LIBRO TERZO

CAPITOLO I

Relazioni fra rette, piani e sfere.

1. — RELAZIONI DI UNA RETTA CON UN CIRCOLO O UNA SFERA, E DI UN PIANO CON UNA SFERA.

175. Teorema. — *Data una retta ed un circolo, situati nello stesso piano, oppure una retta ed una sfera,*

1° la retta ha tutti i suoi punti esterni al cerchio (o alla sfera), se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio;

2° la retta ha un solo punto comune col circolo (o colla superficie sferica), e tutti gli altri suoi punti esterni al cerchio (o alla sfera), se la sua distanza dal centro è eguale al raggio;

3° la retta ha due punti comuni col circolo (o colla superficie sferica), se la sua distanza dal centro è minore del raggio.

E viceversa.

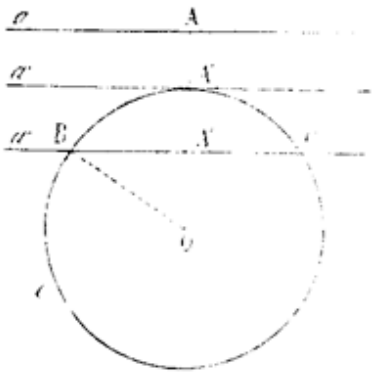

Fig 142.

1°. Sia a (Fig. 142) una retta, la quale ha dal centro O di un cerchio (o di una sfera) c una distanza OA maggiore del raggio. Il punto A è evidentemente esterno al cerchio (o alla sfera) c, e, siccome tutti i segmenti obliqui, che dal punto O si possono condurre alla retta a, sono maggiori del segmento perpendicolare OA (§ 158, Teor.), così tutti i punti di a diversi da A, avendo dal punto O una distanza

maggiore di OA, ed a più forte ragione maggiore del raggio, sono esterni al cerchio (o alla sfera) c.

2°. Se la retta a' ha dal centro O del cerchio (o della sfera) c una distanza OA′ eguale al raggio, il punto A′, avendo dal centro O una distanza uguale al raggio, si trova sulla circonferenza (o sulla superficie sferica).

Tutti gli altri punti della retta a', avendo, come abbiamo osservato sopra, una distanza dal centro O maggiore di OA′, saranno esterni.

3°. Se finalmente la distanza OA″ del centro O dalla retta a'' è minore del raggio, il punto A″ si trova interno al cerchio, (o alla sfera), ed allora (§ 85, Cor. 4°) la retta a'' deve incontrare il circolo (o la superficie sferica) in due, e due soli, punti B, C.

I teoremi inversi poi sono veri per la legge esposta nel § 4 dei Preliminari.

Definizioni. — 1ª. Data una retta ed un circolo in un piano, oppure una retta ed una sfera, diremo che la retta è *tangente* o *secante* del circolo (o della superficie sferica), secondo che ha con essa uno o due punti comuni. Chiameremo poi *punto di contatto* o *di tangenza* il punto comune ad un circolo (o ad una superficie sferica), e ad una sua tangente. Un segmento di tangente, che contiene il punto di contatto, dicesi pure tangente, mentre per *segmento tangente condotto da un punto ad un circolo (o ad una sfera)*, intendesi il segmento di tangente, che ha per estremi quel punto e il punto di contatto.

2ª. Chiamasi *corda* di un cerchio (o di una sfera) il segmento, situato sopra una secante, che ha per estremi i due punti comuni alla secante e al circolo (o alla superficie sferica).

In seguito alle definizioni stabilite il teorema precedente può anche enunciarsi nel modo seguente:

Una retta, giacente nel piano di un circolo, è esterna, tangente o secante di quel circolo (o di una sfera), secondo che ha dal centro una distanza maggiore, eguale o minore del raggio; e viceversa.

Corollari. — *1°. Tutti i punti di una corda di un cerchio (o di una sfera) sono interni ad esso; i punti dei suoi prolungamenti sono esterni.*

2°. Una corda di un cerchio o di una sfera è divisa per metà dal diametro ad essa perpendicolare.

Infatti se B, C (fig. 142) sono i punti d'incontro di una secante a'' con un circolo (o una superficie sferica), i due segmenti OB, OC, distanze di B e C dal centro O, sono uguali, e perciò sono pure eguali le loro proiezioni A″B, A″C sulla retta a'' (§ 158, Teor.). Ogni punto del segmento BC è poi interno al cerchio (o alla sfera), perchè la sua distanza dal centro O è minore del raggio OB, avendo su a'' una proiezione minore di A″B; e ogni punto di uno dei prolungamenti del segmento BC è esterno al cerchio (o alla sfera), perchè la sua distanza dal centro O è maggiore del raggio OB, avendo su a'' una proiezione maggiore di A″B (§ 158, Teor.).

3°. Una secante di un circolo (o di una sfera) è tagliata da questa nei due punti comuni.

Definizioni. — 3ª. Ciascuna delle due parti, in cui una corda divide un cerchio, dicesi *segmento di cerchio* o *segmento circolare*.

4ª. I due estremi di una corda di un cerchio dividono il circolo in due archi, che si dicono *sottesi* dalla corda.

176. Teoremi. — *1°. Si può sempre condurre una, ed una sola, tangente a un dato circolo in un suo punto.*

2°. Si possono condurre infinite rette tangenti ad una superficie sferica in un suo punto. Il luogo di esse è un piano.

1°. Se A è un punto dato ad arbitrio sul circolo *c* (Fig. 143), la retta *a*, condotta per il punto A nel piano del circolo, perpendicolare al raggio OA, ha dal centro del circolo una distanza eguale al raggio OA, ed è perciò tangente ad esso.

Rispetto ad ogni altra retta *b*, condotta per A, il raggio OA risulta obliquo; e perciò una tal retta ha da O una distanza minore del raggio OA, e quindi è una secante.

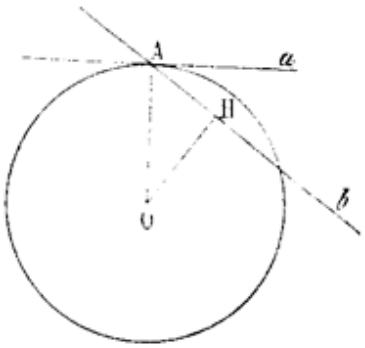

Fig. 143.

2°. Se A è un punto di una superficie sferica, fra tutte le rette, condotte per esso, quelle che sono perpendicolari al raggio OA hanno dal centro O una distanza eguale al raggio, e sono perciò tangenti alla sfera; tutte le altre hanno da O una distanza minore del raggio, e sono perciò secanti. Sappiamo poi che il luogo delle rette perpendicolari alla retta OA, condotte per il punto A, è il piano perpendicolare ad OA, condotto per A (§ 60, Teor.).

177. Teoremi. — *1°. Un piano ha tutti i suoi punti esterni ad una sfera, se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.*

2°. Un piano ha un solo punto comune con una superficie sferica e tutti gli altri punti esterni, se la sua distanza dal centro è eguale al raggio.

3°. Un piano ha comuni con una superficie sferica tutti i punti di un circolo, se la sua distanza dal centro è minore del raggio.

E viceversa.

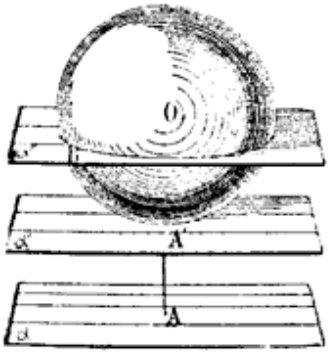

Fig. 144.

1°. Sia α (Fig. 144) un piano, che ha dal centro O della sfera S una distanza OA, maggiore del raggio. Il punto A è esterno alla sfera, e tutti gli altri punti del piano α, avendo da O una distanza maggiore di OA (§ 158, Teor.), e quindi anche del raggio, sono pure esterni alla sfera.

2°. Se il piano α' ha dal centro O della sfera S una distanza OA' eguale al raggio, il punto A' giace sulla superficie sferica. Tutti gli altri punti del piano α' hanno

e in una terza parte, compresa fra i due piani, che si chiama *segmento sferico a due basi* (Fig. 145); e dividono la superficie della sfera in due calotte e in una terza parte intermedia chiamata *zona*. Si chiamano *basi* della zona i circoli d'intersezione dei due piani secanti colla sfera; i cerchi da essi compresi sono le *basi* del segmento corrispondente. La porzione di diametro perpendicolare ai due piani secanti e compresa fra essi dicesi *altezza della zona e del segmento corrispondente*.

178. Teorema. — *Si può condurre uno ed un solo piano tangente ad una sfera in un suo punto.*

Se infatti A è un punto di una sfera S di centro O, il piano condotto per il punto A, perpendicolare al raggio OA, ha dal centro O una distanza eguale al raggio della sfera, ed è perciò tangente. Ogni altro piano condotto per il punto A risulta obliquo al raggio OA, ed ha da O una distanza minore del raggio, e perciò è un piano secante della sfera.

Corollario. — *Il piano tangente ad una sfera in un suo punto è il luogo delle rette tangenti alla sfera nel medesimo punto.*

179. Teorema. — *Un diametro perpendicolare ad una corda di circolo divide gli archi, da essa sottesi, in due parti eguali.*

Sia MN (Fig. 146) il diametro perpendicolare alla corda AB. Facciamo rotare il semicerchio MBN attorno al diametro MN, finchè venga a coincidere coll'altro MAN la retta AB perpendicolare ad MN viene a coincidere con sè stessa; inoltre, poichè la corda AB è divisa per metà dal diametro MN (§ 175, Cor. 2°), il punto B cade in A; dunque $MA \equiv MB$, $NA \equiv NB$.

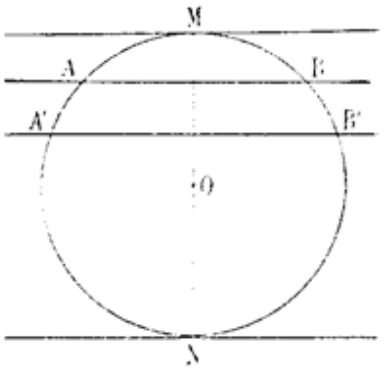

FIG. 146.

Corollari. — *1°. Gli archi, compresi fra due rette parallele e che terminano ad esse, sono eguali.*

Infatti si ha che $MA' \equiv MB'$ e $MA \equiv MB$; dunque

$$MA' - MA \equiv MB' - MB,$$

ossia

$$AA' \equiv BB'.$$

La retta MN (Fig. 146) soddisfa a cinque condizioni: *1° passa per il centro; 2° è perpendicolare alla corda AB; 3° divide questa corda per metà; 4° divide per metà l'arco AMB; 5° divide per metà l'arco* ANB. Essa è individuata da due qualunque delle condizioni suddette, ed è facile dimostrare che, purchè sieno verificate due delle condizioni esposte, sono verificate tutte le altre. Si hanno così complessivamente dieci teoremi, dei quali ci limitiamo ad enunciare soltanto il seguente:

La perpendicolare nel punto medio di una corda di un circolo passa per il centro.

da O una distanza maggiore del raggio OA′, e perciò sono esterni alla sfera.

3°. Supponiamo finalmente che un piano α'' abbia dal centro O della sfera S una distanza OA″, minore del raggio. L'estremo A″ è evidentemente interno alla sfera, quindi (§ 85, Cor. 4°) ogni retta, condotta per A″, deve incontrare la superficie sferica in due punti, e perciò la superficie sferica S ed il piano α'' devono avere in comune infiniti punti. Supponiamo che sia B uno di questi punti; è chiaro che i punti comuni al piano α'' e alla superficie sferica S sono quei punti del piano α'', che hanno da O una distanza eguale ad OB; il luogo di essi, come è noto, è un circolo di raggio A″B descritto col centro in A″. Tutti i punti del piano α'', interni al circolo suddetto, hanno da O una distanza minore del raggio OB, perchè le proiezioni di queste distanze su α'' sono minori di A″B, e perciò sono interni alla sfera. Tutti i punti del piano α'', esterni al medesimo circolo, hanno da O una distanza maggiore del raggio OB, perchè le proiezioni di queste distanze su α'' sono minori di A″B, e perciò sono esterni alla sfera.

I teoremi inversi sono veri per la legge esposta nel § 4 dei Preliminari.

Definizioni. — 1ª. Un piano dicesi *tangente* o *secante* di una sfera, secondo che esso ha comune colla superficie della sfera un solo punto, oppure tutti i punti di un circolo. Chiamasi poi punto di *contatto*, o *di tangenza* il punto comune ad una superficie sferica e ad un suo piano tangente.

2ª. Si dice che un circolo è *sopra una sfera*, quando appartiene alla sua superficie.

Corollari. — *1°. Un diametro di una sfera, perpendicolare ad un piano secante, incontra questo piano nel centro del circolo d'intersezione.*

2°. Se una retta è tangente ad una sfera, è anche tangente ai circoli sopra la sfera, situati in piani passanti per la retta; e viceversa, se una retta è tangente ad un circolo sopra una sfera, essa è tangente anche alla sfera.

Infatti, essendo r una retta tangente ad una sfera S, e c un circolo sopra la sfera, situato in un piano condotto per r, è evidente che r e c hanno in comune soltanto il punto di contatto di r con S; e viceversa, se r è tangente al circolo c, essa non può avere in comune colla sfera S altro che il punto di contatto con c.

Definizioni. — Un piano secante di una sfera, divide la sfera in due parti, dette *segmenti sferici a una base*, e la sua superficie in due parti dette *calotte*. Il circolo, intersezione del piano secante colla superficie sferica, dicesi *base delle due calotte*, e il cerchio compreso dicesi *base dei due segmenti*. La porzione del diametro perpendicolare al piano secante, compreso in un segmento sferico, si chiama *altezza di quel segmento e della calotta* corrispondente.

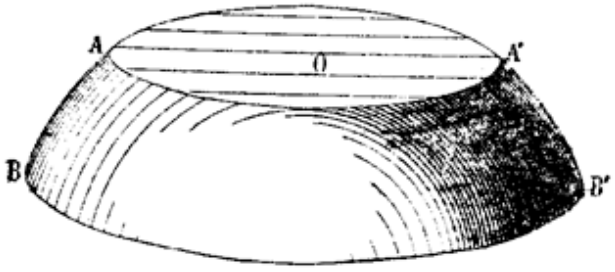

Fig. 145.

2ª. Due piani secanti paralleli dividono la sfera in due segmenti sferici

2°. Dato un arco di circolo si può costruirne il centro.

Infatti, condotte nell'arco due corde non parallele, si determini il punto d'incontro delle perpendicolari alle due corde nei loro punti medî; questo sarà il centro cercato per il teorema precedente.

180. Teorema. — *Se due archi sono eguali, sono eguali anche le corde che li sottendono; e se due archi, appartenenti ad uno stesso circolo e minori di mezza circonferenza, sono diseguali, è maggiore la corda che sottende l'arco maggiore; e viceversa.*

1°. Se i due archi AB, A'B' (Fig. 147) sono uguali, sono pure eguali gli angoli al centro $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$, e i due triangoli OAB, O'A'B', avendo un angolo eguale compreso fra lati OA, OB, O'A', O'B' eguali (come raggi di circoli eguali) sono eguali; perciò anche il lato AB è eguale al lato A'B'.

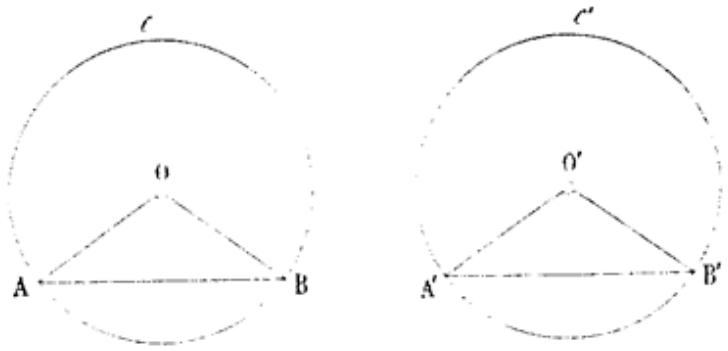

Fig. 147.

2°. Supponiamo ora che i due archi AB, A'B', minori di una semicirconferenza, sieno diseguali, e che sia per es. AB > A'B'.

Essendo gli archi AB, A'B' minori di mezza circonferenza, i due angoli al centro $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ sono convessi, e perciò le corde AB, A'B' sono interne ad essi. Inoltre è $A\widehat{O}B > A'\widehat{O'}B'$, ed allora i due triangoli AOB, A'O'B' hanno i lati OA, OB, O'A', O'B' eguali, ma gli angoli compresi disuguali, perciò il terzo lato AB, opposto all'angolo maggiore, è più grande del lato A'B', opposto all'angolo minore.

I teoremi inversi sono veri per il principio esposto nel § 4 dei Preliminari.

181. Teorema. — *In un cerchio (o in una sfera) oppure in cerchi (o sfere) eguali*

1° due corde eguali sono egualmente distanti dal centro;
2° di due corde disuguali la più grande è la più vicina al centro;
3° il diametro è maggiore di qualunque corda.

1°. Sieno AB, A'B' (Fig. 148) due corde eguali del cerchio (o della sfera) di centro O, e sieno OH, OH' le rispettive distanze dal centro. I triangoli rettangoli OBH, OA'H' sono eguali, perchè hanno eguali le ipotenuse e i due cateti BH, A'H', come metà di corde eguali; dunque OH = OH'.

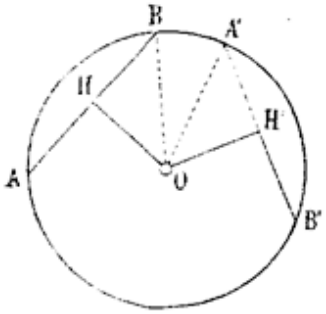

Fig. 148.

2°. Se AB è maggiore di A'B' (Fig. 149) anche l'angolo $A\widehat{O}B$ è maggiore di $A'\widehat{O}B'$ (§§ 33 e 180), e quindi, se nel piano AOB si forma l'angolo $A\widehat{O}B'' \equiv A'\widehat{O}B'$,

la semiretta OB″ risulta interna all'angolo $\widehat{AOB}$ e il punto B″ si trova da parte opposta del punto O rispetto alla retta AB. Allora anche la corda AB″ è tutta dalla parte opposta del punto O rispetto ad AB, ed il segmento perpendicolare OH″ condotto dal centro O alla AB″ deve incontrare la retta AB in un punto K (Post. VI, 2°). Il segmento OK obliquo alla retta AB è maggiore del segmento perpendicolare OH, e perciò, essendo OH″ > OK, è a più forte ragione OH″ > OH.

Ne segue che, essendo OH″ ≡ OH′, perchè le corde AB″, A′B′ sono eguali, e quindi equidistanti dal centro, deve anche essere OH′ > OH.

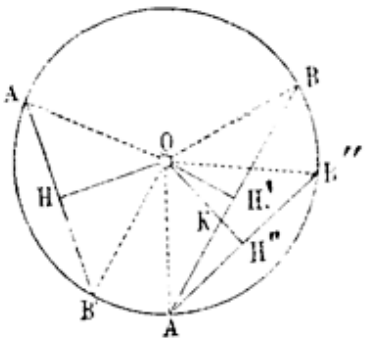

Fig. 149.

3°. Se AB (Fig. 150) è una corda qualunque, che non passi per il centro, dal triangolo AOB si ha che AB è minore di AO + OB, ossia minore di due volte il raggio; cioè AB è minore del diametro.

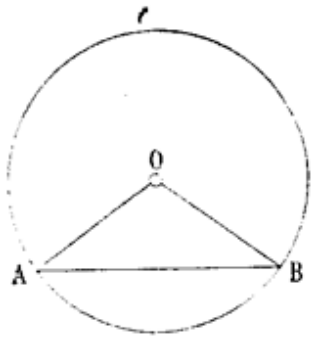

Fig. 150.

Corollari. — *1°. Due corde di un circolo (o di una sfera), ugualmente distanti dal centro, sono uguali, e di due corde disegualmente distanti dal centro, è maggiore quella che ha minore distanza dal centro.*

2°. Dati due circoli in un piano (o due superficie sferiche) concentrici, le corde del circolo (o della superficie sferica), avente raggio maggiore, tangenti all'altra sono tutte eguali.

3°. Se in un circolo (o in una sfera) sono date varie corde eguali, esse sono tutte tangenti ad una circonferenza (o ad una superficie sferica) concentrica alla prima, che ha per raggio la distanza delle medesime corde dal centro.

182. Teoremi. — *1°. I circoli sopra una sfera, situati in piani egualmente distanti dal centro, sono eguali.*

2°. Di due circoli sopra una sfera, situati in piani disugualmente distanti dal centro, ha diametro maggiore quello il cui piano è più vicino al centro.

3°. Un circolo diametrale di una sfera ha diametro maggiore di quello di qualsivoglia altro circolo sopra la sfera, il quale non sia diametrale.

Queste proprietà si ricavano immediatamente da quelle del § precedente, osservando che i diametri dei circoli sopra una sfera sono corde della sfera stessa, che hanno dal centro della medesima distanze eguali a quelle dei piani dei circoli stessi.

Corollari. — *1°. Se due circoli sopra una sfera sono eguali, i loro piani sono egualmente distanti dal centro della medesima; e se i due circoli sono disuguali, il piano di quello, che ha diametro maggiore, ha dal centro una distanza minore.*

2°. Se due superficie sferiche sono concentriche, i piani tangenti a quella, che ha raggio minore, tagliano l'altra secondo circoli eguali.

3°. Se vari circoli sopra una sfera sono eguali, i loro piani sono tutti tangenti ad una sfera concentrica alla prima, avente per raggio la distanza del centro dai piani stessi.

183. Teorema 1°. — *Gli angoli, formati da una secante di un circolo colle due tangenti nei punti d'intersezione, sono ordinatamente eguali.*

Sia a una secante, che incontra un circolo c nei punti B, B′, e b, b' siano le tangenti in B, B′ a questo circolo. Condotta per il centro O la retta MN perpendicolare ad a, si faccia rotare il semipiano MNB′ attorno ad MN di un mezzo giro, in guisa che venga a coincidere col semipiano MNB. Il semicircolo MB′N verrà a coincidere col semicircolo MBN, e il punto B′ con B (essendo BB′ perpendicolare a MN), e perciò la tangente b' verrà a coincidere con la tangente b, non potendosi condurre in un punto di un circolo più di una tangente ad esso. Ne segue che gli angoli. che la retta a forma colla retta b', sono ordinatamente eguali a quelli che essa fa colla b.

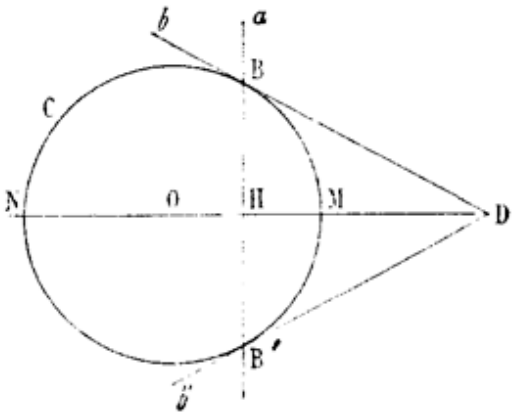

Fig. 151.

Corollario 1°. — *Le due rette tangenti ad un circolo, nei punti d'incontro di esso con una sua secante, incontrano in uno stesso punto la perpendicolare alla secante condotta per il centro, se la secante stessa non passa per il centro; e sono ad essa parallele, se la secante passa per il centro.*

Teorema 2°. — *I diedri, formati da un piano secante di una superficie sferica con i piani tangenti a questa nei punti del circolo d'intersezione, sono ordinatamente eguali.*

Sia α un piano, che seca una superficie sferica S secondo un circolo c, ed a la retta perpendicolare al piano α, condotta per il centro O della sfera. Facendo rotare tutta la figura attorno alla retta a, la superficie sferica S, il piano α e il circolo c scorrono su se stessi, di guisa che, quando un punto B di c abbia preso la posizione di un altro punto B′ di c, anche il piano β tangente in B avrà preso la posizione del piano β' tangente in B′, e quindi i diedri formati dai piani β, β' con α sono ordinatamente eguali.

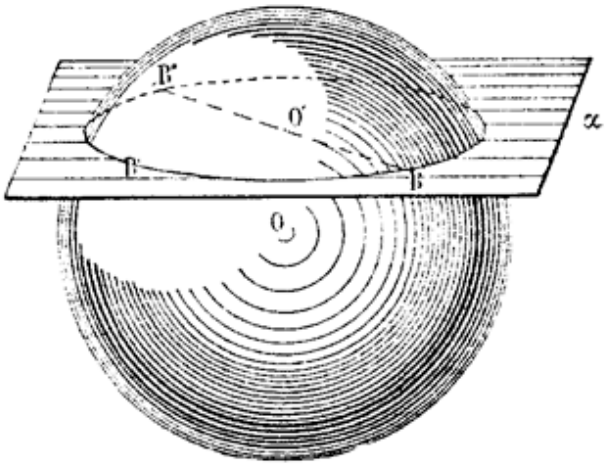

Fig. 152.

Corollari. — *2°. Gli angoli formati da una secante di una superficie sferica con i due piani tangenti a questa nei punti d'intersezione sono uguali.*

Se una retta incontra una sfera nei punti B, B'', si faccia rotare la sfera di un mezzo giro attorno alla retta *a*, condotta per il centro, perpendicolare alla BB''. Il segmento O'B prende la posizione di O'B'', e il piano tangente in B quella del piano tangente in B''.

3°. Tutti i piani tangenti ad una superficie sferica, nei punti comuni ad essa e ad un piano secante, incontrano in un medesimo punto la retta condotta per il centro perpendicolare al piano secante, e formano con essa angoli eguali, se il piano secante non è diametrale; e sono ad essa paralleli, se il piano è diametrale.

Definizioni. — 1ª. Chiamansi *angoli di un circolo (o di una superficie sferica) con una sua secante,* gli angoli formati da questa con una delle rette (o piani) tangenti nei punti d'intersezione.

2ª. Chiamansi *angoli di una superficie sferica con un suo piano secante,* i rettilinei dei diedri formati dal piano secante con uno dei piani tangenti in un punto comune al piano e alla sfera.

3ª. Una secante di una circonferenza (o di una superficie sferica) si dice *perpendicolare* o *normale* ad essa, se fa con essa angoli retti, *obliqua* nel caso contrario. Un piano secante di una superficie sferica, si dice *perpendicolare* o *normale* a questa, se fa con essa angoli retti, *obliquo* nel caso contrario.

Una parte di retta (o di piano) normale ad una circonferenza (o ad una superficie sferica) dicesi pure *normale* ad essa.

Corollari. — *4°. Tutte e sole le secanti di una circonferenza (o di una superficie sferica) che passano per il suo centro sono normali ad essa.*

5°. Per un punto, che non sia il centro, di una circonferenza (o di una superficie sferica) passa una, ed una sola, retta ad essa normale.

6°. Tutti i piani diametrali di una sfera, ed essi soli, sono normali alla superficie sferica.

2. — RELAZIONI DI ANGOLI CON UN CIRCOLO.

184. Definizione. — Se un angolo ha il vertice in un punto di un arco, e i suoi lati passano per gli estremi di esso, si dice che esso è *inscritto* in quest'arco, ovvero che è un *angolo alla circonferenza che insiste* sul rimanente arco, o che *comprende* quest'arco.

Teorema. — *Qualunque angolo, che ha il vertice sopra una circonferenza, e che comprende un arco della medesima, è la metà dell'angolo al centro, che comprende lo stesso arco.*

Per la dimostrazione di questo teorema considereremo separatamente il caso in cui uno dei lati del dato angolo $B\widehat{A}C$ passi per

il centro, quello in cui il centro sia interno, quello in cui il centro sia esterno all'angolo.

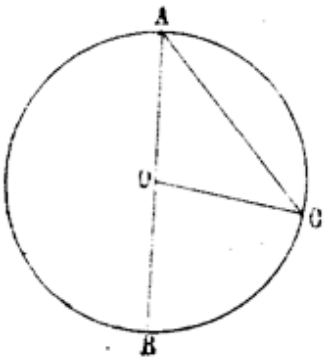

Fig. 153.

1°. Se il centro O si trova sul lato AB (Fig. 153), congiungiamolo col punto C d'incontro dell'altro lato colla circonferenza. Allora il triangolo OAC, avendo i lati OA, OC eguali come raggi, ha anche gli angoli $\widehat{OAC}$, $\widehat{OCA}$ eguali, e perciò l'angolo $\widehat{BOC}$, esterno al triangolo OAC, essendo eguale alla somma dei due angoli suddetti, è il doppio di ciascuno di essi ed in particolare dell'angolo $\widehat{BAC}$.

2°. Se il centro O del circolo è interno all'angolo $\widehat{BAC}$, che può essere convesso, piatto, o concavo, come nella figura 154, il diametro AD, condotto per il vertice A, scompone in due parti il suddetto angolo $\widehat{BAC}$ ed anche l'angolo al centro $\widehat{BOC}$ che comprende lo stesso arco. Per la dimostrazione precedente gli angoli $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOC}$ sono rispettivamente doppi degli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAC}$, e perciò la loro somma $\widehat{BOC}$ è doppia dell'angolo $\widehat{BAC}$, somma dei due angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAC}$.

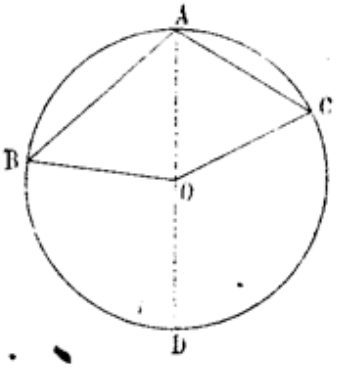

Fig. 154.

3°. Se il centro del circolo è esterno all'angolo $\widehat{BAC}$ (Fig. 155), conducendo il diametro AD che passa per A, avremo $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC} - \widehat{DAB}$, e $\widehat{BOC} \equiv \widehat{DOC} - \widehat{DOB}$. Ma già sappiamo che $\widehat{DOC}$ è il doppio di $\widehat{DAC}$, e $\widehat{DOB}$ il doppio di $\widehat{DAB}$, perciò anche $\widehat{BOC}$ è il doppio di $\widehat{BAC}$.

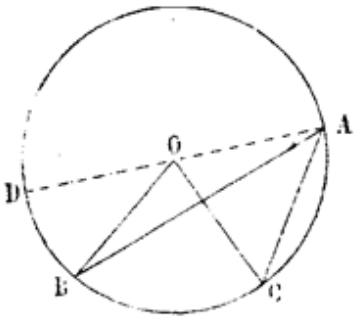

Fig. 155.

Corollari. — *1°. Tutti gli angoli inscritti in uno stesso arco sono eguali.*

Infatti gli angoli inscritti in uno stesso arco sono tutti eguali alla metà di uno stesso angolo al centro.

2°. Se due archi sono eguali, gli angoli in essi inscritti sono eguali. Viceversa: *Se sono eguali gli angoli inscritti in due archi, appartenenti a circoli eguali, sono eguali anche gli archi.*

Infatti, se sono eguali due archi, sono eguali anche gli angoli al centro che insistono su di essi, e quindi anche le loro metà; e viceversa.

3°. Un angolo inscritto in un arco è acuto, retto, od ottuso, secondo che questo arco è maggiore, eguale o minore di mezza circonferenza.

Infatti, l'angolo al centro, doppio dell'angolo dato, è convesso, piatto, o concavo, secondo che il suddetto arco è maggiore, eguale, o minore di mezza circonferenza.

4°. Due angoli inscritti in due archi, la cui somma è una circonferenza, sono supplementari.

Infatti, (Fig. 156) essendo l'angolo $A\widehat{B}C$ la metà dell'angolo convesso $A\widehat{O}C$, e l'angolo $A\widehat{D}C$ la metà dell'angolo concavo $A\widehat{O}C$, la somma $A\widehat{B}C + A\widehat{D}C$ è la metà della somma dei due angoli al centro $A\widehat{O}C$, l'uno convesso, l'altro concavo, la quale è uguale a due angoli piatti.

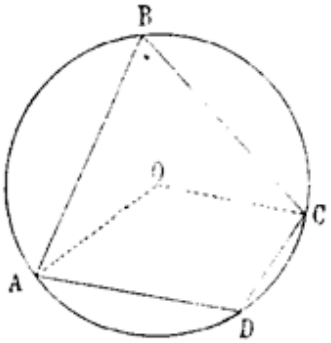

FIG. 156.

Definizione. — Un arco si dice *capace* dell'angolo, al quale son eguali tutti gli angoli inscritti in esso.

185. Teorema. — *Ciascun angolo formato da una tangente ad un circolo e da una secante, che passa per il punto di contatto, è eguale all'angolo alla circonferenza, che insiste sull'arco compreso fra i lati di quest'angolo, o del suo opposto al vertice.*

Essendo AB (Fig. 157) una secante del circolo *c*, ed AC la tangente ad esso nel punto A, conducasi per il punto B la corda BD parallela alla tangente AC, e si unisca A con D. Gli archi AB, AD sono eguali (§ 179, Cor. 1°), e perciò sono pure eguali le corde AB, AD. Ne segue che il triangolo ABD è isoscele, e gli angoli $A\widehat{B}D$, $A\widehat{D}B$ sono eguali. Ma gli angoli $D\widehat{B}A$, $B\widehat{A}C$ sono pure eguali, come alterni interni rispetto alle rette parallele AC, BD e alla trasversale AB; dunque sono pure eguali gli angoli $B\widehat{A}C$, $B\widehat{D}A$.

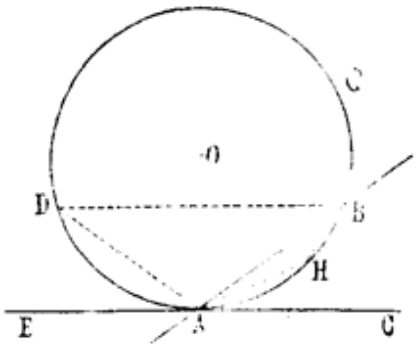

FIG. 157.

Ora l'angolo inscritto nell'arco AHB è il supplemento dell'angolo $B\widehat{D}A$ (§ 184, Cor. 4°); inoltre l'angolo $B\widehat{A}E$ è pure il supplemento di $B\widehat{A}C$, quindi, essendo $B\widehat{A}C \equiv B\widehat{D}A$, è anche $B\widehat{H}A \equiv B\widehat{A}E$.

186. Teorema. — *Un angolo, che ha il vertice interno ad un cerchio, è eguale alla semisomma degli angoli al centro, che insistono sugli archi compresi nell'angolo dato e nel suo opposto al vertice.*

Sieno AB, CD (Fig. 158) due secanti del circolo *c*, che si tagliano nel punto E, interno ad esso, e consideriamo, per es. l'angolo $B\widehat{E}D$. Questo, essendo esterno al triangolo EBC, è eguale alla somma dei due angoli $E\widehat{C}B$, $E\widehat{B}C$, i quali sono rispettivamente la metà degli angoli al centro, che si appoggiano sugli archi BD, CA, compresi l'uno nell'angolo considerato, l'altro nel suo opposto al vertice.

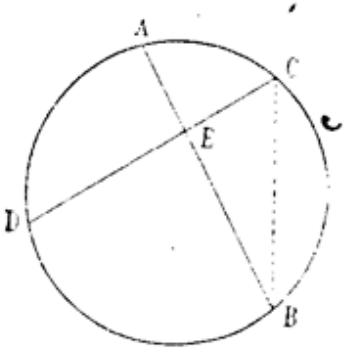

FIG. 158.

187. Teorema. — *Un angolo, che ha il vertice esterno ad un cerchio ed i lati secanti, è eguale alla semidifferenza degli angoli al centro, che insistono sugli archi compresi nell'angolo stesso.*

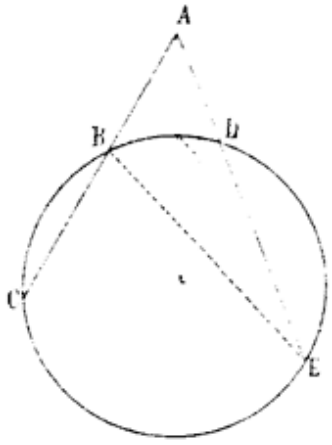

Fig. 159.

Sia CAE (Fig. 159) un angolo, avente il vertice esterno al cerchio *c*, e i lati secanti. L'angolo $\widehat{CBE}$, esterno al triangolo ABE, è uguale alla somma dei due angoli $\widehat{BAE}$, $\widehat{AEB}$; perciò l'angolo $\widehat{BAE}$ è eguale alla differenza dei due angoli $\widehat{CBE}$, $\widehat{BEA}$, i quali sono la metà degli angoli al centro, che si appoggiano sugli archi CE, BD.

3. — RELAZIONI FRA DUE CIRCOLI IN UN PIANO E FRA DUE SFERE.

188. Teorema. — *Fra gl'infiniti segmenti, che terminano ad un circolo (o ad una superficie sferica) e partono da un punto, preso nel piano del circolo all'infuori del centro,*

1° quello normale, che contiene il centro, è maggiore di qualunque altro;

2° quello normale, che non contiene il centro, è minore di qualunque altro;

3° due segmenti, i cui estremi distano egualmente dall'estremo di un segmento normale, sono eguali; altrimenti è maggiore quello, il cui estremo ha una distanza maggiore dall'estremo del segmento normale minimo.

E viceversa.

1°. Sieno AK, AH (Fig. 160, 161) i due segmenti, che partono dal punto A e terminano al circolo (o alla superficie sferica) di centro O, e sia AD un altro segmento

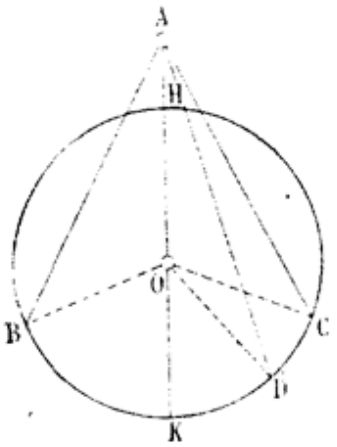

Fig. 160.

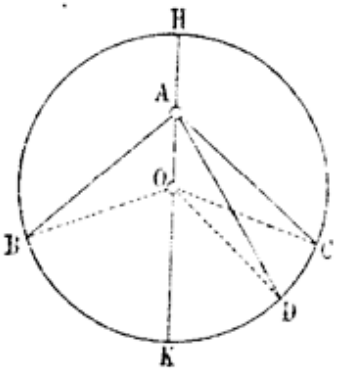

Fig. 161.

qualunque. Dal triangolo AOD si ha $OA + OD > AD$ (§ 83, Teor.), ed essendo $OD \equiv OK$, ne segue $AO + OK > AD$, ossia $AK > AD$.

2°. Nello stesso triangolo AOD si ha, che il lato AD è maggiore della differenza fra i lati AO, OD, la quale, essendo OD = OH, è eguale ad AH.

3°. Sieno ora AB, AC due segmenti obliqui, tali che le distanze BH, HC siano uguali; allora gli angoli al centro $\widehat{BOH}$, $\widehat{HOC}$ sono eguali, e quindi i triangoli AOB, AOC, avendo il lato OA comune, i lati OB, OC eguali come raggi e gli angoli fra essi compresi pure eguali, sono eguali, ed hanno AB = AC.

