LEZIONI ELEMENTARI

DI

FISICA MATEMATICA

DATE NELL' UNIVERSITÀ DI CORFÙ NELL' ANNO SCOLASTICO 1840-41

DA

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI

PROFESSORE DI MECCANICA CELESTE E FISICA MATEMATICA NELL' I. E R. UNIVERSITA' DI PISA, UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE, SOCIO NAZIONALE NON RESIDENTE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SOCIO STRANIERO DELLA R. SOCIETA' ASTRONOMICA DI LONDRA, DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI EC.

TOMO I.

FIRENZE

COI TIPI ED A SPESE DI G. PIATTI

1845

Questa edizione è posta sotto la tutela delle veglianti leggi sulla proprietà in materie di stampa.

AVVISO

DELL'AUTORE

Le Lezioni di Fisica matematica che vengono alla luce in questi due volumi sono quelle che manoscritte furono date per testo agli studenti dell'Università di Corfù nel corso dell'anno scolastico **1840-41.** *L'estensione che ha preso la scienza Fisica in questi ultimi tempi rendendone impossibile l'esposizione completa nel corso di un anno, il Governo Ionio, sulla proposizione dell'esimio mio Collega il Professore Orioli e di me, ordinò al primo, come professore di Fisica Sperimentale, di trattare quelle parti della scienza che risguardano il calore, l'elettricità ed il magnetismo, ed a me di esporre le altre parti che spettano più propriamente alla teoria dell'equilibrio e del movimento, e che perciò* **parti matematiche** *sono dette. Queste lezioni contengono quindi la* **Teoria generale del movimento, quella della Gravitazione universale, i Principii di Statica, e di Meccanica, le Leggi della comunicazione del moto, i Principii d'Idrostatica e d'Idrodinamica, la Pneumatica, l'Acustica e l'Ottica.** *Onde rendere il corso delle lezioni accessibile ad un più gran numero di lettori non si è fatto nel testo che un uso assai parco di dimostrazioni matematiche, e nella più gran parte de' casi non*

INDICE

DELLE MATERIE

DISCORSO PRELIMINARE . . . . . Pag. 1

PRINCIPII DI MECCANICA RAZIONALE O TEORIA DEL MOVIMENTO.

LEZIONE I.

Movimento semplice.

1. Movimento, come si percepisce. Definizioni del movimento assoluto, relativo, rettilineo, curvilineo. 2. Uniforme, variato. 3. Formole e leggi del movimento uniforme. 4. 5. Formole e leggi del movimento uniformemente accelerato. 6. Massa dei corpi, inerzia. 7. La quantità d'inerzia misura la massa. 8. Densità dei corpi; sua relazione colla massa ed il volume. 9. Quantità di movimento. Principio dell'eguaglianza e reciprocità dell'azione e reazione. 10. Forze; come si valutano. Definizione della forza motrice e della forza acceleratrice. 11. Della forza acceleratrice nei movimenti variati in generale. 17

LEZIONE II.

Movimento composto.

1. Legge del movimento composto; principio a cui conduce. 2. Composizione di due movimenti uniformi ed uniformemente accelerati. 3. Dalla composizione dei movimenti uniformemente accelerati si deduce quella delle forze acceleratrici. 4. Del modo di comporre due forze qualunque e del parallelogrammo delle forze. 5. Del movimento curvilineo, della forza centripeta, della forza centrifuga e della sua misura 26

GRAVITAZIONE UNIVERSALE

LEZIONE III.

Della gravità, o della forza di attrazione universale sulla superficie della terra.

1. Galileo scopre le prime leggi della Dinamica, e della caduta dei gravi. La gravità accelera tutti i corpi egualmente. 2. Peso dei corpi, loro proporzionalità alle masse dedotta dalla proprietà precedente. 3. Dell' accelerazione del movimento dei gravi. Macchina d' Attwood. Esperimenti che provano che il movimento dei gravi è uniformemente accelerato. 4. Valore della gravità. 5. Direzione della gravità. 6. Problemi che si risolvono colle leggi della caduta dei gravi . . . . . Pag. 31

LEZIONE IV.

Delle variazioni della gravità sulla superficie terrestre.

1. Isocronismo delle oscillazioni dei pendoli riconosciuto da Galileo, e dimostrato da Huyghens. 2. Pendolo semplice. Formole della durata delle sue oscillazioni per archi minimi circolari. Pendolo composto, centro d' oscillazione. 3. Le oscillazioni di pendoli di diverse sostanze somministrano il miglior mezzo per provare l' eguaglianza dell' azione della gravità su di esse. 4. La durata delle oscillazioni del pendolo varia colla latitudine. 5. Formole generali per esprimere il numero delle oscillazioni che un pendolo invariabile trasportato a diverse latitudini fa in un giorno solare medio. 6. Valori della gravità, o della velocità che essa imprime ad un corpo in un secondo, e della lunghezza del pendolo che batte il secondo di tempo medio per ogni latitudine. 7. Cause della variazione della gravità sulla superficie terrestre. 8. Teorema di Clairaut sulla relazione fra la diminuzione della lunghezza del pendolo, la forza centrifuga all' equatore, e lo schiacciamento dell' ellissoide terrestre: e valore che si deduce di questo schiacciamento. 9. Influenza delle montagne sulla direzione ed intensità della forza di gravità, d' onde ne segue che la gravità è il concorso delle attrazioni di tutte le parti della terra. 10. Prova diretta della proposizione precedente dedotta dall' esperimento di Cavendish colla bilancia di torsione. 39

LEZIONE V.

Esposizione delle leggi di Keplero.

1. Newton dimostra che la gravità è una forza il cui dominio si estende a tutti i corpi del sistema solare : cognizioni preliminari che questa dimostrazione presuppone. Leggi di Keplero. 2. Dell' ellisse e del modo di descriverla. 3. *Prima legge* di Keplero. I pianeti si muovono in orbite ellittiche delle quali il sole occupa un fuoco. 4. *Seconda legge.* Le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. 5. *Terza legge.* I quadrati dei tempi periodici dei diversi pianeti sono fra loro come i cubi dei grand' assi delle loro orbite. 6. Definizioni delle quantità che gli astronomi chiamano elementi di un' orbita. 7. Le leggi di Keplero si estendono anche al movimento delle comete intorno al sole , ed a quello dei satelliti intorno al pianeta principale . Pag. 48

LEZIONE VI.

Prove dell' attrazione universale.

1. Cenni storici sulle idee che si avevano rispetto all' attrazione universale avanti che il genio di Newton desse una dimostrazione matematica della sua realtà. 2. Calcolo celebre di Newton per provare che la luna nel descrivere la sua orbita discende verso la terra alla maniera dei gravi. 3. Dalle tre leggi di Keplero, Newton deduce che la forza che ritiene i pianeti nelle loro orbite risiede nel sole , che questa forza decresce nella ragione dei quadrati delle distanze , e che essa opera egualmente su tutte le materie dei pianeti , e sale al principio generale che ogni molecola di materia attrae tutte le altre in ragione della sua massa , e reciprocamente al quadrato della distanza della molecola attratta. 4. Questioni importanti alla cui risoluzione ha condotto la scoperta della gravitazione universale , ed indicazione dei filosofi e matematici che le risolvettero. 5. La gravitazione universale si estende anche alle stelle fisse come lo indicano i moti delle stelle doppie. 6. Configurazione della Via Lattea secondo i due Herschel padre e figlio. 7. 8. 9. I movimenti che devono seguire le stelle della Via Lattea , o del sistema stellare di cui fa parte il sole , sono tali che assicurano la stabilità di questo sistema nel corso dei secoli 54

ELEMENTI DI STATICA.

LEZIONE VII.

Dell' equilibrio di un punto.

1. Oggetto della Statica, modo con cui in essa si possono rappresentare le forze. 2. Dell' equilibrio di due forze concorrenti in punto; *della risultante* e delle *componenti* di due forze. 3. Condizione geometrica dell' equilibrio di un numero qualunque di forze agenti intorno ad un punto. 4. Traduzione di questa condizione in una formola, ed equazione del principio delle velocità virtuali rispetto ad un punto. 5. L' equazione delle velocità virtuali s' applica anche al caso che il punto sia obbligato a muoversi su di una superficie data 65

LEZIONE VIII.

Dell' equazione delle velocità virtuali, delle macchine semplici, e del principio della leva.

1. Scoperta del principio generale delle velocità virtuali. 2. Definizione delle macchine, dei movimenti geometrici ed equazione generale dell' equilibrio delle macchine semplici. 3. Enumerazione delle macchine semplici. 4. 5. 6. 7. Applicazione dell' equazione delle velocità virtuali alla determinazione delle condizioni d' equilibrio nella leva diritta, nella leva spezzata colle forze applicate perpendicolarmente od obliquamente ai bracci di leva. 8. 9. 10. Dimostrazione del principio della leva, e verificazione delle condizioni trovate coll' equazione suddetta. 11. Condizioni dell' equilibrio del verricello, od asse nella ruota dedotta dall' equazione delle velocità virtuali. 12. Verificazione delle stesse condizioni col principio della leva. . 70

LEZIONE IX.

Dell' equilibrio delle puleggie, del piano inclinato, del cuneo e della vite.

1. 2. Applicazione dell' equazione delle velocità virtuali alla determinazione delle condizioni dell' equilibrio delle pulegge. 3. Verificazione delle stesse condizioni per un principio proprio di queste macchine, ed uso che ha fatto Lagrange di questo principio per la dimostrazione di quello delle velocità virtuali. 5. Deduzione delle condizioni d'equilibrio nel piano inclinato dall'equazione delle velocità

virtuali. 6. 7. La stessa per mezzo della composizione delle forze. 8. Condizioni che somministra l'equazione delle velocità virtuali per l'equilibrio del cuneo. 9. Le medesime condizioni verificate col principio della composizione delle forze. 10. Dell'equilibrio della vite secondo il principio delle velocità virtuali. 11. Condizioni dell'equilibrio della vite dedotte da quelle del piano inclinato. 12. Generalità dell'equazione delle velocità virtuali, e rimando della sua dimostrazione ad una nota 78

LEZIONE X.

Della composizione e decomposizione delle forze parallele, del loro centro, e del centro di gravità.

1. Composizione delle forze parallele dedotta del principio della leva, e dimostrazione di Lagrange che la risultante di due forze parallele è eguale alla somma delle componenti. 2. 3. Formole per esprimere la relazione fra la risultante e le componenti delle forze parallele, e le distanze reciproche dei loro punti d'applicazione. 4. Caso d'eccezione di queste formole. 5. Definizione delle *coppie* del sig. Poinsot, e cenni sulla loro teoria. 6. Modo di comporre un numero qualunque di forze parallele. 7. Definizione e proprietà del centro delle forze parallele. 8. Formola per assegnare la distanza del centro delle forze parallele da un piano dato. 9. Determinazione del luogo del centro delle forze parallele nello spazio. 10. Del centro di gravità. 11. Dell'uso del centro di gravità e del modo di determinarlo 87

MECCANICA

LEZIONE XI.

Delle macchine in movimento, della quantità d'azione, del lavoro dinamico, e delle forze vive.

1. Considerazioni sul movimento delle macchine, ed equazione generale che sussiste nel loro movimento uniforme o periodico. 2. Applicazione di questa equazione al caso in cui il movimento della macchina è uniforme e le forze conservano, rispettivamente alle parti di essa, una direzione costante. 3. Conseguenza importante dedotta dalla precedente equazione che distrugge l'illusione che alcuni si fanno sul potere delle macchine. 4. Vero vantaggio delle macchine. 5. Definizione della quantità d'azione e del lavoro dinamico delle macchine. 6. Principio generale che regola il movimento uniforme o periodico delle macchine. 7. Misura delle forze nella

Meccanica. 8. Il principio delle forze vive applicato, al movimento delle macchine. 9. Controversia fra i Matematici del secolo passato sulla misura delle forze, e motivi della loro discordanza. 10. Digressione su di una frase espressiva di Mongolfier relativa alla forza viva 95

LEZIONE XII.

Comunicazione del moto.

1. Brevi cenni sulla scoperta delle leggi dell'urto dei corpi. 2. La legge chimica di Dalton sulle proporzioni definite, le leggi di Dulong, Petit e Newman sui calori specifici, la legge di Mitscherlich sull'isomorfismo, quella di Faraday sulle proporzioni definite delle correnti elettriche agli equivalenti chimici composti e decomposti, i fenomeni di coesione, di elasticità, di capillarità conducono il Fisico al sistema atomistico di composizione dei corpi. 3. Fenomeni meccanici e termometrici che presentano i corpi dipendenti dalle loro forze d'aggregazione. 4. Idee anteriori per ispiegare questi fenomeni. 5. Del modo con cui va concepita la composizione dei corpi e caratteri generali delle forze che esercitano le loro molecole. 6. Proprietà delle forze molecolari. 7. Origine che si può dare a queste forze. 8. Molecole dei corpi, loro composizione e figura. 9. Stato delle molecole nei corpi solidi, e causa della rigidità dei medesimi. Distinzione dei corpi elastici e dei corpi molli. 10. L'elasticità e mollezza assoluta non esistono in natura. 11. Come il movimento si comunica fra i corpi per l'intermedio delle forze molecolari. 12. e 13. Equazioni fondamentali che sussistono nell'urto diretto dei corpi sferici molli ed elastici. 14. 15. 16. Dell'equazione della conservazione della quantità di movimento, della conservazione di movimento del centro di gravità, e del deperdimento delle forze vive nell'urto dei corpi molli. 17. 18. 19. 20. Dell'equazione della conservazione di quantità di movimento, della conservazione di movimento del centro di gravità, e della conservazione delle forze vive nell'urto dei corpi elastici. 21. Costruzione semplice di Wrenn per la determinazione degli accidenti del moto di due sfere dopo l'urto. 22. Dell'urto obliquo e dell'urto eccentrico; opere dove le teorie di questi urti si trovano esposte. 23. Alcuni esempii d'applicazione delle formole date 102

ELEMENTI D' IDROSTATICA

LEZIONE XIII.

Della trasmissione della pressione attraverso una massa fluida, e delle condizioni d' equilibrio della stessa massa.

1. Definizione dell' Idrostatica. Principio sperimentale della trasmissione della pressione in tutti i versi. 2. Dello stato in cui si trovano le molecole nei fluidi rispetto alle loro forze molecolari. 3. Come operano le forze molecolari in una massa fluida omogenea, onde renderla atta a resistere ad una pressione o trazione. 4. Condizioni per l' equilibrio di una massa fluida soltanto soggetta ad azioni esteriori sulla sua superficie. 5. Del modo con cui secondo i principii esposti, la pressione si trasmette in tutti i versi per una massa liquida. 6. Dell' effetto della gravità sulla pressione nell' interno de' liquidi. 7. La pressione in una massa liquida pesante di poca estensione è costante in ogni piano orizzontale. 8. La pressione è in generale costante in ogni strato liquido in cui le forze esterne si mantengono perpendicolari alla superficie dello strato. Definizione delle *superficie di livello*. 9. Della pressione dei liquidi sulle pareti dei vasi. 10. La pressione esercitata sulla parete di un vaso da un liquido può essere grandemente superiore alla totalità del suo peso. 11. Spiegazione del *paradosso idrostatico*. 12. Descrizione del Torchio idrostatico di Bramah. 116

LEZIONE XIV.

Dell' equilibrio dei corpi immersi nei fluidi, dei pesi specifici e degli areometri.

1. Applicazioni importanti che offrono le leggi dell' equilibrio dei corpi immersi nei fluidi pesanti. 2. Dimostrazione della proprietà che la spinta di un fluido pesante su di un corpo immerso per farlo ascendere verticalmente, è eguale al peso del fluido che il corpo rimuove, e passa pel centro di gravità della massa del fluido rimosso. 3. Relazioni che devono esistere fra il peso dei corpi immersi e quello dei fluidi che rimuovono rispetto al sommergersi o galleggiare degli stessi corpi. 4. Della situazione che prendono i galleggianti nello stato d' equilibrio stabile, e del *metacentro*. 5. Definizione dei pesi specifici dei corpi, ed applicazione del principio dell' equilibrio dei corpi immersi alla determinazione di questi pesi. 6. Areometri di volume costante, e metodo di procedere per determinare con essi i pesi specifici dei corpi. 7. Areometri di peso costante, e loro uso 123

LEZIONE XV.

Dell' azione delle forze molecolari nella produzione dei fenomeni di capillarità.

1. Cenni storici sulla teoria dei fenomeni capillari. 2. Fenomeno di capillarità più semplice ad osservarsi. 3. Causa per cui i fenomeni capillari sembrano deviare dalle leggi ordinarie dell' Idrostatica, e dimostrazione che nella superficie dei liquidi esiste una forza di trazione reciproca fra le parti. 4. Effetti che devono risultare in un liquido limitato da due piani vicinissimi fra loro in vista della trazione esistente nella superficie del liquido. 5. La tensione nelle superficie i cui elementi sono animati da forze che le sono perpendicolari è costante, ed applicazione di questa proprietà all' equilibrio dei liquidi nei fenomeni capillari. 6. Del modo con cui si fa il passaggio dalla trazione della superficie libera di un liquido, a quella che sussiste lungo le pareti nei liquidi che non le bagnano, ed equazione che somministra l' equilibrio delle forze in questo passaggio. 7. Equazione analoga nel caso che i liquidi siano di natura di bagnare le pareti dei vasi in cui sono contenuti. 8. Dimostrazione che nei tubi capillari le elevazioni o le depressioni dei liquidi, secondo che bagnano o non bagnano le pareti, sono prossimamente in ragione inversa dei diametri dei tubi. 9. Formola generale fra la depressione od elevazione di un punto della superficie di un liquido in equilibrio e la trazione della sua superficie . . . 130

NOZIONI IDRODINAMICHE.

LEZIONE XVI.

Teorema di Torricelli. Esperimento di Galileo sull' urto di una vena fluida.

1. Notizie storiche sui lavori dei geometri nella teoria del movimento dei liquidi. 2. Mezzi con cui i pratici suppliscono alle imperfezioni di queste teorie. 3. Dimostrazione del Teorema di Torricelli che la velocità di un liquido che zampilla da un piccolo foro di un vaso è quella dovuta all' altezza della colonna liquida che misurerebbe la pressione del liquido sul foro se fosse chiuso. 4. Nel calcolo delle quantità di liquido che esce bisogna misurare l' area del foro nel luogo che dicesi della *vena contratta*. 5. 6. Descrizione di un esperimento di Galileo sull' urto di una vena fluida, e misura dell' urto che se ne deduce. 7. Espressione analitica della misura dell' urto di una vena liquida alla quale conduce l' esperimento de-

scritto. 8. Il principio della forza viva concorda col risultato dell'esperimento di Galileo, e può dare una dimostrazione diretta del medesimo. 9. Della resistenza che soffrono i corpi che si muovono nei fluidi 140

PNEUMATICA.

LEZIONE XVII.

Barometro.

1. Scoperta della pressione atmosferica, ed a chi è dovuta. 2. Considerazione sulla variabilità della ragione in cui stanno le forze molecolari attrattive e repulsive secondo i diversi gradi di temperatura, e condizioni in cui si trovano le stesse forze nei tre diversi stati dei corpi, solido, liquido od aeriforme. 3. Costituzione dell'atmosfera. 4. Principii idrostatici che conviene aver presente per intendere la prova che si dà della pressione atmosferica. 5. Esperimento di Torricelli col tubo barometrico col quale si conchiude l'esistenza della detta pressione. 6. Conferma della stessa conclusione con un esperimento conosciuto anteriormente a quella di Torricelli. 7. 8. Costruzione del barometro. 9. Modo di praticare le osservazioni con esso. 10. 11. Correzione dell'altezza barometrica dovuta alla capillarità. 12. Correzione per la temperatura. 13. Correzione per la latitudine. 14. Correzione per l'elevazione sul suolo. 15. Formola che rappresenta tutte riunite le quattro dette correzioni 150

LEZIONE XVIII.

Usi del barometro.

1. 2. Del barometro come indicatore del buono e del cattivo tempo. 3. Relazioni che si osservano nelle oscillazioni barometriche accidentali. 4. Leggi delle variazioni barometriche-periodiche. 5. 6. Uso del barometro per misurare le altezze delle stazioni sopra il livello del mare, e formola approssimata che dà la differenza di livello di due stazioni. 7. Correzioni delle quali abbisogna la formola precedente. 8. Sua espressione rigorosa, e processi per ridurla in tavole. 9. Precauzioni principali da prendersi nel fare le osservazioni col barometro onde determinare la differenza di livello di due stazioni 162

LEZIONE XIX.

Delle variazioni dell' elasticità e forza espansiva dei gas al cambiar di volume e di temperatura.

1. Questioni da risolversi rispetto alla forza espansiva di una massa d' aria che cambia di volume o di temperatura. 2. Legge con cui varia la pressione o la forza espansiva al cambiar di volume. 3. Dubbii elevati su questa legge. 4. Conferma della medesima, e breve descrizione degli esperimenti eseguiti da una Commissione dell' Istituto di Francia per quest' oggetto. 5. Esperimenti per mezzo della dilatazione dei volumi. 6. 7. La legge trovata si verifica indipendentemente dalla temperatura, ed entro certi limiti per tutti i gas. 8. Leggi che si osservano fra i volumi e le forze espansive dei miscugli di diversi gas, e formole che le esprimono. 9. Legge di Dalton sulle quantità di gas che assorbono i liquidi, e formole relative. 10. Riflessioni sull' accordo della legge esposta cogli effetti delle azioni molecolari. 11. 12. Legge della dilatazione dei gas esposti ad un' elevazione di temperatura sotto una pressione costante. 13. Formola per esprimere la forza espansiva o pressione di un gas in temperature differenti, ma ridotto ad occupare lo stesso volume. 14. Formole fra le forze espansive e le densità che ha una massa d' aria avanti e dopo d' essere stata compressa o dilatata, nella quale il calor fatto libero non si sia ancora per nulla dissipato, od il calore divenuto latente non sia ancora stato rimpiazzato dai corpi esteriori 171

INDICE DELLE NOTE

LEZIONE II.

NOTA I. *Osservazioni sulla legge del movimento composto* . Pag. 187
NOTA II. *Deduzione della formola della forza centrifuga nel cerchio.* ivi
NOTA III. *Della forza centrale e della forza centrifuga* 189

LEZIONE III.

NOTA I. *Del movimento dei gravi che discendono od ascendono verticalmente, e del movimento dei gravi lungo i piani inclinati* 191
NOTA II. *Del movimento dei projettili nel vuoto* 198

LEZIONE IV.

NOTA I. *Delle oscillazioni dei pendoli.* 201
NOTA II. *Dell' Isocronismo.* 204
NOTA III. *Del pendolo cicloidale.* 206
NOTA IV. *Dimostrazione di due formole date nel testo.* 209
NOTA V. *Sulla variazione della gravità prodotta dalla forza centrifuga* ivi
NOTA VI. *Sul calcolo della densità della terra per mezzo degli esperimenti fatti colla bilancia di torsione* 211

LEZIONE V.

NOTA I. *Dell' area dell' ellisse, della sua tangente e del problema di Keplero* 214
NOTA II. *Tavola sinottica del sistema solare.* 218

LEZIONE VI.

NOTA I. *Sulla determinazione della distanza della luna dalla terra per mezzo della parallasse.* 224
NOTA II. *Deducesi dalla legge delle aree di Keplero che la forza centripeta che fa circolare i pianeti nelle loro orbite risiede nel sole.* 225

NOTA III. *Dalla figura ellittica delle orbite dei pianeti si deduce che la forza attraente del sole varia in ragione inversa del quadrato della distanza del pianeta* 227
NOTA IV. *Si prova colla terza legge di Keplero che l' attrazione del sole è proporzionale alle masse dei pianeti indipendentemente dalla natura delle loro sostanze* 229
NOTA V. *Sulla legge d' attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza.* 230

LEZIONE VII.

NOTA I. *Sulla dimostrazione del parallelogrammo delle forze.* . . 233
NOTA II. *Formole per la composizione e decomposizione delle forze.* 234
NOTA III. *Esempii d' applicazione del principio della composizione o decomposizione delle forze all' equilibrio de' sistemi di forma variabile* 235

LEZIONE IX.

NOTA I. *Dell' equazione delle velocità virtuali in un sistema qualunque* 242

LEZIONE X.

NOTA I. *Del centro di gravità d' alcuni corpi omogenei.* 247
NOTA. II. *Sulla legge della conservazione del movimento del centro di gravità..* 250
NOTA III. *Della legge della conservazione delle aree.* 251

LEZIONE XI.

NOTA I. *Sul principio della conservazione delle forze vive* . . . 255
NOTA II. *Teorema di Huyghens sulla discesa del centro di gravità* . 258

LEZIONE XIII.

NOTA I. *Riflessioni sul modo di considerare l' azione delle forze molecolari* 261
NOTA II. *Del calcolo delle pressioni dei fluidi sulle pareti dei vasi che li contengono.* 262

LEZIONE XIV.

NOTA I. *Del calcolo delle correzioni da farsi nella determinazione dei pesi specifici.* 266

LEZIONE XV.

NOTA I. *Formole pel calcolo di alcuni fenomeni di capillarità.* . 271
1.mo *Dell' altezza di un liquido fra due piani verticali paralleli vicini fra loro* ivi
2.do *Dell' altezza di un liquido in un cannello di sottil diametro.* ivi
3.zo *Altezza di una goccia di un gran diametro.* . . . 272
4.to *Altezza e peso del liquido sollevato da un disco solido.* 273
5.to *Valori numerici delle costanti, contenute nelle premesse formole, corrispondenti ad alcuni liquidi* 274
6.to *Formole pel calcolo dell' elevazione o depressione dei liquidi sovrapposti in un cannello.* 276

LEZIONE XVI.

NOTA I. *Di una seconda correzione della colonna barometrica proveniente da un' effetto capillare del mercurio nella vaschetta* 279
NOTA II. *Sulla riduzione della colonna barometrica osservata ad altre equivalenti in peso sotto il parallelo di 45.°* . . . 280

LEZIONE XVIII.

NOTA I. *Dimostrazione della formola pel calcolo delle altezze col mezzo delle osservazioni barometriche.* 281
ADDIZIONE. *Della modificazione che arrecherebbe alla formola per la misura delle altezze col mezzo delle osservazioni barometriche l' ipotesi di Dalton sulla costituzione dell' atmosfera.* 284

LEZIONE XIX.

NOTA I. *Formole esprimenti le variazioni di volume o di densità delle sostanze aeriformi prodotte dai cambiamenti di pressione o di temperatura.* 288
NOTA II. *Formola pel calcolo della forza espansiva di una massa d' aria che cambii alcun poco di volume senza perdita di calore* 291

NOTA AGGIUNTA.

Teoremi di Newton sull' attrazione delle sfere. 295

TAVOLA D'ERRORI A CORREGGERSI

Lo studente è invitato ad eseguire nei luoghi rispettivi le seguenti correzioni, avanti d'intraprendere la lettura del libro, senza di che potrebbe incontrare talvolta delle difficoltà nell'intelligenza delle materie.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
19	29	(4) e (5)	(3) e (5)
20	22	(4)	(3)
34	39	della	dalla
35	32	4 e 5	4 e 5 della Lezione I
—	33	della lezione precedente	della Lezione precitata
36	7	$\sqrt{29\,e}$	$\sqrt{2\,g\,s}$
40	ult.	Part. I. Prop. XXVI	Part. II Prop. XXV e Part. IV Prop. XXV
43	9	$t = l$	$t = 1^s$
—	33	del meridiano	del quarto del meridiano
44	10	si distrugge per causa	cessa d'essere distrutta dalla
45	6	a quelle	a quella
—	8	$1^{\frac{1}{283}\,74}$	$\frac{1}{283}\,74$
46	37	Fig. 5	Fig. 5 e Fig. 6
47	31	17me nella	17me : nella
49	17	Fig. 5	(Fig. 7)
50	$\frac{32}{39}$	(Fig. 6)	(Fig. 8)
51	17	il grand' asse	il grand' asse a
—	24	somministra a	somministra
—	30	dell' orbite	dell' orbita
52	12	ed il punto	od il punto
55	19	supposti	supposta
—	32	$7^{\lambda}.\ 43^{m}$	$7^{h}.\ 43^{m}$
58	24	indistantemente . . . le molecole	indistintamente . . . molecole d' eguali masse
59	3	e considerando	e trovando
61	40	anteriormente	interiormente
63	29	di ferma	di forma
65	12	ed i corpi	od i corpi
66	7	ne	e
—	32	numero	articolo 1
67	25	$O\,p$	$O\,p_{,}$
—	29	$O\,p$,	$O\,p_{,}$
71	1	alcuna azione	alcuna nuova azione
—	35	applicate	applicate in un piano
—	37	girare.	girare nel piano delle forze.
72	8	del fulcro	dal fulcro
75	32	applicato	applicata
76	11	rotatori	rotatorii
79	11	che sostenuta	che è sostenuta

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
80	31	$M S$	$M R$
—	32	a di	ad i
81	5	$v = - v \sin i$	$r = - v \sin i$
—	9	dinotata	dinotate
—	34	un angolo	l'angolo
82	21	$e h$	$C h$
—	32	dalla	della
—	38	la resistenza	le resistenze
83	3	che si ha	si ha
—	33	la madre vite soltanto	la madre vite è soltanto
84	14	della madre vite incastrato fra due spire della vite	della vite incastrato in un passo della madre vite
—	18	dal	del
—	21	$\rho = 2 \pi a . v$	$p = 2 \pi a . v$
85	7	orizzontale	orizzontalmente
—	11	fig. 46	fig. 41
87	8	o nella	e nella
—	17	fig. 18	(fig. 47)
88	1	fig. 45 e 46	fig. 46 e 46 bis
89	10	l' equazione precedente	la proporzione precedente
—	13	altre due	altre due dirette in verso contrario
—	22	$R . S B$	$R . S A$
90	14	$(B q , - C q)$	$(B Q , - C q)$
—	38	P_4 ec.	P_4 ec. tutte traenti nella stessa direzione
91	12	$H_2 H_3 : H^2_3 A_4$	$H_3 A_4 : H_2 H_3$
—	14	farà	sarà
92	2	della quale	del quale
—	9	$a_1 a_1$	$a_1 a_2$
—	19	$P_2 x_3$	$P_2 x_2$
—	25	B_2	P_2
95	13	ei dice	si dice
96	38	$\frac{P^2}{R} = \frac{S}{\Sigma}$	$\frac{R}{P} = \frac{S}{\Sigma}$
97	2	$P : R :: S : \Sigma$	$P : R :: \Sigma : S$
98	16	*guantita*	*quantità*
99	38	produrre	perdere
102	8	le velocità che ne danno	che ne danno le velocità
106	4	, ed hanno	hanno
109	11	all' azione	dell' azione
—	15	$v_1 + w_1 = u_1$	$v_1 + w_1 = u$
—	38	da esso	da esse
110	2	$w_1 = v_1 - u$	$w_1 = u - v_1$
111	17	$m u_1^2$	$m_1 u^2$
114	37	questa	questo
115	14	a quello	a quella
119	26	al peso	equivalente al peso
122	40	ferro	ferro , *H H* ,
123	4	*gravità specifiche*	*pesi specifici*

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
123	21	Concepiscansi	Concepiscasi
124	28	di corpo $P - \Pi$	di peso $P - \Pi$
126	27	Perciò si pesa	Perciò si sospende un corpo insolubile qualunque
		. . . . lo stesso corpo	
—	35	due altre pesate	due pesate
128	32	$\frac{p}{\varpi'}$,	$\frac{p}{\varpi}$
136	39	equiliboio , eguali	equilibrio , eguali. (Ved. il n.° 11 della Nota III della Lez. VII)
155	ult.	coperto	chiuso
159	2	Fig. 75	Fig. 74 bis
160	39	nota 3	Nota II
161	10	l' elevazione del barometro	l' elevazione della stazione del barometro.
164	18	altre volte	altra volta
167	33	$\left(1 + \frac{\alpha z}{2 r}\right)$	$\left(1 + \alpha \frac{2 Z + z}{2 r}\right)$
169	1	$1 + \delta (\Theta - \theta)$	$1 - \delta (\Theta - \theta)$
—	3	, e che	, o che
180	29	XVI	XVII
182	16	costante	uniforme
194	3	per un' altezza	da un' altezza
—	9	$H' P'$, $H'' P''$	$H' P$, $H'' P$
195	39	dalle diagonali	dalla diagonale
198	7	fig. 82	fig. 83
199	34	$2 A V = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g}$	$2 A V = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$
200	4	nel doppio del seno	nel seno del doppio
201	19	Nota precedente	Nota I della Lezione III
202	15	fig. 4 bis.	Fig. 86 bis
204	30	fig. 87	fig. 85
205	28	$\frac{\pi}{2} \frac{IM}{MI}$	$\frac{\pi}{2} \frac{IM}{ML}$
207	5	fig. 89	fig. 88
—	14	figura 13	figura 89
—	36	$m O$	$m' O$
212	25	la formola (1)	talchè s sia la distanza del punto a dalla linea d' equilibrio , la formola (1)
214	21	$2 a - 2 F p$ . . $2 a e - 2 S p$	$2 a - 2 S P$ . . $2 a e + 2 S p$
—	24	$F p = x$	$S p = x$
215	3	$a^2 - x^2$	$a^2 - x'^2$
—	5	$C P^2$	$C P'^2$
217	14	$d s q$, $d S H$	$d S q$, $d H q$
223	3	Schroet	Schroeter
—	12	e che le loro orbite	e le loro orbite
224	9	$M L T$	$M L C$
225	22	eguale	equivalente
—	27	eguale	eguale in superficie

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
231	21	sulle masse . . . . alterazione	su masse . . . . attrazione
237	2	eguali le componenti delle forze opposte	le componenti delle forze opposte ed eguali
238	37	a quella delle due forze eguali e contrarie sulle	a ciascuna delle due forze eguali applicate in verso contrario alle
256	17	$P_1 p_1 +$ ec.	(1) $P_1 p_1 +$ ec.
261	18	che più	più
262	8	, come pure	: come pure
—	5, 6	*b c*	*b e*
268	16	1,0019 49	1,0019549
272	21	ad essere costante	ad essere presso che costante
—	23	piano orizzontale	piano sensibilmente orizzontale
273	1	costante di una larga goccia	di un tal goccia
—	7	si fa pendere	si fa pendere in equilibrio
280	18	e seg. $9 H_\lambda$	$g H_\lambda$
282	30	$\log \left(1 - \frac{i}{H}\right)$	$- \log \left(1 - \frac{i}{H}\right)$
283	25	$\Upsilon + r$	$\Upsilon + v$
284	7	$\frac{H'}{h}$ (1 — ec.	$\frac{H'}{h'}$ (1 — ec.
—	11	$1 - \frac{\alpha z}{r}$	$1 + \frac{\alpha z}{r}$

DISCORSO
PRELIMINARE

DISCORSO

PRELIMINARE (*)

. . . . . Ho scelto d' esporvi quale sia l' essenza di una teoria fisica, per quale cammino si giunga al termine di queste teorie, e, soffermandomi un poco a considerare quelle dalla cui meta siamo ancor lungi, d' indicarvi alcuni nuovi aditi per accostarvisi. Benchè già siate incamminati nelle fisiche discipline, non ho creduto inopportuno l' invitarvi a volgere lo sguardo addietro sul cammino percorso. È ora che, portando la riflessione su quello che già avete esplorato, potete essere più in grado di riconoscere la giustezza ed apprezzare la generalità dei principii coi quali siete stati diretti, e quindi di discernere più facilmente le guide per innoltrarvi. Non vi spiaccia che nel corso del mio dire adduca talvolta degli esempii tratti da cose comuni e ben conosciute, coll' oggetto di rendermi più intelligibile all' universalità degli uditori.

1. La voce fenomeno è stata da prima impiegata per indicare l' apparizione di qualche cosa di nuovo o straordinario nel cielo, o nell' atmosfera: nella presente sua significazione essa indica una modificazione qualunque nello stato di uno o più corpi, un fatto qualunque che presenti la natura. Tengo in mano una pietra, l' abbandono, e vedo che cade al suolo. Immergo un cannellino di

(*) Ci è parso che l'annesso Discorso pronunciato come Prolusione all' apertura del corso di Fisica matematica e Meccanica celeste nell' Università di Pisa, ommesso l' esordio, fosse a proposito per essere preposto a queste Lezioni, come quello che espone le viste che hanno diretto la loro compilazione, benchè al principiante possa essere più convenevole il differirne, per una più chiara intelligenza, la lettura alla fine dell' opera.

cristallo nell' acqua, e trovo che questo liquido monta nel suo interiore ad un livello più alto che non istà all' esteriore. Stropiccio un bastone di cera lacca, l' avvicino a dei corpi leggieri, e miro che volano ad esso. Accosto una calamita ad un pezzo di ferro, e scorgo che le si attacca. Ecco in questi fatti, o cambiamenti nello stato dei corpi altrettanti esempii di fenomeni.

La generalizzazione del significato della voce fenomeno non è venuta per azzardo, o per capriccio: essa fu una naturale conseguenza del metodo che si segue nello studio della Fisica, che non conduce ad altro che a scoprire la connessione che esiste fra i diversi fatti della natura, ed a salire da quelli che sono più semplici e conosciuti, a quelli che sono più complicati e sorprendenti. I fenomeni propriamente non si spiegano, si può solo riunire varii fatti individuali sotto un sol capo, astrarre da essi un fatto più generale, od un principio comune, ed è nel far vedere come gli altri fatti individuali derivano dall' esistenza di quel fatto generale, che si riduce ciò che si deve intendere per ispiegazione dei fenomeni. Come questa proposizione, che fissa il vero ed unico scopo della scienza, importa che sia ben concepita, permettetemi che vada a schiarirla in un modo volgare con degli esempii.

Un' iride apparisce in cielo. La novità dell' apparizione, la regolarità della forma circolare, la bellezza dei vividi colori che la vestono attraggono l' attenzione di uno spettatore, che nell' ammirazione del fenomeno, mosso da curiosità, dimanda come esso succeda. Fate dirigere lo sguardo di questo spettatore su d' una serie di sferette di cristallo esposte ai raggi del sole e collocate, sospese in aria, in un certo arco di cerchio; fategli osservare che guardando da un certo punto la parte di queste sferette illuminate dal sole si vede una simile apparenza di archi concentrici di diverso colore od un' iride artificiale; fate notare a queste spettatore che quando si presenta in cielo un' iride sempre sta splendendo il sole, e stanno cadendo dal lato opposto dell' orizzonte delle goccie d' acqua, che, succedendosi le une alle altre nello stesso luogo, fanno le funzioni di quelle sferette di cristallo, e devono quindi produrre un effetto analogo; e lo spettatore curioso, già parendogli in questa analogia d' effetti di trovare una ragione del fenomeno, rimarrà come soddisfatto della spiegazione. Ora che si è ottenuto da questo paragone? si è spiegato un fatto per un altro, si sono avvicinati due fatti e si sono ridotti ad un solo, quello dell' apparizione di colori quando i raggi solari penetrano in una certa direzione in piccole sfere di sostanze diafane.

Prendiamo un secondo esempio. Un fulmine viene a scagliarsi da una nube all' altra. La viva improvvisa luce che abbaglia, il tuono che rimbomba in seguito infondono terrore, non che sorpresa nell' animo di un astante, che stupefatto dimanda da che proceda un così portentoso fenomeno. Facciasi conoscere a quest' astante che se con una macchina elettrica, od altro mezzo si porta artificialmente un corpo ad uno stato elettrico un po' elevato, questo lancia sui corpi che gli si avvicinano delle scintille con iscoppio; facciasi sapere a quest' astante che Franklin, ed altri fisici dopo lui elevando dei cervi volanti sino alle nubi hanno riconosciuto che spesso le nubi sono in uno stato elettrico assai esaltato, e l' astante troverà subito nelle scariche di quel corpo elettrico un' immagine in piccolo di ciò che la natura opera in grande colla nube, e riconoscerà che il fulmine ed il tuono non sono che la conseguenza di una grande scarica elettrica di una nube su di un' altra che l' avvicini. Il fenomeno parrà così come spiegato alla sua mente. Ma anche in questo caso, che è ciò che si è conseguito? non altrimenti di quanto abbiamo detto relativamente all' iride, non si sono che ravvicinati due fatti e ridotti ad un solo fatto astratto, che li comprende amendue, quello che l' elettricità tende a passare dal corpo eccitato agli altri che gli si avvicinano, e che il suo passaggio attraverso all' aria è accompagnato da apparizione di luce, e da produzione di strepito. Questo e nient' altro si ottiene collo studio della fisica. A noi non è dato, lo ripeto, di salire alle cause prime ed efficaci dei fenomeni; soli si avvicinano fra loro i fenomeni per ciò che hanno di comune, se ne induce un fatto astratto più generale. Questi fatti astratti e generali si fanno essi stessi divenire termini di comparazione per altre induzioni di un ordine superiore, fin a tanto che rimontando d' induzione in induzione si sale ad un fatto più universale di tutti, che nello stato attuale delle nostre cognizioni non ammetta più d' essere compreso in altri. Allora si considera questo fatto come primitivo, si assume per un assioma di Fisica, e le spiegazioni che si danno, si riducono a far vedere come ammessa la sua esistenza, i fenomeni individuali conseguitano necessariamente, e non differiscono fra loro che per le circostanze concomitanti. Questo metodo del quale il Galileo ha dato i primi luminosi esempii è stato chiamato, dietro Bacone, che lo ha inculcato più di tutti, *il metodo d' induzione*, ed i grandi progressi che hanno fatto le scienze fisiche, ne' due ultimi secoli, sono dovuti alla fedele osservanza di esso.

2. Il principio che si nota universalmente nella produzione dei fenomeni è, che la ripetizione delle stesse circostanze precedenti, è sempre accompagnata dalla apparizione dello stesso fenomeno conseguente. Mai si è abbandonato un corpo a se stesso, senza che questo non si sia visto cadere: mai si è immerso un cannellino di cristallo nell'acqua, senza che questa non sia montata in esso ad un livello più alto. Stà nel convincimento sperimentale che abbiamo di questa precedenza e successione, che riposa tutta la certezza della Fisica. Nè solo i fenomeni nelle stesse circostanze si riproducono gli stessi, ma eziandio le relazioni di quantità fra i diversi elementi che li compongono si conservano inalterabili. Così si trova che ogni volta che si lascia cadere un corpo, gli spazii per cui questo corpo viene successivamente a discendere in tempi eguali, crescono come i numeri impari 1, 3, 5, 7 ec. Tutte le volte che si immergono nell'acqua dei cannellini di cristallo, che per la loro sottigliezza sono detti capillari, si trova che le elevazioni dell'acqua stanno in ragione inversa dei diametri dei cannellini. Le relazioni di cui parliamo, che la Natura conserva costantemente nelle produzioni dei fenomeni, si chiamano *leggi fisiche*, e per maggior comodità si traducono spesso in espressioni matematiche. Queste leggi costituiscono la sostanza della scienza, esse riassumono nei loro rapporti le induzioni fatte, e formiscono i termini di confronto per le induzioni da farsi; esse ci rischiarano la percezione dei fenomeni, e ci mettono in istato di calcolarli preventivamente, ciò che è il fine utile della scienza. L'ingegno del fisico deve quindi manifestarsi nell'invenire i mezzi onde sottoporre a misure precise tutti gli elementi che costituiscono i fenomeni; e la sua penetrazione, nel discernere col confronto dei risultamenti ottenuti le relazioni che esistono onde indurne le leggi e formolarne le espressioni. Da principio, quando i confronti non sono istituiti che su fatti parziali, le leggi possono presentarsi sotto forma un po' complicata, ed essere l'espressione di effetti composti; ma a misura che con induzioni successive si vanno scoprendo leggi più generali, si trova che le loro espressioni vanno acquistando un maggior grado di semplicità. *Questa semplicità di relazioni*, dice un gran filosofo e matematico (1), *non parrà sorprendente, se si considera che tutti i fenomeni della natura non sono*

(1) Laplace. Introduction à la théorie analytique des probabilités pag. CXXXIII. Système du Monde pag. 108, 5.e édition.

che i risultamenti matematici di un piccol numero di leggi immutabili. Infinitamente variata nei suoi effetti, la natura non è semplice che nelle sue cause, e la sua economia consiste a produrre un gran numero di fenomeni col mezzo di un piccol numero di leggi generali.

3. Già sia che ciò proceda, obbiettivamente, dal modo con cui formiamo le nostre idee, già sia che ciò dipenda, subbiettivamente, da un principio inerente all' intelligenza umana, il fatto stà che per la nostra mente è incomprensibile l' effettuazione di alcun fenomeno, senza che il movimento non sia intervenuto per operarlo. Ogni cambiamento in un corpo non può dipingersi nella nostra mente come avvenuto, se il corpo stesso od alcune delle sue parti non hanno ricevuto un movimento, o se per mezzo di movimento, alcuna cosa non è venuta ad aggregarsi o separarsi da esso. È in questo significato che si dice, che la scienza della natura non è che la scienza del movimento. *Ignorato motu, ignoratur natura.* Affinchè dunque possiamo assegnare il modo di formazione di un fenomeno, diviene necessario lo scoprire, o per lo meno concepire un movimento, che sia atto a dar effetto al cambiamento avvenuto.

D' altra parte la nozione che ci dà il sentimento interno dell' azione che esercitiamo quando produciamo o distruggiamo un movimento, trasportata per analogia all' esterno c' induce a concepire che ogni movimento che nasce, è l' effetto di un' azione esercitata sul mobile. Queste azioni atte ad eccitare movimento ci sono sconosciute nella loro essenza; ma considerandole semplicemente come cause di moto, prendono il nome dì *forze;* e valutandole proporzionalmente ai loro effetti, si sono scoperte alcune leggi che si verificano costantemente in tutti i movimenti, e mediante le quali, date le forze si possono calcolare i movimenti risultanti, e viceversa dalla cognizione dei movimenti prodotti si può riconoscere il modo d' azione delle forze. Lo studio di queste leggi primordiali del movimento, costituisce la parte fondamentale della Fisica, detta *Meccanica razionale.* Dedurre secondo i principii della meccanica razionale il modo d' operare della forza, vale a dire la legge della sua azione, onde risultino quei movimenti che generano, o si concepiscono generare i fenomeni, è ciò che si chiama *caratterizzare la forza.* Questa caratterizzazione è l' apice di generalità induttiva a cui ci è dato di poterci elevare nello studio dei fenomeni; il definire il modo d' azione d' una forza è, pei limiti dell' intendimento nostro, come assegnare la natura di una

causa primitiva, ed è ciò che costituisce il compimento di una teoria fisica.

Dopo queste nozioni non vi sarà difficile l'intendere la definizione della Fisica che vado a darvi. LA FISICA È LA SCIENZA CHE DALL'ESAME DELL'INFINITA VARIETA' DEI FENOMENI NATURALI CHE PRESENTANO I CORPI INORGANICI, O CONSIDERATI NELLO STATO INORGANICO, INFERISCE PER INDUZIONI SUCCESSIVE LE LEGGI GENERALI ED INVARIABILI CHE PRESIEDONO ALLA FORMAZIONE DEI FENOMENI, E SALE DAL CONOSCIMENTO DELLE LEGGI A CARATTERIZZARE LE FORZE CHE CAGIONANO I MOVIMENTI PEI QUALI I FENOMENI SONO, O SI CONCEPISCONO EFFETTUATI.

4. La investigazione delle leggi, e la determinazione teorica delle forze sono dunque i due grandi oggetti che si propone la Fisica, e ciascuno di essi si conseguisce coi suoi mezzi proprii. Pel primo oggetto, è necessario studiar la natura quale è, cioè esaminarla per mezzo di osservazioni, interrogarla per mezzo di esperienze, ed analizzando i risultamenti ottenuti, riconoscere per induzioni successive quali sono le leggi con cui il CREATORE ha regolato il mondo. Niente si può scoprire in questa parte per mezzo del solo raziocinio. L'*uomo*, disse il gran Bacone, *ministro ed interprete della natura, tanto più opera ed intende, quanto più ha sperimentato ed investigato sulle sue leggi; nè sa, nè può più* (1). Pel secondo oggetto, si parte pure dalle leggi del movimento, che l'esperienza ci ha somministrato, ma si procede poi con raziocinii puramente matematici a dedurre dalle leggi verificate il carattere delle forze, e di lì si discende a tutte le conclusioni riguardo ai fenomeni. Di qui venne la divisione della Fisica in *isperimentale e matematica*. La Fisica sperimentale ha per oggetto di far conoscere le osservazioni e le esperienze, dalle quali si sono indotte le leggi che regolano i fenomeni; la Fisica matematica di esporre i metodi pei quali siamo saliti dall'analisi delle leggi a caratterizzare le forze, ed a somministrare i mezzi per discendere in seguito dalla cognizione delle forze al calcolo di tutti i fenomeni. Questo è ciò che ci spiegò il maggior dei fisici dicendo (2): *Tutta la difficoltà della filosofia naturale pare in questo consistere, che coi fenomeni del movimento investighiamo le forze della natura, e dopo dal conoscimento di queste forze deduciamo tutti gli altri fenomeni.*

5. Progredendo di questo modo i fisici hanno finora ridotto a

(1) Homo naturae minister ac interpres tantum facit et intelligit, quantum de naturae ordine re vel mente observaverit, nec amplius scit aut potest. Nov. org.

(2) Newton. Phil. Princ. math. Praefatio auctoris.

cinque specie di forze, quelle da cui si possono concepire che procedano tutti i fenomeni della materia inorganica. Queste forze sono, *la gravitazione universale, l'azione molecolare, la forza repulsiva del calorico, le forze elettriche, e l'azione dei corpi sulla luce.* Una grande disparità esiste però nelle prove del carattere della prima di queste forze, e di quello delle altre. Per la prima tutti gli stadii del cammino di una teoria completa sono stati percorsi. Ticone Brahe, ed i suoi predecessori hanno somministrato le osservazioni celesti, Kepler ne ha tratto per induzione le leggi, Newton ne ha caratterizzato la forza: e questo gran filosofo, ed i matematici posteriori avendo seguito gli effetti di questa forza in tutti i suoi particolari, hanno ridotto a calcolo tutti i fenomeni del cielo. Non è così rispetto alle altre quattro forze; per alcune, la legge della loro azione è tuttavia incognita, per altre, le sostanze da cui si suppone che emanino hanno un carattere tuttavia troppo ipotetico; in breve, queste forze non sono state introdotte, che per classificare sotto principii proprii dei fenomeni differenti di cui finora non scorgiamo la connessione. Lo studio continuato di questi fenomeni ci ha però già svelato gran numero d'analogie fra loro, ed il sospetto che essi siano tutti le conseguenze dell'azione combinata dell'attrazione colla repulsione fra due o più sostanze, va ogni giorno acquistando una più grande probabilità. La verificazione di questo sospetto è il palio verso cui tende la fisica moderna. Mentre la Fisica sperimentale percorrendo i luoghi reconditi della scienza, va in traccia di nuovi fatti che tendano a porre sempre più in chiaro l'analogia d'origine di questi fenomeni, non vi sia discaro che vi faccia conoscere quale sentiero ho tentato d'aprirmi per far concorrere anche la fisica matematica a questo eminente scopo.

Perciò conviene che ci dipartiamo alcun poco dal cammino che vi ho tracciato come il più certo per condurci al compimento di una teoria fisica. Quel cammino, direi, è il cammino reale, quello che si deve battere per rendere ostensibile una teoria di cui tutto il campo sia già stato perlustrato. Ma all'ingegno umano ben di rado riesce d'attenersi a questa via, quando tende ad una remota scoperta. L'impazienza di riscontrare tosto la verità svia da questo, bensì sicuro, ma troppo lungo e lento cammino, il genio del fisico, che quasi tratto da un istinto di divinazione, cerca di congetturare le cause dei fenomeni per confermarle poi, sottomettendole al crogiuolo dell'esperienza. Fu per questa via di scorcio, che si sono ottenute le più grandi scoperte. La legge stessa dell'azione della gravità è stata presupposta dal Galileo, il quale dedottane la

natura del movimento che dovrebbe generare, la verificò coll' esperienza. L' attrazione universale era già un' idea comune fra i filosofi del secolo decimosettimo; persino la legge della sua azione era già stata presentita; Newton la assunse, e la verificò sulla luna col suo celebre calcolo della deflessione di questo satellite nella sua orbita. Fattosi così certo della sua esistenza, percorse nel libro III dell' insigne opera dei principii matematici gli stadii necessarii al compimento di quella gran teoria. Il solo pericolo, che dobbiamo evitare in questo procedere, è di non lasciarsi strascinare dal soverchio amore dell' ipotesi immaginata, e dobbiamo essere presti ad abbandonarla con indifferenza, quando scorgiamo che ci disvia dai fatti. *Il filosofo veramente utile ai progressi della scienza*, disse il prelodato Laplace (1), *è quello che, riunendo ad un' immaginazione profonda una grande severità nei ragionamenti e nelle osservazioni, è ad un tempo tormentato dal desiderio d' elevarsi alle cause dei fenomeni, e dal timore d' ingannarsi su quelle che loro egli assegna.* Conformiamoci a queste massime, e circonspetti tentiamo di muovere alcun passo per questo breve cammino.

6. La legge di Dalton sulle proporzioni definite nelle combinazioni chimiche; la legge di Dulong e Petit sul rapporto costante dei calori specifici ai pesi atomistici delle sostanze semplici, legge estesa ultimamente da Regnault anche ai gas composti; la legge di Faraday sulle correnti elettriche definite, più ampiamente verificata dal mio Collega il Prof. Matteucci, per la quale gli equivalenti chimici degli elementi scomposti e ricomposti tengono sempre la stessa ragione colla grandezza delle correnti scomponenti o generate, le leggi di Mitscherlich sull' isomorfismo nella cristallizzazione; il modo d'essere interno dei liquidi che esige l'interpretazione dei fenomeni capillari secondo i principii meccanici, sono tanti argomenti che traggono il fisico verso il sistema atomistico, cioè a conchiudere, che i corpi sono formati dall'aggregato di atomi distinti.

Per altra parte la diminuzione di volume che presentano tutti i corpi sottoposti a delle pressioni, diminuzione della quale non sapremmo assegnare il limite, perchè i corpi mai non cessano di comprimersi più le pressioni che loro si applicano sono grandi; i cambiamenti di volume a cui questi stessi corpi vanno soggetti al cambiar dello stato di calore, o come si dice, di temperatura, ci convincono che gli atomi esistono nei corpi a distanze fra loro, e che queste distanze relativamente al loro volume devono essere

(1) Laplace. Système du Monde. Lib. V, chap. IV, Vol. II, pag. 331.

grandissime. È bene che il giovane fisico si renda famigliare alla mente quest' immagine dei corpi. Se l' arte potesse costruire dei microscopii così potenti da renderci visibili le molecole ultime, noi le scorgeremmo, dice Laplace, sparse nei volumi dei corpi nella stessa proporzione di rarezza con cui le stelle sono disseminate in una nebulosa, che sotto questo punto di vista può essere considerata come un gran corpo luminoso (1).

Se dunque i corpi sono composti di atomi, se questi atomi stanno nei corpi separati fra loro da intervalli vôti proporzionalmente assai grandi, ci si presenta subito la questione, ond' è che questi atomi si dispongono e si fermano a tali distanze reciproche determinate? onde nasce che stando in queste distanze formano degli aggregati solidi che resistono a delle pressioni, e a delle trazioni? Il primo che risguardò questo problema nel giusto punto di vista sotto l' aspetto meccanico, fu a mia cognizione il Padre Boscowich. Questo distinto filosofo, per ispiegare la composizione dei corpi con atomi disgiunti, concepì che l' azione fra due atomi variasse rapidamente nelle minime distanze ancor impercettibili ai sensi, che in quest' intervallo minimo si cangiasse spesso d' attrazione in repulsione, e viceversa, e che poi quando la distanza diventasse sensibile, la loro azione restasse sempre attrattiva e decrescente nella ragione inversa del quadrato della distanza delle molecole, per rappresentare l' attrazione universale. In quest' ipotesi, all' avvicinarsi di due molecole, nell' atto che stassero per passare da un intervallo in cui la loro azione fosse attrattiva, all' intervallo seguente in cui divenisse repulsiva, dovrebbero trovarsi in una distanza in cui la loro azione fosse nulla. È quando si trovano in una di queste distanze, che le due molecole rimangono in equilibrio stabile fra di loro. Se si tenta d' avvicinare queste molecole, la ripulsione che opera nell' intervallo in cui si vorrebbe spingerle, resiste; se si tenta d' allontanarle, l' attrazione che si spiega nell' intervallo in cui si vorrebbe trarle, si oppone. La legge rapidissima con cui si è supposto che l' azione di queste forze varii d' energia negli intervalli minimi in cui operano, fa sì che, per spostamenti ancor minimi ed insensibili delle due molecole, le ripulsioni ed attrazioni divengono abbastanza vigorose per equilibrare le pressioni o trazioni esercitate. Di qui ne viene che le due molecole in una di queste distanze devono sembrare come legate assieme, e formanti un aggregato unico, quantunque realmente non siano

(1) Laplace. Systême du monde. Lib. IV, chap. XVIII.

che in equilibrio stabile, e che per resistere agli sforzi esteriori cambino minimamente di situazione, lo che anche l'esperienza conferma. Questo risultamento, dedotto dalla considerazione di due sole molecole, è stato esteso dal celebre Poisson ad un sistema qualunque d'innumerabili molecole, o ad una massa qualunque; e può vedersi quanto ho detto a questo proposito in una nota di una mia lezione sulla capillarità, pubblicata nel volume XCVI della Biblioteca Italiana, e nel volume II dei Nuovi Annali delle scienze naturali di Bologna.

7. La coesione fra gli atomi disgiunti di un corpo si troverebbe così, nell'ipotesi del Boscowich, meccanicamente spiegata. Ma due forti obbiezioni si elevano contro questa ipotesi. 1.° L'esistenza di una forza che emana da uno stesso punto o centro, e passa rapidamente dall'essere repulsiva ad essere attrattiva, e viceversa, ha in se dell'inverisimile, e la legge rapida di variazione, che suppone, non soddisfa all'idea che abbiamo di un'emanazione, il cui effetto naturale è di decrescere in ragione inversa del quadrato della distanza; 2.° essa non tien conto dei fenomeni elettrici e calorifici, che or come effetti or come cause vanno uniti alle alterazioni di stato che subiscono i corpi, e che devono evidentemente influire sull'equilibrio delle loro molecole.

Considerando io che ogni azione meccanica esercitata sopra un corpo, mentre ne altera il volume, produce un cambiamento di temperatura e di stato elettrico, e che viceversa ogni cambiamento di temperatura e di stato elettrico cambia le distanze delle molecole fra loro, mi persuasi dell'idea che nella costituzione dei corpi entrasse come parte integrante dell'equilibrio stabile delle loro molecole, anche l'azione del fluido imponderabile, al quale i fenomeni dell'elettricità e del calore sono attribuibili. Franklin aveva già tracciato un'ipotesi per ispiegare i fenomeni elettrici, che Æpinus perfezionò, nella quale un'azione dell'etere elettrico sulle molecole della materia era stata felicemente introdotta. Secondo questa ipotesi le molecole ponderabili della materia sono repulsive fra loro, gli atomi dell'etere sono pure repulsivi fra loro, ma fra le molecole ponderabili e l'etere esiste un'azione attrattiva. Coulomb ha di poi provato che tutte queste azioni, per essere nei loro effetti conformi ai fenomeni, devono seguire la legge più naturale, cioè la ragione inversa del quadrato della distanza. La semplicità di questa legge, il vantaggio d'impiegare delle azioni fra la materia e l'etere che già si applicavano alla spiegazione di altri fenomeni, m'indussero ad adottarla e tentare col calcolo di

riconoscere, quale doveva essere la natura dell' equilibrio di un sistema formato di tali molecole ponderabili, e dell' etere frapposto. Il risultamento del calcolo fu eminentemente favorevole alla mia aspettazione.

8. Ecco il problema che mi sono proposto in un opuscolo pubblicato a Torino nel 1836 (1). Immaginatevi lo spazio ripieno di un etere la cui elasticità provenga dalla repulsione reciproca dei suoi atomi, supponete immerse in quest' etere un numero indefinito di molecole ponderabili repulsive fra loro, ma che tutte esercitano un' attrazione sugli atomi eterei: le forze d' attrazione e repulsione fra questi elementi essendo tutte in ragione diretta della massa, ed inversa del quadrato delle distanze. Dimandasi come si costituirà l' etere in equilibrio? come si costituiranno le molecole imponderabili sotto l' azione di dette forze? La soluzione che ho ottenuto con un calcolo rigoroso, assumendo i dati più conformi alla natura della cosa, è la seguente.

L' etere si aggruppa intorno ad ogni molecola formando un' atmosfera di una densità grandissima nella contiguità della molecola, ma decrescente così rapidamente, che ad una distanza sensibile la condensazione può considerarsi come nulla, o la densità confondersi con quella generale dell' etere dello spazio. L' equilibrio di ciascuna di queste atmosfere esige che l' azione risultante, della ripulsione dell' etere che la forma, e dell' attrazione della molecola del centro, sia nulla in ciascun punto sopra un atomo qualunque d' etere. Di qui ne segue, che queste atmosfere non sono atte ad esercitare alcuna azione reciproca, e possono sovrapporsi o penetrarsi senza alterarsi reciprocamente.

Ricordatevi ora che Newton ha dimostrato che, data la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze, l' attrazione di una sfera omogenea, o di una massa eterogenea ma composta di involti sferici di eguale densità sopra un punto esterno ad essi, è tale quale sarebbe se tutta la massa fosse riunita nel centro, e l' attrazione sopra un punto interno si riduce a quella sola porzione di massa che rimane compresa nella sfera che ha per raggio la distanza dal centro della massa al punto attratto, l' attrazione di tutti gli involti sferici esteriori venendo ad esser nulla sul punto.

Ciò posto concepite due molecole ponderabili di forma sferica,

(1) Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l' action moléculaire. Turin de l' Imprimerie royale MDCCCXXXVI.

e le cui atmosfere siano perciò composte d' involti sferici d' eguale densità, e siano queste due molecole dapprima situate ad una distanza sensibile fra loro. L'azione congiunta di una molecola armata della sua atmosfera deve esser nulla, come abbiamo detto, su d' un atomo qualunque dell' atmosfera dell'altra. Ma facciasi, ciò che può essere, che quest'azione congiunta non sia nulla sull'altra molecola, e stabiliscasi che l' attrazione dell' atmosfera della prima molecola sulla seconda sia un po' più forte della ripulsione reciproca delle due molecole. Quest' eccesso produrrà ad una distanza sensibile, ove la densità delle atmosfere si confonde sensibilmente con quella dello spazio, un' attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza, quale si conviene onde la gravitazione universale sia rappresentata. Di mano in mano però che le due molecole anderanno avvicinandosi, tosto che la seconda molecola sia penetrata nella parte sensibile dell'atmosfera della prima, l'atmosfera di questa non eserciterà più la stessa azione. Pel citato teorema di Newton tutti gl' involti sferici dell' atmosfera della prima molecola, i di cui raggi siano maggiori della distanza a cui si trova da essa la seconda molecola, cessano di attrarla: quindi è che la repulsione della prima molecola, non cessando mai d' esistere nella sua totalità va guadagnando sull' attrazione della parte rimanente della propria atmosfera, finisce col vincerla, e la seconda molecola è respinta. Quello che si dice di una molecola vale reciprocamente per l'altra. Come le densità delle atmosfere sono rapidissimamente crescenti verso l' interno, le masse degli involti sferici che divengono esterni vanno aumentando celeremente, e l' eccesso di repulsione fra le molecole va crescendo colla stessa rapidità. Si ha così nell' estensione impercettibile delle atmosfere condensate delle due molecole il passaggio da un' attrazione a una repulsione, e perciò un punto in cui le molecole devono rimanere in equilibrio stabile.

9. Questo modo di considerare i corpi conduce dunque al risultato meccanico dell' ipotesi di Boscowich, ma le forze che si pongono in giuoco sono quelle stesse, che i fenomeni elettrici hanno fatto adottare, ma il decrescimento delle forze al variare delle distanze è il più naturale, è quello di tutte le emanazioni. Ogni disturbo dell' equilibrio molecolare deve trarre con se un disequilibrio nell' etere, e quindi uno sviluppo d' elettricità e di calorico, de' quali l' etere può far le funzioni, e viceversa ogni cambiamento di stato elettrico e di temperatura deve dar origine ad un' alterazione nello stato delle molecole del corpo. Si vede poi facilmente per la natura dell' equilibrio stabile, a cui le molecole

tendono sempre ad essere ricondotte, che il passaggio da uno stato all' altro delle molecole deve farsi per una serie di rapidissime oscillazioni, tutte ristrette in distanze insensibili.

Vi ha di più; il calcolo dimostra che le distanze a cui le molecole devono arrestarsi per rimanere in equilibrio stabile, sono maggiori quanto è più grande la densità dell' etere dello spazio circostante, e che quindi il volume dei corpi deve essere maggiore quanto più la temperatura è elevata, se la densità dell' etere costituisce la temperatura. Voi sapete che il principio della maggior distanza delle molecole, corrispondente ai diversi stati di calorico, dà la spiegazione dei diversi stati dei corpi. Un corpo è solido quando le sue molecole sono a così piccole distanze fra loro, che le modificazioni delle forze dipendenti dalla figura delle molecole sono sensibili: è liquido quando le distanze divenendo maggiori, queste modificazioni cessano d'agire sensibilmente; ed è aeriforme, quando per mancanza di spazio in cui dilatarsi, le molecole non possono più costituirsi in quelle distanze, che il loro equilibrio richiede.

Nè meno felice è questo modo di considerare i corpi rispetto ai fenomeni della luce. L'etere dello spazio è il mezzo vibrante che propaga le ondulazioni luminose; quando queste ondulazioni vanno a penetrare nei corpi trasparenti, l' insieme dell' etere e delle molecole ponderabili in equilibrio, da cui è formato il mezzo rifrangente, è obbligato a vibrare. L' inerzia superiore delle molecole ritarda la propagazione delle onde, e quindi la rifrazione succede. Nell' ultimo congresso di Firenze ho annunciato come il calcolo mi ha dimostrato che, per causa delle rapide alternazioni di maggior e minore densità, che l' interposizione delle molecole e delle loro atmosfere introduce nelle parti successive di un mezzo rifrangente, le ondulazioni più corte sono più ritardate delle più lunghe, ed ho esposto la legge di questo ritardo. Quindi la spiegazione della dispersione della luce, che per lo avanti sembrava ritrosa nel sistema delle ondulazioni, è venuta a fluire spontaneamente.

10. Malgrado però tutte queste coincidenze non dobbiamo lusingarci d' essere già pervenuti a dar solido fondamento, non che compimento, alla nostra teoria. Essa concilia, è vero, tutti i fenomeni nella loro essenza, ma non abbiamo verificato se li rappresenta nei loro rapporti conosciuti di grandezza; e ben già parmi che l' esistenza di una sola specie d' etere non sia sufficiente a questo effetto. Le investigazioni difficili e delicate in cui mi è d' uopo procedere per schiarire queste questioni, non sono ancora abba-

stanza innoltrate onde azzardi di annunciarvene i passi; ricordiamoci che questi passi devono essere mossi con cautela, devono essere costantemente sostenuti dai fatti, onde siano sicuri. Intanto il passo principale è fatto: con delle azioni in ragione inversa del quadrato della distanza, con delle azioni che importano necessariamente l'intervento dell'elettricità e del calore siamo riusciti a far nascere delle azioni molecolari, energiche nelle minime distanze, ma decrescenti con una legge rapidissima, tale che in distanze sensibili si convertono nell'attrazione universale. L'adattare il principio scoperto ad una o due specie d'eteri, secondo che la natura dei fenomeni, ed i progressi di questo ramo di scienza esigeranno, rimane l'opera di future verificazioni.

11. Vi ho trasportati a gettare una lontana occhiata verso i confini a cui tende la Fisica, poichè il termine di ogni teoria fisica, come già vi esposi, sta nel caratterizzare le forze che operano i movimenti da cui procedono i fenomeni naturali. La scoperta dell'attrazione universale ci ha dato la spiegazione di tutte le apparenze dei fenomeni celesti, quella dell'azione molecolare ci squarcerà il velo all'intelligenza dei fenomeni ancor più importanti, i fenomeni terrestri. I fenomeni capillari, i cristallografici, i calorifici, gli elettrici, i luminosi, i chimici, tutti abbraccia in complesso l'azione molecolare quale vi è stata esposta. Ma il campo è vasto ed il perlustrarlo è lungo: se per discendere dalla scoperta della gravitazione universale al calcolo dei fenomeni celesti, e dissipare ogni dubbio, si è richiesto il lavoro di tutto il secolo passato, tanto fecondo di eminenti matematici, quale opera non dobbiamo aspettarci che esigerà la deduzione dei fenomeni più complicati dipendenti dall'azione molecolare, della quale ben lungi dall'avervi guidati sino al termine della scoperta, appena mi riprometto d'avervi introdotti al suo limitare?

Una particolarità di cui mi è utile d'instruirvi si è, che le forze di attrazione e repulsione di cui devono essere dotati gli atomi d'etere, e le molecole ponderabili, sono di una grandezza superiore ad ogni nostro concetto, sono espresse colle nostre unità usuali da un numero sterminato di cifre. Ciò non vi deve sorprendere: considerate che le ondulazioni luminose ed elettriche si propagano alla distanza di più di duecentomila miglia in un secondo di tempo, e giudicate quale deve essere l'elasticità dell'etere per corrispondere a questa straordinaria velocità: considerate che il Sig. Faraday ha conchiuso da' suoi sperimenti, che la quantità di elettricità che libera si sviluppa dalle nubi di uno de' più tremendi

temporali, non eguaglia ancora quella che tiene unita una sola molecola d'acqua, e vi persuaderete che le forze della natura non vanno misurate colle tenui scale adattate ai nostri sensi. Dobbiamo risguardare questo globo, e l'universo intero, come un gran sistema in equilibrio stabile, in cui le forze impiegate a conservarlo sono enormi. I fenomeni che osserviamo, anche i più violenti, non sono prodotti che dalle differenze minime che nascono nel contrasto di queste forze, durante le oscillazioni che avvengono, quando l'equilibrio è menomamente rotto.

12. Abbiamo in questa lezione trascorso velocemente sulle generalità della scienza; nelle lezioni seguenti discenderemo ai particolari, e saremo più positivi. Ora non mi resta che ricordare, a quelli che intendono di seguire questo corso, che esso esige applicazione ed assiduità. Negli studii letterarii il soggetto stesso diviene fonte di piacere pel rapido ravvicinamento delle idee, per la vivida presentazione delle immagini; nelle scienze fisico-matematiche la verità è la sola fonte a cui si attinge diletto, e gli accessi che conducono a scoprirla sono per lo contrario erti e scabrosi: quando duriate fatica, quando penetrandoli perveniate fino ad essa, troverete però che i piaceri che dalla sua sorgente zampillano sono e più squisiti, e più perenni.

LEZIONI

ELEMENTARI

DI

FISICA MATEMATICA

PRINCIPII DI MECCANICA RAZIONALE

O SIA

TEORIA DEL MOVIMENTO

LEZIONE I.

Del movimento semplice.

1. Il movimento, unicamente osservato, ci presenta l' immagine di un corpo che in tempi continui e successivi occupa luoghi contigui e differenti dello spazio.

La mutazione successiva dei luoghi del corpo si riconosce riferendo la sua posizione variabile ad altri corpi od oggetti che non partecipano dello stesso movimento. Se i corpi ai quali si riferisce la posizione variabile del mobile fossero fissi nello spazio il movimento osservato sarebbe *assoluto*, se essi partecipano di un altro movimento comune, allora il movimento osservato non è che *relativo*. Il movimento di uno che passeggi sul ponte di un bastimento che naviga, in quanto cambia di luogo rispetto alle parti della nave, offre l' esempio di un movimento relativo. In natura propriamente non possiamo osservare che dei movimenti relativi, perchè questo stesso globo che abitiamo, e tutti i corpi sono continuamente in moto.

Quando i luoghi occupati successivamente dal corpo sono tutti situati in linea retta, il movimento si dice *rettilineo*, e quando in una curva, *curvilineo*.

2. Le distinzioni di movimento che abbiamo fatto nascono dalla considerazione del solo spazio; introduciamo ora il secondo elemento del movimento, cioè il tempo, e daremo origine ad altre distinzioni.

Il tempo è così sfuggevole che pare a prima vista non suscettibile di misura. Ma se si concepisce una serie di movimenti successivi tutti fatti in circostanze simili, le loro durate devono essere tutte eguali. Tali sono le oscillazioni di un pendolo sotto l' azione costante della gravità. Noi potremo dunque per mezzo di oscilla-

zioni dividere il tempo in tante parti eguali, piccole quanto vogliamo, e così misurarlo proporzionalmente al loro numero.

Se per tempi qualsivoglia eguali gli spazii percorsi dal corpo sono sempre eguali, il movimento si dice *uniforme;* se sono ineguali, il movimento si dice *variato.*

3. Il movimento uniforme è il più semplice che un corpo può acquistare. Un movimento uniforme può differire da un altro per la maggiore o minore lunghezza dello spazio che il corpo corre in tempi eguali. Quest' attitudine del corpo a percorrere più o meno spazio in un dato tempo, chiamasi *velocità*, ed un movimento uniforme si dice tanto più veloce, quanto più spazio il corpo percorre nell' unità di tempo. Dinotando con uno la velocità di un corpo che nell' unità di tempo corre uno spazio come uno, la velocità v di un corpo che nel tempo t corre lo spazio s, sarà così data da

$$(1) \qquad v = \frac{s}{t}.$$

Quest' espressione di v essendo appunto quella dello spazio descritto dal corpo nell' unità di tempo.

Dalla precedente equazione si deduce

$$(2) \qquad s = v \,.\, t,$$

che ci mostra, ciò che d' altra parte è per se stesso evidente, che nel movimento uniforme gli spazii crescono come il prodotto della velocità pei tempi.

4. Passiamo al movimento variato. Di tutti i movimenti variati, il più semplice è quello in cui le velocità vanno aumentando proporzionalmente al tempo, il qual movimento chiamasi *uniformemente accelerato.* Se supponiamo che il corpo parta dalla quiete, e dinotiamo con f la velocità che ha acquistato alla fine dell' unità di tempo, la sua velocità v alla fine del tempo t sarà data, per la definizione stessa di questo movimento, dall' equazione

$$(3) \qquad v = f \,.\, t,$$

che risulta dalla proporzione

$$1 : f :: t : v.$$

La velocità v si chiama la *velocità acquistata.*

Ci resta a trovare l' espressione dello spazio che il corpo avrà percorso alla fine dello stesso tempo t. Quest' espressione si ottiene facilmente col calcolo integrale, che c' insegna a salire dalla cognizione della legge con cui una quantità è generata, al valore della stessa quantità. Però in riguardo a quelli ai quali i principii del calcolo integrale sono sconosciuti, dedurremo il valore dello spazio percorso dal corpo dalla seguente considerazione assai semplice.

È evidente, per la definizione del movimento uniformemente accelerato, che se consideriamo le velocità del mobile in due istanti ad eguali intervalli dall' istante medio del movimento, esse sono tali che la velocità nell' istante anteriore è di tanto minore di quella dell' istante medio, di quanto quella dell' istante posteriore ne è maggiore. Considerando il movimento per un istante come uniforme, lo spazio minore corso nell' istante anteriore, e lo spazio maggiore corso nell' istante posteriore faranno così una somma eguale allo spazio che il corpo potrebbe percorrere, in questi due istanti, colla velocità dell' istante medio. Dunque se dividiamo col pensiero il tempo del movimento in istanti, e ripetiamo per ciascuna coppia d' istanti, ad eguali distanze dall' istante medio, lo stesso discorso, conchiuderemo che lo spazio descritto dal corpo è tanto quanto ne correrebbe se si movesse uniformemente colla velocità corrispondente all' istante medio. Questa conclusione è indipendente dalla durata degli istanti, in cui si è diviso il tempo del movimento, durate che si potranno prendere tanto brevi quanto si vorrà, e la conclusione reggerà quindi anche quando la variazione della velocità si faccia in un modo successivo e continuo.

La velocità v' corrispondente all' istante medio, o alla fine del tempo $\frac{t}{2}$ è per la formola precedente (3) espressa da

$$(4) \qquad v' = f.\frac{t}{2}.$$

Moltiplicando questa velocità pel tempo t, in cui ha durato il movimento, si avrà lo spazio s eguale a quello che il corpo ha percorso con movimento uniformemente accelerato dalla formola

$$(5) \qquad s = \frac{f\,t}{2}.\,t = f.\frac{t^2}{2},$$

che c' insegna, che gli spazii crescono proporzionalmente ai quadrati dei tempi.

Le due equazioni (4) e (5) sono le fondamentali nella considerazione del movimento che trattiamo.

Da queste due equazioni si deducono come corollarii alcune proprietà del movimento uniformemente accelerato delle quali si fa uso nelle applicazioni alla fisica, e che perciò ci tratteremo brevemente ad esporre.

5. Per un' altro movimento uniformemente accelerato in cui f' dinotasse la velocità che acquisterebbe il mobile nell' unità di tempo, si avrebbe lo spazio corrispondente s', parimenti dalla formola

$$s' = f' \frac{t^2}{2}.$$

Le velocità f e f' acquistate dal mobile nell' unità di tempo misurano proporzionalmente le accelerazioni dei rispettivi movimenti, e si chiamano in meccanica, per una ragione che vedremo ancor meglio nel seguito, *forze acceleratrici*.

1.° I valori di queste velocità o forze acceleratrici, si possono determinare in ciascun movimento per mezzo dello spazio e del tempo colle formole, facili a dedursi dalla precedente,

$$(6) \qquad f = \frac{2s}{t^2} \quad ; \quad f' = \frac{2s'}{t^2}$$

cioè dividendo in ciascun movimento il doppio dello spazio pel quadrato del tempo impiegato a percorrerlo.

2.° Paragonando fra loro queste due espressoni si ha

$$(7) \qquad f : f' :: s : s'$$

cioè le forze acceleratrici sono fra loro come gli spazii che i mobili percorrono contemporaneamente.

3.° Supponiamo che finito il tempo t il movimento cessi d' essere uniformemente accelerato, e divenga un movimento uniforme colla velocità v che aveva il mobile nell'ultimo istante, allora il mobile con questa velocità correrà, in un altro tempo t eguale al primo, uno spazio S che sarà espresso, (formola (1)), da

$$S = v\,t. \qquad 3$$

Sostituendo per v il suo valore tratto dall' equazione (4) si dedurrà

$$S = f.t^2,$$

e paragonando questo spazio con quello dato dalla formola (5) si avrà

$$(8) \qquad S = 2s.$$

Da dove si deduce che il mobile potrà, con movimento uniforme, correre dopo in egual tempo colla velocità acquistata uno spazio doppio di quello che ha corso avanti con movimento uniformemente accelerato per acquistare quella velocità.

6. Il movimento uniforme ed il movimento uniformemente accelerato sono i due soli movimenti che la Meccanica ha bisogno di considerare in particolare. La considerazione degli altri movimenti si riduce alla cognizione di questi due col mezzo del calcolo differenziale. Ma per vedere su quali principii si fonda questa riduzione conviene che rimontiamo alle leggi della generazione del movimento, pel quale oggetto è necessario introdurre il terzo elemento da considerarsi nel movimento, cioè il corpo stesso che si muove.

Un corpo, meccanicamente parlando, è costituito da una certa

quantità di materia, che occupa una porzione dello spazio indefinito. La parte dello spazio occupata dal corpo si chiama *volume*, e la quantità di materia, che esso contiene, *massa* del corpo.

I corpi non posson darsi movimento da se stessi, nè alterare la direzione e la velocità del movimento che possedono. Questa proprietà della materia si chiama *inerzia*. Oltre il principio della ragione sufficiente che ce la indica, perchè non vi sarebbe ragione, per esempio, che una palla dirigesse od alterasse il suo movimento piuttosto in una direzione che in un' altra, essa è rispetto a noi il risultamento dell'esperienza e dell'analogia. Infatti tutte le volte che un corpo si mette in movimento, riconosciamo sempre che è stato soggetto all' azione di una causa straniera (1), cioè tale che non è inerente ed essenziale alla sua esistenza: e pei corpi già in moto, vediamo che essi perseverano più tempo nel loro movimento, più si pone cura nel diminuire gli ostacoli, come sono lo sfregamento, la resistenza dell' aria ec., che alterano il loro movimento, e finiscono coll' annichilarlo. L' analogia ci conduce dunque a conchiudere che, se potessimo distruggere interamente gli ostacoli, i corpi che una volta sono stati messi in moto rimarrebbero eternamente in esso. La inerzia della materia non è da confondersi coll' incapacità di agire; per lo contrario ciascun punto materiale trova sempre nell' azione reciproca, che si esercita fra esso e gli altri punti, ma giammai in se solo, il principio del suo movimento.

7. Un corpo si considera contenere più o meno materia, quanto maggiore o minore inerzia oppone a ricevere, od alterare il suo movimento. Così un corpo, che per l' azione istantanea di un motore non riceve che la metà della velocità di un altro, si considera contenere una doppia quantità di materia od una massa doppia. Questo principio che riduce all' inerzia la misura delle masse è pure un risultamento dell' esperienza e dell'analogia. L' esperienza ci prova infatti, che se si fa agire fra due volumi differenti di una sostanza omogenea, una molla che si scatti, e di cui ciascuna estremità venga ad esercitare ad ogni istante un' azione eguale sul corpo che gli è contiguo, questi due corpi riceveranno delle velocità che sono in ragione inversa dei volumi. Ora le masse di questi corpi dovendo evidentemente, per l' omogeneità della sostanza, essere proporzionali ai volumi, ne segue che le velocità sono in ragione inversa delle masse. Egualmente se

(1) Vedasi a questo proposito cio che è stato detto nel n.° 3 del Discorso preliminare.

si suppone che i volumi di due corpi da prima omogenei siano però di materia compressibile, talchè si possa far cambiare all' uno od all' altro il volume e la figura a piacimento, sempre si trova che le velocità comunicate dalle due estremità della molla sono quelle di prima, prescindendo dalle resistenze degli ostacoli esteriori. L'analogia ci conduce dunque a conchiudere che, in ogni caso, la velocità impressa è indipendente dal volume e dalla figura dei corpi, e che è soltanto maggiore o minore in proporzione inversa della quantità di materia, sulla quale si distribuisce, e va a consumarsi l' azione della molla.

8. Per concepire come corpi di diverse sostanze possano contenere quantità di materia che non siano proporzionali ai loro volumi, è necessario sapere che il volume sensibile dei corpi non è tutto pieno di materia. Un esame attento ha condotto i Fisici e i Chimici a scoprire che i corpi constano di particelle od atomi disposti in essi in un modo discontinuo, che si trovano cioè più o meno separati gli uni dagli altri, e che non si possono mai avvicinare tanto che si tocchino. Avremo occasione in altre Lezioni di esporre come le molecole in questo stato si tengono unite insieme nei corpi (1); intanto diremo solo che Newton da una esperienza fatta dagli Accademici del Cimento (2) ha dedotto che l' oro, che è uno dei corpi più compatti, contiene degli spazii vuoti, almeno quaranta volte più grandi degli spazii pieni.

I corpi si dicono più o meno *densi*, secondo che in eguali volumi contengono maggiori o minori quantità di materia. La ragione della quantità di materia contenuta in egual volume da due corpi, esprime la loro *densità relativa*. Prendendo per unità di densità quella di una sostanza conosciuta, per esempio, quella dell' acqua in una temperatura e sotto una pressione data, ed adottando per unità di massa quella della stessa sostanza contenuta nell' unità di volume, si ha per un corpo qualunque

$$(9) \qquad D = \frac{M}{V}, \text{ o vero } (10)\ M = D \cdot V$$

dove D, M, V, indicano la densità, la massa ed il volume di questo corpo.

9. Le considerazioni precedenti ci hanno fatto notare che le velocità, che possono generare le azioni eguali delle due estremità di una molla che si scatta sopra differenti corpi, sono in ragione in-

(1) Vedansi anche i numeri 6, 7, 8 del Discorso preliminare.
(2) Newtonis, Opticae. Lib. II, part. III, prop. VIII.

versa delle loro masse, o sia che per l'inerzia della materia, le velocità acquistate dai corpi sono tanto minori quanto le loro masse sono maggiori; per cui il prodotto della massa per la velocità rispettivamente comunicata, forma una quantità costante per ciascun corpo. Questo prodotto ha una denominazione particolare in Meccanica, e si chiama *quantità di movimento.*

L'esperienza ci fa vedere che nelle comunicazioni tra i corpi sempre esiste un'eguaglianza reciproca d'azioni: così, nell'equilibrio, quanto un corpo preme o tira un altro, altrettanto è premuto o tirato da questo; nel moto, quanta è la quantità di movimento che un corpo acquista in una direzione, altrettanto è quella che perde l'altro od acquista in direzione contraria. Si è quindi stabilito in Meccanica il principio, confermato dall'esperienza, che l'*azione e la reazione sono sempre eguali e reciproche.* La reazione non è infatti effettiva che in quanto consuma l'azione, ed è determinata da essa; come viceversa l'azione non è efficace che in quanto trova la reazione che la esaurisce; e l'una e l'altra di queste quantità essendo mutue e della stessa natura devono essere regolate dalla stessa legge e valutate nello stesso modo. In virtù di questo principio un corpo non può sostenere una pressione, o ricevere una quantità di movimento, senza che, nel primo caso, consumi nell'agente un conato che la eguagli, od assorbisca, nel secondo caso, un'azione capace di generare un'egual quantità di movimento.

10. Noi ignoriamo in che consistano le cause efficienti di queste azioni reciproche, produttrici di moto, che si esercitano fra i corpi, e come nasca questa modificazione singolare per la quale un corpo si pone in movimento, e vi si conserva. Si è convenuto di indicare tutte queste cause col nome generico di *forze*, e si paragonano le une alle altre proporzionalmente all'effetto che possono produrre. Così l'esperienza avendo provato che l'effetto prodotto da una forza è di generare in tutti i casi un'eguale quantità di movimento, si è adottato la quantità di movimento generato per misura della forza. Si chiamano forze eguali quelle che generano, o possono generare, eguali quantità di movimento, e forze doppie, triple ec. quelle che ne possono generare una quantità doppia, tripla ec.

Nel valutare queste quantità di movimento dobbiamo però tener conto del tempo nel quale sono generate. L'azione di una forza non può mai imprimere ad un corpo una velocità finita senza far passare il corpo successivamente per tutti i gradi di velocità intermedie, e perciò senza impiegare un certo tempo. È

vero che talvolta appare, come sarebbe nell' urto, che i corpi passano dalla quiete ad una velocità finita per un' azione subitanea; ma quest' azione, come vedremo in seguito, sempre ha durato un certo tempo, ancorchè brevissimo, durante il quale l' energia della forza ha potuto far transitare rapidamente il corpo per tutti i gradi intermedii di velocità sino a quello che poi conserva costante, per la sua inerzia, dopo che la forza lo ha abbandonato.

Per introdurre la considerazione del tempo, supponiamo da prima che l' azione della forza sia costante; una causa costante dovendo produrre eguali effetti ad ogni istante, la velocità del mobile anderà aumentando uniformemente; ed il movimento prodotto sarà per conseguenza un movimento uniformemente accelerato. Dopo un tempo eguale all' unità, supponiamo che la forza abbandoni il corpo; esso continuerà a muoversi in virtù della velocità che gli è stata impressa per l' azione costante della forza nell' unità di tempo, o sia colla velocità acquistata. Il prodotto di questa velocità per la massa del corpo sarà la quantità di movimento prodotto, e questa quantità di movimento è quella che si assume, pel principio su esposto, per misura della forza. Le forze così valutate si chiamano *forze motrici*.

Secondo la misura delle forze motrici ora definite, se si chiama F la forza motrice, M la massa del corpo, ed f la velocità che acquisterebbe il corpo per l' azione costante della forza F nell' unità di tempo, si deve avere

$$(11) \qquad F = M \,.\, f, \text{ o vero } \quad (12)\ f = \frac{F}{M}.$$

La quantità f è evidentemente quella stessa, che abbiamo detto sopra nel numero **3**, che si chiama forza acceleratrice. Mentre questa quantità rappresenta, come si vide allora, il grado d' accelerazione del movimento, essa dinota anche la forza motrice corrispondente all' unità di massa, od indipendentemente dalla massa del corpo, ed è perciò che si dice forza acceleratrice.

L' ultima equazione ci mostra, giusta le definizioni date, che la stessa forza motrice F operando su diversi corpi, produrrà su loro delle forze acceleratrici che saranno inversamente proporzionali alle masse; e la precedente ci fa vedere, che onde le forze acceleratrici siano eguali, conviene che le forze motrici siano proporzionali alle masse.

11. Veniamo ora ai movimenti variati in generale. Quando le forze non sono costanti, il movimento non è più uniformemente ac-

celerato, e viceversa quando il movimento non è uniformemente accelerato, la forza non è costante. L' azione della forza non essendo costante, la sua misura viene ad essere differente ad ogni istante. Per farsi un' idea del modo di valutare anche in questo caso la forza acceleratrice che opera ad ogni istante, similmente a ciò che abbiamo fatto nel numero precedente per valutare la velocità, ove abbiamo supposto che la forza cessi d' agire sul corpo, supponiamo che le cause, che fanno variare l' azione della forza, sospendano in un istante la loro influenza: da questo momento la forza diverrà costante, ed il movimento uniformemente accelerato, e l' aumento di velocità, che acquisterebbe il corpo nell'unità di tempo, sarà, siccome abbiamo esposto nel numero precedente, la misura della forza acceleratrice che operava nell' istante in cui cessarono le cause che facevano variare la forza; ed il prodotto della stessa forza acceleratrice per la massa sarà la forza totale che muove il corpo, o la forza motrice corrispondente allo stesso istante. Valutando la forza secondo questo concetto, e considerando, secondo i principii del calcolo differenziale, come costante la forza in un istante, si può stabilire un' equazione differenziale, analoga alla (6), fra la forza, lo spazio ed il tempo, dalla quale per mezzo del calcolo integrale si sale alla cognizione della velocità, e del luogo del mobile per un tempo qualunque. Viceversa conoscendo il luogo del mobile per un tempo qualunque, e la legge con cui esso si muove, si può collo stesso calcolo differenziale dedurre la velocità e la forza corrispondenti ad ogni istante (Vedasi la *Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange, seconde édition* pag. 314 e seguenti, o qualunque Trattato di Meccanica). Per la semplicità dei movimenti, che soli avremo a considerare nella Fisica, potremo fare a meno di questi soccorsi del calcolo sublime.

LEZIONE II.

Movimento composto.

1. I principii esposti nella Lezione precedente appartengono al movimento rettilineo generato da una forza che opera costantemente nella direzione in cui si muove il corpo, il qual movimento si chiama *semplice*. Se il corpo è animato contemporaneamente da due o più forze, od anche da una sola forza e da una velocità preconcepita nella stessa od in differente direzione di quella della forza, il movimento si dice *composto*.

Per determinare i luoghi che occupa successivamente un corpo animato contemporaneamente da due o più velocità, o da forze che operano in direzioni costantemente parallele, si fa uso di una legge che si chiama la legge del movimento composto, e si esprime così « se distinti movimenti sono impressi ad un tempo, o suc- « cessivamente, ad un corpo, questi si compongono in modo che il « corpo si trova in ciascun istante nello stesso luogo dello spazio, « nel quale si troverebbe in virtù della combinazione di questi mo- « vimenti, se esistessero ciascuno realmente, e separatamente nel « corpo. » Secondo questa legge non si ha che a considerare ciascun movimento a parte, determinare il luogo nel quale il corpo si troverebbe, se i movimenti s' effettuassero uno dopo l' altro nella loro propria direzione, ed il luogo così determinato sarà realmente quello nel quale deve trovarsi il corpo per l' effetto simultaneo di quei movimenti. Nella figura 1, il punto A dinoti il luogo del corpo animato da quattro movimenti, che separatamente possono traslocare in un dato tempo il corpo per gli spazii rappresentati in grandezza e direzione dalle rette AB, AC, AD, AE, il luogo del corpo animato simultaneamente da tutti questi movimenti alla fine del tempo dato sarà E', che risulta conducendo BC', $C'D'$, $D'E'$, rispettivamente eguali e parallele ad AC, AD, AE. Infatti, (fig. 2), pel solo movimento secondo AB il corpo dovrebbe trovarsi dopo il tempo dato in B, ma essendo contemporaneamente anche animato dal movimento nella direzione parallela ad AC, il corpo verrà trasportato in questa direzione per uno spazio BC' eguale ad AC, dunque esso si troverà per la riunione dei due movimenti in C'. Considerisi ora anche il movimento parallelo ad AD, questo movimento avrà, durante lo stesso tempo, trasportato il corpo per uno spazio $C'D'$ eguale e parallelo ad AD, per cui il corpo invece di essere in C' si troverà in D'. Proseguendo così questo ra-

gionamento si vede che esso ci conduce a trovare pel luogo del corpo lo stesso punto E' determinato secondo la costruzione data sopra.

La legge della composizione dei movimenti di cui parliamo fu messa in campo la prima volta dal Galileo nel suo *Dialogo quarto intorno alle due scienze nuove*, e conduce al principio generale, che una forza motrice imprime ad ogni istante la stessa quantità di movimento ad un corpo sia esso in quiete od in moto in una direzione concorrente opposta od obliqua a quella della forza, e che i movimenti che le forze generano ad ogni istante in un corpo si accoppiano coi già preesistenti, e si effettuano tutti indistintamente nelle loro proprie direzioni senza alterarsi reciprocamente. La misura delle forze, che abbiamo dato al n.° 10 della lezione I, suppone altresì questo principio implicitamente, perchè dovendosi intendere per forze doppie, triple ec. la riunione di due, tre ec. forze eguali, ed avendo definito che le forze doppie, triple ec. sono quelle che generano una quantità doppia, tripla ec. di movimento, ciò suppone che ciascuna forza generi la stessa quantità di movimento sia quando opera sola, sia quando opera in unione colle altre (Vedasi la nota prima di questa Lezione).

