 faciat 14560, à quo aufer tot primas notas (560,) quot indicantur à ſigno maximo decimali, ſive quot

ſunt dati decimales. Reſiduum 14 eſt numerator quæſitus. Igitur particulæ B efficiunt unius virgæ 20 pedum partes C, nempe quatuordecim vigeſimas, hoc eſt, faciunt pedes 14.

Demonſtratio.

FRactio A, cujus numerator iiſdem notis conſtat, quibus B, denominator verò præter unitatem habet tot cifras, quot deſignantur à ſigno maximo ipſius B, per theor. 1. cap. 10. æquatur B. Sed per prob. 3. cap. 3, ut fractio A reducatur ad denominationem 20, numerator 728 ducendus eſt in 20, & productum 14560 dividendum per denominatorem 1000, quod fit auferendo tot primas notas, quot ſunt cifræ in 1000, hoc eſt quot indicantur à ſigno maximo ipſius A. Liquet ergo veritas operationis præſcriptæ.

2. Circumferentia circuli dividatur quidem in partes, ſeu gradus 360; at gradus ſinguli non in 60, ſed in 10 æquales partes ſecentur. Tum ſingulæ decimæ unius gradus in alias 10, quæ jam erunt unius gradus centeſimæ. Hæ rurſum ſingu-

Cubus dicitur, qui fit ex trium numerorum æqualium multiplicatione, ſive ex numero bis in ſe ducto. Talis eſt 8, qui fit ex 2, 2, 2; nam 2 in 2 facit 4; & 4 in 2 eſt 8.

Biquadratus, ſeu quadratoquadratus eſt, qui fit ex multiplicatione quatuor æqualium numerorum, ſive ex numero in ſe ipſum ter ducto. Talis eſt 16, qui fit ex 2, 2, 2, 2; nam 2 in 2 eſt 4; & 4 in 2 eſt 8; & 8 in 2 eſt 16.

Superſolidus eſt, qui fit ex multiplicatione 5 æqualium numerorum, ſeu ex numero in ſe quater ducto. Atque hunc in modum reliquæ in infinitum poteſtates procreantur. Lege ſcholium noſtrum p.8.l.9., in quo cætera huc neceſſariò pertinentia reperies.

Poteſtatis verò cujuſque radix ab ipſa poteſtate denominatur. Hinc radix quadrata, radix cubica, quadratoquadrata, ſuperſolida, &c. Singularum characteres, ſeu ſigna hîc adjungo.

R. vel latus

R. 2) radix quadrata.

R. 3) radix cubica.

R. 4) radix biquadrata.

R. 5) radix ſuperſolida.

Et ſic in infinitum.

Exempla nonnulla ſubjicio.

R. 12) vel R2) 12, eſt radix quadrata numeri 12.

R 3) 25, eſt radix cubica numeri 25, & ſic deinceps in aliis.

Porrò expediet plurimùm huic negotio radicum eliciendarum, geneſim poteſtatum etiam exprimere multiplicatione ſpeciosâ, quæ ſolâ litterarum appoſitione peragitur. Conſule, quæ monui ante lib. 7. Eucl.

Radix	a	*a* in *a* facit *aa* quadratum, & *aa* in *a* facit cubum *aaa*, & *aaa* in *a* facit quadratoquadratum *aaaa*.
Quadrat.	aa	
Cubus.	aaa	
Quadquadr.	aaaa	
Surſolid.	aaaaa	

Et ſic deinceps.

CAP.

CAPUT I.

Radicis Quadratæ Extractio.

Extrahenda ſit radix quadrata ex numero A.

A 56, 70, 09	(753	1. POſt binas quaſque notas, à dextris ſumpto initio, cõma, aut punctũ interpone; eritque numerus datus in membra ſectus, binis notis cõſtantia, præter ultimum, quod unicâ conſtare poteſt. Quot verò erunt membra, tot notis conſtabit radix quæſita.
49	14	
7, 70		
7 25	150	
45, 09		
45 09		
0		

2. Prælidio tabellæ hîc appoſitæ, quâ notarum ſimplicium quadrati continentur, quære poſtremi membri (56) radicem quadratam, aut ſi (quod hîc contingit) quadratus non ſit, radicem quadrati proximè minoris; ut quia ulti-

timum membrum 56 quadratus non eſt, quære quadratum proximè minorem 49, ejuſque radicẽ 7 ſcribe poſt lunulam. Erit hæc nota ultima radicis quæſitæ. Quadratum verò 49 aufer ex membro 56, & reſiduum 7 ſcribe infrà lineam. Hæc operatio ſingularis eſt, neque ampliùs repetitur.

Rad.	Quad.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81.

3. Reſiduo 7 adſcribe membrum penultimum 70, ut habeatur novum membrum totale 7, 70. Tum radix hactenus acquiſita 7 duplicetur. Ea ſic duplicata (14) diviſor appellabitur.

Quære quoties diviſor 14 contineatur in membro novo 7, 70, demptâ notâ primâ, nimirum in 77. Reperies contineri quinquies. Scribe ergo 5 poſt lunulam. Erit hæc nota radicalis altera.

Multiplicet deinde nota radicalis, jam reperta 5, diviſorem 14; & fiat 70; eademque ſe ipſam multiplicãs faciat quadratum 25. Hæc duo producta colligе in unam ſummam, numeris ita col-

70
25
725

lo-

locatis, ut vides in hac formulâ. Summam 725 aufer ex membro 7, 70, & reliduum 45 ſcribe infra lineam.

Poterit etiam multiplicatio inſtitui hunc in modum. Diviſori 14 appone notam radicalem 5, ut fiat 145, quæ per ipſam radicalem notam 5 multiplica. Idem oriri productum, quod priùs, patet ex p. 3. l. 2.

4. Hæc operatio in omnibus membris ſequentibus eodem prorſus modo repetitur.

Reſiduo 45 adſcribe membrum antecedens 09, ut habeatur totale novum 45, 09. Tum radicem hactenus acquiſitam 75 duplica, ut fiat diviſor novus 150. Quære quoties hîc contineatur in membro 45, 09, demptâ primâ notâ, nimirum in 450. Reperies ter. Scribe ergo notam 3 poſt lunulam. Hæc deinde diviſorem 150 multiplicans, faciat 450; multiplicans verò ſeipſam faciat 9. Hæc duo producta adde, numeris, ut in adjectâ hîc formulâ, collocatis. Summam 4509 aufer ex membro 4509, & quia nihil remanet, erit A numerus quadratus, ejuſque radix 753.

450.	
9	
4509	

Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem ali-

aliquid remaneat, numerus, qui proponitur, quadratus non eſt: quadratus autem fit, ſi mulctetur reſiduo.

5. Quando factâ multiplicatione nequit fieri ſubtractio radicalis; nota ultimò reperta, per quam nimirum facta eſt multiplicatio, minuenda eſt, donec ſubtractio fieri poſſit.

Eſto radix elicienda ex 784. Quadratum proximè minus ultimo membro 7 eſt 4, & radix ejus 2, ſcribenda poſt lunulam. Ejus quadratum 4 aufer ex mẽbro 7, & reſtant 3, quæ ſubſcribe, adjecto membro 84. Radicalis 2 duplicata dat diviſorem 4, qui in novo membro 3, 84, demptâ primâ notâ, hoc eſt in 38, continetur novies. Scribe ergo 9 poſt lunulam. 9 in 4 facit 36. 9 in 9 facit 81. Hæc producta adde numeris collocatis, ut in hac formula. Summa 441 auferri nequit ex membro 3, 84. Rejectis igitur 9, ſubſtitue 8, & denuo multiplica. 8 in 4 facit 31. 8 in 8 facit 64. Summa eſt 384, quæ auferri poteſt.

7, 84	(298	
4	4	
3, 84		
3 84		
0		
	36	
	81	
	441	

6.

6. Quando diviſor in membro primâ notâ mulctato ne ſemel quidem continetur; ſcribatur cifra poſt lunulam, & membro illi nimis parvo membrum proximum adjiciatur.

Eſto radix eliciенda ex C. Ex membro primo 4 elicitur nota radicalis 1, cujus quadrato 4 ablato à membro 4 remanet	C 4, 15, 16.	(20
	4	4
	—	
	0, 15	
	15, 16	

0, cui adſcripto proximo membro 15, fit membrum novum 015, ſeu 15. In hoc primâ notâ 5 mulctato, nempe in 1, nota radicalis 2 duplicatâ, nempe 4, ne ſemel quidem continetur. Scribe igitur 0 poſt lunulam, & membro 15 nimis parvo adjice 16 membrum antecedens. Tum per omnia, ut priùs, operaberis, radicem videlicet hactenus acquiſitam 20 duplicabis, &c.

7. Quando membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, ſcribenda eſt unitas poſt lunulam, & ſubtrahenda ex membro.

CAP. II.

Radicis Quadratæ Demonſtratio.

NEminem hucuſque legi, qui extractionis radicum quadratæ, ac cubicæ demonſtrationem perſpicuam, & integram exhiberet. Appellant quidem ferè omnes prop.4. l. 2. Elem. Sed difficultas tota in applicatione conſiſtit, quam vel omittunt, vel tam imperfectè exequuntur, ut pleraque extractionis myſteria in tenebris relinquant. Res interim eſt ſcitu digna inprimis,quæque ſubtilitatis habeat non parum; ejuſmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc, & 4 capite allaturi ſumus, clarè intelligi poſſe exiſtimem.

PORISMA I.

NUllus quadratus numerus in principio cifras habet impares.

Demonſtratio.

RAdix quæcunque quadratum generans, vel cifras habet in principio, vel

vel non habet. Si habet, quemadmodum A, manifeſtum eſt, ut A ducatur in A, ſolas notas ſignificativas in invicem duci, & producto præponi cifras duplo plures, quàm ſint in A radice Ergo productum, hoc eſt (ut patet ex def. 28. l. 7.) ipſe quadratus B pares habet in principio cifras.

A 230
A 230
52900 B

Si non habet cifras in principio, (ut C,) tum ut C ducatur in C, debet prima nota (9,) quæ jam ponitur non cifra eſſe, ſed nota ſignificativa, duci in ſeipſam, ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota in primo loco producti D ſcribenda eſt. Atqui nullius notæ ſimplicis quadratum, primam notam habet cifram, ut patet ex tabella cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujuſvis radicis compoſitæ quadrato ſupponitur, nota prima erit cifra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cifras, aut ejus prima nota omnino cifra non eſt. Quod erat demonſtrandum.

C 439
C 439
192721 D

Corollarium.

SImili ratione ex ipſo opere multiplicationis manifeſtum eſt, nullius quadrati numeri primam notam eſſe 2, vel 3, vel 7, vel 8, ſed unam ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0. Nam prima cujuſvis quadrati nota prima eadem eſt cum alicujus quadrati ſimplicis nota prima, quæ neceſſariò eſt una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA II.

P	a	b	c
	56,	70,	09
	d		e
49		00,	00
			k
7		0	0
7,		0	0
f,			k

ESto numerus quicunque P, à dextra in ſiniſtram in membra, ſeu partes a, b, c *diſtinctus, commate poſt binas quaſque notas interpoſito. Aſſumatur autem quodlibet membrum, exem. gr. ultimum* a, *& quadratus in eo, ſimpliciter accepto, deliteſcens ſit* d, *ejuſque radix* f. *Dico, ſi ante* d *ponantur tot cifrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt; ante* f *radicem verò toties una cifra*: d, e *fore quadratum latentem*

tem in membro a, juxta valorem loci accepto, & radicem ejus eſſe f, k.

Demonſtratio.

CUm enim pro ſingulis membris ante *f* poſita ſit una cifra, ante *d* verò cifrarum binarius; manifeſtum eſt, cifras *e* eſſe duplo plures cifris *k*. Ergo *k*, *f* radix in ſe ducta faciet *d*, *e*; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus eſt *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypoteſi, & cifras *k*, *k* ſibi mutuo apponere, quæ conflabunt cifras *e*; cum duplæ ſint ipſarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus eſt, ejusque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæſitum.

Corollaria.

HInc patet 1, in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet 2, cur numerus, ex quo quadrata radix elicienda eſt, ſecetur in membra binis notis conſtantia; & cur poſtremum membrum poſſit unica eſſe nota, quæ quidem ex ſequentibus patebunt adhuc clariùs.

PORISMA III.

Quadratum binomii a † b, *sive numeri in duas partes secti, est* aa † 2ab † bb. *Hoc est quadratus ex* a, *& planus ex* a *in* b *bis sumptus, & quadratus ex* b.

Patet ex p. 4. l. 2. Id ipsum cernitur ex opere ipso multiplicationis speciosæ, cujus paradigma appono.

	a b	ab	
a†b	20†3	23	20.a
a†b	20†3		3. b
aa†ab	400†60		
†ab†bb	†60†9		

Sum. aa † 2 ab † bb. 400 † 120†9. Sum.

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficultatis; nam ut *a†b* ducatur in *a†b*, prima *a* multiplicans totum *a † b*, producit *aa†ab*. Deinde *†b* multiplicans idem totum *a † b*, producit *†ab †bb*. Hæc duo producta addita faciunt *aa † 2 ab † bb*. Quæ omnia per se manifesta sunt.

PO-

PORISMA IV.

ESto numerus Z, quotcunque conſtans partibus, ex. gr. tribus a † b † c. *Ejus quadratum eſt* aa † 2ab † bb † 2 ac † 2bc † cc ; *hoc eſt quadratum ex* a, *planus bis ex* a *in* b ; *quadratum ex* b ; *planus bis ex* a *cum* b *in* c ; *quadratum ex* c.

Demonſtratio.

PEr poriſ-	a b c	a. 200	a†b†c
ma præ-	2 3 5	b. 30	200†30†5
cedens, qua-	Z	c. 5	
dratum ex			

a † b † c æquatur quadrato ex *a † b* (per modum unius partis accepti,) & bis facto ex *a†b* in *c*, & quadrato ex *c*. Atqui quadratum ex *a†b*, per idem Poriſma, eſt quadratum ex *a*, unà cum bis facto ex *a* in *b*, unà cum quadrato ex *b*. Ergo quadratum ex *a†b†c* æquatur quadrato ex *a*, bis facto ex *a* in *b*, quadrato ex *b*, bis facto ex *a†b* in *c*, quadrato ex *c*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

QUadratum igitur numeri, in ſuas partes dirempti, componunt partium quadrati, & dicti plani.

PORISMA V.

QUadratus eſto quivis A, *ejuſque radix* B. *Sit autem quadratus* A *ſectus in membra, binis notis conſtantia, à dextra in ſiniſtram. Dico Radicem* B *tot conſtare notis, quot ſunt membra in quadrato* A.

A	B
56,70,09	(753
A	B
1,82,25,00	(1350

Demonſtratio.

PEr Poriſma 2, ejuſque coroll., quoniam in ſingulis membris dati A latet unus quadratus; patet tot eſſe membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia, per Poriſma 3 & 4, ejuſque coroll., in quadrato toto A ſingularum notarum radicalium quadrati continentur; tot etiam notas continebit radix

dix B, quot in A ſunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas, quot ſunt membra in A. Quod erat demonſtrandum.

PORISMA VI.

ESto numerus quadratus quicunque Z, *ejuſque radix quadrata* X. *Secetur autem* Z *in membra* h, g, f, e, *à dextra in ſiniſtram, poſt binas quaſque notas commate interpoſito.*

Z · e f g h { abcd
55,33,87,21 { 7439 X

a†b†c†d
e
55,00,00,00 a.700 7000†400†30†9
f b.400
6,33,00,00. c.30
g d.9
57,87,00
h
1338,21.

In ultimo membro *e* latet quadratus ſolus ultimi radicis ſegmenti *a*. In penultimo membro *f*, unà cum reſiduo 6 membro ultimi *e*, latet quadratus penultimi radicis ſegmenti *b*, unà cum bis facto ex *a* in *b*. In antepenultimo membro

Z · e f g h { abcd
55,33,87,21 { 7439 X

e
55,00,00,00
f
6,33,00,00.
g
57,87,00
h
1338,21.

a†b†c†d
a 700 7000†4c0†30†9
b.400
c.30
d.9

bro *g*, unà cum reſiduo 57 membri *f*, latet quadratus antepenultimi radicis ſegmenti *c*, unà cum bis facto ex *a*†*b* (hoc eſt ex *a*, & *b*) in *c*. In membro *h* unà cum reſiduo 1338 membri *g*, latet quadratus radicis ſegmenti *d*, unà cum bis facto ex *a* † *b* † *c* (hoc eſt ex *a* cum *b*, & *c*) in *d*. Et ſic deinceps, ſi plura ſint membra.

Demonſtratio.

CUm enim per Poriſ. 5. tot notis conſtet radix X, quot ſunt membra in Z, in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſ. 3, & 4, eiuſque coroll., lateat quadratus unius ſegmenti radicis; manifeſtum eſt, ſegmenti radicis ultimi *a*, ac proinde maximi quadratum contineri in

mem-

membro ultimo, adeoque & maximo *e*, & ſic deinceps. Ex quo etiam per eadem 3, & 4 Poriſ. patet de planis, ſive bis factis ex &c. Conſtat ergo quæſitum.

HIS PRÆMISSIS.

EOrum omnium, quæ ad radicis quadratæ extractionem præcedenti capite præſcripta ſunt, ratio dabitur. Reſumatur exemplum cap. præced., in quo ex numero A extracta eſt radix Z.

1. Quia per Poriſ. 6. in ultimo membro *e* latet quadratus ſegmenti radicis ultimi; idcirco elicitur ex membro *e* radix quadrata, quam poteſt maxima, reponiturque poſt lunulam; quadratus verò illius à membro *e* ſubtrahitur, & reſiduum ſcribitur infra lineam. Et quia per 6. Poriſ. in membro ultimo continetur quadratus ſolus ſegmenti, ſeu partis ultimæ radicis, in reliquis verò membris, præter quadratos partium radicalium, continentur etiam numeri rectanguli, ſeu plani; idcirco hæc operatio prima ſoli poſtremo membro convenit. Inſuper, quod ex membro *e* elicita ſit radix *a*, neglecto loci valore, nimirum ac ſi eſſet tantùm 56, cum revera ſit 56, 00, 00, id,

quemadmodum in aliis pleriſque operationibus arithmeticis, compendii gratiâ factum eſt.

A e f g { abc Z
56, 70, 09 { 753
49 . . . .
h 7, 70, . . a. 700 14. 00.m
7 25 . . b. 50

k 45, 09 c. 3
45, 09.

2. Quod verò interim nota radicalis *a*, ſic inventa, ſit legitima; ſic oſtendo. Cùm, per 5. Poriſ., radix tota Z tot conſtet notis, quot totus A membris, patet ante membrum *e* tot eſſe membra, quot ante *a* ſunt notæ. Quia igitur ſingula membra *f*, *g* duabus conſtant notis, tot ante *e* membrum præcedunt notarum, ſive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ, ſeu loca. Quare cum nota *a* ſimpliciter accepta, per conſtr., ſit radix quadrati latentis in membro *e* (56) ſimpliciter accepto, erit quoque per Poriſma 2. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æſtimato ex loci valore (nempe in 56, 00, 00.) Hoc ipſum eodem modo in reliquis

quis membris eodem prorsus modo demonstrabitur.

3. Ex membris penultimo, cæterisque, quotquot fuerint notæ radicales reliquæ, eliciuntur artificio à priori planè diverso. Ad illius rationem penitùs perspiciendam juvabit non parùm ob oculos ponere radicis binomiæ $a+b$ quadratum, quod per Porisma 4 est.

$$aa+2ab+bb.$$

Hujus postrema pars *aa* indicat, in ultimo membro *e* latere quadratum ultimi radicis segmenti, seu notæ *a*: reliquæ verò partes $2ab+bb$ indicant, quid contineatur in membro penultimo *f* cum prioris *e* residuo, aliisque singulis. Quia igitur in membro *f* cum residuo prioris, hoc est in *b* (7, 70, seu 770, 00) continetur $2ab+bb$, hoc est planus bis genitus ex ultimo radicis segmento, seu notâ *a* jam cognitâ, in *b* adhuc incognitam, unà cum quadrato ipsius *b*, ut patet ex lem. 6; manifestum est incognitam radicis notam *b* ex hoc membro *b* esse eliciendam; utique per divisionem, quæ sola resolvit, quid multiplicatio composuit. Cùm verò latera membrum *b* producentia sint *a*,

&

& *b*, in diviſorem illud erit aſſumendum quod cognitum jam eſt, nempe *a*, & quidem duplicatum, eo quod in membro *b* contineatur planus bis factus ex *a* in *b*, hoc eſt planus ex *a* bis ſumpto in *b*. Atque hæc cauſa eſt, cur ad conſtituendum diviſorem radix eatenus acquiſita duplicetur.

A. e f g { a b c Z
56,70,09 { 7 5 3
49 . . . .
—
h 7,70 . . a. 700
7 2 5 . . b. 50
——— c. 3
k 45,09
45,09 a † b † c
700 † 50 † 3

4. Per hunc autem diviſorem 2 *a* (14) dividitur non totum membrum *b* (7,70) ſed demptâ notâ primâ, nimirum 77 tantùm, hâc de causâ. Ut innoteſcat nota incognita *b*, ſolus planus 2*ab*, factus nimirum ex *a* bis in *b*, dividendus eſt; cum ad hoc nihil faciat *bb*, utpotè totus incognitus. Nihil autem plani 2 *a b* ad primum membri *b* locum pertinet, ut infrà demonſtrabitur num. 6.

5.

5. Reperta jam porrò per diviſionem nota incognita *b* multiplicat, & duplum notæ prioris *a*, ipſum nempe diviſorem 2*a* (14,) & ſeipſam, ut habeantur duo producta 2 *ab* + *bb* (70, & 25,) quæ in membro *b* continentur, & ab eodem idcirco ſubtrahuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, patebit ex clauſula totius demonſtrationis.

6. Cur autem producta ex multiplicatione ſcribantur, ut in appoſitâ formulâ, ratio eſt; quod 70, hoc eſt 2 *ab*, fiat ex diviſore 2*a* in *b*; & 25, hoc eſt *bb*, fiat ex *b* in *b*: unde cum *a* ſit nota radicis uno loco altior, quàm *b*, etiã producti (2 *ab*) 70 prima nota (ut patet ex Poriſ. 6. c. 3. l. 1.) uno loco altior erit, quàm prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque ſcribenda ſupra 2 ſecundam notam quadrati (*bb*) 25. Ex quo etiam manifeſtum fit, id quod ſupra aſſumptum fuit, videlicet nihil plani 2 *ab*, hoc eſt 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati (*bb*) 25 prima nota reponitur in primo loco ſummæ 725, plani verò (2 *ab*) 70 prima nota pertinet ad locum ſummæ ſecundum. Et quia ſumma 725 tot conſtat

70...
25..
———
725..

ſtat notis, quot membrum *b*, utpote per Poriſma 6. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt plani (2 *ab*) 70 primam notam pertinere ad locum membri *b*, ſecundum; ac proinde, cùm ſolus planus (2 *ab*) 70 dividendus ſit, membrum *b* demptâ primâ notâ dividitur.

Porrò valorem verum productorum exprimit hæc formula altera, quem inter operandum citra veritatis præjudicium diſſimulari, liquet ex demonſtratis ſupra.

70000	
2500	
72500	

7. At quare hæc operatio in aliis deinceps membris ſemper eadem repetitur? Ratio patet ex 6 Poriſmate. Quemadmodum enim in membro *b*, compoſito ex *f*, & reſiduo prioris, latet 2 *ab* + *bb*, hoc eſt planus bis ex nota radicali *a* in radicalem *b*, unà cum quadrato ipſius *b*; ita in membro *h*, compoſito ex *g*, & (45) prioris *f* reſiduo, latet 2*ac* + 2*bc* + *cc*, hoc eſt planus bis ex *a*+*b* radice eatenus acquiſitâ ductâ in *c*, & quadratum ipſius *c*: & ſic deinceps in reliquis membris, ſi quæ eſſent plura.

8. Poſtremò quæritur, quare, cùm membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro

pro radicali notâ
ſcribatur unitas. b
Eſto quadrarus A, 3, 96, 10 } 199. Z
cujus membrum A } 100.
ultimum eſt *b*, 3,
00, 00 ; radix autem ſit Z, cujus membrum ultimum ſit unitas. Quia radix Z tot habet notas, per Poriſm. 5, quot A membra ; habebit 1 ante ſe tot cifras, quot ante ultimum *b* ſunt membra. Sed quot ſunt membra ante *b*, tot ante notã 3 ſunt cifrarum binarii, ut habeatur ejus valor 3, 00, 00. Ergo, ut habeatur valor ultimæ notæ ipſius Z, quæ eſt 1, ante eam tot ponendæ ſunt cifræ, quot ante 3 cifrarum binarii ; ac proinde ante 3 ſunt cifræ duplo plures, quàm ante 1. Ergo quadratum ipſius unitatis, ex valore loci æſtimatæ, erit 1, cum tot cifris, quot ſunt ante 3. Ergo continetur in 3, 00, 00, ab eoque auferri debet. Ex quo patet quæſitum.

9. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis ſingulis partibus extractionis quadraticæ, demonſtratio tota ſic concluditur.

Numerus datus A æqualis eſt quadrato ex *a* ; plano ex *a* bis in *b* ; quadrato ex *b* ; plano ex *a*+*b* bis in *c* ; quadra-

drato ex *c*, ut patet ex toto opere extractionis, cùm dictæ quantitates ſubtractæ fuerint ex A, nec quidquam ſubtractione ultimâ peractâ ſuperfuerit. Atqui, per Poriſma 4, etiam quadratus radicis Z iiſdem æqualis eſt. Ergo A eſt ipſe quadratus radicis Z. Quod erat demonſtrandum.

e f g { a b c / 7 5 3 } Z
A, 46, 70, 09
a 7 0 0
5 0
c 3

Quod ſi ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuiſſet quidpiam, tunc numerus datus, illo reſiduo mulctatus, fuiſſet æqualis dictis quantitatibus; ac proinde & radicis inventæ quadratus.

CAP. III.

Radicis cubicæ extractio.

EXtrahenda ſit radix cubica ex numero A.

A 102, 503, 302 (4
64
—
38,

1. Poſt ternas quaſque notas, initio facto à dextris, comma aut punctum interpone: eritque numerus datus A ſectus

ctus in partes, seu membra, ternis notis constantia, præter ultimum, quod constare potest notis, vel
duabus, ut in C; vel 39, 820, 439. C
etiam unicâ, ut in D. 7, 900, 341. D
Tot verò notis constabit radix quæsita, quot erunt numeri dati membra, ut infra demonstrabitur.

2. Præsidio tabellæ hîc appositæ, quâ notarum simplicium cubi continentur, quære postremi membri radicem cubicam, aut si id cubus non est, quære radicem cubi proximè minoris.

Rad.	Qua.	Cubi.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Ut, quia hic postremum membrum 102 cubus non est, quære cubum proximè minorem 64. Hujus radicem 4 scribe post lunulam, quæ erit nota ultima radicis quæsitæ: cubum verò ipsum 64 aufer à postremo membro, & residuum 28 infra lineam repone. Hæc operatio soli postremo membro convenit, ac proinde in membris sequentibus non repetitur.

3.

3. Reſiduo 38 adſcribe membrum penultimum 503, ut fiat membrum totale novum 38, 503: pro quo diviſor ſic parabitur.

A
102, 503, 232 (46
64
—
38, 503
33, 336
———
5167,

Radicis hactenus acqiſitæ 4 quadratum 16 triplica: fit 48. Tum ipſam quoque radicem 4 hactenus acquiſitam triplica: fit 12. Producta adde, numeris collocatis, ut in hâc formulâ. Summa 492 erit diviſor.

Quære igitur, quoties diviſor 492 contineatur in membro 38, 503, dempâ primâ nota, hoc eſt in 3850. Reperies contineri ſexies. Scribe ergo 6 poſt lunulam, quæ erit nota penultima radicis quæſitæ.

48
12
—
492

Tum nota radicalis ultimò reperta 6, multiplicans primo radicis prioris 4 quadratum ter ſumptum, nempe 48, faciat 288. Deinde radicis ultimò repertæ quadratum 36, multiplicans triplum radicis prioris 4, nempe 12, faciat 432. Denique 6, ſeipſam cubicè multiplicans, faciat 216.

Hæc

Hæc tria producta adde, numeris collocatis, ut in hac formula. Summam 33336 aufer à membro 38, 503, & reſiduum 5167 infra lineam repone.

288
432
216
33336

4. Hæc operatio, toto jam numero tertio expoſita, in omnibus membris ſequentibus eodẽ modo, atque ordine repetitur.

Itaque reſiduo 5167 adſcribe membrum proximum 232, ut habeatur membrum novum totale 5167, 232. Radicis 46, hactenus acquiſitæ, quadratum 2116 triplica: fit 6348. Radicem quoque ipſam 46 triplica: fit 138. Hæc duo producta in unam ſummam colligе, numeris, ut in hac formula, collocatis. Summa eſt novus diviſor.

6348
138
63618

Quære igitur, quoties hic contineatur in novo membro 5167, 232, demptâ primâ notâ, nempe in 5167, 23. Reperies contineri octies. Scribe ergo 8 poſt lunulam. Erit hæc nota prima radicis quæſitæ. 8 in

A

102, 503, 232 (468
64
—
38, 503,
33 336
———
5167, 232
5167, 232.
———
0

6348, triplum nempe quadrati radicis prius acquiſitæ 46, facit 50784. quadratū ex 8, nimirum 64, in 138, triplum radicis prioris 46, facit 8832. 8 in 8 cubicè eſt 512. Hæc tria producta adde, numeris, ut in appoſita formula, ordinatis. Summam 5167232 aufer ex membro 5167232, & nihil reſtat.

50784
8832
512
5167232

Numerus ergo A cubus eſt, ejuſque radix 468. Quod ſi poſt ultimam ſubtractionem aliquid ſuperſit; numerus, qui proponitur, non erit cubus: fit autem cubus, ſi mulctetur reſiduo.

5. Quæ num. 5, 6, 7 cap. 1. notantur pro quadratæ radicis extractione, etiam in extractione radicis cubicæ erunt obſervanda.

CAP. IV.

Cubicæ radicis demonſtratio.

PRæmitto etiam hîc Poriſmata quædam, ex quibus theoria tota extractionis cubicæ fiet manifeſta.

PORISMA I.

CUbus numerus, aut nullas in principio habet cifras, aut ſi habeat, eas ternarius metitur.

Demonſtratio.

NAm radix quæcumque, cubum generans, vel habet in principio cifras unam aut plures, vel non habet.

Si non habet, tum ut A (ſic eam lubet vocare) multiplicetur cubicè, debet prima ejus nota in ſe duci cubicè, & cubi producti prima nota ſcribi infra lineam primo loco in producto quæſito, ſive cubo totius radicis A: ac proinde cujuſcunque cubi prima nota convenit cum prima nota alicujus cubi ſimplicis. Atqui nullius cubi ſimplicis prima nota eſt 0. Ergo &c.

239
A

Quod ſi radix in principio habeat cifras, quemadmodum B, ex ipſo multiplicationis opere manifeſtum eſt, ut B ducatur in ſe cubicè, tantùm opus eſſe, ut cubo notarum ſignificantium præponantur cifræ triplo plu-

B 580
C. 512000

res, quam ſint in principio radicis B. Ergo, &c.

Corollarium.

EX demonſtratis patet, cujusvis cubi primam notam convenire cum prima nota alicujus cubi ſimplicis.

PORISMA II.

ESto cubus quicumque a, *ejuſque radix cubica* c. *Cubo autem tot præponãtur cifrarum terniones* b, *quot cifræ* d *radici. Dico etiam totum* c, d *eſſe radicem cubicam totius* a, b.

a	b
64	1 000, 000
c	d
4	1 00

Demonſtratio.

UT habeatur cubus ex *c*, *d* tantùm opus eſt *c* multiplicare cubicè, & producto *a* præponere cifras triplo plures, quam ſint *d*. Atqui cifræ *b* ſunt triplo plures, per hypotheſim. Ergo *a*, *b* eſt cubus ex *c*, *d*.

Corollaria.

1. HInc patet, ſi numerus quivis ſit diviſus in membra, tribus notis conſtantia, dempto ultimo *a*, quod paucioribus conſtare poteſt;

a	e	k
64,	230,	789
a	b	
64,	1000,	000
c	d	
4	100	

& membri cujuſpiam puta *a*, ſimpliciter accepti, radix cubica ſit *c*: ſi ante radicem *c* ponantur tot cifræ *d*, quot ante *a* ſunt membra *e*, *k*, ſeu locorum terniones *b*; etiam *c*, *d* fore radicem cubicam ipſius *a*, *b*, ſeu membri *a* juxta loci valorem accepti.

2. Ex his manifeſtum eſt, in quolibet membro latere cubum, & talem quidem, qualem jam determinavimus.

3. Atque ex his jam incipit apparere, cur ad extrahendam radicem cubicam, poſt ternas quaſque notas comma interponatur, & cur non interſit, ſive membrum ultimum unicâ conſtet notâ, ſive duabus.

PORISMA III.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ ab \\ \hline a+b \\ \hline aaa+aab+abb+bbb \\ aab\ abb \\ aab\ abb \end{array}$$

hoc eſt : $aaa+3aab+3abb+bbb$.

CUbus binomii $a+b$ *hoc eſt lineæ, ſeu numeri in duas partes ſecti, eſt* $aaa+3aab+3abb+bbb$.

Hoc eſt, cubus binomii $a+b$ *æquatur cubo ex* a : *ſolido ter ſumpto, quod fit ex quadrato ipſius a ducto in* b : *ſolido ter ſumpto, quod fit ex quadrato ipſius* b *ducto in* a: *cubo ex* b.

De-

Demonſtratio.

PAtet ex ipſo actu multiplicationis cubicæ, cujus paradigma hîc apponitur, & per ſe eſt manifeſta.

Id ipſum demonſtratur in ſchemate hic adjuncto. Cubus enim *d l* rectæ *c d*, ſectæ in duas partes *a*, & *b*, complectitur cubos ſegmentorum *a*, & *b*, cubos nimirum *c e n o f q r p*, & *o s 3 m 2 5 1 u*: item tria parallelepipeda æqualia, quorum baſes ſunt quadrata *po*, *ro*, *eo* æqualia quadrato *rp* ſeu *aa*, altitudines verò *px*, *b*, ſeu *rd*, *ek*, quæ omnes ſunt æquales ipſi *b*: item tria parallelepipeda æqualia, quorum baſes ſunt quadrata 01, 02, 03, æqualia quadrato *7 y* ſeu *bb*, altitudines verò 57, 5*g*, 3*l*, æquales ipſi *a*.

Hæc quidem, utpotè vel mediocriter Elementa Geometriæ callentibus ſatis nota, non eſt neceſſe pluribus demonſtrare.

PORISMA IV.

ESto numerus Z diremptus in partes ſuas, quotcunque illæ fuerint, a†b†c. *Ejus cubus æquatur his quantitatibus:*

a b c
2 9 5
Z

a. 900
c 20
b. 5

a ✝ b ✝ c
900 ✝ 20 ✝ 5

cubo ex a : *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* a *in* b: *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* b *ducto in* a : *cubo ex* b (*omnes has quantitates vocabo* M.) *Item ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* a ✝ b *ducto in* c : *ſolido ter, genito ex quadrato ipſius* c *ducto in* a ✝ b : *cubo ex* c ; *quas quantitates poſteriores vocemus* N.

Demonſtratio.

SUmendo enim *a ✝ b* per modum unius, erit per Poriſm. 3. cubus ex *a ✝ b ✝ c* æqualis cubo ex *a ✝ b*, & quantitatibus N. Atqui per idem Poriſma cubus ex *a ✝ b* æquatur quantitatibus M. Ergo cubus ex *a ✝ b ✝ c* æquatur quantitatibus M, & quantitatibus N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

CUbum igitur numeri in ſuas partes ſecti componunt ſingularum partiũ cubi, & dicti ſolidi.

PO-

PORISMA V.

CUbus esto quicvis X, 102, 503, 232 (468 Z
X abc
ejusque radix Z. *Sit autem cubus* X *sectus in membra, post ternas notas à dextra in sinistram commate interjecto.* (a. 400 b. 60 c. 8

Dico radicem Z *tot constare notis, quot membra sunt cubi dati.*

Demonstratio.

QUoniam per coroll. 2. Porism. 2. in singulis membris latet unus cubus; tot erunt membra in X, quot cubi. Sed quia, per Porism. 4., ejusque coroll., in cubo X continentur cubi singularum radicis partium *a*, *b*, *c*; tot etiam erunt radicis partes, ac proinde & notæ, quot in X sunt cubi. Ergo radicis Z tot sunt notæ, quot membra cubi dati X. Quod erat demonstrandum.

PO-

PORISMA VI.

	f	k	m	abc	
X	102,	503,	232	(468 Z	
	f				a†b†c
	102,	000,	000		400†60†8
		k		a.400	
	38,	503,	000	b.60	
			m	c. 8	
		5167,	232		

Iſdem poſitis, dico: in membro ultimo f *latet cubus ſolus ultimi radicis ſegmenti* a.

In penultimo membro k, *unà cum* (38) *reſiduo membri* f, *latet ſolidus numerus ter, genitus ex quadrato ipſius* a *ducto in* b; *& ſolidus ter, genitus ex quadrato ipſius* b *ducto in* a; *& cubus ipſius* b.

In membro m, *unà cum* (5167) *reſiduo membri* k, *continetur ſolidus ex quadrato ipſius* a † b (*id eſt* a *cum* b) *ter, ducto in* c; *& ſolidus ex quadrato ipſius* c *ter, ducto in* a†b; *& cubus ipſius* c.

De-

Demonſtratio.

CUm enim per Poriſma 5. radix Z tot conſtet notis, adeoque & ſegmentis, quot ſunt membra in X; in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſ. 3, & 4, ejuſque corollario, lateat cubus alicujus ſegmenti radicis; manifeſtum eſt ſegmenti radicis ultimi *a*, adeoque & maximi, cubum latere in membro *f* ultimo, ac proinde maximo; & ſic deinceps. Ex quibus etiam, & per 3. ac 4. Poriſ. patet de ſolidis. Conſtat erho quæſitum.

HIS PRÆMISSIS.

JAm ratio dabitur eorum omnium, quæ ſuperiori capite ad extrahendam radicem cubicam fuere præſcipta.

1. Reſumatur exemplum cap. præced. Quia per 6. Poriſma in poſtremo *f* membro nihil continetur aliud, quàm cubus ſegmenti radicis ultimi, idcircò ex membro *f* elicitur radix cubica quàm poteſt maxima *g*, eaque poſt lunulam re-

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	(468. Z
	64	...	...	
n	38,	503	...	a. 400
	33	336	...	b. 60
				c. 8
p	5167,	232		
	5167.	232		
			o	a†b†c
				400†60†8

reponitur, radicis quæsitæ futurra postremum segmentum, seu nota ultima: cubus verò ejus subtrahitur à membro *f*, residuo (38,) si quod sit, infra lineam notato. Quia autem in reliquis membris omnibus, præter cubos reliquorum segmentorum radicis, continentur in singulis præterea sex solidi; idcirco hæc operatio soli postremo membro convenit, & in seqnentibs membris non repetitur.

2. Quod verò nota radicalis *a* sit legitima, licet extracta sit ex membro *f* simpliciter accepto, hoc est loci valore dissimulato; sic ostendo. Tota radix Z tot constat notis, quot X numerus datus mem-

membris, per Poriſm. 5. Quare cum ſingula membra *k*, *m* tres contineant notas, ante *a* erunt tot notæ, ſeu loca, quot ante *f* locorum terniones. Ergo cum per conſtruct. *a*, nota ſimpliciter accepta, ſit radix cubi, latentis in membro *f*, ſimpliter accepto; *a* quoque, ex loco æſtimata; erit per 2. Poriſm. radix cubi latentis in membro *f*, ex loci valore æſtimato. Hæc demonſtratio etiam valet in reliquis membris, in quibus compendii gratiâ, quemadmodum in pleriſque arithmeticis operationibus, loci valor diſſimulatur, nullo (ut jam oſtendi) præjudicio veritatis.

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	(468. Z
	64	...	...	
n	38,	503	...	a. 400
	33	336	...	b. 60
p	5167,	232		c. 8
	5167,	232		
			o	a†b†c
				400†60†8

3. Reliquæ radicis notæ artificio inter ſe uno quidem, ſed à priori penitùs diverſo, reperiuntur. Illius rationi aperien-

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	(468. Z
	64	...	...	
n	38,	503	...	a. 400
	33	336	...	b. 60
p	5167,	232		c. 8
	5167,	232		
			o	a+b+c
				400+60+8

riendæ plurimùm conducet, cubum binomii $a+b$ ante oculos proponere, qui per Porifm. 3. eſt.

$$aaa + 3\,aab + 3\,abb + bbb.$$

Hujus poſtrema pars *aaa* oſtendit, in ultimo membro *f* latere ſolum cubum notæ ultimæ radicis: reliquæ partes oſtendunt, quid contineatur in membro penultimo *n* (conſtante ex 38, reſiduo membri *f*, & *k*,) de quo jam agitur, ac in reliquis deinceps omnibus. Quia igitur, ut patet & ex formula hac, & ex 6. Poriſmate, in membro *n* continentur ſolidus ter, genitus ex quadrato notæ radicalis jam repertæ *a*, ducto in *b* adhuc

hac incognitam; item ſolidus ter, factus ex quadrato ejuſdem *b* in *a*; item cubus ejuſdem *b*: manifeſtum eſt notam illam penultimam, ſeu ſegmentum *b* radicis adhuc incognitum, eliciendum eſſe ex membro *n* dati numeri penultimo; utique per diviſionem, quæ ſola reſolvit, quod compoſuit multiplicatio.

