LIBRO SECONDO

CAPITOLO I

Poligoni.

75. Definizioni. — 1ª. Chiamasi *poligono* la figura formata da più di due punti, dati in un certo ordine, in modo che tre consecutivi non sieno in una stessa retta, dalle rette individuate dalle coppie di punti consecutivi e dalla retta individuata dal primo e dall'ultimo.

2ª. I punti dati si chiamano *vertici*, le rette individuate da due punti consecutivi, si chiamano *rette* del poligono. Si chiamano *lati* i segmenti limitati da due vertici consecutivi del poligono, *diagonali* i segmenti limitati da due vertici non consecutivi.

Un poligono ha tanti lati quanti sono i suoi vertici.

È facile vedere che il numero delle diagonali di un poligono, avente n vertici, è $\frac{n(n-3)}{2}$. Infatti, si ottiene una diagonale ogni volta che si unisce, per mezzo di una retta, un dato vertice con un altro qualunque, esclusi i due consecutivi. Per ogni vertice passano dunque $n-3$ diagonali; perciò il numero $n(n-3)$ ci dà il doppio del numero delle diagonali, perchè ognuna di esse passa per due vertici; ossia il numero delle diagonali è appunto $\frac{n(n-3)}{2}$.

3ª. La linea formata dai lati del poligono si chiama *contorno*, ed il segmento somma dei lati si chiama *perimetro*.

Per es. (Fig. 55) i cinque punti A, B, C, D, E, dati nell'ordine scritto, determinano un poligono, di cui i segmenti AB, BC, CD, DE, EA

sono i lati. Un punto può percorrere il contorno andando da A in B, da B in C.... da E in A, oppure andando da B in C, da C in D.... da A in B ecc.... Perciò il poligono s'indica indifferentemente coi simboli ABCDE, BCDEA, ecc...

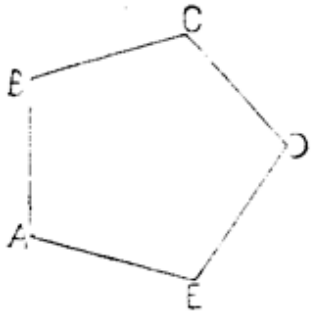

Fig. 55.

4ª. Se un poligono ha tre vertici si chiama *triangolo*, se ne ha quattro si chiama *quadrilatero*, o *quadrangolo*, se ne ha cinque *pentagono*, se ne ha sei *esagono*, ecc.

5ª. Se un poligono ha tutti i suoi lati eguali si dice equilatero.

Quando sono dati più di tre punti, senza che sia fissato il loro ordine, essi individuano più di un poligono. Così per es. i quattro punti A, B, C, D individuano tre quadrangoli distinti (Fig. 56).

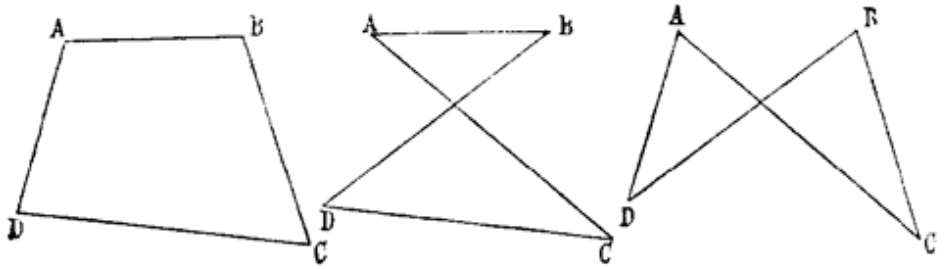

Fig. 56.

6ª. Se i vertici di un poligono sono tutti in un piano, giacciono in questo piano anche tutte le sue rette, ed il poligono si dice *piano;* in caso contrario il poligono si dice *gobbo* o *storto*.

In ciò che segue, se non è avvertito esplicitamente il contrario, intenderemo parlare di poligoni piani.

7ª. Si chiama *linea poligonale* o *spezzata* la linea formata da alcuni lati consecutivi di un poligono.

8ª. Un poligono piano, o una linea poligonale piana, si dicono *convessi*, quando tutti i suoi vertici sono da una medesima parte di una qualunque delle sue rette; *concavi* nel caso contrario.

76. Teorema. — *Il contorno di un poligono convesso è una linea completa.*

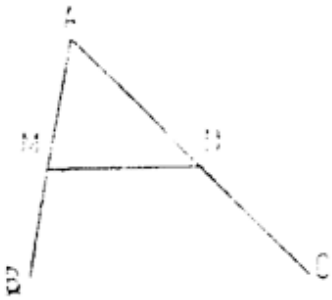

Fig. 57.

Infatti, dal P. IV, 2° deriva che, se una linea incompleta, data sopra una superficie, ha i suoi estremi sopra una linea completa, appartenente alla stessa superficie, essa suddivide in due quella delle parti (separate dall'altra linea), nella quale è contenuta.

Dunque, dati tre punti A, M, N, non in linea retta, le due semirette AM, AN dividono il piano dei tre punti in due parti (angoli) e il segmento MN, che ha i suoi

estremi sulle semirette suddette, ed è perciò (§ 50, Teor. 1°) interno all'angolo convesso $\widehat{MAN}$, divide quest'angolo in due parti. Una di queste parti è finita e limitata dal contorno AMN.

In generale (Fig. 58) dati più punti A, B, C, D, E vertici di un poligono convesso, si sa che le due semirette BA, BC dividono il piano in due parti (angoli).

Ora poichè il poligono è convesso, epperciò tutti i vertici D, E, devono trovarsi in quello dei semipiani separati dalla retta AB, che contiene il punto C e in quello dei semipiani separati dalla retta BC che contiene il punto A, è chiaro che la spezzata AEDC deve essere compresa nell'angolo convesso $\widehat{ABC}$. Ne segue che quest'angolo è diviso in due parti dalla spezzata suddetta, delle quali una è limitata dal contorno ABCDE.

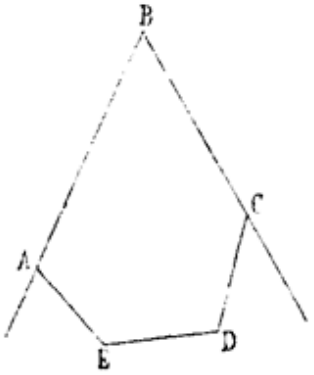

Fig. 58.

Definizioni. — 1ª La parte di piano, limitata dal contorno di un poligono convesso, dicesi *superficie del poligono*, o semplicemente *poligono*.

2ª. Ogni angolo convesso, che ha per vertice un vertice del poligono convesso, i cui lati contengono i due lati del poligono, che passano per esso, dicesi *angolo interno* del poligono, o semplicemente *angolo del poligono*.

3ª. Un angolo interno dicesi *compreso* fra i due lati consecutivi del poligono, che passano per il suo vertice, oppure si dice *adiacente* ad essi. In un triangolo un angolo interno si dice *opposto* a quel lato, al quale non è adiacente.

4ª. Se un poligono ha tutti gli angoli interni eguali, dicesi *equiangolo*, e se due poligoni hanno gli angoli interni rispettivamente eguali si dicono *equiangoli fra loro;* i vertici degli angoli eguali si dicono *corrispondenti*.

5ª. Ogni angolo, conseguente ad un angolo interno di un poligono convesso, dicesi *esterno* ad esso.

Corollario. — *Un segmento, che abbia i suoi estremi sul contorno di un poligono convesso, o interni ad esso, è interno al poligono, o è parte del contorno.*

Infatti, la superficie di un poligono convesso è parte di ciascuno dei suoi angoli; quindi dal Teorema dimostrato nel § 50 risulta immediatamente che ogni segmento, avente i suoi estremi sul contorno di un poligono convesso, se non fa parte del contorno stesso, è interno a tutti gli angoli del medesimo, e perciò interno al poligono.

77. Teorema. — *Un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni non conseguenti.*

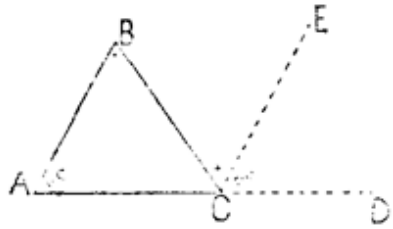

Fig. 59.

Infatti (Fig. 59) essendo $\widehat{BCD}$ un angolo esterno del triangolo ABC, se dal vertice C e dalla stessa parte di AB, rispetto alla retta AD, si tira la semiretta CE parallela ad AB, questa, per non incontrare la AB, deve cadere internamente all'angolo $\widehat{BCD}$; ed allora, poichè $\widehat{BCE} \equiv \widehat{ABC}$, come angoli alterni interni formati dalle parallele AB, CE colla trasversale BC, ed inoltre $\widehat{ECD} \equiv \widehat{BAC}$, come angoli cor-

rispondenti rispetto alle stesse parallele ed alla trasversale AD, si ha:

$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{BCE} + \widehat{ECD} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{BAC}.$$

Corollario. — *Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun angolo interno opposto.*

78. Definizioni. — 1ª. Se un triangolo ha tre lati disuguali si dice *scaleno*, e se ha soltanto due lati eguali tra loro, si dice *isoscele*. In un triangolo isoscele dicesi *base* il lato non uguale agli altri due.

2ª. Se da un vertice di un triangolo si conduce la perpendicolare sulla retta del lato opposto, il segmento di questa perpendicolare, compreso fra il vertice stesso e il punto d'incontro, si chiama *altezza* del triangolo, e si suole chiamare *base* del triangolo il lato rispetto al quale s'è condotta l'altezza.

3ª. Se si conduce la bisettrice di un angolo interno di un triangolo, il segmento di essa, compreso tra il vertice e il lato opposto, dicesi *bisettrice del triangolo*.

4ª. In un triangolo il segmento, che unisce un vertice col punto di mezzo del lato opposto, dicesi *mediana*.

Corollario. — *Un triangolo ha tre altezze, tre bisettrici e tre mediane.*

79. Teorema. — *In un triangolo isoscele:*

1º. Gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali;

2º. L'altezza, la mediana e la bisettrice, concorrenti coi lati eguali, coincidono.

3º. Le altezze, le mediane e le bisettrici, relative ai lati eguali, sono rispettivamente eguali.

Sia ABC un triangolo isoscele, nel quale è $AC \equiv BC$. Condotta l'altezza CH relativa alla base, si ribalti il piano della figura su sè stesso in modo, che l'angolo $\widehat{ACB}$ venga a coincidere con sè stesso (P. IX). Per l'eguaglianza dei lati AC, BC, il punto B verrà in A e viceversa, e quindi tutto il triangolo coinciderà con sè stesso, così che l'angolo $\widehat{ABC}$ si sovrapporrà all'angolo $\widehat{BAC}$ e viceversa, il punto di mezzo del lato BC verrà sul punto di mezzo del lato AC e viceversa e l'altezza CH resterà fissa (§ 58, T. 1º).

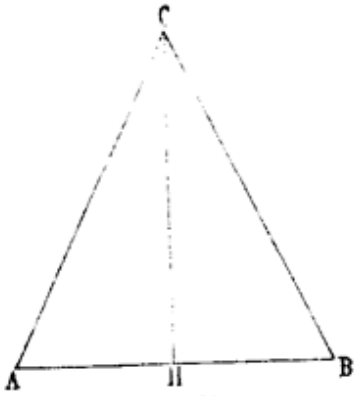

Fig. 60.

Segue da ciò che i due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ sono eguali, che l'angolo $\widehat{ACH} \equiv \widehat{BCH}$ e $AH \equiv BH$, e perciò la CH è altezza, mediana e bisettrice del triangolo. Similmente l'altezza, la mediana e la bisettrice, condotte da A, vengono rispettivamente a coincidere coll'altezza, colla mediana e colla bisettrice condotte da B.

Corollario. — *In un triangolo equilatero:*

1º. I tre angoli sono eguali;

2º. L'altezza, la mediana, la bisettrice uscenti da uno stesso vertice coincidono;

3º. Le altezze, le mediane, le bisettrici sono tutte eguali fra loro.

80. Teorema. — *Se un triangolo ha due lati disuguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore di quello opposto al lato minore.*

Nel triangolo ABC (Fig. 61) sia il lato AB maggiore del lato AC. Voglio dimostrare che l'angolo $A\widehat{C}B$, opposto al lato AB, è maggiore dell'angolo $A\widehat{B}C$ opposto al lato AC.

Dal lato maggiore AB stacchiamo una parte AD eguale al lato minore AC, ed uniamo C con D per mezzo di un segmento. L'intero triangolo viene così scomposto in due, uno dei quali ACD, avendo i due lati AC, AD uguali, ha pure uguali gli angoli $A\widehat{C}D$, $A\widehat{D}C$, opposti a questi lati. L'angolo $A\widehat{D}C$, essendo esterno al triangolo BDC, è maggiore di $D\widehat{B}C$, e quindi $A\widehat{C}B$, evidentemente maggiore di $A\widehat{C}D$, è pure maggiore di $A\widehat{D}C$ e a più forte ragione maggiore di $A\widehat{B}C$.

Fig. 61.

Corollari. — *1°. In un triangolo un lato è minore, eguale, o maggiore di un altro, secondo che l'angolo opposto al primo è minore, eguale, o maggiore dell'angolo opposto all'altro.*

Infatti, abbiamo visto in questo § e nel precedente che tutte le ipotesi, che si possono fare sull'eguaglianza, o disuguaglianza di due lati di un triangolo, ci conducono a tesi, le quali si escludono a vicenda, per conseguenza (V. Preliminari § 4) anche i teoremi inversi sono veri.

2°. Se un triangolo è equiangolo, esso è anche equilatero.

3°. Il segmento, che unisce un vertice di un triangolo con un punto situato sul lato opposto, o interno al triangolo, è minore di uno almeno degli altri due lati.

Supponiamo che nel triangolo ABC (Fig. 61) il lato AC sia maggiore, o almeno uguale a BC. Ne segue che l'angolo $A\widehat{B}C$ è maggiore, o almeno eguale, di $C\widehat{A}B$. Unendo allora il vertice C con un punto D della base per mezzo del segmento CD, si ha che l'angolo $C\widehat{D}A$, esterno al triangolo CDB, è maggiore di $C\widehat{B}D$ e quindi anche di $C\widehat{A}D$. Per conseguenza nel triangolo CAD il lato CA è maggiore di CD (Cor. 1°), come volevasi dimostrare.

81. Teorema. — *Il contorno di un poligono concavo, non intrecciato, è una linea completa.*

Sia ABCDEFHKLMN un poligono concavo, non intrecciato, e fra le distanze di un vertice qualunque L del poligono dagli altri vertici, sia LA non minore delle rimanenti. È facile dimostrare che, se si conduce per A una retta a perpendicolare ad LA, tutti i vertici del poligono si trovano dalla stessa parte di L rispetto ad a. Infatti ogni punto P della retta a, diverso da A, ha dal punto L una distanza

maggiore di AL, perchè nel triangolo ALP l'angolo esterno in A essendo maggiore dell'interno opposto $\widehat{APL}$, sarà pure l'angolo $\widehat{LAP}$, che è eguale al primo, maggiore dell'angolo $\widehat{APL}$, e quindi (§ 79, Cor. 1°) LP > LA. A più forte ragione ogni punto del piano, che si trovi, rispetto ad *a*, dalla parte opposta del punto L, ha da L una distanza maggiore di AL, e quindi nessun vertice del poligono, all'infuori di A, può trovarsi sulla retta *a*, od essere situato da parte opposta di L rispetto ad *a*. Analogamente, se si considera il vertice A e la sua maggiore distanza dagli altri vertici, che supponiamo essere AF, ripetendo lo stesso ragionamento si dimostra che i vertici del poligono dato giacciono tutti dalla stessa parte di A, rispetto alla retta *b* perpendicolare ad AF nel punto F.

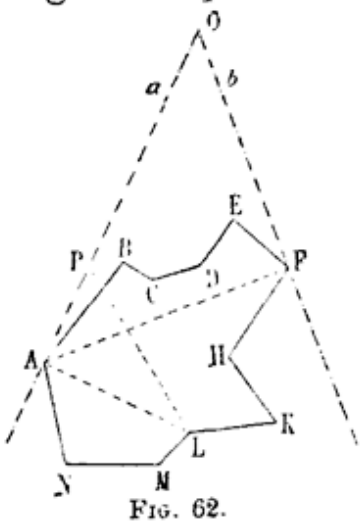

Fig. 62.

Ora può darsi che le due rette *a*, *b* si taglino in un punto O, o sieno parallele; in ogni caso tutti i vertici del poligono, e quindi anche tutti i punti del suo contorno, sono interni all'angolo $\widehat{AOF}$, o alla striscia, che ha per lati le due rette *a*, *b*, eccettuati i due vertici del poligono, che si trovano sui due lati. Ne segue (§ 50 e P. IV, 2) che le due spezzate ABCDEF, FHKLMNA, che formano il contorno del poligono, dividono l'angolo (o la striscia) $\widehat{AOF}$ in tre parti; quella intermedia all'altre due è limitata dal contorno ABCDEFHKLMNA.

Definizioni. — 1ª. La parte di piano, limitata dal contorno di un poligono concavo, non intrecciato, dicesi *superficie del poligono*, o semplicemente *poligono*.

2ª. Dicesi *angolo interno* di un poligono concavo, non intrecciato, ogni angolo, che ha il vertice in un vertice del poligono, i cui lati contengono i due lati del poligono, che passano per esso, e rispetto al quale tutti i punti della diagonale, che termina ai due vertici precedente e susseguente, sono interni, od esterni, secondo che la diagonale stessa è interna, od esterna, al poligono.

82. Teorema 1°. — *Una retta, situata nel piano di un poligono, non intrecciato, e che passa per un punto interno ad esso, incontra il contorno almeno in due punti.*

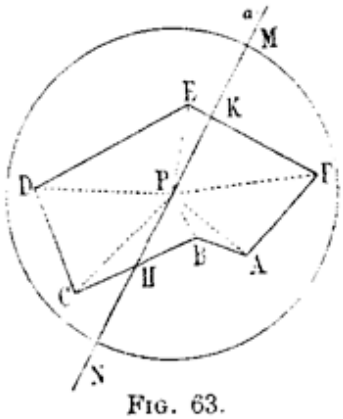

Fig. 63.

Sia P il punto della retta data *a* interno al poligono ABCDEF, e fra le distanze PA, PB .... del punto P dai vertici del poligono sia PF quella che non è minore delle altre. È chiaro che (§ 79, Cor. 3°) tutti i punti del contorno, o interni al poligono dato, hanno da P una distanza non ~~minore~~ di PF, ossia si trovano nell'interno del circolo, descritto nel piano del poligono col centro in P e con raggio arbitrario maggiore di PF.

Siccome poi la retta *a* passa per il centro del circolo, ciascuna delle due semirette, in cui essa resta divisa dal punto P, incontra il circolo in un punto esterno al poligono. Abbiamo così due punti

M, N esterni al poligono; d'onde deriva che, siccome per andare dal punto P, interno al poligono, al punto M o al punto N, esterni al poligono stesso, bisogna traversare il contorno almeno in un punto, così la retta *a* deve incontrare il contorno del poligono almeno in due punti.

Teorema 2°. — *Una retta non può incontrare il contorno di un poligono convesso in più di due punti.*

Se infatti una retta *a* avesse tre punti K, L, M in comune col contorno di un poligono ABCDEFGH, uno di essi, per es. L, sarebbe interno al segmento KM; allora i punti M, K, e quindi anche i lati CB, DE, che passano per essi, e i vertici B, E si troverebbero in parti opposte rispetto alla retta CD del poligono, che passa per L. Il dato poligono dunque sarebbe concavo, e ciò è contrario all'ipotesi.

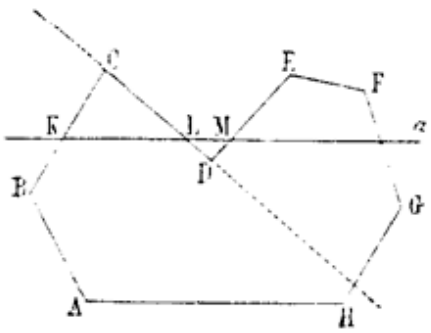

Fig. 64.

Corollario. — *Una semiretta, uscente dal vertice di un poligono convesso, incontra, oppure no, il contorno in un punto distinto dal vertice stesso, secondo che è interna, oppure esterna, all'angolo del poligono, che ha per vertice quel punto.*

Infatti, se una semiretta, uscente da un vertice di un poligono, è esterna all'angolo del poligono, che ha per vertice quel punto, essa è tutta esterna al poligono e non può incontrare il contorno. Se invece essa è interna a quell'angolo del poligono, necessariamente contiene punti interni al poligono stesso, epperciò incontra il contorno in due punti distinti, vale a dire ha in comune col contorno un altro punto, all'infuori del vertice che si considera.

83. Teorema. — *In ogni poligono un lato è minore della somma di tutti gli altri.*

1°. Dimostriamo prima il teorema pel caso di un triangolo. Pertanto sia il triangolo ACB (Fig. 65), nel quale si vuol dimostrare che è $AB < AC + CB$. Si prolunghi AC di un segmento CD eguale a CB, e si unisca D con B. Ne risulta un triangolo CDB isoscele, epperciò gli angoli $\widehat{CDB}$, $\widehat{CBD}$ sono eguali. Nel triangolo ABD l'angolo $\widehat{ABD}$, evidentemente maggiore di $\widehat{CBD}$, è pure maggiore di $\widehat{BDA}$, e quindi il lato AD opposto ad $\widehat{ABD}$ è maggiore del lato AB opposto all'angolo minore $\widehat{BDA}$.

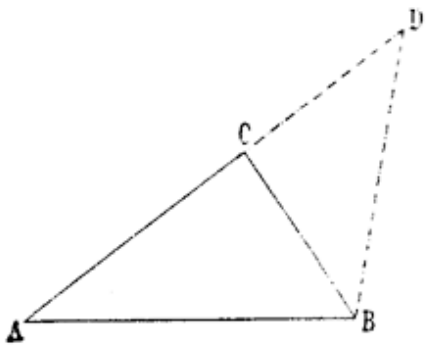

Fig. 65.

Ma $AD = AC + CD = AC + CB$, perciò $AB < AC + CB$.

2°. Nel poligono ABCDEF (Fig. 66) un lato AF è minore della

somma di tutti gli altri. Si conducano infatti tutte le diagonali che passano per uno degli estremi A del lato AF. Poichè in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, abbiamo le disuguaglianze

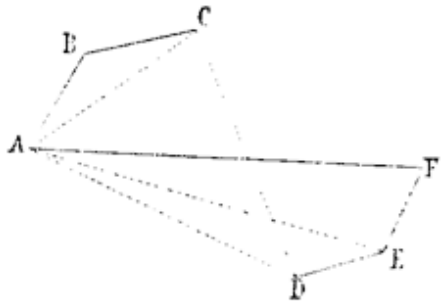

Fig. 66.

$$AC < AB + BC$$
$$AD < AC + CD$$
$$AE < AD + DE$$
$$AF < AE + EF,$$

dalle quali si ricava

$$AF < AB + BC + CD + DE + EF.$$

Corollario. — *In ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due.*

Infatti (Fig. 65), se $AB < AC + CB$, supponendo $AB > AC$, si ricava $AB - AC < CB$, e, supponendo $AB > CB$, si ha pure

$$AB - CB < AC.$$

84. Definizione. — Si dice che un poligono è *inviluppato* da un altro poligono, non intrecciato, quando nessun punto del contorno del primo è esterno all'altro.

Teorema. — *Il perimetro di un poligono convesso è minore del perimetro di un altro poligono non intrecciato che lo inviluppa.*

Sia ABCDE un poligono convesso inviluppato da un altro LRMNPQ e sieno A′, B′, C′, D′, E′ i punti d'incontro delle semirette EA, AB, BC, CD, DE col contorno del secondo poligono (§ 81, Teor. 1°). Dai poligoni EE′LA′, AA′RMB′, BB′NC′, CC′PD′, DD′QE′ si ricavano le diseguaglianze (§ 82).

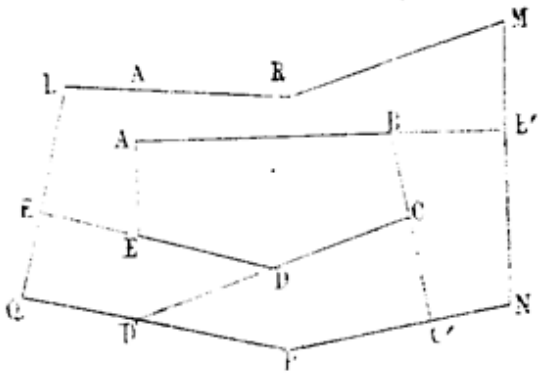

Fig. 67.

$$EA + AA' < EE' + E'L + LA'$$
$$AB + BB' < AA' + A'R + RM + MB'$$
$$BC + CC' < BB' + B'N + NC'$$
$$CD + DD' < CC' + C'P + PD'$$
$$DE + EE' < DD' + D'Q + QE',$$

dalle quali per addizione si ricava

$$EA + AB + BC + CD + DE < LR + RM + MN + NP + PQ + QL,$$

come volevasi dimostrare.

85. Teorema. — *La somma degli angoli interni di un poligono è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.*

Consideriamo prima il caso di un triangolo (Fig. 59). È chiaro che, essendo (§ 76) $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC}$, si ha

$$\widehat{BCD} + \widehat{BCA} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA}.$$

ossia $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$ è eguale ad un angolo piatto.

Consideriamo ora un poligono convesso qualunque ABCDEF. Le diagonali condotte da uno stesso vertice F del poligono scompongono (§ 75, Cor.) il poligono stesso in tanti triangoli quanti sono i lati meno due: ed è evidente che la somma degli angoli di tutti questi triangoli è eguale alla somma degli angoli interni del poligono. Ora la somma degli angoli di un triangolo si è dimostrata eguale ad un angolo piatto, quindi la somma degli angoli di tutti questi triangoli, e conseguentemente anche la somma degli angoli interni del poligono, è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono meno due.

Fig. 68.

3°. Nel caso che il poligono sia concavo, per es. ABCDEFK, si osservi che unendo i vertici B, D, che sono situati sui lati di uno stesso angolo concavo $\widehat{BCD}$, si ottiene un nuovo poligono, che ha un lato e un angolo concavo di meno del poligono dato. Ripetendo la stessa costruzione, è chiaro che si può ottenere un poligono convesso, che abbia tanti lati di meno del poligono dato quanti sono gli angoli concavi del medesimo. Ma la somma degli angoli interni di un poligono convesso è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i suoi lati meno due, inoltre l'angolo concavo $\widehat{BCD} = \widehat{BCM} + \widehat{DCM}$ supera la somma dei due angoli $\widehat{CBD}$, $\widehat{CDB}$ di un angolo piatto, e lo stesso si può ripetere per ciascuno degli angoli concavi rimanenti; ne segue che, aggiungendo alla somma degli angoli interni del poligono convesso trasformato tanti angoli piatti quanti sono gli angoli concavi del poligono dato, si ottiene una somma, che è la somma degli angoli interni del poligono dato, ed è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono stesso meno due.

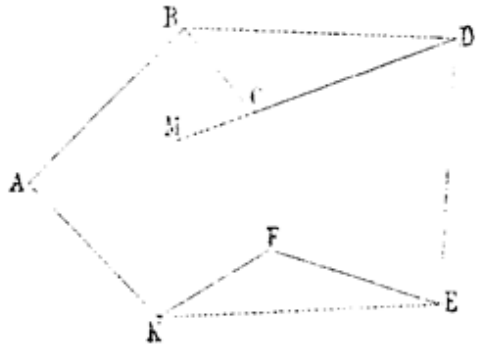

Fig. 69.

Corollari. — *1°. Se due rette, tagliate da una terza, non formano gli angoli coniugati interni supplementari, esse s' incontrano dalla parte della trasversale, dove la somma degli angoli coniugati interni è minore di un angolo piatto.*

2°. Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente eguali, essi hanno eguale anche il terzo.

Infatti questo terzo angolo è ciò che manca alla somma dei primi due, per formare un angolo piatto.

3°. Se un triangolo ha un angolo retto (od ottuso), gli altri due suoi angoli sono acuti.

Infatti la somma di questi due angoli è eguale (o minore) di un angolo retto, e perciò sono ambedue acuti.

Definizioni. — 1ª. Un triangolo si dice *acutangolo*, se ha i tre angoli acuti, *rettangolo*, se ha un angolo retto, ed *ottusangolo*, se ha un angolo ottuso.

2ª. In un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato opposto all'angolo retto, *cateti* gli altri due lati.

Corollario 4°. — *Se una retta ha un punto interno ad un cerchio (o ad una sfera) incontra il circolo (o la superficie sferica) in due punti.*

Supponiamo che la retta *a*, passi per il punto B interno al cerchio (o alla sfera) di centro O. Si unisca il punto O con B e si tiri da O la perpendicolare OA alla retta *a*. Dal triangolo rettangolo OBA si ricava che OB > OA, e quindi il punto A è interno al circolo (o alla sfera). Se ora si porta sulla retta *a*, a partire da A, due segmenti adiacenti AC, AC′ eguali al raggio, dai triangoli rettangoli OAC, OAC′ si ricava che tanto OC quanto OC′ sono maggiori del raggio, e perciò i punti C e C′ sono esterni al circolo (o alla sfera). Ne segue che su ciascuna delle semirette BC, BC′ deve esistere un punto d'incontro col circolo (o colla superficie sferica) di centro O (§ 27).

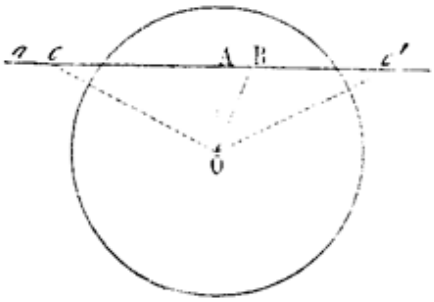

Fig. 70.

È chiaro poi che la retta *a* non può incontrare il circolo (o la superficie sferica) in più di due punti, poichè se esistesse un terzo punto d'incontro, uno di essi dovrebbe essere interno al segmento limitato dagli altri due, ed allora, costruito il triangolo che ha per vertici il centro e quei due punti estremi, la congiungente il centro con quel terzo punto dovrebbe essere eguale agli altri due lati del triangolo, ciò che è assurdo (§ 89, Cor. 3°).

86. Teorema. — *Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad uno degli altri due lati, il terzo lato viene pure diviso per metà, e il segmento, che termina ai punti medi dei due lati, è eguale alla metà del terzo lato.*

Sia M il punto medio del lato AB di un triangolo dato ABC, e sia MN la parallela al lato BC condotta da M. Se per il vertice A si conduce una parallela al lato opposto, si ottiene un sistema di tre rette parallele tagliate da due trasversali, ed allora (§ 52, Teor.), essendo AM = MB, si ha pure AN = NC. Analogamente, conducendo da N la parallela ad AB, si dimostra che P è il punto medio di BC; ma MN è eguale BP, come segmenti paralleli compresi fra rette parallele, dunque MN è la metà di BC.

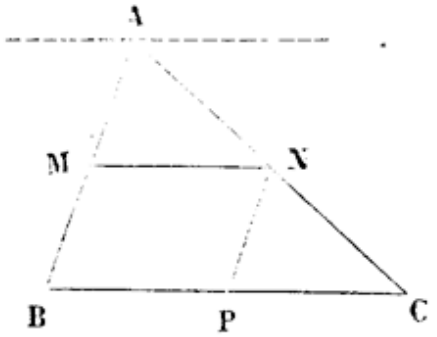

Fig. 71.

Corollario. — *La congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato ed eguale alla metà di esso.*

87. Teorema. — *La somma degli angoli esterni di un poligono convesso, formati da ciascun lato colla retta del lato precedente, è eguale a due angoli piatti.*

Infatti (Fig. 72) ogni angolo esterno del poligono sommato coll'interno conseguente dà per risultato un angolo piatto; perciò la somma degli angoli esterni ed interni del poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati [redacted] dunque per il teorema del § 85 la somma degli angoli esterni è uguale a due angoli piatti.