2. Consideriamo ora più particolarmente due soli movimenti uniformi, o due movimenti uniformemente accelerati, che animino il corpo A, (fig. 3), uno nella direzione parallela ad $A\,M$, l'altro nella direzione parallela ad $A\,N$. Siano $A\,B$ e $A\,C$ gli spazii che il corpo può percorrere in tempi eguali in virtù di ciascuno di questi movimenti, dico che costrutto il parallelogrammo $A\,B\,C\,D$, per l'esistenza simultanea dei due movimenti, il corpo, oltre al trovarsi alla fine dello stesso tempo sull'estremità D della diagonale $A\,D$, avrà percorso questa stessa diagonale. Prendiamo perciò sugli spazi $A\,B$ ed $A\,C$ tante parti $A\,b$, $A\,b'$ ec.; $A\,c$, $A\,c'$ ec., che siano rispettivamente corse in tempi eguali dal mobile, quando fosse animato parzialmente dal solo movimento per $A\,M$, o dal solo movimento per $A\,N$. I movimenti essendo amendue uniformi od amendue uniformemente accelerati, le parti $A\,b$, $A\,b'$ ec. $A\,c$, $A\,c'$ ec. staranno rispettivamente tutte fra loro nella ragione di $A\,B$ ad $A\,C$. Ora applicando a tutti questi spazii parziali la legge del moto composto di cui abbiamo fatto uso, il corpo dovrà trovarsi successivamente nei punti d, d' ec. che si ottengono costruendo i triangoli $A\,b\,d$, $A\,b'\,d'$ ec. per mezzo delle $b\,d$, $b'\,d'$ ec. parallele ad $A\,C$, e rispettivamente eguali alle $A\,c$, $A\,c'$ ec.; e tutti questi triangoli riuscendo simili per la proporzionalità de' due loro lati comprendenti un' angolo uguale, i punti d, d' ec. si troveranno tutti sulla diagonale $A\,D$ che sarà la linea percorsa dal mobile.

Così nel caso di due movimenti uniformi od uniformemente accelerati, pei quali il corpo percorrerebbe separatamente in un dato tempo i lati $A\,B$, $A\,C$, si avrà dalla loro riunione un movimento unico per la diagonale $A\,D$ uniforme od uniformemente accelerato che li rappresenterà amendue. Viceversa un movimento uniforme od un movimento uniformemente accelerato unico per la diagonale $A\,D$ potrà essere scomposto e considerato come il risultamento di due movimenti uniformi od uniformemente accelerati contemporanei secondo i lati $A\,B$, $A\,C$ di un parallelogrammo qualunque costrutto sopra la $A\,D$ come diagonale.

3. Quello che si dice dei movimenti uniformi od uniformemente accelerati è egualmente applicabile alle velocità con cui si fanno, od alle forze acceleratrici che li generano che sono loro proporzionali, e che perciò possono essere rappresentate in grandezza e direzione dalle linee che rappresentano i movimenti. (Vedansi gli art. 3, 5, 10 della Lez. I).

Di quì ne segue che se un mobile è animato da due velocità, rappresentate in grandezza e direzione da due lati di un parallelogrammo il movimento risultante sarà quello che verrà fatto con una velocità, rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale; e perciò questa velocità potrà essere sostituita a quelle due: viceversa se il mobile è animato da una velocità sola il suo movimento potendosi considerare come risultante da due movimenti fatti colle due velocità rappresentate in grandezza e direzione dai lati di un parallelogrammo costrutto sulla prima velocità come diagonale, si potrà risguardare il mobile come dotato di queste due velocità in vece della prima.

Similmente se un corpo è animato da due forze acceleratrici, rappresentate in grandezza e direzione dai due lati di un parallelogrammo, il movimento risultante sarà quello che potrà essere generato da una forza acceleratrice unica rappresentata in grandezza e direzione dalla diagonale, e questa forza potrà rimpiazzare le due date: viceversa il movimento prodotto da una forza acceleratrice data qualunque, potendo essere considerato come il risultato di due movimenti uniformemente accelerati, quali sarebbero prodotti da due forze acceleratrici rappresentate in grandezza e direzione dai lati di un parallelogrammo costrutto sulla retta rappresentante la forza acceleratrice data come diagonale, quelle due forze potranno essere sostituite a questa. Il passaggio dalla composizione dei movimenti alla composizione delle forze acceleratrici è diretto, e discende dalla connessione e proporzionalità che sussiste fra loro.

4. Se i movimenti per AM ed AN non fossero uniformi od uniformemente accelerati, od in generale se non fossero variabili secondo una medesima legge, ma fossero variati in un modo qualunque, o se la direzione di ciascuna delle forze che li producono non fosse costantemente parallela a se stessa, o se l' una e l' altra di queste circostanze sussistessero assieme, allora bisogna dividere il tempo in istanti e considerare per ogni istante le forze acceleratrici secondo l' attuale loro direzione, e secondo le loro grandezze, quali l' abbiamo definite nel n.° 11 della lezione I, e queste forze acceleratrici composte nel modo che abbiamo ora indicato, daranno la forza acceleratrice unica, della quale si può considerare animato il mobile nello stesso istante. Dalla cognizione della forza acceleratrice e della sua direzione ad ogni istante, il calcolo integrale insegna a dedurre la velocità, lo spazio percorso, e le curve descritte dal mobile dopo un tempo qualunque.

Da quanto vien detto risulta dunque che in ogni istante a due forze rappresentate dai lati di un parallelogrammo si può sostituire una sola forza rappresentata dalla diagonale, o viceversa, e che gli effetti di quella coppia di forze, o della forza unica in quell' istante saranno sempre eguali. Le forze agenti secondo i lati si chiamano le *componenti*, e la forza secondo la diagonale la *risultante*, e la sostituzione che può farsi dell' une alle altre, o viceversa, forma la celebre proposizione conosciuta sotto il nome del *principio del parallelogrammo delle forze.*

Il principio dell' inerzia della materia, in unione con quello della composizione dei movimenti esposto al n.° 1; il principio sperimentale dell'eguaglianza dell'azione e della reazione, e quello su cui è basata la misura delle forze, esposti ai numeri 9 e 10 della lezione I, costituiscono i fondamenti di tutta la teorica del movimento, e sono conosciuti nella meccanica razionale sotto la denominazione generale delle *tre leggi del moto.*

5. Ogni movimento curvilineo è per necessità composto. Il più semplice è quello che è prodotto da una velocità iniziale comunicata al corpo, e da una forza motrice diretta verso un centro. Un corpo che, quale un sasso in una fionda, giri intorno alla mano, siccome intorno a un punto fisso, in quanto che è accinto ad un filo di cui un' estremità è tenuta dalla mano ed all' altra estremità si attacca il sasso, è atto a darci un' immagine sensibile di questo movimento. Per la sua inerzia il corpo tenderebbe a sfuggire nella direzione della tangente condotta al punto della circonferenza in cui si trova, come succede del sasso quando si rilassa un capo della fionda, ma la ten-

sione del filo tira il corpo ad ogni istante e l'obbliga a descrivere la circonferenza. Il filo si trova così in mezzo a due azioni contrarie, la resistenza della mano o del punto fisso, e la reazione che oppone il corpo nell'essere costantemente deviato dal suo cammino. La prima di queste forze che tende verso un punto fisso, o centro, si chiama forza *centripeta*, e la seconda che tenta di far sfuggire il corpo, secondo la tangente, *forza centrifuga*. Quando il corpo non è animato da alcuna altra forza, come in quest'esempio, la resistenza che oppone il punto fisso, o la forza centripeta, è giusto tanta quanta è necessaria per equiparare la reazione del corpo o la forza centrifuga, ed il corpo trovandosi fra due forze eguali e contrarie agenti nella direzione del filo, o perpendicolarmente alla direzione del suo movimento, non altera la sua velocità, ed il movimento rimane uniforme. Si dimostra in questo caso che la forza centrifuga, quella forza cioè che nasce dalla reazione del corpo nell'essere distolto dal suo cammino, e che è misurata dalla tensione del filo che lo ritiene sulla circonferenza, deve essere valutata col prodotto della massa del corpo nel quoziente del quadrato della sua velocità diviso per la lunghezza del raggio del cerchio descritto. (Vedasi la nota 2).

Se la trajettoria descritta dal corpo non è un circolo, la forza centrifuga non eguaglia che la componente della forza centripeta nella direzione del raggio del circolo osculatore nel punto della trajettoria in cui si trova il mobile, e si valuta nello stesso modo sostituendo al raggio del circolo, il raggio del circolo osculatore. Vedansi la prop. 13 di Huyghens alla fine del suo Trattato de *Horologio oscillatorio*, e la nota 3 di questa Lezione.

GRAVITAZIONE UNIVERSALE

LEZIONE III.

Della gravità o della forza di attrazione universale sulla superficie della terra.

1. Tengo in mano una pietra, l'abbandono, e cade al suolo. Questo fenomeno si era ripetuto le migliaja di volte tanto avanti gli occhi del volgare come a quelli del filosofo, ma non fu che dopo molti secoli che s'offerse alla penetrazione del Galileo. « Le scoperte dei « satelliti di Giove, » dice l'illustre Autore della Meccanica anali- « tica (1), « delle fasi di Venere, delle macchie del Sole procura- « rono a Galileo durante la sua vita maggiore celebrità, però esse « non esigevano che dei telescopii ed un' applicazione costante, ma « era d'uopo d'avere un genio straordinario per svolgere le leggi « della natura in fenomeni che si avevano costantemente avanti gli oc- « chi, e la cui spiegazione era ciò non ostante sfuggita alle investi- « gazioni dei filosofi. » Il poter discernere ciò che vi ha di notabile nei fenomeni più comuni, per isviluppare le leggi più generali della natura, è infatti il carattere più distintivo del genio straordinario. Colle sue belle scoperte sulla caduta dei gravi, Galileo gettò i fondamenti della scienza del movimento, il ramo più generale della fisica, nel quale devono andare a fondersi tutti gli altri rami a misura che si avvicinano al loro compimento (2). Per l'importanza delle sue scoperte, si può dire che, il fondatore della Dinamica, il creatore della teoria della caduta dei gravi non la cede in merito al profondo scopritore del principio dell'attrazione universale.

Tutti sanno che un corpo posto sopra un piano orizzontale produce sovr'esso una pressione. Il conato che dà origine a questa pressione si chiama *il peso* del corpo. Se si toglie il piano per disotto, il corpo si pone immediatamente in movimento, la forza che produce questo movimento si chiama la *gravità*. Si era creduto per molto tempo che i corpi fossero atti a cadere con tanta maggiore velocità quanto più peso avessero. Quest'illusione era prodotta dal ve-

(1) Lagrange, Mécanique Analytique. Tom. I. pag. 121.
(2) Vedasi il n.° 5 del discorso preliminare.

dere che corpi poco densi, come penne, paglia, ec. cadono meno velocemente che i corpi più densi, come pietre, metalli, ec. Galileo fece osservare che le differenze di velocità che acquistano corpi di diverse sostanze cadendo, sono dovute alla perdita di peso cagionato dall' aria nella quale stanno immersi, ed alla resistenza che questo fluido oppone al loro movimento (1). Queste due cause producono due forze motrici che si oppongono con eguale energia al movimento di due corpi che abbiano lo stesso volume e la stessa figura e velocità, e perciò ritardano maggiormente il meno denso che ha una massa minore, che non il più denso che ha una massa maggiore (vedasi il n.° 10 della lezione I). Al tempo di Galileo non si sapevano preparare canne vôte d' aria nelle quali si potessero far cadere i corpi o provare direttamente queste asserzioni, e quel filosofo non potè dimostrarle che con esperimenti indiretti, per analogia, e per induzione. Ora che si sa votar d'aria un tubo per mezzo di una macchina che si chiama la *macchina pneumatica*, l' eguaglianza del movimento dei corpi cadenti è un fatto sperimentale facile a provarsi. Non si hanno che a racchiudere in un cannello della lunghezza di due o tre metri, e voto d' aria, due corpi di densità molto differenti, come un pezzo di piombo ed uno di carta, una moneta d' oro ed una piuma, e si vede che qualunque siano i loro pesi, le loro figure e volumi, sempre cadono tutti da un' estremità all' altra del tubo in egual tempo. Questo sperimento si trova accennato nella proposizione X del libro terzo della grand' opera di Newton. *Philosophiae naturalis Principia mathematica.*

2. Quando l' effetto della gravità sopra il corpo è distrutto da un ostacolo che lo sostiene, si produce il conato che abbiamo definito per il peso del corpo. Il peso è dunque il risultamento della tendenza che la gravità imprime alle molecole materiali del corpo per farle cadere, e come i corpi cadono tutti con eguale velocità, è necessario che i pesi, come loro forze motrici (n.° 10 lez. I), siano proporzionali alla loro inerzia o alle loro masse. Si sono sempre impiegati i pesi come misure delle masse dei corpi, però questa pratica non era fondata che su d' una supposizione prima che si conoscesse il principio dell' uguaglianza del movimento nella caduta di tutti i corpi. La vera misura delle masse è la loro inerzia, e se la gravità imprimesse velocità differenti a corpi di diverse sostanze, la sua azione non sarebbe più proporzionale alla massa dei diversi

(1) Vedansi i *Discorsi intorno a due Scienze nuove* di Galileo. Dialogo primo. e la lettera in risposta al Bertizzolo vol. II pag. 719. Ediz. di Firenze.

corpi, e per conseguenza non lo sarebbero ne anco i loro pesi. La proporzionalità dei pesi alle masse non è dunque che una conseguenza della proprietà che abbiamo riconosciuto nella caduta dei corpi, quantunque gli uomini abbiano impiegato questa proporzionalità molto tempo prima, senza essere conscii del fenomeno nel quale si fonda. Comunemente si adotta il peso, nel vôto, di un volume determinato di una sostanza conosciuta, per esempio l'acqua, per unità di peso, e si esprimono i pesi dei corpi in proporzione di questa unità, e si dinotano le masse cogli stessi numeri che rappresentano i pesi. Vedremo in seguito le precauzioni che bisogna prendere per determinare il peso che un corpo avrebbe nel vôto in una temperatura data.

3. Una lieve ispezione della caduta di un corpo basta per convincerci che il suo movimento è accelerato, o che la velocità aumenta colla caduta, *vires acquirit eundo.* Quale è dunque in ciascun istante la relazione fra lo spazio percorso, la velocità acquistata, ed il tempo impiegato nella caduta? La grande altezza dalla quale un grave cadendo discenderebbe in pochi secondi, la resistenza dell'aria che aumentando in proporzione maggiore della velocità, ritarda maggiormente i movimenti più veloci, non permettono che si eseguiscano gli esperimenti direttamente lasciando cadere i corpi liberamente. Galileo per ovviare a questi inconvenienti impiegò un regolo o corrente di legno, della lunghezza di circa 7 metri, posto un poco inclinato all'orizzonte nella cui superficie superiore aveva scavato un canaletto, poco più largo di un dito, ben pulito e diritto, nel quale faceva discendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata e liscia (1). Avendo dimostrato che gli spazii corsi dalla palla nel cannello, sono bensì minori ma conservano una ragione costante con quelli dai quali discenderebbe cadendo liberamente, investigò la legge della variazione fra gli spazii ed i tempi del movimento nel canale, per dedurne con una proporzione quella della caduta libera. Ora questi esperimenti si eseguiscono più comodamente con un apparecchio, che Giorgio Attwood imaginò nel secolo passato, e che perciò si chiama la *macchina d'Attwood.* L'essenziale di questa macchina consiste in una carrucola il cui asse orizzontale è sostenuto da quattro rotelle mobili di un tribometro per diminuire lo sfregamento. (Vedasi la Fig. 4). Nella gola di questa carrucola passa un filo di seta molto sottile tirato nelle sue estre-

(1) Vedasi il Corol. I della prop. II del Dialogo terzo del Galileo. Opera già citata.

mità da due pesi eguali. In questo stato, trascurando il peso del filo e gli effetti dello sfregamento, che sono ben poco sensibili, i due pesi debbono farsi equilibrio e restare immobili a qualunque altezza si trovino posti, e comunicando un movimento ad uno di essi con un piccolo urto, devono l'uno discendere e l'altro ascendere con movimento uniforme. Questi sperimenti preparatorii servono per verificare se la macchina opera bene, cioè a dire, se i pesi sono eguali, e se lo sfregamento è poco sensibile. Per eseguirli con precisione, dal lato del corpo che discende vi è un'asta ben divisa sopra cui si possono valutare gli spazii che il corpo ha percorsi alla fine di un tempo qualunque, ed un pendolo per contare i secondi.

Supponiamo ora di aggregare ad uno dei due detti corpi in equilibrio alle estremità del filo, un piccolo corpo addizionale il cui peso non sia che una porzione del peso totale di quelli. Questo peso addizionale, non potendo discendere senza muovere gli altri due congiuntamente, costituisce una forza motrice che si riparte uniformemente fra tutte le particelle della materia che compongono il sistema dei tre corpi. Dinotando con M la massa di uno dei corpi maggiori, con m la massa del corpo minore aggiunto, la forza acceleratrice della gravità, si troverà attenuata nel movimento del sistema dei tre corpi (vedi il n.° 10 della lez. I.) nella ragione di $m : 2M + m$, per conseguenza gli spazii corsi e le velocità acquistate staranno a quelle di un corpo che cade liberamente, in un tempo eguale, nella stessa ragione. Gli esperimenti che si facciano colla macchina d'Attwood rappresenteranno dunque nella stessa proporzione ma in una scala meno veloce, nella quale la resistenza dell'aria avrà poco effetto, ciò che la natura opera in una scala più rapida nella caduta libera de' corpi, e saranno per conseguenza molto proprii per mostrarci il modo d'agire della gravità.

Per facilitare l'esecuzione di questi sperimenti si applica comunemente al pendolo un grilletto che sostiene quello dei pesi grandi a cui è applicato il piccolo peso addizionale all'altezza dove cominciano le divisioni dell'asta. Subito che la sfera arriva ad un punto determinato del quadrante, per esempio quello segnato 60^s, il colpo stesso del pendolo pone in libertà il grilletto, ed il sistema si pone in movimento, di modo che non abbisogna altro che leggere sopra il quadrante i secondi passati del 60^s sino al punto segnato dalla sfera, allorchè i corpi sono giunti al termine ove il movimento s'arresta. Per potere assegnare con più precisione l'istante in cui il movimento è arrestato, si fissa sull'asta delle divisioni,

all' altezza in cui si vuole che il movimento termini, un piccolo piano orizzontale contro il quale la massa *M* che discende va ad urtare, e col rumor dell' urto ci avvisa del termine della caduta.

Se si desidera di conoscere la velocità dei corpi del sistema in un punto qualunque della caduta, o come si suol dire la velocità acquistata, si fissa nella divisione corrispondente dell' asta un anello piano, e si dà al peso addizionale la forma di una lamina oblunga che si sovrappone al peso grande *M* e gli sporge fuori dai due lati. Quando il peso addizionale arriva al livello dell' anello, non potendo passare per la sua lunghezza, viene arrestato e rimane sopra l' anello, e non proseguono il loro movimento che i due pesi grandi, che equilibrandosi reciprocamente, sono, per così dire, insensibili all' azione della gravità, e solo continuano a muoversi per la loro inerzia in virtù della velocità acquistata, che è appunto quella che si vuole riconoscere. Eseguendo questi esperimenti si trova:

1.° Che fissando il piano orizzontale, sopra cui va a fermarsi il gran corpo col suo addizionale in distanze tali, dal punto di partenza, che stiano come i numeri 1, 4, 9, 16 ec. quei corpi arrivano ad urtare il piano alla fine di tempi che crescono come i numeri 1, 2, 3, 4 ec., dal che risulta che gli spazii aumentano come i quadrati dei tempi, nei quali dura il movimento.

2.° Facendo che il peso addizionale resti sospeso sopra l' anello in un punto qualunque della sua discesa, il movimento degli altri due pesi continua con una velocità uniforme tale che con essa velocità percorrono, uno discendendo l' altro ascendendo, uno spazio doppio di quello che hanno trascorso unitamente al peso addizionale.

Le proprietà del movimento dei corpi cadenti, che questi sperimenti ci danno a conoscere, appartengono al movimento uniformemente accelerato, ed una sola di esse basterebbe per caratterizzarlo. (Vedansi i n.i 4 e 5 *della lez 1*)

Ma dalla Meccanica razionale (vedi il n.° 10 della lezione precedente) si sa che la forza accleratrice che produce il movimento uniformemente accelerato è una forza costante, dunque la gravità che produce un movimento di questa specie è una forza acceleratrice che, nelle vicinanze della superficie della terra, può considerarsi come costante.

Dinotando con *g* la velocità che la gravità può imprimere a un corpo cadente nell' unità di tempo, per esempio in un secon-

do, e con v ed s la velocità acquistata e lo spazio corso alla fine del tempo t qualunque; per le proprietà del movimento uniformemente accelerato, (lez. I n.° 4) che abbiamo visto essere quello dei corpi che cadono si avrà

$$(1) \qquad v = g\,t\,, \quad (2) \quad s = g\,\frac{t^2}{2}.$$

Se si elimina il tempo t fra queste due equazioni si ottiene

$$(3) \qquad v = \sqrt{2\,g.s}:$$

così il corpo acquista cadendo da un' altezza s una velocità che è proporzionale alla radice quadrata di quest' altezza. In Meccanica si fa spesso uso nell' indicare una velocità qualunque v, della frase *velocità dovuta all' altezza* s.

4. La quantità g che dinota la velocità che acquista un corpo cadendo nell' unità di tempo, è proporzionale alla gravità, e si prende come si è spiegato altrove (Lez. I n.i 5, e 10) per misura di questa forza acceleratrice. Il valore della gravità si può quindi dedurre dagli esperimenti che abbiamo accennati, per esempio dal secondo, aumentando la velocità acquistata nell' unità di tempo in ragione della somma delle tre masse $2\,M + m$ alla massa m del peso addizionale (1). Ma in questo modo non si dedurrebbe che un valore poco esatto, perchè quantunque gli effetti dello sfregamento e della resistenza dell' aria siano minimi in questi esperimenti, ciò non ostante venendo essi pure ad essere aumentati nella ragione suddetta possono produrre delle differenze sensibili. Vedremo in seguito che il valore della gravità, o secondo i principii stabiliti, la velocità che essa può imprimere ad un corpo che cade nel vôto

(1) Quando la carrucola è mobile, ed il suo asse gira sopra quattro rotelle egualmente mobili, come nella macchina che abbiamo descritta, è necessario tener conto anche del movimento comunicato a questi corpi. La Meccanica insegna che alla somma $2\,M + m$ si deve aggiungere il momento d' inerzia della carrucola diviso pel quadrato del suo raggio, ed i momenti d' inerzia delle quattro rotelle divisi pure pei quadrati dei loro raggi rispettivi, e diminuendo i quozienti nella ragione del quadrato del raggio della carrucola al quadrato del raggio del suo asse. Per maggiore semplicità del discorso abbiamo omesso l' addizione di queste quantità, supponendo che il filo scorra sopra la carrucola senza sfregamento, perchè ciò non altera per niente le conseguenze che abbiamo dedotto dagli esperimenti rispetto alla natura del movimento. In quanto al valor assoluto della gravità non sarebbe più permesso il trascurare la detta addizione, però non ne faremo uso per la ragione allegata nel testo.

in un secondo sessagesimale di tempo al livello del mare è per Corfù eguale a $9^{m},80126$, l'unità lineare essendo il metro legale.

5. La linea che descrivono i corpi cadendo liberamente è situata evidentemente nella direzione nella quale opera la gravità: questa direzione si può facilmente riconoscere sospendendo un corpo dall' estremità di un filo perfettamente flessibile, l' altra estremità del quale sia fissa, perchè il filo non potrebbe distruggere lo sforzo del corpo per cadere, se non si trovasse teso nella direzione stessa della gravità. La linea nella quale il filo si trova teso, si chiama la *verticale*. L' osservazione fa vedere che per due luoghi poco distanti fra loro, le verticali corrispondenti sono sensibilmente parallele.

La superficie di un' acqua stagnante è perpendicolare alla direzione della gravità, perchè le particelle dell' acqua essendo pesanti e mobili in tutte le direzioni, quelle che stanno sopra sdrucciolerebbero via, se lo sforzo che facessero per discendere non fosse perpendicolare alla superficie su cui s'appoggiano. Questa proprietà delle acque ci dà un mezzo per riconoscere la direzione della gravità in generale: perchè, sapendosi dalla Geografia che le acque del mare si sono conformate prossimamente in una sfera, la gravità non potrebbe esser loro perpendicolare in tutti i suoi punti se non fosse diretta verso il centro della sfera, ciò che ha dato origine all' espressione volgare che i corpi tendono al centro della terra

. . . . . il punto
Al qual si traggon d' ogni parte i pesi.
DANTE *Infern. Cant. XXXIV, vers.* 111.

quantunque non tendano verso nessun centro particolare, come vedremo in seguito. In Geografia si chiama *latitudine* l' angolo che la direzione della gravità, o la verticale fa col piano dell' equatore, e le osservazioni provano che quest' angolo si mantiene costante in tutti tempi.

6. L' eguaglianza dell' azione della gravità su tutte le particelle della materia, o su tutte le sostanze, il carattere che nelle vicinanze della superficie terrestre può essa risguardarsi come una forza acceleratrice costante, il suo valore assoluto, la proprietà che questo valore non ha sensibilmente cambiato col tempo, e che la sua direzione rimane invariabile rispetto all' asse terrestre, sono i soli dati che la Fisica è obbligata a ripetere dall' esperienza. Tutte le proprietà dei fenomeni composti, come la discesa dei gravi su

i piani inclinati, il movimento dei projettili nel vôto, le oscillazioni dei pendoli, nei quali fenomeni la gravità è la sola forza che opera, si deducono come conseguenze matematiche da questi dati e dalle leggi del movimento esposte nelle due prime lezioni, nello stesso modo che le proposizioni di Geometria si deducono dagli assiomi che si assumono in principio. Le due note che aggiungiamo a questa lezione daranno un' idea della soluzione dei due primi fra questi problemi, e riserveremo ad una nota della lezione seguente il parlare del terzo.

LEZIONE IV.

Della variazione della gravità sulla superficie della terra.

1. L'eguale durata, o, come si dice, l'isocronismo delle oscillazioni di un pendolo che vibri per archi più o meno corti, fu notata la prima volta dal Galileo, fino dall'anno 1582, mentre stando nella Chiesa Primaziale di Pisa, osservava una lampada che sospesa ad una lunga fune iva dondolando avanti i suoi occhi. Galileo confermò in seguito questa notabile proprietà dei pendoli con altri esperimenti; si valse di essa come misura del tempo, tentò di applicarla agli orologii, e di dimostrarla teoricamente (1). Ma la scienza dinamica era appena nascente per opera dello stesso Galileo, e troppo bambina per essere da tanto da arrivare al vero in così complicata indagine. Era riservato a Huyghens *che*, come osservò Lagrange, *parve destinato a perfezionare e completare le scoperte di Galileo*, il dare, il primo, una rigorosa teorica del movimento dei pendoli in un'opera insigne intitolata *Horologium Oscillatorium* pubblicata nel 1673, e l'insegnare il mezzo d'impiegarli come regolatori del tempo nella costruzione degli orologii. Le proprietà del movimento di un pendolo meritano una menzione speciale, perchè questo strumento è divenuto esso stesso un mezzo fecondo di nuove investigazioni; ond'è che cominceremo questa lezione dall'esporle brevemente, per poi far cenno delle principali scoperte alle quali le esperienze fatte col pendolo hanno condotto.

2. Si chiama *pendolo semplice* un filo considerato come inflessibile, senza peso e senza massa, un'estremità del quale stia unita e possa rivolgersi intorno ad un punto fisso, e l'altra estremità sostenga un peso d'un volume tanto piccolo che si possa considerare come un punto. Se si devia un poco il peso dalla verticale, e dopo si abbandona a se stesso, esso per effetto della gravità discende, descrivendo un arco intorno al punto fisso. Arrivato al punto più basso dell'arco che descrive, si trova dotato di una velocità acquistata, continua il suo movimento in virtù della sua inerzia, e monta dal lato opposto, e come la gravità gli va togliendo in ordine inverso gli stessi gradi di velocità che gli aveva comunicato nel discendere, arriva, da questo lato, ad un'altezza eguale a quella dalla

(1) Lettera di Galileo Galilei al Marchese Guido Ubaldo del Monte. Vol. II, pag. 716.

quale era disceso dal primo lato. Dopo torna indietro, discende e monta altra volta al punto da dove era partito in principio, e così successivamente. L' arco che corre il pendolo in questo *va* e *vieni* si chiama un' *oscillazione*. Huyghens ha dimostrato il primo (1) che il tempo t nel quale il pendolo compie un' oscillazione per un arco molto piccolo, è dato dalla formola (vedasi la nota 1),

$$(1) \qquad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove l dinota la lunghezza del pendolo, g la forza acceleratrice, cioè la gravità, e π la ragione della circonferenza al diametro, od il numero 3,14159. Si vede da questa formola che il tempo delle oscillazioni è indipendente dalla lunghezza dell' arco che il pendolo descrive; onde, purchè quest' arco sia assai piccolo, l' essere un pò più o meno corto non osta che esso venga descritto nello stesso tempo. Per questa ragione le oscillazioni di un pendolo per archi minimi si chiamano *isocrone*.

Il pendolo che abbiamo descritto non è che ideale: in pratica non si può effettuare la disposizione supposta di un semplice punto materiale sospeso da un filo senza massa, nè si possono escludere interamente lo sfregamento intorno all' asse di sospensione, ed altre cause perturbatrici: ma si rimedia a tutti questi inconvenienti col calcolo, quando si conoscano le dimensioni e la forma dei corpi componenti il pendolo, e la densità di tutte le loro parti. I geometri sono riusciti a ridurre il calcolo del movimento di un pendolo *composto* di corpi solidi di dimensioni e pesi sensibili, a quello di un pendolo semplice, determinando il punto nel quale si debbono considerare concentrate tutte le masse, affinchè il pendolo semplice che risulterebbe da questa concentrazione, facesse le sue oscillazioni nello stesso tempo del pendolo composto. La distanza dall' asse di sospensione al punto ideale che abbiamo descritto, e che si chiama *centro d' oscillazione*, si prende per la lunghezza del pendolo composto, ed è questa distanza che è rappresentata da l nella formola data di sopra.

3. Le esperienze col pendolo somministrano il mezzo più semplice e più sicuro per riconoscere qualunque più leggiera alterazione o modificazione nell' azione della gravità; perchè lasciando oscillare il pendolo per lungo tempo, ogni benchè minima differenza di affrettamento o ritardo in ciascuna oscillazione venendosi a ripetere ed accumulare più volte, produce alla fine un divario sensibile che si dà a conoscere dopo un gran numero d'oscillazioni.

(1) Horologium oscillatorium. Part. II Prop. XXV. e Parte IV Prop XXV

Fu propriamente per questo mezzo, che Newton ed altri fisici dopo di lui si assicurarono in un modo rigoroso delle proprietà della gravità esposte nella lezione precedente. L' esperimento di lasciar cadere diversi corpi in una canna di vetro vôta d' aria è bensì più semplice, e più ostensibile, ma la poca lunghezza della canna in confronto della brevità del tempo in cui è percorsa, non permette di giudicare delle minime differenze nelle loro cadute. Newton perciò ha fatto pendere da due fili della lunghezza di undici piedi due vasi di legno, perfettamente eguali, onde la resistenza dell' aria fosse la medesima in amendue, l' uno di questi pendoli non constava che di legno, ma l' altro era successivamente riempito di diverse sostanze, come oro, argento, piombo, vetro, arena, sal comune, acqua, grano ec. Ponendo ogni cura onde i centri di oscillazione fossero ad eguale distanza dal centro di sospensione in amendue i pendoli, e facendoli oscillare, osservò che i loro movimenti continuavano sempre ad accordarsi, di modo che le loro oscillazioni erano per amendue di egual durata (1). Se dunque ad un egual valore di l corrisponde un istesso valore di t, qualunque sia la sostanza di cui è composto il pendolo, bisogna che nella formola (1) il valore di g sia eguale per tutte le sostanze, e che perciò la gravità operi egualmente sopra ogni molecola di massa eguale di ciascuna sostanza.

4. Il fenomeno, osservato col pendolo che attrasse maggior attenzione, fu la diminuzione della intensità nella forza di gravità andando verso l' equatore. Richer fu il primo che essendosi trasferito da Parigi all' Isola di Cayenna, a 5^0 gradi di latitudine australe, vicino alla costa orientale d' America, notò che il suo pendolo, il quale in Parigi era regolato col tempo medio, ritardava ogni giorno alla Cayenna di $2^m\ 28^s$. La conseguenza immediata di questo fenomeno era facile a dedursi: come non si era cambiato il pendolo, e la sua lunghezza dinotata con l nella formola (1) era rimasta la stessa, se il tempo t era risultato di maggior durazione, quest' aumento non poteva provenire che da una diminuzione nel valore di g che si trova nel denominatore di quella formola, ciò che vuol dire che la gravità è minore alla Cayenna che in Parigi.

5. Dopo il memorabile esperimento di Richer varii fisici si sono occupati tanto di migliorare i mezzi di fare questa specie di esperimenti, come di osservare il numero delle vibrazioni che fa un pendolo *invariabile* trasportato in diversi punti del globo

(1) Newton. Principia Philosophiae naturalis Lib. III. Prop. VI.

terrestre (1). Modernamente alcuni Governi si sono anco interessati in questa ricerca, e varie spedizioni attorno del globo furono allestite per quest' oggetto. I capitani di marina Hall (2), Sabine (3), Foster (4) inglesi; Freycinet (5), e Duperry (6), francesi; Leutke (7) russo, hanno tutti eseguito una serie di esperimenti sul numero delle vibrazioni che possono fare in un dato tempo dei pendoli *invariabili* trasportati in diverse stazioni sulla superficie terrestre. I calcoli delle varie serie di esperimenti fatti da questi viaggiatori, con cui si ottengono le riduzioni necessarie per renderli comparabili fra loro, sono stati eseguiti ed esposti in una interessante relazione del sig. Francis Baily, che forma il tomo settimo delle Memorie della R. Società Astronomica di Londra. Secondo il risultamento medio di questi calcoli, un pendolo che battesse il secondo di tempo medio all' equatore, cioè che facesse 86400 vibrazioni in un giorno solare medio sotto la linea equinoziale, trasportato alla latitudine λ farebbe un numero v di vibrazioni che sarebbe espresso dalla formola

$$(2) \qquad v = 86400\ (1 + 0{,}005144889\ ,\ sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Se si chiama g_0 la gravità all' equatore, e g quella alla latitudine λ; l_0 la lunghezza del pendolo, che batte il secondo di tempo medio all' equatore, ed l quella del pendolo della stessa durata di vibrazione alla latitudine λ, la formola precedente (2) combinata colla (1) (vedasi la nota 4) dà

$$(3) \quad g = g_0\,(1+0{,}005144889\ sin^2\lambda);\ l = l_0\,(1+0{,}005144889\ sin^2\lambda).$$

Queste formole ci somministrano il rapporto del valore della gravità, e della lunghezza del pendolo per una latitudine qualunque λ, rispetto alla gravità ed alla lunghezza del pendolo all' equatore,

(1) Base du système métrique. Tom. III; e Biot Tom. IV. — Bohenberger Astronomie pag. 448. — Kater, Philosophical Transactions an. 1818-1819. — F. Baily. Memoirs of the astronomical Society of London vol. VII, an. 1834.

(2) Hall. Philosophical Transactions. 1823.

(3) Sabine. Account of experiments to determine the figure of the earth. London 1825. Murray, and Philosophical Transactions 1828-1829.

(4) Memoirs of the Astronomical Society of London vol. VII.

(5) Observations du pendule faites dans le voyage autour du monde pendant les années 1817, 1818, 1819 et 1820, par M. L. de Freycinet.

(6) Connaissance des temps pour l'année 1830.

(7) Bulletin scientifique adjoint aux Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de S.t Petersbourg.

considerate come conosciute, indipendentemente da ogni unità di misura.

Adottando il metro legale (1) per unità lineare, ed il secondo di tempo medio per unità di tempo, le misure dirette della lunghezza del pendolo prese in varii luoghi della terra danno, secondo i risultati che io ho ottenuti, per la lunghezza l_0 del pendolo che vibrerebbe in un secondo sotto l'equatore

$$l_0 = 0^{m},99100$$

siccome la formola (1) fatto $t = 1''$ dà in generale pel valore della gravità

$$(5) \qquad g = \pi^2 \, l$$

sostituendo il dato valore di l_0 in questa formola e per π il numero 3,141593, si dedurrà

$$g_0 = \pi^2 l_0 = 9,^{m}78078$$

pel valore della gravità all'equatore, cioè per la velocità che acquisterebbe un grave cadendo per un secondo di tempo medio nel detto luogo.

Questi valori numerici di g_0 ed l_0 introdotti nelle formole (5) ci danno le seguenti

$$(6) \qquad g = 9,^{m}78078 + 0,^{m}050321 \; sin^2 \lambda$$
$$(7) \qquad l = 0,^{m}99100 + 0,^{m}0050986 \; sin^2 \lambda$$

le quali ci faranno conoscere quelli della gravità e della lunghezza del pendolo, corrispondenti ad una latitudine qualunque, espressi colle suddette unità.

Così per esempio, la latitudine di questa città di Corfù essendo $39^0\ 38'\ 20''$, se si pone nelle equazioni precedenti questo valore per λ si trova

$$9 = 9,^{m}80126 \qquad ; \qquad l = 0,^{m}993075;$$

per la gravità o velocità che acquista un grave cadendo nel vôto in un secondo di tempo medio, e per la lunghezza del pendolo che compie una vibrazione nello stesso tempo in Corfù, amendue queste quantità essendo espresse in metri.

(1) Il metro scientifico, cioè la diecimilionesima parte del meridiano terrestre è, secondo le migliori attuali misure geodetiche, di 165 milionesimi di metro più grande del metro legale.

7. La formola precedente (6), che ci dà l'espressione della gravità per una latitudine qualunque ci fa vedere che all'equatore, dove $sin\ \lambda = 0$, la sua intensità è minore ed eguale a $9,^{m}78078$, e che va successivamente crescendo andando verso i poli, dove essendo $sin\ \lambda = 1$, diviene massima ed eguale a $9,^{m}83110$. Le cause di questo accrescimento furono indicate prima da Newton, ed i geometri posteriori valutarono con più precisione la loro influenza. Scomponendo la variazione totale $0,050321\ sin^2\ \lambda$ in due parti, la parte $0,^{m}0339176\ sin^2\ \lambda$ è la porzione della gravità che distrugge ~~per causa~~ della forza centrifuga proveniente dalla rotazione diurna della terra, che è tanto maggiore, e si oppone più direttamente alla gravità quanto più siamo vicini all'equatore (vedasi la nota 5); la parte rimanente $0,^{m}016403\ sin^2\ \lambda$ è dovuta alla figura sferoidica della terra, ed alla disposizione che hanno preso le materie eterogenee di cui è composta, nello stabilirsi in equilibrio quando erano fluide, come v'è ragione di credere che le siano state. Così la medesima causa ha prodotto un'azione diretta ed indiretta. La rotazione della terra ha generato la forza centrifuga, questa ha reso la terra elittica, e questa forma, modificando l'azione della gravità sopra i corpi posti sulla superficie del globo, ne ha aumentato l'effetto.

8. Poichè la figura della terra ha influenza nella variazione della lunghezza del pendolo, si è pensato di servirsi viceversa della cognizione di questa variazione per determinare la figura del globo terrestre. La terra ha, con poca differenza, la forma di un'elissoide di rivoluzione, il cui asse minore coincide coll'asse di rotazione diurna ed il cui asse maggiore è il diametro dell'equatore, e la differenza fra l'asse dell'equatore e l'asse dei poli si chiama la *schiacciatura* o la *compressione* della terra. Secondo un teorema di Clairaut (1) la differenza tra l'asse equatoriale e l'asse polare della terra, espressa in parti dell'asse equatoriale, è eguale a $\frac{5}{2}$ della ragione del valore della forza centrifuga al valore della gravità nell'equatore, meno l'aumento della lunghezza del pendolo dall'equatore al polo diviso per la lunghezza del pendolo all'equatore. Così indicando con δ la differenza dei due assi in parti del raggio equatoriale, con f la forza centrifuga all'equatore in parti della gravità nello stesso luogo, e con $\alpha = 0,005144889$ l'aumento della lunghezza del pendolo dall'equa-

(1) Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'Hydrostatique. O vero. Laplace, Mécanique céleste Tom. II, pag. 102.

tore al polo, in parti della lunghezza del pendolo, all' equatore si ha

$$(8) \qquad \delta = \tfrac{5}{2} f - \alpha$$

Applicando questo teorema alla determinazione della compressione della terra ed assumendo, come risulta dai valori dati precedentemente, che la ragione della forza centrifuga a quella della gravità all' equatore sia espressa dalla frazione $\frac{0^m,0339176}{9^m,78078} = \frac{1}{288,4}$ prossimamente, si trova che la compressione è eguale a $\frac{1}{283,73}$. Tutte le osservazioni parziali fatte col pendolo s' accordano a dare all' asse polare una schiacciatura compresa fra $\frac{1}{266}$ ed $\frac{1}{296}$ dell' asse equatoriale.

9. Le formole che abbiamo esposto si riferiscono alla superficie regolare della terra, cioè a quella superficie che formerebbero le acque se la ricoprissero tutta allo stesso livello a cui si trova il mare. Le scabrosità della superficie terrestre, le elevazioni sopra il livello suddetto causano delle piccole variazioni tanto nella direzione della gravità, o del filo a piombo, come nell' intensità della stessa forza.

Se si trasporta un filo a piombo da una parte all' altra di una montagna, si trova che le di lui direzioni nelle due stazioni convergono di più di quello che dovrebbero fare per mantenersi perpendicolari alla superficie regolare della terra (1). Bouguer e la Condamine nelle vicinanze del Chimboraço al Perù (2), Maskeline ai piedi della montagna di Schehallien in Perthshire (3), il Barone di Zach presso il monte Minet nei contorni di Marsiglia (4) ed altri hanno verificato questo fatto; ciò prova che la montagna egualmente che la terra attrae il filo a piombo, e che colla sua attrazione facendo inchinare verso se dalle due parti opposte il filo a piombo produce una maggiore convergenza nelle sue direzioni. La gravità non è dunque un effetto unico dell' intera massa della terra, ma sì bene il concorso degli effetti parziali di tutte le sue parti, e l' effetto della montagna è soltanto minore, perchè la sua massa è assai minore, di quella di tutto il resto della terra. Valutando la

(1) Gli astronomi determinano l' angolo che fanno le direzioni del filo a piombo in due stazioni differenti misurando l' arco di circolo massimo compreso sulla volta celeste fra i prolungamenti di questi fili, che segnano i zenith delle due stazioni.

(2) Bouguer. Figur. de la terre pag. 379.

(3) Philos. Trans. 1775, pag. 500.

(4) Attraction des Montagnes. Avignon 1814, 2 vol. in 8.°

massa della montagna coi dati geologici della materia di cui è composta, e coi dati della sua forma e grandezza si può trovare in proporzione dell' effetto che produce, la ragione della sua massa a quella della terra, e quindi conchiudere qual' è la massa della terra. Come il volume della terra è conosciuto, ed è circa di 1083 trilioni di metri cubici, se ne deduce quindi la sua densità media. Le osservazioni di Maskeline, ricalcolate da Playfair con dei dati geologici più esatti sulla costituzione del monte Schehallien, hanno dato questa densità eguale a 4 volte e 71 centesimi quella dell' acqua (1).

L' effetto dell' attrazione di una montagna si manifesta anche sull' intensità della forza. La gravità diminuisce, elevandosi sopra la superficie della terra, con una legge che vedremo nelle lezioni seguenti. Ora si trova che, facendo oscillare un pendolo sulla sommità di una montagna, la diminuzione della gravità non è tanto grande quanto dovrebbe esserlo in virtù della detta legge. Il Cav. Carlini misurò la lunghezza del pendolo che batte il secondo all' Ospizio del Monte Cenisio in Savoia, e da questa misura il Prof. Giulio di Torino conchiuse che il pendolo era più lungo di $0^{mm},214$ di quello che avrebbe dovuto essere senza l' azione della montagna, talchè la montagna aveva accresciuto l' effetto della gravità. Impiegando i dati probabili per valutare le masse e le grandezze della montagna, che il Sig. Carlini aveva assunto, il detto professore dedusse per la densità media della terra il numero 4,95, la densità dell' acqua essendo presa per unità (2).

10. Ma la prova più diretta, che tutte le parti della materia esercitano un' attrazione reciproca, è quella che è stata immaginata da Michell, a cui Cavendish ha dato compimento (3), e che il Prof. Reich di Freyberg ha recentemente ripetuto.

Lo stromento impiegato da Cavendish è della specie di quelli conosciuti sotto il nome di bilancia di torsione (4). Eccone l' idea fondamentale. Un' asta o leva orizzontale, sostenuta in bilico nel suo mezzo da un filo, porta alle sue estremità due piccole palle di piombo. Questa leva, quando è libera, si dirige secondo quella linea in cui il filo rimane semplicemente disteso senza soffrire torsione alcuna, la qual linea si chiama la *linea di riposo.* A ciascuna delle due piccole palle nell' estremità della leva Fig. 5 *f 6.*

(1) Phil. Trans. for 1811, pag. 345.
(2) Effemeridi astronomiche di Milano per l' anno 1824.
(3) Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino Serie II. Tom. II.
(4) Philos. Trans. per l' anno 1798.

si accosta ad eguale distanza, ma da parti opposte, un grosso globo di piombo, e si vede tosto che le palle si mettono in movimento per camminare ciascuna verso il rispettivo globo. Ciò è una prova evidente della forza attrattiva fra i globi e le palle. Come però con questo movimento delle palle l'asta che le porta viene a torcere il filo da cui è tenuta sospesa, e la forza con cui il filo resiste alla torsione cresce più rapidamente che non fa l'attrazione dei globi, ben tosto queste due forze vengono ad eguagliarsi. Giunte a questo punto d'equilibrio le palle dovrebbero arrestarsi, ma siccome vi giungono con una velocità preconcepita passano più avanti, in virtù della loro inerzia, sino a tanto che la torsione del filo, che tende a ricondurle in dietro con una forza sempre più crescente, estingue ogni loro velocità. Allora il filo si distorce, l'asta retrocede, passa un'altra volta per la linea ove la torsione del filo e l'attrazione dei globi sulle palle si equilibrano, di poi procede più in là dal lato opposto, dove la forza d'attrazione dei globi vincendo la torsione del filo finisce col richiamare indietro le palle, che così vanno facendo una serie di oscillazioni intorno alla linea d'equilibrio. Determinando coll'esperimento il punto di mezzo degli archi percorsi nelle oscillazioni, con che si ottiene la direzione della linea d'equilibrio rispetto a quella di riposo, ed osservando la durata delle oscillazioni si hanno i dati principali per calcolare in che ragione sta la massa dei globi a quella della terra. Vedasi la nota 5. Hutton rifacendo i calcoli di Cavendish con più esattezza, trovò questa densità eguale a 5 volte e 31 centesimi quella dell'acqua. La descrizione dell'istromento, la cautela con cui vanno condotte le esperienze, ed i calcoli piuttosto complicati delle loro riduzioni, si possono vedere nella Memoria di Cavendish nelle Transazioni filosofiche di Londra per l'anno 1798, che trovasi anche tradotta in francese nel *journal de l'Ecole polytechnique* cahier 17.me; nella Memoria di Hutton nelle Transazioni filosofiche per l'anno 1821; ed in una Memoria del Capitano e Professore Menabrea nel Tomo II della serie II di quelle della R. Accademia delle scienze di Torino.

SISTEMA DEL MONDO

LEZIONE V.

Esposizione delle leggi di Keplero.

1. L' azione della gravità sulla superficie terrestre, che abbiamo considerato nelle lezioni precedenti, non è che un caso particolare dell' azione di una forza il cui dominio si estende a tutti i corpi dell' universo. Dobbiamo a Newton, la mente più profonda e penetrativa che abbia illustrato le scienze, il pervenimento a questa generalizzazione. Osservando che la gravità non cessa d' agire a tutte le altezze a cui all' uomo è dato d' aggiungere, Newton ebbe comune con varii filosofi del suo secolo, l' idea che la sua azione potesse estendersi sino alla Luna. Ma ciò che per gli altri non era che un' idea, una congettura probabile, divenne una verità pel genio sagace di Newton, che dimostrò secondo i principii dinamici che il nostro satellite è infatti trattenuto in giro intorno alla terra dalla stessa forza che fa cadere i corpi sulla sua superficie. Fatto certo di ciò fu indotto a confermare l' idea analoga, e già preconcepita, che anco i pianeti sono trattenuti in giro attorno al sole da una gravità residente in quest' astro, e di lì salì al principio della gravitazione universale, il principio fin ora più grande e più fecondo che siasi scoperto nelle scienze fisiche. Per acquistare un' idea adequata del filo degli argomenti che seguì Newton per arrivare a questa grande scoperta, è opportuno possedere alcune nozioni astronomiche di cui la penetrazione di Copernico e di Galileo, le osservazioni preziose di Ticone Brahe, ed il genio di Keplero, avevano già arricchita la scienza all' epoca che Newton intraprese l' alte sue speculazioni.

La maniera ingegnosa colla quale Copernico è riuscito a spiegare le apparenze dei movimenti dei pianeti, la costante successione delle stagioni sulla superficie della terra, la retrogradazione degli equinozii, e gli argomenti energici coi quali Galileo confutò le obiezioni a queste spiegazioni, vi sono conosciuti da studii preliminari. Ma le mirabili leggi che Keplero con tanto ingegno riuscì a discernere intorno ai movimenti planetarii, e che hanno somministrato a Newton i dati per comprovare e dar compimento alla sua divina-

zione della gravitazione universale, vi devono essere sconosciute, ed è convenevole che cominci per una succinta esposizione di queste leggi.

2. Gli antichi geometri hanno chiamato sezioni coniche le curve che formano i contorni delle sezioni di un cono fatte da un piano che lo tagli obliquamente. Queste curve hanno esercitato la sagacità di quei geometri, e molte loro belle proprietà sono state da essi dimostrate, senza che prevedessero che stavano preparando la strada alla cognizione delle leggi che regolano l'universo. Tanto è vero che nelle scienze non vi sono verità superflue, e che tutte si legano vicendevolmente in un solo sistema.

Quando il piano secante il cono lo attraversa da una parte all'altra, la sezione conica che ne risulta ha evidentemente una figura ovale, e la curva che la limita si chiama *ellisse*. Apollonio ha dimostrato che questa curva può descriversi nel seguente modo. Vedasi l'opera del detto autore intitolata *Conicorum*. Lib. III. prop. LII.

Siano F ed F' fig. 3 due punti fissi ai quali siano attaccate le estremità di un filo flessibile $F\,P\,F'$, ma inestensibile e più lungo dell'intervallo $F\,F'$. Stendasi questo filo con una punta d'amatita P, e facciasi scorrere questa punta, tenendo sempre le due parti del filo tese, sino a compire un intero giro. La curva così descritta è una ellisse: essa tanto più si accosta alla figura d'un circolo quanto più i punti F ed F' sono prossimi, e diventa un circolo quando questi due punti coincidono: per lo contrario diventa sempre più ovale ed allungata quanto più i punti F ed F' sono distanti tra loro; e se immaginiamo che i punti F ed F' sieno separati da una distanza infinita, l'ellisse si converte in una parabola che è pure una sezione conica, quella che nasce quando il piano secante è parallelo allo spigolo opposto del cono.

Le due estremità A, A' tracciate dalla punta P quando le due parti del filo stanno nella stessa direzione dei due punti F ed F' sono le più lontane fra loro; le due estremità B, B' che traccia la punta P quando è egualmente distante da F ed F' sono le più prossime. Il punto C di mezzo fra i due punti F ed F' si chiama il *centro* dell'ellisse, la retta $A\,A'$ che passa pel centro ed è il più lungo diametro, si chiama il grand'asse, la retta $B\,B'$ che è il più corto diametro l'*asse minore*; i punti F ed F' si dicono i *fuochi* dell'ellisse, la loro semidistanza $C\,F$ l'*eccentricità*; ed il modo stesso con cui la curva è stata descritta, ci mostra che ogni suo punto P è a tali distanze dai due fuochi, che la loro somma sempre fa una lunghezza costante, che è quella del filo.

Una elisse è completamente determinata quando si conosce il grand' asse e l' eccentricità; per convincersene basta osservare che il grand' asse è eguale alla lunghezza del filo, ed il doppio dell' eccentricità alla distanza dei punti F ed F', che sono le due sole grandezze che hanno concorso alla descrizione della curva.

3. Questo premesso, veniamo alle leggi di Keplero. La prima di queste leggi è che *i pianeti si muovono in orbite ellittiche delle quali il sole occupa un fuoco.*

L' estremità dell' ellisse, o del grand' asse, più vicina al fuoco in cui sta il sole, si chiama *perielio:* l' altra estremità più lontana prende il nome di *afelio.* Le distanze del perielio e dell' afelio dal sole si chiamano *distanza perielia*, ed *afelia.*

La legge della quale si tratta fu scoperta da Keplero col calcolare le distanze di Marte dal Sole in varii punti della sua orbita, ed estesa posteriormente per analogia e verificata su tutti i pianeti. Essa conduce, come diremo in appresso, al conoscimento della variabilità della forza che regola i movimenti dei pianeti, e frattanto ci dà la legge colla quale le loro distanze dal sole variano nei diversi punti dell' orbita. Queste variazioni sono però in generale molto piccole, perchè i pianeti si muovono in ellissi le cui eccentricità sono piccole, o sia che si avvicinano molto alla figura circolare.

4. La seconda legge di Keplero si esprime così: *Le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati nel descriverle.* Per bene intendere questa legge conviene sapere, che si chiama raggio vettore la retta che va dal sole, situato nel fuoco dell' ellisse, al punto occupato dal pianeta che percorre questa curva. Ora se si immagina che il pianeta tragga e faccia girare con se il raggio vettore, la cui lunghezza sia variabile per terminare sempre sulla curva, la legge annunciata ci dice, che l' area che traccia il raggio vettore nel girare allorchè il pianeta passa da una posizione P (fig. 8) ad un' altra qualunque P', cioè l' area del settore mistilineo PSP' è sempre proporzionale al tempo che il pianeta ha impiegato in passare dall' una all' altra posizione.

Conoscendo le dimensioni dell' orbita o dell' ellisse descritta dal pianeta, il luogo da esso occupato in un dato istante, ed il tempo di una intera sua rivoluzione, si può colla seconda legge determinare per qualunque tempo la posizione del pianeta nella sua orbita. Infatti sia APB fig. 9 l' ellisse descritta dal pianeta, e supponiamo di conoscere a qual epoca esso si trovò nel suo perielio in A, e si voglia sapere, dopo un numero t di giorni in

qual punto dell'orbita si troverà. Sia T il tempo di una rivoluzione totale, o come si dice il tempo periodico, ed A l'area o superficie dell'ellisse: si dirà

$$T : t :: A : \textit{settor. } A\,S\,P$$

ed il problema si ridurrà a tagliare nell'ellisse un

$$(1) \qquad \textit{settore } A\,S\,P = \frac{A}{T}.\ t$$

Questo problema è celebre, ed è conosciuto sotto il nome di problema di Keplero, ma conduce ad una equazione trascendente, e sorpassa i mezzi proprii delle matematiche elementari. Quanto abbiamo esposto basta però a farci concepire la sua essenza, ed a dare una idea della possibilità della sua soluzione, che sarà sempre unica quando si conosca in qual direzione il pianeta si muove, cioè se da A verso P, o vero verso Q, per cui la direzione del movimento è pure un dato per fissare la posizione del pianeta.

5. La soluzione del problema di cui parliamo suppone dato il rapporto $\frac{A}{T}$. La quantità A che rappresenta l'area dell'ellisse deve sempre considerarsi come conosciuta quando è dato il grand'asse a e l'eccentricità, perchè, se si dinota con e l'eccentricità espressa in parti del semigrand'asse, nella geometria delle curve si dimostra che l'area dell'ellisse è misurata da $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, π essendo la ragione della semicirconferenza al raggio. Vedasi la nota 1. Il tempo periodico T contenuto nel suddetto rapporto è pure determinabile per ciascun pianeta quando sia conosciuto quello di uno solo.

La notabile relazione che somministra questa determinazione costituisce la terza legge di Keplero il cui enunciato è *che i quadrati dei tempi periodici dei diversi pianeti sono fra loro come i cubi dei grand'assi delle loro orbite.* Se dunque rappresentiamo con uno il semigrand'asse dell'orbita della terra, e con Θ il tempo periodico della sua rivoluzione, che è di 365giorni, 25636; con a il semigrand'asse dell'orbite di un altro pianeta, si avrà secondo questa legge

$$1^3 : a^3 :: \Theta^2 : T^2$$

dalla quale si ricaverà $T^2 = a^3\,\Theta^2$ e $T = a^{\frac{3}{2}}\,\Theta$, così essendo conosciuto a e Θ si potrà calcolare T tempo della rivoluzione periodica del pianeta, o viceversa se fosse conosciuto T si potrebbe calcolare a.

6. Il grand'asse dell'ellisse, la sua eccentricità, e l'epoca nella quale il pianeta si trovò in un dato punto dell'orbita costituiscono tre di quelle quantità che gli astronomi chiamano gli *ele-*

menti dell' orbita, cioè di quelle quantità che devono essere date per potere determinare la posizione del pianeta nel cielo; ma questi elementi non bastano, essi servono solamente per determinare il luogo del pianeta nella sua orbita, e restando ancora sconosciuto come l'orbita sia situata nello spazio, rimangono altri tre elementi a conoscersi, affinchè il luogo del pianeta sia assegnabile nel cielo.

Per riferirvi la situazione degli oggetti negli spazii celesti, gli astronomi adottano più comunemente il piano in cui si muove la terra, il qual piano si chiama il piano dell' eclittica.

S' immagini in questo piano tracciato un gran circolo nel cui centro sia il sole, e la cui circonferenza debba essere divisa in 360°. Il principio di numerazione od il punto in cui comincia il zero delle divisioni è comunemente il punto in cui il prolungamento della retta, che va dal sole alla terra nell' equinozio di primavera, taglia la detta circonferenza. Ogni arco contato a partire dà questo zero si chiama una *longitudine.*

Il piano della orbita di un pianeta, cioè quello che contiene la sua ellisse, deve necessariamente intersecare quello dell' eclittica secondo una linea retta, e come per la prima legge questo piano passa pel sole, un punto per cui passa questa linea retta d' intersezione sarà già dato, o sia sarà il centro del circolo, e non rimarrà che a conoscerne un altro onde questa linea d' intersezione sia determinata di posizione. Si è convenuto di prendere per questo secondo punto l' una delle due divisioni del cerchio graduato dell' eclittica per cui passa la linea retta d' intersezione. Queste due divisioni portano il nome di nodi. Il nodo dalla parte in cui è il pianeta quando passa dall' emisfero australe all' emisfero boreale dell' eclittica, si chiama *nodo ascendente*, ed è quello del quale si dà comunemente la posizione, e come questa è data dalla divisione del cerchio, o dalla longitudine per cui passa la linea d' intersezione, quest' elemento si chiama la *longitudine del nodo ascendente.*

Per conoscere la posizione del piano dell' orbita nello spazio, la sola longitudine del nodo è insufficiente, perchè per una stessa linea si possono far passare quanti piani si vogliono, bisogna di più conoscere qual è l' angolo che il piano dell' orbita fa coll' eclittica. L' inclinazione di questi due piani deve dunque entrare come un elemento, e questo elemento si chiama l' *inclinazione.*

Nel piano dell' orbita presentemente fissato di posizione resta ancora indeterminata la direzione del grand' asse dell' ellisse per potere tracciare la curva. L' angolo che il grand' asse fa colla linea dei nodi è dunque pure necessario a conoscersi. Quest' angolo

contato andando dal nodo ascendente verso il perielio, ed aggiunto alla longitudine del nodo fa una somma che si chiama la *longitudine del perielio*, e costituisce il sesto elemento dell' orbita.

Riassumendo adunque il fin qui detto, conchiuderemo che il grand' asse dell' ellisse, l' eccentricità, l' epoca o sia il tempo in cui il pianeta passò per un dato punto della sua orbita, la longitudine del nodo ascendente, l' inclinazione, e la longitudine del perielio formano i sei elementi dell' orbita di un pianeta, ed è evidente che bastano per fissarne la posizione nello spazio ad un' epoca qualunque. Infatti per mezzo dei primi tre, ed aggiungiamo anche del verso in che procede il movimento del pianeta, possiamo, come abbiamo mostrato sopra, trovare il luogo che esso occupa nella sua orbita in un dato istante, servendoci delle tre leggi di Keplero; dopo per mezzo degli altri tre potremo situare l' orbita, come lo è realmente, nello spazio.

Le osservazioni, posteriori a Keplero, hanno provato che le comete seguono nel loro movimento le stesse leggi dei pianeti, e le loro orbite sono determinate dagli stessi elementi. Le circostanze che le distinguono sono, che mentre i pianeti s' aggirano intorno al sole tutti nella stessa direzione da ponente a levante dirigendosi verso mezzo giorno, e la inclinazione ed eccentricità delle loro orbite sono comunemente piccole; le comete invece s' avvolgono intorno al sole tanto nell' una che nella direzione opposta, le inclinazioni delle loro orbite sono per le une meno per le altre più grandi in tutti i modi possibili, e le eccentricità sono sempre grandi, talchè possono ben spesso considerarsi le loro orbite come paraboliche, almeno per una prima approssimazione.

I satelliti seguono pure le stesse leggi dei pianeti nel percorrere le loro orbite intorno al pianeta primario, quando non si tenga conto che della sua azione che è la principale ed i loro movimenti sono parimente diretti tutti da ponente a levante, e le loro orbite poco eccentriche e poco inclinate a quella del pianeta.

Quanto abbiamo detto basta per dare una idea chiara del modo col quale il luogo di un pianeta o d' un corpo del sistema solare può essere assegnato nello spazio, ed a rendere intelligibile la destinazione di quelle quantità che gli astronomi chiamano elementi di un' orbita. Ciò è sufficiente pel nostro oggetto; il processo col quale gli astronomi per mezzo di questi elementi giungono ad effettuare il calcolo del luogo di un pianeta o di una cometa o d' un satellite è puramente matematico, e va studiato nei libri d' astronomia che ne trattano espressamente.

LEZIONE VI.

Prove dell' attrazione universale.

1. Le leggi esposte nell' ultima lezione erano emerse dai calcoli laboriosi e pazienti di Keplero sul tesoro delle osservazioni planetarie che Ticone Brahe gli aveva affidato alla sua morte: esse erano per così dire formali, erano soltanto l' espressione generica dei fatti, e restava ancora a salire alla cognizione delle cause, cioè a conoscere il carattere della forza, che poteva far sì che i movimenti dei pianeti s' effettuassero secondo quelle leggi, e le riunisse sotto un sol principio dinamico. Questo è ciò che ha fatto Newton.

L' idea di un' attrazione reciproca fra la materia non era nuova a quel tempo: essa fu concepita anteriormente da Keplero e Galileo, e fu particolarmente segnalata da Borelli, che fece vedere come l' attrazione in combinazione colla forza centrifuga poteva ritenere sospesi i pianeti in movimento intorno al sole senza le sfere solide d' Aristotile, od i vortici di Descartes (1). Keplero non mancò anche di far osservare, che la forza d' attrazione fra i corpi poteva supporsi proporzionale alle loro masse, ma s' ingannò nel pensare che questa forza dovesse decrescere, all' allontanarsi dei corpi soltanto nella proporzione inversa delle loro distanze. Bouillaud pare il primo che congetturasse che questa forza dovesse diminuire nella ragione inversa del quadrato della distanza, e questa idea si scorge adottata da molti filosofi della metà del secolo decimo settimo; ma era riservato al genio di Newton il dare una dimostrazione matematica della sua realtà.

2. Era naturale il supporre che la forza che determina la caduta dei gravi sulla superficie della terra, e continua ad agire a grandi elevazioni potesse estendersi sino alla luna. Horrox aveva espressa quest' idea in un modo speciale e distinto (2). Huyghens aveva già creato la teorica delle forze centrali che Newton stesso aveva grandemente perfezionato. Ora qual forza più probabile di quella della gravità si poteva assumere per rappresentare la forza centripeta che il movimento curvilineo della luna nella sua orbita suppone? Newton intraprese la verificazione di questo pensamento nel seguente modo.

(1) Theoricae mediceorum planetarum ex causis physicis deductae, Borelli. Firenze 1666.

(2) Astronomia Kepleriana defensa et restaurata. Cap. 2.

Sia la terra, fig. 25 in C e la luna in L la quale in un tempo brevissimo quanto ci piace descriva il piccolo arco $L\,l$. Quest' arco essendo assai corto in confronto della distanza dalla terra, l' azione della forza centripeta supposta emanante dal centro della terra potrà nel brevissimo intervallo assunto di tempo considerarsi costante e parallela al raggio $C\,L$. Ora senza la forza centripeta la luna avrebbe percorso la tangente $L\,t$, se dunque si trova in l è perchè ha percorso l'arco $L\,l$ con movimento composto di quello per la tangente $L\,t$, e dell' altro $L\,e = l\,t$ di cui lo ha fatto discendere la forza centripeta. Pertanto se questa forza centripeta è la gravità, e dessa è che ha realmente prodotto questa discesa della luna, lo spazio $t\,l$ deve essere eguale a quello per cui cadrebbe nello stesso tempo un grave trasportato alla distanza della luna.

L' arco $L\,l$ potendosi prendere piccolo a piacere potrà diminuirsi sino a confondersi colla sua corda, e per una nota proposizione di geometria si sa che la corda è sempre media proporzionale fra il diametro $2\,C\,L$ del circolo ed il seno verso $L\,e = t\,l$. Si avrà dunque

$$t\,l = \frac{\overline{L\,l}^2}{2\,C\,L}$$

dove $C\,L$ dinota il raggio dell' orbita lunare, supposta circolare, o la distanza media della luna dalla terra.

Per fissare le idee sia $L\,l$ quell' arco che la luna descrive in un secondo di tempo medio, e T il tempo di una intera rivoluzione siderale della luna espresso in secondi di tempo medio, sarà evidentemente, dinotando con π la semicirconferenza di raggio uno

$$L\,l = \frac{2\,\pi.\,C\,L}{T};$$

per cui sostituendo questo valore nell' equazione precedente si avrà

$$t\,l = \frac{2\,\pi^2.\,C\,L}{T^2}.$$

Per calcolare lo spazio $t\,l$ bisogna dunque conoscere il tempo T della rivoluzione della luna, ed il raggio dell' orbita lunare $C\,L$.

Il tempo periodico della rivoluzione della luna era abbastanza conosciuto all' epoca di Newton. Questo filosofo l' assunse di 27.gi 7.h 43.m, o sia prese

$$T = 2360580.\ \textit{secondi}.$$

La distanza della luna dalla terra si ottiene dividendo il raggio del globo terrestre pel seno dell' angolo che gli astronomi chiamano pa-

ralasse orizzontale diurna (1). Questo seno era pure stato determinato con sufficiente precisione al tempo di Newton, che lo fece eguale ad $\frac{1}{60}$. Non era così del raggio terrestre, e Newton avendo nel 1666 impiegato pel suo calcolo un valore del raggio terrestre troppo piccolo, trovò per $t\,l$ una quantità, che era minore di circa $\frac{1}{6}$ del vero. Fortunatamente però alcuni anni dopo, nel 1682, Piccard avendo eseguito in Francia delle operazioni geodetiche, per le quali le dimensioni della terra furono determinate con più precisione, Newton ripetè il suo calcolo ed ebbe la soddisfazione di vedere completamente confermata la sua supposizione.

Secondo le misure di Piccard Newton assunse il valore della circonferenza della terra eguale a 123249600 piedi francesi, e perciò facendo uso del valore del seno della paralasse surriferito, fece quella della luna

$$2\,\pi.\ C\,L = 123249600 \times 60$$

Sostituendo questi valori nella formola precedente si trova

$$t\,l = 0^{\text{lin}}.\ 60036$$

per lo spazio di cui la luna s' abbassa verso la terra in un secondo di tempo.

Paragoniamo questo spazio con quello dal quale cadrebbe nello stesso tempo un grave trasportato alla distanza della luna, nell' ipotesi che la gravità decresca in ragione del quadrato della distanza. In questa ipotesi, se si chiama g la gravità sulla superficie della terra, g' quella alla distanza della luna, e si dinota con $C\,M$ il raggio terrestre, dovrà essere

$$\frac{1}{\overline{C\,M}^2} : \frac{1}{\overline{C\,L}^2} :: g : g';$$

e quindi

$$g' = g.\frac{\overline{C\,M}^2}{\overline{C\,L}^2} = g.\left(\frac{1}{60}\right)^2,$$

impiegando pel rapporto $\frac{C\,M}{C\,L}$ il seno della paralasse orizzontale lunare dato sopra.

Il valore della gravità g è espresso per mezzo della lunghezza del pendolo che batte la sua oscillazione nell' unità di tempo, dalla formola (5) data nella lezione IV, che è

(1) Vedasi la nota 1.

$$g = \pi^2 \, l.$$

Newton valendosi delle esperienze di Huyghens adottò per lunghezza del pendolo in Parigi $l = 440^{\text{lin}},5$, sarà dunque

$$g' = \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 440^{\text{lin}},5,$$

ed effettuando il calcolo col noto valore di $\pi = 3,14159$ si trova

$$g' = 1,20765 :$$

lo spazio dal quale cade un corpo, in un secondo, dovendo essere la metà di g', si avrà in linee il numero $0^{\text{lin}},60382$ per rappresentare la discesa verso la terra, in un secondo di tempo, di un corpo trasportato alla distanza della luna e soggetto all' azione della gravità decrescente come i quadrati della distanza. Questa quantità differisce così poco da quella che abbiamo trovato sopra pel valore di $t\,l$, cioè da quella di cui realmente cade la luna, che dobbiamo conchiudere che effettivamente la forza centripeta che ritiene la luna nella sua orbita, è la stessa forza di gravità.

La piccola differenza fra i numeri trovati deve attribuirsi in gran parte all' aver trascurato la differenza d' azione del sole sulla terra e sulla luna, la massa della luna rispettivamente a quella della terra, l' effetto della forza centrifuga sulla gravità terrestre, ed all' aver impiegato il valore che ha la gravità in Parigi, il quale non corrisponde al valor medio dell' intera massa della terra. Ma l' influenza di tutti questi elementi trascurati è assai piccola sulla quantità determinata.

3. Confermato dal successo di questo passo importante nella giustezza del suo pensamento, era naturale che Newton cercasse di estendere le sue conclusioni, e di provare ciò, che già aveva presentito, che cioè la stessa forza di gravità residente nel sole fosse la forza centripeta che governa le rivoluzioni dei pianeti. Fu in questa indagine che le leggi di Keplero somministrarono a Newton il più solido appoggio della verità della supposizione da cui era partito. La serie delle proposizioni per le quali Newton nell' immortale opera de' suoi *Principii matematici* ec. ha dato la dimostrazione delle varie proprietà del movimento dei corpi attratti, è un modello da studiarsi da quelli che amano esercitarsi nella sintesi matematica, ma essa è troppo lunga per trovar posto in questa succinta esposizione. Noi vi suppliremo in parte nelle note, e ci limiteremo nel testo ad accennare la corrispondenza dei risultamenti di Newton colle leggi trovate da Keplero.

La prima proprietà che Newton dimostrò nel suo libro (1) si è che se un corpo s'aggira intorno ad un punto immobile ed anche dotato di un movimento uniforme e rettilineo, e che il movimento del corpo sia tale, che il suo raggio vettore descriva intorno a quel punto delle aree proporzionali al tempo, la forza centripeta non può essere che diretta verso questo punto. Le aree che i pianeti descrivono intorno al sole essendo per la seconda legge di Keplero proporzionali al tempo, ne segue che la forza centripeta che regola i loro movimenti risiede effettivamente nel sole. Vedi nota 2.

Newton passò in seguito ad investigare il carattere della forza considerando la specie della curva descritta dai pianeti, e dimostrò che se la curva percorsa da un corpo è un'elisse, in un fuoco della quale risieda la forza centripeta, è necessario che la forza operi in ragione inversa del quadrato della distanza (2). Le orbite dei pianeti essendo elittiche come Keplero lo annunziò colla prima delle sue leggi, e la forza risedendo nel sole, ne segue che l'attrazione del sole sopra ciascun pianeta dee decrescere come il quadrato della distanza, esattamente come abbiamo visto che la gravità terrestre decresce alla distanza della luna. Vedi nota 3.

La terza legge di Keplero che anteriormente aveva guidato Newton alla congettura, che il decrescimento della forza d'attrazione fosse nella ragione inversa dei quadrati della distanza (Vedasi la nota 5) gli servì di poi a provare che l'attrazione del sole è unica, ed opera indistintamente su tutti i pianeti, cioè che le molecole *di* *uali masse* di tutti i pianeti posti alla stessa distanza dal sole sarebbero egualmente attratte, e che l'attrazione del sole è soltanto diminuita da un pianeta più vicino ed un più lontano nella ragione inversa del quadrato delle loro distanze rispettive. Questa proposizione segue da ciò, che Newton ha dimostrato (3) che la forza d'attrazione farebbe descrivere ad uno stesso corpo posto a differenti distanze medie delle orbite elittiche in cui i tempi periodici starebbero nella ragione delle radici quadrate dei cubi delle distanze medie o semi-assi maggiori, come Keplero aveva trovato succedere rispetto ai pianeti. Vedasi la nota 4.

Le conclusioni che Newton dedusse dal movimento dei pianeti intorno al sole, le estese pure al movimento dei satelliti di Giove e di Saturno intorno al pianeta principale. Notò che mentre i sa-

(1) Philosoph. nat. princ. math. Liber primus. Sectio II. Propos. II.
(2) Philosoph. nat. princ. math. Liber primus. Sectio III. Propos. XI.
(3) Philosoph. nat. princ. math. Liber primus. Sectio III. Propos. XV.

telliti, come pure la nostra Luna, pesano verso il rispettivo pianeta, lo attraggono reciprocamente in proporzione delle loro masse, e che tanto quelli come questi vanno soggetti all'attrazione del sole, che prova un'attrazione reciproca dal canto loro; e ~~considerando~~ *facendo* tutte queste attrazioni reciproche fra i diversi corpi del sistema solare, sempre proporzionali alle masse e nella ragione inversa del quadrato delle distanze, conchiuse, che l'attrazione era una proprietà generale della materia, e salì al principio che *ogni molecola di materia attrae tutte le altre in ragione della sua massa e reciprocamente al quadrato della distanza dalla molecola attratta.*

4. Giunto a questo principio non fu difficile al genio penetrante di Newton il prevedere le importanti conseguenze che si potevano da esso dedurre relativamente ai fenomeni dell'universo. Così Newton cominciò la deduzione di queste conseguenze in varie parti dell'immortale opera *Philosophiae naturalis principia mathematica*, deduzione che fu poi compita dai lavori dei Bernoulli, d'Eulero, di Maclaurin, di d'Alembert, di Clairaut, di Lagrange, di Laplace, di Plana, di Poisson, di Airy ed altri matematici. È degno di ammirazione il vedere come fenomeni in apparenza tanto differenti come sono il corso dei pianeti, quello delle comete, le loro perturbazioni, la loro figura, il flusso e riflusso del mare, il cambiamento di peso a diverse latitudini terrestri, la precessione degli equinozii, la nutazione dell'asse terrestre, ed altri, vennero tutti ad essere altrettante conseguenze dello stesso principio, la gravitazione universale.

5. La gravitazione universale non è limitata ai soli corpi del sistema solare pei quali è completamente provata, ma pare estendersi anche agli altri corpi celesti, i di cui movimenti essendo stati per la loro lentezza impercettibili agli antichi, furono chiamati *stelle fisse*. Le stelle come altrettanti soli splendono di luce propria, e probabilmente hanno intorno a sè un corredo di pianeti come quello del nostro sole, ma la grande lontananza a cui sono poste da noi fa sì, che i loro pianeti ci sono invisibili e che esse non appajono che come punti luminosi, quantunque si possa con certezza asserire che alcune di esse hanno un volume e splendore superiori a quelli del sole. Per farci un'idea della distanza che le separa da noi, basti il dire che la luce, la quale percorre 310 milioni di metri in un secondo, non potrebbe impiegare meno di tre anni per giungere sulla terra dalla stella più vicina.

S'incontrano nel cielo delle stelle che pajono semplici quando sono guardate ad occhio nudo, ma che si risolvono, e si trovano composte di due o più stelle, quando sono contemplate at-

traverso un buon telescopio, e che perciò stelle *doppie* o *multiple* sono dette. Onde quest' apparente coincidenza di due stelle succedesse, basterebbe che esse fossero situate prossimamente lungo uno stesso raggio visuale, ma una potrebbe essere molto più discosta da noi dell' altra. Tale però non è il caso per una gran parte di esse; e le due stelle sono effettivamente anche vicine fra loro, come lo provò Sir W. Herschel. Questo distinto astronomo avendo preso ad osservare ad epoche distanti fra loro parecchie coppie di queste stelle doppie, trovò che la posizione relativa delle due stelle, in molte di tali coppie andava cambiando collo scorrere degli anni, talchè una stella veniva ad aggirarsi intorno all' altra, o per dir meglio, le due s' aggiravano intorno al loro centro comune di gravità. Sir J. Herschel, il figlio, il Sig. Struve, Sir J. South hanno verificato questi movimenti relativi su di un gran numero di stelle doppie, e multiple. Queste stelle sono dunque realmente vicine fra loro, spiegano una attrazione reciproca l' una sull' altra; ed i calcoli istituiti da Savary, da Sir J. Herschel, dal Sig. Enke s' uniscono a provare che i loro movimenti s' accordano con quelli che dovrebbero risultare, se obbedissero all' attrazione newtoniana.

6. Se fra tutte le stelle esiste un' attrazione simile, come l' analogia ci porta a credere, le stelle non possono a meno d' essere tutte in movimento, e nasce tosto il pensiero di conoscere come i loro movimenti possono essere coordinati, onde l' attrazione che tende a farle concorrere tutte verso il loro centro comune di gravità, non finisca coll' occasionare spessi urti fra loro a concentrarle in questo punto. Una tale concentrazione di tutti i corpi celesti in un sol luogo, che distruggerebbe l' universo, sarebbe contraria all' ordine della creazione, nel quale tutto si ripete con una successiva alternazione di cose. Nel discorso, letto per servire d' apertura ai corsi di questa Università nel passato anno scolastico (1), sono andato esponendo la conformazione che pare avere il sistema stellare di cui il nostro sole fa parte, in virtù della quale il carattere di una indefinita conservazione gli si riconosce chiaramente impresso.

Le scoperte dell' astronomia moderna ci conducono a credere che le stelle sono distribuite nel cielo per gruppi, che possono considerarsi formare tanti sistemi a parte, ciascuno dei quali consta di un numero grandissimo di stelle. Questi sistemi separati gli uni da-

(1) Sulla costituzione del sistema stellare di cui fa parte il sole. Discorso pronunziato il 1.° di Ottobre all' apertura dell' anno scolastico 1839-40 nell' Università Jonia. Corfù, Tipografia del Governo 1840. Vedasi anche il tomo 97 della Biblioteca Italiana.

gli altri da immensi intervalli sono così distanti da noi, che i loro ammassi di stelle ci si presentano sotto la forma di una nebbia, per cui gli astronomi gli hanno indicati col nome di nebulose. La nebulosa in cui sembra essere situato il nostro sole è la *Via Lattea*. L'apparenza della Via Lattea, che è quella di una fascia luminosa che abbraccia il cielo, fu attribuita da W. Herschel all' esser le stelle di questa nebulosa distribuite in uno strato piano, il di cui spessore è tenue in confronto della sua lunghezza e larghezza. Il sole, non che la nostra terra, trovandosi in questo strato, se da essa si dirige lo sguardo perpendicolarmente o poco obliquamente ad esso, le stelle si devono vedere in queste direzioni più rare, e per essere meno lontane devono apparire anche quasi tutte brillanti; ma di mano in mano che il raggio visuale va accostandosi alla direzione del piano della nebulosa, le stelle più lontane aumentano prodigiosamente, e quando lo sguardo è diretto lungo lo stesso piano, l' immenso numero di stelle lontanissime deve presentare l' apparenza di una nebbia luminosa e che si projetta sulla volta celeste nella forma di una fascia circolare. Questa struttura della Via Lattea, che bene ne spiega le apparenze, sarebbe poco atta a soddisfare alle condizioni di una lunga conservazione secondo le leggi meccaniche, se Sir J. Herschel, trovandosi al Capo di Buona Speranza, non avesse fatto una riflessione importante che la completa. Egli notò che nelle vicinanze della costellazione australe della Croce, la Via Lattea presenta un' illuminazione più viva prodotta da stelle, delle quali una moltitudine è visibile ad occhio nudo, che questa illuminazione va successivamente scemando di mano in mano che andiamo scostandoci da questo luogo verso la parte opposta di quella fascia luminosa, talchè finisce in una debole luce vaporosa senza più alcuna traccia di stelle. Di qui conchiuse che la metà australe della Via Lattea è sensibilmente più vicina al nostro sistema solare che non l' altra metà boreale, od in altri termini, che essa non è solamente uno strato, ma un anello di stelle, nel quale il sole è situato eccentricamente, essendo più vicino alla costellazione della Croce, che non al punto diametralmente opposto.

7. La configurazione della Via Lattea, ridotta con questa modificazione alla forma di un anello piano, si presta bene alle condizioni di costituire un sistema inalterabile di stelle, come vado a spiegare. Dalle teorie sull' attrazione dei corpi di diversa figura, che Laplace, ed il Commendatore Plana hanno dato, risulta che presentando interiormente od esteriormente ad un anello piano un corpo, questo è attratto nella parte più prossima verso un punto si-

tuato circa il mezzo della larghezza dell' anello. Se, considerando la risultante delle innumerabili attrazioni delle stelle distribuite nello spazio anulare della Via Lattea, la paragoniamo a quella di un anello continuo, ne segue, che una stella posta nel contorno interno della Via Lattea tenderà a penetrare nello spazio anulare adiacente, circa il cui mezzo troverebbe il suo equilibrio. Giungendo però a questo punto di mezzo con una velocità concepita nel cadervi, non vi si arresterà, ma progredirà per la sua inerzia in virtù di detta celerità verso il contorno esterno. Tosto che la velocità sarà estinta nella stella, per l' azione opposta dell' attrazione che continuamente la richiama indietro, essa ritorcerà cammino, ripasserà un' altra volta pel mezzo dello spazio anulare, dotata ancora di una velocità, e procederà quindi verso il contorno interno, al luogo da dove era partita prima. Qui restituita, si troverà in procinto di ripetere un altro *va* e *vieni*, poi un terzo, e così andrà successivamente oscillando fra l' una e l' altra estremità della larghezza della striscia piana e circolare che figura lo spazio anulare. Supponiamo ora impressa a questa stella anche una velocità di projezione, secondo la tangente al punto della curva del contorno interno da cui essa parte, e componiamo il movimento impresso con quello precedentemente descritto. Dai principii della meccanica traspare, che la velocità impressa di projezione potrà essere tale, che la stella percorra a più riprese l' intero giro dello spazio anulare (fig. 9) trasportandosi nel suo corso ora verso il contorno esterno, ora verso l'interno, descrivendo così una linea serpeggiante ed avvolta in un numero indefinito di circonvoluzioni tutte comprese in quello spazio. Quello che di una stella vien detto, similmente applicabile si scorge a ciascuna di esse, anche quando in un dato spazio anulare fossero tutte con certe velocità in movimento. Le innumerabili stelle della Via Lattea potranno dunque formare un sistema inalterabile, circolando in uno spazio anulare, fig. 10, dal quale non usciranno mai, ma al cui contorno interno od esterno anderanno, mentre procedono, alternativamente accostandosi.

8. Che tale possa essere il movimento del sole accompagnato dal seguito de' suoi pianeti ce lo conferma l'interessante risultamento intorno alla direzione del moto di questo luminare che W. Herschel ha ottenuto il primo, e che il Sig. Argelander ha compiutamente confermato in questi ultimi anni. Secondo questi astronomi, il movimento del sistema solare si dirige verso un punto della costellazione dell' Ercole vicino alla stella in essa indicata colla lettera λ. La Via Lattea presentando l' aspetto d' una fascia che avvolge il cielo

dimostra che noi la guardiamo dal suo interno e che il sole si trova presentemente verso il confine interiore dell' anello, giusto nell' atto che va a cessare di procedere verso esso, o sta per retrocederne. Il sole, deve quindi in questa flessione del suo cammino avere una direzione di movimento prossimo a quella della tangente alla curva, che limita interiormente lo spazio anulare in questo punto. Ora, con mirabile coincidenza, se dalla costellazione della Croce, fig. 10, in *S* si tira una tangente *S T* al circolo della Via Lattea, un poco elevata verso l' emisfero boreale, si trova che essa vicino al punto indicato della costellazione dell' Ercole va a passare. Il sistema solare gira dunque nella Via Lattea intorno al centro di gravità di questa congerie di stelle; e con un' analogia che non va negletto di notare, procede intorno a questo centro da occidente in oriente, appunto nella direzione in cui tutti i corpi di questo sistema s' aggirano, i minori intorno ai maggiori. Si possono vedere nel discorso citato alcune difficoltà sciolte, altri argomenti prodotti che concorrono ad accrescere la probabilità che il sistema stellare di cui il sole fa parte abbia la configurazione ed i movimenti che abbiamo descritto.

9. Quantunque per semplicità del discorso si sia sempre parlato di un anello piano, chiaro si fa che le apparenze esigono che non sia un piano perfetto. La Via Lattea presenta ne' suoi contorni apparenti molte sinuosità, e si divide in due rami nella costellazione del Cigno che si conservano quasi paralleli fra loro per un arco di più di 70 gradi, e poi si riuniscono alla coda dello Scorpione. Queste irregolarità devono perturbare i movimenti delle stelle, ma non possono influire a segno di discostarli grandemente da quelli che abbiamo descritti. Anche considerato l' anello in complesso come di forma regolare, non deve essere supposto perfettamente piano, ma sibbene colle parti opposte della sua superficie leggiermente inclinate verso il mezzo, quale risulterebbe dalle sezioni di un cono assai ottuso fatte da due piani vicini fra loro e paralleli alla base. In questo modo trovandosi la terra situata nelle vicinanze del contorno interno dell' anello, circa alla metà del suo spessore vedrà dal lato della costellazione della Croce la Via Lattea della grandezza dell' angolo che può sottendere la grossezza dello strato anulare alla distanza in cui le stelle per la loro moltitudine già possono offrire l' apparenza di una nebulosità; mentre dal lato diametralmente opposto verso la costellazione di Cassiopea, oltre allo spessore potrà anche scoprire, assai obliquamente, la faccia interna dell' anello, e cosi la fascia luminosa che rappre-

senta la Via Lattea potrà apparire in tutto il suo giro circa della stessa larghezza, senza di che dovrebbe per la maggiore distanza sembrare più stretta nelle parti opposte del cielo verso la costellazione di Cassiopea, ciò che non sarebbe conforme a quel che si vede.

Per riassumere con un' immagine l' esposto, presentatevi alla mente nell' immensità dello spazio una riunione d' innumerabili stelle, tutte disposte in modo da configurare prossimamente un anello piano d' enormi dimensioni, e tutte moventisi in esso con periodi che solo le miriadi dei secoli possono misurare: seguendole nei loro lunghi e lenti corsi, figuratevele accostarsi promiscuamente sì ma alternativamente ora all' uno ora all' altro dei contorni dell' anello, ed avrete un' idea del sistema stellare, in cui siamo situati, quale l' ho concepito, e quale ho inteso di spiegare nel citato discorso.

ELEMENTI DI STATICA

LEZIONE VII.

Dell' equilibrio di un punto.

1. Nella seconda lezione sulla teorica generale del movimento abbiamo esposto come i movimenti possano comporsi e scomporsi, cioè quale è il movimento che un corpo compie quando è animato da più movimenti alla volta, e viceversa come il movimento che un corpo eseguisce può essere considerato come l' effetto di più movimenti simultanei. Quando più forze agiscono contemporaneamente sopra un corpo, o su più corpi collegati insieme, e si trovano combinate in modo che i movimenti ch'esse tendono ad imprimere si distruggano vicendevolmente, allora si dice che il corpo, od i corpi sono in *equilibrio*, e la scienza che considera le condizioni in cui l' equilibrio può sussistere dicesi *Statica*. Questa scienza è specialmente utile per intendere l' effetto delle macchine, e per aprire il cammino alla determinazione delle circostanze che accompagnano il movimento di un sistema di corpi, e quindi forma uno dei rami più importanti della Fisica meccanica.

Per esporre le prime nozioni sui principii che regolano l' equilibrio di un corpo, considerato come un punto, è convenevole di rappresentare le forze con delle linee. Nel numero 11 della prima lezione sulla teorica del movimento abbiamo visto, che una forza motrice applicata ad un corpo, si misura col prodotto della massa del corpo per la velocità che esso acquisterebbe in virtù dell'azione che la forza spiega nell' istante, continuata in un modo costante ed uniforme nell'unità di tempo. Quando più forze agiscono nello stesso istante sopra un medesimo corpo, la massa del corpo divenendo un fattor comune, le forze vengono ad essere soltanto proporzionali alle rispettive velocità che esse imprimerebbero nell' unità di tempo, ossia alle loro corrispondenti forze acceleratrici. Le linee proporzionali alle forze, applicate nelle direzioni di queste intorno al punto che tien luogo del corpo dovranno dunque essere considerate, nelle costruzioni che ci occorrerà di fare, come rappresentanti le forze acceleratrici colle quali le forze rispettive animerebbero il corpo.

2. Ciò posto cominciamo a considerare l' equilibrio nel caso più

semplice, in cui le forze che operano sul punto sono soltanto due. In questo caso è evidente che il punto M, fig. 26, non può restare in equilibrio a meno che i movimenti per $M\,P$ e per $M\,Q$ che esse imprimerebbero siano eguali ed opposti. Ma se i movimenti sono eguali, anche le forze che li generano debbono essere eguali, dunque bisogna che le forze siano uguali ed in direzione contraria.

Se le forze non sono eguali nè direttamente opposte, l'equilibrio non può aver luogo. Infatti abbiamo visto nel numero 3 della seconda lezione che un corpo animato da due forze acceleratrici, rappresentate dai lati $A\,B$, $A\,C$ di un parallelogrammo $A\,B\,D\,C$ fig. 27 procederebbe con un movimento come che fosse animato da una forza acceleratrice unica, rappresentata dalla diagonale $A\,D$. Il corpo non potrà dunque restare in equilibrio a meno che nel prolungamento di $A\,D$ non sia applicata una terza forza $A\,E$, capace di produrre un movimento quale sarebbe generato da una forza acceleratrice eguale e contraria a quella rappresentata da $A\,D$.

Da questa considerazione ne segue dunque che onde un punto rimanga in equilibrio sotto l'azione di tre forze è necessario che la terza forza sia nel piano delle due prime eguale in intensità, e contraria in direzione alla *risultante* di quelle, la quale è rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo, i di cui lati rappresentano in grandezza e direzione le due *componenti*. Vedi le note (1) (2) (3).

3. Estendiamo ora il problema al caso generale, e consideriamo l'equilibrio di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto. Il processo che dobbiamo seguire per risolverlo è assai ovvio: basta cominciare a cercare la risultante delle due prime forze, poi comporre questa risultante colla terza forza, poi la risultante di queste colla quarta forza, e così successivamente per tutte le forze eccetto l'ultima: e la condizione dell'equilibrio sarà che l'ultima risultante sia eguale ed opposta alla forza rimasta. Eseguendo questa costruzione in un modo analogo a quello che abbiamo seguito nel ~~numero~~ articolo della lezione II si troverà che il punto resterà in equilibrio quando, partendo da esso e costruendo un poligono i cui lati siano successivamente eguali e paralleli a ciascuna delle forze, e diretti nello stesso modo, questo poligono venga a chiudersi da se stesso, cioè quando l'estremità del lato che corrisponde all'ultima forza venga a cadere nel punto di riunione di tutte le forze, da cui siamo partiti. Siano per esempio (fig. 28) OP, OQ, OR, OS, OT tante forze che agiscono sul punto O. Le forze OP, OQ daranno la risultante Oq, questa colla OR darà la risultante Or, e questa colla OS la risultante Os, ed affinchè il punto rimanga in equi-

librio, quest'ultima risultante dovrà essere eguale e contraria in direzione alla forza OT con che verranno a distruggersi vicendevolmente. Considerando poi i lati OP, Pq, qr, rs del poligono $OPqrst$ si vede che essi sono per costruzione rispettivamente eguali e paralleli alle forze OP, OQ, OR, OS, e che l' ultimo lato o risultante sO, che chiude il poligono è per la condizione suddetta d' equilibrio eguale alla forza OT e nella direzione opposta a quella della stessa forza. Si osserverà che non è necessario che le forze OP, OQ, OR, OS, OT siano nello stesso piano, onde la detta condizione per l' equilibrio sia verificata.

4. Si chiama *projezione* di una retta sopra di un' altra la parte compresa su questa seconda retta dalle due perpendicolari abbassate dalle estremità della prima retta sulla seconda. Nelle figure 29, e 30, cd e Cd rappresentano le projezioni della retta CD sulla AB, ed è facile di dimostrare che le projezioni di rette eguali e parallele, sopra una stessa retta, sono tutte eguali fra loro.

Le rette rappresentanti un sistema di forze che si fanno equilibrio intorno ad un punto dovendo, per ciò che abbiamo dimostrato, essere tali da poter formare il perimetro di un poligono chiuso, è evidente che la somma delle projezioni di tutte queste rette o lati presi positivamente quando sono dirette secondo un verso, e negativamente quando lo sono nel verso opposto, sopra una retta tirata in una direzione qualunque, deve sempre, onde il poligono sia chiuso, essere eguale a zero. Così condotta una retta qualunque OX, fig. 31, le projezioni Op_1, p_1q_1, q_1r_1, delle rette Op, pq, qr, che corrispondono alle forze dirette secondo un verso, sono pareggiate dalle projezioni r_1s_1, s_1O delle rette sr, sO che corrispondono alle forze dirette nel verso opposto, e la somma

$$Op_1, + p_1q_1, + q_1r_1, - s_1r_1, - s_1O$$

di tutte queste projezioni, procedenti nei due versi opposti è nulla, quando il poligono è chiuso.

Ma per esser le projezioni di rette eguali e parallele sempre rispettivamente eguali fra loro; si ha nella, fig. 31,

$$p_1q_1, = Oq', q_1r_1, = Or', - r_1s_1, = Os', - s_1O = Ot'$$

la condizione precedente si riduce dunque a

$$(1) \qquad Op' + Oq' + Or' + Os' + Ot' = 0$$

prendendo positive le projezioni delle forze dirette da O verso X, e negative quelle da X verso O, cioè verso la parte opposta.

