CAPITOLO VIII

MASSIMO COMUN DIVISORE
MINIMO COMUNE MULTIPLO

Teoremi sui quali si può fondare la ricerca del massimo comun divisore.

La ricerca del massimo comun divisore di due numeri si può fondare sui due teoremi seguenti.

140. Teor. *Se di due numeri uno è divisibile per l'altro, il loro massimo comun divisore è uguale al minore dei due.*

Dim. Siano i due numeri 120 e 12, dei quali il primo è divisibile per il secondo. Dico esser 12 il loro massimo divisore comune.

Infatti 12 è intanto un divisore comune, perchè, oltre che dividere 120, divide sè stesso. È poi il massimo comun divisore, perchè un numero maggiore di 12 non può esser divisore di 12, e quindi neanche un divisore comune dei numeri dati.

141. Teor. *Se il maggiore di due numeri non è divisibile per l'altro, i due numeri hanno lo stesso massimo comun divisore che il minore di essi e il resto della loro divisione.*

Dim. Dividendo 95 per 20, si trova per resto 15. Dico che il massimo comun divisore di 95 e 20 è nel tempo stesso il massimo comun divisore dei due numeri 20 e 15.

95	20	20	15
———		———	
———		———	
——		——	
…..		……	

Supponiamo scritti in colonna tutti i divisori comuni di 95 e 20 (li intenderemo rappresentati dalle lineette); in un'altra colonna siano scritti tutti i divisori comuni di 20 e 15. Dico che queste due colonne sono formate coi medesimi numeri.

Infatti, se prendiamo a considerare uno dei numeri della prima colonna, troviamo che, poichè esso divide 95 e 20, cioè il dividendo e il divisore, esso divide [102] anche 15, resto della divisione; epperò come divisore comune di 20 e 15, dev' esser segnato nella seconda colonna.

Per converso, preso a considerare un numero qualunque segnato nella seconda colonna, troviamo che, poichè divide 20 e 15, divisore e resto, deve [103] dividere anche il dividendo 95. Esso è dunque divisore comune di 95 e 20, epperò si trova tra quelli della prima colonna.

Le due colonne sono adunque composte con gli stessi numeri, epperò il più grande di quelli della prima coincide col più grande di quelli della seconda. In altre parole, il massimo comun divisore di 95 e 20 è eziandio il massimo comun divisore di 20 e 15; appunto come volevamo dimostrare.

Calcolo del massimo comun divisore di due numeri.

112. Proponiamoci di determinare il massimo comun divisore di due numeri, ad es. quello di 7524 e 918.

Avendo presente il teorema [140]: Se il minore di due numeri divide l'altro, esso è il massimo comun divisore dei due numeri dati, ci troviamo indotti a dividere 7524 per 918, pensando che, se mai la divisione riesce senza residuo, in tal caso il massimo divisore comune, che si cerca, è lo stesso 918. Ma, effettuando la divisione, si trova il residuo 180. L'operazione ha fatto capire non essere 918 il numero richiesto; però possiamo profittare del resto 180, giacchè si sa [141] che il massimo comun divisore di due numeri coincide con quello del minore dei due e del resto della loro divisione. La questione non è cangiata, ma invece di dover operare coi due numeri 7524 e 918, si ha da risolvere la questione stessa sui numeri 918 e 180. In vece del maggiore dei due dati entra nell'operazione un numero più piccolo del minore dei due.

Dacchè la difficoltà è ridotta alla ricerca del massimo comun divisore dei due numeri 918 e 180, divideremo il primo per il secondo, pensando da capo che, se la divisione riuscirà esattamente, essa varrà a provarci che 180 è il numero che si desidera; laddove, se la divisione finirà con residuo, se ne potrà trar profitto. Avviene per l'appunto il secondo caso; 18 è il resto della divisione. Così il problema è ridotto alla ricerca del massimo divisore comune dei due numeri 180 e 18.

Seguitando con questo processo, si deve pervenire necessariamente a una divisione il cui resto sia nullo, perchè ciascuno dei resti è minore del precedente, e per conseguenza la serie dei resti è limitata. Il divisore dell'ultima divisione è [140] il massimo divisore comune dei numeri dati.

Da queste considerazioni ricaviamo la

Regola. *Per determinare il massimo comun divisore di due numeri, si divide il maggiore per il minore, poi il minore per il resto della divisione, e così si continua a dividere ciascun divisore per il resto corrispondente, sino a che si trovi un resto che divida esattamente quello che lo precede. Questo ultimo resto è il massimo divisore comune dei due numeri dati.*

L'operazione si suol disporre come si vede nella seguente tabella, scritta per determinare il massimo divisore comune dei numeri 8496 e 3744.

	2	3	1	2	2
8496	3744	1008	720	288	144
7488	3024	720	576	288	
1008	720	288	144	0	

Si è diviso 8496 per 3744. Il quoziente 2 fu scritto sopra il divisore, e il resto 1008 fu poi scritto nuovamente a destra del divisore.

Dividendo 3744 per 1008, si trovò 3 per quoziente, e il resto 720 fu poi scritto a destra del divisore. Così seguitando, si pervenne alla divisione di 288 per 144. Poichè questa non diede resto, si conchiuse essere 144 il massimo comun divisore dei numeri 8496 e 3744.

Teoremi relativi al massimo divisore comune.

143. Teor. *Ogni divisore comune di due numeri divide il loro massimo comun divisore.*

Dim. Nella ricerca del massimo comun divisore dei numeri 8496 e 3744, abbiamo trovato successivamente i resti 1008, 720, 288, 144, 0, e conchiuso da ciò essere 144 il numero desiderato. Ora si tratta di provare che ogni numero, che divida i due 8496 e 3744, divide necessariamente anche il loro massimo divisore comune 144.

A tal fine si scriva la tabella seguente, dove si vedono in una stessa riga dividendo, divisore e resto di ciascuna divisione.

Dividendi	Divisori	Resti
8496	3744	1008
3744	1008	720
1008	720	288
720	288	144
288	144	0.

Poi si osservi che qualunque numero, che divida 8496 e 3744, divide anche 1008, appunto perchè [102] ogni numero, che divide dividendo e divisore, divide anche il resto della divisione.

Ma poichè questo numero divide 3744 e 1008, esso divide [102] anche 720, resto della loro divisione. Così continuando, si arriva a conchiudere che il numero, che divide 8496 e 3744, divide anche 144, loro massimo divisore comune. Per l'appunto come dovevasi dimostrare.

144. Oss. L'inverso del teorema or ora dimostrato è questo: *un numero, che divide il massimo comun divisore di due altri, divide anche questi numeri.* Questi ultimi infatti sono multipli del loro massimo comun divisore, e un numero, che divide un altro, ne divide [99] ogni multiplo.

145. Teor. *Moltiplicando due numeri per un terzo, il loro massimo comun divisore viene moltiplicato per questo terzo numero.*

Dim. Abbiamo trovato che 144 è il massimo divisore comune dei due numeri 8496 e 3744. Si tratta di provare che, se questi due numeri vengono moltiplicati per un terzo qualunque, ad es. per 31, il massimo divisore comune dei due prodotti (8496 · 31) e (3744 · 31) è precisamente (144 · 31).

Mettiamoci dinanzi il quadro del § 143, dove si vedono segnati in varie righe dividendo, divisore e resto di ciascuna delle divisioni fatte per trovare il numero 144.

Dovendosi determinare il massimo divisore comune dei due numeri (8496 · 31) e (3744 · 31), si comincerà a dividere il primo per il secondo, e ciò al semplice intento di trovare il resto della divisione. Ma poichè abbiamo già diviso 8496 per 3744, e trovato 1008 per residuo, noi possiamo dispensarci dalla nuova divisione, sapendo già che si troverebbe (1008 · 31). Ciò per il teorema [93]: se si moltiplicano dividendo e divisore per un medesimo numero, il resto viene moltiplicato per lo stesso numero.

Per la stessa ragione la divisione di (3744 · 31) per (1008 · 31) ci darebbe (720 · 31) per resto.

Così seguitando, troveremo infine che la divisione di (288 · 31) per (144 · 31) deve dare per resto (0 · 31), cioè *zero*.

Dunque (144 · 31) è veramente il massimo comun divisore dei numeri (8496 · 31) e (3744 · 31), come volevasi dimostrare.

146. Teor. *Dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore, si ottengono due quozienti primi tra loro.*

Dim. Dividendo i due numeri 8496 e 3744 per 144, loro massimo divisore comune, si ottengono per quozienti rispettivamente i numeri 59 e 26; si tratta di dimostrare che questi due numeri devono essere primi tra loro. Intanto scriveremo le uguaglianze

$$8496 = 59 \cdot 144,$$
$$3744 = 26 \cdot 144.$$

Poi ammettiamo che i due quozienti 59 e 26 non siano primi tra loro. Allora essi avranno, oltre l'unità, almeno un altro divisore comune; sia questo m, ad es., e divisi per m diano rispettivamente i quozienti a e b. Abbiamo perciò

$$59 = a \cdot m$$
$$26 = b \cdot m,$$

e conseguentemente

$$8496 = a \cdot m \cdot 144$$
$$3744 = b \cdot m \cdot 144.$$

Queste uguaglianze fanno vedere che i due numeri 8496 e 3744 sono divisibili per il numero $(m \cdot 144)$, maggiore del loro massimo comun divisore 144. Ma ciò è assurdo; epperò si conchiude che i due quozienti 59 e 26 sono necessariamente primi tra loro, come volevasi dimostrare.

147. Teor. *Un numero, che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di essi, divide necessariamente l'altro fattore.*

Dim. Il numero 16, ad es., divide il prodotto $(33 \cdot 80)$ ed è primo con 33. Si tratta di dimostrare che 16 deve dividere necessariamente l'altro fattore 80.

Infatti, poichè 16 e 33 sono primi tra loro, l'unico e quindi anche il massimo loro divisore comune è l'unità. Se moltiplichiamo questi due numeri per 80 (che è

16		33
	1	
$16 \cdot 80$		$33 \cdot 80$
	$1 \cdot 80$	

il secondo fattore del prodotto dato), i due prodotti ($16 \cdot 80$) e ($33 \cdot 80$) hanno ($1 \cdot 80$), cioè 80, per massimo comun divisore; ciò per il teorema [145]: quando due numeri vengono moltiplicati per un terzo, anche il loro massimo divisore comune riesce moltiplicato per questo terzo numero.

Osserviamo di nuovo i due prodotti ($16 \cdot 80$) e ($33 \cdot 80$). Il numero 16 divide il primo, che è manifestamente un suo multiplo; e divide il secondo prodotto per ipotesi. Ma quando un numero divide due altri, esso divide [143] anche il loro massimo comun divisore; dunque 16 divide 80.

Così resta dimostrato che, *ecc.* (*).

148. Teor. *Un numero, divisibile per due altri, primi tra loro, è anche divisibile per il loro prodotto.*

Dim. Il numero 630 è divisibile per i due numeri 10 e 21, che sono primi tra loro. Dico che 630 è divisibile per il prodotto ($10 \cdot 21$).

Dividiamo 630 per 10; il quoziente è 63, e quindi si ha

$$630 = 10 \cdot 63.$$

Ora, poichè 21 divide 630, cioè il prodotto ($10 \cdot 63$), ed è primo con 10, esso divide [147] necessariamente l'altro fattore. Ed in realtà 63 è divisibile per 21, e 3

(*) Se il numero, che divide il prodotto, è primo, allora o esso divide il primo fattore, od altrimenti è primo con questo, e in questo caso [147] esso divide necessariamente l'altro fattore. Il teorema 126 è dunque un caso particolare del teorema fondamentale 147. Così, dappoichè le proposizioni del presente capitolo furono dimostrate indipendentemente da quelle del capitolo che precede, possiamo dire che la teoria dei numeri primi, invece che sul teorema d'EUCLIDE dimostrato nei §§ 124, 125, avremmo potuto fondarla sull'algoritmo [142], che serve a determinare il massimo comun divisore.

è il quoziente; epperciò è

$$63 = 21 \cdot 3.$$

Osservando l'eguaglianza $630 = 10 \cdot 63$, e rammentando il teorema [67] che dice: dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece moltiplicare successivamente per i singoli fattori, abbiamo

$$630 = 10 \cdot 21 \cdot 3,$$ ossia
$$630 = (10 \cdot 21)\,3;$$

ed ora si riconosce che in fatto 630 è divisibile per il prodotto $(10 \cdot 21)$, come si era asserito.

149. Teor. *Un numero, divisibile per parecchi altri, primi tra loro a due a due, è divisibile per il loro prodotto.*

Dim. Sia, ad es., il numero 10710, il quale è divisibile per ciascuno dei numeri 17, 10, 21, i quali sono primi tra loro a due a due, tali cioè che 17 e 10 sono primi tra loro, e così 17 e 21 ed anche 10 e 21. Si tratta di dimostrare che 10710 è divisibile necessariamente per il prodotto $(17 \cdot 10 \cdot 21)$.