Quia verò latera, membrum *n* producentia, partim cognita ſunt, partim incognita; ad conſtitutionem diviſoris aſſumenda erunt ſola cognita, nimirum $3aa$, & $3a$, hoc eſt triplum quadrati notæ radicalis jam inventæ *a*, nempe 48, & triplum ejuſdem *a* nempe 12; quæ in unam ſummam collecta dant diviſorem 492.

4. Per hunc autem, ut eruatur nota radicis latens *b*, dividatur non totum membrum *n* (38, 503,) ſed demptâ notâ primâ, nimirum 38, 50 hac de cauſa. Quoniam diviſor 492 conſtans ex $3aa + 3a$, nullo modo pertinet ad cubum *bbb*, utpote qui producatur ex ſolâ notâ incognita *b*; patet per hunc dividi oportere tantùm ſolidos ($3aab + 3abb$) ſupradictos. Nihil autem ex hiſce ſolidis ad notã, ſeu locum membri *n* primum pertinet, ad quem

48.
12

492

quem ſe extendit cubus genitus ex *b*, quemadmodum ex iis apparebit, quæ mox ſubjungam, num. 7.

5. Reperta porrò per diviſionem nota radicalis *b* ducitur in triplum quadrati ex *a*, & quadratum ipſius *b* ducitur in triplum ipſius *a*, ac demum *b* in ſe ducitur cubicè, ut habeantur tria producta (3*aab*+3*abb*+*bbb*,) quæ in membro *n*, per Por. 6, continentur, atque idcircò ab eodem auferuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, liquebit ex clauſulâ totius demonſtrationis.

3 aa	48	
3 a.	12	
	492	

6. Cur autem 3*aa*+3*a* hoc eſt triplum quadrati ipſius *a*, & triplum ipſius *a*, quæ diviſorem conſtituunt, ordinari debeant juxta hanc formulam: Item cur tria producta 3*aab*+3*abb*+*bbb*, hoc eſt ſolidus ex triplo quadrati notæ radicalis *a* ducto in notam radicalem *b*, unà cum ſolido ex triplo *a* in quadratum ipſius *b*, unà cum cubo ipſius *b*, ſcribantur juxta formulam hanc alteram; reſtat nunc, ut breviter demonſtremus. Et quidē quod attinet ad partes diviſoris 3*aa*+3*a*.

288.	3 aab
432.	3 abb
216	bbb
33336	

ma-

manifeſtum eſt quadratum ipſius *a* uno loco, ſeu gradu attolli altius, quàm *a*; ideoque 8, prima nota ipſius 3*aa*, 48, ponenda ſupra 1, ſecundam notam tripli ipſius *a*, id eſt 12. Quod attinet ad tria producta; quia 3*abb* fit ex 3*a* in *bb*, & cubus *bbb* fit ex *b* in *bb*, eſtque *a* nota radicis uno loco altior, quàm *b*; manifeſtum eſt ex Poriſm. 6. c. 2. l. 1. ſolidi 3*abb*, hoc eſt 432, primam notam 2 etiam uno loco altiorem eſſe primâ notâ cubi *bbb*, 216; ideoque ſcribendam ſupra 1, notam ſecundam cubi *bbb*, 216. Rurſum, quia ſolidus 3*aab* fit ex 3*a* in *ab*, ſolidus autem 3*abb* fit ex 3*a* in *bb* (gignitur enim tam 3*aab*, quàm 3*abb* ex lateribus quocunque inter ſe ordine multiplicatis, ut demonſtravi in ſcholio 18. l. 8.) eſtque *a* nota radicis uno loco altior, quàm *b*; manifeſtum eſt ſolidi 3*aab*, hoc eſt 288 primam notam 8 uno quoque loco altiorem eſſe primâ notâ ſolidi 3*abb*, hoc eſt 432; ideoque ſcribendam ſupra ſolidi 432 notam ſecundam 3. Atque hæc dictæ collocationis eſt ratio adæquata.

7. Ex qua etiam cernitur, quod ſupra n. 4 aſſumptum fuit, nihil ex ſolidis 3*aab*, & 3*abb* pertinere ad notam primam

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	(468 Z
	64,	5 . .	. . .	
n	38,	503	. . .	a. 400
	33	336	. . .	b. 60
				c. 8
p	5167,	232		
	5167,	232		
				a ✝ b ✝ c
			o	900✝60✝8

membri *n*. Nam si tria illa producta sic collocata addantur, patet cubi 216 primam notam 6 reponi in primo loco summæ 33336, solidos verò 3*abb*, & 3*aab*, hoc est 432, & 288 totaliter pertinere ad loca summæ sequentia. Et quia trium productorum summa 33336 æquè multis constat notis, ac membrum *n*, utpote per Porisma 6 in eo latens, adeòque ab illo subtrahenda; manifestum est, nihil quoque ex solidis 3*aab*, & 3*abb* contineri in primo membri loco; ac proinde cum dicti solidi soli sint dividendi, ut ostendi num. 3, dividitur membrum *n* demptâ notâ primâ.

Porrò trium productorum valorem ve-

verum exprimit hæc formula, quem in operando diſſimulatum eſſe ſine veritatis præjudicio, liquet ex ſupra demonſtratis n. 2.

28800, 000	
4320, 000	
216, 000	
33336, 000	

8. Reliquum eſt, ut dicamus, cur ex membris cæteris eodem prorſus modo oliciantur radicales notæ reliquæ, quo ex penultimo. Cauſa eſt manifeſta ex Poriſ. 6. Quemadmodum enim in membro penultimo *n*, compoſito ex (38) reſiduo membri *f*, & ex *k*, continebantur $3aab + 3abb + bbb$; hoc eſt ſolidus ex quadrato radicalis notæ *a* ducto ter in radicalem *b*, & ſolidus ex radicali *a* ter ductâ in quadratum radicalis *b*, & cubus ipſius *b*: ita in membro *p*, quod componitur ex (5167) reſiduo membri *n*, & ex *m*, continentur ſolidus ex quadrato radicis eouſque acquiſitæ $a + b$ (hoc eſt *a* cum *b*) ter ducto in radicalem *c*, unà cum ſolido ex $a + b$ ter ducto in quadratum ipſius *c*, unà cum cubo ipſius *c*, quæ quantitates, ſi $a + b$ brevitatis causâ interpretemur per *d*, exprimuntur hâc formulâ, $3ddc + 3dcc + ccc$, quæ formula per omnia ſimilis eſt priori $3aab + 3abb + bbb$.

9. Poſtremò quæritur, quare cum

membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro radicali nota ſcribenda ſit unitas.

Eſto cubus G, ejuſque radix L. Quoniam per Poriſ. 5. 1 in radice L tot ante ſe habet notas, ſeu loca, quot ante 3 ultimum membrū cubi dati antecedunt membra; manifeſtum eſt hujus valorem eſſe 3, 000, 000, illius verò 100, ſic, ut 1 ante ſe tot habeat cifras, quot 3 cifrarum terniones. Atqui cubus numeri 100, nempe 1000,000, tot etiam ante 1 habet cifrarum terniones, quot in radice 100 ſunt cifræ, ut patet ex actu ipſo multiplicationis. Ergo etiam cubus radicis 100 tot habet cifras, quot membrum 3, 000, 000. Ergo cubus ipſius 100, nempe 1, 000,000, latet in membro 3, 000, 000; ac proinde 1 eſt vera radicalis nota, quæ ex ultimo membro 3 erat elicienda.

G3, 307: 949

(149 L

10. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis omnibus, quæ ad extrahendam è numero dato radicem cubicam fuere præcepta, demonſtratio tota ſic concluditur.

Numerus datus X, ut patet ex toto opere extractionis, æqualis eſt cubo ex

a, ſo-

a, ſolido ter ex		abc
quadrato ipſius	102, 503, 232.	(468 Z
a in *b*, ſolido	X	
ter ex *a* in qua-		a. 400
drat. ex *b*, cubo		6. 60
ex *b*. Item ſo-		c. 8

lido ter ex quadrato ipſius $a + b$ in c, ſolido ter ex $a + b$ in quad. ipſius c, cubo ex c. Quæ quantitates, $a + b$ interpretando per d, ſpecioſè ſic exprimuntur.

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb + 3ddc + 3dcc + ccc$$

At iiſdem quantitatibus per Poriſ. 4. æquatur cubus radicis Z, ſeu $a + b + c$. Ergo X eſt ipſe cubus radicis Z, ſive $a + b + c$. Quod erat demonſtrandum.

Eſt autem numerus datus X æqualis quantitatibus ſupradictis, quia illæ omnes ab eo fuere ſubtractæ, nec quidquam ultimâ ſubtractione peractâ ſuperfuit. Quod ſi aliquid ſuperfuiſſet, tunc numerus datus, illo reſiduo mulctatus, fuiſſet æqualis quantitatibus dictis; ac proinde & cubus radicis inventæ.

CAP. V.

Cujuſcumque radicis extractio.

QUadratam, & cubicam cæteræ omnis generis radices quadam proportione imitantur. Quemadmodum enim, ut ex cap. 2. & 4 patuit, harum extractio ex generatione quadrati, ac cubi à radice binomia derivata eſt; ita & reliquarum quæque ex geneſi poteſtatis ſuæ derivabitur Itaque generale artificium radicis, è poteſtate data eliciendæ, exhibent formulæ poteſtatum, à radice binomiâ genitarum.

	0. Unitas.
Radix.	1. $a + b$.
Quad.	2. $aa + 2ab + bb$.
Cubus.	3. $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.
Quadquad.	4. $aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.
Superſol.	5. $aaaaa + 5aaaab + 10aaabb + 10aabbb + 5abbbb + bbbbb$.
Quad.cub.	6. $aaaaaa + 6aaaaab + 15aaaabb + 20aaabbb + 15aabbbb + 6abbbbb + bbbbbb$.
Superſol.2.7.	$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Ra-

Radix $a+b$ in ſe ducta gignit quadratum: hoc in radicem facit cubum: cubus in radicem facit quadratoquadratum: & ſic deinceps, poteſtate quâvis in radicem ductâ, gignitur proximè altior. Poteſtates porrò, ut liquet ex propoſitione 8. l. 9. ejuſque ſcholio, ſunt termini progreſſionis geometricæ, ab unitate incipientis, in qua quorum unaquæque poteſtas locum occupet, & quot habeat unaquæque dimenſiones, indicant numeri ſingulis appoſiti, qui eâ de cauſa exponentes appellantur. In poſtrema formula brevitatis cauſa $a\ 7$ ſignificat $aaaaaaa$: &c.

Reliquum eſt, ut quâ ratione, per formulas jam dictas, cujusvis generis radicum extractiones dirigantur, exponamus.

Numerus datus, ex quo radix extrahenda eſt, à dextra in ſiniſtram dividatur in membra, tot notis conſtantia, quot indicantur ab exponente poteſtatis, radicem extrahendam denominantis, præter membrum ultimum, quod conſtare poteſt paucioribus. Quoniam igitur quadratus duas, cubus tres habet dimenſiones; in hoc poſt ternas, in illo poſt binas quaſque notas comma interponitur.

Quod ſi numerus datus minor ſit, quàm ut ſic in membra dividi poſſit, quid tum facto ſit opus, & qui radix data ex eo elicienda, dicetur cap. 7.

Tum formula poteſtatis, radicem quæſitam denominantis, inſpicienda. Hujus poſtremum nomen, ſive particula continet operationem, poſtremo membro debitam: per reliquas omnes, membri penultimi, ac cæterorum extractio dirigitur. Quoniam igitur in poſtrema particula continetur ſola radicis quæſitæ poteſtas pura; elicienda erit ex membro ultimo numeri dati radix ejus generis, cujus petitur, quàm poterit maxima, præſidio tabellæ, continentis poteſtates ſimpliciuin numerorum 2, 3, 4 &c., quam eum in finem oportebit conficere. Reliquis deinde, ut cap. 1, & 3 num. 2 præſcribitur, expletis, abſoluta eſt operatio poſtremi membri.

In operatione membri penultimi, quæ & omnibus reliquis communis eſt, duæ ſunt partes præcipuæ; prima inventio diviſoris, per quem nova radicalis nota debet innoteſcere; ſecunda, quo modo nova nota radicalis, diviſoris operâ inventa, multiplicari debeat, ut habeantur producta, quæ à membro auferantur

tur

tur. Utrumque formulæ poteſtatum pulcherrimè exhibent, litterarum *a*, & *b* variâ conjunctione. Et *a* quidem ſignificat quidquid ex radice eatenus acquiſitum eſt, ac cognitum; *b* verò notam radicis deſignat adhuc incognitam, & proximè inveniendam. Inventionem diviſoris indicant particulæ mediæ per litteras *a*, hoc eſt per id, quod in iis cognitum jam eſt: medias autem particulas voco omnes, demptâ primâ, & ultimâ. Multiplicationis modum præſcribunt particulæ omnes demptâ ultimâ, quam ſupra jam dixi ſoli primo membro inſervire.

Itaque, quoniam in particula media formulæ quadrati habetur $2a$; radix, eatenus inventa, duplicata dabit diviſorem. Rurſum, quoniam in eadem formula, demptâ ultimâ particulâ, habentur $2ab + bb$; oportebit diviſorem, hoc eſt $2a$, ducere in *b* notam radicalem proximè inventam, & ipſam *b* in ſe ipſam.

Pari modo quia in particulis mediis formulæ cubi habentur $3aa + 3a$; quadratum radicis eatenus inventæ triplicatum, & ipſa radix triplicata dabunt diviſorem, ſed ea ratione diſpoſitæ, ut præſcribitur num. 3. cap. 3. Rurſum, quoniam in formu-

mula cubi, demptâ particulâ ultimâ, habentur $3aab + 3abb + bbb$; oportebit propter $3aab$, triplum quadrati radicis eatenus inventæ ducere in notam, jam proximè inventam b; & propter $3abb$, triplum ipsius radicis in quadratum ipsius b; & propter bbb, ducenda erit b cubicè in se ipsam.

Sed placet hujus methodi generalis exemplum dare in radice superſolidâ primâ, cujus nimirum potestas est dimensionum 5. Oporteat igitur radicem superſolidam primam extrahere ex numero X.

	d	c	a b	
X	4591,	65024	(54	
	3125		B	
	f 1466,	65024		
	1466	65024		
		o		

1. Quoniam hujus radicis potestas est 5 dimensionum; post quinque notas ponatur comma; eritque numerus X sectus in duo membra d, & c; ac totidem notis constabit radix.

2. Inspiciatur formula superſolidi. Quoniam ultima ejus particula est $aaaaa$, oportet ex ultimo membro d elicere radi-

$$\begin{array}{cccc} 6 & 5 & 4 & 3 \\ aaaaa \dagger 5aaaab \dagger 10aaabb \dagger 10aabbb & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \dagger 5abbbb \dagger bbbbb. & \end{array}$$

dicem ſuperſolidam. Præſidio igitur tabellæ, ad eum finem conſtruendæ, ut ſimplicium Superſolidi contineantur, quæratur ſuperſolidus ipſi membro *d* par, aut proximè minor. Is eſt 3125, ejuſque radix 5, quam ſcribe poſt lunulam; poteſtatem verò 3125 aufer à membro *d*, reſiduo 1466 infra lineam notato. Hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit. Formula ſuperſolidi.

3. Reſiduo 1466 adſcribe membrum *c*, ut ex utroque fiat membrum novum totale *f*. Jam dictum ſupra, medias particulas, (quæ hîc ſunt, ſecunda, tertia, quarta, quinta,) dirigere per litteras *a* diviſoris inventionem. Quoniam igitur in quinta reperis 5*aaaa*, radicis hactenus inventæ, quam deſignat *a*, biquadratus erit quintuplicandus, ut fiat *g*. Et quia in quarta habetur 10*aaa*, oportebit cubum ipſius *a* decuplare, ut fiat *h*. Rurſus, quia in tertia particula reperio 10*aa*, de-

3125.	g
1250.	h
250.	k
25.	m
3252525.	n

decuplandus erit quadratus ipſius *a*, ut fiat *k*. Tandem, quia in ſecunda habetur 5*a*, quintuplicanda erit *a*, ut fiat *m*. Hi quatuor numeri, notis, ut hîc adiecta declarat formula, diſpoſitis, in unam ſummam collecti, dabunt *n* diviſorem, per quem tentanda eſt diviſio membri *f*, ut innoteſcat proxima radicis nota (4) incognita, deſignata per *b*.

3125.	g
1250.	h
250.	k
25.	m
3252525.	n

4. Reliquum eſt, ut multiplicatio ad extractionem requiſita, inſtituatur. Eam verò dirigi à tota formula, demptâ particulâ ultimâ, quæ hîc ſexta, jam dictum ſupra. Quoniam igitur particula quinta eſt 5*aaaab*, *g* quintuplũ biquadrati radicis prius acquiſitæ *a* (5) ducendum eſt in *b*(4)notam radicalem paulò ante incognitam, & jam proximè inventam, ut fiat *p*. Deinde, quia particula quarta eſt 10*aaabb*, oportebit (*b*) decuplum cubi ex *a* (5) ducere in quadratum ex *b* (4,) ut fiat *q*. Rurſum, quia particula tertia eſt 10*aabbb*,

1250	0. p
2000	0. q
1600	0. r
640	0. s
102	4. t
14666502	4. z

de-

decuplum quadrati ex *a* (5,) nempe *k*, ducendum erit in cubum ex *b* (4,) ut fiat *r*. Jam quia particula ſecunda eſt *5a bbbb*, quintuplum ipſius *a* (5) ducendum erit in biquadratum ex *b* (4,) ut fiat *s*. Denique, quia prima particula eſt *bbbbb*, oportebit *b* (4) ad ſurdeſolidum multiplicando evehere, ut fiat *t*.

Hæc 5 producta, numeris, ut in adjecta formula, collocatis, in unam colligantur ſummam *z*, quæ à membro *f* ſubducatur.

Eodem prorſus modo, ſi plura eſſent membra, ex illis, eâdem formulâ dirimembra, ex illis, eâdem formulâ dirigente, notæ radicales reliquæ elicerentur, litterâ *a* ſemper deſignante totam radicem eatenus acquiſitam, (quæ hic jam eſſet 54,) *b* verò ſignante notam radicis incognitam, proximè inveniendam. Atque ita educta eſt radix ſurdeſolida prima B ex numero dato X, qui, quod poſt ultimam ſubtractionem nihil ſuperfuerit, verè eſt ſuperſolidus, ſive ſurdeſolidus primus.

Aliæ radices quæcunque, per formulas unicuique poteſtati proprias ſimili planè artificio extrahentur.

Demonſtratio.

PORRÒ horum omnium facilis eſt ex iis, quæ cap. 2. & 4 in radicis quadratæ, ac cubicæ demõſtrationibus dicta sũt.

Cæterùm, quamvis methodus jam tradita ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, convenit tamen potiſſimum ſuperſolidis. In reliquis eſt alia quædam via facilior. Cùm enim in qualibet ſerie numerorum continuè proportionalium, omnes termini (hoc eſt omnes poteſtates) ſint vel ſuperſolidi, vel quadrati, vel cubi ſimul, & quadrati, ut demonſtravi in ſch. prop. 8. l. 9: manifeſtum eſt ex qualibet poteſtate non ſuperſolida radicem ipſi propriam elici poſſe extractione radicis quadratæ, aut cubicæ, aut utriuſque ſæpius repetitâ. Quod ita fiet.

Ex ſcholio noſtro poſt p. 8. l. 9. cognoſce, an poteſtas radicis extrahendæ ſit quadratus ſimul, & cubus; an quadratus, vel cubus tantùm. Si eſt quadratus ſimul & cubus, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari; & toties

ties cubicam, quoties reſiduum, & reſidui pars terria, & ſic deinceps poterit triſecari. Detur extrahenda ex A numero R 18), id eſt radix poteſtatis, cujus exponens 18. A (B
Quoniam 18 poteſt biſecari, (C
extrahe ex A radicem quadra- (D
tam B. Et quia reſiduum 9
non poteſt biſecari, ſed triſecari; ex radice B extrahe radicem cubicam C. Rurſum, quia reſidui tertia pars 3 poteſt triſecari, ex radice C extrahe rurſus radicem cubicam D. Erit D, R 18), ex dato numero A extracta. Oporteat deinde ex numero A extrahere R 6) hoc eſt radicem, cujus poteſtas exponentem habet 6.
Quoniam 6 poteſt biſecari,
ex A elice radicem quadra- A { F
tam F: & quia reſiduum 3 { G
non poteſt biſecari, ſed triſecari; ex F elice radicem cubicam G. Erit hæc R 6), ex dato numero extracta.

Si poteſtas radicis extrahendæ eſt cubus tantùm, toties extrahenda eſt radix cubica, quoties exponens, & ejus tertia pars, & tertia tertiæ, & ſic deinceps poteſt triſecari: ut ſi ex numero A extrahenda ſit R 27), quia 27 poteſt

tri-

triſecari, ex A extrahe R 3) H: & quia ipſius 27 tertia pars 9 poteſt triſecari, ex H extrahe R 3) I; & quia ipſius 9 tertia pars 3 poteſt triſecari, ex I elice R 3) K. Erit K, R 27), ex dato numero A extracta.

A H I K

Si poteſtas radicis quæſitæ ſit quadratus tantùm, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidi dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari: ut ſi oporteat ex dato numero A extrahere R 8,) quia exponens 8 poteſt biſecari, ex A extrahe R 2) M; & quia dimidium 4 poteſt biſecari, ex M extrahe R 2) N; rurſum quia dimidium 2 poteſt biſecari, ex N elice R 2) O. Erit O, R 8), quæ ex numero dato quærebatur.

A M N O

Horum omnium demonſtratio patet ex ſcholio p. 8. l. 9.

CAP.

CAP. VI.

Extractio quarumlibet radicum è quibuscumque fractis.

FRactorum alii communes sunt; alii, quos decimales libro secundo cap. 9, & seq. appellavimus. Radices ex utrisque hoc capite eliciemus.

Ex Fractis communibus radix quæcumque.

OPus totum unicâ præceptione continetur. Ex numeratore, & denominatore fractionis datæ radices extrahantur, quales expetuntur. Fractio ex his composita erit radix quæsita fractionis datæ.

a	c
9604	98
39601	199
b	d

Ut si ex fractione data *a*, *b* petatur radix quadrata, vel alia quævis; ex numeratore *a* eliciatur radix *c* speciei datæ; item ex nominatore, quæ sit *d*. Fractio *c*, *d* erit radix quæsita fractionis datæ *a*, *b*.

Demonſtratio eſt manifeſta, quia ex vi conſtructionis fractio *c*, *d* juxta exigentiam radicis datæ multiplicata producet fractum *a*, *b*.

Ex Fractis decimalibus Radix quadrata.

SI decimalis dati maximum ſignum eſt par, ut fit in A; extrahe ex A, tanquam purè integro, radicem, cujus primam notam affice ſigni maximi dimidio. Erit hæc (nempe B) radix quæſita.

I II I
A 2401 (49 B
C 2401, 49 d
k 100. 10. f

Si ſignum maximum eſt impar, ut in C, adjectâ cifrâ fiat par, ut in D. Tum ex D eliciatur radix E, ut ſupra. Erit hæc radix quadrati C.

I II III
C 2025

I II III IV I II
D 20250 (142 E

III IV
8 6

Ad

Ad demonſtrationem eſto lemma: ſi à numero G, qui conſtet unitate, & cifris paribus, auferatur ſemiſſis cifrarum, ut in K; erit K radix quadrata numeri G. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio l. 1. c. 7., habetur quadratus ex K, ſi cifræ ejus duplentur. Sed ex vi conſtructionis, tunc K fit G. Ergo G eſt quadratus ex K. Hoc poſito.

G	10000
K	100

Demonſtratur Pars 1.

FRactus *c*, *k*, cujus numerator *c* iiſdem conſtat notis, quibus A, nominator verò *k* tot cifris, quot indicantur à ſigno maximo ipſius A, æquatur ipſi A, per theorema 2. cap. 10. l. 2. Atqui, ut ex fracto *c*, *k* extrahatur radix quadrata, tantùm opus eſt ex numeratore *c*, hoc eſt ex dato A, tanquam integro, elicere radicem quadratam *d*, & ex nominatore *k* radicem *f*; elicitur verò ex *k* radix quadrata, (ut patet ex lem.,) ſi dimidietur cifrarum numerus; hoc eſt ſi dentur ipſi *f* tot cifræ, quot indicantur à ſemiſſe maximi ſigni ipſius A. Ergo etiam, ut ex A extrahatur radix, ſolùm opus eſt ex A, tanquam integro, elicere radicem *d*, eique

ſubſcribere nominatorem *f*, qui conſtet unitate, & tot cifris, quot indicat ſemiſſis maximi ſigni ipſius A, ut habeatur fractus *d*, *f*. Atqui fractus *d*, *f*, per theor. 2. c. 10. l. 2., eſt æqualis B; cum *d* ex vi conſtructionis iiſdem conſtet notis, quibus B; & *f* tot habeat cifras, quot indicantur à ſemiſſe maximi ſigni ipſius A; hoc eſt, per conſtruct., quot indicantur à ſigno maximo ipſius B. Ergo etiam B eſt radix quadrata dati A. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur Pars 2.

PEr axioma cap. 10. l. 2. D eſt æqualis C. Atqui per 1 partem E eſt radix quadrata ex D. Ergo E etiam eſt radix quadrata ex C. Quod erat demoſtrandum.

Ex fractis decimalibus radix cubica.

SI maximum ſignum decimalis dati triſecari poſſit, ut in A contingit; ex A, tanquam purè integro,

	I II III	I
A	97336	(46 B.
	97336 a	46 c
	1000 b	10 d

ra-

radicem extrahe cubicam, cujus primam notam affice signi maximi triente. Erit hæc (nempe B) radix cubica ex A.

		I	II	III	IV					
C	9	7	3	3	6					
		I	II	III	IV	V	VI		I	II
D	9	7	3	3	6	0	0		(21	3 F
		II	III	IV	V	VI				
		7	0	0	0	3				

Si maximum signum trisecari nequeat, (ut accidit in C,) adjice unam, vel duas cifras, ut possit (quemadmodum vides in D.) Tum ex D elice radicem cubicam F, ut supra.

Ad demonstrationem esto lemma: si detur numerus G constans unitate & cifris, quas metitur ternarius; (K) unitas, cum cifrarum triente, erit radix cubica ipsius D. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio, habetur cubus ex K, si ipsius cifræ triplentur. Sed tunc ex vi constr. fit G. Ergo G est cubus ex K.

1000000 G
100
K

Hoc posito, demonstratio planè similis erit præcedenti.

Ex fractis decimalibus radix quæcumque.

EX numero dato, tanquam purè integro, extrahe radicem datam. Tum maximum ſignum dati numeri divide per exponentem radicis datæ. Quotiens dabit ſignum, quo afficienda eſt nota prima radicis inventæ. Si maximum ſignum per exponentem radicis datæ dividi non poſſit, adjice tot cifras decimales, ut poſſit; & operare, ut ſupra.

Exemplum.

I II III IV V I
F 4 5 9 1 6 5 0 2 4 (54 H

I II III IV V VI VII VIII IX X I II
F 1 0 9 9 5 1 1 6 2 7 7 7 6(256H

OPorteat, ex numero F extrahere R 5), hoc eſt ſuperſolidam primam. Ex F, tanquam integro, elice R 5). Tum per 5, exponentem radicis datæ, divide maximum ſignum dati F, quod in primo exemplo eſt v, ſeu 5, in ſecundo eſt x, ſeu 10. Quotiens, qui eſt 1. in primo; 2 in ſe-

ſecundo, dat ſignum, quo afficienda eſt prima nota radicis inventæ; eritque H radix ſuperſolida dati F.

Demonſtratio eadem prorſus, quæ ſupra, præmiſſo hoc lemmate. Datus ſit numerus C, conſtans unitate, & cifris, quas numerus D metiatur per numerum E. Erit numerus F, conſtans unitate, & cifris à quotiente E indicatis, radix dati numeri C, à diviſore D denominata.

C 100000, 00000

R 5) R 2)

D E

100

F

Nam, cum D metiatur cifras dati C per E; D in E ductus producet cifras dati C. Ergo per 16. l. 7. etiam E in D producet C. Atqui per conſtruct. E eſt numerus cifrarum ipſius F. Ergo cifræ F ductæ in D producunt cifras dati C. Ergo C eſt poteſtas, cujus exponens eſt D, & radix F.

CAP. VII.

Approximatio radicum.

SI in extractione radicis quadratæ, cubicæ, vel alterius cujuſcunque poſt ſubtractionem ultimam aliquid ſuperſit; certum erit ex iis, quæ 2, & 4 cap. ſunt demonſtrata, numerum, cujus radix quærebatur, non eſſe quadratum, aut cubum, aut aliam poteſtatem; ac proinde non habere radicem quadratam, aut cubicam, ſeu aliam pro quæſiti ratione. Poterunt nihilominus radices exhiberi, quæ ad veram impoſſibilem, (quæ ſurda, ſeu irrationalis ab Arithmeticis appellari ſolet,) accedant propiùs ſemper, ac propius in infinitum; hoc eſt quæ ab impoſſibili verâ differant quantitate, minori quacumque datâ; ac proinde quæ per ſeipſas multiplicatæ quadraticè, vel cubicè, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos, vel &c. differentes à dato numero, quantitate quâcumque datâ minori. Artificium eſt ejuſmodi.

1. Numero dato *a*, ex quo aliquid ſuperfuit, adjiciantur aliquot cifrarum de-

a	b	c	d	m
	I II III IV		I II	
2057	00,00	(50	06	2500
7	I II III IV		I II III IV	
k	9964	2506	0036	
	f		n	

decimalium binarii, ſi radix quadrata petitur; aliquot terniones, ſi cubica; aliquot quaterniones, ſi biquadrata; quinades, ſi ſuperſolida; & ſic deinceps, juxta exponentem uniuſcujuſque poteſtatis. Ex numero ſic aucto *a*, *b* radicem talem elice, qualis petitur, ut capite præcedente traditum eſt; hoc eſt extractionem radicis inchoatam proſequere. Novæ radicales notæ *d*, prioribus *c* adjunctæ, radicem dabunt, propinquiorem veræ impoſſibili.

				m
I II III IV V VI		I II III		I II
2507	00,00	(50	06	2500
a	b	c	d	
II III IV V VI		I II III IV V VI		
k 7	9964	2506	0036	
	f		n	

In exemplo extractionis quadraticæ, hîc

m

I II III IV V VI I II III I II

2 5 0 7 | 0 0, 0 0 (5 0 | 0 6 2 5 0 0

a b c d

II III IV V VI III III IV V VI

k 7 9 9 6 4 2 5 0 6 0 0 3 6

f n

hîc appoſito, quadratum prioris radicis *c* eſt *m*, quod à numero dato *a* deficit, numero *k*. Quadratum verò radicis *c d* eſt *n*, quod deficit ab dato *a*, per *f*. Eſt verò *f* minus, quàm *k*. Porrò notæ reſidui *f* ſunt ſemper homogeneæ totidem primis notis numeri *a*, *b*.

Quod ſi pluribus ſemper, ac pluribus cifrarum binariis, ternariis &c. adjectis continuetur extractio; appropinquabitur ad radicem veram propiùs in infinitum, ſic ut differentia fiat, quâcumque datâ minor: nunquam tamen ad æqualitatem pervenietur.

2. Ex his patet quid præſtandum ſit in fractis vulgaribus; adjiciendæ videlicet cifræ (ut ſupra) tam numeratori, quàm nominatori, ſi in utroque aliquid ſuperfuit; aut alterutri tantùm, ſi aliquid ſuperfuit tantùm in alterutro.

3.

3. Eodem artificio ex numero, quantumvis parvo, extrahetur radix, quantumvis alta. Exemp.gr. ex binario R 9,) hoc eſt radix cubo cubica. Adjungentur enim binario aliquot cifrarum nonades, quia exponens radicis quæſitæ eſt 9, & ex binario ſic aucto extrahetur radix quæſita, ut capite præcedente traditur.

Quoniam verò mirum videri ſolet, méthodo extractionis jam explicatâ per fractos numeros ad radicem veram appropinquari in infinitum, neque tamen ad eam poſſe unquam perveniri, ac proinde impoſſibilem eſſe: videtur hic locus exigere, ut ejus rei demonſtrationem producamus. Eſto igitur.

THEOREMA

NUmerus non quadratus, aut non cubus ſit a, *hoc eſt, cujus integer numerus nullus ſit radix quadrata, vel cubica. Demonſtrandum eſt, ejus radicem etiam ne fractionibus quidem ullis poſſe exhiberi; hoc eſt, nullum poſſe dari, aut fractum numerum, aut mixtum ex integro, & fracto, qui in ſe ductus quadraticè, vel cubicè producat datum numerum* a.

De-

Demonſtratio.

DEtur enim, ſi fieri poteſt, fractus B, qui ſit radix numeri *a* (ſi fingeretur radix eſſe integer cum fracto, integro ad fractum reducto, prior caſus non mutabitur:) hic fractus B, in ſe ductus quadraticè, aut cubicè, alium gignet fractum D. videlicet ſi tam numerator *m*, quàm nominator *n* in ſe ducantur quadraticè, aut cubicè. Quoniam igitur tam *a* per hyp., quàm D per conſt. ſunt quadratus, vel cubus fracti B; erunt *a*, & D æquales. Quare, cum per Theor. 1. cap. 2. l. 2 unitas (1) ſit ad fractum D, ut nominator *z* eſt ad numeratorem *y*; etiam 1 erit ad *a*, ut *z* ad *y*. Jam verò, quia numeri *z*, & *y* quadrati ſunt, vel cubi, utpote geniti ex numeris *n*, & *m* in ſe ipſos ductis quadraticè, vel cubicè; inter eos cadent, vel unus medius proportionalis, per 11. l. 8., ſi quadrati ſint; vel duo medii, per 12. l. 8., ſi ſũt cubi. Quare, ut jam oſtendi, cùm 1 ſit ad *a*, ut *z* ad *y*; etiam inter 1, & *a* cadet unus medius *x*, vel duo *x*, *t* per 8. l. 8. Ergo

1.	x	a. 6
1.	x	t. a. 6
m		y
B—		—D
n		z

go

go per 8. l. 9. *a* quadrtus eſt, vel cubus, ejuſque radix quadrata, vel cubica eſt numerus integer *x*. Quod eſt abſurdum, cum hypotheſim deſtruat. Non igitur &c.

Eodem modo Theorema non de quadrato ſolum, & cubo, ſed etiam de poteſtate quacunque demonſtrabitur.

Quamvis autem numerorũ non quadratorum, & non cuborum &c. radices impoſſibile ſit numeris explicare; poſſunt nihilominus exhiberi geometricè hunc in modum.

Datus ſit numerus non quadratus 12, cujus duo latera, (hoc eſt, quæ per invicem multiplicata ipſum producunt,) ſint 3, & 4. Exhibeantur deindè duæ rectæ lineæ, una 3 partium æqualium, quarum altera ſit 4; interque eas per 12. l. 6. recta inveniatur media proportionalis. Hæc erit radix quadrata. Ejus enim quadratum per 17. l. 6. æquale eſt extremarum 3, & 4 rectangulo, quod eſt 12 ex hyp. Quare numeri ſurdi, ſeu irrationales meritò geometrici numeri appellari poſſunt.

Scho-

Scholium.

TAmetſi radices ſurdæ nullis numeris, ut jam oſtendimus, exprimi poſſint; ex his tamen, quod minùs exercitatis incredibile videri queat, quædam inter ſe commenſurabiles ſunt; ac proinde licèt ipſæ nequeant exprimi numeris, poteſt tamen earum proportio. Rem omnem triplici theoremate complexus exponam.

THEOREMA I.

RAdices ſurdæ numeris abſolutis incommenſurabiles ſunt.

Demonſtratio.

DAta ſit R. 8, (*hoc eſt radix quadrata numeri* 8,) *&* 5. *Si* 5, *&* R. 8 *commenſurabiles ſint, erunt inter ſe, ut aliquis numerus* a *ad aliquem numerum* b. *Ergo etiam quadratum ex* 5, *nempe* 25, *eſt ad quadratum* R. 8, *nempè ad* 8; *ut* aa *quadratus numeri* a *eſt ad* bb *quadratum numeri* b. *Igitur, quia primus* 25 *quadratus eſt, etiam ſecundus* 8, *per* 24. *l.* 8., *quadratus eſt: quod repugnat hypotheſi.*

5	R. 8
a	b
aa	bb
25	8

Eo-

Eodem discursu, sed per 25. l. 8., id ipsum de surda radice cubica demonstrabitur. Atque inde id non obscurè concluditur de qualibet.

Corollarium.

1. *HInc patet diametrum in quadrato lateri incommensurabilem esse. Cùm enim per 47. l. 1. quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere, erit diameter* R. 2, *hoc est radix quadrata binarii; latus verò, hoc est* 1, *&* R. 2 *incommensurabiles sunt.*

2. *Hinc aliâ viâ colligitur veritas theorematis superiùs demonstrati. Cùm enim radices surdæ incommensurabiles sint numero absoluto cuicumque, etiam potestatibus suis incommensurabiles erunt, ut* R. 7 *quadrato suo* 7; R 3) 5 *cubo suo* 5. *Ex quo patet eas nullis numeris seu integris, seu fractis exprimi posse: Si enim posset radix surda numero exprimi, cum ejus potestas etiam numerus sit, esset surda radix ad suam potestatem, ut numerus ad numerum, ac proinde eidem commensurabilis, contrà quam ostensum jam sit.*

THEO-

THEOREMA 2.

SI una radix ſurda, dividens ſurdam alteram, qnotientem gignat rationalem, hoc eſt numerum abſolutum; ſurdæ radices illæ coramenſurabiles erunt.

Demonſtratio.

DAtæ ſint R. 12, & R. 3. R, 3, *dividens* R. 12, *quotientem facit* R. 4, *hoc eſt* 2. *Similiter* R. 8, *dividens* R. 18, *facit* R. A, *hoc eſt* R. B, *hoc eſt fractum* C. *Dico igitur* R. 12, & R. 3; *item* R. 18, & R. 8 *commenſurabiles eſſe. Nam per definitionem diviſionis* R. 3 *dividens eſt ad* R. 12 *diviſam, ut unitas ad quotientem* 2, *qui ex hyp. abſolutns numerus eſt.* Ergo, &c.

R. 12 (R. 4 ſeu 2.
R. 3

A

R. 18 (R. 18
8

9 3
R. 8 (R-- ſeu --C
4 2

B

Pari modo dividẽs R. 8 *eſt ad* R. 18 *divi-*

visam, ut unitas est ad C, quotientem absolutum. Ergo, &c.

Exempla adhibui radicum quadratarum; sed eadem est ratio quarumcumque.

THEOREMA 3.

SI unâ radice surdâ, divisâ per alteram surdam, quotiens existat irrationalis; incommensurabiles sunt.

Demonstratio.

DAta sit R. 48, & R. 8. *Hæc illam dividens, quotientem gignit* R. 6, *quæ irrationalis, sive surda est; cùm* 6 *non sit quadratus. Similiter* R 3) 6, *dividens* R 3) 24, *quotientem gignit* R 3) 4, *irrationalem; cùm* 4 *non sit cubus.*

Dico igitur R. 48, & R. 8; *item* R 3) 24, & R 3) 6 *incommensurabiles esse. Nam dividens est ad divisam, ut* 1 *ad quotientem irrationalem* R. 6, *vel* R 3) 4. *Uni-*

R. 48		
R. 8	R. 6	
R 3) 24		
R 3) 6	R 3) 4.	

tas autem ad quemlibet irrationalem numerum, per theor. 1, *incommenſurabilis eſt. Ergo etiam data radix ſurda dividens, & data ſurda diviſa incommenſurabiles ſunt. Quod erat demonſtrandum.*

Diviſio ſimplex radicum, quæ in hoc ſcholio aſſumitur, per ſe eſt manifeſta.

CAP. VIII.

De tabulis quadratorum, & cuborum.

SI ſemel tabulæ conficerentur, quibus ſingulorum ab unitate numerorum quadrati, & cubi continerentur, ſublata eſſet magnâ ex parte radicum extrahendarum moleſtia. Præclarè igitur de Arithmeticis Paulus Guldinus noſter meritus eſt, qui omnium ab unitate numerorum, uſque ad decimillenarium, quadratos, & cubos exhibuit in appendice libri 1. de centro gravitatis.

Con-

Conſtructio tabularum.

TAbulas ejuſmodi ut conficias, aut jam confectas extendas, ſingulas ab unitate radices per ſe ipſas multiplica: provenient quadrati omnes, qui rurſum in radices ducti, dabunt omnes cubos. Verùm, quia multiplicatio, in magnis præſertim numeris, moleſta eſt; vias alias breviores, quæ ſolâ additione opus habeant, inſignes horum numerorum proprietates ſuppeditant.