Finalmente sieno AC, AD due segmenti, tali che sia la distanza HD maggiore della distanza HC; allora anche l'angolo al centro $\widehat{HOD}$ sarà maggiore dell'angolo $\widehat{HOC}$, e quindi, i due triangoli AOC, AOD avendo il lato AO comune, i lati OC, OD uguali come raggi, ma l'angolo $\widehat{AOC}$, compreso fra i lati del primo, minore dell'angolo $\widehat{AOD}$, compreso fra i lati del secondo, sarà anche AC < AD (§ 91, Teor.).

I teoremi inversi sono veri per il solito principio delle inverse dimostrato nei Preliminari.

Corollari. — *1°. Da un punto preso nel piano di un circolo, all'infuori del centro, non si possono condurre al circolo più di due segmenti eguali fra loro.*

2°. Da un punto, che non sia il centro, si possono condurre ad una superficie sferica infiniti segmenti obliqui eguali fra loro; il luogo dei loro estremi è un circolo sopra la sfera, situato in un piano perpendicolare alla retta, che passa per il punto dato e per il centro della sfera.

Infatti, facendo rotare la figura attorno alla retta, che passa per il punto dato e per il centro della sfera, uno dei segmenti tangenti condotti per il punto dato alla sfera prende successivamente la posizione di tutti gli altri.

Definizione. — Si chiama *distanza di un punto da un circolo, o da una superficie sferica,* il segmento normale minimo condotto da questo punto al circolo o alla superficie sferica.

189. Teorema. — *Date due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche) con raggi diseguali:*

1°. Se la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei raggi, nessun punto di una di esse è compreso nell'altra;

2°. Se la distanza dei centri è eguale alla somma dei raggi, esse hanno un sol punto comune, e nessuno degli altri punti dell'una è compreso nell'altra;

3°. Se la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, esse hanno due punti (o una circonferenza) in comune;

4°. Se la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi, esse hanno un sol punto comune, e tutti gli altri punti di quella di raggio minore sono compresi nell'altra;

5°. Se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi, tutti i punti di quella, che ha raggio minore, sono compresi nell'altra.

1°. Sia $d \equiv OO'$ la distanza dei centri O, O′ dei due circoli (o delle due sfere) c, c' di raggio R ed R′, e sieno A, B; A′, B′ le coppie dei punti d'incontro dei due circoli (o delle due sfere) colla retta OO′. Essendo $d > R + R'$, è anche $d > R$, ossia $OO' > OA$, perciò il punto O′ è esterno al circolo (o alla sfera), ed O′A è la normale minore condotta da O′ al circolo (o alla sfera). Per l'ipotesi fatta è anche $d - R > R'$ ossia $OO' - OA \equiv O'A > R'$; perciò il punto A è esterno al cerchio (o alla sfera) c'. Siccome O′A è il più piccolo dei segmenti, che si possono condurre dal punto O′ al circolo (o alla superficie sferica) c (§ 188, Teor.), anche tutti gli altri punti del circolo (o della sfera) c sono a più forte ragione esterni al cerchio (o alla sfera) c'.

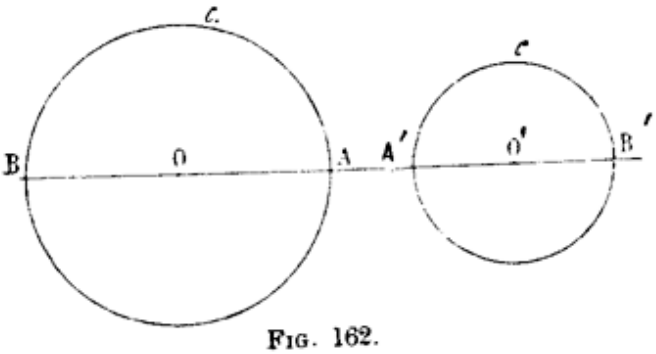

Fig. 162.

2°. Supponiamo ora (Fig. 163) che sia $d \equiv R + R'$. Ne segue $d > R$, ossia $OO' > R$; perciò il punto O′ è esterno al cerchio (o alla sfera) c, ed O′A è la normale minore condotta dal punto O′ al circolo (o alla sfera) c. Dall'ipotesi fatta risulta inoltre $d - R \equiv R'$ ossia $OO' - OA \equiv O'A \equiv R'$; perciò il punto A è sul circolo (o sulla superficie sferica) c'. Ma O′A è il più piccolo di tutti i segmenti che si possono condurre da O′ al circolo (o alla sfera) c; perciò tutti gli altri punti di c (escluso A) sono esterni al cerchio (o alla sfera) c'.

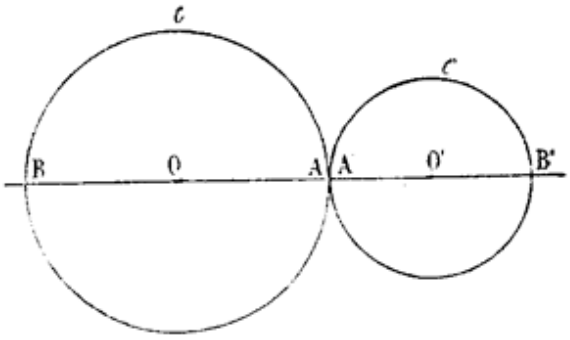

Fig. 163.

3°. Se (Fig. 164) sono verificate le condizioni

$$R + R' > d > R - R',$$

se ne ricava $d + R' > R$, ovvero $OO' + O'B' > OA$, ovvero $OB' > OA$. Ciò prova che il punto B′ è esterno al cerchio (o alla sfera) c.

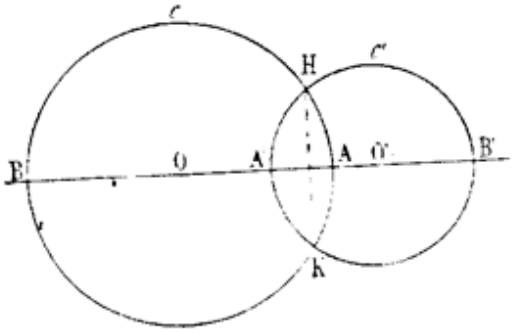

Fig. 164.

Avendo supposto $R > R'$, si ha pure $R + d > R'$, ossia $BO + OO' > O'A'$, ossia $O'B > O'A'$; perciò il punto A′ è interno al segmento O′B. Si osservi ora che potranno verificarsi le seguenti ipotesi $d \gtreqless R'$. Se è $d > R'$, dalla diseguaglianza $d < R + R'$ si ricava $d - R' < R$, ossia $O'O - O'A' < OA$, ossia $OA' < OA$, e quindi il punto A′ è interno al cerchio (o alla sfera) c. Se $d \equiv R'$, il punto A′ coincide con O. Se finalmente $d < R'$, il punto A′ cade nell'interno del segmento OB. In ogni caso dunque il circolo (o la superficie

sferica) c' ha un suo punto B′ esterno ed un suo punto A′ interno al cerchio (o alla sfera) c.

Se c, c' sono due circoli, siccome da quanto abbiamo detto risulta che il circolo c ha un punto interno ed uno esterno al circolo c, i due circoli (§ 27) devono avere almeno due punti H, K comuni. Inoltre essi non possono avere più di due punti comuni, perchè dal punto O non si possono condurre più di due segmenti eguali, che terminino al circolo c.

Se poi c, c' sono due sfere, ogni circolo massimo della sfera c', avente per diametro A′B′, deve incontrare la sfera c in due punti. Ne segue che le due sfere c, c' hanno in comune infiniti punti. Tutti i segmenti, che partendo da O terminano a questi punti comuni, essendo eguali, il luogo dei medesimi è un circolo situato in un piano perpendicolare alla retta OO′, e che ha per centro il punto d'incontro di questo piano colla retta OO′.

4°. Se è $d \equiv R - R'$, risulta $d + R' \equiv R$, ossia (Fig. 165) $OO' + O'B' \equiv OA$, cioè il punto B′ si trova sul circolo (o sulla superficie sferica) c. Ora essendo OB′ il segmento normale massimo condotto dal punto O al circolo c', tutti gli altri segmenti, condotti da O ai punti del circolo (o della superficie sferica) c', sono minori di OA, e perciò interni al cerchio (o alla sfera) c.

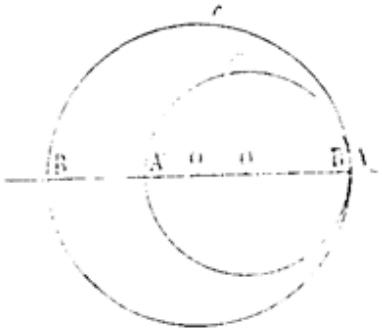

Fig. 165.

5°. Se infine è $d < R - R'$, risulta $d + R' < R$, ossia (Fig. 166) $OO' + O'B' < OA$, ossia $OB' < OA$. Siccome OB′ è il più grande dei segmenti condotti dal punto O al circolo (o alla superficie sferica) c', si ha che tutti i punti di c' hanno da O una distanza minore del raggio R, e perciò sono interni al circolo (o alla sfera) c.

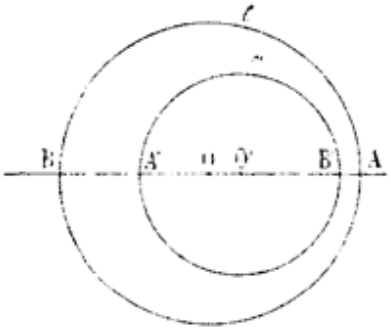

Fig. 166.

Definizione. — Se due circonferenze situate in un piano (o due superficie sferiche) hanno un solo punto comune, e nessuno degli altri punti dell'una è compreso nell'altra si dicono *tangenti esternamente*; se due circonferenze (o due superficie sferiche) hanno un solo punto comune, e tutti i punti di quella, avente raggio minore, sono compresi nell'altra, si dicono *tangenti internamente*. Il punto comune si dice *punto di contatto*.

Corollari. — *1°. Date due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche):*

1° *se nessun punto di una di esse è compreso nell'altra, la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi;*

2° *se esse sono tangenti esternamente, la distanza dei loro centri è eguale alla somma dei raggi;*

3° *se esse hanno due (o infiniti) punti comuni, la distanza dei loro centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi;*

4° *se esse sono tangenti internamente, la distanza dei loro centri è eguale alla differenza dei raggi;*

5° *se tutti i punti di una di esse sono compresi nell'altra, la distanza dei loro centri è minore della differenza dei raggi.*

Queste proposizioni sono le inverse di quelle del teorema precedente, e sono vere per il solito principio esposto nel § 4 dei Preliminari.

2°. *Due circoli, aventi due punti comuni, si tagliano in essi, e la corda comune è perpendicolare alla retta dei centri, ed è divisa da essa per metà.*

Infatti, i punti O, O′ essendo equidistanti da H, K, la OO′ è il luogo dei punti equidistanti da H, K (Fig. 164).

3°. *Due superficie sferiche, aventi un circolo in comune, si tagliano in esso, e la retta dei centri è perpendicolare al piano della comune intersezione, e passa pel centro di essa.*

4°. *Se due circoli (o due sfere) sono tangenti, la retta dei centri passa per il punto di contatto.*

190. Teorema 1°. — *Se due circoli, situati in un piano, si tagliano in due punti, gli angoli, formati dalle due tangenti ad essi in un punto comune, sono rispettivamente eguali agli angoli formati dalle due tangenti ad essi nell'altro punto comune.*

Sieno A, B (Fig. 167) i punti comuni a due circoli di un piano. Facendo rotare attorno alla retta OO′, individuata dai due centri, il semipiano OO′A, finchè venga a coincidere col semipiano OO′B, il punto A prende la posizione del punto B, e quindi le tangenti in A ai due circoli vengono a coincidere colle tangenti in B; dunque gli angoli formati dalle prime sono rispettivamente eguali agli angoli delle seconde.

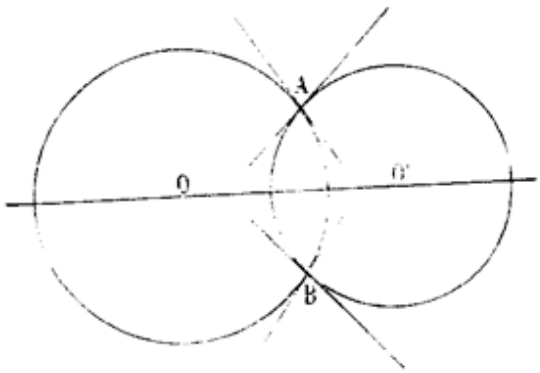

Fig. 167.

Teorema 2°. — *Se due superficie sferiche si tagliano secondo un circolo, i diedri, formati dai piani tangenti ad esse in un punto comune, sono rispettivamente eguali ai diedri formati dai piani tangenti ad esse in un altro punto comune.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

Definizioni. — 1°. Si chiamano *angoli di due circonferenze in un piano (o di due superficie sferiche)*, che si tagliano, gli angoli formati dalle tangenti (o piani tangenti) ad esse in un punto comune.

2°. Due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche) che si tagliano, si dicono *normali* o *perpendicolari*, oppure *oblique*, secondo che formano, o no, angoli retti.

4. — ALCUNI PROBLEMI.

191. Le proprietà esposte nei §§ precedenti ci permettono di risolvere varii problemi. Diamo qui la soluzione dei più importanti.

Problema. — *Costruire un arco, capace di un angolo dato, che abbia per corda un segmento dato.*

Sia AB il segmento, $\widehat{\alpha}$ l'angolo dato (Fig. 168). Per il punto A conduciamo una retta AT, tale che l'angolo $\widehat{BAT}$ sia eguale all'angolo $\widehat{\alpha}$. Conduciamo la retta a perpendicolare ad AB nel suo punto di mezzo, e per il punto A la AO perpendicolare ad AT, la quale deve evidentemente incontrare la retta a in un punto O. La circonferenza, descritta col centro in O e con raggio OA, passa per A e per B, perchè il punto O è equidistante da A e da B, ed è tangente nel punto A alla retta AT, perchè questa retta ha dal centro O una distanza eguale al raggio OA. Ne segue che l'angolo $\widehat{BAT}$ è eguale all'angolo di cui è capace l'arco AMB (§ 185, Teor.); questo è dunque l'arco richiesto.

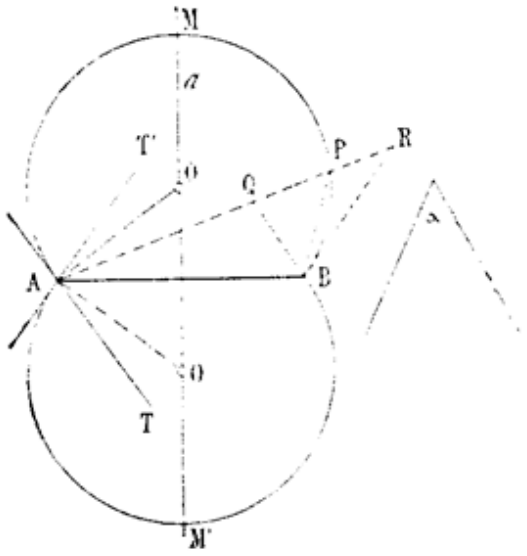

Fig. 168.

È chiaro che con una costruzione identica si può ottenere un secondo arco AM'B eguale ad AMB, capace dell'angolo α, e situato, rispetto alla retta AB, dalla parte del piano opposta a quella ove trovasi AMB.

Corollari. — *1°. Il luogo geometrico dei vertici degli angoli situati in un piano, i lati dei quali passano per due punti fissi, e che sono eguali ad un angolo dato, è formato da due archi di circolo, capaci dell'angolo dato, aventi per corda il segmento, che termina ai due punti fissi.*

Ogni angolo, per es. $\widehat{APB}$ (Fig. 168), i cui lati passano per i punti A, B, e che ha il vertice sopra uno degli archi AMB, AM'B, è eguale all'angolo $\widehat{\alpha}$. Ogni angolo per es. $\widehat{AQB}$, i cui lati passano per A e B, e che ha il vertice nell'interno di uno dei segmenti circolari, compresi fra i suddetti archi e la corda AB, è maggiore dell'angolo $\widehat{\alpha}$ (§ 186, Teor.). Invece ogni angolo per es. $\widehat{ARB}$, i cui lati passano per A, B, ma che ha il vertice esterno ai suddetti segmenti, è minore dell'angolo α (§ 187, Teor.).

2°. Se i lati di due o più angoli eguali, situati in un piano, passano per due medesimi punti, ed i vertici giacciono da una stessa parte del piano rispetto alla retta che unisce i due punti, i vertici degli angoli e i due punti fissi stanno sopra un medesimo circolo.

3°. Il luogo geometrico dei vertici degli angoli retti, situati in un piano, i cui lati passano per due punti fissi, è un circolo, che ha per diametro il segmento terminato dai due punti.

4°. Il luogo geometrico dei vertici di tutti gli angoli retti, i cui lati passano per due punti fissi, è una superficie sferica, che ha per diametro il segmento terminato dai due punti.

192. Problema. — *Costruire un angolo, che sia la quinta parte di un angolo piatto.*

Preso un segmento AB qualunque, si conduca la perpendicolare ad esso in un suo estremo B, e si prenda su essa un segmento BC eguale alla metà di AB; indi si descriva un circolo col centro in C e con raggio CB, e si tracci la retta AC, che incontra il circolo in due punti D, E. Nel triangolo ACB, rettangolo in B, l'ipotenusa AC è maggiore del cateto AB, e perciò è anche AE > AB. Inoltre dallo stesso triangolo si ha AB > AC − CB, ovvero AB > AD, perchè CB ≡ CD. Ne segue che è possibile costruire un triangolo isoscele, che abbia due lati eguali ad AE ed uno eguale ad AB, ed un altro triangolo isoscele, che abbia due lati eguali ad AB ed uno eguale ad AD. L'angolo compreso fra i lati uguali tanto dell'uno quanto dell'altro triangolo, così costruiti, è la quinta parte di un angolo piatto.

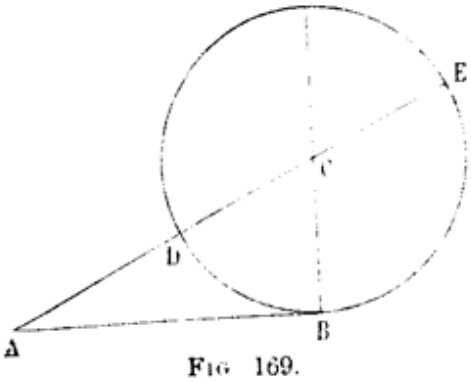

Fig. 169.

Infatti, per la retta AE facciamo passare un piano β (Fig. 170) diverso dal piano α, sul quale abbiamo eseguita la costruzione sopra indicata, ed in esso costruiamo il triangolo EAF, nel quale i lati EA, EF sono eguali, ed AF è uguale ad AB.

Prendiamo sul lato AE, a partire da A, il segmento AK eguale ad AB, e sul segmento AB il segmento AL eguale ad AD, e tracciamo i segmenti BD, LK. I due triangoli ABD, AKL uguali, perchè hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente uguali, ci danno $\widehat{DBA} \equiv \widehat{LKA}$, e siccome già sappiamo (§ 185, Teor.) che è $\widehat{DBA} \equiv \widehat{BEC}$, perchè, essendo l'angolo $\widehat{ABC}$ retto, la BA è tangente al circolo, ne risulta $\widehat{LKA} \equiv \widehat{BEC}$. Questi due angoli sono corrispondenti ri-

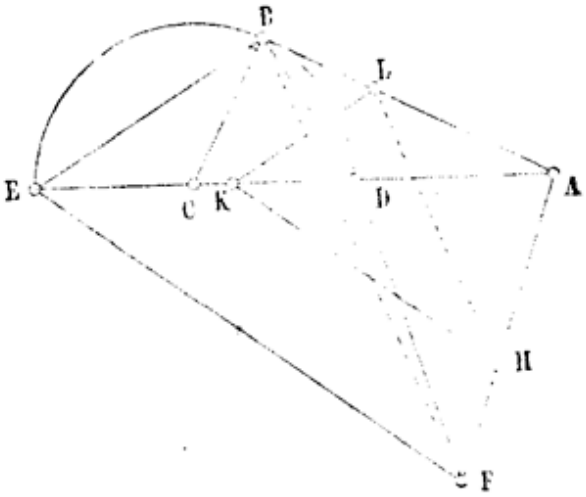

Fig. 170.

spetto alle rette KL, EB ed alla trasversale AE, quindi, essendo essi eguali, le due rette EB, LK sono parallele.

Sul segmento AF, a partire da A, prendiamo la parte AH = AL = AD, e tracciamo le rette BF, LH. I due triangoli ALH, ABF sono isosceli, ed hanno l'angolo $L\widehat{A}H$ comune; perciò gli angoli $H\widehat{L}A$ e $F\widehat{B}A$, corrispondenti rispetto alle rette LH, BF e alla trasversale AB, sono eguali, e quindi le rette LH, BF sono parallele.

I piani EBF, KLH, che contengono due coppie di rette parallele. sono paralleli (§ 47, Cor. 2°), e tagliano il piano β secondo due rette EF, HK parallele; quindi gli angoli $H\widehat{K}A$, $A\widehat{H}K$ sono rispettivamente eguali agli angoli $F\widehat{E}A$, $A\widehat{F}E$, ed il triangolo AHK è isoscele. Se ora conduciamo il segmento FD, otteniamo i due triangoli AFD, AKH eguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente eguali; perciò, essendo AHK isoscele, anche AFD è isoscele, ossia FD = FA. Ma sappiamo che il segmento ED, doppio di CB, è eguale ad AB, e quindi anche ad FA e ad FD, dunque il triangolo FDE è pure isoscele; e perciò l'angolo esterno $F\widehat{D}A$, ed anche il suo eguale $F\widehat{A}E$, è doppio dell'angolo $F\widehat{E}A$. Ma poichè la somma degli angoli di un triangolo è eguale ad un angolo piatto, nel triangolo isoscele FEA l'angolo $A\widehat{E}F$ è la quinta parte di un angolo piatto, come si voleva dimostrare.

193. Problema 1°. — *Condurre ad un circolo (o ad una sfera) una tangente parallela ad una retta data.*

Sia *c* il circolo (o la sfera) ed *a* la retta data. Per il centro O si conduca la retta (o il piano) perpendicolare alla retta data *a*, e per i due (o gl'infiniti) punti d'incontro M, N di essa col circolo (o colla superficie sferica) si conducano le rette *m*, *n* parallele ad *a*, le quali sono perpendicolari alla retta (o al piano) suddetto, e perciò tangenti al circolo (o alla sfera). È anche facile vedere che queste tangenti sono le sole, che soddisfano alle condizioni del problema.

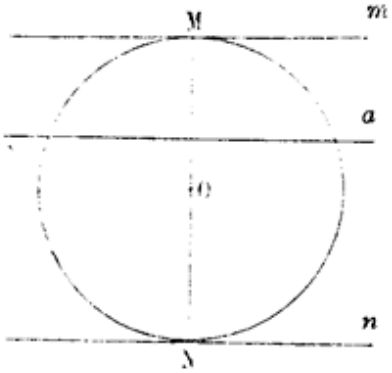

Fig. 171.

Problema 2°. — *Condurre ad una sfera un piano tangente parallelo ad un piano dato.*

I due piani, tangenti alla sfera negli estremi del diametro perpendicolare al piano dato, sono le sole soluzioni del problema.

194. Problema 1°. — *Condurre le tangenti ad un circolo, che passano per un punto del suo piano.*

1ª Risoluzione. — Sappiamo che ogni tangente ad un cerchio non ha alcun punto interno ad esso; perciò, se il punto dato fosse interno al cerchio, il problema sarebbe impossibile. Se poi il punto

dato è sul circolo, vedemmo già (§ 176, Teor. 1°), che esiste una sola retta, che passa per quel punto ed è tangente al circolo; essa si ottiene, conducendo per quel punto la perpendicolare al raggio, che termina al punto stesso.

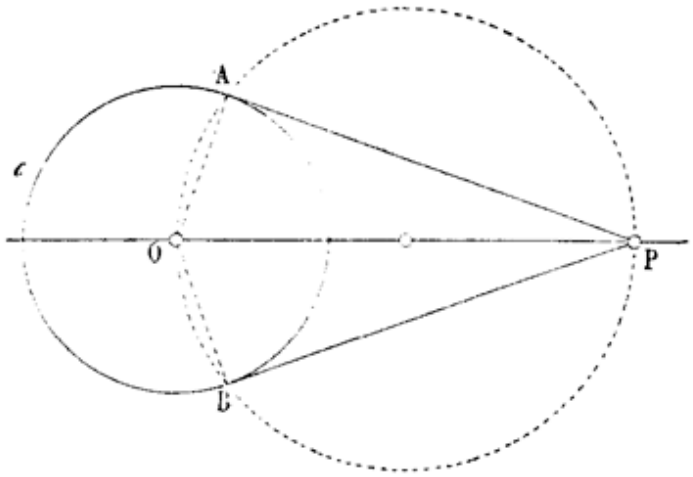

Fig. 172.

Supponiamo infine che il punto dato P sia esterno al circolo dato c (Fig. 172). In questo caso il problema è evidentemente ridotto all'altro: costruire un angolo retto, i cui lati passino uno per il punto P è l'altro per il centro O del circolo dato, e che abbia il vertice sul circolo dato. La retta del primo di questi lati è una tangente domandata. Ma sappiamo che il luogo dei vertici degli angoli retti, situati nel piano del circolo c, i cui lati passano per P ed O, è il circolo, che ha per diametro PO (§ 191, Cor. 3°); dunque, siccome questo taglia il circolo c in due punti A, B (§ 27), così le rette PA, PB, ed esse sole, sono le rette tangenti al circolo dato c, e che passano per P.

2ª Risoluzione. — Dato un circolo c ed un punto A esterno ad esso (Fig. 173), si descriva un circolo c' concentrico a c con raggio eguale al doppio del raggio del circolo c, ed un circolo c'', avente il centro nel punto A, e che passi per il centro O del circolo c. I due circoli c', c'' (§ 189, Teor.) si tagliano in due punti B, B'.

Le rette perpendicolari ai raggi OB, OB', condotte per A, passano rispettivamente per i punti di mezzo E, E' dei segmenti OB, OB' (§ 175, Cor. 2°), ossia per i loro punti d'incontro col circolo c: e perciò sono tangenti al circolo c nei punti E, E' stessi.

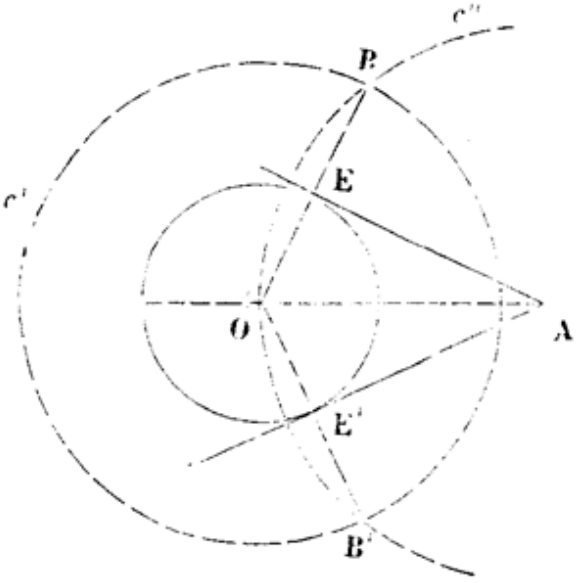

Fig. 173.

Corollario 1°. — *I segmenti tangenti, condotti da un punto ad un circolo, sono eguali.*

Infatti (fig. 172) i due triangoli rettangoli OPA, OPB, aventi l'ipotenusa OD comune e i cateti OA, OB eguali, sono eguali, ed è perciò PA = PB.

Problema 2°. — *Condurre le rette (o piani) tangenti ad una sfera, che passano per un punto.*

Sappiamo già che ogni retta (o piano) tangente ad una sfera non ha alcun punto interno ad essa; perciò, se il punto dato è interno alla sfera, il problema è impossibile. Se poi il punto è sulla superficie sferica, vedemmo già (§ 176, Teor. 2°) che esistono infinite rette tangenti alla sfera in quel punto, le quali giacciono tutte nel piano tangente alla sfera in quel punto. Questo piano tangente è perpendicolare al raggio della sfera, che termina in quel punto.

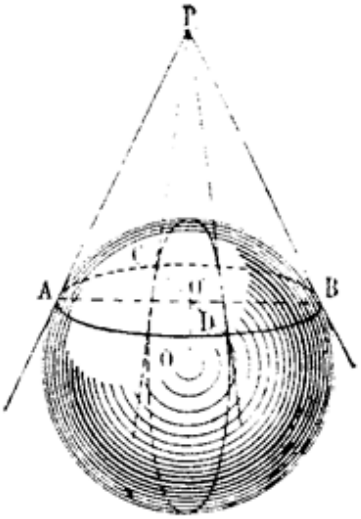

Fig. 174.

Supponiamo infine che il punto dato P sia esterno alla sfera. In questo caso il problema è evidentemente ridotto all'altro: *Costruire un angolo retto, i cui lati passino uno per il punto P e l'altro per il centro O della sfera, e che abbia il vertice sulla superficie sferica data.* La retta del primo di questi lati è una tangente alla sfera data. Ma sappiamo che il luogo dei vertici degli angoli retti, i cui lati passano per P ed O, è la superficie sferica che ha per diametro PO (§ 191, Cor. 4°); dunque, siccome questa taglia la superficie sferica data secondo un circolo, così le infinite rette, che uniscono il punto P con un punto di questo circolo, ed esse sole, sono le tangenti alla sfera data e passano per P. Inoltre ciascuno degli infiniti piani, tangenti alla sfera nei punti del circolo suddetto, contiene una delle dette tangenti, e perciò passa per il punto P; essi sono i soli piani tangenti che passano per questo punto.

Corollario 2°. — *I segmenti tangenti, condotti da un punto ad una sfera, sono eguali.*

CAPITOLO II

Relazioni di poligoni con un circolo, e di poliedri con una sfera.

195. Definizioni. — 1ª. Se un poligono ha tutti i suoi vertici su di un circolo, si dice ch'esso è *inscritto* nel circolo, e che il circolo è *circoscritto* al poligono. Analogamente, se una linea poligonale ha tutti i suoi vertici su di un arco contermine, si dice ch'essa è *inscritta* nell'arco, e che l'arco è *circoscritto* ad essa.

2ª. Dicesi *raggio di un poligono inscritto* (o *di una linea poligonale inscritta*) il raggio del circolo (o dell'arco) circoscritto.

3ª. Se un poligono ha tutti i suoi lati tangenti ad un circolo, si dice che esso è *circoscritto* al circolo, e che il circolo è *inscritto* nel poligono. Analogamente, se una linea poligonale ha tutti i suoi lati tangenti ad un arco, ed ha gli estremi sopra i lati dell'angolo al centro, che comprende quest'arco, si dice ch'essa è *circoscritta* all'arco, e che l'arco è *inscritto* in essa.

4ª. Dicesi *apotema* di un poligono circoscritto ad un circolo (o di una linea poligonale circoscritta ad un arco) il raggio del circolo (o dell'arco) inscritto.

5ª. Dicesi *settore poligonale inscritto* o *circoscritto* ad un settore circolare il poligono che ha per vertici il centro del circolo, a cui l'arco appartiene, ed i vertici di una linea poligonale inscritta, o circoscritta, a quest'arco.

6ª. Se un poliedro ha tutti i suoi vertici sopra una superficie sferica, si dice che è *inscritto* in essa, e che la superficie sferica è *circoscritta* al poliedro. Dicesi poi *raggio* di un poliedro inscritto il raggio della superficie sferica circoscritta.

7ª. Se un poliedro ha tutte le sue facce tangenti ad una sfera, si dice che è *circoscritto* ad essa, e che la sfera è *inscritta* nel poliedro. Dicesi poi *apotema* di un poliedro circoscritto il raggio della sfera inscritta.

Sappiamo che per individuare un circolo bisogna conoscerne il centro, il raggio ed il piano in cui giace. Ne segue che in un piano dato π si possono tracciare infinite circonferenze, che hanno per centro un punto qualunque di esso ed un raggio arbitrario. Tra queste ne esistono pure infinite che passano per un punto A, dato comunque nel piano. Infatti la circonferenza, che ha per centro un altro punto qualunque O di π, e per raggio la distanza OA, passa per il punto A.

Teorema 1°. — *Esistono in un piano infiniti circoli che passano per due dei suoi punti. Il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti, condotta nel piano dato per il punto di mezzo di quel segmento.*

Infatti, la retta a, perpendicolare al segmento AB nel suo punto di mezzo (Fig. 175), essendo il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B, è chiaro che un circolo, che abbia per centro un punto

qualunque O_1 di questa retta e per raggio la distanza di questo punto dai punti A, B, passa per i punti A, B. Nessun punto fuori della retta a può essere il centro di un circolo, che passi per A e per B, poichè esso non è egualmente distante da questi punti.

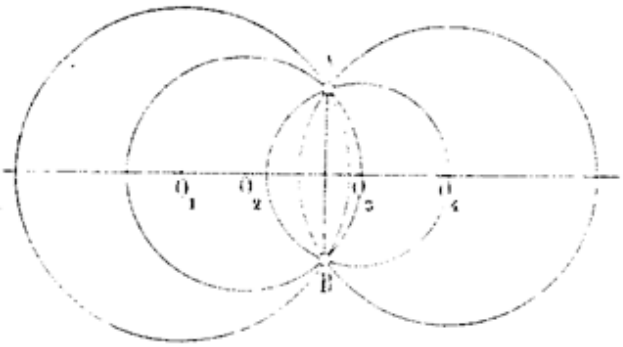

Fig. 175.

Teorema 2°. — *Per tre punti, non situati in linea retta, passa uno, ed un solo, circolo.*

Dati tre punti A, B, C, non in linea retta (Fig. 126), sappiamo che esiste uno ed un solo punto O nel loro piano, equidistante da essi (§ 160, Cor. 1°). Il circolo, che ha per centro O e per raggio la distanza OA, passa per i tre punti A, B, C, e non esistono evidentemente altri circoli che verificano la stessa condizione.

Corollario. — *Ad un triangolo si può sempre circoscrivere un circolo.*

196. Nello spazio esistono infinite superficie sferiche. Per un punto ne passano pure infinite.

Teorema 1°. — *Esistono infinite superficie sferiche, che passano per due punti; il luogo geometrico dei loro centri è il piano perpendicolare al segmento, che ha per estremi i punti stessi, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, il luogo dei punti equidistanti da due punti dati A, B è il piano α perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti dati, condotto per il suo punto di mezzo (§ 161, Teor.): perciò ciascun punto di questo piano è centro di una superficie sferica, passante per i punti A, B, la quale ha per raggio la distanza del medesimo punto dai due punti dati. Nessun punto fuori del piano α può esser centro di una superficie sferica, che passa per i due punti dati, essendo disegualmente distante da essi.

Teorema 2°. — *Per tre punti, non situati in linea retta, passano infinite superficie sferiche; il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al piano individuato dai tre punti, condotta per il centro del circolo che passa per i punti stessi.*

Questo teorema si dimostra come il precedente, ricordando che il luogo dei punti equidistanti da tre punti dati A, B, C, non in linea retta, è la retta perpendicolare al loro piano, condotta per il punto di questo piano equidistante da essi, ossia per il centro del circolo che passa per essi (§ 161, Cor. 1°).

Teorema 3°. — *Per quattro punti, non situati in un piano, passa una, ed una sola, superficie sferica.*

Infatti, dati quattro punti A, B, C, D non situati in un piano, sappiamo che esiste uno, ed un solo, punto O, equidistante da essi (§ 161, Cor. 2°). Questo punto, ed esso solo è centro di una superficie sferica, che passa per i punti A, B, C, D, e che ha per raggio la distanza di O dai punti stessi.

Corollario. — *Ad un tetraedro si può circoscrivere una, ed una sola, sfera.*

197. In un piano esistono infiniti circoli tangenti ad una retta; tutti quelli cioè, che hanno per centro un punto arbitrario del piano, e per raggio la distanza di questo punto dalla retta data.

Teorema 1°. — *Esistono infiniti circoli tangenti a due rette, che si tagliano; il luogo geometrico dei loro centri è formato dalle bisettrici degli angoli delle due rette medesime.*

Affinchè un circolo sia tangente ad una retta, è necessario e sufficiente che il suo raggio sia eguale alla distanza del suo centro dalla retta; perciò tutti i punti, che sono equidistanti dalle due rette, ed essi soli, sono centri di circoli tangenti alle medesime. Siccome il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette, che s'incontrano, è formato dalle bisettrici dei loro angoli (§ 162, Teor.). Così il teorema è dimostrato.

Teorema 2°. — *Esistono quattro circoli tangenti alle tre rette di un triangolo.*

Se un circolo c è tangente alle tre rette di un triangolo, il suo centro dev'essere un punto del piano del triangolo, equidistante dalle sue rette; e viceversa. Ma nel piano di un triangolo esistono quattro soli punti equidistanti dalle sue rette (§ 162, Cor.), dunque esistono quattro circoli tangenti alle tre rette di un triangolo.

Definizione. — Dei quattro circoli, che toccano le tre rette di un triangolo ABC, i tre, che hanno i loro centri e tutti i loro punti esterni al triangolo, si distinguono dal quarto, chiamandoli *exiscritti*.

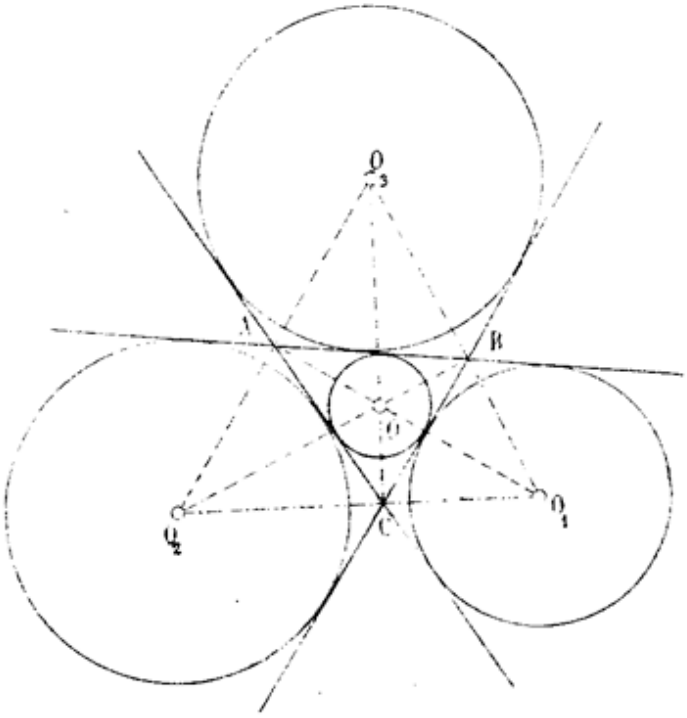

Fig. 176.

198. Nello spazio esistono infinite sfere tangenti ad un piano, tutte quelle cioè, che hanno per centro un punto arbitrario dello spazio, e per raggio la distanza di questo punto dal piano dato.