Dividasi intanto 10710 per 17; si trova 630 per quoziente, e naturalmente resto nullo. È quindi

$$10710 = 17 \cdot 630. \qquad (1)$$

Poichè 10 divide 10710, cioè il prodotto $(17 \cdot 630)$, ed è primo con 17, esso divide necessariamente [147] l'altro fattore 630. Effettuando la divisione, si trova 63 per quoziente, epperò si può scrivere

$$630 = 10 \cdot 63. \qquad (2)$$

Poichè 21 divide 10710, cioè il prodotto $(17 \cdot 630)$, ed è primo con 17, esso divide [147] necessariamente l'altro fattore 630, cioè il prodotto $(10 \cdot 63)$. Ma è primo con 10, divide quindi [147] necessariamente l'altro fattore 63. Effettuando questa divisione, si trova 3 per quoziente, epperò si può scrivere

$$63 = 21 \cdot 3. \qquad (3)$$

Osservando le uguaglianze (1) e (2), si ricava

$$10710 = 17\ (10 \cdot 63), \qquad \text{ossia [67]}$$
$$10710 = 17 \cdot 10 \cdot 63.$$

E in base alla relazione (3), abbiamo anche

$$10710 = 17 \cdot 10\,(21 \cdot 3), \qquad \text{ossia [67]}$$
$$10710 = 17 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 3.$$

Supponendo eseguite le due prime moltiplicazioni, scriveremo

$$10710 = (17 \cdot 10 \cdot 21)\, 3;$$

ed ora è manifesto che 10710 è divisibile per il prodotto $(17 \cdot 10 \cdot 21)$, come si era asserito.

La medesima dimostrazione vale manifestamente per quanti siano i divisori.

Calcolo del massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri.

150. La ricerca del massimo comun divisore di più di due numeri si può fondare sul seguente

Teor. *Il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri è ad un tempo il massimo comun divisore dei numeri del sistema, che si ottiene da quello dei numeri dati, surrogandone due col loro massimo divisore comune.*

Dim. Siano, ad es., i numeri

8496, 3744, 3696, 3720,

dei due primi dei quali è 144 il massimo divisore comune. Si vuol dimostrare che il massimo comun divisore dei quattro numeri dati è eziandio il massimo comun divisore dei tre numeri

144, 3696, 3720.

Supponiamo infatti di avere scritto in una prima colonna tutti i divisori comuni dei quattro numeri dati, e in altra colonna tutti i divisori comuni dei tre numeri

$$144, \qquad 3696, \qquad 3720,$$

e consideriamo un numero di quelli della prima colonna. Questo numero divide intanto 8496 e 3744; esso divide perciò anche il numero 144, giacchè [143] ogni numero, che divide due altri, divide anche il loro massimo divisore comune. Ma questo numero, oltre che 144, divide anche 3696 e 3720; esso deve quindi trovarsi tra i numeri che formano la seconda colonna.

Consideriamo ora un numero che sia di quelli della seconda colonna. Questo numero intanto divide 144, quindi [99] ne divide i due multipli 8496 e 3744. Ma divide anche i due numeri 3696 e 3720; esso è dunque segnato anche nella prima colonna.

Le due colonne sono dunque formate con gli stessi numeri, epperò il più grande di quelli della prima è il medesimo numero, che è il più grande tra quelli scritti nella seconda. In altre parole, il massimo divisore comune dei numeri 8496, 3744, 3696 e 3720 coincide col massimo comun divisore dei numeri 144, 3696 e 3720, come volevasi dimostrare.

151. Per il teorema che precede, la ricerca del massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri si può far dipendere da quella del massimo comun divisore di due numeri soli.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{8496 \qquad 3744}_{144} \qquad 3696}_{48} \qquad 3720}_{24}$$

Nel nostro caso ci faremo a calcolare il massimo comun divisore di due dei numeri 144, 3696, 3720, e poichè, prendendo, ad es., i due 144, 3696, risulta il numero 48, non ci resta poi che a determinare il massimo comun divisore di 48 e 3720. Il numero 24, che si trova in questo modo, è il massimo comun divisore di tutti i numeri dati.

Possiamo quindi enunciare la

Regola. *Per trovare il massimo comun divisore di un sistema di numeri, si cerca dapprima il massimo comun divisore di due di questi numeri, e lo si scrive in loro vece. Così si passa ad un sistema, che contiene un numero di meno che il primitivo. Quindi, presi ad arbitrio due numeri del nuovo sistema, si cerca il loro massimo divisore comune, e lo si scrive in loro vece. Così continuando si perviene ad un sistema composto di due numeri soltanto. Il massimo comun divisore di questi ultimi è il massimo comun divisore dei numeri dati.*

Oss. Nel caso che tra i numeri, dei quali è domandato il massimo divisore comune, uno sia *multiplo* di un altro, esso si può trascurare senza più. Perchè infatti, se si comincia l'operazione con questi due numeri, si trova [140] da mettere al loro posto precisamente il minore dei due.

Perciò, ad es., dovendosi determinare il massimo comun divisore dei numeri 75, 24, 36, 240, 360, si può prescindere dai due ultimi, che si riconoscono multipli di due antecedenti; basta quindi procedere alla ricerca del massimo comun divisore di 75, 24 e 36.

Minimo comune multiplo di due numeri.

152. Il massimo comun divisore di due numeri può giovare a trovarne il minimo multiplo comune; lo prova il seguente

Teor. *Il minimo comune multiplo di due numeri è uguale al prodotto che si ottiene moltiplicando uno dei numeri per il quoziente della divisione dell' altro numero per il loro massimo divisore comune.*

Dim. Siano dati, ad es., i due numeri 240 e 170, dei quali il massimo comun divisore è 10. Si tratta di dimostrare che il minimo comune multiplo dei due numeri dati si può ottenere moltiplicandone uno, ad es. 240, per 17, quoziente della divisione dell'altro numero 170 per 10.

Si dividano i due numeri dati per 10, loro massimo divisore comune; i due quozienti 24 e 17 sono necessariamente [146] primi tra loro. È poi

$$240 = 24 \cdot 10,$$
$$170 = 17 \cdot 10.$$

Consideriamo ora un multiplo qualunque dei due numeri, ad es. il numero 8160, affine di vedere intanto quale proprietà spetti ad ogni multiplo comune dei numeri dati. Chè poi, cercando il più piccolo numero che goda di tale proprietà, se esso sia anche multiplo comune dei due numeri, ne sarà il minimo comune multiplo ricercato.

Codesto 8160 è intanto divisibile per 240, cioè per il prodotto $(24 \cdot 10)$. Sappiamo [95] che, dovendo dividere per un prodotto, si può invece dividere successivamente per i singoli fattori. Con la divisione di 8160 per 10, si ottiene 816, il quale quoziente è poi [95, nota] divisibile per 24.

Così essendo 8160 divisibile per 170, cioè per il prodotto $(17 \cdot 10)$, esso è divisibile [99] per 10, ed il quoziente 816 è poi divisibile per 17.

Così si è dimostrato che 816 è divisibile per 24 e per 17, che sappiamo essere primi tra loro. Sappiamo poi [148] che un numero divisibile per due altri, primi tra loro, è divisibile anche per il loro prodotto. Dunque 816 è divisibile per il prodotto $(24 \cdot 17)$, ed essendo 2 il quoziente, possiamo scrivere

$$816 = 24 \cdot 17 \cdot 2.$$

Moltiplicando i due membri per 10, otteniamo

$$8160 = 10 \cdot 24 \cdot 17 \cdot 2,$$

donde si rileva che 8160 è divisibile per il prodotto $(10 \cdot 24 \cdot 17)$. Così abbiamo provato che un multiplo qualunque dei due numeri 240 e 170 è pure un multiplo del prodotto $(10 \cdot 24 \cdot 17)$.

E perchè questo numero è manifestamente esso stesso un multiplo dei due numeri dati, ed è il minimo multiplo di sè stesso, esso è infine il cercato minimo comune multiplo dei due numeri 240 e 170.

Il prodotto dei due primi fattori del numero

$$10 \cdot 24 \cdot 17$$

è uno dei due numeri dati, e il terzo fattore è il quoziente della divisione dell'altro numero per il loro massimo divisore comune; epperò resta dimostrata la regola, che vien suggerita dal teorema in questione, per calcolare il minimo comune multiplo di due numeri dati.

153. Nel corso della dimostrazione precedente abbiamo trovato che il numero 8160, multiplo arbitrario dei due numeri 240 e 170, è un multiplo del prodotto $(10 \cdot 24 \cdot 17)$; si è poi riconosciuto che questo prodotto è il minimo comune multiplo dei due numeri 240 e 170. Si può quindi enunciare il

Teor. *Ogni multiplo comune di due numeri è multiplo del loro minimo comune multiplo.*

Conseguentemente, per formare tutti i multipli comuni a due numeri basta [153, 99] trovarne da prima il comune multiplo minimo, e fare dipoi i successivi multipli di questo numero. Però la loro serie è illimitata.

154. Oss. Dalla regola, che abbiamo trovata per formare il minimo comune multiplo di due numeri, riesce palese che, quando due numeri sono primi tra loro, il loro minimo comune multiplo è uguale al loro prodotto. Ed invero, essendo in tal caso il massimo comun divisore uguale all'unità, il quoziente, per il quale si deve moltiplicare uno dei due numeri, è uguale all'altro numero.

È poi manifesto di per sè che, se uno dei numeri è multiplo dell'altro, esso è il minimo multiplo comune.

Calcolo del minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri.

La ricerca del minimo comune multiplo di più di due numeri si può fondare sul seguente

155. Teor. *Il minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri è ad un tempo il minimo comune multiplo dei numeri del sistema, che si ottiene da quello dei numeri dati surrogando due di questi col loro minimo multiplo comune.*

Dim. Siano, ad es., i numeri 12, 18, 15 e 35. Il minimo comune multiplo dei due primi è 36. Si tratta di dimostrare che il minimo comune multiplo dei quattro numeri 12, 18, 15 e 35 è ad un tempo il minimo comune multiplo dei tre numeri 36, 15 e 35.

Infatti, qualunque multiplo comune dei numeri dati, come multiplo comune di 12 e 18, è pure [153] multiplo di 36, loro minimo comune multiplo. Questo numero è dunque necessariamente un multiplo comune dei tre numeri 36, 15 e 35.

Per converso, qualunque multiplo comune dei numeri 36, 15 e 35, perchè multiplo di 36, è anche [99] multiplo di 12 e 18, divisori di 36. Esso è pertanto anche un multiplo comune dei numeri 12, 18, 15 e 35.

In conchiusione, i numeri 12, 18, 15 e 35 hanno gli stessi multipli comuni, che i numeri 36, 15 e 35; epperò il minimo comune multiplo dei quattro primi è ad un tempo il minimo comune multiplo dei tre secondi, come dovevasi dimostrare.

156. In virtù del teorema precedente la ricerca del minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri si può far dipendere da quella del minimo comune multiplo di due numeri soltanto. Siano infatti di nuovo i quattro numeri 12, 18, 15 e 35. Poichè 36 è il minimo comune multiplo dei due primi, la difficoltà è ridotta a determinare quello dei tre numeri 36, 15 e 35. Essendo 180 il minimo comune multiplo di 36 e 15, resta ancora da trovare quello dei due numeri 180 e 35. Così in 1260, minimo comune multiplo di 180 e 35, abbiamo il minimo comune multiplo dei quattro numeri dati.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{12 \qquad 18}_{36} \qquad 15}_{180} \qquad 35}_{1260}$$

Possiamo dopo di ciò enunciare la

Regola. *Per trovare il minimo comune multiplo di un sistema di numeri, si cerca dapprima il minimo comune multiplo di due di questi numeri, e lo si scrive in loro vece. Così si passa ad un sistema, che contiene un numero di meno che il primitivo. Quindi, presi ad arbitrio due dei numeri del nuovo sistema, si* *cerca il loro minimo multiplo comune, e lo si scrive in loro vece. Così continuando si perviene ad un sistema composto di due numeri soltanto. Il minimo comune multiplo di questi ultimi è il minimo comune multiplo dei numeri dati.*

Oss. Se qualcuno dei numeri, dei quali si vuole determinare il minimo comune multiplo, è *divisore* di un altro, esso si può trascurare senz' altro. Perchè infatti, se si comincia l' operazione con questi due numeri, si trova da mettere al loro posto per l' appunto il maggiore di essi due.

Perciò, ad es., dovendo determinare il minimo comune multiplo dei numeri

$$2,\ 4,\ 5,\ 15,\ 21,\ 25,\ 63,$$

si può restringersi alla ricerca del minimo comune multiplo dei numeri

$$4,\ 15,\ 25,\ 63,$$

perchè i rimanenti sono divisori dell' uno o dell' altro dei numeri conservati.

Esercizî.

57. Dimostrare che un numero, che divide parecchi altri, divide il loro massimo divisore comune. (Estensione del teor. 144, che si fonderà sulla regola 151).