Generantur igitur quadrati ordinatim omnes.

1. Ex continua additione numerorum imparium ab unitate. 1, & 3 faciunt 4 primum quadratum: cui ſi addas imparem proximum 5, fit 9 quadratus ſecundus: huic adde imparem tertium 7, fit 16 quadratus tertius: atque ita deinceps. Demonſtrat Maurolycus l. 1. Arithm. p. 15.

2. Quadrati cujuſcumque duplicata radix, unitate adjectâ, cum quadrato ipſo, dat quadratum proximè majorem. De-

monſtrat Maurolyc. Arithm. lib. 1. p. 15.

Cubi verò ſic.

1. Duo primi impares 3,& 5 dant primum cubum 8. Tres impares ſequentes 7, 9, 11 dant cubum ſecundum 27. Quatuor ſequentes impares 13, 15, 17, 19 dant cubum tertium 64. Et ſic deinceps. Demonſtratur à Maurolyco Arithm. lib. 1 p. 62.

2. Conſtituatur ſeries numerorum à 6 incipiens, & ſemper creſcens per 6. Unitas, adjecta ad 6,dat 7 differentiam primi cubi, & unitatis : quæ adjecta ad 12, dat differentiam cubi ſecundi, & tertii : & ſic deinceps omnes cuborum differentiæ reperiuntur. Inventis autem differentiis, habentur cubi : nam ſi unitati addas 7, fit 8 cubus primus ; cui ſi addas ſequentem differentiam 12, fit 27 cubus ſecundus ; & ſic deinceps. Vide Maurolycum lib. citato.

	Differ.	cub.
6	1	1
12	7	8
18	19	27
24	37	64
30	61	125
36	91	216

Vſus tabularum.

TAbulis jam confectis, ſic utere : numerum datum, cujus radix petitur, quære inter quadratos, vel cubos; quem ſi reperis, etiam radicem illi adſcriptam pariter invenies; ſi non reperis, quære illo proximè minorem, radix huic adſcripta erit maxima, quæ citra fractiones elici ex dato numero poteſt.

Quoniam verò tabulæ Guldini continent quadratos, & cubos radicum omniũ, uſque ad decimilleſimã, cujus quadratus eſt 100000000, novem conſtans notis, cubus autem 1000000000000 notis conſtans 13; earum ope obtinebitur quadrata radix omnis numeri, qui notis conſtet non pluribus, quàm octo; & radix cubica omnis numeri, qui notis ſcribatur non pluribus, quàm 12.

Quod ſi radix petatur è numero, pluribus notis conſtante; ſemper nihilominus, per dictas tabulas, membra quatuor majora expedientur.

Oporteat ex numero *ac* elicere radicem quadratam, vel cubicam. Partire illũ in membra. Tum quære in tabulis nu-

a b c
2,48,09,56,71,92 (1557----
d 2 48 06 25

k 3 3 1,

a b c
23,089,423,791,215 (2847---
23 076 090 432,

k 13 334 368,

merum *ab* ex quatuor poſtremis membris conflatum, aut illo proximè minorem, qui erit *d*, & radicem illi adſcriptam *f* poſt lunulam repone. Ex reliquo deinde numero *k b c* extractionem proſequere methodo conſuetâ.

CAP. IX.

Uſus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extrahenda radice quadratâ, & cubicâ.

PArentur duæ laminæ, ut cap. 6. l. 1; quarum alteri inſcribantur unitas, & 8 primi quadrati; alteri verò unitas cum 8 pri-

primis cubis : eâ lege, ut cum quadrati unâ conſtant notâ, ſcribantur in triangulo inferiori ; cùm binis notis conſtant, prima ſcribatur in triangulo inferiori, ſecunda in ſuperiori ; cùm verò cubi tribus conſtabunt notis, duæ primæ in inferiori triangulo reponantur, tertia in ſuperiori ; cum binis, ambæ in inferiori ., & cifra in ſuperiori ; cum una, eam loca in inferiori, appoſitâ ad lævam cifrâ, itemque aliâ cifrâ in triangulo ſuperiori. Tunc tamen duæ primæ notæ, quamvis in eodem triangulo conſiſtant, duo loca efficiunt, ſic ut ſecunda ad decades pertineat. Harum lamellarum hæc cubica, illa quadratica appelletur.

Uſus porro in extrahendâ radice quadrata hic eſt : Ex ultimo membro radix extrahitur more conſueto. Deinde duplum radicis eatenus acquiſitæ, ſi unicâ notâ conſtet, quære in capite unius laminæ ; ſi pluribus, in capite plurium. His ad dextram applicetur lamina quadratica, ad ſiniſtram lamina exponens. Tum advertе, quis ordo numerum contineat æqualem, aut proximè minorem membro. Numerus laminæ exponentis, denominans ordinem, apponatur radici antea ac-

quisitæ ; ipsum verò ordinem exscriptum aufer à membro. Eodem planè modo reliqua membra expedientur.

In cubicâ sic proceditur. Oporteat ex numero A educere radicem cubicam.

Ex ultimo membro extrahitur radix more consueto. Maxima radix cubica in 22 est 2 ; ejus cubus 8 subtractus à 22 relinquit 14 , quibus adscribe membrum penultimum 022 , ut fiat totum (*p*) 14, 022.

Triplũ quadrati ex radice hactenus acquisita , nempe 12, statue in capite duarum laminarum , quibus ad dex-

22,022,635,627 (2
8
—
p 14,022
n 13952
———
70 q
819 k
———
11529 b
...6. c
.48.. d
———
16389 e

648 k
10112 f
..24. g
.36.. h
———
13952 n

dextram appone laminam cubicam, ad ſiniſtram verò laminam exponentem. Tum adverte, quotus ordo ſit æqualis, aut proximè minor membro (*p*). Lamina exponens indicabit eſſe nonum. Hunc igitur exſcribe, eritque *b*.

Supra primam notam 9 ordinis *b* jam exſcripti ſcribe ejus denominatorem 9, eique verſus lævam appone ejus quadratum 81.

Laminæ cubicæ ad dextram appone laminam, quæ habeat in vertice triplum radicis prioris 2, nempe 6: ex hac deſcribe numerum, contentum in quadrato, deſignato per numeri *k* notam ſecundam, quæ eſt 1; ea verò deſignat primum loculamentum, in quo reperis 6. Scribe ergo 6 infra 1, & 2. Ex eâdem laminâ exſcribe numerum loculamenti, deſignati per numeri *k* notam tertiam 8, nempe 48, quem repone infra 8, & 5.

Hos tres numeros *b*, *c*, *d*, collige in unam ſummam *e*, quæ auferenda eſſet à membro *p*; ſed quia non poteſt, pro *b* exſcribe ordinem octavum, qui erit *f*; & ſupra numeri *f* notam primam 2 ſcribe 8, eique quadratum ejus 64 appone; perque hunc numerum loco nume-

merorum c, d reperi alios g, h, modo jam tradito. Deinde f, g, h, collectos in ſummam n, quæ jam minor eſt membro p, ſubtrahe à membro p. Et reſiduum q infra lineam repone.

In membris, quæ ſuperſunt, eadem operatio repetitur.

Ratio horum omnium pendet à demonſtrationibus radicum quadratæ, & cubicæ cap. 2, & 4. hujus libri, & à demonſtratis cap. 8. lib. I.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER IV.

DE REGULIS.

Practicæ Arithmeticæ quatuor ſunt regulæ. Prima eſt regula proportionum, ſive trium; ſecunda ſocietatum, ſive conſortii; tertia alligatiionis; quarta poſitionum ſimplex, ac duplex, quam alii regulam falſi appellant. Inter has prima præcipua eſt, à qua reliquæ omnes dependent. Illius quatuor ſunt partes: nimirum regula proportionum directa ſimplex, everſa ſimplex, directa compoſita, everſa compoſita. Singularum præcepta hoc quarto libro explicanda, ac demonſtranda ſuſcepi.

CAP.

CAPUT I.

Regula ſimplex proportionum directa, & everſa.

METhodus, quâ ex tribus numeris datis eruitur quartus proportionalis incognitus, regula proportionum dicitur. Ab aliis, ob tres numeros datos, regula trium. Ab aliis aurea, ob ſummam utilitatem, appellatur.

In quæſtionibus practicis, quæ nimirum ad uſus humanos pertinent, è tribus numeris datis, ſive cognitis ſemper duo ſunt homogenei, hoc eſt de eadem re inter ſe, quorum unus annexam habet quæſtionem: ut cùm dico: 60 aureos expendo 5 menſibus; quot ergo menſibus expendã aureos 254. Numeri homogenei, ſive de eadẽ re sũt 60, & 254 aurei, quorum poſtremo annexa eſt quæſtio. Is igitur, qui annexam habet quæſtionem, tertio loco ponatur; alter de eadem re, primo; reliquus, qui ſolitarius eſt, & homogeneus quarto incognito, in medio conſiſtat. Si jam ſit, ut primus ad tertium, ita ſecundus ad quartum incognitum; hoc eſt, ſi quanto primus major, vel mi-

minor tertio, tantò ſecundus ſit major, vel minor quarto incognito; quæ tum ſolvendæ quæſtioni adhibebitur, regula proportionum directa appellabitur.

Exemplum.

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria unius horæ 48; igitur 360 gradus, hoc eſt tota circumferentia, quot milliaria continebit?

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360	.....

Hic quantò primus eſt minor tertio, tantò ſecundus eſt minor quarto incognito.

Quod ſi, ut primus ad tertium, ita reciprocè quartus incognitus ſit ad ſecundum; hoc eſt, ſi quantò primus eſt major, minorve tertio, tantò quartus incognitus debeat eſſe major, minorve ſecundo; regula proportionum everſa dicitur.

Exemplum.

FOrtalitium abſolvunt 1000 foſſores diebus 12; 325 foſſores quot diebus abſolvent?

Foſſ.	Dies	Foſſ.	Dies.
1000	12	325	...

Hic quantò primus eſt major tertio, tantò quartus incognitus eſſe debet major ſecundo.

Exemplum 2.

IN urbe obſeſſa 7 menſibus ali poſſunt præſidiarii 1500.; ergo menſibus 12 quot alentur?

Menſ.	Præſid.	Menſ.	Præſid.
7	1500	12	....

Hic quantò primus eſt minor tertio, tantò quartus incognitus debet ſecundo eſſe minor.

Arithmetici paſſim ex ipſa quæſtione dijudicandum relinquunt, utrùm pro-

por-

portio directa ſit, an everſa, ſive reciproca. Rectè id quidem: verumtamen indicium hujus rei certum aſſignari hoc poteſt: ſi duo termini homogenei, hoc eſt de eadem re, aliam rem quampiam unicam, & à quatuor terminis quæſtionis diverſam, communiter reſpiciant, circa quam lato ſaltem modo aliquid agant, ad quod duo reliqui termini ſe habeant per modum circumſtantiæ; everſa, ſive reciproca proportio erit. Ratio colligitur ex prop. 14. l. 6.

In primo exemplo res, circa quam primus, & tertius termini, nempe foſſores, aliquid agunt, eſt fortalitium; in ſecundo eſt annona, obſidionis tempore conſumenda à præſidiariis, termino videlicet ſecundo, & quarto.

Solutio directa.

MUltiplica ſecundum per tertium, & productum divide per primum. Quotiens, ſive integer ille ſit, ſive integer cum fracto, erit quartus proportionalis incognitus, qui quærebatur.

Exem-

Exemplum.

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48	360. fiunt	8640.
a	b	c	z

Dllo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48; igitur gradus 360, hoc eſt circumferentia tota, quot continet milliaria?

Collocatione factâ, ut ſupra, multiplica ſecundum 48 per tertium 360. Productum 17280 divide per primum 2. Quotiens 8640 eſt quartus, qui petebatur.

Demonſtratio.

SI quartus proportionalis eſt integer; patet ex p. 19. l. 7. Si eſt integer cum fracto, patet ex eadem prop., & ex iis, quæ demonſtravi lib. 1. cap. 9. Cum enim ex hyp. *a* ſit ad *b*, ut *c* ad *z* quartum, qui petebatur; erit, per 19. 7, factus ex *a* in *z* æqualis facto ex *b* in *c*. Atqui facto ex *a* in *z* diviſo per *a*, proveniet *z*. Ergo etiam facto ex *b* in *c* diviſo per *a*, proveniet *z*. Quod erat demonſtrandum.

Si

Si contingat, numeros de eadem re non esse ejusdem nominis, & mensuræ; ante operationem erunt reducendi ad eandem: ut si existat quæstio: pro 10 mensibus solvi florenos 250; pro 20 diebus ergo quot solvam? 10 menses, & 20 dies sunt quidem de eadem re, nimirum tempore; sed mensuræ diversæ: oportebit igitur, 10 menses priùs ad dies reducere, quàm operatio instituatur.

Examen instituitur, multiplicando primum per quartum, & secundum per tertium: si enim producta sint eadem, rite es operatus. Patet ex p. 10. l. 7.

Solutio eversa, seu reciproca.

MUltiplica primum per secundum, productum divide per tertium. Quotiens, sive integer fuerit, sive fractus, erit quartus proportionalis, qui petebatur.

Exemplum.

FOssores 1000 munitionem aliquã absolvunt diebus 12. Fossores 325 eandem quot diebus absolvent? Collocatio-

A 300 39— 235

ne factâ, ut ſupra; primum 1000 multiplica per ſecundũ 12 productum 12000 divide per tertium 325. Quotiens A eſt quartus, qui petebatur.

Foſſores.	Dies.	Foſſores.	Dies.
			300
1000	12	325	39 —
			325.

Aliud.

Arcis præfectus annonâ, quam habet, alere poteſt menſibus 7 præſidiarios 1500. Igitur menſibus 12 quot alet?

Menſ. 7. Præſid. 1500. Menſ. 12. Præſid. 876
A B C D

Primus A 7, ductus in ſecundum B 1500, facit 10500, qui diviſus per tertium C 12, dat quartum D 876.

Demonſtratio.

Quoniam ex hyp. A eſt ad C, ut reciprocè D eſt ad B; erit invertendo, ut C ad A, ſic B ad D.

C.

C. A. B. D.

Atque ita collocatio eversa reducta est ad directam, incognito D quartum in utrâque collocatione locum obtinente. Ergo D rite inventus est ex producto ipsius A in B, diviso per C.

Examen institues, ducendo primum A in secundum B, & tertium C in quartum D. Si producta sint eadem, rite operatus es; ut patet ex 19. l. 7. Est enim ex hyp. ut A ad C, ita D ad B.

CAP. II.

Regula proportionum Compositæ.

CUm termini dati, sive cogniti sunt plures, quàm tres, nimirum 5, aut 7 aut etiam plures; regula proportionum composita dicitur, estque duplex etiam ipsa, directa videlicet, & eversa. Inter terminos datos, tres semper præcipui sunt; & ex his duo de eâdem re, quibus cæteri adhærent; unus solitarius, & homogeneus illi, qui quæritur. Utrùm quæstio directè solvenda sit, an e-

versè, ex indicio mox dando dijudicabitur.

Composita directa.

Mercatores	8)
aureis	1000)
Luc. aureos	700
Mercatores	10)
aureis	4000)
Quot Lucr.aur.?	....

1. PRoponatur quæstio terminorũ sex: 8 mercatores, 1000 aureis, lucrantur 700 aureos. Igitur 10 mercatores, 4000 aureis, quot aureos lucrabuntur? Tres numeri principales sunt 8 mercatores, 700 aurei, (qui solitarius est,) & 10 mercatores. Duobus de eadem re reliqui duo adhærent, nimirum aurei 1000, & aurei 4000, qui duorum principalium de eâdem re (nempe merc. 8. & mercat. 10) quasi comites sunt.

Ordo terminorum is erit, qui in exemplo apposito. Nimirum tertio loco collocabitur principalis ille, qui annexam habet quæstionem (mercat. 10) cum suo comite (aur. 4000.) Primo loco principalis alter de eâdem re (mercat. 8) cum comite suo (aur. 1000.) Is verò, qui

qui ſolitarius eſt, ſecundo loco collocabitur.

Terminis hunc in modum conſtitutis, dijudicandum erit, directam proportionem, an everſam contineant: quod quia multi, vel ignorarunt, vel neglexerunt; imperfectè, & confusè hanc regulam tradiderunt. Indicium porro erit hujuſmodi: Si tam in loco, ſeu membro primo, quàm tertio unus terminus reſpectu alterius ſe habeat per modum circumſtantiæ, medii &c.; ſcito quæſtionem directè ſolvendam: ſi verò in membro primo, & tertio unus terminus reſpectu altertius quidpiam agat, exerceatve; certus eſto proportionem everſam in quæſtione contineri, ac proinde ſolvendam eſſe eversè.

Ex hoc indicio quæſtio propoſita reperietur eſſe directa: quæ generali artificio ita ſolvitur. Terminos primi loci 8, & 1000 inter ſe multiplicando, reducito ad unum 8000. Similiter termini tertio loco poſiti 10, & 4000 ad unum reducantur 40,000. Atque ita termini 5 redacti ſunt ad 3.

Aurei.	Lucr.aur.	Aurei.
8000	700	40,000.

Circa quos ſi regula trium ſimplex exerceatur, prodibit numerus incognitus, qui petebatur, 3500 aurei.

Demonſtratio.

OPerationis manifeſta eſt. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæſtio non immutatur. Eadem ſanè quæſtio erit, ſive dicas: 8 mercatores, aureis 1000, lucrantur 700 aureos; igitur mercatores 10, aureis 4000, quot lucrabuntur? ſive dicas: octies mille aureis, mercator 1 lucratur 700; igitur 40, 000 aureorum, mercator 1 quot lucrabitur? (Tantùm enim lucratur 1 mercator 8000 aureorum, quantùm 8 mercatores aureis 1000; & tantùm 1 mercator 40, 000 aureorum quantùm 10 mercatores 4000 aureorum.) Atqui in hac poſtrema duo termini evaneſcunt, quod primo, & tertio loco iidem recurrant, (videlicet 1 mercator,) quorum proinde ratio habe-

benda non eſt. Igitur ſalvâ quæſtione 5 termini ad tres ſunt reducti. Ex quo patet quæſitum.

2. Quæſtio proponatur terminorum octo. Mercatores 8, aureis 1000, menſibus 2, lucrantur aureos 700; igitur 10 mercatores, 4000 aureorum, menſibus 4, quot lucrãtur aureos? Ordo terminorum hic erit.

Mercatores	8)
aureis	1000)
menſibus	2)
Lucr.aureos	700
Mercatores	10)
aureis	4000)
menſibus	4)
Quot Lucr.aur?....	

Deinde terminis primi membri per invicem multiplicatis, itemque membri tertii, quæſtio ad terminos reducetur tres, hunc in modum. 8 in 1000 ſunt 8000: quæ ducta in 2, faciunt 16, 000: hic erit primus terminus. 10 in 4000 ſunt 40, 000: hæc ducta in 4, faciunt 160, 000: hic erit terminus tertius. Sic ergo ſtabit exemplum.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei aur.
16,000,	700.	160,000 fiunt ...

Demonſtratio.

RUrſum manifeſta eſt. Nam ad lucrum perinde eſt, ſive dicas: 8 mercatores, 1000 aureis; ſive 1 mercator, 8000 aureorum. Rurſus perinde eſt, ſive dicas: 1 mercator, 8000 aureorum, 2 menſibus; ſive 1 mercator, 1 menſe, aureis 16, 000. Similiter in membro tertio perinde ad lucrum erit, ſive dicas: 10 mercat., 4000 aur.; ſive 1 mercator, 40, 000 aur.; & rurſum perinde eſt, ſive dicas 1 mercat., 40, 000 aur., 4 menſ.; ſive 1 mercator, 1 menſe, 160,000, aur. Igitur per multiplicationem terminorum inter ſe, quæſtio ad hanc formulam reducta eſt.

Mercator	1)
menſe	1)
aureis	16000)
Lucr. aureos	700
Mercator	1)
Menſe	1)
aureis	160000)
Quot Lucr. aur.?	

In qua, quia quatuor termini, qui in pri-

primo, & tertio loco iidem ſunt, evaneſcunt, tota quæſtio à 7 terminis reducta eſt ad 3.

Compoſita everſa, ſeu reciproca.

MIrum eſt, quàm confusè, & imperfectè hæc regula paſſim tradatur, eâ credo de causâ, quod tàm illius demonſtrationem, quàm diſcrimen à directa non ſatis obſervaverint.

1. Quæſtio propoſita eſto terminorum ſex: 10 homines expendunt 4 aureos diebus 3; homines 100, aureos 2000, quot diebus expendent? Terminos eodem ordine, quo in directâ, collocabis. Tum ex indicio, ſuperius tradito, deprehendes proportionem everſam, ſive reciprocam contineri in quæſtione; cùm tam *a* circa *b*, quàm *d* circa *e* aliquid agat; homines nimirum expendunt aureos. Perſpecto jam genere quæſtionis, ac-

Homines	10.	a)
aureos	4.	b)
exp.dieb.	3.	c
Homines	100.	d)
auroos	2000.	e)
Quot dieb.exp?		

cu-

curatiùs adhuc terminorum ſingulorum locus erit determinandus.

Homines 10. a)
aureos 4. b)
exp.dieb. 3. c

Terminus agens *a*, qui non habet annexam ſibi quæſtionem, primus eſto. Illius comes *b*, ſecundus. Tertius *c* ille ſit, qui ſolitarius eſt, & homogeneus quæſito. Quartus ſit agens, qui annexam habet quæſtionem, & primo homogeneus eſt, nempe *d*. Illius comes *e*, ſecundo *b* homogeneus, quinto loco conſiſtat. Ordine terminorum hunc in modum conſtituto, generali artificio quæſtionem propoſitam, & alias ſimiles quaſcunque ſolvemus.

Homines 100. d)
aureos 2000. e)
Quot dieb.exp? ....

Termini primus *a*, tertius *c*, quintus *e* multiplicentur per invicem, & gignant *ace*. Deinde ſecundus *b* ducatur in quartum *d*, & faciat *b d*: productum ſecundum *b a* dividat primum productum *ace*. Quotiens A dabit terminum incognitum, qui petebatur.

ace
A----
b d

De-

Demonſtratio.

REponatur quinto loco idem terminus, qui ſecundo, ut ſit quæſtio. Si 10 homines 4 aureos expendunt, diebus 3; homines 100, etiam 4 aureos,

Homines 10. a
aureos 4. b
Exp. dieb. 3. c

Homines 100 d
aureos 4. b
Quot dieb. exp? ....

quot diebus expendunt? Quoniam hic duo termini identici ſunt, ac proinde evaneſcunt; manifeſtum eſt quinque terminos redactos eſſe ad tres *a*, *c*, *d*.

Qui cum ex indicio tradito cap. 1. proportionem everſam contineant, quartus per regulam trium ſimplicem everſam reperiendus eſt. Primus igitur *a* in ſecundum *c*, faciat *a c*: quo diviſo per tertium *d*, quotiens B eſt quartus: ac proinde 100 homines 4 aureos expendent, diebus B. Littera B porro deſi-

a c
B—
d

ſignat fractionem ſpecioſam, quæ typis commodè interſeri non poteſt; quod etiam deinceps nota.

Homines 100. d

Aureos 4. b
a c
Exp.dieb. B—
d

Homines 100. d

Aureos 2000. e

Quot dieb.exp.? ....

Quoniam igitur 100 homines 4 aureos expendunt, diebus B; iidem 100 homines, 2000 aureos (e), quot diebus expendent? Quoniam hic rurſum duo termini identici ſunt, conſtat terminos quinque redactos eſſe ad tres *b*, B, *e*: qui cum ex indiciis jam traditis proportionem directam contineant, incognitus per ſimplicem directam proportionum regulam inveniri debet. Itaque ſecundus, nempe fractio ſpecioſa, per B deſignata, ducatur in tertium *e*, ut traditur *l.* 2. cap. 6. num. 2, & gignat D, hoc eſt fractionem, per D deſignatam: quâ divisâ per pri-

a c e
D—
d

mum

mum *b*, ut traditur lib. 2. cap. 7. num. 2, (multiplicantur enim fractiones ſpecioſæ, ut vulgares,) provenit quotiens E, indicans 100 homines, 2000 aureos, quot diebus expendant: ac proinde E eſt terminus ille incognitus, qui in quæſtione initio propoſita quærebatur. Atqui eſt idem cum A, ex vi conſtructionis invento. Ergo A eſt terminus incognitus quæſitus. Quod erat demonſtrandum.

ace
E — 150
bd

2. Propoſita ſit quæſtio terminorum octo, vel plurium. Scriptores 4, paginas 250, linearum 20, ſcribunt diebus 8: igitur Scriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus ſcribent? Quoniam tam in primo, quàm tertio membro unus terminus aliquid agit circa alium, nimirum *a* circa *b*, & *d* circa *e*; liquet in quæſtione proportionem reciprocam contineri. Ordo igitur terminorum idem erit

Scriptores	4.	a)
Scrib. pag.	250.	b)
Verſuum	20.	m)
Diebus	8.	c
Scrptores	6.	d)
Paginas	350.	e)
Verſuum	25.	n)

Quot dieb. Scr?....

erit, qui ſupra: nimirum terminus agens *a*, non habens annexam ſibi quæſtionem, primus erit: hunc comites ejus *b*, & *m* ſequentur. Medium locum tenebit *c*, qui ſolitarius eſt, & termino incognito homogeneus. Huic proximus erit *d* agens alter, qui annexam habet quæſtionem: quem *e*, *n*, ejus comites, ſubſequentur. Ordine ſic conſtituto. Primo *a* ductus in medium *c*, & proximo *d* prætermiſſo, in omnes illius comites *e*, *n*, producat *a c e n*. Tum *d* (ille jam prætermiſſus) ductus in omnes comites primi *a*, nempe in *b*, *m*, producat *d b m*. Deinde productum primum *a c e n* dividatur per ſecundum *d b m*. Quotiens P dabit numerum incognitum, qui quærebatur.

Scriptores 4. a)
Scrib.pag. 250. b)
Verſuum 20. m)

Diebus 8. c

Scriptores 6. d)
Paginas 350. e)
Verſuum 25. n)

Quot dteb.Scr. ? ....

acen 1
P——9—
dbm 3

De-

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Verſuum 20. m

a c e
Diebus A ——
b d

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Verſuum 25. n
Quot dieb. Scr? . . . .

Demonſtratio.

SI tertius terminus *m* ponatur etiam loco ſeptimo pro *n*, quæſtio redigetur ad terminos quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, cujus terminus incognitus, ut jam demonſtratum eſt num. 1, erit A: ac proinde ſcriptores 6, paginas 350, linearum *m* 20, ſcribent diebus A; igitur iidem 6 ſcriptores, paginas etiam 350, ſed linearum *n* 25, quot ſcribent diebus? hic quia utrimque *d*, *e* numeri ſcriptorum, & paginarum iidem ſunt; quæſtio redacta eſt ad terminos tres, nimirum *m*, A, & quæ

a c e
A ——
d b

quæ quia directa est, duc A in *n*, ut traditur l. 2. cap. 6. num. 2., & fiet Q. Quo diviso per *m*, ut traditur l. 2. c. 7. num. 2, fiet quotiens R, indicans scriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus absolvant; ac proinde est is, qui petebatur. Cum igitur R idem sit cum P, erit P numerus incognitus, in quæstione requisitus. Quod erat demonstrandum.

$$Q = \frac{\text{acen}}{\text{d b}} \qquad P = \frac{\text{acen}}{\text{dbm}} \qquad R = \frac{\text{acen}}{\text{dbm}}$$

Scholium.

QUæstiones, ad regulam compositam proportionum, tam eversam, quàm directam pertinentes, per regulam simplicem proportionum bis institutam solvi posse, quamvis inutili circuitu, ex demonstrationibus jam allatis manifestum est: compositam videlicet directam, per directam simplicem duplicatam; eversam verò, per simplicem eversam unam, & simplicem directam alteram. Id porro, haud scio, an satis fuerit ab Arithmeticis observatum, posse eversam compositam solvi per simplices duas, eversa nullâ interveniente: quod sic ostendo.

Resumatur quæstio, supra numer. 1. propositio.

Homines 10)
Aureos 4)

Exp.diebus. 3

Homines 100)
Aureos 2000)

Quot dieb.exp...

Ex qua desumatur prima quæstio simplex hujusmodi: Homines 10, diebus 3, expendunt aureos 4; homines ergo 100, diebus etiam 3, quot expendunt aureos? formulam hîc apposui, quam patet esse directam. Solutione adhibitâ, quartus provenit aurei 40. Altera jam quæstio sit etiam simplex: homines 100 expendunt aureos 40, diebus 3; ergo iidem homines 100, aureos 2000, quot diebus expendunt? Formulam inspice hîc appositam, quam iterum patet esse directam. Solutione adhibitâ, proveniunt dies 150 pro numero incognito quæsito. Et poterunt quæstiones omnes eversæ compositæ in hunc modũ solvi. Simili modo etiam demonstrari potest, compositas directas solvi posse per unam directam simplicem, & eversam alteram.

Homines 10
diebus 3
Exp. aureos 4

Homines 100
diebus 3
Quot aur. exp. . . .

Homines 100
aureos 40
exp. dieb. 3

Homines 100
aureos 2000
Quot dieb.exp.? . . .

Hæc ad plenam regulæ triũ compositæ intelligentiam dicta sint. Cæterum inutilis ad praxim ille per duplicatam solutionem simplicem

circuitus eſt, quando ſolutionem expeditiorem longè, ac breviorem jam tradidimus.

CAP. III.

Regula Societatum.

DOcet numerum in partes dividere, datis numeris proportionales. Nomen ſortita eſt à ſocietatibus mercatoriis, in quibus uſum habet permagnum. Sic verò inſtituitur.

Datorum ſumma primum locum teneat; ſecundum, numerus diſtribuendus; tertium, ſinguli datorum. Exerceatur deinde toties regula trium, quot ſunt dati. Numeri inventi ſatisfacient quæſtioni. Si numeris datis temporum diverſitas ſit adjuncta; prius in ſuum ſinguli tempus ducantur, quàm ad unam ſummam redigantur.

Quæſtio 1.

TRes mercatores, initâ ſocietate, lucrati ſunt aureos 4500. Primus expoſuit aureos 100, alter 150, tertius 200. Quantum ex lucro communi cuique debetur?

Ma-

Manifeſtum eſt, lucra ſingulorum debere pecuniis, in ſortem collatis, eſſe proportionalia; adeoque lucrum commune 4500 aur. dividendum in partes, pecuniis collatis ſingulorum proportionales.

Sic igitur quæſtio ordinabitur.

		Dati	quæſiti
Summa dat.	Lucr. com.	100. c	1000. f
450.	4500	150. d	1500. g
a	b	200. e	2000. h

Tum quære, ſi 450 aurei lucrantur aureos 4500; ſinguli dati (hoc eſt pecuniæ, à ſingulis in ſortem datæ) quot lucrantur aureos? Regulâ trium ter inſtitutâ, provenient quæſiti. Conferenti 100 debentur 1000, conferenti 150 debentur 1500, & 2000 ei, qui 200 contulit.

Demonſtratio.

EX vi conſtructionis, ut *a* eſt ad *b*, ſic *c* eſt ad *f*, & ſic *d* eſt ad *g*, & ſic *e* eſt ad *h*. Ergo per 11. l. 6. *c* eſt ad *f*, ut *d* eſt ad *g*, & ut *e* eſt ad *h*. Igitur permutando per 16. l. 5, ut *c* eſt ad *d*, ſic *f* eſt ad *g*; & ut *d* eſt ad *e*, ſic *g* eſt ad *h*: & ex æquo per 22.

l. 5. *c* eſt ad *e*, ut *f* ad *h*. Conſtat ergo fides operationis.

Quæſtio 2.

TRes mercatores lucrati ſunt aureos 9000. Primus contulit aureos 100, per menſes 15 : ſecundus 140, per menſes 19 : tertius 300, per menſes 7. Quantum ſingulis debetur?

Aurei, à ſingulis collati, ducantur in tempora, & numeri producti 1600, 1400, 2100 in unam colligantur ſummam 5000. Quæſtio deinde ſic ordinabitur.

Dati		Quæſiti	
Sum. dat.	Lucr. com.	1600	3200
5000	9000	1400	1600
		2100	4200

Demonſtratio eadem, quæ ſupra. Quod autem multiplicatio pecuniæ in tempus valorem datorum non immutet; patet ex demonſtratione regulæ trium compoſitæ directæ capitis præcedentis.

CAP. IV.

Regula Allegationis.

DOcet hæc regula, res diverſi pretii ita commiſcere, ut mixtum habeatur pretii medii, pro arbitrio aſſignati. Sint duo genera argenti non puri, primi libra 1 valeat aureis 30, alterius 24. Scire cupio, quantum ex utroque ſumere debeam, ut mixti una valeat aureis 28; vel ut habeam mixti libras 10, quarum una valeat aureis 28. Hic pretia data ſunt 30, & 24; arbitrarium medium 28. Id nunquam eſſe poteſt utroque dato majus, vel dato utroque minus; ſed medium inter illa, aut alterutri æquale.

1. Si duo ſolùm ſint pretia data diverſa (30, 24,) ea ſcribe ſub invicem, medium verò (28) ad ſiniſtram. Tum pretia data alligentur inter ſe; hoc eſt comparentur ambo cum medio (28,) ut duæ habeantur differentiæ, nimirum exceſſus (2) majoris dati (30) ſupra medium (28,) quem ad dexteram minori dato (24) adſcribes; & defectus (4) minoris dati (24) à medio, quem adſcribes dato majori (30.) Quæ omnia in formula hîc appoſita exhibentur.

Pret.mix.	Differ.
30	4
Pret.med. 28	
24	2
	6
	Sum.differ.

His peractis, regula proportionum inſtituitur toties, quot ſunt pretia data: in ea primum locum tenebit ſumma differentiarum (6:) ſecundum quantitas, ſive numerus mixti (*lib.* 10:) tertium ſingulæ differentiæ. Numeri inventi ſolvent quæſtionem.

2
Differ. 4. lib 6—A
3

Sum.differ Mixti
6 lib. 10.

1
Differ. 2. lib. 3—B
3

Igitur ex pretii majoris 30 aureorum argento accipiendæ ſunt libræ **A**; ex pretii minoris libræ **B**; quæ ſimul efficiunt 10 libras argenti mixti, cujus pretium ſit medium, aureorum nempe 28.

2. Cum

2. Cum plura, quàm duo, pretia dantur; ſingula binatim inter ſe alligentur, his tamen legibus ſervatis. 1. Quæ alligantur, neque ſimul majora ſint pretio medio, neque ſimul minora. 2. Exceſſus majoris pretii dati ſupra medium adſcribatur minori pretio; defectus autem minoris à medio apponatur majori. 3. His ſalvis, perinde eſt quocunque ordine inter ſe data pretia alligentur; & poteſt unum alligari ſæpius (hoc eſt cum diverſis,) modò ſingula ſaltem alligentur ſemel. Unde fit, ut eadem quæſtio multas ſolutiones admittat, ut infra demonſtrabitur.

Alligationibus peractis, regula proportionum, ut ſupra, toties exercebitur, quot pretia ſunt data. In ea primum locum teneat ſumma differentiarum; ſecundum quantitas, ſeu numerus mixti, tertium differentiæ ſingulæ; aut, ſi uni pretio plures ſunt adſcriptæ, ſummæ earum ſingulæ.

Exemplum.

LIbra 1 Caryophili valet juliis 3, Piperis 4, Cinnamomi 6, Zingiberis 8, Croci 10. Quantum ex ſingulis debeo accipere, ut mixti libra 1 valeat

juliis 7 ? vel ut habeam mixti libras 12, quarum una valeat juliis 7 ?

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1.3
Mixti Pret.med.	Piperis	b 4.	3.1
7	Cinnam.	c 6.	1.3
	Zingib.	d 8.	4.3.1
	Croci	e 10,	4.3.1

	Differ.	Quæsit.
	4 ?	$\frac{4}{28}$ m
Sum. diff. Mixti. 28. lib. 1.	4 ?	$\frac{4}{28}$ m
	4 ?	$\frac{4}{28}$ m
	8 ?	$\frac{8}{28}$ m
	8 ?	$\frac{8}{28}$ m

In hoc exemplo factæ sunt omnes alligationes possibiles, quæ sunt *ad*, *ae*, *be*, *bd*, *cd*, *ce*. Igitur Garyophilli, Piperis, Cinnamomi ex singulis partes *m* unius libræ, & Zingiberis, ac croci etiam ex singulis partes *n* unius libræ, dabunt mixti libram 1, pretii 7 Juliorum.

Hoc

Hoc porrò exemplum, præter solutionem jam datam, alias admittit, ut infra ostendetur. Accipe unius adhuc solutionis formulam. Alligationes sunt, *ad*, *bd*, *ce*.

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1.
Mixti.	Piperis	b 4.	1.
Pret. med.	Cinnam.	c 6.	3.
7	Zingib.	d 8.	4. 3.
	Croci.	e 10.	1.

Differ.	Quæsit.	
1 ?	$\frac{1}{13}$	*f*
1 ?	$\frac{1}{13}$	*f*
3 ?	$\frac{3}{13}$	*p*
7 ?	$\frac{7}{13}$	*q*
1 ?	$\frac{1}{13}$	*f*

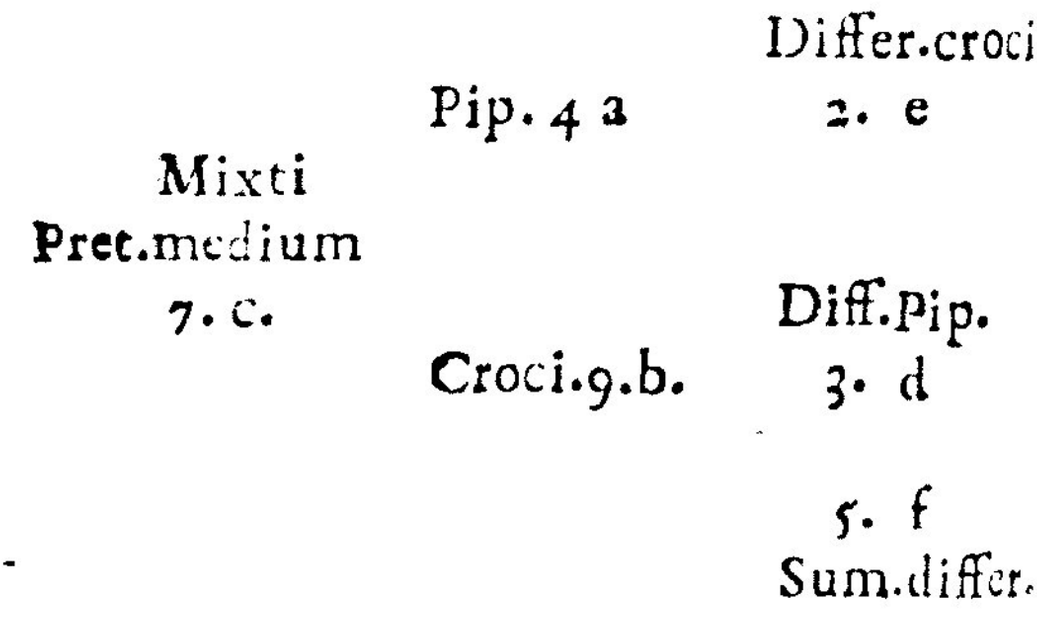
Sum. diff. Mixti. 13. lib. 1.

Quæsiti *f*, *f*, *p*, *q*, *f* indicant, quot partes libræ ex singulis acceptæ conficiant mixti libram unam, pretii medii 6 Juliorum.

Examen ita fiet. Si Garyophilli una li-

libra valeat ? Juliis, libræ pars *f* quantùm valebit ? Rurſum ſi 1 libra piperis, &c. Pretia, per regulam trium inventa, collige in unam ſummam, hæc pretio medio æqualis erit, ſi bene fueris operatus.

Demonſtratio, cùm duo tantùm pretia diverſa ſunt alliganda.



QUæſtio ſit: libra 1 piperis valet 4 juliis, libra croci 9; quantùm ex utroque ſumere debeo, ut libra 1 mixta valeat Juliis 7? Cum ad ſolvendam quæſtionem in regula trium primus locus debeatur ſummæ differentiarum, ſecundus numero mixti, ſive ejus quantitati, tertius ſingulis differentiis reciprocè collocatis; demonſtrandum eſt, to-

totius mixti quantitatem, ſeu numerum, libram ſcilicet 1, ita eſſe ad croci, qui in mixto eſt, quantitatem, ſeu numerum incognitum; ut (*f*) ſumma differentiarum eſt reciprocè ad (*d*) differentiam piperis à pretio medio. Quod fiet hunc in modum.

Exceſſus *e* pretii unius libræ croci ſupra pretium medium unius libræ mixti precisè oritur à pipere, quod eſt in mixto: & defectus *d* pretii unius libræ mixti præcisè oritur à croco, qui eſt in mixto. Ergo exceſſus *e* pretii unius libræ croci eſt ad defectum *d* pretii unius libræ piperis, ut reciprocè piper, quod eſt in mixto, ad crocum, qui eſt in mixto. Ergo componendo, ut *e* cum *d* eſt ad *d*, exceſſus nimirum croci cum defectu piperis ad piperis defectum; ita piper cum croco in mixto, hoc eſt tota mixti quantitas, libra nempe una, eſt ad quantitatem croci in eodem mixto. Qnod erat demonſtrandum.