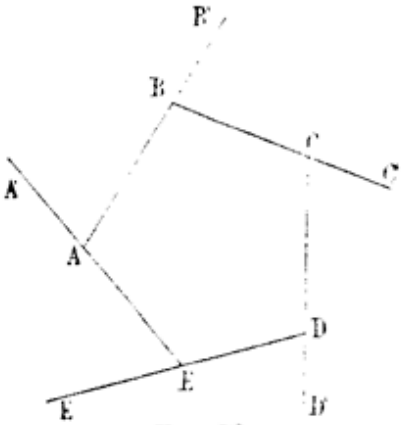

Fig. 72.

EGUAGLIANZA DI TRIANGOLI E DI POLIGONI.

88. Teorema. — *Due triangoli sono eguali, se hanno un lato e due angoli rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo.*

Supponiamo che i due triangoli ABC, A'B'C' (Fig. 73) abbiano il lato BC eguale al lato B'C', l'angolo $\widehat{B}$ eguale all'angolo $\widehat{B'}$ e l'angolo $\widehat{C}$ eguale all'angolo $\widehat{C'}$.

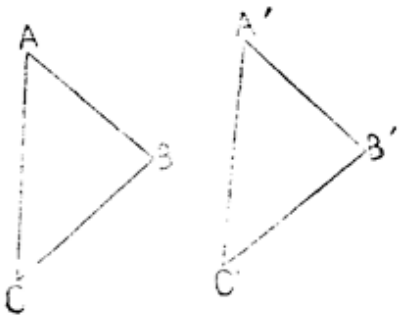

Fig. 73.

Portiamo a coincidere l'angolo $\widehat{B'}$ coll'angolo $\widehat{B}$ in modo che il lato BC coincida col lato uguale B'C'; allora anche l'angolo $\widehat{C'}$ coinciderà col suo eguale $\widehat{C}$, ed il punto A' cadrà in A. I due triangoli possono dunque portarsi a coincidere, e perciò sono eguali.

Si dimostrerebbe nello stesso modo l'eguaglianza dei triangoli ABC, A'B'C' quando fosse nota l'eguaglianza dei lati BC, B'C', degli angoli ad essi opposti $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$ e degli angoli adiacenti $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$, poichè dall'eguaglianza degli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ e degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$ deriva l'eguaglianza degli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$, e quindi si ricade nel caso precedente.

89. Teorema. — *Due triangoli sono eguali, se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè gli angoli opposti agli altri due lati uguali sieno della stessa specie.*

Nei due triangoli ABC, A'B'C', (Fig. 74) sia $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $\widehat{A} \equiv \widehat{A}$. Dico che i due triangoli devono essere eguali, purchè si sappia

che gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$ opposti ai lati uguali AB, A'B' sono della stessa specie. Portiamo infatti a coincidere l'angolo $\widehat{A'}$ coll'angolo $\widehat{A}$ in modo che il lato B'A' venga a coincidere col lato BA. Allora se il lato B'C' non coincidesse con BC, ma prendesse una posizione diversa BD, si otterrebbe un triangolo isoscele BCD, nel quale i due angoli $\widehat{BCD}$, $\widehat{BDC}$ sarebbero uguali, e perciò acuti, mentre l'angolo $\widehat{ACB}$ sarebbe ottuso; e ciò è contrario all'ipotesi. Dunque B'C' deve coincidere con BC, ossia i due triangoli sono uguali.

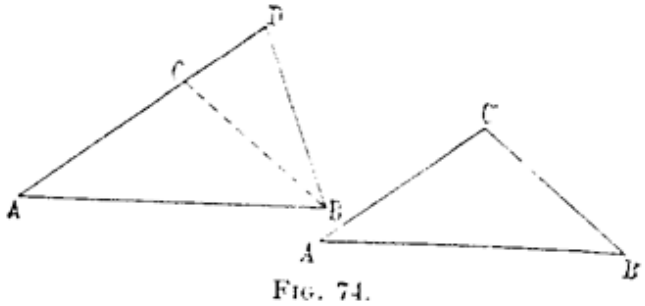

Fig. 74.

90. Teorema. — *Due triangoli, che hanno due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale, sono eguali.*

Abbiansi i due triangoli ABC, A'B'C', (Fig. 73) nei quali i lati AB, BC sieno rispettivamente eguali ai lati A'B', B'C', e l'angolo $\widehat{ABC}$ sia uguale all'angolo $\widehat{A'B'C'}$. Se portiamo il triangolo A'B'C' sopra il triangolo ABC in modo che il lato A'B' coincida col lato AB, è chiaro che, per l'eguaglianza degli angoli $\widehat{A'B'C'}$, $\widehat{ABC}$, il lato B'C' prenderà la direzione del lato BC, e, per l'eguaglianza di questi lati, C' cadrà in C. Ne segue che il lato A'C' è uguale al lato AC, l'angolo $\widehat{A'}$ è uguale all'angolo $\widehat{A}$ e $\widehat{C'}$ a $\widehat{C}$.

91. Teorema. — *Se un triangolo ha due lati rispettivamente uguali a due lati di un altro triangolo, ma l'angolo compreso fra i primi è maggiore dell'angolo compreso fra i secondi, il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato dell'altro.*

Portiamo i due triangoli uno accanto all'altro in modo che abbiano un lato uguale AB in comune, che sieno situati uno da una parte e uno dall'altra rispetto alla retta del lato comune, e che gli altri due lati eguali AC, A'C'' sieno consecutivi. Essendo per ipotesi l'angolo $\widehat{BAC} < \widehat{BAC''}$, si deve dimostrare che è $BC < BC''$. Pertanto dividiamo per metà l'angolo $\widehat{CAC''}$ (concavo o convesso) somma dei due $\widehat{CAB}$, $\widehat{BAC''}$, e sia AD la bisettrice di quest'angolo, la quale cadrà nell'interno dell'angolo maggiore BAC'' e taglierà perciò il lato BC'' in un punto D. Uniamo il punto D con C per mezzo di una retta. I due triangoli CAD, C''AD, avendo il lato

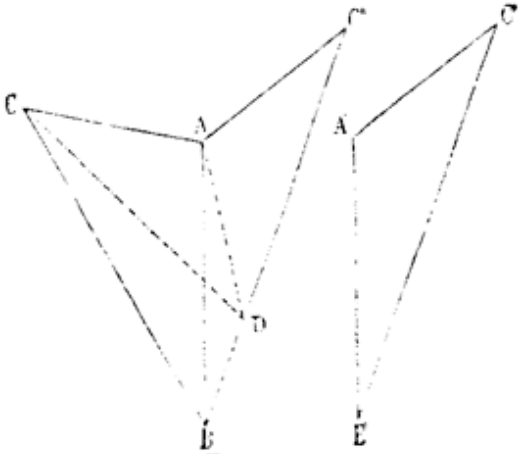

Fig. 75.

AD comune, i lati AC, AC″ uguali per ipotesi e gli angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAC''}$ eguali per costruzione, sono uguali, e perciò è CD ≡ C″D. Dal triangolo BDC abbiamo poi (§ 82 Teor.)

$$BC < BD + DC$$

e perciò

$$BC < BD + DC''$$

ossia

$$BC < BC''.$$

Corollari. — *1°. Se due lati di un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati di un altro triangolo, l'angolo compreso fra i primi due è maggiore, uguale, o minore dell'angolo compreso fra i secondi, secondo che il terzo lato del primo triangolo è maggiore, uguale, o minore del terzo lato del secondo.*

Infatti abbiamo dimostrato che, dati due triangoli ABC, A′B′C′, aventi due lati rispettivamente eguali (AB ≡ A′B′, AC ≡ A′C′):

1° se l'angolo compreso $\widehat{A} > \widehat{A'}$, anche BC > B′C′
2° " " $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ " " BC ≡ B′C′
3° " " $\widehat{A} < \widehat{A'}$ " BC < B′C′

Ne segue (Preliminari § 4°) che sono veri anche i teoremi inversi.

2°. Due triangoli, che hanno i tre lati rispettivamente eguali, sono eguali.

92. Riepilogando, abbiamo dimostrato che:

Due triangoli sono uguali,
1°. se hanno un lato o due angoli eguali e disposti nello stesso modo (§ 88);
2°. se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente uguali, purchè gli angoli opposti ai rimanenti lati eguali sieno della stessa specie (§ 89);
3°. se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente eguali (§ 90);
4°. se hanno i tre lati rispettivamente uguali (§ 91, Cor. 2°).

Questi casi si possono riassumere dicendo che, per potere asserire l'uguaglianza di due triangoli, basta conoscere l'uguaglianza di tre elementi rispettivamente disposti nello stesso modo, purchè fra questi elementi sia compreso almeno un lato, e non dimenticando la condizione stabilita per il caso, in cui gli elementi uguali sono due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

Corollari. — *Due triangoli rettangoli sono eguali,*
1°. se hanno un lato (cateto o ipotenusa) e un angolo acuto rispettivamente uguali e disposti nello stesso modo;
2°. se hanno l'ipotenusa e un cateto rispettivamente eguali;
3°. se hanno i due cateti rispettivamente eguali.

Infatti tutti i triangoli rettangoli hanno un angolo uguale, l'angolo retto; perciò, per asserire l'eguaglianza di due triangoli rettangoli, basta che si conosca l'eguaglianza di altri due elementi, fra i quali si trovi almeno un lato. Pertanto, applicando i quattro casi di eguaglianza, dimostrati per i triangoli in generale, ai triangoli rettangoli, si ottengono ordinatamente i corollari enunciati.

93. In un triangolo esistono sei elementi, tre lati e tre angoli, ed abbiam veduto che in certi casi si può asserire l'eguaglianza di due triangoli, quando si conosca che tre elementi dell'uno sono rispettivamente eguali a tre elementi dell'altro (§ 92). In generale in un poligono di n vertici esistono $2n$ elementi, n lati ed n angoli: in certi casi per asserire che due poligoni non intrecciati di n lati sono eguali basta conoscere che $2n - 3$ elementi dell'uno sono eguali rispettivamente ad altrettanti elementi dell'altro, come apparisce dai seguenti teoremi.

Teorema. — *Due poligoni non intrecciati di* n *lati sono eguali, quando hanno* n — 1 *lati ordinatamente uguali, ed hanno eguali gli angoli compresi fra i lati uguali.*

Siano ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ (Fig. 76) due poligoni che abbiano $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $DE \equiv D'E'$, $EF \equiv E'F'$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$, $\widehat{E} \equiv \widehat{E'}$; si vuol dimostrare che essi sono uguali. Trasportiamo

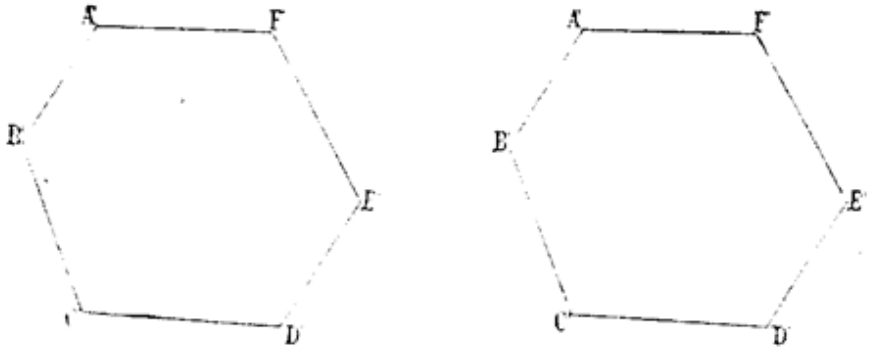

Fig. 76.

il piano del secondo poligono su quello del primo, in modo che il segmento A′B′ coincida col segmento uguale AB, e che i due poligoni si trovino similmente disposti rispetto alla retta AB. A causa dell'eguaglianza degli angoli $\widehat{B'}$, $\widehat{B}$ il segmento B′C′ viene sulla semiretta BC, ed essendo $B'C' \equiv BC$, il punto C′ cade in C. Nello stesso modo si dimostra successivamente che il punto D′ deve venire a coincidere col punto D, il punto E′ col punto E, il punto F′ col punto F. Così tutti i vertici del secondo poligono vengono a coincidere coi vertici del primo, e perciò i due poligoni coincidono completamente; dunque essi sono uguali.

94. Teorema. — *Due poligoni non intrecciati di* n *lati sono uguali, quando hanno* n — 1 *angoli uguali, ed hanno uguali i lati che congiungono i vertici degli angoli eguali.*

1° CD=C′D′

Sieno ABCDEF, A'B'C'D'E'F' (Fig. 76) due poligoni, che abbiano $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$, $\widehat{E} \equiv \widehat{E'}$ e $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ $CD \equiv C'D'$, $DE \equiv D'E'$; si vuol dimostrare che essi sono eguali.

Portiamo infatti il poligono A' B' C' D' E' F' sull'altro in modo che il segmento A' B' venga a coincidere col suo eguale AB, e che i due poligoni sieno similmente disposti rispetto alla retta AB. A causa dell'eguaglianza degli angoli B', B, il segmento B' C' viene sulla semiretta BC, ed essendo $B'C' \equiv BC$, il punto C' cade nel punto C; inoltre per l'eguaglianza degli angoli $\widehat{A'}$, $\widehat{A}$ anche il lato A'F' si dispone sulla semiretta AF.

Analogamente si dimostra che il punto D' viene a coincidere col punto D, il punto E' col punto E e il lato E'F' cade sulla semiretta EF. Poichè i due segmenti A'F', E'F' cadono sulle semirette AF, EF rispettivamente, è chiaro che il loro punto d'incontro F' deve coincidere col punto F. I due poligoni dunque si possono portare a coincidere, e perciò sono uguali.

95. Teorema. — *Due poligoni convessi di* n *lati sono eguali, quando hanno tutti i lati rispettivamente uguali ed* n — 3 *angoli consecutivi eguali e disposti nello stesso modo.*

Sieno ABCDEF, A'B'C'D'E'F' due poligoni, aventi $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CD \equiv C'D'$, $DE \equiv D'E'$, $EF \equiv E'F'$, $FA \equiv F'A'$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$. Tracciamo le due diagonali AE, A'E', le quali scompongono ciascuno dei due poligoni dati in un nuovo poligono ed in un triangolo. I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono uguali per il teorema del § 93, perciò è $AE \equiv A'E'$, e i due triangoli AFE, A'F'E', avendo i tre lati rispettivamente uguali, sono pure eguali. Se dunque portiamo il poligono A'B'C'D'E' a coincidere col poligono ABCDE, è chiaro che anche il triangolo A'E'F' viene a coincidere col triangolo eguale AEF e i due dati poligoni coincidono interamente, e perciò sono eguali.

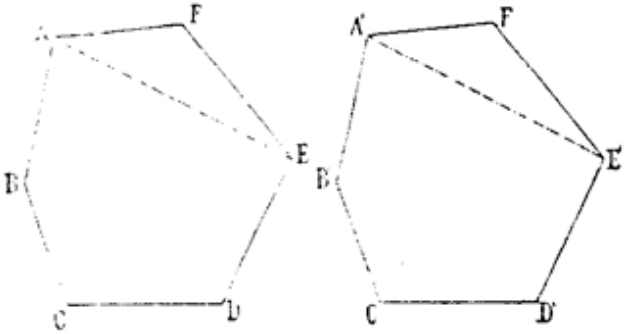

Fig. 77.

COSTRUZIONI DI TRIANGOLI E POLIGONI.

Nei §§ 88-92 abbiamo veduto i vari casi, nei quali l'eguaglianza di tre elementi di un triangolo (fra i quali si trovi almeno un lato) a tre elementi di un altro triangolo basta per affermare l'eguaglianza dei due triangoli.

Quando, per esempio, diciamo che due triangoli sono eguali, se hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali, veniamo a dire che due lati e l'angolo compreso sono sufficienti per individuare un triangolo; di guisa che, costruito un triangolo che abbia quegli elementi, tutti gli altri, che si potessero costruire con gli stessi elementi, sarebbero uguali al primo. Lo stesso ripetasi per gli altri casi di eguaglianza considerati.

Vediamo ora come si costruisca un triangolo, dati tre elementi, che servano a individuarlo. Premettiamo a tal uopo il seguente

96. Problema. — *Per un punto, dato sopra una retta condurre un'altra retta tale che formi con essa un angolo uguale ad un angolo dato.*

Si descriva con raggio qualunque e col centro nel vertice A′ dell'angolo dato un circolo, il quale taglierà i lati in due punti B′, C′. Si descriva poi con raggio uguale ad A′B′, e col centro nel punto dato A, un circolo, il quale incontrerà una delle semirette di a, uscenti da A, in un punto B. Con raggio eguale alla distanza B′C′, e col centro in B, si descriva un altro circolo il quale taglierà il circolo di centro A in due punti C, C_1. Le rette AC, AC_1 sono le soluzioni del problema. Infatti i triangoli A′B′C′, ABC, ABC_1, avendo i lati rispettivamente uguali, sono uguali, e perciò gli angoli $B'\widehat{A'}C'$, $B\widehat{A}C$, $B\widehat{A}C_1$ sono uguali.

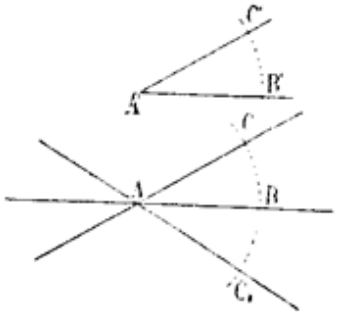

Fig. 78.

97. Problema. — *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso.*

Sia $\widehat{A}$ l'angolo, b, c i lati dati. Sui lati dell'angolo $\widehat{A}$ si stacchino, a partire da A, due segmenti AB, AC eguali a b, c rispettivamente, e si conduca la retta BC. Evidentemente il triangolo ABC è quello richiesto.

Fig. 79.

98. Problema. — *Costruire un triangolo dato un lato e i due angoli adiacenti.*

Sia MN il lato, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ gli angoli dati: sopra una retta indefinita si prenda un segmento AB eguale ad MN e per i punti A, B si conducano due rette tali che gli angoli coniugati interni, che esse formano con la retta AB, sieno uguali agli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ rispettivamente. Se la somma degli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ è minore di un angolo piatto, le due rette suddette s'incontreranno (§ 84, Cor. 1°), e si otterrà un triangolo ABC, che è quello richiesto.

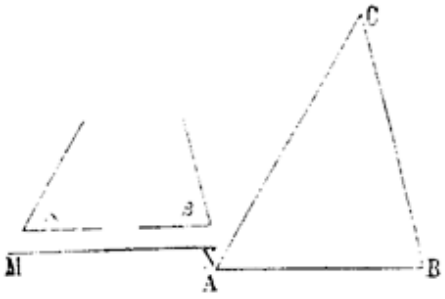

Fig. 80.

Se la somma degli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ fosse uguale, o maggiore di un angolo piatto, il triangolo evidentemente non si potrebbe costruire, poichè sappiamo che in ogni triangolo la somma di due angoli deve essere minore di un angolo piatto.

99. Problema. — *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.*

Sieno a e b i due segmenti dati $(a > b)$ ed α l'angolo dato.
Il problema presenta due casi:
1°, l'angolo α è opposto al lato maggiore,
2°, l'angolo α è opposto al lato minore.
Nel 1° caso (Fig. 81) l'angolo α può essere acuto, retto, od ottuso.
Sopra un lato di un angolo eguale ad α si porti, a partire dal vertice, il segmento AC (fig. 81) eguale a b, poi col centro in C e con raggio a si descriva un circolo. Siccome, per ipotesi, a è maggiore di AC, il vertice A dell'angolo sarà interno al cerchio descritto, e quindi la retta AB dovrà incontrare la circonferenza in due punti B e B', situati da parti opposte rispetto ad A (§ 85, Cor. 4°). Unendo C con B o con B', secondo che l'angolo dato è acuto od ottuso, si ha che il triangolo richiesto è ABC, oppure AB'C.

Fig. 81.

Se l'angolo α è retto (Fig. 82), ciascuno dei due triangoli uguali ABC, AB'C è il richiesto, e quindi il problema è sempre determinato ed ammette una sola soluzione.

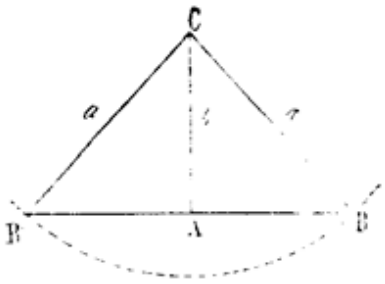

Fig. 82.

Nel 2° caso (Fig. 83) l'angolo dato α non può essere che acuto, perchè in un triangolo al lato minore è opposto l'angolo minore; e quindi, se l'angolo opposto al lato minore fosse retto, od ottuso, il triangolo dovrebbe avere un angolo retto ed uno ottuso, oppure due ottusi, ciò che è impossibile.

Pertanto sia $\widehat{BAC}$ un angolo acuto eguale ad α. Fatto $AC = b$, con centro C e con raggio a si descriva un circolo. Se a è maggiore del segmento perpendicolare CD condotto alla retta AB, il punto D sarà interno al circolo descritto, e quindi la retta AB taglierà il circolo in due punti B e B' (§ 85, Cor. 4°), i quali dovranno essere situati sulla semiretta AB', perchè, essendo l'angolo $\widehat{CAB}$ acuto, tutti i punti della retta AB situati da parte opposta di D rispetto al punto A hanno dal centro C del circolo una distanza maggiore di AC, e quindi sono esterni al cerchio medesimo. Ne segue che entrambi i triangoli ABC, AB'C sono soluzioni del problema.

Fig. 83.

Se poi a è uguale al segmento CD, il solo triangolo, che soddisfa al problema, è ACD. Infine, se a è minore di CD, tutti i punti

della retta AB hanno da C una distanza maggiore di a, e quindi sono esterni al cerchio descritto, e il problema è impossibile.

Dunque nel 2° caso il problema ammette due, una o nessuna soluzione.

100. Problema. — *Costruire un triangolo, i cui lati sieno eguali a tre segmenti dati, tali che ciascuno sia minore della somma degli altri due.*

Sappiamo già che, se tre segmenti sono lati di uno stesso triangolo, è necessario che ciascuno sia minore della somma degli altri due (§ 83, Teor.); ora mostreremo che queste condizioni sono anche sufficienti, cioè che se M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 sono tre segmenti, tali che sia $M_1N_1 < M_2N_2 + M_3N_3$, $M_2N_2 < M_1N_1 + M_3N_3$, $M_3N_3 < M_1N_1 + M_2N_2$, è possibile costruire un triangolo, che abbia per lati questi segmenti. Osserviamo intanto che, supposto M_1N_1 non inferiore agli altri due segmenti, le ultime due condizioni sono evidentemente verificate, e resta effettivamente una sola condizione, che è la prima.

Sopra una retta prendiamo un segmento AB eguale al segmento M_1N_1, che supponiamo non minore di ciascuno degli altri due; quindi descriviamo due circoli, uno col centro in A e con raggio M_2N_2 e l'altro col centro in B e con raggio M_3N_3. Il primo di questi incontra la retta AB in un punto D, interno al segmento AB, se $M_1N_1 > M_2N_2$, oppure coincidente con B, se $M_1N_1 \equiv M_2N_2$, ed in un altro punto E, situato rispetto ad A dalla parte opposta di B. L'altro circolo incontra la retta AB in un punto K, interno al segmento AB, se $M_1N_1 > M_3N_3$, oppure coincidente con A, se $M_1N_1 \equiv M_3N_3$, ed in un altro punto H, situato rispetto a B dalla parte opposta di A. Siccome, per ipotesi, è $M_1N_1 < M_2N_2 + M_3N_3$, sarà pure $AB < AD + BK$, e quindi $AB - BK < AD$, ovvero $AK < AD$. In ogni caso dunque il punto K è interno, ed il punto H esterno al cerchio, che ha per centro A; perciò i due circoli descritti devono avere almeno due punti, comuni (§ 27, Cor. 1°). Se C è uno di questi punti, è chiaro che ABC è il triangolo domandato.

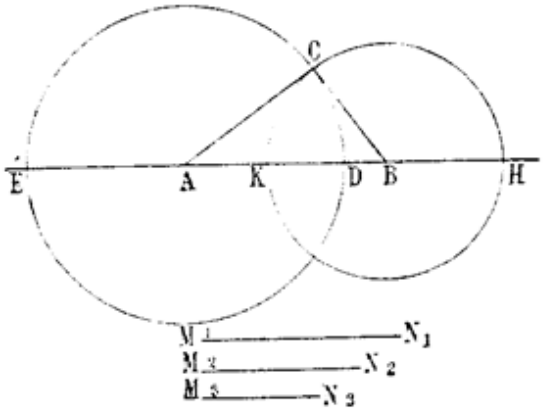

Fig. 84.

Corollario. — *È sempre possibile costruire un triangolo equilatero, che abbia i suoi lati eguali ad un segmento dato.*

Se infatti sono dati tre segmenti eguali, è soddisfatta la condizione che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.

101. Problema. — *Costruire un poligono, che abbia gli elementi disposti in un certo ordine, e di cui si conoscono i lati e gli angoli, eccettuati:*

1°. Due lati consecutivi e l'angolo compreso;

2°. Un lato e i due angoli adiacenti ad esso;

3°. Tre angoli consecutivi.

I primi due casi non presentano alcuna difficoltà, perchè essi si riducono alla costruzione successiva di angoli e segmenti rispettivamente uguali ad angoli e segmenti dati; il terzo caso poi si riduce al secondo ed alla costruzione di un triangolo, dati i tre lati (§ 100, Prob.)

QUADRANGOLI.

102. Dalle proprietà generali, dei poligoni studiate nei §§ precedenti, si ricavano, relativamente ai quadrangoli, i seguenti

Corollari. — *1°. In un quadrangolo esistono due diagonali.*

2°. Un lato di un quadrangolo, piano o gobbo, è minore della somma di tutti gli altri.

3°. In un quadrangolo, non intrecciato, la somma degli angoli interni è uguale a due angoli piatti. In un quadrangolo convesso la somma degli angoli esterni è pure uguale a due angoli piatti.

4°. Se un quadrangolo è equiangolo, esso ha tutti gli angoli retti.

5°. Due quadrangoli convessi sono uguali:

a) *se hanno tre coppie di lati ordinatamente uguali, ed eguali le due coppie di angoli, compresi fra i lati uguali;*

b) *se hanno tre coppie di angoli rispettivamente uguali, ed eguali le due coppie di lati, che uniscono i vertici degli angoli eguali;*

c) *se hanno i lati rispettivamente uguali, ed eguale un angolo compreso fra i lati eguali.*

103. Definizioni. — 1ª. In un quadrangolo si dicono *opposti* due vertici non situati in un lato, *opposti* due angoli che hanno per vertici due vertici opposti del quadrangolo, *opposti* due lati non consecutivi.

2ª. Si chiama *trapezio* ogni quadrangolo, che ha due lati opposti paralleli. In un trapezio si chiamano *basi* i lati paralleli, *altezza* il segmento perpendicolare alle basi compreso tra esse, *mediana* il segmento che unisce i punti medi degli altri due lati.

Fig. 85.

Teorema. — *La mediana di un trapezio è uguale alla semisomma delle due basi ed è parallela ad esse.*

Sia MN la mediana del trapezio dato ABCD, e sia E il punto d'incontro della retta BN col prolungamento dell'altra base AD del trapezio. I due triangoli BNC, DNE sono eguali, avendo il lato $CN \equiv ND$ per ipotesi, l'angolo $\widehat{BNC} \equiv \widehat{DNE}$, perchè opposti al vertice e l'angolo $\widehat{NBC} \equiv \widehat{NED}$, perchè alterni interni, rispetto alle parallele BC, AE e alla trasversale BE; dunque $BC \equiv DE$, $BN \equiv NE$. Allora, nel trian-

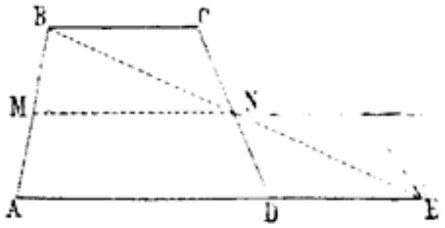

Fig. 86.

golo BAE, il segmento MN unisce i punti medi di due lati, e quindi (§ 86, Cor.) è parallelo ed eguale alla metà del terzo lato AE. Ma $AE = AD + DE = AD + BC$; quindi il teorema resta dimostrato

104. Definizione. — Si chiama *parallelogrammo* ogni quadrangolo, che ha ciascun lato parallelo al suo opposto.

Un parallelogrammo può riguardarsi in doppio modo come un trapezio, secondo che si prendono per basi due lati opposti, oppure gli altri due. Per conseguenza un parallelogrammo ha due altezze e due mediane.

Teorema. — *In ogni parallelogrammo:*
1° i lati opposti sono eguali;
2° gli angoli opposti sono eguali;
3° le due diagonali si tagliano nel loro punto medio.

Sia ABCD un parallelogrammo. 1°. I lati AD, BC sono uguali, come segmenti paralleli compresi fra rette parallele (§ 51, Teor.); e per la stessa ragione sono pure eguali i lati AB, CD.

Fig. 87.

2°. Gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ hanno i lati diretti in senso contrario, e perciò sono uguali (§ 48, Teor.). Per la stessa ragione sono uguali gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{C}$.

3°. Sia O il punto d'incontro delle diagonali del parallelogrammo ABCD. I due triangoli ABO, CDO hanno i lati AB, CD uguali, come lati opposti del parallelogrammo dato, gli angoli $\widehat{BAO}$, $\widehat{OCD}$ uguali, come alterni interni rispetto alle parallele AB, CD ed alla trasversale AC, e gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ uguali, perchè opposti al vertice; essi perciò sono uguali, ed è $BO = OD$, $AO = OC$; ossia O è il punto medio tanto della diagonale AC, quanto della diagonale BD.

Fig. 88.

Corollari. — *1°. Due parallelogrammi sono eguali, se hanno due lati consecutivi e l'angolo compreso rispettivamente uguali.*
2°. Due parallelogrammi eguali si possono portare a coincidere in due modi diversi.

105. Teorema. — *Un quadrangolo convesso è un parallelogrammo;*
1° se ha ogni lato uguale al suo opposto;
2° se ha ogni angolo uguale al suo opposto;
3° se le sue diagonali si tagliano nel loro punto medio.

1°. Abbiasi (Fig. 89) il quadrangolo ABCD, nel quale sia $AB = CD$, $AD = CB$. Condotta la diagonale AC, si ottengono due triangoli ABC, ADC eguali, perchè hanno un lato AC comune e gli

altri due lati rispettivamente eguali. Ne segue che gli angoli $A\widehat{C}B$, $C\widehat{A}D$ sono eguali, e poichè questi sono alterni interni rispetto alle rette AD, BC e alla trasversale AC, le due rette AD, BC sono parallele. Parimente, essendo uguali i due angoli $B\widehat{A}C$, $A\widehat{C}D$ le due rette AB, CD sono parallele, e perciò il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

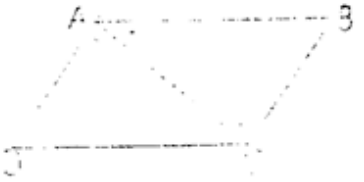

Fig. 89.

2°. Nel quadrangolo ABCD (Fig. 87) si abbia $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$. Da queste eguaglianze deriva $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D}$; e siccome la somma dei quattro angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ è uguale a due angoli piatti, se ne ricava che la somma degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, coniugati interni rispetto alle rette AD, BC e alla trasversale AB, è uguale ad un angolo piatto. Perciò le rette AD, BC sono parallele. Nello stesso modo si dimostra che le rette AB, DC son parallele; e resta così dimostrato che il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

3°. Il punto O, comune alle diagonali del quadrangolo convesso ABCD, sia il punto medio di ambedue le diagonali stesse (Fig. 88). I due triangoli OAB, OCD sono uguali, perchè hanno due lati rispettivamente uguali per ipotesi, e gli angoli $A\widehat{O}B$, $C\widehat{O}D$, compresi fra essi, uguali come opposti al vertice. Ne segue che gli angoli $B\widehat{A}O$, $O\widehat{C}D$, alterni interni rispetto alle rette AB, CD e alla trasversale AC, sono eguali, e perciò le rette AB, CD sono parallele. Nello stesso modo, osservando che i triangoli AOD, BOC sono uguali, si può dimostrare che le rette AD, BC sono parallele. Il quadrangolo ABCD è dunque un parallelogrammo.