Ciò posto supponiamo d'imprimere al punto O già in equilibrio una velocità in una direzione qualunque capace di trasportarlo, per esempio, nell' unità di tempo da O in V fig. 32. Se dall' estremità di una delle forze, quella OP, per esempio abbassiamo una perpendicolare sopra OV, e dalla estremità V una perpendicolare sulla direzione della forza OP, i due triangoli simili che ne risultano siccome rettangoli ed aventi l' angolo comune in O, danno la proporzione

$$OV : OP :: O\overline{p} : Op'$$

dalle quali si ricava pel valore della projezione, Op', della forza OP sulla retta OX l' espressione

$$Op' = \frac{OP \,.\, O\overline{p}}{OV}$$

ripetendo questa costruzione per ciascuna forza, si avrà

$$Oq' = \frac{OQ \,.\, O\overline{q}}{OV},\ Or' = \frac{OR \,.\, O\overline{r}}{OV},\ Os' = \frac{OS \,.\, O\overline{s}}{OV},\ Ot' = \frac{OT \,.\, O\overline{t}}{OV}$$

Ma per l' equazione (1) data precedentemente le projezioni, Op', Oq', Or', Os', Ot', devono fare una somma eguale a zero, dunque sommando tutti i secondi membri delle precedenti equazioni, e togliendo il divisore comune OV, si avrà

$$(2)\quad OP \times O\overline{p} + OQ \times O\overline{q} + OR \,.\, O\overline{r} + OS \times O\overline{s} + OT \times O\overline{t} = o.$$

Quest' equazione ci dice che *se più forze sono in equilibrio intorno ad un punto, e si suppone d' imprimere a questo punto una velocità in una direzione qualunque, la somma dei prodotti di ciascuna forza per la velocità projettata nella direzione della forza è una somma nulla*, intendendo che le velocità projettate debbano essere prese come negative quando cadono dal lato opposto della direzione della forza respettiva.

Secondo una denominazione introdotta dal Galileo, il prodotto della forza per la velocità projettata chiamasi *momento;* ed il momento si considera come negativo quando le direzioni delle velocità projettate e delle forze corrispondenti sono opposte. Così la proposizione precedente si riduce a dire, che la somma dei momenti, positivi e negativi, di tutte le forze agenti intorno ad un punto, deve essere nulla se vi è equilibrio. Questo è il caso più semplice del celebre *principio*, chiamato, *delle velocità virtuali.*

È da notarsi che l' equazione precedente non contiene propriamente che i rapporti delle velocità projettate, perchè potrebbe tutta

dividersi per una di queste velocità, e che per conseguenza é indipendente dalla grandezza assoluta della velocità che si suppone impressa al punto. Questa velocità potrà concepirsi tanto piccola, quanto si vuole, od esistere per un tempo tanto breve, quanto si vuole, talchè sia, per così dire, una velocità nel suo nascere, e l'equazione si verificherà sempre nello stesso modo. È sotto questo punto di vista che i primi geometri hanno considerato la velocità impressa, ciò che le ha fatto dare il nome di velocità *virtuale*.

5. Se il punto non fosse interamente libero di muoversi in tutti i versi, ma fosse obbligato a scorrere sopra una superficie data, l'equazione delle velocità virtuali sussisterebbe ancora, purchè si supponesse di comunicare al punto una velocità in una direzione secondo la quale gli fosse realmente possibile di muoversi. Infatti la resistenza che oppone la superficie onde il corpo non penetri in essa deve essere considerata come una forza OF perpendicolare alla superficie, fig. 33, e come la velocità OV comunicata al corpo si suppone effettiva e per conseguenza diretta parallelamente ad una delle rette ts poste nel piano tangente al punto della superficie, la direzione di questa velocità sarà perpendicolare alla forza OF, e la sua projezione $O\bar{f}$ sulla direzione della stessa forza sarà nulla, quindi il momento $OF.\times O\bar{f}$ da aggiungersi all'equazione delle velocità virtuali, per tener conto di questa forza, risulterà parimenti nullo.

LEZIONE VIII.

Dell'equazione delle velocità virtuali, delle macchine semplici, e del principio della leva.

1. L'equazione delle velocità virtuali che abbiamo trovato rispetto all' equilibrio di più forze applicate ad un punto, si estende anche all' equilibrio di più forze applicate a punti differenti, che non abbiano la libertà di muoversi gli uni indipendentemente dagli altri, o come si dice, applicate ad un sistema di punti. Fu coll'esame delle condizioni d'equilibrio delle macchine semplici, che Galileo, Descartes ed in seguito altri, riconobbero che le relazioni fra le forze e le velocità projettate erano sempre rette da un sol principio in tutte le macchine, e questo principio esteso poi da Giovanni Bernoulli ad un sistema qualunque, ha preso il nome di *principio delle velocità virtuali*, il più universale che si sia scoperto per tradurre in equazioni le condizioni dell' equilibrio di un sistema. Come la dimostrazione diretta di un tal principio nel caso generale è un pò troppo astratta per chi comincia questi studii, seguiremo un cammino analogo a quello delle scoperte. Applicheremo cioè dapprima il principio alle macchine semplici, verificandone la giustezza per mezzo di dimostrazioni dedotte da altri principii, e poi esporremo una dimostrazione di esso pel caso generale di un sistema qualunque alla fine in una nota. Questo procedere avrà il vantaggio di fornirci l' occasione di far conoscere e spiegare alcuni dei principii più importanti che sono stati impiegati nella statica, e di darci nello stesso tempo un' idea chiara dell' uso del principio delle velocità virtuali.

2. « Le macchine sono in generale dei congegni, che stabiliscono « certi rapporti di grandezza e di direzione fra le velocità con cui « possono muoversi i diversi punti ai quali sono applicate le forze. » Nell' equilibrio delle macchine si considerano più comunemente soltanto due forze, una che si chiama la *potenza*, che si riguarda come quella che ha il potere di equivalere all'effetto, che si vuol distruggere, di un' altra forza opposta, la quale, viceversa resistendo allo sforzo della prima, si dice la *resistenza*. Volendo applicare il principio delle velocità virtuali alle macchine, bisogna immaginare impresso ai loro punti e quindi a quelli a cui sono applicate la potenza e la resistenza uno di quei movimenti che Carnot ha chiamato *movimenti geometrici* (1). S' intende per movimento geometrico un movimento che

(1) Sulle proprietà geometriche del movimento di un sistema di forma

un sistema di corpi possa eseguire senza dar origine ad alcuna nuova azione reciproca degli uni sugli altri, cioè senza impacciarsi reciprocamente e nulla di meno senza separarsi. Se si concepisse che tutti i punti del sistema divenissero slegati, le velocità da cui essi dovrebbero essere animati per soddisfare ad un movimento geometrico sarebbero quelle con cui venissero a muoversi conservando un semplice contatto fra loro, senza tendenza a compenetrazione od a soluzione di continuità. Ciò posto se si indica con P la potenza, con R la resistenza e con p ed r i due termini che rappresentano il rapporto delle projezioni delle velocità nelle direzioni in cui rispettivamente si muoverebbero la potenza e la resistenza, imprimendo alla macchina un movimento geometrico, secondo il principio delle velocità virtuali, deve sussistere per ogni macchina l' equazione

$$(1) \qquad P\,p + R\,r = o$$

Da questa equazione si deduce

$$(1)' \qquad P\,p = -\,R\,r$$

la quale ci dice che in ogni macchina il momento della potenza deve sempre essere eguale e contrario al momento della resistenza.

Applicheremo quest' equazione alle condizioni dell' equilibrio delle macchine semplici, e per provare la sua esattezza mostreremo l' accordo de' suoi risultati con quelli dedotti da altri principii che saranno dimostrati.

3. Le macchine semplici sono comunemente annoverate in numero di sei

La leva
Il verricello, o asse nella ruota
La puleggia
Il piano inclinato
Il cuneo
La vite:

ma esse si riducono propriamente a tre sole; alla leva che abbraccia il verricello, alla puleggia, ed al piano inclinato che comprende il cuneo e la vite.

Dell' equilibrio della leva.

4. La leva consta di un sistema di due forze applicate in un piano a due punti di una spranga rigida sostenuta da un asse o punto fisso che si chiama il *fulcro* intorno al quale la spranga può girare. nel piano delle forze.

invariabile esiste un' interessante Memoria del Cav. G. Giorgini nel vol. XXI, parte matematica, delle Memorie della Società Italiana.

Consideriamo dapprima il caso in cui la spranga è diritta e le forze P ed R che agiscono all' estremità di essa vi sono applicate ad angolo retto, fig. 11. Per dedurre dall' equazione generale (1) le condizioni dell' equilibrio di questa macchina, osserveremo che essa verrebbe a concepire un movimento geometrico, senza contrasto o separazione di parti, se s' imprimessero dei movimenti di rotazione a tutti i suoi punti che facessero loro percorrere degli archi proporzionali alle loro rispettive distanze del fulcro. Se dunque, chiamando a la distanza $S\,A$ del fulcro S al punto A dove sta applicata la potenza P, e b la distanza $S\,B$ del punto B a cui è applicata la resistenza R si suppone d' imprimere al punto A una velocità $p = a\,v$ ed al punto B una velocità $r = -b\,v$, le velocità p ed r saranno corrispondenti ad un movimento geometrico, e considerando la velocità di rotazione v soltanto nel primo istante, quelle velocità saranno nelle direzioni delle forze e quindi eguali alle loro projezioni, ma una sarà in direzione opposta a quella della propria forza e va valutata negativamente, quindi colla sostituzione dei loro valori nell' equazione (1), divisa per v, otterremo

$$P\,a - R\,b = o$$

o sia

$$P\,a = R\,b$$

Si chiamano bracci di leva le distanze $S\,A = a$, $S\,B = b$ dei punti d' applicazione delle forze dal fulcro, ed i prodotti $P\,a$ ed $R\,b$, si chiamano i *momenti di rotazione* delle forze P ed R; la precedente equazione ci dice dunque che nella leva il momento di rotazione della potenza deve essere eguale al momento di rotazione della resistenza.

La precedente equazione si può anche convertire nella proporzione

$$P : R :: b : a$$

e sotto questo punto di vista, ci dice che nella leva, onde vi sia equilibrio, la potenza e la resistenza devono essere in ragione inversa dei loro bracci di leva.

5. Si distinguono tre generi di leva; quella in cui il fulcro è nel mezzo come nella fig. 11; quella in cui la resistenza è nel mezzo come nella fig. 12, e quella ove sta in mezzo la potenza fig. 13. L'equazione, o la proporzione precedente valgono in ogni caso. Nella leva di 1.° e 2.° genere una potenza P comunque piccola può equilibrare una resistenza R comunque grande, con che il braccio di leva della prima sia quanto occorre più grande di quello della se-

conda; nella leva di terzo genere la potenza deve necessariamente essere più grande della resistenza.

6. Se la leva non è diritta ma spezzata, fig. 14, e le forze $A\,P$ e $B\,R$ sono perpendicolari ai bracci di leva, è facile il vedere ripetendo l'applicazione fatta della formola (1), che sussisterà ancora la stessa equazione $P\,a = R\,b$, o la stessa proporzione $P : R :: b : a$, intendendo che a e b rappresentino sempre i bracci di leva $S\,A$ ed $S\,B$.

7. Quando la spranga non fosse diritta, e le forze fossero in un piano ma non perpendicolari alla leva, come nella fig. 15, si osserverà che le velocità impresse ai punti A e B d'applicazione delle forze, essendo proporzionali ad $S\,A$ ed $S\,B$, le loro projezioni sulle direzioni delle forze diminuiscono rispettivamente nella proporzione del cateto $S\,M$ all'ipotenusa $S\,A$, e del cateto $S\,N$ all'ipotenusa $S\,B$. Onde posto $S\,M = a'$ ed $S\,N = b'$, le velocità $a\,v$ e $-\,b\,v$ daranno le velocità projettate $p = a'\,v$ ed $r = -\,b'\,v$, e l'equazione generale (1), darà

$$P\,a' = R\,b'$$

o sia

$$P : R :: b' : a'$$

e si potrà ancora conservare per dinotare le condizioni dell'equilibrio della leva l'espressione che i momenti sono eguali, o la proporzione che la potenza e la resistenza sono in ragione inversa dei bracci di leva; intendendo generalmente per braccio di leva la perpendicolare abbassata dal fulcro sulla direzione della forza.

8. La proprietà dell'equilibrio della leva che, senza dimostrazione finora, abbiamo dedotta dall'equazione generale dell'equilibrio delle macchine è stata conosciuta sino dalla remota antichità, ed Archimede l'ha dimostrata partendo dal principio, per se evidente, che se si ha un'asta egualmente caricata di pesi in tutti i punti della sua lunghezza, questa è in equilibrio, se si sostiene pel suo punto di mezzo, e gravita su questo punto con tutto il suo peso. Posto questo principio, ecco la dimostrazione della proposizione enunciata sopra data da Archimede, e semplificata dal Galileo.

Supponiamo che la potenza e la resistenza siano rappresentate da pesi, e che i loro pesi congiunti equivalgano al peso del cilindro $C\,D$ fig. 16 doppio in lunghezza della spranga della leva $A\,B$. Immagininsi i bracci di leva $S\,A$, $S\,B$ prolungati sino in L ed M di modo che ciascuno venga ad essere eguale alla lun-

ghezza totale della leva, o alla metà del cilindro $C\,D$. Dai punti L ed M pendano due fili senza peso, che siano attaccati alle estremità C e D del cilindro, quest' asta sarà, secondo il principio premesso, in equilibrio intorno all' asse S, posto in mezzo, poichè infatti tutto essendo simmetrico intorno ad S, non v' è ragione che s' inclini più da una parte che dall' altra. Sia $C\,G$ la parte del cilindro che rappresenta in peso la potenza P, e $G\,D$ quella che rappresenta la resistenza R. Al punto G attacchiamo due fili $G\,N$ contigui, poi fingiamo che l' asta sia tagliata in G. L' equilibrio del sistema non sarà disturbato da queste operazioni o legami; che possiamo anche concepire fatti soltanto mentalmente. Attaccansi ora le parti $C\,G$, $G\,D$ pei loro punti di mezzo H e K con due fili verticali pendenti dai punti A e B della leva, senza che si sappia ancora se corrispondono all' estremità della leva assunta. Secondo il principio esposto, le parti $C\,G$, e $G\,D$ potranno essere sostenute in equilibrio da questi due ultimi fili indipendentemente dai fili laterali $L\,C$, $N\,G$ ed $N\,G$, $M\,D$, i quali ora si potranno immaginare rotti o tolti. Ma in questo stato dal punto A penderà giusta lo stesso principio, un peso eguale a $C\,G$, cioè alla potenza P, e dal punto B un peso eguale a $G\,D$ o alla resistenza R, e si avrà

$$S\,A = E\,H = \tfrac{1}{2}\,C\,D - \tfrac{1}{2}\,C\,G = \tfrac{1}{2}\,G\,D = \tfrac{1}{2}\,R$$
$$S\,B = E\,K = \tfrac{1}{2}\,C\,D - \tfrac{1}{2}\,G\,D = \tfrac{1}{2}\,G\,C = \tfrac{1}{2}\,P$$

dunque dinotando $S\,A$ con a ed $S\,B$ con b sarà

$$P : R :: S\,B : S\,A :: b : a$$

dunque i punti a cui bisogna sospendere la potenza P, e la resistenza R dovranno essere a distanze tali dal fulcro che si abbia

$$P\,a = R\,b$$

ciò che ci dà una dimostrazione dell' equazione e proporzione dedotta sopra dall' equazione generale (1).

9. Se la leva è angolare, fig. 14 possiamo primieramente osservare che una leva angolare $B\,S\,B'$ (fig. 17) di braccia eguali, alle cui estremità siano applicate perpendicolarmente due forze R ed R' eguali, è in equilibrio per ragione di simetria, perchè non v' è ragione che giri piuttosto da una parte che da un' altra.

Siavi ora una seconda leva diritta (fig. 18,) che abbia un braccio $S\,B_{,}$ eguale a quelli della leva angolare precedente, ed alla sua estremità sia applicata pure perpendicolarmente una forza $R_{,}$

eguale alla R od R' che agiscano sulla leva (fig. 17). Onde vi sia equilibrio in questa seconda leva, la potenza P ed il suo braccio di leva $S\,A$ dovranno soddisfare alla proporzione

$$P : R, :: S\,B, : S\,A$$

Immaginiamo ora trasportato il fulcro S della leva angolare (fig. 17) sopra il fulcro S della leva retta (fig. 18) ed un braccio di quella leva esattamente soprapposto al braccio eguale della leva retta: avremo fig. 19 due leve in equilibrio ciascuna. Supponiamo che i due bracci sovrapposti siano uniti insieme, l'equilibrio continuerà a sussistere, ma le due forze eguali ed opposte R', $R_{,}$ applicate ai detti bracci si distruggono, bisognerà dunque che siano in equilibrio le forze P ed R applicate ai bracci della leva angolare $A\,S\,B$. Ora si ha $R_{,} = R$ ed $S\,B_{,} = S\,B$, dunque la proporzione precedente ci darà

$$P : R :: S\,B : S\,A :: b : a$$

come risulta dal principio delle velocità virtuali.

10. Consideriamo finalmente il caso in cui le forze benchè situate nello stesso piano sono però applicate obliquamente ai bracci di una leva qualunque (fig. 20). Abbassiamo dal fulcro S, due perpendicolari $S\,M$ $S\,N$ sulle direzioni delle forze, ed immaginiamo uniti alle estremità dei bracci di leva due fili rigidi $A\,M$ $B\,N$ della lunghezza delle rette che sono comprese rispettivamente sulle direzioni delle forze fra i punti d'applicazione A e B ed i piedi M ed N delle due dette perpendicolari. Alle estremità di ciascuno di questi fili $A\,M$, $B\,N$ supponiamo applicate, per infuori, due forze $A\,P_{,}$, $M\,P'$ e $B\,R_{,}$, $N\,R'$ contrarie ed eguali a quella operante sul rispettivo braccio di leva; ciascuna coppia di queste forze eguali ed opposte distruggendosi reciprocamente sullo stesso filo rigido, esse non potranno disturbare l'equilibrio della leva. Ma da un altro lato vediamo che sul braccio di leva $S\,A$ la potenza P sarà neutralizzata dalla forza contraria $A\,P_{,}$, supposta applicata al filo connesso, come pure la resistenza R sul braccio di leva $S\,B$ sarà neutralizzata dalla forza contraria $B\,R_{,}$, applicato al rispettivo filo. L'equilibrio dovrà dunque sussistere anche fra le forze $M\,P'$ $N\,R'$; applicate alle altre due estremità dei fili, le quali potranno considerarsi come due forze agenti perpendicolarmente sui bracci $S\,M$, $S\,N$ della leva angolare $M\,S\,N$. Saremo quindi nel caso precedente, e l'equilibrio sarà dato dalla proporzione

$$P : R :: SN : SM :: b' : a'$$

sempre concordi coi risultamenti dell' equazione (1).

Dell' equilibrio del verricello o asse nella ruota.

11. Sia ad un cilindro avvolta una corda da cui penda un peso, o una resistenza R (fig. 21), ed a questo cilindro, come asse, sia unita una ruota, ad un raggio della quale sia applicata una potenza P; questo sistema forma una macchina che si chiama un *verricello od asse nella ruota.*

Questa macchina è suscettibile di ricevere un movimento geometrico di rotazione imprimendo a tutti i suoi punti dei movimenti rotatori che facciano loro descrivere degli archi proporzionali alle loro distanze dall' asse; le velocità da comunicarsi alla potenza ed alla resistenza, per la verificazione dell'equazione (1), saranno dunque nella ragione del raggio della ruota a quello del cilindro. Così chiamando a il raggio della ruota, e b quello del cilindro, e supponendo espressa da v la velocità di rotazione alla distanza uno, si avrà $p = a\,v$ $r = -\,b\,v$, e quindi dall'equazione generale (1) si dedurrà

$$P\,a = R\,b$$

che dà

$$P : R :: b : a$$

cioè la potenza alla resistenza come il raggio del cilindro al raggio della ruota.

12. Per riconoscere l' esattezza di questo risultamento sia nella fig. 22 rappresentata la macchina di prospetto, e si congiunga il centro S colla potenza P e colla resistenza R per mezzo dei due raggi SA, SB; si vede che queste due forze formano una leva angolare su cui agiscono perpendicolarmente ai bracci di leva, e che perciò si deve avere

$$P : R :: SB : SA :: b : a$$

come abbiamo trovato prima.

Questa conclusione suppone che la resistenza sia applicata al cilindro nello stesso piano della ruota; ma è facile il persuadersi che le condizioni dell' equilibrio sono le stesse anche quando la potenza sta in un altro piano come nella figura 21, perchè non si hanno che ad immaginare sospesi nel piano della ruota due pesi R_1, R_2

eguali alla resistenza R, pendenti dai due lati del cilindro, per capire che la resistenza R e quella dei due pesi fittizii che pende dal lato opposto devono farsi equilibrio, ancorchè non siano nello stesso piano, e ciò per cagione di simetria, non essendovi ragione, se queste due forze fossero sole, che il cilindro girasse più tosto da una parte che dall' altra. L' altro peso che resta deve dunque poter equilibrare la potenza, e questo trovandosi nel piano della ruota, si trova nel caso che abbiamo contemplato sopra.

LEZIONE IX.

Dell' equilibrio delle puleggie, del piano inclinato, del cuneo e della vite.

Continueremo in questa lezione ad esporre le condizioni che si osservano nell' equilibrio delle altre macchine semplici che ci restano ad esaminare.

Delle puleggie.

1. La puleggia o carrucola, fig. 24, è una rotella $r\,r'$, girevole intorno ad un asse concentrico, C, sostenuto da un *bozzello*, $E\,D$, e la rotella ha una scannellatura nel suo contorno, che si chiama la *gola*, entro cui scorre una corda. Se il bozzello e l' asse sono fissi si dice che la puleggia è fissa, se sono mobili, la puleggia si dice mobile.

Una puleggia fissa è una macchina che non cambia la relazione fra la velocità della potenza e quella della resistenza, ma soltanto la direzione. Essa però è molto utile perchè si può impiegare a far, per esempio, che un peso tiri dal basso in alto, cioè in direzione opposta alla sua. Così nella fig. 23, il peso P per mezzo della puleggia fissa f, tira all' insù, e divien atto a produrre una tensione dal basso verso l' alto nel cordone $b\,a$.

In questa stessa figura m è una puleggia mobile le cui condizioni d' equilibrio andiamo a considerare. È facile il vedere che se si facesse ascendere o discendere la resistenza R, le due parti della corda che la sostengono s' accorcierebbero o s' allungherebbero assieme, e la potenza P ascenderebbe o discenderebbe per uno spazio doppio. Se dunque s' imprime alla potenza una velocità p, ed alla resistenza una velocità in verso contrario $r = -\frac{1}{2}p$, il movimento sarà geometrico, non produrrà reazioni di parti, e sostituendo questi valori nell' equazione generale (1), si avrà

$$P = \tfrac{1}{2}R$$

cioè la potenza è la metà della resistenza.

2. Un sistema di carrucole unite come nella fig. 34, o fig. 35, od in altro modo si chiama un *polispasto*, o *taglia*. È facile di riconoscere, con riflessioni analoghe alle precedenti che in queste macchine le velocità opposte da darsi alla potenza P ed alla resi-

stenza R, onde il movimento sia geometrico senza reazioni di parti, deve essere nella ragione del numero dei capi di corda che sostengono la resistenza all' unità, così chiamando n questo numero sarà $r = -\frac{1}{n}p$, e perciò l' equazione (1) darà

$$P = \frac{1}{n} R$$

3. La dimostrazione di quest' equazione per l' equilibrio di un polispasto s' appoggia sopra una verità tanto semplice che basta d' accennarla per intenderne l' applicazione. Infatti tutte le parti della corda dovendo essere egualmente tese nella loro lunghezza, la potenza P non produce, e perciò non eguaglia che la tensione del primo capo di corda, mentre la resistenza R che è sostenuta da un numero n di capi eguaglia e distrugge un numero n di tensioni eguali a quella del primo. Lagrange notando la semplicità ed evidenza del ragionamento su cui si fonda l' equilibrio di un polispasto, ne ha eretto le condizioni in un *principio*, dal quale ha dedotto una dimostrazione generale dell' equazione delle velocità virtuali (1).

4. Se il polispasto avesse più punti fissi ove fossero attaccate più corde, come nella fig. 36, bisognerebbe considerare questo sistema come una serie di puleggie semplici, in cui la tensione della corda della seconda puleggia sarebbe la resistenza della prima puleggia, la tensione della corda della terza puleggia, sarebbe la resistenza della seconda puleggia, è così successivamente. Ora applicando ciò che abbiamo detto della puleggia semplice a questi successivi equilibrii, si riconoscerà facilmente tanto col principio delle velocità virtuali, quanto con quello della tensione uniforme delle corde, che chiamando R_{n-1}, R_{n-2}, R_{n-3} . . . . . R_1, R le successive resistenze delle n puleggc si avrà

$$P = \tfrac{1}{2} R_{n-1}, R_{n-1} = \tfrac{1}{2} R_{n-2}, R_{n-2} = \tfrac{1}{2} R_{n-3} \ldots\ldots R_1 = \tfrac{1}{2} R.$$

Onde moltiplicando tutti i primi membri fra loro, e tutti i secondi membri fra loro, e togliendo il fattor comune $R_{n-1}\ R_{n-2}\ R_{n-3} \ldots R_1$ si avrà

$$P = \frac{1}{2^n} R$$

Si possono combinare le puleggie in varii altri modi, ma sarà sempre facile coi principii esposti di riconoscere le condizioni del loro equilibrio in tutti i casi.

(1) Vedasi il Journal de l'Ecole Polytechnique 5.me cahier, o la Section I de la Mécanique analytique, par Lagrange.

Del piano inclinato.

5. Quando si tratta di sostenere un peso è vantaggioso che sia appoggiato su di un piano inclinato all' orizzonte. Sia M fig. 37, una massa sferica pesante, che rappresenti la resistenza appoggiata sopra il piano $B\,C$, inclinato all' orizzonte d' un angolo $A\,B\,C$ eguale ad i, e P una potenza diretta parallelamente al piano prodotta da un peso che tiene tesa una corda che accavalca la carrucola K. Se tanto alla potenza P quanto alla massa M s' imprima una stessa velocità che siano rispettivamente rappresentate nelle figure da $P\,p$ ed $M\,p$, il movimento s' effettuerà senza tensioni e pressioni reciproche, e sarà geometrico. Ora il peso della massa M, o la resistenza R, essendo una forza verticale, la velocità $p = M\,p$, data ad R, decomposta nella direzione della forza stessa darà la velocità projettata $r = M\,q = p\ sini$, dunque l' equazione (1) darà in questo caso

$$P = R \sin i$$

cioè la potenza è eguale alla resistenza, nel seno dell' inclinazione del piano.

6. Si può riconoscere facilmente la verità di questo risultamento col principio della composizione delle forze. Infatti se si compongono la potenza P, e la resistenza R, che supporremo rappresentate nella figura con $M\,P'$ ed $M\,R$, in una sola S, dinotata da $M\,S$, questa nell' equilibrio dovrà risultare perpendicolare al piano, perchè allora verrà distrutta interamente dall' impenetrabilità del medesimo. Bisognerà dunque che la risultante S rappresentata dalla diagonale $M\,S$ faccia un angolo $S\,M\,P$ retto colla potenza P, che è diretta parallelamente al piano, ed un angolo $S\,M\,R$, eguale all' inclinazione i del piano, colla resistenza R che è diretta verticalmente. Ora nel triangolo $M\,S\,R$ rettangolo in S il cateto $R\,S$ che è eguale ad $M\,P'$ rappresentante la potenza P, essendo dato dal prodotto dell' ipotenusa $M\,R$, o resistenza R, pel seno dell' angolo $S\,M\,R$ eguale a i, si avrà

$$P = R \sin i;$$

come si è trovato coll' equazione delle velocità virtuali.

7. Abbiamo supposto che per sostenere la resistenza rappresentata da un peso appoggiato sul piano inclinato, fosse applicata una potenza diretta parallelamente al piano. Se essa invece fosse

diretta orizzontalmente, come viene rappresentato nella fig. 38, si riconoscerebbe facilmente che comunicata al corpo M una velocità v ascendente lungo il piano, questa decomposta nelle direzioni della potenza P e della resistenza R darebbe le due velocità projettate

$$p = v \cos i \qquad q = -v \sin i;$$

e quindi l'equazione (1) delle velocità virtuali diverrebbe

$$P \cos i = R \sin i, \text{ che dà } P = R \text{ tang } i$$

D'altra parte componendo la potenza P e la resistenza R, dinotate da MP ed MR, queste dovrebbero sempre formare una risultante MS perpendicolare al piano onde ogni movimento sia distrutto dall'impenetrabilità di esso. Si avrebbe così nel triangolo rettangolo formato dalle tre forze P, R, S la proporzione

$$P : R : S :: \sin i : \cos i : 1$$

dalla quale si ricava

$$P = R \frac{\sin i}{\cos i} = R \text{ tang } i \; ; \; S = \frac{R}{\cos i} = R \sec i$$

La potenza sarebbe dunque alla resistenza come la tangente è al raggio; e la pressione S sofferta dal piano sarebbe alla resistenza come la secante al raggio.

La pressione S che viene distrutta dall'impenetrabilità del piano inclinato fa uno sforzo per spingerlo indietro, e questo sforzo, decomposto in due, equivale ad uno sforzo verticale eguale alla resistenza e ad uno sforzo orizzontale eguale alla potenza. Se quindi il piano su cui è appoggiato il corpo fosse la faccia AC di un prisma triangolare ABC che appoggiasse semplicemente colla sua base AB sopra un piano orizzontale oo, e potesse scorrere lungh'esso; il piano orizzontale oo sopporterebbe tutto il peso rappresentante la resistenza, e sarebbe necessario applicare contro la faccia verticale BC una forza orizzontale FK eguale e contraria alla potenza MP per impedire lo strisciamento del piano e conservare l'equilibrio.

Del cuneo.

8. Il cuneo di cui si fa uso per spartire i corpi ha la figura di un prisma triangolare le cui basi sono due triangoli, comunemente isosceli, dei quali un angolo al vertice è assai acuto. Lo spigolo che unisce i vertici dei due angoli acuti, che penetra nei

corpi a spartire si chiama il *tagliente* del cuneo, le due faccie adjacenti sono dette i *lati*, e la faccia opposta al tagliente si chiama la *testa* del cuneo. Vedasi la fig. 39.

In questa macchina vi sono propriamente due resistenze che sono le pressioni che il corpo a spartire esercita perpendicolarmente su cadauno dei lati del cuneo, nei punti o nella linea in cui è in contatto con esso. Ma come ora ci limiteremo a considerare il cuneo isoscele tutto sarà simetrico intorno al piano condotto pel tagliente perpendicolarmente alla testa, e perciò basterà considerare un solo lato, e raddoppiare poi la potenza per tener conto dell' azione dell' altro lato.

La fig. 40 rappresenta una sezione del cuneo e del corpo a spartire fatta perpendicolarmente al tagliente.

Dal punto di contatto C del corpo col lato del cuneo si inalzi una perpendicolare $C\,h$ sino ad incontrare l' asse $\theta\,T$ del cuneo; con una leggiera considerazione possiamo convincersi che se imprimiamo alla potenza applicata perpendicolarmente alla testa del cuneo una velocità proporzionale alla parte $T\,h$ dell' asse compreso fra il detto punto d' incontro ed il tagliente, ed al punto C una velocità, proporzionale alla lunghezza della stessa perpendicolare Ch e diretta secondo il suo prolungamento all' infuori; il cuneo penetrerà nel corpo senza produrre reazioni di parti si avrà dunque $p = v.\ h\,T$, $r = -v.\ h\,C$, e perciò dall' equazione (1)

$$P.\ \overline{h\,T} - R.\ \overline{h\,C} = o\,,$$

o sia

$$P\ :\ R\ ::\ h\,C\ :\ h\,T$$

Ma i triangoli simili $C\,h\,T$, $t\,\theta\,T$ danno

$$h\,T\ :\ h\,C\ ::\ t\,T\ :\ t\,\theta\,;$$

dunque sarà anche

$$P\ :\ R\ ::\ t\,\theta\ :\ t\,T,$$

cioè la potenza alla resistenza come la metà della testa del cuneo ad un lato, e raddoppiando il valore della potenza per tener conto anche dell' azione della resistenza dell' altro lato, diremo che nel cuneo isoscele sta la potenza alla resistenza come la testa $t\,t'$ del cuneo ad un lato $T\,t$.

9. Il principio della composizione delle forze ci convince della verità di questa proposizione, perchè compiendo sui due lati $h\,R$ ed $h\,R'$, che supporremo rappresentare le resistenze, il rombo $h\,R\,\pi\,R'$, avremo la diagonale $h\,\pi$ per rappresentare la loro risul-

tante alla quale la potenza dovrà essere eguale ed opposta. Ma è facile il vedere che per essere i triangoli $R\,i\,h$, $T\,\theta\,t$, $R'\,i\,\pi$ simili, che si ha

$$h\,i = h\,R\,\frac{t\,\theta}{T\,t}, \qquad i\,\pi = h\,R'\,\frac{t'\theta}{T\,t},$$

dunque sommando queste due equazioni ed osservando che

$$h\,i + i\,\pi = h\,\pi = P; \quad h\,R = h\,R' = R$$

sarà

$$P = R\,\frac{t\,t'}{T\,t}$$

come si ricava dal principio delle velocità virtuali.

Non si troverà difficoltà ad estendere queste dimostrazioni anche ad un cuneo scaleno.

Della vite.

10. La vite è una macchina che si usa per una moltiplicità d' oggetti.

Essa consta di un cilindro $D\,D'$ fig. 41 sopra il quale si è incavata una scannellatura che segue la curva, detta *elice*, che traccerebbe l' ipotenusa di un triangolo $A\,B\,C$ supposto flessibile ed avvolto con più giri sopra il cilindro.

Il risalto che proviene dalla scannellatura praticata sul cilindro si chiama la *spira*. Quando il profilo della spira è un triangolo (fig. 42) la vite si dice *triangolare*, quando è un quadrato (fig. 43) la vite si dice *quadrangolare*.

La distanza fra due spire successive si chiama *passo* della vite.

La vite si pone in opera con la *madrevite* che è in concavo ciò che la vite è in convesso, di modo che poste una dentro l'altra si combaciano perfettamente. Nelle fig. 42 e 43 la madre vite s' intende scolpita nei due zoccoli $Z\,Z'$, $Z\,Z'$ che girando in uno o nell' altro verso possono ascendere o discendere lungo essa.

Talvolta si tiene ferma totalmente la madre vite; allora è la vite che penetra in essa graduatamente avanzando un passo ad ogni giro.

In alcuni casi la madre vite è soltanto impedita di girare da alcuni ostacoli che la trattengono esteriormente, ma può ascendere e discendere lungo la vite, secondo che questa si fa girare in un verso o in un altro.

Posti questi preliminari supponiamo l' ultimo caso, cioè che quella che ascende o discende, lungo la vite sia la madre vite trattenuta dal girare da due fenditure praticate nei due sostegni laterali AB, CD fig. 44, e sia da essa pendente un peso R che rappresenti la resistenza, mentre una forza P che tira la corda avviluppata alla testa $t\,t'$ rappresenta la potenza.

La madre vite tirata dal peso, gravitando egualmente su tutte le spire, e su tutti i punti di ciascuna spira della vite, potremo immaginare divisa la resistenza R in tante piccole parti in quanti minutissimi tratti possiamo dividere le spire della madrevite, e supporre che ogni piccolo tratto sostenga la parte corrispondente di resistenza.

Sia dunque, fig. 45, il peso ρ quella parte di resistenza che è sostenuta da un piccolo tratto s della madre vite incastrato in un pale della madre vite, e sia ϖ la parte della potenza impiegata a produrre lo stato di equilibrio.

È evidente che mentre la potenza ϖ corre uno spazio eguale ad un' intera circonferenza del cilindro su cui è tracciata la vite, la resistenza ρ sale di un passo della vite: se dunque si chiama a il raggio del cilindro, h l' altezza di un passo della vite imprimendo una velocità $p = 2\,\pi\,a\,.\,v$ alla potenza, ed una velocità $r = -\,h\,.\,v$ alla resistenza, la macchina si muoverà di movimento geometrico senza contrasto di parti, dunque l' equazione (1) darà per l' equilibrio di questa macchina

$$2\,\varpi.\,\pi\,a\,v = \rho\,h\,v$$

da dove si deduce

$$\varpi = \rho\,\frac{h}{2\,\pi\,a}.$$

Quest' equazione rimanendo la stessa per tutte le parti ρ, ed ϖ nelle quali è stato supposto divisa la resistenza e la potenza, prendendo la somma di tutte le equazioni corrispondenti a tutte le parti si avrà

$$P = \frac{h}{2\,\pi\,a}\,R$$

o vero

$$P : R :: h : 2\,\pi\,a$$

cioè la potenza alla resistenza come l' altezza del passo della vite alla circonferenza del cilindro sul quale la vite è scolpita.

11. Per verificare colla teorica del piano inclinato questo ri-

sultamento, possiamo osservare che se si volesse sostenere il peso corrispondente al tratto s lungo la spira della vite come su di un piano inclinato per mezzo di una potenza ϖ diretta orizzontalmente converrebbe, secondo quello che abbiamo esposto per l'equilibrio di quella macchina art. 7, che la potenza ϖ fosse eguale a ρ tang. i i essendo l'inclinazione del piano. Di più abbiamo visto che se il piano è mobile orizzontalmente come nel caso presente in cui esso è rappresentato dal tratto s di una spira della vite la quale sola è girevole, converrà applicare una forza orizzontale ρ tang. i per impedire che la vite giri e la madre vite discenda lungh'essa. Ma preso nella fig. 4 sulla base del triangolo $A\,B\,C$ una porzione $A\,a$ eguale alla circonferenza del cilindro, ed elevata la perpendicolare $a\,c$, che riesce eguale ad un passo della spira si ha nel triangolo rettangolo $A\,a\,c$

$$\text{tang}\, i = \frac{a\,c}{A\,a} = \frac{h}{2\,\pi\,a};$$

dunque sarà pure la forza da applicarsi, pel solo tratto s

$$\varpi = \rho\,\frac{h}{2\,\pi\,a},$$

e quindi in complesso per la vite intera

$$P = R\,\frac{h}{2\,\pi\,a};$$

come si è trovato sopra.

Con simili considerazioni si dedurrebbe la stessa equazione per le condizioni d'equilibrio fra la potenza e la resistenza nel caso che la madre vite fosse totalmente fissa, e fosse la vite che s'inoltrasse dentro di essa, o vero che la madre vite fosse la sola totalmente mobile e montasse e girasse lungo la vite.

Abbiamo per comodo dei ragionamenti rappresentata la resistenza con un peso, ma comunemente la vite s'impiega a produrre delle pressioni, come nei torchii d'olio, nella piegatura dei panni, nelle soppresse dei legatori di libri ec. Così pure la potenza non s'impiega applicata direttamente alla testa della vite ma comunemente si unisce a questa un braccio di leva sul quale si fa agire la potenza, ed allora è evidente che la potenza va diminuita ancora nella ragione del raggio del cilindro $t\,t'$ alla lunghezza del braccio di leva così che si ha la proporzione generale che *la potenza sta alla resistenza come il passo della vite è alla circonferenza dell' arco descritto dalla potenza attorno dell' asse.*

12. Abbiamo così percorso i diversi casi d'equilibrio che offrono le macchine semplici, ed abbiamo verificato relativamente a

ciascuno di essi la sussistenza dell'equazione (1), confermandone i risultamenti con altre considerazioni che ci hanno fornito l'occasione di far conoscere i diversi principii di cui si fa comunemente uso nella statica.

Il principio delle velocità virtuali è d'un'applicazione generale, ed il metodo da seguirsi per riconoscere le condizioni d'equilibrio è sempre lo stesso. Qualunque sia la macchina quando si sappia in che ragione stanno fra loro le velocità projettate dei punti a cui sono applicate rispettivamente la potenza e la resistenza, imprimendo alle macchine un movimento geometrico, cioè tale che essa possa eseguire senza che vi sia comunicazione di movimento dalle une alle altre parti o senza contrasto fra loro, non si avrà che ad eguagliare i momenti di queste due forze, per mezzo dell'equazione (1), e le condizioni d'equilibrio saranno conosciute.

L'equazione (1) non è che un caso particolare di un'equazione più generale che abbraccia l'equilibrio di un sistema qualunque e della quale si trova una dimostrazione elementare nella nota annessa a questa lezione.

LEZIONE X.

Della composizione e decomposizione delle forze parallele, del loro centro, e del centro di gravità.

1. Le condizioni dell'equilibrio di una leva, che abbiamo riconosciuto nella lezione VIII ci conducono direttamente a scoprire il modo di composizione di due forze allorchè sono applicate a due punti diversi stabilmente collegati assieme, e particolarmente quando queste forze sono parallele fra loro, e nella stessa direzione. Infatti queste forze potendo sempre essere rappresentate da due pesi applicati alle estremità di una leva, è evidente che se nel punto dove deve essere il fulcro, onde la leva sia in equilibrio, si applica una forza eguale alla pressione che il fulcro sostiene, questa forza applicata a questo punto porrà le altre due in equilibrio, distruggerà cioè il moto che esse tendono a produrre, e perciò sarà eguale e contraria alla loro risultante.

La risultante di due forze parallele P e Q applicate alle estremità A e B di una verga rigida, fig. 43, dovrà dunque passare per un punto S tale che divida la loro distanza reciprocamente alle forze, cioè tale che sia

$$(1) \qquad P : Q :: SB : SA.$$

Di più come il fulcro, nella dimostrazione che abbiamo dato della leva, si trova caricato di tutto il peso del cilindro che abbiamo supposto sospeso pel suo mezzo, ed il peso di questo cilindro equivale alla somma delle due forze P, e Q, chiamando R la risultante essa dovrà essere espressa da

$$(2) \qquad R = P + Q.$$

La necessità che il fulcro sostenga il peso del cilindro come se fosse ridotto ad un dado o palla che direttamente s'appoggiasse sopra esso è evidente, perchè, come dice il Galileo, *troppo manifesta cosa è che le figure non mutano peso ove si ritenga la medesima quantità di materia.* Come però questa verità non è stata trovata di tanta chiarezza che fosse ammissibile come un assioma, hanno alcuni, ad esempio di Huyghens, date dalle dimostrazioni per provare che il fulcro sostiene un peso eguale alla somma di quelli che sono applicati alle estremità della leva. Eccone una che ha immaginato Lagrange.

Supponiamo per semplicità che la leva $A\,B$ fig. 46 e fig. 46 bis sia caricata nelle estremità di due pesi eguali, che si tolga il fulcro, e che vi si sostituisca invece l'estremità D di una seconda leva $D\,C$ perpendicolare alla prima, la cui altra estremità C sia caricata di due pesi ciascuno eguale ai pesi applicati alle estremità della prima leva, e cerchiamo dove debba essere il punto d'appoggio di questa seconda leva onde la pressione esercitata sull'estremità D, che rimpiazza il fulcro sia in equilibrio coi due pesi.

Immaginiamo unita ciascuna delle estremità A, e B, della prima leva con l'estremità più lontana C della seconda per mezzo di due rette rigide; e pei punti di mezzo, a e b, delle due verghe $A\,C$, $B\,C$ immaginiamo che passi un asse $a\,b$. È evidente che il sistema sarà in equilibrio intorno a quest'asse $a\,b$ perchè possiamo considerare ciascuna delle due verghe, $A\,C$, $B\,C$, come una leva caricata alle estremità di pesi eguali ciascuna delle quali è in equilibrio quando il punto di mezzo è sostenuto. Ma per ragione di simetria la leva è anche in equilibrio intorno all'asse $C\,D$, asta della seconda leva, dunque il sistema sarà contemporaneamente in equilibrio intorno a questi due assi, e perciò sarà anche in equilibrio se sarà sostenuto soltanto il loro punto comune E, perchè non potrà inclinarsi nè intorno ad $a\,b$ nè intorno a $C\,D$. Ora il punto E è evidentemente sulla metà di $C\,D$.

Suppongasi ora applicato al di sotto di questo punto E un fulcro, e distrutte tanto le verghe laterali $A\,C$, $B\,C$ non che l'asse $a\,b$, che abbiamo immaginato soltanto per concepire l'esistenza dell'equilibrio intorno al punto E. Con questo annientamento rimarrà soltanto in equilibrio la leva $A\,B$ appoggiata nel suo mezzo all'estremità D della leva $C\,D$ che è pure in equilibrio. La pressione esercitata su l'estremità D di questa seconda leva, estremità che rimpiazza il fulcro della prima leva, sarà dunque tale che equilibra la somma di due pesi applicati all'altra estremità C, ad una distanza eguale dal punto d'appoggio, e perciò questa pressione sarà eguale alla somma di quei due pesi.

È chiaro che questa dimostrazione può ripetersi con leggiere modificazioni anche quando la prima leva non fosse caricata nelle sue estremità di pesi eguali, ed il fulcro non fosse per conseguenza nel mezzo.

2. Dalla proporzione segnata (1) si ricava

$$P : Q : P + Q :: SB : SA : SB + SA$$

ma

$$R = P + Q \text{ ed } AB = SB + SA$$

dunque sarà

$$P : Q : R :: SB : SA : AB$$

così risguardando R, non come la risultante delle forze P e Q ma come una terza forza che equilibra le due prime, cioè una forza opposta in direzione alla loro risultante, tre forze parallele saranno in equilibrio quando saranno applicate a tre punti di una retta inflessibile, distanti fra loro delle tre quantità che soddisfanno alla proporzione precedente.

3. Essendo indifferente di considerare una qualunque delle tre forze parallele P, Q, R che si fanno equilibrio come la risultante delle altre due, è evidente che se sono date due forze parallele applicate in direzione opposta ai punti A ed S della retta AS, fig. 47 potremo rappresentare la più grande di esse con R, e la più piccola con P, e la terza forza Q opposta alla loro risultante sarà data dall' equazione

$$Q = R - P$$

e sarà applicata dalla parte di R ad una distanza SB tale, che

$$Q : R : P :: AS : AB : SB$$

e perciò sarà

$$SB = \frac{P \cdot SA}{Q}, \quad AB = \frac{R \cdot SA}{Q}$$

4. Queste formole sono soggette ad una eccezione che avviene quando le forze date R e P sono eguali. In questo caso si avrebbe

$$Q = 0$$

e quindi

$$SB = \infty \qquad AB = \infty$$

cioè la risultante sarebbe nulla ed applicata ad una distanza infinita, il che non ha un significato reale. Infatti, in questo caso, non vi può essere equilibrio fra le tre forze, perchè non vi sarebbe ragione che la risultante delle due date cadesse piuttosto da una parte che dall' altra di una di esse, e l' effetto di queste due forze consisterebbe nel far girare la retta a cui sono applicate intorno al suo punto di mezzo, effetto che non potrebbe essere distrutto da una sola terza forza.

5. Questa combinazione di due forze che non possono essere ridotte ad una risultante unica forma un caso di un genere proprio nella teorìa dell'equilibrio delle forze, che il Sig. Poinsot ha particolarmente segnalato. Egli ha dato il nome di *coppia* alla combinazione delle due forze eguali parallele ed opposte applicate a due punti differenti contemplate in questo caso, ed ha ridotto al genere di sforzo, al quale una coppia da origine, tutta la teorica degli equilibrii e dei movimenti di rotazione.

Così, per esempio, nella leva, o più generalmente in un sistema di tre forze parallele in equilibrio, considerando la terza forza CR fig. 48 come la riunione di due forze Cp, Cq ciascuna delle quali sia rispettivamente eguale ad una delle componenti, queste parti della CR colle rispettive componenti AP, o BQ formano due coppie, che si indicano con $(AP, -Cp)$ e con $(BQ, -Cq)$; e l'equilibrio che sussiste in questo caso fra le due coppie contrarie essendo determinato dalla relazione (1) ci mostra che lo sforzo delle coppie è eguale quando il prodotto di una delle due forze per la loro distanza reciproca è eguale. A questo prodotto si è pure dato il nome di *momento*, e le coppie sono misurate dalla grandezza del loro momento.

Secondo questa misura le coppie possono essere trasformate, cioè si può sostituire una coppia ad un'altra impicciolendo le forze ed aumentando nella stessa ragione la loro distanza reciproca, o viceversa.

Rappresentando il valor delle coppie con una retta il Signor Poinsot dimostra che le coppie possono essere trasportate nello stesso piano od in piani paralleli e si possono comporre e scomporre nello stesso modo o con delle formole analoghe a quelle con cui si compongono e scompongono le forze. Invitiamo il lettore a vedere tutte queste proprietà delle coppie ed il loro uso nel bel Trattato di Statica del suddetto Autore scritto coll'ordine, precisione e gusto degli antichi geometri (1).

6. Ritorniamo alla composizione delle forze parallele. Ottenuta la risultante di due forze ed un punto per cui passa, è facile il vedere come si può progredire a trovare quella di un numero qualunque di forze ed un punto sulla sua direzione.

Sia il sistema di punti A_1, A_2, A_3, A_4 ec. fig. 49 animati rispettivamente, dalle forze parallele P_1, P_2, P_3, P_4 ec.* Componiamo le due prime forze P_1, P_2 in una sola: questa sarà per la

(1) Poinsot. Élemens de Statique. Paris. 1830, 6.e Edition.

* tutte tenenti nella stessa direzione.

proposizione che abbiamo dimostrato eguale a $P_1 + P_2$, e passerà per un punto H_1 così situato sopra la retta $A_1\ A_2$ che sarà

(1) $$P_1 : P_2 :: H_1\ A_2 : H_1\ A_1 \text{ ec.}$$

Si consideri ora la risultante $R_1 = P_1 + P_2$ e la forza P_3, e cercasi la risultante delle tre. Questa sarà eguale a $P_1 + P_2 + P_3$ e passerà per un punto H_2 tale che sarà

(2) $$P_1 + P_2 : P_3 :: H_2\ A_3 : H_2\ H_1 :$$

si componga ora questa risultante $R_2 = P_1 + P_2 + P_3$ colla forza P_4; tirando la retta $H_2\ A_4$, la risultante cercata sarà eguale a $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ ed il punto H_3 sulla detta retta per cui passerà si otterrà dalla proporzione

(3) $$P_1 + P_2 + P_3 : P_4 :: H_3\ A_4 : H_2\ H_3$$

così proseguendo si potrà spingere il processo ad un numero qualunque di forze, e l'ultima risultante R_n sarà sempre eguale alla somma di esse tutte, e passerà per un punto H_n, la cui posizione si otterrà colle successive proporzioni che si anderanno stabilendo.

7. Immaginiamo che in questo sistema di forze parallele le forze vengano tutte a girare intorno ai loro punti d'applicazione senza cessare d'essere parallele, la loro risultante girerà pure intorno al punto H_n, di cui abbiamo dato il processo per determinarne la posizione. Questo punto porta il nome di *centro delle forze parallele*. Per convincersi dell'enunciata proprietà di questo punto possiamo osservare che se le forze P_1, P_2, P_3 ec., contemplate nel numero precedente, vengono a girare rispettivamente intorno ai punti A_1, A_2, A_3 ec., conservando il loro parallelismo, sempre il punto H_1 taglierà la distanza $A_1\ A_2$ in ragione reciproca delle forze P_1 e P_2; il punto H_2 taglierà $H_1\ A_3$ in ragione reciproca delle forze $P_1 + P_2$ e P_3, il punto H_3 taglierà $H_2\ A_4$ in ragione reciproca delle forze $P_1 + P_2 + P_3$; e P_4 e così di seguito per cui l'ultimo punto H_n si troverà essere lo stesso punto del sistema di prima. Ciò è evidente se si considera che la posizione del punto H_n è determinata dal rapporto delle componenti e dalla situazione dei loro punti d'applicazione, e che non dipende affatto dalla direzione delle forze applicate. Mentre dunque le forze parallele girano, la risultante pure a loro parallela girerà intorno a detto punto H_n, che perciò si chiama il centro delle forze parallele.

8. Onde fissare in un modo distinto la situazione di questo

punto nello spazio, concepiamo condotto un piano in una direzione qualunque, della quale retta $T\,T'$ rappresenti il profilo fig. 49. Da ciascun punto del sistema conducansi delle perpendicolari su questo piano, e chiaminsi $x_1\ x_2\ , x_3$ le lunghezze di quelle $A_1\ a_1\ ,$ $A_2\ a_2\ , A_3\ a_3\ \ldots.$ condotte dai punti d'applicazione delle forze, e $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ ec. le lunghezze di quelle $H_1\ h_1\ , H_2\ h_2\ , H_3\ h_3$ ec. condotte dai punti per cui passano le successive risultanti. Le tre distanze $A_1\ a_1\ , H_1\ h_1\ , A_2\ a_2$ essendo parallele, e situate in uno stesso piano e limitate dalle due rette $A_1\ A_2\ , a_1\ a_2$, per una nota proposizione di geometria. (Vedi la Geometria di Legendre. lib. III. prop. XV corol. II) daranno la proporzione

$$x_2 - \xi_1 : \xi_1 - x_1 :: H_1\ A_2 : H_1\ A_1$$

Paragonando questa con quella segnata (1) nel numero precedente si otterrà

$$x_2 - \xi_1 : \xi_1 - x_1 :: P_1 : P_2.$$

Dalla quale si ricaverà

$$(P_1 + P_2)\ \xi_1 = P_1\ x_1 + P_2\ x_2$$

e quindi

$$\xi_1 = \frac{P_1\ x_1 + P_2\ x_2}{P_1 + P_2}$$

Parimenti le tre distanze $H_1\ h_1\ , H_2\ h_2\ , A_3\ a_3$ che stanno nelle stesse condizioni di quelle considerate precedentemente ci daranno la proporzione

$$\xi_2 - x_3 : \xi_1 - \xi_2 :: H_2\ A_3 : H_2\ H_1$$

la quale paragonata con quella segnata (2) somministra

$$\xi_2 - x_3 : \xi_1 - \xi_2 :: P_1 + P_2 : P_3$$

e da questa si deduce

$$P_3\ (\xi_2 - x_3) = (P_1 + P_2)\ (\xi_1 - \xi_2)$$

e trasportando e sostituendo il precedente valore di ξ_1 si otterrà

$$(P_1 + P_2 + P_3)\ \xi_2 = P_1\ x_1 + P_2\ x_2 + P_3\ x_3$$

per cui sarà

$$\xi_2 = \frac{P_1\ x_1 + P_2\ x_2 + P_3\ x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Proseguendo questo processo sino all'ultima forza data e chiaman-

do Ξ la distanza del piano del punto per cui passa l' ultima risultante si avrà

$$(A) \qquad \Xi = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 \text{ ec.}}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \text{ ec.}}$$

Cioè la distanza da un piano dato del punto che si è chiamato il centro delle forze parallele si otterrà moltiplicando ciascuna forza per la sua distanza rispettiva al piano e dividendo la somma di tutti i prodotti per la somma delle forze.

9. Prendendo così tre piani posti fra loro ad angolo retto che, per facilità di concetto, supporremo, due verticali ed uno orizzontale e determinando colla formola precedente la distanza del centro delle forze rispettivamente a ciascuno di questi tre piani, la posizione di questo punto nello spazio si troverà completamente determinata. Infatti le due distanze dai piani verticali determinano colla loro intersezione la situazione della verticale su cui si trova il punto dimandato, e la distanza dal piano orizzontale determina il luogo dello stesso punto sulla verticale.

Da quanto abbiamo esposto si raccoglie che si può concepire concentrata o riunita nel centro delle forze parellele la somma o l' azione totale di un numero qualunque di queste forze, riducendosi così ogni sistema di tal genere ad un solo punto animato da una sola forza, che sostenuto o reso immobile rimane in ogni positura equilibrato il sistema.

Del centro di gravità.

10. La proposizione ora enunciata sul centro delle forze parallele trova un'applicazione importante nella considerazione dei corpi estesi o di più corpi collegati assieme e soggetti all' azione della gravità. Nella lezione in cui abbiamo trattato della gravità si è visto che tutte le molecole della materia sono animate in vicinanza della superficie della terra da una forza costante ed eguale per tutte, che tende a farle cadere in direzioni sensibilmente parallele nei luoghi poco lontani fra loro. La risultante della gravità sopra un corpo di un volume finito qualunque, cioè il suo peso, sarà dunque eguale alla somma di tutte le forze o pesi che animano individualmente le sue molecole, e sarà loro parallela, e come abbiamo ora fatto vedere che in ogni sistema di forze parallele esiste un punto o centro per cui passa continuamente la risultante quando s' inclina il gruppo di tutte queste forze in diverse posizioni, così ne segue, che in ogni

corpo pesante esiste sempre un punto unico pel quale passa continuamente la risultante della gravità, quando si gira successivamente il corpo nelle diverse posizione relativamente alla verticale del luogo. Infatti in tutti i rivolgimenti che si facciano fare al corpo le forze di gravità delle diverse molecole non cesseranno mai d' essere applicate agli stessi punti e d' essere parallele, e perciò tutte le corrispondenti e successive direzioni della risultante non cesseranno mai d' intersecarsi nello stesso punto.

Questo punto unico pel quale passa sempre la risultante delle forze di gravità delle molecole in tutte le posizioni del corpo, chiamasi *centro di gravità.*

11. Nella discussione dell' equilibrio di sistemi in cui si deve por mente al peso delle diverse parti, si potrà quindi riguardare il peso di ciascun corpo come ridotto ed applicato al suo centro di gravità, perchè con ciò non si fa altro che sostituire la risultante all' azione di tutte le componenti, o ai pesi parziali di tutte le molecole, ciò che è sempre permesso nei sistemi di punti invariabilmente connessi.

Il centro di gravità dei corpi la di cui figura e densità possono essere espresse con equazioni, è generalmente determinabile per mezzo di processi che insegna il calcolo integrale (Vedasi la nota 1). Meccanicamente può trovarsi sostenendo successivamente il grave per due punti diversi da ciascuno dei quali penda liberamente, e determinando il punto in cui s' intersecherebbero le due verticali che attraversano il corpo passando rispettivamente pei punti di sospensione nella prima e seconda posizione del medesimo.

Il centro di gravità di più corpi stabilmente uniti può costruirsi determinando la sua distanza a tre piani colla formola (A).

Vedasi le note 2.ª e 3.ª

MECCANICA

LEZIONE XI.

Delle macchine in movimento, delle quantità d' azione, del lavoro dinamico, e delle forze vive.

1. Dopo d' aver considerato le macchine nello stato d' equilibrio passiamo ad esaminarle in quello del movimento. Non basta che il momento della potenza superi d' alcun poco quello della resistenza onde la macchina si ponga in moto. Gli attriti, la rigidezza delle funi, l' adesione e l' inerzia dell' aria o dei fluidi in cui la macchina è immersa ec. sono tante resistenze che si sviluppano tosto che il movimento sta per cominciare e si oppongono alla sua generazione. Bisogna quindi che la potenza sia prima in istato di superare anche questi ostacoli, o come si dice, di mettere la macchina *nello stato prossimo al movimento.* Come noi non ci proponiamo di dar un trattato di meccanica, ma solo di far conoscere i principii teorici, secondo i quali le macchine devono essere considerate, non ci tratterremo ad esporre i modi con cui queste forze passive possono essere valutate nei diversi casi, e supporremo che la potenza sia tanto grande da equilibrare la resistenza, e porre la macchina nel suo stato prossimo al movimento (1).

Appena la potenza sarà aumentata ancora di qualche cosa la macchina comincierà a muoversi, e se questo aumento potesse sussistere continuamente, il movimento della macchina anderebbe accelerandosi sempre più col tempo. Ma le forze della natura che possiamo impiegare come potenze, quali sono le forze degli animali, l' urto d' una corrente d' acqua, l' azione di una molla ec., sono di tale sorta che tutte diminuiscono d' intensità quando sono obbligate ad agire con una maggiore velocità; e per lo contrario gli attriti, l' ostacolo dell' aria ec. che si aggiungono alla resistenza per ritar-

(1) A questo proposito può consultarsi il Cap. VIII, Sez. II del Lib. V della Meccanica del Prof. Venturoli, ed un Opuscolo del Prof. P. Obici intitolato *Condizioni dello stato prossimo al moto graficamente determinato nelle macchine.* Siena presso Onorato Porri 1838.

dare il moto, aumentano colla velocità: quindi è che in ogni macchina il movimento è ben tosto ridotto all' equabilità, cioè ad un movimento uniforme, o talvolta periodico. Quando il movimento della macchina è divenuto uniforme essa continua il suo moto in virtù della sola inerzia, ogni azione acceleratrice ha cessato, e quindi la potenza e la resistenza si equilibrano sulla macchina. Quando il movimento è periodico, la potenza supera nel primo intervallo del periodo la resistenza ed accelera il moto; ma nel secondo intervallo è superata dalla resistenza ed il movimento vien ritardato nello stesso grado: si possono quindi considerare la potenza e la resistenza in equilibrio fra loro nella durata di un intero periodo. Ecco come la considerazione dello stato d'equilibrio delle macchine torna utile per esaminare anche gli accidenti del loro movimento.

Il principio generale che abbiamo visto sussistere per l' equilibrio di una macchina qualunque si è, che il prodotto della potenza per la velocità con cui essa si muove projettata nella sua direzione, sia eguale al prodotto della resistenza pure per la velocità projettata con cui essa è mossa, e che sempre trovasi in verso contrario a quello della rispettiva sua direzione. Questo principio vale per qualunque macchina esistente o da immaginarsi. Non è necessario, che si conosca come una macchina è fatta; purchè si sappia in che ragione stanno le velocità nelle rispettive direzioni della potenza e della resistenza, la condizione dell' equilibrio di queste due forze sarà sempre la stessa, sempre si avrà secondo l' equazione (1) della lezione VIII.

$$P\,p = -\,R\,r.$$

2. Consideriamo da prima le macchine in cui il movimento si riduce all' uniformità e in cui le forze mantengono una direzione costante rispetto a quella del movimento dei loro punti d'applicazione, il qual caso è il più semplice. Il rapporto delle velocità conservandosi costante, anche gli spazii descritti a ciascun istante avranno lo stesso rapporto, il quale sarà pur quella degli spazii totali che la potenza e la resistenza avranno percorso in un dato tempo nelle rispettive loro direzioni; indicando con S e $-\Sigma$, questi spazii si avrà così

$$-\frac{p}{r} = \frac{S}{\Sigma};$$

ed il principio espresso dell' equazione precedente ci darà

$$(1) \qquad \frac{R}{P} = \frac{S}{\Sigma}$$

o traducendo quest'equazione in una proporzione

$$P : R :: \Sigma : \delta$$

cioè starà la potenza alla resistenza inversamente come il cammino percorso dalla resistenza in verso contrario alla sua direzione, al cammino percorso dalla potenza nella sua propria direzione.

3. Questa proporzione ci squarcia il velo, che ricopre per alcuni le macchine di una misteriosa virtù, illusi dal vedere che nella statica una potenza può fare equilibrio ad una resistenza comunque grande. Fintantochè si tratta d'equilibrio, concedasi pure che una potenza possa sostenere qualunque resistenza per grande che sia, quantunque non sia dessa ma sibbene i punti d'appoggio e fissi del sistema che la sostengono, e la potenza non ne distrugga in realtà che una piccola parte; ma tosto che si passa al moto, i punti immobili che ben potevano durante l'equilibrio opporsi alla effettuazione di un movimento, non sono però in grado di generarlo quando si debba mandarlo ad effetto: allora la potenza deve trarre dalla sua propria fonte le risorse per muovere la resistenza, ed allora la sua tenuità si mostra in tutta la sua pienezza non potendo imprimere che una velocità tanto più piccola quanto più la resistenza è grande.

Da mihi ubi consistam et terram loco demovebo si fece dire ad Archimede parlando del grande potere della leva. Astrattamente è vero che Archimede facendo sforzo nell'estremità di un braccio di leva avrebbe potuto sollevare la terra supposta pesante ed appesa all'estremità dell'altro braccio; ma quanti e quanti biglioni di leghe non avrebbe dovuto percorrere avanti che la terra fosse sensibilmente rimossa? Venti quadriglioni d'anni d'un continuo corso a ragione di 50 metri al minuto non sarebbero bastati ad Archimede onde la terra supposta animata da una forza acceleratrice eguale alla gravità sulla sua superficie, fosse sollevata di un solo millimetro.

4. Non è per questo che le macchine non siano di un vantaggio assai notabile; un corpo del peso di 5000 chilogrammi che non potrebbe essere rimosso da un uomo se applicasse la sua forza direttamente può essere da lui elevato per mezzo di una macchina purchè si contenti di alzarlo di un solo decimetro per minuto, ed impieghi per esempio 100 minuti ad elevarlo di 10 metri. L'effetto utile sarebbe, cosi dice il Galileo, come se egli dividesse il corpo in cento parti ed alzasse ciascuna parte separatamente per un minuto, ma la macchina gli dà il mezzo di poter fare lo stesso trasporto senza

rompere il corpo, ciò che è di non poco vantaggio in molte circostanze.

Se per lo contrario si esige che l' uomo produca un movimento con una velocità sì grande che egli non la possa imprimere, una macchina può supplire al suo difetto, purchè la resistenza sia tanto più piccola in grandezza quanto maggiore è la velocità da comunicarle.

5. Quando il movimento della macchina è periodico il momento della potenza e quello della resistenza non rimangono costantemente eguali, ma uno supera l' altro a vicenda. In questo caso è la somma di tutti i prodotti della potenza pei piccoli spazii che percorre ad ogni istante nella sua direzione che risulta eguale in ogni periodo del moto alla somma di tutti i prodotti della resistenza per gli spazii che essa percorre nella sua direzione ad ogni istante. Il calcolo integrale somministra il modo di valutare queste somme. La prima somma è chiamata dai Meccanici *quantità d' azione* e la seconda somma *lavoro dinamico*. Queste denominazioni sono generali, e si applicano anche al caso del movimento uniforme della macchina in cui i momenti della potenza e della resistenza sono costanti ed eguali: la quantità d' azione è in questo caso semplice il prodotto della potenza per lo spazio che ha percorso nella sua direzione, ed il lavoro dinamico è il prodotto della resistenza per lo spazio percorso pure nella direzione rispettiva.

6. Risulta quindi questo gran principio di meccanica, che in ogni macchina ridotto il movimento ad essere equabile o periodico, la quantità d' azione ed il lavoro dinamico sono sempre eguali, e che quindi quanto più grande è la resistenza che si dee vincere altrettanto si deve perdere in velocità, cioè in ispazio od in tempo; o bene viceversa quanto si vuol guadagnare in velocità si deve perdere in resistenza. Non vi è mezzo da sottrarsi a questa legge. Un uomo che impiegando direttamente la propria forza nel modo più utile può alzare 50 chilogrammi all' altezza di 10 metri in un minuto, il che da un prodotto di 500, applicando la sua forza a qualsivoglia macchina il prodotto della resistenza per lo spazio che le farà percorrere nella sua direzione in un minuto non oltrepasserà mai 500. La natura, per così dire, non soffre d' essere defraudata ne' suoi effetti; di qualunque modo s' impieghi una causa, essa non è capace che d' un effetto determinato.

7. L' effetto generale delle forze applicate alle macchine essendo la produzione di un certo lavoro dinamico, si è trovato convenevole d' esprimere il valore delle forze pel lavoro dinamico che possono

produrre, ed una forza si considera doppia, tripla, ec. quando è capace di produrre un lavoro doppio, triplo ec., e quindi quando la sua quantità d'azione è doppia, tripla ec. Si assume per unità di lavoro dinamico un dato peso elevato ad una data altezza, per esempio un chilogrammo elevato ad un metro, ciò che si chiama un *chilogrametro*, e si rappresenta la quantità d'azione, od il lavoro dinamico in proporzione di questa unità. Così quando si dice che la quantità d'azione di un cavallo in un minuto è di $75^{k.m}$, s'intende che un cavallo eleverebbe in questo tempo 75 chilogrammi all'altezza di un metro, o vero un chilogrammo a 75 metri. Una macchina a vapore la cui quantità d'azione sia data, ad esempio di Watt, per un certo numero di cavalli, vuol dire che questa macchina può produrre in un minuto tante volte un lavoro dinamico di $75^{k.m}$, quanto è il numero dei cavalli a cui equivale.

8. Quando la potenza e la resistenza non si equilibrano coi loro momenti, o sia la quantità d'azione ed il lavoro dinamico non si consumano reciprocamente, il movimento del sistema non è più equabile e la macchina s'accelera o si ritarda, ed allora risulta quest'altro principio, che la metà della somma dei prodotti delle masse del sistema pel quadrato delle rispettive velocità aumenta o diminuisce sempre di una quantità eguale alla quantità d'azione, od al lavoro dinamico che si è trovato in eccesso; purchè il movimento non sia stato soggetto ad urti di corpi molli che abbiano distrutto delle velocità. Vedasi la nota (1). Questo principio forma il celebre principio della conservazione delle forze vive, perchè Leibnitz, ed in seguito i suoi seguaci Giovanni Bernoulli, Herman, s'Gravesande ed altri hanno chiamato *forza viva* residente in un corpo il prodotto della massa pel quadrato della sua velocità. Dietro questo principio possiamo considerare che la metà della forza viva che hanno acquistato i corpi del sistema rappresenta la quantità d'azione che la potenza ha trasmesso nel comunicarli quelle velocità, e che è come stata assorbita dall'inerzia della materia, e che la metà della forza viva che hanno perduto i corpi che si sono ritardati rappresenta la capacità che essi hanno avuto per produrre un lavoro dinamico. Così tutte le volte che nell'esercizio di una macchina potremo disporre della perdita di movimento di corpi che già hanno preconcepita una velocità, sarà col prodotto della massa nel quadrato della velocità che possono produrre che dovremo calcolare l'effetto dinamico che essi saranno atti a produrre.

9. Fu una simile considerazione che indusse Leibnitz ed i suoi seguaci a prendere per stima della forza di un corpo il prodotto della

massa pel quadrato della sua velocità. Essi facevano osservare che se un corpo dotato di una velocità come uno va ad urtare una molla, ed estinguendo la sua velocità la comprime di una certa quantità; lo stesso corpo dotato di una velocità doppia estinguendola contro quattro molle parallelamente unite, e ciascuna di forza eguale alla prima, verrà a comprimerle tutte quattro d'una stessa quantità, ciò che infatti l'esperienza conferma. Dunque conchiudevano essi, se questo corpo con una velocità doppia ha potuto nel secondo caso comprimere quattro molle eguali, la forza che possedeva in se era quadrupla, e perciò proporzionale al quadrato della velocità di cui era animato.

Questa misura delle forze che Leibnitz produsse in opposizione a quella che abbiamo dato nella prima lezione, dove abbiamo fatto vedere che le forze motrici si valutano proporzionalmente al prodotto della massa per la semplice velocità, o sia alla quantità di movimento generato, fece nascere una viva disputa fra i matematici nella prima metà del secolo passato. Ma è chiaro che si comprendevano due cose diverse col solo nome di forza. In un caso s'intendeva la forza motrice, cioè quella che può essere presa come misura della causa efficace che genera od altera ad ogni istante la velocità di un corpo; nell'altro caso s'intendeva la resistenza o la quantità di ostacoli che un corpo già in moto può superare nell'estinguere la sua velocità. La prima forza è proporzionale alla quantità di movimento che essa genera o distrugge ad ogni istante; quindi è che, nell'esempio surriferito, le quattro molle corrispondendo ad una forza retardatrice quadrupla, la velocità del corpo che le comprime soffre ad ogni istante una diminuzione quadrupla, e si trova infatti che nella metà del tempo la sua velocità che era doppia è tutta estinta. La seconda forza è misurata dalla resistenza superata, o dal lavoro dinamico che il corpo può produrre nel perdere la sua velocità, indipendentemente da ogni altro elemento, o durata in cui si compie l'azione, e questo lavoro come nel caso delle quattro molle risulta sempre proporzionale al prodotto della massa pel quadrato della velocità.

Terminerò questi cenni sulla forza viva riferendo un'espressione del celebre Mongolfier. *La forza viva*, diceva egli, *è quella che si paga*. Per schiarire questa frase, supponiamo che si abbiano a far montare alcuni pesi ad una data altezza gettandoli a mano. Per esempio che si abbiano a far montare dei mattoni alla cima di una fabbrica nel modo che talvolta usano i muratori gettandosegli gli uni agli altri situati in differenti ripiani, sin che dal suolo

arrivino alla sommità dove stanno quelli che li mettono in opera. Se si presentano per questo lavoro degli uomini più robusti degli altri, tali, che i primi possano ad ogni getto lanciar un mattone con una velocità doppia, questi essendo capaci di una forza viva quadrupla, il loro lavoro merita una paga quadrupla. In fatti ogni mattone lanciato con una velocità doppia monterà ad un' altezza quadrupla, di quella a cui salirebbe se fosse lanciato con una velocità semplice (1). Per ogni quattro ripiani nei quali sarebbe necessario di porre degli uomini deboli si potrà supplire ponendo solo nel quarto ripiano degli uomini più robusti, così il lavoro dinamico e l' effetto utile di ciascuno di questi uomini forti equivarrebbe a quello di quattro uomini deboli, e l' imprèsario della fabbrica troverà ancora il suo conto dando loro una paga quadrupla.

In generale la forza viva potendo produrre col consumarsi un lavoro dinamico proporzionale, ed essendo la quantità di questo lavoro quella che conta nell' esecuzione delle opere è in proporzione della forza viva che li corrisponde che deve essere valutato il prezzo di un motore.

(1) Vedasi la nota 1 della Lezione III.

LEZIONE XII.

Comunicazione del movimento.

1. Un corpo in moto se incontra nella sua via un altro corpo, agisce su questo; se è in quiete lo pone pure in movimento, se è già in moto altera il movimento preesistente. Frattanto che produce quest'effetto sul corpo che lo intoppa nel suo cammino risente una reazione da quello, ed il suo proprio movimento ne viene alterato. Le leggi con cui questi corpi agiscono reciprocamente ~~le velocità~~ velocità che ne danno dopo l'urto, abbozzate da prima da Marco Marci di Crownland, sono state sviluppate da Wallis, da Wren, da Huyghens ad instanza della Società Reale di Londra. Noi le esporremo deducendole come meglio si conviene dalle idee moderne sulla costituzione dei corpi.

2. La legge fondamentale della chimica, che le sostanze non possono combinarsi che in *proporzioni definite*, cioè in certe quantità rispettive di peso che si chiamano *equivalenti chimici*, riceve una facile spiegazione dal supporre che i corpi sono composti d'atomi distinti. Infatti dovendo, in questa ipotesi, ciascuna molecola simile del composto constare di un numero rispettivo d'atomi di ciascuna delle sostanze componenti, queste sostanze non potrebbero concorrere a formare il composto se non fornendo ciascuna od un numero d'atomi eguale a quello delle molecole del composto, ovvero un multiplo di esso, e quindi senza stare fra loro in una certa proporzione di peso. È evidente che dividendo i pesi rispettivi di ciascuna delle sostanze equivalenti pel numero d'atomi che si suppone che essa fornisca a ciascuna molecola del composto, i quozienti devono rappresentare i pesi di un egual numero d'atomi, e quindi essere proporzionali al peso degli atomi delle stesse sostanze. Le tavole dei pesi atomistici dei corpi semplici che sono date nei trattati di chimica sono fondate su questo principio.

I risultamenti delle sperienze di Dulong e Petit sul calore specifico delle sostanze semplici, quelli di Newman sul calore specifico dei carbonati, e solfati hanno fatto vedere che nella più parte dei casi questi calori sono, a parità di massa, proporzionali al numero degli atomi, di cui essi devono constare per soddisfare alle leggi chimiche delle proporzioni definite. Ciò verrebbe a dire che ogni atomo di quei corpi esige una stessa quantità di calore per elevare di uno stesso grado la sua temperatura; e questa semplicità di rappor-

to, mentre forma una delle leggi più mirabili della Fisica, parla in favore del sistema atomistico.

La regolarità delle forme che vestono i cristalli già ci palesa direttamente una corrispondente regolarità nella struttura delle molecole integranti, ma una legge più notabile ancora viene a legare le forme cristalline colla composizione atomistica dei corpi. Questa legge che il Sig. Mitscherlich ha particolarmente segnalato, ed alla quale ha dato il nome di *isomorfismo* consiste in ciò che segue. Quando due sostanze hanno una composizione chimica simile, vale a dire gli equivalenti che compongono le loro molecole rispettive sono in pari numero, ed il numero degli atomi che somministra un equivalente alle molecole dell'una è eguale a quello degli atomi che il corrispondente equivalente somministra alle molecole dell'altra, gli atomi venendo similmente disposti nelle due molecole, quelle sostanze sono tali che, cristallizzando, producono comunemente dei cristalli della stessa forma, con qualche lieve differenza negli angoli: viceversa l'identità di forma di due cristalli è un carattere probabile per conchiudere che la composizione chimica delle due sostanze che li formano è simile.

La legge importantissima scoperta dal Sig. Faraday che le correnti elettriche che si generano nelle composizioni chimiche sono in proporzioni definite, cioè sono eguali per eguali equivalenti chimici, e che viceversa eguali correnti elettriche separano dai corpi o scompongono equivalenti chimici eguali, non solo viene in conferma della composizione atomistica dei corpi, in quanto che ci mostra che l'elettricità interviene nella loro composizione proporzionalmente al numero degli atomi che si formano, ma ci fa anche travedere che dalle azioni elettriche dipendono le affinità chimiche che determinano la unione o separazione degli stessi atomi.

Finalmente i fenomeni di capillarità, non che quelli di resistenza che offrono i corpi alla compressione od alla distensione, mentre variano di volume, che rimarrebbero inesplicati, secondo i principj meccanici, se si volesse supporre una continuità nei punti d'emanazione delle forze che operano nell'interno dei corpi, trovano una spiegazione diretta, come vedremo nelle lezioni seguenti, allorchè si adotta il principio che queste forze emanino da centri prossimi ma distinti, e quindi quei fenomeni forniscono una prova ognor più convincente della costituzione atomistica dei corpi.

Le leggi ed i fenomeni che ho brevemente accennato conducono dunque il fisico a risguardare i corpi come composti di atomi distinti e separati.

3. Se poi esaminiamo i corpi rispetto alle loro proprietà meccaniche e termometriche, vediamo che sottoponendoli a delle forti pressioni od esponendoli a delle basse temperature diminuiscono di volume, e che il progresso di queste diminuzioni diviene sempre più difficile a conseguirsi più i corpi sono stati resi compatti, e più le temperature sono state depresse, talchè si esigono successivamente delle forze più grandi, e delle sottrazioni maggiori di calore per continuare la riduzione del loro volume.

Dall' altro canto, se tentiamo di allontanare fra loro, e di segregare le parti dei corpi che hanno acquistato lo stato solido, od anche liquido, esperimentiamo che essi oppongono una resistenza all' allontanamento o separazione delle loro parti.

4. Per spiegare questa attitudine dei corpi a cambiare di volume, e la doppia facoltà loro di opporre una resistenza tanto ad essere compressi, come ad essere dilatati, i fisici anteriori avevano immaginato diverse forme di molecole, e diverse strutture di corpi con degli interstizii vôti, ma supponendo sempre che le molecole si toccassero in alcuni punti per cui rimanessero congiunti ed offrissero un sistema di parti connesse. Con queste ipotesi la difficoltà era soltanto trasportata dalle masse più grandi alle loro parti più piccole; e d' altronde riusciva loro incompatibile il conciliare insieme i fenomeni cristallografici, meccanici e termometrici.

5. Il modo più diretto di spiegare questi fenomeni, e più conforme alla natura delle cose, si è di concepire gli atomi come minimi nuclei dove risiedono i centri dai quali emanano le forze le di cui azioni ci rendono sensibili i corpi, e producono tutte le loro modificazioni; di supporre che gli atomi non vengono mai al contatto immediato, ma rimangono separati fra loro da spazii intermedii impercettibili ai sensi, ma tuttavia grandi rispetto al loro volume, e di dedurne il carattere delle forze di cui sono dotati dai fenomeni che conosciamo.

Così, siccome quando si tenta di diminuire il volume di un corpo s' incontra una resistenza sempre più forte quanto più la compressione è grande, dobbiamo conchiudere che gli atomi d' un corpo venendo avvicinati più di quello che lo sono nello stato naturale del corpo esercitano una ripulsione, e che questa ripulsione cresce d' intensità col maggior loro avvicinamento.

Siccome poi quando si tenta di distendere un corpo allontanandone fra loro le parti, o segregandole, s' incontra una resistenza, dobbiamo arguire che gli atomi trasportati ad una distanza maggiore di quella che hanno nello stato naturale del corpo, pas-

sano ad esercitare un' azione attrattiva ; la quale poi a più grandi distanze termina nell' attrazione universale che domina il movimento dei corpi e delle grandi masse dell' universo.

Fra il maggiore avvicinamento, ed il maggiore scostamento degli atomi deve esistere una distanza intermedia nella quale essi trovandosi in un corpo esercitano azioni tali che la loro risultante è nulla su qualunque piccola parte del corpo, e queste distanze costituiscono lo stato naturale del corpo, poichè in questo stato tutte le sue parti non sono nè attratte nè respinte.

6. Secondo queste deduzioni gli atomi esercitano dunque una forza repulsiva fra loro nelle minime distanze, una forza attrattiva nelle distanze un po più grandi ma ancora insensibili, e fra queste deve trovarsi una distanza media in cui la loro forza reciproca divenga nulla. Queste forze sono indicate nella fisica in complesso col nome di *forze* od *azioni molecolari*. Esse sono assai energiche nelle minime distanze ancor impercettibili; ma la legge con cui diminuiscono all' aumentare delle distanze è assai rapida, e differisce grandemente da quella della ragione inversa dei quadrati, che vale per l'attrazione universale, perchè le azioni molecolari non sono più sensibili appena le distanze sono sensibili, e si è provato matematicamente che secondo la proporzione inversa dei quadrati delle distanze non potrebbero risultare delle azioni così potenti, quali i fenomeni della coesione ci palesano (1).

7. La deviazione delle azioni molecolari dalla legge di decrescimento nella ragione dei quadrati delle distanze, legge che sembra inerente alla natura delle emanazioni, non che il passaggio di queste azioni dall' essere repulsive ad essere attrattive c' inducono a credere che queste forze attribuite alle molecole materiali non sono semplici di loro natura, ma sono il risultato composto delle azioni di altre forze semplici. In un opuscolo pubblicato a Torino nel 1836, adottando la sola legge della ragione inversa del quadrato delle distanze, ho dimostrato come si possono dedurre delle azioni della natura di quelle dette molecolari, risguardando gli atomi soltanto come repulsivi fra loro, e lo spazio ripieno di un'etere repulsivo per se stesso, ma sul quale gli atomi spiegano una forza attrattiva. Gli atomi si vestono in virtù di questa loro attrazione di un' atmosfera d' etere di una densità grandissima nell' immediato

(1) Vedansi sopra tutto le *Riflessioni sulla legge dell' attrazione molecolare*. Memoria del Prof. Giuseppe Belli, nel Tomo I degli opuscoli matematici e fisici di diversi autori pubblicato nell'anno 1832 coi tipi G. E. Giusti.

contatto con esso loro, ma così rapidamente decrescente che ad una distanza sensibile da essi può confondersi con quella generale dello spazio, ed in questo stato esercitano in congiunzione delle loro atmosfere delle forze che nelle minime distanze insensibili hanno le proprietà delle azioni molecolari, ed a maggiori distanze rappresentano l'attrazione universale (1). Mentre questa dottrina della generazione delle forze molecolari attende quello sviluppo e quel grado di semplicità che la renda atta ad essere esposta per servir di fondamento in un corso elementare, continueremo a risguardare le azioni molecolari, quali risultano dai fenomeni, come inerenti alle molecole, senza occuparci della loro origine.

8. Gli atomi primitivi di specie diversa si combinano, come abbiamo annunciato sopra, chimicamente in un certo numero e costituiscono delle molecole tutte simili fra loro, ma ancora impercettibili ai sensi. Queste molecole riunendosi in equilibrio stabile a piccole distanze fra loro, formano i corpi che non sono semplici, o pure combinandosi di nuovo formano in varii casi delle molecole più composte dalla coesione delle quali risultano altri corpi. La disposizione secondo cui gli atomi si coordinano nel comporre una molecola viene a costituire in certo modo la sua figura, e le forze che spiega la molecola in virtù di questa sua configurazione non che della varia natura degli atomi che si trovano sugli angoli vengono ad essere diverse secondo i diversi suoi lati. In questo modo s'intende come corpi formati da molecole chimicamente composte di uno stesso numero d'atomi di ciascun equivalente o come si dice, *isomeri*, possano nondimeno manifestare proprietà diverse; basta per questo che la posizione che hanno preso gli atomi nel formare le rispettive molecole sia diversa.

9. Secondo queste considerazioni dobbiamo dunque risguardare i corpi solidi come aggregati di molecole figurate tenute in equilibrio stabile a certe distanze fra loro in virtù di attrazioni e repulsioni, energiche soltanto nei limiti di distanze insensibili, e che operando più in alcune direzioni che in altre danno agli assi di figura delle molecole una certa orientazione. Dalla resistenza che oppongono le molecole ad ogni cambiamento di direzione nella situazione dei loro assi nasce la difficoltà che hanno a girare le une intorno alle altre, e quindi in complesso il contrasto che fa il corpo a cambiar di figura, o, come si dice, la rigidità del corpo. Quando una forza o causa esteriore tende a rimuovere le molecole dal loro

(1) Vedasi il n.° 8 e seg. della Prolusione premessa a queste Lezioni.

stato, variandone le distanze o la posizione in cui sono in equilibrio, appena un lieve spostamento, ancor impercettibile ai sensi, è succeduto, che immediatamente si sviluppa un gran numero di forze, tanto grande quanto è il numero delle molecole che partecipano allo spostamento, le quali tutte concorrono ad opporsi al rimovimento ulteriore delle stesse molecole. Queste forze spiegano un' energia sempre più crescente se si vuole produrre un successivo avvicinamento delle molecole o una compressione, ma un' energia che solo cresce sino ad un certo massimo se si tenta di produrre un allontanamento di esse. Nella maggiore o minore attitudine delle forze interne molecolari per opporsi all' azione di una causa esteriore che tenti di scompaginare le parti di un corpo, consiste il grado della sua durezza.

Nei corpi omogenei, o nei cristallizzati, le molecole si rimuovono bensì dalla loro situazione naturale per un certo tratto minimo, ma le forze che tendono a ricondurle a questa situazione si mantengono attive, e tosto che la causa esteriore di ravvicinamento cede, le molecole sono velocemente restituite alla loro situazione d' equilibrio, passano al di là di questa situazione, in virtù della velocità preconcepita, poi ritornano indietro, e così vibrano un gran numero di volte sino a che a poco a poco le loro vibrazioni si estinguono. Questi corpi si chiamano *elastici*.

Nei corpi eterogenei, quelli specialmente che contengono umidità, le molecole, avendo ancora un certo grado di facilità di avvolgersi le une intorno alle altre, presentano poca resistenza al cambiamento di figura del corpo, e trovando esse a certi tratti minimi di spostamento, altre situazioni in cui possono rimanere in equilibrio, succede che, quando la forza esteriore che le ha rimosse cessa d' agire, esse non tendono più sensibilmente a ricuperare il loro posto. Questi corpi si dicono *molli*.

10. I caratteri che abbiamo definito pei corpi elastici e pei corpi molli appartengono all' elasticità e alla mollezza perfetta. Nessuno dei corpi in natura è forse perfettamente elastico, come nessuno è perfettamente molle, e fra questi estremi i varii corpi presentano dei gradi successivi verso la elasticità o la mollezza perfetta, che nello stato delle nostre cognizioni non possiamo riconoscere in ciascun corpo se non per esperienza. Per non complicare quindi le nostre considerazioni tratteremo soltanto dell' urto dei corpi dotati di una perfetta elasticità, o mollezza, come quei casi che ci offrono i limiti dei risultamenti fra i quali devono essere compresi tutti i casi che presenta la natura.

11. La proprietà dei corpi che si è chiamata l' impenetrabilità potrebbe appartenere agli atomi primitivi loro, ma essa non è mai posta in azione o fatta palese dalle loro masse. Quando un corpo s' oppone onde un altro non occupi il suo luogo, o cede il suo luogo ad un altro,ciò proviene da che quando alcune molecole di quest' ultimo giungono ad una certa minima distanza dalle molecole del primo si spiega fra loro una ripulsione che cresce con una rapidità grandissima al loro accostarsi maggiormente, e questa repulsione se il corpo urtato ha una massa enorme rispetto al corpo urtante finisce coll' estinguere la velocità di questo, e se è elastico a comunicargli una velocità eguale in verso opposto, e se il corpo urtato ha una massa comparabile con quello dell' urtante pone anche il primo corpo in movimento, o ne altera la sua velocità se è già in movimento, ed è lo scompartimento di questa velocità che si tratta di determinare col problema che oggi tratteremo della comunicazione del movimento.

12. Consideriamo due masse sferiche m ed m_1 animate dalle velocità v e v_1 secondo una stessa direzione, e che v sia, per esempio,più grande di v_1 talchè la massa m sopraggiunga nel suo cammino la massa m_1. Tosto che le masse saranno ad una tale prossimità che le forze repulsive delle loro molecole vicine divenga sensibile nascerà una azione fra di esse che tenderà a ritardare la massa m, e quindi con una reazione eguale e contraria ad accelerare la massa m_1. Questa azione e reazione dureranno un tempo brevissimo, perchè le forze molecolari di ripulsione crescendo rapidissimamente di energia per una diminuzione insensibile delle distanze, e la massa m avendo un eccesso finito di velocità sopra la massa m_1, in un istante di durata impercettibile avrà già progredito di tanto d' aver provato dalla parte della repulsione il totale estinguimento del suo eccesso di velocità ; quantunque succeda in questo come in tutti i casi della natura che le forze annientino le velocità diminuendole successivamente, e facendole passare per tutti i gradi intermedii.

Qualunque sia la legge con cui variano le repulsioni delle molecole al cambiare delle loro distanze reciproche, è evidente che la repulsione delle molecole della massa urtata su quella della massa urtante essendo reciproca, e le azioni e reazioni che si spiegano immediatamente fra le molecole delle stesse masse distribuendo le velocità in modo che esse vengono ad essere sensibilmente eguali per tutte le molecole della stessa massa, gli effetti delle somme delle ripulsioni potranno essere paragonati a quelli di una forza motrice che operi ad ogni istante egualmente sulle due masse ma

in direzione contraria, e che quindi comunichi a queste masse dei gradi di velocità che saranno in ragione inversa delle masse. Questo rapporto sussistendo pei piccoli gradi di velocità comunicate ad ogni istante, anche la velocità acquistata dall'una e perduta dall'altra durante un tempo qualunque dell'azione dell'urto staranno nella stessa ragione, per cui chiamando w e w_1 questa velocità si avrà

$$m : m_1 :: w_1 : w$$

o sia

$$(1) \qquad m\,w = m_1\,w_1.$$

I valori di w e w_1 cambieranno nel tempo dell'azione dell'urto, ma tosto che la sfera urtante m avrà perduto tanto della sua velocità, e la urtata m_1 ne avrà acquistata tanta che amendue procedano colla stessa velocità u, così che sia

$$(2) \qquad v - w = u \qquad v_1 + w_1 = u,$$

allora la sfera m che avanti era più veloce, non restandole alcun eccesso di velocità, non anderà più accostandosi alla sfera m_1, e se le due sfere sono fatte di materie molli, in cui le molecole rimangano in una situazione di equilibrio, ogni azione fra le due sfere cesserà, e continueranno a moversi unite assieme nel tempo successivo colla velocità u.

13. Lo stesso non accadrà se la materia delle due sfere è elastica. In questo caso cessata che sia l'azione proveniente dalla differenza delle velocità, le molecole dell'una e dell'altra sfera, che durante l'azione sono state obbligate ad avvicinarsi, si troveranno soggette all'azione repulsiva che agirà per riporre le molecole nel loro stato primitivo d'equilibrio. Succederà quindi una seconda serie d'azioni in ordine inverso ma perfettamente eguale a quella che è succeduta prima; la massa m perderà in conseguenza di questa seconda serie d'azioni una parte di velocità eguale a w e la massa m_1 acquisterà un'altra parte di velocità eguale a w_1, e quindi la loro velocità comune, che, alla fine della prima serie d'azioni era u, sarà ridotta per la massa m a

$$(3) \qquad u - w = v', \text{ e per la massa } m_1 \text{ a } u + w_1 = v'_1.$$

Le equazioni (1) e (2) nel caso dei corpi molli, e le equazioni (1) (2) (3) in quello dei corpi elastici risolvono il problema che ci siamo proposti, ed anderemo ora ad analizzare le conseguenze che da esse si deducono accennando le leggi principali che ne risultano. Cominciamo dai corpi molli.

14. Dalle equazioni (2) si ricava

$$u = v - u \qquad u_1 = \text{[illegible]} - \text{[illegible]}_1 :$$

sostituendo questi valori nell'equazione (1) si deduce

$$(4) \qquad m v + m_1 v_1 = m u + m_1 u \quad ;$$

la quale dà la velocità comune dei corpi dopo l'urto per mezzo della formola

$$(5) \qquad u = \frac{m v + m_1 v_1}{m + m_1}.$$

Se la velocità del corpo m_1 invece di essere nello stesso verso di quella del corpo m fosse stata in verso contrario, così che i due corpi si fossero andati in contro, si dovrebbe dare a v_1 in questa formola un valor negativo.

L'equazione (4) è detta l'equazione *della conservazione della quantità di movimento:* essa ci mostra che nell'urto dei corpi molli la somma delle quantità di movimento rimangono eguali prima e dopo l'urto, prendendo in queste somme come negative le quantità di quei movimenti che sono diretti in verso contrario a quelli espressi da quantità assunte come positive.

15. Prendiamo per punto d'origine il luogo dove le due sfere s'incontrano, e per linea a cui riferire le posizioni dei corpi, quella secondo la quale le due sfere si muovono. Se si chiamano x ed x_1 le distanze dal detto punto delle due sfere in un tempo qualunque avanti l'urto, il centro di gravità di questi due corpi, si troverà secondo una formola che abbiamo dimostrato nella Lezione X, ad una distanza dallo stesso punto fisso data da

$$X = \frac{m x + m_1 x_1}{m + m_1}.$$

Ma è facile il concepire che se si chiama t il tempo, che ha preceduto l'urto, in cui le sfere erano alla distanza x ed x_1 si ha

$$x = v t \quad , \qquad x = v_1 t \quad ;$$

dunque sostituendo sarà

$$(6) \qquad X = \frac{m v + m_1 v_1}{m + m_1} t ;$$

o ponendo per il valore di u dato dall'equazione (5)

$$(6') \qquad X = u t.$$

Questa formola, che rappresenta il luogo del centro di gravità per un tempo qualunque t anteriore all'urto, ci fa vedere che

questo centro prima dell'urto passava successivamente pei diversi punti della linea secondo la quale si muovono i corpi, colla stessa velocità u con cui le due palle si muovono assieme dopo l'urto, e quindi colla stessa velocità con cui si muove il centro di gravità dopo l'urto. Le velocità del centro di grvità prima e dopo l'urto sono dunque eguali, e questa seconda legge della comunicazione del movimento si chiama la legge della *conservazione del movimento del centro di gravità.*

16. Facciamo il quadrato delle due equazioni trovate sopra

$$v - u = w \qquad u - v_{,} = w_{,} ,$$

e sommiamo il primo quadrato moltiplicato per m col secondo moltiplicato per $m_{,}$ facendo le riduzioni che somministra l'equazione (4) si avrà

$$(7) \quad m v^2 + m_{,} v_{,}^{\,2} - m u^2 - m_{,} u^2 = m w^2 + m_{,} w_{,}^{\,2}.$$

La quantità $m v^2 + m_{,} v_{,}^{\,2}$ rappresenta come abbiamo detto nella Lezione precedente la forza viva dei due corpi prima dell'urto, le quantità $m u^2 + m_{,} u_{,}^{\,2}$ è la forza viva dei corpi dopo l'urto, così il primo membro dell'equazione precedente esprime la differenza di forza viva del sistema prima e dopo l'urto, e pel secondo membro si vede che questa differenza è sempre una perdita di forza viva eguale alla somma della forza viva che possederebbe ciascuno dei corpi se si muovesse liberamente colla velocità che ha perduto od acquistato nell'urto. Questa terza legge si chiama la legge *del deperdimento delle forze vive nell'urto dei corpi molli.*

17. Passiamo ora a dedurre le leggi della comunicazione del moto fra i corpi elastici.

Prendendo rispettivamente le differenze delle equazioni (2) e (3), si ha

$$(8) \qquad v' = 2u - v \qquad v_{,}' = 2u - v_{,} ;$$

e sottraendo queste equazioni una dall'altra, si ottiene

$$(9) \qquad v - v_{,} = v_{,}' - v' ,$$

cioè le velocità relative delle due masse prima e dopo l'urto sono eguali, ma in verso contrario. Di quanto la velocità v della massa m superava quella $v_{,}$ della massa $m_{,}$, avanti l'urto, d'altrettanto la velocità $v_{,}'$ della massa $m_{,}$ supera quella v' di m dopo l'urto.