Demonſtratio univerſalis, ſive duo tantùm pretia, ſive quotlibet ſint alliganda.

HAnc rem non eſſe demonſtratu facilem, apparebit (niſi fallor) ex iis, quæ

quæ hîc ſubjungam. Quæ attulere nonnulli, nullam demonſtrationis ſpeciem habent, ut ne ſciviſſe quidem videantur, in quo difficultas conſiſteret, aut quid demonſtrandum ſibi eſſet. Utar porrò (quod jam feci ſæpius) logiſticâ ſpeciosâ, quæ huic rei demonſtrandæ conducet plurimùm. Quare hæc iis ſcribo, qui jam in ea utcumque ſunt verſati.

1. Rerum quatuor miſcendarum pretia diverſa ſint *b*, *c*, *d*, *e*; pretium medium ſit *a*. Exceſſus *e* ſupra *a* eſt *e-a*, ex præcepto regulæ adſcribendus minori *b*. Defectus *b* ab *a* eſt *a-b*, apponendus majori *e*. Exceſſus *d* ſupra *a* eſt *d-a*, quem adſcribe minori *c*. Defectus *c* ab *a* eſt *a-c*, quem appone majori *d*. Valebit porro jam aſferenda demonſtratio, quocunque tandem ordine, (ſervatis tamen præſcriptis in regula conditionibus,) inter ſe pretia diverſa alligentur.

Scema 1.

7.a	4. b	e-a	
	6. c	d-a	
	8. d	a-c	
	9. e	a-b	

2. Manifeſtum eſt, in qualibet differentia, per exceſſum, negari *a* pretium medium, affirmari verò pretia majora da-

data *e*, *d*; quod ita exprimitur *e-a*, hoc eſt *e* minus *a*; *d-a*, hoc eſt *d* minus *a*. Rurſum patet, in omni differentia, per defectum, affirmari *a* pretium medium, negari verò pretia data minora *b*, *c*; quod ſic exprimitur *a-c*, *a-b*. Sed, quia ex præſcripto regulæ pretiorum, quæ alligantur, ſemper unum majus eſt pretio medio, alterum minus (aut certè æquale) tot ſemper erunt differentiæ in unam

F

e-a ✝ d-a ✝ a-c ✝ a-b

ſummam F colligantur; hæc duo infallibiliter evenient: primo litteræ, pretia medio *a* majora deſignantes, ſemper reperientur affirmatæ; litteræ verò totidem, deſignantes pretia medio *a* minora, ſemper negatæ: ſecundò *a*, medium pretium deſignans, toties negata reperietur, quoties affirmata; negata quidem in differentiis majorum pretiorum; affirmata verò in differentiis pretiorum minorum; ac proinde litteris *a* ſe mutuo tollentibus differentiarum ſumma erit G, conſtans ſemper litteris, data pretia deſignantibus.

G

G
e ⅄ d-c-b

3. Ut verò ſciatur, quantum ex ſpeciebus ſingulis diverſorum pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ſumi debeat, ut ex iis permixtis una libra valeat pretio medio *a*; ex regulæ præſcripto, ponitur primo loco ſumma differentiarum, ſecundo 1 libra, tertio ſingulæ differentiæ; ac tum per

Different. *Scema* 2.

	e-a	
e-a	———	P ex b
	e ⅄ d-c-b	
	d-a	
d-a	———	Q ex c
	e ⅄ d-c-b	
	a-c	
a-c	———	R ex d
	e ⅄ d-c-b	
	a-b	
a-b	———	S ex e
	e ⅄ d-c-b	

Sum.diff.	libra
e ⅄ d-c-b	1

regulam trium inveniuntur quarti proportionales P, Q, R, S. Qui quidem, quod ſecundus terminus ſit unitas, exhi-

hibentur, dividendo solùm differentias singulas per differentiarum summam. Itaque quarti illi proportionales P, Q, R, S sunt fractiones, quarum communis denominator est differentiarum summa $e + d - c - b$, numeratores verò differentiæ singulæ, eo ipso ordine, quo num. 1. fuere alternatim pretiis diversis b, c, d, e appositæ.

4. Nunc, quia in regula asseritur, P, Q, R, S indicare quantum ex speciebus singulis diversorum pretiorum b, c, d, e sumi debeat, ut una libra, ex iis mixta, valeat pretio medio a; utrumque ostendi debet: & P, Q, R, S efficere unam libram: & P, Q, R, S simul valere pretio medio a. Primum patet ex 24. 5. Nam ex constr. summa differentiarum est ad singulas differentias, ut 1 libra ad singulas P, Q, R, S. Ergo, ut summa differ. est ad omnes simul differentias, ita una libra est ad omnes simul P, Q, R, S. Atqui summa differ. æquatur differentiis simul omnibus. Ergo etiam 1 libra omnibus P, Q, R, S æqualis est.

5. Alterum verò, in quo præcipua difficultas est, & cujus gratiâ superiora omnia num. 1. 2. 3 præmisimus, sic ostendo. Ut inveniantur pretia, seu valo-

lores ſingulorum P, Q, R, S, ſtatuatur in regula trium pro loco 1 libra 1 ; ſecundo *b*, *c*, *d*, *e* pretia diverſa ſingularum ſpecierum ; tertio ſingula P, Q, R, S, & dic: ſi 1 libra ſpeciei primæ valeat florenis *b*; unius libræ pars, à P deſignata, quantùm valebit ? & ſic in aliis.

Scema 3.

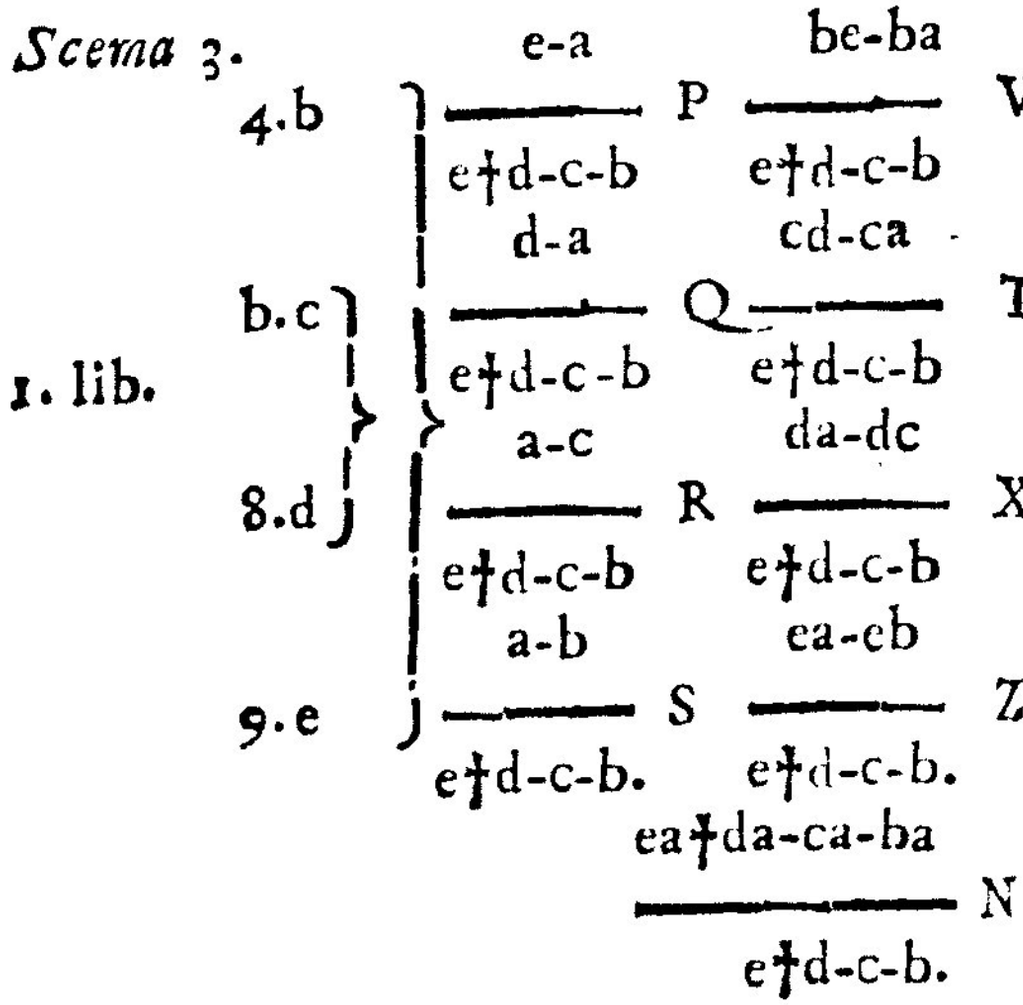
	e-a	be-ba
4.b	P	V
	e+d-c-b	e+d-c-b
	d-a	cd-ca
b.c	Q	T
1. lib.	e+d-c-b	e+d-c-b
	a-c	da-dc
8.d	R	X
	e+d-c-b	e+d-c-b
	a-b	ea-eb
9.e	S	Z
	e+d-c-b.	e+d-c-b.
	ea+da-ca-ba	
		N
	e+d-c-b.	

Quoniam verò in primo loco habetur unitas, ut inveniantur quarti V, T, X, Z, oportebit ſolùm ſingula *b*, *c*, *d*, *e*, pretia ducere in ſingulos fractionum P, Q, R, S, numeratores (qui, ut oſtendi num. 3 •

ſunt

ſunt ipſæ pretiorum differentiæ,) iiſque ſupponere communem denominatorem $e + d-c-b$, quem oſtendi num. 3. eſſe differentiarum ſummam. Nunc fractiones ipſas V, T, X, Z jam inventas expendamus. Si harum numeratores in unam ſummam colligamus, reperimus eas particulas, in quibus *a* pretium mediũ deſignans non reperitur, ſe mutuò tollere: quod ſic oſtendo. Ut habeatur numerator ipſius V, nempe $be-ba$, pretium *b* ducitur in numeratorem ipſius P, hoc eſt in differentiam, quæ in ſcemate primo ipſi *b* fuit appoſita; ea autem erat differentia pretii majoris *e*, nempe $e-a$, in qua (ut oſtendi num. 2.) reperitur $+e$, hoc eſt *e* pretium majus affirmatum. Ergo in numeratore ipſius V neceſſariò reperitur $+be$, hoc eſt *be* affirmatum. Rurſum, ut habeatur numerator ipſius Z, ducitur pretium majus *e* in numeratorem ipſius S, hoc eſt in differentiam $a-b$, quæ ipſi *e* in 1 ſcemate fuit appoſita; ea autem eſt differentia pretii minoris *b*, in qua (ut num. 2. oſtenſum eſt) reperitur $-b$, hoc eſt pretium minus *b* negatum. Ergo in numeratore ipſius Z neceſſariò reperitur eadem particula *be*, quæ in V; ſed jam negata, hoc eſt $-be$. Ergo in V, & Z duæ parti-

Scema 3.



culæ † *be* & -*be*, in quibus *a* non reperitur, ſe mutuò tollunt. Eodem modo oſtendam, in numeratoribus fractionum T, & X particulas, in quibus non eſt *a*, (ſunt eæ hic † *c d*, & -*dc*,) ſe invicem ſimiliter tollere.

Itaque ſumma numeratorum in V, T, X, Z eſt *ea* † *da-ca-ba*, in cujus particulis ſingulis reperitur *a*: huic ſummæ ſi ſubſcribatur communis denominator *e* † *d-c-b*, erit fractio N par omnibus V, T, X, Z. Deinde, quia genita eſt ſumma hæc

ea

ea † *da-ca-ba*, pretia majora *e*, *d* ducendo in ſibi appoſitas pretiorum minorum differentias *a-c*, & *a-b*, in quibus (ut oſtenſum num. 2.) *a* affirmatur: patet in particulis hujus ſummæ, ſigno † affectis, neceſſariò reperiri pretia majora *e*, *d*. Pari modo, quia in procreatione hujus ſummæ (*ea* † *da-ca-ba*) pretia minora *c*, *b* ducta ſunt in appoſitas ſibi pretiorum majorum differentias *e-a*, & *d-a*, in quibus oſtendi ſupra num. 2. *a* negari; manifeſtum eſt in particulis hujus ſummæ, (quæ eſt numerator ipſius N,) ſigno (-) affectis, neceſſariò reperiri pretia minora *c*, *b*. Ergo in numeratore ipſius N pretia majora *e*, *d* reperiuntur affirmata; minora verò *c*, *b*; negata. Atqui ſupra num. 2. oſtenſum eſt, etiam differentiarum ſummam *e* † *d-c-b*, quæ eſt fractionis N denominator, conſtare pretiis majoribus *e*, *d* affirmatis; minoribus verò *c*, *b* negatis. Ergo in fractionis N numeratore reperiuntur eædem litteræ, & iiſdem ſignis affectæ, quæ in denominatore. Ergo ſi numerator dividatur per denominatorem, quotiens erit *a*. (Si enim denominator ducatur in *a*, reſtituetur idem numerator.) Ergo fractio N æquivalet ipſi *a* pretio medio. Atqui jam oſtendi N æquari omni-

bus V, T, X, Z, valoribus ipſorum P, Q, R, S. Ergo P, Q, R, S ſimul valent pretio medio *a*. Quod erat demonſtrandum.

Quot ſolutiones diverſas eadem quæſtio admittat juxta praxim jam traditam.

ARithmetici ſcriptores plerique aſſerunt, pretia data diverſimodè alligari poſſe, ac proinde eandem quæſtionem plures ſolutiones admittere. Sed quantus ſolutionum diverſarum ſit numerus, & quo artificio illæ omnes exhibeantur, altum apud illos ſilentium eſt. Nimirum, ut demonſtrationem ipſam hujus regulæ, ita & determinationem ipſius pulcherrimam, aut ignorarunt, aut certè immeritò neglexerunt.

Ejuſdem igitur quæſtionis ſolutiones omnes poſſibiles invenientur hunc in modum.

1. Vide, quoties pretia data inter ſe binatim poſſint combinari diverſimodè; hoc eſt inveniantur omnes diverſi biniones, qui ex datis pretiis haberi poſſunt, ut trademus l. 5. c. 8. In quæſtione num. 2. ſupra quinque dantur pre-

pretia *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, quorum biniones diverſi ſunt 10.

2. Vide, quot ex his binionibus ſint apti ad alligandum; ad quod requiritur, ut binionis utrumque membrum, neque ſimul majus ſit, neque ſimul minus pretio medio. Ex 10 binionibus quæſtionis, ſupra datæ, tantùm ſex apti ſunt: nimirum *ad*, *ae*, *be*, *bd*, *ce*, *cd*.

3. Vide, quis minimus ſit alligationum numerus, ad quæſtionem ſolvendam neceſſarius. Si multitudo pretiorum datorum par eſt, ejus ſemiſſis dabit minimum numerum alligationum. Si impar, ejus ſemiſſis, unitate aucta. Ratio eſt, quia ſingula pretia data ſaltem alligari debent ſemel. In exemplo noſtro, quia 5 pretia dantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, minimus alligationum numerus, quo ſolvi quæſtio poteſt, eſt 3.

4. Inſpice biniones aptos, num. 2. inventos, & quære omnes eorum diverſos terniones, & omnes eorum diverſos quaterniones, & ſic deinceps, incipiendo à minima ſpecie, num. 3. inventâ, uſque ad proximè minorem numero aptorum binionum, ut tradetur l. 5. c. 8. In exemplo noſtro, quoniam binio-

nes apti ſunt ſex, num. 2. reperti ; oportebit , omnes eorum diverſos reperire terniones , qui ſunt 20 ; & quaterniones , qui ſunt 15 ; & quinterniones, qui ſunt 6.

5. Inquire , quot ex binionum aptorum ternionibus , & quaternionibus &c. ſint apti ſolvendæ quæſtioni. Illi porro erunt apti , in quibus ſingula pretia data *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, reperiuntur ; inepti , in quibus aliquod eorum deeſt. Singuli horum inventorum ternionum , quaternionum , &c. ſingulas dabunt quæſtionis datæ ſolutiones , quibus eam adde, quam exhibet tota binionum aptorum ſumma. Praeter has , nullæ erunt alligationes aliæ poſſibiles.

In exemplo noſtro pretia dantur quinque , quæ artificio , jam explicato, comperies alligari poſſe modis diverſis 25, ac totidem proinde exiberi poſſe quæſtionis datæ ſolutiones.

Alligatio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
ad	ad	ad	ae	ae	ae
bd	be	be	cd	bd	be
ce	cd	ce	bd	ce	cd

7.	8.	9.	10	11.	12.
ad	ad	ad	ad	ad	ad
ae	ae	ae	ae	bd	bd
bd	bd	bd	be	be	be
cd	ce	cd	ce	cd	ce

13.	14.	15.	16.	17.	18.
ad	ad	ae	ae	ae	ae
bd	be	bd	bd	bd	be
cd	cd	be	be	cd	cd
ce	ce	cd	ce	ce	ce

19.	20.	21.	22.	23.	24.	
ad	ae	bd	be	cd	ce	ad
ae	bd	be	cd	ce	ad	ae
bd	be	cd	ce	ad	ae	bd
be	cd	ce	ad	ae	bd	be
cd	ce	ad	ae	bd	be	cd
						ce

Dixi ſupra in titulo hujus diſcurſus:

juxta praxim hactenus traditam. Itaque, cùm dicitur præter ſolutiones, dicto modo inventas, non plures eſſe poſſibiles, intellige ſi utamur modo alligationis conſueto, qui ſupra num. 2. traditus eſt. Alias quæcunque quæſtio ad regulam alligationis pertinens, in qua plura duobus pretia dantur, ſolutiones admittit infinitas. Quod ſic demonſtro. Reſumatur quæſtio ſuperior, in qua ex pretiis datis ſeligatur pro arbitrio unum pretio medio minus, puta *a*, cum quo reliqua *b*, *c*, *d*, *e*, tanquam unum, comparentur. Accipiatur quivis numerus *f* major, tum minimo ipſorum *b*, *c*, *d*, *e*, tum etiam medio 7; minor verò *e* maximo ipſorum. Ex regula alligationis, jam traditâ, liquet res pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ita miſceri poſſe, ut una libra mixti ex illis valeat pretio *f*, 9 Juliis. Pro ſpeciebus igitur *b*, *c*, *d*, *e* ſumatur ex iis mixtum, cujus una libra valeat pretio *f*. Tum per regulam alligationis

		Differ.
a. 3		2
b. 4)		
Mixti		
c. 6)		f
Pret. med.		
7.		
d. 8)	9	4
e. 10)		

ſim-

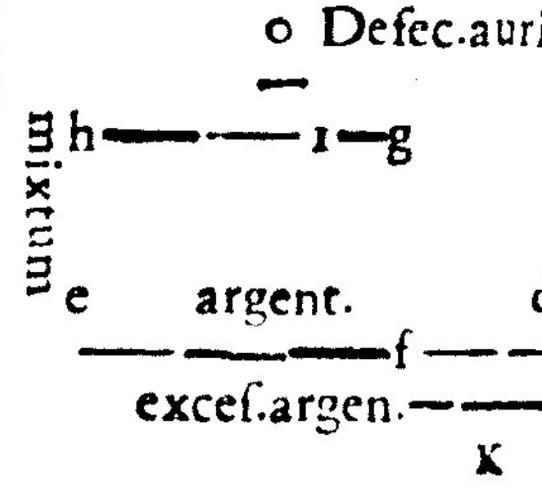
simplicem, numero 1 traditam, inveniatur mixtum x, z ex f, & a, cujus una libra valeat pretio medio 7. Liquet igitur x, z libram esse mixti ex omnibus

			Differ.	
		a. 3	2	
Mixti				
Pret.med.		b. 4)		
7.		c. 6)	f	
		d. 8)	9	4
		e. 10)		
		2	2)	
			6)	x
6. lib. 1				
		4	4)	
			6)	z

datis a, b, c, d, e; cum x, z mixtum sit ex a, & f; f autem mixtum ex b, c, d, e. Atque ita per assumptum numerum f majorem, tum minimo ipsorum b, c, d, e, tum ipso medio, minorem verò e maximo, una habetur solutio quæstionis, quæ toties variabitur, quoties pro f alius ejusmodi medius assumetur diversus. Atqui tales medii diversi assumi possunt, adhibitis fractionibus, infiniti. Ergo quæstionis datæ solutio variabitur infinities. Quod erat propositum.

Furtum aurifabri in corona Hieronis Regis detectum.

CUm Hiero, Syracuſarum Rex, Coronam auream Diis voviſſet, & aurifaber, ſublatâ portione auri, argenti tantundem ſubſtituiſſet, fraus ab Archimede detecta eſt. Sed quo præcisè artificio, non ſatis conſtat. Varii ſunt modi: qui regula alligationis utitur, omnium facillimus eſt.



Referant *a b*, *ed*, *hg*, tres maſſas metalli ſingulas libr. 10; & ſit aurea *h g*; *ed* argentea; *a b* verò ea, de qua dubitatur, an mixta ſit ex auro, & argento.

Primò invenienda eſt, ex hydro-ſtaticæ principiis, trium maſſarum proportio quoad molem; ad quod minimè opus eſt, ut de facto habeantur maſſæ, aurea, & argentea, uti in hydro-ſtatica, ſi Deo placuerit, oſtendam. Quod ſi moles *ab* media

dia reperiatur inter auream *g h*, & argenteam *e d*; certum erit in *a b* admixtum esse argentum: quæ verò proportione, per alligationis regulam innotescet.

Est enim, ut differentiarum summa *k*, *o* ad *o* differentiam, seu defectum molis aureæ *b g* à mixta *a b*; ita 10 libræ mixti *a b* ad libras argenti in *a b*.

Id verò eodem modo demonstratur, ut suprà. Nam *k* excessus in mole argenti supra mixtam *ab* præcisè oritur ab auro, quod est in mixto; & defectus auri *b g* à mixto precisè oritur ab argento, quod est in mixto. Ergo *k* excessus argenti *e d* est ad *o* defectum auri *b g*, ut reciprocè quantitas, seu pondus auri in 10 libris mixti *a b* est ad pondus argenti in eodem mixto. Igitur, componendo, totum mixti pondus argenti, nempe 10 libræ, est ad pondus argenti in mixto, ut *k* cum *o* (hoc est differentiarum summa) est ad *o* auri defectum. Quod erat propositum.

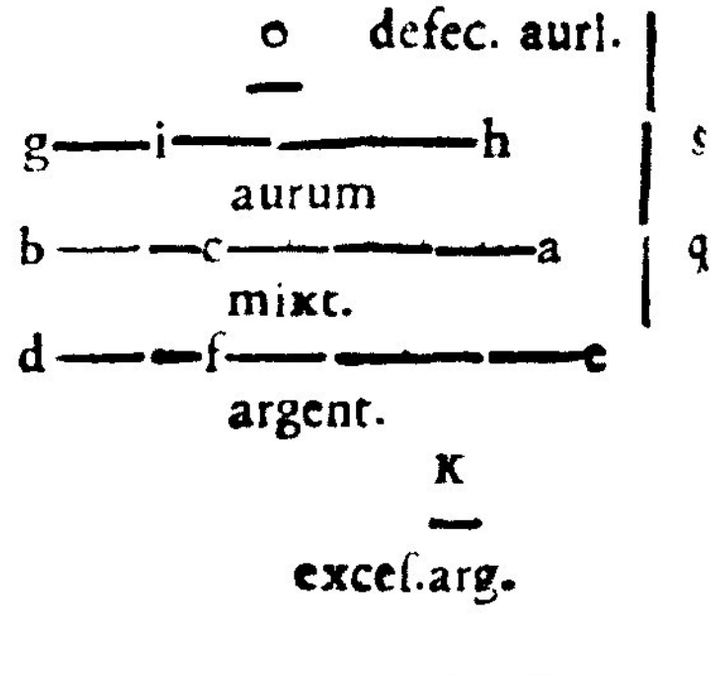
Si ergo *k* ponatur esse ad *o*, ut 15 ad 1, per regulam trium deprehendetur in *a b* massa 10 libr. esse unius libræ argenti 5 octavas.

Quod si detur mixtum ex metallis tribus, aut pluribus; nullo artificio deprehendi poterit, quâ proportione sint commix-

mixta, quod ea poſſit infinities variari, ut demonſtravi ſupra.

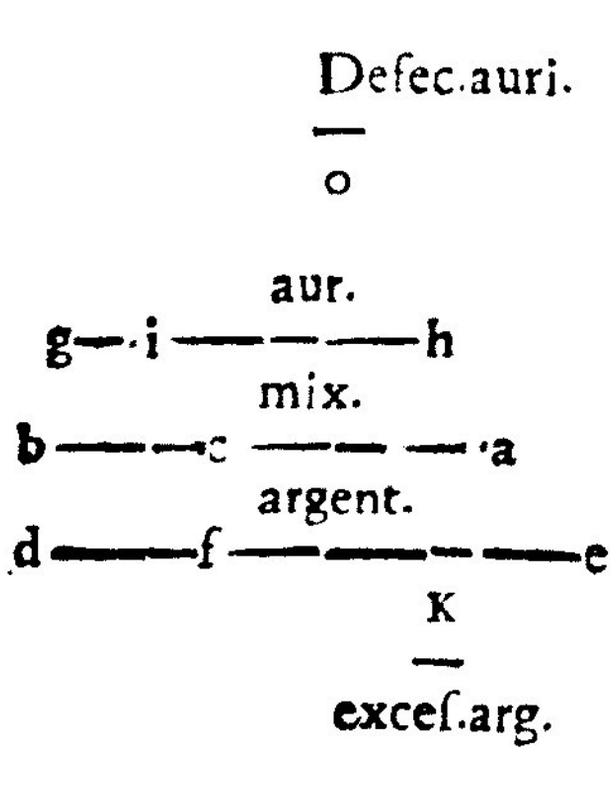
Alia Demonſtratio.

QUamvis demonſtratio jam allata mihi videatur clariſſima eſſe; atque id ipſum pateat ex demonſtratione univerſali ſupra: tamen quod in hac re demonſtranda nobiles Geometræ, & imprimis Marinus Ghetaldus in Archimede promoto laborarint, viſum eſt hoc ipſum alio modo, & faciliori, quàm ſit ille Ghetaldi, demonſtrare.



Argentum in mixto AB repræſentet CB, aurum CA. Tum in argentea mole DE intelligatur DE par BC; in aurea verò HI par AC. Quoniam ex hypotheſi DE excedit AB per K; ablatis utrimque æqualibus DF, BC, etiam FE excedet

det AC, hoc eſt per conſtr. HI, per H. Pari modo, quia AB excedit GH per O; ablatis æqualibus AC, HI, etiam BC, ſeu FD excedet GI, per O. Jam quia Argentum BC, & argentum DF æqualia ſunt mole, adeoque etiam pondere, & totum pondus AB toti ponderi DE per hyp. ſit æquale; erit quoque pondus reliquum auri AC, hoc eſt HI per conſt. æquale ponderi reliquo argenti EF. Igitur moles argentea EF eſt ad molem auream HI, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, exemp. gr., ut QS ad S. Ergo dividendo K, (qui eſt exceſſus EF ſupra HI, ut oſtendi ſupra,) eſt ad HI, ut Q ad S. Deinde, quia jam oſtendimus æqualia eſſe pondera EF, HI, cum etiam per hyp. æqualia ſint tota ED, HG; liquet, reliqua FD, IG paria eſſe. Rurſum igitur argentea moles DF eſt ad auream molem IG, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, hoc eſt ut QS ad S. Igitur dividendo O, qui eſt exceſſus FD (per demonſtrata ſuperius) ſupra IG, eſt ad IG, ut Q ad S. Atqui jam oſtenſum eſt etiam, ut Q eſt ad S, ita K eſſe ad HI. Ergo, ut K ad HI, ſic O eſt ad IG:



IG: & permutando, ut K eſt ad O, ſic HI eſt ad IG; & componendo, ut K cum O eſt ad O, ſic HG eſt ad IG, & (quia HG eſt moles homogenea) ſic pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG per hyp. eſt pondus AB; & pondus IG ſupra oſtendi eſſe pondus argenti FD, ſeu CB. Ergo, ut K cum O ad O, ita mixti pondus AB eſt ad CB pondus argenti in eodem mixto. Quod erat demonſtrandum.

CAP. V.

Regula poſitionis ſimplex.

PRo quæſito numero pone quemvis numerum, (qui hypotheſis appellabitur,) eumque examina juxta tenorem quæſtionis. Is ſi quæſtioni non ſatisfaciat, in regula trium primum locum teneat

neat numerus, ex decurſu inventus; ſecundum hypotheſis; tertium numerus, in quæſtione datus. Quartus, ex his inventus, ſolvet quæſtionem.

Illæ igitur quæſtiones, & ſolæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ex quarum decurſu inventus eſt ad hypotheſim, ut numerus datus ad quæſitum.

Quæſtio 1.

TRes ſimul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm ſecundus; & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

Pone ſecundum debere 100. Ergo primus debet 200, tertius 300: quæ ſimul cõficiunt 600. Deberent autem conficere 7000. Numerus inventus 600 ſit primus in regula trium; hypotheſis 100, ſecunda; datus in quæſtione 7000, tertius. Ex his invenitur quæſitus A. Igitur ſecundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri ſimul juncti conficiunt 7000.

		2
A	1166—	
		3
		1
B	2333—	
		3
C	3500	

De-

Demonſtratio hujus exempli, atque adeo totius Regulæ per ſe eſt manifeſta.

Quæſtio 2.

HOſtilis exercitus tertia pars cæſa eſt, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot ergo fuere univerſi? quot cæſi? quot capti?

Pro quæſito totius exercitus numero pone quemvis numerum, qui habeat datas partes, exemp. gr. 12. Igitur cæſi ſunt 4, capti 3, & ſuperſunt 5, qui fugerunt. Deberent autem fugiſſe 1000. Numerus, ex decurſu inventus 5, primus eſto in regula trium; hypotheſis 12, ſecunda; datus 1000, tertius: ex his prodit quæſitus 2400, cujus tertia pars eſt 800; quarta pars capta eſt 600: 800 autem, & 600 cum 1000 fugitivis conficiunt 2400.

Quæſtio 3.

TErtiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ ſimul efficiunt 50 leucas. Quot ergo milliaria to-

totum iter complectitur? quot eques absolvi? quot pedes?

Pro itinere toto pone quemvis numerum, datas habentem partes, puta 15. Eques igitur confeci 5 milliaria, pedes 3: quæ simul efficiunt 8 milliariæ. Deberent autem conficere 50. In regula trium primus esto 8, numerus inventus; hypothesis 15, secunda; datus 50, tertius: ex quibus prodit quæsitus A. Totum ergo iter sunt milliaria A, cujus pars tertia equestris est B, pars verò quinta pedestris est C: quæ simul efficiunt 50 milliaria.

		3
A	93 —	
		4
		1
B	31 —	
		4
		3
C	18 —	
		4

Quæstio 4.

SI præsidium augeretur tertiâ sui parte, & adhuc 100 accederent, essent milites 3000. In præsidio igitur quot sunt?

Hæc quæstio, & hujusmodi aliæ, sic propositæ, unicâ positione solvi nequeunt. Ut ergo per unam positionem hujusmodi quæstiones solvantur, numerus integer 100 fractionibus, quæ partes denominant numeri quæsiti, adhærens au-

ferendus eſt à dato numero 3000, ut fiat 2900; atque interim quæſtio ſic formanda: Si præſidium tertiâ ſui parte augeretur, milites eſſent 2900; quot igitur ſunt in præſidio? operando ex præſcripto regulæ, reperies in præſidio eſſe milites 2175: hi enim aucti tertia ſui parte, quæ eſt 725, fiunt 2900. Quod ſi numero ſic invento 2175, præter tertiam ſui partem, addantur 100, quæ à 3000 ſupra abſtulimus, reſtituentur 3000, atque ita ſolutio obtinebitur quæſtionis datæ.

Quæſtio 5.

ANtonius ætatem Caroli continet *bis*, & adhuc 4 annos. Paulus utriuſque ætatem complectitur, & inſuper annos 6. Omnes verò tres ſimul conficiunt 60 annos. Quot ergo ſinguli annos habent?

Neque hæc quæſtio per unicam poſitionem ſolvenda eſt. Ponatur enim Carolus habere annos 6. Horum duplo ſi addam 4, habebo 16 annos Antonii. Horum verò anni juncti adjectis 6, dant 28 annos Pauli. Et tres ſimul conficient annos 50. In regula trium pri-

primus eſto 50; ſecundus 6, hypotheſis; tertius 60, datus. Ex his pro quæſito annorum Caroli proveniet A. Qui numerus non ſolvit quæſtionem: ſic enim Antonius haberet annos B; Paulus verò annos C; & tres ſimul conficient annos D. Deberent autem 60.

		1
A	7 —	
		5
		2
B	14 —	
		5
		3
C	21 —	
		5
		1
D	43 —	
		5

Certum igitur eſt, non eſſe hîc numerum inventum ad hypotheſim, ut datus eſt ad quæſitum: aliàs enim unicâ poſitione fuiſſet quæſtio per regulam trium ſoluta. Verùm, cùm ſæpe non ita promptum ſit diſcernere, utrùm numerus, ex poſitione inventus, ſit ad poſitionem, ſeu hypotheſim, ut datus ſit ad quæſitum; aliud erit hujus rei indicium aſſignandum.

Ex quo indicio colligatur, quæſtionem unicâ poſitione ſolvi non poſſe.

QUotieſcumque, ut cum numero ad libitum poſito juxta quæſtionis tenorem procedatur, aſſumi debet numerus aliquis, in quæſtione datus, certus

esto, quæstionem unicâ positione solvi non posse.

Exemplum sumatur in quæstione ultima superiori, in qua pro annis Caroli positus est 6. Ut jam cum hac hypothesi procedatur juxta tenorem quæstionis, assumi debent 4, ad duplicatos Caroli annos adjiciendi, ut habeatur ætas Antonii: qui numerus 4, quia datus est in quæstione, ea solvi non poterit unicâ positione.

Quod universaliter sic demonstro.

HYpothesis, seu positio falsa sit F: numerus verus, qui quæritur, esto V: numerus quispiam, in quæstione datus, qui assumi debuit, ut cum falsa hypothesi F, quæstio decurri posset, sit A. Numerus datus, seu cognitus principalis, qui cum eodem A, & vero quæsito V, tenore quæstionis decurso, producitur, esto D. Manifestum est, A non esse ad F, ut A est ad V; cum F, & V ex hyp. sint inæquales. Alius ergo X major, minorve, quàm A, erit ad F, ut A est ad V. Procedendo igitur cum X, & F, juxta quæstionis tenorem, pro-

F V
X A
Z I D

producatur Z. Quoniam igitur X, & A ipſis F, & V ſunt proportionales; manifeſtum eſt, ſi juxta ejuſdem quæſtionis tenorem, tam cum X, & F, quàm cum A, & V procedatur, productos inde numeros Z, & D fore ipſis F, & V proportionales. Sit jam I ille numerus, qui inventus eſt, decurrendo cum falſa poſitione F tenorem quæſtionis, aſſumendo ad hoc datum illum numerum A. Quoniam igitur E, & A, ut oſtendi ſupra, ſunt inæquales; etiam Z, & I producti, ſeu inventi ex decurſu quæſtionis; ille cum X, & F; hic cum A, & F, inæquales erunt. Quare cùm ſupra demonſtratum ſit, Z eſſe ad F, ut D eſt ad V; non erit I, inventus ex decurſa quæſtione cum falſa hypotheſi F, & uno ex datis A, ad hypotheſim F; ut eſt datus numerus D, qui fit decurrendo quæſtionem cum vero quæſito V, & eodem dato A, ad quæſitum V. Ejuſmodi ergo quæſtio non ſolvitur una poſitione. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

CUm numerus ex poſitione inventus, & in quæſtione datus ſunt ſimiles plani, vel ſolidi, vel gradus altioris cujuſcumque; neque tum quartus proportionalis, per regulam triũ inventus, erit is, qui quæritur.

Diſponendi ſint 1875 *milites acie rectangulâ, ſic ut latus ſit triplo longius fronte. Quot in fronte diſponendi? quot in latere? Pone* 4 *in fronte. Ergo in latere erunt* 12 *: qui numeri ducti in invicem cõficiunt* 48. *Deberent autem* 1875. *Sunt ergo* 48 *inventus, &* 1875 *ſimiles plani, cum latera habeant ſimilia. Ergo eorum proportio per* 18. 8. *duplicata eſt proportionis laterum, quæ ſunt ipſa hypotheſis* 3, *& quæſitus. Igitur permutando, non eſt inventus* 48 *ex hypotheſi* 3 *ad hypotheſim* 3, *ut datus* 1875 *ad quæſitum. Ergo hæc quæſtio per hanc regulam ſolvi nequit. Eodem modo id ipſum oſtendam, cum inventus, & datus ſunt ſimiles ſolidi, ut continget in hac quæſtione. Eſt murus, qui continet* 13824 *pedes cubicos, longitudo ejus eſt decupla altitudinis, hæc verò quintupla ſpiſſitudinis. Quæritur longitudo, altitudo, ſpiſſitudo.*

Cæterum quæſtiones hujuſmodi aliis ſolvuntur viis, & facillimè per Algebram, cujus vis nullo quæſtionum genere limitatur.

CAP.

CAP. VI.

Regula duplicis poſitionis.

HÆc regula præcedenti multò univerſalior eſt: omnes enim quæſtiones, quæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ſolvuntur etiam per duas; & præterhas aliæ innumeræ, quæ per unam ſolvi non poſſunt.

Regula verò ſic habet. Pro quæſito numero pone quemvis numerum, qui dicetur hypotheſis, & cum eo procede, juxta tenorem quæſtionis: cui ſi non ſatisfaciat, errorem hypotheſi ſubſcribe. Ponatur deinde alius quicumque numerus, cum quo ſimiliter ratiocinare, juxta quæſtionis ſententiam: cui ſi non ſatisfaciat, errorem ſubſcribe hypoteſi ſuæ. Errores porro, ſi exceſſu peccant, notentur ſigno +; ſi defectu, ſigno —.

Ex duplici hac poſitione quæſitus numerus per regulam trium elicietur duobus modis.

Primus modus ex duplici errore eliciendi quæsitum.

IN regula trium primo loco statuatur differentia errorum, si similes ii sunt; errorum summa, si dissimiles: secundo loco differentia hypothesium: tertio loco error alteruter.

Quartus proportionalis, ex his tribus inventus, illi hypothesi, ex qua error tertio regulæ trium loco assumptus profluxit, *addendus* est, cum assumptus est error deficiens; *subtrahendus*, cum excedens, ut habeatur quæsitus.

Errores dicuntur similes, cum vel uterque est per defectum, vel uterque per excessum; dissimiles, cùm unus est per defectum, alter per excessum.

Nota. 1. Expedit plerunque hypotheses assumere quàm minimas, imo unitatem (si fieri potest), & binarium, ut quàm brevissima sit operatio. 2. Expediet item plerunque primam hypothesim solâ unitate augere, vel minuere, ut habeatur hypothesis altera, sic enim regula trium absolvetur solâ divisione. 3. Assumendæ hypotheses, quæ sine fractionibus, quantum fieri poterit, juxta te-

tenorem quæſtionis poſſint examinari: quâ de causâ nonnunquam expediet duas notationes primas negligere.

Reliquum eſt, ut exemplis præcepta declaremus.

Quæſtio 2.

TRes lucrati ſunt aureos 400. Lucrum ſecundi ſuperat lucrum primi aureis 12. Lucrum verò tertii excedit lucrum ſecundi aureis 16. Quæritur lucrum ſingulorum.

Lucrum primi eſto aureus unus. Ergo ſecundi lucrum ſunt 13 aurei, tertii 29: quæ ſimul omnia conficiunt 43 aureos. Debebant autem conficere 400. Error igitur per defectum eſt 357.

Hyp. 1.	2. hyp.
err. -357	-354 err.
2	
differ.	

Eſto rurſus lucrum primi, 2 aurei. Ergo ſecundi eſt 14, tertii 30: quæ ſimul efficiunt 46. Debebant autem 400. Erratum igitur eſt rurſum defectu 354.

hyp. 1.	2. hyp.
-357	-354

Quoniam igitur uterque error defectus eſt, ſic regulæ trium ordinandi erunt ter-

3 1 -357. err. pri.
Differr. Differ.hyp.
-354. err. sec.

termini, ex tribus 3,1,357 elicitur quartus 119, addendus primæ hypotheſi 1, ut fiat 120 numerus quæſitus. Ex tribus 3, 1, 354, quartus prodit 118, qui additus ſecundæ hypotheſi 2, etiam dat 120 numerum quæſitum. Igitur primi lucrum ſunt aurei 120: quibus adde 12, fit lucrum ſecundi 132. Huic quoque ſi addas 16, fit 148 lucrum tertii, qui tres numeri faciunt 400.