Teorema 1°. — *Esistono infinite sfere tangenti a due piani, che si tagliano; il luogo geometrico dei loro centri è costituito dai piani bisettori dei diedri formati dai due piani medesimi.*

Infatti, affinchè una sfera sia tangente ad un piano, è necessario e sufficiente che il suo raggio sia eguale alla distanza del suo centro dal piano, perciò tutti i punti, che sono equidistanti dai due piani dati, ed essi soli, sono centri di sfere tangenti ai medesimi. Ma il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che si tagliano è formato (§ 163, Teor.) dai piani bisettori dei loro diedri: dunque il teorema resta dimostrato.

Teorema 2°. — *Esistono infinite sfere tangenti ai tre piani di un triedro; il luogo geometrico dei loro centri è formato da quattro rette, che passano per il vertice del triedro, e che sono le intersezioni dei piani bisettori dei diedri formati dai tre piani dati.*

Infatti, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre piani di un triedro è formato da quattro rette, che passano per il vertice del triedro (§ 163, Cor.) e che sono le intersezioni dei piani bisettori dei diedri formati dai piani delle tre facce; dunque il teorema resta dimostrato.

Teorema 3°. — *Esistono non più di otto e non meno di cinque sfere tangenti ai quattro piani di un tetraedro.*

Infatti esistono non più di otto e non meno di cinque punti equidistanti dalle quattro facce di un tetraedro (§ 164, Teor.); e quindi il teorema resta dimostrato.

199. Abbiamo già visto che per tre punti, non in linea retta, si può far passare uno ed un solo circolo, ed è evidente che questo circolo non passa generalmente per un quarto punto preso ad arbitrio nel piano. Ne segue, che per quattro punti del piano passerà un circolo, solo quando essi occupano posizioni particolari.

Analogamente abbiamo visto che esistono quattro circoli tangenti a tre rette di un triangolo, ed è evidente che nessuno di essi è in generale tangente ad una quarta retta, presa ad arbitrio nel piano, se le quattro rette non si trovano in posizioni particolari l'una rispetto all'altra.

I teoremi seguenti danno appunto le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè quattro punti sieno sopra un circolo, e quattro rette sieno tangenti ad un circolo.

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè si possa circoscrivere un circolo ad un quadrilatero convesso, è che i suoi angoli opposti sieno supplementari.*

1°. Se ABCD (Fig. 177) è un quadrilatero inscritto, si ha che

l'angolo $A\widehat{D}C$ inscritto nell'arco ADC è il supplemento dell'angolo $A\widehat{B}C$ inscritto nel rimanente arco ABC (§ 184, Cor. 4°).

2°. Viceversa sia ABCD un quadrilatero convesso, nel quale gli angoli opposti $A\widehat{B}C$, $A\widehat{D}C$ sono supplementari.

Osserviamo prima di tutto che, il quadrilatero essendo convesso, i suoi vertici B, D si trovano da parti opposte della retta AC. Allora se per i tre punti A, D, C facciamo passare un circolo (§ 195, Teor. 2°); l'arco ABC è capace dell'angolo supplementare di $A\widehat{D}C$ (§ 184, Cor. 4°), ed è il luogo geometrico dei vertici degli angoli eguali al supplemento di $A\widehat{D}C$, i lati dei quali passano per i punti A, C, e che hanno i vertici situati, rispetto alla retta AC, in parte opposta a quella di D (§ 191, Cor. 1°). Ne segue che l'angolo $A\widehat{B}C$, soddisfacendo a queste condizioni, deve avere il suo vertice in un punto di questo arco.

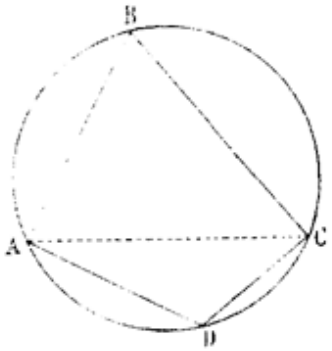

Fig. 177.

Corollario. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un parallelogrammo si possa circoscrivere un circolo, è che esso sia rettangolo.*

200. Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un quadrilatero convesso si possa inscrivere un circolo, è che la somma di due lati opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

1°. Sia ABCD (Fig. 178) un quadrilatero convesso circoscritto ad un circolo, e siano L, M, N, P i punti di contatto dei suoi lati. Siccome i segmenti tangenti, condotti da un punto ad un circolo, sono eguali, si hanno le eguaglianze

$$AL \equiv AP$$
$$BL \equiv BM$$
$$CN \equiv CM$$
$$DN \equiv DP,$$

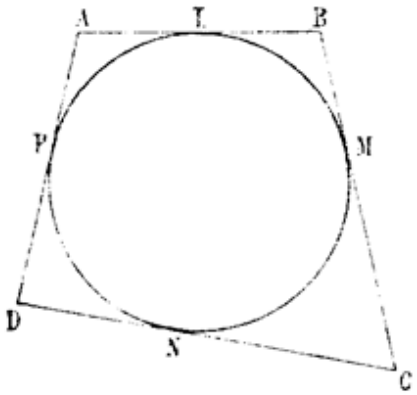

Fig. 178.

dalle quali si ricava

$$AL + BL + CN + DN \equiv AP + DP + BM + CM.$$

ovvero

$$AB + CD \equiv AD + BC.$$

2°. Inversamente, sia ABC'D' (Fig. 179) un quadrilatero convesso, nel quale si abbia

$$AB + C'D' \equiv AD' + BC';$$

dico che esiste un circolo, che tocca le sue quattro rette ed è in-

terno ad esso. Infatti si può sempre costruire un circolo c tangente alle tre rette AB, BC′, AD′, avente il centro interno agli angoli $D'\widehat{A}B$ $A\widehat{B}C'$. Se l'altra retta C′D′ del poligono non fosse tangente al circolo c, si potrebbe condurre una tangente CD parallela a C′D′, in modo che il centro non fosse interno alla striscia formata dalle rette CD, C′D′ (§ 193. Prob. 1°).

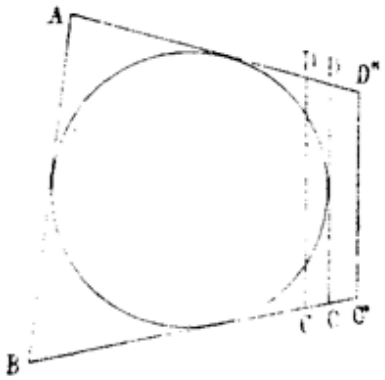

Fig. 179.

Il quadrilatero ABCD allora essendo circoscritto al circolo, si avrebbe

$$AB + CD \equiv AD + BC;$$

ma da quest'eguaglianza e dall'altra

$$AB + C'D' \equiv AD' + BC'$$

si ricava

$$AB + CD + C'D' \equiv AD + BC + C'D'$$

$$AB + C'D' + CD \equiv AD' + BC' + CD,$$

e quindi

$$AD' + BC' + CD \equiv AD + BC + C'D'.$$

Se la C′D′ è una secante del circolo c, sarebbe

$$AD' < AD,\ BC' < BC,\ AD - AD' \equiv DD',\ BC - BC' \equiv CC',$$

ed allora dalla eguaglianza ottenuta si ricaverebbe l'altra

$$CD \equiv DD' + CC' + C'D'$$

che è assurda, perchè in un quadrilatero un lato è minore della somma degli altri tre.

Se invece il lato C′D′ avesse una posizione C″D″ esterna al circolo c, sarebbe

$$AD < AD'',\ BC < BC''\ \text{e}\ AD'' - AD \equiv DD'',\ BC'' - BC \equiv CC''.$$

perciò l'eguaglianza precedente darebbe

$$C''D'' \equiv DD'' + CC'' + CD$$

il che è assurdo, perchè in un quadrilatero un lato è minore della somma degli altri tre.

La C′D′ è dunque tangente al circolo c.

Corollario. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un parallelogrammo si possa inscrivere un circolo, è che esso sia una losanga.*

2. — POLIGONI REGOLARI.

201. Definizioni. — 1ª. Un poligono convesso (o linea poligonale convessa) si dice *regolare*, se ha tutti i suoi lati eguali e tutti i suoi angoli eguali.

Per es. il triangolo equilatero e il quadrato sono poligoni regolari.

2ª. Un settore poligonale si dice *regolare*, se la linea poligonale corrispondente è regolare.

Teorema. — *Ad un poligono regolare si può sempre inscrivere e circoscrivere un circolo.*

Sia ABCDE (Fig. 180) un poligono regolare convesso; si conducano le bisettrici AO, BO di due suoi angoli successivi $\widehat{A}$, $\widehat{B}$. Poichè la somma degli angoli $B\widehat{A}O$, $A\widehat{B}O$ è eguale all'angolo $E\widehat{A}B$, e perciò è minore di un angolo piatto, queste bisettrici devono incontrarsi in un punto O.

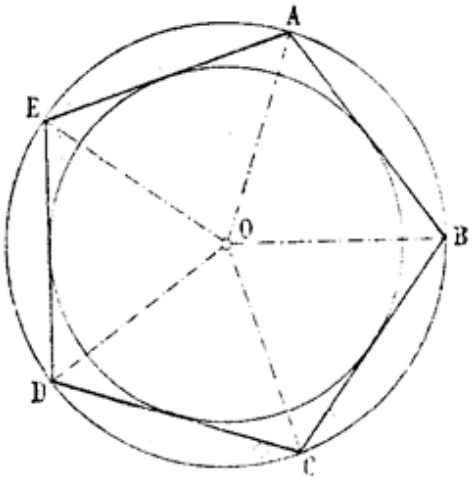

Fig. 180.

Allora il triangolo OAB, avendo gli angoli $O\widehat{A}B$, $O\widehat{B}A$ eguali, come metà di angoli eguali, è isoscele, ed ha i lati OA, OB pure eguali. Se poi tracciamo il segmento OC, che ha per estremi il punto O e il vertice C, consecutivo a B, il triangolo OBC, che si forma è uguale al triangolo OBA, perchè il lato OB è comune ad entrambi, BC è eguale a BA, e l'angolo $O\widehat{B}C$ è eguale a $O\widehat{B}A$ per costruzione. Ne segue che è $OC \equiv OA \equiv OB$ e gli angoli $O\widehat{C}B$, $O\widehat{A}B$ sono pure eguali, e siccome quest'ultimo è la metà dell'angolo $E\widehat{A}B$, e quindi anche dell'angolo $B\widehat{C}D$, così anche $O\widehat{C}B$ è la metà di $B\widehat{C}D$, ossia la semiretta OC è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}D$. Così seguitando, si dimostra, che i segmenti OD, OE,.... fanno parte delle bisettrici degli angoli del poligono, e sono eguali fra loro.

Il punto O è dunque equidistante da tutti i vertici A, B, C.... del poligono, e perciò la circonferenza, descritta nel piano del poligono col centro in O e con raggio OA, passa per tutti i vertici del poligono, ossia è circoscritta ad esso.

Osservando poi che i lati AB, BC, CD.... sono corde eguali del circolo ora costruito, si vede immediatamente (§ 181, Cor. 3°) che essi sono tangenti ad un altro circolo concentrico al primo, che ha

per raggio la distanza del centro del circolo stesso dai lati del poligono.

Corollari. — *1°. Ad una linea (o settore) poligonale regolare si può sempre circoscrivere o inscrivere un arco (o settore circolare).*

2°. Le bisettrici degli angoli di un poligono (o linea poligonale) regolare e le perpendicolari ai lati nei loro punti di mezzo passano per uno stesso punto, che è il centro dei circoli (o degli archi) circoscritto ed inscritto.

202. Teorema. — *Se più punti dividono un circolo in archi eguali, il poligono che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quello che ha per rette consecutive le tangenti al circolo nei punti medesimi, sono regolari.*

Sieno A, B, C .... (Fig. 181) punti del circolo *c*, che lo dividano in archi AB, BC .... eguali fra loro. Tracciamo i segmenti AB, BC, che hanno per estremi i punti consecutivi, e conduciamo le tangenti nei punti A, B, C .... Facciamo scorrere il circolo *c* su sè stesso, in modo che il punto A prenda la posizione del punto B; allora anche il punto B prende la posizione del punto C, il punto C quella del punto D ...., e la tangente in A prende la posizione della tangente in B, la tangente in B quella della tangente in C .... Ne segue che ogni lato ed ogni angolo del poligono ABCD .... inscritto prende la posizione del lato e dell'angolo successivo, cioè questo poligono ha tutti i lati e gli angoli eguali. Lo stesso può dirsi per il poligono A'B'C'...., dunque questi due poligoni sono regolari.

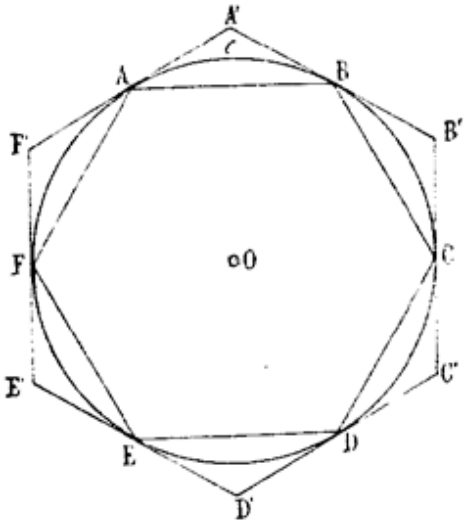

FIG. 181.

Corollari. — *1°. Se più punti dividono un arco dato in archi eguali, la linea poligonale inscritta, che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quella circoscritta, che ha per rette consecutive le tangenti a questi archi nei loro punti medii, sono regolari.*

2°. Se un poligono è inscritto in un circolo e circoscritto ad uno concentrico al primo, è regolare.

Infatti i suoi lati sono eguali (§ 181, Cor. 2°); perciò sono eguali gli archi del circolo circoscritto sottesi da essi, di guisa che i suoi vertici dividono il circolo circoscritto in parti eguali.

203. Dal teorema precedente risulta, che, per inscrivere e circoscrivere un poligono regolare di *n* lati, basta dividere in *n* parti eguali il circolo; e per far ciò basta costruire al centro del medesimo *n* angoli eguali, che sommati insieme formino due angoli piatti, ossia dividere due angoli piatti in *n* parti eguali.

È chiaro inoltre che quando è stato inscritto un poligono re-

golare di n lati, dividendo per metà il minore degli archi sottesi da ciascuno dei suoi lati, si divide il circolo in $2.n$ parti, e perciò si può costruire un poligono regolare inscritto, ed uno circoscritto di $2.n$ lati. Proseguendo nello stesso modo, si potrà inscrivere, un poligono di $4.n$ lati, poi uno di $8.n$ lati... in generale uno di $2^p.n$ lati. (*)

204. Problema. — *Ad un dato circolo inscrivere e circoscrivere un quadrato.*

Condotti nel circolo dato due diametri perpendicolari AC, BD, si ottengono quattro angoli al centro tutti eguali fra loro, perchè retti, e quindi gli archi AB, BC, CD, DA sono eguali. Non resta allora altro che condurre i segmenti AB, BC, CD, DA e le tangenti nei punti A, B, C, D per avere i quadrati richiesti.

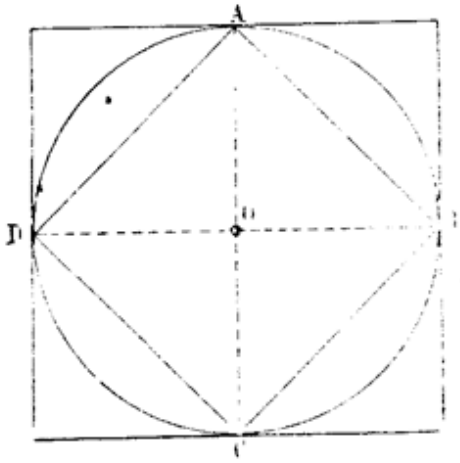

Fig. 182.

Corollario. — *Con semplici divisioni di archi per metà si potranno avere anche i poligoni regolari inscritti e circoscritti di 8, 16, 32, 64.... lati.*

205. Problema. — *Inscrivere e circoscrivere ad un dato circolo un esagono regolare.*

Per inscrivere e circoscrivere ad un circolo l'esagono regolare bisogna trovare un angolo eguale alla sesta parte di due angoli piatti, ossia ad un terzo di angolo piatto. Pertanto se sopra un raggio OB si descrive un triangolo equilatero OAB (§ 100, Cor.), l'angolo $\widehat{AOB}$ è la sesta parte di un giro, e quindi l'arco AB è la sesta parte del circolo, e non resta a fare altro che riportare sei volte quest'arco sul circolo per avere i punti di divisione, per mezzo dei quali (§ 202) si costruiscono gli esagoni regolari inscritto e circoscritto.

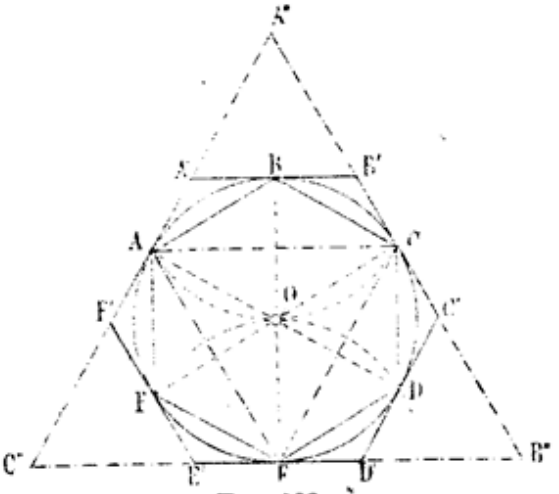

Fig 183.

Il metodo più sollecito per eseguire la divisione suddetta è il seguente; condotto un diametro EB si descrivono due circoli con raggio eguale a quello del circolo dato, i quali abbiano per centri gli estremi di questo diametro. I punti E, B e i punti d'incontro

(*) Gauss ha dimostrato che, se n è un numero primo, affinchè con costruzioni elementari (eseguibili colla riga e col compasso) si possa dividere un circolo in n parti eguali, è necessario e sufficiente che n sia della forma $2^p + 1$. I più piccoli numeri primi, che soddisfano a questa condizione, sono 3, 5, 17, 257...

di questi due circoli col circolo dato, sono i punti di divisione del circolo in sei parti eguali.

Corollari. — *1°. Il lato dell'esagono regolare, inscritto in un circolo, è eguale al raggio.*

2°. Dei sei punti, che dividono la circonferenza in 6 parti uguali, i tre, che a due a due non sono consecutivi, sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto, e le tangenti in essi punti sono i lati di un triangolo equilatero circoscritto.

3°. Con semplici divisioni di archi per metà si possono costruire anche i poligoni regolari inscritti e quelli circoscritti di 12, 24, 48.... lati.

206. Problema. — *Ad un dato circolo inscrivere e circoscrivere un decagono regolare.*

Per avere il decagono regolare inscritto in un circolo e quello circoscritto, basta dividere il circolo stesso in 10 parti eguali, e perciò bisogna trovare un angolo eguale alla decima parte di due angoli piatti, ossia ad un quinto di angolo piatto.

A tale scopo basta eseguire la costruzione data nel § 192. Prendiamo dunque (Fig. 184) due raggi OA, ON, perpendicolari fra loro; costruiamo un circolo che abbia per diametro ON, e congiungiamo il suo centro K coll'estremo A dell'altro raggio. Facendo centro in A e raggio AM, descriviamo un circolo; esso taglierà il circolo dato in due punti B, D.

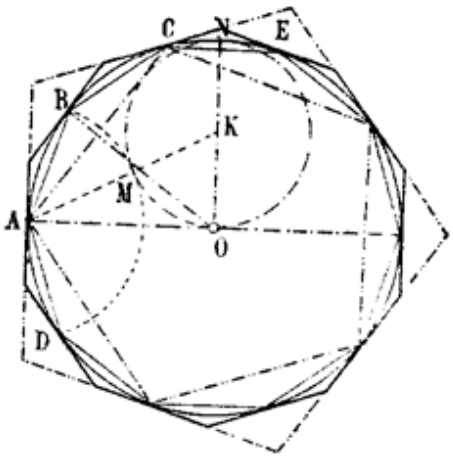

Fig. 184.

L'angolo $A\widehat{O}B$ del triangolo AOB è la decima parte di due angoli piatti, e l'arco AB è la decima parte del circolo. Riportando l'arco trovato dieci volte sul circolo, questo resterà diviso in dieci parti eguali, e si potrà facilmente costruire il decagono regolare inscritto e quello circoscritto ad esso circolo.

Corollari. — *1°. Dei dieci punti, che dividono la circonferenza in 10 parti uguali, i cinque, che a due a due non sono consecutivi, sono i vertici di un pentagono regolare inscritto, e le tangenti in essi punti sono i lati di un pentagono regolare circoscritto.*

2°. Con semplici divisioni di archi per metà si possono anche costruire i poligoni regolari iscritti e quelli circoscritti di 20, 40, 80... lati.

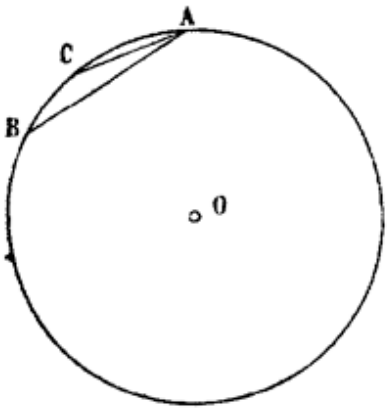

Fig. 185.

207. Problema. — *Ad un circolo dato inscrivere e circoscrivere un pentadecagono regolare.*

Colle costruzioni dei §§ precedenti portiamo, a partire da un punto A (Fig. 185) due

Dai trapezi BB'E'E, AA'D'D, CC'F'F si ricava (§ 103, Teor.)

$$BB' + EE' \equiv 2 . OO'$$
$$AA' + DD' \equiv 2 . OO'$$
$$CC' + FF' \equiv 2 . OO',$$

e sommando membro a membro queste eguaglianze, si ottiene

$$AA' + BB' + CC' + DD' + EE' + FF' = 6 . OO'$$

2°. Consideriamo ora un poligono regolare di un numero impari di lati, per es., il triangolo equilatero ABC. Chiamando A_1, B_1, C_1 i punti di mezzo degli archi AB, BC, CD, appartenenti al circolo circoscritto, si costruisca il triangolo $A_1B_1C_1$, e si indichino con D, E, F, K, H, M i punti d'incontro dei lati del secondo triangolo coi lati del primo. I punti A_1, C essendo i punti di mezzo l'uno degli archi AA_1B, $C_1A_1B_1$, l'altro degli archi ACB, C_1CB_1 il diametro A_1C è perpendicolare alle due corde AB, B_1C_1, e le divide per metà. Se ne deduce facilmente, che i segmenti AB, MH hanno

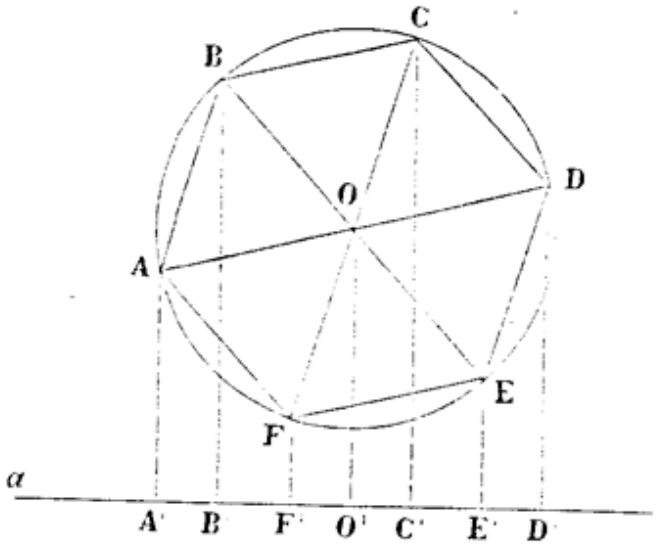

Fig. 187.

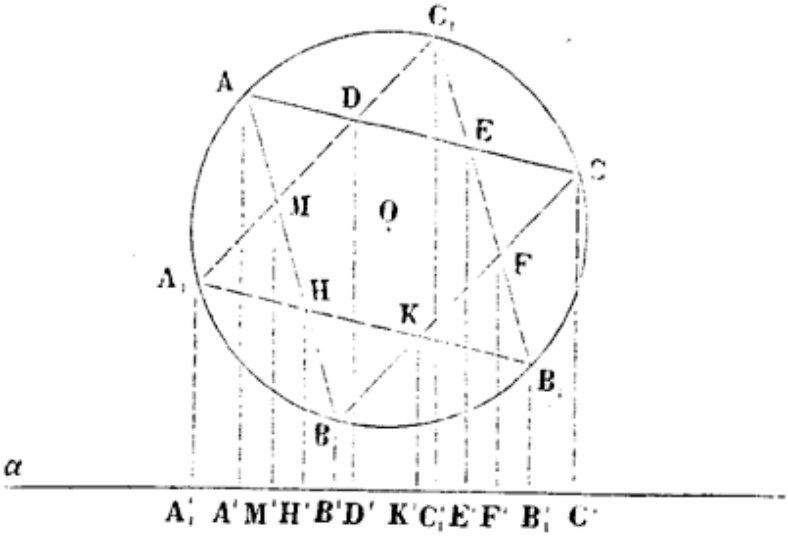

Fig. 188.

lo stesso punto di mezzo. Si ha perciò, in conseguenza del Teorema del § 103,

$$MM' + HH' \equiv AA' + BB';$$

archi AB, AC, eguali l'uno alla sesta, l'altro alla decima parte del circolo.

L'arco CB è $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ossia $\frac{1}{15}$ del circolo, e quindi, riportandolo 15 volte di seguito sul circolo, questo resta diviso in 15 parti, e si può facilmente inscrivere e circoscrivere un pentadecagono regolare.

Corollario. — *Con divisioni di archi per metà si potranno costruire anche i poligoni regolari inscritti e quelli circoscritti al dato circolo di 30, 60, 120.... lati.*

208. Problema. — *Costruire un poligono regolare di* n *lati, di cui ciascuno dei lati sia eguale ad un segmento dato.*

Si voglia per es. costruire un pentagono regolare, che abbia ciascuno dei suoi lati eguale al segmento dato MN. In un circolo qualunque O s'inscriva un pentagono regolare; poi sopra una delle sue rette AB (Fig. 186) si prenda un segmento AL = MN, e da L si conduca la parallela alla retta OA, che incontrerà la semiretta OB in un punto B'. Il circolo, che ha il centro in O, ed ha per raggio OB', è diviso dai suoi punti d'incontro A', B', C', D', E' con le semirette OA, OB, OC, OD, OE, condotte da O ai vertici del poligono ABCDE, in cinque parti uguali, e perciò il poligono A'B'C'D'E', in esso inscritto, è regolare. Inoltre il suo lato A'B' è parallelo ad AB, e perciò è uguale ad AL, e quindi anche a MN. Dunque A'B'C'D'E' è il poligono cercato.

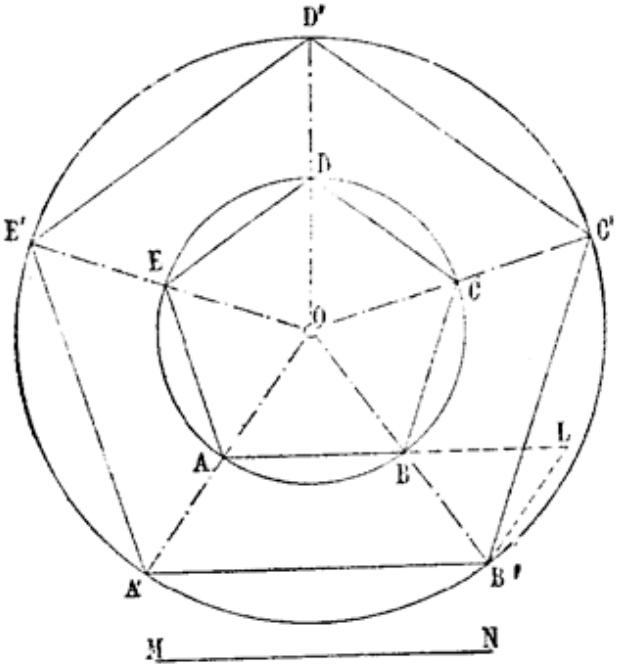

Fig. 186.

In tal modo la soluzione del problema proposto è ridotta alla soluzione dell'altro: *inscrivere un poligono regolare di* n *lati in un circolo,* il quale problema è stato risoluto nei §§ precedenti per varî valori di *n*.

209. Teorema. — *La somma delle distanze degli* n *vertici di un poligono regolare da una retta del piano, esterna al poligono, è eguale ad* n *volte la distanza del centro del poligono dalla stessa retta.*

1°. Supponiamo prima che il numero dei vertici del poligono sia pari, e consideriamo p. e. l'esagono regolare ABCDEF (Fig. 187), il cui centro è O, e sia *a* una retta esterna al poligono.

e similmente

$$FF' + KK' \equiv BB' + CC'$$
$$EE' + DD' \equiv CC' + AA',$$

e sommando membro a membro si ha

$$MM' + HH' + KK' + FF' + EE' + DD' \equiv 2(AA' + BB' + CC').$$

Analogamente si dimostra che

$$MM' + HH' + KK' + FF' + EE' + DD' \equiv 2(A_1A_1' + B_1B_1' + C_1C_1'),$$

d'onde si ricava

$$AA' + BB' + CC' \equiv A_1A_1' + B_1B_1' + C_1C_1'.$$

Ma si è dimostrato che la somma delle distanze dei sei vertici A, B, C, A_1, B_1, C_1 della retta a è eguale a sei volte OO', quindi

$$AA' + BB' + CC' \equiv 3 \,.\, OO',$$

come si doveva dimostrare.

3. — POLIEDRI REGOLARI.

210. Definizioni. — 1ª. Un angoloide si dice *regolare*, se tutte le sue facce sono eguali, e tutti i suoi diedri sono pure eguali.

2ª. Un prisma retto, avente per base un poligono regolare, si chiama *regolare*. Il segmento, che ha per estremi i centri delle due basi, si dice *asse* del prisma.

3ª. Una piramide, che ha per base un poligono regolare, ed ha per vertice un punto della perpendicolare al piano della base, condotta per il centro di essa, si dice *regolare*.

È facile vedere che in un prisma regolare le facce laterali sono rettangoli, e in una piramide regolare le facce laterali sono triangoli isosceli eguali; quindi le distanze del vertice della piramide dai lati della base sono eguali.

4ª. Dicesi *apotema* di una piramide regolare la distanza del vertice da un lato della base. L'altezza di una piramide regolare dicesi anche *asse* della piramide.

Teorema. — *L'angoloide di una piramide regolare è regolare.*

Infatti, facendo rotare la piramide attorno al suo asse, in modo che ogni lato della sua base venga a coincidere col lato consecutivo, anche ogni faccia ed ogni diedro del suo angoloide viene a coincidere coi successivi, e perciò tutte le facce e tutti i diedri di questo angoloide sono eguali, vale a dire l'angoloide è regolare.

Definizioni. — 5ª. Ogni diedro, la cui costola contiene l'asse di un prisma regolare, o di una piramide regolare, e le cui facce passano per due spigoli laterali, si chiama *diedro all'asse.*

6ª. La parte di prisma regolare, o di piramide regolare, compresa in un diedro all'asse dicesi *settore prismatico* o *piramidale.*

7ª. Ogni tronco di piramide a basi parallele, ottenuto da una piramide regolare, dicesi pure *regolare.*

211. Definizione. — Un poliedro si chiama *regolare,* se tutte le sue facce sono poligoni regolari eguali, e tutti i suoi angoloidi sono pure eguali e regolari.

Per es. il cubo è un esaedro regolare.

Teorema. — *Ad un poliedro regolare si può sempre inscrivere e circoscrivere una sfera.*

Sieno O, O′, O″ (Fig. 189) i centri di tre facce consecutive del poliedro dato, AB, CD i lati, che la faccia di centro O′ ha in comune con le altre due, e sieno K, L i punti di mezzo di questi lati. Se per il punto K si conduce un piano perpendicolare ad AB, esso dovrà passare per i centri O ed O′ delle due facce, e contenere le perpendicolari alle medesime condotte dai punti O ed O′. Ne segue che queste due perpendicolari OS, O′S, giacendo in un piano, e non potendo evidentemente essere parallele, s'incontrano in un punto S. Si congiunga allora il punto S col centro O″ della terza faccia e coi punti K ed L, e si considerino i triangoli rettangoli OKS, O′KS, che sono eguali, perchè hanno l'ipotenusa KS in comune e i due cateti OK, O′K eguali, come apotemi di poligoni regolari eguali. Se ne ricava $OS \equiv O'S$, $O\widehat{K}S \equiv O'\widehat{K}S$, vale a dire il punto S è equidistante dai piani delle due facce ABCDE ed ABC′D′E′, ed il piano AKS è bisettore del diedro $\widehat{AB}$. Considerando poi i due triangoli rettangoli KO′S, LO′S, che sono eguali, perchè hanno rispettivamente eguali i cateti, se ne ricava che $KS \equiv LS$ ed $O'\widehat{K}S \equiv O'\widehat{L}S$; allora, essendo $O\widehat{K}O' \equiv O'\widehat{L}O''$, come rettilinei di diedri eguali, ne viene che $O''\widehat{L}S \equiv O'\widehat{K}S$ ed LS è la bisettrice dell'angolo $O'\widehat{L}O''$. I due triangoli LSO″, LSO′ hanno $LO'' \equiv LO'$, LS comune, $O''\widehat{L}S \equiv O'\widehat{L}S$, quindi sono eguali, e perciò $O'S \equiv O''S$.

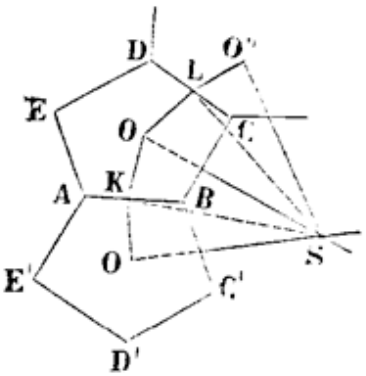

Fig. 189.

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le altre facce, si arriva infine a dimostrare, che il punto S è equidistante da tutte le facce del poliedro, e che quindi è il centro di una sfera inscritta al poliedro. Inoltre le distanze del punto S dai vertici di ciascuna faccia sono tutte eguali fra loro, perchè i loro estremi equidistano dall'estremo del segmento perpendicolare, e perciò sono raggi di una sfera, che ha per centro S ed è circoscritta al poliedro.

Corollario. — *Le perpendicolari ai piani delle facce di un poliedro regolare, condotte per i centri di esse, i piani perpendicolari agli spigoli nei loro punti di mezzo, e i piani bisettori dei diedri interni passano tutti per uno stesso punto, che è il centro comune delle sfere l'una inscritta e l'altra circoscritta al poliedro medesimo.*

212. Teorema. — *Non possono esistere più di cinque specie di poliedri regolari.*

Cominceremo col dimostrare che le facce di un poliedro regolare sono poligoni regolari, ciascuno de' quali non può avere più di cinque lati, e che ciascuno de' suoi angoloidi non può avere più di cinque facce. Infatti supponiamo che ciascuna faccia di un poliedro regolare sia un poligono regolare di m lati; è chiaro che ciascuno degli angoli di questo poligono sarà eguale ad $\frac{m-2}{m}$ di angolo piatto (§ 85, Teor.).

Se ora indichiamo con n il numero delle facce di ogni angoloide del poliedro regolare considerato, siccome in ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di due angoli piatti, dovrà essere

$$\frac{m-2}{m} \cdot n < 2.$$

Da ciò deriva, che, il numero m dovendo essere almeno eguale a 3, per $m = 3$ si ha

$$\frac{3-2}{3} \cdot n < 2,$$

donde si ricava

$$n < 6,$$

ossia n può essere eguale soltanto a 3, a 4, o a 5.

Analogamente per $m = 4$ si ha

$$\frac{4-2}{4} \cdot n < 2,$$

d'onde si ricava

$$n < 4,$$

e quindi, in questa ipotesi, n può avere il solo valore 3.

Infine, supponendo $m = 5$, si ottiene

$$\frac{5-2}{5} \cdot n < 2,$$

ossia

$$n < \frac{10}{3},$$

e perciò in questo caso si può avere per n il solo valore 3.

Per $m \geqq 6$ (*) risulta evidentemente $n < 3$, il che è assurdo; dunque non esiste alcun poliedro regolare formato con poligoni, aventi un numero di lati maggiore di 5.

Non possono dunque esistere altro che tre specie di poliedri regolari aventi per facce triangoli equilateri, ed aventi gli angoloidi di 3, 4, 5 facce; una sola specie di poliedri regolari, aventi per facce dei quadrati ed aventi gli angoloidi di tre facce; ed infine una sola specie di poliedri regolari, aventi per facce dei pentagoni regolari ed aventi gli angoloidi di tre facce ciascuno.

Mediante i teoremi dei § 136, 137 è poi facile determinare il numero di facce di spigoli e vertici di tali poliedri regolari.

Infatti abbiamo dimostrato che

$$2C = mF = nV$$
$$V + F = C + 2$$

d'onde, ponendo in quest'ultima eguaglianza al posto di C e V i loro valori $\frac{mF}{2}$, $\frac{mF}{n}$, ricavati dalla prima, si ottiene

$$F = \frac{4n}{2(n+m) - mn},$$

e quindi

$$V = \frac{mF}{n} = \frac{4m}{2(n+m) - mn}$$
$$C = \frac{mF}{2} = \frac{2m \,.\, n}{2(n+m) - mn}.$$

Mettendo al posto di m, n le cinque coppie di valori possibili sopra trovate, si deducono i valori indicati nella seguente tabella:

	F	V	C	m	n
Tetraedro	4	4	6	3	3
Esaedro	6	8	12	4	3
Ottaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

213. Problema 1°. *Costruire un tetraedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

1°. Dal centro O del circolo circoscritto ad un triangolo regolare BCD, avente i lati eguali al dato segmento (Fig. 190), s'innalzi la perpendicolare OA al piano di questo triangolo.

(*) In questo § per indicare l'eguaglianza di numeri, abbiamo usato il segno = che si adopera in aritmetica.

Essendo OB minore di BC, il circolo descritto nel piano AOB col centro in B e col raggio BC taglia la perpendicolare OA in un punto A. Il tetraedro ABCD è regolare.

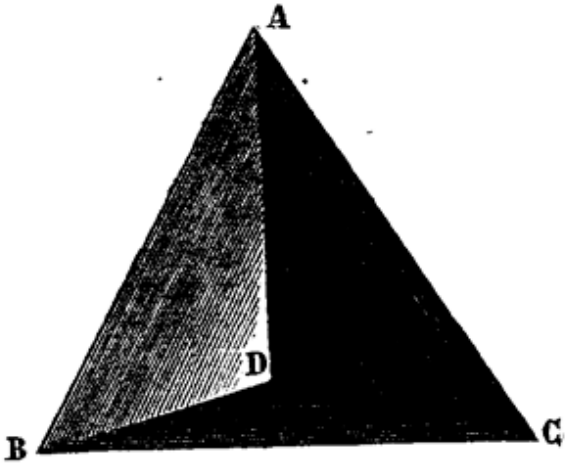

Fig. 190.