Corollario. — *Ogni diagonale di un parallelogrammo forma coi lati del medesimo due triangoli eguali.*

106. Teorema. — *Un quadrangolo convesso è un parallelogrammo, se ha due lati opposti uguali e paralleli.*

Nel quadrangolo convesso ABCD (Fig. 89) i lati opposti AB, CD sieno uguali e paralleli. Condotta una diagonale AC, si ottengono i due triangoli ABC, CDA uguali, perchè hanno il lato AC comune, i lati AB, CD uguali per ipotesi, e gli angoli $B\widehat{A}C$, $A\widehat{C}D$ uguali come alterni interni rispetto alle rette parallele AB, CD e alla trasversale AC. Ne segue che anche gli angoli $B\widehat{C}A$, $C\widehat{A}D$, alterni interni rispetto alle rette BC, AD e alla trasversale AC, sono uguali, e quindi le rette BC, AD sono parallele. Perciò il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

107. Teorema. — *Esiste un parallelogrammo, che ha due lati consecutivi e l'angolo compreso uguali a due segmenti e ad un angolo dato.*

Sui lati del dato angolo $\widehat{A}$ si prendano due segmenti AB, AD uguali ai segmenti dati, e per gli estremi B, D di questi si conducano le parallele ai lati AD, AB rispettivamente. Si ottiene così un parallelogrammo, che è il richiesto. Tutti i parallelogrammi poi che si possono costruire, in modo che abbiano due lati consecutivi e l'angolo compreso eguali a due segmenti e ad un angolo dato, sono eguali fra loro (§ 104, Cor. 1°).

Fig. 90.

Osservazione. — I segmenti AB, AD e l'angolo $\widehat{A}$ si possono prendere in un modo qualunque, e quindi potranno darsi i seguenti casi particolari:

1°. L'angolo $\widehat{A}$ è retto. Allora l'angolo $\widehat{C}$, eguale ad $\widehat{A}$, e gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$, supplementari di $\widehat{A}$, sono pure retti.

2°. I lati AB, AD sono eguali. Allora tutti i quattro lati AB, BC, CD, AD sono eguali.

3°. L'angolo $\widehat{A}$ è retto, e contemporaneamente i lati AB, CD sono eguali; in tal caso tutti i lati sono uguali, e tutti gli angoli sono retti.

Definizioni. — 1ª. Chiamasi *rettangolo* ogni quadrangolo equiangolo.
2ª. Chiamasi *rombo o losanga* ogni quadrangolo equilatero.
3ª. Chiamasi *quadrato* ogni quadrangolo equiangolo ed equilatero.

I rettangoli, le losanghe, i quadrati sono parallelogrammi; un quadrato poi si può considerare come rettangolo e come losanga.

108. Teorema. — *Le diagonali di un rettangolo sono uguali.* Inversamente: *un parallelogrammo, avente le diagonali uguali, è un rettangolo.*

1°. Sieno AC, BD le diagonali del rettangolo ABCD. I triangoli rettangoli ABD, DCA sono uguali, perchè hanno il cateto AD comune e i cateti AB, DC uguali, come lati opposti di un rettangolo, perciò hanno le ipotenuse AC, BD uguali.

2°. Inversamente: sia ABCD un parallelogrammo, avente le diagonali AC, BD uguali. I due triangoli ABD, DCA sono uguali, perchè hanno il lato AD comune, i lati AC, BD uguali per ipotesi, e i lati AB, CD pure eguali, come lati opposti di un parallelogrammo; perciò gli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{CDA}$ sono eguali, e, siccome sono anche supplementari, sono retti.

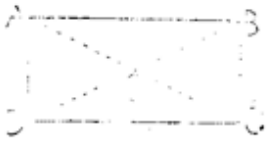
Fig. 91.

109. Teorema. — *In ogni losanga le diagonali sono perpendicolari.* Inversamente: *un parallelogrammo, avente le diagonali perpendicolari, è una losanga.*

1°. Se il parallelogrammo ABCD è una losanga, il triangolo ADB è isoscele, e perciò la mediana AO è perpendicolare alla base DB.

2°. Inversamente, se ABCD è un parallelogrammo avente le diagonali perpendicolari, i due lati consecutivi AB, AD sono uguali, come ipotenuse di triangoli rettangoli AOB, AOD che sono eguali, perchè hanno i cateti rispettivamente eguali.

Fig. 92.

Corollario. — *In ogni quadrato le diagonali sono uguali e perpendicolari.* Inversamente: *ogni parallelogrammo, avente le diagonali uguali e perpendicolari, è un quadrato.*

Infatti abbiamo visto che il quadrato può considerarsi come rettangolo e come losanga; quindi, considerando il quadrato come rettangolo, si ha che le sue diagonali sono eguali, e considerandolo come losanga, si ha che le sue diagonali sono perpendicolari.

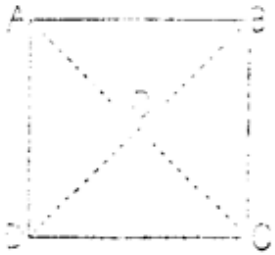

Fig. 93.

Inversamente: se un parallelogrammo ha le diagonali eguali e perpendicolari fra loro, esso è un rettangolo ed una losanga, vale dire è un quadrato.

110. Nel § 107 abbiamo dimostrato, che si può costruire un parallelogrammo, avente due lati consecutivi e l'angolo compreso rispettivamente eguali a due segmenti e ad un angolo dato. Si possono perciò costruire infiniti parallelogrammi, aventi un angolo dato e un lato adiacente eguale ad un segmento dato; tutti questi parallelogrammi si dice che costituiscono *una serie di parallelogrammi*. Variando poi il lato e l'angolo comune a tutti i parallelogrammi di una serie, si possono ottenere infinite altre serie di parallelogrammi, tutte diverse tra loro.

È chiaro che un parallelogrammo di una serie è individuato, quando è dato il segmento, al quale deve essere eguale l'altro lato adiacente all'angolo comune ai parallelogrammi della serie, e viceversa; di guisa che fra i parallelogrammi e i segmenti suddetti esiste una corrispondenza univoca.

Dati due parallelogrammi di una serie AA'BB', BB'CC', se portiamo l'uno adiacente all'altro, in modo che il lato BB' dell'uno coincida col lato eguale BB' dell'altro, gli angoli $B'\widehat{B}C$, $B\widehat{B'}C'$ essendo i supplementi rispettivamente degli angoli $\widehat{B'}BA$, $B\widehat{B'}A'$, i segmenti BC, B'C' cadono rispettivamente sui prolungamenti di AB, A'B', e i lati BB', CC' risultano paralleli; quindi i due parallelogrammi dati formano insieme un nuovo parallelogrammo della serie.

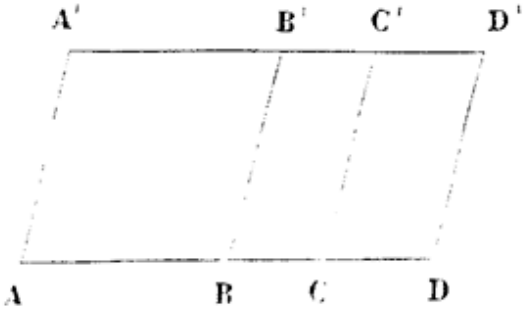

Fig. 94.

Definizioni. — 1ª. Due parallelogrammi di una serie si dicono *adiacenti*, quando hanno un lato eguale in comune, sono situati nello stesso piano da parti opposte della retta comune, ed hanno gli altri due lati consecutivi.

2ª. Dati più parallelogrammi di una serie, se si porta il secondo adiacente al primo, il terzo adiacente al secondo, ma non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, il parallelogrammo, che risulta dall'insieme di tutti i parallelogrammi dati, si dice la loro *somma*.

In seguito alle date definizioni ed alla proprietà enunciata nel Cor. 1° del § 104, risulta che le serie di parallelogrammi costituiscono infinite altre classi di grandezze, per le quali sussistono tutte le proprietà, che si sono dimostrate per le altre serie di grandezze finora studiate. Ammetteremo dunque senz'altro come dimostrate anche per le serie di parallelogrammi la proprietà commutativa e associativa della somma, e le conseguenze che ne derivano. Inoltre intenderemo estese anche a queste nuove serie di grandezze le definizioni di differenza, multiplo, summultiplo, ecc. e i teoremi del § 20.

Teorema. — *1°. Un parallelogrammo di una serie è maggiore, eguale, o minore di un altro della stessa serie, secondo che il segmento ad esso corrispondente è maggiore, eguale, o minore del segmento corrispondente al secondo.*

2°. Se un parallelogrammo di una serie è somma di più altri parallelogrammi della serie, anche il segmento corrispondente ad esso è somma dei segmenti corrispondenti alle sue parti; e viceversa.

Si imiti la dimostrazione del § 33.

Corollari. — *1°. Se un parallelogrammo di una serie è multiplo (o summultiplo) di un altro, il segmento corrispondente al primo è equimultiplo (o equisummultiplo) del segmento corrispondente al secondo; e viceversa.*

2°. Se un parallelogrammo di una serie è differenza di due altri, anche il segmento corrispondente ad esso è differenza dei segmenti corrispondenti agli altri due; e viceversa.

CAPITOLO II

Angoloidi.

111. Definizioni. — 1ª. Chiamasi *angoloide*, o *angolo solido*, o *angolo poliedro* la figura individuata da tre o più semirette, uscenti da un punto, date in un certo ordine, e tali che tre di esse consecutive non stieno in un piano; dai piani individuati dalle coppie di semirette consecutive, e da quello individuato dalla prima e dall'ultima.

2ª. Le semirette date si chiamano gli *spigoli* o *costole*, il punto, dal quale esse escono, *vertice* dell'angoloide; gli angoli convessi, formati da due spigoli successivi e quello formato dal primo e dall'ultimo, si chiamano le *facce* dell'angoloide; i piani delle facce si chiamano i *piani* dell'angoloide.

3ª. Si chiama *superficie* di un angoloide, la superficie formata dalle facce.

4ª. Un angoloide avente tutti i diedri eguali si dice *equiedro*.

Per es. le cinque semirette VA, VB, VC, VD, VE, (Fig. 95) uscenti dallo stesso punto V e date nell'ordine scritto, individuano un angoloide, di cui le semirette stesse sono gli spigoli e gli angoli $A\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}D$, $D\widehat{V}E$, $E\widehat{V}A$ sono le facce.

È evidente che un angoloide ha tante facce quanti sono i suoi spigoli.

Una semiretta può percorrere la superficie dell'angoloide, andando dalla posizione dello spigolo VA a quella di VB, da questa a quella di VC, ... , infine dalla posizione di VE a quella di VA; oppure andando dalla posizione di VA a quella di VE, da questa a quella di VD, ... , infine dalla posizione di VB a quella di VA. Perciò l'angoloide s'indica indifferentemente coi simboli $\widehat{V.ABCDE}$. . . . ., $\widehat{V.EDCBA}$, ...

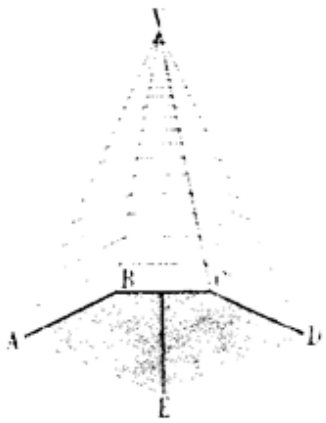

Fig. 95.

Spesse volte un angoloide s'indica anche colla sola lettera che indica il vertice, purchè ciò non possa dar luogo ad equivoci.

5ª. Un angoloide si chiama *triedro* o *trispigolo*, *tetraedro* o *quadrispigolo*, ecc. . . . . , secondo che ha 3, 4 . . . . facce. Un angoloide triedro si chiama brevemente un *triedro*.

6ª. Un angoloide è *convesso*, quando tutti i suoi spigoli si trovano da una stessa parte di un suo piano qualunque; *concavo* nel caso contrario; *intrecciato*, quando almeno due facce hanno in comune una semiretta interna ad entrambe.

È chiaro che, se per il vertice di un angoloide qualunque si può far passare un piano, in modo che l'angoloide giaccia tutto in una

delle parti, in cui il piano divide lo spazio, ogni piano, parallelo al primo, e che incontra uno degli spigoli, incontra anche tutti gli altri, e taglia la superficie dell'angoloide secondo il contorno di un poligono, il quale è convesso, concavo, o intrecciato, secondo che l'angoloide stesso è convesso, concavo, o intrecciato.

Inversamente: dato un poligono piano ed un punto fuori del suo piano, le semirette, uscenti da quel punto e passanti per i vertici del poligono, prese nel medesimo ordine dei vertici del poligono, individuano un angoloide, il quale è convesso, concavo o intrecciato, secondo che il poligono stesso è convesso, concavo o intrecciato.

112. Teorema. — *La superficie di un angoloide convesso è una superficie completa.*

Infatti, dal P. IV, 1° deriva che, se una superficie incompleta ha i suoi limiti sopra una superficie completa, essa suddivide in due quella delle parti dello spazio, (separate dall'altra superficie), nella quale è contenuta. Dunque, date tre semirette VA, VB, VC, non situate nello stesso piano, (Fig. 96) i due semi piani AVB, AVC dividono lo spazio in due parti (diedri), e l'angolo $B\widehat{V}C$, che ha i lati sui due semipiani suddetti, e che perciò è interno al diedro convesso $B\widehat{A}VC$ (§ 50, Teor. 2°), divide questo diedro in due parti. Una di queste parti è limitata dalla superficie VABC del triedro.

In generale, date più semirette VA, VB, VC, VD, VE spigoli di un angoloide convesso, si sa che i due semipiani α e β, contenenti le facce $A\widehat{V}B$, $A\widehat{V}E$, dividono lo spazio in due parti (diedri). Ora,

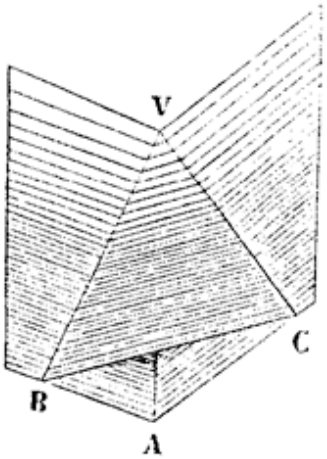

Fig. 96.

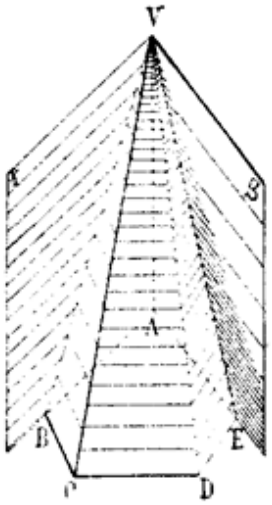

Fig. 97.

poichè l'angoloide è convesso, e perciò tutti gli spigoli devono trovarsi in quella delle parti dello spazio separate dal piano α, la quale contiene lo spigolo VE, e in quella delle parti di spazio separate dal piano β, la quale contiene lo spigolo VB, è chiaro che la parte di superficie VBCDE dev'essere compresa nel diedro convesso $B\widehat{V}AE$. Ne segue che questo diedro è diviso dalla superficie suddetta

in due parti, delle quali una è limitata dalla superficie dell'angoloide che si considera.

Corollario 1°. — *La superficie di un angoloide convesso divide lo spazio in due parti, una delle quali contiene tutti i prolungamenti delle costole, e l'altra non ne contiene nessuna.*

Definizioni. — 1ª. La parte di spazio, limitata dalla superficie di un angoloide convesso, che non contiene i prolungamenti delle costole, dicesi *solido dell'angoloide* o semplicemente *angoloide*.

2ª. Ogni diedro convesso, che ha per costola uno spigolo dell'angoloide, e le cui facce contengono le facce dell'angoloide, che passano per esso, dicesi *diedro interno* dell'angoloide.

3ª. Un diedro interno dicesi *compreso* fra le due facce consecutive dell'angoloide, che passano per la sua costola, oppure si dice *adiacente* ad esse. In un triedro un diedro interno si dice *opposto* a quella faccia, alla quale non è adiacente.

Corollario 2°. — *Ogni angolo, o poligono, il quale abbia i lati sulla superficie di un angoloide convesso, o interni ad esso, è interno all'angoloide, o è parte della superficie del medesimo.*

La dimostrazione è identica a quella del Corollario del § 76.

113. Teorema. — *Una retta non può incontrare in più di due punti la superficie di un angoloide convesso.*

Si imiti la dimostrazione del Teorema del § 82, Teor. 2°.

114. I prolungamenti degli spigoli di un angoloide, presi nel medesimo ordine degli spigoli stessi, individuano un secondo angoloide.

Definizione 1ª. — Due angoloidi si dicono *opposti al vertice*, quando gli spigoli di ciascuno di essi sono i prolungamenti degli spigoli dell'altro, presi nel medesimo ordine.

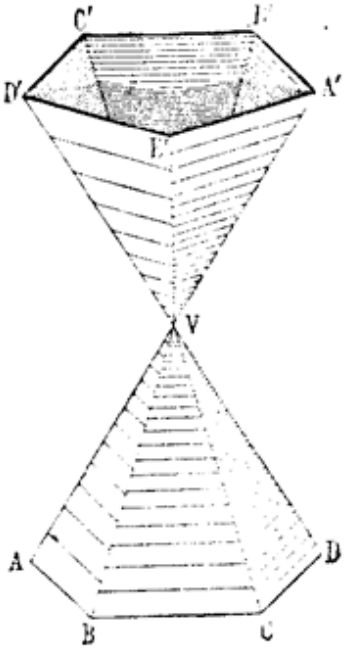

Fig. 98.

Le facce di due angoloidi opposti sono rispettivamente eguali, come angoli opposti al vertice, e i diedri sono pure rispettivamente uguali, come diedri opposti alla costola.

È facile convincersi che due angoloidi, opposti al vertice, hanno bensì tutti i loro elementi rispettivamente eguali, ma la disposizione dei medesimi non è la stessa in entrambi. Infatti sieno, per fissare le idee, due angoloidi opposti $V.\widehat{ABCDE}$, $V.\widehat{A'B'C'D'E'}$, e immaginiamo che un osservatore disteso lungo lo spigolo VA del primo con la testa rivolta verso il vertice, abbracci l'angoloide medesimo; egli vedrà succedersi gli spigoli da destra verso sinistra nell'ordine seguente: VB, VC, VD, VE. Se invece lo stesso osservatore prendesse una posizione analoga sul corrispondente spigolo VA' dell'altro angoloide, egli

vedrebbe succedersi gli spigoli da destra a sinistra nell'ordine seguente: VE′, VD′, VC′, VB′; vale a dire nell'ordine inverso del primo. A causa di questa differenza di disposizione degli elementi possiamo asserire che:

Due angoloidi opposti al vertice non si possono generalmente portare a coincidere.

Infatti consideriamo, per esempio, i due triedri opposti $\widehat{V.ABC}$, $\widehat{V.A'B'C'}$. È manifesto che per ottenere la coincidenza (se è possibile) dobbiamo sovrapporre le due facce eguali AVB, A′VB′, ciò che si può fare in due maniere differenti: o facendo scorrere il piano delle due facce su sè stesso, rotando uno dei triedri di un mezzo giro intorno al punto V; oppure ribaltando una di queste facce sull'altra attorno alla bisettrice degli angoli $A'\widehat{V}B$, $B'\widehat{V}A$.

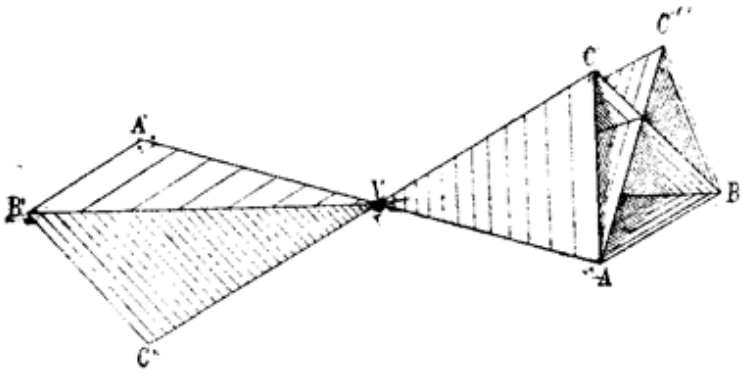

Fig. 99.

Evidentemente nel primo caso i due angoloidi vengono a cadere da parti opposte rispetto alla faccia comune, e però non coincidono.

Nel secondo caso lo spigolo VA′ cadrà su VB e VB′ su VA, mentre VC′ prenderà la posizione VC″, non coincidente generalmente con VC, perchè, i diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$ essendo generalmente disuguali, saranno pure disuguali i diedri $\widehat{VA'}$, $\widehat{VB'}$ e per conseguenza i piani delle facce AVC, A′VC″ non possono coincidere.

Da quanto si è detto si capisce facilmente che la coincidenza però avrebbe luogo in questo secondo caso, se il triedro $\widehat{V.ABC}$ avesse due diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$ eguali; perchè allora, a causa dell'eguaglianza dei diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$, e quindi anche dei loro opposti $\widehat{VA'}$, $\widehat{VB'}$, la faccia $A'\widehat{V}C'$ verrebbe sulla faccia $B\widehat{V}C$ e la faccia $B'\widehat{V}C'$ su $A\widehat{V}C$, di modo che lo spigolo VC′ verrebbe a coincidere con VC. Pertanto la faccia AVC sarebbe eguale alla faccia B′VC′, e quindi anche alla faccia BVC; vale a dire l'eguaglianza di due diedri del triedro porterebbe come conseguenza l'eguaglianza delle due facce opposte, dunque:

Corollario 1°. — *In un triedro a diedri eguali sono opposte facce eguali.*

Definizione 2ª. — Un triedro si dice *isoedro* quando ha due diedri, e quindi due facce eguali.

Corollario 2°. — *Un triedro isoedro è eguale al suo opposto al vertice.*

115. Teorema. — *In ogni angoloide una faccia è minore della somma delle altre.*

1°. Cominciamo a dimostrare questo teorema per il caso di un triedro. È evidente che una faccia di un triedro, minore od uguale ad una delle rimanenti, è minore della somma di queste. Basta dunque dimostrare, che, se in un triedro $V.\widehat{A}BC$ (Fig. 100) una faccia $A\widehat{V}C$ è maggiore di ciascuna delle altre due, è però minore della loro somma.

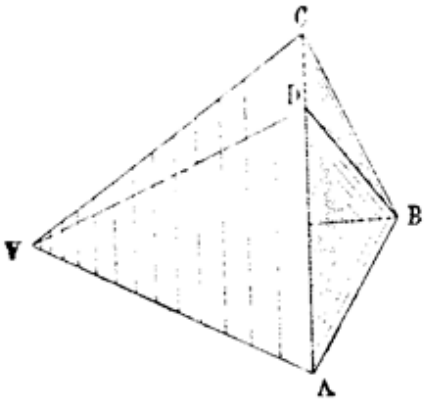

Fig. 100

Dall'angolo $A\widehat{V}C$ stacchiamo una parte $A\widehat{V}D$ eguale alla faccia $A\widehat{V}B$; poi sulle semirette VD, VB prendiamo due segmenti VD, VB eguali, e tracciamo un piano, che passi per i punti B, D, ed incontri i due spigoli VA, VC in due punti A, C. I triangoli AVD, AVB, avendo il lato VA comune, gli angoli $A\widehat{V}D$, $A\widehat{V}B$ eguali per costruzione, i lati VD, VB pure uguali per costruzione, sono uguali, ed è perciò $AD = AB$.

Nel triangolo ABC si ha $BC > AC - AB$, ossia $BC > AC - AD$, e perciò è $BC > DC$. I triangoli VCD, VBC hanno il lato VC comune, e i lati VD, VB eguali, ma il terzo lato CD dell'uno è minore del terzo lato BC dell'altro; perciò è anche $C\widehat{V}D < B\widehat{V}C$ (§ 91, Cor. 1°), e quindi $A\widehat{V}D + D\widehat{V}C < B\widehat{V}A + B\widehat{V}C$, ossia $A\widehat{V}C < B\widehat{V}A + B\widehat{V}C$.

2°. Consideriamo ora un angoloide qualunque $V.\widehat{A}BCDE$ (Fig. 101).

Si vuol dimostrare che una faccia qualunque, per esempio $A\widehat{V}E$, è minore della somma delle altre. Conduciamo i piani che passano per uno degli spigoli situati sulla faccia $A\widehat{V}E$, p. es: VA, e per gli altri spigoli ordinatamente. Considerando i triedri $V.\widehat{A}BC$, $V.\widehat{A}CD$, $V.\widehat{A}DE$, si hanno le disuguaglianze

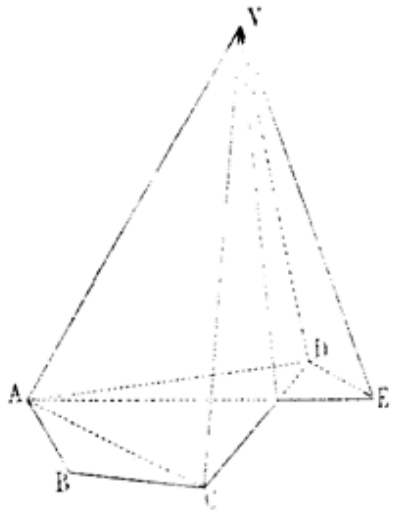

Fig. 101.

$$A\widehat{V}C < A\widehat{V}B + B\widehat{V}C$$
$$A\widehat{V}D < A\widehat{V}C + C\widehat{V}D$$
$$A\widehat{V}E < A\widehat{V}D + D\widehat{V}E:$$

e da queste si ricava

$$A\widehat{V}E < A\widehat{V}B + B\widehat{V}C + C\widehat{V}D + D\widehat{V}E.$$

Corollari. — *1°. In ogni triedro una faccia è maggiore della differenza dell'altre due.*

2°. Se due diedri di un triedro sono diseguali, anche le facce opposte sono diseguali, ed è maggiore quella che è opposta al diedro maggiore.

Nel triedro $\widehat{V.ABC}$ (Fig. 100) sia il diedro $\widehat{VB}$ maggiore del diedro $\widehat{VA}$. Per lo spigolo VB conduciamo un semipiano, interno al diedro $\widehat{CVBA}$, tale che il diedro $\widehat{DVBA}$ sia eguale al diedro $\widehat{VA}$. Il triedro $\widehat{V.ABD}$, avendo due diedri eguali, ha le facce $\widehat{AVD}$ $\widehat{BVD}$, ad essi opposte, pure eguali. Dal triedro $\widehat{V.BDC}$, si ha poi $\widehat{BVC} < \widehat{BVD} + \widehat{DVC}$, e quindi $\widehat{BVC} < \widehat{AVD} + \widehat{DVC}$, ossia

$$\widehat{BVC} < \widehat{AVC}; \; c.\,v.\,d.$$

3°. In un triedro un diedro è minore, eguale o maggiore di un altro, secondo che la faccia opposta al primo è minore, eguale o maggiore della faccia opposta all'altro.

Abbiamo visto nel § precedente ed in questo, che tutte le ipotesi, che si possono fare sull'eguaglianza o disuguaglianza, di due diedri di un triedro, ci conducono a tesi, che si escludono a vicenda, per conseguenza (V. Prelim., § 4) anche i teoremi inversi sono veri.

4° Se in un triedro le tre facce sono eguali, anche i tre diedri sono eguali; e viceversa.

116. Teorema. — *In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di due angoli piatti.*

Sia $\widehat{V.ABCDE}$ l'angoloide convesso dato. ABCDE una sezione di esso con un piano, che ne incontra tutti gli spigoli. È chiaro che il numero dei lati della sezione è eguale al numero delle facce dell'angoloide, e perciò (§ 85, Teor.) la somma degli angoli interni del poligono ABCDE, aumentata di due angoli piatti, è eguale alla somma degli angoli interni dei triangoli AVB, BVC, CVD, DVE, EVA.

Se ora consideriamo i triedri $\widehat{A.BVE}$, $\widehat{B.AVC}$, $\widehat{C.BVD}$, $\widehat{D.CVE}$, $\widehat{E.AVD}$, per il teorema del § precedente, si ha

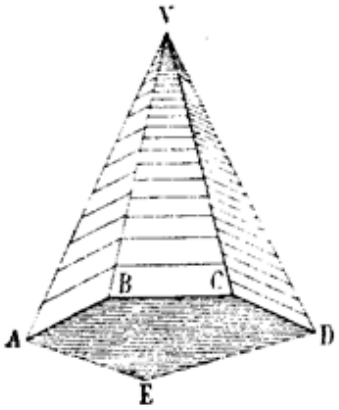

Fig. 102.

$$\widehat{BAE} < \widehat{BAV} + \widehat{EAV}$$
$$\widehat{ABC} < \widehat{ABV} + \widehat{CBV}$$
$$\widehat{BCD} < \widehat{BCV} + \widehat{DCV}$$
$$\widehat{CDE} < \widehat{CDV} + \widehat{EDV}$$
$$\widehat{AED} < \widehat{AEV} + \widehat{DEV},$$

dalle quali, si recava, indicando con S la somma degli angoli del poligono,

$$S < \widehat{BAV} + \widehat{ABV} + \widehat{BCV} + \widehat{CBV} + \widehat{CDV} + \widehat{DCV} + \widehat{EDV} + \widehat{DEV} + \widehat{AEV} + \widehat{EAV}.$$

Ora, siccome abbiamo visto che S, aumentata di due angoli piatti, è uguale al secondo membro della precedente disuguaglianza,

aumentato della somma delle facce dell'angoloide, così la somma delle facce dell'angoloide dev'essere necessariamente minore di due angoli piatti.

117. Definizione. — Se dal vertice di un angoloide convesso si conducono delle semirette perpendicolari alle successive facce, e situate dalla medesima parte degli spigoli dell'angoloide rispetto al piano della faccia stessa, le semirette così ottenute, prese nello stesso ordine delle facce, a cui sono perpendicolari, individuano un nuovo angoloide, che si dice *supplementare* del primo.

Teorema 1°. — *Se un angoloide è supplementare di un altro, questo è anche supplementare del primo.*

Sia per es. il triedro $\widehat{V.A'B'C'}$ supplementare del triedro $\widehat{V.ABC}$. (Fig. 103) Dico che $\widehat{V.ABC}$ è il supplementare di $\widehat{V.A'B'C'}$. Infatti, essendo la semiretta VB′ perpendicolare al piano AVC, VB′ è perpendicolare alla retta VA contenuta in quel piano, e per la stessa ragione VC′ è perpendicolare a VA. Per conseguenza VA, essendo perpendicolare tanto a VB′, quanto a VC′, è perpendicolare al piano di queste due rette, ossia alla faccia B′VC′ (§ 60, Cor. 1°).

Nello stesso modo si dimostra che tutti gli spigoli VA, VB, VC del primo angoloide $\widehat{V.ABC}$ sono perpendicolari alle facce dell'altro.

Inoltre gli spigoli VB, VB′, essendo rispettivamente perpendicolari alle facce $A'\widehat{V}C'$, $A\widehat{V}C$ e dalla stessa parte della faccia $A\widehat{V}C$, saranno pure dalla stessa parte rispetto alla faccia $A'\widehat{V}C'$ (§ 71, Cor. 2). Lo stesso potendosi ripetere per tutti gli spigoli, il teorema resta dimostrato.