Aliter.

hyp. 1000 1001. hyp.
† 2640 † 2643

FInge primi lucrum eſſe 1000. Ergo ſecundi eſt 1012, & tertii 1028: quæ ſimul omnia faciunt 3040. Deberent autem 400. Erratum eſt ergo exceſſu 2640. Finge rurſum primi lucrum eſſe 1001. Ergo ſecundi eſt 1013, tertii 1029: quæ tria ſimul efficiunt 3043. Deberent autem 400. Erratum eſt ergo rurſus exceſſu 2643. Quare cum uterque error ſit per exceſſum, regula trium or-

di-

dinabitur, ut ſupra; ſed quartus proportionalis ab hypotheſi erit ſubducendus.

3 1 † 2460. err. pri.
Diff. error. Diff. hyp.
† 2643. err. ſec.

Ex tribus 3, 1, 2640 elicitur quartus 880, ſubtrahendus ab hypotheſi prima 1000, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus 3, 1, 2643 quartus prodit 881, qui ſubtractus ab hypotheſi ſecunda 1001, exhibet rurſus quæſitum 120.

Aliter.

hyp. 1. 1000. hyp.
-357 † 2640

FInge primi lucrum eſſe unum. Deprehendes, ut ſupra, errorem 357 per defectum. Finge rurſus lucrum ſecundi eſſe 1000. Error deprehendetur 2640 per exceſſum. Quoniam ergo diſſimiles errores ſunt, regula trium ſic ordinabitur.

2997 999 -357 err. pri.
Summa err. Diff. hyp.
† 2640. err. ſec.

Ex tribus 2997, 999, 357 habetur quartus

tus 119, qui, quod error fuerit per defectum, addendus eſt primæ hypotheſi 1, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus 2997, 999, 2640 invenitur quartus 880, qui, quòd error fuerit per exceſſum, ſubtrahendus eſt ab hypotheſi ſecunda 1000, & prodit idem quæſitus 120, qui ſupra.

Voluimus in hujus primæ quæſtionis ſolutione omnes regulæ caſus exponere. Quod hîc feciſſe ſemel ſufficiet.

Quæſtio 2.

ÆTas Antonii ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos. Paulus utriuſque ætætem complectitur, & annos adhuc 6. Omnes verò tres ſimul conficiunt annos 60. Quæ ætas eſt ſingulorum.

Hæc quæſtio eſt illa, quam cap. præced. huc rejecimus.

Ætas Caroli eſto annus 1. Ergo Antonii ætas eſt 6, Pauli 13: & tres ſimul efficiunt 20. Deberent autem 60. Erratum eſt ergo defectu 40. Fingo rurſum, annos Caroli eſſe 2. Ergo Antonii ſunt 8, Pauli 16: & ſimul omnes efficiunt

	Hyp. 1.	2. hyp.
	-40	-34.

ciunt 26. Erratur igitur defectu 34. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Err. diff.	Hyp. diff.	Error prim.
6	1	-40

Ex qua proveniet quartus A, addendus hypotheſi primæ 1, ut fiat quæſitus B, ætas nempe Caroli.

A 6 $\frac{2}{3}$

B 7 $\frac{2}{3}$

Quæſtio 3.

CONficienda eſt certa pecuniæ ſumma. Si ſinguli conferrent 1 florenum, deficerent ad ſummam floreni 19. Si duos ſinguli, redundarent itidem 10. Quanta eſt ſumma, & quot collatores?

Fingo collatores eſſe 100, qui ſinguli conferentes 1 florenum conficient 100 Flor., quæ ſumma quia à ſummâ quæſitâ deficere debet florenis 10, ſumma quæſita eſſet 110. Si jam ſinguli ex collatoribus 100 conferant Flor. 2, fient 200: à quibus ſi aufers 10, fit ſumma 190, quæ deberet eſſe æqualis priori 110. Sed aberrat per exceſſum 80. Fingo rurſum collatores eſſe 101, hi ſinguli conferen-

tes

tes 1 florenum conficiunt ſummam 101, ac	Hyp. 100.	101. hyp.
	† 80	† 81

proinde ſumma quæſita eſſet 111. Quod ſi conferrent ſinguli duos florenos, conficerent 203: à quibus ſi aufers 10, fit ſumma 192, quæ deberet æqualis eſſe ſummæ priori 111. Sed aberrat exceſſu 81. Sic ergo regula trium ordinabitur.

1	1	80
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. pri.

Quâ reperitur quartus 80, auferendus ab hypotheſi prima 100. Quæſitus ergo collatorum numerus eſt 20: quibus ſi addas 10, fit ſumma quæſita 30 flor. Si enim viceni ſinguli conferant 1, fit ſumma 20, quæ deficit à 30 per 10. Si verò ſinguli conferant 2, fit ſumma 40, quæ 30 excedit per 10.

Quæſtio 4.

REgius exercitus conſtat Hiſpanis, Belgis, Germanis. Germani ſunt 10, 000. Belgæ conficiunt tertiam partem Germanorum, & Hiſpanorum. Hiſpani dimidiam Germanorum, & Belgarum.

rum. Quot ergo ſunt Belgæ? quot Hiſpani?

Pono Belgas eſſe 4000. Ergo Germani,& Hiſpani ſunt 12000.Ergo quia Germani ſunt 10000, Hiſpani erunt 2000: qui bis ſumpti deberent conficere Germanos, & Belgas, nempe 14000. Conficiunt autem tantùm 4000. Erratum ergo eſt defectu 10000. Fingo rurſum, Belgas eſſe 5000. Ergo Germani, & Hiſpani ſunt 15000. Et quia Germani ſunt 10000, Hiſpani erunt 5000: qui bis ſumpti conficiunt 10000. Deberent autem conficere Germanos, & Belgas, nempe 15000. Erratum ergo eſt rurſum defectu 5000. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp.	Hyp.	
4000	5000	
-10000	-5000	

5000. 1000. -10000.
Diff.errorum. Diff.hyp. Error primus.

Quâ reperitur quartus 2000,addendus hypotheſi primæ 4000. Sunt igitur Belgæ 6000, Hiſpani 8000.

Quæstio 5.

SI ex Regio equitatu ad hostilem transfugerent 900, æquales forent utrimque. Si verò 900 ex hostili ad Regium transfugerent, esset Regius decuplo major hostili. Quæritur numerus utriusque equitatus.

Fingo equitatum hostilem esse 2000. Si ex his transfugiant 900 ad regios, restabunt 1100, & his decuplo tum major erit equitatus regius, ac proinde 11, 000 Unde si demam 9000 transfugas, regius equitatus erit 10, 100. Si ex hoc transfugiant 900 ad hostilem, restarent ex Regiis 9200, & hostilis fieret 2900; excediteque tum adhuc regius hostilem numerum 6300. Debebat autem æqualis esse.

	Hyp.	hyp.
	2000	2001.
Erratum est igitur	†6300	†6309.

excessu 6300. Fingo deinde hostilem equitatum esse 2001, & discurrendo rursum juxta tonorem quæstionis, reperio errari per excessum 6309. Sic igitur regula trium ordinabitur.

9	1.	† 6300.
Diff.err.	Diff.hyp.	Err.primus.

Ex qua reperitur quartus 700, à prima hypotheſi 2000 auferendus, quia error hypotheſeos eſt per exceſſum, ut fiat 1300. Hoſtilis ergo equitatus eſt 1300, Regius 31000.

Hæc quæſtio ſic etiam proponi poterat. Si Petrus Paulo ex ſuis nummis det 9, habebunt æquè multos ambo. Si verò Paulus ex ſuis det 9 Petro, is decuplo habebit plures, quàm Paulus. Quot ergo nummos habuit Petrus? quot Paulus? Reperies Petrum habuiſſe 31, Paulum 13.

Fraus aurifabri, de qua egi ſub finem cap.4., etiam per hanc regulam reperitur hunc in modum.

Quæſtio 6.

COrona ex auro, & argento mixta ſit 10 libr. Inquiratur, quantùm aurum in aqua fiat levius, quàm in aëre. Fit proportione 18 ad 19. Hinc per regulam trium elicitur, maſſam auri 10 lib. in aqua leviorem fieri proportione

$$A\ 9\tfrac{9}{19}\ \text{ad}\ 10$$

$$A\ 9\tfrac{27}{589}\ \text{ad}\ 10$$

$$C\ 9\tfrac{25}{589}\ \text{ad}\ 10$$

$$B\ 9\tfrac{1}{31}\ \text{ad}\ 10$$

$$B\ 9\tfrac{19}{589}\ \text{ad}\ 10$$

A ad 10. Inquiratur deinde, quâ proportione argentum in aqua fiat levius. Ea eſt 28 ad 31. Ex qua elicitur maſſam argenti 10 lib. leviorem fieri in aqua proportione B ad 10. Si jam corona 10 lib. ex auro, & argento mixta imponatur aquæ, ea fiet levior proportione aliqua inter priores mediâ. Ea ſit C ad 10. Quæritur, quantum argenti ſit permixtum.

Fingo admixtam eſſe libram 1. Ergo auri ſunt in Corona lib. 9. Jam ſi auri

ri libræ 10 ſunt in aqua libræ A; ergo 9 libræ auri in aqua quot appendent libras? per regulam trium, reperio libras D. Rurſum ſi

	47952	5320
D —— E ——		
	5890	5890
	42632	20628
F —— G ——		
	5890	5890

10 lib. argenti in aqua ſunt lib. B; ergo 1 lib. argenti in corona quid appendet in aqua? reperio E. Igitur D, & E deberent conficere C pondus coronæ in aqua. Conficiunt autem F. Erratum eſt igitur defectu G. Fingo deinde, admixtas eſſe libras argenti duas, & diſcurrendo ut ſupra, errorem reperio alterum L per exceſſum. Sic igitur regula trium ordinabitur.

		2	20
L		— ſeu	——
		589	5890

10648	1.	2	12780
——		— N	——
5890		589	6271672
Sum. err.	Diff. Hyp.	err. ſec.	

Ex qua proveniet N, quæſita argenti quantitas in mixto.

Alter modus ex duplici errore eliciendi quæſitum.

SI errores ſunt ſimiles, ducatur prima hypotheſis in errorem ſecundæ, & hypotheſis ſecunda in errorem primæ, & productorum differentia dividatur per differentiam errorum. Quotiens erit numerus quæſitus.

Si errores ſunt diſſimiles, productorum ſumma dividatur per ſummam errorum.

Reſumatur quæſtio prima, in qua hypotheſes erant 1, & 2; errores ſimiles -357, -354. Factâ multiplicatione alternâ, ſive in crucem, producta ſunt 354, 714, quorum differentia 360, diviſa per errorum differentiam 3, dat 120 numerum quæſitum.

Pri.	Sec.	
1	2	
-357	-354.	
3		Producta
Err. Diff.		354 714
		360
		Diff.

In eadem quæſtione aliæ erant hypotheſes 1000, & 1001, ex quibus errores provenerant ſimiles + 2640, & + 2643. Ex hypotheſium per errores alternâ multi-

ti-

tiplicatione producta ſunt 2643000, 2642640, quorum differentia 360, diviſa per 3 differentiam errorum, exhibet 120 quæſitum numerum.

Rurſus in eâdem quæſtione hypotheſes fuere 1, & 1000, ex quibus errores diſſimiles -357, & + 2640. Ex his, in alternos errores ductis, producuntur 2640, & 357000; quorum jam ſumma (ſunt enim errores diſſimiles) 359640, diviſa per ſummam errorum 2997, exhibet quæſitum 120.

Prior modus ſimplicior eſt, & plerumque expeditior.

De primi modi demonſtratione.

Quod ad primum modum attinet, nulla peculiari demonſtratione opus eſt; quandoquidem ſupponitur, ut quæſtio per hanc regulam ſolvi poſſit, uti differentia, vel ſumma errorum eſt ad differentiam hypotheſium, ita eſſe errorem ad numerum, qui ſuæ hypotheſi addendus, vel demendus eſt ad obtinendum quæſitum. Tantùm igitur proportionalitas illa erit nonnihil declaranda.

Quæſitum ſit AB: hypotheſis prima AC,

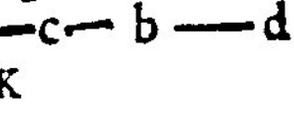
AC, & illius error EF : hypotheſis ſecunda AD, & hujus error EG. Sint autem primo hypotheſes, vel ambæ ſimul minores quæſito, vel ſimul ambæ majores, ut errores habeantur ſimiles. Si jam ſit, ut errorum differentia GF ad hypotheſium differentiam DC, ita primus error EF ad CB, quod primæ hypotheſi AC ad quæſitum AB deeſt, vel redundat; vel rurſum ſi ſit, ut errorum differentia GF, ad hypotheſium differentiam DC, ita ſecundus error EG ad DB, quod ſecundæ hypotheſi AD deeſt, vel redundat ad quæſitum AB, quæſtio per hanc regulam ſolvi poterit: ſi tunc enim (quod præſcribit regula) differentiæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is illud erit, quod alterutri hypotheſi debet addi, vel demi, ut habeatur quæſitum. Quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

a——c——d——b
e——g—f
a——·——·—b—d—e

Eſto deinde hypotheſis prima AC minor quæſito AB, ejuſque error H per defectum; hypotheſis verò ſecunda AD major quæſito, ejuſque error K per exceſſum. Si jam, ut ſumma errorum HK, eſt ad hypotheſium differentiam CD, ita

ſit

sit H error primus ad CB defectum primæ



hyporheseos AC à quæsito AB; vel secundus error K ad BD excessum hypotheseos secundæ AD supra quæsitum, solvetur quæstio per hanc regulam: si enim (quod regula jubet) summæ errorum, differentiæ hypothesium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is erit hypotheseos à quæsito defectus, vel excessus, ut per se patet.

Si porro quæras, quando sit errorum differentia, vel summa ad' differentiam hypothesium, ut error ad hypotheseos suæ excessum, defectumve à quæsito; ac proinde quæ sub hanc regulam quæstiones cadant, quæ non. Respondeo, id ex ipsâ quæstionum naturâ esse dijudicandum. De quo quidem, quia multa dicere operæ pretium non est, è pluribus unum, alterumve indicium adferam, obvium, & facile.

Si ex duabus hypothesibus plures habeantur errores, quàm duo, quæstio sub hanc regulam non cadet. Talis est hæc: invenire numerum, quo diviso per 2, 3, 4, 5, 6 restet semper unum, vel alii numeri dati; diviso verò per 7 restet nihil.

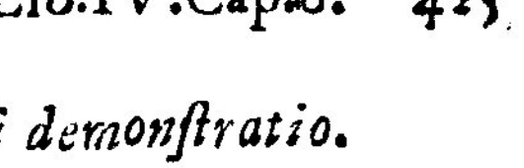
Si, cum uterque error eſt per defectum, error hypotheſeos majoris non ſit minor errore minoris; aut cum uterque error eſt per exceſſum, ſi error hypotheſeos majoris non ſit major errore minoris: ſcito rurſum quæſtionem non cadere ſub hanc regulam. Talis eſt quæſtio præcedens, imo etiam hæc. Invenire numerum, quo diviſo per 7, reſtent 3; diviſo per 9 reſtet nihil. Pono 27 pro quæſito: hunc metitur quidem 9, ſed 7 dividens relinquit 6. Deberet autem relinquere 3. Error igitur eſt 3 per exceſſum. Pono deinde pro quæſito 36, majorem prima hypoth. 18. Hunc 9 metitur, at 7 dividens reliquit 1. Deberet autem ſolum 3. Error igitur etiam per exceſſum, & minor errore primo. Non cadit ergo quæſtio ſub hanc regulam.

Tandem, ne nimiùm hic intricentur tyrones, generale indicium illis accommodatum iſtud eſto: Si ſemel cum duabus hypotheſibus ex præſcripto regulæ operatus quæſitum non obtineas, neque per alias quaſcunque hypotheſes quæſitum obtinebitur.

Modi ſecundi demonſtratio.

Caſus 1.

Quæſitum eſto AB : hypotheſis prima AC, ſecunda AD, utraque quæſito minor; error primæ EF, ſecundæ EG. Productum ex hypotheſi prima AC in errorem ſecundum EG, dicatur AC in EG. Productum ex hypotheſi ſecunda AD in errorem primum EF, æquatur *a* his quatuor, AC in EG; AC in GF; CD in EG; CD in GF. Quia igitur AC in EG utrique producto commune eſt, erit



a collig. ex 1. 2.

Productorum differentia. Æ AC in GF, CD in EG } quæ X CD in GF dicantur.

Dein AB in FG Æ *b*AC in GF, CD in GF } quæ dicantur DB in GF Z. *b* 1. 2.

Jam quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad CD hypotheſium differentiam, ut error primus EF ad CB hypotheſeos primæ defectum à quæſito AB; etiam permutando erit GF ad EF, ut CD ad CB. Ergo & GF eſt ad EG, ut CD ad DB.

DB. Ergo in aggregato Z, GF in DB, seu DB in GF æquatur CD *e* in EG, in aggregato X. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota X, & Z æqualia. Atqui jam oſtenſum eſt Z æquari AB in GF, X verò æquari differentiæ productorum. Ergo atiam AB in CF æquatur differentiæ productorum. Atqui AB in GF, diviſo per GF, quotiens eſt AB. Ergo etiam differentiâ productorum, diviſa per GF differentiam errorum, quotiens eſt AB, ipſum videlicet quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

p 19. 7.

Caſus 2.

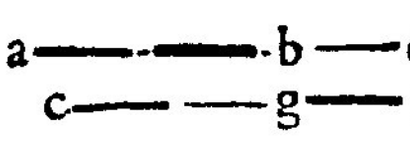
ESto jam hypotheſis utraque AC, AD major quæſito AB. Productum ex hypotheſi prima AC in errorem ſecundæ EG, dicatur AC in EG.

AC in EG Æ AB in EG, BD in EG, DC in EG } quæ dicantur P

Productum ex hypotheſi ſecunda AD in errorem primæ EF, dicatur AD in EF.

AD

AD in EF Æ { AB in EG, AB in GF, BD in EG, BD in GF } quæ dicantur Q



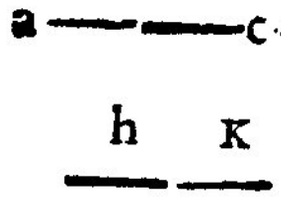
Nunc quia ex suppositione GF differentia errorum est ad DC differentiam hypothesium, ut primus error EF ad BC excessum hypotheseos primæ AC supra quæsitum AB, (aliàs enim quæstio per hanc regulam solvi non posset;) etiam permutando erit GF ad EF, ut DC ad BC. Ergo etiam GF est ad EG, ut DC ad BD. Ergo GF in BD, seu BD in GF æquatur DC in EG. Quare si in aggregato Q pro BD in GF substituatur DC in EG, erit

AD in EF Æ { AB in EG, AB in GF, BD in EG, DC in EG } quæ dicantur R

Quare si conferantur R, & P, invenietur productorum differentia esse AB in GF. Atqui AB in GF, diviso per GF, quotiens est AB. Ergo differentiâ productorum, divisâ per GF errorum differentiam,

tiam, quotiens eſt AB, ipſum nempe quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Caſus 3.



SIt denique prima hypotheſis AC minor quæſito AB; at ſecunda AD major. Productum ex hypotheſi primâ AC in errorem ſecundum K, dicatur AC in K. Productum ex AD hypotheſi ſecundâ in errorem primum H æquatur, AC in H; CB in H; BD in H. Ergo

Summa productorum.	Æ	*a*AC in K AC in H CB in H BD in H	quæ vocentur. S.

a collig. ex 1. 2.

Dein AB in HK	Æ	AC in K AC in H CB in H CB in K	quæ vocentur V

Vide etiam ſchemata pag. præc.

Nunc quia per hypotheſim HK errorum ſumma eſt ad CD differentiam hypotheſium, ut H error primus eſt ad CB hypotheſeos primæ AC defectum à quæſito AB; erit etiam permutando, dividen-

dendo, ac invertendo H ad K, ut CB ad BC. Ergo in S, & V, BD in H, & CB in K *o* æqualia ſunt. Quare cum reliqua *o* 19. *ax.* utrimque communia ſint, erunt tota S, & V æqualia. Quare cum V ſit AB in HK, & S ſit ſumma productorum; etiam AB in HK ſummæ productorum æqualis erit. Atqui AB in HK, diviſo per HK, quotiens eſt AB. Ergo etiam productorum ſummâ, divisâ per HK ſummam errorum, quotiens eſt AB, ipſum nempe quæſitum. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QUæſtio, quam negavi ſupra per regulam duplicis poſitionis ſolvi poſſe, celebratur ab Arithmeticis, nec tamen ſolvitur ab ullo, quem legerim. Quare viſum eſt in gratiam ſtudioſorum illius ſolutionem hîc apponere.

Lemma.

DAtum numerum A, ſæpius poſitum, dividere per datum B, donec reſiduus ſit datus D.

Hoc ita fiet: primo A 9 diviſo per B 7, reſtat 2, ſcribe ſupra primum 9, ac mente addi-

D 3.
A B
9 7
2.4.6.1.3.
9.9.9.9.9.45 C
7 7 7 7 7

dito ad ſecundum 9, *ut fiat* 11: *divide per* 7, *reſtabit* 4, *quæ ſcribe ſupra ſecundum* 9, *ac adde ad tertium* 9, *ut fiat* 13: *quæ rurſum divide per* 7, *reſtabit* 6. *Sic deinceps procedendo, reperies hîc ex quinta diviſione relinqui D* 3, *numerum datum.*

Eodem modo operaberis, ſi dẽtur duo numeri dividendi A, & X, quorum primus A tantùm ſemel, alter X ſæpius ponitur. In exemplo appoſito poſt quintã diviſionem relinquitur numerus datus D 2.

A	X			D 2.
45.	65			
		B 5		
0	3	1	4	2
45.	63.	63.	63.	63.
5	5	5	5	5
3	0	3	0	3
9	9	9	9	9
6	6	6	6	6

Quod ſi contingat bis relinqui eundem numerum, diverſum à dato, quæſitum lemmatis erit impoſſibile. In primo exemplo, in quo 9 *ſæpius poſitus dividitur per* 6, *tam poſt primã, quàm poſt tertiã diviſionẽ reſtat* 3: *liquet igitur cõtinuatâ ulteriùs diviſione sẽper eadẽ fore reſidua* 3.0.3. *In ſecundo Exemplo, in quo* 9, *&* 8 *ſæpius poſitus dividũtur per* 6, *tã poſt primam diviſionem, quàm poſt quartam reſtat* 3. *Quare ſi conti-*

3	5	1	3	5	1	3
9	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6			

nue-

nuetur divisio, eadem semper recurrent residua 3. 5. 1: ac proinde si residuum quæsitum in lemmate sit ab his diversum, lemma erit impossibile. Ratio per se est manifesta.

PROBLEMA I.

INvenire numerum (K,) quo diviso per datos quoscumque (A, B, C,) sint residua data (V, X, Z;) diviso autem per alium datum (D,) restet nihil.

Inveniatur F multiplex numeri D talis, ut eo diviso per C, restet Z: quod fiet si D toties ponatur, ac dividatur per C, donec restet Z, ut expositum est in lemmate: F enim tam multiplex est ipsius D, quoties D positus est.

Si jam F diviso etiam per B, non etiam restat X, inveniatur per 36. 7 minimus, quem D, & C metiuntur, qui sit M: tum inveniatur numerus G, compositus ex F, & multiplo ipsius M talis, ut eo diviso per B restet X. Id verò fiet, si primò ponatur F 45, ac deinde toties M 63, donec his per B divisis restet X: G enim æquatur F, & tam multiplo ipsius M, quoties M positus est.

Quod si jam G etiam diviso per A, non restet etiam V, quæratur per 38. 7. numerus

rus N minimus, quem tres D, C, B metiuntur: inveniatur deinde K compositus ex G, & multiplo ipsius N talis, ut eo diviso per A, residuus sit V: hoc verò obtinebitur, si primò ponatur G 297, ac deinde toties N 315, donec his divisis per A, restet V. K enim æquatur G, & tam multiplo ipsius N, quoties N positus est.

Dico K esse quæsitum, & quidem minimum.

A	B	C	D.		N. 315			63 M		
8.	5.	7.	9.							
5	2	3			K		G		F	
V	X	Z			1557.		297.		45.	
2	4	6	1	3	0	3	1	4	2	
9.	9.	9.	9.	9.	45	63	63	63	63	
7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	
			1	4	7	2	5			
			297.	315.	315.	315.	315.			
			8	8	8	8	8.			

Demonstratio.

EX constr. *D metitur M, ac proinde & multiplum ipsius M. Metietur etiam*
b constr. *D multiplum* b *suum F. Ergo D metitur G compositum ex F, & multiplo ipsius M.*
c constr. *Metitur autem D* c *etiam N, adeoque & multiplum ejus. Ergo D metitur compositum*

sum

tum d *ex G, & multiplo ipsius N. Quod erat è quæsitis primum.* d const.

Deinde C dividens F e *relinquit Z. Atqui C* f *metitur M, adeoque & multiplum ejus. Ergo C dividens G, compositum* g *ex multiplo ipsius M, & ex F, etiam relinquit Z. Rursum C metitur N, adeoque & ejus multiplum. Ergo C dividens K, compositum ex multiplo* h *ipsius N, & ex G, etiam relinquit Z. Quod erat secundum.* e const. f const. g const. h const.

Rursus per constr. B dividens G relinquit X. Atqui B metitur n *N, adeoque & ejus multiplum. Ergo B dividens K, compositum* i *ex multiplo ipsius N, & ex G, relinquet X. Quod erat tertium.* n const. i const.

Denique per construct. A dividens K relinquit V. Quod erat postremum. Quæsitus igitur numerus est K. Quod verò etiam minimus sit, ex constructione patet. Sumpsimus enim M, minimum, quem metiuntur D, C; & N minimum, quem metiuntur D, C, B.

Determinatio problematis patet ex lemmate.

PROBLEMA II.

IIsdem positis, numerum, qui problemati satisfaciat, secundum, & tertium, & omnes ex ordine reliquos infinitos reperire.

Inveniatur O minimus, a quem omnes divisores dati A, B, C, D metiuntur. Hic (O) additus primo K, superiùs invento, dabit secundum K † O; additus verò secundo, dabit tertium K † 2O. Et sic deinceps.

a 38. 7. Vide etiam scema pag. præc.

Demonstratio.

Quoniam A per constr. metitur O, & per præced. dividēs K relinquit V; etiam A metiens K † O relinquit V. Rursum quia B metitur c O, dividens verò d K relinquit X; etiam B dividens K † O relinquit X. Pari modo ostendam, si C dividat K † O, relinqui Z. Denique, quia D metitur O ex const. & K per præced.; metietur etiam K † O. Ergo K † O ex iis est, qui problemati satisfaciunt; & quidem secundus, quod ex K primo, & ex O omnium divisorum A, B, C, D minimo dividendo sit procreatus.

K K † O K † 2O
1557
O

c const.
d const.

Eodem modo demonstrabitur, tertium esse K † 2O, & sic deinceps in infinitum.

PROBLEMA III.

SI numerus quæratur, quo diviso per quotcumque datos (A, B, C) residuus sit sem-

ſemper idem numerus (V:) diviſo autẽ per alium datũ D, reſtet nihil; brevior erit operatio hunc in modum.

A	B	C	D
8.	4.	7.	6.
Q	R		4 0
56.	114.	2.	56. 56.
		V	6. 6.
		2	

Inveniatur a *minimus* Q, *quem A, B, C* a 38. 7. *metiuntur. Tum inveniatur R, compoſitus ex V, & multiplo ipſius* Q, *talis, ut eo diviſo per D, nihil remaneat; quod obtinebitur, ſi primo ponatur V* 2, *ac dein toties* Q 56, *donec his diviſis per D, nihil ſuperſit.* Q *enim toties acceptus, quoties poſitus fuit, unà cum V, dabit R.*

Dico R eſſe quæſitum.

Demonſtratio.

QUoniam A, B, C metiuntur b Q, *metientur etiam multiplum ipſius* Q. *Ergo A, B, C dividentes R, compoſitum ex multiplo ipſius* Q, *& ex V, relinquunt V. D autem dividens R, nihil* c *relinquit. Ergo R eſt quæſitus.* b conſt. c conſt.

Secundus, tertius, quartus, & reliqui omnes ſine termino, qui problemati ſatisfaciunt, *reperientur ut probl.* 2.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER V.

DE PROGRESSIONIBUS.

Quintum hunc, & poſtremum Arithmeticæ librum progreſſionibus dare viſum eſt. Eas alii obiter ferè tantùm, & quaſi appendicis inſtar tractare ſolent. Sunt tamen ejuſmodi, ſive theoriam ſpectes, ſive praxim, ut contemplationem longiorem, accuratioremque mereantur.

DE

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA

CAPUT I.

Progreſſionis Arithmeticæ affectiones.

PRogreſſio Arithmetica eſt ſeries numerorum, ſe mutuò æquali exceſſu ſuperantium. Primus ſeriei terminus poteſt eſſe quicumque; exceſſus quoque terminorum quilibet eſſe poteſt; etiam æqualis primo termino.

1 2 3 4 5 6 7 8 9. &c.
1 3 5 7 9 11 13 15 17. &c.
3 6 9 12 15 18 21 24 27. &c.

THEOREMA I.

QVilibet terminus (f) progreſſionis Arithmeticæ continet primum,

a b c d e f g h k
5 8 11 14 17 20 23 26 29
excel. x.
3.

hoc eſt minimum terminum (a,) & toties communem exceſſum (x), quot poſt primum uſque ad ipſum (f) inclusivè ſunt termini.

Patet ex definitione progreſſionis Arithmeticæ.

Corollarium.

HAbetur igitur maximus terminus, ſi exceſſus ducatur in numerum terminorum unitate mulctatum, & producto addatur minimus.

THEOREMA 2.

IN progreſſione Arithmetica ſumma duorum quorumlibet terminorum (c, g) *æquatur ſummæ quorumlibet duorum, ab ipſis æqualiter diſtantium* (a, k.)

Demonſtratio.

QUoniam *k* ſuperat *b* exceſſu *x*, eodem, quo *b* ſuperat *a*; ſi *k* det ſuum *x* ipſi *a*, patet *k* futurum æquale ipſi *b*, & *a* ipſi *b*. Igitur *a* cum *k* æquatur *b* cum *b*. Eodem modo oſtendam *b* cum *b* æquari *c* cum *g*: Ergo *a* cum *k*, æquatur *c* cum *g*. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 3.

PRogreſſionis Arithmeticæ terminus quicunque dimidius eſt ſummæ duorum, à ſe æqualiter diſtantium.

De-

Demonſtratio.

ACcipiatur terminus *e* quilibet. Quoniam tam *f* ipſum *e*, quàm *e* ipſum *d* excedunt exceſſu *x*; manifeſtum eſt, ſi *f* ſuum *x* det ipſi *d*, omnes tres *f*, *e*, *d* fore æquales. Ex quo patet *e* dimidium eſſe ſummæ duorum *d*, *f*. Atqui per theor. præced. ſumma *d*, *f* æquatur ſummæ *c*, *g*; & ſummæ *b*, *h*; & alteri cuilibet ſummæ duorum, æqualiter utrimque ab *d*, & *f* diſtantium. Ergo etiam *e* dimidius eſt ſummæ duorum, à ſe æqualiter diſtantium. Quod erat demonſt.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	(17)	20	23.	26.	29.
				exceſ. x				
				3				

THEOREMA 4.

IN qualibet progreſſione Arithmetica omnium terminorum ſumma habetur.

1. *Si ſumma minimi, & maximi termini ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur:*

Vel 2. *Si ſumma minimi, & maximi ducatur in ſemiſſem numeri terminorum:*

Vel 3. *Si ſemiſſis ſummæ minimi, & maximi ducatur in numerum terminorũ.*

Demonſtratio.

Sit primo numerus a b c d e f g h terminorum par.
Summæ binariæ *a,h*;& *b,g*; & *c,f*; & *d,e* ſunt inter ſe æquales per theor. 2. Earum autem numerus æqualis eſt dimidio numero terminorum. Ergo una ex his ſummis binariis, puta *a,h*, ducta in dimidium numerum terminorum, æquabitur omnium terminorum ſummæ:(quod erat ſecundùm;) ac proinde ducta in totum numerum terminorum erit ſummæ omnium dupla. Ex quo patet primum, & ex illo tertium.

Eſto deinde numerus terminorum impar, ut in ſcemate theor. 3. Cum ſummæ omnes binariæ *a,k*;& *b,h*; & *c,g*; & *d, f* ſint inter ſe æquales per theor. 2 : patet ex diſcurſu præcedenti, unam ex his, puta *a,k*, ductam in numerum terminorum *a, b, c, d, f, g, h, k*, (qui in hoc exemplo, medium *e* omittendo, eſt 8,) duplam fore eorundem terminorum. Atqui ſumma *a, k* dupla eſt medii *e*, per theor. 3. Ergo ſumma *a,k*, ducta in totum terminorum numerum(9,)qui jam propter medium aſſumptum eſt priori (8) unitate major, dupla

pla eſt omnium terminorum : ex quo patet primum ; ex illo autem facilè patebunt ſecundum, & tertium.

THEOREMA 5.

CUm numerus terminorum eſt impar, medius in numerum terminorum ductus exhibet ſummam omnium terminorum.

a b c d (e) f g h k
2 7 12 17 (22) 27 32 37 42.

Demonſtratio.

MEdius *e* dimidius eſt ſummæ extremorum *a*, *k* per th. 3. Atqui ſumma extremorum *a*, *k*, ducta in numerum terminorum, per th. 4, dupla eſt ſummæ omnium. Ergo medius *e*, ductus in numerum terminorum, æqualis eſt omnium ſummæ. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 6.

IN progreſſione naturali numerorum 1, 2, 3, 5, *&c. ſi ultimus* (8) *ducatur in numerum proximè majorem* (9;) *producti* (72) *ſemiſſis eſt ſumma omnium.*

1 2 3 4 5 6 7 8.

Demonſtratio.

NEmerus ultimo proximè major, quia tantum unitate major eſt, æquatur ſummæ ultimi, & primi, qui eſt unitas. Deinde numerus ultimus in progreſſione naturali eſt ipſe terminorum numerus. Ducendo igitur ultimum in proximè majorem, duco ſummam primi, & ultimi in numerum terminorum. Atqui ſic producitur duplum ſummæ omnium per theor. 3. Ergo etiam cum ultimus in proximè majorem ducitur, duplum producitur ſummæ omnium. Producti ergo ſemiſſis eſt omnium ſumma. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 7.

IN progreſſione naturali imparium 1, 3, 5, 7, *&c. ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.*

2 1

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

exceſ. 2.

Demonſtratio.

PEr theor. 4, hæc ſumma tota æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extre-

tremorum *a*, & *l* in numerum terminorū. Atqui dimidia ſumma extremorum *a*, *l* eſt par numero tetminorum, adeoque productum illud eſt quadratus numeri terminorum. Ergo ſumma tota æqualis eſt quadrato numeri terminorum.

Quod autem ſemiſſis ſummæ extremorum *a*, *l* ſit par numero terminorum, ſic oſtendo: per theor. 1, *l* continet *a* unitatem, & toties exceſſum communem 2, quot ſunt termini, dempto uno. Ergo ſi ad *l* adjiciatur *a*, nempe unitas, adhuc ſemel, continebit ſumma *a*, *l* toties 2, quot ſunt termini; ac proinde dupla eſt numeri terminorum. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *l* numero terminorum æqualis eſt.

THOREMA 8.

IN progreſſione naturali numerorum parium 2, 4, 6, 8, 10, *&c. omnium ſumma æqualis eſt numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.*

Exceſ. 2.

a k

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20.

De-

Demonſtratio.

PEr 4 theor. hæc tota ſumma æquatur ſemiſſi ſummæ extremorum *a*,*k* ductæ in numerum terminorum. Atqui ſemiſſis ſummæ *a*, *k* eſt unitate major numero terminorum. Ergo tota ſumma æquatur numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

Quod verò ſemiſſis ſummæ *a*,*k* ſit unitate maior numero terminorum, ſic demonſtro. Quia hic exceſſus communis eſt ipſe primus terminus *a*, manifeſtum ex theor. 1, *k* toties continere *a* nempe 2, quot ſunt termini; ac proinde duplum eſſe numeri terminorum. Ergo ſumma ipſorum *a*,*k* excedet duplum numeri terminorum exceſſu *a*. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *k* excedet numerum terminorum dimidio ipſius *a*, hoc eſt unitate.

THEOREMA 9.

CUjuſcumque progreſſionis Arithmeticæ numerus terminorum habetur, ſi à maximo dematur minimus, & reſiduum per communem exceſſum dividatur, additâ quotienti unitate.

Demonſtratio patet ex theor. 1.

CAP.

CAP. II.

Progreſſionis Arithmeticæ Problemata.

PROBLEMA I.

PRogreſſionem Arithmeticam continuare, uno termino, & exceſſu datis.

Continuabitur aſcendendo, ſi exceſſus x termino dato a addatur, ut fiat b; & ad b rurſus x, ut fiat c; & ſic deinceps. Continuabis verò deſcendendo, ſi à termino dato, puta d, demas exceſſum x, ut fiat c; & ab c rurſus auferas x, nt fiat b; & ſic deinceps.

a	b	c	d
1	4	7	10
Exceſ. 3.			
x			

PROBLEMA II.

MInimo termino, exceſſu, & terminorum numero datis, invenire maximum.

Exceſſum duc in numerum terminorum unitate multactum, & productum adde minimo termino, ſumma dabit maximum. Patet ex theor. 1, & corollario.

PRO-

PROBLEMA III.

Minimo termino, exceſſu, & numero terminorum datis, invenire ſummam progreſſionis.

Per probl. 1 inveni maximum, ſi datus non ſit. Deinde ſummam extremorum (id eſt minimi, & maximi) duc in numerum terminorum. Producti ſemiſſis eſt ſumma.

Patet ex theor. 4.

Aliter. Si ſumma extremorum par eſt, ejus ſemiſſis, ducta in numerum terminorum, dabit ſummam totam.

Aliter. Si numerus terminorum par eſt, ſumma extremorum, ducta in ſemiſſem numeri terminorum, dabit ſummam totam.

Utrumque patet ex 4 theor. *Cùm aut ſumma extremorum, aut numerus terminorum impar eſt, proveniet quidem ſumma, ſed ut fractiones declinentur, præſtat tum uti modo primo.*

Aliter. Cùm numerus terminorum impar eſt, medius in numerum terminorum ductus ſummam totam exhibebit.

Patet ex theor. 5.

Hi-

His tres modi ſunt univerſales, & primus inſuper à fractionibus liber eſt. Alii tres particulares habentur ex theor. 7, 8, 9.

PROBLEMA IV.

MAximo termino, exceſſu, & numero terminoum datis, invenire minimum.

Ducatur exceſſus in numerum terminorum unitate multactum, & productum aufer à maximo. Relinquetur minimus.

Patet ex theor. 1, & coroll.

Etiam independenter, vel ab exceſſu, vel à numero terminorum reperietur minimus, ſi maximus per numerum terminorum unitate multatum, vel per exceſſum dividatur: reſiduus enim erit minimus: ut patet ex eodem theoremate.

PROBLEMA V.

DAtis maximo, ac minimo terminis, & numero terminorum, invenire exceſſum.

Minimum aufer à maximo. Reſiduum divide per numerum terminorum unitate multatum. Quotiens erit exceſſus.

Pa-

Patet ex theor. 1, ac coroll.

Etiam independenter à minimo reperietur exceſſus, ſi maximus dividatur, quantum poteſt, per numerum terminorum unitate multatum. Quotiens enim erit ipſe exceſſus, ut patet ex eodem theor. Reſiduum verò diviſionis erit minimus.

PROBLEMA VI.

MInimo, maximo, & exceſſu datis, invenire numerum terminorum.

A maximo aufer minimum, & reſiduum divide per exceſſum. Quotiens unitate auctus erit numerus terminorum.

Patet ex 1 theor., & coroll.

Etiam independenter à minimo reperietur terminorum numerus, ſi maximus per exceſſum dividatur, quantum poteſt. Quotiens enim unitate auctus rurſus erit numerus terminorum, ut patet ex eodem theor. Reſiduum verò ex diviſione erit minimus.

PROBLEMA VII.

NUmero terminorum, exceſſu, & progreſſionis ſummâ datis, invenire minimum, & maximum.

Sum-

a b

3 7 11 15 19 23

exc. 4. sum. 78. num. term. 6.

c d e

quoti. (13. f

20. k

26. n

Summa progressionis *d*, dividatur per *e* numerum terminorum. Quotiens *f* erit semissis summæ extremorum *a*, *b*, per theor. 4. Duplicetur *f*, & fiat *n*: erit *n* summa extremorum.

Deinde numerus terminorum *e* unitate multatus, ductus in excessum *c*, sit *k*. Erit *k* extremus, dempto minimo, ut patet ex coroll. theor. 1.

Si auferatur igitur *k* ab *n*, residuum erit duplum minimi. Semissis ergo residui erit minimus, eoque adjecto ad *k*, qui erat maximus, dempto minimo, proveniet maximus.

Si non k *auferas à duplo* f, *sed semissem ipsius* k *à simplo* f, *residuum erit minimus quæsitus*.

PROBLEMA VIII.

DAto minimo (a,) *exceſſu* (c,) *& ſummâ progreſſionis* (b:) *invenire numerum terminorum, & maximum terminum.*

Quia duplum minimi *a* poteſt eſſe majus, vel minus exceſſu *c*, hinc gemina problematis ſolutio eſt.

a						
3	7	11	15	19	23	
	c				b.	
exc.					ſum.	
4					70.	