Per avere i valori delle velocità v' e $v_{,}'$ dopo l'urto in funzione di quelli avanti l'urto conviene mettere nelle formole (8) il valore di u che è dato dall'espressione (5), si avrà così

$$10) \quad v' = 2\frac{m v + m_1 v_1}{m + m_1} - v; \qquad v_1' = 2\frac{m v + m_1 v_1}{m + m_1} - v_1.$$

Da queste equazioni, e dalle premesse si possono dedurre le leggi generali che sussistono nell' urto dei corpi elastici analoghe a quelle che abbiamo dimostrato pei corpi molli.

18. Primieramente, sostituendo i valori di v e v_1 che danno le equazioni (5) nell' equazione (1), e poi sostituendo il primo membro dell' equazione (4) in luogo del secondo, risulta

$$(11) \qquad m v + m_1 v_1 = m v' + m_1 v_1'.$$

Questa equazione ci mostra che la prima legge dell' urto trovata sopra pei corpi molli vale anche pei corpi elastici, cioè che le quantità di movimento valutate nella stessa direzione sono eguali prima e dopo l' urto.

19. Le distanze delle masse m ed m_1 dal punto del loro incontro per un tempo t dopo seguito l' urto sono espresse da

$$x' = v' t \qquad x_1' = v_1' t$$

e come la distanza del centro di gravità delle due masse dallo stesso punto si ottiene dalla formola

$$X' = \frac{m x' + m_1 x_1'}{m + m_1}$$

sostituendo i precedenti valori di x' ed x_1', si avrà

$$(12) \qquad X' = \frac{m v' + m_1 v_1'}{m + m_1} t$$

o vero in virtù dell' equazione (11)

$$X' = \frac{m v + m_1 v_1}{m + m_1} t.$$

Il coefficiente di t essendo lo stesso nell' equazione (6) ed in questa, ci fa vedere che la velocità del centro di gravità delle due masse rimane costante prima e dopo l' urto, il che conviene colla seconda legge della conservazione del movimento del centro di gravità.

20. Le equazioni (9) e (11) colla trasposizione dei termini danno

$$v + v' = v_1 + v_1';$$

$$m(v - v') = m_1(v_1' - v_1);$$

se si moltiplicano membro per membro queste equazioni risulta

$$m\,(v^2 - v'^2) = m_1\,(v_1'^2 - v_1^2);$$

o sia

$$m\,v^2 + m_1\,v_1^2 = m\,v'^2 + m_1\,v_1'^2,$$

la quale si fa vedere che nell' urto dei corpi elastici le forze vive sono eguali prima e dopo l' urto. Questa terza legge si chiama la legge *della conservazione delle forze vive.*

22. I risultamenti delle equazioni (5) e (8) sono stati presentati con un' elegante costruzione dal Cav. Wrenn quando queste teoriche erano ancora sul loro nascere. Siano A e B fig. 50, disse il Cav. Wrenn, due sfere che si muovono una incontro all' altra, la prima con una velocità $A\,D$, e la seconda con una velocità $B\,D$, così chè il loro incontro si faccia nel punto D. Sia C il centro di gravità delle due sfere nell' istante in cui esse sono in A ed in B. È evidente che $C\,D$ sarà la velocità del centro di gravità che abbiamo trovato essere rappresentata da u nella formola (6').

Prendasi un punto E dal lato di C opposto a quello in cui è D e ad eguale distanza, sarà $A\,E = A\,D - 2\,C\,D$ la velocità della sfera A dopo l' urto ma contata da E verso A cioè in verso contrario, e sarà $B\,E = B\,D + 2\,C\,D$ la velocità della sfera B pure diretta da E verso B. Si vede infatti che le lunghezze di queste linee $A\,E$, $B\,E$ coincidono colle espressioni $-(v - 2\,u)$ e $2\,u - v$, che danno le formole (8), osservando che v_1 ha nel caso addotto un valor negativo.

In questa costruzione si è supposto che le velocità dei due corpi siano contrarie: se fossero nello stesso verso il punto D cadrebbe fuori dello spazio $A\,B$ dal lato del corpo che ha minor velocità. Così pure se il punto E venisse a cadere fuori di $A\,B$ vorrebbe dire che i due corpi elastici si muoverebbero dopo l' urto amendue nella stessa direzione da E verso il lato ove si trova $A\,B$ (1).

22. Le leggi che abbiamo riconosciute sull' urto dei corpi nel caso semplice di due sole sfere, sono generali e sussistono nel l' urto dei corpi di figura qualunque che si percuotano direttamente, obliquamente od eccentricamente, ma la discussione di tutti questi casi esige considerazioni matematiche troppo complicate

(1) Si può vedere a questo proposito anche l' opuscolo del Prof. P. Obici intitolato *Le leggi del moto cagionato ne' corpi dalla percossa graficamente determinate* ed aggiunto agli Elementi di Fisica del Mozzoni. Firenze 1841.

per essere esposte in queste lezioni elementari. Vedasi il bel libro di Carnot intitolato *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, Paris 1803, ove le materie di cui ci siamo occupati in queste ultime due lezioni sono trattate con molta estensione e spirito filosofico.

23. Porrò termine a questa lezione deducendo dalle formole generali, alcuni corollarii i cui risultamenti possono facilmente essere verificati coll' esperienza.

Supponiamo che le due sfere siano eguali in massa e che una sia in quiete mentre l' altra viene ad urtarla; in questo caso si avrà $m = m_1$ e $v_1 = o$, e le velocità dopo l' urto saranno; se i corpi sono molli

$$u = \tfrac{1}{2} v ,$$

cioè ciascuna palla avrà la metà della velocità della palla urtante: se i corpi sono elastici sarà

$$v' = o , \qquad v'_1 = v ,$$

cioè la prima palla si fermerà, e la seconda acquisterà tutta la velocità della prima.

24. Supponiamo le palle elastiche, e che al lato della seconda palla siavene una terza e poi una quarta e così di seguito quante palle si vogliono, tutte di masse eguali. La seconda palla dopo aver acquistato la velocità della prima si getterà colla stessa velocità sulla terza e nello stesso modo della prima perderà questa velocità, che passerà nella terza; dopo da questa terza la velocità sarà comunicata alla quarta, e così di seguito sino all'ultima che balzerà dalle altre colla velocità con cui ha urtato la prima, mentre tutte le altre resteranno in quiete.

25. Per generalizzare queste conseguenze non suppongansi più le masse elastiche m ed m_1 eguali fra loro, ma sia $m = i\, m_1$, cosicchè la massa m del corpo urtante sia maggiore, eguale o minore di quella del corpo urtato, secondo che si prende i maggiore, eguale o minore di uno. Le formole (10) dopo qualche semplice riduzione daranno

$$(13) \qquad v' = \frac{i-1}{i+1} v \qquad v'_1 = v + \frac{i-1}{i+1} v ,$$

queste formole ci mostrano che in ogni caso la velocità del corpo urtato sarà sempre, algebricamente, maggiore di quella del corpo urtante di tutta la velocità che questo aveva avanti l' urto, cioè che i due corpi anderanno dopo l' urto allontanandosi l' uno dall' altro colla velocità che aveva il corpo urtante prima dell' urto.

Se sarà $i = 1$, cioè se la massa m è eguale alla massa m_1, si ha il caso dell' articolo precedente, poichè risulta

$$v' = o \qquad v_1' = v$$

e tutta la velocità del corpo urtante sarà passata nel corpo urtato.

Se $i > 1$, cioè se la massa del corpo urtante è maggiore di quella del corpo urtato, il primo conserva ancora una porzione della sua velocità, poichè v' ottiene dall' equazione (13) un valor positivo, e perciò i due corpi si muoveranno con delle velocità la cui differenza sarà eguale a quella del corpo urtante avanti l' urto, ma che saranno amendue nella stessa direzione.

Se $i < 1$, vale a dire se la massa del corpo urtante è minore di quella del corpo urtato, il valore di v' dato dalla prima delle equazioni (13) diviene negativo, il che ci dice che la velocità del corpo urtante prende una direzione contraria a quella di prima, ma la velocità v_1' del corpo urtato, data dalla seconda delle equazioni (13) che si riduce a $\frac{2\,i}{i+1}\,v$, risultando sempre positiva, questo si muoverà nella stessa direzione in cui si moveva il corpo urtante prima dell' urto, da cui si scosterà con una velocità relativa eguale a questa stessa velocità.

ELEMENTI D'IDROSTATICA

LEZIONE XIII.

Della trasmissione della pressione attraverso una massa fluida, e delle condizioni d'equilibrio della stessa massa.

1. Idrostatica è il nome che si dà alla scienza che tratta delle condizioni che costituiscono lo stato d'equilibrio dei fluidi.

Il principio fondamentale che l'esperienza mostra intorno all'equilibrio dei fluidi è la proprietà che essi hanno di trasmettere a tutte le loro parti una pressione esercitata sopra una parte qualunque della loro superficie.

Contenga un vaso chiuso, di figura qualunque, fig. 51, un liquido che supporremo per ora sottratto all'azione della gravità. Sopra ciascuna faccia del vaso sianvi delle aperture alle quali siano adattati dei turaccioli o stantuffi. Se si applica ad uno di questi stantuffi, S, una forza che tenda a spingerlo all'indentro del vaso, l'esperienza prova che è necessario applicare agli altri stantuffi altrettante forze eguali, se le aperture sono eguali in estensione, o delle forze proporzionali alle superficie delle aperture se sono diseguali, onde questi stantuffi non siano respinti in fuori.

2. Considerati i corpi come aggregati di molecole che si tengono in equilibrio stabile, a certe distanze fra loro, in virtù di forze, che sono repulsive nelle minori, attrattive nelle maggiori distanze, ma che tutte non operano sensibilmente che dentro i limiti di distanze insensibili, i fluidi differiscono dai solidi, in quanto che le forze che ciascuna molecola spiega sulle altre, sono probabilmente per causa di un maggiore scostamento indipendenti dall'orientazione degli assi della sua figura (1). Queste forze agiscono quindi sensibilmente tutt'all'intorno di ciascuna molecola in un modo eguale, e non sono variabili che colle distanze; ed affinchè una molecola non soggetta a forze esteriori, sia in equilibrio ad una profondità sensibile nel suo interno, per le sole azioni delle forze molecolari, vale a dire, affinchè una molecola qualunque si trovi

(1) Vedasi l'art. 9 della Lezione precedente.

sempre in mezzo di un numero simmetrico d' azioni, e non sia attratta o respinta più in un verso che in un altro, basta che le molecole siano tutte uniformemente distribuite le une intorno alle altre, e che quindi la densità del fluido sia uniforme.

3. Per concepire come nella massa di un fluido così costituito possa esistere una pressione o trazione, immaginiamo condotto attraverso di essa un piano, fig. 52, e sopra un elemento di questo piano, e perpendicolarmente ad esso un piccolo prisma del liquido, alto soltanto quanto si estende l' azione sensibile delle molecole poste dall' altro lato del piano. L' equilibrio non sarà tolto se supponiamo che per un' istante questo prisma venga a consolidarsi. La somma delle azioni che le molecole poste dall' altro lato del piano esercitano sopra tutte quelle del piccolo prisma, sarà variabile secondo che il fluido sarà in uno stato di pressione o di trazione. Se le molecole si trovano a distanze tali che le azioni repulsive del fluido al di là del piano sulle molecole del prisma, che sono rispettivamente più vicine, siano eguali alle azioni attrattive sulle molecole rispettivamente più lontane (1), il prisma non è nè respinto, nè attratto, verso il piano; ed in questo caso il fluido sarà nello stato naturale, non soggetto a pressione o trazione veruna. Se il fluido è compresso, le sue molecole si sono avvicinate, benchè impercettibilmente, e come per questo avvicinamento le forze repulsive, fra le molecole rispettivamente più vicine, sono cresciute in maggior ragione delle attrattive fra le molecole rispettivamente più lontane, il prisma si trova respinto; con questa repulsione resiste alla pressione che tende a farlo passare al di là del piano, per cui questa pressione viene ad essere controbilanciata dall' azione stessa del fluido. Se il fluido è stirato, le sue molecole si sono allontanate, coll'allontanarsi le azioni attrattive sul piccolo prisma sono venute ad eccedere le repulsive le quali decrescono più rapidamente coll' aumentare delle distanze reciproche delle molecole, e per mezzo di un tale eccesso di attrazione il fluido distrugge l' azione che tende a staccare il prisma dal piano. (Vedasi la nota 1). Quest' ultimo eccesso è sempre assai debole nei liquidi, perchè essi non oppongono che poca resistenza ad essere divisi; pure esiste, e varii fenomeni si conoscono in cui i liquidi manifestano un'attrazione sensibile prima d' essere separati dal resto della massa.

Da queste considerazioni dobbiamo quindi conchiudere, che esiste per ogni fluido una certa distanza fra le molecole, nella quale

(1) Vedasi l' art. 6 della Lezione precedente.

le diverse parti del fluido non si attraggono, nè si respingono fra loro, e nella quale il fluido non sostiene pressione o trazione alcuna, ed è costituito in quello stato che chiamiamo *stato naturale.* Se questa distanza viene a diminuire, le parti del fluido si respingono reciprocamente, e sostengono una pressione; viceversa se viene ad aumentare le parti del fluido si attraggono reciprocamente, e resistono ad una trazione.

4. In qualunque stato sia naturale, di pressione o di trazione si trovi un fluido soltanto sottoposto a delle pressioni o trazioni esteriori, se esso è in equilibrio in virtù delle sole forze molecolari, l' uniforme distribuzione delle sue molecole che abbiamo visto dover sussistere nel suo interno, esige che la risultante delle azioni sul prismetto di cui parlammo, sia perpendicolare al piano, e costante in qualunque punto ed in qualunque direzione il piano sia condotto, e che perciò essa sia eguale e contraria relativamente a due prismetti eretti sulle facce opposte di un elemento qualunque del piano, fig. 52.

5. Secondo queste idee della costituzione dei fluidi è ora facile l' intendere come venga a sussistere la proprietà che abbiamo annunciata della trasmissione della pressione per ogni verso. Lo stantuffo S, fig. 51, a cui è applicata la forza che tende a farlo penetrare nel vaso sposta da principio un poco le molecole del fluido che gli stanno dirimpetto, e le fa avvicinare alle seguenti. Benchè quest' avvicinamento possa essere impercettibile ai sensi, ciò non ostante atteso l'immenso numero di molecole che vi partecipano, e la rapidità della legge con cui aumentano le forze repulsive delle molecole al diminuire delle loro distanze reciproche, ne può risultare e ne resulta in realtà una forza repulsiva sufficiente ad arrestare lo stantuffo e ad equilibrarne l' azione. Questo stato di repulsione del primo strato, prodotto dall' avvicinamento delle sue molecole, non potrebbe però sussistere se non incontrasse un appoggio dalla parte opposta, cioè se non nascesse un avvicinamento corrispondente delle molecole del secondo strato, e quindi una forza repulsiva che lo renda atto a sostenere la pressione del primo strato, e a far sì che l'equilibrio si conservi. Lo stesso deve succedere per un terzo strato, e così di uno strato in un altro, di una direzione in un' altra si proverà che la massa fluida deve condensarsi in ogni parte, ed acquistare da per tutto una forza repulsiva tale, che un elemento piano qualunque compreso fra due strati consecutivi risenta sempre dai due prismetti che si possono elevare sulle sue due facce opposte due pressioni contrarie, ed eguali ciascuna a quella che produce lo stantuffo su d'un

eguale elemento del primo strato: il tutto appunto come l'esperienza ci ha mostrato.

6. Passiamo ora a valutare anche gli effetti del peso. Per tale oggetto dividiamo il liquido in tanti strati orizzontali fig. 53, e consideriamo tre strati consecutivi qualunque. Le molecole dello strato di mezzo non solo avranno colle loro forze repulsive a mettersi in equilibrio colla pressione proveniente dallo strato immediatamente superiore, ma dovranno di più sostenere il peso delle molecole di questo strato; dovranno quindi essere avvicinate un poco più fra loro per potere spiegare un eccesso di forza repulsiva sufficiente ad equilibrare le due dette forze. Similmente le molecole dello strato inferiore non solo dovranno possedere un eccesso di forza repulsiva eguale a quello dello strato medio, ma avranno a sostenere anche il peso delle molecole di questo strato: avranno quindi a sostenere oltre un'azione eguale alla pressione esercitata dallo strato superiore, anche il peso di due strati. Procedendo così di strato in strato si potrà provare che la pressione a cui deve resistere il fluido anderà aumentando, in ciascuno strato, del peso di tutti gli strati superiori, e che quindi le sue molecole dovranno soffrire un avvicinamento corrispondente per produrre un eccesso di forze repulsive che le controbilanci. Quest'avvicinamento delle molecole, e consecutivo aumento di densità, non è sensibile se il liquido ha poca profondità, ma a grandi profondità, come nel mare è sensibile e misurabile. Per esperimenti diretti si sa che l'acqua si comprime della 0,00004965^{ma} parte del suo volume per una pressione eguale alla pressione media atmosferica equivalente al peso di circa 103 chilogrammi su ogni decimetro quadrato della sua superficie (1).

Da quanto veniamo di dimostrare ne segue dunque che la differenza di pressione dello strato più elevato al più infimo è eguale in ogni elemento superficiale al peso di una colonna fluida che abbia per base quest'elemento, e per altezza l'altezza del liquido nel vaso. Non è necessario che il vaso sia prismatico fig. 53 affinchè quest'effetto abbia luogo. Qualunque sia la figura del vaso fig. 54, la pressione in ogni strato orizzontale dovendo essere la stessa in tutta l'estensione dello strato non può essere che eguale a quella del punto dove ne sarebbe massima. Così basta che un solo elemento di uno strato orizzontale sia caricato dal peso di una colonna fluida di una certa altezza, perchè la stessa pressione esista in tutti gli elementi di questo stesso strato.

1) Avogadro. Fisica dei corpi ponderabili Vol. II pag. 381.

7. Se il fluido è libero in una parte della sua superficie od è soltanto esposto in questa parte ad una pressione uniforme, come quella dell' atmosfera, esso non potrà essere più elevato in alcuni luoghi di questa parte superficiale che in altri, perchè conducendo (fig. 55) un piano orizzontale che passi per le prominenze, la pressione non potrebbe essere eguale nelle parti piene e negli intervalli voti, e le prominenze non trovando contrasto si scioglierebbero. La condizione dell' equilibrio dei fluidi pesanti esige dunque che se vi è una porzione di superficie libera, questa sia orizzontale. Se il liquido comunica con più vasi di forma diversa come nella fig. 56, 57, esso deve per lo stesso motivo trovarsi in tutti questi vasi comunicanti alla stessa altezza.

8. In generale se le molecole di un fluido, oltre all' azione reciproca delle forze molecolari, fossero soggette all' azione di altre forze esteriori, funzioni soltanto delle distanze, si potrebbe provare con un ragionamento analogo che dividendo il fluido in tanti strati nei quali ciascun elemento fosse perpendicolare alla risultante delle forze esteriori, la pressione in ognuno di questi strati verrebbe ad essere costante quando il fluido fosse in equilibrio. Quindi se la superficie del fluido è libera in qualche parte, o soggetta ad una pressione costante, la risultante delle forze esteriori in ogni punto deve essere perpendicolare a questa superficie. Clairaut ha chiamato le superficie degli strati in cui la pressione è costante *superficie di livello.*

9. Conoscendo come deve essere stimata la pressione in un elemento superficiale qualunque di un fluido pesante è facile il determinare quella che devono soffrire le pareti dei vasi che lo racchiudono. La pressione che è esercitata sulle pareti, e che essi distruggono è evidentemente eguale a quella del fluido, negli elementi contigui, ed è necessariamente perpendicolare alla superficie delle stesse pareti.

Da questa premessa è facile il dedurre con una considerazione geometrica e col principio della decomposizione delle forze, che se si concepisce divisa la capacità del vaso in modo che da ciascun elemento della sua superficie si diramino tre prismetti due orizzontali e perpendicolari fra loro ed uno verticale, e terminanti alle parti opposte delle stesse superficie, ciascuna delle due componenti orizzontali della pressione sull' elemento che si considera incontrerà nella base opposta del corrispondente prismetto orizzontale una componente eguale ed opposta, e che la componente verticale differirà da quella della base opposta del relativo prismetto del peso

del filetto fluido in esso contenuto. La somma di tutti questi eccessi o differenze corrispondenti a tutti i prismi verticali componenti la capacità del vaso, o sia la differenza di pressione su tutta la superficie del vaso, verrà dunque ad essere eguale al peso totale del fluido contenuto in esso. Vedasi la nota (2).

10. Da questa proprietà della pressione ne segue che la forza necessaria per sostenere un vaso pieno di un fluido non è che eguale al peso totale del fluido, più quello del vaso, mentre la forza che tende a sfiancare le pareti prodotta dalle due pressioni sulle due faccie opposte del vaso può essere grandissima, anche quando la massa del fluido è assai tenue.

Abbiasi per esempio un vaso della forma della fig. 58. La pressione sul liquido all' estremità del cannello $a\,b$ essendo su ciascun elemento superficiale eguale al peso di un prismetto di fluido che ha quest' elemento per base e per altezza l' altezza del liquido nel cannello; la stessa pressione sarà esercitata da giù in sù sopra tutta l' estensione della parete $S\,S'$. Questa parete sarà dunque spinta in su come se fosse tirata dal peso di una massa fluida che potesse coprirla sino all' altezza $s\,a\,s'$, e la parete $T\,T'$ sarà spinta all' ingiù col peso di una massa fluida che potesse coprirla sino alla stessa altezza $s\,a\,s'$. La differenza di queste due spinte non è che il peso del poco liquido contenuto in $S\,T\,T'\,S'$, e nel cannello, e questa sarebbe il di più della forza necessario per sostenere il vaso pieno da quando fosse voto: ma la parete $S\,S'$ tenderebbe ad allontanarsi dalla parete $T\,T'$ con una forza eguale alla pressione che soffre la prima, la quale è misurata come abbiamo visto dal peso di una massa assai grande, e potrebbe sfiancare il vaso se non fosse costrutto di pareti assai forti.

11. Vi è un mezzo di rendere sensibile questa differenza d' effetti con un esperimento che chiamasi il *paradosso idrostatico*. Un vaso cilindrico $A\,B\,C\,D$ (fig. 59) è riempito quasi interamente di liquido. Il fondo $F\,F'$ di questo vaso non è unito alle pareti ma è sostenuto dal braccio di una bilancia, per mezzo di una verga che passa nell' asse del cannello $G\,H$, e può farsi alzare o discendere facendo scorrere la verga nell' estremità del braccio della bilancia. Fatto l' equilibrio con dei pesi nell' altro piatto si faccia ascendere il fondo $F\,F'$ attaccando un punto più basso della verga all' estremità del braccio della bilancia, il liquido per eccesso del suo volume monterà nel cannello ed immediatamente l' equilibrio della bilancia sarà distrutto quantunque la massa dell' acqua sia rimasta la stessa; ciò che ha fatto dare il nome di paradosso a questo esperimento. La ragione si è che lo sforzo del fondo per discendere non è prodotto

dal peso ma dalla pressione che il liquido vi esercita sopra. Questa pressione aumenta quando il liquido è obbligato ad acquistare una maggiore altezza per la diminuita capacità della parte inferiore del cilindro, ed è eguale al peso del liquido più la pressione opposta che l'acqua fa contro il tetto *A B* del vaso, fermamente unito al banco della bilancia, pressione che reagisce sul fondo *F F'*. I pesi nell'altro piatto della bilancia misurano adunque oltre il peso del liquido anche questa pressione, e devono essere maggiori a misura che essa aumenta per una elevazione del liquido nel cannello.

12. Si è utilizzata la proprietà che hanno i liquidi di trasmettere una pressione per ogni verso con una macchina che chiamasi il Torchio idrostatico o di *Bramah*. In un piedistallo solido assai forte e fisso (fig. 60) è racchiusa una vasca *V* contenente del liquido. Da una parte sorge un cannello *C* in cui vi è una valvola *v* che si apre dal basso all'alto. Nella prolungazione del cannello al di là di questa valvola vi si trova uno stantuffo premente *P*, che si fa discendere ed ascendere per mezzo di un braccio di leva *M*. Il liquido è forzato da questo stantuffo, quando discende, a passare in un altro cannello orizzontale *D* nel quale vi è un'altra valvola *v'* che lo lascia passare nel recipiente *R*, ma non lo lascia più ritornare indietro. Questo recipiente *R* è cilindrico ed è quasi interamente occupato da un cilindro di ferro solido *K* che può scorrere in un collare *g g'* ed elevarsi od abbassarsi un poco. I corpi da essere compressi sono messi fra la testa *T T'* di questo cilindro ed un tetto *S S'* fisso sul corpo della macchina. Dall'altra parte sul fondo del recipiente *R* sorte un altro cannello *e*, che è tenuto chiuso durante l'esperimento, ma che finito si apre svolgendo una vite, e dà passo al liquido per retrocedere nella vasca.

Con questa macchina la pressione esercitata dalla estremità *P* dello stantuffo sulla superficie del liquido del cannello *C* è trasmessa al liquido del recipiente *R*, ed il suo effetto totale sul cilindro viene accresciuto nella ragione della superficie della base *P* dello stantuffo a quella della base *K* del cilindro. Se supponiamo che la base dello stantuffo abbia un centimetro di diametro, e quella del cilindro un decimetro, cosicchè le basi stiano come 1 : 100, un uomo che applicando la mano al manubrio potesse produrre sullo stantuffo soltanto una pressione di 10 chilogrammi, produrrà sul cilindro una forza ascensiva di 1000 chilogrammi colla quale il corpo sovrapposto alla testa del cilindro sarà compresso. Una forte spranga di ferro può essere con questo mezzo spezzata per traverso senza molta fatica, e con una macchinetta occupante uno spazio non maggiore di un piede cubico.

IDROSTATICA

LEZIONE XIV.

Dell' equilibrio dei corpi immersi nei fluidi, delle gravità specifiche, e degli areometri.

1. Le leggi dell' equilibrio dei corpi immersi nei fluidi furono in parte trovate sino dalla remota antichità, ed Archimede nel suo trattato intitolato περι οκουμένων cioè *dei corpi giacenti nei fluidi* ne ha dimostrato le principali. Queste leggi costituiscono uno dei rami più importanti d' applicazione dei principii dell' idrostatica, tanto per l' uso che se ne è fatto nella determinazione dei pesi specifici dei corpi, quanto per le regole che se ne sono dedotte sulla situazione del metacentro nella costruzione dei navigli, e pel curioso esperimento dell' ascensione degli areostati nell' atmosfera.

2. Per investigare quali sono le condizioni che determinano l' equilibrio di un corpo immerso in un fluido, non abbiamo che ad impiegare gli stessi ragionamenti coi quali abbiamo valutate le pressioni sulle pareti dei vasi, perchè, come è evidente, il problema che ci proponiamo si riduce a determinare le pressioni del liquido sopra la superficie del corpo solido immerso, ed a riconoscere quando queste pressioni possono fare equilibrio all' azione del suo peso.

Concepiscansi dunque che da ciascun elemento della superficie del corpo si diramino tre prismetti, due orizzantali e perpendicolari fra loro, ed uno verticale come sono stati descritti all' art. 9 della Lezione precedente. Cogli stessi principii da cui si fece dipendere la determinazione delle pressioni sulle pareti dei vasi (1), si riconoscerà che le componenti orizzontali delle pressioni sulle basi tronche di ciascun prismetto orizzontale si distruggono vicendevolmente, e che le componenti verticali delle pressioni sulle due estremità opposte del prismetto verticale a basi tronche differiscono fra loro del peso di un filetto fluido del volume dello stesso prismetto. Da ciò ne segue dunque che la differenza delle componenti verticali su tutta la superficie del corpo sarà la somma dei pesi di tanti filetti

(1) Vedasi la nota (2) della Lezione precedente.

fluidi in quanti prismetti verticali è stato concepito suddiviso il corpo, o sia sarà eguale al peso del fluido che il volume del corpo rimove. Il corpo sarà quindi per l'azione della pressione del fluido spinto verticalmente all'insù con una forza eguale a quest'ultima differenza.

Si può arrivare a quest'ultima conclusione per un altro ragionamento indipendente dalla decomposizione delle pressioni, e fondato su considerazioni meno dirette ma più semplici. Se immaginiamo tracciato col pensiero nell'interno di un liquido in equilibrio un volume di figura qualunque, fig. (61) e fingiamo che, senza cambiar natura, o peso, questo volume si consolidì, l'equilibrio non cesserà di sussistere, perchè un semplice legame nato fra le parti di questo volume non potrebbe trarlo dal suo stato d'equilibrio. Ma in questo caso è evidente che il volume fatto solido tende a discendere con una forza eguale al suo peso, e che passa pel suo centro di gravità, dunque se non discende è necessario che la risultante della pressione che il fluido esercita sulla sua superficie sia eguale al peso di un egual volume di liquido, che sia diretta da basso in alto, e che passi pel centro di gravità dello stesso volume consolidato. Se ora in vece della massa del liquido consolidato immaginiamo sostituito un corpo solido della stessa figura e dimensioni è evidente che l'azione del fluido sopra di esso non potrà essere cambiata da quella di prima, per cui questa azione sopra un corpo qualunque sarà ancora eguale al peso del fluido che il corpo rimuove.

3. Sia P il peso del corpo, e Π quello della massa di liquido che il corpo rimuove. Se $P > \Pi$ il corpo perderà per la pressione del fluido una quantità Π di peso, e discenderà al fondo colla differenza di ~~corpo~~ peso $P - \Pi$: se $P = \Pi$ l'effetto della pressione del fluido distruggerà l'azione del peso del corpo, ed il corpo rimarrà in equilibrio in qualunque parte del liquido sia posto: se $P < \Pi$ il corpo sarà spinto all'insù con una forza $\Pi - P$, e giunto alla superficie ne uscirà in parte, sino a tanto che la parte immersa sposti un volume di liquido il cui peso equivalga al peso totale del corpo.

4. In quei casi in cui il corpo rimane sostenuto nel liquido non basta per lo stato completo del suo equilibrio che il suo peso e la risultante delle pressioni formino due forze verticali, eguali, e contrarie la prima diretta dall'alto in basso e la seconda viceversa; ma affinchè ogni movimento di rotazione resti altresì impedito, conviene che la risultante del peso, che passa pel centro di gravità del corpo, e la risultante della pressione che passa pel centro di volume della parte immersa del corpo, si trovino sulla stessa verticale che

chiamasi l'*asse primitivo* fig. 62; altrimenti queste due risultanti formerebbero una copia. Di più se si vuole che l'equilibrio sia stabile, cioè, se declinando un poco il corpo dalla sua situazione d'equilibrio, si vuole che pel solo suo peso vi ritorni senza rovesciarsi è necessario che da qualunque parte si inclini il corpo, il suo centro di gravità venga ad essere più basso del punto *M*, fig. 63, d'incontro della verticale in cui trovasi la nuova risultante della pressione coll'asse primitivo del corpo, perchè allora cessata la causa che inclina il corpo, la detta copia di forze tenderà a ricondurlo alla posizione di prima. Bouguer ha chiamato il punto *M* *metacentro*, ed ha dedotto dalla situazione di questo punto le condizioni di stabilità dei bastimenti, onde non si rovescino quando le varie cause che li agitano vengono ad inclinarli da un lato o dall'altro (1). Se le stesse cause fanno anche oscillare, cioè variare in più od in meno, la parte immersa del bastimento, le considerazioni per dedurne la stabilità sono più complicate, ma le regole di Bouguer sussistono ancora (2).

5. La proposizione dimostrata all'articolo 2.° dalla quale si trassero le conclusioni sull'equilibrio dei corpi immersi nei fluidi esposti all'articolo 3.°, porta il nome di *Principio d'Archimede*, perchè questo geometra la scoprì all'occasione che il Re Herone gli aveva proposto un problema la cui soluzione si può far dipendere dall'applicazione dello stesso principio alla determinazione delle gravità specifiche dei corpi. Siccome quest'applicazione è una delle più importanti della Scienza, perchè i pesi specifici dei corpi entrano quali elementi in quasi tutte le ricerche fisiche, ci tratterremo ad esporre in questa lezione i varii modi con cui essa può farsi.

I corpi, come già abbiamo osservato all'art. 8 della Lezione I, non hanno tutti la stessa massa sotto eguali volumi, ed il rapporto della loro massa al loro volume costituisce ciò che abbiamo chiamato la densità. Siccome i pesi sono proporzionali alle masse i rapporti dei pesi, sotto eguali volumi, di diverse sostanze saranno proporzionali alle densità, e questi rapporti si chiaman anche *pesi specifici*.

La determinazione delle densità dei corpi, o dei loro pesi specifici che sono ad esse proporzionali, si riduce dunque a determinare in che ragione stanno i pesi di volumi eguali dei cor-

(1) Bouguer Traité du Navir. Paris 1746.
(2) J. M. C. Duhamel. Journal de l'École Polytechnique cahier XXIV.

pi. Si assume il peso di un volume dato di uno di questi corpi, che comunemente è il centimetro cubico d'acqua nel suo grado di massima densità, o la *gramma*, e si esprimono i pesi specifici degli altri corpi in ragione dei pesi di eguali volumi di essi.

La valutazione dei pesi dei corpi si ottiene facilmente collo stromento conosciuto sotto il nome di bilancia, ma quella dei volumi, specialmente dei corpi solidi se sono di forme irregolari, presenterebbe delle difficoltà pratiche talvolta insuperabili al geometra, se il principio d'Archimede non ci offrisse il mezzo di eluderle.

Si pesa prima nell'aria il corpo solido di cui si vuole determinare il peso specifico; poi si leva questo corpo dal piatto della bilancia, e si sospende per disotto dello stesso piatto con un filo molto sottile e si pesa un altra volta facendo che il corpo peschi in un vaso d'acqua sottoposto. Come sappiamo per l'enunciato principio che il corpo perde tanto del suo peso quanto è il fluido che rimuove, la differenza del peso del corpo dalla prima alla seconda pesata sarà il peso di un volume d'acqua eguale a quello del corpo, così il rapporto della prima pesata a questa differenza, esprimerà la ragione dei pesi di un volume della sostanza del corpo e di un volume eguale d'acqua, e perciò rappresenterà il peso specifico di quelle sostanze. Se π dinota il numero delle gramme della prima pesata, e p quello delle gramme che è stato necessario togliere dal piatto della bilancia nella seconda pesata; $\frac{\pi}{p}$ sarà il valore del peso specifico dimandato.

Questo stesso mezzo può servire a determinare il peso specifico di un liquido. Perciò si pesa un corpo qualunque nell'aria, e sia π il numero corrispondente di gramme che rappresenta il suo peso, e poi sospeso lo stesso corpo con un filo sottile ad un uncino sotto il piatto della bilancia, che per questa sola modificazione porta il nome di *bilancia idrostatica*; si pesa due volte lo stesso corpo, prima immerso nell'acqua, e poi nel liquido di cui si vuol conoscere il peso specifico: siano p e ϖ i numeri delle gramme che bisogna levare dall'altro piatto per ristabilire l'equilibrio in queste due altre pesate. Il volume del corpo essendo rimasto lo stesso p sarà il peso di un volume d'acqua eguale a quello del corpo, e ϖ il peso di un egual volume del liquido, dunque $\frac{\varpi}{p}$ sarà il peso specifico dallo stesso liquido.

Per dare semplicità al nostro discorso abbiamo trascurato alcu-

ni elementi che devono entrare nel calcolo dei pesi specifici quando si aspira a molta precisione. 1.° Il corpo nella prima pesata dovrebbe propriamente pesarsi nel voto e non nell'aria, poichè l'aria essendo essa stessa un fluido pesante evidentemente il corpo perde in essa una quantità di peso eguale al volume d'aria che rimuove. 2.° L'acqua distillata in cui è immerso il corpo deve essere alla temperatura di 4°,1 centigradi onde sia nel suo massimo grado di densità, e se non lo è, come praticamente rare volte lo può essere, conviene ridurre col calcolo la diminuzione di peso osservata nella seconda pesata, a quella che corrisponderebbe se l'acqua fosse stata nella detta temperatura. 3.° Il corpo di cui si vuole determinare il peso specifico deve essere nella temperatura normale che si è scelto, che per lo più è quella di 0°, e quando non lo fosse, bisogna applicare col calcolo al suo volume una correzione che lo riduca a questa temperatura. Queste correzioni sono tutte piccole, ma, come le buone bilancie sono sensibili ad $\frac{1}{10000}$ del peso che si stima, quelle correzioni potrebbero eccedere i limiti di precisione entro cui i pesi sono determinabili, e perciò non devono essere trascurate quando si aspira a tutta l'esattezza possibile. Vedasi la nota 1.

6. Quando non occorra una precisione massima si può far uso per determinare i pesi specifici di alcuni stromenti che si chiamano *areometri* che sono di un uso molto comodo per questo oggetto. Vi sono areometri di due specie; areometri a volume costante, ed areometri a peso costante.

L'areometro a volume costante più in uso è quello chiamato areometro di Nicholson. Esso consiste comunemente di tre parti, fig. (64) unite assieme sopra uno stesso asse verticale. La parte superiore è un piattello P, l'inferiore ha la figura di un secchietto S ed è caricato d'una stiva; queste parti sono quelle in cui deve essere posto successivamente il corpo di cui si vuol conoscere il peso specifico: la parte di mezzo C più grande o voluminosa serve a dare stabilità, ed estensione alla scala dell'istromento. Il piattello superiore è rilevato sul corpo di mezzo e sostenuto da un filo solido f situato nell'asse dello stromento, e sopra di esso vi è un segno k che è il punto sino a cui deve farsi sommergere l'istrumento quando si eseguisce l'esperienza; ciò che chiamasi *congua-gliare l'istromento*. Il peso dell'istromento deve essere tale che quando nuoti da se senza nessun carico una parte del corpo di mezzo sopravanzi il livello dell'acqua.

Ciò posto ecco come si fa l'esperimento. 1.° Si sovrappone al piattello un altro piattello un poco più grande contenente una quan-

tità di pesi sino a che l'istromento sia conguagliato, cioè sino a che il segno sul filo solido sia a fior d'acqua. 2.° Dopo si pone nello stesso piattello il corpo, di cui si vuol conoscere il peso specifico, e si levano altrettanti pesi sino a che l'istromento sia conguagliato un'altra volta: sia p il numero delle gramme che si sono levate. 3.° Si toglie il corpo del piattello superiore e si trasporta nel secchietto inferiore immerso nell'acqua, e si aggiungano al piattello esteriore alcuni pesi per conguagliare una terza volta l'istromento, e sia ϖ il numero delle gramme aggiunto. È evidente che p sarà il peso del corpo nell'aria, e ϖ il peso di un volume d'acqua eguale a quello del corpo, e perciò $\frac{p}{\varpi}$ il peso specifico del corpo.

Vi sono dei corpi che sono porosi e s'imbevono d'acqua; allora la determinazione del peso specifico presenta una sorta d'ambiguità, perchè, o si vuole il peso specifico del corpo come se la sua sostanza fosse distribuita uniformemente nel suo volume più rara sì, ma senza pori, o si vuole il peso specifico della materia che forma la parte solida del tessuto, e che forma per così dire l'inviluppo dei pori. Per conseguire queste due sorte di pesi specifici si cerca, 1.° il peso p che conviene sottrarre dal piattello quando si conguaglia l'istromento sostituendo il corpo secco; 2.° si lascia il corpo nell'acqua per qualche tempo sino che l'aria sia sortita dai suoi pori, e sia completamente imbevuto d'acqua e si cerca il peso p' che conviene sottrarre più di prima per conguagliare un'altra volta l'istromento; 3.° finalmente si passa il corpo così imbevuto nel secchietto di sotto immerso nell'acqua e si cerca il peso ϖ' che bisogna aggiungere per conguagliare la terza volta l'istromento. In questa pesata p dinota il peso del corpo, p' il peso di un volume d'acqua eguale a quello che riempie i pori, ϖ il peso di un volume d'acqua eguale al volume esteriore del corpo, ed $\varpi - p'$ il peso di un volume d'acqua eguale al volume impermeabile delle sostanze del corpo. Dunque $\frac{p}{\varpi - p'}$ sarà il peso specifico della sostanza del corpo nel suo stato naturale di porosità, e $\frac{p}{\varpi - p'}$ il peso specifico della sostanza impermeabile. Quest'ultimo peso specifico si potrebbe anche ottenere riducendo il corpo in polvere fina. Ma questi processi non sono senza difficoltà di esecuzione pratica.

Se la sostanza del corpo è solubile nell'acqua, si può invece di un bagno d'acqua usarne uno di alcool o di qualche altro liquido in

cui non fosse solubile. Si determinerebbe nello stesso modo il peso specifico del corpo relativo a questo liquido, e conoscendo il peso specifico del liquido relativamente all' acqua si dedurrebbe il peso specifico del corpo.

L' istromento di Nicholson può anche servire a far conoscere il peso specifico di due liquidi. Sia Π il peso dello stromento, p il peso che bisogna aggiungere per conguagliarlo nell' acqua, e ϖ quello che abbisogna per conguagliarlo nell' altro liquido. In questo caso $\Pi + p$ sarà il peso di un volume d' acqua eguale a quello dello stromento, e $\Pi + \varpi$ il peso di un volume di liquido pure eguale a quello dello stromento; dunque $\frac{\Pi + \varpi}{\Pi + p}$ sarà il peso specifico del liquido.

7. Gli areometri a peso costante che si chiamano anche *pesa-liquori* servono per riconoscere il peso specifico dei liquidi, e si usano comunemente nel commercio.

Il pesa-liquori di Beaumé è il più comune, ed è composto di un cannello di vetro che termina in una boccetta con un' appendice nella quale è rinchiuso un poco di mercurio per stivare l' istromento Fig. 65.

Se deve servire per dei liquidi più pesanti dell' acqua, la stiva di mercurio deve essere tale che lo strumento s' immerga quasi intieramente, e si nota sul cannello il punto a fior d' acqua. Si fanno dopo sciogliere 15 parti di sale comune in 85 parti d'acqua ed immergendo lo stromento in questa soluzione più pesante, resta più sollevato, e si nota sul cannello il secondo punto di conguaglio. La parte del cannello compresa fra i due punti così marcati si divide in 15 gradi, e si procede la divisione per abbasso con parti proporzionali sino a 67 o 68 gradi, limite sufficiente per quasi tutti i liquidi in uso.

Se lo stromento deve servire pei liquidi più leggieri dell'acqua, esso deve essere stivato in modo che immerso nell' acqua sporga fuori circa $\frac{1}{3}$ della sua lunghezza, e si nota il punto d' immersione del cannello. Si fanno sciogliere 10 parti di sal comune in 90 parti d' acqua distillata e si nota di nuovo il punto d' immersione: si divide l' intervallo fra i due punti in 10 gradi, e si prolunga la divisione dall' altro lato verso l' estremità esteriore del cannello sino a 50.

Il numero de'gradi di cui si osserva che il pesa-liquori pesca nel liquido proposto è sufficiente per dare una idea relativa del suo peso specifico, e quindi per giudicare della sua qualità nel commercio.

LEZIONE XV.

Dell' azione delle forze molecolari nella produzione dei fenomeni di capillarità.

1. La teorica delle forze molecolari applicata alla spiegazione degli effetti detti di capillarità costituisce uno dei rami più delicati della fisica meccanica. I fenomeni capillari esposti da prima da Hauksbée davanti la Società reale di Londra, furono teoricamente discussi dallo stesso Hauksbée (1), da Newton (2), da Jurin (3), da Vietbreckt (4), da Segner (5), da Clairaut (6) e da altri. Il dottor Young, una delle menti più sagaci che abbiano avuto i tempi moderni, fu il primo che diede una teorica incompleta sì in alcuni principj fondamentali, ma giusta di tali fenomeni (7). La teorica del dottor Young fu adombrata da una più cospicua, ma meno esatta di Laplace (8) che apparve poco tempo dopo (9). Finalmente Poisson, nella sua opera *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, ha tolto i difetti che ancor rimanevano alla teorica di Laplace, deducendo la spiegazione dei fenomeni capillari da una discussione esatta delle azioni delle forze molecolari che vi concorrono. La teorica di Poisson è però appoggiata ad una analisi astrusa, che malamente può essere tradotta in linguaggio ordinario per un'intelligenza più comune. Spero quindi che riuscirà accetto, che, partendo dalle nozioni più recenti, che già abbiamo esposto, sulla vera costituzione de' liquidi, riconduca la spiegazione dei fenomeni capillari alle ingegnose idee emesse dal dottor Young.

2. Il fenomeno di capillarità più facile ad osservarsi s' ottiene immergendo un cannellino di sottil diametro (in circa da $0,^{mm}5$ a

(1) Hauksbée. *Sperienze fisico-meccaniche.* Firenze, MDCCXXI.

(2) Newtonis *Optices.* Quaestio 31.

(3) *Leçons de physique expérimentale, par Côtes*, pag. 416 *et suiv.*

(4) *Tentamen theoriæ quæ ascensus aquæ in tubulis capillaribus explicatur. Comm. Ac. Petrop.* Tom. VIII e IX.

(5) *Commentarii Soc. Reg. Scientiar. Gottingensis.* Tom. 1.

(6) *Théorie de la figure de la terre*, pag. 105 e seg.

(7) Young. *An essay on the cohesion of fluids. Phil. Trans. Dec.* 20, 1804.

(8) L' insufficienza della teoria di Laplace appoggiata alla supposizione di una densità uniforme della massa fluida fu completamente dimostrata da Poisson; vedasi anche la nota (1) della Lezione XIII.

(9) *Supplement au deuxième livre de la Mécanique céleste et Supplement a la théorie de l'action capillaire.* Vol. IV.

3.^{mm}0) in un liquido. Se il liquido è di natura tale da bagnare le pareti del cannellino, si vede la colonnetta fluida prendere nella sua superficie superiore una forma concava all'esteriore e montare ad un'altezza maggiore che non sta il liquido all'esterno; se invece il liquido è di quelli che non s'attaccano alle pareti, la colonnetta interiore presenta nella superficie superiore una forma convessa, e sta più bassa. Paragonando fra loro le elevazioni o depressioni delle colonnette liquide prodotte in tubi di diverso diametro, si trova che esse stanno, assai prossimamente, nella ragione inversa dei diametri dei tubi impiegati. È appunto dalla sottigliezza dei diametri di questi cannelli paragonabili ad un *capello*, che questi ed altri fenomeni, dipendenti dalle stesse cause, hanno preso il nome di fenomeni capillari.

Non è necessario che il liquido che si eleva sopra o si abbassa sotto il livello esteriore sia contornato da strette pareti, come quelle di un cannellino. Basta immergere due piani a piccola distanza fra loro, che si vede il liquido elevarsi od abbassarsi fra essi; ma le elevazioni o depressioni non sono, in questo caso, che circa la metà di quelle che si ottengono con un cannello di diametro eguale alla distanza dei due piani.

3. A prima vista pare che queste elevazioni o depressioni facciano un'eccezione ai principj generali che abbiamo esposti nell'Idrostatica, dai quali risulta che il liquido deve porsi allo stesso livello in vasi comunicanti. Ma nel dare quelle dimostrazioni non abbiamo avuto riguardo ad una circostanza particolare, che non c'interessava allora, e la quale, ora introdotta, ci paleserà chiaramente che queste variazioni di livello, anzi che fare eccezione, sono una conseguenza diretta dei principj secondo i quali sono state caratterizzate le forze molecolari, che ci hanno condotto a riconoscere la trasmissione dell'egualità di pressione per ogni verso. Vedasi l'art. 3 della Lezione XIII.

Abbiamo visto allora che immaginando condotto un piano attraverso la massa liquida, e sopra questo piano un piccolo prismetto fluido che gli sia perpendicolare ed alto quanto si estende l'azione molecolare, se il liquido non è soggetto ad alcuna pressione esteriore, le sue molecole si trovano a tali distanze che la somma delle repulsioni di quelle al di là del piano su quelle del prismetto rispettivamente più vicine, è per l'appunto eguale alla somma delle attrazioni delle stesse molecole del fluido al di là del piano su quelle del prismetto rispettivamente più lontane. Così addiviene che il prismetto non ha nessuna tendenza a penetrare nel piano o a sco-

starsi da esso, e che il fluido è in ogni luogo in equilibrio e senza pressione. Questo vale per ogni parte del fluido posta ad una distanza dalla superficie più grande di quella alla quale si estende l'azione molecolare. Ma se immaginiamo il piano secante condotto parallelamente alla superficie fluida, che ora supporremo orizzontale ed indefinita, ad una profondità minore del raggio dell'azione molecolare, e si considera il prismetto elevato perpendicolarmente su questo piano verso la superficie esterna, questo prismetto, essendo troppo corto, non offrirà un numero sufficiente di molecole lontane per equilibrare l'azione repulsiva delle più vicine, esisterà quindi un eccesso di repulsione dell'interno del liquido su queste molecole, ed esse dovranno essersi allontanate fra loro. L'allontanamento reciproco delle molecole nei dintorni del piano sarà maggiore più il piano si concepisce condotto vicino alla superficie del liquido, così che andando verso questa superficie, s'incontrerà un decrescimento rapido di densità che sarà regolato dalla legge, che l'azione repulsiva del fluido sottoposto al piano sulle molecole della porzione di prismetto, che ancor rimane per arrivare alla superficie, sia sempre contrabbilanciata dall'azione attrattiva delle parti reciprocamente più lontane, onde la pressione si mantenga nulla per ogni piano.

L'altezza dello strato, in cui succederà questo decrescimento rapido di densità, sarà sottilissimo, perchè l'azione molecolare non si estende che a distanze insensibili, ma noi potremo col pensiero dividerla in tante falde tenuissime, in ciascuna delle quali la densità potrà considerarsi come uniforme, o sia le molecole potranno considerarsi come equidistanti fra loro. Mentre dunque, nelle vicinanze della superficie, l'equilibrio delle molecole nel verso verticale esige che il fluido vada decrescendo rapidamente di densità, quello nel verso orizzontale sussisterà ancora, benchè le molecole siano compartite con una densità uniforme in ciascuna falda, perchè ogni molecola si troverà sempre in mezzo ad un numero d'azioni orizzontali tutte eguali, provenienti dalle molecole che la contornano. Ma l'esistenza di quest'equilibrio individuale delle molecole, dipendente dalla loro uniforme scompartizione, non porterà seco la condizione che la trazione nel verso orizzontale delle diverse parti del liquido tra sè stesse sia nulla. Anzi trovandosi, nelle falde superficiali, le molecole a maggiore distanza fra loro che non istanno, quando il fluido è nello stato naturale, o nell'interno del liquido, ove la pressione, è nulla, ne segue, secondo i principj che abbiamo esposti nell'Idrostatica (vedasi l'art. 3 della Lezione XIII) che condotto per un punto qualunque della superficie un piano verticale, un filo

di molecole, perpendicolare a questo piano, situato in una delle falde suddette e lungo quanto si estende l'azione molecolare, sarà attratto verso il piano. Esisterà quindi in ogni punto, lungo la superficie del liquido, una trazione reciproca fra le parti, dalla quale ne proverrà come una *forza contrattile superficiale*, forza che Segner, Monge e Young hanno bene previsto, ma della quale non era loro facile di assegnare con precisione la causa.

4. Limitiamo ora l'estensione indefinita della superficie liquida, e supponiamo che, da due lati opposti, termini in due piani perpendicolari ad essa e formati da materie solide. Se l'azione d'uno qualunque di questi piani sopra un prismetto fluido che gli fosse perpendicolare ed alto quanto si estende l'azione sensibile molecolare, potesse essere eguale a quella del liquido, evidentemente non ne seguirebbe alterazione veruna vicino a questo piano. Ma l'azione del piano sul liquido è generalmente diversa da quella del liquido sopra sè stesso. Se essa è minore, la superficie del liquido in virtù della sua forza contrattile si staccherà dal piano, e se è maggiore, il fluido sarà attratto e compresso verso il piano e monterà lungh'esso. Consideriamo questi due casi a parte.

Nel primo caso il fluido, staccandosi dal piano, estenderà, in continuazione delle parti staccate, la sua superficie libera, nella quale si creerà successivamente una trazione eguale, e se l'azione del piano solido sul liquido fosse nulla, questo scostamento durerebbe fino a tanto che la superficie cilindrica e libera del liquido, divenuta convessa, piegherebbesi tangenzialmente sul piano: al disotto il liquido rimarrebbe contiguo col piano, e godrebbe tutto lungo di esso di una trazione eguale a quella della superficie libera, poichè l'azione del piano sul liquido è supposta nulla. Se invece l'azione del piano sul liquido sarà qualche cosa, la trazione della superficie liquida attigua al piano riuscirà minore di prima, perchè ivi il liquido si troverà meno rarefatto, e si presente bene che esso si staccherà dal piano fino a tanto che la componente verticale della sua trazione, nella superficie libera, sia eguale alla trazione della superficie in contatto col piano. Allora queste due forze si equilibreranno, e la superficie libera si unirà a quella attigua al piano sotto un certo angolo che, come vedremo in seguito, riesce costante per ogni sostanza solida con un dato liquido.

Quello che succede da una parte vicino alla superficie di uno dei due piani, deve egualmente accadere dalla parte opposta vicino all'altro piano. La superficie cilindrica libera del liquido si troverà così come attaccata nelle sue estremità alle due superficie piane con-

tigue coi piani solidi, e come esiste lungo di esse e nei loro punti di giunzione colla superficie libera una forza contrattile, questa superficie sarà tirata in basso, comprimerà il fluido sottoposto; e se i due piani sono assai vicini, quest' effetto risulterà molto sensibile, ed il liquido s' abbasserà fra i due piani, al disotto del livello esteriore, sino a tanto che le suddette forze di trazione saranno equilibrate dall' aumento di pressione che il liquido, più alto esteriormente ai piani, esercita in virtù del suo peso.

Nel secondo caso, l' azione attrattiva dei piani solidi sopra il liquido contiguo essendo maggiore di quella del liquido sopra sè stesso, il liquido contiguo verrà compresso e monterà lungo le superficie dei piani, che verranno così coperte di una cappa fluida, ciascuna delle quali si unirà in basso colla superficie libera del liquido; le due parti laterali formeranno congiuntamente a quella di mezzo una superficie continua libera, concava per infuori, che terminerà tangenzialmente sui piani, e nella quale esisterà una forza di trazione. Questa forza nelle due estremità opposte trarrà verticalmente verso l' alto la superficie concava del liquido, tendendo a staccarla dal liquido sottoposto; le particelle contigue inferiori si diraderanno un poco, il liquido adiacente acquisterà quindi una forza di trazione per sè stesso, e seguirà il movimento ascensivo della superficie libera. Quando il peso della colonna liquida elevata equilibrerà lo sforzo di trazione delle due falde laterali, allora il movimento si arresterà e sussisterà l' equilibrio.

Sono le condizioni dell' equilibrio del liquido in questi due casi ed in altri consimili, che la teorica dell' azione capillare si propone di determinare.

5. Per dare un' idea del modo con cui queste condizioni devono essere considerate, conviene premettere alcune nozioni sulle proprietà delle superficie curve che sostengono una pressione o tensione. Si dimostra nella statica che, se una superficie è animata in tutti i suoi punti da forze che le siano perpendicolari, questa superficie soffre una pressione o tensione costante in tutte le sue parti, e la forza da cui è animata in ciascun punto è eguale al prodotto di questa tensione per la somma dei valori inversi dei raggi di massima e minima curvatura, od in generale dei raggi di curvatura di due sezioni normali fra loro. Vedasi la nota (3) della Lezione VII.

Onde schiarire con un esempio questa proposizione, supponiamo che sopra una superficie solida cilindrica sia tenuta tesa una tela o superficie flessibile per mezzo di forze applicate alle sue estremità, perpendicolarmente all' asse e tangenti alla sua super-

ficie. Basterà per questo caso considerare l'equilibrio di una sola zona, o sezione fatta perpendicolarmente all'asse; chè quello che si dice di questa sezione sarà egualmente applicabile ad ogni altra, e quindi alla tela intera. Sia dunque *A M B*, fig. 66, questa sezione, *P* la forza applicata in *A* ed in *B* tangenzialmente, che tengono tesa la benda di tela corrispondente; come questa benda non può premere che perpendicolarmente sull'arco sottoposto, la sua tensione dovrà essere costante in tutta la sua estensione ed eguale a *P*, e la forza di pressione, che essa esercita in ciascun punto *M* dell'arco *A M B*, sarà in ragione inversa del raggio *C M* del circolo osculatore alla curva nel punto *M*; l'altro raggio di curvatura essendo in questo caso infinito, e perciò nullo il suo valore inverso.

La tensione di questa benda offre un'immagine dell'azione contrattile della superficie di un liquido in una sezione contenuta fra due pareti solide, piane, parallele e vicine fra loro, e fatta perpendicolarmente ad esse. Siccome l'azione molecolare non si estende che a distanze insensibili, se noi immaginiamo che in un punto qualunque *M*, fig. 67, di una tale sezione, e ad una distanza sensibile dalle pareti, sia descritto un circolo osculatore, tutte le molecole che nella stessa sezione hanno un'azione sensibile su di un filetto fluido perpendicolare, nel punto *M*, alla superficie, potranno considerarsi comprese in questo circolo; e come la densità lungo la superficie, ad una distanza sensibile dalle pareti non varia che per gradi insensibili, la risultante delle azioni di tutte queste molecole dovrà essere nella direzione del raggio osculatore *C M*, o sia perpendicolare alla superficie, poichè tutto potrà considerarsi simmetrico da una parte e dall'altra. Di qui, e dalla proposizione premessa ne segue dunque che la trazione del liquido nella superficie, proveniente dalla maggiore rarefazione delle molecole, sarà in ogni luogo la stessa, e la risultante a cui dà luogo l'eccesso di attrazione fra le parti del fluido sopra la ripulsione, combinato colla curvatura della superficie, sarà in ragione inversa del raggio di curvatura.

La trazione non potrebbe neppure risultare diversa da una superficie all'altra per uno stesso liquido, perchè le forze molecolari non estendendosi che a distanze insensibili, la risultante delle forze corrispondenti ad un punto della superficie non potrebbe variare, tutte le volte che la disposizione del liquido intorno a quel punto fosse eguale, e perciò tutte le volte che il raggio di curvatura venisse ad essere lo stesso. Basterà quindi che due superficie

s' incontrino ad avere, in uno dei loro punti, due raggi di curvatura eguali, affinchè la trazione venga ad essere la stessa nelle due superficie. La trazione è dunque indipendente dalla natura della superficie, ed è eguale a quella che abbiamo visto sussistere in una superficie piana. Indicheremo con T il valore di questa trazione.

6. Ciò posto, prendiamo ora in considerazione il caso in cui il liquido si trova depresso fra i due piani. In questo caso l' azione della sostanza delle pareti sulle molecole del liquido deve essere minore di quella del liquido sopra sè stesso. Se la sostanza delle pareti avesse la stessa azione, il liquido contiguo alle pareti avrebbe la stessa densità che nell' interno; se quella sostanza non avesse azione nessuna, il liquido lungo le pareti avrebbe lo stesso stato di rarefazione che nella superficie libera. L' azione delle pareti essendo intermedia fra questi due limiti, la cappa liquida contigua acquisterà un grado intermedio di rarefazione, e quindi godrà di una forza di trazione intermedia. Dinotando con Θ la diminuzione di trazione che soffre la cappa contigua del liquido per l' azione delle pareti, $T - \Theta$ sarà l' espressione della trazione che possiede questa cappa.

Al luogo di giunzione della superficie libera del liquido colla superficie contigua alle pareti, il passaggio si farà ancora per una curva, ma la curva torcerà rapidamente. La risultante delle attrazioni su d' un prismetto nella superficie libera non sarà più perpendicolare ad essa, perchè questa risultante sarà influenzata dall' azione delle pareti, e la trazione passerà rapidamente dal valore che ha luogo nella superficie libera a quello che ha luogo lungo le pareti. Ad una distanza ancor insensibile dall' una e dall' altra estremità dell' arco di giunzione le forze torneranno ad essere perpendicolari alle superficie, e ciascuna delle trazioni diverrà costante. Ora, siccome la risultante delle azioni delle pareti su ciascuna molecola dell' arco di giunzione è sempre evidentemente perpendicolare alle stesse pareti, e d' altronde il liquido nell' interiore non fa che comporre la sua densità in modo da resistere alle azioni che si esercitano sulla sua superficie, potremo paragonare l' equilibrio dell' arco di giunzione a quello di un pezzo di catenaria di una densità variabile animato da una gravità perpendicolare alle pareti, e si sa che, in questo caso, la tensione del punto infimo e la componente, perpendicolare alla gravità, della tensione nell' estremità della curva devono essere, per l' equilibrio, eguali. La componente della trazione della superficie libera fig. 68, nella direzione verticale dovrà dunque essere eguale alla trazione della

(Vedi il N° II della Nota III, della Lez.ne VII)

cappa contigua alle pareti, e detto ω l'angolo che la tangente alla superficie libera nell'estremità superiore dell'arco di giunzione fa colle pareti, si dovrà avere questa prima equazione

$$(a) \qquad T \cos. \omega = T - \Theta.$$

Ora $T - \Theta$ essendo costante per uno stesso liquido e una stessa sostanza delle pareti, anche ω dovrà essere costante qualunque sia la superficie libera del liquido.

Una forza contrattile eguale a $T - \Theta$ opererà anche dall'altra parte contigua all'altra parete, e la superficie libera sarà portata in giù da queste trazioni sino a tanto che la pressione idrostatica, proveniente dal peso del liquido che conserva una maggiore altezza esteriormente, sarà in grado di equilibrarle.

Se si chiama P il peso del liquido che potrebbe riempire le pareti interiormente sino all'altezza del livello esteriore, cioè il peso che potrebbe equilibrare la pressione esteriore, questa sarà la misura delle due trazioni verticali; e detto ς lo *spessore* della sezione nella cui lunghezza la trazione $T - \Theta$ è esercitata, si dovrà avere

$$(1) \qquad P = 2 (T - \Theta) . \varsigma = 2 T . \varsigma . \cos. \omega.$$

7. Il secondo caso, in cui l'azione delle pareti sul liquido essendo maggiore di quella del liquido sopra sè stesso, il liquido viene compresso e monta su per le pareti, è più semplice a considerarsi. La cappa liquida che viene a coprire le pareti forma una continuazione del resto della superficie libera del liquido, che va così a terminare tangenzialmente sulle pareti. Come quella cappa ha sempre uno spessore maggiore della distanza insensibile in cui operano le azioni molecolari, acquista nella sua superficie esteriore un decrescimento rapido di densità ed una trazione eguale a quella della superficie libera. La superficie libera viene così a risentire dai due lati una trazione verticale che la solleva in alto. Al suo elevarsi le molecole sottoposte si rarefanno, acquistano una forza di trazione per la superficie libera che ascende e ne seguono il movimento, e questo movimento s'arresta quando il peso della colonna liquida innalzata equilibra le due trazioni laterali. Se dunque si chiama ancora P il peso di questa colonna, si dovrà avere

$$(1') \qquad P = 2 T . \varsigma.$$

8. Già possiamo da queste due equazioni, segnate (1) e (1'), dedurre la legge sperimentale, che abbiamo enunciato in principio, che le elevazioni o depressioni di uno stesso liquido fra due piani sono in ragione inversa delle distanze dei piani. Sia

infatti d la distanza dei due piani, a la depressione od elevazione del liquido interno, sotto o sopra il suo livello esteriore, come la distanza d è supposta assai piccola, ed il peso del liquido che formerebbe la convessità o riempirebbe la concavità dell'estremità superiore della colonna è trascurabile, sarà, detta g la gravità, e Δ la densità del liquido, il peso P espresso prossimamente da $g \,.\, \Delta \,.\, \varsigma \,.\, d \,.\, a$, e le equazioni (1) e (1') daranno così

$$g\ \Delta\ \varsigma\ d\ a = 2\ (T - \Theta)\ \varsigma = 2\ T\ \varsigma\ \cos\omega$$

$$g\ \Delta\ \varsigma\ d\ a = 2\ T\ \varsigma$$

dalle quali si ricava

$$a = \frac{2\ (T - \Theta)}{g\ \Delta} \cdot \frac{1}{d} \quad ; \quad a = \frac{2\ T}{g\ \Delta} \cdot \frac{1}{d} \,.$$

Il coefficiente di $\frac{1}{d}$ essendo costante, in tutti i casi, per uno stesso liquido e per pareti di una stessa sostanza, le depressioni od elevazioni a saranno dunque prossimamente in ragione inversa delle distanze dei piani.

9. L'equazione (1), o vero (1') è di quelle che i geometri chiamano un'equazione ai limiti, e vale pel contorno della superficie libera. Per avere l'equazione corrispondente ad un punto qualunque di questa superficie, prendiamo a considerare l'equilibrio di un filetto fluido cilindrico, che parte dalla superficie esteriore, discende nel liquido ad una profondità maggiore dei due piani, poi si torce e rimonta verticalmente fra mezzo ai due piani ad una distanza sensibile da essi fig. 69 e 70. Arrivato vicinissimo alla superficie, supponiamo che il filetto si pieghi per terminare perpendicolarmente ad essa. La pressione sulla superficie esteriore essendo supposta nulla, il filetto descritto non soffrirà nella sua estremità, in questa superficie piana, pressione alcuna. L'azione delle molecole del liquido interno che forma il canale in cui il filetto è racchiuso, sarà pure nulla sino nelle vicinanze della superficie interiore, perchè dividendo questo canale in tanti anelli, ciascun anello produrrà due forze eguali ed opposte sulla massa del filetto fluido. Così, prescindendo dall'azione nella superficie libera interiore ai piani, il filetto fluido non sente che la pressione idrostatica proveniente dal peso; e se chiamiamo z la differenza di livello fra l'estremità interiore ed esteriore del filetto fluido, σ l'area di una sezione, Δ la sua densità, questo filetto sarà spinto da una forza $g\ \Delta\ \sigma\ z$, verso l'alto o verso il basso, secondo che l'altezza del liquido esteriore sarà maggiore o minore che nell'interiore dei due piani. Ora abbiamo visto sopra che l'attrazione delle molecole nella superficie libera interio-

re, combinata colla sua curvatura, fa nascere una forza che spinge la porzione di filetto fluido, perpendicolare alla stessa superficie, per indentro o per infuori, secondo che la superficie è convessa o concava esteriormente, forza che è misurata in ogni punto da $\frac{T}{\rho}$, ρ indicando il raggio di curvatura; si dovrà dunque avere, per l'equilibrio di questo filetto, l'equazione

$$g \Delta \sigma z = \sigma \frac{T}{\rho}.$$

L'ordinata z essendo contata positivamente dal livello esteriore verso l'alto, si dovrà prendere ρ positivo o negativo, secondo che la superficie libera è concava o convessa esteriormente.

Le considerazioni che ci hanno condotto a questa equazione sono indipendenti dalla supposizione che la superficie sia cilindrica; se dunque si estendono al caso più generale di una superficie qualunque, rammentandoci che allora la forza perpendicolare alla superficie interiore che anima la porzione di filetto fluido che termina perpendicolarmente ad essa è misurata dalla trazione moltiplicata per la somma dei valori inversi dei raggi di curvatura di due sezioni normali fra loro, avremo quindi

$$g \Delta \sigma . z = \sigma T \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),$$

indicando con ρ' l'altro raggio di curvatura.

Se si pone per maggiore semplicità $\frac{T}{g \Delta} = \frac{\tau^2}{2}$, τ essendo una quantità costante per ogni liquido, la precedente equazione prende la forma semplice

$$(b) \qquad z = \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right).$$

Le due formole (a) e (b), la prima delle quali si riferisce al contorno della superficie libera, la seconda ad un suo punto qualunque, costituiscono le basi di tutta la teorica dell'azione capillare. L'applicazione di queste equazioni ai diversi casi non esige più che dei processi di calcolo integrale, piuttosto semplici per chi è un po' versato in esso. Contenti d'aver esposto i principj meccanici su cui questa teorica si fonda, e di aver dato un'idea precisa del modo con cui i fenomeni capillari si producono, ci limiteremo a riunire in una nota (Vedasi la nota (1)) le formole che Poisson ha dedotto, per alcuni casi principali, nella sua *Théorie de l'action capillaire*, onde il lettore le trovi pronte per le applicazioni che gli occorresse di fare.

NOZIONI IDRODINAMICHE

LEZIONE XVI.

Teorema di Torricelli, Esperimento di Galileo sull' urto d' una vena fluida.

1. Dopo d' aver considerato le condizioni che determinano l' equilibrio dei fluidi, è un passo naturale quello di procedere alla ricerca delle leggi del loro movimento, allorchè l' equilibrio vien rotto. Ma se le condizioni dell' equilibrio dei fluidi sono sotto certo aspetto più semplici e più facili a riconoscersi che quelle dei solidi, la determinazione del movimento dei fluidi, nei varii casi che si presentano, è per lo contrario assai più complicata e difficile da conseguirsi.

I geometri sono riusciti a tradurre in equazioni differenziali le relazioni che devono sussistere fra gli elementi del movimento dei fluidi, prima nell' ipotesi che risguarda i fluidi come masse continue, che cedono in tutti i punti (1), poi nel caso più reale che essi constino di un numero indefinito di molecole che si tengono in equilibrio fra loro in distanze impercettibili in virtù di forze che non cambiano, per una stessa temperatura, che colle distanze (2). Nella prima ipotesi si conserva, come nell' equilibrio, il principio che la pressione in un punto qualunque della massa fluida sia la stessa in ogni verso, nel secondo caso si prova che la pressione può riuscire diversa intorno ad uno stesso punto per direzioni diverse, come la spiegazione di alcuni fenomeni sembra esigere (3).

Il passaggio dalle equazioni differenziali così ottenute a quelle che possono somministrare una relazione fra le velocità, il luogo ed il tempo, e farci conoscere i movimenti delle diverse parti del fluido, dipende dal calcolo integrale; ma questo passaggio è involto in tante difficoltà analitiche che fin' ora si può dire che nessun caso

(1) Lagrange. Mécanique analytique pag. 181. T. I, e pag. 286. T. II.
(2) Poisson. Journal de l'Ecole Polytechnique. Tom. XII.
(3) Poisson idem. pag. 2 et pag. 139 et suiv.

del movimento dei fluidi è stato completamente risoluto, quando si voglia prendere in considerazione l' adesione del liquido alle pareti, e la coesione fra le particelle stesse del liquido. Prescindendo da queste cause perturbatrici, e considerando i fluidi come masse continue, il caso che primo è stato risoluto del movimento di un liquido secondo tre dimensioni, è quello dell' efflusso dell' acqua da un vaso conico verticale trattato dal Prof. Venturoli nell' operetta intitolata « *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri pontificii d' acque e strade*, per l' anno 1821, pubblicate a Milano. In seguito il Prof. Giulio, in una Memoria che ha visto la luce in Torino nell' anno 1839, ha risoluto e discusso nello stesso modo quello dell' efflusso da un vaso della forma della superficie generata dalla rivoluzione di un' iperbola cubica intorno al suo asse. Altri casi, sono stati trattati, di movimento secondo due dimensioni pei quali vedasi il Trattato d' Idraulica del citato Prof. Venturoli vol. III, pag. 161 (1). Una Memoria Idraulica di Antonio Tadini *sul movimento e misura delle acque correnti*, data alla luce in Milano nel 1814, ed una Memoria inserita nel Tomo XIX degli Atti della Società Italiana delle Scienze col titolo *Sul moto dell' acqua nei canali.*

2. Gl' Ingegneri idraulici per supplire al difetto delle teorie fisico-matematiche in una materia tanto importante hanno avuto ricorso a delle formole empiriche, dedotte dalle esperienze, che rappresentano con qualche generalità e sufficiente esattezza lo scolo de' liquidi dai vasi, ed il movimento delle acque correnti. Lo studio dei mezzi coi quali queste formole sono state conseguite, ed il modo col quale conviene applicarle ai casi pratici forma la sostanza dell' Idrodinamica, che non appartiene propriamente alla fisica, ed esige un trattato a parte.

In quanto risguarda alla Fisica noi ci contenteremo di riferire la soluzione che si può dare del problema dell' efflusso di un liquido da un vaso in cui si sia praticato un piccol foro, il solo caso che occorre nelle investigazioni sperimentali di questa scienza: e poi aggiungeremo alcune cose sull' urto di una vena fluida.

3. Per risolvere il problema dell' efflusso di un liquido da un piccolo foro faremo uso del principio di Meccanica che fu messo in campo da Huyghens, e del quale abbiamo dato una dimostrazione nella nota (1) della Lezione sulla Meccanica.

Questo principio è il seguente. *Se vi è un sistema di corpi o di*

(1) Firenze, Terza edizione vol. II. pag. 7..6.

molecole materiali, soggette alla sola azione della gravità, legate fra loro o poste in modo che i loro movimenti s' impiccino reciprocamente, l' aumento della somma delle forze vive in un intervallo di tempo qualunque è sempre tale che, se alla fine di quest' intervallo si suppone che le molecole divengano indipendenti, e si imprima ad esse o soltanto ad una parte di esse, come si vuole, una quantità di forza viva eguale all' aumento che ha ricevuto il sistema nell' intervallo, ed in direzione opposta alla gravità, tosto che questa forza viva sarà estinta, il centro di gravità del sistema si troverà aver salito alla stessa altezza in cui era al principio del detto intervallo di tempo.

Impiegando questo principio si può indipendentemente dalla cognizione del movimento delle diverse parti del liquido trovare la velocità dell' efflusso di un vaso mantenuto costantemente pieno, e che sgorga per una piccola apertura.

Sia *A B C D* fig. 71 il vaso nel cui fondo sia un foro pel quale sgorghi l' acqua od altro liquido: il liquido nel vaso sia mantenuto per mezzo dell' afflusso di altro liquido ad un' altezza costante *e d*, e supponiamo che il movimento sia arrivato allo stato di permanenza, cioè a quello stato in cui la velocità dello scolo, non che quella in ogni altra parte del vaso sia divenuta costante, cioè non si alteri più col tempo, ciò che succede sensibilmente dopo qualche istante che il foro è stato aperto.

Il foro *p q* deve essere supposto piccolo di tal modo che l'acqua che sgorga per esso ad ogni istante sia tanto poca che il livello di uno strato d' acqua posto vicino alla superficie superiore nel vaso s' abbassi con una velocità insensibile, o per meglio dire che la velocità dell' afflusso, che mantiene costantemente il liquido alla stessa altezza sia trascurabile.

Ciò posto supponiamo che in un certo istante esca dal vaso un prismetto d' acqua *p q r s*, e che se l' efflusso non riparasse la perdita, la quantità di cui s' abbassasse il liquido alla superficie fosse espressa da una altezza insensibile *e f*. Per causa dello stato permanente del moto del liquido la somma delle forze vive della massa fluida compresa in *f p q g* è costante prima e dopo l' istante assunto, la forza viva che aveva lo strato *e f g d* in principio dell' istante è trascurabile, perchè la sua velocità è insensibile, la sola parte del liquido componente il prismetto *p q r s* ha una forza viva che non esisteva al principio dell' istante. Se supponiamo ora divenute indipendenti le molecole di questo prisma, ed imprimiamo loro una forza viva eguale e contraria a quella che hanno, dovranno, pel principio esposto, poter rimontare ad un' al-

tezza tale che il centro di gravità del liquido si trovi restituito al luogo ove era prima dell' istante decorso. Perchè ciò avvenga basta che le molecole del prismetto possano rimontare con una velocità impressa contraria a quella che realmente hanno all' altezza del livello $e\,d$, che allora il liquido del vaso si troverà nello stesso stato che era al principio dell' istante che consideriamo. Se dunque si chiama v la velocità da darsi al liquido del prismetto $p\,q\,r\,s$ ed h l' altezza del liquido nel vaso, converrà che ogni molecola colla velocità v possa salire all' altezza h, e per la teoria del movimento de' gravi si sa che perchè ciò avvenga deve essere $v^2 = 2\,g\,h$, ciò che dà $v = \sqrt{2\,g\,h}$, e ci mostra che la velocità dell' efflusso è tanta quanta ne acquisterebbe un grave cadendo dal livello superiore del liquido nel vaso alla profondità del foro. Questo risultamento si chiama il *teorema di Torricelli.*

4. Vi è un'osservazione a fare rispetto a questa conclusione. Il concorso delle particelle acquee effluenti dalle varie parti intorno al foro fa si che all' escire esse formano una specie di cono in cui scorrono come in un imbuto, che va restringendosi a qualche piccola distanza dal foro. È nella sezione, in cui le molecole hanno cessato di convergere e di premersi reciprocamente, sezione che si chiama il luogo della *vena contratta*, dove le velocità delle molecole fluide sono tutte parallele fra loro e perpendicolari all' asse, in cui bisogna misurare l' area della sezione per cui sgorga l' acqua colle velocità $\sqrt{2\,g\,h}$, per ottenerne le quantità che ne esce. Per mezzo di esperimenti si è ritrovato che l' area della sezione contratta è circa 0,61 di quella del foro, quando è circolare; così se si chiama s^2 l' area del foro, T il tempo in cui ha durato l' efflusso, e Q la quantità di liquido sgorgata in questo tempo, la quantità Q sarà data dalla formola

$$Q = 0{,}61.\ s^2\ \sqrt{2\,g\,h.}\ T$$

5. Rispetto all' effetto dell' urto di una colonna, o come si dice di una vena fluida trovo in un ingegnoso esperimento riferito nel Dialogo VI del Galileo un mezzo di dare un'idea della sua valutazione. Eccone la descrizione nei termini stessi dell' autore: il dialogo è fra *Salviati*, *Sagredo*, *ed Apronio.*

« *Apronio* ..... Accomodò un' asta assai gagliarda « e di lunghezza circa tre braccia volubile sopra d'un perno a guisa « dell' ago di una bilancia: sospese poi nell' estremità delle braccia « di cotal bilancia due pesi eguali ed assai gravi, uno de' quali era « il composto di due vasi di rame, cioè di due secchie, l' una delle

« quali appesa all' estremità detta dell' ago si teneva piena d'acqua,
« e dalle orecchie di tale secchia pendevano due corde di lunghez-
« za circa due braccia l' una, alle quali era per gli orecchi attac-
« cata un' altra simil secchia ma vota, la quale veniva a piombo
« a risponder sotto alla prima secchia già detta e piena d' acqua:
« nell' estremo poi dell' altro braccio della bilancia, si faceva pen-
« dere un contrappeso di pietra o di qual si fosse altra materia
« grave, il quale equilibrasse giustamente la gravità di tutto il com-
« posto delle due secchie dell' acqua e delle corde. La secchia supe-
« riore era forata nel fondo con foro largo alla grossezza di un uo-
« vo, o poco meno, e questo tal foro si poteva aprire e serrare.
« Fu la prima immaginazione, e concetto comune di ambedue noi,
« che fermata la bilancia in equilibrio, essendo preparato il tutto alla
« maniera detta, quando poi si sturasse la secchia superiore e si des-
« se l' andare all' acqua, la quale precipitando andasse a percuotere
« nella secchia da basso, l'aggiunta di cotal percossa dovesse aggiun-
« gere tal momento in questa parte che bisogno fusse per restituire
« l' equilibrio aggiungere nuovo peso alla gravità del contrappeso
« dell' altro braccio, la quale aggiunta è manifesto che ristorerebbe
« ed adeguerebbe la nuova forza della percossa dell' acqua; sicchè
« potessimo dire essere il suo momento equivalente al peso delle 10
« o 12 libbre, che fusse stato bisogno aggiungere all' altro con-
« trappeso ».

« *Sagredo.* Ingegnoso veramente mi pare questo macchinamen-
« to, e stò con avidità attendendo l' esito di tale esperienza ».

« *Apronio.* La riuscita, siccome agli altri fu inopinata, così fu
« maravigliosa; imperocchè subito aperto il foro, e cominciato ad
« uscirne l' acqua la bilancia inclinò dall' altra parte del contrap-
« peso, ma non tosto arrivò l' acqua percuotendo nel fondo del-
« l' inferior secchia che restando di più inclinarsi il contrappeso
« cominciò a sollevarsi, e con un moto placidissimo mentre l' acqua
« precipitava, si ricondusse all' equilibrio, e quivi senza passarlo
« pur d' un capello si librò, e fermossi perpetuamente. »

6. Dall' esposizione di questo esperimento chiaro risulta che l' effetto dell' urto della vena cadente sul secchio sottoposto, dopo che fu restituito l' equilibrio, era appunto tanto quanto bastava per compensare la diminuzione di carico che veniva a farsi sul braccio della bilancia che portava i secchi, tanto perchè la colonna che rimaneva sospesa in aria fra i due secchi non gravitava più sulla bilancia, quanto per la libertà che aveva l' acqua nel secchio superiore di cadere in parte: perchè è evidente che in quanto la gravità

ottiene il suo effetto d' altrettanto cessa di produrre un peso morto sulle masse che cedono alla sua azione. Così, per esempio, un corpo che si svolgesse senza contrasti da un filo attaccato ad un braccio di una bilancia, in modo che cadesse liberamente, cesserebbe di produrre più alcun peso sul braccio stesso. Se dunque potessimo valutare a quanto ascende l' effetto della gravità nell' accelerare l' acqua che passa da un secchio all' altro, vale a dire, quanto è il peso dell' acqua che non gravita più sulla bilancia, in relazione alla velocità con cui la vena fluida percuote il secchio sottoposto, avremmo la misura dell' urto che una massa d' acqua animata da una certa velocità è atta a produrre.

7. Per conseguire questa valutazione cominceremo dal considerare prima il peso della colonna fluida che sta sospesa in aria fra i due secchi dopo il luogo della vena contratta $a\ O\ b$ fig. 72, ed il fondo del secchio inferiore $f f$, la qual colonna non gravita per nulla sulla bilancia. Siccome l' acqua si accelera discendendo, e le forze capillari impediscono che si stacchi lateralmente, l' ampiezza della colonna anderà successivamente scemando sino al suo piede $f f$, e prenderà la figura di una conoide ristretta in basso, come è rappresentata nella figura. La forma di questa conoide non è difficile a determinarsi, perchè l' acqua percorrendo la sua lunghezza in un tempo assai corto, ed il movimento potendo essere considerato come permanente in questo breve intervallo di tempo, le quantità di acqua che passeranno per le diverse sezioni dovranno essere eguali, e perciò le aree delle sezioni dovranno essere in ragione inversa delle velocità. Ora le aree essendo proporzionali ai quadrati dei raggi $O a$, $x y$ dei circoli delle sezioni, e le velocità nella vena contratta e nella sezione $x y$ essendo proporzionali alle radici delle altezze $K O$, $K O + O x$ si avrà

$$\overline{O a}^2 : \overline{x y}^2 :: \frac{1}{\sqrt{K O}} : \frac{1}{\sqrt{K O + O x}}$$

dalla quale proporzione si dedurrà pel raggio $x y$ di una sezione qualunque posta alla profondità $O x$ sotto la vena contratta

$$x y = O a \left\{ 1 + \frac{O x}{K O} \right\}^{-\frac{1}{4}}$$

Calcolando varii raggi $x y$ corrispondenti a diverse profondità $O x$ si potrebbe costruire la curva che colla sua rivoluzione intorno all' asse $O w$ genera la superficie della conoide. Noi non avremo bisogno nel seguito che del volume della conoide, ed allora il peso

di un volume eguale d'acqua sarà il peso della colonna d' acqua che nell' esperimento rimase sospesa in aria fra i due secchii.

Per avere anche il valore del peso dell' acqua che non gravita sulla bilancia nell' interno del secchio superiore, perchè discende in parte, supponiamo prolungata la conoide, che abbiamo descritta, per lo in su sino alla superficie dell' acqua nel detto secchio, ove la velocità è presso che insensibile, e che supporremo dovuta ad un' altezza minima $K\,l$, fig. 72. Se ad esempio di Newton (1) immaginassimo che l' acqua che resta laterale nel secchio si congelasse, allora l' acqua compresa nella conoide, passando per delle sezioni la cui ampiezza è in ragione inversa della radice dell'altezza del livello K, si muoverebbe come se, partendo successivamente dalla superficie di livello, cadesse liberamente entro questa conoide, ed arriverebbe alla sezione della vena contratta appunto con quella velocità che, secondo il teorema di Torricelli, deve avere (1). La porzione d'acqua che non graviterebbe sulla bilancia sarebbe in questo caso quella componente la parte superiore della conoide fra la vena contratta $a\,O\,b$, e la superficie libera dell' acqua nel vaso superiore. Nel caso reale l'acqua del vaso concorre al foro in un modo ben differente da quello che farebbe discendendo per la conoide, perchè il concorso verso il foro e l' accelerazione dell' acqua si fa quasi tutta nelle vicinanze dello sbocco, ma la quantità d' azione esercitata dalla gravità sull' acqua nel farla discendere deve essere tanta, quanta nella conoide. Infatti se la forza motrice che accelera realmente ad ogni istante la massa fluida nel vaso fosse maggiore o minore che nella conoide, la velocità dell'efflusso non potrebbe conservarsi la stessa, cioè la velocità dell' acqua nell' attraversare la vena contratta finirebbe coll' essere maggiore o minore di quella dovuta all'altezza $O\,K$ contro ciò che abbiamo dimostrato dover essere nella proposizione precedente (2). Dunque quella parte d'azione della gravità che non produce peso ma che opera accelerando, e genera la velocità con cui esce l' acqua dal vaso, equivale al peso dell' acqua contenuta nello spazio conoidale suddetto. Aggiungendo a questo peso quello della parte inferiore della conoide, corrispondente alla colonna d'acqua che rimane in aria fra i due secchi, di cui si è parlato sopra, diremo che

(1) Philosophiae naturalis Principia Mathematica. Tom. II. Prop. XXXVI.

(2) La brevità di tempo con cui l' acqua all' uscire dal foro acquista la velocità dovuta all' altezza del liquido nel vaso e la lentezza con cui la superficie superiore di livello si abbassa, attesa la piccolezza del foro, permettono di applicare ad ogni istante il teorema di Torricelli anche al caso, in cui il vaso vada a poco a poco votandosi.

il peso dell' acqua compreso nell' intera conoide, dalla superficie libera nel secchio superiore sino al luogo ove si fa l' urto nel secchio inferiore, è la misura dell' urto dell' acqua in questo stesso luogo.

L' espressione della solidità o volume di questa conoide non costa che un tratto di penna col calcolo integrale, ma si può anche ottenerne la misura per una considerazione assai semplice. Infatti se noi supponessimo che l' acqua compresa nella conoide invece di urtare alla fine della sua discesa sul fondo trovasse ivi un foro della stessa sua ampiezza pel quale potesse sgorgare, quest' acqua cadendo naturalmente nell' interno dei due vasi continuerebbe ad uscire per un tempo eguale a quello che impiega la superficie superiore a discendere per l' altezza $K w$, e con una velocità costante dovuta a quest'altezza. Ora sappiamo dalla teoria della caduta de' gravi (1) che quest' acqua può correre colla velocità acquistata, nello stesso tempo, uno spazio doppio di quello che ha percorso accelerandosi, dunque se l' acqua della conoide, all' uscire dal foro supposto, cessasse d' accelerarsi formerebbe al di fuori all' evacuarsi della conoide un cilindro di un' altezza doppia della conoide istessa e con una base eguale all' area del foro al piede della conoide. Il volume V della conoide sarà dunque misurato dal volume di questo cilindro o sia sarà espresso da

$$V = 2\,\pi\,.\,\overline{wf}^2\,.\,K\,w\,;$$

$\pi\,\overline{wf}^2$ rappresentando l' area del circolo che forma la base della conoide ove si fa l'urto, e $2\,Kw$ il doppio dell' altezza dovuta alla velocità con cui l' acqua opera l' urto.

8. Se si chiama v questa velocità e si sostituisce $\frac{v^2}{2\,g}$ all' altezza Kw, e si moltiplica il volume V per la densità Δ del liquido e per la gravità g, onde esprimere il peso di quel volume, indicando generalmente con A l' area della sezione della vena urtante si avrà per la misura dell' urto della medesima vena l' espressione

$$\Delta\,A\,v^2\,;$$

la quale ci dice che l' urto di una vena fluida è, in generale, misurato dal prodotto della densità, dell' area della sezione urtante, e del quadrato della velocità. Questo risultamento però è soltanto vero quando la superficie urtata è perpendicolare alla vena urtante, e bastantemente ampia onde il liquido estingua su di essa tutta la sua

(1) Vedasi l' articolo 3 della Lezione III.

velocità. Se la superficie urtata è eguale od è soltanto poco più grande della sezione della vena, o se questa la incontra obliquamente talchè una parte del liquido sfugga dai lati possedendo ancora una parte della sua velocità, la misura dell' urto diviene assai minore (1). La misura dell' urto dei fluidi è un oggetto assai interessante nella costruzione degli opificii mossi dall' acqua, ma la teorica in questa parte è ancor imperfetta, ed i pratici si valgono in gran parte dei dati che loro somministra l' esperienza.

9. Osserveremo di passaggio che il bell' esperimento che abbiamo riferito ci offre una conferma del principio esposto nella meccanica art. 8, che quando una quantità d' azione produce un movimento, e genera uua certa quantità di forza viva, questa forza viva venendo ad estinguersi contro delle resistenze ridona una quantità d' azione eguale a quella che l' ha generata. Così è che la quantità d' azione che la gravità ha impiegato nell' accelerare l' acqua in luogo di farla pesare sulla bilancia, fu compensata, nell'esperimento, dalla forza viva che il cilindretto d' acqua alla base della conoide iva perdendo coll' urto e che ha mantenuto l' equilibrio. Viceversa partendo da questo principio si potrebbe dare una misura diretta dell' urto indipendentemente dall' esperimento, facendo vedere, con un discorso analogo a quello della proposizione precedente, che la forza viva generata ad ogni istante dall' azione acceleratrice della gravità nella massa totale d' acqua, è tanta quanta ne possede il cilindretto al piede della conoide, e che si estingue coll' urto.

10. S' applica la misura dell' urto dei fluidi che abbiamo riferito anche al caso che un corpo od una superficie solida si muova in una massa fluida, perchè supponendo reso immobile il corpo ed imprimendo al fluido una velocità eguale e contraria si suppone che l' effetto sarebbe lo stesso, e si ricade nel caso dell' urto dei liquidi. Si assume quindi comunemente che i corpi che si muovono nei mezzi fluidi, come per esempio i corpi che si muovono nell' aria o nell' acqua, soffrono una resistenza proporzionale alla densità del fluido, al quadrato della velocità, ed alla grandezza delle projezioni degli elementi della superficie su d' un piano perpendicolare alla direzione del movimento. Ciò però non è che un' approssimazione per supplire alle difficoltà che s' incontrano a calcolare direttamente i movimenti comunicati al fluido dalla cui inerzia ed adesione provengono le resistenze. Il primo esempio di un calcolo in cui queste difficoltà sono state vinte ed in cui le resistenze di un fluido sono de-

(1) Zuliani. Memoria dell' Accademia di Padova Tom. III.

dotte dai principii generali della meccanica è quello che Poisson ha dato in un'esimia Memoria sull' effetto della resistenza dell'aria nel movimento di un pendolo (1): ciò non ostante pare che qualche altra circostanza rimanga ancora a considerarsi, poichè i risultamenti del calcolo non sono del tutto d' accordo con quelli dell' esperienza.

(1) Sur le mouvemens simultanés d'un Pendule et de l'air environnant. Mém. de l'Academie des Sciences. Tom. XI: ou Connaissance des temps pour l'année 1834.

PNEUMATICA.

LEZIONE XVII.

Barometro.

1. Nati e cresciuti continuamente immersi in un fluido sottile ed elastico che circonda tutto il globo terracqueo, noi siamo appena avvertiti della sua esistenza, perchè possiamo muoverci e camminare in esso senza provare resistenza notabile: eppure questo fluido esercita su noi e su tutti i corpi posti sulla superficie della terra una fortissima pressione il cui valore eccede il peso di 103 chilogrammi per ogni decimetro quadrato. L' esistenza di questa enorme pressione indicata da G. B. Baliati e riconosciuta da Galileo (1) è stata dimostrata da Evangelista Torricelli che primo la fece conoscere pubblicamente.

2. Prima d'intraprendere l'esposizione del mirabile esperimento, col quale Torricelli misurò la pressione dell' aria atmosferica, conviene che facciamo alcune considerazioni sulla natura dei corpi che assumono lo stato elastico aeriforme. Considerati i corpi sotto il punto di vista che li abbiamo presentati nelle lezioni XII e XIII, le molecole di cui essi sono composti devono essere risguardate come centri di azioni, che sono, repulsive nelle minime distanze, attrattive in distanze un pò maggiori, ma tuttavia insensibili, e lo stato naturale del corpo è costituito quando le molecole stanno in quelle distanze, in cui le forze repulsive fra quelle rispettivamente più prossime sono in tale rapporto colle forze attrattive fra quelle rispettivamente più lontane, che la loro azione unita su ciascun elemento del corpo è nulla, e tutti gli elementi si trovano in equilibrio. La dilatazione, a cui sono soggetti i corpi pel calore, ci mostra che questo rapporto è variabile, e che la presenza di una maggior quantità di calorico apporta all' azione delle forze repulsive un aumento che cresce in maggior ragione che quello delle attrattive. Proviene da questa alterazione, che arreca il calore al rapporto fra le forze repulsive e le attrattive, lo stato diverso che assumono i corpi secondo la

(1) Venturi. Lettere inedite di Galileo. Vol. II, pag. 165.

temperatura. Se la temperatura è bassa, le forze repulsive sono meno energiche, le molecole si avvicinano di più fra loro: a queste minime distanze l' influenza della loro figura nel costituirsi in equilibrio diviene sensibile, le molecole sono obbligate ad orientarsi secondo certe direzioni in cui le forze prevalgono, ed il corpo acquista lo stato solido. Se la temperatura aumenta, le forze repulsive divengono più energiche, l' equilibrio succede ad una maggiore distanza delle molecole, l' influenza della loro figura viene a scemare in queste distanze, ed il corpo passa dallo stato di solidità a quello di liquidità imperfetta e poi allo stato di liquido perfetto. Se la temperatura continua ad aumentare, le forze repulsive crescono ancora in intensità, le forze attrattive non sono più in grado di far loro equilibrio in quelle distanze minime, il corpo non trova sufficiente spazio per acquistare il volume che conviene all' equilibrio de' suoi elementi, esercita uno sforzo per ogni verso, e resta così nello stato che si chiama elastico aeriforme. La temperatura necessaria per produrre questi diversi stati varia secondo l' essenza e natura delle molecole, quindi è che in una stessa temperatura alcuni corpi sono solidi, altri liquidi, ed altri aeriformi.