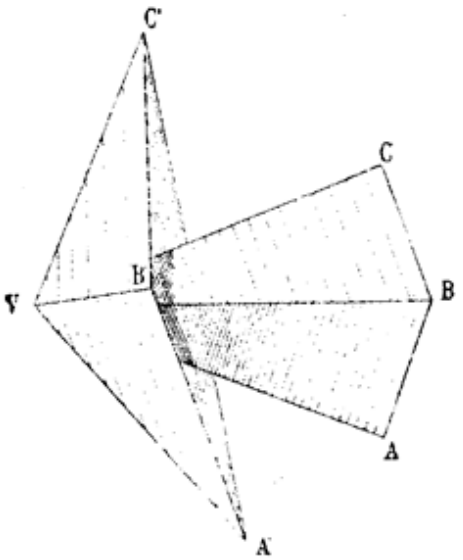

Fig. 103

Teorema 2°. — *Se due angoloidi sono supplementari, le facce dell'uno sono supplementari dei rettilinei dei diedri dell'altro.*

Siano per es. $\widehat{V.ABC}$, $\widehat{V.A'B'C'}$ due triedri supplementari (Fig. 103). Gli spigoli VB′, VC′, essendo perpendicolari alle facce $A\widehat{V}C$, $A\widehat{V}B$ del diedro $\widehat{VA}$, l'angolo $B'\widehat{V}C'$ è supplementare del rettilineo del diedro $\widehat{VA}$ (§ 71, Cor. 1). Analogamente si dimostra che le altre facce del triedro $\widehat{V.A'B'C'}$ o $\widehat{V.ABC}$ sono supplementari dei rettilinei degli altri diedri del triedro $\widehat{V.ABC}$ o $\widehat{V.A'B'C'}$ rispettivamente.

118. Teorema. — *In ogni angoloide convesso:*

1° un diedro, aumentato di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due, è maggiore della somma degli altri diedri.

2° la somma di tutti i diedri è minore di tanti diedri piatti quante sono le facce, ed è maggiore di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due.

1°. Indichiamo per brevità con A, B, C, D, ... gli n diedri dell'angoloide V dato, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ i loro rettilinei, con $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ i supplementi di questi rettilinei, ossia le facce dell'angoloide V', supplementare dell'angoloide dato, con p un angolo piatto e con π un diedro piatto. Nell'angoloide supplementare V' una faccia è minore della somma di tutte le altre, e quindi

$$\alpha' < \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots$$

da cui, aggiungendo ad ambo i membri la somma dei rettilinei dei diedri [redacted] dell'angoloide V, si ottiene

$$\alpha' + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') + (\delta + \delta') + \ldots,$$

ossia, essendo

$$\alpha + \alpha' \equiv \beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv \ldots \equiv p,$$

si ha

$$p + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (n-1)\,p,$$

e quindi

$$\beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (n-2)\,p.$$

Passando dai rettilinei ai diedri corrispondenti, si ha infine

$$B + C + D + \ldots < A + (n-2)\,\pi.$$

2°. Nello stesso angoloide V', supplementare di V, la somma delle facce è minore di due angoli piatti, cioè

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots < 2p,$$

e perciò

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') + (\delta + \delta') + \ldots < 2p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

ossia

$$n.p < 2p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots,$$

e quindi

$$(n-2).p < \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

Passando dai rettilinei ai diedri corrispondenti

$$(n-2)\,\pi < A + B + C + D + \ldots$$

È poi evidente che, essendo ogni diedro del dato angoloide minore di un diedro piatto, si ha

$$A + B + C + D + \ldots < n.\pi.$$

Corollario. — *In ogni triedro:*

1° ciascun diedro, aumentato di un diedro piatto, è maggiore della somma degli altri due.

2° la somma dei diedri è maggiore di uno, e minore di tre diedri piatti.

3° la differenza di due diedri è minore del diedro esterno conseguente al terzo.

119. Teorema. — *In ogni angoloide convesso la somma dei diedri esterni, formati da ciascuna faccia col prolungamento della seguente, è minore di due diedri piatti.*

Infatti, la somma di ogni diedro esterno dell'angoloide col suo conseguente interno è eguale a un diedro piatto; perciò la somma di tutti i diedri interni ed esterni dell'angoloide è eguale a tanti diedri piatti quante sono le facce: ma la somma dei diedri interni si è dimostrata maggiore di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due, dunque la somma dei diedri esterni dev'essere minore di due diedri piatti.

Corollario. — *Un angoloide convesso non può avere più di tre diedri acuti.*

EGUAGLIANZA DI TRIEDRI E ANGOLOIDI.

120. Teorema 1°. — *Se due triedri hanno una faccia eguale e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali, sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Sieno $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$ due triedri aventi $A\widehat{V}B = A'\widehat{V'}B'$, $\widehat{VA} = \widehat{V'A'}$, $\widehat{VB} = \widehat{V'B'}$. Se questi elementi sono disposti nello stesso modo, portando il secondo triedro sul primo, in maniera che la faccia $A'\widehat{V'}B'$ coincida colla faccia uguale $A\widehat{V}B$, le facce $A'\widehat{V'}C'$, $B'\widehat{V'}C'$ si disporranno sui

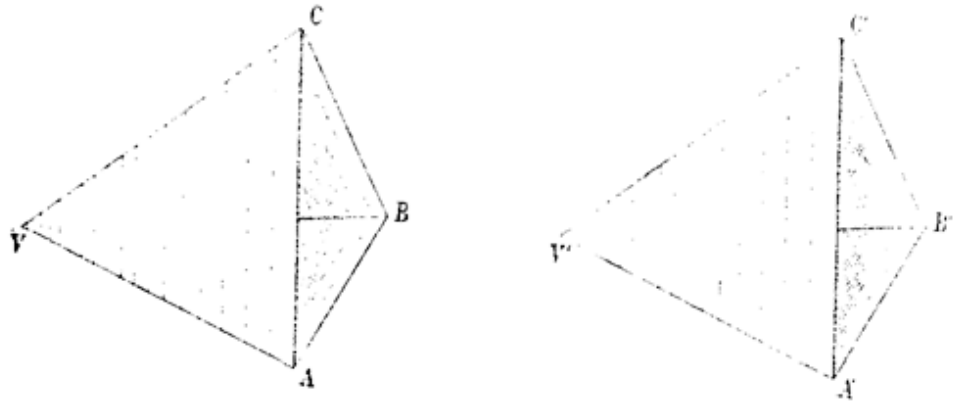

FIG. 104.

piani AVC, BVC rispettivamente, e perciò lo spigolo V'C' verrà a coincidere collo spigolo VC, di guisa che i due triedri coincideranno: dunque sono eguali.

Se invece i suddetti elementi sono disposti in ordine inverso, si dimostra nello stesso modo, che il triedro $\widehat{V'}$ può portarsi a coincidere con quello opposto al vertice di $\widehat{V}$.

In ambedue i casi si ha $V'\widehat{C'} \equiv V\widehat{C}$, $A'\widehat{V'}C' \equiv A\widehat{V}C$, $B'\widehat{V'}C' \equiv B\widehat{V}C$.

Teorema 2°. — *Se due triedri hanno un diedro eguale, compreso tra facce rispettivamente eguali, sono eguali, oppure l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Infatti, sieno $\widehat{V}$ e $\widehat{V'}$ i triedri dati, e $\widehat{T}$, $\widehat{T'}$ i triedri supplementari ad essi. Per le proprietà dei triedri supplementari sappiamo che a facce eguali di $\widehat{V}$ e $\widehat{V'}$ corrispondono diedri eguali di $\widehat{T}$ e $\widehat{T'}$, e viceversa; per conseguenza i due triedri supplementari, avendo eguali rispettivamente due diedri e la faccia ad essi adiacente, pel teorema precedente avranno anche tutti gli altri elementi rispettivamente eguali; ed allora anche i triedri dati avranno tutti i loro elementi ordinatamente eguali e saranno eguali, o l'uno eguale all'opposto al vertice dell'altro.

121. Teorema 1°. — *Due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, se hanno due facce e il diedro opposto ad una di esse rispettivamente eguali, purchè i diedri opposti alle altre due facce eguali sieno ambedue acuti, o ambedue retti, o ambedue ottusi, e gli spigoli comuni alle facce eguali non sieno perpendicolari alle rimanenti facce.*

Nei due triedri $V.\widehat{ABC}$, e $V'.\widehat{A'B'C'}$ sia $A\widehat{V}B \equiv A'\widehat{V'}B'$, $B\widehat{V}C \equiv B'\widehat{V'}C'$; l'uno è eguale all'opposto e $\widehat{VA} \equiv \widehat{V'A'}$. Io dico che i due triedri sono eguali o [redacted], purchè i diedri $V\widehat{C}$, $V'\widehat{C'}$, opposti alle facce eguali $A\widehat{V}B$, $A'\widehat{V'}B'$ sieno della

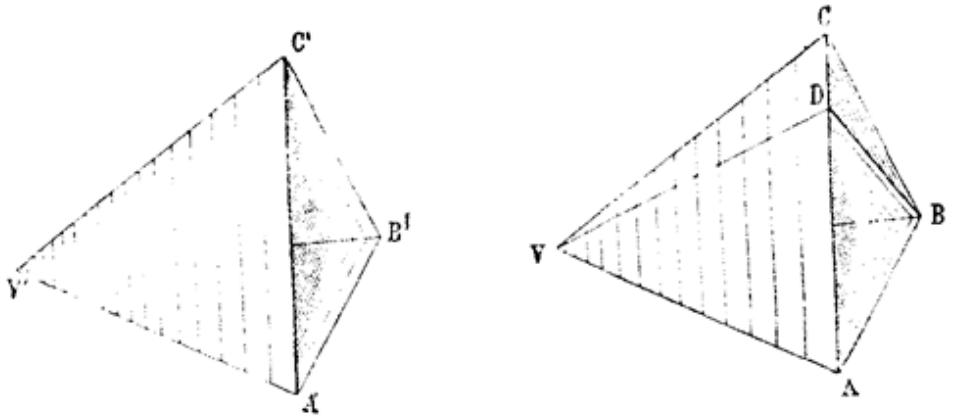

Fig. 105.

medesima specie, e gli spigoli VB, V'B' non sieno perpendicolari alle facce AVC, A'V'C' rispettivamente.

Se gli elementi dei due triedri sono egualmente disposti, portiamo la faccia $A'\widehat{V'}B'$ a coincidere colla sua eguale $A\widehat{V}B$, in modo che lo spigolo V'A' venga a coincidere collo spigolo VA e lo spigolo

V'B' con VB. A causa dell'eguaglianza dei diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{V'A'}$, ed essendo gli elementi disposti nello stesso modo, la faccia $A'\widehat{V'}C'$ si disporrà sul semipiano AVC. Devo dimostrare che lo spigolo V'C' viene a coincidere con VC. Se infatti esso prendesse una posizione diversa VD, si otterrebbe un triedro $\widehat{V.BCD}$ isoedro, nel quale sarebbe il diedro $B\widehat{VCD}$ eguale al diedro $C\widehat{VDB}$, e perciò supplementare di $A\widehat{VDB}$; ma i due diedri $B\widehat{VCD}$, $A\widehat{VDB}$ sono per ipotesi della stessa specie, quindi per essere supplementari dovrebbero essere retti. Allora i piani delle due facce $D\widehat{VB}$, $C\widehat{VB}$, entrambi perpendicolari al piano della faccia $A\widehat{VC}$, si taglierebbero secondo una retta VB perpendicolare a questo piano (§ 65, Cor.) ciò che è contrario alla ipotesi.

Se gli elementi eguali dei due triedri non fossero disposti nello stesso modo, si dimostrerebbe, con ragionamento analogo, che il triedro $\widehat{V'}$ è uguale all'opposto al vertice del triedro $\widehat{V}$.

In ambedue i casi è $A\widehat{VC} \equiv A'\widehat{V'}C'$, $\widehat{VB} \equiv \widehat{V'B'}$, $\widehat{VC} \equiv \widehat{V'C'}$.

Teorema 2°. — *Due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, se hanno due diedri e la faccia opposta ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè le facce opposte agli altri due diedri uguali sieno della stessa specie, e le facce comuni ai diedri eguali non sieno perpendicolari ai rimanenti spigoli.*

Dimostrazione simile a quella fatta per il teorema 2° del § precedente.

122. Teorema 1°. — *Se due facce di un triedro sono rispettivamente eguali a due facce di un altro triedro, e il diedro compreso fra le due facce del primo è maggiore di quello compreso fra le facce eguali del secondo, la terza faccia del primo triedro è maggiore della terza faccia del secondo.*

Le due facce $B\widehat{VC}$, $A\widehat{VB}$ del triedro $\widehat{V}$ (Fig. 106) sieno rispettivamente eguali alle facce $B'\widehat{V'}C'$, $A'\widehat{V'}B'$ del triedro $\widehat{V'}$, ma sia il diedro $\widehat{VB}$ maggiore del diedro $\widehat{V'B'}$; dico che la faccia $A\widehat{VC}$ è maggiore della faccia $A'\widehat{V'}C'$.

Supposto che gli elementi dei due triedri sieno disposti in ordine inverso, portiamo la faccia $A'\widehat{V'}B'$ a coincidere colla faccia eguale $A\widehat{VB}$, in modo che i due triedri giacciano da parti opposte della faccia comune. Nel caso in cui gli elementi fossero disposti nello stesso ordine, possiamo considerare uno dei triedri dati e l'opposto al vertice dell'altro e ripetere la stessa costruzione.

Conduciamo il piano BVD bisettore del diedro $C\widehat{VB}C_1$, il quale si troverà nell'interno del diedro $AB\widehat{VC}$ maggiore di $AB\widehat{VC_1}$, e ta-

glierà perciò la faccia $A\widehat{V}C$ secondo una semiretta VD. I due triedri $V.\widehat{B}DC$, $V.\widehat{B}DC_1$, avendo un diedro eguale compreso tra facce ri-

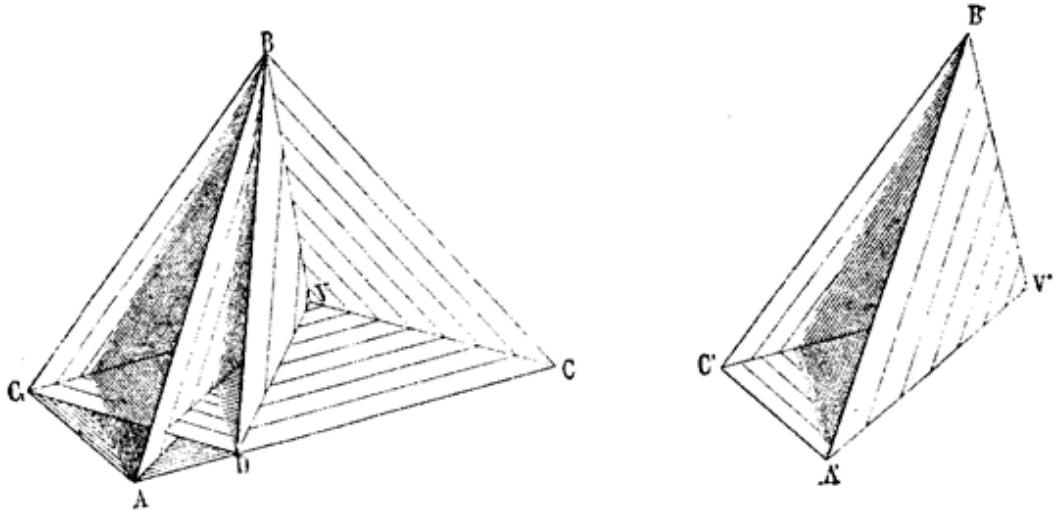

Fig. 106.

spettivamente eguali, hanno anche le facce $C\widehat{V}D$, $C_1\widehat{V}D$ eguali. Dal triedro $V.\widehat{A}DC_1$ poi si ha (§ 115) $A\widehat{V}C_1 < A\widehat{V}D + D\widehat{V}C_1$, e quindi

$$A\widehat{V}C_1 < A\widehat{V}D + D\widehat{V}C,$$

ossia

$$A\widehat{V}C_1 < A\widehat{V}C.$$

Corollario 1°. — *Se un triedro ha due facce rispettivamente eguali a due facce di un altro, il diedro compreso fra le due facce del primo triedro è maggiore, eguale, o minore di quello compreso fra le due facce dell'altro, secondo che la terza faccia del primo triedro è maggiore, uguale, o minore della terza faccia dell'altro tiedro.*

Infatti abbiamo dimostrato che, se un triedro ha due facce rispettivamente eguali a quelle di un altro, la terza faccia del primo è maggiore, eguale, o minore della terza faccia dell'altro, secondo che il diedro compreso fra le due facce suddette del primo è maggiore, uguale, o minore del diedro compreso fra le due facce del secondo; ne segue (Preliminari, § 4) che i teoremi inversi sono veri.

Teorema 2°. — *Se due diedri di un triedro sono rispettivamente eguali a due diedri di un altro triedro, e la faccia adiacente ai due diedri del primo è maggiore di quella adiacente ai due diedri del secondo, il terzo diedro del primo triedro è maggiore del terzo diedro del secondo.*

Dimostrazione simile a quella del Teor. 2° del § 120.

Corollario 2°. — *Se un triedro ha due diedri rispettivamente eguali a due diedri di un altro, la faccia adiacente ai due diedri del primo triedro è maggiore, eguale o minore di quella adiacente ai due diedri*

dell'altro, secondo che il terzo diedro del primo è maggiore, eguale, o minore del terzo diedro dell'altro triedro.

Dimostrazione simile a quella del corollario precedente.

123. Teorema 1°. — *Due triedri, aventi le tre facce rispettivamente eguali, sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Infatti, (§ 122, Cor. 1°) se due triedri hanno le facce rispettivamente eguali, esse hanno pure eguali i diedri opposti alle facce eguali, e perciò sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.

Teorema 2°. — *Due triedri aventi i tre diedri rispettivamente eguali sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Dimostrazione simile a quella del Teor. 2° del § 120.

124. Abbiamo veduto che in vari casi basta conoscere l'eguaglianza di tre elementi di due triedri, per asserire che sono pure eguali gli altri elementi. Tutti questi casi si possono riassumere nel seguente enunciato:

Due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro:

1° se hanno una faccia e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali;

2° se hanno un diedro eguale compreso tra facce eguali;

3° se hanno due facce e il diedro opposto ad una di esse, rispettivamente eguali, purchè i diedri opposti alle altre due facce eguali sieno della stessa specie, e gli spigoli comuni alle facce eguali non sieno perpendicolari alle rimanenti facce;

4° se hanno due diedri e la faccia opposta ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè le facce opposte agli altri due diedri eguali sieno della stessa specie, e le facce comuni ai diedri eguali non sieno perpendicolari ai rimanenti spigoli;

5° se hanno le tre facce rispettivamente eguali;

6° se hanno i tre diedri rispettivamente eguali.

In generale si può dire che due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, quando hanno tre elementi rispettivamente eguali, non dimenticando però le condizioni che si debbono aggiungere per il 3° e 4° caso.

125. Teorema. — *Due angoloidi convessi di* n *facce sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto vertice dell'altro:*

1° se hanno $n-1$ *facce rispettivamente eguali, ed hanno eguali i diedri compresi tra le facce eguali;*

2° se hanno $n-1$ *diedri rispettivamente eguali, ed hanno eguali le facce aventi per lati gli spigoli dei diedri eguali;*

3° se hanno tutte le facce ed n — 3 *diedri consecutivi, compresi tra facce eguali, rispettivamente eguali;*

4° se hanno tutti i diedri ed n — 3 *facce consecutive, adiacenti a diedri eguali, rispettivamente eguali.*

Le dimostrazioni dei primi tre casi sono simili a quelle dei teoremi analoghi relativi ai poligoni (§§ 93, 94, 95). L'ultimo caso poi si ricava dal precedente mediante la considerazione degli angoloidi supplementari.

COSTRUZIONI DI TRIEDRI E ANGOLOIDI.

126. Nei §§ precedenti abbiamo veduto che in vari casi due triedri sono eguali, quando hanno tre elementi rispettivamente uguali e disposti nello stesso modo.

Per esempio, abbiamo visto che due triedri sono eguali, se hanno due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali, e similmente disposti. Ciò vuol dire che, se riusciamo a costruire un triedro, che abbia due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali a due angoli e ad un diedro convessi dati, e disposti in un dato modo, tutti gli altri triedri, costruiti con gli stessi elementi disposti nello stesso modo, sono eguali al primo. Lo stesso può ripetersi per gli altri casi di eguaglianza dei triedri.

Vediamo ora come si può costruire un triedro con tre elementi dati, disposti in un certo ordine.

Problema 1°. — *Costruire un triedro, che abbia gli elementi disposti in un certo ordine, ed abbia due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali a due angoli e ad un diedro convesso dato.*

Problema 2°. — *Costruire un triedro, che abbia i suoi elementi disposti in un dato modo, ed abbia una faccia e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali a un angolo e a due diedri convessi dati.*

Lasciamo al lettore la facile risoluzione di questi due problemi.

127. Problema 3°. — *Costruire un triedro, che abbia le sue facce disposte in un dato modo ed eguali a tre angoli convessi dati, tali che la loro somma sia minore di due angoli piatti, e che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.*

Sappiamo che, affinchè tre angoli sieno facce di un triedro, è necessario che la loro somma sia minore di due angoli piatti, e che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due; ora faremo vedere che queste condizioni sono anche sufficienti.

In un piano α (Fig. 107) prendiamo tre angoli consecutivi $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}A''$ rispettivamente uguali ai tre angoli dati, in modo che quello intermedio $B\widehat{V}C$ non sia minore di nessuno degli altri due. Ammettendo che sia $B\widehat{V}C < A'\widehat{V}B + C\widehat{V}A''$, è evidente che ciascuno dei due angoli $A'\widehat{V}B$, $C\widehat{V}A''$ è minore della somma degli altri. Ammettendo inoltre che la somma dei tre angoli sia minore di due angoli piatti, è chiaro che questa somma sarà un angolo concavo o convesso $A'\widehat{V}A''$, ma non ricoprirà l'intiero piano, cioè non conterrà alcun giro.

Nello stesso piano conduciamo una semiretta VE, dalla parte opposta di VA′ rispetto alla retta VB, in modo che gli angoli $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}E$ sieno eguali, ed una semiretta VF, dalla parte opposta di VA″ rispetto alla retta VC, in modo che gli angoli $A''\widehat{V}C$, $C\widehat{V}F$, sieno eguali. Per le ipotesi fatte, essendo l'angolo $B\widehat{V}C$ non minore di ciascuno degli altri due angoli $B\widehat{V}E$, $C\widehat{V}F$, la semiretta VE è interna all'angolo $B\widehat{V}C$, o coincide con VC, e la semiretta VF è pure interna dell'angolo $B\widehat{V}C$, o coincide con VB.

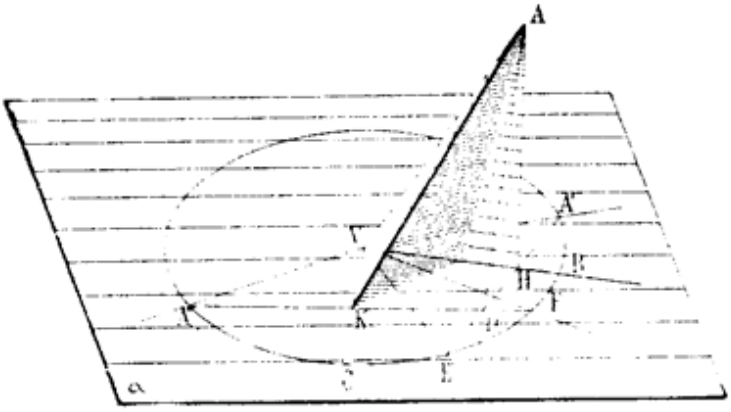

Fig. 107.

Inoltre, essendo $B\widehat{V}C < B\widehat{V}E + C\widehat{V}F$, è chiaro che le semirette VF, VC debbono trovarsi da parti opposte della retta VE, e le semirette VE, VB devono trovarsi da parti opposte della retta VF.

Nel piano α con raggio arbitrario descriviamo ora un circolo, il quale incontri le semirette VA′, VB, VF, VE, VC, VA″ nei punti A′, B, F, E, C, A″, disposti nell'ordine scritto. Ne segue che i punti A′, E sono situati da parte opposta della retta A″F, e i punti A″, F sono da parti opposte della retta A′E, e perciò i due segmenti A′E, FA″ hanno un punto comune D. Si osservi ancora che i due triangoli $A'\widehat{V}E$, $F\widehat{V}A''$ sono isosceli, quindi le semirette VB, VC, bisettrici degli angoli $A'\widehat{V}E$, $F\widehat{V}A''$, risultano perpendicolari ai segmenti A′E, FA″, e li dividono per metà nei punti H, K (§ 79, Teor.)

Per il punto D si elevi la retta DA, perpendicolare al piano α, e nel piano β, individuato dalle rette DA, DA″, il quale è perpendicolare al piano α (§ 64), descriviamo un circolo col centro in K e con raggio $KA'' = KF$. La retta DA, avendo un punto D interno a questo circolo, lo taglierà in due punti A, A_1 situati da parti opposte del piano α. Condotte le semirette VA, VA_1 si ottengono due triedri $V.\widehat{A}BC$, $V.\widehat{A_1}BC$, ciascuno dei quali è eguale all'opposto al vertice dell'altro, che hanno per facce i tre angoli dati, di guisa che uno di essi sarà il triedro domandato.

Consideriamo infatti uno di essi $\widehat{V.ABC}$. I due triangoli VAK, VA″K hanno gli angoli $\widehat{VKA}$, $\widehat{VKA''}$ retti, perchè la retta VK, perpendicolare alla retta A″D, intersezione del piano α col piano ADA″ ad esso perpendicolare, è pure perpendicolare al piano ADA″ (§ 65, Teor.); hanno il cateto VK comune e i cateti KA, KA″ eguali; ne segue che è $\widehat{AVK} \equiv \widehat{KVA''}$ e $VA'' \equiv VA$.

Analogamente i triangoli AVH, A′VH sono eguali, perchè hanno gli angoli $\widehat{VHA}$, $\widehat{VHA'}$ retti, il cateto VH comune, e le ipotenuse VA, VA′ eguali ambedue a VA″, perciò è $\widehat{AVH} \equiv \widehat{HVA'}$.

Corollari. — *1°. È sempre possibile costruire un triedro avente le facce eguali fra loro, purchè la loro somma sia minore di due angoli piatti.*

2°. È sempre possibile costruire un triedro avente per facce tre angoli retti.

Definizione. — Un triedro, avente per facce tre angoli retti, dicesi *trirettangolo.*

I diedri di un triedro trirettangolo sono retti. Un triedro trirettangolo coincide col suo supplementare.

128. Problema 4°. — *Costruire un triedro che abbia i suoi diedri disposti in un dato modo ed eguali a tre diedri convessi dati, tali che la loro somma sia maggiore di un diedro piatto, e che ognuno di essi, aumentato di un diedro piatto, sia maggiore della somma degli altri due.*

Vedemmo già (§ 118) che, se tre diedri appartengono ad un triedro, è necessario che sieno verificate le condizioni suddette. Dimostreremo ora che tali condizioni sono anche sufficenti.

Pertanto sieno α, β, γ i rettilinei dei diedri dati, α', β', γ' i loro supplementi, e sia p un angolo piatto. Si ha per ipotesi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &> p \\ \alpha + p &> \beta + \gamma \\ \beta + p &> \gamma + \alpha \\ \gamma + p &> \alpha + \beta \end{aligned}$$

Dalla prima diseguaglianza si ricava

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' > p + \alpha' + \beta' + \gamma';$$

e siccome

$$\alpha + \alpha' \equiv p;\ \beta + \beta' \equiv p;\ \gamma + \gamma' \equiv p,$$

si ha

$$3p > p + \alpha' + \beta' + \gamma';$$

ossia

$$2p > \alpha' + \beta' + \gamma' \ldots \qquad (1)$$

Dalla seconda diseguaglianza si ricava pure

$$\alpha + \alpha' + \beta' + \gamma' + p > \alpha' + \beta' + \beta + \gamma' + \gamma,$$

ossia

$$2p + \beta' + \gamma' > 2p + \alpha',$$

ossia

$$\beta' + \gamma' > \alpha' \quad \ldots . \qquad (2)$$

Analogamente dalle altre due si ricava

$$\gamma' + \alpha' > \beta' \quad \ldots . \qquad (3)$$
$$\alpha' + \beta' > \gamma' \quad \ldots . \qquad (4)$$

Ma le disuguaglianze (1), (2), (3), (4) sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè α', β', γ' sieno le facce di un triedro; dunque potremo, applicando la costruzione del § precedente, costruire due triedri, ciascuno eguale all'opposto al vertice dell'altro, che abbiano le facce uguali ad α', β', γ'. Il supplementare di uno di essi sarà il triedro domandato.

129. Abbiamo veduto come si possa costruire un triedro, del quale si conoscano tre elementi. In pratica però occorre più spesso di ricavare, per mezzo di costruzioni da eseguirsi in un piano, gli elementi incogniti di un triedro dagli elementi cogniti. Eccone un esempio.

Problema 5°. — *Date le tre facce di un triedro, determinare per mezzo di costruzioni piane, i rettilinei dei suoi tre diedri.*

Su di un piano riportiamo tre angoli $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}A''$ consecutivi uguali alle tre facce del triedro, le quali supponiamo che soddisfino alle note condizioni, disponendole in modo che l'angolo intermedio $B\widehat{V}C$ sia non minore di ciascuno degli altri due. Sulle semirette VA′, VA″ prendiamo due segmenti VA′ VA″ eguali fra loro, e conduciamo per A′ una retta A′H perpendicolare alla VB e per A″ una retta A″K perpendicolare alla VC; per il punto d'incontro D di queste perpendicolari conduciamo una retta DA_1 perpendicolare ad A′D, ossia parallela a VB, ed una retta DA_2 perpendicolare alla A″D, ossia parallela alla VC. Preso come centro il punto H si descriva con raggio HA′ un circolo, e sia A_1 uno dei punti d'incontro di esso colla DA_1. Preso

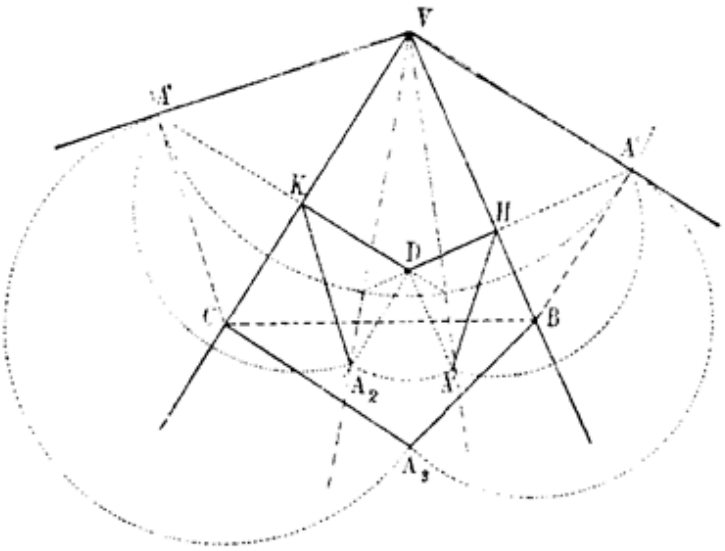

Fig. 108.

poi come centro il punto K si descriva con raggio KA″ un altro circolo e sia A_2 uno dei punti d'incontro di esso colla DA_2. Gli angoli $D\widehat{H}A_1$, $D\widehat{K}A_2$ sono i rettilinei dei diedri che hanno per costola VB e VC rispettivamente. Ciò apparisce evidente, se si riflette che la costruzione indicata non è altro che quella del § 127, quando in esso (Fig. 107) si supponga di far ruotare i piani HDA, KDA attorno alle rette A′D, A″D, finchè vengano a coincidere col piano α.

Per determinare il rettilineo del terzo diedro, per i punti A′, A″ si conducano le rette A′B, A″C rispettivamente perpendicolari alle rette VA′, VA″, e si costruisca un triangolo BCA_3 che abbia per lati i segmenti BC, BA′, CA″. È facile dimostrare che l'angolo $B\widehat{A_3}C$ è il rettilineo del diedro che ha per costola VA.