Eſto primum duplum minimi (*a*) majus exceſſu (*c.*) Reſiduum (hoc eſt differentiam) divide per exceſſum (*c.*) Quadratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ progreſſionis (*b,*) diviſo per exceſſum *c.* Ex hac novâ ſummâ extrahe radicem quadratam: à qua aufer ſemiſſem quotientis. Quod reſtabit, erit numerus terminorum quæſitus.

a						
2	7	12	17	22	27	
	c				b	
exc.					ſum.	
5					87.	

Eſto deinde duplum minimi (*a*) minus exceſſu (*c.*) Duplum minimi aufer ab exceſſu (*c.*) Reſiduum (hoc eſt differentiam) divide per exceſſum (*c.*) Quadra-

dratum ex ſemiſſe quotientis adde duplo ſummæ progreſſionis (*b*.) Ex hac novâ ſummâ elice radicem quadratam: cui ſi addatur ſemiſſis quotientis, proveniet numerus quæſitus terminorum.

Invento numero terminorum, habetur maximus, per probl. 2.

$$yy \text{ Æ} \frac{2b.}{c} \quad \frac{2a \dagger c}{c} y$$

PROBLEMA IX.

Data ſit progreſſio Arithmetica a, b, c *&c., cujus exceſſus* k, *& numerus quicunque* n. *Progreſſionem per tot terminos continuare, ut ejus ſumma par ſit numero dato* n, *in multitudinem terminorũ ducto.*

Quoniam duplum minimi *a* poteſt eſſe majus, vel minus exceſſu *k*, duplex habetur ſolutio problematis.

min.	a	3.
exceſ.	k	2
mult.	y	8.
num. datus	n	10.

Si duplum minimi majus eſt exceſſu *k*; ex duplo dati *n* aufer differentiam inter duplum minimi *a*, & exceſſum. Reſiduum divide per exceſſum *k*. Quo-

tiens eſt multitudo terminorum quæſita.

Si minimi *a* duplum eſt minus exceſſu *k*; duplo dati *n* adde differentiam inter duplum minimi *a*, & exceſſum *k*: ſummam divide per exceſſum *k*. Quotiens eſt multitudo terminorum quæſita.

Determinatio patet ex conſtr.

$$y \text{ Æ} \frac{2n - 2a + k}{k}$$

PROBLEMA X.

DAtur (a) *minimus terminus progreſſionis Arithmeticæ, & multitudo terminorum* (b,) *quæ ducta in alium datum numerum* (m) *æquatur ſummæ progreſſionis. Quæritur ipſa progreſſio.*

A duplo numeri dati (*m*,) auferatur duplum minimi termini (*a.*) Reliquum dividatur per multitudinem terminorum, unitate multatam. Quotiens erit exceſſus ſecundi termini ſupra primum: quo invento habentur ſinguli termini progreſſionis, per probl. 1.

mini.	a
mult.	b
num. datus	m
exceſ.	y

Cum

$$y \text{ Æ} \frac{2m-2a}{b-i}$$

Cum tria hæc poſtrema poblemata ſolverim per Algebram, & per eandem facillimè demonſtrentur, non putavi operæ pretium eſſe iis viâ ſynthetica, hoc eſt ordinariâ, demonſtrandis hic immorari.

CAP. III.

Quæſtiones circa Progreſſiones Arithmeticas.

RElíquum eſt, ut ex allatis jam problematis nonnulla ad materiam certam traducamus, per quæſtiones aliquot ſequentes.

Quæſtio 1.

COnſcripti ſunt milites per dies 30. Primo die adſcripti ſunt 300. Debus ſequentibus affluxere ſemper totidem, quot die præcedenti, & adhuc 10 ampliùs. Quot ergo univerſim ſunt conſcripti?

Solvẽdo problema 3, reperies cõſcriptos eſſe 13350. *Similis erit quæſtio ſequens.*

Quidam cum operario, illius ſtimulaturus induſtriam, ita convenit: primo die lucraberis 30 aſſes; ſecundo totidem, & ſi ſatisfeceris, adhuc tres ſuperaddam; atque ita quolibet die tantum lucraberis, quantum præcedenti, & aſſes inſuper tres. Hac lege 20 dies operi ſunt impenſi. Quæritur ſumma ſtipendii.

Solvendum eſt denuo problema 3. Ex quo reperies aſſes 1100, id eſt florenos 55.

Quæſtio 2.

ARtifex, ex pacto, die primo lucratus eſt 40 aſſes, poſtremo 90; quolibet autem die tantum, quantum præcedenti, cum auctario ſemper 5 aſſium. Quot ergo dies operi impendit? & quantum lucratus eſt?

Solve problema 6. Reperies dies 11. Tum ſolve problema 3, & ſumma lucri proveniet aſſium 715.

Quæſtio 3.

EX pacto lucratus eſt artifex die primo tres ſolidos. Deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, cum auctario ſemper ſolidorum 4.

Lu-

Lucri ſumma fuit 78 ſolidorũ. Quærun-tur dies operi impenſi.

Solvendo problema 8, reperies dies 6.

Quæſtio 4.

DUo æqualem ſummam nummorum expenderunt in pauperes: unus quotidiè diſtribuit nummos 10: alter verò die primo tres nummos; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, duobus ſemper adiectis. Quæriruf numerus dierum, huic diſtributioni impenſus, & ipſa ſumma.

Solvendo problema 9, reperies 8 dies, quibus ſinguli expenderunt 80 nummos.

Quæſtio 5.

DUo expenderunt in pauperes ſpatio dierum 4 æqualem ſummam nummorum: unus quotidiè diſtribuit nummos 7: alter primo die unum; deinceps autem tantum die quolibet, quantũ præcedenti, adiecto tamen ſemper adhuc aliquo nummorum numero ſuper eodem. Quantum ergo dedit quotidie? & quanta eſt ſumma tota?

Solve problema 18. Reperies eum, qui primo die expendit nummum unum, ſe-

cundo die expendiſſe 5, tertio 9, quarto 13, & ſummam totam 28.

De progreſſione geometrica, tum finita, tum infinita.

PRogreſſio Geometrica eſt ſeries numerorum, ſeſe mutuo eâdem proportione excedentium, ſive eſt quælibet proportio per plures terminos, quàm duos, continuata. Si proportio continuatur per terminos creſcentes, dicetur progreſſio aſcendens; deſcendens verò, ſi per decreſcentes. Porro cum progreſſio quælibet Geometrica, vel finita eſſe poſſit, vel infinita, ſeu indefinita (hoc eſt, continuari per terminos multitudine finitos, vel infinitos;) de hac librum prorſus inſignem ſcripſit Gregorius à S. Vincentio; de illâ ſolâ Arithmetici meminere: quod ſanè miror, quando (ut oſtendi ad prop. 35. l. 9, & ex dicendis hoc capite planum fiet) facillimus ſit à finitâ ad infinitam tranſitus.

De utraque igitur acturus hîc ſum, oſtendamque (quod ab aliis hactenus animadverſum non reperio,) progreſſionis *infinitæ myſterium* omne *in progreſſione finita*, Arithmeticis jam pridem notâ, la-

latere. Quod priuſquam aggrediar, neceſſaria quædam præmitto.

1. Denominator (X) proportionis, numericæ ſcilicet, ſeu rationalis (*a* ad *b*,) eſt numerus ita ſe habens ad unitatem, ut major terminus (*a*) ad minorem (*b*.) Reperitur, ſi major (*a*) dividatur per minorem (*b*.) Quotiens enim (X) eſt denominator quæſitus. Nam quotiens omnis ita eſt ad unitatem, ut diviſus (*a*) ad diviſorem (*b*.) Quando quotienti adhæret fractio, ea ad minimos terminos eſt revocanda: imo, ut uſui denominator ſit, integer ad fractionem ſibi adhærentem revocandus eſt, ut vides in Z.

a. 35 { 2
b. 15 { 2 — X
{ 3

{ 7
{ — Z Un.
{ 3

2. Si denominator eſt numerus integer, (quod tum accidit, cùm minor numerus majorem metitur;) unitas, & denominator ſunt minimi termini, ad quos proportio data reduci poteſt.

3. Si denominator eſt integer (*c*) cum fracto, (quod tum eveniet, cùm minor proportionis terminus (*a*) majorem (*b*) non metitur;) tunc minimi termini, quibus

bus data proportio (*a* ad *b*) exprimi poteſt, ſunt duo numeri; ac proinde minimos proportionis terminos non ingreditur unitas.

a 35 { 2 d 8 f / c. 2 — — / 3 c 3 c

b 15 Uni.

o m
2 c — —
n n

Demonſtratio.

FRactus integro *c* adhærens, ſi in minimis terminis non ſit, ad minimos redigatur per prob. 1. c. 3. l. 2, & ſit *d*, *e*. Ducatur deinde *e* in *c*, & genito adde *d*, ut fiat *f*, cui ſubſcribe *e*. Erit fractus *f*, *e* par integro *c* cum fracto *d*, *e*, ut tradidi cap. 4. l. 2: & ſi *e* dividat *f*, reſtituetur *c*, *d*, *e*. Per theor. 1. c. 2. l. 2. *f* eſt ad *e*, ut fractio *f*, *e* eſt ad unitatem; hoc eſt, ut denominator *c*, *d*, *e* eſt ad unitatem; hoc eſt ut *a* eſt ab *b*. Expreſſa igitur eſt ratio *a* ab *b* numeris *f*, & *e*: neque poſſe minoribus, jam oſtendam. Exprimatur, ſi fieri poteſt, minoribus *m*, & *n*. Quoniam igitur *m* eſt ad *n*, ut *a* ad *b*, hoc eſt ut *f* ad *e*, manifeſtū eſt *m* diviſo per *n* eundem provenire quotientem, qui ex *f* diviſo per *e*, integrum nempe *c*, atque inſuper fractum *o*, *n* parem fracto *d*, *e*. Unde per theor. 2. c. 2.

l.

1. 2. *o* eſt ad *n*, ut *d* ad *e*. Atqui volebas *n* minorem eſſe, quàm *e*. Ergo etiam *o* minor eſt, quàm *d*. Quod eſt abſurdum, cum fractio *d*, *e* in minimis terminis ponatur exiſtere. Minimi igitur termini, quibus ratio *a* ad *b* exprimi poteſt, ſunt duo numeri *f*, & *e*. Quod erat demonſtrandum.

CAP. IV.

Progreſſionis Geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.

THEOREMA I.

PRoportio quælibet (a *ad* b) *continuatur aſcendendo, ſi denominator* (z) *multiplicet terminum majorem* (b;) *deſcendendo, ſi denominator* z *dividat terminum minorem* (a.)

Demonſtratio.

Z multiplicans *b* gignat *m*. Ut *i* eſt ad denominatorem *z*, ita *a* eſt ad *b*. Atqui ex definitione multiplicationis, etiam ut *i* eſt ad *z*.

Uni

3
Uni.—Z.
2

h	g	f	a	b	m	n	o
32	16					81	243.
—	—	8.	12.	18.	27.	—	—
9	3					2	4.

Ita multipticatus *b* ad productum *m*. Ergo ut *a* eſt ad *b*, ita *b* eſt ad *m*. Quod erat primum. Deinde *z* dividens *a* gignat quotientem *f*. Per definitionem diviſionis diviſus *a* eſt ad diviſorem *z*, ut quotiens *f* eſt ad *i*. Ergo permut. diviſus *a* eſt ad *f*, ut diviſor *z* ad *i*. Atqui etiam eſt, ut *z* ad 1, ita *b* ad *a*; cum *z* ſit denominator rationis *b* ad *a*. Ergo *b* eſt ad *a*, ut *a* ad *f*. Quod erat alterum.

THEOREMA 2.

OMnis proportio, tam aſcendendo, quàm deſcendendo, continuari poteſt per terminos infinitos.

Demonſtratio.

Vide Scema præc. DAta ſit ratio quævis *a* ad *b*, cujus denominator *z*. Poteſt major terminus multiplicari per denominatorem, & pro-

productum *m* rursus per *z*, & sic in infinitum. Atqui, per theor. 1, sic ratio data continuatur ascendendo. Ergo &c. Pari ratione potest minor terminus *a* dividi per denominatorem *z*, & quotiens *f* rursum dividi per *z*, atque ita in infinitum. Sed, per theor. 1, ita continuatur ratio data descendendo. Ergo &c. *Termini tamen non erunt semper integri numeri. Ut patebit ex theor. 4.*

THEOREMA 3.

OMnis proportio multiplex, ascendendo continuari potest per infinitos numeros integros; descendendo tamen non semper usque ad unitatem.

h	g	f	a	b	m	n	o.	Den. z.
1.	2.	4.	8	16.	32.	64.	128.	

Demonstratio. 1 Partis.

CUjuscunque rationis multiplicis minor terminus *a* metitur majorem *b*, ac proinde ejus denominator est numerus integer, qui multiplicans *b* producit tertium terminum integrum *m*, & multiplicans *m*, producit quartum integrum *n*. Et sic in infinitum.

m. l. k. a. b. p. q.

3 Den. 2.

— 3 6 12 24 48 96.

2.

Demonſtratio 2. Partis.

EX præc. patet, ut deſcendendo continuetur ratio data *a* ad *b*, debere minorem terminum *a* dividi per denominatorem, qui cùm non ſemper metiatur terminos, quos diviſurus eſt, provenient quandoque quotientes non integri numeri. Ut in ſerie hîc appoſitâ denominator 2, dividens *a* gignit quotientem *k*; & dividens *k* quotientem *l*; dividens verò *l*, quem non metitur, gignit quotientem *m*.

Corollarium.

CUm omnis progreſſio, ab unitate incipiens, terminis conſtet multiplicem proportionem habentibus; patet ex theoremate, eam poſſe per integros numeros infinitos continuari.

THEOREMA 4.

NUlla proportio, quæ multiplex nõ ſit, per numeros integros cõtinuari poteſt, ſeu

ſeu aſcendendo in infinitum, ſeu deſcendendo uſque ad unitatem.

Demonſtratio.

PRoportionis *a* ad *b*, quæ multiplex non eſt, hoc eſt, cujus minor terminus non metitur majorem, denominator non eſt numerus integer. Ergo ut in præmiſſis num. 3. demonſtravi, minimos terminos, quibus exprimi ea poteſt, non ingreditur unitas; ſed ii ſunt duo numeri, proinde per 24. 7. inter ſe primi ſunt. Quare, per 16. 9, nequit illis reperiri tertius proportionalis; ac proinde neque aſcendendo, neque deſcendendo data proportio in his terminis continuari poteſt. Jam verò, per p. 2. l. 8, exhiberi poteſt progreſſio proportionis datæ conſtans tribus terminis integris; item alia progreſſio terminorum 4; item alia terminorum 5; atque ita infinitæ pregreſſiones diverſæ per 2. 8. reperiuntur, omnes terminis diverſis conſtantes, quarum unaquæque unum terminum habet amplius, quàm prior. Verùm, quia in ſingulis hiſce progreſſionibus datæ proportionis, extremi termini in p. 2. l. 8. jam citatâ demonſtrantur eſſe primi inter ſe, ea-

earum nulla continuari ulterius poteſt, ut patet ex 17. l. 9. Nulla igitur proportio, quæ multiplex non ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

l k h g f a b m n o p

16 81 2

— 8 12 18 27 — Den. — Z

3 2 3

Si quæras, quouſque ſine fractis continuari poſſit, reſpondeo id ex ipſo opere continuationis innoteſcere. Ut ſurſum continues rationem *a* ab *b*, ducendus eſt denominator *z* in terminum majorem *b*, per theor. 1. Quia verò denominator *z* integer numerus non eſt, qui producetur, neceſſariò fractus erit: qui ſi ad integrum reduci poteſt per ea, quæ traduntur prob. 4. c. 3. l. 2., continuabitur per illum adhuc integrum ratio data *a* ad *b*; ſi non poſſit, quod continget, ſi denominator numeratorem non metiatur, non poterit per integros numeros ratio *a* ad *b* ulterius continuari.

THEOREMA 5.

PRogreſſio Geometrica, cujus extremi numeri ſunt primi inter ſe, nec ſurſũ, nec

nec deorſum ulterius poteſt per numeros integros continuari.

Demonſtratur p. 17. l. 9.

THEOREMA 6.

IN omni progreſsione geometrica, incipiente ab unitate, ſecundus terminus, (unitas inter terminos non computatur,) quartus, ſextus, & reliqui omnes locorum parium ſunt quadrati.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	a	b	c	d	e	f	g	h
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Tertius, ſextus, nonus, & reliqui duobus intermiſsis omnes, quorum videlicet exponentes metitur ternarius, ſunt cubi.

Sextus, duodecimus, decimusoctavus, & reliqui omnes, quorum exponẽtes metitur ſenarius, ſunt quadrati ſimul, & cubi.

Quintus, ſeptimus, undecimus, decimustertius, & reliqui omnes, quorum exponentes ſunt primi numeri, neque quadrati ſunt, neque cubi.

Demonſtrantur hæc omnia in p. 8. l. 9. ejuſque ſcholio. *Exponentes ſunt numeri ſerici naturalis ab unitate, indicantes loca terminorum progreſſionis.*

THEOREMA 7.

IN progreſſione geometrica trium terminorum, (bb) *quadratus medii (hoc eſt medius in ſe ipſum ductus) producto* (ac) *extremorum æqualis eſt.*

a.	b.	c.
2	4	8
	bb	ab
	16	16

Demonſtratur p.20.l.7.

THEOREMA 8.

IN progreſsione geom. quatuor terminorum, productum (ad) *extremorũ æquatur producto* (bc) *mediorum. Idem verum eſt in quibuſcumque quatuor proportionalibus, licèt non continuè: ut ſi f ſit ad g, ut k ad m; f m productũ ab extremis æquatur* gk *producto à mediis.*

a	b	c	d
2	4	8	16
	ad	bc	
	32	32	
	f. g.	k m	
	2.6.	4 12	
	f m.	g k	
	24	24	

Demonſtratur p. 19. l.9.

THEOREMA 9.

IN omni geometrica progreſſione, (af) *productum extremorum, & producta* (be,

(be, cd) *terminorum æqualiter ab extremis distantium inter se æqualia sunt.*

Demonstratio.

QUoniam omnes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, sive *a*, *b*, *c*, *x*, *d*, *e*, *f* sunt continuè proportionales; manifestum est *a* esse ad *b*, ut *e* ad *f*.

a	b	c	d	e	f
3	6	12	24	48	96

Prod. 288

a	b	c	x	d	e	f
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.

Prod. 576.

Ergo per 19. 7. *af* productum ex primo *a* in quartum *f* æquatur producto *be* ex mediis *b*, & *e*. Pari ratione erit *b* ad *c*, ut *d* ad *e*. Ergo rursum per 19. 7. *be* genitus ex *b* in *e* æquatur *cd* genito ex *c* in *d*. Quod erat demonstrandum.

THOREMA 10.

QUivis terminus progressionis geometricæ in se ductus æquatur producto quorumlibet, æqualiter ab ipso distantium.

Demonstratio.

SUmatur quicumque *x*, sive is sit præcisè omnium medius, sive non. Quoniam

seem præc.

niam ex hyp. *c*, *x*, *d* ſunt proportionales; erit per theor. 4. ſive per 20 . 7 , *xx* quadratus aſſumpti *x* æqualis *cd* producto extremorum *c* , & *d*. Atqui per præced. productus ex *b* in *e* æquatur producto ex *c* in *d*. Ergo etiam productus ex *b* in *e* æquatur quadrato aſſumpti *x*. Liquet ergo quæſitum.

Nota pro ſequentibus theorematis, loca terminorum progreſſionis numerari ab unitate excluſivè, vel, ſi progreſſionis principium non ſit unitas , excluſivè à termino minimo progreſſionis : id enim , ut deinde apparebit, commodius eſt ad praxim. Porro numeri 0.1.2.3.4. *&c. ſupra progreſſionis terminos adſcripti, quos indices, ſeu exponentes dicimus , indicant quotus quiſque ſit ab unitate , ſeu termino minimo ; ſive quot locis quiſque ab unitate, vel minimo termino diſtet . Supra unitatem ſcribitur* 0 , *ſupra* (a) *primum ab unitate ponitur* 1, *ſupra ſequentem* (b) 2 , *& ſic deinceps ordine naturali.*

THEOREMA II.

IN *progreſſione geometricâ* ,

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.
0.	1	2	3	4	5	6	7	8.
	a	b	c	d	e	f	g	h

cu-

cujus principium unitas eſt, ſi quivis terminus (c) *per ſe ipſum multiplicetur, producetur alius ejuſdem progreſſionis terminus* (f), *locis duplo pluribus ab unitate diſtans.*

Demonſtratio.

EX p. 11. l. 9. corol. 3. Et facile etiam oſtenditur, ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpeciosâ exprimantur.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	a.	aa.	aaa.	aaaa.	aaaaa.	aaaaaa.	a7.	a8.
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Ex lemmate p. 8. l. 9, & quia multiplicationis productum ſolâ litterarum appoſitione exprimitur; patet ex *a* primo in ſe fieri *aa* ſecundum; & ex *a* in *aa* fieri tertium *aaa*; & ex *a* in *aaa* fieri quartum *aaaa*; & ſic deinceps. Ex quo manifeſtum eſt, ſingulos terminos tot locis diſtare ab unitate, quot litteris ſcribuntur; & contra tot ſcribi litteris, quot diſtant ab 1 locis. Atqui ſi terminus quivis, puta tertius *aaa*, in ſe ducatur, productus (*aaaaaa*) duplo pluribus litteris ſcribitur, quàm ipſe. Ergo etiam duplo pluribus ab unitate diſtabit locis. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 12.

Vide Scema theor. præc. 1. *IN progreſsione geometrica, cujus principium unitas eſt, ſi termini duo quilibet* (b, & e) *invicem multiplicent; eorum ab unitate diſtantiæ ſimul ſumptæ conficiunt producti* (g) *ab unitate diſtantiam.*

V. Scema 2. præc. Demonſtratio ſimilis præcedenti. Exprimatur ſeries ſpeciosè. Et multiplicent ſeſe mutuo ſecundus *aa*, & quintus *aaaaa*. Eorum litteræ ſimul junctæ dant productum *a7*, ac proinde (ut oſtendi in præced.) etiam eorum junctæ diſtantiæ exhibent diſtantiam producti ab unitate. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 13.

IN progreſsione geometrica, cujus principium unitas non eſt, ſi quivis terminus (c) *ſe ipſum multiplicet, & productus per minimum* (a) *dividatur; quotiens diſtabit ab minimo* (a) *locis duplo pluribus, quam terminus ſe ipſum multiplicans* (c.)

0.	1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	e	f	g
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.

De-

Denom. q. 2.

0	1	2	3	4	5	6.
a	aq	aqq	aqqq.	aqqqq.	aqqqqq.	aqqqqqq.
3	6	12	24	48	96	192.

Demonſtratio expeditur facillimè, ſi termini progreſſionis multiplicatione ſpeciosâ exprimantur. Per theor. 1. minimo termino *a* ducto in denominatorem *q* fit *aq* primus ab minimo; & primo *aq* ducto in denominatorem *q*, fit ſecundus *aqq*; & ex hoc in *q*, fit tertius *aqqq*; & ſic deinceps procreãtur termini reliqui progreſsionis omnes. Ex quo patet, quemlibet terminũ tot locis diſtare ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur litteræ *q*, denominatorem exprimentes. Terminus jam quiſpiam, puta ſecundus *aqq*, ducatur in ſe, hoc eſt in *aqq*; productus (*aaqqqq*) continebit litteras illius bis, nimirum duo *a*, & duplo plura *q*, quam producens (*aqq*.) Ergo ſi productus (*aaqqqq*) dividatur per minimum (*a*,) quotiens (*aqqqq*) ſcribetur uno *a*, & duplo pluribus *q*, quàm *aqq*, qui ſeipſum multiplicaverat. Quare cum jam oſtenderim, terminum quemlibet tot diſtare locis ab minimo *a*, quot in ipſo reperiuntur *q*, liquet quotientem (*aqqqq*) locis du-

duplo pluribus distare ab minimo *a*, quam *(aqq)* terminus se ipsum multiplicans. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 14.

Scema præc.

IN progressione geometrica, cujus principium unitas non est, duo quivis termini (c, & e) *sese invicem multiplicent, & productus per minimum* (a) *dividatur; quotientis distantia à minimo* (a) *æqualis erit se mutuo multiplicantium distantiis à minimo, simul junctis.*

Demonstratio est similis præcedenti, ut tantum opus sit exemplum adferre. Exprimatur series speciosè, ex qua se mutuò multiplicent primus *aq*, & quartus *aqqqq*. Productum erit *aaqqqqq*, quo diviso per minimum *a*, quotiens est *aqqqqq*, qui est quintus in progressione terminus, cujus distantia ab minimo *a*, est 5, quem efficiunt ipsorum *aq*, & *aqqqq* distantiæ 1, & 4.

THEOREMA 15.

SI à maximo termino finitæ progressionis duplæ auferatur minimus; reliquus æquatur summæ progressionis dempto maximo.

Mi-

Minimus *a*, a b c d e f g.
3, auferatur ex 3.6.12.24.48.96.192.
maximo *g*, 192.
Reliquus 189 æquatur omnibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, hoc eſt toti ſummæ, dempto maximo *g*.

Demonſtratum eſt in coroll. 4. prop. 35. l. 9.

THEOREMA 16.

IN omni finitâ progreſſione geometricâ, ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita maximi, & minimi termini differentia (ſive maximus dempto minimo) eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto maximo.

Demonſtratum eſt in coroll. 1. prop. 34. l. 9.

Corollarium.

ITaque exceſſus maximi termini ſupra minimum, in progreſsione dupla, æqualis eſt ſummæ reliquorum, (hoc eſt omnibus dempto maximo,) in progreſsione tripla, duplus; in progreſsione quadrupla, triplus; & ſic deinceps.

Demonſtratio patet ex hoc theoremate.

THEO-

THEOREMA 17.

Scema theor. 15. *IN omni progreſſione geometricâ finitâ, ut duorum maximorum* (f, g) *terminorum differentia eſt ad maximum* (g,) *ita maximus* (g) *dempto minimo* (a) *eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto minimo.*

Demonſtr. eſt coroll. 5. prop. 35. l. 9.

THEOREMA 18.

SI progreſſio quæcumque geometrica deſcendendo continuetur in infinitum; ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita primus, ſeu maximus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Dentur exempli gratia duo termini proportionis triplæ 54, & 18; & progreſsio inſtituatur *a*, *b*, *c*, *d* &c. continuetur-que per theor. 2 deſcendendo (hoc eſt per terminos proportionaliter decreſcentes)

a	b	c	d	e	f	g	h	k
54.	18.	6.	2.	2	2	2	2	2
				3	9	27	81	423

M. 27.

tes) in infinitum. Ut denominator 3 unitate multatus, nempe 2, eſt ad unitatem, ita primus terminus 54 eſt ad ſummam reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, *f* &c.

Demonſtratio.

PEr theor. 16. in progreſsione finitâ, ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem; ſic primus, ſeu maximus terminus, dempto minimo, eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſſione, per decreſcentes in datâ proportione terminos in infinitum continuatâ, minimus terminus evaneſcat (ut oſtenſum eſt in Elementis noſtris Geom. in ſchol. p. 11. l. 6. lem. 2.) erit ut denominator unitate multatus ad unitatem, ita primus terminus ad reliquorum infinitorũ ſummam. Quod erat demonſtrandum.

Vides, opinor, qui hæc legis, quàm facilis ſit, quod ſupra me oſtenſurum pſomiſeram, à progreſsione finita ad infinitam tranſitus. Unde mirum eſt, priores Arithmeticos, qui progreſsiones finitas tenerent, infinitas ignoraſſe, cum hæ ab illis immediatè dependeant. Theorema ſiquidem 16, ex quo demonſtratio hujus facillimè deducta eſt, corollarium eſt prop. 35. l. 9.

Id-

Idipſum apparebit ex corollario ſequenti, ex theorematis 19, 20, *& coroll. theor.* 19, *ex problematis* 7, 8, 9, 10, 11.

Corollarium.

PRimus terminus reliquorum infinitorum ſummæ in progreſſione dupla æqualis eſt; in progreſſione tripla, duplus; in progreſſione quadrupla, triplus; in quintupla, quadruplus; & ſic deinceps.

Patet ex theoremate.

THEOREMA 19.

Si progreſſio geometrica deorſum continuetur in infinitum, ut duorum primorum, hoc eſt maximorum terminorum differentia eſt ad ſecundum terminum, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Demonſtratio.

PEr prop. 35. l. 9. in progreſſione finitâ ut primorum, ſeu maximorum terminorum differentia eſt ad ſecundum, ita primus, dempto minimo, eſt ad ſummam reliquorum. Quare cum in progreſ-

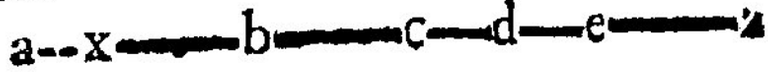
ſio-

ſione, deſcendendo in infinitum continuata, minimus *a* terminus evaneſcat, erit ut primorum differentia ad ſecundum, ita primus ad reliquorum infinitorum ſummam. Quod erat demonſtrandum.

Theorema convenit tam magnitudinibus, quàm numeris, quemadmodum & 35. 9. à qua dependet. Caterùm hic rurſus apparet, quàm expeditè à finitis progreſſionibus ad infinitas tranſeatur.

THEOREMA 20.

IIſdem poſitis, ſi primorum duorum terminorum differentia (ax,) *primus terminus* (ab,) & az *ſint continuè proportionales; erit* (az) *tota terminorum infinitorum ſumma.*



Demonſtratio.

QUoniam *ax* eſt ad *ab*, ut *ab* eſt ad *az*, erit invertendo *ba* ad *xa*, ut *za* ad *ba*. Ergo dividendo *bx* ad *xa*, ut *zb* ad *ba*. Igitur invertendo *ax* (differentia primorum *ab*, & *bc*) eſt ad *bx*, ſeu *bc* ſecundum, ut *ab* primus eſt ad *bz*. Ergo per theor. 18, *bz* eſt ſumma omnium, dempto primo *ab*. Ergo *az* eſt ſumma tota. Quod erat demonſt.

Co-

Corollarium.

QUando igitur progreſſionis duo maximi termini (*k*, *l*) ſolum unitate differunt, quadratus primi termini æquatur reliquorum infinitorum ſummæ.

k l. m
9. 8. 64 &c.
—
9

Demonſtratio patet ex hoc theor. & ex 18. l. 9. Tunc enim duorum primorum differentia eſt 1, quæ dividens quadratum maximi termini, per 18. 9, exhibet tertium proportionalem, ipſum videlicet quadratum, quem dividendo non mutat.

THEOREMA 21.

PRogreſſionis *geometricæ admiranda incrementa.*

Multa hanc in rem afferri ſolent. Unum ego afferam, ſed illuſtre, & quàm breviſſimè: oſtendam videlicet progreſſionis decupiæ, incipientis ab unitate, trigeſimum ſeptimum terminum plures continere unitates, quàm arenas contineat orbis terræ: & ſi primus terminus ſtatuatur arenula, trigeſimum ſeptimum

ab

ab illo futurum toto terrarum orbe majorem.

Ratiocinatio formabitur hunc in modum.

Scribit Archimedes in arenario, ſe comperiſſe 35 grana papaveris longitudinem digiti Geometrici excedere. Sed ponamus ea eſſe minora, & grana 40 efficere digitum.

Quoniam igitur milliare continet 80,000 digitorum (continet enim 5000 pedum, quæ ducta in 16 digitos, in pede uno contentos, efficiunt 80,000) ſi hæc ducantur in 40 grana unum pedem æquantia, fiunt 3 (200,000, numerus granorum conficiens milliare unum.

Jam ex Aſtronomis nemo diametro terræ tribuit milliaria 10,000. Sed demus eam eſſe tantam. Igitur ſi 10,000 ducantur in grana unius milliaris, nempe in 3 (200,000, provenient grana 32,000 (000,000, quæ continet terræ diameter. Verùm pro duabus notis (32) ſubſtituamus has (100) ut fiat numerus rotundus A, granorum terræ diametrum componentium, qui prioris plus quàm triplus eſt, adeòque & terræ diameter ex hoc capite rurſum augebitur pluſqam triplo, fietque major 30,000 milliariorum. Erit

igi-

igitur ut 1 ad numerum A, ita grani diameter ad diametrum terræ.

a Per lem. 2. in ſchol. poſt 11. l. 4.

1. Gran.

A. 100, 000(000000

B. 10, 000(000000(000000(000000

C. 1. 000(000000(000000(000000(000000(000000 cyf. 33.

Continuetur ratio 1 ad A per quatuor terminos 1, A, B, C. Erit per 18. l. 12. ut 1 ad C, ita grani ſphærula ad ſphæram terræ; quæ proinde continet numerum granorum C. Is verò præter unitatem habet cifras 33. Cùm enim primus A habeat cifras 11, ſecundus B habebit 22, & tertius C 33; ut patebit ex probl. 1. infra.

Ut jam cognoſcantur arenæ orbis terræ, inveniendæ tantùm erunt arenæ unius grani. Certum eſt, grani ſphærulam non continere arenas 10000. Si ergo C numerus granorum terræ ducatur in 10, 000, proveniet D numerus arenarum, totum globum terræ componentium; non illum quidem, qui de facto eſt; ſed alium longè majorem illo, cùm & grana aſſumpſerim minora, quàm ſint, & arenas uni grano dederim juſto plures, & diametrum

trum terræ posuerim multò plus, quàm triplo majorem verâ; ex quo postremo solo, cæteris neglectis, sphæra ex arenis D composita, per 18. l. 12, plus quàm vigelies septies orbe nostro toto major est.

D

10(000000(000000(000000(000000
(000000(000000

Est porrò numerus D, quia constat unitate, & cifris 37, terminus trigesimus septimus progressionis decuplæ 1, 10 100 &c. ut patebit ex prob. 1.

Scio, minori numero quæsitum obtineri posse, si aliter calculus instituatur. Sed quia id parum interest ad finem hic intentum, hanc viam, cæteris breviorem, secutus sum.

THEOREMA 22.

PErinde *admiranda sunt progressionum geometricarum decrementa, atque incrementa.*

Quemadmodum enim ab unitate per 37 terminos proportionis decuplæ ascendendo, pervenitur ad numerum, qui multo major sit numero arenarum, totam

telluris molem componentium ; ita viciſſim ab illo propè immenſo numero, per 37 terminos proportionis decuplæ deſcendendo, devenitur ad unitatem. Et quemadmodum ab arenulâ minimâ, aſcendendo per proportionis decuplæ terminos 37, ventum fuit ad magnitudinem, toto terrarum orbe majorem ; ita viciſſim ab ingenti illâ mole orbis terrarum, deſcendo per decuplæ proportionis 37 terminos, venietur ad arenulam.

CAP. V.

Progreſſionis geometricæ finitæ, ac infinitæ Problemata.

PROBLEMA I.

DAtam progreſſionem geometricam tam ſurſum, quam deorſum continuare in infinitum.

Conſtructio habetur ex theor. 1, & 2. Quædam ſolummodo hic annotanda ſunt.

1. Progreſſionis, ab unitate incipientis, denominatorem eſſe terminum ab unitate primum. Patet ex definitione denominatoris.

2. Cum termini progreſſionis conſtant unitate, & cifris, ſolâ cifrarum primi poſt unitatem termini additione cæteros terminos procreari, ut in theor. 21, quia A primus habet cifras 11; ſecundus B habebit 22 cifras; tertius C cifras 33; & ſic deinceps. Patet ex theor. 1, & ex ipſo multiplicationis opere.

3. Terminum quemlibet progreſſionis decuplæ 1, 10, 100 &c. tot locis diſtare ab 1, quot cifras habet. Patet ex 2. hic.

PROBLEMA II.

PRogreſſionis geometricæ, ab unitate incipientis, terminum quemcumque, licèt cogniti non ſint omnes medii, exhibere.

Res tota pendet ex 11, & 12 theor. Data ſit exempli gr. progreſſio dupla ab 1, cujus oporteat terminum quadrageſimũ tertium invenire.

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, quouſque nimirum potes abſque ulla moleſtia, (hîc facile continuabis uſque ad quintum,) & ſupra ſingulos ſcribantur exponentes. Duc

0	1	2	3	4	5
1.	2.	4.	8.	16.	32.

quintum 32 in ſe : proveniet decimus 1024 per theor. 11. Hoc rurſum in ſe ducto, prodibit 1048576 vigeſimus per idem theor. Quo etiam ducto in ſe, fit quadrageſimus 1 (078, 340(527, 776, cujus exponens eſt 40 : quæritur autem terminus exponentis 43. Differentia exponentium inventi 40, & quæſiti 43 eſt 3. Terminum igitur exponentis 3, nempe 8, duc in terminum jam inventum exponentis 40: producetur terminus exponentis 43 quæſitus, ut patet ex theor. 12, nimirum 3(235,621 (583, 318.

Simili modo per 11, & 12 theor. facile erit, quemvis terminum cujuſcumque progreſſionis reperire.

PROBLEMA III.

PRogreſſionis geometricæ, cujus principium non eſt unitas, quemcumque terminum, licèt cogniti non ſint omnes medii, invenire.

Praxis tota pendet ex theor. 13, & 14. Data ſit progreſſio *a* ad *b*, cujus oporteat terminum vigeſimum reperire.

Continuetur progreſſio per aliquot terminos, puta tres, & ſingulis ſuos exponentes ſupraſcribe. Du-

o	1	2	3	
a	b	c	d	
2.	6.	18.	54.	

Cu-

catur deinde tertius in se, & producto diviso per *a*, proveniet sextus. Hoc rursum in se ducto, & diviso per *a*, habetur duodecimus. Quo etiam in se ducto, ac diviso per *a*, prodibit vigesimusquartus, cujus distantia, seu exponens 24 deficit ab 29 exponente quæsiti, defectu 5. Assumo ergo duos exponentes, ut 3, & 2, qui juncti faciunt 5; & termino quidem exponentis 3 ducto in terminum jam inventum exponentis 24, & diviso producto per *a*, habetur vigesimusseptimus: quo rursum ducto in terminum exponentis 2, ac diviso per *a*, habetur vigesimusnonus, qui petebatur.

Demonstratio patet ex theor. 13, & 14. Simili methodo, quilibet alii termini reperientur.

PROBLEMA IV.

PRogressionis duplæ finitæ summam exhibere.

	a	b	c	d	e	f	g
A maximo termino (*g*)	3	6	12	24	48	96	192
aufer minimum (*a*). Residuus omnibus antecedentibus							192 3 189

bus (*f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*) æqualis eſt, per theor. 15.

PROBLEMA V.

Cujuſcunque progreſſionis geometricæ finitæ ſummam exhibere.

Maximus terminus ſi non datur, inveniatur per probl. 2, vel 3. A maximo aufer minimum. Reſiduum divide per denominatorem progreſſionis, unitate multatum. Quotiens æqualis erit toti ſummæ, dempto maximo.

Demonſtratio.

PEr theor. 16, ut denominator unitate multatus eſt ad 1, ita maximi, & minimi differentia eſt ad ſummam reliquorum. Ergo, per 19. l. 9, quartus proportionis, reliquorum nempe ſumma invenitur, ſecundum qui eſt unitas) ducendo in tertium (maximi nempe, ac minimi differentiam,, & productum, hoc eſt differentiam ipſam (ea quippe ducta in 1, non immutatur, dividendo per primum, nempe per denominatorem unitate multatum.

Exem-

Exempla.

k m n o p q r
1.3.9.27.81.243.729
3.den.
a b c d e f g
2.3.9.27 81 243 729
2 4. 8 16 32

$\frac{1}{2}q - \frac{3}{2}S$ denom. l. $\frac{665}{32}$ { V $\frac{1330}{32}$

DEtur progreſsio tripla *k*, *m*, *n*, &c. Denominator unitate multatus eſt 2. A maximo *r* aufer minimũ *k*. Reſiduũ 728 divide per 2. Quotiens 364 æquatur omnibus antecedentibus *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *k*.

Detur deinde progreſsio ſeſqui-alteræ proportionis *a*, *b*, *c* &c. Aufer minimum *a* ex maximo *g*: reſiduum eſt *l*. Ex denominatore *f* aufer unitatem: reſtat *q*. Per *q* divide reſiduum *l*, maximi nempe, & minimi differentiam. Quotiens V æquatur omnibus maximum antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*.

PROBLEMA VI.

CUm progreſsio datur finita proportionis multiplicis, ejus ſumma adhuc aliter reperitur per coroll. theorematis.

Si datur progreſsio duplorum; exceſſui primi termini ſupra minimum adde æqualem numerum.

Si datur progreſsio triplorum; eidem exceſſui adde dimidiam ejus partem.

Si datur progreſsio quadruplorum; exceſſui adde tertiam ejus partem.

Et ſic deinceps: hâc additione habebitur tota ſumma terminorum omnium, dempto minimo, ut patet ex citato ſupra corollario.

PROBLEMA VII.

PRogreſsionis geometricæ cujuſcũque, per infinitos terminos deſcendentis, ſummam exhibere.

Primus terminus dividatur per denominatorem progreſsionis, unitate multatum: quotiens primo termino adjunctus exhibet totam ſummam terminorum infinitorum progreſsionis datæ.