3. Le leggi che determinano l'equilibrio dei fluidi aeriformi sono le stesse di quelle che abbiamo esposto nell' Idrostatica, perchè è evidente che gli stessi principii possono essere applicati all' equilibrio si degli uni che degli altri. Infatti noi dobbiamo considerare i fluidi elastici come liquidi in uno stato di pressione, cioè in uno stato in cui le loro molecole sono avvicinate di più che non comporterebbe il loro stato naturale per causa delle resistenze che oppongono le pareti che li contengono, o le pressioni che si esercitano dalle forze esteriori.

I fluidi aeriformi sono in generale di una gravità specifica assai tenue, perchè le loro molecole trovandosi in distanze assai maggiori che nei liquidi, o ne' solidi, le densità di questi fluidi riescono assai piccole. Essi però sono dotati di peso proporzionalmente alle loro masse e sono soggetti alle stesse leggi della gravità. Quindi è che se si ha un gran volume di un fluido aeriforme, le parti superiori di questo fluido, gravitando, producono, come abbiamo veduto nell'Idrostatica, una pressione sulle parti inferiori, e possono impedire che queste parti si dilatino secondo la loro natura e quindi contenerle in uno stato di forte elasticità. Questo è il caso dell' aria atmosferica la quale è una mescolanza di circa 79 parti in volume d' ossigeno e 21 d' azoto, associato ad una piccola porzione d' acido carbonico che varia da 3 a 4 millesime parti e di una piccola porzione di vapor acqueo

pur variabile ma che non eccede quindici millesime parti del composto.

Per farsi un' idea del modo con cui l' equilibrio dell' aria atmosferica è costituito immaginiamo un globo di un diametro molto grande che rappresenti la nostra terra circondato tutt' all' intorno d' un' inviluppo sferico d' aria, che si chiama l' atmosfera. Dividiamo col pensiero quest' inviluppo in molti strati sferici tutti concentrici col globo terrestre e di un piccolo spessore, e consideriamo successivamente questi strati cominciando dall' alto. Il primo strato superiore d' aria essendo libero si dilaterà a sua possa, e le molecole si porranno a quelle distanze reciproche che, secondo la temperatura esistente, devono costituire il suo stato naturale definito sopra, o come Poisson si espresse, lo stato liquido. Questo strato essendo d' alcun poco pesante graviterà sopra il secondo che già comincierà a sentire una pressione, a condensarsi un poco più, ed a reagire con una forza elastica. Questo spiegherà la sua forza elastica anche sul terzo strato, e di più lo caricherà col suo peso, di modo che il terzo strato sosterrà il peso dei due primi, e sarà tuttavia più compresso ed elastico del secondo. Per le stesse ragioni il quarto strato lo sarà più del terzo, perchè sosterrà il peso dei tre primi strati, e così successivamente sino all' ultimo strato in contatto colla superficie della terra, che sarà il più denso e compresso di tutti, poichè sosterrà il peso di tutta l' atmosfera che gli sta sopra. In questo stato di cose quantunque la gravità che tiene compressa l' aria operi d' alto in basso, ciò non ostante la pressione che ne nasce è, come abbiamo dimostrato nell' Idrostatica, diretta per ogni verso; e l' aria per la sua forza espansiva tende a diffondersi con uno sforzo equivalente, e quindi esercita un'egual pressione tutt'all'intorno, che i corpi circostanti sopportano, o l' aria circonvicina sostiene opponendo un' eguale elasticità. È così che avviene, che se si accende un fuoco in un recipiente chiuso, nel qual caso, come si sa dalla chimica, parte dell'aria interna si combina col combustibile, l'aria esterna rimasta più densa ed elastica penetra e soffia per le fessure del recipiente, se ve ne sono, in qualunque direzione esse siano poste. L'esperimento di Torricelli è diretto a darci una prova di fatto dell' esistenza di questa pressione che l' aria esercita per ogni verso, ed una misura esatta della sua grandezza.

4. Per intendere bene come il citato esperimento serva a quest' oggetto ci conviene richiamare alla memoria due proposizioni, la cui dimostrazione abbiamo esposto trattando dell' Idrostatica.

La prima di queste proposizioni si è che, se un fluido pesante

è contenuto in un vaso dal quale possa comunicare con un altro vaso per un condotto qualunque, e si apra la comunicazione, il fluido passerà dal primo nel secondo vaso e si solleverà in questo sino a che si trovi nei due vasi allo stesso livello.

La seconda proposizione ci dice, che un fluido pesante esercita sopra qualunque delle sue parti contigue o sopra qualunque punto della superficie de' vasi in cui è contenuto una pressione eguale al peso di un filo dello stesso fluido alto quanto è la distanza del punto premuto sino alla superficie superiore di livello del fluido.

Premesse queste proposizioni consideriamo un cannello *a b* (fig. 73) pieno di un liquido sino ad una certa altezza che si sommerga per abbasso in un vaso *c d* contenente una porzione dello stesso liquido, ma ad una altezza molto minore: per la prima proposizione idrostatica il liquido non può sostenersi nel cannello e deve tendere a discendere per mettersi a livello nel cannello e nel vaso. Se voglio impedire la discesa del liquido che dovrò io fare? converrà, giusta la seconda proposizione idrostatica, che preso un anello piano *m p q n*, che imbocchi esattamente il cannello, lo faccia discendere sulla superficie del liquido nel vaso in modo che la copra esattamente, e che prema su quest'anello tanto che in ciascun punto offra una resistenza eguale al peso di un filo dello stesso liquido alto quanto è la differenza di livello fra il liquido del cannello e quello del vaso. La forza, colla quale convien premere quest' anello per impedire la discesa del liquido, è l' immagine della pressione atmosferica nell' esperimento di Torricelli.

5. Questo fisico prese un cannello di vetro, chiuso in una estremità, lo riempì di mercurio, poscia applicò un dito all' estremità aperta onde il mercurio non uscisse, invertì il tubo e lo sommerse per questa estremità in una vaschetta piena di mercurio, indi ritrasse il dito ed osservò che il mercurio discese nel cannello, fece alcune oscillazioni, poi si fermò in esso all' altezza di circa 76 centimetri. Ora, egli disse, pel primo principio idrostatico, il mercurio avrebbe dovuto discendere e porsi allo stesso livello nel cannello e nel bagno, se ciò non è avvenuto, è forza che al di fuori sopra il liquido sia esercitata una pressione che non esiste interiormente. Ma al di fuori il liquido non è in contatto che coll' atmosfera, ed al di dentro non vi può essere aria alcuna od altro corpo, perchè il mercurio lasciò vôto lo spazio che abbandonò nel cannello, dunque è l' aria esterna che esercita una pressione sopra il mercurio, e che a guisa dell' anello, di cui abbiamo parlato sopra, impedisce al mercurio del cannello di discendere: e come questa pressione

deve essere misurata in ciascun punto dal peso di un filo fluido alto quanto è la differenza delle due altezze del mercurio nel cannello e nel bagno, la pressione atmosferica sarà quindi misurata in ogni punto dal peso di un filo di mercurio alto all' incirca 76 centimetri.

Che sia la mancanza della pressione dell' aria nell' interno del cannello, che non equilibrando la pressione atmosferica sul mercurio del bagno, faccia sì che il mercurio non possa discendere nel cannello, è facile il convincersene ripetendo l' esperimento con un cannello che non sia stato fuso e saldato nell' estremità superiore, ma semplicemente chiuso con un pezzo di vescica. Se con uno spillo si fa un foro nella vescica, l' aria atmosferica immediatamente introducendosi nel cannello esercita sopra ciascun punto della superficie interna della colonna di mercurio una pressione eguale a quella che produce l' aria esteriore sopra ciascun punto della superficie del mercurio del bagno, gli effetti contrarii si distruggono, e si vede la colonna di mercurio precipitarsi immantinente, e porsi di livello col mercurio del bagno.

6. Sino dalla più remota antichità si sapeva che immergendo l' estremità di una canna o cilindro nell' acqua, e facendo ascendere nel cilindro uno stantuffo di modo che lo spazio che questo abbandonasse successivamente rimanesse vôto di aria, l' acqua ascendeva nella canna a riempire questo vôto. Sopra questo principio si sono costrutte e si costruiscono ancora le pompe dette aspiranti. La ragione che davano di questa elevazione gli antichi era il principio, che essi ammettevano, dell' orrore della natura pel vôto. Si sapeva però dai costruttori delle pompe d' acqua, che l' effetto era soltanto prodotto sino a che la pompa avesse un' altezza minore di 10 metri ed $\frac{1}{3}$, e che per un' altezza maggiore l' acqua non si elevava più a riempire il resto della canna. Galileo dedusse da ciò che la resistenza del vacuo era misurata dal peso di un filo d' acqua alto $10^{m},33$ per ciascun punto (1), ed il Baliati in seguito ne diede per ragione la pressione dell' aria atmosferica, come abbiamo accennato in principio. Che tale sia infatti la causa del fenomeno diviene evidente, quando si sappia che il mercurio è 13 volte e 6 decimi più pesante dell' acqua. Se la pressione atmosferica può sostenere il peso di una colonna di mercurio alta $0^{m},76$, potrà sostenere il peso di una colonna di un liquido 13 volte e 6 decimi meno pesante ad un' altezza 13 volte e 6 decimi maggiore.

(1) Discorsi e Dimostrazioni intorno a due Scienze nuove. Dialogo primo pag. 490 e seg. Ediz. di Firenze.

Ora 13,6 moltiplicato per $0^m,76$ dà giusto un prodotto eguale a $10^m,33$.

7. L' esperimento di Torricelli che abbiamo descritto pone in chiaro la esistenza della pressione atmosferica e dà all'incirca la sua grandezza; ma volendo fare del tubo torricelliano un istromento che possa indicare la misura della pressione dell' aria con esattezza e comodità, varie altre precauzioni si esigono per costruirlo, e varie parti accessorie necessitano per impiegarlo.

Primieramente se si versa soltanto il mercurio nel cannello di cristallo senz' altra precauzione non si esclude interamente l' aria ed il vapore. L' umidità e l' aria aderiscono fortemente al vetro, nè escono interamente dal cannello, quando si riempie di mercurio, ed allorchè si inverte il cannello e la pressione atmosferica cessa, almeno in parte, si manifestano aderenti al vetro molte bollicine, e molte se ne svolgono e salgono ad occupare la parte superiore, rimasta vacua del cannello, producendovi una contropressione, che sebbene debole, altera sempre il valore della vera altezza barometrica. Si evita questo inconveniente riempiendo il cannello per parti, e facendo bollire dentro di esso ad ogni volta il mercurio. Coll' ebollizione l' aria ed il vapore acquistano maggiore forza elastica, si staccano, si sviluppano dal vetro, s' aprono un passaggio attraverso il mercurio ed escono dall' estremità aperta del cannello, e se si è presa la precauzione d' impiegare del mercurio distillato e pulito si avrà un cannello ben preparato pieno di mercurio.

8. Così preparato il cannello non basta invertirlo in una vaschetta, pure piena di mercurio distillato e bollito, per avere un istrumento da potersi impiegare nelle osservazioni. L' istrumento deve essere costrutto in modo che sia facilmente trasportabile ed atto a darci in ogni circostanza la misura precisa dell' altezza della colonna di mercurio. Una infinità di costruzioni differenti si sono immaginate per quest' oggetto, secondo l' ingegno ed il capriccio degli artisti, che sarebbe interminabile il riferirle tutte. Noi faremo qui cenno della costruzione adottata da Fortin, che opiniamo essere la migliore, e ben intesa la quale sarà facile l' arguire il fine a cui sono destinate le varie parti nei barometri di altre costruzioni che ci si presentassero ad esaminare.

Il cannello contenente il mercurio nel barometro di Fortin (fig. 74) s'immerge in una vaschetta composta di un cilindro di cristallo pieno in parte di mercurio, e di un pozzetto di legno chiuso inferiormente da una pelle flessibile. Il cilindro è superiormente coperto da un disco di

legno coperto da un piano metallico $a\,a'$ circolare al cui contorno sono uniti tre anelli $\alpha\,\alpha$ pei quali passano tre spranghette di ferro $f\,f$, $f\,f$ che discendono e penetrano a vite in altri tre anelli α, α, corrispondenti attaccati ad un labbro sporgente di un secchietto di metallo, che per tal modo è sostenuto e tenuto compresso contro il labbro inferiore del cilindro di cristallo, e contiene il pozzetto col sacchetto di pelle che lo chiude. Così il mercurio nel cilindro di cristallo è visibile, e rinchiuso senza che possa disperdersi nel trasporto.

Pel centro del fondo del secchietto metallico penetra una vite V terminata in un piano che va ad operare sul fondo di pelle flessibile della vaschetta, e può farlo elevare o abbassare. Il piano superiore $a\,a$ è attraversato dal cannello barometrico nel mezzo, ed in un lato da una punta d'avorio $m\,m'$ che discende sino ad una certa profondità nell'interno della vaschetta. Una canna metallica $E\,D\,D'\,E'$ è attaccata a vite a questo stesso piano superiore e contiene il cannello del barometro per difenderlo dagli urti. Questa canna ha in quasi tutta la sua lunghezza due fenditure diametralmente opposte che permettono di guardare attraverso e vedere il mercurio nel cannello. Da un lato di una di queste fenditure sulla canna metallica stanno tracciate le divisioni della scala del barometro, e queste divisioni sono notate in modo che il loro principio, o il zero, è contato dall'estremità della punta d'avorio che termina nella vaschetta. Un cursore K che scorre entro le due fenditure porta un vernier $C\,C'$ che resta continuamente applicato alle divisioni della scala tracciata sul lembo di una di esse, e termina in basso con due spigoli allo stesso livello: uno, $s\,s$, da una parte e l'altro di dietro della parte opposta, amendue in fronte alle fenditure della canna. Questi due spigoli determinano la direzione di un piano di mira perpendicolare all'asse del cannello. Tutto l'apparecchio è poi sostenuto da una sospensione mobile detta *cardanica*, che è fatta da due assi in croce che permettono al barometro di prendere pel suo peso una posizione verticale. Nella canna metallica sta pure applicato un termometro, che serve a far conoscere la temperatura dell'apparecchio nell'istante dell'osservazione.

9. Inteso questo, ecco come si fa l'osservazione. Fissiamo prima bene in mente che la pressione atmosferica è data dall'altezza della sommità della colonna di mercurio nel cannello sopra il livello del mercurio nella vaschetta. La pressione atmosferica è soggetta a molte variazioni: quando diminuisce, la colonna di mercurio s'abbassa, parte del suo mercurio passa nella vaschetta, ed il livello del mercurio in essa si eleva; per lo contrario quando

la pressione atmosferica aumenta, la colonna monta, parte del mercurio della vaschetta passa nel cannello, ed il livello del mercurio nella vaschetta s'abbassa. Il livello del mercurio nella vaschetta viene dunque ad essere variabile. Ora la scala delle divisioni tracciate sulla canna di ottone che abbraccia il cannello, e sulla quale dobbiamo leggere l'altezza della colonna barometrica, suppone che la superficie del mercurio nella vaschetta sia immobile, e precisamente tangente alla punta d'avorio che abbiamo descritto, da dove si conta il principio di numerazione delle divisioni della scala. Questa condizione si ottiene per mezzo della vite *V*, che alza ed abbassa il fondo flessibile della vaschetta e perciò anche il livello della superficie del mercurio. Volendo osservare una altezza barometrica si comincierà dal portare col mezzo della detta vite la superficie del mercurio della vaschetta ad essere tangente alla punta d'avorio: il barometro è allora preparato per dare la giusta altezza, e non resta più che a leggere sulle divisioni della scala a che punto arriva la sommità della colonna di mercurio nel cannello. Il cursore del quale abbiamo parlato è destinato a facilitarci quest'ultima operazione. Si fa scorrere questo cursore sino a tanto che, guardando perpendicolarmente ai due spigoli nei quali termina per abbasso, il raggio visuale che rade questi spigoli sia tangente alla superficie convessa dell'estremità superiore della colonna di mercurio nel cannello compresa tra loro. Allora si ferma il cursore e col mezzo del *vernier* si legge l'altezza scritta che sarà precisamente l'elevazione del mercurio nel cannello sopra quello della vaschetta.

Quando si vuole trasportare il barometro, si gira la vite inferiore che eleva il fondo della vaschetta di modo che la sua capacità diminuendo continuamente, il mercurio la riempia tutta e dopo non trovando più luogo in essa, per eccesso di volume, salga nel cannello e giunga ad occuparlo sino alla sua sommità. Allora si stacca e s'inverte l'istrumento nel quale l'aria non può più entrare, e si pone in un astuccio convenevolmente preparato, e si trasporta. Quando si vuole osservare di nuovo, si comincia dal rimettere l'apparecchio in una situazione verticale sospendendolo agli assi in croce, si abbassa per mezzo della vite inferiore il fondo mobile, il mercurio discende, e si fa così discendere sino che il suo livello nella vaschetta passi per l'estremità inferiore della punta d'avorio; indi si fa l'osservazione come testè l'abbiamo descritta.

10. Le altezze così osservate hanno bisogno di varie correzioni. *Correzioni per la capillarità.* Nella lezione sulla capillarità abbiamo

visto che nei cannelli sottili i fluidi che non bagnano le pareti stanno più bassi del loro livello naturale, e che la colonnetta liquida termina superiormente in una superficie convessa. Il mercurio che non bagna il vetro resta quindi per effetto dell' attrazione capillare un poco più basso nel cannello barometrico, che non resterebbe senza l' azione di questa forza, e la colonna barometrica che termina nell' estremità superiore in una superficie convessa è minore di quella che realmente dovrebbe essere per misurare la pressione atmosferica.

Supponendo che il mercurio del barometro sia stato bollito, e le pareti del cannello ben disseccate, i fisici hanno costrutto coi dati dell' esperienza e col soccorso della teorica una tavola che dà per qualunque diametro del cannello la corrispondente depressione del mercurio. Questa tavola è la seguente (1)

Diametro del cannello in millimetri	Depressione del mercurio in millimetri	Diametro del cannello in millimetri	Depressione del mercurio in millimetri
2	4,579	9	0,534
2,5	3,594	10	0,419
3	2,902	11	0,330
3,5	2,415	12	0,260
4	2,053	13	0,204
4,5	1,752	14	0,161
5	1,507	15	0,127
5,5	1,306	16	0,097
6	1,136	17	0,077
6,5	0,995	18	0,060
7	0,877	19	0,047
8	0,684	20	0,036

All' altezza osservata della colonna del barometro bisognerà dunque aggiungere la depressione data da questa tavola corrispondente al diametro che avrà il cannello onde avere l'altezza totale alla quale il mercurio sarebbe salito se l' attrazione capillare non si fosse opposta. (Vedasi la nota 1).

11. Deluc prima ed in seguito Gay-Lussac hanno proposto di costruire il barometro con un solo cannello di egual diametro piegato

(1) Vedi les connaissances des temps pour l'an 1829 pag. 308. Bouvard.

in forma di un siffone inserito, chiuso nell'estremità superiore ed aperto nell'inferiore (Fig. 7[illegible]). Gay-Lussac ha reso questo barometro d'un uso facile e portatile col fare che nell' estremità inferiore non vi sia che un piccolo foro che permette all'aria di entrare, ma non al mercurio di uscire, che vi è trattenuto per effetto dell' azione capillare. L' oggetto per cui fu proposto questo barometro a siffone fu di eliminare l' azione della capillarità, perchè opponendosi due effetti eguali e contrarii nei due rami del barometro è come se essi non esistessero, e la differenza di livello del mercurio nei due rami deve risultare esattamente eguale alla pressione atmosferica. L' ispezione però della superficie del mercurio nelle due estremità della colonna ci mostra che questo compenso di rado succede esattamente, perchè l' estremità nel ramo corto in contatto coll' aria atmosferica mostrandosi comunemente più convessa, ciò indica che la capillarità produce un effetto maggiore in questo ramo, dal che ne deve nascere un eccesso di depressione, che deve tenere il mercurio più alto nell' altro ramo, e far giudicare la pressione atmosferica più forte. Alcuni hanno attribuito questa disparità dell' azione capillare nei due rami all' umidità o vapori d' altre sostanze che s' introducono nel ramo corto, e ne intonacano la parete interna in contatto coll' atmosfera, e diminuiscono l' azione del vetro sul mercurio: altri non ammettono questa spiegazione. Comunque possa essere pare che rimanga dubbioso se l' effetto propostosi sia stato rigorosamente ottenuto col barometro a siffone.

12. *Correzione per le temperature.* Affinchè le altezze osservate in diversi tempi collo stesso barometro o con varii barometri anche nello stesso tempo siano comparabili fra loro, bisogna che le colonne di mercurio che le rappresentano abbiano lo stesso peso quando le loro altezze sono eguali. Ora ciò non succede esattamente se gli stati di calore, o le temperature nei tempi delle osservazioni non sono eguali. Il calore dilata i corpi, ed a parità di volume li rende più leggieri. Una colonna di mercurio d' eguale altezza pesa dunque meno o più, e la stessa divisione della scala del barometro corrisponde ad una altezza maggiore o minore, secondo che la temperatura sarà più o meno elevata.

Comunemente si usa di rappresentare le pressioni atmosferiche col peso di colonne di mercurio corrispondenti alla temperatura zero, e di dividere la scala dei barometri come se fossero nello stato di dilatazione corrispondente a questa temperatura. Queste scale sono ordinariamente di vetro, come nel barometro di Gay-Lussac, o di ottone come nel barometro di Fortin. Adottando quindi, come risulta

dagli esperimenti, che le dilatazioni lineari corrispondenti all' unità di lunghezza, siano

Pel mercurio ... 0,0001802 per ogni grado cent.
Pel vetro..... 0,0000086 idem.
Per ottone ..... 0,0000172 idem.

Le dilatazioni relative saranno

Dal mercurio al vetro ... 0,0001716
Dal mercurio all' ottone .. 0,0001630

Quindi per ogni grado centigrado, di cui la temperatura del barometro starà sopra zero, la colonna di mercurio nel barometro di Gay-Lussac si troverà, relativamente alla sua scala, di 0,0001716 parti, e quella del barometro di Fortin di 0,0001630 parti della sua lunghezza, più alta che se la temperatura fosse zero. Indicando con Θ il numero di gradi che segna il termometro incastrato nella montatura del barometro, e con H l' altezza osservata dal barometro, si dovrà dunque sottrarre da quest' altezza

pel barometro di Gay-Lussac il prodotto $0{,}0001716\ \Theta H$
e pel barometro di Fortin il prodotto .. $0{,}0001630\ \Theta H$.

Se i gradi Θ della temperatura osservata fossero sotto zero, si devono considerare come negativi, e questi prodotti dovrebbero essere aggiunti alle altezze osservate.

13. *Correzione per le latitudini.* Applicate che siano le due correzioni dipendenti dalla capillarità e dalle temperature alle altezze barometriche osservate si avranno delle misure delle pressioni atmosferiche, comparabili fra loro, almeno per lo stesso paese. Dico per lo stesso paese, perchè volendo paragonare fra loro le pressioni atmosferiche di varii paesi, è necessario osservare che pel motivo che la gravità varia un poco da un paese all' altro, le colonne di mercurio, ancorchè ridotte alla stessa temperatura, non hanno lo stesso peso e quindi non misurano eguali pressioni, sotto differenti latitudini. Prendendo la latitudine corrispondente al parallelo medio di 45° per quella sotto cui si devono contare le altezze delle colonne di mercurio per avere i pesi che misurano le pressioni atmosferiche, si potranno ridurre le altezze barometriche osservate sotto diverse latitudini ad altre equivalenti in peso sotto il parallelo di 45°, moltiplicandole pel numero $1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda$, che indica la ragione nella quale stanno i pesi di uno stesso corpo trasportato dalla latitudine di 45°, alle varie latitudini λ. (Vedi la nota [illegible] II)

14. *Correzione per l'elevazione.* La riduzione precedente suppone che le osservazioni siano istituite al livello del mare. Se il barome-

tro si trova molto elevato su questo livello conviene applicare un'altra correzione perchè sappiamo che la gravità diminuisce elevandosi sopra la superficie della terra. (Vedi Lezione IV art. 9).

Quando l' elevazione sia nell' aria , come quando si stà elevati in un areostata , l' azione della massa d' aria che rimane al di sotto è sempre tanto piccola che si può trascurare , e l' altezza osservata del barometro può ridursi al livello del mare applicando l' intera correzione che proviene dalla diminuzione della gravità in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Questa riduzione , chiamando r il raggio terrestre $=$ 6366198 ; e z l' elevazione della stazione del barometro espressa in metri è data dal fattore $\frac{r^2}{(r+z)^2} = 1 - \frac{2z}{r}$ prossimamente, pel quale si dovrà moltiplicare l' altezza barometrica osservata.

Ma se siamo saliti col barometro sopra un' altura , la massa solida del terreno che forma questa elevazione agisce per la sua attrazione propria , ed aumenta un poco l' effetto generale della gravità , ed allora la riduzione è minore che nel caso precedente. In questo caso , conservando le denominazioni anteriori , il fattore pel quale si deve moltiplicare l' altezza del barometro può essere valutato prossimamente colla formola $\left(1 - \frac{5z}{4r}\right)$. Vedasi il n.° 255 *du Traité de Mécanique par* Poisson.

15. Riunendo in una formola tutte le riduzioni accennate , diremo dunque che una altezza barometrica H sarà data da quella osservata H', corretta per la capillarità, ridotta alla temperatura zero, al parallelo di 45° ed al livello del mare per mezzo dell'equazione

$$H = H' \left(1 - \delta \Theta\right) \left(1 - 0{,}002552 \cos. 2\lambda\right) \left(1 - \frac{\alpha z}{r}\right) + C$$

dove $\delta = 0{,}0001716$ se la scala sarà tracciata sul vetro come nel barometro di Gay-Lussac , o vero $= 0{,}0001630$ se la scala sarà d' ottone ;

$\alpha = 2$, se il barometro si trova elevato nell'aria , o solo eguale a $\frac{5}{4}$ se saremo saliti sopra un altura.

Θ indica i gradi centigradi che segna il termometro annesso al barometro nell' istante dell' osservazione.

λ la latitudine geografica del luogo.

z l' elevazione della stazione sopra il livello del mare espressa in metri.

r il raggio terrestre eguale a 6366198 metri.

C la correzione capillare data dalla tavola del n.° 10.

LEZIONE XVIII.

Usi del barometro.

1. *Uso del barometro come indicatore del tempo.* Se si osserva il barometro per alcuni giorni, o soltanto anche per più ore consecutive, si vede che l'altezza della colonna barometrica non rimane costante, ma che è soggetta a continue oscillazioni. Come si è notato che queste oscillazioni hanno qualche relazione coi cambiamenti del tempo, si è creduto di fare del barometro un indicatore del buono o cattivo tempo.

Così se si vede che la colonna barometrica aumenta, e che la sua superficie prende una forma più convessa, cioè che tende a sollevarsi ancor più, si è preso questo per un indizio che il tempo si dispone al sereno, se la colonna si mantiene alta e costante, colla sua superficie sempre convessa, il buon tempo è stabile; ma se per lo contrario la colonna barometrica s'abbassa, e la sua superficie superiore perde della sua convessità, come che tenda a discendere, si è conchiuso che dobbiamo aspettarci pioggia o vento. Queste indicazioni del barometro hanno certamente qualche cosa di vero, ma volendo servirsi di esse è necessario andar ben cauti, e non confidare troppo in loro.

Le tavolette che si appongono ai barometri volgari colle parole *pioggia*, *vento*, *variabile*, *sereno*, *sereno costante* ec. sono piuttosto atte ad indurci in errore che ad istruirci sullo stato prossimo dell'atmosfera. Queste tavole sono comunemente applicate ad una medesima altezza media del barometro, e si estendono in alto e in basso di quest'altezza per un egual numero di pollici o centimetri; ciò che è incompatibile per ogni paese. Infatti abbiamo visto che l'altezza media del barometro è differente secondo la diversa temperatura, la diversa latitudine, la diversa elevazione del paese sopra il livello del mare, così è che una stessa altezza barometrica non può indicare uno stesso stato atmosferico in ogni luogo. Di più l'estensione delle oscillazioni a cui va soggetta la colonna barometrica è molto diversa da un paese all'altro. Un abbassamento od inalzamento di 2 centimetri sarebbe straordinario sotto i tropici, ed è frequente in un'alta latitudine, ed una oscillazione di 5 centimetri possibile a Parigi, non potrebbe mai essere osservata a Lima. Così converrebbe almeno fare una tavoletta appropriata a ciascun paese.

2. Una circostanza che si trova più costantemente legata cogli

abbassamenti ed inalzamenti del barometro è la direzione del vento. I venti che soffiano dal lato dei poli fanno generalmente montare il barometro, specialmente se traversano dei grandi continenti, e quelli che spirano dal lato dell'equatore lo fanno abbassare. Così in Europa il barometro stà più alto coi venti di Nord-est, Nord e Nord-ovest, e più basso coi venti del Sud, e Sud-ovest; nell' America meridionale al contrario, il barometro sta più alto coi venti di Sud-ovest e Sud, e più basso coi venti di Nord, e Nord-est. Questa circostanza è assai notabile. Durante sette anni d'osservazioni meteorologiche che instituii a Buenos-Ayres, stando nella mia camera, colla semplice osservazione del barometro poteva quasi sempre con successo predire da qual lato aveva girato il vento al di fuori.

Posto questo principio è facile l' intendere come l'abbassamento del barometro sia accompagnato dall'apparizione di nubi e dalla caduta di pioggia, e l'inalzamento da un tempo sereno e secco. L'atmosfera contiene sempre disseminato del vapor acqueo allo stato elastico e trasparente, e si sa che la quantità di vapore che può esistere in questo stato è tanto maggiore quanto la temperatura è più elevata. Quindi è che una quantità di vapore, che in un paese caldo non è ancor giunta al massimo di quella che potrebbe esistere allo stato gazoso nell'atmosfera, deve passare allo stato vescicolare od anche d' acqua, trasportata nell' atmosfera di un paese più freddo. Ora i venti che spirano dal lato dell' equatore, da paesi cioè dove la temperatura è più elevata, vengono a noi gravidi di vapori più che la temperatura della nostra atmosfera non comporta, devono quindi condensarsi e formare delle nubi, e spesso delle pioggie. Per lo contrario i venti che vengono dal polo portano seco una quantità di vapore minore di quella che comunemente esiste nella nostra atmosfera, ed il tempo si mette a secco e sereno.

3. Ma abbandoniamo la considerazione delle cause che possono connettere l' alzarsi ed abbassarsi del barometro collo stato igrometrico dell' atmosfera, e limitiamoci ad indicare le leggi che sopra le oscillazioni barometriche hanno manifestato le osservazioni. Queste leggi sono le seguenti.

L' altezza media del barometro al livello del mare sotto il parallelo di 45° è circa 762 millimetri ed $\frac{1}{3}$, ma diminuisce un poco andando verso l' equatore dove è circa di 5 millimetri minore; ed ancor più sensibilmente andando verso i poli sino alla latitudine boreale di 64°, dove si trova diminuita di 9 millimetri, poi torna a crescere nelle latitudini maggiori.

Le variazioni barometriche nelle basse latitudini sono massi

me nell' inverno, e nelle latitudini più alte nelle stagioni equizionali.

L' estensione delle variazioni irregolari del barometro è molto maggiore nelle alte latitudini che nelle latitudini entrotropicali.

L' altezza media del barometro è maggiore nell' inverno che nell' estate.

4. Oltre alle variazioni accidentali del barometro, che dipendono da un complesso di cause non ben ancora conosciute, si distinguono altre variazioni periodiche che succedono giornalmente, e che hanno richiamato, in questi ultimi tempi, l' attenzione dei meteorologisti.

Il barometro, in un giorno tranquillo e non soggetto a variazioni irregolari, si trova più alto la mattina circa le 9.^{h}, indi s' abbassa successivamente sino verso le 3.^{h} pomeridiane, e allora la sua altezza è divenuta minima; dopo torna a montare e verso le 10.^{h} della sera si trova un' altra volta al suo massimo d' altezza; però questa altezza è un poco minore di quella delle 9.^{h} della mattina, dopo le 10.^{h} della sera abbassa altra volta sino circa alle 4.^{h} della mattina per poi tornare ad ascendere sino alle 9.^{h} come abbiamo detto sopra.

Le oscillazioni periodiche del barometro non sono di eguale estensione in tutti i paesi. Esse sono massime sotto l' equatore e diminuiscono andando verso i poli. L' abbassamento del barometro nel primo periodo dalle nove ore antimeridiane alle tre pomeridiane è circa di 3 millimetri all' equatore. I due quadri seguenti danno una idea di queste oscillazioni a Buenos-Ayres ed a Parigi

	a Buenos-Ayres	*a Parigi*
1.° periodo dalle 9.^{or} antim. alle 3.^{or} pom.	— 1,697	— 0,756
2.° periodo dalle 3.^{or} pom. alle 10 pom.	+ 0,835	+ 0,373

Questo primo quadro ci fa vedere che a Buenos-Ayres, alla latitudine di 34° 36′ australe le oscillazioni sono più del doppio di quelle di Parigi nella latitudine di 48° 51′ boreale, e che l' oscillazione del secondo periodo è in estensione circa la metà del primo.

I valori delle oscillazioni di questi periodi variano un poco colle stagioni. Quelli dei mesi in cui risultano massimi o minimi sono

		a Buenos-Ayres	*a Parigi*
1.° periodo	Mass.	— 1,844 in Ottobre	— 1,010 in Aprile
	Min.	— 1,494 in Giugno	— 0,449 in Decembre
2.° periodo	Mass.	+ 1,149 in Settembre	+ 0,537 in Aprile
	Min.	+ 0,620 in Gennajo	+ 0,247 in Decembre

Non si conoscono ancora bene le cause di queste oscillazioni periodiche diurne, ma il paragone di quest' ultima tavoletta ci fa vedere che esse sono collegate colle variazioni di temperatura. Nelle stagioni nelle quali la temperatura è più variabile, com' è la primavera, le oscillazioni sono massime; nell' inverno, o nell' estate, quando la temperatura è più costante, sono minime.

5. *Uso del barometro per misurare le altezze.* Dopo che Torricelli ebbe dato pubblicamente a conoscere per mezzo del suo esperimento l' esistenza della pressione atmosferica, Pascal volendo dissipare ogni dubbio circa all' essere il peso dell' atmosfera la vera causa della sospensione del mercurio nel cannello del barometro, propose di esplorare l' altezza della colonna barometrica a diverse elevazioni sul suolo. Se è veramente l' atmosfera, disse Pascal, che gravitando sopra gli strati inferiori li comprime, e li rende elastici al punto d' esercitare una pressione proporzionata sul mercurio del pozzetto del barometro, più ci eleveremo nell' atmosfera, minore sarà il peso dell' aria, che ci starà sopra, minore la compressione e la forza elastica dello strato d' aria in cui ci troveremo, e minore sarà l' altezza alla quale rimarrà sostenuto il mercurio nel cannello barometrico. Dietro questa idea Pascal invitò il suo cognato Perier, che risedeva a Clermont nell' Alvergna ad osservare il barometro, prima nella città, al piede della montagna de Puy-de-Dome, e dopo a trasportare il barometro alla cima della stessa montagna per vedere se la colonna di mercurio s' abbassava realmente per questo trasporto. L' esperimento sortì pienamente il suo effetto. La colonna barometrica che nel giardino dei Padri Minori, luogo più basso della città segnava 26 pollici e 3 linee, trasportata alla sommità di Puy-de-Dome, all' altezza di più di 1000 metri, non arrivò più che a 23 pollici e 2 linee.

6. Questo risultamento conduce naturalmente all' idea che invertendo l' esperimento si può fare servire la depressione del mercurio nel barometro a determinare l' altezza alla quale ci siamo elevati. Se l' atmosfera avesse in tutta la sua estensione una eguale densità, niente sarebbe più spedito che il calcolo dell' altezza, alla quale

uno si fosse elevato, per mezzo della depressione del barometro. Infatti sapendosi che nelle circostanze atmosferiche ordinarie la densità del mercurio è a quella dell' aria come 10300 : 1 o come 10,5 : 0,001; ad ogni millimetro di cui la colonna di mercurio s' abbassasse corrisponderebbe una colonna d' aria d' egual peso, od un' elevazione di 10 metri e 5 decimi, e perciò di quanti millimetri si fosse depresso il barometro d' altrettante volte $10^{m},5$ dovrebbe uno essersi elevato. Questo calcolo si può realmente stabilire quando si tratti di piccole altezze di 100 o 150 metri, ma a maggiori altezze conviene tener conto delle diminuzioni della densità dell' aria a misura che si ascende negli strati superiori dell' atmosfera. Per tale oggetto conviene prima di tutto sapere, ciò che proveremo nella prossima lezione, che la densità dell' aria, in una stessa temperatura, è proporzionale alla pressione che soffre, od alla forza elastica che oppone. Ciò posto. immaginiamo divisa l' altezza dell' atmosfera in un numero grandissimo di strati, tutti eguali e sottili quanto si vuole. Concepiamo posti in colonna in una tavola una serie di numeri, ognuno corrispondente all' altezza di uno di questi strati sopra il suolo, ed a lato di ciascuno di questi numeri, supponiamo che si sia scritto il valore della densità dello strato rispettivo. Dico che, mentre i primi numeri formeranno una progressione aritmetica crescente, i numeri a lato dovranno formare una progressione geometrica decrescente. Infatti passando da uno strato a quello immediatamente superiore la pressione di questo strato si troverà alleggerita dal peso dello strato rimasto al disotto, il qual peso è proporzionale alla densità dello strato. Le pressioni, e quindi, secondo la legge premessa, anche le densità dell' aria diminuiranno passando da un termine all' altro di una quantità proporzionale al termine precedente ciò che è la proprietà caratteristica di una progressione geometrica decrescente. La serie dei numeri rappresentanti le altezze, e quella dei numeri rappresentanti le densità verranno così a formare una specie di *tavola antilogaritmica* (1), e come in questa tavola le diffe-

(1) Si chiama tavola *antilogaritmica* una tavola di logaritmi disposta in ordine inverso alle tavole logaritmiche comuni. Nelle tavole comuni i numeri crescono in progressione aritmetica, ed a lato di ciascun numero come argomento è affisso il proprio logaritmo: nella tavola antilogaritmica sono invece i logaritmi che crescono in progressione aritmetica, e formano l' argomento, ed a lato dei logaritmi sono posti i numeri corrispondenti che crescono in progressione geometrica. Si possono vedere le tavole antilogaritmiche che James Dodson ha pubblicato in Inghilterra nel 1742.

renze dei numeri della prima colonna sono i logaritmi dei quozienti di quelli della seconda, le differenze delle altezze degli strati risulteranno nella nostra tavola proporzionali ai logaritmi dei quozienti delle densità o pressioni barometriche. Si avrà così

$$K\,z = \log \frac{H}{h},$$

indicando con z la differenza di livello dei due strati, con K un coefficiente costante, e con H ed h le due altezze della colonna di mercurio che misurano le pressioni barometriche negli stessi strati (Vedasi la nota 1).

7. Questa proposizione suppone che regni in tutta l'atmosfera la stessa temperatura, ciò che non è, perchè la temperatura dell'atmosfera comunemente decresce elevandosi, e la legge di questo decrescimento è variabile ed assai astrusa a conoscersi nei vari casi. Rispetto però al calcolo delle altezze del barometro l'influenza della variazione di temperatura si esclude quasi interamente prendendo per temperatura dell'aria la media di quelle che si sono osservate nelle due stazioni delle quali si vuol determinare la differenza di livello. In un modo analogo si può valutare l'influenza del vapor acqueo esistente nell'atmosfera, il quale è pure variabile in quantità a differenti altezze, e, come più leggiero, sostiene una parte della pressione dell'atmosfera senza aumentarne la densità nella stessa proporzione dell'aria. Con questi mezzi i fisici sono riusciti a costruire una formola, colla quale osservate le altezze barometriche in due stazioni una inferiore e l'altra superiore, ed osservate le temperature dell'aria in queste due stazioni, si può calcolare la loro differenza di livello entro il limite di pochi metri d'errore, e questo metodo è divenuto il più utile ed il più comodo che la Geodesia possa impiegare.

8. La formola di cui parliamo e che dà la differenza di livello delle due stazioni, rappresentata da z, è la seguente (Vedasi la dimostrazione nella nota 1)

$$z = \frac{0{,}76\,.\,10466{,}8}{M}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(T+t)\right)\left(1+\tfrac{5}{16}\frac{\Upsilon+v}{H'}\right)\left(1-0{,}002566\cos 2\lambda\right)\left(1+\frac{\alpha z}{2r}\right)\times \log.\frac{H'}{h'}\left\{\left(1-\delta\Theta+\delta'\theta\right)\left(1+\frac{\alpha z}{r}\right)+\frac{C}{H'}-\frac{c}{h'}\right\}$$

Nella quale dinotano

M il modulo dei logaritmi tabulari, log. $M = 9{,}6377843$

ε il coefficiente di dilatazione dei gas, che, per un grado centigrado, è secondo Gay-Lussac $= 0{,}00375$, e secondo Rudberg $= 0{,}00365$;

T e t le temperature osservate dell' aria rispettivamente nella stazione inferiore e superiore;

Υ e v le tensioni osservate del vapor acqueo rispettivamente nelle due stazioni;

λ la latitudine geografica del luogo d' osservazione;

α il numero 2, se siamo saliti nell' aria libera in globo aerostatico, o soltanto il numero $\frac{5}{4}$ se siamo saliti su d' una montagna;

H' ed h' le altezze delle colonne barometriche osservate rispettivamente nella stazione inferiore e superiore;

δ, e δ' i coefficienti della dilatazione lineare relativa fra il mercurio e la sostanza della scala del barometro, che possono essere diversi se si sono impiegati due barometri uno nella stazione inferiore l' altro nella superiore;

Θ e θ le temperature rispettive del termometro interno del barometro nelle due stazioni;

C e c le correzioni per la capillarità del barometro diverse se si sono impiegati due barometri diversi nelle due stazioni inferiore e superiore.

Per far uso di questa formola si può trascurare da prima la frazione $\frac{z}{r}$ contenuta nel secondo membro, ciò che farà conoscere un primo valore approssimato di z; sostituendolo nel secondo membro, ed osservando che per r si può sempre impiegare il valore del raggio medio della terra, che espresso in metri ha per logaritmo 6,8039547, si otterrà un secondo valore di z più approssimato, al quale potremo sempre fermarsi.

Quando l' altezza non differisce molto da 1000 o 1200 metri si può trascurare la frazione $\frac{z}{r}$ nella formola precedente, con che si sostituisca al coefficiente $\frac{0{,}76\,.\,14066{,}8}{M} = 18316{,}5$ un coefficiente un po' più grande: di più, siccome le tensioni Υ e v sono rare volte osservate, si può sopprimere il fattore $1 + \frac{5}{16}\frac{\Upsilon + v}{H}$ aumentando ancora un poco più il detto coefficiente in proporzione di uno stato medio idrometrico dell' atmosfera, e cambiando $\varepsilon = 0{,}00365$ in $\varepsilon = \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}$. Con queste modificazioni il valore del coefficiente numerico più confacente, che risulta dalle numerose osservazioni che Raimond ha fatto nel mezzodì della Francia, in latitudini di circa 45°, è 18393^{m}, e la formola precedente si riduce a

$$z = 18393^{m}.(1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda)\left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right)\log\frac{H'}{h'}\left(1 + \delta(\odot - \mathfrak{h})\right)$$

supponendo che i due barometri nella stazione inferiore e superiore siano simili, e che alle altezze H' ed h' sia già stata applicata la correzione per la capillarità.

Se si costruisce una tavola che dia per ogni valore di $T + t$ il logaritmo di $18393\left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right)$, e si chiami a questo logaritmo; poi un' altra tavola che per ogni differenza $\odot - \mathfrak{h}$ dia il logaritmo di $1 - \delta(\odot - \mathfrak{h})$, e si chiami b questo logaritmo; e finalmente una terza tavola che per ogni valore di λ dia il logaritmo di $1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda$, e si chiami c questo logaritmo, è facile il vedere che posto

$$\log H - \log h - b = d$$

si ha il valore dell' altezza dimandata z della stazione inferiore sopra la stazione superiore dalla formola

$$\log z = a + c + \log d$$

Le tavole che abbiamo indicate sono state effettivamente costrutte la prima volta dal Prof. Barone Littrow di Vienna, e riprodotte in altre opere.

9. Termineremo questa Lezione coll' accennare alcune precauzioni che conviene prendere nel fare le osservazioni barometriche per determinare le altezze.

1.° Prima di tutto è bene che le due osservazioni siano simultanee, e perciò s' impiegheranno, quando si può, due barometri uno nella stazione inferiore, l' altro nella superiore. Questi due barometri devono essere paragonati fra di loro. L' osservatore che deve montare alla stazione superiore deve dunque prima di salire confrontare il suo barometro con quello della stazione inferiore, e ripeterne il paragone dopo la sua discesa, e se non si trovano stare alla stessa altezza tener conto della differenza o del medio delle differenze prima e dopo la discesa nel fare il calcolo.

2.° Bisogna che tanto i barometri, quanto i termometri che si espongono all' aria per conoscere la temperatura di essa, siano situati all' ombra e lontani da ogni causa accidentale di calore o di freddo, ed aspettare che abbiano presa una temperatura costante, e scuotere un poco la colonna barometrica prima d' osservarla.

3.° L' ora più propria per queste osservazioni è quella del mez-

zodì nei giorni nei quali l'atmosfera sia tranquilla. Quando le circostanze lo permettono è bene che i due sperimentatori facciano più osservazioni corrispondenti e simultanee di quarto in quarto d'ora, o ad intervalli più brevi, per prendere poi il medio di tutti i risultamenti, se si vuole aspirare a tutta l'esattezza di cui il metodo è suscettibile.

LEZIONE XIX.

Delle variazioni dell' elasticità o forza espansiva dei gas al cambiar di volume e di temperatura.

1. L' aria, non che tutti i fluidi aeriformi, deve considerarsi secondo ciò che abbiamo già detto, come costituita da un sistema di molecole che, non potendo conseguire la distanza richiesta pel loro equilibrio, si respingono reciprocamente con una forza tanto maggiore quanto più sono obbligate a rimanere vicine fra loro, e con una forza tanto maggiore quanto la temperatura è più elevata. Se le leggi secondo cui varia l' azione molecolare tanto rispetto alla diminuzione delle distanze, come rispetto al cambiar di temperatura, ci fossero conosciute, potremmo da esse dedurre direttamente la forza elastica o espansiva di una massa d' aria corrispondente ad un volume qualunque, ed in una temperatura qualunque. Ma queste leggi essendoci ancora sconosciute non ci rimane che seguire il cammino inverso: interrogar cioè la natura, e riconoscere coll' esperienza come varii l' elasticità dell' aria al variar dei due detti elementi.

Per procedere in questa indagine nel modo più semplice giova separare l' influenza delle due cause, che fanno variare la forza espansiva dell'aria, cioè la pressione che la riduce a minor volume, ed il calore che tende ad aumentarlo. Così giova indagare prima come varia la forza elastica dell' aria conservando invariabile la temperatura e facendo variare soltanto il volume, e poi vedere come varia la sua forza elastica variando soltanto la temperatura.

2. I primi che si avvisarono d' investigare la legge con cui varia la forza espansiva dell' aria ridotta a volumi diversi, quando si mantenga la stessa temperatura, furono Boyle in Inghilterra (1), e Mariotte in Francia (2). Questi due fisici osservando i volumi dell' aria sotto diverse pressioni in una temperatura qualunque, ma costante, arrivarono alla stessa conclusione, cioè *che le forze elastiche od espansive che spiega successivamente una massa d' aria, o ciò che torna lo stesso, le pressioni da applicarsi a parti uguali della sua superficie, onde sia contenuta sotto diversi volumi, sono*

(1) Boyle. Defensio Doctrinae de aeris elatere contra Linum. An. 1661.

(2) Mariotte. Essais sur la nature de l'air, et Traité des moavemens des eaux. An. 1676.

inversamente proporzionali ai volumi che la massa medesima va occupando. Così quando il volume diviene la metà, un terzo, ec. o pure doppio, triplo, ec. la forza elastica che l'aria esercita in ogni parte della sua superficie diviene reciprocamente il doppio, il triplo, ec. o vero la metà, il terzo, ec. Come le densità di una massa variano pure in ragione inversa dei volumi che occupa, la legge precedente si può annunciare nel seguente modo: *La forza elastica dell'aria in temperatura eguale è proporzionale alla sua densità.* Questa legge è conosciuta in fisica sotto il nome di *legge di Boyle o Mariotte.*

3. La generalità della legge medesima venne rivocata in dubbio per le alte pressioni da Sulzer in Germania (1) da Robiston in Inghilterra e da altri (2), i quali avendo portato le pressioni sino a circa sette atmosfere, trovarono che le forze elastiche aumentavano in una ragione minore delle densità. Vi era però motivo di sospettare che le discrepanze da loro osservate fossero dovute al non aver essi prese le precauzioni necessarie per diseccare completamente l'aria che impiegarono ne' loro esperimenti. L'aria nello stato naturale contiene sempre, come si sà, disseminata in se una certa quantità di vapor acqueo, il quale unisce la sua forza elastica a quella dell'aria, e la fa aumentare. Tosto che la capacità dello spazio, in cui la massa d'aria è racchiusa, viene ristretta al di là del limite in cui il vapore acqueo acquista il grado massimo di tensione di cui è suscettibile, continuando la riduzione una parte del medesimo perde il suo stato elastico e torna allo stato liquido, e questa sottrazione successiva di forza deve dare alla scala delle forze elastiche dell'aria l'apparenza di un minore accrescimento.

4. Per dissipare questi dubbi il Sig. Oersted in compagnia del Capitano Schwendsen intrapresero una serie di nuovi esperimenti, dai quali si credettero autorizzati a conchiudere, che la legge di Mariotte si verificava sensibilmente almeno sino alla forza di 60 atmosfere (3). Gli esperimenti più decisivi, fatti col favore di una grande prodigalità di mezzi, furono quelli che eseguirono (4) i Signori Arago, Dulong, Girard, e Prony, come membri di una Commissione creata per determinare la tensione del vapore acqueo

(1) Memorie di Berlino an. 1753.

(2) Enciclopedia Britannica art. Pneumatics. Vedansi anche i Commentarii dell'Istituto di Bologna Tom. I e II.

(3) Philosophical Magazine. Agosto 1836. Edim. Journal of Sciences Tom. IV.

(4) Annales de Chimie et de Physique, Janvier 1830.

all' occasione di accordare in Francia un' ordinanza reale che regolasse le resistenze delle caldaie delle macchine a vapore, in modo che fossero atte a prevenire gli accidenti delle loro esplosioni. Questi fisici, avendo giudicato che il miglior modo di conoscere la forza del vapore fosse quella di misurarla colla diminuzione di volume dell' aria racchiusa in un *manometro* (1), vollero prima verificare se la legge di Mariotte, dalla quale doveva dedursi questa forza, era veramente esatta. Siccome gli esperimenti, con cui eseguirono questa verificazione, possono essere un esempio del modo di procedere in simili circostanze, ci permetteremo di darne qui una breve descrizione.

L' apparecchio da essi impiegato esigeva una grande estensione in altezza, 30 metri circa, e perciò fu eretto in una torre. Esso si componeva di tre parti comunicanti fra loro per l' intermedio di un vaso di ferro fuso, ripieno di mercurio, e nel quale penetravano da tre aperture differenti (fig. 75).

La prima parte applicata ad una di queste aperture era una lunga fila di tubi di vetro posti verticalmente uno sopra l' altro e stabilmente riuniti, nella quale doveva contenersi la colonna di mercurio che doveva dar la misura della pressione. La seconda parte applicata ad un' altra apertura era propriamente il manometro, il quale constava di un tubo di vetro chiuso superiormente, in cui era rinchiusa l' aria secca da sottoporsi alle condensazioni. La terza parte era una pompa premente da acqua, che comunicava colla terza apertura, la quale serviva ad esercitare una forte pressione sul mercurio contenuto nel vaso di ferro fuso.

Le due prime parti esigerono delle precauzioni particolari per essere poste in opera, e per corrispondere all' oggetto prefisso, le quali accenneremo brevemente.

I tubi che formavano la prima parte erano in numero di tredici, della lunghezza ciascuno di due metri, con 5 millimetri di diametro interno ed altrettanto di grossezza. Alle estremità di ciascun tubo erano fissati due anelli o ghiere di ferro, ed i tubi erano uniti applicando l' una contro l' altra le ghiere opposte dei due tubi contigui, framettendovi un anello di cuojo e stringendole fra loro per mezzo di viti. Per impedire che l' alta colonna di questi

(1) Il manometro è uno stromento con cui si misurano le pressioni per mezzo della diminuzione di volume di una colonna d' aria racchiusa in un cannello graduato. L' estremità superiore della colonna d' aria non può uscire dal cannello che è chiuso in alto, e l' estremità inferiore è sottoposta ad una determinata pressione prodotta da un liquido, che comunemente è il mercurio il quale tende ad elevarsi nel cannello.

tubi non si spostasse lateralmente, vi erano ai fianchi delle guide che portavano delle colonne di ferro entro cui le ghiere erano ritenute. Siccome poi il peso dei tubi superiori e delle ghiere annesse avrebbe potuto rompere i tubi di vetro sottoposti, da una delle ghiere di ciascun tubo partivano da lati opposti due funicelle che andavano a passare sopra delle carrucole e portavano nell' altra estremità dei pesi equivalenti a sostenere il peso del tubo e delle ghiere. La ghiera inferiore dell' ultimo tubo era serrata sull'apertura del vaso di ferro ed il tubo penetrava nel vaso.

Sei termometri distribuiti lungo la fila dei tubi, racchiusi in porzioni d' altri tubi d' egual diametro e grossezza e ripieni pure di mercurio servivano ad indicare la temperatura analoga delle varie parti. dei ripiani laterali sui quali si poteva salire, ed offrivano agli sperimentatori la comodità di portar l' occhio al livello della sommità della colonna interna di mercurio per misurarne l' altezza.

Il manometro, cioè il tubo che doveva contenere l' aria di cui si voleva misurare la forza elastica corrispondente a diversi volumi, era lungo $1^{m},8$, aveva lo stesso diametro e grossezza di quelli su descritti, e si trovava unito al vaso di ferro per mezzo della sua ghiera. Questo tubo era stato accuratamente graduato, e tenendolo in una posizione verticale si era riconosciuto esattamente la capacità di ciascuna divisione per mezzo del volume o peso di mercurio necessario per riempirla. Quando il manometro fu messo a posto ed unito con mastice sul foro del vaso di ferro aveva ancora un piccolo foro nell' estremità superiore, ma questa estremità era assottigliata in modo da potersi chiudere facilmente fondendola col soffiarvi sopra la fiamma di una lampada. Dopo che fu versato nel vaso di ferro tanto mercurio che l' estremità inferiore del manometro si trovasse immersa, si fece entrare pel detto foro una corrente d' aria secca, che usciva abbasso attraverso al mercurio, e quando si giudicò che non restasse più umidità nel tubo si chiuse il foro fondendo la punta, ed il tubo rimase pieno d' aria secca tenuta segregata dal resto del mercurio interiore.

Il tubo del manometro era contenuto in un cilindro più ampio mantenuto costantemente pieno d' acqua che andava successivamente rinnovandosi, poichè quella che sortiva lentamente per una piccola apertura in basso era supplita da un filo d' acqua che alimentava il cilindro dall'alto. Si aveva così la certezza che la temperatura dell' acqua nel cilindro era uniforme nelle sue parti, ed un termometro immerso in essa ne indicava il grado, che doveva pure essere conforme a quello della temperatura dell' aria del manometro.

La terza parte, che, come abbiamo detto, era una pompa premente d' acqua, serviva per esercitare una forte pressione sul mercurio nel vaso di ferro. Il mercurio cosi compresso montava da una parte nella lunga serie di tubi, dall'altra parte nel tubo del manometro, ed è evidente che, fatto l' equilibrio, l' eccesso di altezza della colonna di mercurio nei tubi sopra quella del manometro doveva essere eguale alla forza elastica dell' aria compressa nello stesso, e ne doveva misurare il valore. Non restava quindi che a leggere coi noti mezzi che si sogliono impiegare per una maggiore esattezza, cioè impiegando dei *vernier* e dei microscopii, a quante parti della capacità del manometro era ridotta l'aria rinchiusa, ed a quanto montava l' eccesso dell' altezza della colonna di mercurio nel tubo, e, fattone le debite riduzioni per la temperatura, a paragonare queste due quantità fra loro. Il risultato di questo confronto, portato sino ad una pressione di 27 atmosfere, fu conforme alla legge sopra citata della proporzionalità inversa dei volumi o diretta della densità, alle pressioni o forze elastiche dell' aria compressa.

5. L' esperimento che abbiamo descritto serve per provare, che l' aria aumenta la sua forza elastica nella ragione inversa, colla quale diminuisce il suo volume. Per provare che la forza elastica dell' aria diminuisce nella ragione, colla quale il volume aumenta, Mariotte ha fatto uso del seguente esperimento. Abbiasi un cannello diritto chiuso in una estremità, ben diviso in parti di egual capacità e ripieno di mercurio bollito nello stesso modo che si fa un barometro. Questo cannello cosi preparato sia invertito in un bagno di mercurio contenuto da grosso tubo, che permetta al cannello d' immergersi quasi per tutta la sua lunghezza, e siasi lasciato penetrare o siasi introdotta per abbasso nel cannello un poco d' aria destinata all' oggetto. L' aria monta, e va ad occupare l' estremità superiore e chiusa del cannello, e profondando più o meno il cannello nel bagno si può condensare quest' aria al punto che il mercurio interiore del cannello stia a livello coll' esteriore del bagno. Quando ciò si è ottenuto, l' aria interiore si trova in tale stato che la sua forza elastica distrugge tutto l' effetto della pressione atmosferica per far montare il mercurio nel cannello, e per conseguenza eguaglia il peso della colonna barometrica (1). Sollevando dopo un poco in alto il cannello si vede che il mercurio sale in esso, e che nello stesso tempo l' aria interiore si dilata occupando un maggior numero di parti del cannello. Facciasi quindi

(1) Se il cannello è stretto conviene tener conto della correzione capillare.

salire il cannello fino a tanto che l'aria occupi uno spazio doppio di prima, si misuri la colonna di mercurio che si è innalzata nel cannello, e troverassi che è eguale alla metà della colonna barometrica. Se non vi fosse aria contenuta nel cannello, il mercurio s'eleverebbe alla stessa altezza che nel barometro, e come non si trova innalzato che della metà, dobbiamo conchiudere che l'altra metà venga depressa dall'azione della forza elastica dell'aria interiore: ma quest'aria prima, quando occupava la metà di volume, spiegava una forza elastica eguale alla pressione atmosferica, dunque la forza elastica dell'aria dilatata in un volume doppio si riduce alla metà. Se si fa salire il tubo fino a che l'aria rinchiusa occupi uno spazio triplo di quello che occupava nel principio, si nota che la colonna di mercurio arriva sino ai due terzi della colonna barometrica, di modo che la forza elastica dell'aria interna non distrugge più che il terzo della pressione atmosferica, e così successivamente. Di qui si conchiuse pertanto che la forza elastica di una massa d'aria, che si dilata, diminuisce nella ragione, nella quale aumenta lo spazio che va ad occupare, e che la legge di Boyle o Mariotte sussiste tanto per le rarefazioni, quanto, secondo ciò che già si è visto sopra, per le condensazioni.

Se si indicano con p, v e δ la pressione, il volume e la densità, avanti, e con p', v' e δ' le quantità corrispondenti dopo la compressione o dilatazione, l'esposta legge tradotta in linguaggio algebrico somministra le formole

$$p' = p\,\frac{v'}{v} = p\,\frac{\delta}{\delta'}$$

6. Pare che la legge, di cui ora abbiamo dato l'espressione, sia indipendente dalla temperatura in cui si opera: qualunque sia la temperatura, sia essa molto elevata o molto bassa, in cui si prenda a condensare o rarefare una massa d'aria, i volumi e le densità variano, gli uni nella ragione inversa, le altre nella ragione diretta delle pressioni che soffre, o della forza elastica che oppone, purchè si mantenga costantemente nella stessa temperatura. Diviene quindi necessario che le dilatazioni o compressioni non procedano con rapidità, e lascino il tempo all'apparecchio che riprenda una temperatura costante, onde il calore che si sviluppa nel condensar l'aria, od il freddo nel rarefarla, non divengano causa d'errore.

7. La legge di cui si tratta, che fu verificata con tutta esattezza per l'aria, sussiste pure, almeno prossimamente pei varii gas ed anche pei vapori avanti che giungano vicini al grado mas-

simo di tensione di cui sono capaci nella temperatura in cui si trovano. L'andamento delle condensazioni deve pure con ogni probabilità scostarsi dalla proporzionalità alle forze comprimenti nei gas, quando per una grande diminuzione di volume s'avvicinano a passare allo stato liquido. Il sig. Despretz ha eziandio conchiuso da' suoi esperimenti, che le riduzioni di volume sono un poco diverse per varii gas, e che i gas composti sono in generale più compressibili dell'aria, anche quando le pressioni sono ancor lontane da quelle che li fanno passare allo stato liquido.

8. Non solo i gas seguono la legge dei volumi inversamente proporzionali alle pressioni a cui sono soggetti, ma anche i miscugli che si possono fare con differenti gas, che non esercitano una azione chimica reciproca, sono regolati dalle stesse norme. Una circostanza degna d'osservazione si presenta però in questi casi. Se si mischiano in un vaso due liquidi pesanti, come dell'acqua e del mercurio, il più pesante discende al basso, occupa la parte inferiore del vaso, e si pone a livello, ed il più leggiero ascende ed occupa la parte superiore. Ciò non ha luogo nei gas: ciascun gas si spande per tutto lo spazio che occupa il mescuglio, come se gli altri gas non esistessero, ciascun gas esercita la sua propria pressione, secondo la legge di Boyle o Mariotte, indipendentemente dagli altri. Se si pone, come si è sperimentato nei sotterranei dell'Osservatorio di Parigi, colla bocca capovolta una boccia piena di un gas leggiero, come sarebbe l'idrogeno, sopra la bocca di un'altra boccia piena di un gas più pesante, come l'acido carbonico, che è circa 21 volte più pesante, sotto la stessa pressione, si trova dopo alcun tempo che i due gas si sono mischiati in proporzioni eguali, di modo che la più piccola porzione del mescuglio contiene ciascuno dei due gas nella stessa proporzione del mescuglio intero. Il gas acido carbonico ancorchè più pesante è salito in parte nella boccia superiore, il gas idrogeno ancor che più leggiero è disceso in parte nella boccia inferiore, e ciò che vi ha di notabile in questo è, che questa permutazione di luogo si fa con più rapidità più i gas differiscono di densità.

Siano v, v', v'' ec. i volumi che occupavano i gas prima del mescuglio; e p, p', p'' ec. le loro rispettive pressioni; sia V il volume del mescuglio e P la sua pressione. Secondo la legge di Mariotte, ed il principio che abbiamo annunciato, il primo gas vi produrrà una pressione $p\,\frac{v}{V}$, il secondo una pressione $p'\,\frac{v'}{V}$, e così successivamente, e la pressione totale del mescuglio sarà

$$P = p\,\frac{v}{V} + p'\,\frac{v'}{V} + p''\,\frac{v''}{V} + \text{ec.}$$

si avrà così

$$P\,V = p\,v + p'\,v' + p''\,v'' + \text{ec.};$$

Da questa legge si conchiude quindi, che le molecole dei gas che si mischiano, senza combinarsi chimicamente, non fanno che internarsi in virtù delle loro pressioni negli spazii intermedi delle molecole degli altri gas, ed accrescono la pressione del mescuglio nello stesso modo, che se i diversi volumi fossero tutti composti di una stessa sostanza, altrimenti la pressione P non potrebbe eguagliare la somma delle pressioni particolari che eserciterebbe ciascun gas isolatamente. Siccome si ha ragione di credere, secondo un principio emesso la prima volta dal Cav. Avogadro (1), e confermato di poi dalle teorie chimiche atomistiche, e da una legge scoperta da Gay-Lussac, che eguali volumi di gas sotto la stessa pressione contengano un egual numero d'atomi delle rispettive sostanze, la legge precedente ci mostra che la forza espansiva dei gas cresce colla medesima legge all'aumentar del numero delle molecole di qualunque specie esse siano, dal che ne segue che le molecole allo stato gassoso esercitano una forza repulsiva reciproca che è, entro i limiti delle esperienze fatte, indipendente dalla natura delle sostanze.

9. I gas penetrano nei liquidi anche quando non esiste alcuna azione chimica fra loro. Se per mezzo del vuoto della macchina pneumatica, o coll'ebollizione si purghi una massa d'acqua, che sia stata immersa in una atmosfera di gas, e se ne raccolga il gas emerso collo spurgamento; e poi si riponga un'altra volta la stessa massa d'acqua nella stessa atmosfera, si troverà che l'acqua assorbe ancora un'eguale quantità di gas. La quantità di gas assorbito da un liquido dipende dalla natura del liquido e da quella del gas, ma il celebre Dalton ha stabilito la legge che essa è sempre tanta che può esercitare una pressione che stà a quella del gas esteriore in una ragione costante. Il mercurio è un liquido che non si lascia penetrare sensibilmente dai gas, l'acqua per lo contrario facilmente dalla maggior parte, e forse da tutti.

Non è difficile secondo questa legge di calcolare l'assorbimento e la pressione di un miscuglio di gas racchiusi in un

(1) Journal de Physique de La-Méthérie 1811 e 1814. Vedasi anche il Vol. II pag. 843 della *Fisica dei corpi ponderabili* del Cav. Avogadro. Torino 1838.

recipiente con un liquido, quando si conoscano i volumi e le pressioni anteriori di ciascun gas, non che il volume del liquido. Conservate le denominazioni precedenti siano di più x, x', x'' ec. le pressioni esercitate rispettivamente dalle porzioni di gas rimaste nello spazio V non occupato dal liquido, e sia U il volume del liquido. Dinotando con $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n'}$, $\frac{1}{n''}$ ec. le ragioni costanti delle pressioni che potrebbero esercitare le porzioni di gas assorbite alle pressioni delle porzioni di gas esterne, le frazioni $\frac{x}{n}$, $\frac{x'}{n'}$, $\frac{x''}{n''}$ ec. rappresenteranno, secondo il principio esposto, i valori rispettivi delle prime dette pressioni, e per la legge di Boyle e Mariotte si dovrà avere

$$(1)\quad V x + U\frac{x}{n} = p v\ ;\ V x' + U\frac{x'}{n'} = p' v'\ ;\ V x'' + U\frac{x''}{n''} = p'' v''\ ;\ \text{ec.}$$

Con queste equazioni si determineranno x, x', x'' ec. e la pressione del miscuglio rimasto libero nel recipiente sarà

$$(2)\qquad P = x + x' + x'' + \text{ec.}$$

La quantità di ciascun gas assorbita, in parti delle quantità totale di ciascun d'essi, saranno rispettivamente espresse da

$$(3)\qquad \frac{U}{p v}\cdot\frac{x}{n}\ ;\ \frac{U}{p' v'}\frac{x'}{n'}\ ;\ \frac{U}{p'' v''}\frac{x''}{n''},\ \text{ec.}:$$

ed il miscuglio gassoso assorbito sarà composto dei volumi dei rispettivi gas nelle proporzioni dei numeri

$$(4)\qquad U\frac{x}{n}\ ;\ U\frac{x'}{n'}\ ;\ U\frac{x''}{n''}$$

divisi per la loro somma.

Supponiamo, per esempio, che una porzione d'acqua ben purgata di un volume eguale ad uno sia sottoposta ad una campana di una capacità come cinque, in cui sia rimasta l'aria atmosferica che occupi il resto della capacità.

Rappresentando con uno la pressione totale dell'aria atmosferica, l'ossigeno produca una parte $p = 0{,}21$ di questa pressione, il nitrogeno una parte $p' = 0{,}7895$, ed il gas acido carbonico una parte $p'' = 0{,}0005$, come infatti avviene per un medio nello stato ordinario dell'atmosfera. Si avrebbe dunque in questo caso $v = v' = v'' = V = 4$, ed $U = 1$

e quindi

$$p v = 0{,}84000\ ;\ p' v' = 3{,}15800\ ;\ p'' v'' = 0{,}00200.$$

Ora secondo il medio delle esperienze fatte da W. Henry (1), da Teodoro Saussure, e da Dalton si hanno per le ragioni costanti delle pressioni, che sarebbero capaci di sostenere le porzioni dei suddetti gas assorbiti dall' acqua, alle pressioni delle porzioni rimaste esterne, i numeri

$$\frac{1}{n} = 0{,}03850 \quad ; \quad \frac{1}{n'} = 0{,}02500 \quad ; \quad \frac{1}{n''} = 1{,}07000$$

Con questi valori le formole (1) daranno

$$x = 0{,}20800 \qquad x' = 0{,}63773 \qquad x'' = 0{,}00039\,;$$

e quindi la pressione del miscuglio rimasto libero sotto la campana sarà

$$P = 0{,}84612.$$

Le quantità rispettive dei gas internatisi nell' acqua saranno espresse, in parti di quelli che componevano la totalità dell' aria atmosferica racchiusa, da

$$0{,}00953 \quad ; \quad 0{,}00529 \quad ; \quad 0{,}21104.$$

Ed i volumi dei gas rispettivi, che compongono il miscuglio assorbito, saranno fra loro come

$$0{,}329 \qquad 0{,}654 \qquad 0{,}017.$$

Se l' acqua in luogo di essere racchiusa in un recipiente fosse esposta all' aria aperta atmosferica, si potrebbero considerare i valori di v, v', v'', V come infiniti, e dalla formola (1) si avrebbe $x = p$, $x' = p'$, $x'' = p''$. L' aria assorbita sarebbe, giusta la formola (4), composta dei volumi dei differenti gas nella proporzione di

$$0{,}285 \quad ; \quad 0{,}696 \quad ; \quad 0{,}019.$$

È in queste proporzioni che le acque dolci dei laghi, dei fiumi, delle fonti devono contenere gli elementi dell' aria atmosferica, quando non sono alterate da circostanze locali; proporzioni ben diverse da quelle in cui esistono nell' atmosfera, che abbiamo date all' art. 3 della Lezione XVII (2). Si vede dunque quanto sia erroneo il dire che quelle acque contengono dell' aria atmosferica in dissoluzione.

(1) W. Henry. Philosophical Transactions. 1803.

(2) Secondo le ultime determinazioni di Dumas, e Boussingault l' ossigeno ed il nitrogeno entrano nella composizione dell' aria atmosferica del continente nella proporzione di 20,81 a 79,19.

10. La legge ora esposta che la quantità di gas assorbita è proporzionale alla forza espansiva rimasta allo stesso gas dopo che l'assorbimento è cessato, ci dà a divedere che questo assorbimento è probabilmente promosso dalla pressione che il gas esercita sul liquido, che, come abbiamo visto nell'art. 3 della Lezione XV, termina nella sua superficie con una densità tenue, ed evanescente. Come però le molecole del gas penetrando fra quelle del liquido si trovano nell'interno a tali distanze da esse che le azioni molecolari divengono sensibili, ne risultano delle azioni reciproche che modificano lo stato del liquido e del gas assorbito. Queste modificazioni sono diverse secondo i diversi liquidi ed i diversi gas, e danno origine a degli sviluppi di calorico, a delle variazioni di volume, e ad altri fenomeni molecolari che si osservano.

11. La proprietà, che hanno i gas di crescere di forza espansiva inversamente ai loro volumi al partire d'una temperatura qualunque, purchè rimanga costante, apre il passo ad indagare più facilmente come cambi la loro forza espansiva anche al cambiar di temperatura. Basta per quest'oggetto di riconoscere come aumenta il volume all'aumentar della temperatura, conservando costante la pressione che nella stessa proporzione dovrà aver aumentato la forza elastica del gas, perchè è evidente che, secondo la proprietà esposta, per ridurre questo gas al volume primitivo nella nuova temperatura sarà necessario applicarvi una pressione maggiore nella stessa proporzione con cui ha aumentato il volume.

Lambert, Deluc, Volta, in seguito Gay-Lussac, Dalton, e posteriormente Rudberg hanno fatto sperimenti per conoscere la dilatazione che subisce una massa gassosa all'aumentar della temperatura. Il processo consiste in generale, nel paragonare il volume che acquista una massa d'aria, ed il grado che segna il termometro a mercurio amendue immersi in un mezzo la cui temperatura sia uniforme, come sarebbe quella di uno strato allo stesso livello di una massa liquida similmente riscaldata in tutta la sua estensione: oppure a vedere a qual volume si riduce in una data temperatura una massa d'aria che abbia sempre riempito una data capacità in differenti temperature. Gli esperimenti instituiti dai suddetti fisici, applicando le opportune riduzioni secondo le circostanze in cui sono stati fatti, hanno dato i seguenti risultamenti. 1.° Tanto l'aria, che i gas o vapori, quando sono lungi dallo stato in cui stanno per divenire liquidi, si dilatano tutti egualmente per eguali aumenti di temperatura. 2.° Fra la temperatura 0°, o sia del ghiaccio che si fonde, e la temperatura 100°, o quella dell'acqua che bolle sotto la pres-

sione atmosferica di $0^m,76$, nel parallelo terrestre di 45° ed al livello del mare, la loro dilatazione è secondo Gay-Lussac di $\frac{3}{8}$ del volume a zero, o sia di $\frac{75}{200}$, e secondo Rudberg di soli $\frac{73}{200}$ (1). 3.° Che la loro dilatazione è uniforme coll'andamento di un termometro a mercurio fra gli stessi limiti.

12. L'eguaglianza di dilatazione di tutti i gas mostrandoci, che questo fenomeno è sensibilmente indipendente dalla natura delle molecole delle sostanze di cui sono composti, si è arguito con probabilità che le loro dilatazioni misurino proporzionalmente gli aumenti assoluti di calorico libero, e che l'aria sia il corpo termometrico più confacente per misurare colle sue dilatazioni le temperature. Così siccome dal paragone fatto da Dulong e Petit fra le dilatazioni dell'aria e quelle del mercurio risulta, che quando il termometro ad aria segna 200° e poi 300° quello a mercurio segna 204°,61 e poi 314°,15, si risguarda la dilatazione del mercurio come crescente colla temperatura ritenendo quella dell'aria come ~~costante~~ uniforme, e si dice che i 204°,61 e 314°,15 segnati dal termometro a mercurio equivalgono realmente a soli 200°, e 300°.

13. Secondo i suddetti risultamenti se si indica con ε il numero 0,00375 secondo Gay-Lussac, od il numero 0,00365 secondo il Sig. Rudberg (2), con t la temperatura esistente in gradi del termometro centigrado e con v il volume di un gas, che nella temperatura 0° avesse il volume v_0, si deve avere

$$v = v_0 \left(1 + \varepsilon\, t\right);$$

Siccome questo gas compresso sino a riprendere il volume v_0 nella stessa temperatura t, eserciterebbe per la legge di Boyle una pressione p, che starebbe a quella p_0, che eserciterebbe nella temperatura 0°, nella ragione inversa di $v_0 : v$, si avrà la forza espansiva dell'aria corrispondente alla temperatura aumentata t dalla formola

(1) Questa Lezione essendo stata scritta avanti la fine del 1841 non si trova in essa citato il nuovo risultamento ottenuto dal Sig. Regault. Secondo una serie d'accurati esperimenti fatti da questo fisico il valore della dilatazione dell'aria atmosferica entro i detti limiti sarebbe di 0,00366 per un grado centigrado. Di più questo fisico ha osservato che le dilatazioni, anche fra i limiti di temperatura del ghiaccio che si scioglie, e dell'acqua bollente, non sono eguali per tutti i gas: egli ha dato i seguenti numeri per alcuni di essi.

Nitrogeno	0,36682	Cianogeno.	0,36821
Idrogeno	0,36678	Protossido d'azoto. .	0,36763
Ossido di carbonio. .	0,36667	Gas acido solforoso .	0,36696
Acido carbonico . . .	0,36896	Gas acido clorico . .	0,36812

(2) Il numero 0,003665 sarebbe quello da adottarsi secondo il Sig. Regault.

$$p = p_0 (1 + \varepsilon t).$$

(Vedasi la nota (1)).

14. Un' altra questione importante relativamente alla forza elastica dei gas viene offerta dalla circostanza che essi, non che gli altri corpi della natura, sviluppano od assorbono del calore quando sono compressi o dilatati, dal che ne proviene un successivo aumento o diminuzione della loro forza espansiva. Il calorico, che si sviluppa nella compressione del gas, si considera come preesistente in esso col nome di calorico *latente*, e si dice che la compressione lo rende *libero* o *termometrico:* viceversa si considera che il calorico libero, che costituisce la temperatura del gas, passa all' atto della dilatazione, in cui la temperatura diminuisce, allo stato di calorico latente. Diviene perciò talvolta necessario di conoscere nelle compressioni o dilatazioni subitanee, a cui possono andar soggetti i fluidi aeriformi, quale sarà l' aumento o diminuzione di forza elastica che farà un gas tanto per la variazione del suo volume, quanto per la variazione di temperatura nei primi istanti avanti che il calore che da latente fu fatto libero, si sia dissipato, o viceversa avanti che quello che da libero è divenuto latente sia stato rimpiazzato dai corpi circostanti. Questa questione è stata risoluta almeno per delle piccole compressioni o dilatazioni dell' aria, e la formola che dà l' espressione della sua forza espansiva, tosto che ha variato di volume, è la seguente

$$\frac{p}{p'} = \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)^{1 + \gamma}$$

per la dimostrazione della quale vedasi la nota (2).

In questa formola p e δ dinotano rispettivamente la forza espansiva e la densità dell'aria prima della variazione di volume, e p' e δ' quelle che gli corrispondono dopo. L' esponente $1 + \gamma$ equivale alla ragione del calore specifico a *pressione costante* al calore specifico a *volume costante*, vale a dire alla ragione della quantità di calore che assorbirebbe l' aria, quando si riscaldasse di un grado aumentando a poco a poco il suo volume sotto una pressione costante, alla quantità di calore che essa esigerebbe per elevar di un grado la sua temperatura non potendo cambiar di volume, come quando fosse rinchiusa in un vaso. È evidente che la prima quantità è maggiore della seconda di tutto il calorico, che, durante la dilatazione, passa nell' aria allo stato latente.

NOTE

NOTE ALLA LEZIONE II.

Nota I.

Osservazioni sulla legge del movimento composto.

Poisson nel primo volume della sua meccanica (pag. 213) ha inteso di dare una dimostrazione di questo principio partendo dall' assunto che lo stato di un punto materiale, relativamente alle forze che operano su di lui, non dipende che dalla sua posizione e velocità nell' istante che si considera, ed osservando che ciascuna forza deve in virtù di questo assunto comunicare in questo istante lo stesso grado di velocità come se fosse sola, perchè le alterazioni nella posizione e velocità del punto, che vi producono le altre forze nello stesso istante, sono infinitamente piccole e trascurabili. Onde l' assunto premesso fosse ammissibile *a priori*, senza alcun dato sperimentale, converrebbe che l' intima natura delle forze ci fosse più conosciuta che non è.

Laplace ha voluto erigere in principio la proposizione che le forze sono proporzionali alle velocità, (*Mécanique céleste* Tom. I, pag. 15) ma le prove dedotte dall' esperienza, che egli dà, sono quelle stesse che servono all' ammissione del principio di Galileo annunciato nel testo. Ci pare quindi più semplice attenersi direttamente a questo principio, che Newton risguardò come inerente a quello dell' inerzia della materia.

Nota II.

Deduzione delle formole della forza centrifuga nel cerchio.

Il corpo M descriva con movimento uniforme la circonferenza del circolo MPP' girando intorno al punto C come centro. Fig. 76.

Sia v la velocità uniforme del corpo, l' arco MP descritto dal corpo nel tempo τ sarà espresso dalla formola (art. 3 della Lez. I.

$$(1) \qquad MP = v\tau,$$

nella quale potremo assumere il tempo τ, e perciò anche l' arco MP, tanto piccolo quanto ci piace. Senza l' azione del filo che ritiene il corpo, esso partendo dal punto M avrebbe continuato il suo cammino secondo la tangente $M\theta$, ed alla fine del tempuscolo τ si sarebbe trovato in θ: se dunque esso si trova in P, ciò è perchè il suo movimento, è stato composto e la tensione del filo lo ha fatto discendere contemporaneamente per uno spazio θP eguale ad $M\gamma$. Ora questa tensione essendo nata per effetto dello sforzo che il corpo ha esercitato per fuggire secondo la

menti contigui $p\,q$, $q\,r$ differisce da due retti meno di qualunque angolo rettilineo assegnabile, e non è comparabile che con quello di due elementi consecutivi di un cerchio, o di un' altra curva.

3. Impieghiamo queste nozioni nella ricerca delle relazioni fra la forza centrifuga e la forza centrale in una trajettoria qualunque $T\,T'$ (fig. 81).

La forza centrifuga dipende ad ogni istante dalla maggiore o minore deviazione che il mobile è obbligato a subire nel percorrere due elementi consecutivi della curva, essa deve dunque in ogni punto trovarsi eguale a quella che avrebbe il mobile moventesi colla stessa velocità nel cerchio osculatore al detto punto, i cui due elementi contigui coincidono con quelli della curva. Chiamando dunque c la forza centrifuga nel punto della trajettoria in cui la velocità è v, ed il raggio del cerchio osculatore è ρ, essa sarà, secondo la nota precedente, espressa da

$$c = \frac{v^2}{\rho};$$

la massa del mobile essendo presa per unità.

Questa forza c, la quale non è altro che la reazione proveniente dall'inerzia del corpo a cambiar continuamente direzione di movimento, deve considerarsi, come la tensione del filo nell'esempio addotto nel testo, agire secondo il prolungamento $M'\nu$ del raggio osculatore OM od OM' (fig. 81).

Consideriamo ora la forza centrale φ, emanante dal punto F. Come il mobile M senza l'azione di questa forza sarebbe andato nell'istante seguente per $M\theta$ colla velocità preconcepita, ma attratto dalla forza nella direzione FM ha percorso l'elemento MM' della trajettoria, bisognerà che decomposta (Lez. II art. 4) la forza centrale, che nella figura rappresenteremo con $\theta M'$, in due, una $\theta\nu$ nella direzione parallela alla tangente $M't$, l'altra $\theta\mu$ nella direzione perpendicolare, o del raggio osculatore, la prima sola di queste forze sia quella che ha accelerato, o ritardato il corpo, e che la seconda sia quella che ha cambiato la direzione del suo movimento, ed il cui effetto sia stato consunto dalla reazione del corpo o distrutto dalla forza centrifuga, che abbiamo valutato sopra.

Indicando con w l'angolo $FM'O$ che il raggio osculatore OM' fa colla direzione FM' della forza centrale, le due componenti di cui parliamo, rappresentate dai lati $\theta\nu$, $\theta\mu$ del rettangolo $\theta\mu M'\nu$, del quale la diagonale $\theta M'$ rappresenta la forza centrale φ, saranno espresse da

$$\theta\nu = \varphi \sin w \qquad \theta\mu = \varphi \cos w$$

La prima sarà la componente che sollecita il corpo nella direzione del suo movimento, e ne fa cambiare la velocità, la seconda quella che ne cambia la direzione, e questa, essendo equiparata all'espressione della forza centrifuga c ritrovata sopra, ci darà l'equazione

$$\frac{v^2}{\rho} = \varphi \cos w$$

che è in termini algebrici l'enunciato della proposizione riferita nel testo.

NOTE ALLA LEZIONE III.

Nota I.

Del movimento dei gravi che discendono od ascendono verticalmente.

Avanti di esporre gli accidenti del movimento lungo i piani inclinati è opportuno di premettere il calcolo di uno dei più semplici casi di movimento composto, quale è quello di un grave lanciato con una velocità verticale u diretta in basso, od in alto.

1. Sia da prima la velocità u diretta in basso. Il movimento del grave risulterà in questo caso composto di quello uniforme colla velocità u, e di quello uniformemente accelerato prodotto dalla gravità. Questi due movimenti effettuandosi amendue, senza influenzarsi l' un l' altro (Vedasi la legge del movimento composto esposta al n.° 1 della Lez. II), gli spazi parziali del mobile dati dalla formola (1) (Lez. I) e dalla formola (2) (Lez. III), come pure le velocità parziali u, e quella data dalla formola (1) (lez. III) si aggiungeranno l' un l' altro, e si avranno le equazioni

$$(1) \qquad s = ut + g\frac{t^2}{2} \qquad (2) \qquad v = u + gt\,,$$

colle quali si potrà determinare il luogo del grave, e la sua velocità alla fine di un tempo dato t.

Se si volesse invece conoscere il tempo che il grave impiega a discendere per una data altezza s, e la velocità che viene ad avere, si porrebbe questo valore di s nella prima delle equazioni precedenti, e risolvendola si avrebbe

$$(3) \qquad t = \frac{1}{g}\left(\sqrt{u^2 + 2gs} - u\right) \qquad ; \quad (4) \qquad v = \sqrt{u^2 + 2gs}$$

dove non occorrerà tener conto che del valor positivo del radicale, non avendosi a considerare che il movimento dopo il principio della caduta, o corrispondente a dei valori di t, e di v positivi.

Per ultimo se si volesse conoscere il tempo della caduta del grave, e lo spazio necessario a percorrersi da esso per acquistare una data velocità v, le stesse equazioni (1) e (2) darebbero

$$(5) \qquad t = \frac{v - u}{g} \qquad ; \quad (6) \qquad s = \frac{v^2 - u^2}{2g}$$

2. Quando la velocità u impressa al grave fosse diretta verso l' alto, il movimento prodotto dall' azione della gravità sarebbe in direzione

menti contigui $p\,q$, $q\,r$ differisce da due retti meno di qualunque angolo rettilineo assegnabile, e non è comparabile che con quello di due elementi consecutivi di un cerchio, o di un' altra curva.

3. Impieghiamo queste nozioni nella ricerca delle relazioni fra la forza centrifuga e la forza centrale in una trajettoria qualunque $T\,T'$ (fig. 81).

La forza centrifuga dipende ad ogni istante dalla maggiore o minore deviazione che il mobile è obbligato a subire nel percorrere due elementi consecutivi della curva, essa deve dunque in ogni punto trovarsi eguale a quella che avrebbe il mobile moventesi colla stessa velocità nel cerchio osculatore al detto punto, i cui due elementi contigui coincidono con quelli della curva. Chiamando dunque c la forza centrifuga nel punto della trajettoria in cui la velocità è v, ed il raggio del cerchio osculatore è ρ, essa sarà, secondo la nota precedente, espressa da

$$c = \frac{v^2}{\rho};$$

la massa del mobile essendo presa per unità.

Questa forza c, la quale non è altro che la reazione proveniente dall'inerzia del corpo a cambiar continuamente direzione di movimento, deve considerarsi, come la tensione del filo nell'esempio addotto nel testo, agire secondo il prolungamento $M'\nu$ del raggio osculatore OM od OM' (fig. 81).

Consideriamo ora la forza centrale φ, emanante dal punto F. Come il mobile M senza l'azione di questa forza sarebbe andato nell'istante seguente per $M\theta$ colla velocità preconcepita, ma attratto dalla forza nella direzione FM ha percorso l'elemento MM' della trajettoria, bisognerà che decomposta (Lez. II art. 4) la forza centrale, che nella figura rappresenteremo con $\theta M'$, in due, una $\theta\nu$ nella direzione parallela alla tangente $M't$, l'altra $\theta\mu$ nella direzione perpendicolare, o del raggio osculatore, la prima sola di queste forze sia quella che ha accelerato, o ritardato il corpo, e che la seconda sia quella che ha cambiato la direzione del suo movimento, ed il cui effetto sia stato consunto dalla reazione del corpo o distrutto dalla forza centrifuga, che abbiamo valutato sopra.

Indicando con w l'angolo $FM'O$ che il raggio osculatore OM' fa colla direzione FM' della forza centrale, le due componenti di cui parliamo, rappresentate dai lati $\theta\nu$, $\theta\mu$ del rettangolo $\theta\mu M'\nu$, del quale la diagonale $\theta M'$ rappresenta la forza centrale φ, saranno espresse da

$$\theta\nu = \varphi \sin w \qquad\qquad \theta\mu = \varphi \cos w$$

La prima sarà la componente che sollecita il corpo nella direzione del suo movimento, e ne fa cambiare la velocità, la seconda quella che ne cambia la direzione, e questa, essendo equiparata all'espressione della forza centrifuga c ritrovata sopra, ci darà l'equazione

$$\frac{v^2}{\rho} = \varphi \cos w$$

che è in termini algebrici l'enunciato della proposizione riferita nel testo.

NOTE ALLA LEZIONE III.

Nota I.

Del movimento dei gravi che discendono od ascendono verticalmente.

Avanti di esporre gli accidenti del movimento lungo i piani inclinati è opportuno di premettere il calcolo di uno dei più semplici casi di movimento composto, quale è quello di un grave lanciato con una velocità verticale u diretta in basso, od in alto.

1. Sia da prima la velocità u diretta in basso. Il movimento del grave risulterà in questo caso composto di quello uniforme colla velocità u, e di quello uniformemente accelerato prodotto dalla gravità. Questi due movimenti effettuandosi amendue, senza influenzarsi l' un l' altro (Vedasi la legge del movimento composto esposta al n.° 1 della Lez. II), gli spazi parziali del mobile dati dalla formola (1) (Lez. I e dalla formola (2) (Lez. III), come pure le velocità parziali u, e quella data dalla formola (1) (lez. III) si aggiungeranno l' un l' altro, e si avranno le equazioni

$$(1) \qquad s = ut + g\frac{t^2}{2} \qquad (2) \qquad v = u + gt\,,$$

colle quali si potrà determinare il luogo del grave, e la sua velocità alla fine di un tempo dato t.

Se si volesse invece conoscere il tempo che il grave impiega a discendere per una data altezza s, e la velocità che viene ad avere, si porrebbe questo valore di s nella prima delle equazioni precedenti, e risolvendola si avrebbe

$$(3) \qquad t = \frac{1}{g}\left(\sqrt{u^2 + 2gs} - u\right) \qquad ; \ (4) \qquad v = \sqrt{u^2 + 2gs}$$

dove non occorrerà tener conto che del valor positivo del radicale, non avendosi a considerare che il movimento dopo il principio della caduta, o corrispondente a dei valori di t, e di v positivi.

Per ultimo se si volesse conoscere il tempo della caduta del grave, e lo spazio necessario a percorrersi da esso per acquistare una data velocità v, le stesse equazioni (1) e (2) darebbero

$$(5) \qquad t = \frac{v - u}{g} \qquad ; \ (6) \qquad s = \frac{v^2 - u^2}{2g}$$

2. Quando la velocità u impressa al grave fosse diretta verso l' alto, il movimento prodotto dall' azione della gravità sarebbe in direzione

contraria a quello preconcepito, e la legge del movimento composto somministrerebbe le due equazioni

$$(7) \qquad s = u\,t - g\frac{t^2}{2} \qquad ; \ (8) \qquad v = u - g\,t,$$

nelle quali lo spazio, che la gravità farebbe percorrere separatamente, e le velocità, che essa imprimerebbe, sono stati sottratti da quelli corrispondenti al movimento uniforme, perchè contrari.

Il tempo, in cui il corpo estinguerebbe la sua velocità, si avrà ponendo $v = o$ nell' ultima equazione. Questo tempo, e l' altezza a cui il corpo potrà salire saranno dunque espressi da

$$(9) \qquad t = \frac{u}{g} \qquad ; \ (10) \qquad s = \frac{u^2}{2g}$$

Viceversa onde un corpo possa giungere ad una data altezza s, converrà comunicargli una velocità

$$(11) \qquad u = \sqrt{2\,g\,s}$$

3. Se si fa il quadrato dell' equazione (2), o della (8), e si elimina rispettivamente $\pm 2\,u\,t + g\,t^2$ coll' equazione (1) e (7), si ottiene

$$(12) \qquad v^2 = u^2 \pm 2\,g\,s$$

Ora $2\,g\,s$ è, secondo la formola (3) della Lezione III, il quadrato della velocità che il corpo acquisterebbe partendo dalla quiete e cadendo liberamente per uno spazio s, v è la velocità alla fine, ed u quella al principio del movimento: si vede dunque, da queste equazioni, che anche quando il corpo parte con una velocità preconcepita il quadrato della sua velocità viene aumentato o diminuito di una stessa quantità, come se partisse dalla quiete, cioè del quadrato della velocità che acquisterebbe cadendo per un' altezza eguale allo spazio percorso.

Del movimento de' gravi lungo i piani inclinati.