Questa costruzione cade in difetto, se uno o ambedue gli angoli $A'\widehat{V}B$, $A''\widehat{V}C$ sono retti. Lasciamo al lettore lo studio di questo caso.

130. Problema. — *Costruire un angoloide, che abbia i suoi elementi disposti in un certo ordine, e di cui si conoscano le facce e i diedri eccetto:*

1° due diedri e la faccia compresa;
2° due facce e il diedro compreso;
3° tre diedri consecutivi;
4° tre facce consecutive.

La risoluzione dei primi tre problemi si riduce alla costruzione successiva di angoli e diedri eguali rispettivamente ad angoli e diedri dati. La risoluzione dell'ultimo si fa dipendere da quella del precedente per mezzo della considerazione dei triedri supplementari.

Corollario. — *È sempre possibile costruire un angoloide, avente le facce eguali fra loro, purchè la loro somma sia minore di due angoli piatti.*

CAPITOLO III

Poliedri.

131. Definizioni. — 1ª. La figura individuata da quattro punti, non situati in un piano, e dai quattro triangoli, che hanno per vertici i detti punti, presi tre a tre, dicesi *tetraedro*.

Per es. la fig. 109 rappresenta un tetraedro.

2ª. I quattro punti dati A, B, C, D e i quattro triangoli, che hanno per vertici quei punti, si dicono rispettivamente *vertici* e *facce* del tetraedro. I piani, le rette i lati delle facce si dicono i *piani, le rette, gli spigoli (o costole)* del tetraedro.

3ª. La superficie formata dalle facce chiamasi *superficie* del tetraedro.

4ª. Un vertice e la faccia individuata dagli altri tre vertici si dicono *opposti*. Due spigoli, che non hanno un vertice comune, si dicono *opposti*.

5ª. Il segmento di perpendicolare, condotta da un vertice sul piano della faccia opposta, compreso fra questo punto e il piano, dicesi *altezza*.

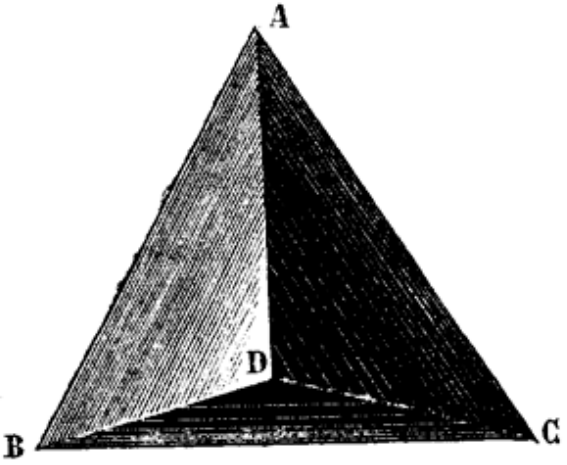

Fig. 109.

Da quanto abbiamo detto risulta che il tetraedro ha quattro vertici, quattro facce, sei spigoli (o costole), e quattro altezze. In ogni vertice del tetraedro concorrono tre spigoli. Un tetraedro si nomina con le quattro lettere dei vertici.

Teorema. — *La superficie di un tetraedro è una superficie completa.*

Infatti, dal P. IV, 3° deriva che, se una superficie incompleta ha i suoi limiti sopra una superficie completa, essa suddivide in due quella delle parti dello spazio (separate dall'altra superficie), nella quale è contenuta. Dato dunque il tetraedro ABCD (Fig. 109), la superficie formata dai tre angoli $B\widehat{A}C$, $C\widehat{A}D$, $D\widehat{B}A$ divide lo spazio in due parti, una delle quali è il triedro $\widehat{A.}BCD$; e il triangolo DBC, che ha i lati sulla superficie del triedro convesso $\widehat{A.}BCD$, e che perciò (§ 113, Cor. 2°) è interno ad esso, divide questo triedro in due parti. Una di queste parti è finita e limitata dalla superficie del tetraedro.

Definizione 6ª. — La parte di spazio, limitata dalla superficie di un tetraedro, dicesi *solido del tetraedro*, o semplicemente *tetraedro*.

132. Il piano individuato da tre punti B′, C′, D′, presi sugli spigoli AB, AC, AD, concorrenti in un vertice di un tetraedro ABCD, divide il tetraedro dato in due parti, delle quali una, ossia A.B′C′D′, è un nuovo tetraedro, e l'altra è una figura limitata da cinque poligoni piani. Ripetendo questa costruzione più volte si vede chiaramente la possibilità dell'esistenza di figure formate da più di tre poligoni situati in piani diversi, e in modo che ciascun lato sia comune a due di essi.

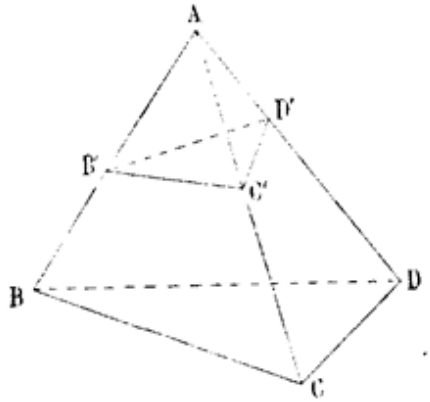

Fig. 110.

Definizioni. — 1ª. Dicesi *poliedro* la figura determinata da più di tre poligoni situati in piani diversi, e in modo che ciascun lato sia comune a due di essi.

2ª. I poligoni, che formano un poliedro, si dicono *facce*, e la superficie formata dalle facce dicesi *superficie* del poliedro.

3ª. Le rette, i piani, i vertici, i lati delle facce si dicono le *rette*, i *piani*, i *vertici*, gli *spigoli* (o *costole*) del poliedro.

4ª. Chiamansi *diagonali* i segmenti che hanno per estremi due vertici non situati sopra una medesima faccia.

5ª. Un poliedro prende il nome di *pentaedro, esaedro, eptaedro, ottaedro, ennaedro, decaedro,.... dodecaedro,... icosaedro,...* secondo che ha 5, 6, 7, 8, 9, 10,.... 12,.... 20.... facce.

Per esempio la Fig. 111 rappresenta un ottaedro. Un poliedro si nomina per mezzo delle lettere che ne indicano i vertici.

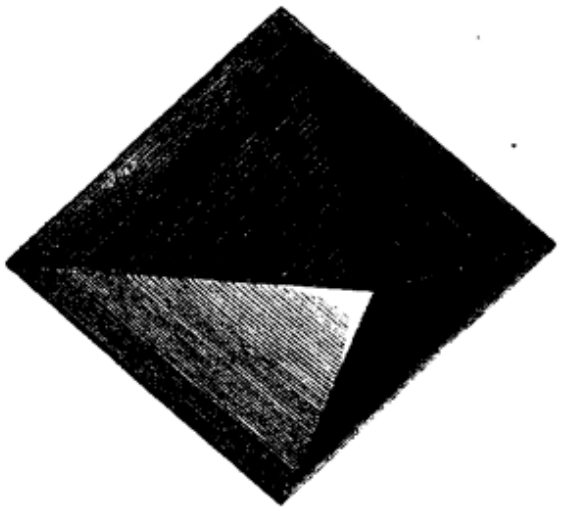
Fig. 111.

6ª. Un poliedro si dice *convesso*, se ha tutti i suoi vertici situati da una medesima parte di uno qualunque dei suoi piani; *concavo* nel caso contrario. Un poliedro si dice *intrecciato*, se è intrecciata qualcuna delle sue facce.

È chiaro che un poliedro intrecciato è sempre anche concavo.

133. Teorema. — *La superficie di un poliedro convesso è una superficie completa.*

Si dimostra come l'analogo teorema sugli angoloidi.

Risulta dal teorema precedente, che ogni superficie poliedrica convessa limita una parte dello spazio, di guisa che ogni linea che congiunga un punto interno ad essa con uno esterno, deve incontrare la superficie almeno in un punto. Pertanto si suol dire che una superficie poliedrica convessa è una *superficie chiusa*.

1ª. La parte di spazio limitata da una superficie poliedrica convessa si dice *solido del poliedro*, o semplicemente *poliedro*.

2ª. Ogni diedro, il cui spigolo coincide con una delle rette del poliedro convesso, le cui facce contengono due facce consecutive del poliedro, e rispetto al quale siano interni tutti i punti interni al poliedro, si chiama *un diedro interno*, o semplicemente *diedro del poliedro*.

3ª. Ogni angoloide, avente per vertice un vertice del poliedro convesso, e le cui facce contengono le facce del poliedro, che hanno il vertice in quel punto, si chiama *un angoloide del poliedro*.

4ª. Una parte della superficie di un poliedro convesso dicesi *superficie poliedrica convessa aperta*, e valgono per essa tutte le definizioni date per le superficie poliedriche chiuse.

134. Teoremi. — *1°. Se una retta ha un punto interno ad un poliedro non intrecciato, deve tagliarne la superficie almeno in due punti.*

2°. Una retta non può incontrare la superficie di un poliedro convesso in più di due punti.

Si dimostrano questi teoremi come i teoremi analoghi relativi ai poligoni (§ 82).

135. Definizione. — In un poliedro qualunque possiamo scomporre ogni faccia, che non sia un triangolo, in varî triangoli per mezzo delle diagonali della faccia stessa, passanti per un vertice. Pensando a ciò, si vede che un poliedro si può considerare come una figura formata da tanti triangoli, disposti in modo che ogni lato sia comune a due di essi, di guisa che col loro insieme formino una superficie completa, potendo alcuni triangoli consecutivi essere in un piano. Chiameremo *rete di triangoli* un poliedro considerato sotto questo nuovo aspetto, e chiameremo anche in questo caso *facce, spigoli, vertici*, i triangoli che lo formano e i lati e vertici di essi triangoli.

Teorema — *In una rete di triangoli il doppio del numero dei vertici supera di 4 il numero delle facce.*

Indichiamo con F, V i numeri delle facce e dei vertici di una rete di triangoli. Si vuol dimostrare che è

$$2\,V - F \equiv 4 \;\ldots. \qquad (1)$$

Infatti, se dalla rete di triangoli togliamo un vertice con le f facce triangolari che vi si riuniscono, e nel poligono (piano o gobbo) formato dalle basi di questi triangoli conduciamo da uno qualunque dei suoi vertici le $f-3$ diagonali, otterremo una nuova rete di triangoli avente $V-1$ vertici e $F-2$ facce. La differenza fra i numeri $2\,(V-1)$ e $F-2$ essendo uguale a quella fra i numeri $2\,V$ ed F, possiamo dire che la differenza fra il doppio del numero dei vertici e il numero delle facce del dato poliedro si mantiene costante per tutti i poliedri, che da esso si possono ricavare, applicandovi successivamente la costruzione precedente. Ora è chiaro che, applicando un numero sufficiente di volte questa costruzione, potremo giungere ad un tetraedro, nel quale, essendo $V \equiv F \equiv 4$, si ha $2\,V - F \equiv 4$. Perciò questa proprietà sussiste per una rete di triangoli qualunque.

136. Teorema 1°. — *Se tutte le facce di un poliedro sono poligoni di* m *lati, il doppio del numero delle costole del poliedro è eguale a* m *volte il numero delle facce.*

Infatti, ogni faccia contenendo m spigoli, ed ognuno di questi appartenendo a due facce, è evidente che, essendo F il numero delle facce e C quello degli spigoli del poliedro, si deve avere

$$m\mathrm{F} \equiv 2\mathrm{C}.$$

Teorema 2°. — *Se tutti gli angoloidi di un poliedro hanno* n *spigoli, il doppio del numero delle costole del poliedro è eguale a* n *volte il numero dei vertici.*

Indicando con V il numero dei vertici e con C il numero delle costole del poliedro, si dimostra, come per il Teorema precedente che

$$n\mathrm{V} \equiv 2\mathrm{C}.$$

Corollario. — *In una rete di triangoli il doppio del numero delle costole è eguale al triplo del numero delle facce, ossia* $2\mathrm{C} \equiv 3\mathrm{F}$.

137. Teorema (di Eulero). — *In un poliedro qualunque il numero dei vertici, aumentato del numero delle facce, supera di due il numero degli spigoli.*

Infatti, addizionando membro a membro le eguaglianze

$$2\mathrm{V} - \mathrm{F} \equiv 4 \quad , \quad 3\mathrm{F} \equiv 2\mathrm{C},$$

date dai due teoremi precedenti, si ricava che per una rete di triangoli sussiste la relazione

$$\mathrm{V} + \mathrm{F} \equiv \mathrm{C} + 2.$$

D'altra parte è chiaro che, se due triangoli della rete si riuniscono insieme per formare una sola faccia, si diminuisce di uno tanto il numero delle facce quanto il numero degli spigoli, e quindi l'eguaglianza precedente continua a sussistere. Allora, potendosi considerare un poliedro qualunque come risultante da una rete di triangoli, alla quale sia stata applicata un sufficiente numero di volte la trasformazione suindicata, ne segue che anche per il dato poliedro resta verificata la eguaglianza soprascritta, e quindi il teorema è dimostrato.

138. Teorema. — *La somma degli angoli delle facce di un poliedro convesso è uguale a tante volte due angoli piatti quanti sono i vertici del poliedro meno due.*

Scomponiamo il poliedro in una rete di triangoli. Allora, indicando con F e V i numeri delle facce e dei vertici della rete, dal teorema del § 135 si ricava

$$F = 2(V - 2).$$

Ma la somma degli angoli interni dei poligoni del poliedro è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i triangoli, in cui questi poligoni si decompongono, ossia F; dunque la somma degli angoli dei poligoni del poliedro è eguale a $2(V - 2)$ angoli piatti, ossia a tante volte due angoli piatti quanti sono i vertici meno due.

PIRAMIDE.

139. Definizioni. — 1ª. Il poliedro, che ha per facce un dato poligono piano e i triangoli, aventi per vertice uno stesso punto preso fuori del piano del poligono, e per basi i lati del medesimo, si chiama *piramide.*

2ª. La faccia poligonale si chiama *base* della piramide, le altre facce triangolari si chiamano *facce laterali.* La superficie, formata dalle facce laterali, si chiama *superficie laterale,* e quella, formata dalla base e dalle facce laterali, si chiama *superficie totale* della piramide.

3ª. Gli spigoli, che concorrono nel vertice, si chiamano *spigoli laterali.*

Colle parole *vertice della piramide,* quando non si avverta esplicitamente il contrario, si suole indicare il vertice non situato sulla base.

4ª. Si chiama *altezza* della piramide il segmento di perpendicolare condotta dal vertice al piano della base, compreso fra il vertice ed il piano stesso.

È chiaro, che una piramide si può anche ottenere, tagliando un angoloide con un piano che ne incontri tutti gli spigoli.

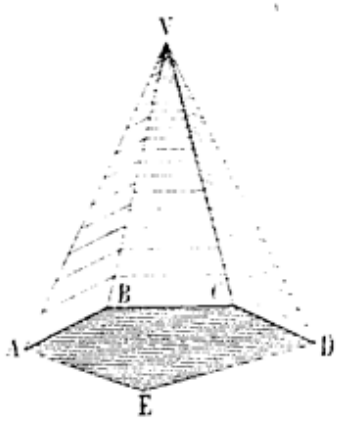

Fig. 112.

5ª. L'angoloide, che ha per vertice il vertice della piramide, e i cui spigoli contengono gli spigoli laterali della piramide, presi nello stesso ordine, si dice *angoloide della piramide.*

È evidente, che se una piramide è *convessa, concava* o *intrecciata* anche la sua base ed il suo angoloide sono ordinatamente *convessi, concavi* o *intrecciati;* e viceversa.

6ª. Una piramide si chiama *triangolare, quadrangolare, pentagonale* ..... secondo che la sua base ha 3, 4, 5 .... lati, ovvero il suo angoloide è di 3, 4, 5 .... facce.

Un tetraedro è una piramide triangolare, qualunque sia la faccia che si considera come base.

7ª. Un piano, che incontri tutti gli spigoli laterali di una piramide, la scompone in una piramide ed in un altro solido, che si chiama *tronco di piramide.*

Il poligono base della piramide, e il poligono, ottenuto come intersezione del piano di sezione colla superficie laterale della piramide, si chiamano le *basi* del tronco di piramide. Le altre facce, che sono quadrangoli, si chiamano *facce laterali*, e la superficie formata da esse si chiama *superficie laterale* del tronco.

Se il piano di sezione è parallelo alle basi, il tronco di piramide ottenuto si dice a *basi parallele*.

8ª. Se per il punto medio di una spigolo laterale di una piramide (o di un tronco di piramide a basi parallele) si conduce un piano parallelo alla base (o alle due basi), gli altri spigoli laterali restano pure divisi per metà e la sezione prodotta si dice *sezione media*.

140. Teorema. — *Due piramidi sono eguali, se hanno i loro angoloidi e tre spigoli laterali corrispondenti rispettivamente eguali.*

Le due piramidi V, V′ abbiano i loro angoloidi $\widehat{V.ABCDE}$, $\widehat{V'.A'B'C'D'E'}$ eguali; inoltre sia per es. $VA \equiv V'A'$, $VC \equiv V'C'$, $VB \equiv V'B'$. Portando l'angoloide $\widehat{V'.A'B'C'D'E'}$ sul suo eguale

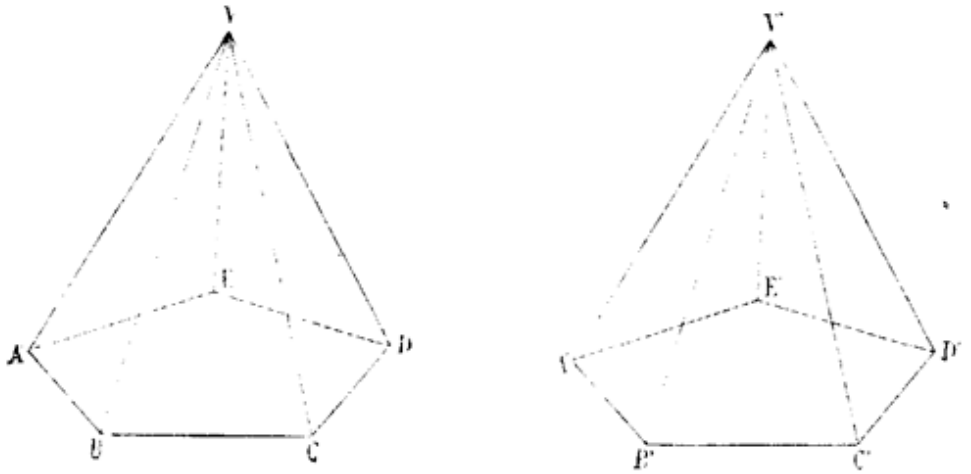

Fig. 113.

$\widehat{V.ABCDE}$, i punti A′, C′, B′, cadranno, per le ipotesi stabilite, rispettivamente nei punti A, C, B; e perciò il piano A′C′D′ coinciderà col piano ACD, e quindi le due piramidi coincideranno completamente.

141. Teorema. — *Due piramidi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti in uno stesso vertice della base, rispettivamente eguali e similmente disposte.*

Supponiamo che nelle piramidi V e V′ (fig. 113) sieno le facce AVB, AVE, ABCDE rispettivamente eguali alle facce A′V′B′, A′V′E′, A′B′C′D′E′ e disposte nello stesso modo. In conseguenza della identica disposizione delle facce eguali, i tre angoli $\widehat{VAB}$, $\widehat{VAE}$, $\widehat{BAE}$ sono pure rispettivamente eguali agli angoli $\widehat{V'A'B'}$, $\widehat{V'A'E'}$, $\widehat{B'A'E'}$ e similmente disposti; perciò i triedri $\widehat{A.VBE}$, $\widehat{A'.V'B'E'}$ (§ 123 Teor. 1°) sono eguali. Portando allora la faccia A′B′C′D′E′ a coincidere colla sua eguale ABCDE, è chiaro che le facce V′A′B′, V′A′E′ vengono a

coincidere colle facce eguali VAB, VAE, ed il vertice V′ viene sul vertice V; dunque le due piramidi coincidono.

142. Teorema. — *Un piano, parallelo a due spigoli opposti di un tetraedro, taglia i piani di questo secondo le rette di un parallelogrammo.*

Sia α un piano parallelo ai due spigoli opposti AB, V′ V″ di un tetraedro AB V′ V″ (fig. 114). Una qualunque delle rimanenti rette p. es. V′A, deve incontrare il piano α, poichè, se fosse ad esso parallelo i due piani individuati dalle coppie di rette V′A, V′V″ e V′A, AB, dovrebbero esser paralleli ad α, il che è assurdo. Sieno dunque A′, B′, A″, B″ i punti d'incontro del piano α colle rette V′A, V′B, V″A, V″B del tetraedro. Le rette A′B′, A″B″ son parallele alla retta AB (§ 40, Teor.), e perciò parallele fra loro; e similmente le rette A′A″, B′B″ sono parallele alla V′V″, e perciò parallele fra loro. Dunque la figura A′B′B″A″ è un parallelogrammo.

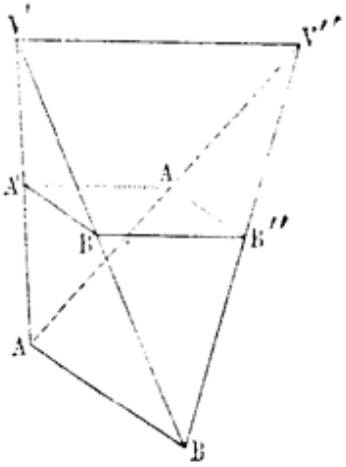

Fig. 114.

143. Teorema. — *Se due piani, che sono paralleli ai piani delle basi di due piramidi, aventi basi ed altezze eguali, e che sono egualmente distanti dalle basi stesse, tagliano le superficie laterali delle medesime, le sezioni prodotte da essi sono poligoni eguali.*

Se due piramidi P′, P″ hanno basi ed altezze eguali, possiamo disporle in modo che le loro basi giacciano in un medesimo piano β, che i loro vertici V′, V″ sieno situati dalla stessa parte del piano delle basi, e che un lato AB della base dell'una coincida col lato eguale dell'altra (fig. 114). È chiaro allora, che i due vertici V′, V″, essendo equidistanti dal piano β delle basi, giacciono sopra una retta parallela al piano β, e che i piani secanti, paralleli al piano delle basi, e condotti a eguale distanza dai medesimi, coincidono in un piano α, parallelo a β ed anche alla retta V′V″.

Se allora consideriamo il tetraedro, che ha per vertici i vertici V′, V″ delle due piramidi e gli estremi A, B dello spigolo considerato, si vede che esso è tagliato dal piano α secondo un parallelogrammo A′B′B″A″, che ha i lati opposti A′B′, A″B″ eguali.

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le coppie di lati e di diagonali (se ve ne sono) delle basi delle due piramidi, si vede che i poligoni sezioni hanno tutti i lati e tutte le diagonali corrispondenti rispettivamente eguali, e perciò o sono triangoli eguali, o sono poligoni risultanti dalla riunione di più triangoli eguali disposti nello stesso modo, e quindi eguali.

144. Teorema. — *Se due rette parallele sono tagliate da una serie di trasversali che passano per un punto, fra i punti e i segmenti di esse viene stabilita una corrispondenza univoca, nella quale*

1° a segmenti uguali della prima retta corrispondono segmenti uguali della seconda;

2° alla somma di due o più segmenti della prima corrisponde la somma dei segmenti corrispondenti della seconda.

1°. Le due rette r, r' (Fig. 115) sieno tagliate dalle rette OA, OB, OC..., condotte per O, nei punti A, B, C...; A', B', C'... rispettivamente. Dico che, se $AB \equiv CD$, deve essere anche $A'B' \equiv C'D'$.

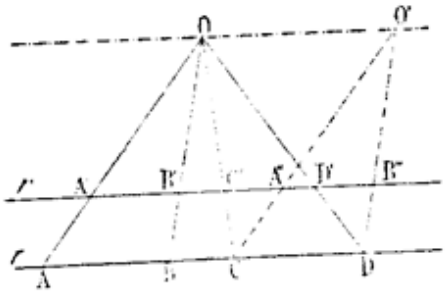

Fig. 115.

Portiamo infatti il triangolo OAB nella posizione O'CD, in modo che la base AB venga su CD, e i due vertici O, O' sieno dalla stessa parte della base. È evidente che $A'B' \equiv A''B''$. Si costruiscano ora due tetraedri, che abbiano per vertici O, C, D, V; O', C, D, V (essendo V un punto qualunque fuori del piano della figura), e si conduca per la r' un piano parallelo al piano OO'V. Esso taglierà il piano VCD, comune ai due tetraedri suddetti, secondo una retta tale, che il segmento di essa, compreso fra le rette VC, VD, è eguale tanto a C'D' quanto ad A''B'' (§ 142). Ne segue che $A''B'' \equiv C'D'$, e perciò anche $A'B' \equiv C'D'$.

2°. È poi evidente che, se AD è la somma dei segmenti AB, BC, CD, il segmento A'D', corrispondente ad AD, è la somma dei segmenti A'B', B'C', C'D', rispettivamente corrispondenti ad AB, BC, CD.

PRISMA.

145. Definizioni. — 1ª. Chiamasi *prisma illimitato* la figura formata da tre o più rette parallele, prese in un dato ordine, tali che tre consecutive non siano in un piano, dalle striscie limitate dalle coppie di rette parallele successive, e dalla striscia limitata dalla prima e dall'ultima retta.

2ª. Le rette diconsi *spigoli* e le strisce, che hanno per lati due spigoli consecutivi, si dicono *facce* del prisma. Un prisma illimitato si dice *triangolare, quadrangolare, pentagonale*..., secondo che ha 3, 4, 5... spigoli.

3ª. Un prisma dicesi *convesso* o *concavo*, secondo che tutti i suoi spigoli si trovano, oppur no, da una stessa parte del piano di ciascuna sua faccia; e dicesi *intrecciato*, quando almeno due facce non consecutive si tagliano.

4ª. Un piano, non parallelo agli spigoli, taglia il prisma secondo un poligono, che si dice una *sezione normale* od *obliqua* del prisma, secondo che il piano stesso è perpendicolare od obliquo agli spigoli.

Corollario. — *Una sezione qualunque normale od obliqua di un prisma illimitato è un poligono concavo, convesso o intrecciato, secondo che il prisma è concavo, convesso o intrecciato; e viceversa.*

146. Teorema. — *Due sezioni parallele di un prisma sono poligoni eguali.*

Sieno (Fig. 116) ABCDE, A'B'C'D'E' due sezioni parallele di un prisma.

I lati corrispondenti di questi poligoni sono paralleli, come intersezioni di piani paralleli con un terzo, ed uguali come segmenti paralleli compresi fra rette parallele. Inoltre gli angoli corrispondenti dei poligoni stessi sono eguali, perchè hanno i lati diretti nello stesso senso; dunque i due poligoni sono eguali.

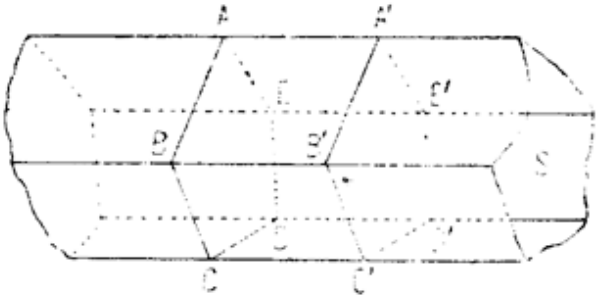

Fig. 116.

Corollario. — *Le sezioni normali di un prisma sono eguali fra loro.*

147. Definizione 1ª. — La parte di prisma illimitato, compresa fra due sezioni parallele, è un poliedro che dicesi *prisma finito*, o semplicemente *prisma*. Le due sezioni si dicono *basi* del prisma e le altre sue facce, che sono parallelogrammi, diconsi *facce laterali*.

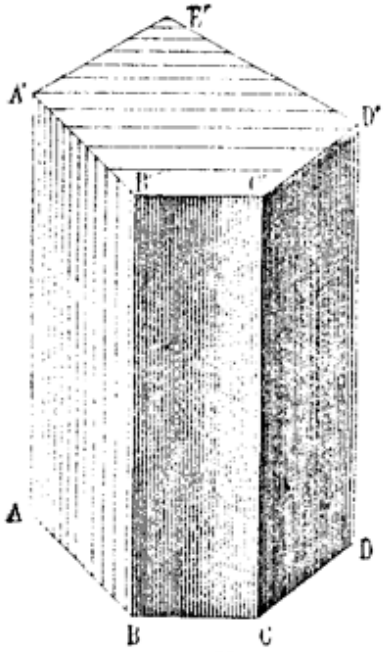

Fig. 117.

Corollario. — *Le basi di un prisma sono eguali.*

Definizioni. — 2ª. Un prisma si dice *retto* od *obliquo*, secondo che gli spigoli laterali sono *perpendicolari* od *obliqui* alle basi.

3ª. Dicesi *altezza* di un prisma il segmento perpendicolare ai piani delle due basi e compreso fra i piani medesimi.

4ª. La superficie, formata dalle facce laterali di un prisma, si dice *superficie laterale* del prisma, mentre per *superficie totale* s'intende quella formata da tutte le facce, comprese le basi.

148. Teorema. — *Due prismi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti nello stesso vertice, rispettivamente eguali e similmente disposte.*

Dimostrazione analoga a quella del Teorema del § 141.

Corollario. — *Due prismi retti sono eguali, se hanno eguali le basi e le altezze.*

149. Teorema. — *I semipiani, uscenti dalle rette della base di un prisma triangolare e interni ai diedri, che hanno per spigoli le stesse rette, s'incontrano in un punto.*

Ogni piano uscente da un lato della base di un prisma triangolare, che non contenga la faccia laterale passante per quel lato, incontra evidentemente la retta dello spigolo opposto, poichè non è ad esso parallelo; ed il punto comune è situato nel semipiano interno al diedro del prisma che ha per spigolo quel lato, poichè il suo prolungamento e la retta dello spigolo opposto sono da parti

opposte rispetto al piano della faccia laterale, che contiene quel lato. In simil guisa si vede che un semipiano uscente da un altro lato della base, e interno al diedro del prisma, che ha per spigolo quel lato, incontra la retta comune al primo semipiano considerato e alla terza faccia; e che finalmente la retta comune ai due semipiani considerati incontra un semipiano, uscente dal terzo lato della base, e interno al diedro che ha per spigolo quel lato.

Corollario. — *I semipiani, uscenti dalle tre rette di un triangolo, situati da una medesima parte rispetto al piano del triangolo, e formanti diedri acuti col semipiano che contiene il triangolo, s'incontrano in un punto.*

150. Definizioni. — 1ª. La parte di prisma illimitato, compresa fra due piani non paralleli agli spigoli e non paralleli fra loro, la cui intersezione non incontri la superficie del prisma, è un poliedro, che dicesi *tronco di prisma.*

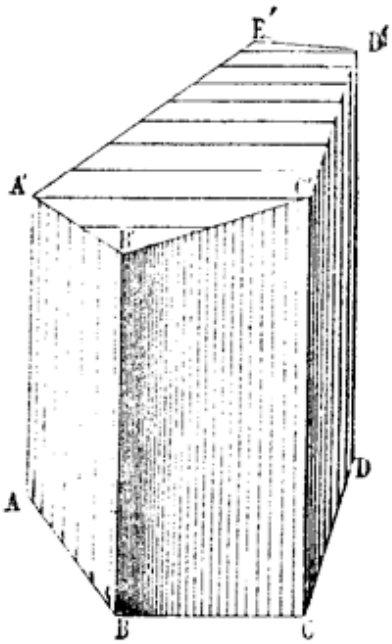

Fig. 118

2ª. I due poligoni sezioni si dicono le *basi* del tronco, e le rimanenti facce, che sono trapezi, si dicono *facce laterali.*

3ª. La superficie, formata dalle facce laterali di un tronco di prisma, si dice *superficie laterale;* quella formata da tutte le loro facce si dice *superficie totale* del tronco.