58. Trovare il maggior numero tale, che, dividendo per esso i numeri 149, 100, 75 ed 86, si ottengano rispettivamente i resti 5, 4, 3 e 2.

59. Nella ricerca del massimo comun divisore il quoziente dell' ultima divisione è almeno eguale a 2.

60. Dimostrare che nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri si può prendere, in luogo del resto di una divisione, la differenza tra il minore dei numeri dati e il resto avuto. Quando tornerà conto fare questa sostituzione?

61. Dimostrare che, per ottenere il massimo divisore comune di tre numeri, si può cercare il massimo divisore comune dei due primi, quindi il massimo divisore comune del secondo e del terzo, quindi il massimo divisore comune dei due numeri ottenuti.

62. Per trovare il massimo divisore comune di quanti si vogliano numeri si può dividerli tutti, fuori del minore, per il minore, poi questo numero e tutti i resti, fuori del più piccolo, per questo più piccolo resto, e così di seguito finchè si trovi un resto, che divida tutti gli altri e il divisore che lo ha dato. Quest'ultimo è il massimo comun divisore cercato. Se qualcuno dei resti risultasse nullo, l'operazione si dovrebbe continuare con quegli altri. [151, 141].

63. Trovare il più piccolo numero che, diviso per qualunque dei numeri 12, 6, 9 e 15, dà sempre per resto 5.

64. Dimostrare che, per avere il minimo comune multiplo di tre numeri, si può cercare il minimo comune multiplo dei due primi, poi quello del secondo e del terzo, e finalmente il minimo comune multiplo dei numeri così ottenuti.

65. Un numero pari è divisibile per 6, se la somma delle sue cifre è divisibile per 3. [148].

66. Trovare le condizioni di divisibilità per 12, 15, 18, 20, 30, 36 e 45. [148].

67. Dove si deve arrestare la seguente sequela di cifre

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 . . . . .

se si vuole che il numero sia divisibile per 2, o per 3, o per 4, o per 5, o per 6, o per 8, o per 9, o per 12, o per 15?

68. Il prodotto di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 6. (Ogni tre numeri s'incontra un multiplo di 3, ecc. Si badi ai teor. 99 e 148).

69. Se n è un numero qualunque, il prodotto $n(n+1)(2n+1)$ è divisibile per 6. (Se nessuno dei due numeri n ed $(n+1)$ sia divisibile per 3, tale sarà $(n+2)$, epperò anche il suo doppio, cioè... [61], ed il multiplo antecedente è appunto... ecc.).

70. Se n indica un numero qualunque, $n(2n+1)(7n+1)$ è sempre divisibile per 6. (Dimostrazione analoga a quella dell'esercizio antecedente).

71. Il prodotto di cinque numeri consecutivi è divisibile per 120. (Tra cinque numeri consecutivi si troverà sempre un multiplo di 4, e tra i rimanenti almeno uno sarà pari. Il prodotto è dun-

que divisibile per 8. Ogni 5 numeri si incontra un multiplo di 5, quindi [99] il prodotto è divisibile per 5. Sarà poi divisibile anche per 3, perchè ecc. Ma [149]).

72. Il prodotto di 15 numeri consecutivi è sempre divisibile per 120^3. (Il prodotto dei primi cinque è divisibile per 120, epperò si può mettere sotto forma di prodotto di due fattori uno dei quali è 120. Ecc. Si badi al teor. 68).

73. Il prodotto di n numeri consecutivi è divisibile per il prodotto di tutti i numeri primi minori di n. (Sia 7, ad es., uno di questi numeri primi. Ogni sette numeri si incontra un multiplo di 7, epperò uno degli n numeri è divisibile per 7, ed anche [99]. Infine si badi al teor. 149).

74. Quale è la maggiore potenza di un numero primo, ad es. di 7, che divide il prodotto dei primi 1000 numeri? (Supponiamo di decomporre tutti questi primi 1000 numeri in fattori primi per contare quanti 7 si trovano, perchè questo numero è il richiesto; ma è chiaro che basta por mente ai multipli di 7. Quanti sono questi multipli? Poi, dacchè unicamente c'importa di mettere in vista i fattori primi uguali a 7, dividiamoli tutti per 7. Che quozienti otterremo? quali e quanti di questi quozienti ci daranno un altro fattore uguale a 7? ecc.).

75. Dimostrare che l'esponente della maggior potenza di un numero primo minore di n, che divide il prodotto degli n primi numeri, è la somma dei quozienti, che si ottengono dividendo n per il numero primo, il quoziente trovato per il numero primo, il nuovo quoziente per il numero primo, e così di seguito fino a che si ottenga un quoziente minore del numero primo dato. (Vedasi prima l'esercizio precedente).

76. Dimostrare che l'esponente, di cui si parla nel precedente esercizio, è uguale alla somma dei quozienti, che si ottengono dividendo il numero n per le successive potenze del numero primo. (Non è che una trasformazione del teorema dell'esercizio precedente, e che si giustifica con la seconda parte del § 95).

77. La maggior potenza di un numero primo, la quale divide il prodotto dei primi n numeri consecutivi, divide anche il prodotto di n numeri consecutivi qualunque. (Ad es., la maggior potenza di 7, che divide il prodotto dei primi 100 numeri, divide anche il prodotto di 100 numeri consecutivi, presi a partire da uno qualunque. Infatti ogni sette numeri s'incontra un multiplo di 7, quindi in 100 numeri consecutivi si incontrano almeno tanti multipli di 7, quanti ve ne sono tra i primi 100 numeri. Dividendo per 7 tutti i multipli, i quozienti saranno numeri consecutivi. Tra questi di 7 in 7 si troveranno ecc. Vedasi l'esercizio 76).

78. Il prodotto di n numeri consecutivi è divisibile per il prodotto dei primi n numeri. (Supponiamo decomposti i primi n numeri in fattori primi, e poi fatto il prodotto [71]. Così avremo il prodotto dei primi n numeri sotto forma di prodotto di potenze dei numeri primi minori di n. Una qualunque di queste potenze dividerà il prodotto di n numeri consecutivi qualunque. (Esercizio precedente). Ma le potenze di due numeri, primi tra loro, sono esse pure ecc. [129]. Finalmente [149] ecc.).

CAPITOLO IX

TEORIA DELLE FRAZIONI

Preliminari.

157. Per quasi tutte le specie di grandezze, su cui si danno questioni da trattare col soccorso dell'Aritmetica, avviene che si debbano considerare parti dell'unità.

Quando un'unità sia divisa in parti eguali, una di queste si esprime col numero ordinale corrispondente al numero delle parti (*). Una di queste parti merita bene il nome di *frazione* dell'unità, e la si *rappresenta* scrivendo sotto la cifra 1 il numero, che indica in quante parti l'unità fu divisa, e tirando poi una linea di separazione tra i due numeri. Così la scrittura $\frac{1}{12}$ rappresenta una dodicesima parte di una unità, e si legge appunto *un dodicesimo*. Questo simbolo $\frac{1}{12}$ è detto numero anch'esso, e più spesso lo si dice *frazione*, seguendo un costume di attribuire al numero una qualità che spetta all'ente, che esso rappresenta.

(*) Si fa eccezione nel caso che le parti siano *due*, perchè una di queste si chiama *una metà*.

Avviene spesso che, divisa l'unità in parti eguali (*), si consideri poi la grandezza composta di alquante di queste parti. Se, ad es., la dodicesima parte di una unità venga presa 7 volte a formare una grandezza, si dice che questa è *sette dodicesimi* dell' unità, e la si *rappresenta* col simbolo $\frac{7}{12}$. Anche questo simbolo è detto numero o frazione; il numero, che sta sopra della lineetta, vien chiamato *numeratore* (evidentemente perchè esprime il numero delle parti); l' altro numero si dice *denominatore* (perchè suggerisce il *nome* comune a ciascuna delle parti). Con voce collettiva numeratore e denominatore si chiamano i *termini* della frazione.

Oss. Per opposizione i numeri, che non sono frazionarî, si dicono *interi*.

158. Def. *Il denominatore di una frazione indica in quante parti eguali l'unità fu divisa.*

Il numeratore poi è il numero delle parti, che concorrono a formare la grandezza rappresentata dalla frazione.

159. Oss. A ben guardare, anche una frazione rappresenta una collezione di unità; soltanto queste unità sono parti eguali di una primitiva grandezza.

160. Oss. La definizione di frazione non suppone che il numeratore sia più piccolo del denominatore. Così la frazione $\frac{13}{7}$ rappresenta quella grandezza, che è composta con 13 parti tutte uguali a un settimo di unità.

Oss. Una frazione si dice *pura*, quando il numeratore è più piccolo del denominatore, e si dice *spuria* nel caso contrario. Manifestamente una fra-

(*) Quando una grandezza viene divisa in parti eguali, una di queste si dice *parte aliquota* della grandezza data.

zione pura è minore di 1, ed ogni frazione spuria è maggiore di 1.

161. Teor. *Di due frazioni con eguale denominatore è più grande quella che ha maggior numeratore; e di due frazioni con numeratore uguale è più grande quella che ha denominatore minore.*

Infatti, se due frazioni hanno denominatore uguale, esse rappresentano aggregati di parti eguali. Quella che ha numeratore più grande corrisponde ad una grandezza maggiore, epperò si dice maggiore dell'altra.

Quando due frazioni hanno denominatore differente, quella, che lo ha più grande, rappresenta l'aggregato di parti più piccole, poichè in quante più parti eguali si divide una grandezza, tanto più piccole riescono queste parti. E così è manifesto che, quando siano eguali i numeratori, la frazione con denominatore più grande è minore dell'altra.

Così è, ad es.,

$$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}, \qquad \frac{3}{4} > \frac{3}{7}, \qquad \frac{3}{7} < \frac{3}{5}.$$

Amplificazione di una frazione.

162. Teor. *Moltiplicando i due termini di una frazione per uno stesso numero, si ottiene una frazione equivalente alla primitiva.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{3}{5}$. Si tratta di dimostrare che, moltiplicandone i due termini per uno stesso numero qualunque, ad es. per 4, si ottiene una frazione equivalente a $\frac{3}{5}$.

Intanto la frazione $\frac{3}{5}$ rappresenta la grandezza, che si ottiene dividendo l'unità in 5 parti eguali, e mettendo dipoi insieme 3 di queste parti.

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5} \qquad\qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{20} \qquad \frac{4}{20} \qquad \frac{4}{20} \qquad\qquad \frac{4}{20} \qquad \frac{4}{20}.$$

Imaginiamo ora di dividere ciascuno dei *quinti* in 4 parti eguali; l'unità resta divisa così in $4 \cdot 5 = 20$ parti eguali, ossia in *ventesimi*. E poichè ognuno dei *quinti* dà origine a 4 *ventesimi*, dai 3 *quinti*, che dobbiamo considerare, si sono ricavati 12 *ventesimi*. Così resta provato che è

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}.$$

Il nostro ragionamento vale manifestamente qualunque sia il numero, per cui si vogliano moltiplicare i due termini di una frazione data, epperò resta provata la proprietà di ogni frazione di non cambiar di valore, quando i suoi due termini vengano moltiplicati per uno stesso numero intero.

163. Moltiplicando i due termini di una frazione data per i numeri naturali successivi 1, 2, 3..., si ottengono frazioni equivalenti alla primitiva, i cui denominatori sono i multipli successivi del denominatore della frazione primitiva. Risulta da questa osservazione che è sempre possibile trasformare una frazione data in altra equivalente, il cui denominatore sia un multiplo qualunque di quello della primitiva. Ad es., la frazione $\frac{3}{5}$ può certamente essere trasformata in altra, il cui denominatore sia 35, dacchè questo numero è multiplo del denominatore 5. Basta infatti dividere 35 per 5; il quoziente 7 è il numero per il quale conviene moltiplicare i due termini di $\frac{3}{5}$, affine di compiere la trasformazione voluta. Da questo possiamo ricavare la

Regola. *Per trasformare una frazione data in altra equivalente, il cui denominatore sia un dato multiplo di quello della proposta, bisogna moltiplicare i due termini di questa frazione per il quoziente della divisione del nuovo denominatore per quello della frazione primitiva.*

164. Teor. *Un intero qualunque si può mettere sotto forma di frazione con denominatore prestabilito.*

Dim. Sia, ad es., il numero 7. Dico che si può trovare una frazione equivalente a 7, il cui denominatore sia un intero dato qualunque, ad es. 5.

Infatti, dividendo ciascuna delle 7 unità in 5 parti eguali, ciascuna dà 5 *quinti*; in tutte danno perciò $(5 \cdot 7)$ quinti; è dunque

$$7 = \frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5} .$$

Il ragionamento è generale, e ricaviamo la

Regola. *Per ottenere una frazione di denominatore dato ed equivalente a un numero intero dato, bisogna prendere per numeratore il prodotto dell'intero per il denominatore.*

165. Oss. Il teorema precedente fa vedere che il concetto di frazione è più generale di quello di numero intero; questo infatti non è altro che un caso particolare di quello; il caso cioè in cui il numeratore è multiplo del denominatore.