4. Quando un grave si muove lungo un piano inclinato, discendendo per la linea $H\,P$ (fig. 82 di maggior pendenza, cioè per la retta che è perpendicolare alla linea d' intersezione del piano coll' orizzonte, l' effetto della forza acceleratrice della gravità $g = C\,G$, che farebbe muovere il corpo se cadesse liberamente, si trova in parte distrutto dalla resistenza del piano; ma se noi, secondo ciò che è stato detto all' art. 3 della Lezione II, concepiamo il movimento uniformemente accelerato, che la forza acceleratrice della gravità tenderebbe ad imprimere, come un movimento risultante da due forze acceleratrici ortogonali fra loro, una $C\,R$ perpendicolare al piano, e l' altra $C\,S$ parallela, il movimento che produrrebbe la prima $C\,R$ sarà quello che è costantemente distrutto dalla resistenza del piano, ed il movimento prodotto dalla seconda $C\,S$ sarà quello che realmente anima il corpo. Ora, condotta l' orizzontale $P\,L$, che si chiama la *base*, e la verticale $H\,L$, che si

dice l'*altezza*, e chiamato i l'angolo HPL che misura l'*inclinazione* del piano all'orizzonte, i triangoli simili CSG, HLP ci danno

$$CS : CG :: HL : HP :: \text{sen } i : 1 ;$$

onde, poste per brevità,

$$HP = l \qquad\qquad HL = a$$

sarà

$$(13) \qquad CS = g\frac{a}{l} = g \text{ sen } i$$

così la componente cercata, o la forza acceleratrice costante che animerà il corpo sarà espressa dalla gravità diminuita nella ragione dell'altezza alla lunghezza del piano, o vero del seno totale al seno dell'inclinazione del piano. Questa componente CS della gravità si chiama la *gravità rispettiva.*

La gravità rispettiva essendo costante ed agendo nella stessa direzione in cui si muove il corpo, produrrà un movimento uniformemente accelerato, e secondo le formole (3) e (5) che abbiamo dato nella Lez. I, sostituendo g sen i ad f, si avranno la velocità acquistata v, e lo spazio σ percorso dopo un tempo t, dalle equazioni

$$(14) \qquad v = g \text{ sen } i \,.\, t \quad ; \quad (15) \qquad \sigma = g \text{ sen } i \,.\, \frac{t^2}{2}$$

Queste equazioni sono simili a quelle segnate (1) e (2) nella Lez. III, che corrispondono alla caduta libera dei gravi, se non che contengono la gravità rispettiva g sen i in luogo della gravità assoluta g. Il movimento lungo il piano inclinato sarà dunque simile a quello verticale, ma corrisponderà ad una forza acceleratrice minore, qual'è la gravità rispettiva. Così siccome dalle equazioni (1) e (2) della Lezione citata si deduce

$$(16) \qquad t = \frac{1}{g}\sqrt{2gs} \quad ; \quad (17) \qquad v = \sqrt{2gs}$$

cambiando in queste g in g sen i, si avrà pel piano inclinato

$$(18) \qquad t = \frac{1}{g \text{ sen } i}\sqrt{2g \text{ sen } i \,.\, \sigma} \quad ; \quad (19) \qquad v = \sqrt{2g \text{ sen } i \,.\, \sigma}$$

5. È facile di verificare coll'ispezione della figura che, prendendo Hp per rappresentare lo spazio σ, e conducendo l'orizzontale qp, i triangoli simili Hpq, HPL daranno per Hq, che rappresenteremo con s, l'espressione

$$(20) \qquad s = \frac{a}{l}\sigma = \sigma \,.\, \text{sen } i$$

onde, colla sostituzione di questa quantità, le equazioni precedenti diverranno

$$(21) \qquad t = \frac{1}{g \,.\, \text{sen } i}\sqrt{2gs} \quad ; \quad (22) \qquad v = \sqrt{2gs}$$

Ma s è l'altezza verticale corrispondente allo spazio σ percorso dal

corpo, o, come si disse, la projezione dello spazio σ sulla verticale: confrontando dunque queste espressioni colle precedenti (16) (17) si vede che un corpo per discendere per un' altezza s lungo un piano inclinato impiega un tempo che è maggiore di quello che v' impiegherebbe discendendo liberamente, come il raggio al seno dell' inclinazione, o come la lunghezza del piano alla sua altezza, ma acquista una velocità che è la medesima come se il corpo fosse disceso verticalmente per la stessa altezza.

Se si hanno più piani inclinati HP, $H'P'$, $H''P''$, sui quali discenda un corpo, tutte le volte che esso si sarà abbassato da una stessa altezza Hq, la sua velocità sarà sempre eguale, qualunque sia l' inclinazione dei piani, e coinciderà con quella che acquisterebbe cadendo liberamente.

6. Qualora il corpo che discende lungo il piano inclinato partisse con una velocità preconcepita u, diretta secondo la linea di maggior pendenza, allora facendo uso della gravità rispettiva $g \operatorname{sen} i$ in luogo della g, potremmo, cogli stessi ragionamenti impiegati nel n.° 1, stabilire le equazioni

$$(23) \qquad \sigma = u\,t + g \operatorname{sen} i \,.\, \frac{t^2}{2} \qquad ; \quad (24) \qquad v = u + g \operatorname{sen} i \,.\, t$$

σ indicando lo spazio percorso dal corpo lungo il piano. Da queste equazioni, simili alle (1) e (2), se ne potranno parimenti dedurre due altre simili alle (3) e (4) cambiando in esse g in $g \operatorname{sen} i$; e quindi introducendo l' altezza s, data dall' espressione (20), si avrà in questo caso

$$(25) \quad t = \frac{1}{g \operatorname{sen} i} \sqrt{u^2 + 2\,g\,s} - u \quad ; \quad (26) \quad v = \sqrt{u^2 + 2\,g\,s}$$

Paragonando ora queste due equazioni alle corrispondenti (3) e (4) si potranno ripetere, relativamente al valore del tempo e della velocità nella caduta libera, ed in quella lungo un piano inclinato, gli stessi confronti fatti nel n.° precedente, e se ne dedurranno le stesse conclusioni.

7. Quando la velocità impressa u fosse diretta verso l' alto, cosicchè il corpo salisse pel piano secondo la linea di maggior pendenza, si giungerebbe a delle equazioni analoghe a quelle segnate (7) ed (8) in cui g sarebbe rimpiazzato da $g \operatorname{sen} i$; si avrebbe cioè

$$(27) \qquad \sigma = u\,t - g \operatorname{sen} i \,.\, \frac{t^2}{2} \qquad ; \quad (28) \qquad v = u - g \operatorname{sen} i \,.\, t$$

D' onde si dedurrebbe, cambiando parimenti g in $g \operatorname{sen} i$ nelle equazioni (9) e (10), che il tempo in cui il corpo continuerebbe a montare sul piano, e lo spazio che percorrerebbe sino all' estinzione della sua velocità, sarebbero dati da

$$(29) \qquad t = \frac{1}{g \operatorname{sen} i}\, u \qquad ; \quad (30) \qquad \sigma = \frac{1}{2\,g \operatorname{sen} i}\, u^2$$

La velocità necessaria da imprimersi onde il corpo, camminando lungo il piano, salga sino ad un' altezza verticale s, si otterrebbe colla sostituzione di $g \operatorname{sen} i$ a g nell' equazione (11), e dell' espressione di s data

dalla formola (20), così che sarebbe

$$(31) \qquad u = \sqrt{2\,g\,s}$$

cioè la stessa che bisognerebbe imprimergli per farlo salire alla stessa altezza lanciandolo verticalmente.

8. Facendo il quadrato dell'equazione (24) e dell'equazione (28), ed eliminando $\pm u\,t + g \operatorname{sen} i \,.\, t^2$ coll'equazione (23), o coll'equazione (24), si ottiene

$$v^2 = u^2 \pm 2\,g \operatorname{sen} i \,.\, \sigma$$

od introducendo l'altezza verticale s coll'espressione (20)

$$v^2 = u^2 \pm 2\,g\,s$$

Questa formola coincide colla (12), e ci fa vedere che, sia che il corpo cada o salga verticalmente, sia che discenda o ascenda scorrendo lungo un piano comunque inclinato, per una stessa altezza verticale, l'aumento od il decremento del quadrato della sua velocità è sempre lo stesso ed eguale al quadrato della velocità che il corpo acquisterebbe partendo dalla quiete e cadendo per una stessa altezza.

9. Questa ultima proprietà del movimento dei gravi non è limitata al solo caso, che la velocità impressa u sia nella direzione della linea di maggior pendenza, come abbiamo supposto. Se la velocità preconcepita fosse diretta secondo una linea qualunque nel piano, allora bisognerebbe, secondo i principii esposti all'art. 2 della Lez. II, concepire la velocità u come la risultante di due velocità, una u' diretta secondo la linea di maggior pendenza, e l'altra u'' secondo la linea perpendicolare alla prima, così che nel rettangolo, dai di cui lati potessero essere rappresentate queste velocità, fosse

$$(32) \qquad u'^2 + u''^2 = u^2.$$

Quindi considerando separatamente i movimenti secondo le due dette direzioni si avrebbero, per le leggi citate del movimento composto, ed impiegando gli stessi ragionamenti, e denominazioni di cui abbiamo fatto uso precedentemente, le equazioni

$$(33)\ v' = u' \pm g \operatorname{sen} i \,.\, t\,; \quad (34)\ v'' = u''\,; \quad (35)\ \sigma = u'\,t \pm g \operatorname{sen} i \,.\, \frac{t^2}{2}$$

nelle quali il segno superiore vale quando il corpo discende, ed il segno inferiore quando ascende, e dove si è indicato con v' la velocità del corpo secondo la linea di maggior pendenza, che è variabile e cresce o cala di tutta quella parte che la gravità va successivamente imprimendogli, e con v'' la velocità secondo la linea perpendicolare alla prima, velocità che rimane costante ed eguale ad u'' durante tutto il movimento. Queste due velocità essendo ad angolo retto fra loro daranno una velocità risultante v rappresentata dalla diagonale del rettangolo che esse possono formare, e che sarà perciò espressa da

$$(36) \qquad v^2 = v'^2 + v''^2$$

Facciamo ora la somma dei quadrati delle due equazioni (33) e (34) ed eliminiamo $\pm 2\,u\,t + g\,\frac{a}{l}\,t^2$ colla (35); colle riduzioni che somministrano le equazioni (32) e (36) si troverà

$$(37) \qquad v^2 = u^2 \pm 2\,g\,\text{sen}\,i\,.\,\sigma$$

Se si concepisce il piano verticale che passa pel punto di partenza del corpo e per la linea di maggior pendenza, e si costruisce in questo piano il rettangolo di cui σ sia la diagonale, e di cui i due lati, che si uniscono nel punto di partenza del corpo, siano uno verticale e l'altro orizzontale, sarà facile il vedere che la quantità σ sen i rappresenterà, come abbiamo osservato precedentemente nel n.° 5, l'altezza verticale di questo rettangolo. Quest'altezza sarebbe nel tempo stesso l'altezza del parallelepipedo rettangolo che venisse costrutto sulla retta che congiunge i punti estremi di partenza e d'arrivo del corpo, come diagonale, e di cui il suddetto rettangolo fosse una faccia, dal che si comprende che σ sen i sarà ancora lo spazio che il corpo ha percorso verticalmente, o projettato nella direzione della forza. Chiamando dunque parimenti s questo spazio, sarà come precedentemente

$$(38) \qquad v^2 = u^2 \pm 2\,g\,s$$

e quindi sussisterà anche per questo caso più generale la proposizione che abbiamo enunciata alla fine del numero precedente.

10. Se in luogo d'essere data la forza acceleratrice totale g, da cui il corpo sarebbe mosso se non trovasse l'ostacolo del piano, fosse conosciuta la forza motrice P totale, allora dividendo questa forza per la massa m del corpo si avrebbe il quoziente $\frac{P}{m}$ per rappresentare, secondo l'equazione (12) dell'art. 10 della Lez. I, la forza acceleratrice, e sostituendo questo valore nell'equazione precedente risulterebbe

$$(39) \qquad m\,v^2 - m\,u^2 = \pm 2\,P\,s.$$

I Meccanici hanno chiamato *forza viva* il prodotto della massa nel quadrato della velocità: l'equazione (39) ci fa dunque vedere che la differenza fra la forza viva, o sia la forza viva acquistata o perduta dal corpo, è sempre eguale al doppio del prodotto della forza motrice per lo spazio, che il punto a cui è applicata ha percorso nella direzione della forza od in direzione opposta, qualunque sia l'inclinazione del piano e la direzione del movimento.

11. Poichè per un istante il movimento qualunque di un corpo può considerarsi in linea retta nella direzione della toccante all'elemento della curva che il corpo descrive, si potrà sempre concepire questo movimento per un istante come fatto su uno qualunque dei piani che passi per la toccante, e la proposizione precedente ci dice che il cam-

biamento di forza viva che farà il corpo ad ogni istante sarà misurato dal doppio del prodotto della forza motrice, che gli è applicata, per lo spazio, che esso percorre, nello stesso istante, projettato nella direzione della forza; questo spazio dovrà essere preso come negativo quando è percorso in direzione opposta a quella dell'azione della forza.

12. Se in luogo di una sola forza motrice P, il corpo fosse animato da più forze p, p_1, p_2 ec. dirette comunque, si potrebbe sempre considerare il movimento del corpo come l'effetto di una sola forza P, prendendo per questa la risultante di tutte quelle forze parziali: e la componente di P nella direzione del movimento del corpo sarebbe eguale alla somma delle componenti delle forze p, p_1, p_2 ec. nella stessa direzione. Ora chiamando A l'angolo che la forza P fa colla direzione del movimento, ed α, α_1, α_2 ec. quelli che colla stessa direzione fanno le forze p, p_1, p_2 ec., ed osservando che ciascuna delle componenti suddette, come lato di un rettangolo di cui la forza è la diagonale, si ottiene moltiplicando la forza pel coseno del rispettivo angolo adiacente, si avrà

$$P \cos A = p \cos \alpha + p_1 \cos \alpha_1 + p_2 \cos \alpha_2 + \text{ec.}$$

Ma detto σ lo spazio che percorre il corpo lungo il piano, esso può prendersi per l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui s sia un cateto, e si ha

$$s = \sigma \cos A :$$

dunque sostituendo questo valore di s nell'equazione (39), e ponendo per $P \cos A$ il valor precedente, si otterrà

$$m v^2 = m u^2 + 2 p . \sigma \cos \alpha + 2 p_1 . \sigma . \cos \alpha_1 + 2 p_2 . \sigma \cos \alpha_2 + \text{ec.}$$

Ma $\sigma \cos \alpha$, $\sigma \cos \alpha_1$, $\sigma \cos \alpha_2$ rappresentano, similmente che $\sigma \cos A$, le projezioni dello spazio σ sulle direzioni delle forze p, p_1 p_2 ec., o sia gli spazi percorsi dal corpo nelle direzioni di queste forze, dunque chiamando ς, ς_1, ς_2 ec. questi spazi si dedurrà

$$(40) \qquad m v^2 = m u^2 + 2 p \varsigma + 2 p_1 \varsigma_1 + 2 p_2 \varsigma_2 + \text{ec.}$$

Si avrà così questa proposizione più generale che, quando più forze operano su di un corpo, la forza viva del corpo aumenta ad ogni istante di una quantità eguale al doppio della somma dei prodotti di ciascuna per lo spazio che nella rispettiva direzione percorre il corpo nello stesso istante. Questa proposizione è una delle più semplici, compresa in un principio generale che esporremo in una nota alla Lezione XI.

13. Quando il corpo fosse animato da forze la cui direzione si mantenesse costantemente perpendicolare alla curva, la velocità del corpo non potrebbe essere alterata da queste forze, perchè lo spazio descritto dal corpo nella loro direzione sarebbe ad ogni istante nullo.

Nota II.

Del movimento dei projettili nel vòto.

1. La determinazione degli accidenti del moto e della curva che descrivono i projettili lanciati nel vòto è stata una delle prime applicazioni che Galileo ha fatto della legge del movimento composto e della teorica della caduta dei gravi (1).

Se si suppone che un corpo sia lanciato nella direzione AB (fig. 82) con una velocità di projezione capace di fargli descrivere in tempi successivi eguali, gli spazi eguali Ap, pp_1, p_1p_2 ec., mentre il corpo percorrerà in virtù di questa velocità impressa gli spazi Ap, Ap_1, Ap_2 ec. in tempi crescenti come i numeri 1, 2, 3 ec. la gravità (vedasi l'art. 3 di questa Lezione), lo farà discendere negli stessi tempi per gli spazi pq, p_1q_1, p_2q_2 ec. che cresceranno come i numeri 1, 4, 9 ec. Il corpo si troverà così, secondo la legge del movimento composto (Lez. II, art. 1), occupare successivamente i punti q, q_1, ec. di una curva, che avrà la retta AB per tangente nel punto A, che monterà per un ramo AC sino ad una certa altezza C, ove ogni velocità verticale sarà distrutta, ed il suo moto sarà per un istante orizzontale, e poi discenderà sino a D allo stesso livello di A per un altro ramo eguale CD, poichè la gravità anderà in questo ramo CD accelerando il moto discensivo del corpo in ordine inverso, ma nello stesso modo con cui lo ha ritardato nel ramo ascensivo AC. La verticale CV sarà così un'asse della curva, e conducendo le rette rq, r_1q_1, r_2q_2 ec. parallele ad AB sino ad intersecare la verticale AG, questa curva avrà, per le cose dette sopra, la proprietà che le rette $Ar = pq$, $Ar_1 = p_1q_1$, $Ar_2 = p_2q_2$ ec. staranno fra loro come i quadrati delle rette rq, r_1q_1, r_2q_2 ec. Ora questa proprietà è appunto quella che caratterizza la curva conosciuta dai Geometri col nome di *Parabola*. La retta AG si chiama un *diametro*, le rette Ar, Ar_1, Ar_2 ec. si dicono le *ascisse*, le rette rq, r_1q_1, r_2q_2 le *ordinate*, e la proprietà caratteristica della parabola si è che i quadrati delle ordinate stiano fra loro come le ascisse corrispondenti. Si è dimostrato che questa curva è quella che limita il contorno della sezione di un cono fatta da un piano condotto parallelamente al lato opposto del cono (Vedasi Apollonio Conicorum lib. I, Prop. 20, e lib. III, Prop. 16).

Quando il projettile è lanciato secondo una linea orizzontale si ha il caso più semplice: la *trajettoria* si trova in questo caso tutta al disotto dell'orizzontale AB, come nella fig. 84; il punto di projezione diventa il *vertice* della parabola, il diametro AG viene a coincidere coll'asse

(1) Galileo. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due scienze nuove. Dialogo IV.

CV ed i quadrati delle distanze rq, $r_1 q_1$ $r_2 q_2$ del corpo dall' asse AG o CV sono in ogni istante come gli abbassamenti $Ar = pq$, $Ar_1 = p_1 q_1$ $Ar_2 = p_2 q_2$ ec. del corpo sotto l' orizzontale.

Nel caso più generale, quando il projettile è lanciato con una certa elevazione, il vertice C della parabola (fig. 83) che è il punto più alto a cui monta il projettile si chiama il punto *culminante*, l' altezza CV sopra l' orizzontale condotta pel punto A si dice l' *altezza del tiro*, e la distanza AD a cui giunge il projettile sulla stessa orizzontale è detta la *portata del tiro*.

Per avere l' altezza del tiro e la portata corrispondente ad una velocità iniziale ed elevazione data, si può dapprima osservare che l' altezza del tiro CV è sempre la metà dell' altezza FV a cui monterebbe nello stesso tempo il projettile senza l' azione della gravità. Infatti se rappresentiamo con AF la velocità di projezione del corpo; AV e VF saranno le velocità componenti nelle direzioni orizzontali e verticali, dalle quali la velocità risultante AF potrà essere surrogata (Lez. II, art. 2). Ora il projettile giunto al punto C ha perduto tutta la sua velocità verticale di ascensione FV, dunque bisognerà che la velocità che ha acquistato per effetto della gravità in verso contrario sia eguale ad FV; ma il corpo acquista per la gravità una velocità doppia dello spazio per cui è caduto (Lez. III, art. 3), dunque FC è la metà di FV, e perciò tale è anche l' altezza del tiro CV.

Ciò posto sia T il tempo che il projettile impiega ad arrivare al punto culminante C, v la velocità iniziale ed α l' angolo d' elevazione del tiro, o l' angolo FAV che la direzione della velocità di projezione fa coll' orizzontale AD. Nel triangolo FAV si avrà (Legendre Trigonométrie art. XLII)

$$AF = v \,.\, T \qquad AV = v \,.\, T \,.\, \cos \alpha \qquad FV = v \,.\, T \,.\, \operatorname{sen} \alpha = 2\, FC.$$

Ma dalla teorica della caduta dei gravi (Lez. III, for. 2) si ha lo spazio

$$FC = g \frac{T^2}{2}$$

dunque paragonando fra di loro le due ultime espressioni di FC si otterrà

$$T = \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{g} \quad (1), \text{ ed } FC = \frac{v^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha = CV \quad (2).$$

Collo stesso valore di T si avrà finalmente

$$AV = \frac{v^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}; \text{ e la portata } AD = 2\, AV = \frac{v^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \quad (3)$$

Le equazioni (1) (2) (3) forniscono i seguenti teoremi che sono spesso citati dagli autori di Balistica.

1.° Il tempo T che impiega il mobile per arrivare al punto culminante C della trajettoria, e quindi la durata $2T$ della portata orizzontale è proporzionale al prodotto della velocità iniziale nel seno dell' angolo d' elevazione.

2.° L' altezza del tiro VC è proporzionale al quadrato dello stesso prodotto.

3.° La portata orizzontale AD è proporzionale al prodotto del quadrato della velocità nel seno del doppio dell' angolo di elevazione. Il seno essendo massimo quando l' arco $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, la portata sarà massima quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Per due angoli, uno maggiore e l' altro d' altrettanto minore di $\frac{\pi}{4}$, i seni di 2α essendo eguali, vi saranno per ogni velocità di projezione v due elevazioni che daranno la stessa portata.

Mal s' appiglierebbe chi volesse far uso di questi teoremi pei projettili dell' artiglieria. La grande resistenza che oppone l' aria ai projettili, che si muovono con grande velocità, introduce un elemento che fa sensibilmente variare i risultamenti da quelli che sono veri nel vòto.

NOTE ALLA LEZIONE IV.

Nota I.

Delle oscillazioni dei pendoli.

1. Per considerare le oscillazioni di un pendolo P (fig. 86) in un arco situato in un piano verticale, conviene considerare la forza acceleratrice della gravità rappresentata da PG nella figura come la risultante di due altre forze (Lez. II art. 3 e 4) PN, PT la prima normale alla curva o nella direzione del filo CP, e la seconda PT nella direzione della tangente. La prima di queste forze e la forza centrifuga producono la tensione del filo, che viene ad essere opposta ed eguale alla loro somma, e questo sistema di forze eguali e contrarie, operando nella direzione normale a quella in cui si muove il corpo, non può alterare la velocità che la seconda componente PT gli va successivamente comunicando. Ora se consideriamo la curva, che descrive il pendolo, come composta di un' infinità di piccoli latercoli, tanto piccoli quanto vogliamo, il corpo discenderà per questi latercoli come su tanti piani inclinati, e siccome nella discesa per ogni latercolo il quadrato della sua velocità andrà aumentando sempre della stessa quantità di cui aumenterebbe cadendo verticalmente per l' altezza del latercolo, (Nota precedente n.° 8) così chiaro si fa che il quadrato della velocità acquistata dal pendolo, partendo dalla quiete, dopo aver corso un arco qualunque sarà lo stesso del quadrato di quella che avrebbe acquistato cadendo liberamente per un' altezza verticale HK compresa fra le due orizzontali condotte pei due punti estremi dell'arco. Se dunque si chiama h l' altezza IH del punto A di partenza del pendolo, contata al disopra di un' orizzontale condotta pel punto infimo I dell' arco, ed x l' altezza IK del punto P, a cui è arrivato il pendolo in un istante qualunque, $h - x$ sarà l' altezza verticale HK per cui è caduto, e

$$1. \qquad v = \sqrt{2g(h-x)}$$

sarà, per ciò che abbiamo premesso, e per la formola 3 della Lezione III, la velocità che avrà acquistato nel punto P.

2. La dimostrazione di questa proposizione è indipendente dalla natura della curva in cui il corpo si muove, ed è applicabile non solo al caso che il corpo oscilli per archi circolari, ma sì bene per archi di curve qualunque, perchè le resistenze che obbligano il corpo a trattenersi sulla curva non possono a meno di essere, come la tensione del filo, perpendicolari alla curva che percorre. Si ha così la proposizione

generale che, quando un grave discende in una curva ha in ogni punto la stessa velocità che avrebbe se fosse disceso verticalmente ad una profondità eguale a quella del punto della curva in cui si trova.

Se il grave dopo d'essere disceso ascendesse in seguito colla velocità concepita per un ramo eguale opposto della curva anderebbe perdendo la sua velocità nello stesso modo con cui l'ha acquistata discendendo, ed arriverebbe alla stessa altezza da cui è partito, perchè nell'ascesa l'azione della gravità su di esso distruggerebbe in ordine inverso i gradi di velocità che gli ha comunicato nella discesa.

3. Determinata la velocità del pendolo in ogni istante per passare alla ricerca del tempo che esso impiega a far un'oscillazione per un arco piccolo ci è d'uopo di premettere una comparazione. Oscilli un pendolo per un arco AA' tanto piccolo che spiegato in linea retta non differisca sensibilmente dalla corda che lo sottende. Sopra quest'arco sviluppato AA' (fig. 86 *bis*) s'immagini un mobile m che occupi ad ogni istante il punto corrispondente a quello che è realmente occupato dal pendolo P sull'arco AA', ed in conseguenza che il corpo m percorra la retta AA' colla stessa velocità con cui il pendolo percorre l'arco AA'. Sopra AA' come diametro (fig. 86 *bis*) descrivasi un cerchio, e suppongasi un punto M che cammini sulla circonferenza di questo cerchio in modo che la sua projezione sul diametro AA' venga sempre a cadere nel luogo di m: dico che, perchè ciò avvenga, basterà che M descriva la circonferenza AMA con un movimento uniforme e colla velocità $a\sqrt{\frac{g}{l}}$; a dinotando il raggio AI del circolo ed l la lunghezza del pendolo CI (fig. 86).

Per provarlo rappresento con ML la velocità $a\sqrt{\frac{g}{l}}$ del punto M diretta secondo la tangente $M\lambda$, con MF la sua componente orizzontale, e cerco il valore di questa componente per vedere se veramente risulta eguale alla velocità con cui il corpo m si muove, od alla velocità del pendolo. Primieramente dai due triangoli MIm, LMF che sono simili e danno la proporzione

$$MI : Mm :: ML : MF$$

deduco la velocità FM del corpo m, che sarà

$$2 \qquad MF = \frac{Mm}{MI} \cdot ML = Mm \cdot \sqrt{\frac{g}{l}};$$

osservando che $MI = a$, ed $ML = a\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Ma si ha (Legendre Lib. III. Prop. XI corol. 1),

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MI}^2 - \overline{Im}^2$$

ed è $MI = IA$, $Im = IP$; e per essere IA ed IP molto piccoli possiamo sostituire a questi archi le loro corde, ed allora per una nota

proposizione di geometria, (Legendre Lib. III. Prop. XXIII, corol. I) si sa che è

$$\overline{IA}^2 = 2 \cdot CI \cdot IH = 2l \cdot h \qquad \overline{IP}^2 = 2CI \cdot IK = 2l \cdot x:$$

dunque facendo queste sostituzioni nell' equazione precedente si troverà

$$\overline{Mm}^2 = 2l\,(h - x)$$

e quindi la formola (2) ci darà

$$MF = \sqrt{2g\,(h - x)},$$

che coincide appunto colla velocità del pendolo nel punto P data dall' equazione (1) come dovevamo dimostrare.

Il corpo m, non che il pendolo partendo, ciascuno dal punto A, con una velocità nulla, percorreranno uno il diametro AA' (fig. 86 *bis*) l' altro l' arco AA' (fig. 86) nello stesso tempo che il punto M descrive con moto uniforme la semicirconferenza AMA'. Ma detto t il tempo che M impiega a descrivere lo spazio πa, o sia la semicirconferenza AMA' colla velocità $a\sqrt{\frac{g}{l}}$, per le formole del movimento uniforme (Lez. I equaz. (I)) si ha

$$\pi a = a\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t,$$

dunque si avrà il tempo t dalla formola

$$(3) \qquad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

che sarà anche il tempo dell' oscillazione del pendolo.

4. Se si volesse avere per un tempo qualunqne t la distanza del pendolo P dal punto infimo I e la sua velocità, le quali sono prossimamente espresse da Im, ed Fm si osserverà che nei triangoli rettangoli MIm, LMF (Legendre Trig. rect. 41), si ha

$$Im = IM \cos MIA \qquad MF = ML \sin LMF,$$

e che

$$LMF = MIA = \frac{t \cdot a\sqrt{\frac{g}{l}}}{a} = t\sqrt{\frac{g}{l}};$$

per cui si dedurrà

$$(4) \qquad Im = a\cos . t\sqrt{\frac{g}{l}} \;;\; MF = a\sqrt{\frac{g}{l}} \sin . t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

5. La forza acceleratrice, che anima ad ogni istante il pendolo, è data, come abbiamo visto al n.° 1, dalla componente TP, cateto del triangolo PGT (fig. 86) di cui l' ipotenusa PG rappresenta la risultante o la forza di gravità; quindi per essere simili i triangoli PCK, PGT si avrà

$$PC : PK :: PG : PT$$

o sia

$$PT = PG \cdot \frac{PK}{PC} = g \cdot \frac{PK}{PC}.$$

Onde il movimento del pendolo sia comparabile a quello del corpo m, che occupa costantemente la projezione del punto M, (fig. 86 *bis*), e le oscillazioni siano isocrone, deve l'arco $PI = Im$ essere assai piccolo in confronto del raggio CP, di modo che si possa senza error sensibile sostituire quest'arco al suo seno PK, sarà perciò

(5) $$PT = \frac{g}{PC} \cdot PI = \frac{g}{IA} \cdot Im$$

cioè la forza acceleratrice, dalla quale si potrà considerare ad ogni istante animato il pendolo, od anche il corpo m, sarà proporzionale allo spazio IP od Im che rimane a ciascuno di questi corpi per arrivare al punto I dove la forza sarebbe nulla, ed il pendolo od il corpo m potrebbero rimanere in riposo.

Nota II.

Dell' Isocronismo.

1. La legge di variabilità della forza che ora abbiamo annunciato è un carattere generale per riconoscere l'esistenza dell'isocronismo. Tutte le volte che la forza, da cui verrà animato un corpo, è proporzionale allo spazio che gli resta a percorrere per arrivare alla situazione, ove questa forza sarebbe nulla, sempre il corpo partendo dalla quiete, da una distanza qualunque, giunge a questa situazione in egual tempo, ed il tempo che impiega per giungervi è espresso da

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{K}};$$

π dinotando la semicirconferenza del cerchio di raggio uno, e K il coefficiente per cui si deve moltiplicare lo spazio che resta a percorrersi dal corpo per avere l'espressione della forza acceleratrice, così che detta f questa forza acceleratrice, ed s lo spazio da percorrersi sia

(1) $$f = Ks.$$

Si può riconoscere la verità di questa proposizione riferendosi alla stessa costruzione della fig. 86 *bis*, ripetuta nella fig. 85. Perciò osservo primieramente che la velocità del corpo m essendo espressa da (Nota preced. equaz. 2)

(2) $$FM = \frac{ML}{MI} Mm,$$

la differenza di velocità nel passaggio del corpo per le due situazioni prossime e successive m ed m', sarà data da

$$F'M' - FM = \frac{ML}{MI}(M'm' - Mm) = \frac{ML}{MI} M'\mu;$$

ed il tempo corrispondente impiegato dal punto M a passare dall' una all' altra situazione colla velocità uniforme ML si avrà da

$$t = \frac{MM'}{ML}.$$

Ora il quoziente della precedente differenza delle due velocità divisa per questo tempo si accosterà tanto più al valore della velocità che acquisterebbe il corpo nell' unità di tempo per l' azione costante della forza acceleratrice che anima il corpo in m, o sia al valore di questa forza acceleratrice (Lez. I art. 11), più il tempo t sarà corto, dunque detta f la forza acceleratrice, si avrà al limite

$$f = \frac{\overline{ML}^2}{MI} \cdot \frac{M'\mu}{MM'}.$$

Ma considerando $M\mu M'$ come un triangolo rettangolo rettilineo si ha

$$MM' : M'\mu :: MI : Im, \text{ e perciò } \frac{M'\mu}{MM'}, = \frac{Im}{MI};$$

e questa analogia è tanto più esatta quanto MM' è più piccolo, dunque al limite sarà pure

$$f = \frac{ML^2}{MI^2} Im = \frac{\overline{ML}^2}{MI^2} \cdot s.$$

Quest' espressione della forza acceleratrice f può sempre farsi coincidere colla precedente (1 prendendo

$$(2 \qquad \frac{ML^2}{MI^2} = K, \quad \text{ciò che dà} \quad ML = MI\sqrt{K}:$$

dal che si vede che qualunque sia la forza acceleratrice $K.s$, e qualunque sia la distanza $AI = MI$ del punto da dove parte il corpo m dalla quiete al luogo dove la forza acceleratrice è nulla, è sempre possibile di assegnare al pnnto M sulla circonferenza che ha per raggio IA, una velocità uniforme ML tale che la projezione di M sopra IA sia giusto il luogo dove trovasi il corpo m, obbedendo alla detta forza acceleratrice Ks

Il punto M impiegando un tempo

$$t = \frac{\pi}{2} \frac{IA}{ML} = \frac{\pi}{2} \frac{IM}{ML},$$

a percorrere il quarto della circonferenza, anche il corpo m impiegherà lo stesso tempo, o sia sostituendo al rapporto $\frac{ML}{MI}$ il valore dato superiormente dalla (2, impiegherà un tempo

$$(3 \qquad t = \frac{\pi}{2\sqrt{K}}.$$

Questo tempo essendo indipendente dalla distanza AI, da cui parte il corpo, al centro I dove la forza acceleratrice è nulla, ci prova che tutte le volte che la forza acceleratrice segue la legge data dall' equazione (1) da qualunque punto più o meno lontano venga a muoversi il corpo m sempre esso cadrà in questo centro nel medesimo tempo, ciò che costituisce l' isocronismo.

Arrivato il corpo al punto I avrà secondo la formola (2) la velocità $FM = ML$, e con questa velocità passerà dalla parte opposta di I, e se la forza seguirà da questa parte la stessa legge di accrescimento essa anderà togliendogli, ma in ordine inverso, gli stessi gradi di velocità che gli aveva comunicati nella prima escursione, ed il corpo in un tempo eguale giungerà in A' ad egual distanza da I ove la sua velocità si troverà estinta. Attratto di nuovo dalla stessa forza farà poscia una seconda vibrazione per addietro simile alla prima, poi una terza, ed anderà così facendo un numero indefinito di vibrazioni tutte della durata

$$(4) \qquad T = \pi \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

La legge di variabilità della forza acceleratrice ora esaminata, che ci fornisce l' isocronismo, è assai importante, e di un' applicazione frequente nei moti oscillatorii o vibratorii.

Nota III.

Del pendolo cicloidale.

1. Per una conseguenza della legge di variabilità della forza acceleratrice, esposta nella precedente nota, succede che i pendoli, che vibrano per archi cicloidali hanno le loro oscillazioni isocrone, qualunque sia la grandezza dell' arco che percorrono, ciò che nei pendoli per archi circolari non si verifica se gli archi descritti non sono di una minima grandezza.

Se s' immagina un cerchio FP (fig. 87), detto cerchio *generatore*, che ruoti lungo una retta BD, la curva $TPCY$ che, durante un' intera rivoluzione, descrive il punto P della circonferenza che al principio del moto trovavasi tangente in T sulla retta *direttrice* BD, è stata chiamata da Galileo *Cicloide*. Questa curva sarebbe quella che descrive un chiodo di una ruota di un carro che si muova in linea retta su d' un piano.

2. La cicloide gode di proprietà notabilissime di cui noi esporremo ora quelle poche di cui dobbiamo far uso.

Wren ha dimostrato che un arco qualunque PC della cicloide contato da un punto P sino al vertice C è sempre doppio della lunghezza della corda PO compresa nel cerchio generatore fra il punto P e l'estremità superiore O del diametro verticale.

La lunghezza della semicicloide $T C$ è quindi eguale a due volte il diametro del circolo generatore, o a quattro volte il raggio.

Huyghens ha provato il primo che, se si suppongono due mezze cicloidi eguali colle loro convessità rivolte per abbasso, e che si toccano nel punto N sulla direttrice $T T'$ (fig. 88), e se dal punto comune N si sospende un filo della lunghezza di una semicicloide, il quale all'altro estremo sostenga un punto P, e si avvolga ad una delle due semicicloidi abbandonando questo peso a se stesso anderà oscillando svolgendo il filo sempre tangenzialmente alla semicicloide, ed analizzandolo all'altra, e la curva $B' A B''$ che descriverà, sarà un'altra cicloide *sviluppante* della stessa grandezza delle due semicicloidi *sviluppate*.

Possiamo farci un'idea di questa proprietà della cicloide gettando un'occhiata sulla figura 89. $A m B$ rappresenta in essa il circolo generatore nel mezzo della cicloide, ed $A' m' B'$, $A'' m'' B''$ due sue posizioni successive. Siccome per un'istante si può considerare, che il cerchio generatore ruoti intorno a B' o B'', l'arco che descrive il punto m', od m'', nello stesso istante sarà perpendicolare alle corde $B' m'$, o $B'' m''$, e perciò le tangenti nei punti m' ed m'' della cicloide saranno nelle direzioni delle corde supplementarie $m' A'$, $m'' A''$ (1).

Se le due posizioni $B' m' A'$, $B'' m'' A''$ del circolo generatore si concepiscono così vicine che l'arco $m' m''$ possa considerarsi come rettilineo, si vede che nel triangolo $m' o' m''$, in cui si ha $o' m' = o' m'' = B' B''$, la perpendicolare $o p$ dividerà per metà l'arco $m' m''$, e che perciò si avrà $o' q' = o q = \frac{1}{2} m' m''$. Mentre dunque (rotando il cerchio generatore da A verso E) l'arco cicloidale $A m'$ cresce di una quantità $m' m''$, la corda corrispondente $A m$ del cerchio generatore cresce di $o q$, o della metà di $m' m''$. Questa ragione fra i due elementi d'accrescimento conservandosi costante durante l'intera descrizione di un arco qualunque della cicloide, ne segue che l'intero arco generato $A m'$ sarà pure doppio della corda corrispondente del cerchio generatore.

Consideriamo ora nelle due semicicloidi $B' N$, $B' A$ fig. 88, eguali ed inversamente poste, due punti O, P rispettivamente corrispondenti a due archi eguali $B' m'$, $B m$ dei loro circoli generatori, si avrà pel modo con cui le cicloidi sono generate

$$\text{arc. } B' m' = B' i = m' O \quad ; \quad \text{arc. } B m = B i = m P ;$$

(1) Descartes fece osservare, che se in luogo di un cerchio si impiega un poligono generatore, la curva che verrebbe ad essere descritta dal punto P sarebbe composta di tanti archi di cerchi aventi per centro gli angoli del poligono. Questa proprietà è indipendente dal numero degli angoli o dei lati del poligono, numero che può essere tanto grande quanto ci piace, dunque anche quando il poligono si cangia in un cerchio le corde $B' m'$, $B'' m''$ descriveranno nell'istante degli archi perpendicolari a loro stesse ed aventi rispettivamente per centri B', B''.

ma condotta dal punto O la tangente alla curva, questa, per le proprietà esposte, deve essere parallela ad $m'B'$; dunque la tangente prolungata passerà pel punto P della seconda cicloide, e come $PO = 2Bm$, sarà PO eguale all'arco OB' della prima cicloide, e perciò il punto pesante P sviluppando il filo dalla semicicloide superiore si troverà continuamente situato sulla cicloide inferiore.

3. Premesso questo diviene facile il calcolare il tempo d'una oscillazione per una cicloide. Se si considera la forza acceleratrice della gravità, rappresentata nella figura 88 da PG, come la risultante di due forze acceleratrici PR, PT, una diretta secondo il filo e perpendicolare alla curva, e l'altra diretta secondo la tangente; la prima unitamente alla forza centrifuga saranno distrutte dalla tensione del filo, ed il punto P si muoverà come se fosse animato dalla sola componente PT. Ma i triangoli rettangoli PGT, ABm essendo simili, perchè Am è parallela alla tangente PT, si ha

$$AB : Am :: PG : PT$$

ciò che dà

$$PT = PG \frac{Am}{AB}.$$

Perciò dinotando con g la gravità PG, con $2R$ il diametro del circolo generatore AB, con s l'arco AP, ed osservando che nella cicloide $Am = \frac{1}{2}s$, sarà

$$PT = \frac{g}{4R} \cdot s$$

La forza acceleratrice PT che anima il pendolo essendo dunque proporzionale allo spazio s da percorrersi per arrivare al punto A, dove essa è nulla, per la proprietà dell'isocronismo esposta nella nota precedente, il pendolo farà le sue oscillazioni della durata

$$t = \pi \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Paragonando questo tempo con quello delle oscillazioni per archi minimi circolari dato dall'equazione (3) della nota I, si vede che essi sono eguali, quando la lunghezza del pendolo circolare è eguale a due volte il diametro del circolo generatore del pendolo cicloidale, o sia quando le lunghezze dei fili siano eguali nell'uno e nell'altro pendolo. Negli archi circolari minimi il pendolo si muove lentamente durante l'intera semioscillazione; nei grandi archi cicloidali esso s'accelera molto nel principio del suo movimento, e diviene atto a percorrere nello stesso tempo un più grand'arco.

Nota IV.

Dimostrazione delle due formole date nel testo, e segnate (3).

1. Per dimostrare le due formole (3) date nel testo si supponga.

1.° Che nell' equazione (1) la lunghezza l_0 del pendolo sia ritenuta invariabile e che T sia sempre la durata del giorno solare medio tanto quando si applica la detta equazione ad una stazione sotto l' equatore, ove la gravità è rappresentata da g_0, quanto ad una stazione corrispondente ad una latitudine λ, dove la gravità sia dinotata da g. Si avrà nei due casi

$$\frac{T}{86400} = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}} \quad ; \quad \frac{T}{v} = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

dalle quali col confronto si deduce

$$g = g_0 \frac{v^2}{(86400)^2};$$

e sostituendo per v il valore delle formole (2) trovato coll' esperienza

$$g = g_0 (1 + 0{,}005144889 \sin^2 \lambda).$$

2.° Se si suppone invece l variabile ma che la durata delle oscillazioni sia la medesima nelle due dette stazioni ed eguale ad un secondo, o a $\frac{T}{86400}$, si avrà dall' applicazione della stessa equazione (1) ai due casi

$$\frac{T}{86400} = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}} \quad ; \quad \frac{T}{86400} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dunque confrontando i due secondi membri

$$\frac{l_0}{g_0} = \frac{l}{g}$$

o vero ponendo per g il valore precedente

$$l = l_0 (1 + 0{,}005144889 \sin^2 \lambda).$$

Nota V.

Sulla variazione della gravità prodotta dalla forza centrifuga.

1. Abbiamo visto nella Nota III alla Lezione II che in un cerchio la forza centrifuga, divisa per la massa, è espressa da

$$c = \frac{v^2}{r}$$

v essendo la velocità di rotazione del corpo, ed r il raggio del cerchio descritto.

Per applicare questa formola al calcolo della forza centrifuga della terra, si può osservare che un corpo sotto l'equatore descrivendo in un giorno siderale T, espresso in secondi di tempo medio, l'intera circonferenza dell'equatore espressa da $2\pi r$, la sua velocità, per un secondo di tempo medio, sarà data da

$$(1) \qquad v = \frac{2\pi r}{T};$$

così che sostituendo questo valore nella formola precedente si avrà

$$(2) \qquad c = \frac{2\pi^2 r}{T^2}.$$

Il tempo T della rivoluzione della terra sul proprio asse è per le osservazioni astronomiche di 86164″,09 secondi di tempo medio, e colle misure geodetiche si è trovato che il raggio dell'equatore terrestre è 6378481 metri. Quindi osservando che la ragione della semicirconferenza al raggio è espressa dal numero $3{,}141593 = \pi$, sostituendo questi valori nella formola (1) si troverà primieramente

$$v = 465{,}126$$

cioè che un corpo sotto l'equatore percorre in virtù della rotazione diurna in un secondo di tempo medio 465 metri ed $\frac{1}{8}$ circa.

Poi colla stessa sostituzione nella formola (2) si ricaverà

$$c = 0{,}0339175$$

cioè la forza centrifuga se fosse sola allontanerebbe dal centro della terra o farebbe ascendere nella direzione verticale in un secondo di tempo medio un corpo per circa 34 millimetri, e perciò diminuirà la gravità di questa piccola quantità.

2. Volendo calcolare la forza centrifuga per un parallelo qualunque corrispondente alla latitudine λ, si può trascurare la piccola ellitticità della terra, e prendere per il raggio del parallelo $r \cos \lambda$; la velocità v sarebbe allora espresa da

$$v = \frac{2\pi r \cos \lambda}{T}$$

e la forza centrifuga c da

$$c = \frac{2\pi^2 . r \cos \lambda}{T^2}.$$

Non tutta questa forza centrifuga s'oppone all'azione della gravità; la sola parte nella direzione del raggio terrestre diminuisce il peso. Rappresentando nella figura 90 con Mc perpendicolare all'asse di rotazione diurna PP' la forza centrifuga totale, e considerandola come la risultante di due forze componenti ortogonali fra loro, la componente nella direzione del raggio terrestre, sarà data, secondo i principii esposti all'art. 4 della Lezione II, dal cateto $M\gamma$ il cui valore si ottiene moltiplicando l'ipotenusa Mc pel coseno della latitudine λ. (Vedi la

Trig. di Legendre n.° XLIV). Moltiplicando dunque l' espressione precedente della forza centrifuga per cos λ, si avrà la diminuzione d, della gravità data da

$$d = \frac{2\,\pi^2\,r\,\cos^2\lambda}{T^2}\,.$$

Ma abbiamo visto che $\frac{2\,\pi\,r}{T^2} = 0{,}0399175$, dunque sarà

$$d = 0{,}0399715\,\cos^2\lambda = 0{,}0399715 - 0{,}0399715\,\sin^2\lambda.$$

Questa diminuzione va dunque divenendo più piccola scostandosi dall' equatore, o al crescere della latitudine λ, e quindi la porzione di gravità 0,0399715 che è distrutta all' equatore cesserà d' esserlo sempre più andando verso i poli, proporzionalmente a $0{,}0399715\,\sin^2\lambda$.

Nota VI.

Sul calcolo della densità della terra per mezzo degli esperimenti fatti colla bilancia di torsione.

Per dare un' idea del modo di dedurre il termine principale di qualcuna delle formole, su cui si fonda il calcolo degli esperimenti di Cavendish, conviene cominciare dal cercare l' espressione della forza, con cui uno dei grandi globi di piombo attrae la rispettiva palla all' estremità dell' asta della bilancia. Quest' espressione si semplifica assai per la circostanza che l' arco pel quale oscilla la palla P (fig. 91) è assai corto, talchè si può considerare come una linea retta, e si possono trascurare i termini moltiplicati per le potenze delle lunghezze dello stesso arco superiore alla prima.

Dalla palla P situata sull' estremità della linea di riposo assoluto immaginiamo condotta una retta al centro G del grosso globo di piombo. La forza acceleratrice che produce l' attrazione del globo sulla palla P, è proporzionale (Lez. VI, art. 3) alla massa m dello stesso globo G ed in ragione inversa del quadrato della distanza $P\,G$, e potrà essere espressa da $\frac{m}{\overline{G\,P}^2}$. Supponendo il globo prossimamente situato, come lo era di fatti, nella direzione del prolungamento dell' arco $P\,a\,E$ descritto dalla palla, considerato come una linea retta, questa forza sarà tutta impiegata a muovere il pendolo.

In un altro punto a dell' oscillazione distante da P di un arco $C\,P\,.\,w$, $C\,P$ essendo la semilunghezza dell' asta ed w l' angolo descritto, la forza sarà per la stessa ragione espressa da $\frac{m}{(G\,P - w\,.\,C\,P)^2}$, e quindi, sviluppando la potenza -2, col binomio di Newton, e trascurando i termini contenenti le potenze superiori di w, sarà data da

$$\frac{m}{\overline{GP}^2} + \frac{2m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{CP}{GP} \cdot w.$$

A questa forza si opporrà la forza di torsione del filo, che è obbligato ad attortigliarsi. Secondo la legge esperimentale di Coulomb la forza di torsione cresce proporzionalmente all'angolo w di cui il filo vien torto, e potrà essere espressa da $2\tau w$. La metà di questa forza agirà sulla palla di cui calcoliamo il movimento, e che solo ci basterà di considerare, perchè i movimenti delle due palle essendo simmetrici non si altereranno reciprocamente. Dunque la forza residua che anima il pendolo sarà

$$(1) \qquad \frac{m}{\overline{GP}^2} + \frac{2m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{CP}{GP} w - \tau w$$

e si vede che se τ è maggiore di $\frac{2m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{CP}{GP}$ col crescere dell'angolo w questa espressione può diventare negativa e la forza far retrocedere il pendolo, ciò che in fatti successe negli esperimenti di Cavendish per degli archi ancor piccoli.

Nel punto E della *linea d'equilibrio* questa forza deve essere nulla, se dunque si chiama σ l'angolo PCE, che è quello dato dall'osservazione, compreso fra la linea di riposo assoluto e la linea d'equilibrio che passa pel mezzo dell'arco dell'oscillazione, si dovrà avere

$$(2) \qquad \frac{m}{\overline{GP}^2} + \left(\frac{2m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{CP}{GP} - \tau\right) \sigma = 0;$$

da cui si ricava

$$(3) \qquad \tau - \frac{2m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{CP}{GP} = \frac{m}{\overline{GP}^2} \cdot \frac{1}{\sigma}.$$

Il secondo membro, essendo composto di quantità date dall'esperimento, potrà calcolarsi. Indicando, per brevità, GP con a e CP con λ, e ponendo

$$\frac{m}{a^2} \cdot \frac{1}{\lambda\sigma} = K \qquad \lambda w = \lambda\sigma - s,$$

talche s sia la distanza del punto a, dalla linea d'equilibrio,
la formola (1), con queste denominazioni ed in conseguenza dalle equazioni (2) e (3), diverrà

$$(4) \qquad Ks.$$

Si vede dunque che la forza acceleratrice, che fa oscillare la palla nell'esperimento di Cavendish, è nel caso dell'isocronismo contemplato nella Nota II, e che perciò il tempo delle oscillazioni, sostituendo nell'equazione (4) della stessa nota per K il valor precedente, sarà

$$t = \pi a \sqrt{\frac{\lambda\sigma}{m}}.$$

Dividendo rispettivamente un membro e l'altro di questa equazione per

quello dell' equazione (3) della Nota I, e supponendo che l sia la lunghezza del pendolo che batte il secondo, così che il valore di t nella detta equazione (3) sia l' unità, si avrà

$$t = \frac{a\sqrt{\frac{l\,\sigma}{m}}}{\sqrt{\frac{l}{g}}};$$

nella quale il tempo t, che è dato dall' esperimento, dovrà essere espresso in secondi. Da questa formola si ricava

$$g = m\,\frac{l\,.\,t^2}{\lambda\,\sigma}\,.\,\frac{1}{a^2}.$$

Ma chiamando M la massa della terra ed r il raggio terrestre analogamente alle espressioni adottate sopra si ha $g = \frac{M}{r^2}$ dunque sarà

$$M = m\,.\,\frac{l\,t^2}{\lambda\,\sigma}\,.\,\frac{r^2}{a^2}.$$

Impiegando, nel valutare la massa m, per unità di volume il metro cubico e per unità di densità quella dell' acqua, e dividendo il valore della massa M dato dalla formola precedente composta di quantità tutte conosciute pel volume della terra, che in metri cubici è espresso dal numero 1083 seguito da diciotto zeri, si avrà la sua densità media.

Non dobbiamo obliare che questo calcolo non è dato che per far concepire distintamente la possibilità di dedurre dagli esperimenti fatti colla bilancia di torsione la massa e la densità della terra. Le memorie citate nel testo faranno conoscere le correzioni da farsi per causa della resistenza dell' aria, i momenti d' inerzia e le attrazioni delle diverse parti dell' apparecchio, i modi di fare le esperienze, un po' più complicati, ma più precisi di quello che abbiamo indicato come il più semplice.

NOTE ALLA LEZIONE V.

Nota I.

Dell' area dell' ellisse, della sua tangente e del Problema di Keplero.

1. La misura dell' area dell' ellisse si può ottenere facilmente col metodo degli indivisibili del Cavalieri, dimostrando prima che l' ordinata $P\,p$ (fig. 92), abbassata perpendicolarmente da un punto qualunque P dell' ellisse sul grand' asse, è all' ordinata corrispondente del cerchio, descritto col diametro eguale al grand' asse medesimo, come il semiasse minore $C\,B = b = a\sqrt{1 - e^2}$ è al semiasse maggiore $C\,A = a$ dell' ellisse.

Per provare questa proposizione dal punto P come centro, e con un raggio eguale al raggio vettore $S\,P$ descrivasi un cerchio. Per una nota proprietà del circolo (Legendre Geom. Lib. III, Prop. XXIX) si avrà

$$S'\,H \,.\, S'\,I = S\,S' \,.\, S'\,E;$$

H, I, E essendo rispettivamente i punti in cui il cerchio descritto taglia il grand' asse, ed il raggio vettore $S'\,P$ prolungato.

Si riconoscerà facilmente che secondo l' esposto modo di costruzione dell' ellisse, e secondo le denominazioni adottate, si ha

$$S'\,H = 2\,a \quad ; \quad S\,S' = 2\,a\,e$$
$$S'\,I = 2\,a - 2\,\mathfrak{S}p \quad ; \quad S'\,E = 2\,a\,e + 2\,S\,p.$$

Se si fanno le sostituzioni di questi valori nell' equazione precedente, e si pone per brevità

$$S\,P = r \quad ; \quad \mathfrak{S}p = x;$$

dopo alcune facili riduzioni si avrà

$$(1) \qquad r + e\,x = a\,(1 - e^2)$$

Rappresentiamo con x' l' ascissa $C\,p$, così che sia

$$(2) \qquad x = x' - a\,e;$$

eliminando x l' equazione precedente diverrà

$$(3) \qquad r = a - e\,x'.$$

Ora nel triangolo rettangolo $S\,p\,P$ si ha

$$P\overline{p}^2 = S\overline{P}^2 - S\overline{p}^2.$$

Chiamando quindi y l'ordinata $P\,p$, sostituendo i valori precedenti, e facendo le riduzioni si otterrà

$$(4) \qquad y^2 = (1 - e^2)\,(a^2 - x^2).$$

Ma nel cerchio si ha

$$P'\overline{p}^2 = \overline{C\,P}^2 - \overline{C\,p}^2$$

o sia, indicando con y' l'ordinata $P'\,p$

$$y'^2 = a^2 - x'^2.$$

Dunque, estraendo le radici dalle due equazioni, e ponendo in proporzione i valori di y ed y', si avrà

$$(5) \qquad y : y' :: \sqrt{1 - e^2} : 1 :: b : a,$$

che è ciò che doveva dimostrarsi.

Posta questa proprietà si rileva immediatamente in qual proporzione stia l'area dell'ellisse a quella del cerchio descritto sul grand'asse. Infatti potendosi suddividere l'una e l'altra di queste aree con tante ordinate quante se ne possono elevare sul grand'asse e stando sempre le ordinate del cerchio a quelle corrispondenti dell'ellisse come il semiasse maggiore al semiasse minore, ne segue che anche la somma di tutte le ordinate del cerchio, considerate come tanti rettangoli di una larghezza minima, e formanti l'area del cerchio, starà alla somma di tutte le ordinate formanti l'area dell'ellisse, come sta il semiasse maggiore al semiasse minore.

Dunque chiamando K l'area del cerchio, ed A quella dell'ellisse si avrà

$$K : A :: a : b :: 1 : \sqrt{1 - e^2}$$

o sia

$$A = K\sqrt{1 - e^2}.$$

Ma l'area K del cerchio è espressa da $\pi\,a^2$ (Legendre Geom. Lib. IV. Prop. XII), π dinotando la ragione della semicirconferenza al raggio, dunque sostituendo sarà

$$(6) \qquad A = \pi\,a^2\sqrt{1 - e^2}$$

come si è asserito nel testo.

2. La proposizione e le equazioni trovate ci porgono l'occasione d'aggiungere un cenno sul problema di Keplero. Se si mette nell'equazione dell'articolo 4, (Lez. V) per T il suo valore in Θ dato dalla terza legge di Keplero, e per A l'espressione ora trovata si ha

$$\text{sett. } A\,S\,P = \frac{\pi\,b}{a^{\frac{1}{2}}\,\Theta}\,t.$$

Ma analogamente alla dimostrazione or ora data si ha pure

segm. ellitt. $A\,P\,p = \frac{b}{a}$ segm. circ. $A\,P'\,p$; e tr. $S\,P\,p = \frac{b}{a}$ tr. $S\,P'\,p$

dunque facendo la somma sarà

$$\text{sett. } A\,S\,P = \frac{b}{a} \text{ sett. } A\,S\,P';$$

per cui l'equazione precedente darà

$$(7) \qquad \text{sett. } A\,S\,P' = \pi \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\Theta}\, t.$$

Ora

$$\text{sett. } A\,S\,P' = \text{sett. circ. } A\,C\,P' - \text{triang. } S\,C\,P'$$

e posto

$$\theta = \text{ang. } A\,C\,P,$$

l'angolo θ essendo ciò che si chiama dagli astronomi *anomalia eccentrica*, si ha

$$\text{sett. circ. } A\,C\,P' = \tfrac{1}{2}\, a^2\,\theta, \qquad \text{triang. } S\,C\,P' = \tfrac{1}{2}\, a^2\, e \sin\theta:$$

l'equazione (7) darà quindi

$$(8) \qquad \theta - e \sin\theta = \frac{\pi\, a^{-\frac{3}{2}}}{\Theta}.\, t.$$

Questa è la nota equazione, da cui dipende la soluzione del problema di Keplero. Il secondo membro non che l'eccentricità e essendo conosciuti, si tratta di determinare il valore di θ. Trovato θ è evidente che sarà

$$P'\,p = a \sin\theta \qquad , \qquad C\,p = a \cos\theta$$

e quindi le formole (2), (3), e (5) daranno

$$P\,p = b \sin\theta\,; \qquad S\,p = a\,(\cos\theta - e) \qquad S\,P = a\,(1 - e\cos\theta)$$

di modo che la posizione del pianeta nella sua orbita si troverà assegnata.

L'equazione (8), che contiene per incognita l'arco ed il suo seno, è trascendente. Molti metodi sono stati immaginati per la sua soluzione. Nel sistema planetario, in cui l'eccentricità e è sempre piccola, il metodo che si offre direttamente è il seguente:

Posto

$$\tau = \frac{\pi\, a^{-\frac{3}{2}}}{\Theta}\, t$$

così che τ sia ciò che in astronomia si chiama l'*anomalia media*, si calcolino successivamente

$$\theta' = \tau + e \sin\tau$$
$$\theta'' = \tau + e \sin\theta'$$
$$\theta''' = \tau + e \sin\theta''$$
$$\text{ec. ec.}$$

ripetendo il calcolo sino a che si arrivi a due valori successivi di θ eguali entro i limiti d'approssimazione, a cui vogliamo arrestarci; questo valore comune sarà evidentemente il valore di θ che risolve l'equazione (8).

3. La costruzione che abbiamo fatto, (fig. 93), ci offre anche il mezzo di dimostrare un' altra proprietà dell' ellisse, di cui ci occorrerà far uso in appresso. Questa proprietà è che la retta $T\,T'$ che divide per metà l' angolo $S\,P\,H$ è tangente nel punto P all' ellisse, e che perciò la $P\,\Pi$ perpendicolare a $T\,T'$, è nello stesso tempo perpendicolare all' ellisse e divide per metà l' angolo $S'\,P\,S$ fatto dai due raggi vettori. Infatti se la retta $T\,T'$ toccante l' ellisse nel punto P non fosse tutta fuori della curva, ma potesse avere un altro punto q comune con essa, condotti a questo punto i due raggi vettori $S\,q$, $S'\,q$, sarebbe $S\,q = q\,H$, pel motivo che la $T\,T'$ essendo perpendicolare alla corda $S\,H$ la divide per metà, ed i due triangoli dSq, dHq riescono uguali. Dunque se q è nell' ellisse, essendo per la proprietà di questa curva $S'\,q + q\,S = S'\,H$, si avrebbe anche la linea spezzata $S'\,q + q\,H$ eguale alla retta $S'\,H$ che termina agli stessi estremi, il che è assurdo.

La $T\,T'$ dividendo per metà l' angolo $S\,P\,H$ la retta $P\,\Pi$ perpendicolare a $T\,T'$ dividerà pure per metà l' angolo di supplemento $S\,P\,S'$.

Nota II.

Tavola sinottica del sistema solare.

Avendo dato nel testo un' idea distinta degli elementi di un' orbtia, seguendo in parte una nitida esposizione fatta dal Sig. Arago (1), non sarà discaro che aggiunga il seguente quadro sinottico delle orbite dei corpi del sistema solare, quale fu compilato nell' anno 1827 dal Sig. Francis Baily.

Orbite dei Pianeti.

Nomi dei pianeti	Semiassi maggiori	Rivoluzioni siderali in gior. sol. medii	Eccentricità in parti del semiasse maggiore	Variazione secolare	Longitudine media dell' epoca
Mercurio	0,3870981	87,96926	0,20551494	+0,000003866	166. 00′. 48″,6
Venere .	0,7233316	224,70079	0,00686074	—0,000062711	11. 33. 03, 0
La Terra.	1,0000000	365,25636	0,01678357	—0,000041630	100. 39. 10. 2
Marte . .	1,5236923	686,97965	0,09330700	+0,000090176	64. 22. 55, 5
Vesta . .	2,3678700	1325,74310	0,08913000	+0,000004009	278. 30. 00, 4
Giunone.	2,6690090	1592,66080	0,25784800		200. 16. 19, 1
Cerere. .	2,7672450	1681,39310	0,07843900	—0,000005830	123. 16. 11, 9
Pallade .	2,7728860	1686,53880	0,24164800		108. 24. 57. 9
Giove . .	5,2027760	4332,58482	0,04816210	+0,000159350	112. 15. 23, 0
Saturno .	9,5387861	10759,21982	0,05615050	—0,000312402	135. 20. 06, 5
Urano . .	19,1823900	30686,82083	0,04667938		177. 48. 23, 0

(1) Annuaire de 1832.

Nomi dei pianeti	Segni dei pianeti	Longitudine del nodo	Incremento annuo	Inclinazione del piano dell' orbita	Variazione annua	Longitudine del perielio	Incremento annuo
Mercurio	☿	45.° 57′. 30,″9	+42,″3	7°. 00′. 09″,1	+0″, 18	74°. 21′. 46″,9	+ 55,9
Venere .	♀	74. 12, 9	+42, 5	3. 23. 28, 5	— 0, 04	128. 43. 53, 1	+ 47,9
La Terra.	⊕	48. 00. 03, 5	+26, 8	1. 51. 06, 2	— 0, 04	99. 30. 05, 0	+ 61,8
Marte . .	♂	103. 13. 18, 2	+15, 6	7. 08. 09, 0	— 0, 12	332. 23. 56, 6	+ 65,9
Vesta . .	⚶	171. 07. 40, 4		13. 04. 09, 7		249. 33. 24, 4	+ 94.2
Giunone .	⚵	80. 41. 24, 0	+1, 5	10. 37. 26, 2	— 0, 44	53. 33. 46, 0	+ 121,3
Cerere . .	⚳	172. 39. 26, 8		34. 34. 55, 0		147. 07. 31, 5	
Pallade. .	⚴	98. 26. 18, 9	+34, 3	1. 18. 51, 3	— 0, 23	121. 07. 04, 3	+ 57,1
Giove. . .	♃	111. 56. 57, 4	+30, 7	2. 29, 35, 7	— 0, 15	11. 08. 34, 6	+ 69,5
Saturno .	♄	72. 59. 35, 3	+14, 2	0. 46, 28, 4	+ 0, 03	89. 09. 29, 8	+ 52,5
Urano . .	♅					167. 31. 16, 1	

Gli elementi dei pianeti antichi si riferiscono al primo giorno di questo secolo, cioè al 1.° di Gennajo 1801 a mezzodì medio a Greenwich. Quei dei nuovi pianeti Vesta, Giunone, Cerere e Pallade al 1.° di Gennajo 1820: questi ultimi non sono conosciuti coll' esattezza degli altri.

I valori delle rivoluzioni siderali medie e quelli dei grand' assi si sono avuti reciprocamente per mezzo della terza legge di Keplero.

Agli elementi, che sono variabili col tempo per causa delle attrazioni che i pianeti esercitano vicendevolmente, si sono aggiunte le loro variazioni annue o secolari, con eccezione di quella di Pallade e Giunone che non sono conosciute.

Dimensioni di vari corpi del Sistema Solare.

Nome dei corpi	DIAMETRI APPARENTI			Temp. sid. delle rotazioni intorno ai loro assi	Diametri veri	Volumi	Masse	Densità
	Mass.	Med.	Min.		riferiti a quelli della Terra presi per unità			
Mercurio	12″,0	6″,9	6″,0	24ʰ. 05ᵐ. 28ˢ	0,402	0,065	0,0735	1,13
Venere .	61,2	16,9	9,6	23. 21. 07	0,985	0,956	0,8899	0,93
Marte . .	18,3	6,3	3,6	24. 39. 21	0,559	0,175	0,1334	0,76
Giove . .	eq. 47,5	38,5	32,2	9. 56. 59	11,623	1456,2	341,225	0,27
	pol. 44,0	35,5	29,8		10,678			
Saturno .	equ. 19,6	17,5	15,8	10. 18. 00	9,730	831,8	102,167	0,12
	pol. 17,6	15,8	14,3		8,783			
Urano . .		4,0			4,473	89,47	8,799	0,10
Sole . . .	52′. 35″,6	32. 02,9	31. 31,0	25ᵍ. 12,ʰ	112,088	1408,260	357604,4	0,25
Luna . .	33. 31, 1	31. 07,0	29. 21,9	27ᵍ. 7ʰ. 43ᵐ	0,275	0,0204	0,0125	0,64

I diametri di Giove sono quelli determinati dal Sig. Struve (*Mem. della R. Soc. Astr. di Londra*. Vol. III, anno 1829); quelli di Saturno sono un medio fra i volumi del Sig. Struve (Vol. III) ed i valori di Bessel (*Connaissances des temps*. an. 1838). La massa di Mercurio è data da Enke. (*London and Edimburgh. Phil. Mag.* 1842); e quella di Urano dal Sig. Lamont. (*Mem. della R. Soc. Astrom. di Londra*. Vol. XI). Gli elementi dedotti suppongono che la parallasse equatoriale del Sole

sia, secondo il Sig. Enke, di 8″,5776, e che il raggio terrestre ed il valore della gravità, non affetto della forza centrifuga, corrispondenti al parallelo in cui il quadrato del seno è eguale ad $\frac{1}{3}$, siano espressi rispettivamente da 6370997^{m}, e 9^{m},82017, analogamente ai valori che sono stati esposti nella Lezione III.

Elementi dell'orbita della Luna.

Distanza media dalla terra.	59,964350	Rivoluzione siderale. .	27^{g},32166418
Eccentricità.	0,0548442	Rivoluzione sinodica .	29^{g},53058872
Inclinazione	5°. 08′. 47″,9	Long. media dell' epoca	118°,17′. 08″,3
Longit. media del nodo.	13°. 53. 17,7	Rivol. med. sid. del nodo.	6793^{g}. 39108
Long. med. del perigeo .	266. 10. 07,5	Rivol. med. sid. del perig.	3232^{g}. 575343

La distanza è espressa in semidiametri terrestri. Le rivoluzioni in giorni solari medii. Dai due ultimi numeri si vede che il nodo, e l' apogeo hanno un movimento sensibile nello spazio, il primo diretto da mezzodi verso occidente, il secondo verso oriente.

Satelliti di Giove.

Sat.	Distanze medie	Rivoluzioni siderali	Inclinazioni delle orbite su quella di Giove	Masse, quella di Giove = 1	Le distanze sono misurate col semidiametro equatoriale del pianeta. Le eccentricità del 1.° e 2.° satellite sono insensibili, quelle del 3.° e 4.° sono variabili per causa delle loro perturbazioni mutue.
1	5,831	1^{g}. 18^{h}. 28^{m}	3°. 05′ 30″	0,000017	
2	9,279	3. 13. 14	variabile	0,000023	
3	14,801	7. 03. 43	variabile	0.00088	
4	26,031	16. 16. 32	2. 58. 48	0,00043	

Satelliti di Saturno.

Sat.	Distanze medie	Rivoluzioni siderali
1	3,062	0.g 22h. 38m
2	3,930	1. 08. 53
3	4,865	1. 21. 18
4	6,236	2. 17. 45
5	8,704	4. 12. 25
6	20,179	15. 22. 41
7	58,808	79. 07. 55

Le distanze sono espresse col semidiametro equatoriale del pianeta. Le orbite dei sei satelliti interiori coincidono ad un dipresso col piano dell' anello: l' orbita del settimo si avvicina al piano dell' eclittica. Non si è potuto ancora discernere alcuna ellitticità delle orbite degli altri sei satelliti, ma si sa che quella del sesto è sensibile.

Anello di Saturno.

Saturno presenta inoltre il singolar fenomeno d' essere circondato da un doppio anello piano, cioè da due anelli situati nello stesso piano separati fra loro da un breve intervallo. Le dimensioni di questi anelli espresse in diametri equatoriali del pianeta secondo le misure del Sig. Struve sono

Diametro del lembo esterno dell' anello più grande .	2,2226
Diametro del lembo interno	1,9615
Diametro del lembo esterno dell' anello più piccolo .	1,9161
Diametro del lembo interno	1,4823
Spessore dell' anello tutt' al più	0,001

Gli anelli non hanno propriamente uno spessore uniforme in tutto il loro contorno, ma secondo i calcoli del Sig. Bessel sono come compresi fra due piani leggermente inclinati, ciò che è anche richiesto dai principii meccanici per la sussistenza della stabilità del sistema. Il tempo della rotazione dell' anello intorno al suo asse è di 10.h 29.m 17s; e la sua situazione coincide assai prossimamente con quella dell' equatore del pianeta: e gli elementi che la fissano, rispetto al piano dell' eclittica, determinati dal Sig. Bessel sono

Lung. del nod. ascend.	166.° 54'.	var. ann. + 45'',6
Inclinazione	28. 11.	var. ann. — 0'',35

Satelliti di Urano.

Sat.	Distanze medie	Rivoluzioni siderali
1	11,802	$5^g.\ 21^h.\ 25^m$
2	15,310	8. 16. 58
3	17,851	10. 23. 04
4	20,794	13. 10. 56
5	40,944	38. 01. 48
6	81,888	107. 16. 40

Il 1.°, 3.°, e 5.° satellite non sono stati visti che da Sir W. Herschel. Mechain, Schroeter e Sir J. Herschel li hanno cercati in vano. Sir J. Herschel ha visto il 2.° ed il 4.°, ed ha confermato, con leggiere modificazioni, i periodi dati da suo padre. Il Sig. Lamont annuncia d'aver visto anche il sesto. Questi satelliti presentano la singolarità d'avere, contrariamente a tutti i corpi su descritti, un movimento retrogrado, cioè i loro movimenti projettati sull'eclittica sono diretti da oriente verso occidente, e che le loro orbite sono straordinariamente inclinate all'eclittica facendo con essa un angolo di circa 78°. 58′. Le distanze medie sono pure espresse in semidiametri del pianeta.

Comete.

Oltre ai corpi del sistema solare che abbiamo descritto, molti altri soggiacciono all'azione predominante del sole conosciuti sotto il nome di *comete*. I periodi delle loro rivoluzioni sono in generale incogniti non essendo comparse che per breve tempo ed una sola volta, ad eccezione delle tre seguenti delle quali si sono osservati più ritorni.

Comete Elementi delle orbite negli anni	di Halley 1835	di Enke 1842	di Biela 1839
Passaggio al perielio .	Nov. 15. $22^h.\ 32^m$	Apr. 12. $1^h.\ 2^m$	Lug. 23. $0^h.\ 9^m$
Semiasse maggiore ...	17,988	2,2229	3,5346
Eccentricità	0,9674	0,6109	0,7515
Longitudine del perielio	165°. 49′	157°. 30′	110°. 06′
Longitudine del nodo ascendente	55. 10	334. 39	248. 13
Inclinazione	162. 15	13. 20	13. 12

Gli elementi delle orbite delle comete sono sensibilmente variabili attese le perturbazioni dei pianeti, e per un'alterazione speciale nel loro movimento medio, che sembra indicare una resistenza proveniente da un etere sparso nell'universo, ciò che dà al loro calcolo un nuovo interesse.

NOTE ALLA LEZIONE VI.

Nota I.

Sulla determinazione della distanza della luna dalla terra per mezzo della parallasse.

Gli astronomi chiamano parallasse terrestre o diurna la differenza di luogo sulla sfera celeste, dove sarebbe projettato un astro veduto contemporaneamente dal centro e dalla superficie della terra. Così se la luna in L (fig. 94) è veduta all' orizzonte del punto M della superficie della terra, di cui una sezione sia rappresentata dal circolo $M\,m\,N$, l' angolo $M\,L\,C$, che avrebbe per misura l' arco compreso sulla sfera celeste fra i due punti ove sarebbe projettata la luna vista da M e dal centro C della terra, chiamasi parallasse orizzontale terrestre; e dinotando con ϖ questa parallasse, è facile il vedere che si ha (Legendre Trig. XLII)

$$\sin \varpi : 1 :: MC : CL,$$

da dove si deduce la distanza della luna

$$CL = \frac{MC}{\sin \varpi}.$$

L' angolo ϖ si può determinare coll' osservazione. Per fare il caso più semplice, suppongasi che il cerchio della figura rappresenti la sezione della terra fatta da un piano che passa per l' equatore, e che due osservatori posti, l' uno in M, e l' altro in m, a 90° di longitudine terrestre, o per dir meglio a $90° - \varpi$, osservino la luna, quando la sua declinazione è zero, e che paragonando la posizione di quest' astro con quella di una stella, posta pure nell' equatore, il primo veda la stella più elevata sull' orizzonte e distante dalla luna d' un angolo φ, ed il secondo d' un' angolo φ', sarà $\varphi - \varphi' = \varpi$, perchè, attesa la smisurata distanza delle stelle fisse, i due raggi visuali condotti dai due osservatori alla stella potranno considerarsi come paralleli, e la differenza degli angoli φ e φ', come l' angolo che fanno fra loro le due rette $M\,L$ e $C\,L$.

Il caso che abbiamo supposto esige troppe condizioni, onde possa mettersi in pratica frequentemente. Gli astronomi fanno quindi ricorso ad altri casi di un calcolo più complicato, ma il principio è sempre lo stesso.

Nota II.

Deducesi dalla legge delle aree di Keplero che la forza centripeta che fa circolare i pianeti nelle loro orbite risiede nel Sole.

1. La dimostrazione di questa prima deduzione è tanto semplice nell'opera stessa dei Principii di Newton, che la troviamo adattata anche per queste brevi note, ove la riportiamo quasi negli stessi termini.

Newton prese prima a dimostrare, che *se un corpo è attratto verso un centro immobile, le aree, che i raggi vettori descrivono, sono nello stesso piano e crescono proporzionalmente al tempo.*

Per provarlo, si divida il tempo in tante parti eguali, e nella prima parte di tempo descriva il corpo colla velocità preconcepita lo spazio $A\,B$ fig. 95. Nella seconda parte di tempo, se non fosse deviato, percorrerebbe un altro spazio $B\,c$ eguale ad $A\,B$, talchè condotti i raggi vettori $S\,A$, $S\,B$, $S\,c$, le aree $A\,S\,B$, $B\,S\,c$ sarebbero eguali, come formate da due triangoli che hanno le loro basi $A\,B$, $B\,c$ eguali, ed un'altezza comune. Ma giunto il corpo in B supponiamo che riceva un impulso nella direzione $B\,S$, che gli comunichi una velocità capace di fargli percorrere nella seconda parte di tempo lo spazio $B\,V$. Condotta $c\,C$ parallela ed eguale a $B\,V$ il corpo dovrà trovarsi in C (Vedi la 2.da Lezione. art. 2 estremità della diagonale del parallelogrammo $B\,V\,C\,c$, e nel piano passante per S, A, B. Congiungasi $S\,C$, il triangolo $B\,S\,C$, pel motivo che $B\,S$, $c\,C$ sono parallele, sarà eguale al triangolo $B\,S\,c$, e perciò anche al triangolo $A\,S\,B$. Con un ragionamento simile si dimostrerà, che se la forza centripeta comunica in C, D, E ec. dei nuovi impulsi nelle direzioni $C\,S$, $D\,S$, $E\,S$ ec. che facciano, che il corpo nelle parti successive di tempo descriva le rette $C\,D$, $D\,E$, $E\,F$ ec. tutte queste rette staranno nello stesso piano, ed il triangolo $C\,S\,D$ sarà eguale al triangolo $B\,S\,C$, $D\,S\,E = C\,S\,D$, ed $E\,S\,F = D\,S\,E$, e perciò tutti eguali fra loro. In tempi eguali si descriveranno dunque delle aree eguali nel medesimo piano, e componendo le somme delle aree, come $A\,S\,D$, $A\,S\,F$, esse saranno fra loro come i tempi impiegati a descriverle. Questa conclusione è indipendente dalla durata delle parti, in cui abbiamo diviso il tempo, che potranno perciò essere tanto piccole quanto si vorranno, e perciò essa sarà egualmente applicabile, quando la forza centripeta operi in un modo continuo imprimendo ad ogni istante una piccolissima velocità; nel qual caso il numero dei triangoli diventa infinito, le loro altezze infinitesime, ed il poligono $A\,B\,C\,D\,E\,F$ si cambia nella curva piana $A\,B\,F$ (fig. 96).

2. Dalla proposizione precedente si può viceversa dedurre, che *se un corpo percorre una curva piana in modo che le aree descritte intorno ad un punto fisso S siano proporzionali al tempo, la forza deve tendere verso il punto S.*

Infatti considerando di nuovo il poligono $A\,B\,C\,D\,E\,F$ ec. se le aree

sono proporzionali al tempo, bisogna che i triangoli $B\,S\,c$, $B\,S\,C$; $C\,S\,d$, $C\,S\,D$; $D\,S\,e$, $D\,S\,E$ ec. siano tutti uguali, dunque le rette $c\,C$, $d\,D$, $e\,E$ ec. devono essere rispettivamente parallele alle $S\,B$, $S\,C$, $S\,D$ ec.; dunque la forza che comunica i successivi impulsi deve essere diretta successivamente secondo $B\,S$, $C\,S$, $D\,S$ ec. e perciò continuamente diretta verso il centro S.

I pianeti descrivendo per la seconda legge di Keplero delle ellissi, che sono curve piane, nelle quali le aree descritte dai raggi vettori condotti dal sole al pianeta sono proporzionali al tempo, bisogna che la forza centrale, che ritiene i pianeti nelle loro orbite intorno al sole, parta dal centro di quest'astro.

3. Sia T il tempo in cui il raggio vettore descrive una data area A, e sia τ il tempuscolo, che esso impiega a descrivere l'area del piccolo triangolo $B\,S\,C$ (Fig. 95); quest'area sarà espressa dal prodotto della base $B\,C$ per la metà dell'altezza $S\,n$, cioè della perpendicolare abbassata da S sopra $B\,C$ prolungata, e per la proposizione precedente si dovrà avere

$$T : A :: \tau : B\,C \,.\, \frac{S\,n}{2}.$$

Chiamando c il rapporto $\frac{A}{T}$, da questa proporzione si dedurrà

$$\frac{B\,C}{\tau} \,.\, \frac{S\,n}{2} = c.$$

Quest'equazione sussiste comunque sia piccolo il tempuscolo τ, ed il latercolo $B\,C$. Ora se immaginiamo che questi due elementi vadano sempre più impiccolendosi, in modo che il poligono $A\,B\,C\,D$ si accosti indefinitamente alla curva $A\,B\,F$ (fig. 96), l'equazione precedente non cesserà mai di sussistere, ed il rapporto $\frac{B\,C}{\tau}$ finirà col rappresentare la velocità del corpo nel punto B, e la retta $C\,B$ prolungata diverrà la tangente $B\,N$; e chiamando v la velocità del corpo nel punto B, ed n la lunghezza della perpendicolare $S\,n$ abbassata dal centro S della forza sulla detta tangente, l'equazione premessa diverrà

$$v \,\frac{n}{2} = c\,;$$

da dove si deduce

$$(1) \qquad v = \frac{2\,c}{n}$$

la quale equazione ci mostra che *la velocità del corpo è in ogni punto della trajettoria in ragione inversa della perpendicolare abbassata dal punto ove risiede la forza centrale sulla tangente.*

Se si suppone che il corpo percorra un'ellisse potremo prendere per A l'intera area dell'ellisse, la quale, come abbiamo dimostrato nella

Nota I della lezione precedente, è espressa da $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, a essendo il semiasse maggiore ed e l'eccentricità espressa in parti dello stesso semiasse, allora T sarà il tempo periodico della rivoluzione del corpo, e la costante c, che esprime il rapporto di A a T, avrà per valore

$$(2) \qquad c = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T}$$

Nota III.

Dalla figura ellittica delle orbite dei pianeti si deduce che la forza attraente del sole varia in ragione inversa del quadrato della distanza del pianeta.

1. Per provare questa seconda proposizione bisogna premettere alcune nozioni geometriche sul parametro e sul raggio del circolo osculatore nell'ellisse.

I geometri hanno dato il nome di semiparametro all'ordinata elevata perpendicolarmente all'asse maggiore nel fuoco dell'ellisse e terminante alla curva, come sarebbe nella fig. 97 la ordinata $F K$. Chiamando p il semiparametro si dimostra (1), che, ritenute le altre denominazioni del testo, è

$$(3) \qquad p = a(1-e^2)$$

I geometri insegnano pure che il raggio del circolo osculatore in un punto qualunque dell'ellisse si ottiene applicando (fig. 97) al punto M sulla direzione del raggio vettore prolungato al di là del fuoco, se occorre, una lunghezza $M H$ eguale al semiparametro $F K$, poi elevando in H una perpendicolare che incontri il grand'asse in un punto L. Congiunto L con M si ha la direzione $L M$ del raggio osculatore. Elevando in seguito da L una perpendicolare al raggio osculatore sino ad incontrare la direzione del raggio vettore in N, e poi un'altra perpendicolare al raggio vettore in N sino ad incontrare la direzione del raggio osculatore in O: il punto O è il centro del circolo osculatore, ed $O M$ ne è il raggio.

Si può anche aggiungere per verificazione di questa costruzione che la direzione $M O$ del raggio osculatore deve sempre dividere per metà l'angolo $F' M F$ che fanno i due raggi vettori condotti dai due fuochi al punto M. (Vedasi il n.° 3 della nota I della Lez. prec.).

Dalla precedente costruzione è facile il dedurre che, rappresentando con w l'angolo $F M O$ fatto dal raggio osculatore col raggio vettore,

(1) Ciò risulta anche facendo $x = o$ nell'equazione (1) della nota I della Lezione precedente, ed osservando che in questo caso il raggio vettore r diventa l'ordinata del fuoco od il semiparametro.

con ρ la lunghezza del raggio del circolo osculatore, e con p il semiparametro, i tre triangoli rettangoli, che abbiamo costrutti, considerati in ordine inverso danno

$$MO\cos w = \rho\cos w = MN;\ MN\cos w = \rho\cos^2 w = ML;\ ML\cos w = \rho\cos^3 w = MH;$$

e perciò

$$\rho\cos^3 w = p; \tag{4}$$

cioè il raggio osculatore moltiplicato pel cubo del coseno dell' angolo che esso fa col raggio vettore è, per ogni punto della curva, sempre eguale al semiparametro.

2. Premesse queste nozioni geometriche sul raggio osculatore dell' ellisse veniamo al movimento dei pianeti. Nell' ultima nota della seconda Lezione abbiamo fatto conoscere, che la componente della forza centrale nella direzione del raggio osculatore è sempre eguale alla forza centrifuga del mobile, che cioè si ha l' equazione

$$\varphi\cos w = \frac{v^2}{\rho}.$$

Se in luogo della velocità v sostituiamo la sua espressione data dall' equazione (1) del numero 3 della nota precedente, e dividiamo per $\cos w$, si ottiene

$$\varphi = \frac{4c^2}{n^2\rho\cos w}.$$

In questa formola n rappresenta la perpendicolare Fn abbassata sulla tangente Mt (fig. 97) alla curva; ma il raggio osculatore essendo pure perpendicolare alla tangente gli angoli LMF, nFM, che fanno queste due perpendicolari col raggio vettore FM, saranno eguali, siccome angoli alterni-interni, il secondo di questi angoli avrà quindi per valore w, e chiamando r il raggio vettore FM, ipotenusa del triangolo FnM, si avrà

$$n = r\cos w.$$

Sostituendo questo valore di n nell' espressione precedente si otterrà

$$\varphi = \frac{4c^2}{r^2\rho\cos^3 w},$$

o sia, pel motivo che nell' ellisse si ha la relazione data dall' equazione (4),

$$\varphi = \frac{4c^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}. \tag{5}$$

Il rapporto $\frac{4c^2}{p}$ essendo costante, quest' equazione ci mostra che, se la trajettoria è un' ellisse, la forza centrale φ deve variare da un

punto all' altro della curva in ragione inversa del quadrato di r, che rappresenta la distanza del corpo M dal centro della stessa forza.

Le orbite dei pianeti essendo, per la prima legge di Keplero, delle ellissi, delle quali il sole occupa un fuoco, ne segue dunque, che per uno stesso pianeta la forza centrale non varia che in ragione inversa del quadrato della distanza, a cui esso si trova dal centro del sole, ove abbiamo visto che risiede.

Nota IV.

Si prova colla terza legge di Keplero che l' attrazione del sole è proporzionale alle masse dei pianeti indipendentemente dalla natura delle loro sostanze.

1. Onde dedurre quest' ultima proposizione, cioè, che il sole esercita un' attrazione eguale sulla sostanza di tutti i pianeti, consideriamo due pianeti di cui φ, c, p; e φ', c', p' siano rispettivamente, la forza acceleratrice, il coefficiente costante che dà la proporzione dell' area al tempo, ed il semiparametro. Se supponiamo che questi pianeti siano trasportati alla distanza uno dal sole, l' ultima formula della nota precedente applicata a questa supposizione, cioè facendo in essa $r = 1$, ci darà rispettivamente per ciascun pianeta

$$\varphi = \frac{4\,c^2}{p} \qquad \varphi' = \frac{4\,c'^2}{p'}.$$

Se in luogo di c e p mettiamo le loro espressioni, che abbiamo dato nelle due note precedenti colle formule segnate (2) e (3), si otterrà

$$\varphi = \frac{4\,\pi\,a^3}{T^2} \quad ; \quad \varphi' = \frac{4\,\pi\,a'^3}{T'^2}.$$

Ma nelle orbite planetarie, per la terza legge di Keplero, si ha la proporzione

$$a^3 : a'^3 :: T^2 : T'^2$$

la quale dà

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$$

dunque paragonando fra loro le due espressioni di φ e φ' dovrà essere

$$\varphi = \varphi'$$

cioè alla stessa distanza dal sole la forza acceleratrice o l' azione che quest' astro eserciterebbe sull' unità di massa di ciascun pianeta sarebbe eguale. Le forze motrici devono dunque essere proporzionali alle masse, e perciò il sole attrae egualmente tutte le molecole di massa eguale, qualunque siano le sostanze di cui siano composti i due pianeti.

2. Questo risultamento applicato all' equazione (5) della nota precedente ci mostra, che conosciuto il valore di φ per uno dei pianeti, per esempio la terra, la cui distanza dal sole sia presa per unità, si ha in generale

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varphi p}$$

cioè la costante, che misura la ragione, con cui crescono le aree relativamente ai tempi nelle diverse orbite, è eguale alla metà della radice del prodotto della forza φ pel semiparametro rispettivo.

Quando si prende per unità di distanza il semi-asse dell' orbita della terra, per unità di tempo il giorno solare medio, e per unità di massa quella del sole. dalle osservazioni astronomiche, si ha

$$\sqrt{\varphi} = 0{,}01720210.$$

Nota V.

Sulla legge d' attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza.

Vi è ogni ragione di credere che Newton fosse già stato condotto a congetturare, che l' attrazione del sole sui pianeti diminuisse in ragione inversa dei quadrati delle distanze, per mezzo della terza legge di Keplero, sino dall' anno 1666, assai prima che l' accordo fra lo spazio, da cui è deviata la luna dalla tangente, e quello da cui cadrebbe contemporaneamente un grave trasportato al luogo della luna, l' avessero indotto a dare alla teorica della gravitazione universale lo sviluppo, che ha preso nella grand' opera dei *Principii* ec. (1). Hook, Halley, Wrenn erano pure arrivati alla stessa conclusione fondandosi sulla teoria delle forze centrifughe e centrali di Huyghens presso a poco nel seguente modo.

Supponiamo due orbite circolari (fig. 98) concentriche in S percorse da due pianeti p, P, di tale grandezza che i loro raggi, o distanze medie a, A abbiano coi tempi periodici delle loro rivoluzioni t e T, la proporzione richiesta dalla terza legge di Keplero, cioè

$$a^3 : A^3 :: t^2 : T^2.$$

Consideriamo in queste orbite due piccoli archi pq, PQ descritti in un tempo brevissimo, tanto piccolo quanto ci piace, che prenderemo per unità. Gli spazi rq, RQ, di cui i due corpi sono deviati dalle rispettive tangenti ed avvicinati al centro S, saranno, ripetendo lo stesso discorso che abbiamo fatto nel testo relativamente alla luna (art. 2),

(1) Philosophiae naturalis Principia Mathematica. Lib. I. Sect. II. Prop. IV. Scholion.

espressi da

$$r\,q = \frac{2\,\pi\,.\,a}{t^2} \qquad R\,Q = \frac{2\,\pi\,.\,A}{T^2}.$$

Ora supponendo che g e G dinotino le forze motrici centripete, ed m ed M le masse dei due pianeti, le forze acceleratrici $\frac{g}{m}$, $\frac{G}{M}$, considerate come costanti nel breve intervallo di tempo, che abbiamo preso per unità, saranno proporzionali ai suddetti spazi (Lez. I, art. 5, 2.°), e si avrà la proporzione

$$\frac{g}{m} : \frac{G}{M} :: \frac{a}{t^2} : \frac{A}{T^2}.$$

Moltiplicando termine per termine questa proporzione colla precedente si avrà

$$\frac{g\,a^3}{m} : \frac{G\,A^3}{M} :: a : A$$

o sia

$$(1) \qquad g : G :: \frac{m}{a^2} : \frac{M}{A^2}.$$

Se dunque si volesse supporre che l'azione del sole fosse eguale per tutte le sostanze dei pianeti, cioè che la forza acceleratrice, o quella corrispondente all'unità di massa, non variasse che colle distanze, dette f ed F le forze acceleratrici rispettive che animano i due pianeti alla distanza a ed A in cui si trovano, si avrebbe $g = m\,f$, $G = M\,F$, e quindi sostituendo

$$f : F :: \frac{1}{a^2} : \frac{1}{A^2}$$

cioè il sole eserciterebbe sulle masse eguali dei due pianeti un'attrazione in ragione inversa del quadrato della loro distanza.

La supposizione che l'azione del sole sopra i pianeti sia proporzionale alle masse, indipendentemente dalla natura delle loro sostanze, doveva sembrare assai probabile per essere ammessa; ma per un procedere così rigoroso, come era quello che Newton si propose di seguire nella sua opera, era necessario escludere anche una tale supposizione. Infatti la natura della sostanza di ciascun pianeta avrebbe potuto essere involta nell'espressione della forza acceleratrice, e la legge del quadrato della distanza essere il risultamento composto della natura della sostanza, e della variazione dovuta alla distanza (1). Bisogna-

(1) Per esempio, si avrebbe potuto supporre che l'attrazione del sole decrescesse semplicemente in ragione inversa delle distanze, ma che i pianeti fossero composti di sostanze che soffrissero a parità di masse un'attrazione diversa, e che fossero appunto stati posti a delle distanze medie dal sole in ra-

va dunque provare che la forza d' attrazione del sole diminuiva nella ragione inversa del quadrato della distanza operando sopra lo stesso corpo. Questo è ciò che ha fatto Newton, deducendo questa legge di diminuzione dalla forma ellittica delle orbite dei pianeti. Assicurato cosi che l' azione della gravitazione solare era in ragione inversa del quadrato della distanza, indicando con γ e Γ le forze motrici provenienti dall' azione del sole sui due pianeti alla distanza uno, si doveva avere rispettivamente alle distanze a, ed A

$$g = \frac{\gamma}{a^2} \qquad G = \frac{\Gamma}{A^2}$$

valori che sostituiti nella proporzione (1) danno

$$\gamma : \Gamma :: m : M$$

cioè le forze motrici alle stesse distanze proporzionali alle masse, e perciò l' azione del sole eguale su eguali porzioni delle masse dei pianeti indipendentemente dalla natura delle loro sostanze.

gione inversa delle loro rispettive attrazioni. In questo caso le forze acceleratrici risulterebbero ancora in ragione inversa del quadrato della loro distanza.

NOTE ALLA LEZIONE VII.

Nota I.

Sulla dimostrazione del parallelogrammo delle forze.

La proprietà che la forza risultante rappresentata dalla diagonale eguagli in effetto le due forze componenti rappresentate dai lati di un parallelogrammo forma, come abbiamo detto nella Lezione II, il celebre principio del *parallelogrammo delle forze*. Molti autori, volendo stabilire i principii della Statica senza far intervenire le nozioni degli effetti dinamici delle forze, hanno creduto convenevole di escludere nella dimostrazione del parallelogrammo delle forze la considerazione del movimento. Giovanni Bernoulli fu il primo (1) che si propose quest' oggetto, e diede in sostituzione di quella di Newton, che noi abbiamo riferito, una nuova dimostrazione del parallelogrammo delle forze, ma si valse per essa del principio della leva. Il primo esempio di una dimostrazione diretta della composizione delle forze, assunte come semplici quantità omogenee rappresentanti delle pressioni, fu dato da Daniele Bernoulli nel Vol. I dei Commentarii di Pietroburgo. D'Alembert modificò, e semplificò in seguito questa dimostrazione nelle Memorie dell' Accademia di Parigi dell' anno 1769. Dopo apparirono altre dimostrazioni, come quelle di Riccati, di Foncenex nelle Miscellanee dell' Accademia di Torino, di Laplace nella Meccanica celeste, di Duchayale, di Poisson nel suo Trattato di Meccanica, e recentemente il Sig. Jacobi ha contato sino a diciotto dimostrazioni, che tutte però richiedono o l' impiego del calcolo differenziale, o se sono elementari sono dedotte da una lunga serie di proposizioni. Da questi sforzi dei matematici risulta dunque, come ben disse il celebre Autore della Meccanica analitica, che « volendo evitare la considerazione del movimento nello stabilire « la composizione delle forze, si cade nell' inconveniente di far perdere « a questo principio i suoi principali vantaggi, che sono l' evidenza e « la semplicità, e si riduce a non essere che il risultamento di costru- « zioni geometriche e d' analisi. » D' altronde dice lo stesso autore in altro luogo (2) « non sarebbe impossibile di provare che tutte le dimo- « strazioni che si sono date della composizione delle forze non sono che « la composizione degli spazii mascherata, e forse non sono da esclu-

(1) Jon. Bernoulli Opera omnia Tomo IV. pag. 256.
(2) Mécanique analytique. Par. I Sect. I pag. 19.