Infatti $AB \equiv AC \equiv AD$, perchè hanno sul piano del triangolo BCD proiezioni OB, OC, OD eguali, inoltre $AB \equiv BC$ per costruzione, perciò le facce sono triangoli equilateri, e quindi regolari ed eguali. Ma anche i triedri sono eguali fra loro, perchè hanno tutte le facce eguali; dunque il tetraedro ABCD è regolare.

Problema 2°. — *Costruire un esaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

2°. Sugli spigoli di un triedro trirettangolo $\widehat{B'.A'BC'}$ (Fig. 191) si prendano, a partire dal vertice B', tre segmenti B'A', B'B, B'C', eguali al segmento dato, e per i loro estremi A', B, C' si conducano

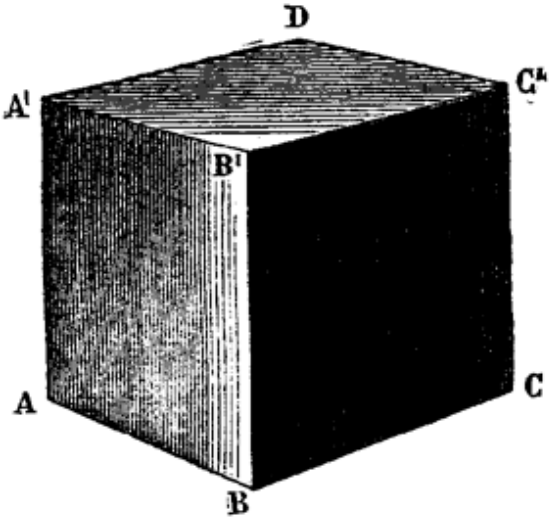

Fig. 191.

tre piani rispettivamente paralleli alle facce opposte del triedro. Si ottiene così (§ 155, Teor.) un parallelepipedo rettangolo le cui facce sono quadrati, ossia un cubo avente gli spigoli eguali al dato segmento.

Problema 3°. — *Costruire un ottaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Per il centro O del circolo circoscritto al quadrato ABCD, che ha i lati eguali al dato segmento (Fig. 192), si tiri la perpendicolare al piano di questo quadrato, e si prendano su di essa i seg-

menti OS, OS′ eguali ad OA e situati da parti opposte rispetto al punto O. La figura SABCDS′ è un ottaedro regolare.

Infatti, i triangoli rettangoli ASO, AOB sono eguali, perchè hanno i cateti eguali, dunque AS = AB. Analogamente si dimostra la eguaglianza di tutti gli spigoli, e per conseguenza si ricava che le facce sono triangoli regolari ed eguali. Considerando poi le due piramidi

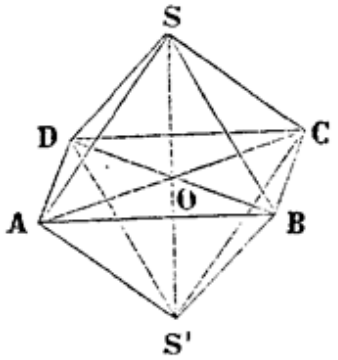

Fig. 192.

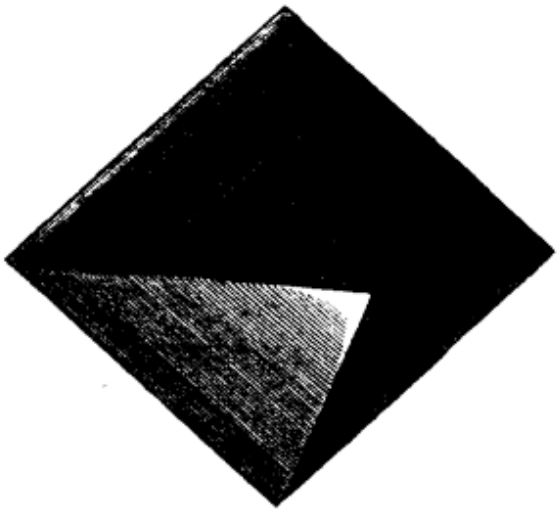

Fig. 193.

SABCD, S′ABCD si dimostra subito che sono eguali, quindi tutti gli angoloidi sono eguali, e perciò l'ottaedro è regolare.

Problema 4°. — *Costruire un dodecaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Sia ABCDE (Fig. 194) un pentagono regolare, avente i lati eguali al segmento dato. Essendo l'angolo $\widehat{ABC}$ la quinta parte di tre angoli piatti, possiamo costruire col vertice in B un triedro regolare, di cui una faccia sia l'angolo $\widehat{ABC}$. Sia BH il terzo spigolo di questo triedro, e si costruisca il pentagono regolare ABFGH. Si ottiene così un nuovo triedro $\widehat{A}$ e-

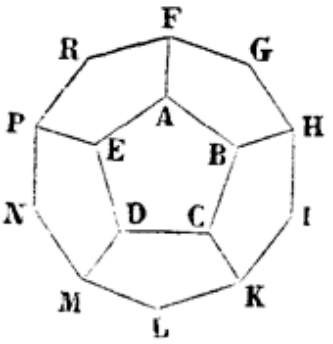

Fig. 194.

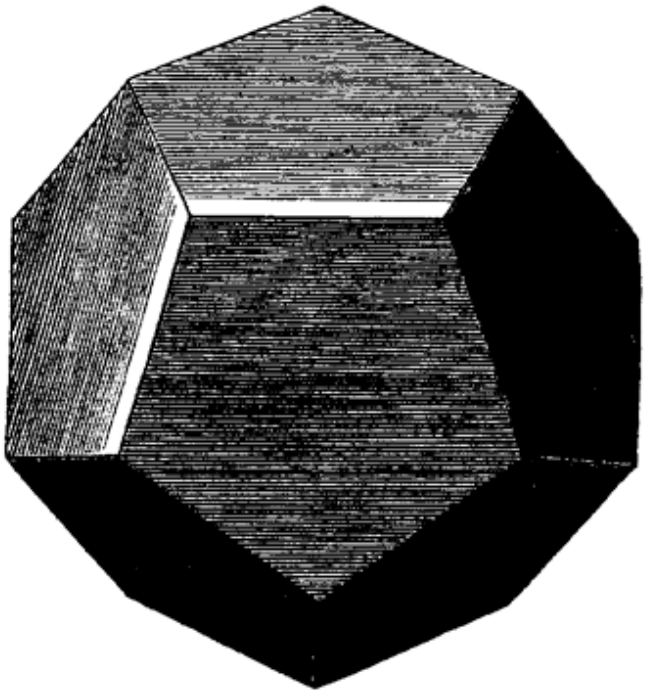

Fig. 195.

guale al triedro $\widehat{B}$, perchè essi hanno un diedro comune, compreso

tra facce rispettivamente eguali. Si può così costruire un pentagono regolare BCKIH, e nello stesso modo si possono costruire altri tre pentagoni regolari CDMLK, DEPNM, EAFRP. Resta così costruita una figura composta di sei pentagoni regolari e terminata da un decagono gobbo equilatero FGHIKLMNPR. È facile vedere che gli angoli $\widehat{NPR}$, $\widehat{PRF}$,.... sono tutti eguali agli angoli di un pentagono regolare.

Se si costruisce nella stessa guisa un'altra figura eguale alla precedente, e quindi si porta l'una adiacente all'altra, in modo che i due decagoni coincidano, senza che coincidano le due figure, si ottiene una figura, la quale è un dodecaedro regolare.

Problema 5°. — *Costruire un icosaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Dal centro O del circolo circoscritto ad un pentagono regolare ABCDE, avente i lati eguali al segmento dato, si innalzi una perpendicolare OS al piano dello stesso pentagono. Essendo $AO < AB$, il circolo, descritto nel piano AOS col centro A e con raggio AB, taglia la perpendicolare OS in un punto S. La piramide S.ABCDE ha cinque facce laterali che sono triangoli equilateri eguali, ed

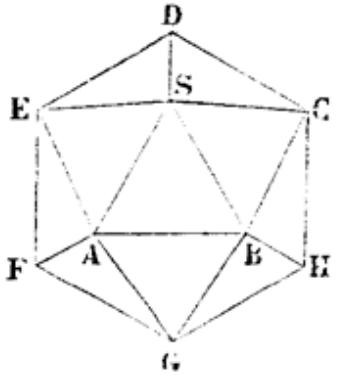

Fig. 196.

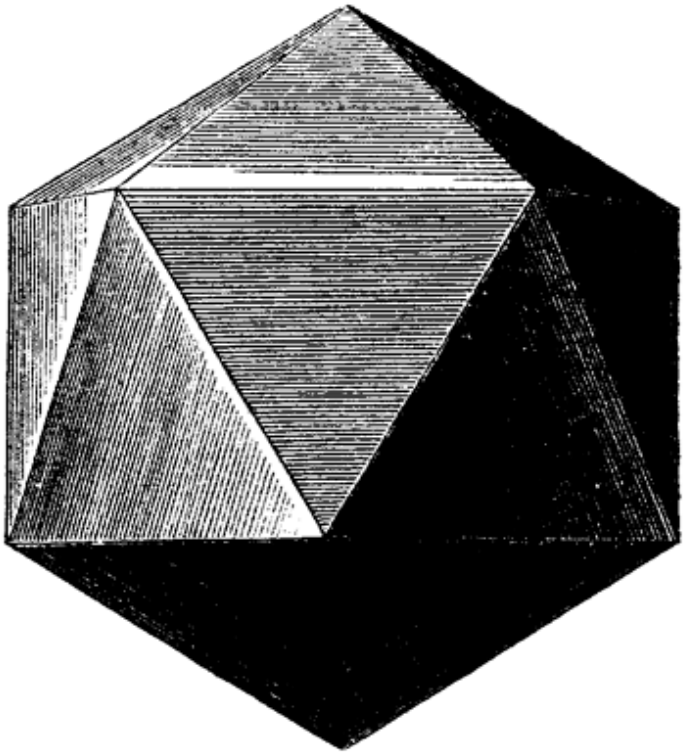
Fig. 197.

ha eguali tutti i diedri, i cui spigoli concorrono nel vertice S, perchè appartengono a triedri alla base eguali per costruzione. Ciò fatto, in ciascuno dei vertici A e B del triangolo SAB costruiamo una piramide eguale alla prima, e disponiamole come viene indicato dalla figura 196. Otteniamo così una superficie poliedrica, composta di dieci triangoli eguali, e terminata dall'esagono gobbo equilatero DCHGFE.

È inoltre facile vedere che tutti gli angoli $\widehat{EDC}$, $\widehat{DCH}$, ecc., sono eguali.

Se ora si costruisce nella stessa guisa un'altra figura eguale alla precedente, e indi si porta l'una adiacente all'altra in modo, che i due esagoni coincidano, senza che coincidano le due figure. si ottiene una figura la quale è evidentemente un icosaedro regolare.

CAPITOLO III

Sistemi di circoli e sfere.

214. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere eguali sieno eguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo.*

Infatti, ogni punto P di questo piano α è equidistante dai centri O_1, O_2 delle due sfere S_1, S_2 (§ 161, Teor.); quindi, se P è esterno alle due sfere, e PA_1, PA_2 sono due segmenti condotti da P, tangenti alle due sfere, i due triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2 sono eguali, avendo le ipotenuse PO_1, PO_2 eguali e i cateti O_1A_1, O_2A_2 pure eguali; perciò è pure $PA_1 \equiv PA_2$.

Inversamente, se P è un punto tale, che i due segmenti PA_1, PA_2 condotti per esso tangenti alle due sfere sieno eguali, i triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2, avendo i cateti rispettivamente eguali, sono eguali, e perciò $PO_1 \equiv PO_2$, ossia P è equidistante dai centri O_1 ed O_2; dunque P dev'essere situato sul piano α.

Corollario. — *Se le superficie di due sfere eguali si tagliano (o sono tangenti), il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due sfere, siano eguali, è la parte del piano del loro circolo comune, esterna a questo (o il piano tangente comune).*

215. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due circoli, non concentrici, del piano medesimo, sieno eguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due circoli, esterna ai cerchi limitati da essi.*

Essendo c_1, c_2 (Fig. 198) due circoli non concentrici di un piano, si facciano passare per essi, due superficie sferiche eguali e di raggio maggiore dei raggi dei due circoli dati, e sieno O_1', O_2' i centri di queste sfere. Allora il piano β, perpendicolare al segmento $O_1'O_2'$, nel suo punto medio, non può essere parallelo al piano α, poichè, se lo fosse, la retta dei centri delle due sfere, essendo perpendicolare al piano β per costruzione, sarebbe anche perpendicolare al piano α, e perciò i centri dei due circoli dati coinciderebbero, il che è escluso dall'ipotesi. Il piano β taglierà dunque il piano α secondo una retta r, che è il luogo geometrico dei punti del piano α, tali che sieno eguali i segmenti, condotti da essi, tangenti alle due sfere, e quindi anche quelli tangenti ai due circoli dati.

Dimostriamo ora che la retta r è perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2. Pertanto osserviamo che le perpendicolari al piano α, condotte per i centri O_1',O_2' delle due sfere S_1, S_2, incontrano questo

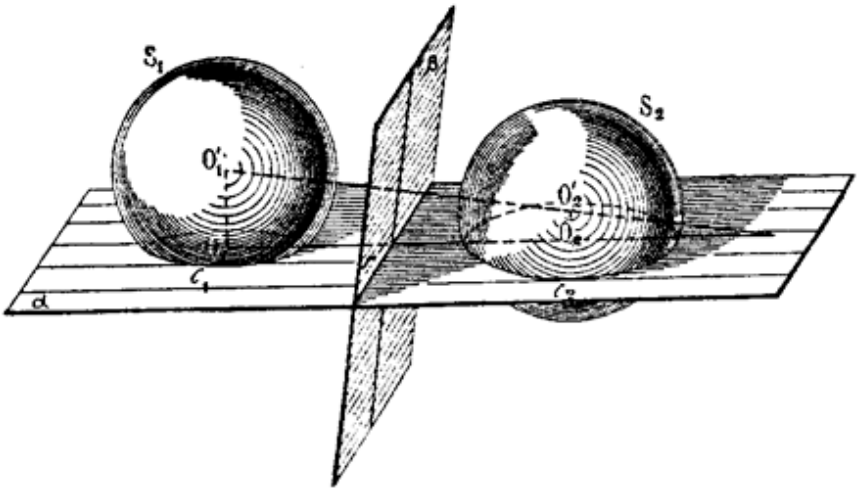

Fig. 198.

piano nei centri O_1, O_2 dei circoli c_1, c_2, ed individuano un piano γ che è perpendicolare al piano α, e contiene le rette O_1O_2, $O_1'O_2'$. Ora anche il piano β è perpendicolare al piano γ, essendo perpendicolare alla retta $O_1'O_2'$ di questo piano, quindi (§ 65, Cor.) i piani α e β si tagliano secondo una retta r, che è perpendicolare a γ, e perciò perpendicolare anche alla retta O_1O_2 di questo piano.

Definizione. — Si chiama *asse radicale di due circoli,* situati in un piano e non concentrici, la retta che contiene il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi ai due circoli, sieno eguali.

Corollari. — *1°. L'asse radicale di due circoli è perpendicolare alla retta dei centri.*

2°. L'asse radicale di due circoli, che si tagliano (o sono tangenti), è la retta che passa per i punti comuni (o è la tangente comune).

3°. L'asse radicale di due circoli, che non hanno alcun punto comune, è esterno ad entrambi.

216. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, tali che i loro centri non sieno in linea retta, i tre assi radicali di questi circoli, presi due a due, passano per uno stesso punto.*

Essendo c_1, c_2, c_3 i tre circoli dati in un piano α, in modo che i tre centri non sieno in linea retta, si facciano passare per essi, ciò che è sempre possibile, tre superficie sferiche eguali S_1, S_2, S_3 di raggio maggiore dei raggi dei tre circoli dati, e sieno O_1', O_2', O_3' i centri di queste sfere. I piani perpendicolari ai segmenti $O_1'O_2'$, $O_1'O_3'$, $O_2'O_3'$ nei loro punti di mezzo, tagliano il piano α secondo i tre assi radicali delle coppie di circoli c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3, ed inoltre passano per una medesima retta r (§ 161, Cor. 1°), che è il luogo geometrico dei punti equidistanti da O_1', O_2', O_3'. Evidentemente la intersezione r non può essere parallela al piano α, perchè, se lo fosse, i tre assi radicali dovrebbero essere paralleli fra loro (§ 40,

Teor.), e quindi, contrariamente all'ipotesi, i centri dei tre circoli dati sarebbero in linea retta. Dunque la retta r incontra il piano α in un punto, il quale è comune a tutti e tre gli assi radicali.

Definizione. — Chiamasi *centro radicale di tre circoli*, situati in un piano e i cui centri non sono in linea retta, il punto comune agli assi radicali dei tre circoli, presi due a due.

Corollari. — *1°. Se il centro radicale di tre circoli è esterno ad uno di essi, è esterno anche agli altri, e i segmenti tangenti, condotti da esso ai tre circoli, sono eguali.*

2°. Esiste in generale uno, ed un solo, circolo normale a tre circoli dati in un piano.

Se il centro radicale è esterno ai tre circoli, il circolo normale è quello, che ha per centro il centro radicale, e per raggi i segmenti tangenti condotti da esso ai tre circoli dati. Se il centro radicale è sui tre circoli, il circolo normale si riduce ad un punto. Se finalmente il centro radicale è interno ai tre circoli, non esiste un circolo normale a tutti i tre circoli dati.

217. Problema. — *Costruire l'asse radicale di due circoli di un piano.*

Se i due circoli dati si tagliano, o sono tangenti, sappiamo che il loro asse radicale è la retta che unisce i punti comuni, o la tangente nel punto comune. Se poi i due circoli c_1, c_2 (Fig. 199) non si tagliano (cioè l'uno è esterno o interno all'altro) si descriva un terzo circolo c_3, che li tagli ambedue, e il cui centro non sia in linea retta coi centri dei circoli dati. Allora le due rette, che uniscono i punti d'incontro di questo circolo con l'uno e coll'altro dei due circoli dati, si tagliano in un punto P, che è il centro radicale dei tre circoli, e la perpendicolare, condotta da questo punto alla retta dei centri dei due circoli dati, sarà l'asse radicale dei medesimi.

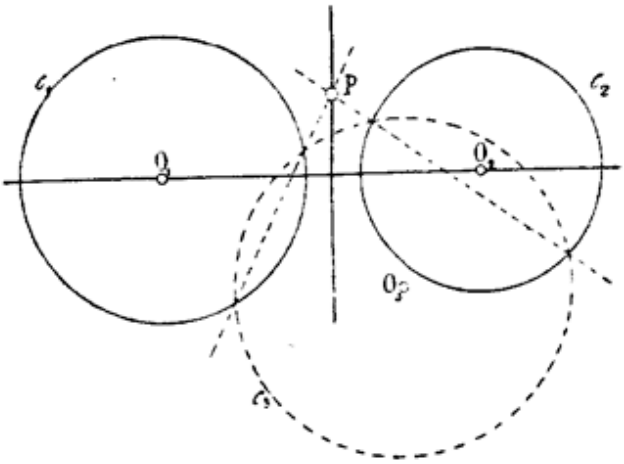

FIG. 199.

218. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due superficie sferiche non concentriche, sieno eguali, è la parte di un piano, perpendicolare alla retta dei centri delle due sfere, esterna ad esse.*

Essendo S_1, S_2 le due sfere date, O_1, O_2 i loro centri, si conduca un piano α per la retta O_1O_2; esso taglia le due superficie sferiche secondo due circoli massimi c_1, c_2, aventi per asse radicale una retta r perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2. Facendo rotare il piano α di un mezzo giro attorno alla sua retta O_1O_2, evi-

dentemente i circoli c_1, c_2 descrivono le superficie sferiche S_1, S_2, e la retta r descrive un piano perpendicolare alla O_1O_2, che è il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due superficie sferiche, sono eguali.

Definizione. — Chiamasi *piano radicale di due superficie sferiche*, non concentriche, il piano che contiene il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi, alle due superficie, sieno eguali.

Corollari. — *1°. Il piano radicale di due superficie sferiche è perpendicolare alla retta dei centri.*

2°. Il piano radicale di due superficie sferiche, che si tagliano (o sono tangenti), è il piano della loro intersezione (o il piano tangente comune).

3°. Il piano radicale di due superficie sferiche, che non hanno alcun punto comune, è esterno ad entrambe.

219. Teorema. — *Date tre superficie sferiche, i cui centri non sieno in linea retta, i tre piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per una stessa retta perpendicolare al piano dei loro centri.*

Sieno (Fig. 218) S_1, S_2, S_3 le tre superficie sferiche date, O_1, O_2, O_3 i loro centri, non situati sopra una medesima retta, ed α_{12}, α_{13}, α_{23} i

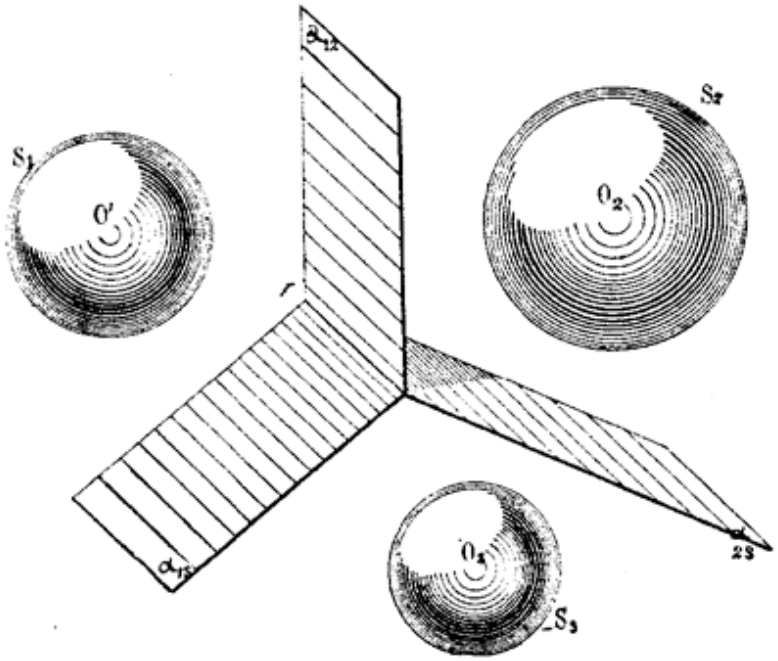

Fig. 200.

piani radicali delle coppie di superficie sferiche S_1, S_2; S_1, S_3; S_2, S_3. Sappiamo (§ 218, Cor. 1°), che i piani radicali α_{12}, α_{13} sono rispettivamente perpendicolari alle rette O_1O_2, O_1O_3, e perciò si tagliano secondo una retta, la quale è perpendicolare al piano $O_1O_2O_3$, ed è tale che i segmenti tangenti alle tre superficie sferiche, condotti per ciascuno de'suoi punti, esterno ad esse, sono eguali. Siccome i segmenti tangenti condotti dai punti di questa retta alle due superficie S_2, S_3

sono eguali, essa dovrà giacere anche sul piano radicale α_{23} di queste due superficie, e quindi tutti i tre piani radicali passano per la stessa retta perpendicolare al piano dei centri delle tre superficie sferiche.

Definizione. — Chiamasi *asse radicale di tre superficie sferiche*, i cui centri non sono in linea retta, la retta comune ai piani radicali delle tre superficie, prese due a due.

Corollario. — *L'asse radicale di tre superficie sferiche contiene il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle tre superficie sferiche, sieno eguali.*

220. Teorema. — *Date quattro superficie sferiche, i cui centri non sono in un piano, i sei piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per uno stesso punto.*

Sieno S_1, S_2, S_3, S_4 (Fig. 201) le quattro superficie sferiche, ed O_1, O_2, O_3, O_4 i loro centri, non situati in un piano, e quindi tali che tre di essi non sieno in linea retta. Indichiamo con α_{ih} il piano radicale delle superficie sferiche S_i, S_h, con r_{ihl} l'asse radicale delle tre superficie sferiche S_i, S_h, S_l. Il piano α_{ih} non può essere parallelo alla retta r_{hlm}, perchè se lo fosse, essendo α_{ih} perpendicolare alla retta $O_i\,O_h$, e la retta r_{hlm} perpendicolare al piano $O_h\,O_l\,O_m$, dovrebbe essere la $O_i\,O_h$ nel piano $O_h\,O_l\,O_m$, ossia i quattro centri sarebbero in un piano. Dunque la retta r_{hlm} incontra il piano α_{ih} in un punto P. Siccome poi per la retta r_{hlm} passano i tre piani α_{hl}, α_{lm}, α_{mh}, ne segue che il punto P è comune ai quattro piani α_{ih}, α_{hl}, α_{lm}, α_{hm}. Ma i piani α_{ih}, α_{mh} si tagliano secondo la retta r_{ihm}, per la quale deve passare pure il piano α_{im}; epperciò anche il piano α_{im} passa per il punto P. In simil guisa si dimostra che il punto P appartiene anche al piano α_{il}.

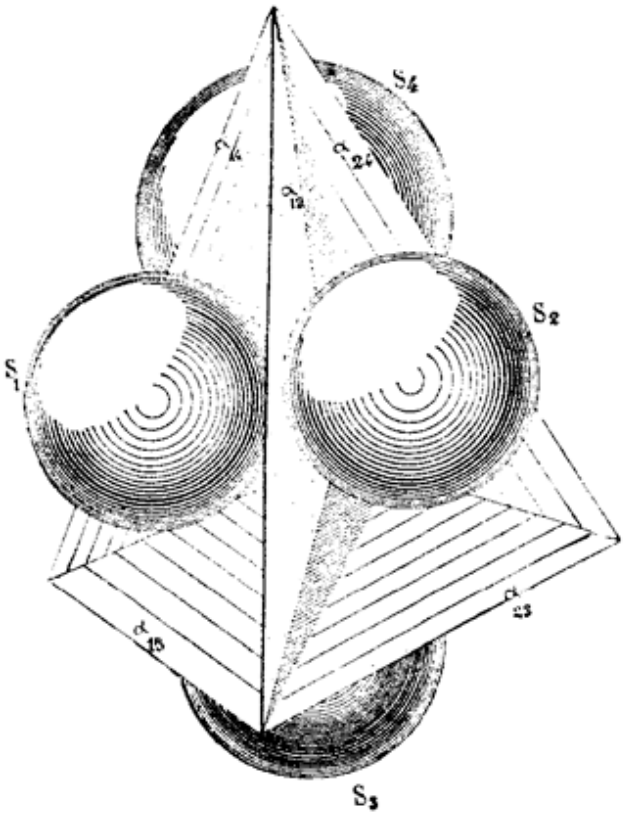

Fig. 201.

Corollario 1°. — *I quattro assi radicali che si ottengono combinando a tre a tre quattro superficie sferiche, i cui centri non sono in un piano, passano per uno stesso punto.*

Definizione. — Chiamasi *centro radicale* di quattro superficie sferiche, i cui centri non sono in un piano, il punto d'incontro dei sei piani radicali di queste

sfere, prese due a due, oppure il punto comune ai loro quattro assi radicali, presi tre a tre.

Corollari. — *2° Se il centro radicale di quattro superficie sferiche è esterno ad una di esse, è esterno anche alle altre, e i segmenti tangenti condotti da questo punto alle quattro sfere sono eguali.*

3°. Esiste in generale una, ed una sola, superficie sferica normale a quattro superficie sferiche date.

221. Teorema. — *Dati due circoli in un piano non concentrici:*

1° esistono infiniti circoli, che, presi due a due, hanno per asse radicale la retta dei centri dei due circoli dati; il luogo dei loro centri è l'asse radicale dei due circoli dati.

2° esistono infiniti circoli, che, presi due a due, hanno per asse radicale quello di due circoli dati; il luogo dei loro centri è la retta dei centri dei due circoli dati.

1° Sieno c_1, c_2 (Fig. 202) i due circoli, O_1, O_2 i loro centri, ed r' l'asse radicale. Si costruiscano due circoli c'_1, c'_2 aventi per centri due punti qualunque della retta r, esterni ai due circoli dati, e aventi i

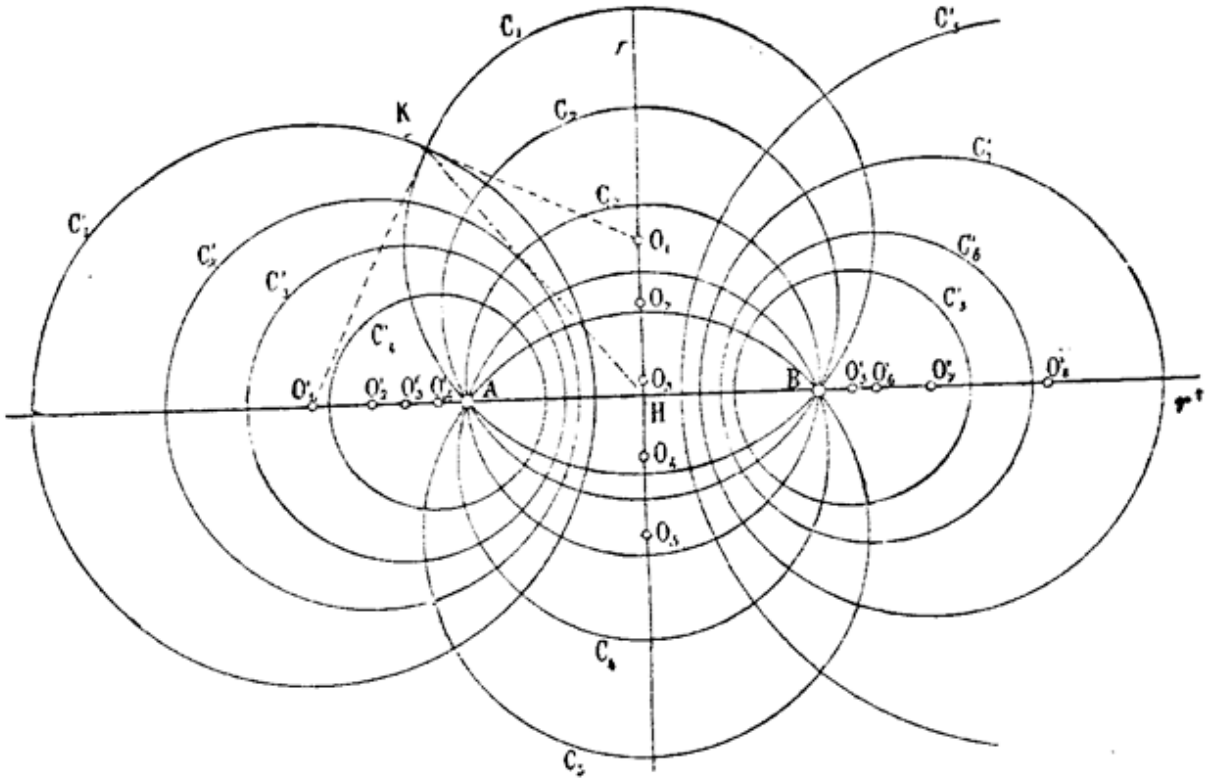

Fig. 202.

loro raggi eguali ai segmenti tangenti, condotti da essi ai due circoli c_1, c_2. È chiaro che i due circoli, così descritti, hanno per asse radicale la retta O_1O_2, poichè i segmenti tangenti condotti ad essi dai punti O_1 ed O_2 sono rispettivamente eguali ai raggi dei circoli c_1, c_2. Con tale costruzione si ottiene un sistema di infiniti circoli, che, due a due, hanno per asse radicale la retta O_1O_2; il luogo dei loro centri è la parte della retta r esterna ai due circoli dati c_1, c_2.

2°. Se per un punto qualunque della retta O_1O_2 si conducono i segmenti tangenti a tutti i circoli del precedente sistema, essi sono evidentemente eguali, e il luogo dei loro punti di contatto è un circolo, che ha per centro quel punto. Otteniamo in tal guisa un nuovo sistema di infiniti altri circoli, che hanno i centri sulla retta O_1O_2, ed hanno, due a due, per asse radicale la retta r'; ogni punto della retta O_1O_2 (esterno ai circoli del primo sistema) è centro di un circolo di questo secondo sistema.

Definizioni. — 1ª. Chiameremo *fascio di circoli* il sistema di circoli, aventi due a due lo stesso asse radicale, detto *asse del fascio.*

2ª. Chiameremo *associati* due fasci di circoli, quando il luogo dei centri di ciascun fascio coincide coll'asse radicale dell'altro.

È chiaro che due fasci associati di circoli sono individuati, quando si conoscono due circoli dell'uno o dell'altro.

Corollario. — *Dati due fasci associati di circoli, ogni circolo di un fascio taglia ogni circolo dell'altro ad angoli retti.*

Infatti, indicando con c e c' due circoli di due fasci associati, i raggi di questi due circoli, che terminano ad uno dei punti d'incontro di questi circoli, sono perpendicolari fra loro.

222. Teoremi. — *1°. Se un circolo di un fascio taglia il suo asse radicale, anche tutti gli altri circoli del fascio tagliano l'asse nei medesimi punti, mentre i circoli del fascio associato non incontrano il loro asse radicale.*

2°. Se un circolo di un fascio è tangente al suo asse radicale, anche tutti gli altri circoli del medesimo toccano l'asse radicale nello stesso punto, e i circoli del fascio associato sono pure tangenti al loro asse radicale nello stesso punto.

3°. Se un circolo di un fascio non incontra l'asse radicale, non lo incontrano nemmeno gli altri circoli del fascio, e i circoli del fascio associato tagliano invece tutti il loro asse in due medesimi punti.

1°. Se un circolo c_1 di un fascio (Fig. 202) taglia l'asse radicale r' in due punti A e B, è chiaro che anche tutti gli altri circoli del fascio passano per A e B (§ 215, Cor. 2°). Resta quindi a dimostrare che ogni circolo c' del fascio associato non incontra l'asse radicale r. Infatti, poichè è $O_1H < O_1K$, si ha $O_1\widehat{K}H < O_1\widehat{H}K$, e quindi, essendo $O_1\widehat{K}H + H\widehat{K}O_1' \equiv O_1\widehat{H}K + K\widehat{H}O_1' \equiv$ ad un angolo retto, si ricava

$$H\widehat{K}O'_1 > K\widehat{H}O'_1$$

e quindi $O_1'H > O_1'K$; dunque la retta r è esterna al circolo c_1'.

2°. In simil guisa si dimostra che, se $O_1H \equiv O_1K$, anche $O_1'H \equiv O_1'K$, vale dire tutti i circoli del secondo fascio sono tangenti in H all'asse r.

3°. Infine, se $O_1H > O_1K$, allora $O_1'H < O_1'K$, e quindi i circoli del secondo fascio tagliano l'asse radicale r.

223. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, i cui centri non sieno in linea retta, ogni punto del piano, esterno al circolo normale ai tre dati, è centro di un circolo, avente in comune con essi il centro radicale.*

Sia P il centro radicale di tre circoli c_1, c_2, c_3, i cui centri O_1, O_2, O_3 non sono in linea retta, e sieno r_{12}, r_{13}, r_{23} gli assi radicali delle coppie di circoli $c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3$, i quali, come è noto, passano per P. Preso un punto arbitrario A del piano dei tre circoli, è evidente che le tre rette AO_1, AO_2, AO_3 non possono contemporaneamente esser tutte rispettivamente parallele alle rette dei centri O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2. Supposto quindi che AO_3 non sia parallela ad O_1O_2, indichiamo con O_4 il punto d'incontro delle rette AO_3, O_1O_2, e con c_4 il circolo del fascio individuato dai circoli c_1, c_2, il quale ha per centro il punto O_4. Gli assi radicali delle coppie di circoli c_1, c_4; c_1, c_3 essendo rispettivamente r_{12}, r_{13}, il centro radicale dei circoli c_1, c_3, c_4 sarà il punto P, centro radicale dei circoli dati. Ne segue che il circolo del fascio individuato dai circoli c_3, c_4, avente A per centro, ha in comune coi circoli dati il centro radicale P.

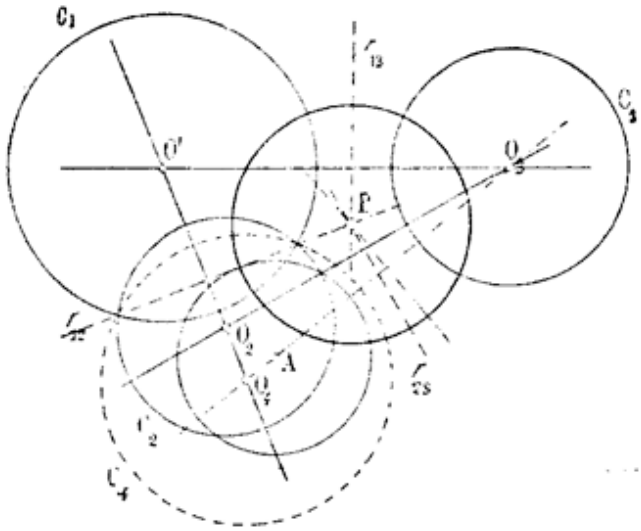

Fig. 203.

Definizione. — Chiamasi *connesso di circoli* il sistema di circoli aventi tre a tre lo stesso centro radicale, detto *centro del connesso.*

Corollari. — *1°. Se il centro di un connesso di circoli è interno, esterno o su di un circolo del connesso, esso è anche rispettivamente interno, esterno o su un altro circolo qualunque del connesso.*

2°. Tutti i circoli di un piano, passanti per un punto, formano un connesso.

3°. Se il centro di un connesso è esterno ai circoli del medesimo, tutti i segmenti tangenti, condotti da esso ai circoli del connesso, sono eguali; il luogo dei punti di contatto è un circolo, che taglia ad angoli retti tutti i circoli del connesso.

224. Teorema. — *Date due superficie sferiche non concentriche,*

1° esistono infinite superficie sferiche, che, prese tre a tre, hanno per asse radicale la retta dei centri delle due sfere date; il luogo dei loro centri fa parte del piano radicale delle due superficie sferiche date,

2° esistono infinite superficie sferiche, che, prese due a due, hanno per piano radicale quello delle due superficie date; il luogo dei centri fa parte della retta dei centri delle due sfere date.

1°. Sieno S_1, S_2 le due superficie sferiche, O_1, O_2 i loro centri ed α il piano radicale. Si costruiscano tre sfere S_1', S_2', S_3', aventi per

centri tre punti qualunque del piano α, esterni alle due sfere, non in linea retta, ed aventi i loro raggi rispettivamente eguali ai segmenti tangenti condotti da essi alle due sfere S_1, S_2. È chiaro che le tre sfere così descritte hanno per asse radicale la retta O_1O_2, poichè i segmenti tangenti condotti ad esse dai punti O_1, O_2 sono rispettivamente eguali ai raggi delle sfere S_1, S_2. Con tale costruzione si ottiene un sistema di infinite sfere, le quali prese tre a tre, hanno per asse radicale la retta O_1O_2; ogni punto del piano α esterno alle sfere S_1 S_2 è centro di una e di una sola di tali sfere.

2°. Se per un punto qualunque della retta O_1O_2 esterno alle sfere S_1', S_2', S_3' si conducono i segmenti tangenti a tutte le sfere del precedente sistema, essi sono evidentemente tutti eguali, e perciò il luogo dei loro punti di contatto è una superficie sferica, che ha per centro quel punto. Otteniamo in tal guisa un nuovo sistema di infinite superficie sferiche, che hanno i centri sulla retta O_1O_2, ed hanno due a due per piano radicale il piano α; ogni punto della retta O_1O_2 (esterno alle sfere del primo sistema) è centro di una sola sfera del secondo sistema.