Semplificazione di una frazione.

166. Teor. *Il valore di una frazione non viene alterato col sopprimere un fattore comune ai due termini.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{10}{18}$, i cui termini sono entrambi divisibili per 2. Dico che, sopprimendo nel numeratore e nel denominatore questo fattore comune, si ottiene una frazione equivalente alla primitiva.

Infatti, moltiplicando per 2 i due termini della frazione $\frac{5}{9}$, si riproduce la frazione data, ed è [162] poi

$$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

167. Oss. Se i due termini di una frazione vengono divisi per il loro massimo divisore comune, la frazione si trasforma in una equivalente [166], i cui termini sono [146] primi tra loro. In tal maniera la frazione si trova ridotta a tal forma, che non sappiamo ulteriormente *semplificare*. Il teorema seguente prova che una ulteriore semplificazione è impossibile.

168. Teor. *Una frazione, se è equivalente ad un' altra i cui termini siano primi tra loro, ha termini che sono rispettivamente equimolteplici di quelli della seconda frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{12}$, i cui termini sono primi tra loro. Supponiamo che le lettere a e b rappresentino due numeri interi, tali che la frazione $\frac{a}{b}$ sia equivalente a $\frac{7}{12}$. Ora si tratta di dimostrare che il numero a dev' essere multiplo di 7, e b multiplo del denominatore 12 secondo lo stesso numero.

È intanto per ipotesi

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{12}.$$

Moltiplichiamo i due termini della prima frazione per 12, e i due termini dell' altra per il numero b. Le due frazioni risultanti, perchè [162] rispettivamente equivalenti alle primitive, sono anch' esse equivalenti tra loro. Abbiamo adunque

$$\frac{a \cdot 12}{b \cdot 12} = \frac{7 \cdot b}{12 \cdot b}.$$

E poichè in queste due frazioni equivalenti sono eguali i denominatori, sono eguali [161] necessariamente anche i numeratori. È dunque

$$a \cdot 12 = 7 \cdot b.$$

Ora vediamo che 7 divide il prodotto $(7 \cdot b)$; quindi esso divide anche il prodotto $(a \cdot 12)$. Ma è primo col fattore 12; divide dunque [147] necessariamente l' altro fattore a.

Così intanto abbiamo provato che il numero a deve essere multiplo di 7; supponiamo ne sia il triplo. Ci resta allora da provare che anche il numero b dev'essere uguale al triplo di 12. A tale intento si moltiplichino per 3 i due termini della frazione $\frac{7}{12}$. Poichè la frazione che risulta [162] è equivalente a $\frac{7}{12}$, essa è equivalente anche alla frazione $\frac{a}{b}$; abbiamo adunque

$$\frac{a}{b} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3}.$$

In queste frazioni eguali, essendo per ipotesi eguali i numeratori, sono eguali anche i denominatori; altrimenti [160] le due frazioni non sarebbero equivalenti tra loro. È dunque nel tempo stesso

$$a = 7 \cdot 3 \qquad \text{e} \qquad b = 12 \cdot 3,$$

come si voleva dimostrare.

169. Oss. Da ciò che precede risulta che, quando i due termini di una frazione sono primi tra loro, essa non può essere equivalente ad una frazione scritta con numeri rispettivamente minori. Perciò una frazione, i cui termini siano primi tra loro, si dice *ridotta ai minimi termini*, od anche *irreducibile*. E due frazioni irreducibili non possono per conseguenza essere equivalenti, se non siano eguali tra loro i numeratori, e tra loro i denominatori.

Riduzione delle frazioni a denominatore comune.

171. *Ridurre date frazioni a denominatore comune significa trovare altrettante frazioni, che siano rispettivamente equivalenti alle date, e che abbiano uno stesso numero per denominatore.*

172. Teor. *Quante si vogliano frazioni si riducono a denominatore comune, moltiplicando i due termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.*

Dim. Anzitutto le nuove frazioni, che si ottengono operando secondo la legge enunciata, sono rispettivamente equivalenti alle date, per la nota proprietà [162] di ogni frazione di non cambiar di valore quando se ne moltiplichino i due termini per uno stesso numero. Ci resta a provare che le nuove frazioni hanno veramente denominatore comune. A tale intento prendiamo di mira una a caso di codeste frazioni, ad es. la terza, e vediamo che cosa si possa dire del suo denominatore. Lo si ottiene moltiplicando il denominatore della terza delle frazioni date per il prodotto dei denominatori di tutte le altre; il nuovo denominatore è adunque il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni primitive. Identica conchiusione avremmo evidentemente per ogni altra delle frazioni; epperò l'artificio espresso dal teorema conduce veramente allo scopo.

Ad es., si riducano a medesimo denominatore le frazioni

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{10}{11}, \quad \frac{1}{2}.$$

Operando conforme alla regola, otteniamo

$$\frac{308}{462}, \quad \frac{330}{462}, \quad \frac{420}{462}, \quad \frac{231}{462}.$$

Riduzione di frazioni al minimo denominatore comune.

173. Siano date quante si vogliano frazioni irreducibili da ridurre a denominatore comune. Noi abbiamo già appreso un metodo per raggiungere questo intento, e sappiamo che il denominatore comune delle nuove frazioni è il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni primitive. Poichè nulla ci vieta di pensare che, almeno in qualche caso, date frazioni si possano ridurre ad un denominatore comune minore del prodotto dei denominatori, ora ci proponiamo di trovare la regola per ridurre quante si vogliano frazioni date al *minimo denominatore comune* possibile.

Pensiamo alla prima di queste frazioni. Poichè essa è ridotta ai minimi termini, un'altra frazione non può essere equivalente ad essa, se non abbia [170] un denominatore che sia multiplo del suo denominatore. Così dicasi delle altre frazioni proposte. Perciò, qualunque sia il processo con cui si riducano le frazioni date a medesimo denominatore, il nuovo denominatore comune deve essere un multiplo comune di tutti i denominatori delle date frazioni. Per questo ragionamento, trovato il minimo comune multiplo dei denominatori, potremo dire: in niun modo le frazioni si possono ridurre ad un denominatore comune più piccolo di codesto multiplo.

Abbiamo poi veduto [163] che una frazione si può sempre trasformare in un'altra, che abbia per denominatore un dato multiplo di quello della primitiva; per conseguenza, quante si vogliano frazioni date si possono trasformare in altre rispettivamente equivalenti, e che abbiano per denominatore comune il minimo comune multiplo dei denominatori.

Se in fine rammentiamo [163] che, volendo dare ad una proposta frazione per denominatore un multiplo del denominatore, bisogna moltiplicare i due termini per il quoziente, che si trova dividendo il nuovo denominatore per quello della data, conchiudiamo con la

Regola. *Per ridurre delle frazioni irreducibili al minimo denominatore comune, si cerca dapprima il minimo comune multiplo dei denominatori. Poi si divide questo minimo comune multiplo per i singoli denominatori. Per i quozienti rispettivi si moltiplicano in fine i termini delle frazioni date.*

Oss. Quando i denominatori delle frazioni date sono primi tra loro a due a due, il loro minimo comune multiplo è il loro prodotto; in questo caso pertanto la regola per ridurre le frazioni al minimo denominatore comune ricade in quella, che insegna a moltiplicare i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.

Es. 1°. Siano da ridurre al minimo denominatore comune le frazioni irreducibili

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{24}.$$

Poichè 24 è divisibile per ciascuno dei numeri 3, 4, 12, esso è il minimo comune multiplo dei denominatori. Dividendo 24 per i denominatori, si ottengono rispettivamente i quozienti

$$8, \qquad 6, \qquad 2, \qquad 1.$$

Questi sono i numeri per i quali bisogna moltiplicare rispettivamente i due termini delle frazioni proposte. Risultano così le frazioni

$$\frac{16}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{10}{24}, \quad \frac{7}{24}.$$

Es. 2°. Si riducano al minimo denominatore comune le frazioni irreducibili

$$\frac{113}{360}, \quad \frac{317}{540}, \quad \frac{229}{648}.$$

Dobbiamo anzitutto trovare il minimo comune multiplo dei denominatori. Decomponendo i denominatori in fattori primi, essi assumono le forme

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \qquad 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5, \qquad 2^3 \cdot 3^4.$$

Il minimo comune multiplo di questi numeri è

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5,$$

e questo, diviso per i singoli denominatori, dà i quozienti

$$3^2, \qquad 2 \cdot 3, \qquad 5.$$

Moltiplicando rispettivamente per questi numeri i due termini delle frazioni date, otteniamo

$$\frac{1017}{3240}, \quad \frac{1902}{3240}, \quad \frac{1145}{3240},$$

e queste sono le frazioni richieste.

Esercizî.

79. Dimostrare che, aggiungendo un medesimo numero ai due termini di una frazione, si ottiene una frazione maggiore della primitiva, se questa è pura, minore invece, quando sia spuria. [40].

80. Qual numero si deve aggiungere ai due termini della frazione $^6/_7$, affinchè la frazione risultante differisca dall' unità soltanto di $^1/_{1000}$?

81. In qual caso una frazione data si può convertire in una frazione avente per denominatore un dato numero? Ad es., può la frazione $^6/_{15}$ essere convertita in frazione con denominatore 20? (La frazione data deve generalmente essere dapprima ridotta ai minimi termini).

82. Dimostrare che le frazioni

$$\frac{12}{17}, \qquad \frac{1212}{1717}, \qquad \frac{121212}{171717}$$

sono equivalenti. (Si osservi che è $121212 = 120000 + 1200 + 12$. Si vede [57] che 121212 è un multiplo di 12, e precisamente il moltiplicatore è ecc. Lo stesso si dica del denominatore. Ma [162]...).

83. Dimostrare che le frazioni

$$\frac{3}{104}, \qquad \frac{3003}{104104}, \qquad \frac{3003003}{104104104}$$

sono equivalenti. Osservare un certo modo per dedurre da una frazione altre frazioni equivalenti.

84. Come si ridurrebbero date frazioni ad avere medesimo numeratore? Numeratore comune minimo.

85. Trasformare le due frazioni $^3/_{10}$, $^{15}/_{17}$ in altre due, tali che il denominatore della prima sia eguale al numeratore della seconda. (Questo termine comune deve [168] essere comune multiplo di 10 e 15. Il più opportuno da prendere è il minimo comune multiplo).

86. Trasformare le tre frazioni $^3/_{14}$, $^7/_{30}$, $^{42}/_{17}$ in altre tre, tali che il denominatore di ciascheduna sia eguale al numeratore della seguente. (Si trasformino intanto le due prime così da
* sodisfare le condizioni del problema. Poi si operi allo stesso fine sulla seconda e sulla terza. Resta da cercare un numero per cui moltiplicare tutti i termini delle due prime frazioni ottenute, ed un altro numero, ecc.).

87. Essendo date più frazioni, già ridotte a denominatore comune, come si riconosce se esse siano ridotte al minimo comune denominatore? (Basta cercare il massimo divisore comune di tutti i termini delle frazioni date).

88. Essendo data una frazione irreducibile, trovare una frazione equivalente, tale che la somma de' suoi termini sia eguale ad un intero dato. Condizione perchè il problema sia possibile. (I due termini della frazione cercata devono [168] intanto essere equimolteplici di quelli della data. La loro somma è un multiplo [98] della somma dei termini della data. Si dividerà adunque il numero dato per questa somma; se ecc.).

OPERAZIONI SULLE FRAZIONI

Addizione con frazioni.

174. Le grandezze che sono o si pensano come parti di un tutto possono essere rappresentate da numeri interi e da numeri frazionarî. La nostra definizione dell'addizione vale adunque anche per il caso in cui tutti o parte degli addendi sono frazioni.

175. 1°. Proponiamoci dapprima di sommare delle frazioni con denominatore comune, quali sono, ad es.,

$$\frac{3}{9}, \quad \frac{20}{9}, \quad \frac{7}{9}.$$

Poichè le frazioni hanno medesimo denominatore, le parti d'unità che formano i singoli addendi sono tutte uguali tra loro. Epperciò il totale è rappresentato da una frazione che ha lo stesso denominatore degli addendi, e per numeratore la somma dei numeratori di questi. È adunque

$$\frac{3}{9} + \frac{20}{9} + \frac{7}{9} = \frac{3 + 20 + 7}{9} = \frac{30}{9}.$$

2°. Siano ora da sommare frazioni qualunque, ad es. le frazioni

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{1}{3}.$$

Riducendole a denominatore comune, esse si convertono nelle tre seguenti

$$\frac{18}{30}, \quad \frac{21}{30}, \quad \frac{10}{30}; \qquad \text{così è}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{3} = \frac{18 + 21 + 10}{30} = \frac{49}{30}.$$

Da questi esempî si trae la

Regola. *Per sommare quante si vogliano frazioni, bisogna anzitutto ridurle a denominatore comune. Si sommano quindi i numeratori, e al risultato si dà per denominatore il comune denominatore.*

176. Manifestamente nel sommare numeri interi e frazionarî c'è dell'arbitrario come nell'addizione dei numeri interi; profittando di ciò si potrà talvolta trovar la somma con maggiore speditezza. Ad es., dovendo fare l'addizione con molti numeri, altri interi, altri frazionarî, sarà opportuno di trovare anzitutto la somma dei primi, poi la somma delle frazioni, e sommare infine i due risultati.