Demonſtratio.

PEr 18.theor. ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita primus terminus eſt ad reliquam infinitorũ terminorum ſummam. Cùm hæc igitur illis tribus ſit quarta proportionalis, exhibebitur ipſa, per 19. 9, ſi ſecunda quantitas ducatur in tertiam, unitas nempe in primum progreſſionis terminum, & productum, hoc eſt primus ipſe terminus (is enim ductus in 1, non immutatur) dividatur per denominatorem, unitate multatum, qui ex quatuor proportionalibus erat primus.

Exemplum.

DAta ſit progreſſio proportionis octuplæ, per infinitos terminos deſcendens. Primus *a* ſi dividatur per denominatorem unitate multatum, hoc eſt per 7, quotiens erit P. Igitur P æquatur toti ſummæ infinitorum, dempto primo *a*.

a b c d e f g
512.64.8. 1. 1. 1. 1
——— &c.
8.64.512
8. Denom.

1 1
P 73—Q 585—
7 7

Qua-

Quare si P addatur ad *a*, fiet Q æqualis infinitis terminis, in proportione octupla decrescentibus *a*, *b*, *c*, *d* &c.

Aliud.

k. m. n. o
25.20.16.64.
—&c.
5

$\frac{5}{4}$ den. $\frac{1}{4}$ p

DAta sit progressio *k*, *m*, *n*, *o* &c. Hujus denominator unitate multatus est *p*. Per hanc diviso primo termino *k*, 25, quotiens proveniet 100, Quibus additis ad primum terminum, fit numerus 125 æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA VIII.

P*Rogressionis geometricæ cujuscũque, per infinitos proportionales terminos descendentis, summam aliter exhibere.*

Per excessum primi termini supra secundum divide quadratum primi termini: quotiens toti summæ infinitorum proportionalium æqualis est.

Demonstratio patet ex theor. 20, & ex 18. l.9.

Exem-

Exemplum.

REpetatur progreſſio antecedens *k*, *m*, *n*, *o* &c. Exceſſus primi termini ſupra ſecundum eſt 5. Quadratus primi 25 eſt 625 : quo diviſo per exceſſum 5, fit quotiens 125, æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA IX.

Progreſſionis multiplicis, per infinitos terminos deſcendentis, ſummam aliter invenire.

Si datur progreſſio dupla, ut 12, 6, 3 &c. primo termino adde æqualem

Si tripla, ut 9, 3, 1. &c. primo termino adde partem ejus dimidiam.

Si quadrupla, ut 16, 4, 1 &c. primo termino adjice partem ejus tertiam.

Si quintupla, ut 25, 5, 1 &c. primo termino adde partem ejus quartam : atque ita deninceps. Hâc additione ſumma procreabitur æqualis toti progreſſioni proportionalium infinitorum.

Demonſtratio patet ex coroll. theorematis 18.

PRO-

PROBLEMA X.

PRogreſſionis ſuper-particularis, per infinitos terminos deſcendentis, ſummam aliter invenire.

Cùm proportio ſuper-particularis ſit, quando major terminus (*a*) minorem (*b*) continet ſemel, & unam ejus aliquotam, numerus aliquotam denominans ſit *m*.

a	b	c	d	e
16	12	9	27	81
			—	—
			4	16
		1	n	
den.	1	—	64.	Z
		3	m	
		x.	48	

Primus terminus per hunc (*m*) multiplicatus æquatur toti ſummæ infinitorum reliquorum (*b*, *c*, *d*, *e* &c.)

Demonſtratio.

DEnominator proportionis ſuper-particularis eſt unitas cũ fracto, cujus numerator eſt unitas, nominator vero ipſe numerus *m* aliquotam denominans. Ergo denominator progreſſionis ſuper-particularis unitate multatus eſt ſola illa fractio *n*, *m*: per quam diviſo primo *a*, proveniet ſumma reliquorum infinitorum

rum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. ut patet ex probl. 7. Atqui primus terminus *a* dividitur per fractum *n*, *m*, cùm per eundem inversum multiplicatur; multiplicatur verò per illũ inversum primus *a*, si solus nominator *m* multiplicet primũ *a*, cùm numerator *n* sit unitas: quæ omnia patent ex cap. 7. l. 2. Ergo si *m* numerus aliquotam denominans multiplicet primum *a*, habetur summa reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e* &c. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XI.

Progressionis geometricæ, cujus primi duo termini differunt unitate, per infinitos terminos descendentis, summam aliter exhibere.

Ducatur primus terminus in se ipsum, ut habeatur ejus quadratus. Is toti infinitorum proportionalium summæ æqualis est.

Demonstratio patet ex coroll. theor. 30. $9.8.7\frac{1}{9}$ &c.

Exemplum.

Data sit progressio proportionis 9 ad 8. Primi termini quadratus 81 infinitis hujus progressionis terminis æqualis est.

Præ-

Præcedentia 5 problemata, quæ artificio longè facillimo progreſſionis, per infinitos terminos deſcendentis, exhibent ſummam, deducta ſunt, vel ex theoremate 18. ejuſque corollario, vel ex 20: illa verò nullo negotio ex progreſſione finita deduxi. Liquet igitur, quod initio ſpoponderam, progreſſionis infinitæ myſterium omne in finita latere.

Cæterùm aſſertiones theorematum 18, 19, 20 capitis præcedentis, & conſtructiones problematum 7, 8, 20, 11 capitis hujus quædam ſunt P. Gregorii in lib. 2. quadraturæ; quædam ex illo derivari poſſunt: quamvis ego, ut jam dixi, tam has, quàm illas, ex progreſſione finita, quæ ſimiles planè, ac infinita, affectiones habet, novâ quâdam ratione deduxerim, ac demonſtraverim. Interim P. Gregorio ſua laus manet, & ea quidem eximia prorſus, & ſingularis, qui progreſſionum naturam libro integro ampliſſimè, ſubtiliſſimèque proſecutus ſit, ut cæteris non niſi ſpicas ex ſua meſſe colligendas reliquerit.

PROBLEMA XII.

PRogreſſionis finitæ dato denominatore, ſumma, & maximo termino, invenire minimum.

Denominator unitate multatus ducatur

tur in ſummam omnium, dempto maximo. Productum (z) aufer à maximo. Reſtabit minimus.

Demonſtratio.

DEnominator unitate multatus dividens maximum, dempto minimo, quotientem produxit ſummam omnium præter maximum, ut patet ex probl. 5. Ergo ex definitione diviſionis ſi quotiens, nempe ſumma omnium præter maximũ, ducatur in denominatorem unitate multatum, producetur maximus, dempto minimo. Ergo ſi hoc productum auferatur ex maximo, relinquetur minimus, qui quærebatur.

PROBLEMA XIII.

PRogreſſionis finitæ datâ ſummâ, denominatore, & minimo termino, invenire maximum.

Denominator unitate multatus ducatur in ſummam omnium, & producto addatur minimus. Hoc aggregatum divide per denominatorem. Quotiens erit maximus quæſitus.

Demonſtratio hujus operationis patet ex probl. 5, & ex analyſi, per quam inventa eſt.

PRO-

PROBLEMA XIV.

PRogreſſionis finitæ datis extremis, & omnium ſummâ, invenire denominatorem, & ſingulos intermedios.

Maximi, ac minimi differentiam divide per ſummam omnium, dempto maximo. Quotiens unitate auctus eſt denominator: quo invento per probl. 1. habentur ſinguli termini.

Demonſtratio.

SI maximi, ac minimi differentia dividatur per denominatorem unitate multatum, per probl. 5. provenit ſumma omnium, dempto maximo. Ergo per corol. 2. p. 16. l. 7. ſi eadem maximi, ac minimi differentia dividatur per ſmmmam omnium, dempto maximo, proveniet denominator unitate multatus. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA XV.

PRogreſſionis infinitæ deſcendentis dato denominatore, & omnium ſummâ, invenire maximum terminũ, & reliquos.

De-

Denominator unitate multatus ducatur in ſummam omnium: productum dividatur per denominatorem : quotiens erit maximus terminus.

Demonſtratio hujus operationis patet ex probl. 7, & ex analyſi, per quam inventa eſt.

PROBLEMA XVI.

PRogreſſionis infinitæ deſcendentis dato maximo termino, & omnium ſummâ, invenire denominatorem, & reliquos terminos.

Primum terminum divide per ſummam omnium, dempto maximo. Quotiens unitate auctus erit denominator: quo invento, per probl. 1. habentur ſinguli termini.

Demonſtratio.

SI denominator unitate multatus dividat primum terminum, quotiens per prob. 7. eſt ſumma omnium, dempto maximo. Ergo ſi ſumma omnium, dempto maximo, dividat eundem primum, quotiens erit denominator unitate multatus, per 2 coroll. p. 16. l. 7. Quotiens igitur, unitate auctus, erit denominator quæſitus. Quod erat demonſtrandum.

CAP. VI.

Quæſtiones circa progreſſionem geometricam.

RElquum eſt, ut ex problematis jam allatis ad materiam nonnulla applicemus.

Quæſtio 1.

Quanto tempore potuerit humanum genus propagari?

STatuamus Adamum 20 annis genuiſſe 20 liberos, 10 mares, & 10 fæminas. His verò, & deinceps aliis, qui ab his deſcendent, ut ſinguli proles 20 gignant, paria ſcilicet 10 maris, ac fæminæ, demus annos 40 : annis nempe 20, quibus apti ad generandum evadant, aſſignatis.

Adam igitur 20 annis genuit maris, ac fæminæ paria 10. Ab illis 40 annis ſequentibus gignentur paria 100. Ab his verò proximis 40 annis producuntur paria 1000 : atque ita deinceps per ſingulos quadragenos annos inſtituetur progreſſio proportionis decuplæ ; cujus terminus nonus, qui eſt 100(000000, incidit in annum mundi 340. Quadragenâ igi-

igitur annum 340 complente naſcentur 1000 milliones parium : & quadragenâ complente annum mundi 380, decies mille milliones parium : ea verò, quæ complet annum 420, parium 100 millia millionum ; & ſic deinceps. Tandem in quadragenâ, complente annum 620, naſcentur paria hominum 10, 100 (00000 (000000, hoc eſt decies mille milliones millionum ; is enim eſt progreſſionis decuplæ terminus decimus ſextus, incidens in annum mundi 620, per additionem continuam 40, ad 20 primos Adami annos. Quid ſi his addamus omnes præcedentium quadragenarum homines, pleroſque adhuc ſuperſtites, quanta multitudo ex ſolis 20 liberis Adami primo mundi vicenario procreatis exurget?

Atqui in hac hypotheſi habita ſolùm fuit ratio unius vicenarii annorum Adam. Quot igitur tales ex Adami ætate accipiemus annorum vicenarios, tot habebimus progreſſiones generationum ſimiles, quarum quælibet annos mundi 20 plures continebit, quàm progreſſio ipſam antecedens. Similiter ex ætatibus deſcendentium ſingulorum habita ſolùm fuit ratio annorum à 20 uſque ad 40, ac ſi per reliquam vitam liberos nullos produ-

cerent. Quæ omnia, si in calculum deducantur, hominum multitudo adhuc multo amplior evadet : vel certè abundè compensabunt ea, quæ in hypothesi superiori alicui videri possint liberalius assumpta.

Quæstio 2.

Quantum frumenti ex uno grano haberi possit intra annos 8?

REspondeo granorum plus, quàm decies mille milliones millionum.

Nam granum unum plura ordinariè profert, quàm 100. Statuamus tamen proferre 100. Hæc sequenti anno producent centies centum grana, hoc est 10, 000. Atque ita progressio proportionis centuplæ instituetur per annos 8. Anno igitur octavo granorum numerus proveniet 10, 000 (000000 (000000, hoc est decies mille milliones millionum; is enim, ut patet ex probl. 1, est octavus terminus progressionis centuplæ. Quod si hæc progressio per paucos adhuc annos continuetur, ne omnia quidem totius mundi horrea capient frumenti copiam, ultimo anno provenientem.

Hinc

Hinc apparet, quàm facilè peregrini fructus, olera, flores &c. in aliquam provinciam advecti, intra annos non multos multiplicentur.

Quæstio 3.

STatuamus Beatissimæ Virgini Deiparæ hanc à Deo prærogativam esse datam, ut per singulos charitatis actus gratiam prius habitam duplicaret. Statuamus insuper gratiam intra primum annum, quo ratione fuerit usa, acquisitam, ita excessisse gratiam primo acceptam, ut hic numeros 18 (446,774'073,709 (551, 615 unitatem. Quæritur, per quot actus tantam gratiam obtinuerit?

Respondeo per 64. Progressionis enim duplæ per 64 terminos continuatæ summa constituit dictum numerum.

Quæstio 4.

SI mobile quodpiam ita moveretur per totam æternitatem, ut primo die conficiat milliaria 9, secundo die milliaria 8, tertio 7 & 1 nonam, & sic deinceps diebus singulis percurrat spatia, in proportione semper eâdem 9 ad 8 decrescentia. Quæritur, omnia illa spatia percursa æter-

nitate tota, ſi in unam ſummam colligantur, quot milliaria conficient?

Invenienda eſt ſumma progreſſioni per infinitos terminos proportionis 9 ad 8 deſcẽdentis. Ea verò eſt 81. Conficeret igitur mobile iſtud motu, eâ ratione in æternum continuato, non niſi 81 milliaria: hoc eſt, conficeret plus omni eo, quod minus eſt milliaribus 81, accederetque ad hunc terminum intervallo quovis dato minori, licèt nunquam pertingeret.

Quæſtio 5.

Duo viatores ab 12 a..c.....b
iter faciunt; cb 10 d. 18
primus quotidie .....
abſolvit milliaria f. 9
ab (12), *ſecundus* .....
quotidie milliaria
cb (10), *ſed primum præceſſit milliaribus* d (18). *Quæritur quo die, & poſt quot milliaria primus ſecundum aſſequetur.*

Problema, hâc quæſtione contentum, à P. Gregorio à S. Vincentio applicatur Achilli teſtudinem inſequenti, & tum ab illo, tum ab aliis ex illo, ſolvitur per progreſſiones geometricas, quæ cauſa

fuit

fuit cur id hoc loco adduxerim. Verùm independenter etiam à progreſſionibus, & expeditiſſimè quidem ſolvitur hunc in modum.

Milliariorum, quæ uterque abſolvit quotidie, differentia *ac* dividat milliaria *d*, quibus alter præceſſit: quotiens *f* (9) erit numerus dierum, quo primus ſecundum aſſequetur. Quod ſi *f* ducas in *ab* provenient milliaria (108), in quorum termino ſe invicem aſſequentur.

Demonſtratio.

QUoniam *ac* dividens *d* fecit *f*; ergo *ac* in *f* producit *d*; hoc eſt *ac* in *f* æquatur *d*. Quare ſi addatur utrique quod fit ex *cb* in *f*; erit *ac* in *f* cum *cb* in *f* æquale ipſi *d* cum *cb* in *f*. Atqui per 1. 2 *ac* in *f* cùm *cb* in *f* eſt *ab* in *f*. Ergo *ab* in *f*, (hoc eſt milliaria, quæ diebus *f* primus confecit) æquantur ipſi *d*, cùm *cb* in *f* (hoc eſt milliaribus, quibus ſecundus præceſſerat, unà cum his, quæ confecit diebus *f*). Ergo in termino dierum *f* primus ſecundum aſſecutus eſt. Quod erat demonſtrandum.

CAP. VII.

De mediis quotcumque proportionalibus inter duos datos numeros.

INter duos datos numeros datam mediorum proportionalium multitudinẽ invenire, nihil aliud eſt, quàm progreſſionem geometricam exhibere, conſtantem dato numero terminorum, cujus extremi duo ſint dati. Pertinet igitur ad progreſſiones, quod hoc capite proponitur.

THEOREMA I.

INter duos numeros (A, B) qui ſe invicẽ multiplicãtes quadratum numerum nõ producunt, medius proportionalis neque integer, neque fractus reperiri poteſt.

A 2 5 B
X
C 10 Z.

Demonſtratio.

SI enim poſſit, ille ſit X, qui in ſe ductus faciat Z. Ergo per 20. 7 factus ex A in B, nempe C, æquatur Z. Quare cùm numerus X ſit radix quadrata Z, per conſtr. etiam numerus X erit radix quadrata facti ex A in B: quod eſt abſur-

dum

dum, cùm demonſtratum ſit cap. 7. l. 3. numeri non quadrati radicem, neque integro numero ullo, neque fracto explicabilem eſſe.

Aliter. Medius proportionalis inter A, & B eſſet radix quadrata geniti ex A ducto in B: ut patet ex 20. 9. At radix iſta, cum genitus ex A in B ex hypotheſi ſit non quadratus, nullo numero ſive integro, ſive fracto explicabilis eſt, ut oſtendi l. 3. c. 7. Ergo inter A, & B nullus cadit medius proportionalis ſive integer, ſive fractus. Quod erat demonſtrandum.

Eſt illa igitur arcana indoles numerorũ, ut quamvis quibuslibet duobus datis ſemper exhiberi poſſit tertius proportionalis, ſaltem fractus, medius non ſemper poſſit.

Sed & hoc obſervatione dignum, inter quos numeros non cadit medius unus, inter eos poſſe exhiberi medios duos, aut plures. *Exponatur ſeries progreſſionis duplæ;* 1 2 4 8 16 32 64 128 *in hac* 2, & 16 *ſe invicem multiplicantes gignunt* 32, *qui quadratus non eſt, ac proinde inter eos unus medius non cadit: & nihilominus exhibentur inter eos medii duo, nempe* 4, & 8. *Pari modo* 2 *in* 64 *gignit* 128, *qui quia quadratus non eſt, inter* 2, & 64 *nequit reperiri medius*

dius unus, & tamen inter eos exhibentur medii quinque, nimirum 4, 8, 16, 32. 64.

THEOREMA 2.

X a. b. c Z
d g
e h
f k
i

DAti sint duo numeri X, Z, vel primi absolutè, vel primi inter se, alterutro existente primo. Dico inter hos, aut quoslibet his proportionales nullos exhiberi posse medios proportionales sive integros, sive fractos.

Demonstratio.

CAdant, si fieri potest, inter X, & Z primo medii proportionales integri quocumque numero, puta tres *a*, *b*, *c*. Quia ergo inter X, Z inter se primos cadunt tres medii; etiam per 9, 8 inter ipsos, & unitatem totidem medii cadent *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *k*. Ergo per 11. 9 quilibet mediorum *d*, *e*, *f* metitur X, & quilibet ipsorum *g*, *h*, *k* metitur Z: quod est absurdum, cùm alteruter datorum X, Z ponatur esse primus.

Cadant deinde inter X, Z, si fieri potest, medii proportionales fracti *ab*, *cd*, *ef*. Revocentur tam integri X, Z, quàm fra-

fracti medii ad fractiones ejuſdem nominis *op*, *lp*, *mp*, *np*, *ſp*. Erunt igitur etiam hæ continuè proportionales. Quia verò harum fractionum communis eſt nominator *p*, erunt per theor. 6. c. 2. l. 2. numeratores *o*, *l*, *m*, *n*, *s* ipſis fractionibus proportionales; ac proinde etiam ipſi *o*, *l*, *m*, *n*, *s* continuè proportionales erunt. Igitur inter extremos *o*, & *s* cadunt medii proportionales integri *l*, *m*, *n*. Sed quia per conſtructionem X, & Z æquantur fractis *op*, & *ſp*, erit X ad Z, ut fractus *op* eſt ad fractum *ſp*, hoc eſt, ut *o* ad *s*. Quare cùm inter *o*, & *s* cadant integri proportionales medii *l*, *m*, *n*, etiam inter X, & Z cadent per 8. 8. totidem medii proportionales integri: quod fieri non poſſe, jam oſtenſum eſt in prima parte.

a. c. e
X -- -- -- Z
b. d. f.

o. l. m. n. s
-- -- -- -- --
p. p. p. p. p

Eodem diſcurſu per 8. 8. demonſtrabitur, proportionales nullos reperiri medios inter numeros quoſcumque jam dictis proportionales.

PROBLEMA I.

INter duos datos numeros unum medium proportionalem invenire.

Da-

Dati numeri ſe invicem multiplicent. Producti radix quadrata eſt medius quæſitus. Quod ſi productus non ſit quadratus, Problema eſt impoſſibile, ut patet ex theor. 1.

PROBLEMA II.

INter duos datos numeros quotcunque medios proportionales exhibere.

		A	B	
1	c	d	e	f.
1. R4)	c.	R4) d.	R4) e	R4) f.
A. R4)	m.	R4) n.	R4) p	R4) s.

Dati ſint numeri A, B. Major B dividatur per minorem A, & quotiens ſit *c*. Inſtituatur progreſſio geometrica incipiens ab 1, & *c* per terminos uno plures (unitate non computatâ) numero mediorum quæſitorum: ut ſi cupis duos medios, progreſſio continuetur per terminos tres; ſi tres medios, per quatuor; & ſic deinceps. In exemplo appoſito progreſſio conſtat, præter unitatem, quatuor terminis *c*, *d*, *e*, *f*, quia petuntur tres medii.

Ex hiſce terminis extrahatur radix cubica, ſi petantur medii duo; radix biquadra-

drata, ſi tres; & ſic deinceps. In exemplo noſtro, quia petuntur medii tres, ex 1, *c*, *d*, *e*, *f* extrahantur redices biquadratæ, quæ ſic exprimuntur: 1, R4) c, R4) d, R4) e, R4) f. Ducantur deindæ hæ radices in A minorem datum, ut fiant A, R 4) m, R 4) n, R 4) p, R 4) s.

Dico, inter duos datos tres medios eſſe R4) m, R4) n, R4) p, ſi quidem numeri *m*, *n*, *p* ſint biquadrati: ſin verò, Problema eſſe impoſſibile.

Demonſtratio.

QUoniam 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt per conſtr. continuè proportionales, etiam radices eorum ſimiles 1, R 4) c, R 4) d, R 4) e, R 4) f continuè proportionales erunt. Atqui A has multiplicans produxit A, R 4) m, R 4) n, R 4) p, R 4) s. Ergo, per 17. 7, etiam hi producti erunt continuè proportionales; ac proinde inter A, & R 4) s inventi ſunt tres proportionales medii R 4) m, R 4) n, R 4) p. Quare ſi oſtenderimus R 4) s æquari B, liquebit propoſitum.

Quia per conſt. 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt continuè proportionale, erit per 8. 9. quartus *f* biquadratus radicis *c*. Ergo *c* eſt

	A	B		
1	c	d	e	f.
1.	R4) c.	R4) d.	R4) e.	R4) f.
A.	R4) m.	R4) n.	R4) p.	R4) s.

est R4) f. Jam quia A dividens B fecit quotientem *c*, ergo A ductus in *c* producit B. Quare cum *c* sit R4) f, etiam A ductus in R4) f, producet B. Sed A ductus in R4) f produxit R4) s. Ergo R4) s est B. Inter A igitur, & B medii sunt inventi tres R4) m, R4) n, R4) p.

Quod si numeri *m*, *n*, *p* non sint biquadrati; eorum biquadratæ radices R4) m, R4) n, R4) p nullis poterunt numeris integris, fractisve explicari, ut demonstratum est l. 3. c. 7; ac proinde impossibile erit quæsitum Problematis.

CAP. VIII.

De Combinationibus, & Permutationibus.

HOc capite, quod ad progressiones quasi quædam appendix est, Arithmeticam hactenus explicatam, ac demonstratam concludo.

Quamvis voces illæ combinatio, & permutatio promiscuè possunt accipi, visum est

eſt hic tamen eas diſtinguere hunc in modum. Datus ſit certus rerum numerus, exempli gr. 10 litteræ. Si quæratur quot ex his 10 litteris haberi poſſint diverſi binarii litterarum, & quot diverſi ternarii, & ſic deinceps, dicentur quæri omnes combinationes diverſæ litterarum 10, quarum ſingulæ, & ſemper minori conſtant rerum numero, quàm is, qui datus eſt, & nulla rem eandem bis continet, & nulla habet omnes res eaſdem cum ullâ alterâ. Quod ſi quæratur, quoties 10 illæ datæ litteræ miſceri inter ſe poſſint ſic, ut ſemper accipiantur omnes ſolo ordine mutato, dicentur quæri permutationes omnes 10 litterarum.

PROBLEMA I.

EX dato numero rerum combinationes omnes reperire.

Dentur exempli gr. 8 litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Prima *a* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibus, nimirum cum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & provenient inde combinationes binarum diverſæ 7, nempe *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*. Secunda *b* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibos, nempe cum

cum *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*;& ſic deinceps ſingulæ datarum cum omnibus ipſas ſequentibus combinentur : provenient diverſi binarii omnes, qui ex dato litterarum numero haberi poſſunt.

Quod ſi ſingulos binarios diverſos jam repertos combines cum ſingulis litteris ipſos conſequentibus, prodibunt omnes diverſi terniones, qui haberi poſſunt ex dato numero litterarum. Exempli gr. binariorum inventorum primus *ab* combinetur cum ſingulis litteris ipſum ſequentibus, quæ ſunt *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, provenient terniones *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *abh*. Sumatur jam alius quivis binarius *cf*; litteræ hunc ſequentes ſunt *g*, *h*; hic ergo dat terniones *cfg*, *cfh*, non plures.

Combinationes 8 *litterarum*

a b c d e f g h

Binarii diverſi 28.	Quaterniones diverſi 70.
ab,ac,ad,ae,af,ag,ah, bc,bd,be,bf,bg,bh cd,ce,cf,cg,ch, de,df,dg,dh, ef,eg,eh, fg,fh, gh.	abcd,abce,abcf,abcg,abch. abde,abdf,abdg,abdh. abef,abeg,abeh. abfg,abfh. abgh. acde,acdf,acdg,acdh. acef,aceg,aceh. acfg,acfh. acgh.

Ter-

Terniones diverſi 56.

abc,abd,abe,abf,abg,abh
acd,ace,acg,ach,
ade,adf,adg,adh.
aef,aeg,aeh.
afg,afh.
agh.

bcd,bce,bcf,bcg,bch
bde,bdf,bdg,bdh.
bef,beg,beh.
bfg,bfh.
bgh.

cde,cdf,cdg,cdh.
cef,ceg,ceh,
cfg,cfh.
cgh.

def,deg,deh.
dfg,dfh.
dgh.

efg,efh.
egh.
fgh.

adef,adeg,adeh.
adfg,adfh.
adgh.
aefg,aefh.
aegh.
afgh.
bcde,bcdf,bcdg,bcdh.
bcef,bceg,bceh.
bcfg,bcfh.
bcgh.
bdef,bdeg,bdeh.
bdfg,bdfh.
bdgh.
befg,befh.
begh.
bfgh.
cdef,cdeg,cdeh.
cdfg,cdfh.
cdgh.
cefg,cefh.
cegh
cfgh.
defg,defh
degh
dfgh
efgh.

Rurſum, ſi omnes jam inventi terniones combinentur cum litteris ipſos ſequentibus, prodibunt omnes quaterniones diverſi poſſibiles. Et ſic deinceps.

Ratio hujus conſtructionis per ſe ſatis eſt manifeſta. Ad pleniorem porro intelligentiam totius methodi.

Obſerva 1. Si ex dato rerum numero capiantur duo numeri, qui ſimul componunt ipſum datum numerum, eorum combinationes ſunt æquè multæ. Dentur 8 litteræ, & ex numero 8 ſume 1, & 7, quæ ſimul efficiunt 8, poterunt ex 8 ſumi octo diverſæ unitates, ac proinde etiam 8 diverſi litterarum ſeptenarii.

Rurſum ex 8 cape 2, & 6, quæ juncta efficiunt 8. Methodo jam traditâ ex 8 litteris habentur combinationes binarum diverſæ 28: totidem ergo erunt etiam diverſæ combinationes ſenariæ. Sumantur ex 8 rurſum 3, & 5, quorum ſumma eſt 8. Quoniam combinationes ternariæ diverſæ reperiuntur 56; etiam totidem erunt diverſæ combinationes quinariæ. Quæ omnia ſunt manifeſta conſideranti.

Obſerva 2. Quò numeri, ſecundùm quos fit combinatio, utrimque magis accedunt verſus medium, eò plures exhibent combinationes. Sic ex datis litteris 8 plures habentur biniones, & ſenarii diverſi, quàm unitates, & ſeptenarii; item plures diverſi terniones, & quinarii, quàm biniones, & ſenarii.

Obſerva. 3. Cum numerus rerum datus eſt par, tunc illius ſemiſſis maximum dabit numerum combinationum, ut cum

lit-

litterarum numerus datur 8, ſi litteræ combinentur quaternæ, habebitur maximus combinationum numerus.

Cùm verò numerus rerum datur impar, tunc duo numeri contigui, quorum ſumma facit datum numerum rerum, exhibent maximum numerum combinationum. Ut ſi dentur 9 litteræ, numeri contigui, quorum ſumma faciat 9, ſunt 4, & 5. Quarum ſi litteræ combinentur quaternæ, vel quinæ; maximus habebitur numerus combinationum.

Quoniam verò ex methodo jam traditâ ſciri nequit combinationum numerus, niſi ſingulæ exhibeantur, regulam adjungo ex Petro Herigono, quâ facile is innoteſcat.

Reg. Datus ſit rerum nnmerus *a*, & alius eo minor *b*, ſecundùm quem res datæ ſint combinandæ. Inſtituantur duæ progreſſiones Arithmeticæ per ſubductionem unitatis à numeris datis *a*, *b*, tot terminorum, quot minor *b* habet unitates. Tum numerus *c*, genitus ex multiplicatione terminorum majoris progreſſionis, dividatur per numerum *e* productum ex multiplicatione

a	c	ſ	
8.7.6	336	{	56
3.2.1	6	{	f
b	e		

terminorum progreſſionis minoris. Quotiens erit quæſita combinationum multitudo, quæ haberi poteſt, ſi res datæ ſecundum numerum *b* combinentur.

Quod ſi lubeat ſcire in quot combinationibus res ſingulæ reperiantur, multitudinem combinationum duc in numerum, ſecundùm quem res ſunt combinatæ; productum divide per datum numerum rerum: quotiens oſtendet, in quot combinationibus unaquæque res reperiatur.

Appoſui exemplum horum omnium in litteris 8 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *b*. Ex his diverſi habentur binarii 28, terniones 56, quaterniones 70, quinarii 56, ſenarii 28, ſeptenarii 8, qui reſpondent totidem diverſis unitatibus, ut ſenarii binariis, & quinarii ternionibus. Soli porro binarii, terniones, & quaterniones hic ſunt expreſsi; cæteri eâdem arte reperiuntur. Itaque litteræ octo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *b* admittunt combinationes 246: permutationes dabit caput ſequens.

PROBLEMA II.

Dato numero, omnes permutationes poſſibiles invenire.

Den-

Dentur exempli gr. litteræ 10 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*. Oporteat omnes poſsibiles 10 litterarum ordines diverſos exhibere.

Methodus, ejuſque demonſtratio traditæ ſunt in ſcholio prop. 19. l. 8, quem locum conſule. Inde ſequens permutationum tabella confecta eſt.

Num. rerum.	Permut.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40, 320
9	362, 880
10	3(628, 800
24	620,448 (401,733 (239,439 (360,000.

Quod ſi in dato numero rerum aliquæ ſimiles ſint, ſeu eædem; ut ſi detur hæc vox *Ignatius* 8 litteris conſtans, in qua duæ litteræ occurrunt eædem, nempe *i*, permutationum numerus invenietur hâc regulâ, ex *a* Kirchero noſtro deprompta.

Numerus permutationum totius dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poſsunt res ſimiles, quotiens dabit quæſitum.

a Tom. 2. muſurg. pag. 5.

Litteræ 8 hujus vocis *Ignatius*, ſi omnes eſſent diverſæ, admitterent permu-

tationes 40, 320. Litteræ eædem ſunt 2. Porro 2 permutationes admittunt duas. Igitur 40, 320 dividantur per 2. Quotiens 20, 160 dabit omnes ordines diverſos poſsibiles 8 litterarum, quibus conſtat vox *Ignatius*.

Corollaria.

1. HOmines 10. poſſunt menſæ accumbere plus, quàm termillioneſies, ſic ut nunquam ſit idem ordo accumbentium. Rerum quippe 20 ordines diverſi ſunt 3 (628, 800.

2. Mille milliones ſcriptorum, mille annornm millionibus, non ſcribent omnes 24 litterarum alphabeti permutationes, licèt ſinguli quotidie abſolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diverſos ordines litterarum 24.

Id breviter ſic oſtendo. Quoniam unus ſcriptor uno die ſcribit 40 paginas, quarum ſingulæ contineant 40 ordines diverſos litterarum 24; ductis igitur 40 in 40, fiunt diverſi ordines 1600, quos uno die ſcribet ſcriptor unus. Ergo ſi demus anno dies 366, (hoc eſt plures, quàm ei debeantur,) ſcribet ſcriptor unus anno uno 24 litterarum ordines, ſive permutationes

585, 600 : fit enim hic numerus ex 1600 ductis in 366.

Annis igitur 1, 000 (000000 (hoc eſt mille millionibus annorum) ſcribet unus

A 585 (600000) 000000
B, 585, 600(000000(000000(000000
C. 620, 448 (401,733(239,439(360,000

permutationes diverſas A : hic enim numerus orirur ex 585, 600 ductis in 1,000 (000000. Quare ſi mille annorum millionibus ſcriptor unus ſcribat permutationes, ſeu ordines diverſos A; ſcriptorum mille milliones eodem tempore, videlicet mille annorum millionibus, ſcribent litterarum 24 tot permutationes diverſas, quot fiunt ex 1, 000 (000000, hoc eſt mille millionibus, ductis in A. Numerus verò permutationum, ex hac multiplicatione genitus, eſt B, qui adhuc minor eſt numero C, deſignante permutationes omnes 24 litterarum.

3. Ex problemate eodem reperientur omnia anagrammata poſsibilia nominis dati. Quod ſi aliquæ litteræ in nomine dato ſint eædem, adhibenda inſuper erit regula ſuperius tradita.

4. Ut habeantur omnia vocabula, quæ

ex litteris alphabeti 24 concinnari poſſunt, oportebit per probl. 1. omnes 24 litterarum combinationes binarias, ternarias, quaternarias, quinarias, ſenarias, &c. exhibere; & primum quidem combinationes omnes ſtrictè acceptas, de quibus agitur in 1.probl.,quæ non ſolùm omnes inter ſe diverſæ ſunt, ſed etiam nullam litteram bis continent; deinde verò etiam eas omnes, in quibus litteræ una, vel plures ſæpiùs recurrunt, quarum inventio ex prioribus ſatis eſt manifeſta, Tum verò combinationum ſingularum litteræ per probl. 2, diverſimode inſuper erunt permutandæ toties, quoties poſſunt. Ex omnibus illis tum combinationibus, tum permutationibus numerus vocabulorum ingens quidem ille, & prope immenſus; ſed tamen certus, atque determinatus procreabitur.

FINIS.

APPENDIX,

Quâ theoria, & praxis arithmeticæ etiam in figuris demonſtratur.

HIc epilogus eſt minus in Tyronum eruditionem, quàm in Eruditorum gratiam, ſeu potiùs in hujus Arithmeticæ complementum, ac ornamentum. Cùm enim quatuor illius partes præcipuæ, ſcilicet additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio ſuper libros ipſis præpoſitos, iliorumque Prolegomena totaliter fundentur; & à libris poſtpoſitis admodum perficiantur: nunc reſtat, ut pars ejus quælibet figurâ aliquâ geometricâ, iiſdem principiis demonſtranda, in poſtremum adornetur.

ADDITIO.

Data ſint triangula ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis æquale. Tabulâ 6. Fig. 1.

Si triangula data ſint inæqualis altitu-

tudinis, ut A B C, C D E, E F G; ad æqualem altitudinem ſunt reducenda, ut patet ex figuræ conſtructione, quæ pendet ex primis Geometriæ elementis à Tyronibus vix ignotis; hanc tamen praxim, ad faciliorem hujus axiomatis intelligentiam, hîc apponemus.

Sint igitur triangula A B C, E F G, ad altitudinem C D E reducenda. Ad altitudinem CD ducatur parallela HL contra baſim A G *a*: poſtea linea CB producatur in H *b*, unde ducatur linea H A: & ductâ ipſi parallelâ I B determinabit punctum I, ex quo ducenda eſt linea IH, quæ triangulum IHC perficit, illudque triangulo A B C æquale *c* conſtituit ad altitudinem requiſitam.

a p. 31. l. 1.
b poſtul. 2. l. 1.
c p. 73. l. 1.

Ad eandem altitudinẽ reducetur triangulum E F G, ſi ductâ lineâ L G, & ipſi parallelâ FK, ducatur ex puncto K linea KL, quæ triangulum K L E perficit, illudque triangulo EFG æquale conſtituit ad altitudinem requiſitam. Demonſtratio ut ſupra.

Sed ſicut ducendo lineam EH, triangulum I H E eſt æquale triangulo A B C † C D E *d*: ſic etiam ductâ lineâ K H, triangulum I H K eſt æquale A B C † CDE † EFG. *e*

d p. 37. l. 1.
Axiom. 2. l. 1.
e Ibidem.

Quan-

Quando autem triangula ſunt altitudinis æqualis, ut IHC, CDE, ELK. Baſes eorum IC, CE, EK componantur in rectam lineam, cui parallela HL ducatur in ſummitate angulorum: tunc ſi ex extremitatibus baſis generalis IK ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum lineæ parallelæ HL, etiam ad angulum datum, ut in 2da fig. CP, conſtituent triangulum IHK *n*, ſive IMK *o* æquale triangulis datis ſimul additis. Tabulâ 6. Fig. 1. & 2.

n Fig. 1.
o p. 1. l. vi. Fig. 2.

Demonſtratio.

HÆc praxis, à Tyronibus ſi attentè conſideretur, ſufficienter illis patebit ex principiis *a* in hoc opere contentis; ſumma enim trianguli IHC + CDE + ELK ſemel continetur in triangulo IHK, aut IMK.

a Axiom. 2. 3. 4. 5. l. 7. Definit. 13. 14. l. 7.

Ut tamen peritioribus, qui rigorem geometricæ demonſtrationis poſtulant, fiat ſatis; ſequentem *b* hîc adjungimus, de qua conſuli poteſt Geometria ſupra *c* citata.

b Deſaiguil.
c pag. 2.

EHK eſt æquale ELK, per propoſit. 37. l. 1. pag. 45.
EHC eſt æquale CDE, per eandem. Tabulâ 6. Fig. 1.

Er-

Fig. 1. Ergo C H K eſt æquale E L K † C D E, per ax. 2. l. 1. Sed I H C eſt etiam ſibi æquale I H C, per idem pag. 11. Ergo I H K eſt æquale I H C † E L K † C D E. Cùm autem per conſtructionem, ſive per tranſmutationem figurarum, quàm primo ſuppoſuimus etiam Tyronibus vix ignotam, I H C ſit æquale A B C; & E L K etiam æquale E F G: evidens eſt, quod

a Fig. 1. b Fig. 2. ſi triangulum I H K *a* ut I M K *b* ſit æquale I H C † E L K † C D E triangulis æqualis altitudinis, ut demonſtratum eſt;

Fig. 1. erit etiam æquale A B C † C D E † E F G triangulis inæqualis altitudinis, quod adhuc erat demonſtrandum.

PROBLEMA ALTERUM.

TRiangulum ſit triangulo addendum, ut ſumma ſit Parallelogrammum, vel quadratum.

Tabulâ 7. Fig. 1. Si triangula ſint æquè alta, ut E D A, & A I G, ad dimidiam partem baſis fiat Parallelogrammum B C R G ad eandem altitudinem, & erit ipſis æquale. Si verò

Fig. 2. triangula non ſunt æquè alta, ut D E F, & F G H, revocentur ad eandem altitudinem, ut ſupra; & in baſi communi fiat Paral-

rallelogrammum ad dimidiam altitudinem. Si autem etiam in quadratum mutare desideres hæc duo triangula; confectum ex iis Parallelogrammum revocetur ad quadratum. Sit nempe Parallelogrammum HIKO æquale triangulis DEF, FGH. Producatur latus ejus HO in M, ut OK; describatur super HM semicirculus, & à puncto O erigatur perpendicularis OQ, cujus quadratum OQPN erit æquale Parallelogrammo, & per consequens triangulis datis. Fig. 2.

Eodem modo fieri potest additio omnium specierum figurarum, & illarum transformatio in quaslibet figuras additis diversas, & ad magnitudinem requisitam, aut convenientem. Cùm autem hanc materiam separatim (Deo juvante) simus brevi tractaturi; aliquod illius specimen ad rem præsentem potest sufficere, sive in additione, sive in aliis Arithmeticæ partibus.

SUBTRACTIO.

Datum sit triangulum à triangulo subtrahendum, ut maneat triangulum.

Triangulum DEI subtrahendum sit ex BAD. Si sint æquè alta *a*, transfera- Tabula 8. *a* Fig. 1.

tur

tur baſis D I in D O, & ducatur A O,
a p. 1. l. vi. tunc O A D erit æquale D E I *a*; & manebit pro exceſſu triangulum B A O. *b*
b Defin. 4. l. vii. & p. 4. hujus.
Fig. 2. Si verò triangula non ſint æquè alta, ut B A C, C D G; revocetur C D G ad C F H, & facta ſubtractione, ut ſupra, remanebit pro exceſſu triangulum B A S. Demonſtratio patet ex conſtr. & ex præc. problem.