Definizioni. — 1ª. Chiamasi *fascio di superficie sferiche* un sistema di superficie sferiche, aventi lo stesso piano radicale, e *connesso di superficie sferiche* un sistema di tali superficie, aventi lo stesso asse radicale.

2ª. Un fascio ed un connesso di superficie sferiche si dicono *associati*, quando la retta che contiene il luogo dei centri delle sfere del fascio, è l'asse radicale delle sfere del connesso, e il piano, che contiene il luogo dei centri delle sfere del connesso, è il piano radicale delle sfere del fascio.

Corollari. — *1°. Due sfere non concentriche individuano un fascio; tre sfere, i cui centri non sono in linea retta, individuano un connesso.*

2°. Se un fascio ed un connesso sono associati, ogni superficie sferica del fascio taglia ad angoli retti ogni superficie sferica del connesso.

225. Teoremi. — *1°. Se una superficie sferica di un fascio è tagliata dal piano radicale del fascio, anche tutte le altre superficie del fascio sono tagliate dal piano radicale secondo il medesimo circolo, mentre tutte le superficie sferiche del connesso associato non incontrano l'asse radicale comune.*

2°. Se una superficie sferica di un fascio è tangente in un punto al suo piano radicale, anche le altre superficie del fascio sono tangenti a quel piano nel medesimo punto, e le superficie del connesso associato sono pure tangenti al loro asse radicale in quello stesso punto.

3°. Se una superficie sferica di un fascio non incontra il piano radicale, anche le altre superficie del fascio non incontrano questo piano, e le superficie del connesso associato sono incontrate dal loro asse radicale negli stessi due punti.

E viceversa.

Per i teoremi diretti si imiti la dimostrazione del § 222. I teoremi inversi poi sono veri per la seconda legge delle inverse (Preliminari § 4).

CAPITOLO IV

Omotetia.

227. Teorema. — *Se due triangoli si corrispondono, in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli.*

Abbiansi (Fig. 204, 205) i due triangoli ABC, A'B'C', tali che le rette AA', BB', CC' concorrano in un punto O e che i lati AB, AC sieno paralleli ai lati A'B', A'C'; vogliamo dimostrare che anche i lati BC, B'C' sono paralleli.

Se i due triangoli ABC, A'B'C' sono situati in due piani diversi α, α', questi son paralleli, perchè contengono due coppie di rette rispettivamente parallele, e perciò le due rette BC, B'C' sono parallele, come intersezioni dei piani α, α' col piano OBC.

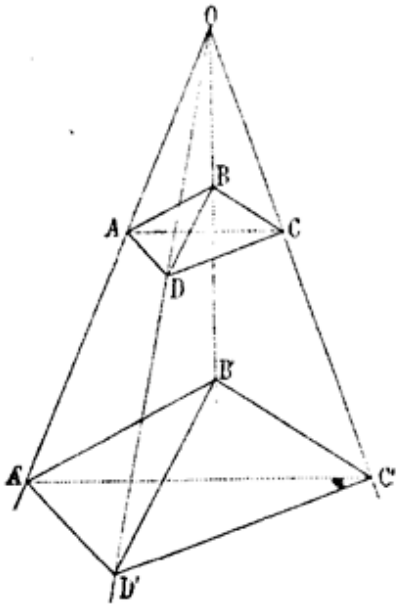

Fig. 204.

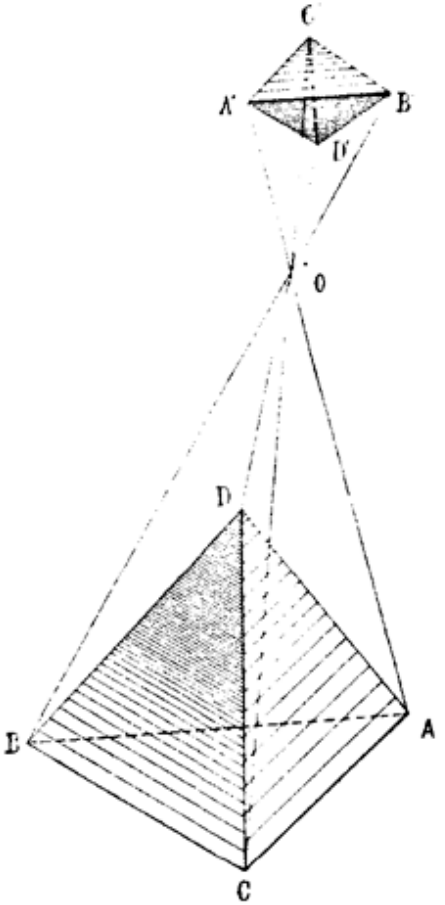

Fig. 205.

Se poi i due triangoli ABC, A'B'C' sono nello stesso piano, si conduca per il punto O una retta OD fuori del piano dei due triangoli. Si unisca A con un punto D di questa retta, e si conduca per A' la parallela a questa retta; essa incontrerà la OD in un punto D'.

I due triangoli ABD, A'B'D' si trovano nelle condizioni dell'enunciato del teorema e sono in piani diversi, perciò BD è pa-

226. Teorema. — *Date quattro superficie sferiche, i cui centri non sono in un piano, ogni punto dello spazio, esterno alla superficie sferica normale alle quattro date, è centro di una sfera, che ha in comune con esse il centro radicale.*

Sia P il centro radicale di quattro superficie sferiche S_1, S_2, S_3, S_4, i cui centri O_1, O_2, O_3, O_4 non sono situati in un piano, e sia α_{ih} il piano radicale delle superficie S_i, S_h ed r_{ihl} l'asse radicale delle tre S_i, S_h, S_l. Preso un punto arbitrario A dello spazio, è evidente che le quattro rette AO_1, AO_2, AO_3, AO_4 non possono contemporaneamente essere parallele ai piani $O_2O_3O_4$, $O_3O_4O_1$, $O_4O_1O_2$, $O_1O_2O_3$. Supposto quindi che AO_4 non sia parallela al piano $O_1O_2O_3$, e che lo incontri nel punto O_5, si costruisca la sfera del connesso individuato dalle tre sfere S_1, S_2, S_3, la quale ha per centro O_5. È chiaro allora che l'asse radicale delle tre sfere S_1, S_2, S_5 è la retta r_{123}, il piano radicale delle sfere S_1 S_4 è α_{14}, e perciò il centro radicale delle sfere S_1, S_2, S_4, S_5 è il punto d'incontro di α_{14} con la retta r_{123}, cioè il punto P. La superficie sferica appartenente al fascio individuato dalle due superficie sferiche S_4, S_5, ed avente per centro A, insieme con tre delle superficie sferiche date, ha per centro radicale P.

Definizione. — Chiamasi *complesso di superficie sferiche* il sistema di superficie sferiche, che, considerate quattro a quattro, hanno lo stesso centro radicale, detto *centro del complesso.*

Corollari. — *1°. Se il centro di un complesso di superficie sferiche è rispettivamente interno, esterno o sulla superficie di una sfera del complesso, esso è anche rispettivamente interno, esterno o sulla superficie di ogni altra sfera del complesso.*

2°. Tutte le superficie sferiche, che passano per uno stesso punto, formano un complesso.

3°. Se il centro di un complesso è esterno alle sfere del medesimo, tutti i segmenti tangenti, condotti da esso alle sfere del complesso, sono eguali; il luogo dei punti di contatto è una superficie sferica, che è normale a tutte le superficie sferiche del complesso.

rallela a B′D′; per la stessa ragione CD è parallela a C′D′. Ne segue che i piani BCD, B′C′D′ son paralleli e quindi anche le rette BC, B′C′ sono parallele, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo.

228. Essendo data (Fig. 204, 205) una figura Σ qualunque dello spazio ed un punto O, si può costruire un'altra figura Σ′, i cui punti corrispondano univocamente a quelli di Σ nel modo seguente: ad un punto arbitrario A di Σ si faccia corrispondere un punto arbitrario A′ della retta OA, ad un altro punto qualunque B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro B′ della retta OB colla parallela ad AB condotta per il punto A′. La corrispondenza è univoca, perchè per mezzo della costruzione indicata un punto B di Σ ne individua uno ed uno solo di Σ′, e viceversa un punto B′ di Σ′ ne individua uno di Σ, che è l'intersezione della OB′ colla retta parallela ad A′B′ condotta per il punto A.

Per il teorema precedente le due figure, così costruite, si corrispondono univocamente, in modo che due punti corrispondenti giacciono sopra una retta, che passa per O, e due o più punti di ciascuna figura situati in linea retta corrispondono ad altrettanti punti dell'altra figura situati sopra una retta parallela alla prima.

Si noti inoltre, che se due punti A, A′ corrispondenti sono situati sopra la retta OA dalla stessa parte del punto O, anche due altri punti corrispondenti B, B′ si trovano sulla loro retta dalla medesima parte di O; se invece due punti corrispondenti A, A′ si trovano sulla loro retta in parti opposte rispetto ad O, anche due altri punti corrispondenti B, B′ si trovano pure in parti opposte rispetto ad O.

Definizioni. — 1ª. Due figure si dicono *omotetiche*, quando i loro elementi si corrispondono univocamente, in modo che le rette congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti passino per un punto fisso, detto *centro d'omotetia*, e a due o più punti di una figura situati sopra una retta corrispondano altrettanti punti dell'altra figura situati sopra una retta parallela alla prima. Tale corrispondenza chiamasi una *omotetia*.

2ª. Due punti corrispondenti in una omotetia si dicono anche *omologhi*.

3ª. Due figure omotetiche si dicono *direttamente* o *inversamente omotetiche*, secondo che il centro d'omotetia è esterno o interno al segmento, che ha per estremi due punti omologhi qualunque.

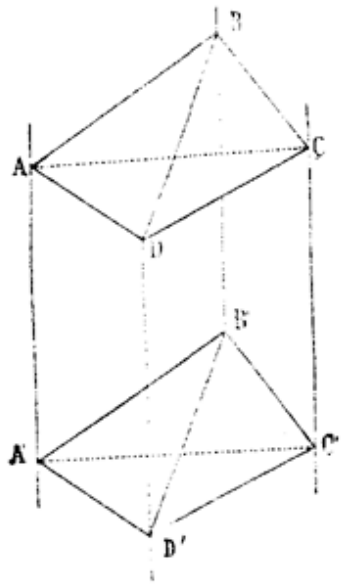

Fig. 206.

Data una figura Σ (Fig. 206), se ne può costruire un'altra Σ′, i cui elementi corrispondano univocamente a quelli di Σ colla seguente legge. Ad un punto A di Σ si faccia corrispondere un altro punto arbitrario A′; ad un altro punto B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro della retta, condotta per il punto A′ parallela ad AB, colla retta condotta per B parallela ad AA′. La corrispondenza è evidentemente univoca.

4ª. Due figure si dicono *omotetiche affini*, quando i loro elementi si corrispondono univocamente, in modo che le rette congiungenti le coppie di punti omologhi sieno parallele, e che a due o più punti situati in linea retta di una figura corrispondano altrettanti punti dall'altra figura, situati sopra una retta parallela alla prima. Tale corrispondenza si chiama *una omotetia affine*.

Ogni retta che contiene due punti corrispondenti dicesi *direttrice dell'omotetia*.

229. Da quanto abbiamo detto nei due §§ precedenti risultano immediatamente i seguenti

Corollari. — 1°. *Una omotetia è individuata, quando sono dati il centro e due punti omologhi. Una omotetia affine è individuata, quando sono dati due punti omologhi.*

2°. *Una omotetia è individuata, quando si conoscono due coppie di punti omologhi.*

Infatti, se A, B sono due punti rispettivamente omologhi a due punti A′, B′, si ottiene il centro d'omotetia mediante l'intersezione delle rette AA′, BB′, e quindi l'omotetia è individuata, per il Cor. precedente.

Si osservi che, se i due segmenti AB, A′B′ sono eguali, i segmenti AA′, BB′ non si incontrano, e le due figure sono omotetiche affini, essendo le rette AA′, BB′ parallele (§ 106).

3°. *Due figure omotetiche affini sono eguali.*

4°. *Se il centro d'omotetia divide per metà il segmento, che ha per estremi due punti omologhi, le due figure sono inversamente omotetiche, e simmetriche rispetto al centro.*

5°. *In due figure omotetiche, a tre o più punti di una figura situati in un piano, che non passi per il centro d'omotetia (o non sia parallelo ad una direttrice dell'omotetia, se l'omotetia è affine), corrispondono nell'altra figura altrettanti punti situati in un altro piano parallelo al primo. A tre o più punti di un piano, che passa per il centro (o è parallelo a una direttrice, se l'omotetia è affine) corrispondono altrettanti punti dello stesso piano.*

6°. *Ogni figura omotetica ad un poligono è un altro poligono, che ha i lati e le diagonali rispettivamente parallele ai lati e alle diagonali corrispondenti del poligono dato.*

7°. *Ogni figura omotetica ad un poliedro è un altro poliedro, che ha gli spigoli, le diagonali e le facce rispettivamente parallele agli spigoli, alle diagonali e alle facce del poliedro dato.*

8°. *Due triangoli, che si corrispondono univocamente, in modo che i loro lati corrispondenti sieno paralleli, sono omotetici.*

Infatti, se i due triangoli ABC, A′B′C′ sono tali che i lati AB, AC, BC del primo sieno rispettivamente paralleli ai lati A′B′, A′C′, B′C′ del secondo, si può costruire l'omotetia individuata dalle coppie di punti A, A′; B, B′. Allora le coppie di rette AC, A′C′; BC, B′C′ sono corrispondenti in questa omotetia, e perciò C, C′ sono pure punti corrispondenti.

9°. *Se due figure si corrispondono, in modo che le rette, congiungenti un punto qualunque* C *dell'una con due punti fissi* A, B *della stessa*

figura, sieno parallele alle rette, congiungenti il punto C′ *corrispondente a* C *coi punti* A′, B′ *corrispondenti ad* A, B, *e che le rette* AB, A′B′ *sieno parallele, le due figure sono omotetiche.*

230. Teorema. — *Due figure omotetiche ad una terza, sono omotetiche fra loro.*

1°. Se due figure Σ, Σ_1 sono omotetiche ad una terza Σ_2 rispetto ad uno stesso centro (o omotetiche affini colle medesime direttrici), è evidente che le figure Σ, Σ_1 sono pure omotetiche fra loro rispetto allo stesso centro (o omotetiche affini colle stesse direttrici).

2°. Supponiamo ora che la figura Σ sia omotetica a Σ_2 rispetto ad un centro O_1, e Σ_1 sia pure omotetica a Σ_2 rispetto ad un altro centro O (Fig. 207 e 208).

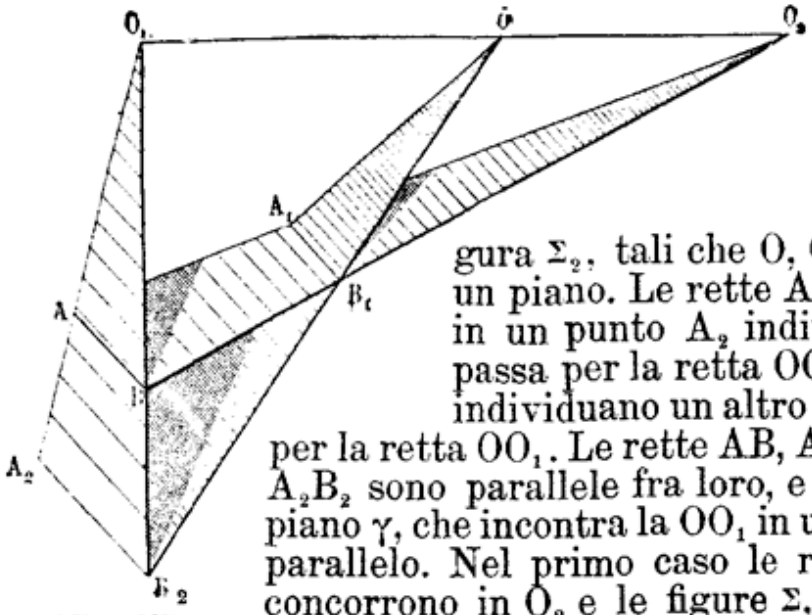

Fig. 207.

Sieno A, B e A_1, B_1 i punti delle figure Σ, Σ_1 corrispondenti a due punti $A_2 B_2$ della figura Σ_2, tali che O, O_1, A_2, B_2 non sieno in un piano. Le rette AA_2, A_1A_2 incontrandosi in un punto A_2 individuano un piano α che passa per la retta OO_1, e le rette BB_2, B_1B_2, individuano un altro piano β, che pure passa per la retta OO_1. Le rette AB, A_1B_1 parallele alla retta A_2B_2 sono parallele fra loro, e perciò individuano un piano γ, che incontra la OO_1 in un punto O_2, o è ad essa parallelo. Nel primo caso le rette AA_1 ($\alpha\gamma$), BB_1 ($\beta\gamma$) concorrono in O_2 e le figure Σ, Σ_1 sono omotetiche fra loro rispetto al centro O_2; nel secondo le AA_1, BB_1 sono parallele fra loro (§ 40 Teor.), e perciò le figure sono omotetiche affini colle direttrici parallele alla O_1O.

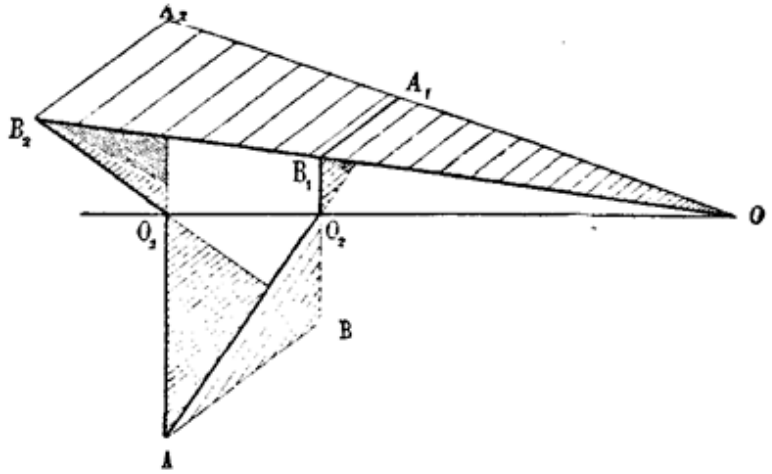

Fig. 208.

3°. Supponiamo ora che la figura Σ sia omotetica a Σ_2 rispetto ad un centro d'omotetia O_1 e la figura Σ_1 sia omotetica affine a Σ_2.

Sieno A_2, B_2 (Fig. 209) due punti di Σ_2 non situati sopra una

direttrice della seconda fra le omotetie suddette, e A, B e A_1, B_1 i punti ad essi corrispondenti di Σ, e Σ_1. I piani α, β individuati dalle coppie di rette A_2A, A_2A_1 e da B_2B, B_2B_1 si tagliano secondo una retta O_1O_2 parallela alle A_1A_2, B_1B_2 (§ 41, Teor.)

Le rette AB, A_1B_1, parallele alla A_2B_2, sono parallele fra loro ed individuano un piano γ, che taglia la O_1O_2 in un punto O_2. In questo punto concorrono le rette AA_1 ($\alpha\gamma$), BB_1 ($\beta\gamma$), e perciò le figure Σ, Σ_1 sono omotetiche rispetto al centro O_2.

4°. Se le figure Σ, Σ_1 sono ambedue omotetiche affini di Σ_2 sono evidentemente anche omotetiche affini fra loro.

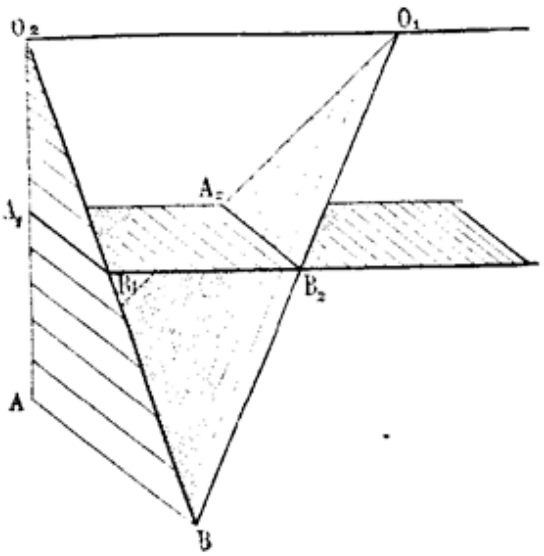

FIG. 209.

Corollari. — *1°. Se due figure Σ, Σ_1 sono ambedue direttamente, o ambedue inversamente omotetiche ad una terza Σ_2, esse sono direttamente omotetiche fra loro o omotetiche affini.*

Infatti, se Σ, Σ_1 sono ambedue direttamente (Fig. 207) o ambedue inversamente omotetiche a Σ_2, due punti A, A_1 corrispondenti ad un punto A_2 sono ambedue sui lati O_1A_2, OA_2 (oppure ambedue sui loro prolungamenti) del triangolo OO_1A_2, e perciò il segmento AA_1 non può avere nessun punto comune col segmento O_1O_2.

2°. Se delle due figure Σ, Σ_1, una è direttamente e l'altra inversamente omotetica ad una figura Σ_2, esse sono inversamente omotetiche fra loro.

Se le figure Σ, Σ_2 sono inversamente omotetiche e Σ_1, Σ_2 direttamente omotetiche (Fig. 208), è evidente che due punti A, A_1 corrispondenti ad un punto A_2 di Σ_2 sono da parti opposte della retta OO_1, e perciò Σ, Σ_1 sono inversamente omotetiche.

3°. Se la figura Σ_1 è omotetica affine della figura Σ_2, e Σ è direttamente (o inversamente) omotetica di Σ_2, anche Σ e Σ_1 sono omotetiche direttamente (o inversamente).

Poichè infatti in questo caso (Fig. 209) le rette O_1O_2, A_1A_2 sono parallele, ed A è il punto d'incontro delle rette A_1O_2, A_2O_1, è chiaro che secondochè O_1 è interno o esterno al segmento AA_2, anche O_2 è interno o esterno al segmento AA_1.

Riassumendo quanto abbiamo detto, possiamo concludere:

4°. Le tre omotetie che si ottengono, considerando tre figure omotetiche due, a due possono presentare i quattro casi seguenti:

1°. le tre omotetie sono dirette,
2°. le tre omotetie sono affini,
3°. due sono inverse e l'altra diretta o affine,
4°. due sono dirette e l'altra affine.

231. Teorema. — *1°. Se due figure sono omotetiche, ed una di esse ha un centro, anche l'altra ha un centro, che è il punto omologo a quello della prima.*

Supponiamo che Σ, Σ' (Fig. 210) sieno due figure omotetiche rispetto ad un centro O, e che la prima abbia un centro C. Se A, A_1 sono due punti simmetrici rispetto a C della figura Σ (tali cioè che il segmento AA_1 sia diviso per metà dal punto C), e A', A_1', C' sono i punti di Σ' corrispondenti ad A, A_1, C, sappiamo che i tre punti A', A'_1, C' sono sopra una parallela alla AA_1 e che essendo $AC \equiv CA_1$, deve pure essere $A'C' \equiv C'A_1'$ (§ 144, Teor.), cioè i due punti $A'A_1'$ sono simmetrici rispetto a C'. Lo stesso si può ripetere per tutte le coppie di punti di Σ' e quindi C' è un centro della figura Σ'.

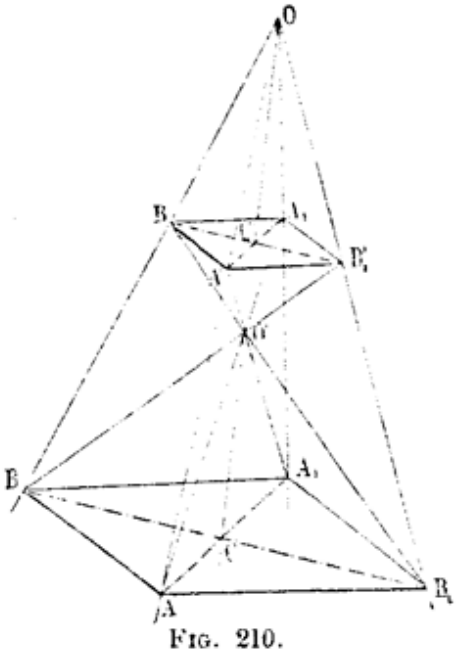

Fig. 210.

Teorema. — *2°. Se due figure dotate di centro sono direttamente omotetiche, o omotetiche affini, sono anche inversamente omotetiche. E' viceversa.*

Supponiamo che Σ, Σ' (Fig. 210) sieno due figure, dotate rispettivamente di un centro C, C', e sieno omotetiche direttamente rispetto al centro O. Essendo A,A_1 e B,B_1 due coppie di punti di Σ simmetrici rispetto a C, ed A', A_1'; B', B_1' le coppie di punti corrispondenti, simmetrici rispetto a C', è chiaro che ABA_1B_1 e $A'B'A_1'B_1'$ sono due parallelogrammi, aventi i lati e le diagonali rispettivamente paralleli.

Ne segue che per es. i due triangoli CA_1B_1, $CA'B'$ hanno i lati paralleli e sono perciò omotetici, ossia che le tre rette CC', B_1B', A_1A' s'incontrano in un punto O', interno al segmento CC', perchè le semirette CA_1, $C'A'$ e CB_1, $C'B'$ sono dirette in senso opposto. Le due figure Σ, Σ' sono dunque inversamente omotetiche rispetto al centro O'.

In simil guisa si dimostra il teorema stesso per il caso in cui le due figure sono omotetiche affini, ed il teorema inverso.

Corollari. — *1°. Se tre figure dotate di centro sono direttamente omotetiche due a due, devono esserlo anche inversamente. I sei centri d'omotetia, che così si ottengono, sono situati in un piano.*

Infatti i tre centri d'omotetia diretta devono essere in linea retta, così pure i due centri d'omotetia inversa di due coppie di figure e il centro d'omotetia diretta della rimanente coppia sono in linea retta. Ne segue che i sei centri, trovandosi tre a tre su quattro rette, che due a due s'incontrano, devono giacere in un piano, che passa anche per i tre centri delle figure date.

2°. Se tre figure, dotate di centro, sono due a due inversamente omotetiche, sono pure direttamente omotetiche o omotetiche affini; tutti

i centri d'omotetia inversa e diretta (se ne esistono) sono in un piano, che contiene i centri delle tre figure; e le direttrici delle omotetie affini (se ne esistono) sono parallele a questo piano.

Definizione. — Ciascuna delle quattro rette, che contiene tre centri d'omotetia di tre figure, che, prese due a due, sono direttamente e inversamente omotetiche, dicesi *asse d'omotetia* delle medesime.

232. Teorema. — *Ogni figura omotetica ad una circonferenza (o ad una sfera) è un'altra circonferenza (o un'altra sfera).*

Sia O (Fig. 211) il centro della omotetia, s un circolo (od una sfera) ed s' la figura ad esso omologa nella omotetia, e sia C il centro di s e C′ il punto omologo di C′.

Essendo A′, B′ due punti della figura s' corrispondenti a due punti A, B di s, i due triangoli ABC, A′B′C′ sono omotetici, e perciò equiangoli fra loro, e siccome il primo è isoscele, è pure isoscele il

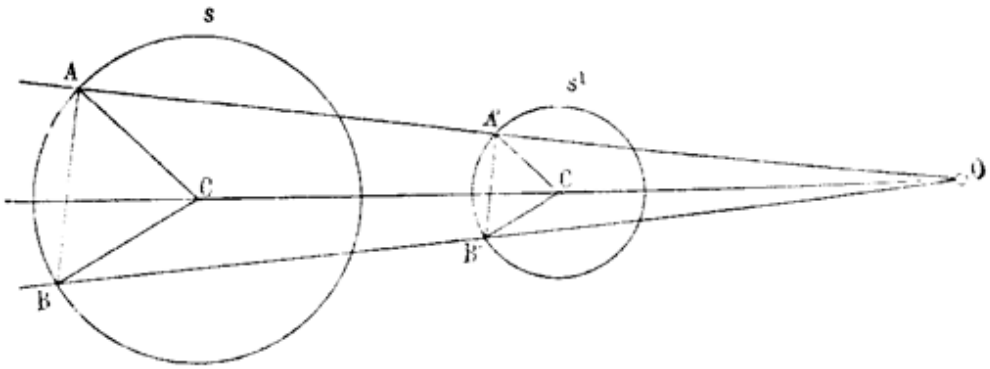

Fig. 211.

secondo, e quindi C′A′ = C′B′. Adunque tutti i punti di s' sono egualmente distanti da C′.

Inversamente, supposto che A′ sia un punto omologo ad un punto A di s, ogni punto B′ situato nel piano del circolo s (se O giace in questo piano), del piano condotto per C′ parallelo al piano di s, (se O non giace nel piano di s) oppure ogni punto B′ dello spazio, (se s è una sfera), che abbia da C′ una distanza uguale a C′A′ è un punto della figura omotetica ad s. Condotto infatti il raggio CA parallelo a C′A′ (diretto nello stesso senso o in senso opposto secondo che l'omotetia è diretta o inversa) i due triangoli CAB, C′A′B′ sono isosceli ed hanno due coppie di lati paralleli, dunque i due rimanenti lati sono pure paralleli, e perciò sono omotetici rispetto al centro O. Se ne conclude che la figura s' omotetica di s è un circolo (o una sfera).

233. Teorema. — *Due circoli, situati in uno stesso piano o in piani paralleli, (o due sfere) sono sempre inversamente omotetici, e sono direttamente omotetici, o omotetici affini, secondo che sono disuguali o uguali.*

Dati (Fig. 212, 213) due circoli (o due sfere) s, s' si traccino due raggi CA, C′A′ paralleli e diretti in senso opposto. La retta AA′ taglia la retta CC′ in un punto O′ interno al segmento CC′. Se si costruisce la figura inversamente omotetica a s rispetto al centro O′, è chiaro, per il Teorema precedente, che si ottiene il circolo (o sfera) s'.

I due circoli (o sfere) s, s' essendo inversamente omotetici, ed essendo ciascuno di essi dotato di un centro, sono pure omotetici

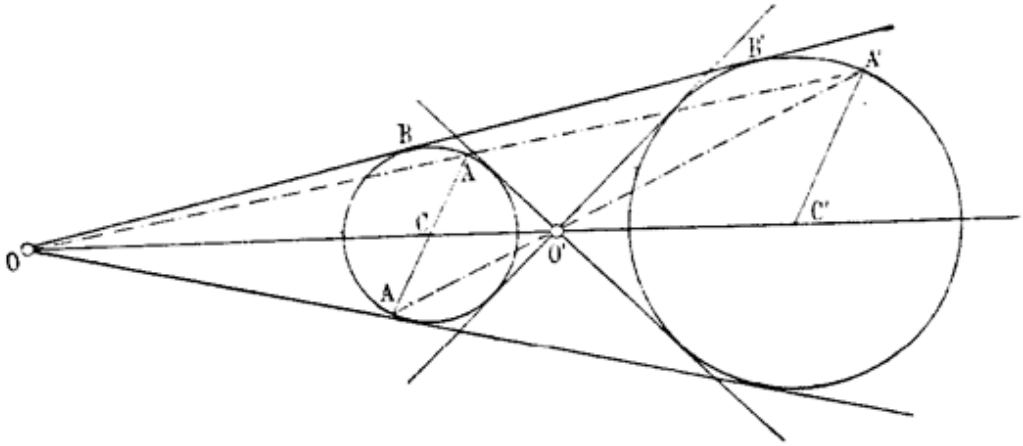

Fig. 212.

direttamente o omotetici affini, secondo che sono disuguali od uguali.

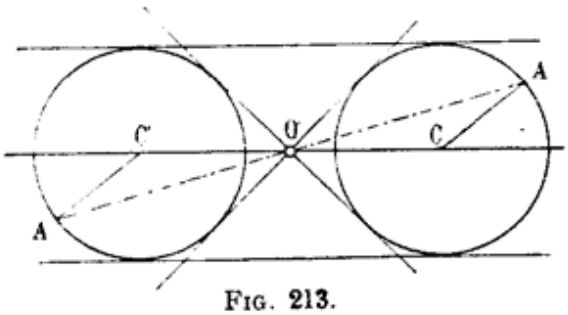

Fig. 213.

Supposto che i due circoli sieno disuguali, si ottiene facilmente il centro d'omotetia diretto come intersezione della retta CC' colla congiungente gli estremi di due raggi CA_1, $C'A^1$, diretti nello stesso senso.

Corollari. — *1°. Il centro d'omotetia inversa di due circoli, situati in un piano, (o di due sfere) è sempre interno al segmento che ha per estremi i due centri. Inoltre esso è esterno ai due circoli (o sfere), se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi, coincide col punto di contatto, se la distanza dei centri è uguale alla somma dei raggi, è interno ai due circoli (o sfere) se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi.*

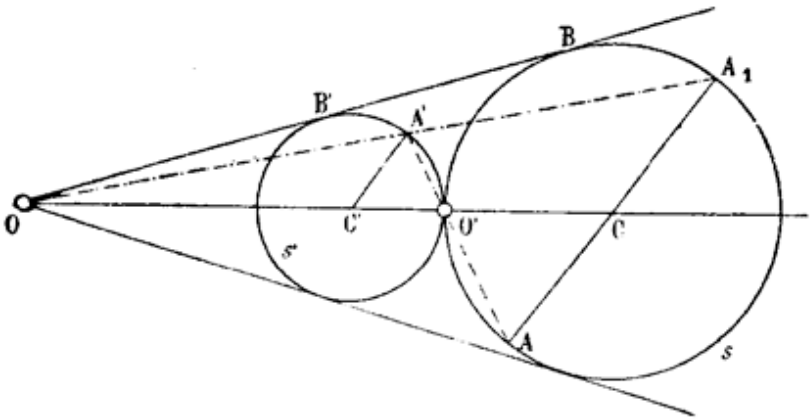

Fig. 214.

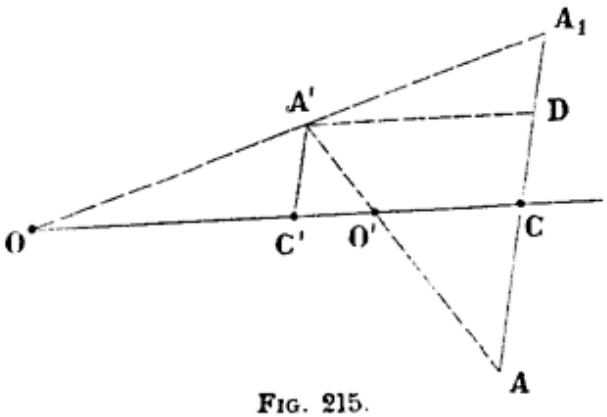

Fig. 215.

Abbiamo già veduto che il centro d'omotetia inversa O' deve essere interno al segmento che ha per estremi i due centri C,C'. Esso deve dunque essere interno anche a qualunque altro segmento, che abbia per estremi due punti corrispondenti A, A'. Sia D (Fig. 215) il punto d'incontro della retta CA colla parallela a CC' condotta per A', e indichiamo con d la distanza

dei centri e con R, R′ i due raggi. Sarà evidentemente

$$AD \equiv R + R', DA' \equiv CC' \equiv d.$$

I tre triangoli ADA′, ACO′, A′C′O′ sono equiangoli fra loro, e perciò se è $d > R + R'$, cioè $DA' > DA$, è anche $CO' > CA$ e $C'O' > C'A'$ e quindi O′ è esterno ai due circoli (o sfere); se è $d \equiv R + R'$, ossia

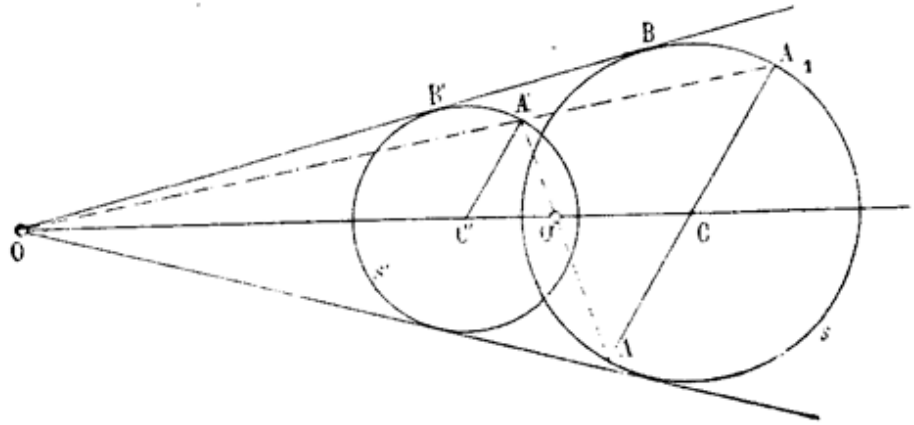

Fig. 216.

$DA' \equiv DA$, è pure $CO' \equiv CA$ e $C'O' \equiv C'A'$, e O′ coincide col punto di contatto dei due circoli (o sfere); se finalmente è $d < R + R'$, ossia $DA' < DA$, è pure $CO' < CA$ e $C'O' < C'A'$ ed il punto O′ è interno ai due circoli o (sfere).

2°. Il centro d'omotetia diretta di due circoli disuguali, situati in un piano, (o di due sfere) è sempre esterno al segmento che ha per estremi i due centri. Inoltre esso è esterno ai due circoli (o sfere), se la distanza dei centri è maggiore della differenza dei raggi, coincide col loro punto di contatto, se la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi; è interno ad essi, se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.

Sia O (Fig. 215) il centro d'omotetia diretta di due circoli disuguali, situati in un piano (o di due sfere) A_1, A′ due punti omologhi

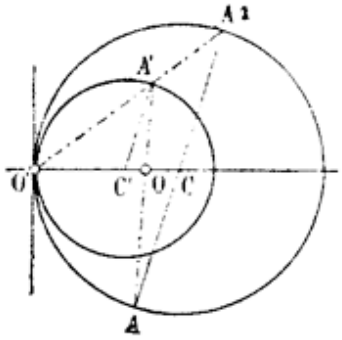

Fig. 217.

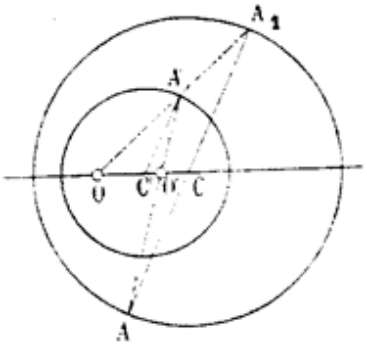

Fig. 218.

e D il punto d'incontro della CA colla parallela a CC′ condotta da A. Essendo d la distanza dei centri, R, R′ i due raggi CA, C′A′ è chiaro che $DA' \equiv d$, $DA_1 \equiv R - R'$.

I due triangoli A_1DA', A_1CO, $A'C'O$ sono equiangoli fra loro, perciò, se è $d > R - R'$, ossia $DA' > DA_1$, è pure $CO > CA_1$, e $C'O > C'A'$, cioè O è esterno ai due circoli (o sfere); se è $d = R - R'$, è pure $CO = CA_1$, $C'A' = C'O$, ed il punto O coincide col punto di contatto dei due circoli o sfere; se è $d < R - R'$, è pure $CO < CA_1$ e $C'O < C'A'$, ed O è interno ai due circoli (o sfere).