177. Quando il risultato di un calcolo è una frazione spuria, ordinariamente si decompone quest'ultima in due parti, in modo che una sia intera e l'altra una frazione pura. Per vedere come si raggiunga la decomposizione in discorso, prendiamo a considerare una frazione spuria qualunque, ad es. la frazione $\frac{100}{13}$.

Dacchè 13 tredicesimi bastano a comporre un'unità, se noi sottraiamo da 100 il denominatore 13, e poi 13 dal resto, e così di seguito, ad ogni sottrazione, che possiamo eseguire, corrisponde una nuova unità che si può ricavare dalla frazione proposta. Il numero delle unità, che si possono ottenere, è dunque [76] uguale al quoziente della divisione del numeratore per il denominatore; e poichè nel caso nostro si trova il quoziente 7 e il resto 9, si conchiude che con 100 tredicesimi si possono comporre 7 unità, e che ancora rimangono 9 tredicesimi. Possiamo scrivere pertanto

$$\frac{100}{13} = 7 + \frac{9}{13},$$

e dire in generale che

Una frazione spuria equivale al quoziente della divisione del numeratore per il denominatore, aumentato della frazione che ha il resto per numeratore e lo stesso denominatore della frazione data.

Oss. Naturalmente quando il numeratore è divisibile per il denominatore, in tal caso la frazione è uguale senz'altro al quoziente della divisione [164].

Sottrazione con frazioni.

178. Def. *La sottrazione è l'operazione aritmetica con la quale, data la somma di due numeri e uno di questi, si trova quell'altro.*

179. 1°. Proponiamoci intanto la sottrazione con due frazioni aventi medesimo denominatore, come, ad es., le due $\frac{8}{11}$ e $\frac{3}{11}$.

Se pensiamo alla regola per l'addizioue di frazioni con denominatore comune, troviamo subito la frazione che, sommata con $\frac{3}{11}$, dà $\frac{8}{11}$. È dunque

$$\frac{8}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8-3}{11} = \frac{5}{11}.$$

2°. Se la sottrazione sia da eseguire con due frazioni di differente denominatore, converrà ridurle prima a denominatore comune, ed effettuare dipoi la sottrazione come nel caso dianzi considerato. Adunque

Regola. *Per eseguire la sottrazione con due frazioni, bisogna anzitutto ridurle a denominatore comune, poi si fa la differenza dei numeratori, e le si sottopone il comune denominatore.*

180. Oss. Supponiamo che da un numero si debba sottrarre la somma di parecchi altri. Si supponga che il minuendo e le parti del sottraendo siano tutte ridotte a denominatore comune. I calcoli sono quindi da eseguire sui numeratori, e si deve in fine sottoporre al risultato il denominatore comune. Ma, trattandosi di interi, abbiamo trovato [44] che, dovendo sottrarre una somma, si può sottrarre successivamente le varie parti, e viceversa [45]; questo teorema vale adunque anche per numeri frazionari. In base a ciò in pratica si può talvolta variare il calcolo all'intento di raggiungere più prontamente il risultato finale.

Moltiplicazione di una frazione per un intero.

Anche la somma di frazioni eguali tra loro si può determinare più speditamente che mediante l'addizione. È naturale dire ancora *moltiplicazione* l'operazione, che serve a questo intento; una delle frazioni sarà il *moltiplicando*, il numero degli addendi il *moltiplicatore*; e si dirà ancora *prodotto* il risultato della moltiplicazione. L'operazione non può essere identica a quella in cui tutti e due i fattori sono interi, epperò la si distingue chiamandola *moltiplicazione di una frazione per un intero.*

E dacchè ora sotto la denominazione di numero intendiamo raccolti i due casi di numero intero e numero frazionario, una medesima definizione vale per il caso in cui il moltiplicando è un intero, e per quello in cui il moltiplicando è una frazione.

181. Def. *Moltiplicare un numero (intero o frazionario) per un intero significa calcolare la somma di tanti numeri eguali al primo, quante sono le unità del secondo.*

182. Ed ora proponiamoci, ad es., di moltiplicare $\frac{4}{7}$ per 5. Per la definizione abbiamo:

$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7},$$

e per la regola [175] dell'addizione delle frazioni,

$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4+4+4+4+4}{7}, \quad \text{ossia [48]}$$

$$\frac{4}{7} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{7}, \qquad \text{donde la}$$

Regola. *Per moltiplicare una frazione per un intero, si moltiplica per questo intero il numeratore della frazione, e si lascia immutato il denominatore.*

183. Oss. Sia, ad es., da moltiplicare la frazione $\frac{13}{28}$ per 35.

Lasciando indicata la moltiplicazione del numeratore per il moltiplicatore, abbiamo il prodotto rappresentato dalla frazione

$$\frac{13 \cdot 35}{28}.$$

In questo caso si riconosce facilmente che, a moltiplicazione compiuta, si ottiene una frazione semplificabile per 7; è quindi ovvia l'opportunità di sopprimere prima questo fattore comune ai due termini. Si ottiene così più speditamente

$$\frac{13}{28} \cdot 35 = \frac{13 \cdot 35}{28} = \frac{13 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{13 \cdot 5}{4}.$$

184. Consideriamo il caso anche più particolare del precedente

$$\frac{3}{14} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{14}.$$

Sopprimendo il fattore 7, comune ai due termini del prodotto, si ottiene

$$\frac{3}{14} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{14} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{3}{2} \cdot$$

Questo esempio suggerisce la

Regola. *Per moltiplicare una frazione per un intero, che divida il denominatore, basta effettuare questa divisione.*

185. E conseguentemente

Il prodotto di una frazione per un intero eguale al denominatore è uguale al numeratore.

Così è [177], ad es.,

$$\frac{3}{7} \cdot 7 = 3.$$

Estensione del significato aritmetico delle parole moltiplicare e dividere.

186. Ritorniamo al primo [73] dei due problemi coi quali ci siamo fatto strada alla *divisione*, e fingiamo che ai 12 poveri, in luogo di 100 monete, siano da distribuire equamente 100 misure di grano. In questo caso, attesa la natura dell'unità, che può essere suddivisa comunque si voglia, anche le 4 unità, che rimangono dopo di averne date 8 a ciascun povero, si possono spartire; e se imaginiamo che la distribuzione venga fatta, una misura per volta, troviamo facilmente quanto spetti a ciascuno: Si dirà infatti: dacchè di ciascuna unità tocca a ciascuno $\frac{1}{12}$, ad operazione compiuta ogni povero avrà $\frac{100}{12}$ di misura di grano. Così, essendo [177]

$$\frac{100}{12} = 8 + \frac{4}{12},$$

possiamo dire: dividendo in 12 parti uguali una collezione di 100 unità, ciascuna parte è composta di 8 unità più $\frac{4}{12}$ di unità.

Come abbiamo già detto, si presenta spesso in pratica il caso di dover dividere una grandezza in parti eguali, e il caso più comune è quello in cui la spartizione si può fare compiutamente, perchè l'unità può essere suddivisa. D'ora in poi intenderemo per *quoziente* il numero, sia esso intero o frazionario, che rappresenta una delle parti, e sempre nell'ipotesi che la spartizione si possa effettuare senza ch'essa debba arrestarsi ad un residuo.

L'esempio testè considerato ci fa vedere che la parola quoziente, presa nel senso usato finora, corrisponde semplicemente a *parte intera* del quoziente, quale lo vogliamo intendere d'ora innanzi; e così dobbiamo aggiungere che l'operazione di divisione (in senso stretto), che abbiamo imparata, ha per unico fine di calcolare la parte intera del quoziente (*).

Dopo di ciò daremo la seguente

187. Def. *Il quoziente della divisione di un numero qualunque per un numero intero rappresenta una delle parti, che si ottengono dividendo (tagliando) la grandezza rappresentata dal dividendo in tante parti eguali quante sono le unità del divisore.*

Se poi si rifletta che, sommando i numeri rappresentanti le parti di una grandezza, si ottiene [174] il numero rappresentante il totale, e che la somma di numeri eguali si ottiene moltiplicandone [181] uno

(*) Nel paragrafo 73 abbiamo posta tale restrizione per cui non si potesse suddividere l'unità della collezione da spartire, perchè non volevamo che ci si presentasse il bisogno di considerare frazioni prima che fosse fatta l'Aritmetica dei numeri interi.

per il numero delle volte ch'esso è ripetuto, si conchiude che dal punto di vista aritmetico si può dare la seguente

188. Def. *Il quoziente della divisione di un numero qualunque per un numero intero è il numero, che, moltiplicato per il divisore, riproduce il dividendo.*

189. Sia ora, ad es., da dividere 748 per 37.

Se badiamo alla prima delle due definizioni di quoziente, date pur ora, dobbiamo dire che il numero richiesto rappresenta $\frac{1}{37}$ della collezione di 748 unità. Una delle parti si può ottenere prendendo $\frac{1}{37}$ di ciascuna delle 748 unità; è pertanto

$$748 : 37 = \frac{748}{37}.$$

Allo stesso risultato saremmo pervenuti dietro la guida della seconda delle definizioni, e rammentandoci che [185] una frazione, moltiplicata per il denominatore, dà per prodotto il numeratore.

Il caso considerato ci permette di enunciare il

Teor. *Il quoziente della divisione di un intero per un intero è rappresentato dalla frazione, che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore.*

190. La grandezza da decomporre in parti eguali può essere rappresentata da una frazione. Perciò proponiamoci, ad es., di dividere $\frac{3}{7}$ per 5.

Il quoziente ricercato deve [187] rappresentare una quinta parte della grandezza rappresentata da $\frac{3}{7}$. Manifestamente si può ottenere una tal parte col prendere $\frac{1}{5}$ di ciascuno dei 3 *settimi*. La difficoltà si riduce adunque a dire che cosa sia $\frac{1}{5}$ di $\frac{1}{7}$. Perciò osserviamo che se, dopo di aver divisa una unità in 7 parti eguali, ciascuna di queste viene suddivisa in 5 parti eguali, le nuove parti dell'unità sono tutte uguali tra loro, e in numero di $7 \cdot 5 = 35$. Un quinto di $\frac{1}{7}$ è dunque

$$\frac{1}{7 \cdot 5} = \frac{1}{35}$$

di unità; epperò è

$$\frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7 \cdot 5}; \qquad \text{quindi la}$$

Regola. *Per dividere una frazione per un intero basta moltiplicare il denominatore per l'intero, lasciando inalterato il numeratore.*

191. Sia da dividere $\frac{40}{7}$ per 5.

Secondo la regola or ora dimostrata, abbiamo

$$\frac{40}{7} : 5 = \frac{40}{7 \cdot 5}.$$

Semplificando il quoziente, si ottiene

$$\frac{40}{7} : 5 = \frac{8}{7}; \qquad \text{quindi la}$$

Regola. *Quando si debba dividere una frazione per un intero, e il numeratore sia divisibile (*) per il divisore, per ottenere il quoziente basterà dividere il numeratore per il divisore, e lasciare immutato il denominatore.*

192. Supponiamo ora che un metro di una certa stoffa costi $\frac{7}{10}$ di lira. Quanto valgono 15 metri, quanto $\frac{1}{5}$ di metro, quanto $\frac{3}{5}$ di metro?

Qui si tratta di risolvere più volte la stessa questione; dato cioè il prezzo di una unità, bisogna determinare i prezzi di varie porzioni di stoffa.

Nel primo caso basta moltiplicare il prezzo *uni-*

(*) La parola *divisibile* d'ora in seguito significherà che il quoziente è un numero intero.

tario per 15; nel secondo bisogna invece dividere [187] per 5; nel terzo caso manifestamente bisogna combinare le due operazioni, dividere [187] cioè il prezzo unitario per 5 (per conoscere intanto il prezzo di un quinto di metro), e dipoi moltiplicare il quoziente per 3.

L'identità delle tre questioni ha indotto a dare lo stesso nome all' operazione aritmetica con cui si risolvono, benchè l'operazione varî da caso a caso, talvolta semplice, talvolta composta di due operazioni. Ma, invece di inventare una nuova parola, si è conservata quella in uso per il caso più semplice, epperò si stabilì di dire:

Moltiplicare per $\frac{1}{5}$, invece di dire *dividere per* 5.

Moltiplicare per $\frac{3}{5}$, invece di dire *dividere per 5 e poi moltiplicare il quoziente per* 3.

Così, senza che occorra distinguere un caso dall' altro, si può dire: per ottenere il prezzo di una porzione stabilita (numericamente) di stoffa, si moltiplica il prezzo dell'unità per il numero rappresentante la porzione di stoffa di cui si tratta (*).