151. Abbiamo dimostrato (§ 148) che due prismi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti in un vertice, rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo; d'altra parte sappiamo che due parallelogrammi sono eguali, se hanno rispettivamente eguali due lati consecutivi e l'angolo compreso; quindi si ricava che due prismi sono anche eguali, se hanno un triedro, la base e gli spigoli laterali rispettivamente eguali. È perciò evidente che si possono costruire infiniti prismi, aventi soltanto un triedro e la base rispettivamente eguali ad un triedro e ad un poligono dati, prendendo gli spigoli laterali eguali a un segmento arbitrario.

Tutti questi infiniti prismi si dice che costituiscono *una serie di prismi.* Variando poi il poligono base, o il triedro, comune a tutti i prismi di una serie, è facile vedere come si possano ottenere infinite altre serie di prismi.

È chiaro inoltre che un prisma di una serie è individuato, quando è dato il segmento, a cui devono essere eguali gli spigoli laterali, e viceversa; di guisa che possiamo dire che fra i prismi e i segmenti suddetti esiste una corrispondenza univoca.

Definizione 1ª. — Due prismi di una serie si dicono *adiacenti*, quando hanno una base eguale in comune, gli spigoli laterali sulle medesime rette, e sono situati da parti opposte del piano della base comune.

E chiaro che, se portiamo due prismi della stessa serie l'uno adiacente all'altro, e sopprimiamo la base comune, si ottiene un nuovo prisma, il quale appartiene alla serie dei primi due. Possiamo dunque enunciare la seguente

Definizione 2ª. — Dati due o più prismi di una serie, se si porta il secondo adiacente al primo, il terzo adiacente al secondo, ma non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, il prisma, che risulta dall'insieme di tutti i prismi dati, appartiene ancora alla stessa serie, e si dice la loro *somma*.

Da quanto si è detto risulta, che le serie di prismi costituiscono infinite altre classi di grandezze, per le quali sussistono tutte le proprietà, che si sono dimostrate per le altre serie di grandezze finora studiate. Accetteremo dunque, senz'altro, come dimostrate anche per le serie di prismi le proprietà commutativa e associativa della somma, e le conseguenze che ne derivano. Inoltre intenderemo estese anche a queste nuove serie di grandezze le definizioni di differenza, maggiore, minore, multiplo, summultiplo, ecc. ed i teoremi del § 20.

Teoremi. — *1°. Un prisma di una serie è maggiore, eguale, o minore di un altro prisma della stessa serie, secondo che il segmento corrispondente al primo è maggiore, eguale, o minore del segmento corrispondente al secondo.*

2°. Se un prisma di una serie è somma di più altri prismi della stessa serie, anche il segmento corrispondente ad esso è somma dei segmenti corrispondenti alle parti della somma.

E viceversa.

Si imiti la dimostrazione dei Teoremi del § 33.

Corollari. — *1°. Se un prisma di una serie è multiplo (o summultiplo) di un altro, il segmento corrispondente al primo è equimultiplo (o equisummultiplo) del segmento corrispondente al secondo; e viceversa.*

2°. Se un prisma di una data serie è differenza di due altri, anche il segmento corrispondente ad esso è differenza dei segmenti corrispondenti agli altri due; e viceversa.

PARALLELEPIPEDO.

152. Definizioni. — 1ª. Chiamasi *parallelepipedo* un prisma, che ha per basi, due parallelogrammi.

2ª. In un prisma quadrangolare, e quindi anche in un parallelepipedo, due facce, non aventi vertici comuni, si dicono *opposte;* e gli spigoli, i diedri, i vertici, i triedri, determinati da facce opposte, si chiamano *opposti*.

In un parallelepipedo è chiaro che esistono sei facce, otto vertici, dodici spigoli, quattro diagonali, ciascuna delle quali termina a due vertici opposti.

3ª. Un parallelepipedo retto, che ha per base un rettangolo, si chiama *parallelepipedo rettangolo.*

Nel parallelepipedo retto le facce laterali sono rettangoli, nel parallelepipedo rettangolo tutte le sei facce sono rettangoli.

153. Teorema. — *In un parallelepipedo,*
1° le facce opposte sono eguali e parallele;
2° i diedri opposti sono eguali;
3° ogni triedro è eguale all'opposto al vertice del triedro opposto;
4° le quattro diagonali passano per uno stesso punto, che le divide per metà.

1°. Nel parallelepipedo ABCDA'B'C'D' (Fig. 119) le basi ABCD, A'B'C'D' sono per definizione eguali e situate in piani paralleli. I segmenti AA', DD' sono eguali e paralleli; i segmenti AB, DC sono pure eguali e paralleli; perciò gli angoli $A'\widehat{A}B$, $D'\widehat{D}C$ sono eguali e situati in piani paralleli, e i parallelogrammi ABB'A', DCC'D' sono eguali.

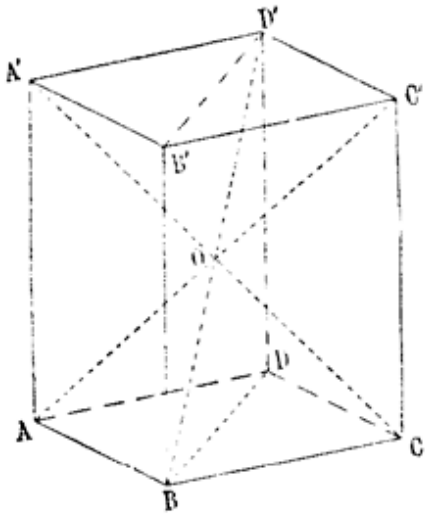

Fig. 119.

Similmente le facce ADD'A', BCC'B' sono eguali, e i loro piani sono paralleli.

2°. Due diedri opposti, per es. $\widehat{AB}$, $\widehat{D'C'}$, hanno le facce dirette in senso opposto, e perciò sono eguali (§ 49, Teor.).

3°. Due triedri opposti, per es. $\widehat{A}$, $\widehat{C'}$, hanno, per quello che abbiamo già detto avanti, le facce e i diedri eguali, ma disposti in modo diverso; perciò l'uno è uguale all'opposto al vertice dell'altro.

4°. Due diagonali qualunque, per es. AC', A'C, giacciono nel piano di due spigoli opposti AA', CC', e sono le diagonali del parallelogrammo AA'C'C; perciò esse s'incontrano in un punto O, ed in esso si dividono per metà (§ 104, Teor. 3°). Similmente considerando una delle diagonali precedenti, per es. AC', ed una delle rimanenti BD', si vede che esse sono le diagonali del parallelogrammo ABC'D', e perciò s'incontrano nel loro punto di mezzo, che è precisamente il punto O.

Nello stesso modo si dimostra che la quarta diagonale B'D passa per il punto O, il quale la divide per metà.

Corollari. — *1°. Un parallelepipedo si può considerare in tre modi come un prisma, prendendo per basi due facce opposte qualunque, ed ha perciò tre altezze.*

2°. Le dodici costole si dividono in tre gruppi, di quattro ciascuno, le quali sono fra loro eguali e parallele.

3°. Se un piano incontra quattro spigoli paralleli di un parallelepipedo, la sezione da esso prodotta è un parallelogrammo.

154. Teorema. — *Un prisma quadrangolare convesso è un parallelepipedo,*

1° se ciascuna faccia laterale è eguale all'opposta;
2° se ciascuna faccia laterale è parallela all'opposta;
3° se due facce opposte sono eguali e parallele;
4° se due triedri, aventi per vertici due vertici consecutivi di una base, sono eguali agli opposti al vertice dei loro opposti;
5° se due diagonali, che terminano a due vertici consecutivi di una base, si dividono per metà.

1°. Sia ABCD A'B'C'D' (fig. 119) un prisma quadrangolare, nel quale ogni faccia è eguale alla sua opposta. Dall'eguaglianza delle facce AD D'A', BC C'B' deriva che i segmenti AD, BC sono eguali, e dall'eguaglianza delle facce AB B'A', CD D'C' deriva che i segmenti AB, CD sono pure eguali. Perciò il quadrilatero ABCD, avendo ogni lato eguale al suo opposto, è un parallelogrammo, e quindi il dato prisma è un parallelepipedo.

2°. Sia ABCD A'B'C'D' un prisma quadrangolare, nel quale ogni faccia è parallela all'opposta. Le rette AB, CD e le rette AD, BC sono parallele, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo, e perciò il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, ed il dato prisma è un parallelepipedo.

3°. Nel prisma quadrangolare ABCD A'B'C'D' sia la faccia AA'B'B eguale e parallela alla faccia DD'C'C; ne segue che lo spigolo AB è eguale e parallelo a DC, quindi il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo; dunque il prisma dato è un parallelepipedo.

4°. Nel prisma quadrangolare ABCD A'B'C'D', sieno i triedri $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ eguali agli opposti al vertice dei loro opposti $\widehat{C'}$, $\widehat{D'}$; allora dovrà essere $A'\widehat{D'}C' \equiv A\widehat{B}C$, e quindi anche $A\widehat{D}C \equiv A\widehat{B}C$, perchè $A'\widehat{D'}C' \equiv A\widehat{D}C$. Analogamente si dimostra che $B\widehat{A}D \equiv B\widehat{C}D$; e perciò il quadrilatero ABCD, avendo ogni angolo eguale al suo opposto, è un parallelogrammo, e il dato prisma è un parallelepipedo.

5°. Nel prisma quadrangolare ABCD A'B'C'D' sia O il punto medio delle due diagonali AC', BD'. Il quadrangolo ABC'D' è un parallelogrammo, perchè le diagonali si dividono scambievolmente per metà; quindi lo spigolo AB è parallelo ed eguale a D'C'. Ma lo spigolo D'C' è pure eguale e parallelo allo spigolo DC, dunque AB è eguale e parallelo a DC, vale a dire il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo, e il prisma dato è un parallelepipedo.

155. Teorema. — *Esiste un parallelepipedo, avente un triedro e gli spigoli corrispondenti ordinatamente eguali a un triedro e a tre segmenti dati, e disposti in un dato modo.*

Sugli spigoli del dato triedro prendiamo, a partire dal vertice, tre segmenti eguali ai segmenti dati, e dai loro estremi conduciamo dei piani paralleli alle facce opposte. Il parallelepipedo risultante è il richiesto, ed è chiaro che tutti i parallelepipedi che si possono costruire con gli stessi elementi dati, disposti nello stesso modo, sono tutti eguali fra loro (§ 148, Teor.).

Osservazione. — Potendosi scegliere il triedro e i segmenti dati arbitriariamente, possono darsi i seguenti casi particolari:

1°. Il triedro è birettangolo. Allora il parallelepipedo è retto.

2°. Il triedro è trirettangolo. Allora il parallelepipedo è rettangolo.

3°. I segmenti sono eguali. Allora sono eguali tutti i dodici spigoli del parallelepipedo, e le sue facce sono rombi.

4°. I tre segmenti sono uguali ed il triedro equiedro. Allora le facce del parallelepipedo sono rombi eguali.

5°. I tre segmenti sono uguali ed il triedro trirettangolo; allora le facce del parallelepipedo sono quadrati uguali.

Definizioni. — 1ª. Un parallelepipedo, avente tutti gli spigoli eguali, dicesi *equispigolo*.

2ª. Un parallelepipedo, che ha per facce sei rombi eguali, dicesi *romboedro*.

3ª. Un parallelepipedo, che ha per facce sei quadrati, dicesi *cubo*.

156. Teorema. — *In un parallelepipedo retto le coppie di diagonali, che terminano a due vertici opposti di una base, sono eguali; e riceversa, se le coppie di diagonali di un parallelepipedo, che terminano a vertici opposti di una base, sono eguali, il parallelepipedo è retto.*

1°. Sia ABCDA′B′C′D′ un parallelepipedo retto (Fig. 120). La figura AA′C′C è evidentemente un rettangolo, e perciò le sue diagonali A′C, AC′ sono eguali (§ 108, Teor.). Parimenti sono eguali i segmenti B′D, BD′ come diagonali del rettangolo BB′D′D.

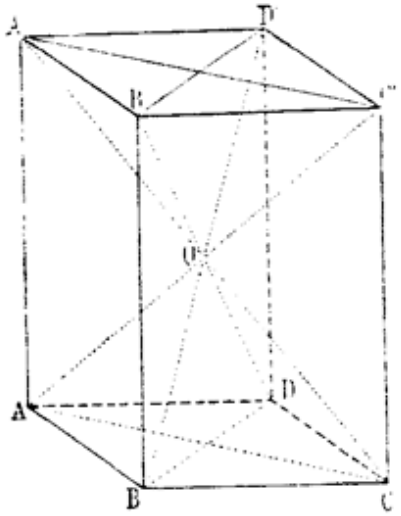

Fig. 120.

2°. Supponiamo ora di sapere che nel parallelepipedo ABCDA′B′C′D′ le diagonali AC′, A′C sieno eguali, e sieno pure eguali le diagonali BD′, B′D. I due parallelogrammi AA′C′C. BB′D′D, avendo le diagonali eguali, (§ 108, Teor.) sono rettangoli; e perciò la retta AA′ è perpendicolare ad AC, e BB′ perpendicolare a BD. Siccome gli spigoli AA′, BB′ sono paralleli, ne segue che AA′, BB′ sono perpendicolari ambedue alle rette AC, BD, e quindi anche al loro piano.

Corollario. — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un parallelepipedo sia rettangolo, è che le sue quattro diagonali sieno eguali.*

CAPITOLO IV

Distanze.

157. Definizioni. — 1ª. Si chiama *proiezione di un punto sopra una retta o sopra un piano,* il punto d'incontro della perpendicolare (*retta proiettante*) condotta per quel punto alla retta stessa, o al piano, colla retta o col piano medesimo.

2ª. Si chiama *proiezione di una figura sopra un piano* il luogo delle proiezioni dei suoi punti.

Corollari. — *1°. La proiezione sopra un piano di una retta, non perpendicolare ad esso, è l'intersezione del piano dato col piano ad esso perpendicolare (piano proiettante), condotto per la retta data.*

2°. La proiezione sopra un piano di una retta perpendicolare ad esso è un punto.

3°. La proiezione di un segmento sopra una retta, o sopra un piano, è il segmento limitato dalle proiezioni de' suoi estremi.

Teorema. — *Se due segmenti sono paralleli, la proiezione di uno di essi sopra una retta o sopra un piano è maggiore, eguale, o minore della proiezione dell'altro sopra la medesima retta, o sopra il medesimo piano, secondo che il primo segmento è maggiore, eguale o minore dell'altro; e viceversa.*

1°. Sieno AB, CE (Fig. 121) due segmenti dati eguali e paralleli fra loro, A'B', C'E' le loro proiezioni sopra una medesima retta *a*. Condotte le rette AM, CH parallele alla retta *a*, si considerino i due triangoli rettangoli ABM, CEH, i quali sono eguali, perchè hanno le ipotenuse eguali per ipotesi e gli angoli acuti $\widehat{BAM}$, $\widehat{ECH}$ eguali, essendo i loro lati diretti nello stesso senso; ne deriva che il lato AM è eguale al lato CH, e quindi A'B' = C'E'.

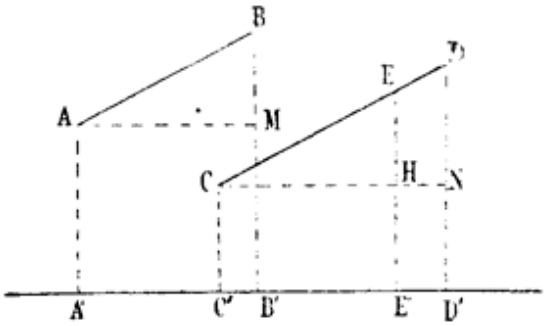

Fig. 121.

2°. Se AB, CD sono due segmenti disuguali, uno di essi, per es. CD, dovrà essere maggiore dell'altro, ed allora, preso CE eguale ad AB, si dimostra come precedentemente che la proiezione A'B' è eguale alla proiezione C'E'. Inoltre, essendo E un punto interno al segmento CD, anche E' è interno al segmento C'D', di guisa che è C'D' > C'E', e quindi anche C'D' > A'B'.

Siccome tutte le ipotesi possibili relative ai due segmenti dati ci conducono a tesi, che si escludono a vicenda, così anche i teoremi inversi sono veri.

158. Teorema. — *Fra i segmenti, che partono da un punto e terminano ad una retta (o ad un piano),*

1° il segmento perpendicolare è il minimo;

2° due segmenti obliqui sono eguali, se hanno sulla retta (o sul piano) proiezioni eguali;

3° di due segmenti obliqui, che hanno proiezioni disuguali sulla retta (o sul piano), è maggiore quello che ha proiezione maggiore.

E viceversa.

1°. Sia OA il segmento perpendicolare condotto da O alla retta AB (o al piano α), e OB un segmento obliquo qualunque (fig. 122 e 123). Nel triangolo OAB l'angolo retto $\widehat{OAB}$ è maggiore dell'angolo $\widehat{OBA}$;

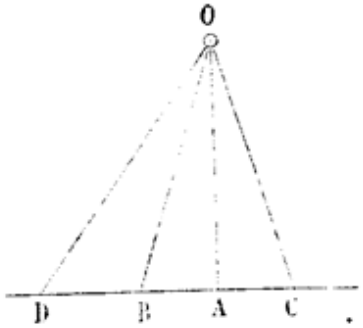

Fig. 122.

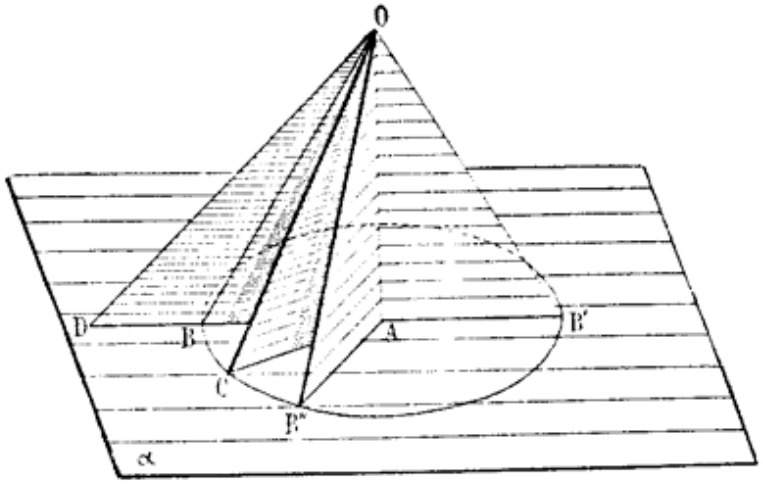

Fig. 123.

e perciò il lato OB, opposto all'angolo $\widehat{OAB}$, è maggiore del lato OA, opposto all'angolo $\widehat{OBA}$.

2°. Sieno OB, OC due segmenti, le cui proiezioni AB, AC sono eguali. I due triangoli OAB, OAC, rettangoli in A, hanno il cateto OA comune, e i cateti AB, AC uguali per ipotesi; perciò sono uguali ed hanno $OB \equiv OC$.

3°. Sieno OC, OD sono due segmenti obliqui, tali che la proiezione AC del primo sia minore della proiezione AD del secondo. Si porti su AD un segmento $AB \equiv AC$, e si tracci il segmento OB. Poichè il punto B è interno al segmento AD, la retta OB è interna all'angolo $\widehat{AOD}$, e nel triangolo ODB l'angolo $\widehat{OBD}$ è ottuso, perchè esterno al triangolo rettangolo OAB; perciò il lato OD è maggiore di OB. Ma OB, OC sono eguali, perchè hanno proiezioni uguali, dunque sarà pure $OD > OC$.

I teoremi inversi sono veri per il principio esposto nel § 4 dei Preliminari.

Corollari. — *1°. Da un punto non si possono condurre più di due segmenti eguali, che terminino ad una retta.*

2°. Da un punto si possono condurre infiniti segmenti eguali che terminino ad un piano; il luogo dei loro estremi è una circonferenza, il cui centro è la proiezione del punto sul piano.

3°. Fra tutti i segmenti, che terminano a due rette parallele, o ad

una retta e ad un piano ad essa parallelo, o a due piani paralleli, quelli ad essi perpendicolari sono eguali fra loro e sono minori di tutti gli altri.

4°. Fra tutti i segmenti, che terminano a due rette sghembe, quello perpendicolare ad esse è minore di tutti gli altri.

Infatti dimostrammo (§ 67, Teor.) che è possibile condurre a due rette sghembe a, b una sola perpendicolare comune, e che le incontri entrambe. Questa retta risulta perpendicolare anche ai piani α e β, condotto l'uno per a parallelo a b, e l'altro per b parallelo ad a. (Fig. 49). Il segmento di questa perpendicolare, che termina alle due rette sghembe, per il corollario precedente, è minore di qualsiasi altro segmento compreso fra i due piani ed obliquo ad essi; perciò esso è il minore dei segmenti, che hanno gli estremi sopra le due rette sghembe date.

Definizioni. — 1ª. Si chiama *distanza di un punto da una retta, o da un piano,* la distanza del punto dalla sua proiezione sulla retta, o sul piano.

2ª. Si chiama *distanza di due rette parallele* la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra.

3ª. Si chiama *distanza di una retta da un piano ad essa parallelo* la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano.

4ª. Si chiama *distanza di due piani paralleli* la distanza di un punto qualsiasi di uno di essi dall'altro.

5ª. Si chiama *distanza di due rette sghembe* il segmento, ad esse perpendicolare, che ha i suoi estremi sulle medesime.

159. Teorema. — *Di tutti gli angoli che una semiretta, uscente da un punto di un piano, fa colle semirette del piano, uscenti dal medesimo punto, il minimo è quello che essa fa con la sua proiezione.*

Sia AB (Fig. 124) una retta obliqua al piano α, e che lo incontri nel punto A; sia BC la retta proiettante un suo punto B, e quindi sia AC la proiezione della semiretta AB sul piano α. Condotta nel piano α un altra retta AH, si prenda AH = AC, e si unisca B con H. Il segmento BH, obliquo al piano α, è maggiore del segmento perpendicolare BC; e quindi nei due triangoli BAC, BAH, aventi il lato AB comune, i lati AC, AH uguali per costruzione, e il lato BC < BH, sarà (§ 91, Teor.) $\widehat{BAC} < \widehat{BAH}$. Così l'angolo $\widehat{BAC}$ è il minimo angolo formato da AB con tutte le rette del piano α.

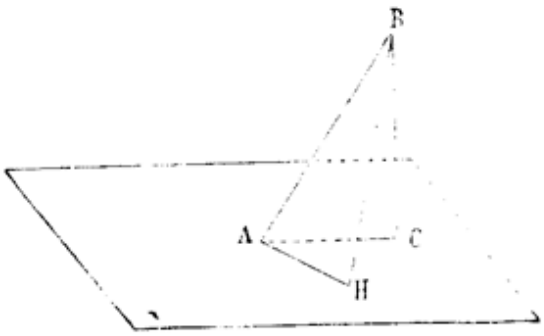

Fig. 124.

Definizione. — Dicesi *angolo,* o *inclinazione di una retta con un piano,* non parallelo ad essa, l'angolo formato da ciascuna delle semirette, in cui essa è tagliata dal piano, con la propria proiezione sul piano medesimo.

160. Teorema. — *Il luogo geometrico dei punti di un piano, equidistanti da due punti del piano stesso, è la retta perpendicolare al seg-*

mento che congiunge quei due punti, condotta per il punto medio di esso nel piano dato.

1°. Sia a (Fig. 125) la retta del piano α perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio C. I due segmenti P_1A, P_1B, che uniscono un punto qualunque P_1 della retta a coi punti A, B, sono uguali, perchè le loro proiezioni CA, CB sono eguali.

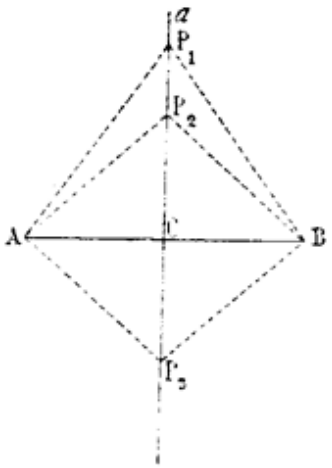

Fig. 125.

2°. Inversamente se le distanze P_1A, P_1B di un punto P_1 da A e da B sono uguali, le loro proiezioni sulla retta AB devono essere uguali, e perciò il punto P_1 deve trovarsi sulla perpendicolare ad AB nel suo punto medio, vale a dire sulla retta a.

Corollari. — *1°. Le perpendicolari ai lati di un triangolo, condotte nel piano del medesimo per i loro punti medi, passano per uno stesso punto, che è il solo punto del piano equidistante dai vertici.*

Le perpendicolari ai due lati BC, AC nei loro punti medi D, E devono incontrarsi (§ 70) in un punto G, il quale, appartenendo a ciascuna di esse, sarà, pel teorema precedente, il solo punto del piano equidistante dai tre vertici A, B, C. Lo stesso punto G appartiene poi anche alla perpendicolare alla AB nel suo punto medio F, perchè è equidistante dai punti A e B; e quindi tutte tre le dette perpendicolari si tagliano nel punto G egualmente distante dai vertici.

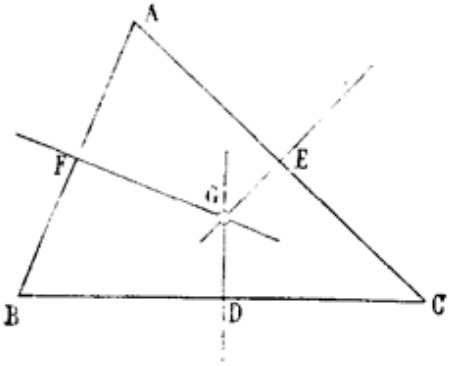

Fig. 126.

2°. Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto.

Sia ABC il triangolo dato, e sieno B′C′, C′A′, A′B′ le parallele condotte dai vertici ai lati opposti. Queste rette dovranno incontrarsi due a due (§ 47, Cor. 2°), e quindi formare un triangolo A′B′C′. I segmenti paralleli BC, AB′ sono eguali, perchè compresi fra rette parallele, e per la stessa ragione sono eguali i due segmenti BC, C′A; perciò il punto A è il punto medio del lato B′C′. Analogamente si dimostra che B e C sono rispettivamente i punti medi dei lati C′A′, A′B′. Ora le altezze di ABC, essendo perpendicolari ai lati del triangolo A′B′C′ nei loro punti medi, devono per il corollario precedente passare necessariamente per uno stesso punto.

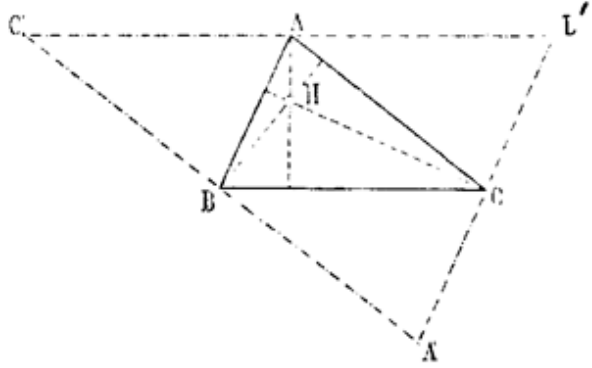

Fig. 127.

161. Teorema. — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due*

punti dati è il piano perpendicolare al segmento, che congiunge quei due punti, condotto per il suo punto di mezzo.

Infatti, dal teorema precedente risulta che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un punto sia equidistante da due punti A, B, è che si trovi sopra una delle infinite perpendicolari al segmento che li congiunge, condotte per il suo punto medio C. Siccome il luogo di queste perpendicolari è il piano perpendicolare al segmento AB nel punto C (§ 60, Teor.), così tutti e soli i punti di un tal piano godono della proprietà di essere equidistanti da A e da B.

Corollari. — *1°. I piani perpendicolari ai lati di un triangolo nei loro punti medi passano per una retta, luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici del triangolo.*

Si imiti la dimostrazione del corollario 1° del § precedente.

2°. I piani perpendicolari agli spigoli di un tetraedro nei loro punti medi passano per uno stesso punto, che è il solo punto dello spazio equidistante dai vertici.

Sia ABCD il tetraedro dato. I piani perpendicolari agli spigoli AB, AC, AD nei loro punti di mezzo non possono essere paralleli, poichè, se lo fossero, le tre rette AB, AC, AD, coinciderebbero; nè possono essere paralleli ad una stessa retta, perchè, se ciò avvenisse, questa retta dovrebbe essere perpendicolare ai piani ABC, ACD, ADB (§ 65, Cor.); perciò i tre piani suddetti hanno un sol punto comune O, il quale, trovandosi su di essi, è l'unico punto dello spazio equidistante da A e da B, da A e da C, da A e da D, ossia è equidistante dai quattro vertici del tetraedro dato. Essendo il punto O equidistante anche da B e da C, da C e da D, da D e da B, per esso devono passare anche i piani perpendicolari agli spigoli BC, CD, DB, condotti per i loro punti di mezzo.

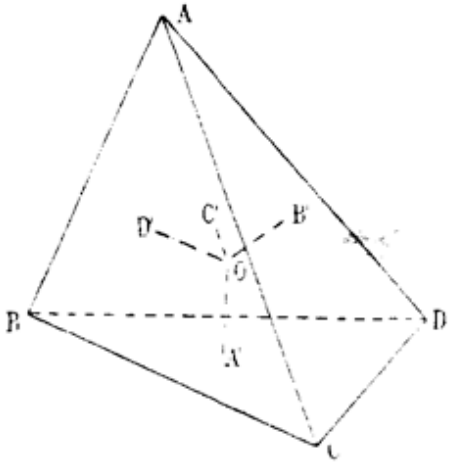

Fig. 128.

162. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, equidistanti da due rette del piano stesso, che s' incontrano, è la coppia delle bisettrici dei quattro angoli formati dalle due rette.*

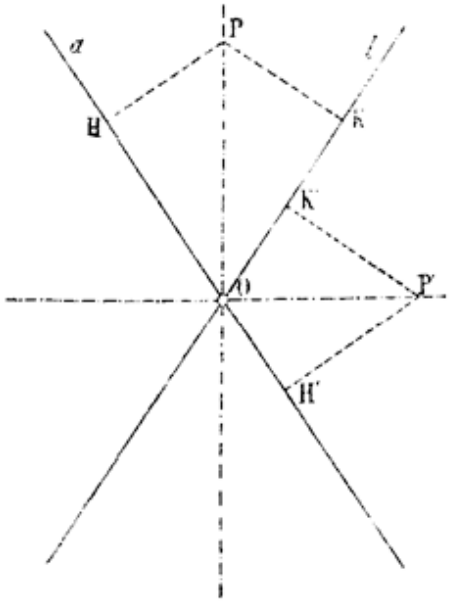

Fig. 129.

1ª. Sia P un punto situato sopra una delle bisettrici degli angoli formati dalle rette *a*, *b*, e PH, PK le perpendicolari condotte da esso alle rette *a*, *b*. I due triangoli OPH, OPK rettangoli, poichè gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ sono retti per costruzione,

hanno l'ipotenusa OP comune e gli angoli $\widehat{POH}$, $\widehat{POK}$ uguali per ipotesi, e perciò sono uguali. Ne segue che è $PH \equiv PK$, ossia il punto P è egualmente distante dalle rette a, b.

2°. Inversamente, sia P′ un punto del piano, nel quale giacciono le rette a, b, equidistante da esse, tale cioè che i segmenti perpendicolari P′H′, P′K′ a queste rette sieno uguali. Unendo P′ con O, si hanno i due triangoli OP′H′, OP′K′ rettangoli, perchè gli angoli $\widehat{H'}$, $\widehat{K'}$ sono retti, e che hanno l'ipotenusa OP′ comune ed i cateti P′H′, P′K′ uguali. Essi sono dunque eguali e perciò gli angoli $P'\widehat{O}H'$, $P'\widehat{O}K'$ sono uguali, cioè P′ è un punto di una delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette a, b.