3°. Se due circoli in un piano (o due sfere) sono concentrici, i centri d'omotetia diretta e inversa coincidono col loro centro.

4°. I sei centri d'omotetia, che si ottengono accoppiando due a due tre circoli, situati in un piano o in piani paralleli, (o tre sfere) disuguali, ed aventi i centri distinti e non in linea retta, sono situati tre a tre sopra 4 rette.

Questo teorema è una conseguenza immediata del teorema e corollari del § 230.

Si deve osservare che i tre centri di omotetia diretta giacciono in linea retta, e giacciono pure in linea retta i centri d'omotetia in-

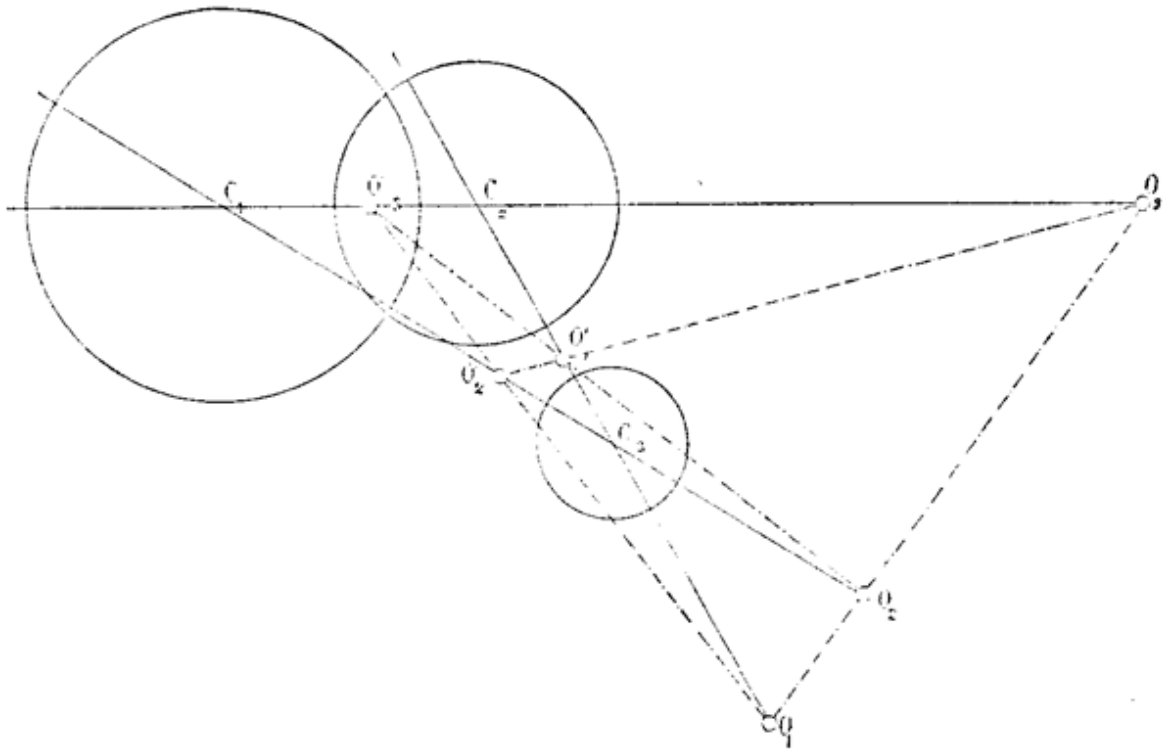

Fig. 219.

versa di due coppie di circoli (o sfere), e il centro d'omotetia diretta della coppia rimanente.

234. Teorema. — *Se per un centro d'omotetia di due circoli situati in un piano (o di due sfere) si può condurre una tangente ad uno di essi, essa risulta tangente anche all'altro.*

Viceversa, se una retta è tangente a due circoli situati in un piano (o a due sfere), deve passare per un centro d'omotetia, o esser parallela alla retta dei centri.

1°. Supponiamo che la retta OB (Fig. 212, 214 e 215) che passa per un centro O d'omotetia di due circoli situati in un piano (o di due sfere) s, s' sia tangente in B ad s. Essendo B′ il punto omologo di B, il raggio C′B′ deve essere parallelo a CB, e perciò perpendicolare alla retta OB′, cioè questa è tangente al circolo.

2°. Se r è una retta tangente nei punti B, B′ a due circoli s, s' di un piano (o a due sfere) i raggi CA a C′A′ sono perpendicolari ad essa, e perciò sono paralleli. Ne segue che la r passa per uno dei centri d'omotetia dei due circoli (o sfere), o è parallela alla retta dei centri.

Corollario. — *Un piano, condotto per un asse d'omotetia di tre sfere, tangente ad una di esse, è tangente anche alle altre due.*

Viceversa, se un piano è tangente a tre sfere aventi i centri distinti non in linea retta, passa per un asse d'omotetia delle medesime, o è parallelo al piano dei centri.

235. Teorema. — *Dati due circoli in un piano, esistono quattro, tre, due, una o nessuna tangente comune, secondo che i due circoli sono uno esterno all'altro, tangenti esternamente, secanti, tangenti internamente, oppure uno interno all'altro.*

Indichiamo con d la distanza dei centri e con R, R′ i due raggi, e supponiamo dapprima R e R′ disuguali, e per es. $R > R'$.

1°. Se è $d > R + R'$, i due centri d'omotetia diretta o inversa sono esterni ai due circoli, e perciò per ciascuno di essi si possono condurre due tangenti ad uno dei due circoli, e quindi anche all'altro.

2°. Se è $d = R + R'$, il centro d'omotetia diretta è esterno ai due circoli, e perciò si possono per esso condurre due rette tangenti ad un circolo e quindi anche all'altro; il centro d'omotetia inverso coincide col punto di contatto dei due circoli, e quindi, si può per esso condurre una sola tangente ad un circolo, che sarà tangente anche all'altro.

3°. Se è $R + R' > d > R - R'$, il centro d'omotetia inversa è interno ai due circoli, e il centro d'omotetia diretta è esterno, e quindi soltanto per questo si possono condurre due rette tangenti a un circolo, e perciò tangenti anche all'altro.

4°. Se è $d = R - R'$, il centro d'omotetia inversa è interno ai due circoli, il centro d'omotetia diretta coincide col loro punto di contatto, e perciò soltanto per questo si può condurre una sola tangente comune ai due circoli.

5°. Se è $d < R - R'$ i due centri d'omotetia sono interni ai due circoli, e non si può condurre alcuna tangente comune ad essi.

Se poi i due circoli sono uguali, si ottengono due tangenti comuni parallele alla retta dei centri.

Per mezzo di questo teorema il problema di tracciare le tangenti comuni a due circoli in un piano è ridotto alla ricerca dei centri d'omotetia, ed a quella delle tangenti ad un circolo, che passano per un punto, oppure son parallele ad una retta data, problemi che già abbiamo risoluto.

236. Teorema. — *Esistono al più otto piani tangenti a tre sfere, i cui centri sono distinti e non in linea retta.*

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un piano sia tangente a tre sfere disuguali, aventi i centri distinti e non in linea retta, è che sia tangente ad una di esse e passi per un asse d'omotetia. Poichè questi assi sono 4, otterremo dunque al più 8 piani tangenti comuni a quattro sfere, nel caso che tutti i quattro assi d'omotetia sieno esterni a una sfera data, e quindi anche all'altre tre. Questo numero però resta diminuito, quando uno o più degli assi d'omotetia risulti tangente o secante di una delle sfere date.

Lasciamo al lettore la discussione di tutti i casi possibili.

Notiamo soltanto che la ricerca dei piani tangenti comuni a tre sfere è ridotta a quella degli assi d'omotetia e dei piani tangenti condotti da una retta ad una sfera, problemi che già abbiamo risoluto.

CAPITOLO V

Geometria sulla sfera.

1. — ANGOLI E POLIGONI SFERICI.

237. In questo capitolo ci proponiamo di studiare le più notevoli proprietà delle figure appartenenti ad una superficie sferica, le quali hanno la più stretta analogia con quelle delle figure piane studiate fino ad ora, ove in luogo delle rette del piano si considerino i circoli massimi della superficie sferica, e in luogo dei circoli del piano si considerino i circoli, che si ottengono tagliando una sfera con piani non diametrali.

Della maggior parte dei teoremi che enuncieremo, lascieremo che il lettore faccia da sè la dimostrazione, imitando le dimostrazioni già date per i teoremi analoghi del piano, che citeremo volta per volta.

Definizione 1ª. — Si chiamano *circoli minori* di una sfera i circoli d'intersezione della sua superficie con piani non diametrali, e si chiamano *poli* di un circolo sopra una sfera gli estremi del diametro perpendicolare al piano del circolo.

Corollari. — *1°. Per tre punti di una superficie sferica passa uno ed un solo circolo appartenente alla superficie sferica.*

Esso è il circolo intersezione della superficie sferica col piano individuato da quei tre punti, ed è un circolo massimo o minore, secondochè il piano dei tre punti dati contiene o no il centro della sfera.

2°. I circoli sopra una sfera, situati in piani paralleli, hanno gli stessi poli.

Definizione 2ª. — Relativamente a due punti opposti di una sfera, si chiamano *paralleli* tutti i circoli sopra la medesima che hanno per poli quei punti; si chiama *equatore* il parallelo, che giace in un piano diametrale; si chiamano *meridiani* i circoli massimi, che passano per i due punti medesimi.

Corollario 3°. — *L'equatore è il luogo geometrico dei poli dei corrispondenti meridiani.*

Definizione 3ª. — Chiamasi *distanza polare* di due punti di una superficie sferica la corda che unisce quei due punti, e chiamasi *distanza sferica* degli stessi il minore arco di circolo massimo che è sotteso da quella corda.

238. Teorema. — *Un circolo sopra una sfera è il luogo geometrico dei punti della superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche (e polari) da ciascuno de' suoi poli.*

Infatti (Fig. 220) il diametro della sfera perpendicolare al piano del circolo c passa per il centro C di questo circolo; epperciò, se P è un polo del circolo c ed A, B sono due punti di esso, le distanze polari PA, PB sono eguali, come segmenti obliqui condotti da uno stesso punto P al piano del circolo c, e aventi su questo piano proiezioni eguali. Allora anche le distanze sferiche PA, PB sono eguali, come archi di circoli massimi, sottesi da corde eguali. Invece è facile vedere che un punto della superficie sferica, non situato sul dato circolo, ha dal polo P una distanza sferica (e quindi anche polare) minore o maggiore della distanza sferica (o polare) di P dai punti del circolo stesso, secondo che esso si trova in quella delle due calotte separate dal circolo, nella quale si trova P, o nell'altra.

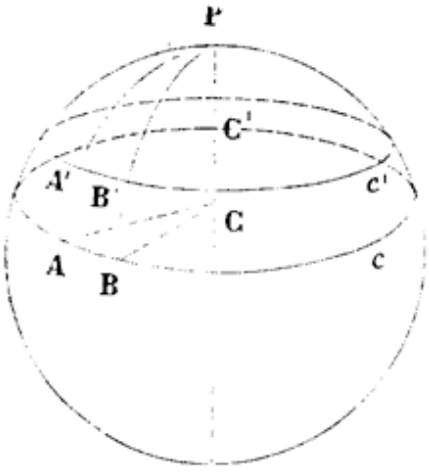

Fig. 220.

Definizione 1ª. — Ciascun polo di un circolo sopra una sfera dicesi *centro sferico*, e le sue distanze sferiche e polari dai punti di questo si dicono rispettivamente *raggio sferico* e *raggio polare* del circolo.

Corollari. — *1°. Un circolo sopra una sfera ha due centri e due raggi sferici (o polari).*

2°. I due raggi sferici (o polari) di un circolo massimo sono eguali, e quelli di un circolo minore sono disuguali.

Quando non si avverta espressamente il contrario, per raggio e centro sferico di un circolo intenderemo sempre il minore dei due raggi sferici e il centro corrispondente del medesimo.

Definizione 2ª. — Un punto si dice *interno* od *esterno* ad un circolo minore sopra una sfera, secondochè è situato nella calotta, a cui appartiene il raggio sferico minore, oppure nell'altra.

Corollario 3°. — *Secondochè un punto è interno od esterno ad un circolo sopra la sfera, esso ha dal centro sferico una distanza sferica minore o maggiore del raggio sferico; e viceversa.*

239. Nel § 30 e seguenti abbiamo definiti gli angoli sferici, o fusi, e studiate alcune delle loro principali proprietà. Queste figure sulla superficie sferica tengono il posto degli angoli nel piano e possiamo estendere ad esse la massima parte delle definizioni e teoremi relativi agli angoli piani. Dalla corrispondenza esistente fra gli angoli sferici e i loro diedri al centro, stabilita dal teorema 2° del § 33,

risulta che due piani diametrali perpendicolari fra loro dividono la superficie sferica in quattro parti eguali fra loro, ciascuna delle quali è la quarta parte dell'intera superficie e la metà di una superficie semisferica o angolo sferico piatto.

Definizione 1ª. — Un angolo sferico dicesi *retto, acuto* ed *ottuso*, secondochè è eguale, minore o maggiore della metà di un angolo sferico piatto.

Corollario 1°. — *Tutti gli angoli sferici retti appartenenti alla stessa sfera, od a sfere eguali, sono eguali.*

Definizione 2ª. — Due angoli sferici, la cui somma è un angolo sferico retto, diconsi *complementari.*

Corollario 2°. — *Due angoli sferici complementari di angoli sferici eguali sono eguali.*

Definizione 3ª. — Due circoli massimi si dicono *perpendicolari* o *normali*, se formano quattro angoli sferici retti, *obliqui* nel caso contrario.

240. Definizioni. — 1ª. Si chiama *sezione normale* o *arco equatoriale* di un angolo sferico l'arco di circolo massimo avente per poli i vertici dell'angolo, compreso fra i lati dell'angolo medesimo.

2ª. Si chiama *angolo ai poli* rispetto ad un circolo sopra una sfera l'angolo sferico, che ha per vertici i poli di questo circolo.

Dato un circolo sopra una sfera è facile vedere che ogni angolo ai poli determina sulla circonferenza un arco compreso fra i suoi lati, e viceversa ogni arco del suddetto circolo individua un angolo ai poli, fra i lati del quale esso è compreso.

Teorema. — *Dato un circolo sopra una sfera,*

1° due archi, compresi in due angoli ai poli eguali, sono eguali;

2° di due archi, compresi in due angoli ai poli disuguali, è maggiore quello compreso nell'angolo maggiore;

3° la somma di due o più angoli ai poli comprende un arco, che è la somma degli archi compresi fra le parti della somma.

E viceversa.

La dimostrazione è analoga a quella del § 33 Teor. 1°.

Corollario 1°. — *In una stessa sfera o in sfere eguali:*

1° se due angoli sferici sono eguali, gli archi equatoriali corrispondenti sono pure eguali;

2° se due angoli sferici sono disuguali, l'arco equatoriale, corrispondente all'angolo maggiore, è più grande di quello corrispondente all'angolo minore;

3° ad un angolo sferico, somma di due o più angoli sferici, corrisponde un arco equatoriale, che è la somma degli archi equatoriali corrispondenti ai primi.

E viceversa.

Corollario 2°. — *In una stessa sfera, o in sfere eguali, un angolo sferico è doppio triplo,.... di un altro, se l'arco equatoriale del primo è doppio, triplo,.... dell'arco equatoriale del secondo; e viceversa.*

241. Teorema. — *Dato un angolo sferico convesso, la distanza sferica dei poli dei lati, ciascuno dei quali è situato rispetto ad essi dalla stessa parte dell'altro lato, è il supplemento dell'arco equatoriale dell'angolo sferico.*

Questo teorema è conseguenza del § 71, Cor. 1°.

242. Definizioni — 1ª. Chiamasi *poligono sferico* la figura formata da più di due punti dati sopra una sfera in un certo ordine, in modo che tre consecutivi non sieno situati sopra un circolo massimo, e dai circoli massimi individuati dalle coppie di punti consecutivi e da quello individuato dal primo e dall'ultimo.

2ª. I punti dati si chiamano i *vertici*, i circoli massimi individuati da due vertici consecutivi si chiamano i *circoli del poligono*. Si chiamano *lati* del poligono gli archi di circoli massimi, minori di un semicircolo, che hanno per estremi due vertici consecutivi del poligono; l'arco, che manca a ciascun lato di un poligono per completare un circolo massimo, dicesi *prolungamento di quel lato*, e si chiamano *diagonali* gli archi di circoli massimi, minori di un semicircolo, che hanno per estremi due vertici non consecutivi del poligono.

3ª. Un poligono sferico prende il nome di *triangolo, quadrilatero*, o *quadrangolo, pentagono, esagono*,.... secondo che ha 3, 4, 5, 6.... lati. La linea formata dai lati di un poligono sferico si chiama *contorno* di esso, e l'arco somma dei lati si chiama *perimetro*.

4ª. Si chiama *linea poligonale sferica* la linea formata da più lati consecutivi di un poligono.

5ª. Un poligono sferico, o una linea poligonale sferica, si dicono *convessi* quando tutti i suoi vertici sono situati da una stessa parte di uno qualunque dei suoi circoli; *concavi* nel caso contrario.

6ª. Un poligono sferico si dice *intrecciato*, o una linea poligonale si dice *intrecciata*, quando almeno due lati non consecutivi si tagliano.

Teorema. — *Il contorno di un poligono sferico non intrecciato è una linea completa.*

La dimostrazione è in tutto simile a quella dell'analogo teorema per i poligoni piani.

Definizione 7ª. — Si chiama *superficie* di un poligono sferico convesso la parte di superficie sferica, limitata dal contorno del poligono, la quale non contiene i prolungamenti dei lati.

8ª. Ogni angolo sferico convesso, che ha per vertice un vertice del poligono, e i cui lati contengono i lati del poligono che passano per esso vertice, dicesi *angolo sferico interno*, o semplicemente *angolo sferico del poligono*. Ogni angolo sferico, conseguente di un angolo interno al poligono, dicesi *esterno*.

Valgono anche per i poligoni sferici tutte le altre definizioni che abbiamo date per i poligoni piani.

243. Teorema 1°. — *Se un circolo massimo passa per un punto interno ad un poligono convesso, ne incontra il contorno in due punti.*

Si imiti la dimostrazione dei Teorema 1° del § 82.

Teorema 2°. — *Un circolo massimo non può incontrare il contorno di un poligono sferico convesso in più di due punti.*

Si imiti la dimostrazione del Teorema 2° del § 82.

244. Definizioni. — 1ª. Ogni poligono sferico determina un angoloide, che si chiama il suo *angoloide corrispondente*, il quale ha per vertice il centro della sfera, per spigoli le semirette, che passano per i vertici del poligono, per facce gli angoli formati da queste semirette, che comprendono i lati del poligono.

2ª. Si chiama *piramide sferica* il solido limitato da un poligono sferico e dall'angoloide corrispondente.

Fig. 221.

Per le relazioni che passano fra gli archi di circoli eguali e gli angoli al centro che si appoggiano su di essi, e fra gli angoli sferici e i diedri al centro che li comprendono, è chiaro che i poligoni sferici devono godere di proprietà analoghe a quelle degli angoloidi corrispondenti al centro. Esse si ricaveranno da queste, sostituendo alla considerazione delle facce quella dei lati, alla considerazione dei diedri quella degli angoli sferici.

Estendiamo pure ai poligoni sferici le definizioni date per gli angoloidi. Così chiameremo poligono *supplementare* o *polare* di un altro convesso quello che ha per angoloide il supplementare dell'angoloide corrispondente al poligono dato. In altre parole, dato un poligono convesso, se costruiamo i poli dei suoi lati situati dalla stessa parte dei vertici del poligono, rispetto ai circoli ai quali appartengono questi lati, il poligono, che ha per vertici questi poli, presi nell'ordine stesso dei lati del poligono dato, è il poligono polare di quello dato.

Definizione 3ª. — Il poligono sferico, che ha per vertici consecutivi i punti opposti ai vertici consecutivi di un altro, si dice *opposto* a questo.

Corollari. — *1°. Due poligoni sferici opposti sono simmetrici rispetto al centro della sfera.*

Due poligoni opposti hanno tutti i lati e tutti gli angoli eguali; tuttavia è facile vedere che, in generale, come i corrispondenti angoloidi al centro, non si posson portare a coincidere. Sappiamo invece che due poligoni piani, che hanno tutti i lati e gli angoli eguali rispettivamente, si possono portare sempre a coincidere. Questa differenza non può fare meraviglia, se si pensa che nel piano si possono

portare a coincidere due figure eguali, ribaltando l'una sull'altra, ossia scambiando le due facce del piano, le quali sono eguali. Nella sfera, invece, le facce interna ed esterna non sono eguali, e quindi non si possono portare a coincidere.

2°. Due triangoli sferici isosceli opposti sono eguali.

245. Dalle proprietà degli angoloidi dimostrate nel § 115 e seguenti si ricavano immediatamente le seguenti proprietà dei poligoni sferici.

Teorema 1°. — *In ogni poligono sferico un lato è minore della somma dei rimanenti* (§ 115, Teor.).

Corollario. — *In ogni triangolo sferico un lato è maggiore della differenza degli altri due.*

Teorema 2°. — *In ogni poligono sferico convesso la somma dei lati è minore di un circolo massimo* (§ 116, Teor.).

Teorema 3°. — *Se in un triangolo sferico sono eguali due angoli, sono eguali anche i lati opposti ad essi, e viceversa* (§ 114, Cor. 1°).

Corollario. — *Un triangolo equilatero è anche equiangolo, e viceversa.*

Teorema 4°. — *Se in un triangolo sferico due angoli sono diseguali, anche i lati opposti sono diseguali, ed è più grande quell'opposto all'angolo maggiore, e viceversa* (§ 115, Cor. 2° e 3°).

Teorema 5°. — *Se un poligono sferico è polare di un altro, il secondo è polare del primo* (§ 117, Teor. 1°).

Teorema 6°. — *Se due poligoni sferici sono polari, i lati dell'uno sono supplementari degli archi equatoriali degli angoli sferici dell'altro* (§ 117, Teor. 2°).

Teorema 7°. — *In ogni poligono sferico:*
1°. Un angolo, aumentato di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due, supera la somma degli altri angoli;
2° la somma di tutti gli angoli è minore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati, ed è maggiore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due. (§ 118, Teor.).

Corollario. — *In ogni triangolo sferico:*
1° ciascun angolo sferico aumentato di un angolo sferico piatto è maggiore della somma degli altri due,
2° la somma degli angoli sferici è maggiore di uno e minore di tre angoli sferici piatti;
3° la differenza di due angoli sferici è minore dell'angolo sferico esterno conseguente al terzo.

Definizione. — Un triangolo sferico si dice *rettangolo, birettangolo, trirettangolo,* secondo che ha uno, due, tre angoli sferici retti.

Teorema 8°. — *In una stessa sfera, o in sfere eguali, due triangoli sferici sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro,*

1° se hanno un lato e i due angoli adiacenti rispettivamente eguali (§ 120, Teor. 1°),

2° se hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali (§ 120, Teor. 2°),

3° se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè gli angoli opposti agli altri due lati eguali sieno della stessa specie, e due almeno dei lati eguali siano diversi da un quarto di circolo (§ 121, Teor. 1°),

4° se hanno due angoli e il lato opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè i lati opposti agli altri due angoli eguali sieno della stessa specie, e almeno due degli angoli eguali non sieno retti (§ 121, Teor. 2°),

5° se hanno i tre lati rispettivamente eguali (§ 123, Teor. 1°).

6° se hanno i tre angoli rispettivamente eguali (§ 125, Cor. 2°).

Teorema 9°. — *Se due lati di un triangolo sferico sono rispettivamente eguali a due lati di un altro, e l'angolo compreso fra i due lati del primo è maggiore, eguale o minore dell'angolo compreso fra i due lati eguali dell'altro, il terzo lato del primo è rispettivamente maggiore eguale o minore del terzo lato dell'altro.*

E viceversa.

Teorema 10°. — *Se due triangoli sferici appartengano ad una stessa superficie sferica od a superficie sferiche eguali, e due angoli dell'uno sono rispettivamente eguali a due angoli dell'altro, il terzo angolo del primo triangolo è maggiore, eguale o minore del terzo angolo dell'altro triangolo, secondo che il lato opposto a questo angolo nel primo triangolo è maggiore, eguale o minore del lato corrispondente del secondo. E viceversa* (§ 122, Teor. 2°).

Teorema 11°. — *Due poligoni sferici convessi di* n *lati sono eguali o simmetrici:*

1°. Se hanno n — 1 *lati rispettivamente eguali, ed hanno eguali gli angoli compresi tra i lati eguali.*

2°. Se hanno n — 1 *angoli rispettivamente eguali, ed hanno eguali i lati aventi per estremi i vertici degli angoli eguali.*

3°. Se hanno tutti i lati eguali ed n — 3 *angoli consecutivi, compresi tra i lati eguali, pure eguali.*

4°. Se hanno tutti gli angoli eguali ed n — 3 *lati consecutivi, adiacenti ad angoli eguali, pure eguali* (§ 125).

246. Poichè la somma degli angoli di un poligono è maggiore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due, esiste un angolo sferico differenza fra la suddetta somma e tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due.

Definizione. — Si chiama *eccesso sferico di un poligono* la differenza tra la somma dei suoi angoli e tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due.

L'*eccesso sferico* di un triangolo è perciò eguale alla somma dei suoi tre triangoli diminuita di un angolo sferico piatto.

2. — CIRCOLI SOPRA LA SFERA.

247. Teorema. — *Fra gl' infiniti archi di circoli massimi, che terminano ad un circolo sopra una sfera, e partono da un punto della superficie sferica, che non sia uno dei poli,*

1° quello normale, che contiene il centro, è maggiore di qualunque altro;

2° quello normale, che non contiene il centro, è minore di qualunque altro;

3° due archi, i cui estremi distano egualmente dall'estremo di un arco normale, sono eguali; altrimenti è maggiore quello, il cui estremo ha una distanza maggiore dal segmento normale minimo.

E viceversa.

La dimostrazione è identica a quella del § 188.

Corollari. — *1°. Ad un circolo sopra una sfera non si possono condurre da un punto della superficie sferica, che non sia uno dei centri sferici, più di due archi di circoli massimi eguali fra loro.*

2° fra tutti gli archi di circoli massimi, che terminano a due paralleli di una sfera, quelli ad essi perpendicolari sono eguali fra loro e sono minori di tutti gli altri.

Definizioni. — 1ª. Si chiama *distanza sferica* di un punto di una superficie sferica da uno de' suoi circoli l'arco minimo di circolo massimo, che si può condurre da quel punto al circolo.

2ª. Si chiama *distanza sferica di due paralleli* sopra una sfera la distanza sferica di un punto qualunque di uno di essi dall'altro.

248. Teorema 1°. — *Il luogo dei punti di una superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche da due punti dati su di essa, è il circolo massimo perpendicolare alla distanza sferica dei due punti, condotto per il punto medio di essa.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del § 160.

Corollario 1°. — *I circoli massimi perpendicolari ai lati di un triangolo sferico nei loro punti medi passano per due stessi punti opposti della sfera, che sono i soli punti della medesima aventi eguale distanza sferica dai vertici del triangolo.*

Teorema 2°. — *Il luogo dei punti di una superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche da due circoli massimi della sfera, è la coppia di circoli massimi bisettori dei quattro angoli sferici formati dai primi due.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema del § 162.

Corollario 2°. — *I circoli massimi bisettori degli angoli sferici interni ed esterni di un triangolo sferico si incontrano tre a tre in quattro coppie di punti opposti della sfera che sono i soli punti della superficie sferica aventi eguali distanze sferiche dai circoli del triangolo.*

249. Teorema. — *Un circolo massimo di una sfera ha con un circolo minore nessuno, uno o due punti in comune, secondo che il circolo massimo ha dal centro sferico del circolo minore una distanza maggiore, eguale o minore del raggio sferico di questo circolo.*

Questo teorema, analogo ad un teorema della geometria sul piano (§ 175) relativo alle posizioni di una retta e di un circolo, si dimostra con eguali ragionamenti, sostituendo alle rette i circoli massimi ed alla distanza ordinaria la distanza sferica.

Definizioni. — 1ª. Dati sopra una sfera un circolo massimo ed un circolo minore, diremo che il circolo massimo è *tangente* o *secante* del circolo minore, secondochè ha con esso uno o due punti comuni. Chiameremo poi punto di *contatto* o di *tangenza* il punto comune ad un circolo minore e ad un suo circolo massimo tangente.

2ª. Dicesi *tangente sferica*, condotta da un punto sopra una sfera ad un suo circolo minore, il minore degli archi di circolo massimo tangente, che ha per estremi quel punto e il punto di contatto.

250. Teorema. — *Si può sempre condurre uno, ed un solo, circolo massimo tangente ad un dato circolo minore in un suo punto.*

Esso è il circolo massimo perpendicolare nel punto dato al raggio sferico che termina in quel punto; ossia è il circolo massimo il cui piano contiene la retta tangente al dato circolo nel punto considerato.

251. Teorema. — *Dati due circoli minori sopra una sfera, aventi raggi sferici diseguali,*

1° se la distanza sferica dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi sferici, tutti i punti di ciascun circolo sono esterni all'altro;

2° se la distanza sferica dei centri è eguale alla somma dei raggi sferici, i due circoli hanno un solo punto comune e tutti gli altri punti dell'uno sono esterni all'altro;

3° se la distanza sferica dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi sferici, i due circoli hanno due punti in comune;

4° se la distanza sferica dei centri è eguale alla differenza dei raggi sferici, i due circoli hanno un solo punto in comune, e tutti gli altri punti di quello di raggio sferico minore sono interni all'altro;

5° se la distanza sferica dei centri è minore della differenza dei raggi sferici, tutti i punti del circolo di raggio sferico minore sono interni all'altro.

E viceversa.

La dimostrazione di questo teorema è perfettamente simile a quella del Teorema del § 189 relativo alla posizione di due circoli in un piano.

Definizione. — Diremo che due circoli minori dati sopra una sfera sono *tangenti esternamente*, quando hanno un solo punto comune, e tutti gli altri punti di uno di essi sono esterni all'altro; che sono *tangenti internamente*, quando hanno un solo punto comune e tutti gli altri punti di uno di essi sono interni all'altro.

Corollari. — *1°. Due circoli sopra una sfera aventi due punti comuni si tagliano in essi, e l'arco di circolo massimo, che termina a quei due punti, è perpendicolare all'arco di circolo massimo che unisce i centri sferici dei due circoli, ed è diviso da esso per metà.*

2°. Se due circoli sopra una sfera sono tangenti, il circolo massimo che passa per i loro centri sferici, passa anche per il loro punto di contatto ed è perpendicolare ad entrambi.

252. Teorema. — *Per un punto di una superficie sferica, esterno ad un circolo minore ed al suo simmetrico rispetto al centro della sfera, si possono condurre ad esso due circoli massimi tangenti.*

Sia O il centro sferico di un circolo minore c (Fig. 222), ed A un punto della superficie sferica esterno a c ed al suo simmetrico rispetto al centro della sfera. Fatto centro in O, con un raggio sferico eguale al doppio del raggio sferico di c, si descriva un circolo c'; indi, fatto centro in A, con un raggio sferico eguale ad OA si descriva un altro circolo c'', il quale taglierà il circolo c' nei punti B e B'. Ora gli archi di circoli massimi OB, OB' incontrano il circolo c nei punti E, E' tali che i circoli massimi AE, AE' risultano tangenti a c. Infatti, essendo E il punto medio di OB, ed essendo A un punto, che ha eguale distanza sferica da B e O per costruzione, è chiaro che il circolo massimo AE è il luogo di tutti i punti dalla superficie sferica, che hanno eguale distanza sferica da B ed O, e perciò

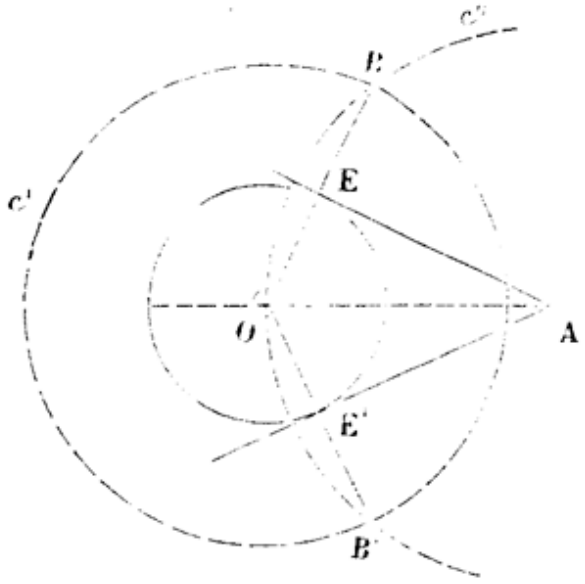

Fig. 222

esso è perpendicolare al raggio sferico OE, vale a dire è tangente al circolo c. Analoga dimostrazione per AE'.

Se il punto A fosse dato internamente al circolo minore, è chiaro che non si potrebbe condurre per esso alcun circolo massimo tangente a quel circolo.

Se poi il punto A fosse dato internamente al circolo c_1 simmetrico di c rispetto al centro della sfera, si vede subito che, un circolo massimo essendo simmetrico a sè stesso rispetto al centro della sfera, ed ogni circolo massimo condotto per A incontrando necessariamente il circolo c_1 in due punti, tutti i circoli massimi condotti per A taglieranno il circolo c_1 ed il suo simmetrico c in due coppie di punti rispettivamente simmetrici rispetto al centro della sfera.

Corollari. — *1°. Gli archi di circoli massimi tangenti, condotti da un punto di una superficie sferica ad un circolo minore, sono eguali.*

2°. Se un circolo massimo di una sfera è tangente ad un circolo minore, esso è pure tangente al circolo simmetrico del primo rispetto al centro della sfera.

3. — POLIGONI SFERICI INSCRITTI O CIRCOSCRITTI AD UN CIRCOLO SOPRA LA SFERA.

253. Definizioni. — 1ª. Se un poligono sferico ha tutti i suoi vertici su di un circolo della superficie sferica, si dice ch'esso è *inscritto al circolo,* e che il circolo è *circoscritto al poligono.* Dicesi *raggio sferico* di un poligono inscritto, il raggio sferico del circolo ad esso circoscritto.

2ª. Se un poligono sferico ha tutti i suoi lati tangenti ad un circolo sopra la sfera, si dice ch'esso è *circoscritto* al circolo, e che il circolo è *inscritto* nel poligono. Chiamasi *apotema* il raggio sferico del circolo inscritto.

Teorema 1°. — *Ad ogni triangolo sferico si può sempre circoscrivere un circolo.*

Teorema 2°. — *Esistono quattro circoli tangenti ai circoli massimi di un triangolo sferico.*

Le dimostrazioni sono analoghe a quelle del § 195, Teor. 2° e del § 197, Teor. 2°.

254. Teorema 1°. — *Affinchè si possa circoscrivere un circolo ad un quadrangolo sferico, è necessario e sufficiente che la somma di due angoli opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

Sia ABCD (Fig. 223) il quadrangolo sferico inscritto al circolo di centro sferico P. Se si congiunge P con tutti i vertici del quadrangolo, mediante archi di circoli massimi, è chiaro che si ottengono tanti

triangoli sferici isosceli quanti sono i lati del quadrangolo, dalla considerazione dei quali è facile dedurre che $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{ADC} + \widehat{ABC}$.

Fig. 223.

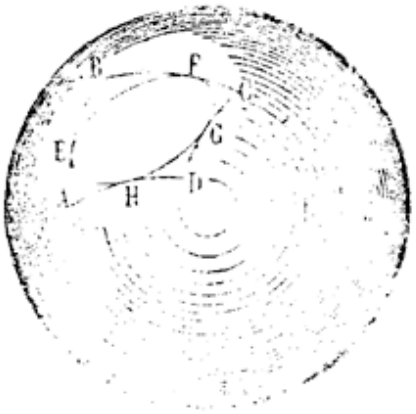

Fig. 224.

Viceversa, condotto il circolo, che passa per i tre vertici A, B, C del quadrangolo, si dimostra per assurdo, che esso deve passare anche per il quarto vertice D. Lasciamo, come esercizio, al lettore la cura di esporre il completo sviluppo della dimostrazione.

Teorema 2°. — *Affinchè si possa inscrivere un circolo ad un quadrangolo sferico, è necessario e sufficiente che la somma di due lati opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

La dimostrazione di questo teorema (Fig. 224) è del tutto conforme alla dimostrazione del teorema analogo nella geometria del piano, relativo alla condizione necessaria e sufficiente, perchè si possa inscrivere un circolo ad un quadrangolo piano convesso.

255. Definizione. — Un poligono sferico convesso si dice *regolare*, se ha tutti i suoi lati eguali e tutti i suoi angoli eguali.

Teorema 1°. — *Ad un poligono sferico regolare si può sempre inscrivere o circoscrivere un circolo.*

Corollario. — *Le bisettrici degli angoli di un poligono sferico regolare, e i circoli massimi perpendicolari ai lati nei loro punti medii, passano per due punti opposti della sfera, che sono i centri sferici del circolo inscritto e del circolo circoscritto.*

Teorema 2°. — *Se più punti dividono un circolo sopra una sfera in archi eguali, il poligono sferico, che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quello che ha per circoli consecutivi i circoli massimi tangenti al dato circolo nei punti medesimi sono regolari.*

Si imitino le dimostrazioni dei §§ 201 e 202.

Dai teoremi precedenti risulta che per inscrivere o circoscrivere ad un dato circolo sopra una sfera un poligono sferico regolare di n

lati, basta dividere il circolo stesso in n parti eguali. Questo problema è stato già risoluto nel § 204 e seguenti per i casi in cui n abbia i valori 4, 8, 16, ...: 3, 6, 12, ...; 5, 10, 20, ...; 15, 30, etc.

4. — SISTEMI DI CIRCOLI SOPRA UNA SFERA.

Relativamente a più circoli dati sopra una sfera si possono svolgere considerazioni simili a quelle svolte nel Cap. III per i sistemi di circoli in un piano. Senza trattare completamente questo argomento, ci limitiamo qui a dare le proprietà che possono servire di base a tale teoria.

256. Teorema. — *Dati due circoli minori sopra una sfera, il luogo dei punti della superficie sferica, tali che le tangenti sferiche condotte da essi ai due circoli dati sieno eguali, è l'arco di circolo massimo esterno ai due circoli e ai loro opposti, il cui piano passa per la comune intersezione dei piani di questi due circoli, o è parallelo ad entrambi, se essi non s'incontrano.*

Sieno C e C′ (Fig. 225) i centri sferici di due circoli minori di una sfera di centro O, e sia a la comune intersezione dei piani α, β di questi

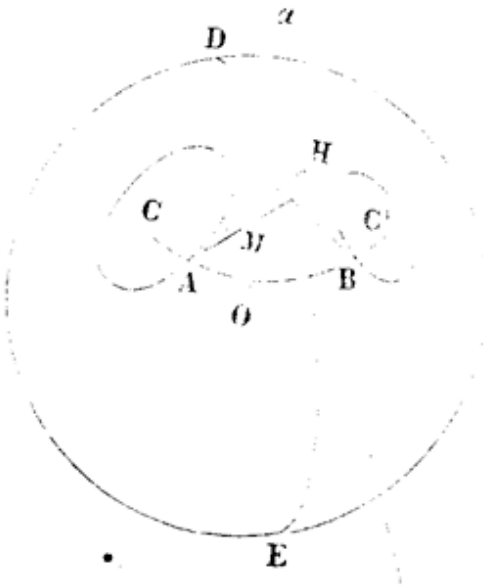

Fig. 225.