Ed ora che stiamo per fissare con una definizione questa estensione del significato della parola *moltiplicare,* ci avvediamo che basta contemplare l' ultimo dei casi, perchè manifestamente [50] esso include come caso particolare il caso antecedente.

193. Def. *Moltiplicare un numero per una fra-*

(*) La causa della necessità delle generalizzazioni successive di un concetto è questa che all'origine si presenta, si studia, e si stabilisce la nomenclatura per il caso più semplice di una data questione. In seguito si presentano gli altri casi, e per questi di solito è improprio, dal lato etimologico, il linguaggio stabilito; ma non si può pensare a mutarlo.

Così la moltiplicazione non è più l'operazione mediante la quale si trova la somma di numeri eguali, ma quell'operazione

zione significa dividere il moltiplicando per il denominatore, e moltiplicare il quoziente, che risulta, per il numeratore.

194. Conoscendo il prezzo di 15 metri di stoffa, o quello di $\frac{1}{5}$ di metro, o quello di $\frac{3}{5}$ di metro, con quale operazione aritmetica si trova il prezzo unitario, il costo cioè di un metro di quella stoffa?

È chiaro che nel primo caso si deve *dividere* [187] il prezzo dato per 15; nel secondo caso bisogna *moltiplicare* [181] per 5, e nell'ultimo conviene *dividere* il prezzo dato per 3 (perchè in tal modo si arriva intanto a conoscere il prezzo di un quinto di metro) e *moltiplicare* [181] poi il quoziente per 5.

L'identità delle tre questioni ha indotto a dare lo stesso nome all'operazione aritmetica con cui si risolvono, benchè differente da un caso all'altro. Ma invece di inventare una nuova parola si è conservata quella in uso per il caso più semplice, epperò si può dire: per ottenere il prezzo di 1 metro di una certa stoffa, si *divide* il prezzo dato per il numero esprimente la lunghezza della stoffa.

Se poi ci rammentiamo che in ogni caso il prezzo di una certa porzione di stoffa si ottiene moltiplicando [181, 193] il prezzo unitario per il numero rappresentante la porzione di stoffa di cui si tratta, troviamo di poter dire brevemente:

mediante la quale si forma col moltiplicando un numero (il prodotto), nel modo stesso che con l'unità è formato il moltiplicatore. Il primo caso è soltanto un caso particolare, quello in cui il moltiplicatore è intero, e nel quale il moltiplicatore è appunto la somma di parti eguali all'unità. Del resto, come artificio aritmetico, la moltiplicazione di un intero per un intero rimane una delle operazioni fondamentali. La moltiplicazione delle frazioni è una operazione *composta* di una moltiplicazione e di una divisione.

195. Def. *Dividere un numero* (intero o frazionario) *per un altro* (intero o frazionario) *significa trovare un numero che, moltiplicato per il secondo, riproduca il primo dei numeri dati* (il dividendo).

196. Oss. La moltiplicazione, quando il moltiplicatore è frazionario, non si può dire più una operazione che surroga l'addizione di numeri eguali. E così la divisione, quando il divisore è frazionario, non si può dire più l'operazione con cui si trova il numero, che rappresenta una delle parti in cui viene divisa (tagliata) la grandezza espressa dal dividendo. Ed al concetto *moltiplicare* non è più annesso quello di *aumento,* nè al concetto *dividere* è annesso quello di diminuzione.

È facile comprendere che, *quando il moltiplicatore è una frazione, il prodotto supera o no il moltiplicando, secondo che il moltiplicatore è maggiore o minore dell'unità. Così, quando il divisore è una frazione, il quoziente è minore o maggiore del dividendo, secondo che il divisore è maggiore o minore dell'unità.*

Moltiplicazione di un intero per una frazione.

197. Proponiamoci, ad es., di moltiplicare 13 per $\frac{5}{6}$. Sappiamo [193] che moltiplicare per $\frac{5}{6}$ vuol dire dividere per 6, e poi moltiplicare il quoziente per 5. Poichè [189] il quoziente della divisione di un intero per un altro è rappresentato dalla frazione, che ha il dividendo per numeratore e il divisore per denominatore, $\frac{13}{6}$ è il risultato della prima delle due operazioni, che dobbiamo eseguire. Ora moltiplicheremo il quoziente $\frac{13}{6}$ per 5; si ottiene così [182]

$$13 \cdot \frac{5}{6} = \frac{13 \cdot 5}{6}.$$

Quindi la

Regola. *Per moltiplicare un intero per una frazione, si moltiplica l'intero per il numeratore, e al prodotto si dà il denominatore della frazione.*

Moltiplicazione di una frazione per una frazione.

198. Sia, ad es., da moltiplicare $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{5}$.

Sappiamo [193] che moltiplicare per $\frac{3}{5}$ significa: dividere per 5, e poi moltiplicare il quoziente per 3. Dividendo per 5, si ottiene [190] per risultato $\frac{2}{7 \cdot 5}$. Ed ora ci resta da moltiplicare questo quoziente per 3, il che si fa [182] moltiplicando per 3 il numeratore. È dunque

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5};$$

quindi la

Regola. *Per ottenere il prodotto di due frazioni si fa il prodotto dei numeratori, e gli si dà per denominatore il prodotto dei denominatori.*

199. Oss. Questa regola comprende, come casi particolari, le due [182, 197] che abbiamo trovate per il caso che il moltiplicando od il moltiplicatore siano numeri interi; basta infatti riguardare il moltiplicatore, se intero, ed il moltiplicando, se intero, quali frazioni aventi per denominatore l'unità.

200. Oss. Sappiamo [193] che moltiplicare per una frazione significa dividere per il denominatore e poi moltiplicare il quoziente per il numeratore. Ora, se prima di eseguire la moltiplicazione, si moltiplichino i due termini della frazione moltiplicatore per uno stesso numero, o si sopprima un loro fattore comune, la frazione non muta di valore [164, 167], ma resta modificata l' operazione che si deve fare sul moltiplicando. Non viene però alterato il risultato finale; e per convincersene basta riflettere alla regola per la moltiplicazione delle frazioni. Infatti, semplificando, ad es., il moltiplicatore, si viene in qualche modo a semplificare anticipatamente il prodotto.

Prodotto di quante si vogliano frazioni.

201. Se, essendo date parecchie frazioni, si moltiplichi la prima per la seconda, poi il prodotto risultante per la terza, e così di seguito, si ottiene quel numero che si dice *prodotto delle frazioni* date.

Ad es., si calcoli il prodotto delle frazioni

$$\frac{2}{5}\,, \qquad \frac{4}{3}\,, \qquad \frac{7}{11}\,, \qquad \frac{7}{2}\,.$$

Il prodotto delle due prime è

$$\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3}\,.$$

Moltiplicando questo prodotto per la terza, si ha

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 11}\,,$$

e finalmente, moltiplicando per l'ultima, si ha il prodotto richiesto

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2}\,.$$

Da questo esempio si desume la

Regola. *Il prodotto di quante si vogliano frazioni è la frazione, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori.*

202. Teor. *Un prodotto di numeri interi o frazionarî non muta, se si cambia l'ordine dei fattori.*

Dim. Sappiamo [199] che un fattore intero si può riguardare quale frazione avente l'unità per denominatore, e che [201] il prodotto di quante si vogliano frazioni si ottiene facendo il prodotto dei numeratori, e dividendolo per il prodotto dei denominatori. Se faremo la moltiplicazione, prendendo i fattori in altro ordine, troveremo il medesimo risultato; ed invero il prodotto dei numeratori, dacchè sono numeri interi, non ci risulterà differente [65] perchè si sono presi in altro ordine. E così dicasi del prodotto dei denominatori.

203. Oss. Dal teorema precedente, in modo affatto analogo a quello adoperato [66, 67, 68, 71] allora che si consideravano unicamente numeri interi, si possono dedurre i corollarî seguenti:

1°. *Dovendo moltiplicare un numero per un prodotto di quanti si vogliano fattori, si può invece moltiplicare successivamente per i singoli fattori.*

2°. *Per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei fattori per questo numero.*

3°. *In un prodotto di parecchi fattori si può sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato.*

4°. *Il prodotto di due potenze della stessa base, anche se frazionaria, è la potenza di questa base, che ha per esponente la somma degli esponenti.*

Prodotto di una somma per una somma.

204. Si debba, ad es., effettuare la moltiplicazione

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{12}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\right).$$

(Abbiamo assunto frazioni con denominatore comune, altrimenti avremmo dovuto ridurvele prima di cominciare il ragionamento).

Volendo eseguire l'operazione per l'appunto come sta indicata, conviene anzitutto eseguire le addizioni indicate tra parentesi; abbiamo [175] così

$$\left(\frac{5+12+2}{3}\right)\left(\frac{6+2}{5}\right).$$

Ora abbiamo due frazioni da moltiplicare tra loro, e questo si fa [198] moltiplicando i numeratori tra loro e i denominatori tra loro. Al momento d'intraprendere la prima moltiplicazione vediamo di dover moltiplicare una somma per una somma. Sappiamo [63] che si può ottenere il prodotto, moltiplicando ciascuna parte del primo fattore per ciascuna parte del moltiplicatore, e sommando dipoi i prodotti parziali. Operando in tal modo, si ottiene

$$\frac{5\cdot 6+12\cdot 6+2\cdot 6+5\cdot 2+12\cdot 2+2\cdot 2}{3\cdot 5}.$$

Possiamo supporre che codesta frazione sia il risultato dell'addizione indicata nell'espressione seguente

$$\frac{5\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{12\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}+\frac{5\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{12\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}.$$

Qui ognuna delle parti si può riguardare [198] quale prodotto di due frazioni; epperciò il prodotto cercato è pure rappresentato dall'espressione

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{12}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}.$$

Confrontando questo risultato coi fattori dati, conchiudiamo che sussiste in generale il

Teor. *Il prodotto di due somme è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando le singole parti di un fattore per le singole parti dell'altro.*

Appl. In base al teorema precedente, operando in maniera differente dall'indicata, si può talvolta trovare un prodotto in modo più spedito. Ad es., dovendo effettuare la moltiplicazione indicata nell' espressione

$$\left(20 + \frac{2}{7}\right)\left(7 + \frac{3}{5}\right),$$

invece di eseguire le due addizioni indicate tra parentesi, poi la moltiplicazione dei risultati, ed in fine (poichè in tal caso la frazione risultante sarebbe spuria) estrarne gli interi, è più spedito moltiplicare i singoli termini del moltiplicando per le singole parti del moltiplicatore e sommare dipoi i risultati.

Divisione di un intero per una frazione.

205. Sia, ad es., da dividere 11 per $\frac{3}{7}$.

Il quoziente, che si ricerca, è [195] quel numero che, moltiplicato per $\frac{3}{7}$, dà 11 per prodotto. E poichè moltiplicare per $\frac{3}{7}$ non vuol dir altro che dividere per 7 e poi moltiplicare il quoziente per 3, possiamo dire che, dividendo il numero richiesto per 7, e poi moltiplicando il quoziente per 3, si deve ottenere 11. Il risultato della prima operazione deve essere $\frac{11}{3}$, perchè [185] è appunto questo il numero che, moltiplicato per 3, dà 11.

La difficoltà è dunque ridotta a trovare il numero che, diviso per 7, dà per quoziente $\frac{11}{3}$. Ma poichè $\frac{11}{3}$ deve essere un settimo del numero domandato, per ottenere questo numero, basta moltiplicare $\frac{11}{3}$ per 7. Così abbiamo dimostrato che è

$$11 : \frac{3}{7} = \frac{11 \cdot 7}{3} = 11 \cdot \frac{7}{3},$$

quindi la

Regola. *Per dividere un intero per una fra-*

zione bisogna moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata.

Divisione di una frazione per una frazione.

206. Sia, ad es., da dividere $\frac{11}{5}$ per $\frac{3}{7}$.

Qui si tratta di trovare un numero che, moltiplicato per $\frac{3}{7}$, dia per prodotto $\frac{11}{5}$. Adunque, se rappresentiamo con x il quoziente richiesto, dev' essere

$$x \cdot \frac{3}{7} = \frac{11}{5} .$$

Sappiamo [193] che moltiplicare per $\frac{3}{7}$ significa dividere per 7, e poi moltiplicare il quoziente per 3. Eseguendo sul numero x la prima di queste due operazioni, si deve ottenere $\frac{11}{5 \cdot 3}$, perchè è [184] appunto questo il numero che, moltiplicato per 3, dà per prodotto $\frac{11}{5}$.