MULTIPLICATIO.

DEtur quadratum per quemlibet numerum 2, 3, 4, 5, 6, 7, *&c. multiplicandum, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & ſic in infinitum multiplum conſtituatur.*

Sit quadratum A B C D duplum con-
Tabulâ 9. ſtituendum. Sumatur diagonalis A C, & ducatur linea illi ſimilis ex A in E, & in
a p. 31. l. 1. G; exinde per parallelas E F, F G *a* quadratum A E F G erit duplum quadrati dati A B C D.

Quod ſi idem quadratum A B C D ſit triplum conſtituendum; ſumatur linea B G, & ducatur ex A in K, & in I; exinde per parallelas K H, H I quadratum A K H I triplum erit quadrati dati

A

ABCD, quod eodem modo quadruplum, 5um, 6um, 7um &c. conſtituetur.

Si per 9 ſit multiplicandum; ſumatur linea 4, & 5 ſive V N, & erit latus Quadrati requiſiti A R M T. Si per 13. l. 4. 9.

Si per 19; linea 6, 13, ſeu Q S conſtituet latera Quadrati A Z X W.

Si per 38; Diagonalis W Z erit latus Quadrati A B C D per 38 multiplicati; & ſic in infinitum. Quod admiratione dignum Tyronibus apparebit.

Multiplicatio Quadrati fieri poteſt alio modo, cujus demonſtratio *a* eadem eſt, licèt conſtructio *a* diverſa.

a Deſaiguil. p. 47. l. 1. def. 15. l. 7. ax. 1. 2. 3. 7. l. 7.

DIVISIO

b Tabulâ 10.

DEtur circulus A D C Z in 32 partes dividendus.

Tabulâ 11.

Ducatur linea D C ad quartam partem circuli, & dividatur in duas partes æquales per perpendicularem B E, quæ erit ſemidiameter circuli E O K F R.

Poſtea ducatur linea R O, cujus media pars, ſeu perpendicularis Q B erit ſemidiameter circuli Q P W S. Sicque ex lineis I N, H M, G L fiant circuli, tunc in circulo dividendo erunt quinque circuli quorum

REOKF eſt $\frac{1}{2}$ Circuli dati ADCZ.

QPWS $\frac{1}{4}$ ejuſdem

IMrrT $\frac{1}{8}$

HLiiV $\frac{1}{16}$

Gdec $\frac{1}{32}$ circuli in tot partes dividendi.

Demonſtratio eadem eſt, ac præcedentis problematis, & eſt ſimili admiratione digniſſima, propter mirabiles circuli ad quadratum rationes, necnon trianguli ad utrumque relationes. Illas igitur benevolo, & erudito Lectori ſpeculandas relinquimus in ultima figura hîc appoſita *a*, quæ, tanquam epitome hujus Appendicis, totam iſtam Arithmeticam, tam Theoricam, quàm Practicam fœliciter coronabit; ſicque ejus demonſtratio *b*, in modum corollarii, huic opuſculo finem pariter imponet.

a Tabulâ ultimâ.

b Deſaiguiliers.

De-

NICOLAI DE MARTINO

DE *PERMUTATIONIBUS*, ET *COMBINATIONIBUS* OPUSCULUM.

DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS.

DOctrinam de permutationibus, & combinationibus utiliſſimam eſſe, tum in rimandis naturæ arcanis, cùm in civilis vitæ uſu; neminem latere arbitror, niſi quem fugiat infinitam varietatem, quæ tam in naturæ operibus, quàm in mortalium actionibus elucet, non aliunde, quàm ex diverſa partium permutatione, aut combinatione originem trahere. Notum quippe eſt, quàm difficile ſit, modos omnes recenſere, quibus res plures, ad effectum aliquem producendum concurrentes, ſimul permutari poſſunt, aut combinari. Quin etiam dici poteſt, nullum eſſe vitium, in quod homines, vel maximè prudentes, frequentiùs impingunt, quàm quod vulgò dicitur imperfecta partium enumeratio. Itaque doctrina illa, quæ huic medetur de-

fectui, docetque enumerare modos omnes, quibus res plures ſimul permutari poſſunt, aut combinari, merito ſuo utiliſſima cenſenda eſt. Quocirca non exiguum operæ pretium facturum me eſſe arbitror, ſi doctrinam iſtam de permutationibus, & combinationibus, leviter à Tacqueto traditam, in Tyronum gratiam paulò fuſiùs in hoc opuſculo exponam.

CAP. I.

De Permutationibus.

Duæ, aut plures res dicuntur inter ſe permutari, quum ita quidem permiſcentur; ut eadem rerum ſervata multitudine, ordo ſituſve tantummodo inter ipſas permutetur. Qua ratione dicētur quæri duarum, aut plurium rerum permutationes omnes, quum quæritur quoties res illæ permiſceri poſſint ea ratione, ut omnibus ſemper acceptis, ſolus ordo ſituſve mutetur.

Jam duarum rerum diverſarum *a*, & *b* duæ eſſe poſſunt permutationes diverſæ. Quippe vel *a* præcedit, & ſequitur *b*, eritque permutatio una; vel viciſſim *a* ſequitur, & *b* præcedit, eritque permutatio altera.

tera. Quumque ex tribus rebus diverſis *a*, *b*, *c* interea ac una primum obtinet locum, reliquæ duæ bis poſſunt permutari; erunt trium illarum rerum diverſarum ter duæ, hoc eſt ſex diverſæ permutationes. Atque ita quoque ſi quatuor extiterint res diverſæ *a*, *b*, *c*, *d*, quia dum una primum tenet locum, tres reliquæ ſexies ordinem variabunt, fient illarum rerum permutationes omnes diverſæ quater ſex, hoc eſt viginti quatuor. Proindeque generaliter numerus permutationum diverſarũ, quas plures res diverſæ ſubire poſſunt, toties continebit numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot ſunt unitates in ipſo rerum numero.

Hinc datis quotcumque rebus diverſis, facile erit numerum omnium permutationum diverſarum invenire. Numerus namque permutationum, quas plures res diverſæ ſubire poſſunt, toties continet numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot ſunt unitates in ipſo rerum numero. Itaque ſi datus rerum numerus multiplicetur per numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, habebitur permutationum numerus quæſitus. Jam verò duæ res diverſæ nonniſi dupliciter poſ-

ſunt permutari. Itaque ad habendum numerum permutationum, quas ſuſcipere poſſunt tres res diverſæ, multiplicari debet 2 per 3. Atque ita quoque multiplicandi erunt inter ſe mutuò numeri 2, 3, 4, ut habeatur numerus permutationum, quas ſuſcipiunt quatuor res diverſæ. Quocirca generaliter ſi omnes numeri poſt unitatem naturali ordine ſe conſequentes ad datum uſque rerum numerum incluſivè multiplicentur per ſe mutuò, productum numerum permutationum exhibebit.

Verumtamen ſi in dato rerum numero res aliquæ ſint ſimiles, ſive eædem, hoc eſt una, eademque res bis, aut ſæpiùs recurrat; tunc numerus permutationum multo minor evadet. Sed ex poſitis principiis facile quoque erit illum invenire. Nam quum plures res ſunt ſimiles, eæ inter ſe nonniſi ſemel poſſunt permutari. Unde omnes illæ permutationes, quæ orirentur, ſi res illæ eſſent diverſæ, jam propter earum ſimilitudinem evaneſcent. Itaque quum in dato rerum numero plures res ſunt ſimiles, ſive eædem, habebitur numerus permutationum omnium diverſarum, ſi numerus permutationum, quas ſuſcipere poteſt datus rerum numerus,

rus, ſi omnes eſſent diverſæ, dividatur per numerum permutationum, quas ſubire poſſunt res ſimiles, ſi utique velut diſſimiles conſiderentur. Ita ſi datus rerum numerus ſit 5, & in eo res eadem ter recurrat, erit 20 numerus permutationum diverſarum; quia ſi dividatur 120 numerus omnium permutationum per 6 numerum permutationum, quas ſuſcipiunt tres res tantummodo; fiet quotiens 20.

Quod ſi non una, ſed duæ, aut plures res in dato rerum numero ſæpiùs recurrant, tunc habebitur numerus omnium permutationum diverſarum, ſi numerus permutationum, quas ſuſcipere poteſt datus rerum numerus, ſi omnes eſſent diverſæ, dividatur per productum ex numeris permutationum, quas ſeorſim recipere poſſunt ſingulæ res ſimiles, quæ ſæpiùs recurrunt, ſecundùm propriam cujuſcumque multitudinem. Qua ratione ſi ſeptem ſint res permutandæ, inter quas una recurrat bis, altera ter; numerus permutationum omnium diverſarum erit 420. Nam ſeptem res permutari poſſunt inter ſe 5040 modis diverſis: proindeque quia duæ bis, & tres ſexies inter ſe poſſunt permutari, diviſo 5040

per

per 12 productum ex 6 in 2, fit quotiens 420.

CAP. II.

De Combinationibus ſecundùm omnes exponentes.

COmbinationum nomine veniunt rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis ſituſve rerum ſervata ratione, tantùm numerus conſideratur, quo res datæ ſimul ſunt conjungendæ. Qua ratione dicentur quæri omnes combinationes diverſæ plurium rerum datarum, quum quæritur, quoties ex dato illo rerum numero binæ, ternæ, aut quaternæ accipi poſſunt ſic, ut ipſarum unaquæque numquam ſumatur ſæpiùs, quàm ſemel.

Jam numerus, ſecundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur exponens combinationis. Hoc pacto, ſi res binæ ſumantur, exponens erit 2; ſi ternæ, 3; ſi quaternæ, 4; atque ita deinceps. Sed res, ſecundùm hos exponentes junctæ, dicuntur binarii, ternarii, aut quaternarii; vel etiam biniones, terniones, aut quaterniones: & conſequenter dicendæ ſunt uniones, quando res ſumuntur ſingulæ, & nul-

nulliones, quum nulla planè ſumitur.

Sed priuſquam de inveniendis combinationibus ſecundùm datum quemvis exponentem agamus, tradenda nobis eſt methodus, qua inveniri poſſint combinationes ſecundùm omnes exponentes conjunctim. Id itaque commodè fieri poteſt in hunc modum. Sunto combinandæ modis omnibus litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Fiant tot ſeries, quot litteræ; ſed ita tamen, ut in prima ſerie reperiatur ſola littera *a*; in ſecunda *b*, tum ſola, tum conjuncta cum ipſa *a*; in tertia *c*, primò ſeorſim, deinde verò conjuncta cum omnibus terminis præcedentibus; in quarta *d*, ſimiliter primò ſola, deinde verò addita terminis omnibus præcedentium ſerierum; atque ita deinceps.

a
b. ab.
c. ac. bc. abc.
d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

Hac ſiquidem ratione manifeſtum eſt, datas litteras omnifariam, ac ſecundùm omnes exponentes inter ſe mutuò combinari. Et quoniam littera, quæ cujuſque ſeriei agmen ducit, primò ponitur ſola, deinde unà ſecum aſſumit terminos omnes

nes præcedentium ſerierũ; manifeſtum eſt etiam, in unaquaque ſerie unum ampliùs terminum reperiri, quàm in omnibus aliis ſeriebus antecedentibus ſimul: proindeque termini dictarum ſerierum progreſſionem geometricam duplam ab unitate conſtituent; quandoquidem per oſtenſa à Tacqueto in Theoremate XV progreſſionum geometricarum, progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate eam quoque naturam eſſe conſtat, ut ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Atque hinc facile modò erit, omnes terminos illarum ſerierum in unam ſummam colligere, & conſequenter invenire combinationes rerum datarum ſecundùm omnes exponentes conjunctim. Quum enim termini illi conſtituant ab unitate progreſſionem geometricam duplam, & quot ſunt unitates in dato rerum numero, tot ſint ſeries eorundem terminorum; ſatis erit in progreſſione geometrica dupla, quæ initium habeat ab unitate, in unum colligere tot terminos, quot ſunt unitates in numero rerum dato. Sed totidem termini progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate colligentur in unum, ſi capiatur terminus ſubſequens ejuſdem

pro-

progreſſionis, idemque unitate multetur: ob eandem illam proprietatem modò memoratam, quod in progreſſione geometrica dupla ab unitate ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Et quoniam in progreſſione geometrica dupla ab unitate unuſquiſque terminus invenitur, ſi numerus binarius toties per ſe ipſum multiplicetur, quot eum in progreſſione termini præcedunt; habebitur ſubſequens ille terminus, multiplicando binarium toties per ſe ipſum, quot ſunt termini præcedentes, hoc eſt quot ſunt unitates in dato rerum numero. Proindeque regula pro inveniendis combinationibus omnibus ſecundùm omnes exponentes conjunctim talis erit: multiplicetur binarius toties per ſe ipſum, quot unitates continet datus rerum numerus; auferatur deinde unitas à producto, eritque reſiduum combinationum numerus quæſitus. Ita ſi numerum rerum datarum vocemus n, erit numerus omnium combinationum ſecundùm omnes exponentes conjunctim $2^n - 1$, intelligendo pro 2^n eam binarii poteſtatem, quam deſignat numerus n.

CAP

CAP. III.

De Combinationibus ſecundùm ſingulos exponentes.

TRadita methodo de inveniendis combinationibus ſecundùm omnes exponentes conjunctim ; ſequitur, ut videamus , qua ratione inveniendæ ſint combinationes ſecundùm ſingulos exponentes . Et quidem ex ipſa illa methodo, qua ſuperiori capite inventæ ſunt combinationes ſecundùm omnes exponentes conjunctim , manifeſtum eſt , litteram, quæ cujuslibet ſeriei caput eſt , adjunctam unionibus ſerierum præcedentium efficere ſeriei ſuæ biniones, adjunctam binionibus efficere terniones , ternionibus quaterniones , atque ita deinceps : proindeque in unaquaque ſerie numerus combinationum ſecundùm datum quemvis exponentem æqualis erit numero combinationum ſecundùm exponentem unitate una minorem , quæ in præcedentibus ſeriebus inveniuntur.

Ex quo facile modò erit tabulam conficere , quæ ad oculum nobis oſtendat combinationes ſecundùm ſingulos exponen-

nen-

Hac tabula conſtructa, conſideremus modò tres ejus proprietates. Prima proprietas eſt illa ipſa, per quam tabulæ conſtructionem obtinuimus, & cujus ope nullo negotio eadem tabula in infinitum poteſt continuari: nimirum, quod quilibet terminus in unaquaque columna verticali æquatur ſummæ omnium ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis. Ex quo fit, ut ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque columna verticali, ſatis ſit in unum colligere omnes terminos ſuperiores, qui ſunt in præcedenti columna verticali.

Secunda proprietas eſt, quod columnarum verticalium prima nullã habeat cifram in principio, ſed unam ſecunda, duas tertia, tres quarta, atque ita deinceps. Ex quo fit, ut ſi in iis columnis ſumantur termini æquè multi, quarum multitudinem deſignet littera *a*; multitudo terminorum ſignificativorum, excluſis cifris initialibus, ſit *a* in prima columna $a-1$ in ſecunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita de aliis.

Tertia proprietas eſt, quod in unaquaque columna verticali ſi aliquis terminus ſignificativus multiplicetur per numerum terminorum ſignificativorum,

qui eum præcedunt, & productum dividatur per numerum illius columnæ ; hoc eſt per 1 in prima columna, per 2 in ſecunda, per 3 in tertia, atque ita deinceps, quotiens ſit ſumma ex præcedentibus terminis ſignificativis. Unde facile modò erit, terminos quotcumque cujuſcumque columnæ verticalis in unam ſummam colligere.

Sumantur enim in unaquaque columna verticali ab initio termini æquè multi, & deſignet eorum multitudinem littera a. Itaque ob ſecundam proprietatem multitudo terminorum ſignificativorum erit a in prima columna, $a-1$ in ſecunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita deinceps. Et quoniam in prima columna quiſque terminus eſt unitas, deſignabit in ea eadem littera a, vel quod idem eſt $\frac{a}{1}$ non modò multitudinem, verùm etiam ſummam terminorum ſignificativorum.

Hinc porro, quia per primam proprietatem $\frac{a}{1}$ eſt terminus, qui in ſecunda columna proximè ſequitur, proinde

ſi

$\frac{a}{1}$ si multiplicetur per $a - 1$, & produ-
ctum dividatur per 2; erit per tertiam proprietatem quotiens $\frac{a.a - 1}{1.2}$ summa terminorum in secunda columna. Quumque summa ista sit terminus proximè insequens in tertia columna; si eadem summa multiplicetur per $a - 2$, & productum dividatur per 3, erit quotiens $\frac{a.a - 1.a - 2}{1.2.3}$ summa terminorum in tertia columna. Atque ita quoque eadem summa terminorum erit $\frac{a.a - 1.a - 2.a - 3}{1.2.3.4}$ in quarta columna, $\frac{a.a - 1.a - 2.a - 3.a - 4}{1.2.3.4.5}$ in quinta columna, & sic in infinitum: notando, puncta quantitatibus interjecta continuam earum quantitatum multiplicationem designare.

Patet autem summam istam designari per duplicem progressionem arithmeti-

cam, unam à multitudine assumpta terminorum per unitatis decrementum descendentem, alteram ascendentem ab unitate per unitatis incrementum, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Unde cum eadem summa designet combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot sunt termini assumpti, & secundum eum exponentem, quem columnæ numerus designat; perspicuum est ad inveniendas combinationes omnes, quæ ex pluribus rebus fieri possunt secundum datum quëvis exponentem, hanc regulam observandam esse.

Nimirum fiant duæ progtessiones arithmeticæ, una descendens per unitatis decrementum à numero rerum combinandarum, altera ascendens ab unitate per unitatis incrementum, & utraque porro tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter se mutuò, tam termini prioris progressionis, quàm termini alterius; & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens quæsita multitudo combinationum, quæ secundum datum exponentem institui possunt. Quæ quidem est ipsissima regu-

la,

la, quam ex Petro Herigono attulit Tacquetus.

CAP. IV.

De Combinationibus, in quibus eadem res ſæpiùs recurrere poteſt.

IN combinationibus rerum inveniendis, tam ſecundùm omnes conjuctim, quàm ſecundùm ſingulos exponentes, illud ſuppoſuimus, nullam rem ſecum ipſa jungi, neque adeò plus ſemel in eadem combinatione accipi poſſe. Quod ſi autem hæc inſuper conditio adjici velit, ut unaquæque res etiam ſecum ipſa jungi, adeoque in eadem combinatione ſæpiùs redire queat; tum numerus combinationum multò major evadet. Sed eidem methodo inſiſtendo, facile erit has quoque combinationes invenire.

Sunto itaque combinandæ in hunc modum litteræ *a*, *b*, *c*, &c. Fiant tot ſeries, quot litteræ, & ſingularum capita occupent ſingulæ litteræ, ceu totidem uniones. Sed pro binionibus cujuſque ſeriei inveniendis, littera, quæ ejus agmen ducit, non tantùm cum præcedentibus unionibus, ſed etiam cum ſe ipſa combi-

netur. Et ſimiliter pro formandis ternionibus, non modò præcedentium ſerierum, ſed etiam ſuæmet ſeriei biniones aſſumat. Idemque fiat etiam in combinationibus ſecundùm omnes alios exponentes. Sic enim nullam combinationem, quæ circa datas res inſtitui queunt, præteriri poſſe liquidò conſtat.

a. aa. aaa.
b. ab. bb. aab. abb. bbb
c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

Hinc autem clarè liquet, in unaquaque ſerie numerum combinationum ſecundum datum quemvis exponentem æqualem eſſe numero combinationum ſecundum exponẽtem unitate una minorẽ, quæ tum in ipſa, cum in præcedentibus ſeriebus inveniũtur: proindeque eadem tabula ſuperiùs conſtructa deſignabit combinationes ſecundùm ſingulos exponentes, quæ occurrunt in unaquaque ſerie, ſi ex columnis verticalibus deletis cifris initialibus, attollantur eæ ſurſum, donec omnia cujuſque loca repleantur, & unaquæque incipiat ab unitate, quemadmodum factum hîc vides.

TA-

TABULA

Combinationum, in quibus eadem res ſæpiùs recurrere poteſt.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Jam in numeris hujus tabulæ duas licet cernere proprietates. Prima eſt, quod ſi alicujus columnæ verticalis termini quotcumque in unum addantur, ſumma ſit terminus, qui ultimo correſpondet in ſequenti columna verticali. Altera, quod in unaquaque columna verticali ſi terminus aliquis multiplicetur per numerum terminorum præcedentium, tot unitatibus adauctum, quot columnæ locus oſtendit, & productum dividatur per numerum ejuſdem columnæ, quotiens ſit ſumma ipſius cum terminis præcedentibus.

His poſitis proprietatibus, haud difficile modò erit, terminos quotcumque cujuslibet columnæ verticalis in unam ſummam colligere. Sumantur etenim ab initio termini æquè multi in unaquaque columna, & referat eorum multitudinem littera *a*. Itaque, quia in prima columna quiſque terminus eſt unitas, deſignabit eadem littera *a*, ſive $\frac{a}{1}$ ſummam ipſorum, quæ etiam per primam proprietatem erit ultimus terminus ex aſſumptis in ſecunda columna. Unde ſi eadem multiplicetur per $a + 1$, & productum di-

datur per 2; erit per ſecundam proprietatem quotiens $\frac{a.a+1}{1.2}$ ſumma terminorum in ſecunda columna.

Et ſimiliter, quia hæc eadem ſumma eſt ultimus terminus ex aſſumptis in tertia columna, ſi ea multiplicetur per $a+2$, & productum dividatur per 3; erit quotiens, $\frac{a.a+1.a+2}{1.2.3}$ ſumma terminorum in tertia columna. Atque eidem methodo inſiſtendo, ſumma terminorum erit $\frac{a.a+1.a+2.a+3}{1.2.3.4}$ in quarta columna; $\frac{a.a+1.a+2.a+3.a+4}{1.2.3.4.5}$ in quinta columna; atque ita deinceps.

Patet autem, ſummam iſtam deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, utramque aſcendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine aſſumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Quocirca, quia eadem ſumma deſignat combina-

nationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot ſunt termini aſſumpti, ſecundùm eum exponentem, quem columnæ numerus deſignat, & ea lege, ut unaquæque res non ſolùm cum aliis, ſed etiam cum ſe ipſa jungi poſſit; perſpicuum eſt ad inveniendas omnes hujuſmodi combinationes, quæ fieri poſſunt ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem, hanc regulam obſervandam eſſe.

Nimirum fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum, una quidem à numero rerum combinandarum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini alterius; & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens quæſita multitudo combinationum, quæ ſecundum datum exponentem inſtitui poſſunt ea lege, ut quælibet res non ſolùm cum aliis, ſed etiam cum ſe ipſa combinata reperiatur.

CAP.

CAP. V.

De Combinationibus, in quibus ordo ſituſve rerum etiam attenditur.

DIximus capite ſecundo, combinationes vocari rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis ſituſve rerum habita ratione, dumtaxat multitudo conſideratur, ſecundùm quam res datæ ſimul ſunt conjungendæ: qua ratione litteræ *a*, *b*, *c* unum conſtituunt ternarium, quocumque ordine ſcribantur. Quod ſi porro hæc alia hypotheſis aſſumi velit, ut in combinationibus etiam varietas, quæ oritur ex ordine, ſive ſitu rerum combinandarum, ſit attendenda; tunc multitudo combinationum longè quidem major evadet: unde qua ratione definiri poſſit, hoc capite oſtendemus.

Et quidem ſi rerum combinationes ſubinde fieri debeant, ut unaquæque res numquam ſæpiùs, quàm ſemel, in ſingulis combinationibus recurrat; perſpicuum eſt unamquamque combinationem ratione ordinis, ſive ſitus litterarum toties eſſe reiterandam, quot modis diverſis permutari poſſunt litteræ, quæ exiſtunt in ipſa

ipſa combinatione: proindeque habebitur multitudo combinationum, quæ fieri poſſunt ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem ea lege, ut ordo ſituſve rerum etiam inducat variationem, ſi numerus combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundùm eum exponentem, hac lege neglecta, inſtitui poſſunt, multiplicetur per numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot unitates continet datus exponens.

Jam ex oſtenſis in capite tertio numerus combinationum, quæ ex pluribus rebus ſecundum datum quemvis exponentem ſimpliciter inſtitui poſſunt, habetur, ſi factis duabus progreſſionibus arithmeticis, unâ à dato rerum numero per unitatis decrementum deſcendente, alterâ aſcendente ab unitate per unitatis incrementum, & utrâque tot terminorum, quot unitates continet datus exponens, dividatur productum ex terminis primæ per productum ex terminis ſecundæ. Quocirca, quia per oſtenſa in capite primo productum ex terminis ſecundæ deſignat numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot ſunt unitates in dato exponente;

de-

deſignabit productum ex terminis primæ numerum combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundum eundem exponentem fieri poſſunt ea lege, ut ex ordine ſituve rerum variatio etiam oriatur.

Hinc ad inveniendas combinationes omnes, quæ inſtitui poſſunt ex pluribus rebus ſecundum datum quemvis exponentem ea lege, ut ordo ſituſve rerum etiam variationem inducat, talis regula nobis ſubnaſcitur: nempe fiat progreſſio arithmetica deſcendens à dato rerum numero per unitatis decrementum, & tot terminis conſtans, quot unitates continet datus exponens; deinde multiplicentur inter ſe mutuò termini omnes hujus progreſſionis, & productum ex hac multiplicatione ortum dabit combinationum multitudinem quæſitam. Ex quo illud inferre licet, quod ubi datus exponens numerum rerum adæquat, quia in progreſſione ad unitatem uſque deſcenditur, tantundem ſit, ac ſi ſimplices permutationes datarum rerum quærerentur.

Quod ſi autem rerum combinationes ſubinde inſtitui debeant, ut unaquaque res etiam cum ſe ipſa conjungi poſſit; tunc numerus combinationum omnium habebitur, ſi datus rerum numerus eleve-

tur

tur ad eam poteſtatem, quam deſignat datus combinationis exponens; hoc eſt ad quadratum, ſi exponens datus ſit 2; ad cubum, ſi 3; ad quadrato-quadratum, ſi 4; atque ita deinceps. Qua ratione trium rerum diverſarum biniones omnes modis omnibus permutati ſunt 9, terniones 27, quaterniones 81, &c. Pariterque ſi datus rerum numerus ſit 4, erunt 16 omnes biniones, 64 omnes terniones, 256 omnes quaterniones, atque ita in infinitum.

Nec difficile eſt hujus regulæ rationem intelligere. Dentur enim plures litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c., quarum numerus ſit *m*, combinandæ in hunc modum, ut unaquæque littera poſſit ſecum ipſa jungi, & ordo ſituſve litterarum etiam variationem inducat. Plane ſi iis præponantur littera *a*, habebuntur biniones omnes, qui incipiunt ab *a*; ſi littera *b*, biniones omnes, qui incipiũt à *b*; atque ita de aliis. Itaque ſeries binionum, pro diverſitate litterarum, à quibus incipiunt, tot erunt, quot ſunt unitates in dato numero *m*, & unaquæque ſeries totidem quoque biniones continebit, quot in eodem numero ſunt unitates: proindeque erit *mm*, hoc eſt quadratum numeri *m* binionum omnium

nium numerus.

Jam iſtis binionibus ſi præponatur littera *a*, habebuntur terniones omnes, qui incipiunt ab *a*; ſi littera *b*, terniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Quocirca ſeries ternionum, pro diverſitate litterarum, à quibus incipiunt, tot erunt, quot ſunt unitates in dato numero *m*; ſed unaquæque ſeries tot terniones continebit, quot ſunt biniones; hoc eſt quot unitates continet quadratum dati numeri *m*: proindeque erit m^3, hoc eſt cubus ejuſdem numeri *m* ternionum omnium numerus.

Eâdem ratione ſi iſtis ternionibus præfigatur littera *a*, habebuntur quaterniones omnes, qui incipiunt ab *a*; ſi littera *b*, quaterniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita deinceps. Quocirca ſeries quaternionum, pro diverſitate litterarum à quibus incipiunt, tot erunt, quot ſunt unitates in dato litterarum numero *m*; ſed unaquæque ſeries tot quaterniones continebit, quot ſunt terniones, hoc eſt quot unitates continet cubus dati numeri *m*: proindeque erit m^4; hoc eſt quadrato-quadratum ejuſdem numeri *m* numerus omnium quaternionum.

Atque hæc de permutationibus, combi-

binationibusque in Tyronum gratiam dixisse sufficiat. Cæterum nolim hîc silentio præterire, numeros columnarum verticalium utriusque tabulæ, superiùs constructæ, esse ex numero eorum, qui vulgo à Recentioribus dicuntur numeri figurati: unde hac arrepta occasione non absre erit, in eorundem Tyronum gratiam istorum quoque numerorum brevem aliquam ideam hoc loco exhibere. Et quoniam eorum consideratio profecta est ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipsis Veteribus facta; proinde qui sint numeri multanguli, sive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

CAP. VI.

De Numeris multangulis, sive polygonis.

NUmeri multanguli, sive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium: & pro diversitate hujus intervalli, variæ distinguuntur numerorum multangulorum species; nam dicuntur trianguli, si intervallum sit unitas; dicuntur quadrati, si interval-

vallum ſit binarius; pentagoni, ſi idem intervallum ſit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione ſi numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, ſint ipſi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur eſt unitas, habebuntur ex eorum continua collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, ſive 3 erit triangulus ſecundus; 1 + 2 + 3, ſive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod ſi numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, ſint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quadratus; 1 + 3, ſive 4 erit quadratus ſecundus; 1 + 3 + 5, ſive 9 quadratus tertius; atque ita continuò.

Iam ſi ſeries numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, ſit 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri

pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1 † 4, ſive 5 erit pentagonus ſecundus; 1 † 4 † 7, ſive 12 erit pentagonus tertius; & ſic in infinitum.

Eâdem autem ratione ſi ſeries numerorum, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, ſit 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt nmerus quaternarius, habebuntur ex continua illorum collectione numeri omnes hexagoni. Qua ratione 1 erit primus hexagonus; 1 † 5, ſive 6 erit hexagonus ſecundus; 1 † 5 † 9, ſive 15 erit hexagonus tertius; atque ita deinceps.

Et ſimiliter ſi ſeries numerorum, progredientium æquali intervallo ab unitate, ſit 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus quinarius, producentur ex eorum collectione continua numeri omnes heptagoni. Qua ratione 1 erit primus heptagonus; 1 † 6, ſive 7 erit heptagonus ſecundus, 1 † 6 † 11, ſive 18 heptagonus tertius; atque ita de aliis.

Hos numeros polygonos, ſive multangulos, prout ex veterum monumentis colligere licet, conſideravit primùm Hypſicles, qui geneſim ipſorum hac definitione

ne complexus eſt : ſi fuerint quotcumqe numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes ; ſumma omnium erit triangulus, ſi intervallum ſit unitas ; quadratus, ſi binarius ; pentagonus, ſi ternarius; hexagonus, ſi quaternarius ; atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypſiclis definitione per numerum, binario majorẽ intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, deſignatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem ſic generaliter concepit : ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium ſumma multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario ſuperans intervallum, habet unitates.

Hujuſmodi porrò numeri dicti ſunt multanguli, ſive polygoni, quia ipſorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt : nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri ; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque poſſunt numeri multanguli, ſive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, ſive polygonum æ-

quilaterum exhibent.

Ex quo patet unumquemque numerorum, à ternario per unitatis incrementum progredientium, multangulum eſſe, totque angulos, ſive latera continere, quot unitates continet ipſe numerus. Hac ratione 3 eſt triangulus, ſive numerus trium angulorum; 4 quadratus, ſive numerus quatuor angulorum; 5 pentagonus, ſive numerus quinque angulorum; atque ita de aliis. Et ratio eſt, quia unitates cujuslibet illorum numerorum ſubinde per æqua intervalla diſponi poſſunt, ut repræſentent figuram totidem laterum æqualium.

Et quoniam ipſa unitas virtualiter eſt omnis multangulus. Eſt enim, & triangulus, & quadratus, & pentagonus, & hexagonus; quum horum omnium multangulorum proprietates unitati ipſi conveniant: proinde quilibet numerus à ternario erit multangulus in ſua ſpecie primus ab unitate: nimirum 3 primus triangulus, 4 primus quadratus, 5 primus pentagonus, 6 primus hexagonus, atque ita in infinitum.

Jam quiſque numerus multangulus, ſive ſit primus ab unitate, ſive alius quilibet, ſi unitatibus ſuis per æqua intervalla

valla disposítis multangulum ipsum exhibeat, eum numerum habebit pro suo latere, qui tot continet unitates, quot sunt termini, ex quorum collectione oritur datus numerus multangulus. Sic quia numerus triangulus 10 oritur ex collectione quatuor terminorum 1,2,3,4, habebit ille pro suo latere numerorum 4. Pariterque quia numerus quadratus 25 producitur ex collectione quinque terminorum 1, 3, 5, 7, 9, erit latus ejus numerus 5.

Atque hinc circa hujusmodi numeros multangulos, sive polygonos duo potissimùm problemata institui solent; quorum primum est, dato latere, invenire multangulum datæ speciei; alterum, dato multangulo, ejusque specie, ejusdem latus determinare. Sed ex iis, quæ de istorum numerorum genesi dicta sunt, perspicuum est horum problematum solutionem ab his aliis pendere: dato numero terminorum, qui ab unitate dato intervallo pregrediuntur, summam omnium invenire; & vicissim datæ summa plurium terminorum, ab unitate dato intervallo progredientium, numerum eorum indagare. Unde quia hæc duo problemata jam solutionem acceperunt à

Tacqueto libro quinto Arithmeticæ practicæ capite ſecundo, fruſtra iis immorabimur.

CAP. VII.

De Numeris figuratis.

EX numeris multangulis, ſive polygonis profecta eſt conſideratio numerorum, qui dicuntur figurati. Quemadmodũ etenim inter Veteres Hypſicles, & poſt eum Diophantus conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eoſque multangulos, ſive polygonos numeros appellarunt; quia unitates ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſive polygonum æquilaterum repræſentant. Sic Recentiores ulteriùs progreſſi conſiderarunt numeros alios, qui generantur ex continua ipſorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione, & tam hos, quàm illos numeros figuratos appellarunt; quia ſcilicet unitatibus ipſorum per æqua intervalla diſpoſitis diverſimode poſſunt configurari.

Quo-

Quocirca numeri figurati Recẽtioribus dicuntur non modò ii, qui oriuntur ex cõtinua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verùm etiam, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Ex quo patet, numeros istos figuratos non modò in varia genera distingui posse pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse pro diversa ratione, qua ex iisdem illis numeris genitoribus, sive ab initio assumptis generari intelliguntur.

Hac ratione, si intervallum, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur, sit unitas; numeri figurati exinde geniti dici poterunt primi generis. Sed nihilominus in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis incrementum progrediuntur; ita dici poterunt numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex additione numerorum genitorum; numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui sunt ordinis primi;

numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum, qui ſunt ordinis ſecundi; atque ita deinceps.

Similiter ſi intervallum, quo numeri genitores, ſive ab initio aſſumpti ab unitate progrediuntur, ſit numerus binarius; numeri figurati, qui ex iis procreantur, vocari poterunt ſecundi generis. Sed in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per binarii incrementum progrediuntur; ita quoque dici poterunt numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex ipſa numerorum genitorum additione; numeri figurati ſecundi ordinis, qui oriuntur ex additione eorum, qui ſunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui ex additione eorum, qui ſunt ordinis ſecundi, generantur; atque ita in infinitum.

Ex quibus jam liquet id, quod ſuperiùs in calce capitis quinti dictum fuit, nimirum numeros columnarum verticalium utriuſque tabulæ ſuperiùs conſtructæ eſſe ex numero eorum, qui vulgò dicuntur à Recentioribus numeri figurati. In utraque namque illarum tabularum nu-

numeri unius columnæ verticalis ab initio collecti dant numeros ſequentis columnæ verticalis. Itaque quia in ſecunda columna verticali habentur omnes numeri naturales, hoc eſt qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; perſpicuum eſt, in columnis illis contineri numeros figuratos primi generis, ita quidem, ut quemadmodum in ſecunda columna exiſtunt numeri genitores, ſic in tertia ſint numeri figurati primi ordinis, in quarta numeri figurati ordinis ſecundi, in quinta numeri figurati ordinis tertii, atque ita deinceps. Sed in pima cujuſque tabulæ columna verticali exiſtit ſeries unitatum, ex quarum continua collectione numeri naturales in ſecunda columna exiſtentes producuntur.

Jam numeri iſti figurati miras habent proprietates, quæ ad Tyrones exercendos non parùm conducunt. Sed ſufficiat in iis, qui primi generis ſunt, iſtam adnotare: nimirum, quod ſi ii ita diſponantur, quemadmodum in prima tabula cernere licet: adeo, ut in prima columna verticali ſit ſeries unitatum, in ſecunda ſeries numerorum naturalium, tum in aliis ſint ipſi numeri figurati, qui

qui ex continua illorum additione oriuntur ; & unaquæque columna tot cifras habeat in principio , quot numerus columnæ continet unitates , unâ demptâ: quod inquam numeri columnarum transversalium exhibeant ordine coefficientes omnium potestatum , à radice aliqua binomia , ut $a + b$, genitarnm.

Nam coefficientes ipsius radicis $a + b$ sunt numeri 1, 1 , qui reperiuntur in secunda columna transversali ; coefficientes quadrati $a^2 + 2ab + b^2$ sunt numeri 1, 2, 1, qui reperiuntur in tertia ; coefficientes cubi $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sunt numeri 1 , 3 , 3 , 1 , qui occurrunt in quarta ; coefficientes quadrato-quadrati $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ sunt numeri 1 , 4 , 6 , 4 , 1 , qui occurrunt in quinta , atque ita deinceps . Quocirca si prior illa tabula in infinitum continuetur , ope ejus facile quidem erit quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam potestatem attollere .

Tota quippe difficultas , quæ in formatione potestatum occurrit , consistit potissimùm in eo , ut inveniantur coefficientes , quibus afficiendi sunt termini potestatum. Nam quantum ad ipsos ter-

terminos, habentur ii nullo negotio, ſi conſtitutis duabus progreſſionibus geometricis, quarum exponentes ſint ipſæ partes radicis binomiæ propoſitæ, & quarum una à quæſita ſui exponentis poteſtate deſcendat uſque ad unitatem, altera viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad poteſtatem quæſitam ſui exponentis; multiplicentur termini unius progreſſionis per correſpondentes terminos alterius.

Ut ſi velim exempli gtatia invenire terminos cubi ex radice binomia $a + b$, conſtituo duas progreſſiones geometricas, quarum una habens pro ſuo exponente partem a deſcendat à cubo ipſius a uſque ad unitatem, altera habens pro ſuo exponente partem b aſcendat viciſſim ab unitate uſque ad cubum ipſius b : nam quum iſtarum progreſſionum una ſit a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3 : multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini cubi quæſiti a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Similiter ſi inveniendi ſint termini quadrato-cubi ex radice binomia $a + b$, formentur duæ progreſſiones geometricæ; quarum una habeat pro ſuo exponente partem a, & à quadrato-cubo ipſius a de-

deſcendat uſque ad unitatem ; altera habeat pro ſuo exponente partem b , & viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b. Quum enim iſtarum progreſſionum una ſit a^5 , a^4 , a^3 , a^2 , a , 1 ; altera 1 , b , b^2 , b^3 , b^4 , b^5 : multiplicatis terminis unius progreſſionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæſiti a^5 , a^4b , a^3b^2 , a^2b^3 , ab^4 , b^5.

Quum itaque termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua binomia facili negotio habeantur ; liquet , totam difficultatem in formatione poteſtatum in eo ſitam eſſe , ut inveniantur coefficientes , quibus ii termini ſunt afficiendi. Unde ſemper ac iſti coefficientes reperiantur ordine in columnis tranſverſalibus prædictæ tabulæ ; perſpicuum eſt , ea mediante facillimè quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam poteſtatam poſſe elevari . Interim ſi recordemur earum proprietatum , quas circa numeros illius tabulæ capite tertio recenſuimus , poterimus formulam quandam generalem nobis cudere , qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope quælibet radix binomia ad quamcumque poteſta-

tem

tem elevabitur. Quod quia à nobis præſtitum eſt in noſtris Algebræ Elementis, quæ propediem lucem adſpicient, ab eo hic conſultò nos abſtinemus, ne ſæpiùs eandem rem proferre videamur.

FINIS.

INDEX

CAPITUM,

Quæ in hoc Opuſculo continentur.

Cap. 1. *De Permutationibus.*
Cap. 2. *De Combinationibus ſecundùm omnes exponentes.*
Cap. 3. *De Combinationibus ſecundùm ſingulos exponentes.*
Cap. 4. *De Combinationibus, in quibus una, eademque res ſepiùs recurrere poteſt.*
Cap. 5. *De Combinationibus, in quibus ordo ſituſve rerum etiam attenditur.*
Cap. 6. *De Numeris multangulis, ſive Polygonis.*
Cap. 7. *De Numeris figuratis.*