« dere che quelle che sono fondate sull' equilibrio della leva retta (1). » Il volere escludere una prenozione del movimento nel considerare l' equilibrio, non è forse il cammino più logico e naturale, perchè l' equilibrio non è che un caso particolare, che consiste nella distruzione reciproca di più movimenti impressi al corpo, e senza una cognizione della generazione del movimento non si concepirebbe che imperfettamente in che modo l' equilibrio è costituito, ed in che deve consistere la sua rottura. È appunto dal sapere che, applicando più forze intorno ad un corpo, questo si muove, e che il suo movimento non può effettuarsi che in una sola direzione, che siamo condotti all' idea semplice e diretta che l' azione di più forze deve sempre potersi ridurre a quella di una sola, e che questa è annullata nello stato di equilibrio.

Nota II.

Formole per la composizione e decomposizione delle forze.

1. La risultante AD (fig. 27) potendosi, secondo ciò che vien detto nel testo, risguardare come un lato di un triangolo ABD, di cui gli altri due lati rappresentano le componenti e le direzioni rispettive, ne segue che, fra le grandezze di queste forze e gli angoli che fanno le linee delle loro direzioni, dovranno sussistere le stesse relazioni che esistono fra i lati e gli angoli di un triangolo. Così dette

$$(1) \qquad P \ , \ Q \ , \ R$$

le due componenti e la risultante, e chiamati

$$(2) \qquad \alpha \ , \ \beta \ , \ \gamma$$

gli angoli che, rispettivamente a ciascuna di esse, fanno fra loro le direzioni delle altre due forze, si avranno dalla Trigonometria le equazioni (Legendre Trig. XLIV e XLV)

$$(3) \qquad \alpha + \beta = \gamma$$

$$(4) \qquad \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma};$$

$$(5) \qquad R^2 = P^2 + 2\,P\,Q \cos \gamma + Q^2;$$

le quali serviranno al calcolo della risultante, quando siano date le componenti e l' angolo che fanno fra loro, od in generale a trovare tre fra le sei quantità (1) e (2) quando siano date le altre tre.

2. Se le due componenti P e Q fossero ad angolo retto fra loro, si

(1) Theorie des Fonctions analytiques. troisième Partie. Chap. II pag. 324.

avrebbe

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \sin \beta = \cos \alpha \quad ; \quad \sin \gamma = 1$$

e le equazioni (4) darebbero

$$P = R \sin \alpha \qquad Q = R \cos \alpha.$$

Nota III.

Esempii d' applicazione del principio della composizione e decomposizione delle forze all' equilibrio de' sistemi di forma variabile.

1. Per dare un saggio dell' applicazione delle formole della composizione e decomposizione delle forze date nella nota precedente, supponiamo che gli estremi di tre corde (fig. 99) siano uniti in un nodo N, che due di questi estremi siano attaccati a dei punti fissi O, O' e che il terzo sia tirato da una forza data, P, che tenga tesi i due primi, e cerchiamo le relazioni che devono esistere fra la forza data e le tensioni che i due primi capi di corda esercitano sui punti fissi.

Considerando la forza data e le tensioni delle due corde, come tre forze in equilibrio intorno al punto N, la risultante delle due tensioni T e T' dovrà essere eguale alla forza P. Chiamando dunque τ e τ' gli angoli che le due corde fanno colla direzione della forza P, e sostituendo nelle equazioni (3) e (4) della nota precedente T a P, T_1 a Q, P ad R, e τ e τ' ad α e β si avrà

$$(1) \qquad \frac{T}{\sin \tau} = \frac{T'}{\sin \tau'} = \frac{P}{\sin (\tau + \tau')}.$$

Perciò si avranno le tensioni T e T' che produce la forza P, date da

$$(2) \qquad T = \frac{P \sin \tau}{\sin (\tau + \tau')} \quad ; \quad T' = \frac{P \sin \tau'}{\sin (\tau + \tau')}.$$

2. Se la corda a cui è applicata la forza P in luogo di essere attaccata con un nodo ai due capi NO, NO' non fosse che infilata con un' anello (fig. 100) sulla corda ONO', e potesse scorrere lung' essa, è chiaro, secondo la generazione dell' ellisse che abbiamo esposta all' art. 2 della Lez. V, che l' anello scorrendo descriverebbe un' ellisse, e non rimarrebbe fermo che in quella posizione, ove la direzione della forza fosse perpendicolare alla curva che descrive, perchè stando in questo punto non vi sarebbe più ragione che tendesse a scorrere da una parte o dall' altra, e la forza P verrebbe direttamente opposta e distrutta dalla resistenza della corda. Ora nella nota 1, n.° 3, della citata Lezione abbiamo visto che la normale all' ellisse divide per metà l' angolo fatto dai raggi vettori, dunque la direzione della forza P dovrà dividere per metà l' angolo fatto dalle due parti ON NO' della

corda, cioè si dovrà avere $\tau = \tau'$, e le equazioni (2) daranno (Legendre Trig. XX)

$$(3) \qquad T = T' = P \frac{\sin \tau}{\sin 2\tau} = \frac{P}{2 \cos \tau};$$

cioè le tensioni dei due capi di corda saranno eguali, e la grandezza di ciascuna starà a quella della potenza P nella ragione inversa del doppio del coseno della metà dell' angolo che le due parti della corda fanno fra loro.

3. Viceversa se una corda passasse in un anello fisso, (fig. 101), o fosse tenuta piegata e tesa in equilibrio su d' un punto fisso (fig. 102) siccome le due forze che tirano alle estremità della corda dovrebbero essere eguali e contrarie, onde la corda non scorra, si avrebbe nelle equazioni (2) $T = T$, e quindi $\tau = \tau'$, o sia la resistenza che opporrà l' anello od il punto fisso sarà diretta in modo che dividerà per metà l' angolo fatto dai due capi di corda, e verrà espressa da

$$P = 2\, T \cos \tau.$$

4. Se il punto O' invece di essere fisso fosse attaccato (fig. 103) all' estremità di un' altro capo di corda, e che al loro punto di unione fosse applicata una seconda forza P_1, e poi a questo terzo capo di corda fosse attaccato all' altra estremità un quarto capo, dove pure fosse applicata una terza forza P_2, e così di seguito sino all' ultimo capo di corda, la cui seconda estremità fosse fissa, si avrebbe un sistema che nella Statica si chiama un *poligono funicolare*. Il modo di ottenere le equazioni per tutto il poligono non differisce da quello che abbiamo impiegato quando i capi di corda non erano che due; poichè considerando a parte l'equilibrio di ciascun angolo del poligono, non abbiamo che ad applicare a ciascuno di essi le equazioni (2). Distinguendo così coi numeri 1, 2, 3, ec., posti sotto le lettere, le quantità appartenenti al secondo, e terzo ec., angolo del poligono, si avranno le equazioni

$$(4) \quad \begin{aligned}
T &= \frac{P \sin \tau}{\sin (\tau + \tau')} \quad ; \quad T' = \frac{P \sin \tau'}{\sin (\tau + \tau')} \\
T_1 &= \frac{P_1 \sin \tau_1}{\sin (\tau_1 + \tau_1')} \quad ; \quad T_1' = \frac{P_1 \sin \tau_1'}{\sin (\tau_1 + \tau_1')} \\
T_2 &= \frac{P_2 \sin \tau_2}{\sin (\tau_2 + \tau_2')} \quad ; \quad T_2' = \frac{P_2 \sin \tau_2'}{\sin (\tau_2 + \tau_2')} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
T_n &= \frac{\tau_n P_n \sin}{\sin (\tau_n + \tau_n')} \quad ; \quad T_n' = \frac{P_n \sin \tau_n'}{\sin (\tau_n + \tau_n')}.
\end{aligned}$$

Queste equazioni esprimono che T, T' ; T_1, T_1' ; $T_2, T_2' \ldots T_n, T_n'$ sono rispettivamente eguali le componenti delle forze opposte ed eguali P, P_1, P_2, P_n. Aggiungendo alle stesse equazioni le relazioni

$$(5) \qquad T' = T_1 \quad ; \quad T_1' = T_2 \ldots\ldots T'_{n-1} = T_n,$$

che dinotano che le tensioni, che traggono in parti opposte ciascuna fune del poligono, devono per l'equilibrio essere eguali, si avranno espresse tutte le condizioni dell'equilibrio.

5. Se s'immagina che le forze attive P, P_1, P_2 ec. applicate agli angoli compresi fra due corde qualunque agiscano tutti su d'un sol punto, e si considera la loro risultante, si trova che essa è sempre eguale ed opposta alla risultante delle tensioni delle due corde estreme. Infatti considerando a parte la risultante di tutte le forze attive, e quella di tutte le tensioni, queste due risultanti devono essere per l'equilibrio, od in virtù delle equazioni (4) eguali ed opposte. Ma, pel motivo che le tensioni agenti sulle corde intermedie $T' = T_1$; $T_1' = T_2 \ldots T'_{n-1} = T_n$, sono a due a due opposte e si distruggono reciprocamente, non resta di loro che la risultante delle due tensioni estreme T, T_n, dunque questa risultante eguaglia quella di tutte le forze attive.

6. Supponiamo che le forze $P, P_1, P_2 \ldots P_n$ dividano, ciascuna per metà, gli angoli del poligono a cui esse sono applicate, cioè che sia

$$\tau = \tau' \quad ; \quad \tau_1 = \tau'_1 \quad ; \quad \tau_2 = \tau_2' \quad \ldots \quad \tau_n = \tau_n' ;$$

in questo caso le tensioni T, T' ; T_1, T_1' ; T_2, T_2' ; $\ldots T_n, T_n'$ concorrenti in ciascun angolo, date dalle formole (4), formeranno, come al n.° 2, tante coppie di tensioni eguali fra loro, e come le due tensioni eguali ed opposte agenti sulle corde intermedie (equaz. 5) sono comuni, una alla coppia precedente, l'altra alla seguente, ne viene che tutte le tensioni saranno eguali; e considerando soltanto quelle dirette in un verso si avrà

$$T = T_1 = T_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad = T_n$$

cioè tutto il contorno del poligono funicolare sarà uniformemente teso.

Viceversa se le tensioni T, T_1, T_2 ec. T_n sono supposte tutte eguali le equazioni (4), (5) ci mostrano che deve essere

$$\tau = \tau' \quad ; \quad \tau_1 = \tau_1' \quad ; \quad \tau_2 = \tau_2' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau_n = \tau_n'$$

cioè che ciascuna forza deve dividere per metà l'angolo del poligono a cui è applicata.

Il valore della tensione costante di tutti i lati del poligono sarà data nell'uno e nell'altro caso, secondo le formole (4), da una qualunque delle espressioni

$$(6) \qquad T = \frac{P}{2\cos\tau} = \frac{P_1}{2\cos\tau_1} = \frac{P_2}{2\cos\tau_2} \quad \ldots\ldots = \frac{P_n}{2\cos\tau_n}.$$

Queste espressioni paragonate fra loro ci fanno vedere che le forze non possono colle loro direzioni dividere per metà gli angoli rispettivi a cui sono applicate, oppure che la tensione non può essere eguale per tutti i lati del poligono, e mantenersi l' equilibrio del sistema, a meno che le intensità delle forze attive non siano nella ragione composta dei coseni della metà degli angoli a cui sono applicate, e della grandezza della tensione costante.

7. Quando i lati del poligono fossero tutti eguali, allora facendo passare un circolo pei vertici di tre angoli consecutivi (fig. 104), ed osservando che il coseno della metà dell' angolo fatto nel vertice di mezzo è dato dal rapporto della metà del lato del poligono al raggio del circolo circoscritto (Legendre Trig. LI), ne viene che, per essere i lati del poligono tutti eguali, i coseni della metà degli angoli staranno semplicemente nella ragione inversa dei raggi dei rispettivi cerchi circoscritti. Dunque in un poligono di lati eguali se le forze dividono per metà gli angoli a cui sono applicate, oppure se le tensioni sono eguali in tutti i lati del poligono, le forze devono per l' equilibrio stare fra loro direttamente come la tensione costante, ed inversamente come i raggi dei cerchi circoscritti agli angoli corrispondenti.

8. La proposizione ora dimostrata essendo indipendente dal numero e dalla grandezza dei lati del poligono, sussisterà ancora se immaginiamo che il loro numero vada aumentando e la loro grandezza diminuendo indefinitamente, nel qual caso il poligono terminerà col convertirsi in una curva, ed i raggi dei cerchi circoscritti verranno ad essere i raggi dei cerchi osculatori (V. il n.° 2 della nota III Lez. II). Dunque se si ha una corda flessibile piegata in una curva e tenuta in equilibrio da forze applicate in ciascun suo punto, se le forze sono perpendicolari alla curva, la tensione sarà costante in tutta la lunghezza della corda, e viceversa se la tensione della corda è uniforme, le forze applicate in ciascun punto dovranno essere perpendicolari alla curva, e tanto nell' uno che nell' altro caso le forze dovranno essere direttamente come la tensione costante, ed inversamente come il raggio dei circoli osculatori dei punti a cui sono applicate.

9. Si può avere un esempio di questo equilibrio in una corda tesa sopra un arco di materia solida AB (fig. 66). La resistenza dell' arco non potendo essere che perpendicolare ad ogni suo punto, la tensione della corda in equilibrio sarà uniforme ed eguale a ciascuna delle due forze eguali e contrarie applicate in verso alle sue estremità che la tengono tesa, come viceversa la pressione che la corda eserciterà sull' arco sarà in ogni punto perpendicolare allo stesso arco, e la sua grandezza sarà proporzionale alla forza, che tende la corda, divisa pel raggio CM del circolo osculatore all' arco nel punto rispettivo M.

10. Consideriamo ora il caso particolare in cui le forze applicate agli angoli del poligono funicolare sono tutte parallele, (fig. 105) e per semplicità di concetto supponiamole verticali e rappresentate da tanti pesi.

Il modo più semplice di applicare le formole della decomposizione delle forze a questo caso particolare, si è di concepire ciascuna delle tensioni delle funi decomposte in due componenti, una orizzontale e l'altra verticale. La risultante delle componenti orizzontali delle due tensioni applicate a ciascun nodo, come pure la risultante delle componenti verticali e della forza attiva devono essere separatamente nulle per l'equilibrio del nodo, perchè se sussistessero, secondo ciò che abbiamo dimostrato (Vedi l'art. 2 della Lez. VII) queste due forze facenti un'angolo non potrebbero avere una risultante nulla. Conservando le denominazioni precedenti, e decomponendo le tensioni T e T'' nel modo suddetto, si avranno le componenti orizzontali (Nota II, n.° 2) $T \sin \tau$ e $T' \sin \tau'$, e le componenti verticali $T \cos \tau$ e $T' \cos \tau'$, e quindi per l'equilibrio del primo nodo si avranno le equazioni

$$(7) \qquad \begin{aligned} T \sin \tau - T' \sin \tau' &= 0 \\ P - T \cos \tau + T' \cos \tau' &= 0 : \end{aligned}$$

supponendo che la seconda fune faccia esteriormente al poligono un'angolo acuto colla direzione della forza.

Parimente pei nodi successivi si avranno le equazioni

$$\begin{aligned} T_1 \sin \tau_1 - T_1' \sin \tau_1' &= 0 \\ P_1 - T_1 \cos \tau_1 + T_1' \cos \tau_1' &= 0 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} T_2 \sin \tau_2 - T_2' \sin \tau_2' &= 0 \\ P_2 - T \cos \tau_2 + T_2' \cos \tau_2' &= 0 \\ &: \\ &: \\ T_n \sin \tau_n - T_n' \sin \tau_n' &= 0 \\ P_n - T \cos \tau_n + T_n' \cos \tau_n' &= 0. \end{aligned}$$

Se ora si osserva che, similmente a ciò che si è detto nel n.° 4, si ha

$$(8) \qquad T' = T_1 \qquad T_1' = T_2 \quad \ldots\ldots \quad T'_{n-1} = T_n$$

e che la condizione delle forze parallele somministra

$$(9) \qquad \tau' = \pi - \tau_1 \qquad \tau_1' = \pi - \tau_2 \qquad \tau_{n-1} = \pi - \tau_n ;$$

si riconoscerà facilmente, che le prime equazioni di ciascun sistema danno

$$T \sin \tau = T, \sin \tau_1 = T_2 \sin \tau_2 \ldots\ldots = T_n \sin \tau_n :$$

ciò che ci mostra che le componenti orizzontali di tutti i lati del poligono sono eguali fra loro.

Quando uno dei lati del poligono fosse orizzontale (fig. 106) dinotando coll' indice o posto in basso delle lettere le sue quantità corrispondenti, si avrebbe $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$, $\sin \tau_0 = 1$, e le componenti orizzontali delle tensioni sarebbero tutte eguali alla tensione T_0 di questo lato, si avrebbe cioè in generale

$$(10) \qquad T_n \sin \tau_n = T_0.$$

Se si sommano successivamente le seconde equazioni di ciascun sistema, e si pone attenzione alle riduzioni che somministrano le relazioni segnate (8) e (9) si trova

$$T_1 \cos \tau_1 + T \cos \tau = P$$
$$T_2 \cos \tau_2 + T \cos \tau = P + P_2$$
$$T_3 \cos \tau_3 + T \cos \tau = P + P_1 + P_2$$
$$;$$
$$;$$
$$T_n \cos \tau_n + T \cos \tau = P + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}$$

Da queste equazioni si vede che le somme delle componenti verticali delle tensioni delle due corde estreme, espresse dai primi membri, vanno crescendo proporzionalmente alle forze che sono applicate agli angoli intermedii.

Nel caso già supposto precedentemente che un lato sia orizzontale e pel quale sia $\cos \tau_0 = 0$, contando i nodi al partire da questo lato, e facendo la somma delle seconde equazioni segnate (7), che precedessero o seguissero questo lato (fig. 106) si avrebbe

$$(11) \qquad T_n \cos \tau_n = P + P_1 + P_2 \text{ ec. } + P_{n-1}$$

così la componente verticale della tensione di un lato qualunque equivarrebbe alla somma di tutti i pesi applicati agli angoli compresi fra il lato orizzontale ed il lato che si considera.

11. Siccome queste conclusioni sono indipendenti dal numero e dalla grandezza dei lati del poligono, che si possono supporre quali si vogliano, esse varranno anche nel caso che il poligono si converta in una curva, o sia diventi una corda sospesa nelle sue estremità, e caricata in tutti i suoi punti da pesi eguali o diversi, ovvero, di una corda pesante di grandezza e densità uniforme, o variabile. In questi casi la corda sospesa dalle sue due estremità si chiama una *catenaria* (Fig. 107) Se si indica con T_0 la tensione del punto infimo della catenaria dove la sua tangente è orizzontale, e con T la tensione in un punto qualun-

que, dove la sua tangente faccia un angolo τ colla verticale, per le proposizioni precedenti (equaz. 10 e 11) si avrà

$$T \sin \tau = T_0;$$

$$T \cos \tau = \Pi,$$

dinotando con Π il peso della porzione di corda compresa dal punto infimo della catenaria dove la tangente è orizzontale, sino al punto ove la tensione è T, e l'angolo corrispondente fatto dalla sua toccante è τ.

Se si elimina T da queste due equazioni si ha

$$\text{tang } \tau = \frac{T_0}{\Pi}$$

equazione che per mezzo del calcolo differenziale ed integrale serve a determinare la forma della catenaria.

NOTE ALLA LEZIONE IX.

Nota I.

Dell' equazione delle velocità virtuali in un sistema qualunque.

Quando si ha un sistema di punti collegati assieme, ai quali, o ad alcuni dei quali, siano applicate delle forze ed il sistema rimanga in equilibrio, si può considerare che ciascun punto sia in equilibrio per se stesso in virtù delle forze che gli sono applicate, e di quelle che prova da parte delle resistenze provenienti, sia dai legami che lo obbligano a conservare certe relazioni di posizione cogli altri punti, o sia da ostacoli esteriori al sistema. Le prime forze sono chiamate *forze attive*, perchè tendono a produrre realmente del moto, le seconde che provengono dalle resistenze sono dette *forze passive*, perchè non esistono, e non si sviluppano che in virtù delle forze attive, e solo quanto basta per mantenere quelle relazioni di posizione, che devono conservare i punti del sistema fra loro, o nello spazio.

Siavi da prima un sistema indipendente da ostacoli esteriori, e consideriamo in esso un punto, a cui siano applicate direttamente delle forze attive. Questo punto non potendo, pei suoi legami cogli altri, obbedire liberamente ai movimenti che le forze attive tendono ad imprimergli, eserciterà contro le parti contigue delle azioni, che faranno nascere delle forze passive eguali e contrarie. Tali forze passive non potrebbero sussistere se, decomposte o no, secondo che le circostanze richiedono, non ne eccitassero delle altre nelle parti seguenti, che propagandosi e distribuendosi di mano in mano nelle varie parti del sistema non arrivassero poi ai punti *estremi*, a quelli cioè a cui sono applicate delle forze attive, contro le quali le ultime componenti delle forze passive andassero ad elidersi. Dall' appoggio, che gli altri punti estremi trovano nelle forze attive, che loro sono direttamente applicate, nasceranno in ordine inverso delle altre forze passive, che produrranno una serie di reazioni eguali e contrarie a tutte le componenti delle forze passive provenienti dal primo punto, talchè tutte le parti intermedie del sistema si troveranno rispetto a queste azioni e reazioni in equilibrio, le tensioni o pressioni che esse esercitano dovendo essere reciproche, cioè ciascuna parte soffrendone quanto ne produce. Come il sistema, supposto già ridotto all' equilibrio, deve possedere la necessaria consistenza per sostenere queste pressioni o tensioni intermedie, così è che esso sussiste come se fosse rigido, le azioni e reazioni delle forze passive intermediarie non servendo che a trasmettere quelle che vanno a consumarsi sui punti estremi. Se quindi si concepiscono congiunti con

consumarsi sui punti estremi. Se quindi si concepiscono congiunti con delle linee rette i punti estremi del sistema a due a due, si vede che l'effetto delle forze attive sarà di eccitare secondo queste rette tante forze passive ed altrettante reazioni eguali ed opposte. Ciascun gruppo delle forze passive, agenti nelle estremità delle rette che si uniscono in un punto estremo, darà una risultante che neutralizzerà la rispettiva forza attiva che le ha eccitate, e rimarranno soltanto vigenti nel sistema le reazioni, eguali ed opposte alle estremità di ciascuna retta, le quali, mettendo le parti intermedie in uno stato di tensione o di pressione, si distruggeranno reciprocamente attraverso la consistenza che il sistema deve possedere nella disposizione che ha preso di equilibrio. Considerato il sistema sotto quest'aspetto è evidente che esso deve essere indifferente a ricevere un movimento geometrico (1) che si voglia imprimergli, cioè un movimento che non venga ad alterare le tensioni o pressioni esistenti; e che riceverà, almeno nel primo istante, questo movimento come se non fosse sotto l'azione d'alcuna forza, opponendo soltanto l'effetto della sua inerzia. Le forze applicate al sistema non potranno esercitare alcuna influenza per turbare nel primo istante in alcun modo il movimento geometrico ricevuto (2).

2. Questo premesso, indichiamo i punti estremi del sistema in ordine coi numeri 1, 2, 3 . . . n, e dinotiamo con P_1, P_2, P_3 . . . P_n la forza, o la risultante delle forze attive applicate a ciascuno di essi. Decomponiamo ciascuna delle forze P_n in due componenti, una nella direzione in cui viene a muoversi il punto n, imprimendo al sistema un movimento geometrico, l'altra perpendicolare a questa direzione e nel piano della forza P_n e della prima componente. Rappresentiamo ciascun pajo di queste componenti con due pesi, e perciò immaginiamo che dal punto a cui esse sono applicate partano secondo le loro rispettive direzioni due fili che andando ad avvolgersi su delle puleggie fisse poste nelle stesse direzioni ad una distanza qualunque, sostengano alle loro

(1) Vedi l'art. 2 della Lezione VIII.

(2) Nelle applicazioni dei ragionamenti surriferiti bisognerà, per essere coerenti al principio fondamentale dell'eguaglianza e reciprocità dell'azione e reazione, eliminare quei casi astratti che racchiudono un'impossibilità fisica. Così per esempio si osserverà che l'equilibrio di tre forze applicate perpendicolarmente ad una retta è fisicamente impossibile, perchè, per quanto grandi fossero le attrazioni fra le molecole componenti la retta, esse non potrebbero mai mantenersi unite sotto l'azione di forze perpendicolari alla linea lungo la quale sono situate. L'asta su cui si ha da supporre che le tre forze si facciano equilibrio deve avere una certa grossezza, coerentemente alla teoria della resistenza rispettiva dei solidi; e poichè è indifferente che una forza sia applicata in uno qualunque dei punti della sua direzione, quando sia invariabilmente connesso cogli altri, basterà supporre che una delle forze sia applicata ad un punto dell'asta che non sia nella linea retta che congiunge i due punti d'applicazione delle altre forze, che allora l'equilibrio potrà essere considerato conformemente ai principii su esposti.

estremità dei pesi equivalenti alle dette componenti. Siano Π_1, Π_2, $\Pi_3 \ldots \Pi_n$ i pesi applicati che fanno le veci delle prime componenti agenti sui rispettivi punti 1, 2, 3 . . . n.

Supponiamo ora di dare al sistema un movimento geometrico virtuale, cioè un movimento geometrico che sia nel primo istante del suo nascere, e siano π_1, π_2, $\pi_3 \ldots \pi_n$ le velocità, o se si vuole, gli spazietti che i punti 1, 2, 3 . . . n vengono a descrivere per questo movimento nello stesso istante preso per unità di tempo. I pesi Π_1, Π_2, $\Pi_3 \ldots \Pi_n$ corrispondenti alle prime componenti, essendo attaccati a dei fili che partono dai rispettivi punti nelle stesse direzioni in cui questi si muovono, verranno a percorrere degli spazi eguali a π_1, π_2, $\pi_3 \ldots \pi_n$, ma quelli corrispondenti alle seconde componenti, che operano in direzioni perpendicolari ai movimenti dei punti rispettivi, potranno nel primo istante aversi per nulli. Ora le forze applicate al sistema, e che si fanno sovr' esso equilibrio, essendo, come abbiamo osservato precedentemente, incapaci di turbare menomamente il movimento geometrico impresso, ne segue che i pesi Π_1, Π_2, $\Pi_3 \ldots \Pi_n$ devono essersi mossi in modo che il loro centro di gravità sia rimasto immobile, perchè se il loro centro di gravità fosse asceso o disceso sarebbe accaduto d' aver elevato o lasciato discendere il detto centro senza che ne fosse nata una reazione per la quale il movimento del sistema fosse stato in complesso ritardato od accelerato, il che è impossibile.

La distanza del centro di gravità da un piano orizzontale essendo, giusta la formola (A) della Lezione X, espressa da

$$\Xi = \frac{\Pi_1 x_1 + \Pi_2 x_2 + \Pi_3 x_3 \ldots . \Pi_n x_n}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \ldots . + \Pi_n}$$

bisogna, onde il valore di Ξ rimanga costante quando si pone $x_1 + \pi_1$, $x_2 + \pi_2$, $x_3 + \pi_3 \ldots x_n + \pi_n$ in luogo di x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_n$, che sia

$$\Pi_1 \pi_1 + \Pi_2 \pi_2 + \Pi_3 \pi_3 \ldots . + \Pi_n \pi_n = 0$$

Se ora si osserva che chiamando in generale α_n l' angolo che la forza P_n fa colla direzione del movimento del punto n, e p_n la projezione, sulla direzione della stessa forza, dello spazietto π_n che il detto punto percorre, si ha

(1) Quando le tensioni o pressioni fra le diverse parti del sistema si trovano così combinate che continuano a mantenersi costanti, benchè il sistema prosegua il suo movimento geometrico, la stessa equazione (I) delle velocità virtuali continua pure a sussistere per un tempo finito. Si deve al Sig. Conte Fossombroni il merito d' aver pel primo segnalato la sussistenza per un movimento finito dell' equazione del principio delle velocità virtuali in queste specie di equilibrii, che come osservò Lagrange tengono un mezzo fra gli equilibrii stabili e gli equilibrii instabili. Vedasi la nitida *Memoria sul principio delle velocità virtuali del Cav. Vittorio Fossombroni*. Firenze 1796 coi tipi di Gaetano Cambiagi.

$$\Pi_n = P_n \cos \alpha_n \qquad\qquad \pi_n \cos \alpha_n = p_n ,$$

si vedrà che l'equazione precedente colla sostituzione successiva di questi valori si riduce a

$$(\mathrm{I}) \qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 \ldots\ldots + P_n p_n = o.$$

la quale ci dice che se più forze si fanno equilibrio su di un sistema, la somma dei momenti di ciascuna forza è nulla nell'istante che si fa assumere al sistema un movimento geometrico (1).

Quest'equazione sussistendo indipendentemente dal numero dei punti e dalla natura dei legami del sistema vale per tutti i sistemi liberi siano essi rigidi, variabili di forma o fluidi, e rappresenta il principio delle velocità virtuali in tutta la sua generalità.

3. Se il sistema non è interamente libero, ma alcuni punti siano fissi o soffrano delle resistenze esteriori, si può osservare che tutti questi impedimenti si riducono a limitare in qualche modo le direzioni in cui si possono muovere i corpi, ciò che matematicamente si traduce dicendo che essi sono obbligati a rimanere nei loro movimenti su delle superficie date. Se quindi immaginiamo che i detti corpi siano impediti a escire da queste superficie da forze perpendicolari ad esse, il sistema potrà considerarsi come libero per la sostituzione di queste forze. Ora queste forze operando soltanto in direzione perpendicolare a quella secondo la quale i punti, a cui sono applicate, possono muoversi, non possono dare colla decomposizione, di cui abbiamo fatto uso nel numero precedente, alcuna componente nella direzione dei movimenti dei punti. Le prime componenti e quindi i pesi Π_n corrispondenti ad esse saranno dunque tutti nulli, e l'equazione (I) non ricevendo alcun nuovo termine per l'aggiunta delle forze dovute agli impedimenti esteriori sussisterà egualmente per un sistema che non sia interamente libero.

4. Dimostrato che l'equilibrio del sistema importa la sussistenza dell'equazione I, si può viceversa provare che, quando quest'equazione è verificata, vi è equilibrio. Infatti se il sistema prendesse un movimento potremmo sempre applicare ai vari punti 1, 2, 3, ec. n delle forze Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots Q_n$ atte a ridurre questi punti al riposo, o a produrre l'equilibrio, ed allora, per ciò che abbiamo dimostrato, dovrebbe sussistere l'equazione

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 \ldots + P_n p_n + Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 \ldots + Q_n q_n = 0.$$

Ma per ipotesi si ha

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 \ldots\ldots + P_n p_n = 0$$

dunque dovrà essere

$$Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 \ldots + Q_n q_n = 0.$$

Ora il movimento con cui il sistema comincerebbe a dislocarsi se le

forze P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ non si equilibrassero non potendo essere che geometrico, e ad un movimento geometrico virtuale potendosi sempre far succedere il contrario pure geometrico, se diamo al sistema un movimento opposto a quello che si suppone che avrebbe preso in mancanza delle forze Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots Q_n$, le velocità projettate q_1, q_2, $q_3 \ldots q_n$ saranno tutte nelle direzioni delle forze corrispondenti, e quindi i momenti $Q_1 q_1$, $Q_2 q_2$, $Q_3 q_3 \ldots Q_n q_n$ tutti positivi: dunque quest'ultima equazione non potrà essere soddisfatta a meno che non sia $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0 \ldots Q_n = 0$, ciò che ci dice che le forze da applicarsi per ottenere l'equilibrio sono nulle, e che quindi il sistema è già in equilibrio per le sole forze P_1, P_2. $P_3 \ldots P_n$.

5. L'impiego dell'equazione (I) per la determinazione dell'equilibrio e del movimento dei sistemi d'ogni genere tanto solidi che fluidi, è l'oggetto principale dell'opera esimia di Lagrange intitolata *Mécanique analytique*, la più elegante produzione d'analisi che sia stata pubblicata, e che trasforma tutta la Meccanica in questioni di puro calcolo. È in questo libro che va appreso il modo di trattare i problemi di Meccanica secondo il principio delle velocità virtuali: a noi basta d'averne dato una dimostrazione elementare e generale, e d'aver mostrato nel testo l'impiego diretto che se ne può fare per assegnare le condizioni d'equilibrio delle macchine semplici.

NOTE ALLA LEZIONE X.

Nota 1.

Del centro di gravità di alcuni corpi omogenei.

1. Due punti egualmente pesanti avendo il loro centro di gravità nel mezzo della retta che li congiunge, anche una linea retta omogenea, che può sempre concepirsi suddivisa in un numero di parti a due a due equidistanti dal mezzo, deve avere il suo centro di gravità nel mezzo.

Di qui ne segue che le linee rientranti, le superficie ed i corpi omogenei che hanno un centro, cioè un punto pel quale conducendo delle rette in direzioni qualunque, queste incontrano a distanze eguali dal centro le linee, o le superficie, che limitano le loro figure, hanno pure il loro centro di gravità nel centro di figura.

Così un parallelogrammo, un poligono regolare, un cerchio, un' ellisse, un parallelepipedo, un cilindro retto, una sfera, un'ellissoide hanno tutti il loro centro di gravità nel centro di figura.

Centro di gravità d' un arco di cerchio.

2. Un'arco di cerchio $P\,P$ (fig. 108) ha il suo centro di gravità evidentemente sulla linea che partendo dal suo punto di mezzo M va al centro C del cerchio. Per avere il punto su questa retta $C\,M$, in cui si trova il centro di gravità, consideriamo da prima un poligono regolare di un gran numero di lati, inscritto nel cerchio e quindi la porzione di questo poligono compresa nell' arco proposto. Pel centro C del cerchio e perpendicolarmente al suo piano conduciamo un piano $T\,T'$ parallelo alla corda $P\,P'$. Considerando il peso di ciascun lato $\lambda\,\lambda'$, della porzione di poligono, concentrato nel suo punto di mezzo m, ed abbassando da m la perpendicolare $m\,p$ sul piano $T\,T'$, si otterrà, secondo la formola (A) del testo, la distanza del centro di gravità dell' intera porzione del poligono dal piano prendendo la somma dei prodotti di ciascun latercolo $\lambda\,\lambda'$ per la rispettiva distanza $m\,p$ dal piano, e dividendo questa somma per la somma dei lati, o sia per l' intera lunghezza della porzione di poligono che dinoteremo con L.

Ora si può osservare che conducendo dal centro m di gravità del latercolo $\lambda\,\lambda'$ al centro C del cerchio la retta $m\,C$, che riesce perpendicolare al lato $\lambda\,\lambda'$, e da λ la retta $\lambda\,\nu$ parallela ed eguale a $\mu\,\mu'$ projezione del latercolo $\lambda\,\lambda'$ sopra $T\,T'$, i due triangoli simili $\lambda\,\nu\,\lambda'$, $m\,C\,p$ danno

$$\lambda\,\lambda' : \mu\,\mu' :: C\,m : m\,p$$

da cui si ricava

$$\lambda\,\lambda' \,.\, m\,p = \mu\,\mu' \,.\, C\,m.$$

Quest' equazione ci fa vedere, che la somma dei prodotti di ciascun latercolo $\lambda\,\lambda'$ per la rispettiva distanza $m\,p$ deve equivalere alla somma delle projezioni $\mu\,\mu'$ per la distanza $C\,m$, la quale è comune ed eguale per ciascun latercolo. Ma la somma delle projezioni $\mu\,\mu'$ non è altro che la projezione $H\,H'$ dell' intera porzione del poligono, eguale alla corda $P\,P'$ che lo sottende e che denoteremo con K, dunque la formola (A) del testo ci darà per la distanza Ξ dal piano $T\,T$ del centro di gravità della porzione del poligono

$$\Xi = C\,m\,.\,\frac{K}{L}.$$

Questa equazione vale per una porzione qualunque di un poligono regolare composta di un numero intero di lati. Suddividendo il numero dei lati del poligono quanto ci piace, sempre la stessa formola sussisterà, essa dunque dovrà sussistere indipendentemente dal numero dei lati del poligono, e quindi anche quando il poligono si converte in un cerchio, nel qual caso la perpendicolare $C\,m$ diverrà il raggio R, e la lunghezza L l' arco dato del cerchio.

Così la distanza del centro di gravità dell' arco $P\,M\,P$ dal punto C sulla retta $C\,M$ sarà data da

$$\Xi = R\,.\,\frac{K}{L}$$

o sia si avrà la proporzione

$$L\ :\ K\ ::\ R\ :\ \Xi$$

cioè l' arco sta alla corda come il raggio sta alla distanza del centro di gravità dell' arco contata dal centro del cerchio sul raggio che divide l' arco per metà.

Centro di gravità di un triangolo.

3. Il centro di gravità di un triangolo $A\,B\,C$ (fig. 109) deve trovarsi sulla retta che da un angolo A va al punto M metà del lato opposto, perchè questa retta taglia per metà tutte quelle che si possono condurre, entro il triangolo, parallelamente a $B\,C$, e perciò l' assieme di tutte le parti del triangolo. Per la stessa ragione deve trovarsi sopra la retta che dall' angolo B va al punto N metà del lato opposto $A\,C$; dunque il centro di gravità dovrà trovarsi nel punto, I, d' incontro di queste due rette. Ora unendo i punti M ed N, i due triangoli $B\,I\,A$, $M\,I\,N$ saranno simili, come aventi un angolo opposto al vertice e due lati paralleli di fronte ad esso, dunque sarà

$$A\,B\ :\ M\,N\ ::\ I\,A\ :\ I\,M.$$

Ma $M\,N$ che taglia per metà i lati $A\,B$, $A\,C$ è la metà di $A\,B$, dunque $I\,M$ sarà la metà di $I\,A$, e perciò il centro, I, di gravità di un

triangolo si troverà ai due terzi della retta, che congiunge il vertice col punto di mezzo del lato opposto, cominciando a contare dal vertice.

Centro di gravità di una piramide di base triangolare.

4. Un simile processo ci dà il modo di trovare il centro di gravità di una piramide $P\,A\,B\,C$ (fig. 110) la di cui base sia triangolare. Per lo spigolo $P\,A$ si conduca al punto M di mezzo dello spigolo opposto $B\,C$ un piano $P\,A\,M$, e presi sopra le intersezioni $A\,M$ e $P\,M$ colle faccie adiacenti due punti H e K distanti ciascuno da M rispettivamente di un terzo di $A\,M$ e di un terzo di $P\,M$ si conducano da P e da R le rette $P\,H$, $A\,K$. Queste due rette passeranno pel centro di gravità di tutti i triangoli che risultano tagliando la piramide con piani paralleli rispettivamente alle faccie $A\,B\,C$ e $P\,B\,C$, e quindi ciascuna conterrà il centro di gravità della piramide, che comprende il complesso di quei triangoli. Questo centro non potrà dunque essere che nel punto I del loro incontro, e come, congiunti i punti H e K con una retta, i triangoli simili $P\,I\,A$, $H\,I\,K$ danno

$$P\,A : H\,K :: P\,I : I\,H;$$

ed $H\,K$ che taglia ad un terzo i due lati $M\,A$, $M\,P$ è eguale ad un terzo di $P\,A$, dunque $I\,H$ sarà un terzo di $P\,I$, o sia un quarto dell' intera $P\,H$. Conducendo quindi dal vertice P di una piramide una retta al centro di gravità del triangolo, che ne è la base, il centro di gravità della piramide si troverà su questa retta ad un quarto di essa dal centro di gravità della base.

5. Dall' esposto si vede, che il centro di gravità di un triangolo, ed il centro di gravità di una piramide triangolare cadono nello stesso punto, come se il triangolo e la piramide fossero nei loro angoli caricati di pesi uguali, perchè è evidente che cercando i centri di gravità di questi pesi converrebbe procedere colle stesse costruzioni.

Siccome ogni superficie piana o composta di piani è limitata da linee rette può dividersi in triangoli, od ogni solido limitato da piani può dividersi in piramidi triangolari, potremo determinare il centro di gravità di un corpo qualunque di queste forme, considerandolo diviso in triangoli, od in piramidi triangolari, e determinando separatamente tutti i loro centri di gravità, poi, supponendo i loro pesi parziali riuniti nei centri rispettivi di gravità, cercando il centro totale di gravità per mezzo della formola (A) data nell' art. 8 della Lezione X.

Nota II.

Sulla legge della conservazione del movimento del centro di gravità.

1. La proprietà, che i pesi dei corpi sono proporzionali alle masse, fa sì che il centro di gravità di un sistema di corpi viene a cadere in un punto che può considerarsi come il *centro delle masse*, od il *centro d' inerzia*. Sotto questo punto di vista il centro di gravità gode di due notabili proprietà, che andiamo ad esporre.

Primieramente è facile di riconoscere, coll'applicazione della formola (*A*) data all' art. 8 della Lez. X, che se s' imprimano delle velocità qualunque diverse tanto in grandezza che in direzione ai varii corpi di un sistema supposti liberi ed indipendenti, il cammino che verrà a fare il centro di gravità perpendicolarmente ad un piano qualunque sarà eguale alla somma dei prodotti delle masse di ciascun corpo pel rispettivo cammino nella direzione suddetta divisa per la somma delle masse: prendendo il prodotto per positivo quando il corpo rispettivo si scosta, e per negativo quando si accosta al piano. La direzione del piano, a cui si riferiscono i movimenti, essendo arbitraria la proprietà enunciata sussisterà pei movimenti componenti in qualunque direzione sia preso il piano, e perciò anche per un piano perpendicolare al movimento risultante del centro di gravità, o sia alla direzione secondo cui questo centro realmente si muove.

Se s' imprimesse a tutti i corpi una velocità eguale e nella direzione di quella, secondo cui si muove il centro di gravità, i corpi movendosi tutti con questa velocità farebbero una somma di quantità di movimento eguale a quella che formavano colle velocità diverse che loro sono state supposte impresse nel primo caso; intendendo sempre che le quantità di movimento in verso opposto siano prese con segno contrario. Questo carattere distintivo del centro di gravità è una conseguenza diretta della proprietà espressa dall' equazione (*A*) sopra citata, che ci mostra che le quantità di movimento nelle direzioni perpendicolari al movimento del centro di gravità devono essere nulle, altrimenti le distanze di questo centro dai piani paralleli alla direzione del suo movimento, date dalla stessa formola, non rimarrebbero costanti.

2. Ora io dico che, se tutti i corpi, che hanno ricevuto una velocità impressa, venissero ad un tratto ad essere collegati in tutto od in parte, talchè i loro movimenti s' impedissero reciprocamente, o venissero ad esercitare delle attrazioni o repulsioni reciproche, od urtarsi, la quantità di movimento di tutto il sistema, e quindi la velocità del centro di gravità si conserverebbe la stessa. Infatti per la legge che l' azione e la reazione sono sempre eguali e direttamente opposte non può mai nascere, per causa dei disturbi reciproci, un' azione da un corpo senza che una reazione eguale

sia opposta da un altro corpo o compartitamente da più altri corpi. Se quindi consideriamo separatamente quella parte d' azione e reazione che viene ad esistere fra due corpi, la quale sempre si effettua nella direzione della retta che li congiunge, tosto che uno di questi corpi venga in un dato istante ad accelerarsi o ritardarsi, talchè si allontani, o si avvicini un poco più al piano perpendicolare che non avrebbe fatto colla velocità di prima: l' altro corpo viceversa si ritarderà o accelererà, e quindi si avvicinerà od allontanerà dallo stesso piano di una quantità in ragione inversa della sua massa alla massa del primo corpo. L' avvicinamento di un corpo al piano per la sua massa, e lo scostamento dell' altro per la sua massa, dando due prodotti eguali e di segno contrario, il luogo del centro di gravità (equaz. *A*) non sarà per nulla cambiato dall' alterazione di movimento che produce su questi due corpi la loro azione reciproca. Quello che si dice di questi due corpi e per un dato istante potendosi ripetere per ogni coppia di corpi ed ad ogni istante, ne segue che tutte le alterazioni di movimento, alle quali danno origine le azioni reciproche dei corpi, non hanno alcuna influenza sul movimento del centro di gravità del loro sistema, per cui il movimento di questo centro si manterrà inalterato. Così in un sistema di corpi che non siano soggetti ad altre forze che alle loro azioni reciproche, il centro di gravità rimarrà immobile nello spazio, o se i corpi hanno ricevuto originariamente delle velocità, esso progredirà con moto uniforme ed in linea retta, comunque variati vengano ad essere i movimenti dei corpi componenti il sistema. Se il sistema planetario, per esempio, non sentisse alcuna attrazione dalle stelle, il centro di gravità del sole e dei pianeti dovrebbe essere fermo, o muoversi in linea retta, e con velocità uniforme nello spazio. Questa generale proprietà del centro di gravità o di masse è stata dimostrata la prima volta da Newton (1) ed è conosciuta in Meccanica, sotto il nome di *principio della conservazione del movimento del centro di gravità.*

Nota III.

Della legge della conservazione delle aree.

1. Il centro delle masse si distingue per un' altra proprietà notabile, che si riferisce alle projezioni delle aree che i corpi del sistema descrivono. Se da tutti i corpi del sistema si abbassano su di un piano delle perpendicolari, i piedi di queste perpendicolari segnano i punti di projezione dei corpi nel piano; e preso in esso un punto fisso, dal quale si conducano delle rette o raggi vettori che sempre terminino ai punti di projezione dei corpi, mentre si muovono, le tracce che i raggi

(1) Vedasi l' Introduzione all' Opera *Philosophiae naturalis Principia mathematica.* Lez. III, coroll. III.

vettori lascerebbero dietro di loro, durante questo movimento, si chiamano le *projezioni delle aree descritte dai corpi.* Quando i corpi sono liberi, e si muovono con moto uniforme in linea retta, in virtù di velocità preconcepite, le linee su cui si trovano i loro punti successivi di projezione sono pure delle linee rette, le di cui parti eguali sono percorse in tempi eguali. Tirando in questo caso dal punto fisso a tutte queste rette, prolungate quando occorra, delle perpendicolari (fig. 111), è facile il vedere che i triangoli che verranno tracciati dai raggi vettori in tempi eguali saranno tutti equivalenti come aventi tutti un' altezza comune e delle basi eguali; così la projezione dell' area che anderà descrivendo ciascun corpo crescerà egualmente in tempi eguali, o sia crescerà proporzionalmente al tempo. La somma dei prodotti delle masse di ciascun corpo per le respettive aree di projezione formerà pure una quantità crescente proporzionalmente al tempo, prendendo anche le aree descritte in un verso come positive e quelle descritte nel verso opposto come negative, e perciò sottraendo i rispettivi prodotti. È in questo significato che noi useremo l' espressione abbreviata *somma dell' aree*, intendendo per essa una somma algebrica, cioè tutti i prodotti delle masse per le aree rispettive riuniti col loro proprio segno.

Suppongasi che gli stessi corpi passino ad un tratto a formare un sistema congiunto per legami, attrazioni, repulsioni od urti reciproci. Per ciò che abbiamo visto nella nota precedente, l' azione e reazione produrrà sempre in due corpi del sistema considerati separatamente due quantità eguali ed opposte di movimento, cioè le variazioni di velocità, che proveranno l'uno e l'altro corpo, saranno ad ogni istante inversamente proporzionali alle loro masse ed opposte nella direzione della retta che li unirebbe. La costanza di rapporto fra le velocità e la opposizione di direzione sussisteranno pure anche relativamente al piano di projezione, talchè conducendo dal punto fisso i due raggi vettori che limitano le projezioni delle aree che verrebbero descritte in versi opposti nello stesso istante dai due corpi, colle variazioni di velocità che si arrecano vicendevolmente, queste aree venendo date (fig. 112) da due triangoli con un' altezza comune, $C\,a$, e con delle basi $M\,u$, $M'\,u'$, rappresentanti le dette variazioni di velocità, saranno reciproche alle masse, e moltiplicate ciascuna per la massa del corpo rispettivo daranno due prodotti eguali, ma di segno contrario. La loro somma sarà dunque nulla ad ogni istante, quindi osservando che le aree, che descrivono i corpi con velocità composte, possono considerarsi come la somma delle aree che descriverebbero con ciascuna delle velocità componenti (1), si dedurrà che mai niente sarà

(1) L' ispezione della fig. 112 basta a convincerci della proprietà che l' area descritta in virtù della velocità risultante è eguale alla somma delle aree descritte colle velocità componenti, intendendo per somma la riunione delle due aree prese col loro segno, talchè quando una è positiva e l' altra è negativa, la loro somma venga ad essere la loro differenza. Infatti abbiamo

aggiunto alla somma delle aree che descrivevano i corpi quando erano liberi. Si avrà così questa proprietà generale, che in un sistema qualunque di corpi non soggetti che ad azioni reciproche, la somma dei prodotti delle masse di tutti i corpi per le aree rispettive projettate su di un piano e contate intorno ad un punto fisso preso ad arbitrio è nulla, o cresce in ragione costante col tempo, se i corpi hanno avuto in origine delle velocità impresse. Questa proprietà delle aree con alcune generalizzazioni, di cui faremo un cenno or ora, è stata scoperta da Daniele Bernoulli, da Eulero, e da d'Arcy circa alla stessa epoca nella metà del secolo passato, e costituisce in Meccanica *il principio*, detto, *della conservazione delle aree.*

2. Ora ciò che vale per un punto fisso sussiste anche pel centro di gravità, per la ragione che questo, come abbiamo visto nella nota precedente, o sta fermo, o si muove con una velocità uniforme in linea retta. Infatti se noi consideriamo la velocità di tutti i corpi, come composta di quella che ha il centro di gravità, e dell' altra componente che rimane, quando questi corpi fossero liberi e si muovessero con moto uniforme ed in linea retta in virtù di velocità preconcepite, i loro movimenti relativi al centro di gravità essendo ancora in linea retta ed uniformi, descriverebbero, per ciò che abbiamo dimostrato sopra, sul piano di projezione delle aree proporzionali al tempo intorno a questo centro. Ma le azioni reciproche dei corpi non sono alterate per una velocità comune impressa a tutti, ed abbiamo provato che quando il centro è fisso, queste azioni non fanno cambiare la somma dei prodotti delle masse dei corpi per le aree rispettive che essi descrivono projettate su d'uno stesso piano, dunque il principio delle aree avrà luogo anche relativamente al centro di gravità fisso o mobile che sia.

Se alla dimostrazione superiormente data si aggiunge quella di Newton, che abbiamo riferito nella nota II della Lezione VI, circa alla proporzionalità del tempo all'area descritta da un corpo attratto verso un centro fisso, potremo conchiudere che il principio delle aree sussiste anche quando i corpi del sistema fossero tutti od in parte attratti verso questo centro, con che esso sia preso per centro delle aree. Lo stesso succederebbe, quando il sistema fosse tenuto fisso intorno allo stesso centro, perchè potrebbe

rispetto al parallelogrammo fatto dalle velocità Mv, Mu, MV, dove le due prime rappresentano le componenti, e la terza la risultante; l'area $CMV = CMu + CMv$, perchè tutti e tre questi triangoli hanno una base comune CM e l'altezza $V\pi$ del primo è eguale alla somma delle altezze $v\pi'$, $u\pi''$ degli altri due, come è facile di verificare conducendo da V la $V\delta$ parallela a CMd.

Rispetto al parallelogrammo $M'V'$ si ha invece $CM'V' = CM'v' - CM'u'$, perchè i tre triangoli, colla base comune CM', sono tali che l'altezza $V'\varpi$ del primo è eguale alla differenza delle altezze $v'\varpi'$, $u'\varpi''$ degli altri due, come si rileva conducendo la parallela $V'\delta'$ al raggio vettore $CM'd'$.

considerarsi la resistenza del centro come una forza emanante da esso, agente più o meno su tutti i corpi. Se il sistema avrà più centri fissi disposti in una linea retta, cioè su di un asse di rotazione, la proprietà delle aree sussisterà tuttavia, ma soltanto rispetto al piano perpendicolare allo stesso asse.

Queste proprietà delle aree si legano al principio dell' azione delle coppie, pel cui mezzo si possono facilmente dimostrare ed estendere. Vedansi, per quest' oggetto gli *Elémens de Statique de M. Poinsot*, citati all' art. 5 della Lezione X.

NOTE ALLA LEZIONE XI.

Nota I.

Sul principio della conservazione delle forze vive.

1. Per concepire la verità del principio annunciato nel testo si osserverà primieramente, secondo ciò che è stato dichiarato a proposito del principio delle velocità virtuali nella nota alla Lezione IX, che qualunque sia il sistema di corpi, possiamo considerare che il movimento di ciascuno di essi sia l' effetto delle forze attive che gli sono direttamente applicate, modificato dalle forze passive, che provengono delle azioni e reazioni, che passano reciprocamente fra i corpi in virtù dei legami, che tengono il sistema unito. Queste ultime forze sono, come abbiamo visto nella citata nota, eguali a due a due ed in direzione contraria, talchè conservando le stesse notazioni usate allora, le forze, che operano su ciascuno dei punti 1, 2, 3 . . . . n, potranno essere rappresentate da

$$\begin{array}{llllll}
P_1, & T_{(1,2)}, & T_{(1,3)}, & T_{(1,4)} & + \text{ ec.} \\
P_2, & T_{(1,2)}, & T_{(2,3)}, & T_{(2,4)} & + \text{ ec.} \\
P_3, & T_{(1,3)}, & T_{(2,3)}, & T_{(3,4)} & + \text{ ec.} \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & & & \\
P_n, & T_{(1,n)}, & T_{(2,n)}, & T_{(3,n)} & + \text{ ec.}
\end{array}$$

Ciascun corpo descriverà in generale una linea retta o curva, e considerando il movimento per un' istante potremo paragonare il moto del corpo nella direzione della tangente alla curva che percorre come accaduto su di un piano inclinato analogo a quello, di cui abbiamo trattato nel n.° 12 della nota I della Lezione III. Ciascuna delle forze P_1, $T_{(1,2)}$ $T_{(1,3)}$ ec. . . ; P_2, $T_{(1,2)}$, $T_{(2,3)}$ ec. ; produrrà ad ogni istante, come si è dimostrato allora, sul rispettivo corpo un' aumento di forza viva, la di cui metà sarà eguale al prodotto della stessa forza per lo spazio che nella di lei direzione ha percorso il punto a cui essa è applicata. Così rappresentando con p_1, $t_{(1,2)}$, $t_{(1,3)}$ ec. ; p_2, $t_{(2,1)}$, $t_{(2,3)}$ ec., questi spazii brevissimi, ciascuno dei corpi 1, 2, 3 ec. avrà ricevuto nell' istante un aumento nella metà della sua forza viva, che sarà espresso rispettivamente da

$$\begin{aligned}
&P_1 p_1 + T_{(1,2)}\, t_{(1,2)} + T_{(1,3)}\, t_{(1,3)} + T_{(1,4)}\, t_{(1,4)} + \text{ec.}\\
&P_2 p_2 + T_{(1,2)}\, t_{(2,1)} + T_{(2,3)}\, t_{(2,3)} + T_{(2,4)}\, t_{(2,4)} + \text{ec.}\\
&P_3 p_3 + T_{(1,3)}\, t_{(3,1)} + T_{(2,3)}\, t_{(1,2)} + T_{(3,4)}\, t_{(3,4)} + \text{ec.}\\
&\vdots\\
&P_n p_n + T_{(1,n)}\, t_{(n,1)} + T_{(2,n)}\, t_{(n,2)} + T_{(3,n)}\, t_{(n,3)} + \text{ec.}
\end{aligned}$$

Sommando tutti questi aumenti di forza viva, che ricevono rispettivamente i corpi, si avrà l'aumento totale di forza viva che riceve il sistema. Ora se si osserva che il movimento, che fa il sistema, è compreso nei movimenti detti da Carnot geometrici, e che quindi gli spazietti $t_{(1,2)}$, $t_{(1,3)}$ ec.; $t_{(2,1)}$ $t_{(2,3)}$ ec. percorsi nello stesso istante possono essi stessi rappresentare le componenti delle velocità virtuali da imprimersi, e si considera che per essere le forze passive $T_{(1,2)}$, $T_{(2,3)}$, $T_{(3,4)}$ ec. eguali e contrarie a due a due e perciò fra loro in equilibrio, la somma dei termini contenenti i prodotti delle stesse forze per gli spazietti rispettivi è nulla secondo il principio delle velocità virtuali, si vedrà che la metà dell'aumento di forza viva che riceve il sistema si riduce a

$$(1)\quad P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 \ldots\ldots + P_n p_n.$$

La metà della forza viva crescendo ad ogni istante di una quantità corrispondente a quest'espressione, sapendo fare la somma di tutte queste quantità per un tempo finito, si avrà la metà della forza viva acquistata o perduta nello stesso tempo dal sistema. Questa somma è quella che abbiamo chiamato nel testo *quantità d'azione* o di *lavoro dinamico*, prendendo allora per la quantità di azione la parte della somma composta di tutti i momenti positivi, e per lavoro dinamico la parte composta di tutti i momenti negativi.

Indicando con m_1, m_2, m_3, ec. le masse dei corpi componenti il sistema, e con v_1, v_2, v_3 ec. le loro velocità rispettive al principio del movimento, le quantità

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3 v_3^2 + \text{ec.}$$

sarà la metà della forza viva posseduta dal sistema in principio; ed indicando con v_1', v_2', v_3', ec. le velocità degli stessi corpi alla fine del movimento, la quantità

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \tfrac{1}{2} m_3 v_3'^2 + \text{ec.}$$

sarà la metà della forza viva alla fine. La differenza fra quest'ultima quantità e la prima sarà la metà della forza viva acquistata o perduta dal sistema, ed eguagliando questa forza viva alla somma dei valori che riceve successivamente durante il movimento l'espressione dei momenti segnati (1), somma che indicheremo con S, si avrà secondo ciò che abbiamo esposto

(1) $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3'^2 + \text{ec.} - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2 - \frac{1}{2} m_3 v_2^2 - \text{ec.}$
$= S\ (P_1 p_1 + P_2 P_2 + P_3 p_3\ \text{ec.})$

equazione che esprime la proposizione annunciata nel testo.

1.° Quando le forze attive P_1, P_2, P_3 ec. fossero tutte nulle, cioè quando il sistema non fosse soggetto che alle azioni e reazioni reciproche delle forze passive, il secondo membro sarebbe nullo, e si avrebbe

(2) $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3'^2 + \text{ec.} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \text{ec.}$

Le velocità v_1', v_2', v_3' potendo corrispondere a quell' istante qualunque che si voglia considerare per fine del movimento, si vede che comunque i corpi alterino reciprocamente le loro velocità, la forza viva del sistema rimane in questo caso costante durante il movimento, ed eguale a quella che esisteva al cominciare, ciò che ha fatto dare al principio di cui trattiamo il nome di *conservazione delle forze vive.*

2.° Se le forze P_1, P_2, P_3 ec. rimanessero costanti durante il movimento, la somma S di tutti i momenti equivarrebbe alla somma dei prodotti di ciascuna forza per l' intero spazio che ha percorso nella sua direzione il punto a cui è applicata. Dinotando con π_1, π_2, π_3, ec. questi spazi totali, si avrebbe in questo caso

(3) $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + m_3 v_3'^2 + \text{ec.} - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_3 v_3^2 - \text{ec.}$
$= P_1 \pi_1 + P_2 \pi_2 + P_3 \pi_3 + \text{ec.}$

3.° Se le forze non rimanessero costanti durante il movimento, ma fossero variabili, allora per avere la somma indicata converrebbe ricorrere al Calcolo Integrale. Quando però queste forze consistessero puramente in attrazioni e repulsioni reciproche agenti in linea retta fra i corpi, e variabili solo colle distanze, tutte le volte che i corpi avessero ripreso le stesse situazioni relative nel sistema, essi avrebbero dovuto retrocedere per tutte le distanze reciproche, per cui passarono prima, ed avrebbero avuto in ciascuna di queste distanze la stessa intensità, i differenti termini della somma S sarebbero quindi tutti nulli come composti di un egual numero di valori positivi e negativi, ed il sistema si troverebbe essere tornato a possedere la stessa forza viva che aveva in principio: ciò che è una proprietà notabile di questi sistemi. Fu per mezzo di questa proprietà che Ampère ha dedotto che le forze fra le correnti elettriche e gli elementi di una calamita, che compie nell' interno di un vaso pieno di mercurio più giri d' un movimento che senza le resistenze sarebbe accelerato (1), non possono considerarsi come forze emananti da centri, situati nei corpi del sistema e decrescenti semplicemente in funzione delle distanze, perchè la calamita compito un giro avrebbe dovuto tornare al luogo di partenza con una velocità nulla, come aveva in principio del movimento (2).

(1) Faraday. Quarterly Journal of Science XII pag. 283.
(2) Ampère. Théorie des phénomènes électro-dynamiques pag. 125.

2. Se si avvicinano fra loro le dimostrazioni che abbiamo dato del principio delle velocità virtuali, del principio della conservazione del movimento del centro di gravità, del principio della conservazione delle aree e di quello ora esposto della conservazione delle forze vive, principii che sussistono con molta generalità e sono indipendenti dalla forma dei sistemi, si vedrà che essi traggono questa loro indipendenza dalla legge più generale che l'azione e la reazione sono sempre eguali, e diametralmente opposte, e che non sono che espressioni particolari di questa legge applicata ai diversi casi.

Nota II.

Teorema di Huyghens sulla discesa del centro di gravità.

Per dare un saggio dell'impiego del principio generale della conservazione delle forze vive lo applicheremo ora alla dimostrazione di un teorema celebre di Huyghens di cui faremo uso nell' Idrodinamica.

Siano m, m_1, m_2, ec. tante masse connesse fra loro in un sistema qualunque, e soggetto alla sola azione della gravità: supponiamo che x, x_1, x_2 ec. siano le altezze a cui si trovano queste masse sull' orizzonte; il centro di gravità del loro sistema si troverà, secondo la formola (A) dell' art. 8. Lez. X, all' altezza

$$(1) \qquad X = \frac{m\,x + m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + \text{ec.}}{m + m_1 + m_2 + \text{ec.}}$$

Supponiamo anche per maggior generalità che il sistema sia già in movimento, e che nell' istante da cui cominciamo a considerare il suo movimento le masse m, m_1, m_2 ec. siano dotate delle velocità v, v_1, v_2 ec., la metà della forza viva del sistema sarà espressa in questo istante da

$$m\,\frac{v^2}{2} + m_1\,\frac{v_1^{\,2}}{2} + m_2\,\frac{v_2^{\,2}}{2} + \text{ec.}$$

Scorso un certo tempo t siano x', x_1', x_2', ec. le altezze sull'orizzonte a cui sono discese, o si sono elevate rispettivamente le masse m, m_1, m_2 ec: queste masse non essendo soggette ad altre forze attive che quella della gravità, i prodotti $g\,m\,(x' - x)$, $g\,m_1\,(x_1' - x_1)$, $g\,m_2\,(x_2' - x_2)$ ec. saranno le quantità d' azione consumate dalla gravità g, che dovranno essere considerate come positive o negative, secondo che le differenze $x' - x$, $x_1' - x_1$, $x_2' - x_2$ ec. saranno positive o negative; e se indichiamo con v', v_1', v_2' ec. le velocità che possedono le stesse masse, terminato il tempo t, l' equazione segnata (3) della nota precedente relativa al principio delle forze vive ci darà l' equazione

$$m\,\frac{v'^2}{2} + m_1\,\frac{v_1'^{\,2}}{2} + m_2\,\frac{v_2'^{\,2}}{2} + \text{ec.} - m\,\frac{v^2}{2} - m_1\,\frac{v_1^{\,2}}{2} - m_2\,\frac{v_2^{\,2}}{2} - \text{ec.}$$
$$= g\,m\,(x' - x) + g\,m_1\,(x_1' - x_1) + g\,m_2\,(x_2' - x_2) + \text{ec.}$$

E l' altezza del centro di gravità alla fine di questo tempo sarà data da

$$(2) \qquad X' = \frac{m\,x' + m_1\,x_1' + m_2\,x_2' + \text{ec.}}{m + m_1 + m_2 + \text{ec.}}$$

Introducendo nel secondo membro dell' equazione precedente questo valore di X', e quello di X dato dall' aquazione (1) si avrà

$$m\,\frac{v'^2}{2} + m_1\,\frac{v_1'^2}{2} + m_2\,\frac{v_2'^2}{2} + \text{ec.} - m\,\frac{v^2}{2} - m_1\,\frac{v_1^2}{2} - m_2\,\frac{v_2^2}{2} - \text{ec.} = g\,(m + m_1 + m_2\ \text{ec.})\,(X' - X).$$

Così la metà della forza viva acquistata dal sistema sarà tale, quale sarebbe se si concepisse che tutte le masse fossero concentrate nel centro di gravità, e si misurasse la quantità d' azione per la discesa che ha fatto lo stesso centro.

2. Supponiamo ora divenute sciolte, alcune o tutte le masse m, m_1, m_2 ec., e che s' imprimano ad esse in direzione contraria alla gravità delle velocità u, u_1, u_2 ec. tali che ne risulti una forza viva eguale a quella che ha acquistato il sistema nel tempo t, così che si abbia

$$m\,\frac{u^2}{2} + m_1\,\frac{u_1^2}{2} + m_2\,\frac{u_2^2}{2} + \text{ec.} = g\,(m + m_1 + m_2\ \text{ec.})\,(X' - X).$$

Se si chiamano ξ, ξ_1, ξ_2 ec. le altezze a cui queste masse sciolte possono salire separatamente sino ad estinguere la loro velocità rispettiva u, u_1 u_2 ec., si avrà, (formola (3) Lez. III)

$$m\,\frac{u^2}{2} = m\,g\,\xi \quad ; \quad m_1\,\frac{u_1^2}{2} = m_1\,g\,\xi_1 \quad ; \quad m_2\,\frac{u_1^2}{2} = m_2\,g\,\xi_2 \quad ; \quad \text{ec.};$$

e quindi sommandole assieme

$$m\,\frac{u^2}{2} + m_1\,\frac{u_1^2}{2} + m_2\,\frac{u_2^2}{2} + \text{ec.} = g\,(m\,\xi + m_1\,\xi_1 + m_2\,\xi_2 + \text{ec.});$$

e confrontando quest' equazione colla precedente si avrà

$$(3) \qquad X' - X = \frac{m\,\xi + m_1\,\xi_1 + m_2\,\xi_2\ \text{ec.}}{m + m_1 + m_2}$$

L' altezza del centro di gravità di tutte le masse, tosto che le velocità u, u_1, u_2^2 saranno estinte, sarà ancor data secondo la citata formola (A) da

$$\Xi = \frac{m\,(x' - \xi) + m_1\,(x_1' - \xi_1) + m_2\,(x_2'\,\xi_2) + \text{ec.}}{m + m_1 + m_2 + \text{ec.}};$$

che impiegando le espressioni (2), (3), si ridurrà a

$$\Xi = X' - (X' - X) = X$$

cioè il centro di gravità sarà rimontato alla stessa altezza X, alla quale si trovava al principio del tempo t. Si ha così questo bel teorema di Huyghens. « In un sistema di corpi, o masse qualunque soggette alla « sola azione della gravità, ma connesse assieme in modo che i loro « movimenti s'impaccino reciprocamente, o siano modificati da osta- « coli esteriori, la forza viva acquistata durante un tempo qualunque è « sempre tale che, se alla fine di questo tempo si suppone che tutte le « masse divengano indipendenti, e che s'imprima ad esse o soltanto « ad alcune di esse una forza viva eguale all'aumento che ha ricevuto « il sistema in quell'intervallo di tempo ed in direzione opposta alla « gravità, tosto che questa forza viva rimarrà estinta, il centro comune « di gravità del sistema si troverà aver risalito dal luogo, ove trovavasi « alla fine del tempo, alla stessa altezza a cui era in principio ».

NOTE ALLA LEZIONE XIII.

Nota I.

Riflessioni sul modo di considerare l'azione delle forze molecolari.

Le considerazioni, che ci hanno servito nel testo a riconoscere per qual mezzo una massa fluida viene a resistere ad una pressione o ad una tensione, forniscono una delle prove più evidenti della costituzione atomistica dei corpi. Infatti, ammesso il principio ora comunemente adottato, che tutte le forze della natura emanino dagli atomi della materia come centri, quando si volesse considerare il liquido come una massa continua, per un aumento o diminuzione della sua densità le risultanti delle forze attrattive e delle forze repulsive sul piccolo prisma crescerebbero o diminuirebbero tutte e due nella stessa proporzione, che sarebbe quella del quadrato della densità, e non potrebbe mai risultare un eccesso di repulsione o di attrazione per resistere alla pressione o trazione a cui il prismetto fosse soggetto. Lo stesso non avviene quando si considera la massa come discreta o formata da molecole separate. Le repulsioni od attrazioni delle molecole essendo funzioni che più rapidamente crescenti, al diminuir delle distanze, quanto più queste sono minori, un avvicinamento od allontanamento delle molecole ha un effetto molto più sensibile sulla somma delle azioni delle molecole rispettivamente più prossime, che sono quelle che si respingono, che non sulla somma delle azioni delle molecole rispettivamente più lontane, che sono quelle che si attraggono, e perciò la ripulsione sul prismetto viene a sorpassare od a restare al di sotto dell'attrazione, tosto che le molecole si avvicinano o si allontanano più che non fanno quando sono nello stato naturale del corpo. Quelli che conoscono il calcolo differenziale ed integrale scorgeranno in queste riflessioni la ragione, per cui non è lecito sostituire gli integrali alla somma delle azioni che le molecole esercitano fra di loro, e come l'impiego degli integrali sia escluso dalla particolarità che le forze sono di tal natura che devono cambiar di segno col variar delle distanze, ciò che Poisson osservò pel primo.

Il divisamento di prendere in esame, nello stabilire le condizioni dell'equilibrio e del movimento delle parti interne dei corpi, non le semplici forze agenti su di una sola molecola, ma la risultante di tutte le forze molecolari che operano su di un prismetto, od elemento del corpo, e le prove indi addotte della necessità di risguardare i corpi, non come masse continue, ma come formati di molecole disgiunte, sono i passi

più importanti che in questi ultimi tempi ha fatto la Fisica matematica nell' applicazione delle azioni molecolari alla spiegazione dei fenomeni. I risultamenti che si potevano dedurre dall' equilibrio e dal movimento di un solo atomo non erano atti a svelarci il meccanismo di quei fenomeni, che i nostri sensi sono atti a percepire, e che ci si presentano sotto l' aspetto di continuità, per intendere la formazione dei quali era necessario contemplare nei corpi l' azione dei loro elementi differenziali assunti come ammassi di un grandissimo numero d' atomi; come pure la supposizione che le forze emanassero da tutti i punti di una massa continua, considerati come centri, rendeva impossibile l' intelligenza degli effetti della coesione, cioè di quella resistenza che i corpi oppongono alle tensioni che li fanno cambiar di volume, non che degli effetti della capillarità e dell' elasticità. Dobbiamo al sommo geometra suaccennato il merito d' averci aperto il cammino in queste sottili e difficili investigazioni.

Nota II.

Del calcolo delle pressioni dei fluidi sulle pareti dei vasi che li contengono.

1. Per provare la proposizione del testo fa d' uopo premettere il lemma seguente.

S' intende per projezione di una superficie sopra un piano la figura che viene formata dai piedi delle perpendicolari abbassate da tutti i punti della superficie sul piano di projezione. Ciò posto si può dimostrare, che l' area della projezione di una superficie piana qualunque è sempre eguale all' area della stessa superficie moltiplicata pel coseno dell' angolo che il piano, in cui essa è contenuta, fa col piano di projezione, o, ciò che torna lo stesso, pel coseno dell' angolo che fanno fra loro le perpendicolari al piano della superficie ed al piano di projezione.

Onde dimostrare questa proposizione consideriamo semplicemente un triangolo $A\,B\,C$ (fig. 113) contenuto nel piano $I\,P$, la cui projezione sul piano $I\,P'$ sia il triangolo $a\,b\,c$. Dai due vertici B, b più lontani dalla linea $I\,I'$ d' intersezione dei due piani, si conducano le due perpendicolari $B\,D$, $b\,D$ che s' incontreranno in D, e saranno contenute nel piano $B\,b\,D$ perpendicolare ai piani $I\,P$, $I\,P'$. Le due linee $B\,D$, $b\,D$ divideranno ciascuna il triangolo rispettivo in altri due $A\,B\,E$, $B\,C\,E$, ed $a\,b\,e$, $b\,c\,e$; ed abbassando da A e C le due perpendicolari $A\,F$, $C\,G$ sopra $B\,D$ e da a e c le due perpendicolari $a\,f$, $c\,g$, i due primi triangoli avranno la base comune $B\,E$ e per altezze rispettive $A\,F$ e $C\,G$; e gli altri due triangoli avranno la base comune $b\,e$, e le altezze rispettive $a\,f$, $c\,g$. Ma le altezze $A\,F$, $a\,f$, e $C\,G$, $c\,g$ come tutte parallele all' intersezione $I\,I'$ dei due piani, e rispettivamente comprese fra le parallele $A\,a$, $F\,f$, e $C\,c$, $G\,g$ sono rispettivamente

eguali, dunque le aree dei due triangoli $A\,B\,C$, $B\,C\,E$ e quelle dei due triangoli $a\,b\,c$, $b\,c\,e$ staranno fra loro come le basi $B\,E$, $b\,e$, e quindi anche le loro somme staranno nello stesso rapporto, ossia si avrà

$$\text{area } A\,B\,C \;:\; \text{area } a\,b\,c \;::\; B\,E \;:\; b\,e.$$

Conducasi ora la $E\,H$ perpendicolare sopra $B\,b$ e perciò parallela a $b\,c$: si avrà $E\,H$ eguale a $b\,c$, e l'angolo $B\,E\,H$ eguale all'angolo $B\,D\,b$, cioè all'angolo i d'inclinazione dei due piani, che contengono rispettivamente il triangolo $A\,B\,C$, e la sua projezione $a\,b\,c$. Osservando che nel triangolo rettangolo $B\,E\,H$ si ha $E\,H = B\,E \cos i$, ossia $b\,e = B\,E \cos i$, da cui deducesi la proporzione

$$B\,E \;:\; b\,e \;::\; 1 \;:\; \cos i\,;$$

che paragonata alla precedente dà

$$\text{area } A\,B\,C \;:\; \text{area } a\,b\,c \;::\; 1 \;:\; \cos i\,;$$

si avrà in fine

$$\text{area } a\,b\,c = \text{area } A\,B\,C.\ \cos i\,;$$

ciò che ci dice, che la projezione di un triangolo sopra un piano è eguale all'area del triangolo moltiplicata pel coseno dell'angolo che il piano del triangolo fa col piano di projezione.

Siccome ogni figura piana rettilinea può sempre dividersi in tanti triangoli, ripetendo pur ciascun triangolo lo stesso ragionamento, diremo in generale che la projezione di una figura piana rettilinea è sempre eguale all'area della figura stessa moltiplicata pel coseno dell'angolo, che il piano, in cui è contenuta, fa col piano di projezione.

Questa conclusione essendo indipendente dal numero dei triangoli in cui è necessario dividere la figura, numero che può essere tanto grande quanto si voglia, la conclusione sussisterà anche quando il contorno sia in tutto od in parte composto di linee curve, nel qual caso il numero delle parti, in cui la figura va concepita divisa, non ha alcun limite assegnabile.

2. Posto il lemma precedente veniamo alla dimostrazione della proposizione annunciata nel testo, cioè che nei vasi contenenti dei liquidi pesanti le pressioni orizzontali si distruggono reciprocamente, e le verticali formano una somma eguale al peso del liquido contenuto.

S'immagini divisa la capacità del vaso da tre serie di piani una orizzontale e due verticali e perpendicolari fra loro, i piani di ciascuna serie essendo equidistanti e vicinissimi fra loro, quanto piacerà. Consideriamo in ciascuna serie due piani consecutivi, dai quali venga compresa e limitata una porzioncella comune, s, delle pareti del vaso (fig. 114). Queste tre coppie di piani comprenderanno tre prismi tronchi $s\,s'$, $s\,\varsigma$, $s\,\sigma$ due orizzontali ed uno verticale, dei quali la base comune s, come pure le basi opposte, potranno per la loro illimitata piccolezza assumersi come piane. Sia p la pressione esercitata dal fluido su di un

punto della base s; questa pressione, non potendo essere sostenuta che perpendicolarmente alla superficie premuta, dovrà considerarsi come una forza agente nella direzione della perpendicolare alla superficie del vaso nello stesso punto. Decomponendola in una verticale, ed in una orizzontale, e poi decomponendo ancora l'orizzontale in due nelle direzioni dei due prismi, è facile il vedere che le tre componenti saranno rappresentate dai tre spigoli del parallelepipedo rettangolo costrutto sopra la retta, che rappresenta la pressione risultante, come diagonale. Quindi potendo ciascuno spigolo essere considerato come il cateto adiacente di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa sia la detta diagonale, chiamando α, β, γ gli angoli che le componenti fanno colla risultante si riconoscerà, che esse saranno rispettivamente espresse da

$$p \cos \alpha \; ; \; p \cos \beta \; ; \; p \cos \gamma.$$

La base comune, s, potendo essere presa piccola indefinitamente, si risguarderanno tanto la pressione che le sue componenti come costanti su tutti i snoi punti, quindi, chiamando s l'area della stessa base, avremo i prodotti

$$(1) \qquad p.\ s \cos \alpha \; , \; p.\ s \cos \beta \; , \; p.\ s \cos \gamma$$

pei valori delle componenti della pressione da lei sofferte.

Pel lemma premesso i prodotti

$$s \cos \alpha \; , \; s \cos \beta \; , \; s \cos \gamma$$

danno i valori delle projezioni della base s sui piani perpendicolari alle direzioni dei prismi $s s'$, $s \varsigma$, $s \sigma$, colle quali la perpendicolare alla base s fa rispettivamente gli angoli α, β, γ. Ora è chiaro che queste projezioni non sono altro che le aree dei rettangoli, che risulterebbero dalle sezioni dei prismi fatte perpendicolarmente alle lunghezze dei medesimi, talchè chiamando rispettivamente a, b, c le distanze reciproche fra i piani nelle tre serie, dalle quali si suppone divisa la capacità del vaso, sarà

$$s \cos \alpha = a \,.\, b \; ; \; s \cos \beta = a \,.\, c \; ; \; s \cos \gamma = b \,.\, c$$

Colla sostituzione di questi valori nelle espressioni (1) si avranno i prodotti

$$p.\ a\,b \qquad p.\ a\,c \qquad p.\ b\,c$$

pei valori delle tre componenti della pressione che soffre l'elemento s della superficie del vaso.

Consideriamo ora le pressioni, che si esercitano sulle basi opposte s' e ς, dei due prismi $s s'$, $s \varsigma$, orizzontali ed ortogonali fra loro. Siccome queste basi sono alla stessa profondità della base s sotto il livello del liquido, p sarà parimente il valore della pressione su ciascun loro punto: e cogli stessi ragionamenti fatti si dedurrà che le componenti

della pressione nelle direzioni degli stessi prismi saranno rispettivamente date da

$$p.\ a\,b\ ,\ c \qquad p.\ a\,c$$

Queste componenti agendo evidentemente in direzione opposta a quelle esercitate sulla base s ed essendo ad esse eguali, il loro effetto composto sarà bensì di tendere a sfiancare le pareti del vaso, ma la loro risultante sarà nulla per ispingere il vaso orizzontalmente.

Non così avverrà delle componenti verticali. La pressione sui punti della base opposta σ del prisma verticale sarà differente da quella sui punti della base s, ed indicandola con π, la componente della pressione su la base σ nella direzione del detto prisma sarà per le stesse ragioni, di cui si è già fatto uso, espressa da

$$\pi\,.\,b\,c\,.$$

Quindi la differenza delle due componenti sulle due basi sarà data da

$$(p - \pi)\ b\,c$$

assumendo per π la pressione corrispondente alla base superiore del prisma.

Se il prisma terminerà alla superficie libera del liquido sarà $\pi = 0$; se terminerà ad un elemento della superficie del vaso, π sarà il peso di un filo fluido alto quanto è la distanza di questo elemento dal livello della superficie libera, ma in un caso e nell'altro $(p - \pi)\ b\,c$ rappresenterà il peso del liquido contenuto nel prisma verticale.

Ripetendo questi ragionamenti rispetto a tutti i sistemi di tre prismi in cui si è supposta divisa la capacità del vaso si conchiuderà; che per ogni elemento s della sua superficie sempre esistono due pressioni opposte, che distruggono intieramente le componenti orizzontali della pressione, che soffre lo stesso elemento, e che la parte della componente verticale della pressione, che non viene distrutta dalla opposta, è sempre eguale al peso del liquido, che gli sovra-incombe. Da ciò dedurremo dunque, che il vaso non sarà spinto da nessuna parte orizzontalmente, e che la somma delle forze, che lo spingono abbasso, sarà il peso totale del liquido in esso contenuto.

I ragionamenti istituiti per questa dimostrazione si accostano ad essere tanto più rigorosi, nel caso che le pareti del vaso siano curve, quanto più gli elementi, in cui si è supposto divisa la superficie del vaso sono piccoli, o le distanze dei piani, che ne dividono la capacità, sono minori; e siccome queste distanze sono scomparse dal risultato finale, esso sarà indipendente dal grado di indefinita piccolezza che si deve dare ai detti elementi, per essere rigorosamente applicabile ad una superficie curva.

NOTE ALLA LEZIONE XIV.

Nota I.

Del calcolo delle correzioni da farsi nella determinazione dei pesi specifici.

Per fare le correzioni, di cui si parla nel testo, è necessario premettere alcuni risultamenti delle esperienze sulla dilatazione dei corpi.

La dilatazione della maggior parte dei corpi solidi nelle temperature ordinarie, ed anche fra i limiti della temperatura del ghiaccio che si fonde, e di quella dell' acqua che bolle, è uniforme, ma differente da un corpo all' altro. Per esempio, secondo gli sperimenti di Dulong e Petit, le dilatazioni cubiche, o gli aumenti di volume per un grado centigrado sono,

pel vetro	0,00000861
ferro	0,00001182
rame	0,00001718
platino	0,00000884.

Così volendo avere l' aumento di volume di un corpo di queste sostanze dalla temperatura 0° a quella di t gradi, chiamando k il coefficiente di dilatazione dato dal numero corrispondente suespresso, basterà moltiplicare il volume v_0, corrispondente alla temperatura 0°, per $k\,t$, e si avrà l' aumento di volume $v_0\,k\,t$, che aggiunto al volume primitivo v_0, dà per l' espressione del volume v corrispondente alla temperatura t la formola $v = v_0\,(1 + k\,t)$.

Non così semplice è il calcolo del volume dei liquidi: la dilatazione dei liquidi è variabile anche nei limiti delle temperature ordinarie, e la legge di questa variabilità è tanto complicata, che fin ora non si è potuto scoprire, e si esprime la densità d dei liquidi in differenti temperature con una formola empirica della forma

$$d = d_0\,(1 + a\,t + b\,t^2 + c\,t^3) \qquad (1)$$

dove a, b, c sono delle costanti diverse da un liquido all' altro, t la temperatura, e d_0 la densità del liquido a zero gradi.

Il primo, che ha introdotto l'uso di espressioni di questa forma per rappresentare le densità o dilatazioni dei liquidi, è stato il Sig. Biot, e si può vedere nel suo *Traité de Physique expérimentale et mathématique*, tom. I, la formola (1) applicata all'espressione delle dilatazioni di varii liquidi.

Applicando la suddetta formola a rappresentare coi minori errori possibili i risultamenti osservati della dilatazione dell'acqua in 64 osservazioni assai precise da zero sino a 32 gradi di temperatura, il sig. Hallström ha ritrovato la seguente espressione numerica

$$d = d_0 \left\{ 1 + 0{,}000059239\, t - 0{,}0000065322\, t^2 + 0{,}00000001445\, t^3 \right\} \quad (2)$$

Una leggiera ispezione di questa formola della dilatazione dell'acqua fa vedere, che la densità dell'acqua è crescente da zero sino ad una certa temperatura superiore a zero, che indicheremo con t_m. Se si cerca coi noti metodi dei massimi e minimi, per qual temperatura la densità diviene massima, si trova

$$t_m = 4^g{,}1082. \quad (*)$$

È in questa temperatura che un centimetro d'acqua pesa una gramma, e nella quale si deve supporre che sia il bagno, quando si fanno gli esperimenti colla bilancia idrostatica per determinare i pesi specifici.

Se si rappresenta con d_m la densità massima corrispondente a questa temperatura e si introduce d_m in luogo di d_0, la formola precedente può trasformarsi come segue

$$d = d_m \left\{ 1 - 0{,}0000063536\, (t - t_m)^2 + 0{,}00000001445\, (t - t_m)^3 \right\} \quad (3)$$

e come indicando con v e v_m i volumi corrispondenti a d e d_m, è

$$v : v_m :: \frac{1}{d} : \frac{1}{d_m} :$$

da essa si ricava anche

$$v = \frac{v_m}{1 - 0{,}0000063536\, (t - t_m)^2 + 0{,}00000001445\, (t - t_m)^3}. \quad (4)$$

La tavola seguente calcolata con queste due formole rappresenta i fat-

(*) Secondo il Sig. Muncke (vedansi *les Annales de Chimie et Physique* vol. 64, année 1837) si ha per l'acqua

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_0} \left\{ 1 - 0{,}000059473293\, t + 0{,}000008210029\, t^2 - 0{,}00000006214\, t^3 + 0{,}000000000289\, t^4 \right\}$$

ed il massimo di densità dell'acqua corrisponderebbe alla temperatura $t = 3^\circ{,}78046$.

tori, per cui devono esser moltiplicati i valori di d_m e v_m per ottenere le densità d ed il volume v corrispondente ad ogni temperatura t notata nella prima colonna

Densità e volume dell' acqua da 0° a 30° centig. prendendo per unità la densità ed il volume a 4°,1 (1).

Temperature	Densità o pesi specifici	Volumi	Temperature	Densità o pesi specifici	Volumi
0	0,9998918	1,0001082	15	0,9992647	1,0007357
1	0,9999382	1,0000617	16	0,9991260	1,0008747
2	0,9999717	1,0000281	17	0,9989752	1,0010259
3	0,9999929	1,0000078	18	0,9988125	1,0011888
4	0,9999999	1,0000002	19	0,9986387	1,0013631
5	0,9999950	1,0000050	20	0,9984534	1,0015490
6	0,9999772	1,0000226	21	0,9982570	1,0017460
7	0,9999472	1,0000527	22	0,9980489	1,0019549
8	0,9999044	1,0000954	23	0,9978300	1,0021746
9	0,9998497	1,0001501	24	0,9976000	1,0024058
10	0,9997825	1,0002175	25	0,9973587	1,0026483
11	0,9997030	1,0002970	26	0,9971070	1,0029016
12	0,9996117	1,0003888	27	0,9968439	1,0031662
13	0,9995080	1,0004924	28	0,9965704	1,0034414
14	0,9993922	1,0006081	29	0,9962864	1,0037274
15	0,9992647	1,0007357	30	0,9959917	1,0040245

Siccome i pesi sono proporzionali alle densità, l' ultima colonna, che

(1) Questa tavola è presa dal Corso elementare di Fisica esperimentale del Prof. Belli Vol. II, pag. 277 dove è stata riprodotta con alcune correzioni.

dà tanto il valore del rapporto $\frac{v}{v_m}$, come quello del rapporto i $\frac{d_m}{d}$, esprime anche il numero, pel quale bisogna moltiplicare il peso di un volume d'acqua alla temperatura t per avere il peso dello stesso volume nella temperatura t_m. Indicheremo in seguito questo numero della terza colonna generalmente con $1 + \nu$.

2. Premesse queste nozioni ecco come si possono eseguire le correzioni dei pesi specifici determinati col mezzo della bilancia idrostatica. Sia π il numero delle gramme che conviene mettere in un piatto della bilancia per stabilire l'equilibrio, quando si mette il corpo, di cui si cerca il peso specifico, nell'altro piatto, e sia p il numero delle gramme che conviene aggiungere in quest'ultimo piatto per ristabilire l'equilibrio, quando si trasporta il corpo dallo stesso piatto nel secchietto immerso nell'acqua: come abbiamo detto nel testo $\frac{\pi}{p}$ sarebbe il peso specifico del corpo, se l'acqua fosse nella temperatura $t_m = 4°,1$, ed il corpo nella temperatura 0°.

Ma stando l'acqua nella temperatura t, il volume d'acqua che il corpo ha rimosso ha pesato meno che non avrebbe fatto nella temperatura t_m, p rappresentando il peso di questo volume nella temperatura t, quello che gli corrisponde nella temperatura t_m è, come abbiamo mostrato, espresso da $p\ (1 + \nu)$. Questo è dunque il numero di cui dobbiamo far uso invece di p. Lo stesso numero esprime pure in centimetri cubici il volume del corpo.

Come il corpo pesato nell'aria perde la $\frac{1}{780}$ parte del peso che perde nell'acqua, perchè il peso specifico dell'acqua sta a quello dell'aria, nelle circostanze atmosferiche medie come 780 : 1; così anche il peso π deve essere aumentato di $\frac{p\ (1 + \nu)}{780}$ (1); ed in luogo di π si deve assumere $\pi + \frac{p\ (1 + \nu)}{780}$; il rapporto dei valori di π e di p così corretti dà pel peso specifico del corpo $\frac{\pi}{p\ (1 + \nu)} + \frac{1}{780}$.

Questo peso specifico è quello del corpo nella temperatura, in cui si trova all'atto dell'esperimento, che supporremo rappresentata da t'. Per ridurlo a quello corrispondente alla temperatura zero, conviene osservare che il suo volume venendo a diminuire in questa temperatura

(1) Questo valore è espresso esattamente da $\frac{p}{780} \frac{h - \frac{5}{8} f}{0{,}76\ (1 + 0{,}00365\ t)}$, h essendo l'altezza del barometro, t la temperatura dell'aria, ed f la tensione del vapor acqueo esistente in essa e calcolata coi dati di una osservazione fatta con un igrometro diretto, quale sarebbe quello di Daniell. Nulladimeno il valore costante dato sopra può servire nelle temperature medie quando si è poco elevati sul livello del mare.

nella ragione di $1 : 1 + kt'$, come abbiamo veduto sopra, la sua densità aumenterebbe nella ragione di $1 + kt' : 1$; e come i pesi specifici sono proporzionali alle densità, moltiplicando il peso specifico precedente per $1 + kt'$ si avrà il peso specifico del corpo nella temperatura zero espresso da $\left(\frac{\pi}{p\,(1+\nu)} + \frac{1}{780}\right)(1 + kt')$.

NOTE ALLA LEZIONE XV.

Nota I.

Formole pel calcolo di alcuni fenomeni di capillarità.

1.mo *Dell' altezza di un liquido fra due piani verticali, paralleli e vicini fra loro.*

Il valore dell' altezza a, a cui si eleva, o da cui si abbassa un liquido fra due piani indefiniti verticali, paralleli e vicini fra loro, che abbiamo dato nel testo, non offre che una prima approssimazione, perchè abbiamo trascurato il peso del liquido, che forma la concavità superiore della colonnetta liquida, o vi abbiamo incluso quello che riempierebbe lo spazio lasciato vuoto dalla convessità della stessa. Le formole più rigorose, che tengono conto in gran parte dei detti pesi, sono, se il liquido bagna le pareti

$$a = \frac{r^2}{2r} - r\left(1 - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (1)$$

$2r$ essendo la distanza dei piani, e π la ragione della circonferenza al diametro; se il liquido non bagna le pareti

$$-a = \frac{r^2}{2r}\cos w + \frac{r}{\cos^2 w}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{w}{2} + \cos w - \tfrac{1}{2}\sin 2w\right); \qquad (2)$$

w essendo l' angolo costante apparente del contatto del liquido colla materia delle pareti misurato dalle perpendicolari elevate esteriormente alle due parti della superficie del liquido nei punti immediati dall' uno e dall' altro lato della linea, ove comincia ad essere in contatto colle pareti.

2.do *Dell' altezza di un liquido in un cannello di sottil diametro.*

Immergendo un cannello di materia, che sia bagnata da un liquido, questo sale nel cannellino più alto che non sta all' esteriore, e l' altezza a cui si eleva è data dalla formola

(1) Nouv. Théor. de l'act. capill. pag. 181, par Poisson.
(2) Idem, pag. 178, 180.

$$a = \frac{\tau^2}{r} - \frac{r}{3}; \qquad (1)$$

r essendo il raggio interno di una sezione orizzontale del tubo.

Se il tubo è un poco ampio, cosicchè $\frac{\tau^2}{r}$ sia una frazione, allora si ha

$$a = \frac{\sqrt[4]{\pi\sqrt{2}}\ \sqrt{\tau\, l}}{1+\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{l\sqrt{2}}{\tau}};$$

essendo

$$l = r + (\sqrt{2} - 1)\,\tau; \qquad (2)$$

ed e la base dei logaritmi iperbolici.

Quando la materia del cannello non è atta ad essere bagnata dal liquido, questo sta depresso e la depressione è data da

$$-a = \frac{\tau^2 \cos w}{r} + \frac{r}{\cos^3 w}\left(\cos^2 w + \tfrac{2}{3}\sin^3 w - \tfrac{2}{3}\right); \qquad (3)$$

e se il cannello non è molto sottile allora si ha

$$-a = \frac{\sqrt[4]{\pi\sqrt{2}}\ \sqrt{\tau\, l}\,.\,\sin\theta}{1+\cos\theta} \cdot e^{-\frac{l\sqrt{2}}{\tau}};$$

essendo

$$l = r + (1 - \cos\theta)\,\tau\sqrt{2}, \quad \text{ed} \quad w = \tfrac{1}{2}\pi + 2\theta \qquad (4)$$

3.zo *Altezza di una goccia di un gran diametro.*

Versando sopra un piano orizzontale una piccola porzione di un liquido che non lo bagni, il liquido non si spande indefinitamente ma sta raccolto in una goccia, e quando è in quantità sufficiente da formare una goccia di una larghezza maggiore di un certo limite, l'altezza della goccia viene ad essere costante. La forma della goccia è quella di una superficie di rivoluzione, la cui parte superiore è assintotica ad un piano orizzontale, ed il cui contorno è convesso per infuori (fig. 115). La trazione della superficie del liquido nella parte convessa produce una forza perpendicolare alla stessa superficie, che tira per indentro e contiene il liquido impedendogli che si spanda. L'altezza de-

(1) Nouv. Théor. de l'act. capill. pag. 112.
(2) Idem, pag. 224, 225.
(3) Idem, pag. 111.
(4) Idem, pag. 224.

~~stante~~ di un ~~larga~~ goccia è data dalla formola

$$a = \tau \sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2} w + \frac{\tau^2}{3\, l \cos \frac{1}{2} w} \left(1 - \sin^3 w \right);$$

essendo

$$l = r + (\sqrt{2} - 1)\, \tau. \qquad (1)$$

$2r$ dinotando il diametro massimo della goccia.