A tal punto la difficoltà è ridotta a trovare il numero x che, diviso per 7, dia per quoziente $\frac{11}{5 \cdot 3}$; tale adunque che riesca

$$x \cdot \frac{1}{7} = \frac{11}{5 \cdot 3} .$$

Ma, poichè $\frac{11}{5 \cdot 3}$ deve essere un settimo del numero domandato, per ottenere questo numero, basta moltiplicare $\frac{11}{5 \cdot 3}$ per 7. Così, essendo [198]

$$\frac{11 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3} ,$$

conchiudiamo essere

$$\frac{11}{5} : \frac{3}{7} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3} ;$$

quindi la

Regola. *Per dividere una frazione per un' altra, bisogna moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

207. Quando due frazioni, come, ad es., $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$, o le due $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{1}$, sono scritte con gli stessi numeri, ma presi in ordine opposto, ciascuna è detta l'*inversa* dell'altra. Così vale, per tutti e quattro i casi di divisione, la

Regola. *Per ottenere il quoziente della divisione di due numeri qualunque, si moltiplica il dividendo per l'inverso del divisore.*

208. Poichè un prodotto è indipendente [202] dall' ordine dei fattori, definendo [195] l'operazione di divisione, riesce superfluo di considerare il quoziente come moltiplicatore. Epperò più generalmente si può dire

Def. *Con la divisione, dato il prodotto di due numeri ed uno dei fattori, si determina l'altro fattore.*

Il prodotto dato è il *dividendo*, il fattore noto il *divisore*, il fattore da determinare è il *quoziente*.

Teoremi relativi alla divisione.

209. Teor. *Dovendo dividere una somma per un numero, si può invece dividere per questo numero ciascuna delle parti del dividendo e sommare in fine i quozienti parziali.*

Dim. Sia, ad es., da dividere la somma
$$\frac{3}{5} + 14 + \frac{7}{4}$$
per $\frac{5}{6}$. Si dovrebbe effettuare dapprima l'addizione, e poi dividere il risultato per $\frac{5}{6}$. Si tratta di provare che il quoziente si può anche ottenere, operando come indica l'espressione
$$\frac{3}{5} : \frac{5}{6} + 14 : \frac{5}{6} + \frac{7}{4} : \frac{5}{6}.$$

Intanto poichè, per ottenere il quoziente di una divisione, basta [207] moltiplicare il dividendo per l'inverso del divisore, possiamo supporre che ci sia proposto di moltiplicare la somma $(\frac{3}{5} + 14 + \frac{7}{4})$ per il numero $\frac{6}{5}$, che è l'inverso del divisore. Sappiamo poi [204] che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece moltiplicare le singole parti per il moltiplicatore, e sommare infine i prodotti parziali. Si otterrà dunque il quoziente richiesto anche operando come indica l'espressione

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{5} + 14 \cdot \frac{6}{5} + \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{5},$$

che equivale [207] all'altra

$$\frac{3}{5} : \frac{5}{6} + 14 : \frac{5}{6} + \frac{7}{4} : \frac{5}{6}.$$

Così il teorema è dimostrato.

210. Teor. *Per dividere un prodotto per un numero, basta dividere uno dei fattori per questo numero.*

Dim. Sia, ad es., da dividere il prodotto

$$\frac{5}{8} \cdot 15 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5}$$

per il numero $\frac{5}{9}$. Si tratta di provare che, per ottenere il quoziente, basta surrogare uno dei fattori, ad es. il fattore $\frac{3}{7}$, col quoziente della sua divisione per il numero $\frac{5}{9}$.

Infatti possiamo [207] supporre che ci sia proposto di moltiplicare il prodotto per la frazione $\frac{9}{5}$, che è l'inversa del divisore. Sappiamo [203, 2°] che, per moltiplicare un prodotto per un numero, basta moltiplicare uno dei fattori per questo numero. Nel caso nostro basterà dunque surrogare il fattore $\frac{3}{7}$ col prodotto

$$\left(\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{5}\right), \text{ ossia col quoziente } \left(\frac{3}{7} : \frac{5}{9}\right).$$

Appunto come dovevasi dimostrare.

Oss. Quando il numero, per cui si deve dividere un prodotto, è uguale ad uno dei fattori, il quoziente è il prodotto degli altri fattori. Ed infatti, dividendo quel fattore, che è uguale al divisore, per il divisore, si ottiene per risultato l'unità. E l'unità come fattore si può tralasciare senz'altro.

211. Teor. *Dovendo dividere per un prodotto, si può dividere successivamente per i singoli fattori.*

Dim. Sia, ad es., da dividere $\frac{3}{7}$ per il numero

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 13}{17 \cdot 5},$$

che si può [201] riguardare come il prodotto dei numeri $\frac{2}{17}$, 7 e $\frac{13}{5}$. Si tratta di provare che si può ottenere lo stesso risultato dividendo $\frac{3}{7}$ per $\frac{2}{17}$, poi il quoziente per 7, ed infine il nuovo quoziente per $\frac{13}{5}$.

Infatti, secondo la regola [207] della divisione, si dovrebbe moltiplicare il dividendo $\frac{3}{7}$ per la frazione

$$\frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 7 \cdot 13},$$

che è l'inversa del divisore. Questa frazione poi si può riguardare come il prodotto dei numeri

$$\frac{17}{2}, \quad \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad \frac{5}{13};$$

e poichè [203, 1°], dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece moltiplicare successivamente per i singoli fattori, al momento di eseguire il calcolo, potremo moltiplicare $\frac{3}{7}$ per $\frac{17}{2}$, poi il prodotto per $\frac{1}{7}$, e infine il nuovo prodotto per $\frac{5}{13}$. Si badi infine che moltiplicare per $\frac{17}{2}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{5}{13}$ corrisponde [207] rispettivamente a dividere per $\frac{2}{17}$, 7 e $\frac{13}{5}$. Così la proposizione resta dimostrata.

212. Teor. *Moltiplicando due numeri per un terzo numero qualunque, il loro quoziente non muta.*

Dim. Siano, ad es., i due numeri $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$. Dividendo il primo per il secondo, si trova per quoziente il numero $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$. Dico che, ove si moltiplichino i due numeri dati per un terzo qualunque, ad es. per $\frac{8}{13}$, e si divida il prodotto

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{13}\right) \text{ per il prodotto } \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{13}\right),$$

si deve trovare il quoziente stesso dato dalla divisione precedente.

Sappiamo [211] che, dovendo dividere per un prodotto, si può invece dividere successivamente per i singoli fattori; così, dovendo dividere per $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{13}\right)$, si può dividere prima per $\frac{8}{13}$, e poi per $\frac{5}{7}$. Ma, dividendo il numero

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{13}\right) \text{ per } \frac{8}{13},$$

si trova [210] per quoziente $\frac{3}{4}$; resta dunque da dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{7}$; e così la proposizione è dimostrata.

Oss. Rammentando che una frazione rappresenta il quoziente di una divisione, si vede che il teorema [162] per cui si può amplificare una frazione data, non è che un caso particolare dell'ultimo teorema, il caso cioè in cui il dividendo, il divisore e il numero, per cui i due altri vengono moltiplicati, sono numeri interi.

213. Teor. *Il quoziente di due potenze della stessa base, anche se frazionaria, è quella potenza della stessa base, che ha per esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e l'esponente del divisore.*

Dim. Sia, ad es., da dividere $\left(\frac{3}{5}\right)^7$ per $\left(\frac{3}{5}\right)^3$. Dico che il quoziente è $\left(\frac{3}{5}\right)^{7-3}$.

Intanto, poichè il divisore è il prodotto di tre fattori eguali a $\frac{3}{5}$, e dovendo dividere per un prodotto, si può invece dividere successivamente per i singoli fattori, nel nostro caso divideremo successivamente tre volte per $\frac{3}{5}$. D'altra parte il dividendo è il prodotto di 7 fattori tutti eguali a $\frac{3}{5}$, e si sa [210, oss.] che, per dividere un prodotto per uno de' suoi fattori, basta sopprimere questo fattore; così il quoziente della prima divisione sarà il prodotto di *sei* fattori eguali a $\frac{3}{5}$; il quoziente della seconda divisione sarà il prodotto di *cinque* fattori eguali a $\frac{3}{5}$; il quoziente della terza divisione sarà il prodotto di *quattro* fattori eguali a $\frac{3}{5}$, sarà cioè la *quarta* potenza di $\frac{3}{5}$; appunto come si doveva dimostrare.

CAPITOLO X

FRAZIONI DECIMALI

Preliminari.

211. Si chiamano frazioni *decimali* quelle frazioni, il cui denominatore è uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Tali sono, ad es., le frazioni $\frac{1378}{100}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{402}{1000}$.

Naturalmente le frazioni decimali godono tutte le proprietà di qualunque altra frazione, ma con esse il calcolo è più spedito; ciò dipende dalla facilità con cui si fanno moltiplicazioni e divisioni per i numeri 10, 100, 1000, ecc.

Consideriamo la serie di frazioni

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

È facile riconoscere che ciascuna di esse è decupla di quella che la segue; epperciò si può dire che tra codeste frazioni esiste analoga relazione che, ad es., tra le cifre del numero 11111, nel quale appunto ciascuna cifra ha valore decuplo di quello della prossima successiva. E qui si presenta spontanea l'idea di prolungare la successione delle cifre dei numeri interi, a destra di quella delle unità, mantenendo la legge che nel passaggio da un posto a quello a destra il valore di una cifra divenga la decima parte del primitivo. Ma perchè il valore assoluto di una cifra si conosce dal confronto del posto da essa occupato rispetto a quello della cifra delle unità, è manifesto che, se si scrivono altre cifre a destra di quella delle unità, è necessario qualche segno per riconoscere poi codesta cifra. Il segno, adottato per tale ufficio, è una virgola, che si scrive a destra della cifra delle unità.

Perciò, ad es., il numero

$$111{,}1111$$

significa la stessa cosa che l'espressione

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}.$$

Così il numero

$$32{,}4703$$

ha lo stesso significato che l'espressione

$$30 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{10000}.$$

E possiamo dire in generale che

215. *Una cifra, che sia a destra della virgola, equivale ad una frazione, il cui numeratore è la cifra stessa, e il denominatore è il numero scritto con l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre a destra della virgola fino, inclusivamente, alla cifra che si considera.*

216. Reciprocamente, ad es., la frazione $\frac{7}{1000}$ si può scrivere nel seguente modo

$$0{,}007.$$

217. Consideriamo ora il *numero decimale* (*)

$$32{,}084.$$

(*) Così chiameremo una frazione decimale il cui denominatore non sia scritto, ma sia fatto conoscere mediante la virgola.

Sappiamo intanto che esso equivale alla somma

$$32 + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Riducendo l'intero 32 e la frazione $\frac{8}{100}$ allo stesso denominatore dell'ultima, otteniamo

$$\frac{32000}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{4}{1000}.$$

Così ora possiamo conchiudere che è

$$32{,}084 = \frac{32084}{1000}.$$

Nello stesso modo si proverebbe, ad es., essere

$$0{,}00064 = \frac{64}{100000},$$

$$1{,}48 = \frac{148}{100};$$

epperò possiamo enunciare la

Regola. *Un numero decimale è equivalente ad una frazione decimale, che ha per numeratore il numero intero che si ottiene cancellando la virgola nel numero decimale dato, e per denominatore il numero scritto con l'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre decimali del numero dato.*

218. Scrivendo le nostre precedenti eguaglianze nel modo che segue

$$\frac{32084}{1000} = 32{,}084$$

$$\frac{64}{100000} = 0{,}00064$$

$$\frac{148}{100} = 1{,}48$$

conchiudiamo che

Regola. *Volendo scrivere una frazione decimale* *sotto forma di numero decimale, basta scrivere il numeratore, e separare in esso con una virgola tante cifre da destra verso sinistra, quanti sono gli zeri del denominatore. Se poi il numeratore ha meno cifre del denominatore, in tal caso si scrivono prima alla sua sinistra tanti zeri, quanti occorrono perchè si possa separare con la virgola il numero di cifre dovuto.*

219. Per leggere un numero decimale, si legge prima la parte intera, e poi la parte decimale, e questa come se fosse posta sotto forma di frazione decimale.

Così, ad es., il numero 32,014 si legge: 32 *interi* e 14 *millesimi*, appunto perchè è

$$32{,}014 = 32 + \frac{14}{1000} \cdot$$

Si può anche dire che la parte decimale si legge come fosse un numero intero, e che si fa seguire la denominazione delle unità dell'ultima cifra a destra.

220. Un numero decimale si potrebbe anche enunciare leggendo successivamente le varie cifre, e facendo seguire il nome di ciascheduna dalla denominazione corrispondente al posto da essa occupato; ad es., il numero 32,056 si potrebbe leggere: 32 *unità*, 5 *centesimi e* 6 *millesimi*; ma questo modo è poco usato, perchè esige troppe parole.

Ordinariamente, quando la parte decimale sia scritta con molte cifre, queste si suppongono separate in gruppi, che vengono letti come fossero isolati, facendo seguire al numero corrispondente a ciascun gruppo la denominazione, che corrisponde all'ultima sua cifra. Così, ad es., il numero decimale

32,64820432067, considerando le cifre decimali aggruppate a tre a tre, verrebbe enunciato: 32 *unità*, 648 *millesimi*, 204 *milionesimi*, 320 *bilionesimi e* 67 *centobilionesimi*. E si trova la giustificazione di questo modo di leggere osservando che 6 decimi equivalgono [162] a 60 centesimi, i quali, sommati coi 4 rappresentati dalla seconda cifra decimale, danno 64 centesimi. Questi equivalgono [162] a 640 millesimi che sommati con gli 8 millesimi, rappresentati dalla terza cifra decimale, danno 648 millesimi. E così via.