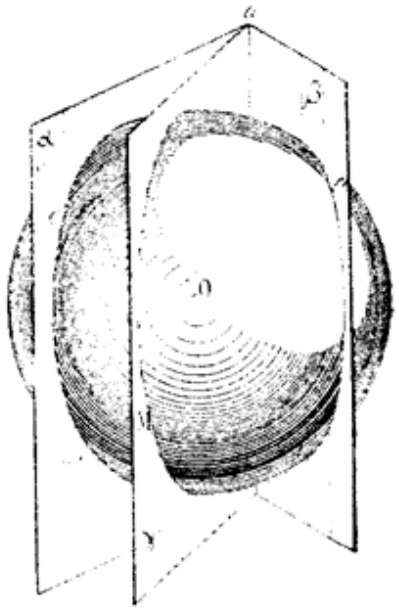

Fig. 226

due circoli. Se M è un punto dell'arco di circolo massimo esterno ai circoli di centro C e C′, e ai loro opposti, il cui piano passa per a, MA, MB le tangenti sferiche condotte da M ai due circoli dati, è chiaro che i piani AMO, OMB tagliano i piani α e β secondo le rette HA, HB tangenti ai due circoli C, C′ ed alla sfera. Pertanto i segmenti

AH, BH sono eguali (§ 194 Cor. 2°), e dall'eguaglianza dei triangoli rettangoli AOH, HOB si ricava che $\widehat{HOA} \equiv \widehat{HOB}$, dunque l'arco MA è eguale all'arco MB.

Inversamente, se l'arco MA è eguale all'arco MB, si ricava $AM \equiv BM$; inoltre si ha $AH \equiv BH$, quindi i punti M ed H si trovano sul medesimo piano perpendicolare ad AB, il quale passa anche per O (§ 161, Teor.), perciò tutti i punti M sono sul circolo massimo individuato dal piano diametrale O*a*.

Definizione. — Il circolo massimo, del quale fa parte il luogo dei punti di una sfera tali che le tangenti sferiche condotte da essi a due circoli dati sopra la sfera sieno eguali, si chiama *circolo radicale.*

Corollari. — *1°. Se due circoli minori sopra una sfera si tagliano, il loro circolo radicale è il circolo massimo, che passa per i punti d'incontro dei due circoli dati.*

2°. Se due circoli minori sopra una sfera sono tangenti, il loro circolo radicale è il circolo massimo tangente ad entrambi.

3°. Il circolo radicale di due paralleli è l'equatore.

4°. Se i piani di più circoli minori passano per una medesima retta, tutti quei circoli hanno lo stesso circolo radicale.

257. Teorema. — *I circoli radicali che si ottengono prendendo due a due tre circoli minori e situati in piani, che non passano per una medesima retta, nè sono paralleli, passano tutti per due punti opposti.*

Infatti i piani dei tre circoli dati si tagliano in un punto, e la congiungente questo punto col centro della sfera incontra la superficie nei punti comuni ai tre circoli radicali dei circoli dati.

Definizione. — I punti d'incontro dei tre circoli radicali di tre circoli minori, presi due a due, diconsi *centri radicali sferici* dei tre circoli.

Corollari. — *1°. I centri radicali sferici di tre circoli sono i soli punti della superficie sferica, dai quali si possono condurre ai tre circoli dati tangenti sferiche eguali.*

2°. I centri radicali sferici di tre circoli minori sono i centri sferici del circolo normale ai tre circoli dati.

Problema. — *Costruire il circolo radicale di due circoli minori.*

Dati i due circoli minori c e c', si descriva un terzo circolo che tagli i primi due. I circoli radicali del primo circolo col terzo e del secondo col terzo individuano due punti appartenenti al circolo radicale dei due circoli dati.

CAPITOLO VI

Superficie e solidi di rotazione.

1. — SUPERFICIE CONICA E CONO.

258. Definizioni. — 1ª. Date in un piano una retta ed una linea qualunque, se facciamo rotare la figura di un intero giro attorno alla data retta, la superficie, luogo della linea data, che rota nel modo indicato, si chiama una superficie di *rivoluzione* o di *rotazione* o *rotonda*.

Per esempio la superficie sferica, generata dalla rotazione di un semicircolo attorno al proprio diametro, è una superficie rotonda.

2ª. La retta fissa dicesi *asse*, e la linea mobile, in ciascuna sua posizione, dicesi *meridiano*.

È chiaro che tutti i punti della linea mobile descrivono nella rotazione circoli situati in piani perpendicolari all'asse e aventi per centri punti dell'asse; ed è chiaro altresì che ogni piano passante per l'asse incontra la superficie lungo un meridiano.

3ª. Tutti i piani perpendicolari all'asse, e che incontrano la superficie, si dicono *normali* e le sezioni prodotte si dicono *sezioni normali*, o *paralleli* della superficie. Tutti i piani che passano per l'asse si dicono *piani meridiani*. Diconsi *poli* i punti d'incontro della superficie col proprio asse.

Corollario. — *Un piano perpendicolare all'asse di una superficie di rotazione taglia questa superficie secondo un circolo; tutti i piani che passano per l'asse la tagliano secondo linee eguali.*

259. Definizioni. — 1ª. Se il piano di due rette, che si tagliano, compie un giro, rotando intorno ad una di esse, l'altra retta descrive una superficie, che si chiama *superficie conica rotonda, o di rotazione*.

2ª. La retta mobile, in tutte le sue posizioni, si chiama *generatrice* e il suo punto d'incontro coll'asse si chiama *vertice* della superficie conica.

3ª. Il vertice di una superficie conica rotonda divide ogni sua generatrice in due parti, e quindi divide anche la superficie stessa in due parti dette *falde* della medesima.

Ciascuna falda di una superficie conica rotonda è generata da un lato di un angolo, il cui piano compie un giro, rotando attorno all'altro lato.

4ª. Chiamasi *angolo di una superficie conica rotonda* ciascuno degli angoli acuti formati da una generatrice coll'asse.

Teorema. — *Una superficie conica rotonda è il luogo dei punti, le cui congiungenti col vertice della superficie formano coll'asse un angolo eguale all'angolo della superficie conica medesima.*

Risulta evidente dalle definizioni suesposte che ogni punto di una superficie conica rotonda è tale, che la sua congiungente col vertice della superficie forma coll'asse della medesima un angolo eguale all'angolo della superficie conica. Viceversa, se un punto P è tale, che la sua congiungente col vertice formi coll'asse un angolo eguale all'angolo della superficie conica, quel punto si deve trovare sulla superficie medesima, perchè quando il piano della generatrice e dell'asse sia venuto a passare per P, il punto P si deve trovare sulla generatrice.

Deriva inoltre da ciò che precede, che una superficie conica rotonda separa una parte dello spazio, la quale contiene tutti i punti, le cui congiungenti col vertice della superficie conica formano coll'asse un angolo minore dell'angolo della superficie medesima, da un'altra parte che contiene tutti i punti, le cui congiungenti col vertice della superficie conica formano un angolo maggiore dell'angolo della superficie medesima.

In seguito a ciò si può asserire che una superficie conica rotonda è una superficie completa, e che anche ciascuna sua falda è una superficie completa.

Corollario. — *Se si taglia una superficie conica rotonda con un piano, che incontri tutte le generatrici in punti appartenenti a una medesima falda, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie medesima.*

260. Teorema. — *Un piano passante pel vertice di una superficie conica rotonda,*

1° ha tutti gli altri suoi punti esterni alla superficie e non compresi fra essa, se forma coll'asse un angolo maggiore di quello della superficie;

2° ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se forma coll'asse un angolo eguale a quello della superficie;

3° ha in comune con essa i punti di due generatrici, se forma coll'asse un angolo minore di quello della superficie.

E viceversa.

1°. Sia α (Fig. 227) un piano che, passando per il vertice V della superficie conica, faccia coll'asse a un angolo $C\widehat{V}O$ maggiore dell'angolo $O\widehat{V}A$ della superficie medesima. Ogni punto della retta VC, non coincidente con V, è esterno alla superficie conica (§ 259, Teor.), inoltre ogni altro punto P del piano α è pure esterno alla medesima, perchè, essendo $P\widehat{V}O$ eguale o maggiore di $C\widehat{V}O$ e quest'ultimo maggiore

di $O\widehat{V}A$ per ipotesi, si ha pure $P\widehat{V}O > O\widehat{V}A$; dunque ogni punto P di α è esterno alla superficie conica.

2°. Se l'angolo $C\widehat{V}O$ è eguale (Fig. 228) all'angolo $O\widehat{V}A$, allora VA coincide con VC, e tutti gli altri punti del piano α sono esterni alla

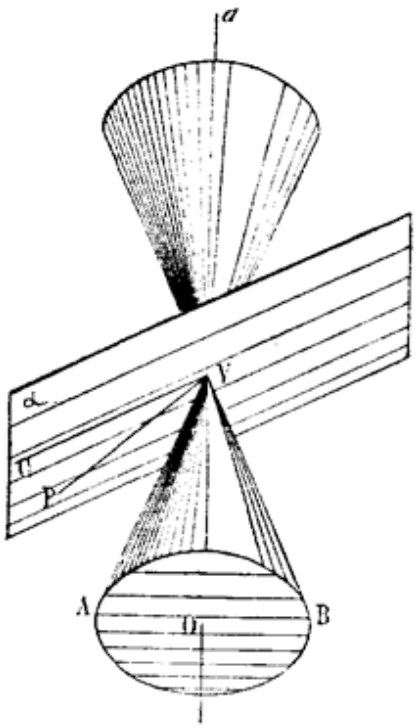

Fig. 227.

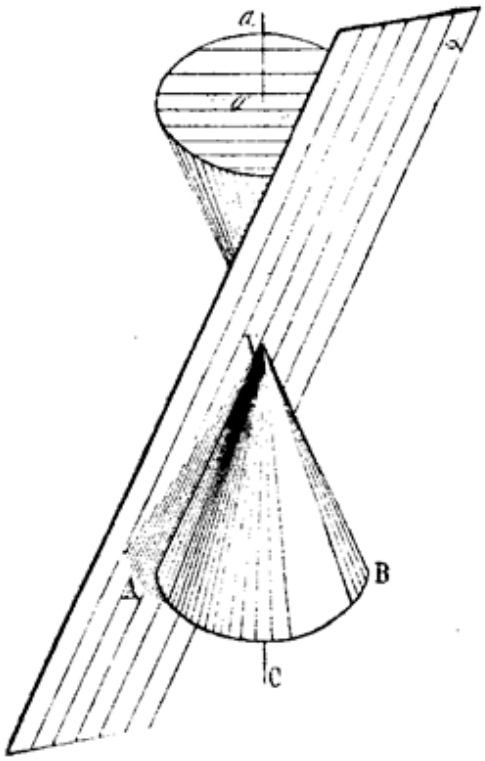

Fig. 228.

superficie, perchè le loro congiungenti col vertice V formano con l'asse VO un angolo maggiore di $C\widehat{V}O$, e quindi maggiore dell'angolo della superficie conica.

3°. Se infine l'angolo $C\widehat{V}O'$ del piano α coll'asse della superficie conica è minore (Fig. 229) di $A'\widehat{V}O'$, tagliando la superficie conica con un piano β normale ad essa e passante per C si ottiene, come sezione, un cerchio c, di cui C è un punto interno, ed allora la intersezione A'B' dei due piani α e β è una retta, la quale, passando per un punto C interno al cerchio c, lo taglia in due punti A', B' appartenenti alla superficie conica. Ne viene che le rette VA', VB' sono comuni al piano α ed alla superficie conica; nè vi può essere alcun altro punto P della superficie conica, fuori delle rette VA', VB', il quale appartenga anche al piano α, perchè altrimenti il piano α avrebbe in comune colla superficie conica tutta la retta VP e col piano β avrebbe in comune un terzo punto, situato fuori della retta A'B', e che sarebbe l'incontro della retta VP con questo piano; dunque i due piani α e β coinciderebbero, e ciò è assurdo.

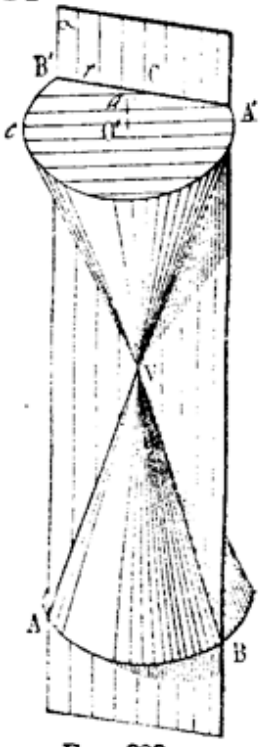

Fig. 229.

I teoremi inversi sono veri per la solita legge delle inverse esposta nei preliminari.

Corollario 1°. — *Una retta, che non passi per il vertice di una superficie conica rotonda, e non sia parallela ad una generatrice, può aver comune colla superficie nessuno, uno, o due punti.*

Infatti, condotto il piano individuato dalla retta e dal vertice, secondo che esso ha in comune colla superficie nessuna, una, o due generatrici, la retta avrà in comune colla stessa nessuno, uno, o due punti.

Definizioni. — 1ª. Un piano si dice *tangente*, o *secante* di una superficie conica rotonda, secondochè ha in comune colla medesima una generatrice, o punti di due o più generatrici. La generatrice, comune ad una superficie conica rotonda e ad un suo piano tangente, si chiama *generatrice di contatto*.

2ª. Una retta, che non passi per il vertice di una superficie conica rotonda e non sia parallela ad una generatrice, si dice *tangente*, o *secante* di essa, secondo che ha in comune colla medesima uno, o due punti.

Corollari — *2°. Per un punto di una superficie conica rotonda passa un solo piano tangente, o ne passano infiniti, secondo che il punto è diverso dal vertice, o coincide con esso.*

3°. Per un punto esterno ad una superficie conica rotonda e non compreso in essa passano due piani tangenti alla medesima.

Infatti, condotto il piano normale alla superficie, che passa per quel punto, si potranno condurre da esso due sole tangenti al circolo sezione. Ciascuno dei piani individuato da una di quelle tangenti e dal vertice è tangente alla superficie, e questi due sono i soli piani tangenti, che passano per il punto dato.

4°. Per un punto di una superficie conica rotonda, che non sia il vertice, passano infinite rette tangenti, il cui luogo è il piano tangente alla superficie in quel punto.

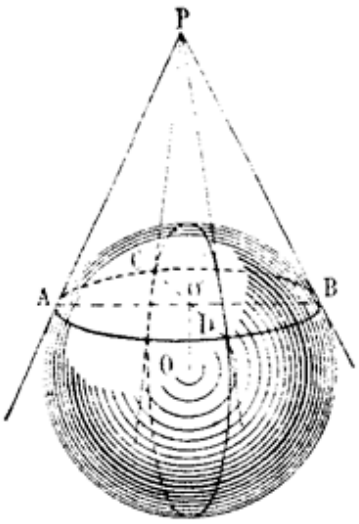

Fig. 230.

261. Teorema. — *Le infinite rette tangenti ad una sfera, condotte per un suo punto esterno, sono le generatrici di una superficie conica rotonda, che ha per vertice quel punto, ed ha per asse la retta che unisce il vertice col centro della sfera.*

Questo teorema discende dal Problema 2° del § 194. È evidente che la superficie conica e la sfera hanno in comune tutti i punti di un circolo minore.

Definizione. — Una superficie conica rotonda ed una sfera si dicono *tangenti*, quando hanno in comune tutti, e soli, i punti di un circolo minore, il quale si chiama *circolo di contatto*.

Corollario. — *Per un circolo minore di una sfera passa una, ed una sola, superficie conica rotonda tangente alla sfera.*

262. Sappiamo che, se si conduce un piano che incontra tutte le generatrici di una superficie conica rotonda in punti appartenenti a una medesima falda, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie conica; per conseguenza (P. IV, 1°) detto piano divide la parte di spazio separata dalla falda, che esso incontra, in due altre parti, delle quali una è finita e contiene il vertice.

Definizioni. — 1ª. Il solido finito, limitato da una falda di superficie conica rotonda e da un piano, che ne incontra tutte le generatrici in punti appartenenti alla stessa falda, si chiama *cono rotondo*. Esso si dice *obliquo*, se il piano secante è obliquo all'asse, *retto* se il piano secante è normale all'asse. Il cono rotondo e retto si dirà semplicemente *cono rotondo*.

2ª. La superficie, limitata dalla sezione suddetta, si dice *base* del cono; il vertice della superficie si chiama il *vertice* del cono. La distanza del vertice dal piano della base si dice *altezza*; i segmenti eguali di generatrici compresi fra il vertice e la base di un cono rotondo si dicono *apotemi* del cono.

3ª. Chiamasi *superficie laterale* del cono la parte di falda limitata dalla base, e *superficie totale* la superficie formata dalla base e dalla superficie laterale.

4ª. Chiamasi *tronco di cono* la parte di cono compresa fra il piano della base ed un piano segante, che incontra il primo secondo una retta esterna al cono, o è parallelo ad esso. Se il cono è rotondo e il piano segante è parallelo al piano della base, i due cerchi che limitano il tronco si dicono *basi*, e il tronco si dice a *basi parallele*.

5ª. Chiamasi *asse, altezza, apotemi, superficie laterale* di un tronco di cono a basi parallele, i segmenti dell'asse, dell'altezza, degli apotemi e la parte di superficie laterale del cono corrispondente, compresi fra i piani delle due basi del tronco.

Corollari. — *1°. Il luogo dei punti medii degli apotemi di un cono rotondo è un circolo situato in un piano parallelo alla base ed equidistante da essa e dal vertice.*

2°. Il luogo dei punti medii degli apotemi di un tronco di cono rotondo a basi parallele è un circolo situato in un piano parallelo alle basi ed equidistante da esse.

Definizione 6ª. — Chiamansi *sezione media* di un cono rotondo, o di un tronco di cono a basi parallele, la sezione fatta da un piano, che divide per metà tutti gli apotemi, e chiamasi *sezione principale* la sezione fatta da un piano, che passa per l'asse. Se la sezione principale di un cono rotondo è un triangolo equilatero, il cono si dice pure *equilatero*.

È chiaro che un cono rotondo può essere generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto: in questo caso l'ipotenusa ne è l'apotema, il cateto fisso l'altezza, e l'altro cateto il raggio della base. Analogamente un tronco di cono a basi parallele può essere generato da un trapezio rettangolo, che roti intorno al lato perpendicolare alle basi; allora l'altro lato ne è l'apotema e le due basi del trapezio sono i raggi delle basi del tronco.

263. Due semipiani (Fig. 231) AVO, BVO, uscenti dall'asse VO di un cono rotondo, dividono il cono e la sua superficie laterale in due parti. Ognuna delle due parti di superficie è terminata dalle due ge-

neratrici AV, BV e dall'arco AB, ed ognuna delle parti del cono è limitata dai triangoli rettangoli AVO, BVO, dal settore circolare AOB e da una parte della superficie conica.

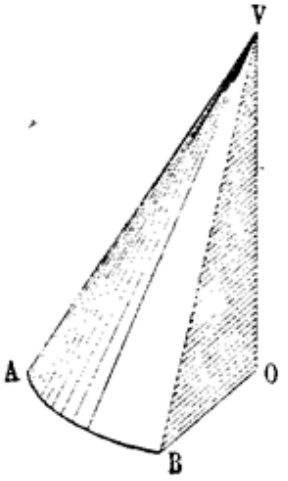

Fig. 231.

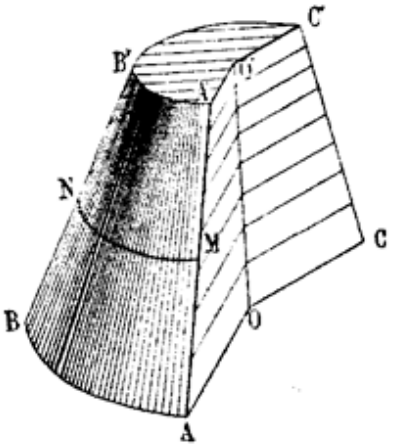

Fig. 232.

Analoga considerazione (Fig. 232) si può fare relativamente al tronco di cono.

Definizioni. — 1ª. Chiamasi *angolo conico* ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un cono rotondo è divisa da due sue generatrici (dette *lati*). Il vertice del cono dicesi anche *vertice dei due angoli conici.*

2ª. Dicesi *settore conico* ciascuna delle due parti, in cui un cono rotondo resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al cono si dicono *facce* dei due settori.

3ª. Dicesi *trapezio conico* ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un tronco di cono rotondo a basi parallele è divisa da due dei suoi apotemi (detti *lati*). I due archi delle basi del tronco, che limitano il trapezio conico, si dicono *basi* del medesimo.

4ª. Dicesi *settore tronco-conico* ciascuna delle due parti, in cui un tronco di cono a basi parallele resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al tronco di cono si dicono *facce* dei due settori tronco-conici.

È facile vedere come si possa estendere anche agli angoli (o settori) conici appartenenti ad un dato cono i concetti di angolo (o settore) convesso, concavo, o piatto, ed in generale tutte le proprietà che si sono dimostrate per gli angoli (o spicchi) sferici.

Per conseguenza riteniamo che gli angoli (o settori) conici di uno stesso cono, o di coni eguali, costituiscano infinite altre classi di grandezze geometriche omogenee.

5ª. Dicesi *sezione media* di un settore (o segmento) conico la sezione fatta da un piano che divide per metà tutti gli apotemi.

6ª. Una piramide (o settore piramidale) dicesi *inscritta*, o *circoscritta*, ad un cono (o settore conico) rotondo, se ha lo stesso vertice, ed ha per base un poligono (o settore poligonale) inscritto, o circoscritto, alla base del cono (o settore conico).

7ª. Un tronco di piramide dicesi *inscritto*, o *circoscritto*, ad un tronco di cono, quando ha per basi due poligoni inscritti, o circoscritti, alle basi del tronco di cono.

È chiaro che, se una piramide è inscritta in un cono rotondo, gli spigoli laterali della piramide sono apotemi del cono; e, se una piramide regolare è circoscritta ad un cono rotondo, gli apotemi della piramide sono quegli apotemi del cono, lungo i quali le facce laterali sono tangenti alla superficie conica.

Altrettanto si dica per un tronco di piramide regolare inscritto, o circoscritto, ad un tronco di cono rotondo a basi parallele.

Corollari. — *1°. Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, una piramide (o settore piramidale) regolare ad un cono (o settore conico) rotondo, quando nella base di esso è possibile inscrivere, o circoscrivere, il poligono (o settore poligonale) base della piramide (o settore piramidale).*

2°. Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, in un tronco di cono a basi parallele un tronco di piramide regolare, quando nelle basi del tronco di cono è possibile inscrivere, o circoscrivere, i poligoni basi del tronco di piramide.

2. — SUPERFICIE CILINDRICA E CILINDRO.

264. Definizioni. — 1ª. Se il piano di due rette parallele compie un giro, rotando intorno ad una di esse, l'altra retta descrive una superficie, che si chiama *superficie cilindrica rotonda, o di rotazione.*

2ª. La retta mobile, in tutte le sue posizioni, si chiama *generatrice*, e la sua distanza dall'asse di rotazione si dice *raggio della superficie cilindrica.*

Teorema. *Una superficie cilindrica rotonda è il luogo dei punti, che hanno dall'asse una distanza eguale al raggio della medesima.*

Risulta evidente dalla definizione suesposta, che ogni punto di una superficie cilindrica rotonda ha dall'asse una distanza eguale al raggio della superficie medesima. Viceversa, se un punto P ha dall'asse di una superficie cilindrica rotonda una distanza eguale al raggio della superficie, quel punto deve appartenere alla superficie medesima, perchè quando il piano della generatrice e dell'asse sia venuto a passare per P, il punto P si deve trovare sulla generatrice.

Deriva inoltre da ciò che precede che una superficie cilindrica rotonda separa una parte dello spazio, i cui punti hanno dall'asse una distanza maggiore del raggio, da un'altra, i cui punti hanno dall'asse una distanza minore dal raggio.

In seguito a ciò si può asserire che una superficie cilindrica rotonda è una superficie completa.

Corollario. — *Se si taglia una superficie cilindrica rotonda con un piano che incontri tutte le generatrici, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie medesima.*

265. Teorema. — *Le sezioni normali di una superficie cilindrica rotonda sono circoli eguali.*

Infatti essi hanno tutti raggi eguali al raggio della superficie cilindrica.

266. Teorema. — *Un piano parallelo all'asse di una superficie cilindrica di rotazione:*

1° ha tutti i suoi punti esterni ad essa, se ha dall'asse una distanza maggiore del raggio;

2° ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se la sua distanza dall'asse è eguale al raggio;

3° ha in comune con essa tutti i punti di due generatrici, se la sua distanza dall'asse è minore del raggio.

Sia α un piano dato (Fig. 233) parallelo all'asse di una superficie cilindrica. Condotto un piano π normale alla superficie cilindrica, esso la taglia secondo un circolo c, avente per centro il punto O d'incontro del piano π coll'asse, e taglia il piano α secondo una retta a, avente dal centro O del circolo c una distanza eguale alla distanza del piano α dall'asse, ed è perciò esterna, tangente o secante del circolo c, secondo che la suddetta distanza è maggiore, eguale o minore del raggio. Ora, se il piano α ha un punto comune colla superficie cilindrica, esso contiene anche tutta la generatrice parallela all'asse, che passa per quel punto (§ 40, Cor. 1°), e quindi il piano α ha nessuna, una o due generatrici comuni colla superficie cilindrica data, secondo che la retta a ha nessuno, uno o due punti comuni col circolo c.

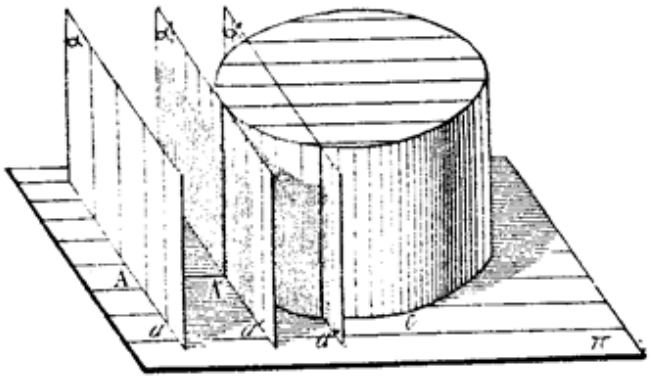

Fig. 233.

I teoremi inversi sono veri per la solita legge delle inverse esposta nei preliminari.

Corollari. — *1°. Una retta, non parallela ad una generatrice di una superficie cilindrica rotonda, può avere con la superficie nessuno, uno o due punti in comune.*

Infatti, condotto per la retta il piano parallelo all'asse, secondo che esso ha in comune colla superficie nessuna, una o due generatrici, la retta avrà in comune colla stessa nessuno, uno o due punti.

Definizioni. — 1ª. Un piano si dice *tangente*, o *secante* di una superficie cilindrica rotonda, secondochè ha in comune colla medesima una generatrice, o punti di due o più generatrici.

La generatrice, comune ad una superficie cilindrica rotonda e ad un suo piano tangente, si chiama *generatrice di contatto.*

2ª. Una retta, non parallela a una generatrice di una superficie cilindrica rotonda, si dice *tangente*, o *secante* di essa, secondo che ha in comune colla medesima uno, o due punti.

Corollario 2°. — *Per un punto di una superficie cilindrica rotonda passa uno, ed un solo, piano tangente.*

Esso è individuato dalla generatrice, che passa per quel punto, e dalla tangente alla sezione normale della superficie cilindrica nel punto medesimo.

3°. Per un punto, esterno ad una superficie cilindrica rotonda, e non compreso in essa, passano due piani tangenti alla medesima.

Infatti, condotto il piano normale alla superficie, che passa per quel punto, si potranno condurre dal punto due sole tangenti al circolo sezione. Ciascuno dei piani individuati da una di quelle tangenti e dalla generatrice, che passa per il punto di contatto, è tangente alla superficie; e questi due sono i soli piani tangenti, che passano per il punto dato.

4°. Per un punto di una superficie cilindrica rotonda passano infinite rette tangenti ad essa, il luogo delle quali è il piano tangente alla superficie in quel punto.

267. Teorema. — *Le infinite rette tangenti ad una sfera, condotte per i punti di un suo circolo massimo e perpendicolari al piano del medesimo, sono le generatrici di una superficie cilindrica rotonda, che ha per asse la retta perpendicolare al piano di quel circolo, condotta per il centro di esso.*

Infatti, condotti i circoli massimi perpendicolari a quello dato, le tangenti ad essi nei punti d'intersezione con questo sono tutte parallele al diametro comune ad essi.

Definizione. — Una superficie cilindrica rotonda ed una sfera si dicono *tangenti*, quando hanno in comune tutti e soli i punti di un circolo massimo, il quale si chiama *circolo di contatto*.

Corollario. — *Per un circolo massimo di una sfera passa una, ed una sola, superficie cilindrica rotonda tangente alla sfera.*

268. Sappiamo che, se si conduce un piano che incontri tutte le generatrici di una superficie cilindrica rotonda, tutti i punti della sezione così ottenuta sono compresi nella superficie cilindrica, per conseguenza (P. IV, 1°) due piani secanti una superficie cilindrica rotonda, e che si tagliano secondo una retta esterna alla superficie medesima, dividono la parte di spazio separata dalla superficie in tre parti.

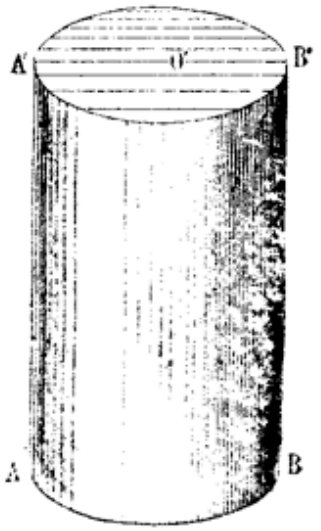

Fig. 234.

Definizioni. — 1ª. Il solido finito, limitato da una superficie cilindrica rotonda e da due piani paralleli che ne incontrano tutte le generatrici, si chiama *cilindro rotondo*. Esso si dice *obliquo*, se i piani secanti sono obliqui all'asse, *retto* se essi sono normali all'asse. Il cilindro rotondo e retto si dirà semplicemente *cilindro rotondo*.

2ª. Le superficie, limitate dalle sezioni suddette, si dicono *basi*; la loro distanza dicesi *altezza*, e i segmenti eguali di generatrici compresi fra le due basi si dicono *lati* del cilindro.

3ª. Chiamasi *superficie laterale* del cilindro la parte di superficie cilindrica limitata dalle due basi, e *superficie totale* la superficie formata dalle basi e dalla superficie laterale.

4ª. Chiamasi *tronco di cilindro* la parte di cilindro compresa tra il piano di una base ed un piano secante che incontra il primo secondo una retta esterna al cilindro.

5ª. Chiamasi *sezione principale* di un cilindro rotondo la sezione fatta da un piano, che passa per l'asse. Se la sezione principale di un cilindro rotondo è un quadrato, il cilindro si dice *equilatero*.

È chiaro che un cilindro rotondo può essere generato dalla rotazione di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

269. Due semipiani (Fig. 235) OO'A, OO'B, uscenti dall'asse OO' di un cilindro rotondo, dividono il cilindro e la sua superficie laterale in due parti. Ognuna delle due parti di superficie è terminata dai due lati AA', BB' e dagli archi AB, A'B', ed ognuna delle parti del cilindro è limitata dai rettangoli AOO'A', BOO'B' e dai settori circolari AOB, A'O'B' e da una parte della superficie cilindrica.

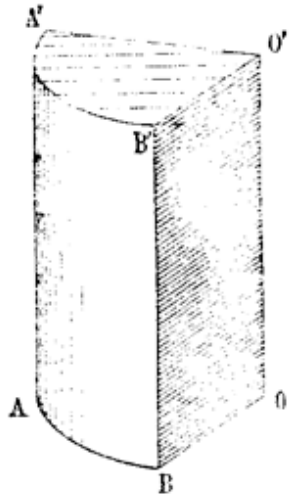

Fig. 235.

Definizioni. — 1ª. Chiamasi *striscia cilindrica*, ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un cilindro rotondo è divisa da due suoi lati (detti *lati* delle strisce).

2ª. Dicesi *settore cilindrico* ciascuna delle due parti, in cui un cilindro rotando resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al cilindro si dicono *facce* dei due settori.

Si possono estendere anche alle strisce cilindriche e settori cilindrici, appartenenti ad uno stesso cilindro o a cilindri eguali, le definizioni e le proprietà relative agli angoli e spicchi sferici; per conseguenza riteniamo che le strisce cilindriche e i settori cilindrici di uno stesso cilindro, o di cilindri eguali, costituiscano infinite altre classi di grandezze geometriche omogenee.

3ª. Un prisma (o settore prismatico) dicesi *inscritto*, o *circoscritto*, a un cilindro (o settore cilindrico) rotondo, se le sue basi sono inscritte, o circoscritte, alle basi del cilindro (o settore cilindrico).

È chiaro che, se un prisma è inscritto in un cilindro rotondo, gli spigoli laterali del prisma sono lati del cilindro; e, se un prisma è circoscritto ad un cilindro rotondo, le facce laterali del prisma sono tangenti alla superficie laterale del cilindro.

Corollario. — *Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, un prisma (o settore prismatico) regolare ad un cilindro (o settore cilindrico), quando nella base di esso è possibile inscrivere, o circoscrivere, il poligono (o settore poligonale) base del prisma (o settore prismatico).*

ESERCIZI

TEOREMI.

309. Se si divide una corda di circolo in tre parti eguali, i raggi, che passano per i punti di divisione, dividono l'arco sotteso in tre parti, delle quali le estreme sono eguali fra loro e minori della intermedia.

310. Se due corde eguali di un circolo si tagliano, i segmenti di una sono rispettivamente eguali ai segmenti dell'altra.

311. Per un punto A, esterno ad un cerchio di centro O, si conduca una secante ACD, la cui parte esterna AC sia uguale al raggio, e si conduca inoltre il diametro AOB. Dimostrare che l'angolo $\widehat{COA}$ è la terza parte dell'angolo $\widehat{DOB}$.

312. Sopra due lati AC, BC di un triangolo qualunque ABC si costruiscano i quadrati ACE, CBD. Dimostrare che le congiungenti AD, BE passano per uno stesso punto dell'altezza CF del triangolo.

313. Se due corde AB, CD di un circolo si tagliano, la somma AC + BD degli archi da esse compresi è eguale alla somma degli archi compresi dai due diametri paralleli a queste corde.

314. Essendo A, B, C tre punti qualunque di un circolo, D il punto medio dell'arco AB ed E il punto medio dell'arco AC, la retta DE incontra rispettivamente in F e in G le corde AB, AC. Dimostrare che AF = AG.

315. Essendo A un punto qualunque di un diametro di un circolo. B l'estremo del raggio perpendicolare ad esso, se si conduce BA, che incontra il circolo in P, poi la tangente nel punto P, che taglia il prolungamento del diametro nel punto C, si ha CA = CP.

316. Se A, B, C, A′, B′, C′ sono sei punti di un circolo, tali che le corde AB, AC siano rispettivamente parallele alle corde A′B′, A′C′ anche BC′ e CB′ sono parallele.

317. Due corde che s'incontrano sono eguali, se fanno angoli eguali col diametro che passa per la loro intersezione; e viceversa.

318. Se si conducono dalle estremità di un diametro le perpendicolari ad una secante di un circolo, le parti della secante, comprese fra le due perpendicolari ed il circolo, sono eguali.

319. Dato un angolo BAC, si faccia passare per A e per un punto fisso D della bisettrice un circolo che tagli i lati nei punti B, C. La somma AB + AC è costante qualunque sia il circolo considerato.

320. Se due circoli c e c' sono tangenti internamente nel punto A, e BC è una corda del circolo maggiore tangente in D al circolo minore, la semiretta AD è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$.

321. Se due circoli sono tangenti internamente, fra tutte le corde del circolo maggiore tangenti al minore la massima è quella che è parallela alla tangente comune ai due circoli.

322. Il segmento tangente ad un circolo, e compreso fra due tangenti parallele, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha il vertice nel centro del circolo.

323. I circoli che hanno per centri i tre vertici di un triangolo, e passano per i punti di contatto del circolo inscritto sono tangenti due a due.

324. Facendo centro in un punto di un circolo c si descriva un circolo c', che tagli c in due punti A, B, e per uno di questi punti B si tracci una retta che tagli c in un punto M e c' in un punto N. I segmenti AM, MN sono eguali.

325. Se due sfere sono tangenti in un punto A, e BB', CC', DD' sono tre secanti che passano per A, i piani BCD, B'C'D' sono paralleli.

326. Se due circoli (o due sfere) sono tangenti, le congiungenti gli estremi di due diametri paralleli passano per il punto di contatto.

327. Se due circoli (o due sfere) sono tangenti in un punto A, le rette (o piani) tangenti nei punti d'incontro con una secante condotta per A sono parallele.

328. Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e si conducono i diametri AB, AB', che passano per un punto comune A, il segmento BB' passa per un altro punto d'intersezione, ed è eguale al doppio della distanza dei centri.

329. I tre circoli, che passano per due vertici di un triangolo e per il punto d'incontro delle altezze, sono eguali.

330. Se una corda di un circolo è divisa per metà da un'altra, e si prolunga la prima fino ad incontrare le tangenti al circolo condotte per gli estremi della seconda, i segmenti, esterni al cerchio e compresi fra il circolo e le due tangenti, sono eguali.

331. Se due circoli si tagliano in due punti A, B, e CC' è una secante mobile attorno al punto A; 1° l'angolo $\widehat{CBC'}$ è costante; 2° l'angolo delle tangenti in C e C' è pure costante.

332. Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e per due punti comuni si conducono due rette parallele, i segmenti di esse compresi tra i due circoli (o tra le due sfere) sono eguali.

333. Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e per i centri si conducono le perpendicolari ad una secante condotta per un punto comune, la distanza delle due perpendicolari è eguale alla semisomma o alla semidifferenza delle corde intercettate su quella secante dai due circoli (o sfere).

334. Se due circoli si tagliano, e BB', CC' sono due secanti condotte per uno dei punti comuni, l'angolo delle rette BC, B'C' è costante.

335. Due circoli sono tangenti internamente in un punto A. Se per il punto B, opposto ad A nel circolo esterno, si conduce una tangente all'altro circolo, che lo tocchi nel punto C e incontri il primo in un altro punto D, la semiretta AC è bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$.

336. Se un triangolo inscritto in un circolo varia comunque, restando costante un suo angolo, il lato opposto resta tangente ad un circolo concentrico al primo.

337. Tutti i circoli, che passano per due punti, tagliano due rette condotte per questi punti in coppie di punti tali che le loro congiungenti sono parallele.