Corollario. — *Le bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo si incontrano tre a tre in quattro punti, che sono i soli punti del piano equidistanti dalle rette del triangolo.*

Sieno AO_1, BO_2 le bisettrici di due angoli interni del triangolo ABC. Essendo la somma di due angoli di un triangolo minore di un angolo piatto, a più forte ragione sarà $O_1\widehat{A}B + O_2\widehat{B}A$ minore di un angolo piatto, e quindi le due bisettrici si taglieranno in un punto O, il quale, appartenendo a ciascuna di esse, sarà per il teorema precedente equidistante dalle tre rette del triangolo. Lo stesso punto O appartiene poi anche alla bisettrice del rimanente angolo $B\widehat{C}A$, perchè è equidistante dai lati AC, BC ed interno a questo angolo; da ciò si conclude che le tre bisettrici degli angoli interni si tagliano in un punto O, egualmente distante dalle tre rette del triangolo.

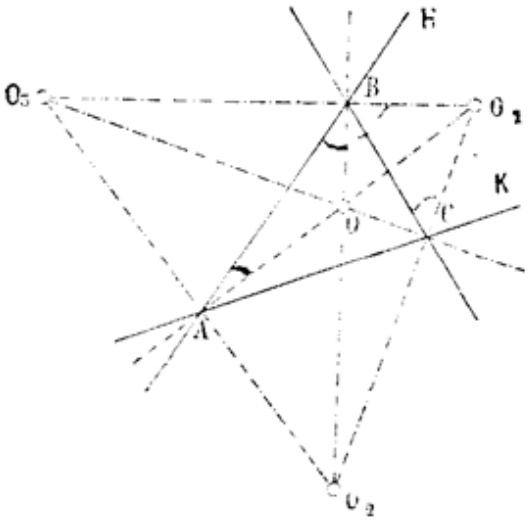

Fig. 130.

Analogamente le bisettrici di due angoli esterni per es. BO_1, CO_1 si devono incontrare in un punto O_1 interno ai due angoli $H\widehat{B}C$, $K\widehat{C}B$, ossia interno all'angolo $B\widehat{A}C$, ma esterno al triangolo, perchè la somma degli angoli $C\widehat{B}O_1$, $B\widehat{C}O_1$ è minore di un angolo piatto. Questo punto O_1 trovandosi sulle due bisettrici suddette, è equidistante dalle tre rette del triangolo, e siccome è interno all'angolo $B\widehat{A}C$ deve trovarsi sulla bisettrice di quest'angolo.

In simil guisa si dimostra, che esistono altri due punti O_2, O_3 equidistanti dalle rette del triangolo, per ciascuno dei quali passano le bisettrici di due angoli esterni e di un angolo interno del triangolo.

Ogni altro punto del piano per essere equidistante dalle tre rette del triangolo si deve trovare su due delle bisettrici degli angoli interni od esterni, e perciò deve coincidere con uno dei quattro punti O, O_1, O_2, O_3.

163. Teorema. — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che si tagliano, è la coppia dei piani bisettori dei quattro diedri formati dai due piani.*

Sieno α, β due piani che si tagliano secondo una retta OO′, e γ, δ i piani bisettori dei loro diedri.

1°. Sia P un punto qualunque di uno di questi piani bisettori, per es. di δ, e PH, PK le perpendicolari condotte da esso ai piani α, β. Il piano individuato dalle rette PH, PK è perpendicolare (§ 64, Teor.) ai piani α, β, e perciò anche (§ 65, Cor.) alla loro intersezione OO′. Se dunque OH, OK, OP sono le rette d'intersezione di un tale piano coi piani α, β, δ, gli angoli $H\widehat{O}P$, $P\widehat{O}K$ sono le sezioni normali dei diedri uguali $H\widehat{O}O'P$, $P\widehat{O}O'K$, e perciò sono uguali. Allora i due triangoli OPH, OPK sono rettangoli, poichè gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ sono retti, hanno l'ipotenusa OP comune, e i due angoli $H\widehat{O}P$, $P\widehat{O}K$ uguali; essi sono dunque uguali, ed è PH = PK, cioè P è equidistante dai piani α, β.

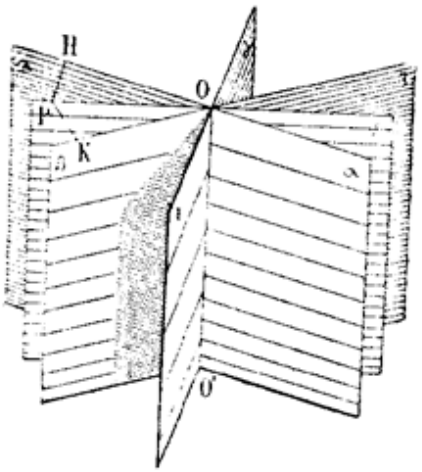

Fig. 131.

2°. Inversamente, se P è un punto equidistante dai piani α, β, esso deve essere sopra uno dei piani bisettori dei loro diedri.

Infatti, condotto il piano OO′P e il piano delle due perpendicolari PH, PK, si dimostra, come abbiamo fatto sopra, che quest'ultimo è perpendicolare alla retta OO′ e taglia i piani α, β, OO′P secondo le rette OH, OK, OP, gli angoli delle quali sono le sezioni normali dei diedri dei piani medesimi. Ora i due triangoli POH, POK sono uguali, perchè hanno gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ retti, l'ipotenusa OP comune e i cateti PH, PK uguali; ne segue che sono eguali gli angoli $P\widehat{O}H$, $P\widehat{O}K$ e quindi anche i diedri corrispondenti, cioè il piano OO′P è il piano bisettore di uno dei diedri formati dai piani dati α e β.

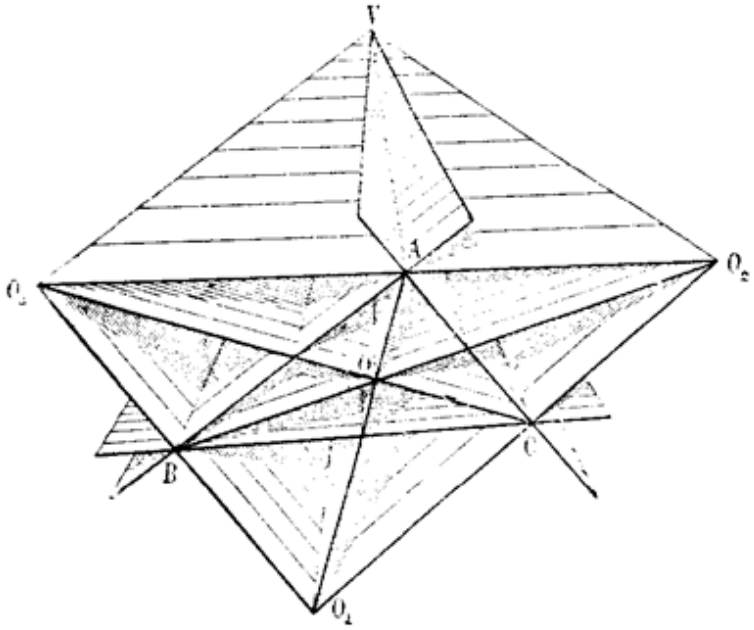

Fig. 132.

Corollario. — *I piani bisettori dei diedri interni ed esterni di un triedro si tagliano tre a tre secondo quattro rette, le quali sono il luogo geometrico dei punti equidistanti dai piani del triedro.*

Si imiti la dimostrazione del corollario del teorema precedente (Fig. 133).

164. Teorema. — *Esistono non più di otto e non meno di cinque punti equidistanti dai quattro piani di un tetraedro.*

Sieno $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i quattro piani di un tetraedro, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C, D. Siccome il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che s'incontrano, è formato dalla coppia di piani bisettori dei loro diedri, affinchè un punto sia equidistante dai piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ è necessario e sufficiente che si trovi contemporaneamente sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani α, β, sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani α, γ e sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani α, δ. I piani bisettori dei diedri formati dai piani α, β tagliano i piani bisettori dei diedri formati dai piani α, γ secondo quattro rette, che passano per D, poichè questo punto è comune a tutti i piani suddetti, e le quattro rette così ottenute tagliano i piani bisettori dei diedri formati dai piani α, δ al più in otto punti. Se O è uno dei punti d'incontro suddetti, esso è equidistante da tutti i piani del tetraedro, e perciò passano per esso altri tre piani bisettori dei diedri formati dai piani β e γ, γ e δ, δ e β.

Resta ora a dimostrare che esistono almeno 5 dei punti d'incontro suddetti. È chiaro prima di tutto che i piani bisettori dei diedri interni formati dal piano α coi piani β, γ, δ s'incontrano in un punto O interno al tetraedro (§ 149, Cor.). Per esso dunque passano anche i piani bisettori degli altri tre diedri interni formati da β con γ, da γ con δ e da δ con β.

Consideriamo ora i tre semipiani bisettori dei diedri esterni adiacenti alla faccia BCD. Essi formano con questa faccia diedri minori della metà di un angolo piatto, cioè acuti, e perciò (§ 149, Cor.) s'incontrano in un punto O_1, esterno al tetraedro, ma interno al triedro $\widehat{A}$. Per esso dunque passano anche i piani bisettori dei diedri interni formati dai piani β e γ, γ e δ, δ e α. In simil guisa si trova che esistono altri tre punti O_2, O_3, O_4, per ciascuno dei quali passano i tre piani bisettori dei diedri esterni adiacenti ad una faccia e i piani bisettori dei diedri interni non conseguenti ad essi.

Consideriamo infine i piani bisettori dei due diedri interni opposti AD, BC. È evidente che essi si tagliano secondo una retta MN che incontra i due spigoli AD, BC in due punti N, M. Se il piano bisettore del diedro esterno AC incontra questa retta, è chiaro che non può incontrarla in un punto del segmento MN, ma in un punto dei suoi prolungamenti, cioè in un punto esterno al tetraedro. Ammettendo dunque che un tal punto d'incontro O′ esista, per esso dovranno passare anche gli altri piani bisettori dei diedri esterni CD, DB, BC. Si otterrebbero in tal guisa tre punti per ciascuno dei quali passerebbero i piani bisettori di due diedri interni, che hanno per spigoli due spigoli opposti del tetraedro, e i piani bisettori dei diedri esterni, che hanno per spigoli gli altri quattro spigoli del tetraedro.

È da notarsi però che non è escluso il caso che il piano bisettore del diedro esterno $\widehat{AC}$ sia parallelo alla retta MN, nel qual caso il punto O′ non esisterebbe.

Per esempio è facile vedere che nel tetraedro regolare gli ultimi tre punti, di cui abbiamo parlato, non esistono.

165. Teorema. — *Le mediane di un triangolo passano per uno stesso punto, che divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella, che termina al vertice, è doppia dell'altra.*

Sieno CF, BE due delle mediane del triangolo ABC, le quali si devono incontrare in un punto, perchè CF, essendo interna all'angolo $\widehat{ECB}$, deve tagliare (Teor. 82, Cor.) il terzo lato EB del triangolo EBC. Essendo M il punto d'incontro delle due mediane, si tracci il segmento EF e il segmento HK, che ha per estremi i punti medi dei segmenti MB, MC. Questi due segmenti sono entrambi paralleli ed eguali alla metà di BC (§ 86, Cor.), e quindi sono eguali e paralleli fra loro. Perciò il quadrilatero EFKH è un parallelogrammo, e le sue diagonali KE, HF si tagliano per metà, cioè KM ≡ ME, HM ≡ MF.

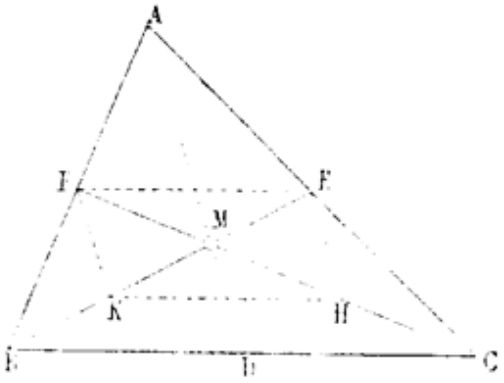

Fig. 133.

Ora, essendo per costruzione BK ≡ KM, CH ≡ HM, sarà

$$BM \equiv 2 . ME \quad CM \equiv 2 . MF.$$

Analogamente si dimostra che la terza mediana taglia ciascuna delle precedenti in un punto, che divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella, che termina al vertice, è doppia dell'altra; ma si è dimostrato che questo punto è il punto M; dunque tutte le tre mediane passano per M.

Definizione. — Il punto d'incontro delle mediane di un triangolo si chiama *baricentro* del medesimo.

166. Teorema. — *In ogni triangolo il segmento, che unisce un vertice con un punto del lato opposto, passando per il punto medio della mediana relativa ad uno degli altri due lati, è diviso da questo punto in due parti, in modo che quella che termina al vertice è il triplo dell'altra parte.*

Sia ABC (Fig. 134) il triangolo dato, MN la congiungente i punti medii dei lati AB, AC del triangolo ed AD il segmento, che ha per estremi il vertice A ed il punto D del lato opposto, e che contiene il punto medio H della mediana BN. Essendo P il punto d'incontro di MN con AD, si osservi che nel triangolo ABN, essendo M, H i punti medi di due lati, MN ed AH sono due mediane, e quindi AP

per metà anche il lato AC (§ 86, Teor.), ecc. Sappiamo inoltre (§ 142, Teor.) che la sezione $B'C'B_2C_2$ è un parallelogrammo; quindi le diagonali $B'C_2$, B_2C', che sono le congiungenti i punti medi di due coppie di spigoli opposti, s'incontrano nel punto O, e si dividono in esso scambievolmente per metà.

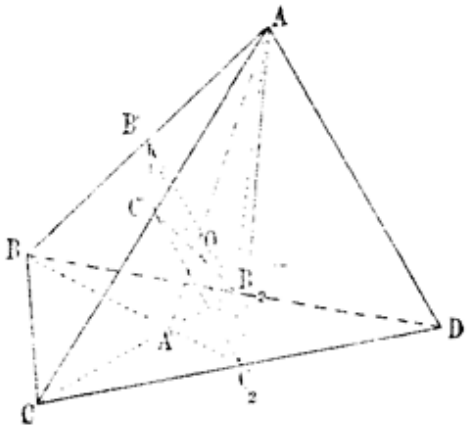

Fig. 136.

Se ora si considera la congiungente i punti medi della rimanente coppia di spigoli opposti BC, AD ed una delle precedenti, si dimostra nella stessa guisa, che esse hanno un punto comune, che le divide per metà; ma si è dimostrato che questo punto è O, dunque tutte tre le congiungenti passano per O.

Si osservi ora che i piani CAB_2, BAC_2 tagliano la faccia BCD secondo le mediane CB_2, BC_2 del triangolo BCD, e quindi hanno in comune la retta AA', la quale contiene il punto O e il baricentro A' della faccia BCD. È poi evidente che B_2C' è una mediana del triangolo B_2AC, e che quindi (§ 166, Teor.) il segmento AA' è diviso dal punto O, in modo che $AO = 3.OA'$. Analoga dimostrazione si può ripetere per le altre mediane.

Definizione. — Il punto d'incontro delle mediane di un tetraedro dicesi *baricentro* del medesimo.

ALCUNI PROBLEMI.

169. Abbiamo visto (§ 58, Teor. 1°), che per un punto di un piano si può condurre in esso una ed una sola retta perpendicolare ad una retta del piano medesimo, e che (§ 36, Cor. 3° e 38, Cor. 1°) per un punto, preso fuori di una retta, passa una ed una sola retta parallela ad essa. Inoltre nei §§ 54 e 55 abbiamo veduto, che è sempre possibile dividere un segmento in n parti eguali, ed un angolo in 2, 4, 8, 16, ... parti eguali. Ci proponiamo ora di dare alcune semplici costruzioni relative a siffatte quistioni, le quali sono di un uso frequentissimo nella risoluzione grafica dei problemi, e premettiamo a tale scopo il seguente

Teorema. — *Se due circoli situati in un piano hanno raggi uguali, e la distanza dei loro centri è minore del doppio del raggio, essi circoli si tagliano in due punti.*

Siano O, O' (Fig. 137) i centri dei due circoli C, C', ed R il loro raggio. Se sulla retta OO' a partire da O dalle due parti di esso porto due segmenti OA, OB uguali ad R, è chiaro che i loro estremi A, B sono i punti d'incontro della retta OO' col circolo c. Di questi

è il doppio di HP. Ma dai triangoli HPN, BHD, eguali, perchè hanno $HN \equiv BH$ per costruzione, $\widehat{PHN} \equiv \widehat{BHD}$, come opposti al vertice, ed $\widehat{HNP} \equiv \widehat{HBD}$, come alterni interni rispetto alle parallele MN, BC e alla trasversale BN (§ 36, Teor.), si ricava $HD \equiv HP$; dunque $AH \equiv 3.HD$.

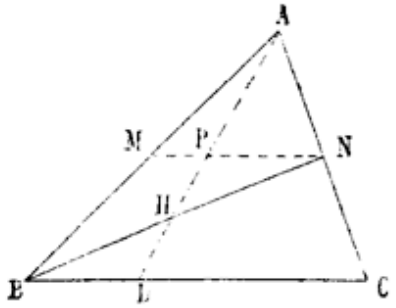

Fig. 134.

167. Teorema. — *La somma delle distanze dei tre vertici di un triangolo da una retta del suo piano, esterna al triangolo, è eguale al triplo della distanza del baricentro del triangolo dalla stessa retta.*

Sia M (Fig. 135) il punto medio del lato AB del triangolo ABC. Se dividiamo la mediana CM in tre parti eguali in O e in H, il punto O è il baricentro del triangolo. Indicando con A′, B′, C′, M′, O′, H′ le proiezioni dei punti A, B, C, M, O, H sopra una retta a, esterna al triangolo, si ha, osservando i trapezi MM′H′H, OO′C′C, AA′B′B (§ 103, Teor.)

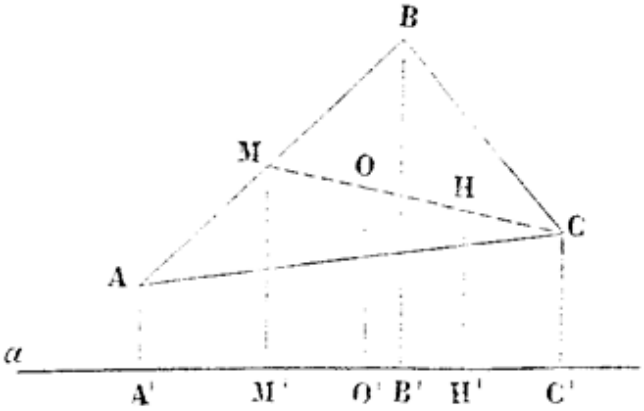

Fig. 135.

$$MM' + HH' \equiv 2 . OO',$$

e quindi

$$2MM' + 2HH' \equiv 4 . OO',$$

ed anche

$$OO' + CC' \equiv 2 . HH',$$

$$AA' + BB' \equiv 2 . MM'.$$

Sommando membro a membro queste tre ultime eguaglianze, si ricava

$$AA' + BB' + CC' \equiv 3.OO'.$$

168. Definizione. — Un segmento, che ha per estremi un vertice di un tetraedro ed il baricentro della faccia opposta, si chiama *mediana* del tetraedro.

Teorema. — *I segmenti, che hanno per estremi i punti medii delle coppie di spigoli opposti di un tetraedro, si dividono scambievolmente per metà in uno stesso punto, il quale è comune anche alle mediane del tetraedro, e divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella che termina al vertice è tripla dell'altra.*

Sia ABCD (Fig. 136) il tetraedro dato. Il piano $B'C'C_2B_2$, condotto per il punto medio dello spigolo AB parallelamente ai due spigoli opposti BC, AD, divide pure per metà anche gli spigoli AC, CD, BD. Infatti la retta C′B′ essendo parallela alla base CB del triangolo ACB, e passando per il punto medio B′ dal lato AB, divide

due punti quello A, che si trova rispetto ad O dalla parte opposta di O′, ha da O′ una distanza $O'A \equiv O'O + OA$, maggiore di R, e perciò è esterno al circolo c'; l'altro punto B, se OO′ è maggiore di R, ha da O′ una distanza $O'B \equiv OO' - R$, minore di R (essendo $OO' < 2R$); se OO′ è uguale ad R, coincide con O′; se finalmente OO′ è minore di R, ha da O′ una distanza $R - OO'$, ossia minore di R. In ogni caso dunque il punto B è interno al circolo avente il centro in O′. Il circolo c allora, avendo un punto A esterno ed uno B interno al circolo c', lo taglia almeno in due punti (§ 27, Cor. 1°).

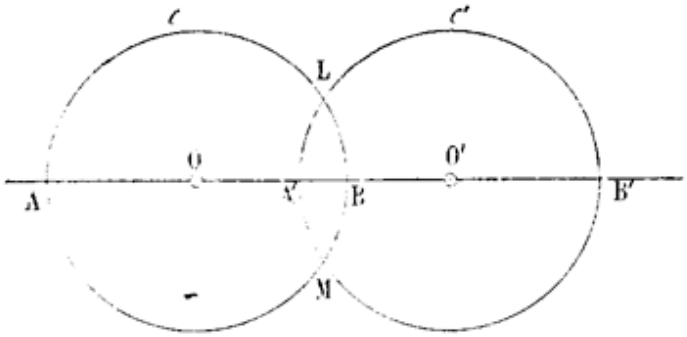

Fig. 137.

È facile inoltre convincersi che i due circoli c, c' non possono avere più di due punti comuni; perchè, se ne avessero tre L, M, N, ciascuno di questi, essendo equidistante da O e O′, dovrebbe trovarsi sulla perpendicolare nel punto di mezzo di OO′ (§ 160, Teor.), ed allora da O e da O′ si potrebbero condurre a questa perpendicolare tre segmenti uguali, e ciò è assurdo (§ 158, Cor. 1°).

170. Problema. — *Per un punto, dato sopra una retta, condurre una perpendicolare a questa retta.*

Sia A il punto dato sulla retta a. Descriviamo col centro in A e con un raggio qualunque un circolo, che incontrerà la a in due punti B, C (§ 24). Presi per centri i punti B, C, con uno stesso raggio, maggiore di AB, si descrivano due circoli, i quali (§ 169, Teor.) si tagliano in due punti H, K equidistanti dai punti B, C; perciò la retta HK è perpendicolare a BC, e passa per il suo punto medio A (§ 160, Teor.)

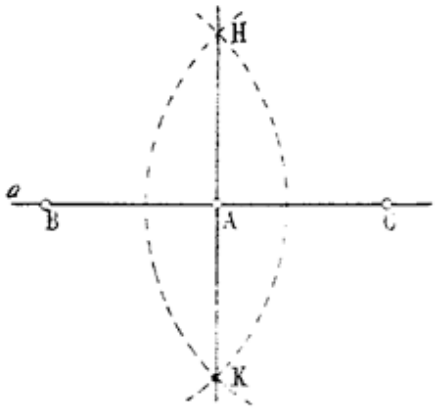

Fig. 138.

171. Problema. — *Condurre una retta perpendicolare ad una retta data per un punto dato fuori di essa.*

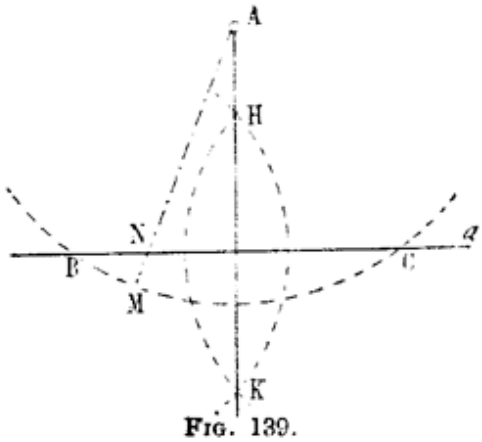

Fig. 139.

Preso un punto qualunque M dalla parte opposta a quella dove si trova il punto dato A rispetto alla data retta a, si descriva un circolo con raggio AM e col centro in A. Questo circolo taglierà la a in due punti B, C (§ 85, Cor. 4°).

Prendendo per centri i due punti B, C, si descrivano con un medesimo raggio, maggiore della metà di BC, due circoli. Essi si taglieranno in due punti H, K (§ 169). Ciascuno dei punti A, H, K essendo equidistante da B, C,

essi si trovano tutti sopra una retta perperdicolare a BC nel suo punto di mezzo, e questa è la perpendicolare richiesta.

172. Problema. — *Per un punto condurre una retta parallela a una retta data.*

Conduciamo la retta, che passa per il punto dato A e per un punto qualunque B della data retta a; quindi, ripetendo la costruzione del § 96, si conduca per il punto A una retta, che colla AB formi un angolo $\widehat{BAD}$ uguale al suo alterno interno $\widehat{ABC}$. La AD sarà la retta domandata (§ 36, Teor.).

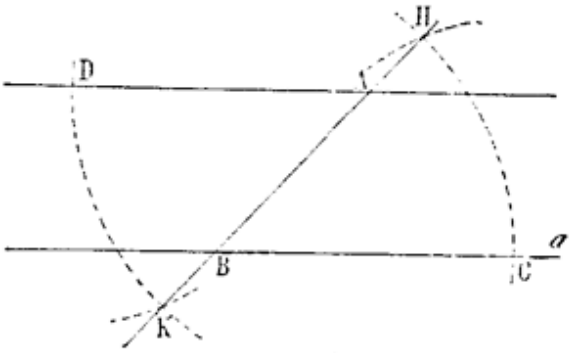

Fig. 140.

173. Problema. — *Dividere un segmento dato per metà.*

Vedemmo già (§ 54, Teor.) come si possa dividere un segmento qualunque in n parti eguali. Quando si vuol dividere un segmento solamente in due parti eguali, alla costruzione generale, indicata nel citato §, è forse preferibile la seguente:

Si descrivano due circoli con raggio maggiore della metà del dato segmento BC (Fig. 138), e aventi per centri gli estremi del segmento stesso. Questi due circoli si devono tagliare in due punti H, K (§ 169, Teor.). Essendo ciascuno di questi punti equidistante dai punti B, C, la loro congiungente è perpendicolare alla retta BC e passa per il punto medio A del segmento BC (§ 160, Teor.).

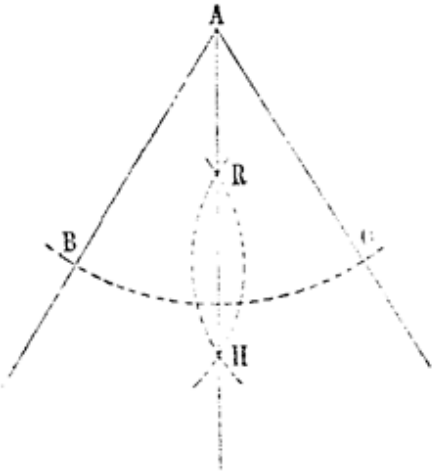

Fig. 141.

174. Problema. — *Dividere un angolo in due parti eguali.*

Si descriva con raggio qualunque un circolo, avente per centro il vertice A dell'angolo dato, il quale incontrerà i lati in due punti B, C. Si descrivano poi due circoli, aventi per centri i punti B, C, con un medesimo raggio maggiore della metà della distanza BC. Questi due circoli si tagliano in due punti H, R. La retta che passa per uno qualunque di essi, per es. H, e per il vertice A è la bisettrice dell'angolo dato.

Infatti, condotte le rette BH, HC, si hanno i due triangoli ABH, ACH eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente uguali per costruzione. Ne segue $\widehat{BAH} \equiv \widehat{HAC}$.

Siccome sappiamo che la bisettrice di un angolo è unica, i punti H, R, A sono in linea retta.

Ripetendo la costruzione indicata per i due angoli $\widehat{BAH}$, $\widehat{HAC}$, l'angolo dato resterà diviso in quattro parti uguali. Dividendo poi per metà ciascuno degli angoli ottenuti, l'angolo dato sarà diviso in 8 parti eguali, e, proseguendo, nella stessa guisa, si potrà dividerlo in 16, 32, 64..... parti uguali, ecc.

Non si conosce però nessuna costruzione, nella quale si faccia uso soltanto di rette e di circoli, per mezzo della quale si possa dividere un angolo qualunque in un numero di parti eguali diverso dai numeri 2, 4, 8, 16.....

ESERCIZI

TEOREMI.

72. Ciascun lato di un triangolo è minore del semiperimetro del triangolo.

73. La somma delle distanze di un punto interno ad un triangolo dai tre vertici è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro del triangolo.

74. La somma delle altezze di un triangolo è minore del perimetro.

75. La bisettrice dell'angolo esterno di un triangolo isoscele, conseguente all'angolo compreso fra i lati uguali, è parallela alla base; e viceversa.

76. Secondo che una mediana di un triangolo è maggiore, uguale, o minore della metà del lato a cui è condotta, l'angolo opposto a questo lato è acuto, retto, od ottuso ; e viceversa.

77. Se due triangoli hanno un lato e le altezze, corrispondenti agli altri due lati, rispettivamente eguali, essi sono eguali.

78. Se due triangoli isosceli hanno l'angolo al vertice e la mediana, uscente da questo vertice, rispettivamente uguali, essi sono eguali.

79. Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo equilatero formano intorno al loro punto d'incontro angoli eguali.

80. In un triangolo isoscele. se un angolo alla base è la quarta parte dell'angolo al vertice, la perpendicolare alla base, condotta per un suo estremo, forma con uno dei lati eguali e col prolungamento dell'altro un triangolo isoscele.

81. Se si congiunge un punto della bisettrice di un angolo esterno di un triangolo dato con gli altri due vertici del triangolo medesimo, si ottiene un nuovo triangolo, di cui il perimetro è maggiore del perimetro del triangolo dato.

82. Se per un punto qualunque della base di un triangolo isoscele si tirano le parallele agli altri due lati, si forma un parallelogrammo, il cui perimetro è costante.

83. In ogni poligono, avente un numero pari di lati, la somma delle diagonali, che uniscono due a due i vertici, in modo che in ciascun vertice termini una sola diagonale, è minore della somma delle distanze di un punto interno qualsiasi dai vertici del poligono.

84. In un triangolo qualunque,

1° ciascuna mediana è minore della semisomma dei due lati concorrenti con essa, ed è maggiore della loro semidifferenza;

2° la somma delle tre mediane è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro del triangolo.

85. Se due lati di un triangolo sono disuguali,

1° la mediana relativa al terzo lato fa col maggiore dei primi due lati angolo minore;

2° l'altezza relativa al terzo lato fa col lato maggiore angolo maggiore;

3° la bisettrice dell'angolo compreso fra questi lati è interna all'angolo formato dalla mediana e dell'altezza, uscenti dallo stesso vertice.

86. Se due triangoli hanno due lati e una mediana rispettivamente eguali, essi sono eguali.

87. In ogni triangolo a lati eguali corrispondono mediane e bisettrici eguali, al lato maggiore corrispondono mediana e bisettrice minore, e viceversa.

88. I tre segmenti, che hanno per estremi i punti medi di una coppia di lati opposti o delle diagonali di un quadrangolo, passano per un punto, ed in esso si tagliano per metà.

89. Le rette che congiungono due punti A, B con due punti E, F di una retta che passa per il punto medio del segmento AB, s'incontrano in due punti C, D, situati sopra una parallela ad AB.

90. Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli interni del triangolo, che ha per vertici i tre termini delle altezze medesime.

91. Essendo D, E, F rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA, AB di un triangolo ABC, si conduca DG parallela alla mediana BE fino ad incontrare il prolungamento di EF. Dimostrare che i tre lati del triangolo DGA sono rispettivamente eguali alle tre mediane del triangolo ABC.

92. Se ABC è un triangolo equilatero, ed O è il punto d'incontro delle mediane del triangolo, le perpendicolari a BO e CO nei loro punti medii tagliano il lato BC in tre parti eguali.

93. Se per tre punti, presi ad arbitrio sui lati di un triangolo dato, si conducono tre rette, in modo che facciano colle rette del triangolo angoli rispettivamente eguali, le tre rette, incontrandosi, formano un nuovo triangolo, che ha gli angoli rispettivamente eguali a quelli del triangolo dato.

94. Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è doppia del cateto minore; e viceversa.

95. Se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra la retta del lato opposto, l'angolo acuto da esse formato è eguale alla semidifferenza dei due angoli del triangolo, non conseguenti all'angolo esterno considerato.