4.to *Altezza e peso del liquido sollevato da un disco solido.*

Se da un braccio di una bilancia si fa pendere un disco di materia solida, che vada ad applicarsi alla superficie di un liquido sottoposto, e poi si mettano nel piatto dell' altro braccio della bilancia dei pesi per sollevare il disco, il liquido si eleva pure rimanendo come aderente al disco sino ad una certa altezza, facendo col suo peso equilibrio ai pesi posti nel piatto opposto della bilancia. Se il liquido è di natura da bagnare la materia del disco, e si trova sollevato alla massima altezza a cui può giungere senza staccarsi dal disco, prende la forma di una superficie di rivoluzione (fig. 116), la cui curva generatrice si unisce tangenzialmente al disco, poi rientra formando una concavità per infuori, e va a confondersi asintoticamente colla retta orizzontale, che segna il livello del liquido esteriore indefinito. La trazione nella sua superficie, combinata colla sua concavità esterna produce una forza perpendicolare alla superficie, che tende a trarre il liquido sollevato pell' infuori, per cui esso si rarefà menomamente anche nell' interno esercitando una trazione reciproca fra le sue parti, in virtù della quale si mantengono sollevate. L' altezza massima, a cui il liquido può essere sollevato prima che torni a ricadere nel vaso, è espressa da

$$a = \tau \sqrt{2} - \frac{\tau^2}{2r}$$

ed il peso del liquido sollevato è dato da

$$p = \pi\, m \left(\tau\, r^2 \sqrt{2} - \frac{\tau^2 r}{2} \right); \qquad (2)$$

r essendo il raggio del disco, ed m il peso di un cubo di liquido, che abbia per lato l' unità, con cui sono espressi r e τ.

Se il liquido non è di natura da bagnare la materia del disco, come sarebbe il mercurio con un disco di vetro, allora il liquido sollevato alla sua massima altezza prende pure la forma di una superficie di rivoluzione (fig. 117), la curva generatrice della quale parte dal di-

(1) Nouv. Théor. de l'act. capill. pag. 215, 217.
(2) Idem, pag. 233.

sco facendo apparentemente col medesimo un angolo costante, ma in realtà unendosi tangenzialmente ad esso per mezzo dell' arco di lunghezza insensibile, che nel testo abbiamo chiamato *arco di giunzione.* La stessa curva discendendo presenta una concavità all' infuori, ed estendendosi termina asintoticamente colla superficie piana del liquido. L' effetto della forza contrattile superficiale combinata colla curvatura è di chiamare il liquido per infuori tentando di staccare la superficie dal resto, ciò che produce nell' interno un grado insensibile di rarefazione, ma capace di produrre una trazione reciproca fra le parti, dalla quale il liquido è sostenuto sino ad una certa altezza. Quest' altezza massima è data dalla formola

$$a = 2\,\tau^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} w - \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{\tau^3}{r} \left(1 - \cos^3 \tfrac{1}{2} w\right) \left(1 - \frac{\tau\sqrt{2}}{2r} \cos \tfrac{1}{2} w\right);$$

ed il peso del liquido sostenuto da

$$p = \pi\, m\, a\, r + \pi\, m\, \tau^2\, r \sin w \qquad (1).$$

5.to *Valori numerici delle costanti contenute nelle premesse formole corrispondenti ad alcuni liquidi.*

Volendo applicare queste formole al calcolo dei fenomeni si osserverà che avendo dinotato con T la trazione, o forza contrattile della superficie del liquido, con Δ la densità, si è posto $\tau^2 = 2\frac{T}{g\,\Delta}$, dove rappresentando T con dei pesi si dovrà fare $g = 1$. Ciò posto la seguente tavola dà i valori di T e τ^2 corrispondenti a diversi liquidi, che sono stati sperimentalmente trovati dai Fisici, osservando le altezze, le depressioni od i pesi sollevati dei liquidi in alcuni dei fenomeni suddescritti, e ricavandone colle formole date il valore di τ^2.

(1) Nouv. Théor. de l'act. capill. pag. 232, 233.

Esperimentatori / Liquidi	Δ	GAY-LUSSAC T	GAY-LUSSAC τ^2	AVOGADRO T	AVOGADRO τ^2	FRANKENHEIM T	FRANKENHEIM τ^2
Acqua	1,000	$7^{mg},56$	$15^{mm},13$	$6^{mg},81$	$13^{mm},62$	$7^{mg},50$	$15^{mm},00$
Mercurio . . .	13,60	44,40	6,53	37,81	5,56		
Alcool	0,820	2,59	6,08				
Olio di trebentina	0,869	2,86	6,58				
Olio d'oliva .	0,908	——	——	3,46	7,62		
Acido solforico idrato . .	1,86	——	——	——	——	6,33	6,85
Solfuro di carbonio	1,26	——	——	——	——	3,42	5,44
Etere solforico	1,73					4,41	5,10

Pei liquidi che non bagnano le pareti, come fa il mercurio rispetto a varie materie solide, si ha la trazione relativa $T - \Theta$ della sua superficie con queste materie, e l'angolo apparente costante del contatto w, come segue

Esperimentatori / Materie	GAY-LUSSAC T—Θ	GAY-LUSSAC ϖ	AVOGADRO T—Θ	AVOGADRO ϖ
Mercurio e vetro	$32^{mg},37$	$43^{0}.11'$	$28^{mg},81$	$40^{0}.21$
Mercurio e ferro.			31,07	34.45
Mercurio e platino. . . .			25,64	47.12

I valori di T e $T - \Theta$ corrispondono ad un millimetro di lunghezza, del contorno della superficie liquida e sono espressi in milligrammi.

6.to *Formole pel calcolo dell' elevazione, o depressione dei liquidi sovrapposti in un cannello.*

1. Il caso, che in un cannello capillare esistano due di que' fluidi, che non si mescolano per loro natura, esige delle considerazioni, che non sono state esposte nel testo. Secondo i principj ivi dimostrati la causa primordiale, da cui traggono origine i fenomeni capillari, è quella trazione o forza contrattile superficiale, che le forze molecolari danno ai liquidi in conseguenza della rapida rarefazione, che essi soffrono nelle vicinanze delle loro superficie. Quando la superficie del liquido è libera, la forza contrattile è massima, perchè il liquido si rarefà in essa sino al punto, che le somme delle azioni repulsive delle molecole più vicine, e delle attrattive delle molecole rispettivamente più lontane, che si trovano tutte situate nell' interno da uno stesso lato, è nulla su di una molecola della superficie. Se la superficie del liquido non è libera, ma esiste un' altro liquido ad esso contiguo, la forza contrattile è minore perchè la rarefazione nella superficie del liquido, in cui le forze molecolari sono più energiche, si fa soltanto sino a che la somma delle azioni delle sue molecole interne su di una sua molecola poste nella superficie di separazione dei due liquidi, sia eguale alla somma delle azioni, che sulla stessa molecola esercita il fluido, in cui le azioni molecolari sono meno energiche. Per mezzo di questo decrescimento di densità del primo liquido nelle vicinanze della sua superficie di separazione si fa il passaggio del suo stato più energico di forze molecolari a quello meno energico del secondo liquido, senza che l' equilibrio delle altre parti interne delle due masse sia alterato. Si può credere che quando i due liquidi non sono atti a rimanere separati, ma si mescolano fra loro, ciò provenga da che la natura delle loro forze molecolari sia tale, che il detto passaggio non possa farsi in un modo stabile nelle vicinanze dei loro punti di separazione.

2. Giusta queste considerazioni volendo riconoscere le condizioni dell' equilibrio di due liquidi sovrapposti in un cannello bisogna calcolare le due azioni, che provengono dalle trazioni dei due liquidi nelle due superficie, quella di separazione e quella libera, combinate colle loro rispettive curvature, ma valutando nelle superficie di separazione la trazione del liquido in cui le forze molecolari sono più energiche secondo la natura del liquido contiguo. Ciò fatto l' effetto composto sarà di tener sollevata o depressa la colonna del liquido superiore dell' altezza di una colonna del liquido inferiore, eguale in peso alla somma delle due dette azioni. Le formole, che l' applicazione dell' analisi somministra, tenendo conto nel calcolo del peso delle colonnette liquide anche delle parti spettanti alle convessità o concavità delle loro superficie estreme, sono

$$h = \varepsilon - \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon - \frac{2}{g\,r\,\Delta_1}\left(\Gamma + \Gamma^1\right) + \frac{r}{\Gamma^3}\left(T\,\Gamma^2 + \tfrac{2}{5}\left(T^2 - \Gamma^2\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{5}\,T_c\right)$$

(I)

$$h_1 = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon - \frac{2}{g\,r\,\Delta_1}\left(\Gamma + \Gamma^1\right) + \frac{r}{\Gamma_1^3}\left(T\,\Gamma_1^2 + \tfrac{2}{5}\left(T_1^2 - \Gamma_1^2\right)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{5}\,T_1^3\right).$$

In queste formole

h ed h_1 dinotano rispettivamente l' altezza del liquido superiore, e del liquido inferiore sul livello del liquido inferiore esterno

r il raggio interno del cannello

$r^2\varepsilon$ il volume del liquido sovrapposto

Δ e Δ_1 rispettivamente le densità del liquido superiore ed inferiore

T la trazione nella superficie libera del liquido sovrapposto

T_1 la trazione nella superficie del liquido inferiore contigua al liquido superiore;

e si è posto

$$\Gamma = T\cos w \qquad\qquad \Gamma_1 = T_1\cos w_1\ ;$$

w ed w_1 dinotando rispettivamente per l' uno e per l' altro liquido l'angolo apparente, che fanno fra loro le due perpendicolari elevate esteriormente alla sua superficie al di qua ed al di là delle prossimità della linea in cui si stacca dalle pareti o dagli intonaci delle medesime.

3. Il celebre Dott. Young nelle sue obbiezioni alla Teoria dell' azion capillare di Laplace oppose il seguente esperimento. Facendo cadere una goccia d' olio, che ricopra d' un sottil velo l' estremità superiore della colonnetta d' acqua, che per effetto di capillarità siasi elevata in un cannellino di vetro, si vede che la colonnetta d'acqua discende notabilmente al disotto del punto, al quale si era prima elevata senza il velo d' olio, discesa della quale la teorica di Laplace non sapeva dar ragione.

In questo esperimento tanto la porzione di superficie, in cui termina superiormente la colonnetta d' acqua, come la porzione di superficie libera che presenta la cappa d' olio sono concave verso l' alto, e terminano parallelamente alle pareti. Le perpendicolari elevate esteriormente ai limiti superiori di queste porzioni delle dette superficie, e di quelle porzioni che sono parallele alle pareti, sono quindi direttamente opposte fra loro, si ha cioè

$$w = \pi \qquad\qquad w_1 = \pi$$

e perciò

$$\Gamma = -\,T \quad ; \qquad \Gamma_1 = -\,T_1\ :$$

e la seconda delle formole (I) ci darà

$$h_1 = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\,\varepsilon + \frac{2}{g\,r\,\Delta_1}\left(T + T_1\right) - \tfrac{1}{3}\,r\ ;$$

o trascurando i termini moltiplicati per ε ed r, come assai piccoli

$$h = \frac{2}{g\,\Delta_1 r}\,(T + T_1).$$

Secondo gli sperimenti del Cav. Avogadro si ha per la trazione della superficie libera dell' olio, e della superficie dell' acqua in contatto coll' olio

$$T = 3^{mg},46 \qquad\qquad T_1 = 0^{mg},79.$$

Supponendo che il cannello abbia un millimetro di raggio sarà $r = 1$, $g\,\Delta = 1^{mg}$, ed

$$h = 6{,}92 + 1{,}58 = 8^{mm},50.$$

Prima di far cadere la goccia d' olio, l' acqua nel cannello si sarebbe sostenuta secondo il suddetto sperimentatore all' altezza di $13^{mm},62$; cosi il velo d' olio è stato sufficiente per farla discendere di $5^{mm},12$.

4. Le formole, (1) sono state per la prima volta comunicate al Congresso di Torino il 26 di Settembre 1840. Le formole date per lo stesso caso da Laplace non somministrano alcun abbassamento sensibile della colonnetta d' acqua, come neppure quelle date da Poisson nella *Nouvelle Théorie de l'action capillaire pag.* 140 *e seg.*, che loro sono identiche. Solo quest' ultimo autore si limitò a far osservare che la superficie superiore della colonnetta liquida può offrire sull' asse una piccola depressione per causa di una maggiore concavità, che essa acquista, ed espresse il suo desiderio, che l' esperimento di Young fosse ripetuto con delle misure precise. Una cosi tenue depressione, quale venne indicata da Poisson, non poteva essere quella, a cui alludeva il Dott. Young il quale nell' annunziare che la colonnetta liquida discende aggiunse l' avverbio, *conspicuosly*, *notabilmente*; ed infatti dopo la comunicazione fatta al Congresso di Torino avendo avuto occasione di vedere un saggio dell' esperimento, osservai, che la colonnetta d' acqua discese per più di un terzo dell' altezza, a cui stava avanti che un sottil velo d' olio scendesse a ricoprirla.

5. I valori delle trazioni della superficie di mercurio in contatto apparente coll' acqua e coll' alcool che risultano da alcuni esperimenti di Gay-Lussac sono

$$T = 37^{mg},67 \qquad\qquad T' = 36^{mg},04.$$

NOTE ALLA LEZIONE XVII.

Nota I.

Di una seconda correzione della colonna barometrica proveniente da un effetto capillare del mercurio della vaschetta.

Quando la punta d'avorio, a cui si conduce tangente la superficie del mercurio della vaschetta, non fosse molto lontana dalle pareti del cilindro di cristallo, talchè la superficie del mercurio non avesse ancor perduto tutta la convessità, che per effetto di capillarità acquista nelle immediazioni del vetro, il livello del mercurio della vaschetta determinato dall'estremità della punta verrebbe ad essere più depresso del vero livello, e quindi la colonna barometrica osservata risulterebbe un po' maggiore della vera. Il sig. Bouvard ha calcolato, per mezzo di alcune formole di Laplace, una tavola, che dà la correzione, o la quantità da aggiungersi all'altezza osservata per conseguire la vera. Questa tavola è la seguente.

Diametro del tubo	Distanza della punta	Differenza	Diametro del tubo	Distanza della punta	Differenza
12mm	3,mm13		16mm	8,mm09	
		0, 39			1, 07
12,5	3, 52		16,5	9, 16	
		0, 44			1, 23
13	3, 96		17	10, 39	
		0, 49			1, 40
13,5	4, 45		17,5	11, 79	
		0, 55			1, 58
14	5, 00		18	13, 37	
		0, 64			1, 78
14,5	5, 64		18,5	15, 15	
		0, 71			2, 05
15	6, 35		19	17, 20	
		0, 81			2, 40
15,5	7, 16		19,5	19, 60	
		0, 93			2, 83
16	8, 09		20	22, 43	

Conoscendo la distanza della punta d'avorio dalle pareti del cilin-

dro di cristallo si entra nella seconda colonna di questa tavola, e si trova a canto nella prima il numero intitolato *diametro del tubo.* Questo è un diametro fittizio o sussidiario, col quale cercando nella tavola del testo l' effetto corrispondente di capillarità si ottiene la correzione cercata.

Suppongasi che la distanza della punta alle pareti del cilindro sia $5^{mm},00$: a questo numero della seconda colonna corrisponde nella prima 14^{mm}; entrando con questo diametro fittizio come argomento nella tavola del testo si ha $0^{m},161$ per la quantità da aggiungersi all' altezza della colonna barometrica osservata, onde correggerla dell' effetto della capillarità proveniente dalle pareti del cilindro di cristallo della vaschetta.

Nota II.

Sulla riduzione della colonna barometrica osservata ad altre equivalenti in peso sotto il parallelo di 45°.

Sia H_λ l' altezza della colonna barometrica osservata corrispondente alla latitudine λ, e sia g il valore della gravità a questa latitudine, il peso della colonna osservata sarà proporzionale a gH_λ.

Sia G il valore della gravità sotto il parallelo di 45°, ed H l' altezza, che dovrebbe avere una colonna di mercurio, che sotto lo stesso parallelo fosse equivalente in peso a quella, che abbiamo espressa con gH_λ, sarà

$$GH = gH_\lambda \quad , \text{ e quindi } (1)\ H = \frac{g}{G} H_\lambda$$

Ma parlando delle variazioni della gravità alla superficie terrestre (Lez. IV) abbiamo visto, che questa forza per le varie latitudini è espressa da

$$g = 9{,}78078 + 0{,}050321 \sin^2 \lambda.$$

Se si osserva che dalle formole trigonometriche si ha (Legendre *Trigonométrie* XXX)

$$\sin^2 \lambda = \frac{1 - \cos 2\lambda}{2},$$

all' espressione precedente si potrà dare la forma

$$g = 9{,}80594 - 0{,}02516 \cos 2\lambda$$

Quando $\lambda = 45°$, si ha $\cos 2\lambda = 0$, e $g = 9{,}80594$, e questo sarà il valore della gravità sotto il parallelo di 45°. Questo valore è quello che abbiamo indicato con G, sarà dunque

$$\frac{g}{G} = 1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda :$$

e quindi l' equazione (1) ci darà

$$H = (1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda)\ H_\lambda$$

come nel testo.

NOTE ALLA LEZIONE XVIII.

Nota I.

Dimostrazione della formola pel calcolo delle altezze col mezzo delle osservazioni barometriche..

1. Una rappresentazione della tavola, di cui si parla nel testo, può aversi dal seguente schemma, nel quale la prima colonna contiene i termini rappresentanti le altezze degli strati, la terza colonna le pressioni o densità corrispondenti, e la seconda è stata introdotta di più per far vedere come i numeri della terza sono formati sottraendo dal termine precedente una quantità proporzionale allo stesso termine nella ragione di $1 : \eta$, e ponendo per brevità $1 - \eta = \rho^i$.

Altezza dello strato		Densità dello strato
o		H
.		
.		
.		
n	. . . . .	$H\rho^n$
$n+i$	$H\rho^n - \eta H\rho^n$	$H\rho^{n+i}$
$n+2i$	$H\rho^{n+i} - \eta H\rho^{n+i}$	$H\rho^{n+2i}$
$n+3i$	$H\rho^{n+2i} - \eta H\rho^{n+2i}$	$H\rho^{n+3i}$
$n+4i$	$H\rho^{n+3i} - \eta H\rho^{n+3i}$	$H\rho^{n+4i}$

Se si indica con $z = n + \sigma i$ l'altezza dello strato, o l'argomento di un termine qualunque di questa tavola, ed $h = H\rho^{n+\sigma i}$ sia la densità, pressione, od altezza barometrica corrispondente, si avrà dunque

$$h = H\rho^z$$

e quindi dividendo per H e prendendo i logaritmi dall'una e dall'altra parte

$$z \log \rho = \log \frac{h}{H};$$

o più semplicemente

$$(1) \qquad -k \,.\, z = \log \frac{h}{H},$$

ponendo $-k$ in luogo di $\log \rho$, e prefiggendogli il segno $-$, perchè ρ deve essere frazionario, e perciò $\log \rho$ negativo.

Volendo adattare le costanti H e k contenute nella formola precedente a rappresentare la relazione fra le altezze e le pressioni barometriche, si può da prima osservare che in questo caso H deve dinotare l'altezza della colonna barometrica del primo strato corrispondente all'indice o, come rilevasi dal premesso schemma. Infatti quando $z = o$, nella precedente equazione deve essere $\log \frac{h}{H} = o$, $\frac{h}{H} = 1$, e quindi $h = H$, cioè H deve dinotare la pressione corrispondente all'altezza nulla.

Per avere il valore di k supponiamo che partendo dalla stazione infima si monti un poco col barometro, talchè h diventi $H - i$, i essendo una quantità tanto piccola quanto vogliamo, e quindi assumibile entro il limite di un'altezza, nella quale l'aria possa considerarsi avere, con un errore minore d'ogni quantità assegnabile, una densità costante; allora saremo nel caso semplice, di cui si è parlato nel testo, cioè l'altezza, a cui si è trasportato il barometro, e la depressione i della colonna barometrica corrisponderanno l'una all'altezza di una colonna d'aria, l'altra a quella di una colonna di mercurio equivalente in peso. Indicando rispettivamente con d e Δ la densità dell'aria e del mercurio, ed osservando che esse sono proporzionali ai pesi specifici delle rispettive sostanze, dovrà dunque essere

$$d \,.\, z = \Delta \,.\, i$$

e quindi

$$z = \frac{\Delta}{d}\, i$$

e l'equazione (1) ci darà

$$k \frac{\Delta}{d}\, i = -\log \frac{H - i}{H} = -\log \left(1 - \frac{i}{H}\right) = M \left(\frac{i}{H} + \tfrac{1}{2} \frac{1^2}{H^2} + \text{ec.}\right)$$

M essendo il modulo dei logaritmi tabulari per poter far uso, nell'impiego dell'equazione (1), delle tavole comuni.

L'ultima equazione è tanto più esatta quanto i è più piccolo, perchè il primo membro è, come si è detto, soltanto il valore di kz corrispondente ad una densità costante, ciò che è tanto più vero quanto i è minore. Dividendo dunque un membro e l'altro dell'equazione per i, e poi facendo $i = o$, si avrà rigorosamente

$$k\frac{\Delta}{d} = \frac{M}{H}$$

da dove si deduce

$$(2) \qquad k = \frac{d}{\Delta} \cdot \frac{M}{H}$$

sostituendo questo valore di k nell' equazione (1) e dividendo essa diverrà

$$(3) \qquad z = \frac{\Delta}{d} \cdot \frac{H}{M} \log \frac{H}{h}.$$

Nelle note della prossima lezione vedremo, che la ragione della densità dell' aria atmosferica a quella del mercurio è data dalla formola

$$\frac{d}{\Delta} = \frac{H\,(1 - 0{,}002566\,\cos^2\lambda)\,\left(1 - \frac{\alpha Z}{r}\right)\,\left(1 - \frac{5}{8}\frac{\Upsilon}{H}\right)}{0{,}76\,.\,10466{,}82\,(1 + \varepsilon T)}$$

λ, α, ed r avendo le stesse significazioni che nell' art. 15 della Lezione XVII, Z, T, Υ dinotando l' altezza della stazione, la temperatura dell' aria atmosferica, e la tensione del vapor acqueo esistente in essa esplorata con un igrometro, ed essendo ε il coefficiente di dilatazione dell' aria pel calore eguale a 0,00365 secondo Rudberg (1), e della cui determinazione parleremo nella lezione seguente.

Volendo considerar i valori di Z, T, Υ come costanti in tutta la colonna d' aria fra le due stazioni, sarà più esatto di prendere per Z, l' altezza media $\frac{Z + Z + z}{2}$ fra le due stazioni estreme, per T la temperatura media $\frac{T + t}{2}$, e per Υ la tensione media $\frac{\Upsilon + v}{2}$ osservate nelle stesse stazioni. Sarà così

$$(4) \qquad \frac{d}{\Delta} = \frac{H\,(1 - 0{,}002566\,\cos\lambda)\,\left(1 - \alpha\frac{2Z + z}{2r}\right)\,\left(1 - \frac{5}{8}\frac{\Upsilon + v}{2H}\right)}{0{,}76\,.\,10466{,}82\,\left(1 + \varepsilon\frac{T + t}{2}\right)}.$$

La formola (3) colla sostituzione di questa espressione di $\frac{d}{\Delta}$, e collo sviluppo dei fattori del denominatore in serie sino al secondo termine incluso, ciò che è sufficiente, diverrà

$$z = \frac{0{,}76\,.\,10466{,}8^2}{M}\,\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(T + t)\right)\,\left(1 + \frac{5}{16}\frac{\Upsilon + v}{H}\right)\,(1 + 0{,}002566\,\cos^2\lambda)$$
$$1 + \alpha\frac{2Z + z}{2r}\Big)\,\log\,\frac{H}{h}$$

(1) Secondo le recenti esperienze di Ragault si ha $\varepsilon = 0{,}003665$.

Le altezze H ed h vanno pure ridotte comparabili applicandovi le correzioni che abbiamo indicato nella Lezione XVIII, cosicchè chiamando H' ed h' le altezze osservate si dovrà prendere (art. 15 della Lez. citata).

$$H = H' \,(1 - \delta\,\Theta)\,\,(1 - 0{,}002566\,\cos 2\,\lambda)\,\,\left(1 - \frac{\alpha\,Z}{r}\right) + C$$

$$h = h' \,(1 - \delta'\,\theta)\,\,(1 - 0{,}002566\,\cos 2\,\lambda)\,\,\left(1 - \alpha\,\frac{Z + z}{r}\right) + c$$

e quindi sarà, con bastante approssimazione

$$\frac{H}{h} = \frac{H'}{h'}\,(1 - \delta\,\Theta + \delta\,\theta)\,\left(1 + \frac{\alpha\,z}{r}\right) + \frac{C}{H'} - \frac{c}{h'}$$

e la formola finale espressa dalle quantità direttamente date dalle osservazioni diverrà

$$(\mathrm{A}) \quad z = \frac{0^{\mathrm{m}},76 \,.\, 10466{,}8^2}{M} \,.\, \left(1 + \varepsilon\,\frac{T + t}{2}\right)\,\left(1 + \tfrac{5}{16}\,\frac{\Upsilon + v}{H}\right)\,(1 + 0{,}002566\,\cos 2\,\lambda)$$
$$\left(1 + \alpha\,\frac{2\,Z + z}{2\,r}\right) \times \log . \frac{H'}{h'}\left\{(1 - \delta\,\Theta + \delta\,\theta)\,\left(1 + \frac{\alpha\,z}{r}\right) + \frac{C}{H'} - \frac{c}{h'}\right\}$$

che è la formola data nel testo.

ADDIZIONE

Della modificazione che arrecherebbe alla formola per la misura delle altezze col mezzo delle osservazioni barometriche l' ipotesi di Dalton sulla costituzione dell' atmosfera.

Dalton fondandosi sulla considerazione che i gas, che non esercitano azione chimica reciproca, si spandono, e si pongono in equilibrio ciascuno da se, come se gli altri non esistessero e vi si trovassero frammisti, ha conchiuso che i fluidi aeriformi componenti l' aria atmosferica devono ciascuno formare un' atmosfera a parte. Tenendo soltanto conto dell' ossigene e del nitrogene, che compongono quasi la totalità dell' aria comune, è chiaro che l' atmosfera del gas ossigeno, il quale ha una gravità specifica maggiore, deve avere una densità più rapidamente decrescente di quella del gas nitrogene. Siccome secondo questa costituzione di atmosfera la legge fra le altezze e le pressioni barometriche corrispondenti può soffrire qualche modificazione, così ne stabiliremo ora un confronto.

Considerando come unico il fluido aeriforme componente l' atmosfera la formola (1) ci dà

$$\frac{h}{H} = e^{-k\,z}$$

Ma se si considera l' atmosfera come composta di una porzione in vo-

lume ω di ossigeno della densità μd, e di una porzione in volume $1 - \omega$ di nitrogene della densità νd si avrà primieramente

$$\omega \mu d + (1 - \omega) \nu d = d$$

da dove si ricava

$$\omega = \frac{1 - \nu}{\mu - \nu} \quad ; \quad 1 - \omega = \frac{\mu - 1}{\mu - \nu}.$$

Poi, considerando che la porzione w di ossigeno dilatata in tutto il volume, preso per unità, e che la porzione $1 - w$ di nitrogene pure dilatata nello stesso volume esercitano parzialmente delle pressioni che stanno a quella totale dell'atmosfera rispettivamente come $w : 1$, e come $1 - w : 1$ (art. 8 della Lezione XIX); e che i valori corrispondenti del coefficiente k si ottengono cambiando rispettivamente nella formola (2) d in μd e νd, si vedrà che l'equilibrio parziale delle due atmosfere esige che si abbia per ciascun gas l'equazione

$$h' = \omega H e^{-k\mu z} \qquad h'' = (1 - \omega) H e^{-k\nu z}$$

e come $h' + h''$ deve comporre l'altezza totale h barometrica alla stazione superiore, si avrà sostituendo per ω ed $1 - \omega$ i loro valori

$$\frac{h}{H} = \frac{1 - \nu}{\mu - \nu} e^{-k\mu z} + \frac{\mu - 1}{\mu - \nu} e^{-k\nu z}$$

Per mettere questa formola in numeri si osserverà che le esperienze dirette danno per μ e ν i valori $\mu = 1{,}1024$ per l'ossigeno, e $\nu = 0{,}9728$ pel nitrogene, da dove si deduce

$$\mu - 1 = 0{,}1024 \qquad 1 - \nu = 0{,}0272$$

$$\frac{1 - \nu}{\mu - \nu} = 0{,}21 \qquad \frac{\mu - 1}{\mu - \nu} = 0{,}79$$

Se dunque diamo all'espressione precedente la forma

$$\frac{h}{H} = e^{-kz} \left\{ \frac{1 - \nu}{\mu - \nu} e^{-k(\mu - 1)z} + \frac{\mu - 1}{\mu - \nu} e^{k(1-\nu)z} \right\},$$

i coefficienti $k(\mu - 1)$ e $k(1 - \nu)$ essendo assai piccoli, potremo sviluppare gli esponenziali in serie, e si avrà

$$\frac{h}{H} = \frac{1 - \nu}{\mu - \nu} e^{-kz} \left\{ 1 - k(\mu - 1) z + \frac{k^2 (\mu - 1)^2}{2} z^2 - \frac{k^3 (\mu - 1)^3}{2 \cdot 3} z^3 \text{ ec.} \right\}$$

$$+ \frac{\mu - 1}{\mu - \nu} e^{-kz} \left\{ 1 + k(1 - \nu) z + \frac{k^2 (1 - \nu)^2}{2} z^2 + \frac{k^3 (1 - \nu)^3}{2 \cdot 3} z^3 \text{ ec.} \right\}$$

e riducendo sarà

$$\frac{h}{H} = e^{-kz} \left(1 + \frac{(1-\nu)\,(\mu-1)}{2} k^2 z^2 + \text{ec.}\right):$$

il terzo termine riuscendo affatto insensibile.

Dai precedenti valori di $1-\nu$ e $\mu-1$ si ha $\frac{(1-\nu)\,(\mu-1)}{2} =$ 0,0013926: la piccolezza di questo fattore ci permette di assumere per k^2 il valore che risulta dalla sua espressione (2) riducendo all' unità tutti i fattori che nell' espressione di $\frac{d}{\Delta}$ (form. 4) ne differiscono pochissimo, cioè di prendere $k = \frac{1}{0{,}76\,.\,10466{,}8} = 0{,}00012571$. Ponendo dunque

$$\frac{(1-\nu)\,(\mu-1)}{2}\, k = 0{,}000{,}000{,}17507 = \gamma\,,$$

sarà

$$\frac{h}{H} = e^{-kz}\,(1 + \gamma\, k\, z^2)\,;$$

e quindi prendendo i logaritmi

$$\frac{1}{M\,k} \log \frac{H}{h} = z - \frac{1}{k} \log\,(1 + \gamma\, k\, z^2).$$

Abbiamo dato al primo logaritmo il divisore M per poter prendere questo logaritmo nelle tavole. Sviluppando il secondo logaritmo iperbolico in serie e fermandoci al secondo termine avremo

$$z - \gamma\, z^2 = \frac{1}{M\,k} \log \frac{H}{h}\,, \text{ o sia } z = \frac{1}{M\,k} \log \frac{H}{h} + \gamma\, z^2.$$

Il primo termine del secondo membro è la stessa quantità che serve a calcolare z nella formola (A): d' onde appare che l' altezza calcolata colla formola comune è minore di quella che risulta nella costituzione dell' atmosfera di Dalton di un termine proporzionale al quadrato di z.

Se si calcola questo termine per le altezze z espresse in metri registrate nella seguente tavoletta, la quantità da aggiungersi nel caso della costituzione atmosferica di Dalton facendo uso del valore su esposto di γ saranno quelli della seconda colonna.

Altezze	Correzioni
1000^{m}	0^{m},2
2000	0 ,7
4000	2 ,8
6000	6 ,3
8000	11 ,2
10000	17 ,5

Il confronto riferito in questa nota, è stato fatto la prima volta dal sig. Babinet, il quale fece osservare che le suddette correzioni quantunque piccole sembrano avvicinare i risultati del calcolo un poco più alla verità.

NOTE ALLA LEZIONE XIX.

Nota I.

Formole esprimenti le variazioni di volume o di densità delle sostanze aeriformi prodotte dai cambiamenti di pressione o di temperatura.

1. Dimostreremo in questa nota alcune formole che derivano dalla combinazione delle leggi sulla forza espansiva dell' aria, di cui abbiamo parlato nel testo, e che sono di grandissima utilità in tutte le investigazioni fisiche e chimiche concernenti i gas o vapori.

Se stando la pressione manometrica costante ed eguale a $0^m,76$ si suppone che la temperatura passi da 0° a t gradi, una massa d' aria che nella temperatura zero aveva un volume V verrà aumentando il suo volume per t volte la frazione 0,00375 secondo Gay-Lussac, o la frazione 0,00365 secondo il Sig. Rudberg (1). L' aumento del suo volume sarà quindi dato da $\varepsilon t V$, ε indicando una delle due dette frazioni, ed il suo volume v' nella temperatura t verrà espresso da

$$(1) \qquad v' = V + \varepsilon t V = V (1 + \varepsilon t) .$$

Supponiamo ora che anche la pressione varii, e venga ad essere misurata da una colonna di mercurio eguale ad h: questa massa d' aria prenderà un volume, che secondo la legge di Boyle o Mariotte si calcolerà colla proporzione

$$0^m,76 \; : \; h \; :: \; \frac{1}{v'} \; : \; \frac{1}{v}$$

la quale dà

$$(2) \qquad v = v' \frac{0^m,76}{h} .$$

Ponendo in luogo di v' il suo valore (1) trovato precedentemente ed espresso pel volume V corrispondente alla temperatura zero si deduce

$$(3) \qquad v = V . \frac{0,76 \; (1 + \varepsilon t)}{h} .$$

Questa formola serve per calcolare il volume V di una massa aeriforme corrispondente alla temperatura t e sotto la pressione h, quando

(1) Ovvero t volte la frazione 0,003665 secondo il Sig. Regnault.

si conosce il volume V corrispondente alla temperatura zero, ed alla pressione media barometrica $0^m,76$.

Come le densità di una stessa massa stanno in ragione inversa dei volumi, se rappresentiamo con D la densità della suddetta massa aeriforme nella temperatura zero e sotto la pressione $0^m,76$, e con d la densità nella temperatura t, e sotto la pressione h, si avrà

$$v : V :: \frac{1}{d} : \frac{1}{D}$$

o sia

$$d = D. \frac{V}{v}$$

e sostituendo per $\frac{v}{V}$ il valore che si ricava dalla formola (3)

$$d = D. \frac{h}{0{,}76\ (1 + \varepsilon t)} .$$

I valori delle densità dei varii fluidi aeriformi, che si trovano nelle tavole dei Trattati di Fisica, sono comunemente quelli che corrispondono alla temperatura zero ed alla pressione $0^m,76$. Per mezzo della formola precedente si potrà dedurre dal valore della densità data dalla tavola quello che corrisponde ad una temperatura t, e ad una pressione h; e viceversa conoscendo con un esperimento la densità di un gas nella temperatura t e sotto la pressione h si potrà ricavare la densità normale corrispondente alla temperatura zero, ed alla pressione media $0^m,76$ colla formola

$$(4) \qquad D = d \frac{0{,}76}{h} (1 + \varepsilon t)$$

e confrontarla con quella della tavola, o pure registrarla in essa se è un gas nuovamente esaminato.

2. Vi è però ancora una riduzione importante da fare. La colonna di $0^m,76$, che serve di misura all'elasticità del gas, corrispondente alla densità normale, ha un peso diverso in diverse latitudini ed a diverse altezze sul livello del mare, per cui verrebbe a corrispondere a diverse pressioni, e quindi a densità diverse del gas, secondo il luogo in cui quella colonna si suppone esistere. Onde le densità dedotte dagli esperimenti fatti in diversi luoghi siano le stesse e comparabili fra di loro, conviene che queste densità siano riferite ad una pressione manometrica di $0^m,76$ in un luogo fisso, e si sceglie per questo luogo il parallelo di 45° al livello del mare. Allora, per rimpiazzare sotto un parallelo qualunque e ad un'altezza qualunque una colonna manometrica di mercurio equivalente in peso ad una posta sotto il parallelo di 45° ed al livello del mare abbiamo visto (Lez. XVII art. 13, e 14) che dobbiamo prenderla eguale a quest'ultima moltiplicata pel rapporto $\frac{G}{g}$ della gravità dei due luoghi, cioè moltiplicata per $\frac{1}{1 + 0{,}002566 \cos 2\lambda}$

onde tener conto della differenza di latitudine, e per $\frac{1}{1-\frac{a\,z}{r}}$ onde tener conto dell'elevazione, α essendo eguale a 2, o vero a $\frac{6}{4}$, secondo che si è salito nell'aria libera in un globo areostatico, o vero su di una montagna.

Sostituendo dunque $\frac{0^{m},76}{(1-0,002566\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha\,z}{r}\right)}$ a $0^{m},76$ nella formola (4), avremo per un luogo qualunque

$$D = d\,\frac{0^{m},76}{h}\cdot\frac{(1+\varepsilon\,t)}{(1-0,002566\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha\,z}{r}\right)};$$

dalla quale si ricava viceversa

$$\frac{d}{D} = \frac{h\,(1-0,002566\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha\,z}{r}\right)}{0^{m},76\,(1+\varepsilon\,t)}.$$

3. Questa formola è facilmente applicabile alla ricerca del rapporto della densità di un gas, sotto una pressione h ed in una temperatura t in un luogo qualunque, a quella di un liquido in una temperatura data. Così sapendosi dagli esperimenti dei Sigg. Biot e Arago che, nel parallelo di 45° al livello del mare sotto la pressione manometrica di $0^{m},76$ e nella temperatura 0°, la densità dell'aria è a quella dell'acqua come 1 : 769,7205, e che la densità dell'acqua è a quella del mercurio nella stessa temperatura di 0° come 1 : 13,598207, sarà la densità dell'aria nelle circostanze suddette a quelle del mercurio come 1 : 10466,82, o sia detta Δ la densità del mercurio si avrà $\Delta = 10466,82\,D$, ed eliminando D dalla precedente espressione si avrà

$$\frac{d}{\Delta} = \frac{h\,(1-0,002566\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha\,z}{r}\right)}{0,76\times 10466,82\,(1+\varepsilon\,t)}.$$

4. Secondo le sperienze di Gay-Lussac la densità del vapor acqueo è a quella dell'aria in pari circostanze come 10 : 16. Questo rapporto, per le leggi esposte nella Lezione XIX, si conserva costante se l'una e l'altra di queste due sostanze aeriformi si trovano sempre sommesse a delle pressioni e delle temperature rispettivamente eguali. Rappresentando dunque Υ la tensione del vapore, la sua densità d' in parti di quella del mercurio alla temperatura 0° sarà data da

$$\frac{d'}{\Delta} = \frac{10}{16}\cdot\frac{\Upsilon}{0,76}\,\frac{(1-0,002566\cos 2\lambda)\left(1-\frac{\alpha\,z}{r}\right)}{10466,82\,(1+\varepsilon\,t)}.$$

Se si ha un mescuglio d'aria secca e di vapor acqueo, come general-

mente è l' aria atmosferica, la densità o pressione dell' aria essendo dinotate rispettivamente da d' ed h, e quello del vapor acqueo da d'' e Υ, in modo che la densità del mescuglio sia $d = d' + d''$, il rapporto di questa densità a quella del mercurio si otterrà sommando le due precedenti equazioni, e si avrà

$$\frac{d}{\Delta} = \frac{(1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda)\left(1 - \frac{\alpha z}{r}\right)}{0{,}76.\ 10466{,}82\ (1 + \varepsilon t)}\left(h + \frac{10}{16}\Upsilon\right).$$

Per la legge di Dalton, che abbiamo esposto all' art. 8 Lez. XIX la forza elastica, o la pressione, a cui resiste il mescuglio, è eguale alla somma delle due pressioni $h + \Upsilon$ rispettive di ciascuno dei due fluidi. Se quindi si chiama H questa somma, e si pone nella formola precedente $\Upsilon - \frac{6}{16}\Upsilon$ in luogo di $\frac{10}{16}\Upsilon$, alla medesima potremo dare la forma

$$\frac{d}{\Delta} = \frac{H\ (1 - 0{,}002566 \cos 2\lambda)\left(1 - \frac{\alpha z}{r}\right)\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\Upsilon}{H}\right)}{0{,}76.\ 10466{,}82\ .\ (1 + \varepsilon t)}.$$

Così conoscendo la pressione H per mezzo del barometro, la tensione Υ coll' igrometro di Daniell e la temperatura t, si potrà con questa formola calcolare per un luogo qualunque il rapporto della densità dell' aria atmosferica a quella del mercurio nella temperatura di 0°. Questo rapporto è quello di cui abbiamo fatto uso per stabilire la formola, che serve al calcolo delle altezze delle stazioni sul livello del mare, per mezzo delle altezze barometriche ivi osservate.

Nota II.

Formola pel calcolo della forza espansiva di una massa d' aria che cambii alcun poco di volume senza perdita di calore.

1. Per analizzare la questione proposta nel testo e dimostrare la formola data, supponiamo che una massa d' aria nella temperatura Θ con una densità δ corrispondente ad una pressione p venga ad un tratto compressa e ridotta alla densità δ' senza che il calore fatto sensibile o libero abbia avuto il tempo di dissiparsi. Se si indicano con θ i gradi di cui la temperatura avrà aumentato, potremo esprimere la sua forza espansiva, o la pressione p che la misura, osservando che essa sarà cresciuta per causa dell' incremento di densità nella ragione di $\delta' : \delta$ e per causa dell' incremento di temperatura nella ragione di $1 + \varepsilon\Theta + \varepsilon\theta : 1 + \varepsilon\Theta$, di modo che sarà data da

$$(1) \qquad p' = p\,\frac{\delta'}{\delta}\,.\,\frac{1 + \varepsilon\Theta + \varepsilon\theta}{1 + \varepsilon\Theta}$$

Supponiamo ora che si lasci dissipare il calore che costituisce l' aumento

θ di temperatura, chiamando p'' la sua pressione in questo nuovo stato si avrà

$$p'' = p\,\frac{\delta'}{\delta}$$

Quindi indicando con δw l'aumento di densità prodotto dalla compressione, di modo che sia

$$\delta' = \delta\,(1 + w)$$

si avrà colla sostituzione di questo valore nelle formole (1), (2)

$$(2) \qquad \frac{p'}{p} = (1 + w)\,\left(1 + \frac{\varepsilon\,\theta}{1 + \varepsilon\,\Theta}\right);$$

$$\frac{p''}{p} = 1 + w:$$

da dove si ricaverà primieramente

$$1 + \frac{\varepsilon\,\theta}{1 + \varepsilon\,\Theta} = \frac{p'}{p''}$$

e quindi

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon\,\theta}{w\,(1 + \varepsilon\,\Theta)} = \frac{p\,(p' - p'')}{p''\,(p'' - p)}$$

Nel primo membro di questa formola $\frac{\varepsilon\,\theta}{1 + \varepsilon\,\Theta}$ è proporzionale alla variazione di pressione dovuta all'aumento di temperatura, come ω è proporzionale alla variazione di pressione dovuta all'aumento di densità, si potrà dunque determinare la ragione delle variazioni della pressione dovute rispettivamente ai due detti aumenti conoscendo soltanto i valori delle tre pressioni p, p', p'' dell'aria nei tre stati, prima della compressione, seguita la compressione avanti che il calore fatto libero sia menomamente dissipato, e dopo che l'aria è ritornata alla temperatura precedente.

Désormes e Clément per mezzo di 60 esperimenti, fatti nella temperatura di 12°,5 centigradi, hanno trovato per un medio (1)

$$p = 752^{mm},69 \qquad p' = 766^{mm},56\ (2) \qquad p'' = 762^{mm},90$$

si avrà dunque

(1) Détermination expérimentale du zéro absolu de chaleur et du calorique spécifique des gaz (Journal de Physique, Novembre et Décembre 1819, e *per estratto nella* Bibliothèque universelle, Février et Juin 1820).

(2) La pressione direttamente osservata era propriamente $766^{mm},5$; noi l'abbiamo accresciuta nella proporzione di $\frac{p'}{p}\,(p' - p'')$ per tener anche conto dell'effetto sull'aria esterna introdotta nel recipiente dove avvenne la condensazione.

$$\frac{\varepsilon\,\theta}{w\,(1+\varepsilon\,\Theta)} = \frac{752{,}69}{762{,}90}\,\frac{3{,}66}{10{,}21} = 0{,}3585 \quad (1)$$

Gay-Lussac e Welther fecero degli esperimenti analoghi lasciando invece dilatare rapidamente dell' aria compressa, con che la temperatura veniva ad abbassarsi, e poi aspettando che riprendesse la temperatura di prima, che era di circa 13°. Con questi esperimenti hanno avuto (2)

$$p = 773^{mm},36\,, \qquad p' = 757^{mm},0\,, \qquad p'' = 761^{mm},44$$

La formola (3) è egualmente applicabile a questo caso, e si ottiene

$$\frac{\varepsilon\,\theta}{w\,(1+\varepsilon\,\Theta)} = \frac{773{,}36}{761{,}44}\,\frac{4{,}44}{11{,}92} = 0{,}3726$$

Questo valore differisce assai poco dal precedente e si potrebbe per un medio prendere per valore comune 0,3655 (3).

2. In generale questi ultimi sperimentatori hanno verificato che, partendo dalla temperatura di $-20°$ centigradi sino a quella di $+40°$; e da una pressione di 144^{mm} sino a 1460^{mm}, il valore del rapporto $\frac{\varepsilon\,\theta}{w\,(1+\varepsilon\,\Theta)}$ dato dalla formola (3) rimane costante ed espresso dal numero precedente. Se si indica con γ questo numero costante, sarà dunque

$$(4) \qquad \frac{\varepsilon\,\theta}{w\,(1+\varepsilon\,\Theta)} = \gamma\,, \text{ ed } \varepsilon\,\theta = \gamma\,(1+\varepsilon\,\Theta)\,w$$

e sostituendo questo valore di $\varepsilon\,\theta$ nella formola (2), si avrà

$$\frac{p'}{p} = (1+w)\,(1+\gamma\,w) = 1 + (1+\gamma)\,w + \text{ec.}$$

trascurando i termini moltiplicati per w^2, quando non si vogliano comprendere che delle piccole condensazioni. In questo caso si avrà anche entro lo stesso grado d' approssimazione

$$(1+w)^{1+\gamma} = 1 + (1+\ ,\ )\,w\,;$$

dunque sostituendo avremo

$$(5) \qquad \frac{p'}{p} = (1+w)^{1+\gamma} = \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^{1+\gamma}$$

(1) I due suddetti sperimentatori hanno consigliato di accrescere questo numero di un' ottava parte, onde tener conto del calore che veniva disperdendosi durante il tempo, benchè brevissimo, in cui durava la compressione; così il giusto valore secondo essi sarebbe 0,4081.

(2) Connaissance des temps 1825, et Mécanique céleste vol. 5me pag. 125.

(3) Colla velocità di propagazione del suono si è trovato pel valore dello stesso rapporto il numero 0,421.

Questa formola ci fa vedere che quando la densità δ passa ad essere δ', senza che vi sia dissipazione od assorbimento di calore, il rapporto delle pressioni $p' : p$ cresce come la potenza $1 + \gamma$ del rapporto $\delta' : \delta$ delle densità.

3. Si può osservare che $1 + \gamma$ rappresenta la ragione del calore specifico a pressione costante al calore specifico a volume costante. Infatti se immaginiamo che una massa d'aria, supposta eguale all'unità, presa nella densità $\delta' = \delta\ (1 + w)$ sia riscaldata, conservando la pressione costante, sino a che la sua densità sia divenuta δ, e chiamiamo τ la temperatura necessaria a produrre questa dilatazione, il confronto dei valori della pressione, che è rimasta costante nei due stati, ci darà l'equazione

$$\delta'\ (1 + \varepsilon\,\Theta) = \delta\ (1 + \varepsilon\,\Theta + \varepsilon\,\tau)\,;$$

dalla quale e dalla premessa espressione di δ' si ricava

$$(6) \qquad \varepsilon\,\tau = w\ (1 + \varepsilon\,\Theta).$$

Ora, dinotando con c il calore specifico a pressione costante, la quantità di calore da applicarsi per produrre l'aumento τ di temperatura sarà espressa da

$$\Gamma = c\,\tau.$$

Supponiamo che la stessa massa, senza perdere del calore comunicato le, venga ad essere compressa sino a ridurla un'altra volta alla sua densità primitiva δ', la sua temperatura si eleverà ancor più, e siano θ i gradi di cui si è elevata. Chiamando c' il calore specifico a volume costante, bisognerà dunque che la quantità di calore Γ che è stata atta a produrre i due aumenti di temperatura θ e τ sulla detta massa d'aria, che ha ancora il volume di prima, sia tale da dare

$$\Gamma = c'\ (\theta + \tau).$$

Dal paragone dei due valori di Γ si dedurrà

$$(7) \qquad \frac{c}{c'} = 1 + \frac{\theta}{\tau}$$

Ma dalle formole (4) e (6) si ricava

$$\frac{\theta}{\tau} = \gamma$$

perciò l'equazione precedente darà

$$(8) \qquad \frac{c}{c'} = 1 + \gamma\,,$$

ciò che prova quanto abbiamo sopra asserito.

NOTA AGGIUNTA

Teoremi di Newton sull' attrazione delle sfere.

Nella Lezione VI e nelle Note alle Lezioni IV e VI abbiamo fatto uso dei celebri teoremi di Newton sull' attrazione delle sfere, senza averne dato una dimostrazione. Per compimento di quelle Note aggiungeremo ora la seguente.

1. La prima proposizione che dimostrò Newton fu che, se un punto è situato nell' interno di una superficie sferica, i cui elementi attraggano il punto in ragione inversa del quadrato della distanza, il punto si trova in equilibrio o non riceve tendenza prevalente a trasportarsi da nessuna banda. Infatti sia (fig. 118) P il punto attratto, ed $A\,B\,D$ un circolo massimo della sfera determinato da un piano che passi per lo stesso punto. Da questo punto come vertice immaginiamo che partano due piramidi esili e simili $P\,H$ e $P\,K$ che terminino alla superficie della sfera. Per l'estrema sottigliezza che siamo in arbitrio di dare a queste piramidi riguarderemo le parti della superficie della sfera da esse comprese come le loro basi, e tutti i punti di queste basi come ad egual distanza dal punto P. Osservando che le attrazioni delle due basi sono in ragione del numero dei punti attraenti che contengono, vale a dire proporzionali alla loro estensione, e quindi, per la similitudine delle piramidi (1) come $\overline{P\,H}^2 : \overline{P\,K}^2$, e che le forze attrattive dei punti che le compongono, stando in ragione inversa dei quadrati delle rispettive distanze, sono come $\overline{P\,K}^2 : \overline{P\,H}^2$, si vedrà che, componendo le due proporzioni, quelle due attrazioni risultano eguali fra loro, e tengono il punto P in equilibrio. Lo stesso argomento potendosi ripetere su tutte le coppie di piramidi simili che è possibile di condurre dal punto P a tutti gli elementi della superficie sferica, e le supposizioni fatte per arrivare alla precedente conclusione essendo tanto più esatte quanto più piccoli sono gli elementi che si considerano, dovremo risguardare in ogni direzione le attrazioni degli elementi opposti della superficie sferica sul punto P come costantemente eguali, ed il punto P in equilibrio.

2. La seconda proposizione stabilita da Newton è che, posta la legge delle forze attrattive in ragione inversa del quadrato delle distanze, l' attrazione di una superficie sferica su di un punto esterno è tanta come se tutta la massa della superficie fosse riunita nel centro.

Sia (fig. 119) P il punto attratto e rappresenti $A\,B\,D$ una sezione della sfera fatta da un piano che passi per la retta che congiunge il punto P col centro C della sfera. Dal punto P conduciamo due rette $P\,M\,M'$, $P\,N\,N'$ che comprendano un angolo così piccolo quanto ci piace

(1) Legendre Géométrie Livre VII Prop. XXIII. Scolio; e Liv. III. Prop. VIII.

di sceglierlo; e consideriamo l'attrazione sul punto P delle due zone che sarebbero generate da una rivoluzione degli archi MN, $M'N'$ intorno al diametro AD. La superficie di queste zone per l'estrema piccolezza che possiamo dare agli archi MN ed $M'N'$ potrà essere rappresentata rispettivamente da $2\pi MN.TM.$ e $2\pi M'N'.T'M'$; essendo TM e $T'M'$ le due perpendicolari abbassate da punti M ed M' sul diametro AD, e π dinotando il rapporto della circonferenza al diametro (1). Considerando che l'attrazione è proporzionale al numero dei punti attraenti o alla grandezza delle superficie che li contengono ed è in ragione inversa del quadrato della distanza, facilmente si rileva che le attrazioni dei due elementi delle zone che sarebbero compresi fra due situazioni prossime e successive del piano ABD mentre descrive una piccola porzione ε dell'intera sua rivoluzione, sono rappresentate da

$$g\varepsilon.2\pi.\frac{MN.TM}{\overline{PM}^2} \qquad \text{e } g\varepsilon.2\pi.\frac{M'N'.T'M'}{\overline{PM'}^2}$$

g dinotando l'attrazione corrispondente alla massa uno, ed alla distanza uno.

Dalla parte del diametro AD opposta ai raggi TM e $T'M'$ si troveranno sulle due dette zone due altri elementi rispettivamente uguali che eserciteranno un'eguale attrazione: ed è evidente che decomponendo le attrazioni dei due elementi opposti in due forze una perpendicolare al diametro AD, l'altra nella direzione di questo diametro, le due prime componenti eguali e contrarie si distruggeranno e non resteranno attive che le due altre che saranno pure uguali ma che agiranno nella stessa direzione da P verso C. Ora queste seconde componenti si ottengono, per le formole date nella Nota II della Lezione VII, moltiplicando le due forze pel coseno dell'angolo MPC, o o sia per uno dei rapporti $PT : PM$ o vero $PT' : PM'$, si avranno così le due attrazioni

(1) La superficie delle zone, conducendo da N ed N' le due perpendicolari Ns, $N's'$ sopra MT ed $M'T'$, sarebbero date rispettivamente da $\pi.Ns.CM$ e $\pi.NS.CM'$ (Legendre Géométrie Liv. VIII. e Prop. XI): ma considerando gli archi MN ed $M'N'$ come rettilinei e perpendicolari a CM e CM', la similitudine dei triangoli MNs, CMT; $M'N's'$, $CM'T'$ ci dà rispettivamente $Ns.CM = MN.TM$ ed $N's'.CM' = M'N'.T'M'$, si avranno così colla sostituzione di questi prodotti le espressioni surriferite.

Si terrà presente che il principio che serve a questa specie di dimostrazioni è, come abbiamo già osservato nelle Nota II della Lez. II, che le quantità che non introdurrebbero nelle formole che dei termini il cui rapporto col valore principale convergesse verso lo zero coll'assumere sempre più piccoli gli elementi che si considerano, possono trascurarsi quando si ha da passare dal discontinuo al continuo, perchè quei termini avrebbero un valore inassegnabile, che sarebbe in nostro arbitrio d'impiccolire oltre ogni limite, e quindi avrebbero un valore indipendente dall'espressione che si cerca.

$$2g\varepsilon \cdot 2\pi \frac{MN \cdot TM}{\overline{PM}^2} \frac{PT}{PM} \qquad \text{e } 2g\varepsilon \cdot 2\pi \frac{M'N' \cdot T''M'}{\overline{PM'}^2} \frac{PT'}{PM'} :$$

e quindi prendendo la somma di tutti gli elementi che compongono il contorno delle due zone, o facendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, saranno le rispettive attrazioni esercitate da esse sul punto P espresse da

$$(1) \qquad g\,2\pi \cdot \frac{MN \cdot TM}{\overline{PM}^2} \frac{PT}{MP} \qquad \text{e } g\,2\pi \cdot \frac{M'N' \cdot T''M'}{\overline{PM'}^2} \frac{PT'}{PM'}$$

Queste due espressioni sono suscettibili di un' utile trasformazione. Infatti se s' immaginano elevate le MQ, $M'Q'$ ed FC perpendicolari su PM', è facile il vedere che considerando, per la piccolezza degli archi MN, $M'N'$, come rettilinei i triangoli MNQ ed $M'N'Q'$, e come retti gli angoli MQN, ed $M'Q'N'$ si ha

$$\frac{MN}{MQ} = \frac{MC}{MF} = \frac{M'N'}{M'Q'} \qquad \text{ed} \qquad \frac{MQ}{PM} = \frac{FL}{PF} = \frac{M'Q'}{PM'},$$

dalle quali proporzioni si ricava

$$MN = \frac{MC}{MF} \cdot \frac{PM}{PF} \cdot FL \quad ; \quad M'N' = \frac{MC}{MF} \cdot \frac{PM'}{PF} \cdot FL.$$

Osservando che si ha anche

$$\frac{PT}{PM} = \frac{PF}{PC} = \frac{PT'}{PM'}, \qquad \text{e} \qquad \frac{TM}{PM} = \frac{FC}{PC} = \frac{T'M'}{PM'};$$

colla sostituzione di questi valori nelle formole (1) si ottiene

$$(2) \qquad g\,2\pi \frac{MC \cdot FC \cdot FL}{MF} \cdot \frac{1}{\overline{PC}^2} \quad ; \quad g\,2\pi \frac{MC \cdot FC \cdot FL}{MF} \cdot \frac{1}{\overline{PC}^2}$$

che ci mostrano che le attrazioni esercitate sul punto P dalle due zone, considerate come estremamente sottili, sono eguali fra loro, e che il loro effetto riunito è espresso da

$$(2) \qquad g\,4\pi \frac{MC \cdot FC \cdot FL}{MF} \cdot \frac{1}{\overline{PC}^2}$$

Da questa formola emergono due proposizioni importanti.

Immaginiamo un' altra sfera di un diametro ad che eserciti la sua attrazione su di un punto p, situato ad una tale distanza pc dal suo centro che stia a quella PC, a cui si trova il punto P dal centro della sfera già considerata, nella proporzione dei rispettivi diametri delle due sfere. Indicando con delle lettere minuscole analoghe i punti corrispondenti, che con una costruzione simile alla precedente converrebbe marcare nella nuova figura, avressimo parimenti per rappresentare l' attrazione riunita di due zone simili in questa seconda sfera, la formola consimile alla (2)

$$g\,4\,\pi\,.\,\frac{m\,c\,.\,f\,c\,.\,f\,l}{m\,f}\,\frac{1}{\overline{p\,c}^2}$$

Tutte le linee contenute in questa formola stando nella stessa proporzione con quelle omologhe della formola (2), ed il numeratore e denominatore di queste formole constando ciascuno del prodotto di un egual numero delle stesse linee, i valori risultanti delle due attrazioni saranno eguali, e le due zone simili delle due sfere attrarranno egualmente il punto rispettivo, e perciò, ripetendo la stessa deduzione per tutte le coppie di zone simili in cui le due sfere sono divisibili, si conchiuderà che anche le sfere intere eserciteranno un' attrazione eguale sul rispettivo punto.

Supponiamo ora che le distanze dei punti attratti dai centri delle rispettive sfere stiano in una ragione qualunque fra loro, ma che i diametri delle due sfere siano eguali. Dal punto p attratto dalla seconda sfera (Fig. 120) conduciamo due rette $p\,m\,m'$, $p\,n\,n'$ in modo che le corde $m\,m'$ ed $n\,n'$ siano rispettivamente eguali ad $M\,M'$ ed $N\,N'$, ciò che può sempre farsi costruendo sopra $p\,c$ come ipotenusa due triangoli rettangoli aventi i cateti $c\,f = C\,F$, e $c\,g = C\,G$. La formola (2) applicata a questa nuova superficie sferica darà per l' attrazione delle due zone generate da $m\,n$ ed $m'\,n'$ l' espressione

$$g\,.\,4\,\pi\,.\,\frac{m\,c\,.\,f\,c\,.\,f\,l}{m\,f}\,.\,\frac{1}{\overline{p\,c}^2}$$

Ora osservando che $m\,c$, $f\,c$, $m\,f$ sono rispettivamente eguali ad $M\,C$, $F\,C$, $M\,F$, e che per la piccolezza illimitata degli angoli $l\,c\,g$, $L\,C\,G$ si può risguardare $l\,c = c\,g$ ed $L\,C = C\,G$, per cui risulta anche $f\,l = F\,L$, si vede che l' attrazione delle zone delle due superficie sferiche sono date da due formole composte di quantità eguali, eccetto i due divisori $\overline{P\,C}^2$, e $\overline{p\,c}^2$. L'attrazione delle due zone della prima superficie starà dunque a quella delle due zone della seconda in ragione inversa del quadrato della distanza dei punti attratti. Ora, siccome tanto l' una che l'altra delle due superficie può dividersi colla costruzione su descritta in un numero eguale e corrispondente di zone, ne avverrà che l' attrazione totale di una sfera starà a quella dell' altra pure in ragione inversa dei quadrati $\overline{P\,C}^2$ e $\overline{p\,c}^2$, cioè in ragione inversa dei quadrati delle distanze a cui i punti sono posti dai centri delle rispettive sfere.

Le due proposizioni, ora dimostrate, conducono direttamente alla proposizione più generale che l' attrazione, su di un punto esterno, di una superficie sferica composta di una data quantità di materia è sempre eguale, qualunque sia il diametro che si dia alla superficie. Immaginiamo infatti che una data superficie di un diametro $A\,D$ venga ad impiccolirsi sino ad avere un diametro minore $a\,d$: per la prima proposizione, onde il punto fosse egualmente attratto dovrebbe essere avvicinato in modo che la sua nuova distanza dal centro della superficie sferica fosse a quella di prima come $a\,d : A\,D$. Ciò sarebbe se la nuova

superficie sferica avesse la stessa densità della prima, ma risultando essa dalla condensazione della materia della prima superficie, la sua densità sarà aumentata nella proporzione in cui la superficie ha diminuito, o sia nella proporzione di $\overline{A\,D}^2 : \overline{a\,d}^2$, e perciò anche l'attrazione che è proporzionale alla densità, o quantità di materia attraente sarà aumentata nella stessa ragione. Ora, se si trasporta di nuovo il punto al luogo di prima l'attrazione verrà, per la seconda proposizione, a diminuire nella ragione di $\overline{a\,d}^2 : \overline{A\,D}^2$, dunque l'attrazione sul punto rimarrà la stessa di prima benchè la sfera abbia diminuito di diametro, condensando la stessa quantità di materia sulla sua superficie. Niente limitando la grandezza del raggio a cui si può ridurre la sfera noi possiamo diminuirla indefinitamente sino a trovarsi tutta la materia riunita nel centro, dunque l'attrazione di una superficie sferica è tale quale sarebbe se tutta la sua materia fosse riunita nel centro.

3. Dimostrate queste proposizioni è facile il farne l'applicazione all'attrazione delle sfere. Se il punto che si considera, come attratto, è situato nell'interno della sfera, tutte le superficie sferiche, in cui può suddividersi la sfera, che avranno un raggio più grande della distanza del punto dal centro, e quindi lo comprenderanno nel loro interno, non eserciteranno per la proposizione del n.° 1, alcuna attrazione sovr'esso. Tutte le superficie sferiche che avranno un raggio minore della detta distanza eserciteranno, per la proposizione del n.° 2, un'attrazione sul punto come se la materia che le compone fosse riunita nel loro centro comune. Se la sfera, non solo è composta di cappe omogenee, ma è omogenea nella sua totalità, la quantità di materia che compone tutte le dette superficie sferiche, cioè la materia che compone la sfera interna che ha per raggio la distanza dal centro al punto attratto è proporzionale al cubo di questa distanza (Legendre Géométrie Livre VIII, Prop. XV cor.), e come supposta condensata nel centro la sua azione sul punto sarebbe in ragione inversa del quadrato della sua distanza o del raggio, ne segue che il punto sarà attratto in ragione della sua distanza dal centro.

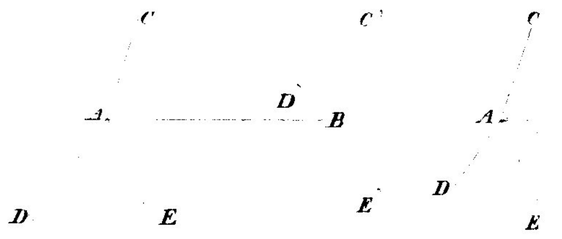
Se il punto che si considera è esterno, l'attrazione di una sfera su di esso sarà, per la proposizione del n.° 2, eguale a quella della massa di tutte le superficie sferiche in cui può concepirsi suddivisa, o sia alla massa totale della sfera supposta riunita nel suo centro e divisa pel quadrato della distanza del punto al centro. Questi ultimi due risultamenti costituiscono i celebri teoremi di Newton sull'attrazione delle sfere.

4. Quando due sfere, composte di materie che esercitano un'azione reciproca in ragione inversa del quadrato della distanza, si attraggono, l'azione di tutti i punti dell'una su quelli dell'altra deve essere reciprocamente eguale all'azione di tutti i punti di questa sui punti della prima. Ma l'azione di tutti i punti della seconda sfera su ciascun punto della prima è tale come se tutti i punti di quella fossero riuniti nel suo

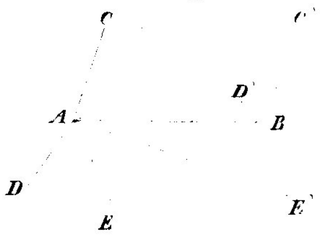
centro, dunque l'attrazione sarà misurata dall'azione di tutti i punti della prima sfera sulla materia della seconda riunita nel centro: ma anche l'azione di tutti i punti della prima sfera è equivalente a quella che essi eserciterebbero se fossero riuniti nel centro, dunque le due sfere si attraggono come se le loro materie fossero riunite nei rispettivi centri.

4. Questi teoremi che abbiamo esposto nel caso di un'attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza, sono egualmente sussistenti nel caso che le materie esercitassero fra loro una repulsione che seguisse la stessa legge.

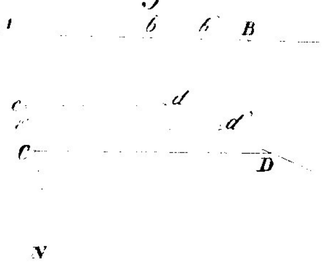
1



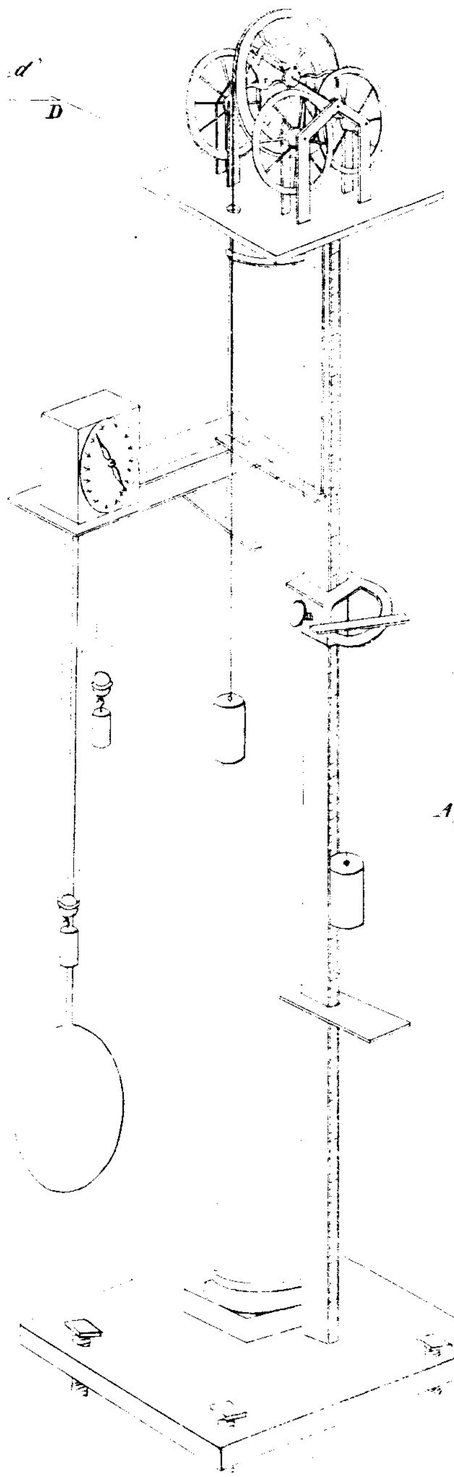
2



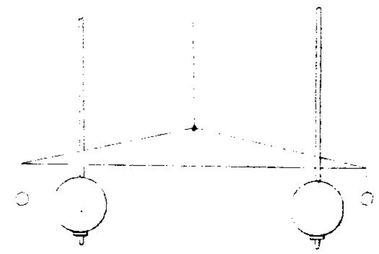
3



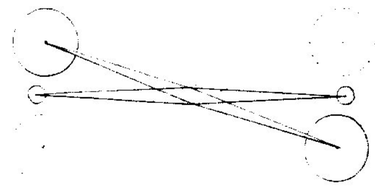
4



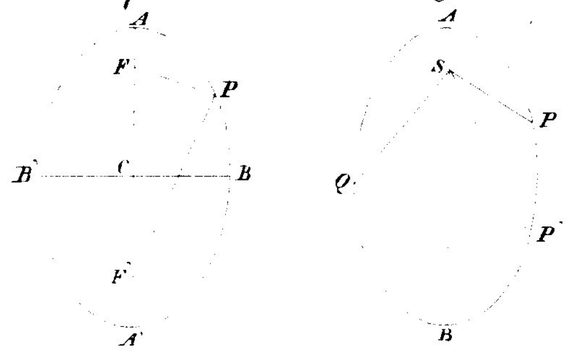
5



6



7



8

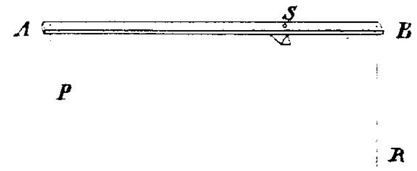
9



10



11



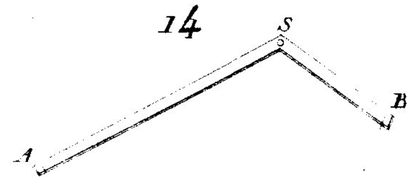
12



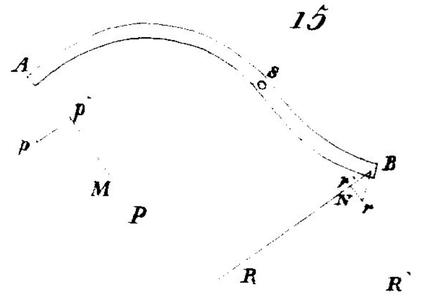
13



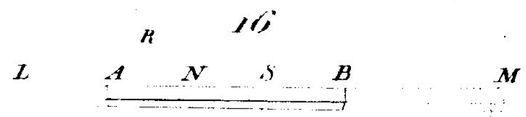
14



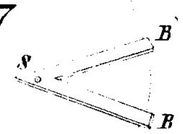
15



16



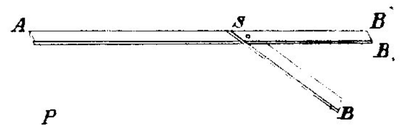
17



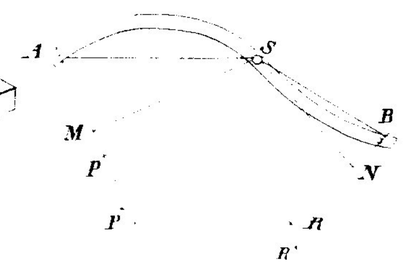
18



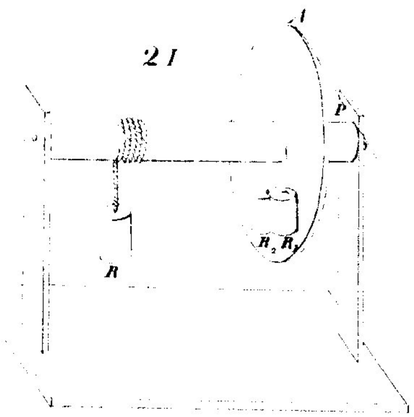
19



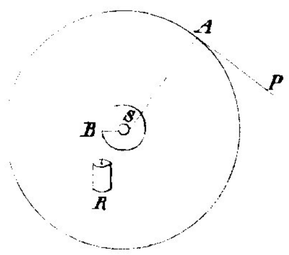
20



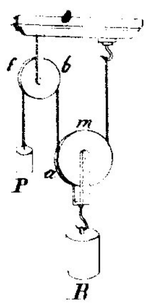
21



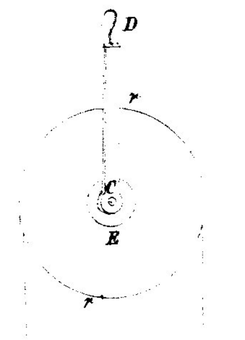
22



23



24

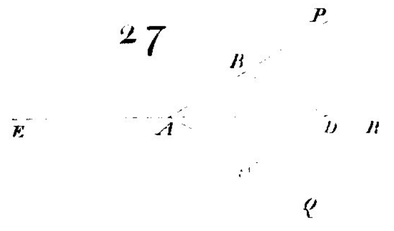


25

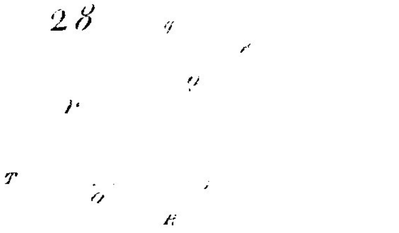
26



27



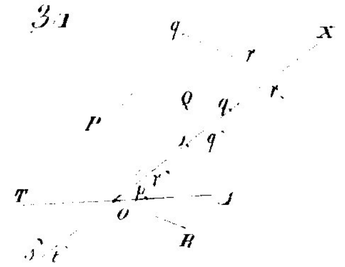
28



29



31



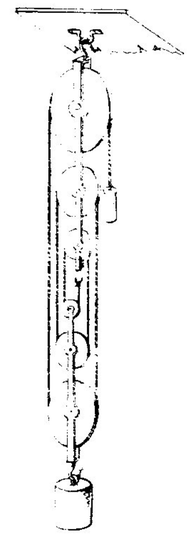
32



33



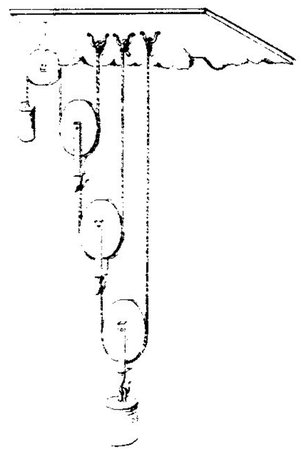
34



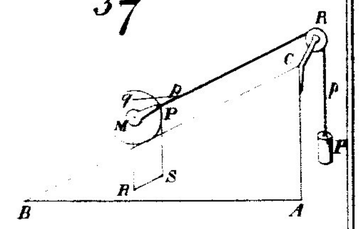
35



36



37

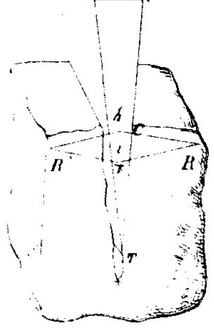


38

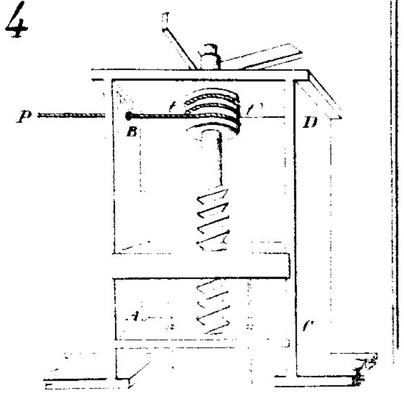


39

40



44



45

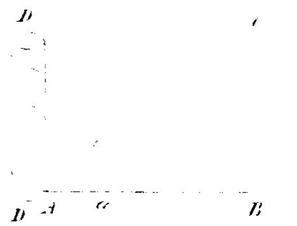
46



46 60



41



42



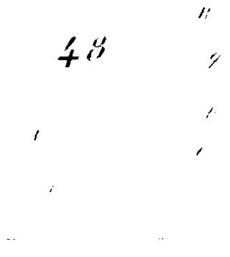
43



47



48



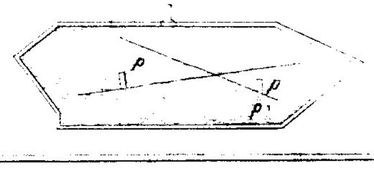
49



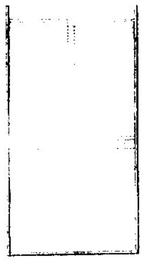
50

51

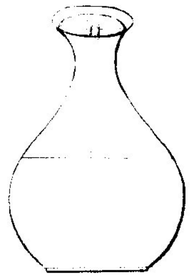
52



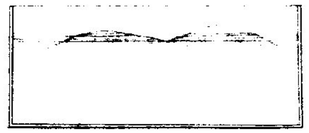
53



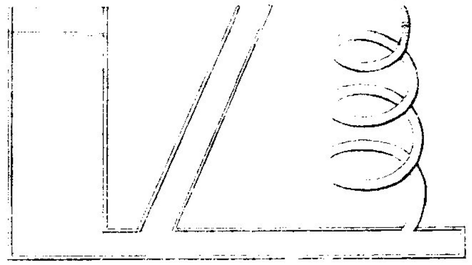
54



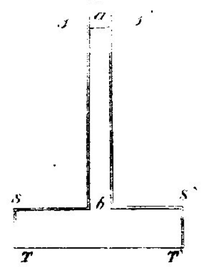
55



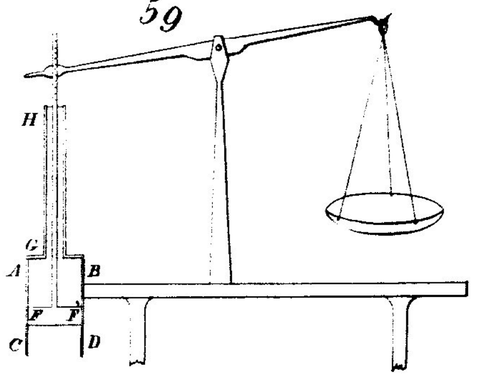
56 57



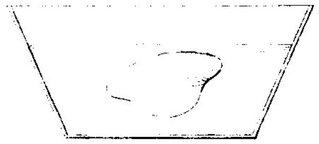
58



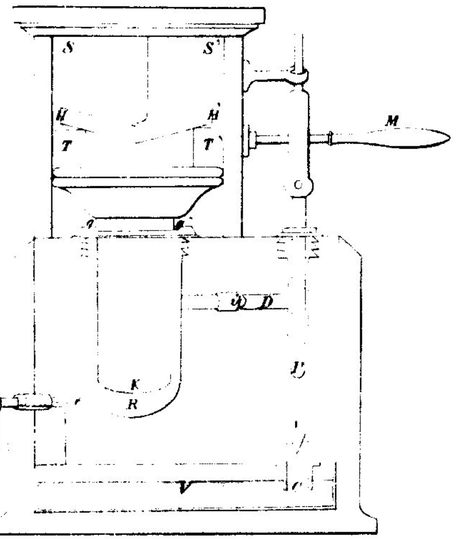
59



61



60



62



63



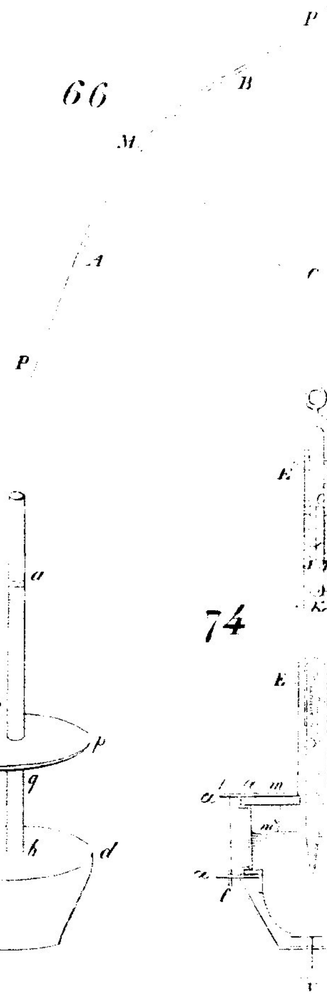
64



65



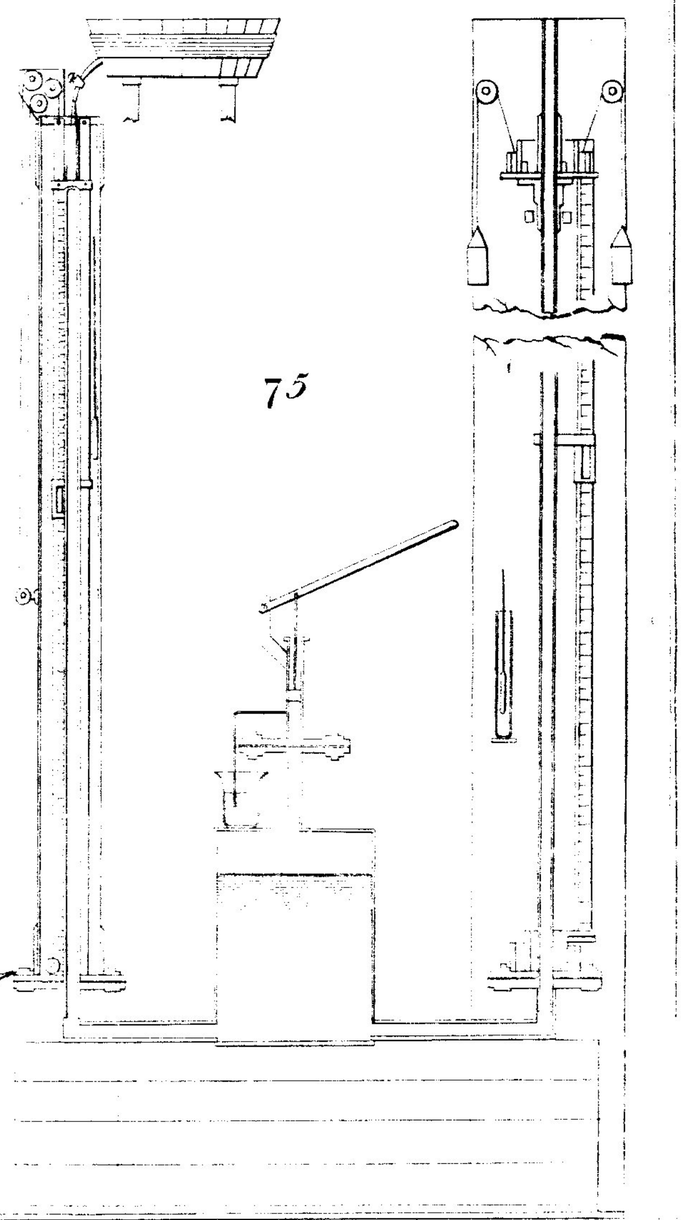
66



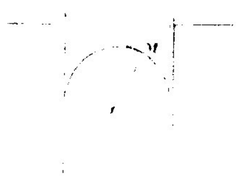
74 (a)



75



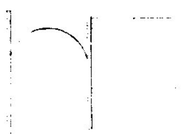
67



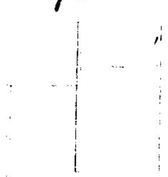
68



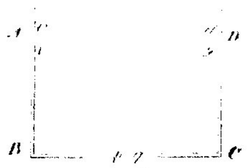
69



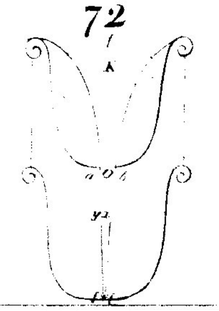
70



71



72



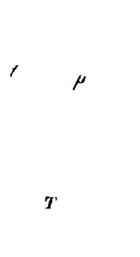
73

74

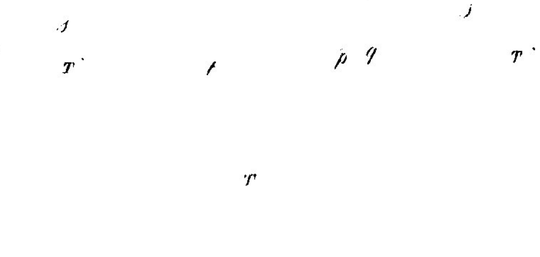
76



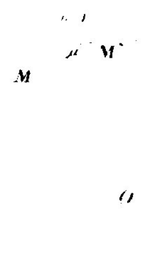
77



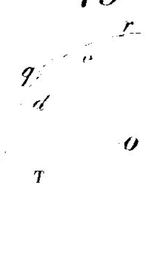
78



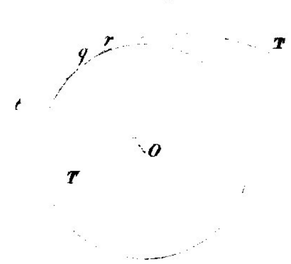
81



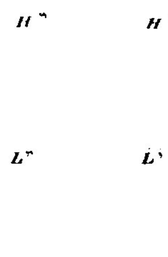
79



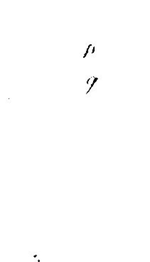
80



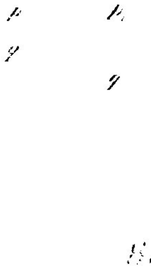
82



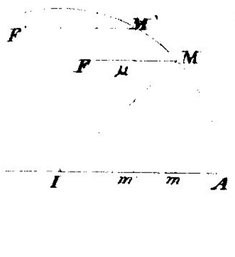
83



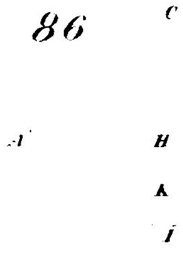
84



85



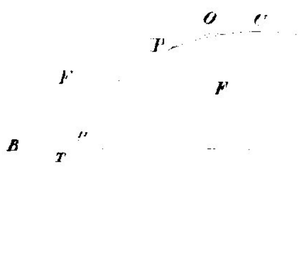
86



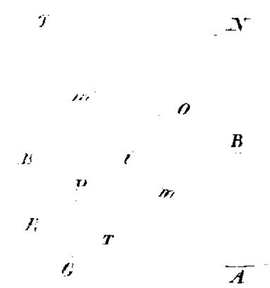
86



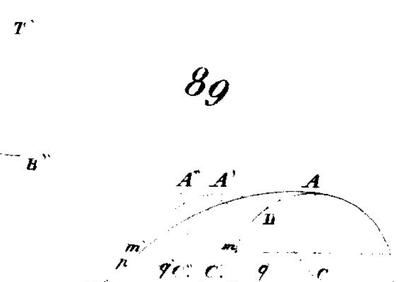
87



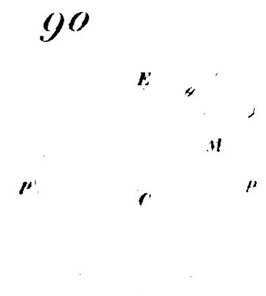
89



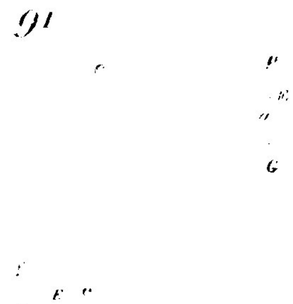
89



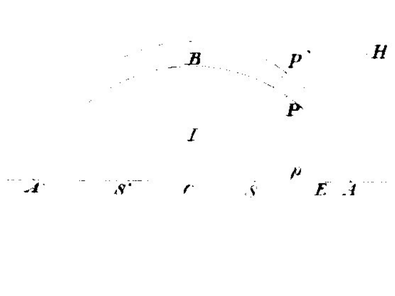
90



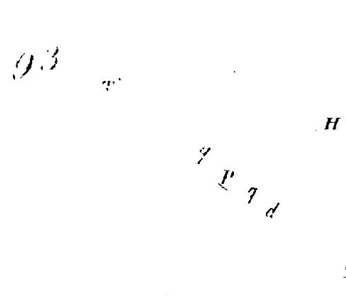
91



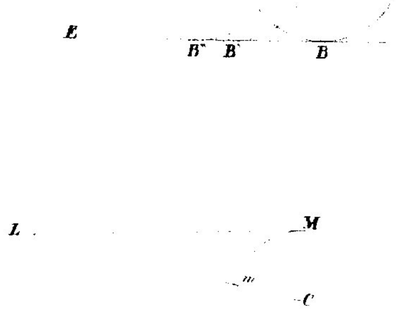
92



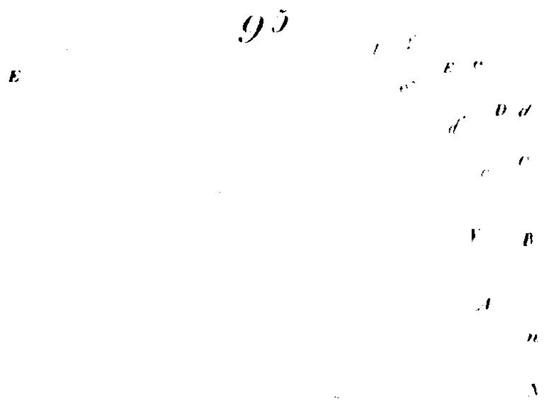
93



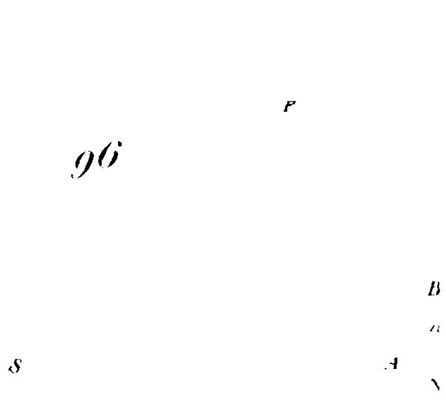
94



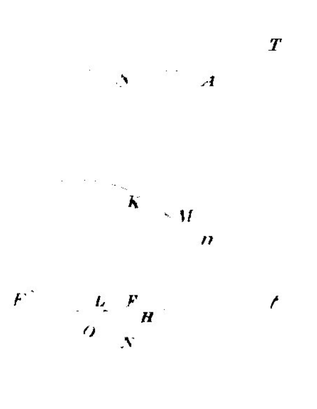
95



96



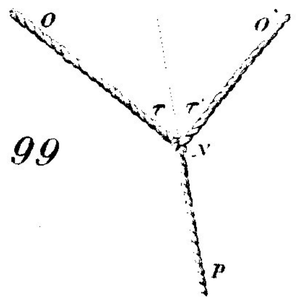
97



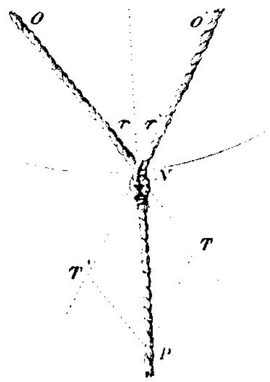
98



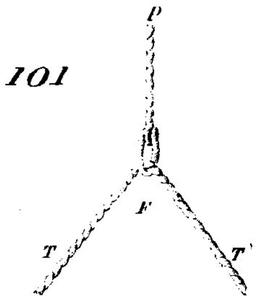
99



100



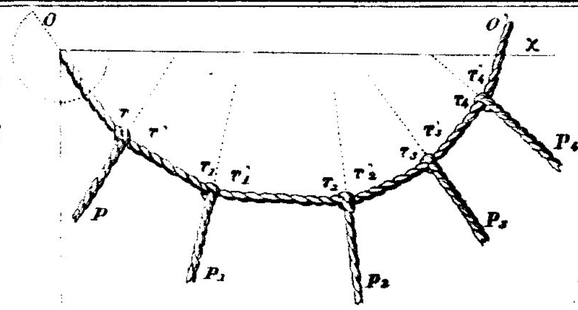
101



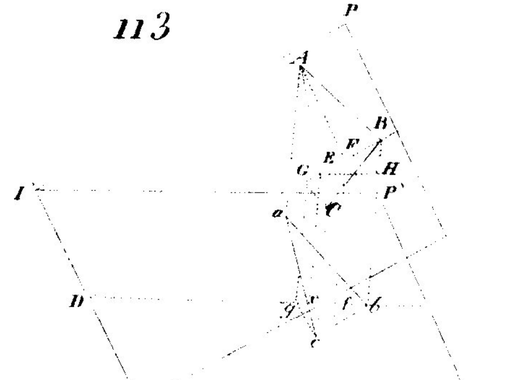
102



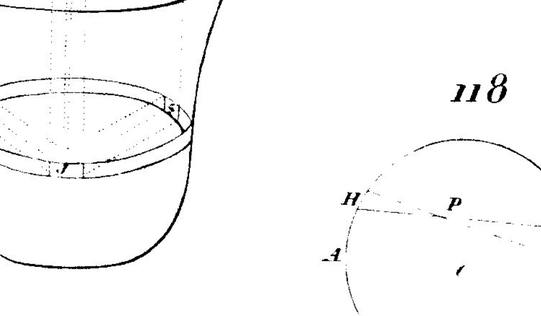
103



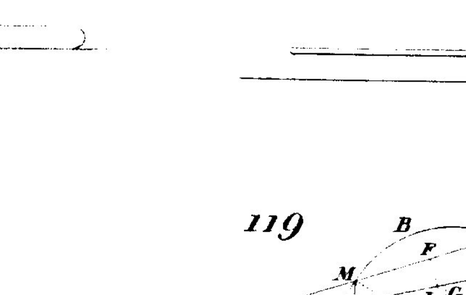
104



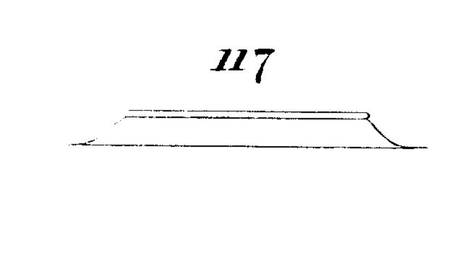
105



106



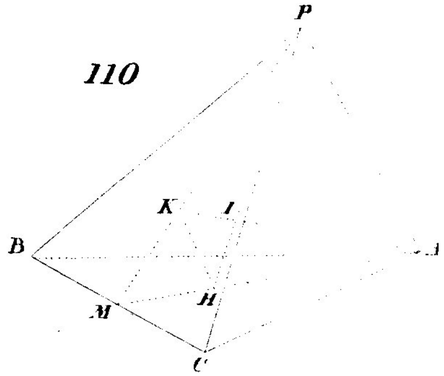
107



108

109

110



111

112

113

114

115

116

117

118

119

120