338. Le bisettrici di tutti gli angoli eguali, i cui lati passano per due medesimi punti, passano tutte per uno stesso punto.

339. Il raggio del circolo exinscritto ad un triangolo rettangolo e tangente alla ipotenusa è eguale alla somma dei raggi degli altri due circoli exinscritti e del raggio del circolo inscritto.

340. Se un circolo tangente alle quattro rette di un quadrangolo è esterno ad esso, la differenza di due lati opposti del quadrangolo è eguale alla differenza degli altri due.

341. Se in un quadrangolo la differenza di due lati opposti è eguale alla differenza degli altri due, esiste un circolo tangente alle quattro rette del quadrangolo ed esterno ad esso.

342. Se un quadrilatero ha due angoli opposti retti, le proiezioni dei lati opposti sulla retta, che passa per i vertici degli angoli retti, sono eguali.

343. L'altezza di un triangolo regolare è il lato di un triangolo regolare inscritto nel circolo, che ha per diametro un lato del triangolo dato.

344. In ogni triangolo rettangolo, il diametro del circolo inscritto è eguale all'eccesso della somma dei due cateti sull'ipotenusa.

345. Se ABC è un triangolo inscritto nel circolo di centro O e D è il punto medio dell'arco compreso nell'angolo $\widehat{BAC}$, l'angolo $\widehat{ODA}$ è eguale alla semidifferenza degli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del triangolo.

346. La bisettrice di un angolo interno di un triangolo incontra il circolo circoscritto al triangolo in un punto equidistante dagli altri due vertici del triangolo.

347. In ogni triangolo, la distanza di un lato dal centro del circolo circoscritto, è la metà della distanza del vertice opposto dal punto di concorso delle altezze.

348. Il circolo che ha per diametro il segmento di tangente, comune a due circoli tangenti dati, e che ha per estremi i punti di contatto, passa per il punto di tangenza dei due circoli ed è tangente alla retta dei centri dei circoli medesimi.

349. Se un lato di un triangolo è diviso per metà da un diametro del circolo circoscritto, e da una estremità di questo diametro si conduce una perpendicolare sul lato maggiore, questa dividerà il lato stesso in due parti, una delle quali è eguale alla semisomma e l'altra alla semidifferenza degli altri due lati.

350. I raggi del circolo circoscritto ad un triangolo, che passano per i vertici di questo, sono rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze del primo.

351. I tre vertici di un triangolo e le sue tre altezze dividono il circolo circoscritto al triangolo in 6 archi, due a due eguali fra loro.

352. Il prolungamento di un'altezza di un triangolo incontra il circolo circoscritto in un punto, che è simmetrico del punto d'incontro delle tre altezze rispetto al lato, su cui cade l'altezza considerata.

353. I prolungamenti delle tre altezze di un triangolo incontrano il circolo circoscritto in tre punti, che sono i vertici di un triangolo, le cui bisettrici coincidono coll'altezze del triangolo dato.

354. La bisettrice di un angolo interno di un triangolo incontra il circolo circoscritto in un punto tale, che se si conduce da esso una corda parallela ad un lato dell'angolo, questa è uguale all'altro lato.

355. La bisettrice di un angolo interno di un triangolo è anche bisettrice dell'angolo compreso dall'altezza e dal raggio del circolo circoscritto, che terminano allo stesso vertice.

356. Se per il punto medio A di un arco BC di un circolo si tirano due corde qualunque AD, AE, che incontrano la corda BC nei punti F, G, il quadrangolo DFGE è inscrittibile in un circolo.

357. Le bisettrici degli angoli di un quadrangolo formano un quadrilatero inscrittibile in un circolo. Considerare ciò che diventa questo quadrangolo secondo i varii casi che si possono dare per il primo.

358. Se dalle estremità di ciascuno di due lati opposti di un quadrangolo inscritto in un circolo si conducono delle perpendicolari sul lato opposto, i quattro punti d'intersezione delle perpendicolari coi due lati sono vertici di un nuovo quadrangolo inscrittibile.

359. I punti d'incontro delle altezze dei quattro triangoli determinati dai vertici di un quadrangolo inscritto in un circolo, presi tre a tre, sono vertici di un nuovo quadrangolo eguale al dato.

360. Se le diagonali di un quadrangolo sono perpendicolari, i punti medii dei lati sono sopra un circolo.

361. Se un quadrangolo inscrittibile in un circolo ha le diagonali perpendicolari:

1° il quadrilatero, che ha per vertici le proiezioni del punto d'incontro

delle diagonali sui lati del quadrangolo dato è insieme inscrivibile e circoscrivibile;

2° il circolo, che passa per le quattro proiezioni suddette, passa anche per i punti medii dei lati del quadrangolo dato.

362. Se sopra i lati di un triangolo qualunque ABC si costruiscono esteriormente ad esso tre triangoli equilateri ABC′, BCA′, CAB′, i tre segmenti AA′, BB′, CC′ sono eguali, e s'incontrano in un punto O, dal quale i lati del triangolo dato sono visti sotto angoli eguali.

363. In ogni triangolo, i punti medii dei lati, i piedi dell'altezze e i punti medii dei segmenti dell'altezze compresi tra il vertice e il loro punto d'incontro, giacciono sopra uno stesso circolo (detto circolo dei nove punti).

364. Il centro del circolo dei nove punti divide per metà il segmento che unisce il punto d'incontro dell'altezze col centro del circolo circoscritto.

365. Il raggio del circolo dei nove punti è la metà del raggio del circolo circoscritto.

366. Un triangolo dato e i tre triangoli che hanno per base uno dei lati del primo triangolo e per vertice il punto d'incontro delle altezze di questo stesso triangolo, hanno lo stesso circolo dei nove punti.

367. I sei punti medii dei segmenti che si ottengono congiungendo due a due i centri dei circoli inscritto ed exinscritti ad un triangolo sono situati sopra un circolo, che passa anche per i vertici del triangolo.

368. La somma dei raggi dei tre circoli exinscritti ad un triangolo è eguale al raggio del circolo inscritto, aumentato di quattro volte il raggio del circolo circoscritto.

369. Il centro del circolo inscritto, quello del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle perpendicolari condotte dai centri dei circoli exinscritti sui lati di un triangolo sono in linea retta; e il centro del circolo circoscritto è equidistante dagli altri due punti.

370. Le perpendicolari, condotte dai centri dei circoli exinscritti sui lati di un triangolo, passano per uno stesso punto.

371. Dati tre circoli in un piano, se per un punto del piano passano tre tangenti interne comuni ai circoli, presi due a due, le altre tre tangenti comuni passano pure per un medesimo punto.

372. Le proiezioni di un vertice di un triangolo sulle bisettrici degli angoli interni ed esterni, che hanno i vertici negli altri due vertici del triangolo, sono in linea retta.

373. Se una figura piana si sposta in un modo qualunque nel suo piano, essa può essere condotta da una posizione F ad una posizione F′ mediante una rotazione attorno ad un punto conveniente del piano.

374. Se due poligoni di $2n$ lati inscritti in uno, o in due circoli, hanno $2n-1$ coppie di lati rispettivamente paralleli, anche i rimanenti lati sono paralleli.

375. Quando un poligono di $2n+1$ lati è costantemente inscritto in un circolo, e $2n$ lati si muovono restando paralleli a sè stessi, l'altro lato rimane di grandezza costante.

376. Se un parallelogrammo si sposta in un piano, in modo che due lati consecutivi passino per due punti fissi, anche la diagonale concorrente con quei due lati passa per un punto fisso.

377. Il circolo, che ha il centro nel punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ed ha per diametro la somma dei cateti, è tangente ai due circoli, che hanno per diametri i cateti.

378. Se un circolo ha per diametro il raggio di un altro, tutte le corde del circolo di raggio maggiore, condotte per il punto comune ai due circoli, sono divise per metà dall'altro circolo.

379. Se per i vertici di un triangolo si fanno passare tre circoli che si taglino due a due sui lati del medesimo, le tre circonferenze passano per un punto.

380. Date in un piano quattro rette, si possono formare con esse quattro

triangoli. I circoli ad essi circoscritti passano per un punto. I centri di questi circoli e il loro punto comune sono sopra uno stesso circolo.

381. Dati cinque piani tali che quattro di essi non abbiano un punto comune si possono con essi formare cinque tetraedri. Le sfere circoscritte a questi tetraedri passano a quattro a quattro per cinque punti situati rispettivamente sui cinque piani dati, e ognuna di esse è circoscritta a uno dei tetraedri, che si possono formare con questi cinque punti.

382. Con quattro rette si possono formare quattro triangoli. I centri dei quattro circoli inscritti in essi sono sopra una stessa circonferenza.

383. Sui lati di un quadrangolo inscritto, presi come diametri, si descrivano quattro circoli. Ognuno di questi taglia il successivo in un punto fuori di un vertice, e i quattro punti così ottenuti sono sopra un circolo.

384. Le diagonali di un pentagono regolare sono le rette di un altro pentagono regolare.

385. Se i vertici di un esagono regolare inscritto in un circolo sono vertici di due triangoli regolari, ciascun lato di un triangolo è diviso dai lati dell'altro in tre parti eguali.

386. In ogni poligono inscritto di un numero pari di lati la somma degli angoli di posto pari è eguale alla somma dei lati di posto dispari.

387. Se A, B, C, D, E sono i vertici successivi di un pentagono regolare, ed M è un punto dell'arco AB del circolo circoscritto, si ha

$$MA + MB + MD \equiv MC + ME.$$

388. Se ABC è un triangolo equilatero, D, E, F i punti medi dei lati AC, BC, AB la congiungente DF risulta tangente al circolo, che passa per i punti C, D, E.

389. Se un raggio di un circolo è diametro di un altro circolo, e dal centro del primo si tirano due raggi, che taglino il secondo, la corda dell'arco del circolo di raggio minore, compreso tra questi due raggi, è eguale al segmento di perpendicolare condotta dall'estremo di uno dei due raggi sull'altro.

390. Se due circoli sono tangenti, e si tirano due secanti per il loro punto di contatto, le corde degli archi compresi fra le due secanti sono parallele.

391. I quattro centri dei circoli, ciascuno dei quali è tangente ad un lato di uno stesso quadrangolo e ai prolungamenti dei due lati consecutivi, sono vertici di un quadrangolo inscrittibile in un circolo.

392. Se quattro circoli sono tali che ciascuno passi per due vertici successivi di un quadrangolo inscritto in un circolo, gli altri quattro punti, nei quali ciascun circolo incontra il seguente, sono vertici di un quadrangolo inscrittibile in un circolo.

393. In ogni quadrilatero inscrittibile in un circolo, le bisettrici degli angoli formati dalle coppie di lati opposti sono parallele alle bisettrici degli angoli formati dalle diagonali.

394. Dato un quadrilatero inscritto in un cerchio, ogni coppia di lati opposti è tagliata da una delle bisettrici degli angoli formati dagli altri due lati. Si hanno così 4 punti che sono vertici, di una losanga inscritta nel quadrilatero.

395. I cinque circoli circoscritti ai triangoli formati da ciascun lato di un pentagono coi prolungamenti dei due lati consecutivi s'incontrano in cinque altri punti, oltre i vertici, che giacciono sopra uno stesso circolo.

396. I circoli aventi per diametri tre corde di un circolo, condotte per uno stesso suo punto, s'incontrano in altri tre punti situati in linea retta.

397. Due diagonali di un pentagono regolare, non uscenti dallo stesso vertice, si dividono a vicenda in due segmenti, il maggiore dei quali è eguale al lato del pentagono.

398. In ogni triangolo la somma dei raggi dei circoli inscritto e circoscritto è eguale alla somma delle distanze del centro del circolo circoscritto dai lati.

399. Se si unisce un punto qualunque del circolo circoscritto ad un triangolo coi tre vertici, si ottengono tre segmenti, uno dei quali è eguale alla somma degli altri due.

400. In ogni triangolo la perpendicolare a un lato sul suo punto medio incontra la bisettrice dell'angolo opposto e la bisettrice dell'angolo esterno opposto in punti appartenenti al circolo circoscritto al triangolo.

401. Un esaedro è inscrittibile in una sfera quando le sue facce sono quadrilateri inscrittibili.

402. Se gli spigoli opposti di un ottaedro inscritto in una sfera giacciono in un medesimo piano, le tre diagonali dell'ottaedro si tagliano in un punto, e i piani tangenti alla sfera nei vertici dell'ottaedro formano un esaedro circoscritto, le cui facce, prese quattro a quattro, passano per uno stesso punto.

403. I punti medii degli spigoli di un tetraedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare.

404. I punti medii degli spigoli di un tetraedro qualunque sono vertici di un ottaedro, i cui spigoli opposti sono eguali e paralleli.

405. I centri delle facce di un esaedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare.

406. I punti medii di sei spigoli consecutivi di un cubo, tali che tre non sieno in una faccia, sono vertici di un esagono regolare.

407. Se per il punto di mezzo della congiungente i centri di due sfere inscritte in un tetraedro si conducono le perpendicolari alle facce del tetraedro, i loro piedi sono in un piano.

408. Se su ciascuno spigolo di un tetraedro si prende un punto, e per ciascun vertice e per i tre punti, che giacciono sugli spigoli del triedro corrispondente, si fa passare una sfera, si ottengono quattro sfere, che s'intersecano in un punto.

409. Se le quattro diagonali di un esaedro si tagliano in un punto, le tre rette, che congiungono due a due i punti di concorso delle diagonali delle facce opposte, si tagliano nello stesso punto.

410. L'asse radicale di due circoli, che passano per due coppie di punti situati sopra una retta, incontra questa retta in un punto fisso.

411. Il piano radicale di due sfere, che passano per due circoli di un piano, taglia questo piano secondo una retta fissa.

412. L'asse radicale di tre sfere, che passano per tre circoli di un piano, incontra questo piano in un punto fisso.

413. Un piano taglia un fascio di superficie sferiche secondo un fascio di circoli. Caso di impossibilità.

414. Le superficie sferiche (o i circoli) di un connesso, i cui centri giacciono in linea retta, formano un fascio.

415. Le superficie sferiche di un complesso i cui centri sono in linea retta formano un fascio.

416. Le superficie sferiche di un complesso aventi i centri in un piano formano un connesso.

417. Due complessi di superficie sferiche hanno in comune tutte le superficie sferiche di un connesso. Tre complessi di superficie sferiche hanno in comune tutte le superficie sferiche di un fascio. Quattro complessi di superficie sferiche hanno in comune una superficie sferica.

418. Due connessi di circoli (o superficie sferiche) hanno in comune tutti i circoli di un fascio. Tre connessi hanno in comune un circolo.

419. Due fasci qualunque di superficie sferiche (o circoli) contenuti in un connesso hanno una sfera comune.

420. Tutte le superficie sferiche di un connesso, i cui centri sono equidistanti dall'asse radicale, hanno raggi eguali.

421. Due superficie coniche di rotazione, aventi l'asse in comune e i vertici distinti, si tagliano secondo uno o due circoli.

422. Per due circoli qualunque di una superficie cilindrica rotonda di rotazione passa anche una superficie conica rotonda e una superficie sferica.

423. Per due circoli qualunque di una superficie conica rotonda passa anche un'altra superficie conica o cilindrica rotonda ed una superficie sferica.

424. Per due circoli di una superficie sferica passano due superficie coniche, oppure una superficie conica ed una cilindrica rotonde, solamente nel caso che i due circoli sieno in piani paralleli.

425. A quale condizione si può inscrivere un cilindro in un prisma quadrangolare?

426. A quale condizione si può circoscrivere un cilindro rotondo ad un prisma quadrangolare?

LUOGHI GEOMETRICI.

427. Trovare il luogo del punto medio del segmento, che unisce i punti medii di due lati AB, AC di un triangolo ABC, i cui vertici B e C sono fissi, e l'angolo $\widehat{A}$ è costante.

428. Trovare il luogo dei centri dei circoli inscritti nei triangoli, aventi un lato comune ed eguale l'angolo opposto a questo lato.

429. I vertici A, B di un triangolo ABC scorrono lungo due rette fisse OX, OY, l'angolo delle quali è supplementare dell'angolo $\widehat{C}$ del triangolo. Trovare il luogo del terzo vertice.

430. Da un punto qualunque di un dato circolo si conduca la perpendicolare a un diametro fisso e il raggio, sul quale si prenda, a partire dal centro, un segmento eguale alla perpendicolare. Trovare il luogo dell'estremo di questo segmento.

431. Le cose restando come nell'esercizio precedente, si prenda sul raggio, a partire dal centro, un segmento eguale alla distanza del centro dalla perpendicolare, e si determini il luogo dell'estremo di questo segmento.

432. Qual'è il luogo del vertice C dei triangoli sferici, che hanno un lato AB in comune, e la somma degli altri due lati è un semicircolo massimo?

433. Trovare il luogo percorso dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo dato, quando gli estremi della ipotenusa scorrono lungo due rette perpendicolari.

434. Il vertice C dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si muove sul circolo circoscritto al triangolo e l'ipotenusa AB rimane fissa; prendendo sul prolungamento del cateto BC un segmento $CD \equiv BC$, ed unendo D col centro O del circolo, si domanda il luogo del punto d'incontro di OD con AC.

435. Essendo AB un diametro fisso di un cerchio dato e CD una corda parallela a questo diametro, se si conducono CB e DA, che si tagliano in M, poi CA e CB, che s'incontrano in N, trovare il luogo dei punti M ed N, quando la corda CD si sposta parallelamente a sè stessa.

436. Qual'è il luogo dei centri delle circonferenze dello stesso raggio che dividono una circonferenza data in due parti eguali?

437. Qual è il luogo dei punti medii delle corde di un circolo, che passano per uno stesso punto, oppure i cui prolungamenti passano per uno stesso punto?

438. Se in un circolo, da un estremo A di un diametro fisso, si tira una corda AC, e sul prolungamento di essa si prende un segmento CM eguale alla distanza CB, trovare il luogo dei punti M.

439. Dato un triangolo equilatero, qual'è il luogo dei punti, tali che la somma delle distanze da due vertici del triangolo sia eguale alla distanza dal terzo vertice?

440. Il luogo dei punti di contatto di un piano con le sfere ad esso tangenti, che passano per un punto, è un circolo o una retta.

441. Trovare il luogo dei punti di un piano tali che le due tangenti condotte da essi ad un circolo formino un angolo eguale ad un angolo dato.

442. Trovare il luogo delle proiezioni di un punto sulle rette di un piano (o dello spazio) uscenti da un altro punto.

443. Il luogo dei punti di contatto di una sfera con le sfere ad essa tangenti, che passano per due punti dati, è un circolo.

444. Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre piani comunque situati nello spazio.

445. Trovare il luogo del punto d'incontro delle altezze dei triangoli, che hanno un lato comune ed hanno eguali gli angoli opposti a questo lato.

446. Trovare il luogo dei punti, tali che, se si abbassano da ciascuno di essi le perpendicolari sui tre lati di un triangolo dato, i piedi di queste perpendicolari sieno in linea retta.

447. Trovare il luogo dei centri dei circoli, che hanno un dato raggio, e tagliano sotto un angolo dato un circolo dato.

448. Trovare il luogo dei centri dei circoli, che hanno un dato raggio, e tagliano un circolo dato, in modo che la corda comune sia eguale a un segmento dato.

449. Da un punto qualunque dei prolungamenti di un diametro di un circolo si conduca una tangente e la bisettrice dell'angolo così formato. Trovare il luogo del punto, in cui la bisettrice è incontrata dalla perpendicolare condotta ad essa dal centro.

450. Trovare il luogo dei punti d'incontro dei circoli circoscritti ai triangoli formati dalle rette di un triangolo con un'altra retta qualunque del piano.

451. Due rette a e b si tagliano, ed un segmento AB ha gli estremi sopra le due rette. Sia M il punto d'incontro delle perpendicolari alle rette a e b condotte rispettivamente dai punti A, B, e sia N il punto d'incontro delle perpendicolari alle rette b ed a condotte dagli stessi punti; trovare il luogo dei punti M ed N.

452. Per un punto A si conduce una retta, che taglia un circolo dato in due punti B, D; qual'è il luogo del punto d'incontro M dei circoli tangenti al circolo dato, che passano rispettivamente per le coppie di punti A, B; A, D?

453. Qual'è il luogo del punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo quando il triangolo rota attorno al vertice dell'angolo retto, e gli altri due vertici descrivono due circoli dati?

454. Trovare il luogo dei punti, tali che le tangenti condotte da essi ad un circolo dato sieno eguali ad un dato segmento.

455. Dati due circoli concentrici, trovare il luogo del vertice di un angolo retto, i cui lati sono tangenti rispettivamente ai due circoli dati.

456. Un angolo è inscritto in un circolo; trovare il luogo del punto medio della corda che sottende l'arco, su cui insiste l'angolo dato, quando esso si sposta, in modo che il vertice percorra la circonferenza.

457. Se un circolo gira intorno ad uno dei suoi punti, e in ogni posizione si conducono le tangenti parallele ad una retta, trovare il luogo dei punti di contatto.

458. Trovare il luogo descritto dal baricentro di un triangolo rettangolo, che si muove in modo che l'ipotenusa abbia gli estremi sopra due rette perpendicolari.

459. Dato un circolo di centro O ed un punto A compreso in esso, si conduca una secante BAC, e per le coppie di punti A, B; A, C si facciano passare due circoli tangenti al primo; trovare il luogo del loro punto d'incontro M.

460. Sui lati di un angolo $\widehat{BAC}$ sono dati due punti B,C a disuguali distanze dal vertice A; si descrivono due circoli tangenti fra loro, di cui uno è tangente ad AB nel punto B e l'altro è tangente ad AC nel punto C. Trovare il luogo del punto di contatto dei due circoli.

461. Sopra due rette perpendicolari, a partire dal loro punto d'incontro, si prendano due segmenti OA, OB, la cui somma sia eguale ad un segmento dato; trovare il luogo dei punti, in cui il circolo circoscritto al triangolo AOB è incontrato dalla retta OM, condotta per il vertice O parallelamente alla retta AB.

462. Trovare il luogo del punto di incontro delle diagonali dei parallelogrammi aventi i vertici sui lati di un quadrilatero gobbo.

463. Qual'è il luogo dei baricentri delle sezioni triangolari di un tetraedro?

464. Qual'è il luogo dei centri dei parallelogrammi sezioni di un tetraedro con un piano?

465. Qual'è il luogo dei punti, che hanno date distanze da due parallele date?

466. Qual'è il luogo dei centri dei circoli sopra una sfera, i cui piani passano per un medesimo punto?

467. Qual'è il luogo dei centri dei circoli sopra una sfera, i cui piani passano per una medesima retta?

468. Qual'è il luogo dei punti, che hanno date distanze da un punto e da un piano dati?

469. Qual'è il luogo delle rette, che passano per un punto e fanno con un piano un angolo dato?

470. Qual'è il luogo delle rette, che passano per un punto e sono perpendicolari ai piani tangenti di una superficie conica rotonda?

471. Qual'è il luogo dei punti, che hanno distanze date da due punti dati?

PROBLEMI.

472. Descrivere un circolo tangente a due rette date, e che passa per un punto di una di esse.

473. Descrivere un circolo di dato raggio, che passi per un punto dato, e sia tangente ad una retta data.

474. Descrivere un circolo di dato raggio tangente a due rette date.

475. Costruire una sfera di dato raggio tangente a un piano dato, e che passi per due punti dati.

476. Descrivere un circolo, che passi per due punti dati, e sia tangente ad una retta data.

477. Descrivere una sfera, che passi per tre punti dati, e sia tangente ad un piano dato.

478. Descrivere un circolo, che passi per un punto dato, e sia tangente a due rette date.

479. Descrivere una sfera, che passi per due punti dati, e sia tangente a due piani dati.

480. Dati due circoli in un piano, trovare un punto del medesimo piano tale, che gli angoli formati dalle coppie di tangenti, da esso condotte ai due circoli, sieno eguali a due angoli dati.

481. Descrivere una sfera, che passi per un punto dato, e sia tangente a tre piani dati.

482. Descrivere un circolo che passi per due punti dati, e sia tangente a un circolo dato.

483. Descrivere una sfera, che passi per tre punti dati, e sia tangente a una sfera data.

484. Descrivere un circolo di dato raggio, che divida in due parti eguali due altri circoli dati in un piano.

485. Descrivere una sfera di dato raggio, che divida in due parti eguali tre superficie sferiche date.

486. Descrivere un circolo tangente ad un circolo dato e ad una retta in un suo punto dato.

487. Costruire una sfera di dato raggio tangente a una sfera data, e che passi per due punti dati.

488. Descrivere un circolo tangente ad una retta data e ad un circolo in un suo punto dato.

489. Descrivere un circolo, che passi per un punto dato, e sia tangente ad un circolo dato in un suo punto.

490. Descrivere un circolo tangente a due circoli dati, e che passi per un punto dato di uno di essi.

491. Costruire una sfera di dato raggio tangente a una sfera e ad un piano dato, e che passi per un punto dato.

492. Condurre una tangente ad un circolo, che faccia un angolo dato con una retta data.

493. Descrivere una sfera di dato raggio, che passi per un punto dato, e sia tangente a due piani dati.

494. Descrivere un circolo tangente a due rette parallele, che passi per un punto dato della striscia.

495. Descrivere un circolo, che passi per due punti dati, ed abbia il centro su di un circolo dato.

496. Descrivere un circolo tangente a tre circoli eguali dati e tangenti fra loro.

497. Descrivere un circolo, che sia equidistante da quattro punti dati.

498. Descrivere un circolo, che abbia un dato raggio, o passi per un punto dato, e sia equidistante da tre punti dati.

499. Descrivere un circolo di dato raggio, che determini sopra due rette date corde eguali a due segmenti dati.

500. Descrivere un circolo tangente ad una retta, o ad una circonferenza data, e che determini su due rette parallele date corde eguali a segmenti dati.

501. Descrivere un circolo, che passi per due punti dati, e che tagli un circolo dato in modo che la corda comune sia parallela ad una retta data.

502. Descrivere un circolo, che passi per un vertice e sia tangente a due lati di un quadrato dato.

503. Dati in un piano un circolo ed una retta, condurre una tangente al circolo, in modo che il segmento di essa, che ha per estremi il punto di contatto ed un punto della retta, sia eguale ad un segmento dato.

504. Descrivere un circolo tangente a due rette date, e che abbia il centro su di una linea data.

505. Per un punto comune a due circoli dati in un piano condurre una secante, in modo che il segmento, che ha per estremi gli altri due punti ove essa incontra i due circoli, rimanga diviso per metà in quel punto.

506. Descrivere una sfera di dato raggio che passi per un punto dato, e sia tangente a due sfere date.

507. Descrivere una sfera di dato raggio tangente a tre piani dati.

508. Descrivere una sfera di dato raggio tangente a tre sfere date.

509. Descrivere una sfera di dato raggio tangente a due piani e ad una sfera data.

510. Descrivere con raggi dati due circoli tangenti fra loro e tangenti ad una retta data.

511. Per un punto comune a due circoli dati in un piano condurre una secante, in modo che la somma, o la differenza, dei segmenti che terminano al punto dato e agli altri due punti, ove la retta incontra i due circoli, sia eguale ad un segmento dato.

512. Descrivere una sfera di dato raggio tangente ad un piano e a due sfere date.

513. In un circolo dato inscrivere un angolo eguale ad un angolo dato, e i cui lati passino per due punti dati.

514. Data una sfera, un piano ed un segmento, costruire la sfera, che abbia per raggio il segmento dato, ed abbia colla sfera data per piano radicale il piano dato.

515. In un circolo dato inscrivere un angolo eguale ad un angolo dato, un

lato del quale passi per un punto dato, mentre l'altro lato è parallelo, o fa un angolo dato con una retta data.

516. Inscrivere un trapezio in un circolo, data l'altezza e la somma, o la differenza, delle basi.

517. Da un punto dato nel piano di un circolo condurre una secante al circolo, in modo che la somma, o la differenza, dei segmenti, che terminano a quel punto e ai punti, ove la secante incontra il circolo, sia eguale ad un segmento dato.

518. Sopra un arco di circolo trovare un punto, tale che la somma, o la differenza, delle sue distanze dagli estremi dell'arco sia eguale ad un segmento dato.

519. Condurre una corda in un circolo, che sia eguale ad un segmento dato, e resti divisa per metà da una retta, o circonferenza, data.

520. Condurre una corda in un circolo, che sia eguale ad un segmento dato, e sia parallela ad una retta data, o faccia con essa un angolo dato.

521. Inscrivere in un circolo un trapezio, dati due vertici e la somma, o la differenza, delle basi.

522. Date in un piano due circonferenze esterne l'una all'altra ed una retta, condurre una secante comune parallela alla retta data, ed in modo che la somma delle corde intercette sia eguale ad un segmento dato.

523. Dato un punto sopra un circolo ed una corda, condurre dal punto un'altra corda che sia divisa dalla prima per metà.

524. Per un punto dato condurre una retta, in modo che nel triangolo formato da essa con altre due rette date, l'eccesso della somma di due lati sul terzo sia eguale ad un segmento dato.

525. Dati due punti A e B sopra un circolo e un diametro fisso EF, trovare sul circolo un punto C, tale che le corde CA, CB determinino sul diametro un segmento MN eguale ad un segmento dato.

526. Da un punto dato esterno ad un cerchio condurre una secante, in modo che la parte esterna sia eguale alla parte interna al cerchio.

527. Dati due punti A, B sopra un circolo e un diametro fisso EF, trovare sul circolo un punto C, tale che le corde CA, CB determinino sul diametro dato, a partire dal centro O, due segmenti OM, ON eguali.

528. Per un punto dato condurre una secante ad un circolo, in modo che la somma delle distanze dei punti d'intersezione da una retta data sia eguale ad un dato segmento.

529. Dati due circoli in un piano, condurre una secante comune, in modo che la corda intercetta nel primo circolo sia eguale ad un segmento dato, e che la corda intercetta nel secondo sia pure eguale ad un altro segmento dato.

530. Date due rette parallele ed un punto interno alla striscia, descrivere un circolo che passi per quel punto, sia tangente ad una delle rette, e determini sull'altra un segmento eguale ad un segmento dato.

531. Dati un angolo e due segmenti a ed a', determinare sopra uno dei lati dell'angolo un punto tale che la circonferenza, descritta da questo punto, come centro, e con raggio a, intercetti sull'altro lato dell'angolo un segmento eguale ad a'.

532. Per un punto dato condurre una secante ad un circolo, in modo che la corda intercettata sia eguale ad un segmento dato.

533. Dato un punto nel piano di un circolo, descrivere un nuovo circolo col centro in quel punto, in modo che il segmento di tangente esterna comune sia eguale ad un segmento dato.

534. Tagliare i tre lati di un triangolo con una secante LMN in modo che sia $LM = MN = a$.

535. In un dato triangolo inscrivere un nuovo triangolo eguale ad un triangolo dato.

536. Costruire un triangolo, dato un lato, l'altezza e la mediana corrispondenti.

537. Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato e un'altezza.

538. Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato e il raggio di uno dei quattro circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

539. Costruire un triangolo dati due angoli e il raggio di un circolo tangente alle tre rette del triangolo.

540. Costruire un triangolo dato un lato, la somma o la differenza degli altri due e il raggio di un circolo tangente alle tre rette del triangolo.

541. Costruire un triangolo, dato un angolo, la bisettrice corrispondente ed un'altezza.

542. Costruire un triangolo, conoscendo i punti medii di due lati e l'estremo di un'altezza.

543. Costruire un triangolo, dato un angolo, l'altezza corrispondente e il raggio del circolo inscritto.

544. Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza ed il perimetro.

545. Costruire un triangolo, dato un angolo e i raggi di due circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

546. Costruire un triangolo, dato il perimetro e i raggi di due circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

547. Costruire un triangolo, dato il perimetro, la bisettrice di un angolo ed il raggio del circolo exinscritto compreso in quell'angolo.

548. Costruire un triangolo, dato un lato, un'altezza e il raggio del circolo circoscritto.

549. Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e il raggio del circolo circoscritto.

550. Costruire un triangolo, dato il perimetro, un angolo e il raggio del circolo circoscritto.

551. Costruire un triangolo, dati due angoli e il raggio del circolo circoscritto.

552. Costruire un triangolo, dati due lati e il raggio del circolo circoscritto.

553. Costruire un triangolo, dato un angolo, una mediana e il raggio del circolo circoscritto.

554. Costruire un triangolo, dato un lato, una mediana e il raggio del circolo circoscritto.

555. Costruire un triangolo, dato il perimetro, un lato e il raggio del circolo circoscritto.

556. Costruire un triangolo, dato un angolo, il lato opposto e l'altezza corrispondente a questo lato.

557. Costruire un triangolo, dato un lato, la somma o la differenza degli altri due e il raggio del circolo circoscritto.

558. Costruire un triangolo, data l'altezza e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice e il raggio del circolo circoscritto.

559. Costruire un triangolo, dati due lati ed un'altezza.

560. Costruire un triangolo, dato un lato e due altezze.

561. Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato ed una mediana.

562. Costruire un triangolo, dato un angolo e due mediane.

563. Costruire un triangolo, data la mediana e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice e il raggio del circolo circoscritto.

564. Costruire un triangolo, dati i centri di tre circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

565. Costruire un triangolo, dati due angoli ed una bisettrice.

566. Costruire un triangolo, data l'altezza, la mediana e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice.

567. Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente e la bisettrice di quest'angolo.

568. Costruire un triangolo, dato un angolo, la bisettrice corrispondente e il raggio del circolo inscritto.

569. Costruire un triangolo, dato l'eccesso della somma di due lati sul terzo, la bisettrice che incontra questo lato e il raggio del circolo inscritto.

570. Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e l'eccesso della somma di due lati sul terzo.

571. Costruire un triangolo equilatero, avente i vertici sopra tre rette parallele.

572. Costruire un triangolo, data un altezza, il raggio del circolo inscritto e l'eccesso della somma di due lati sul terzo.

573. Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e il raggio del circolo inscritto.

574. Costruire un triangolo, data un'altezza, il perimetro e il raggio di un circolo exinscritto.

575. Costruire un triangolo, dati due angoli e due circoli concentrici, sui quali devono stare i vertici.

576. Costruire un parallelogrammo, date le diagonali e l'angolo da esse formato.

577. Costruire un rettangolo, date le diagonali ed un lato.

578. Costruire un quadrato, data una diagonale.

579. Costruire un quadrangolo, dati i lati e la congiungente i punti medii delle diagonali.

580. In un circolo dato inscrivere un rettangolo di dato perimetro.

581. Condurre una secante a due circoli concentrici, in modo che la parte compresa nel circolo di raggio maggiore sia doppia di quella compresa nel circolo di raggio minore.

582. Dati tre punti A, B, C ed una retta, che passi per A, descrivere un circolo. che passi par A e per B, e che tagli la retta data in un punto D, in modo che DC sia tangente al circolo.

583. Determinare sui prolungamenti di un diametro di un circolo un punto tale, che il segmento di tangente, condotta da quel punto al circolo, compreso fra quel punto e il punto di contatto, sia eguale al diametro.

584. Sui prolungamenti di un diametro di un circolo trovare un punto tale, che tirando da esso le due tangenti al circolo, questo rimanga diviso dai punti di contatto in due archi uno doppio dell'altro.

585. In un piano sopra una retta data determinare un punto tale che le tangenti condotte da esso a due circoli del piano formino angoli eguali colla retta data.

586. Costruire un triangolo eguale ad un triangolo dato, i cui lati passino per tre punti dati.

587. Per un punto condurre una retta, in modo che il triangolo formato da essa con due altre rette date abbia il perimetro eguale ad un segmento dato.

588. Condurre una retta parallela ad una retta data, in modo che il segmento limitato da due dati circoli sia eguale ad un segmento dato.

589. Ad un triedro dato inscrivere e circoscrivere una superficie conica di rotazione.

590. Costruire un cilindro tangente a tre piani paralleli ad una retta data e che si tagliano due a due.

591. Dati due circoli in un piano (o due sfere), quali sono i loro punti più vicini, e quali i più lontani?

592. Di tutte le corde di un circolo, che passano per un punto, qual'è la massima e quale la minima?

593. Tagliare un cubo con un piano, in modo che la sezione sia uno esagono regolare.

594. Dato un esagono regolare, costruire un cubo, di cui l'esagono sia una sezione.

595. Da un vertice di un cubo si conducano le diagonali delle facce, e su ciascuna di esse si determini un punto in modo, che questi formino col vertice opposto un tetraedro regolare.

596. In un cono rotondo costruire un cubo, in modo che quattro vertici siano sulla superficie conica e quattro sulla base.

597. Si tagli con un piano un tetraedro, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente i lati eguali a segmenti dati.

598. Si tagli con un piano un tetraedro, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente una diagonale eguale ad un segmento dato.

599. Si tagli con un piano una piramide quadrangolare convessa, in modo che la sezione sia un parallelogrammo.

600. Trovare il circolo (o la superficie sferica) di un fascio, dato per mezzo di due circoli (o superficie sferiche), che passi per un punto dato.

601. Data una sfera ed una retta; costruire due altre sfere, che colla data abbiano per asse radicale la retta data.

602. Data una sfera ed un punto; costruire altre tre sfere, che colla data abbiano per centro radicale il punto dato.

603. Costruire le sfere tangenti ad un piano dato, e che con due sfere date appartengano al medesimo fascio.

604. Dato un connesso di circoli (o superficie sferiche), per mezzo di tre di essi, trovare il circolo (o la superficie sferica) del connesso, che passi per due punti dati.

605. Costruire una sfera, che passi per tre punti dati, e che con quattro sfere date appartenga ad un medesimo complesso.

606. Costruire una superficie sferica, che passi per tre punti, e tagli ortogonalmente una superficie sferica data.

607. Costruire una superficie sferica, che passi per due punti, e tagli ortogonalmente due superficie sferiche date.

608. Costruire una superficie sferica, che passi per un punto, e tagli ortogonalmente tre superficie sferiche date

609. In un piano costruire un circolo, che passi per due punti dati, e tagli ortogonalmente un circolo dato.

610. In un piano costruire un circolo, che passi per un punto, e tagli ortogonalmente due circoli dati.

611. Trovare i piani che hanno date distanze da due rette parallele date.

612. Trovare le rette, che passano per un punto, ed hanno date distanze da due rette non parallele.

613. Per un punto interno ad una superficie cilindrica rotonda condurre il piano parallelo all'asse, che tagli la superficie secondo la striscia minima.

614. Per un punto dato condurre un piano che tagli una superficie cilindrica rotonda secondo due rette parallete aventi una data distanza fra loro.

615. Per uu punto condurre un piano, che tagli una superficie conica rotonda secondo due rette, che formano un angolo dato.

616. Supposto che due superficie coniche rotonde, aventi il vertice in comune, si taglino secondo due rette, trovare con costruzioni piane l'angolo di queste rette, conoscendo l'angolo degli assi delle due superficie e i due angoli delle due superficie stesse.

617. Trovare con costruzioni piane l'angolo delle due rette d'intersezione di una superficie conica rotonda con un piano secante condotto per il vertice, conoscendo l'angolo della superficie e l'angolo che il piano secante fa con l'asse.

618. Per un punto dato condurre le rette, che hanno date distanze da due punti dati.

619. Trovare le rette di un piano che hanno distanze date da due punti fuori di esso.