96. La differenza di due angoli di un triangolo è eguale al doppio dell'angolo compreso fra l'altezza e la bisettrice, uscenti dal vertice del terzo angolo.

97. L'angolo compreso fra la mediana e l'altezza, uscenti dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo, è eguale alla differenza dei due angoli acuti del triangolo.

98. La bisettrice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo divide per metà anche l'angolo formato della mediana e dall'altezza, uscenti dal vertice dell'angolo retto medesimo.

99. Se due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse eguali, ed un cateto dell'uno è maggiore di un cateto dell'altro, il rimanente cateto del primo è minore del rimanente cateto del secondo.

100. Se sui lati AC, CB di un triangolo ABC si costruiscono i quadrati, essendo E il vertice del quadrato, costruito sopra AC, più vicino ad A, e D il vertice del quadrato, che ha per lato CB, più vicino a B, dimostrare che le rette AD, BE si incontrano sulla perpendicolare ad AB condotta per C.

101. Gli angoli, formati dalle bisettrici di due angoli interni di un triangolo, sono eguali ad un angolo retto, aumentato o diminuito della metà del terzo angolo.

102. Se per il punto d'incontro delle bisettrici di due angoli interni, od esterni, di un triangolo si conduce una parallela ad una retta del triangolo, il segmento di essa, compreso fra le altre due rette del triangolo, è eguale alla somma, o alla differenza, dei segmenti di queste compresi, fra le due parallele.

103. La distanza di un vertice di un triangolo da un punto del lato opposto è maggiore della metà della differenza ottenuta, sottraendo questo lato dalla somma degli altri due.

104. I punti medii dei lati di un quadrangolo piano o gobbo sono vertici di un

parallelogrammo; e se il quadrangolo dato è un parallelogrammo, le diagonali dei due parallelogrammi passano per uno stesso punto.

105. I punti medii dei lati di un rettangolo sono vertici di una losanga. e punti medii dei lati di una losanga sono vertici di un rettangolo.

106. La mediana di un trapezio passa per i punti medii delle diagonali.

107. Il segmento, che congiunge i punti medii delle diagonali di un trapezio, è eguale alla semidifferenza delle basi.

108. La distanza del baricentro di un triangolo da un piano è eguale alla media aritmetica delle distanze dei tre vertici dal medesimo piano.

109. La distanza del baricentro di un tetraedro da un piano è eguale alla media aritmetica delle distanze dei quattro vertici dal piano medesimo.

110. Se un parallelogrammo ha i vertici sopra i lati di un rettangolo. ed ha due suoi lati opposti equidistanti da una diagonale del rettangolo, il suo perimetro è eguale alla somma delle diagonali del rettangolo.

111. In un triangolo il punto equidistante dai vertici, il baricentro ed il punto d'incontro delle altezze sono in linea retta, e la distanza del primo punto dal secondo è metà della distanza del secondo punto dal terzo.

112. In un triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante.

113. In un triangolo isoscele la differenza delle distanze di un punto preso sul prolungamento della base dalle altre due rette del triangolo è costante.

114. Qualunque segmento, condotto per il punto medio della base di un triangolo isoscele, il quale abbia gli estremi sopra uno dei lati eguali e sul prolungamento dell'altro lato, è maggiore della base del triangolo dato.

115. La somma delle distanze di un punto interno ad un triangolo equilatero dai tre lati del medesimo triangolo è costante.

116. Se da un punto interno ad un triangolo equilatero si tirano le parallele ai lati, la somma dei segmenti interni al triangolo è eguale al doppio di un lato.

117. In un triangolo equilatero la differenza fra la somma delle distanze di un punto esterno ad esso, ma interno ad uno de' suoi angoli, dai lati di quest'angolo, e la distanza dello stesso punto dalla retta del terzo lato è costante.

118. Se AB, CD sono due rette parallele, ed E, F sono i punti d'incontro delle rette, che congiungono due punti A, B dell'una con due punti C, D dell'altra, la retta EF divide per metà i segmenti AB, CD.

119. Se due vertici opposti di un parallelogrammo si uniscono coi punti medii di due lati opposti, la diagonale, che termina agli altri due vertici, resta divisa in tre parti eguali.

120. Se E, F sono le proiezioni di due vertici B e C di un triangolo ABC sopra una retta qualunque condotta per il terzo vertice A, il punto medio del lato BC è equidistante dai punti E ed F.

121. Se si congiungono due punti, presi sopra una diagonale di un parallelogrammo ad eguale distanza dai suoi estremi, con gli altri due vertici del parallelogrammo, il quadrangolo che si ottiene è un parallelogrammo.

122. Ogni segmento, che ha gli estremi sopra due lati opposti di un parallelogrammo, e passa per il punto d'intersezione delle diagonali. è diviso da questo punto per metà, e divide il parallelogrammo in due quadrangoli eguali; ossia un parallelogrammo è simmetrico rispetto al punto d'incontro delle sue diagonali.

123. Le bisettrici degli angoli interni di un parallelogrammo formano un rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogrammo, ed eguali alla differenza di due lati consecutivi del parallelogrammo dato.

124. Le bisettrici degli angoli interni, od esterni, di un rettangolo formano un quadrato.

125. Le bisettrici degli angoli interni di un quadrilatero convesso formano un secondo quadrilatero, i cui angoli opposti sono supplementari.

126. Le bisettrici di due angoli successivi di un quadrangolo convesso formano un angolo, che è eguale alla semisomma degli altri due angoli del quadrangolo.

127. Se le bisettrici di due angoli opposti di un quadrangolo convesso si tagliano, formano un angolo eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del quadrangolo.

128. Se i lati opposti di un quadrangolo convesso s'incontrano, le bisettrici degli angoli così ottenuti si tagliano, e formano un angolo eguale alla semisomma di due angoli opposti del quadrangolo.

129. Se due trapezi hanno i lati rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo, sono eguali.

130. Per il vertice A di un parallelogrammo ABCD si conduca una retta qualunque AX. Dimostrare che la distanza del vertice C dalla retta AX è eguale alla somma, o alla differenza, delle distanze dei vertici B e D dalla stessa retta, secondochè essa è esterna al parallelogrammo, oppure taglia il suo contorno in un altro punto.

131. Se per i vertici di un parallelogrammo si conducono quattro segmenti paralleli, che terminino ad una retta (o ad un piano) che non tagli il suo contorno la somma dei segmenti, che partono da due vertici opposti, è eguale alla somma degli altri due.

132. La somma, o la differenza, delle distanze di un punto da due lati consecutivi di una losanga è eguale alla somma, o alla differenza, delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati.

133. Se in un trapezio una base è doppia dell'altra, la mediana è divisa in tre parti eguali dalle diagonali.

134. La somma delle diagonali di un quadrangolo convesso è minore del perimetro, ed è maggiore del semiperimetro.

135. Le diagonali di un tronco di piramide, avente per basi due parallelogrammi, si incontrano in un punto.

136. Dimostrare, indipendentemente dal teorema del § 91, che due triangoli sono eguali, se hanno i lati rispettivamente eguali.

137. Se sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrato si prendono dei segmenti AA′, BB′, CC′, DD′ eguali fra loro, i punti A′, B′, C′, D′ sono i vertici di un altro quadrato.

138. Se una retta incontra le facce di un diedro in punti egualmente distanti dallo spigolo, essa fa angoli eguali coi piani delle due facce. E viceversa.

139. Se per un punto della costola di un diedro si conduce in una delle facce la semiretta perpendicolare, e nell'altra una semiretta obliqua alla costola, l'angolo delle due semirette sarà maggiore, eguale o minore del rettilineo del diedro, secondo che il diedro è acuto, retto od ottuso.

140. Se una retta forma angoli eguali con tre rette non parallele di un piano, essa è perpendicolare al piano.

141. Se una retta è perpendicolare ad un piano, e dal punto d'intersezione si conduce una perpendicolare ad una retta qualunque del piano stesso, e che la taglia, la congiungente un punto qualsiasi della prima retta col punto d'intersezione dell'altre due è perpendicolare alla retta del piano.

142. Il punto d'incontro delle altezze del triangolo, ottenuto tagliando con un piano un triedro trirettangolo, è la proiezione del vertice del triedro sul piano della sezione.

143. In un triedro la somma degli angoli, formati da ciascuno spigolo colla bisettrice della faccia opposta, è minore della somma delle facce.

144. In ogni triedro isoedro il piano bisettore del diedro, compreso tra le facce eguali, passa per la bisettrice della faccia opposta.

145. In ogni triedro isoedro gli angoli, formati dagli spigoli dei diedri eguali colle bisettrici delle facce opposte, sono eguali.

146. In ogni triedro isoedro gli angoli, formati dagli spigoli dei diedri eguali colle facce opposte, sono eguali.

147. I tre piani perpendicolari alle facce di un triedro, condotti per gli spigoli opposti, passano per una medesima retta.

148. I tre piani, che passano per gli spigoli di un triedro e per le bisettrici delle facce opposte, passano per una medesima retta.

149. I tre piani perpendicolari alle facce di un triedro, condotti per le loro bisettrici, passano per una medesima retta.

150. Se per il vertice di un triedro e nel piano di ciascuna faccia si conduce una perpendicolare allo spigolo opposto, le tre perpendicolari ottenute giacciono in un piano.

151. Ogni piano, perpendicolare ad uno degli spigoli di un triedro rettangolo, taglia questo triedro secondo un triangolo rettangolo.

152. La somma degli angoli, formati da ciascuno spigolo di un triedro con la faccia opposta, è minore della somma delle facce, ed è maggiore della loro semisomma.

153. Se per un punto interno ad un angoloide convesso si tirano le perpendicolari a tutte le facce, il nuovo angoloide così ottenuto è supplementare dell'opposto al vertice di quello dato.

154. Se per un punto della costola di un diedro si conduce una retta ad essa perpendicolare, ma non perpendicolare alle facce, di tutti gli angoli che si ottengono, tagliando il diedro con piani condotti per quella retta, il minore è la sezione normale.

155. Da ciascun punto di una retta, che passa per il vertice di un triedro, si conducano le perpendicolari alle facce di un triedro. I tre punti d'incontro delle perpendicolari suddette con i piani delle tre facce individuano un piano, e tutti i piani così ottenuti sono paralleli.

156. Se per ciascun punto di una retta che passa per il vertice di un triedro, si conducono tre piani perpendicolari agli spigoli del medesimo triedro, i tre punti d'incontro di questi piani con gli spigoli perpendicolari ad essi individuano un piano. Tutti i piani così ottenuti sono paralleli.

157. Se in un triedro la sezione normale di un diedro è eguale alla faccia opposta, anche le altre due facce sono uguali o supplementari alle sezioni normali dei diedri opposti.

158. Due prismi triangolari sono eguali, se hanno le facce laterali rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo.

159. Ogni segmento, che ha gli estremi sulla superficie di un parallelepipedo, e passa per il punto d'intersezione delle diagonali, è diviso da questo punto per metà. Ossia un parallelepipedo è simmetrico rispetto al punto d'incontro delle sue diagonali.

160. Le congiungenti i centri delle facce opposte di un parallelepipedo passano per il punto comune alle diagonali, ed in esso si dividono per metà.

161. I tre segmenti, che hanno per estremi i vertici di una delle basi di un prisma triangolare e i punti di mezzo degli spigoli opposti dell'altra base, passano per un punto della congiungente i baricentri delle due basi, il quale le divide in due parti, una doppia dell'altra.

162. I tre piani, individuati dai vertici di una base di un prisma triangolare e dai lati rispettivamente opposti dall'altra base, passano per uno stesso punto della retta, che congiunge i baricentri delle due basi.

163. I tre piani, individuati dagli spigoli laterali di un prisma triangolare e dai baricentri delle facce opposte, passano per una stessa retta.

164. Un piano, parallelo a due spigoli opposti di un tetraedro, e condotto per il baricentro del medesimo, è equidistante da quei due spigoli.

165. Se si taglia un prisma, o una piramide, con un piano non parallelo alla base, i punti d'incontro delle rette del poligono sezione con le corrispondenti rette del poligono base sono situati sopra una linea retta.

166. Se una piramide ha per facce laterali triangoli eguali ed isosceli, la somma delle distanze di un punto della base da quelle facce è costante.

167. Se le rette, che uniscono i vertici di un tetraedro ai vertici di un altro tetraedro, passano per un punto, le rette d'intersezione delle coppie di piani corrispondenti dei due tetraedri sono in un piano. E viceversa.

168. Se due altezze di un tetraedro s'incontrano, anche le altre due altezze s'incontrano.

169. Se AB, CD sono due segmenti, che scorrono su due rette r, s, ed H, K, H', K' sono i punti medii dei segmenti AC, AD, BC, BD i segmenti HK', H'K sono costanti.

Se le rette r, s sono perpendicolari, allora è $HK' \equiv H'K$.

170. Dimostrare, indipendentemente dal teorema del § 122, che due triedri sono eguali, se hanno le facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo.

171. Un segmento, che ha i suoi estremi su due spigoli opposti di un tetraedro, e che incontra la congiungente i punti di mezzo di altri due spigoli opposti, è da questa divisa per metà.

172. Se in un tetraedro le facce sono eguali,

a) le altezze sono eguali,

b) la distanza del punto, interno al tetraedro ed equidistante dai piani del medesimo, è eguale ad un quarto dell'altezza,

c) il baricentro del tetraedro è equidistante dai piani del medesimo.

d) i quattro punti equidistanti dai piani del tetraedro, esterni ad esso, ma interni ai suoi triedri rispettivamente, formano un tetraedro, i cui spigoli sono paralleli a quelli del primitivo,

e) il diedro di due facce è eguale a quello delle altre due,

f) i quattro triedri sono uguali,

g) le congiungenti i punti medii degli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari due a due,

h) il baricentro è equidistante dalle quattro altezze.

173. Se per gli spigoli di un tetraedro a facce eguali si conducono piani paralleli agli spigoli opposti, si ottiene un parallelepipedo rettangolo.

174. Se in un tetraedro due facce sono eguali, la somma delle perpendicolari, condotte ad esse da un punto dello spigolo opposto a quello comune alle due facce medesime, è costante.

175. La somma delle distanze di un punto interno ad un tetraedro, le cui facce sono triangoli equilateri, dalle quattro facce è costante. Come deve essere modificato il teorema per i punti esterni al tetraedro?

176. Se due coppie di spigoli opposti di un tetraedro sono perpendicolari, anche i due rimanenti spigoli sono perpendicolari, e le quattro altezze passano per un punto. Tale tetraedro si dice rettangolo.

177. In un tetraedro rettangolo:

a) le quattro altezze passano per un punto, per il quale passano anche le rette, che sono perpendicolari a due spigoli opposti e li incontrano,

b) la somma dei 12 angoli, che ciascuno spigolo fa coi piani delle facce, nelle quali non è contenuto, aumentata delle sezioni normali dei sei diedri, è eguale a sei angoli piatti.

178. Se per gli spigoli di un tetraedro rettangolo si conducono i piani perpendicolari agli spigoli opposti, questi sei piani passano per lo stesso punto.

179. Le perpendicolari alle facce di un tetraedro rettangolo, condotte per i baricentri delle medesime, passano per un punto.

180. I punti medii dei segmenti, che uniscono due a due i vertici di due triangoli dati, sono vertici di un nuovo triangolo, che ha per baricentro il punto medio del segmento, che unisce i baricentri dei due triangoli dati.

181. Dati cinque punti in un piano, o nello spazio, tali che tre di essi non sieno in linea retta, si possono formare con essi dieci triangoli. I dieci segmenti, che congiungono il baricentro di ciascuno di quei triangoli col punto medio del

segmento individuato dagli altri due punti, passano tutti per uno stesso punto, ed in esso si tagliano in due parti, delle quali una è i $\frac{2}{3}$ dell'altra.

182. Dati sei punti nello spazio, tali che quattro non sieno in un piano, si possono formare quindici terne di segmenti, aventi per estremi i sei punti medesimi. I quindici piani, individuati dai punti medii delle quindici terne di segmenti, passano tutti per un punto.

183. Dati sei punti in un piano, o nello spazio, tali che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare dieci coppie di triangoli. I dieci segmenti, che congiungono i baricentri di due triangoli di una coppia, passano tutti per un punto, ed in esso si tagliano per metà.

LUOGHI.

184. Trovare il luogo dei punti di un piano, che equidistano da due punti dati fuori del piano.

185. Trovare il luogo dei punti di un piano tali, che la somma, o la differenza, delle loro distanze da due rette fisse del medesimo piano sia eguale ad un segmento dato.

186. Dato un angolo $\widehat{AOB}$, trovare il luogo dei punti M dello spazio tali, che la somma delle proiezioni del segmento OM su i due lati dell'angolo sia costante.

187. Trovare il luogo dei punti tali, che la somma delle loro distanze da due piani dati sia eguale ad un segmento dato.

188. Trovare il luogo dei punti tali, che la somma delle loro distanze da tre piani dati sia eguale ad un segmento dato.

189. Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre piani paralleli ad una stessa retta.

190. Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre rette parallele non situate in un piano.

191. Il piano di un triangolo si muove parallelamente a sè stesso, in modo che due vertici scorrono su due rette parallele. Qual'è il luogo del terzo vertice?

192. Trovare il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre spigoli di un triedro.

193. Luogo dei punti dello spazio equidistanti da due rette di un piano.

194. Luogo dei punti equidistanti da due rette sghembe.

195. Luogo dei punti di una sfera equidistanti da due punti non situati in esso.

196. Luogo dei punti di mezzo dei segmenti, che hanno un estremo in un punto fisso e l'altro estremo sopra un circolo, oppure sopra una sfera.

197. Per un punto dello spazio si conducano i piani perpendicolari alle rette di un piano, condotte per un punto. Qual'è il luogo dei punti d'incontro di questi piani colle rette ad essi perpendicolari?

198. Luoghi dei baricentri, dei punti d'incontro delle altezze, dei punti equidistanti dai vertici, oppure dalle rette, dei triangoli, che si ottengono, tagliando un triedro con una serie di piani paralleli.

199. Dato un prisma triangolare indefinito ed una sua sezione fissa, si conducano quanti piani si vogliano, paralleli alla sezione fissa.

a) I tre piani, individuati dai lati della sezione fissa coi punti d'incontro dei tre spigoli opposti con un altro piano, passano per un punto. Qual'è il luogo di questi punti?

b) Due dei piani suddetti si tagliano secondo una retta. Qual'è il luogo di tali rette?

200. Luogo dei vertici dei parallelogrammi inscritti in un triangolo.

201. Luogo dei centri dei parallelogrammi, che hanno i vertici sopra i lati di un quadrangolo piano, o gobbo.

202. Trovare il luogo del punto medio di un segmento dato, i cui estremi scorrono sopra due rette perpendicolari situate in un piano.

203. Trovare il luogo dei vertici dei triangoli rettangoli, che hanno l'ipotenusa in comune.

204. In un quadrangolo sono dati tre lati e una diagonale. Trovare il luogo del punto medio dell'altra diagonale.

205. In un quadrangolo sono dati tre lati e una diagonale. Trovare il luogo del punto medio del segmento, che congiunge i punti medii delle due diagonali.

206. Date in un piano due rette a, b, che s'incontrano, ed un punto P sopra una di esse, p. es. a, trovare il luogo dei punti tali che, conducendo per essi le parallele alla retta b, il segmento compreso fra il punto stesso e l'intersezione colla retta a, sia eguale alla distanza di questa intersezione dal punto fisso.

207. Luogo dei baricentri dei triangoli rettangoli che hanno la medesima ipotenusa.

208. Luogo dei centri dei parallelogrammi, che si ottengono, tagliando con piani paralleli a due spigoli opposti, i piani di un tetraedro.

209. Si tagli un triedro con una serie di piani paralleli, e per i punti d'incontro di ciascuno di questi piani coi tre spigoli si conducano tre piani rispettivamente perpendicolari agli spigoli stessi. Questi tre piani s'incontrano in un punto, il luogo del quale è una retta, che passa per il vertice del triedro.

210. Se si taglia un triedro con piani paralleli, e per le rette d'intersezione di ciascuno di questi piani colle facce si conducono tre piani rispettivamente perpendicolari alle facce stesse, questi si tagliano in un punto, il luogo del quale è una retta che passa per il vertice.

PROBLEMI.

211. Tracciare la bisettrice di un angolo, di cui non si conosce il vertice.

212. Sopra una retta data trovare un punto equidistante da due punti, non situati con essa in un piano.

213. Per una retta data condurre un piano equidistante da due punti dati.

214. Condurre un piano equidistante da quattro punti dati non situati nello stesso piano.

215. Per un punto, dato in un piano, condurre nel piano stesso una retta, la cui distanza da un punto, dato fuori del piano, sia eguale ad un segmento dato.

216. Dati in un piano una retta e due punti, situati da una stessa parte rispetto alla retta, trovare sulla retta un punto tale, che le congiungenti questo punto coi due punti dati formino angoli eguali colla retta medesima.

217. In un piano trovare un punto tale, che la somma delle distanze di esso da due punti dati fuori del piano e situati dalla medesima parte del piano stesso, sia minima.

218. Dato un punto sopra ciascuna faccia di un diedro, determinare fra le linee poligonali, che può percorrere un punto, obligato a scorrere sulle due facce, per passar dall'uno all'altro dei punti dati, quella che ha perimetro minore.

219. In un dato triangolo ABC condurre un segmento MN parallelo al lato BC, e che termini agli altri due lati, in modo che sia $MN \equiv MB + NC$.

220. Dividere un angolo retto in tre parti eguali.

221. Trovare sopra un lato di un triangolo un punto, tale che la somma delle sue distanze dagli altri due lati sia minima.

222. Trovare nel piano di un triangolo un punto, tale che la somma delle sue distanze dai tre lati sia minima.

223. Essendo data una striscia e due punti A, B esterni ad essa e situati da parti opposte di uno dei lati della striscia, trovare una linea poligonale AMNB, tale che il segmento MN, che ha gli estremi sopra i lati della striscia, sia parallelo ad una retta data, e che il perimetro della linea stessa sia minimo.

224. Date due rette che si tagliano, condurre per un punto P del loro piano una retta, che incontri le prime due in punti egualmente distanti dal loro punto comune.

225. Per un vertice di un triangolo condurre una retta, che divida il lato opposto in due parti una doppia dell'altra, senza far uso di questo lato.

226. Dati tre punti, condurre per uno di essi una retta, in modo che la somma delle distanze degli altri due punti da questa retta sia eguale ad un segmento dato.

227. Trovare sopra un lato di un angolo un punto, che sia egualmente distante dall'altro e da un punto del primo lato.

228. Per un punto, interno ad un angolo, condurre una retta, in modo che il segmento compreso fra i lati dell'angolo sia diviso dal punto in due parti, delle quali una sia doppia dell'altra.

229. Per un punto, esterno ad un angolo, condurre ad uno dei lati un segmento, in modo che esso sia diviso dall'altro lato in due parti, delle quali una sia doppia dell'altra.

230. Trovare sopra una retta data un punto tale, che la differenza delle sue distanze da due punti dati, situati da parti opposte della retta, sia massima.

231. Trovare sopra un piano dato un punto tale, che la differenza delle sue distanze da due punti dati, situati da parti opposte del piano, sia massima.

232. Costruire un triangolo, dati due lati e una mediana.

233. Costruire un triangolo, dato un lato e due mediane.

234. Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente ad esso e la somma degli altri due lati.

235. Costruire un triangolo isoscele, dato il perimetro e l'altezza corrispondente alla base.

236. Costruire un triangolo, dato il perimetro e due angoli.

237. Costruire un triangolo dati due lati e una altezza.

238. Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente e una mediana.

239. Costruire un triangolo, conoscendo il perimetro, un angolo e l'altezza che termina a uno dei lati dell'angolo dato.

240. Costruire un triangolo rettangolo, dato un lato e la differenza dei due angoli acuti.

241. Costruire un triangolo rettangolo, dato un angolo acuto e la proiezione del cateto adiacente.

242. Costruire un triangolo rettangolo, data la differenza dei cateti e l'angolo opposto ad uno di essi.

243. Costruire un triangolo rettangolo, dato un cateto e la differenza degli altri due lati.

244. Costruire un triangolo, dato un lato, uno degli angoli adiacenti ad esso e la differenza fra gli altri due lati.

245. Costruire un triangolo, dati due angoli e la somma, o la differenza, dei lati opposti ad essi.

246. Costruire un triangolo isoscele, data la base e la differenza fra uno dei lati eguali e l'altezza relativa alla base.

247. Costruire un triangolo, conoscendo i punti medii dei lati.

248. Costruire un triangolo, conoscendo i tre termini delle altezze.

249. Costruire un triangolo rettangolo, dato un angolo acuto e la somma dei lati che lo comprendono.

250. Costruire un triangolo rettangolo, nel quale uno degli angoli acuti è doppio dell'altro, e la bisettrice dell'angolo retto è eguale ad un segmento dato.

251. Costruire un triangolo rettangolo, dato uno dei due angoli acuti e la differenza delle proiezioni dei cateti sulla ipotenusa.

252. Costruire un triangolo rettangolo isoscele, data la somma dell'ipotenusa di un cateto.

253. Costruire un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati, un lato sia parallelo ad una retta data, e che abbia due angoli eguali a due angoli dati.

254. Costruire un triangolo, data un'altezza, la differenza dei segmenti, che essa determina sul lato corrispondente, ed il maggiore degli angoli adiacenti a questo lato.

255. Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato adiacente ad esso e la differenza degli altri due lati.

256. Costruire un triangolo, dato un lato, la differenza degli altri due e la differenza degli angoli opposti a questi due lati.

257. Costruire un triangolo, date le tre mediane.

258. Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e la somma degli altri due lati.

259. Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e la differenza degli altri due.

260. Costruire un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa e la differenza delle distanze degli estremi dell'ipotenusa dal punto d'incontro delle bisettrici.

261. Costruire un triangolo, conoscendo un lato, la differenza degli angoli adiacenti ad esso e la somma degli altri due lati.

262. Costruire un triangolo, conoscendo in grandezza e posizione un lato, la somma degli altri due lati, e sapendo che il vertice opposto al lato dato è situato sopra una retta data.

263. Costruire un quadrato, data la somma di un suo lato e di una sua diagonale.

264. Costruire un quadrato, conoscendo i quattro punti, in cui i prolungamenti dei lati incontrano una retta data.

265. Costruire un parallelogrammo, conoscendo le diagonali ed un lato.

266. Costruire un trapezio, dati i lati paralleli e le diagonali.

267. Costruire un quadrangolo, conoscendo i lati e il segmento, che unisce punti medii di due lati opposti.

268. Tagliare un angoloide tetraedro con un piano, che passi per un punto dato, in modo che la sezione sia un parallelogrammo.

269. Tagliare con un piano un triedro trirettangolo, in modo che la sezione sia un triangolo eguale ad un triangolo dato.

270. Trovare sopra una retta data un punto, tale che la somma delle sue distanze da due piani, che si tagliano, sia minima.

271. Sovra un bigliardo rettangolare, in quale direzione bisogna lanciare una palla, perchè ripassi per il punto di partenza, dopo aver toccate tutte le quattro sponde?

272. Sovra un biliardo rettangolare quale via deve seguire una palla per incontrare un'altra palla dopo aver toccate tutte le quattro sponde?

273. Costruire un poligono di un numero dispari di lati, essendo dati i loro punti medii.

274. Fra tutti i triangoli di egual base ed eguale altezza qual'è quello che ha il perimetro minore?

275. Essendo disegnate in un piano due rette parallele, dividere un segmento dato sopra una di esse, facendo uso della sola riga, in 2, 4, 8, 16, ... parti eguali.

276. Dato un angolo acuto ed un punto A interno ad esso, trovare sui lati dell'angolo due punti B, C tali, che il triangolo ABC abbia il minor perimetro possibile.

277. Di un triedro isoedro si conosce il rettilineo dei due diedri eguali e la faccia ad essi adiacenti — Trovare con costruzioni piane le facce eguali e il rettilineo del terzo diedro.

278. Trovare con costruzioni piane i rettilinei dei diedri di un triedro isoedro, conoscendo le sue facce.

279. Di un triedro isoedro si conosce la faccia adiacente ai diedri eguali e l'angolo, che fa con essa lo spigolo opposto. Trovare con costruzioni piane le facce eguali e i rettilinei dei diedri eguali.

280. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un triedro, conoscendo,

a) due facce e il rettilineo del diedro compreso;
b) una faccia e i rettilinei dei due diedri adiacenti;
c) due facce e il rettilineo del diedro opposto ad uno di essi;
d) i rettilinei di due diedri e la faccia opposta ad uno di essi.

281. Trovare con costruzioni piane gli angoli, che formano colle facce di un triedro, le quattro rette secondo le quali si tagliano a tre a tre i piani perpendicolari alle facce stesse, condotti per le bisettrici delle medesime, o degli angoli ad esse conseguenti.

282. Sono dati due punti situati rispettivamente su due facce di un triedro. Si costruisca la distanza del vertice del triedro dalla loro congiungente, e gli angoli, che essa congiungente fa colle facce e con gli spigoli del triedro.

283. Sono dati tre punti situati rispettivamente sulle facce di un triedro. — Si costruisca la distanza del vertice del triedro dal piano individuato da quei tre punti.

284. Conoscendo i punti d'incontro di un piano con gli spigoli di un triedro, trovare la sua distanza dal vertice del triedro, e gli angoli che esso fa con le facce e con gli spigoli del medesimo.

285. Costruire i rettilinei dei diedri, che i piani, individuati dalle coppie di spigoli opposti di un cubo, formano fra loro.

286. Trovare i piani, che tagliano la superficie di un tetraedro secondo una losanga.

287. Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, le congiungenti i vertici coi baricentri delle facce opposte.

288. Costruire le facce di un tetraedro, conoscendo la base e i rettilinei dei diedri che essa fa con le altre tre facce.

289. Costruire un tetraedro, conoscendo la base e gli angoli che l'altezza corrispondente fa colle altre tre facce.

290. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi (spigoli, facce, rettilinei dei diedri) di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e due spigoli laterali.

291. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza, uno spigolo laterale, e l'angolo che un altro spigolo forma col piano della base.

292. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e gli angoli che due spigoli laterali fanno col piano della base.

293. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza, uno spigolo laterale e il diedro, che il piano della faccia laterale opposta a questo spigolo fa col piano della base.

294. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone l'altezza, i tre spigoli laterali, i diedri formati da due facce laterali col piano della base e un lato della base, situato sopra lo spigolo di uno di questi diedri.

295. Trovare con costruzioni piane gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base e gli angoli, che il piano di essa fa con due spigoli laterali e col loro piano.

296. Trovare gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e gli angoli che uno spigolo laterale forma con i due spigoli della base concorrenti con esso in un vertice.

297. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone l'altezza, due spigoli laterali e i diedri, che il piano della base forma coi piani delle tre facce laterali.

298. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di una piramide, avente n facce laterali, conoscendone la base e tre spigoli laterali consecutivi.

299. Di un tetraedro rettangolo si conosce la base e uno spigolo laterale. Trovare con costruzioni piane gli altri suoi elementi.

300. Di un tetraedro a facce eguali si conosce una faccia. Trovare con costruzioni piane tutti gli altri suoi elementi.

301. Per una retta, data nel piano di una faccia di un triedro, condurre un piano, che intersechi la superficie del triedro secondo un triangolo rettangolo.

302. Per una retta, data nel piano di una faccia di un triedro, condurre un piano, che intersechi la superficie del triedro secondo un triangolo isoscele.

303. Tagliare un tetraedro con un piano, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente i lati eguali a due segmenti dati.

304. Tagliare un tetraedro con un piano in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente una diagonale eguale ad un segmento dato.

305. Quand'è che la superficie di un tetraedro può essere tagliata da un piano secondo un quadrato?

306. Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, i segmenti che congiungono i vertici coi baricentri delle facce opposte.

307. Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, i segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di spigoli opposti.

308. Data la base di una piramide e gli spigoli laterali concorrenti in tre vertici consecutivi della base, trovare, con costruzioni piane, tutte le facce, l'altezza e i segmenti, che hanno per estremi i punti medi di due spigoli qualunque.