Leggendo la parte decimale per gruppi di due cifre, risulterebbe: 32 *unità*, 64 *centesimi*, 82 *diecimillesimi*, 4 *milionesimi*, 32 *centomilionesimi*, 6 *diecibilionesimi e* 7 *centobilionesimi*.

221. Teor. *Un numero decimale non muta di valore, se gli si scrivono alla destra uno o più zeri.*

Dim. Sia il numero decimale 8,72; dico che esso ha lo stesso valore del numero 8,72000. Infatti, gli zeri scritti a destra non alterano la posizione delle altre cifre, ed indicano soltanto non esservi unità decimali di 3°, 4°, 5° ordine, il che era del pari evidente nel numero 8,72.

Si giunge alla stessa conchiusione ponendo i due numeri decimali sotto forma di frazioni decimali. Sappiamo [217] ch' essi hanno rispettivamente lo stesso significato, che le frazioni

$$\frac{872}{100} \quad \text{ed} \quad \frac{872000}{100000},$$

e queste sono equivalenti, poichè [162] si ottiene la seconda moltiplicando ambedue i termini della prima per 1000.

222. Teor. *In un numero decimale una unità di* *un ordine qualunque è sempre maggiore della somma di tutte le unità rappresentate dalle cifre susseguenti.*

Dim. Sia, ad es., il numero 0,34..., nel quale supponiamo che i punti rappresentino cifre, che seguono il 4. Dico che, per quante e qualunque siano queste cifre, la loro somma è minore di un centesimo.

Ed invero (considerando il caso più sfavorevole, quello cioè in cui tutte le cifre, che seguono quella dell' ordine considerato, siano eguali a 9) il primo 9 esprime 9 millesimi; perciò a formare un centesimo manca un millesimo, ossia 10 diecimillesimi. Di questi ne troviamo 9 nella cifra seguente: per compiere il centesimo, ci manca adunque un diecimillesimo, ossia 10 centomillesimi. Di questi ne troviamo soltanto 9 nella cifra seguente, epperò a formare il centesimo ci occorre ancora un centomillesimo. Questo modo di argomentare può essere continuato indefinitamente; epperò è dimostrato che *ecc.*

223. Cor. 1°. In base al teorema precedente è facilissimo decidere quale di due numeri decimali dati sia il maggiore.

224. Cor. 2°. *Trascurando in un numero decimale tutte le cifre decimali che seguono una data cifra, l' errore che si commette è minore di una unità dell' ordine di questa cifra.*

Ad es., se, invece del numero 2,4832843, si prende il numero 2,48, l'errore che si commette è minore di 0,01, giacchè il numero 2,49, che supera 2,48 di 0,01, supera [222] anche il numero 2,4832843.

Addizione con numeri decimali.

225. Poichè nei numeri decimali, come nei numeri interi, qualunque cifra esprime unità che valgono ciascuna quanto 10 di quelle dell' ordine prossimo inferiore, l'addizione dei numeri decimali si farà nell' identico modo che quella dei numeri interi.

Poniamo, ad es., sia domandata la somma dei numeri

32,047 132 0,0044 e 6,61.

Si scrivono questi numeri uno sotto l'altro, in modo che le cifre rappresentanti unità di un medesimo ordine cadano in una stessa colonna. Perchè avvenga questo, basta scrivere gli addendi in modo che le virgole si corrispondano.

```
  32,047
 132
   0,0044
   6,61
 ---------
 170,6614
```

Fatto ciò, cominceremo ad osservare che nella colonna dei diecimillesimi non ne troviamo che 4; questi si devono scrivere nel posto del totale. Passando alla colonna dei millesimi, ne troviamo 4, e 7 che fanno 11, cioè un millesimo da notare, e 10 millesimi, ossia un centesimo, che si *porta ecc.*

Dopo questo possiamo enunciare la

Regola. *Per fare l' addizione di numeri decimali, si scrivono questi numeri gli uni sotto gli altri, in modo che le virgole cadano in colonna, e si opera dipoi come si trattasse di sommare numeri interi. Nella somma si segna la virgola nel posto indicato dalle virgole degli addendi.*

Sottrazione con numeri decimali.

226. La sottrazione con numeri decimali si eseguisce e si giustifica nel modo stesso che quella dei numeri interi.

Supponiamo, ad es., di dover sottrarre 2,04917 da 3,09. Si scrivano intanto i due numeri, il minore sotto del maggiore, in modo che le virgole si corrispondano.

3,09
2,04917
1,04083

Non trovando centomillesimi nel minuendo, supporremo di prendere uno dei 9 centesimi, e decompostolo in millesimi, ne lascieremo 9 nella terza colonna; il rimanente lo supporremo decomposto in 10 diecimillesimi. Di questi ne lascieremo 9 nella quarta colonna, in quella dei diecimillesimi, l'altro ci dà 10 centomillesimi. Dopo ciò la sottrazione si può cominciare e compiere come si trattasse di numeri interi. Nel residuo si segnerà la virgola in colonna con quelle dei due termini.

Così resta dimostrata la

Regola. *Per eseguire la sottrazione con due numeri decimali, si scrive il minore sotto del maggiore, in guisa che le virgole cadano in colonna, poi si opera come per la sottrazione con numeri interi. Si segna in fine la virgola nel resto ottenuto, in colonna con le virgole dei numeri dati.*

Complemento aritmetico.

227. *Si dice complemento aritmetico di un numero decimale* il resto della sottrazione di questo numero da una unità decimale di ordine qualesivoglia; e precisamente si dice complemento al 10, quando il numero dato si sottrae da 10; complemento al 100 sarà il resto della sottrazione del numero dato da 100; ecc. Così, ad es., il complemento al 10 di 0,004172 è 9,995828.

L'uso del complemento aritmetico adduce uniformità nel calcolo, quando si devono eseguire successivamente parecchie addizioni e sottrazioni. Vedremo ciò in un esempio; ma prima dimostriamo il

228. Teor. *Dovendo sottrarre un numero, si può invece aggiungere un suo complemento aritmetico e sottrarre dal risultato l'unità sulla quale si è preso il complemento.*

Dim. Sia, ad es., da sottrarre il numero 6,4078 da 45,7, e si prenda del sottraendo il complemento ad una unità decimale qualunque, ad es. a 10. Questo complemento è 3,5922, dimodochè è

$$6{,}4078 + 3{,}5922 = 10.$$

Ora è manifesto che se, invece di sottrarre 6,4078, si aggiunga al minuendo il complemento 3,5922, poi, per dedurre dal risultato il residuo richiesto, si dovranno sottrarre successivamente il numero dato e il suo complemento, oppure, ciò che torna lo stesso [45], basterà sottrarre il numero 10.

Es. Sia da calcolare il valore dell'espressione

$$8{,}0412 - 1{,}476 + 6{,}3013 - 0{,}47713 - 1{,}48644.$$

In luogo di sottrarre 1,476 si aggiunga 8,524, suo complemento a 10, e si sottragga 10 dal risultato. Altrettanto si dica per ciascuno degli altri sottraendi. Riservandosi di sottrarre in fine le unità su cui si son presi i complementi, non farà d'uopo eseguire che una sola addizione.

$$\begin{array}{r}
8{,}0412 \\
8{,}524 \\
6{,}3013 \\
9{,}52287 \\
8{,}51356 \\
\hline
40{,}90293
\end{array}$$

Sottraendo le 3 decine, si ha il cercato valore 10,90293.

Moltiplicazione con numeri decimali.

229. Sia, ad es., da moltiplicare 42,0725 per 0,063. Si scrivano intanto questi numeri sotto forma di frazione ordinaria [217]. Avremo così da moltiplicare

$$\frac{420725}{10000} \text{ per } \frac{63}{1000}. \qquad \text{Quindi è}$$

$$42{,}0725 \cdot 0{,}063 = \frac{420725 \cdot 63}{10000000}.$$

I due numeri, che moltiplicati tra loro danno il numeratore, non sono altro che i numeri dati: soltanto ne son cancellate le virgole. Il denominatore poi ha tanti zeri, quante cifre decimali hanno insieme i due fattori. Eseguita la moltiplicazione indicata nel numeratore, se si vuole il risultato sotto forma di numero decimale, si separano [218] nel prodotto con una virgola tante cifre, quanti sono gli zeri del denominatore.

Da questo esempio si rileva la

Regola. *Per moltiplicare due numeri decimali, si fa prima il prodotto non badando alle virgole, quindi si separano a destra nel risultato tante cifre, quante cifre decimali hanno insieme i due fattori.*

Oss. Questa regola comprende il caso che uno dei fattori sia intero; si può infatti imaginare sia scritta una virgola a destra della cifra delle unità.

230. Proponiamoci ora di moltiplicare un numero decimale qualunque per uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Operando intanto secondo la regola precedente, dobbiamo da prima [229] fare astrazione dalla virgola, e moltiplicare per 10, o per 100, 1000, ecc. Ma ciò si fa semplicemente [56] scrivendo a destra del moltiplicando *uno, due, tre* zeri, ecc., secondo il caso.

Dopo di ciò non resta altro che da mettere nel prodotto la virgola. E poichè nel caso in questione il moltiplicatore è intero, il numero delle cifre decimali del prodotto è lo stesso che nel moltiplicando. Manifestamente il prodotto si può così dire ricavato dal moltiplicando col semplice avanzare (intendasi verso destra) la virgola di *un* posto, o di *due* posti, ecc. Ad es., egli è

$$
\begin{aligned}
0{,}724 \cdot 100 &= 72{,}4 \\
2{,}172 \cdot 1000 &= 2172 \\
0{,}0008 \cdot 10 &= 0{,}008.
\end{aligned}
$$

In generale adunque

Per moltiplicare un numero decimale per 10, 100, 1000, *ecc., basta avanzare la virgola di uno, due, tre posti, ecc. verso destra.*

231. Poichè la divisione di un numero per un altro ha per iscopo di trovare un terzo numero che, moltiplicato per il divisore, dia il dividendo, possiamo dire che

Per dividere un numero decimale per 10, 100, 1000, *ecc. basta ritirare (intendasi verso sinistra) la virgola di uno, due, tre posti, ecc.*

Ad es., è
$$
\begin{aligned}
123{,}08 : 100 &= 1{,}2308 \\
906123{,}08 : 100000 &= 9{,}0612308.
\end{aligned}
$$

Oss. Quando il moltiplicando oppure il dividendo non abbiano tante cifre, quante devono [230, 231] essere oltrepassate dalla virgola, in questo caso si toglie il difetto scrivendo degli zeri in numero conveniente. Così, ad es., si ha

$$
\begin{aligned}
12{,}1 \cdot 1000 &= 12{,}100 \cdot 1000 = 12100 \\
3{,}4 : 1000 &= 0003{,}4 : 1000 = 0{,}0034.
\end{aligned}
$$

Divisione con numeri decimali.

232. Sia, ad es., da dividere 0,81 per 4,8092.

Sappiamo che alla destra di un numero decimale si possono scrivere quanti zeri si vogliono, senza che il valore del numero rimanga alterato. Nel caso nostro, scrivendo due zeri a destra del dividendo, otteniamo che i due numeri, di cui è chiesto il quoziente, abbiano cifre decimali in numero eguale. Ora, moltiplicando i due numeri

$$0{,}8100 \qquad 4{,}8092$$

per 10 000, si ottengono [230] i due interi

$$8100 \qquad 48092.$$

Sappiamo [212] poi che, moltiplicando due numeri per un terzo qualunque, il quoziente non muta; e che il quoziente di due numeri interi è in ogni caso rappresentato dalla frazione, che ha il dividendo per numeratore e per denominatore il divisore. Resta così dimostrata l'eguaglianza

$$0{,}81 : 4{,}8092 = \frac{8100}{48092},$$

e in generale la

Regola. *Per trovare il quoziente di due numeri decimali, si scrivono degli zeri così che i due numeri abbiano cifre decimali in egual numero, poi si sopprimono le virgole e si effettua la divisione coi numeri interi così ottenuti.*

Oss. Generalmente la divisione con due numeri interi, a cui si riduce la divisione di due numeri decimali, non si compie esattamente; epperò il quoziente è rappresentato da una frazione ordinaria. E poichè il calcolo con numeri decimali è più spedito di quello delle frazioni ordinarie, e perchè sotto l'aspetto di numero decimale il valore di una frazione può essere compreso più facilmente, è importante saper convertire una frazione ordinaria in numero decimale.

Conversione di una frazione ordinaria in decimali.

233. Convertire una data frazione ordinaria in decimali significa trovare una frazione, il cui denominatore sia uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc., e che sia equivalente alla frazione proposta. Anzitutto si tratta di stabilire in qual caso la conversione è possibile.

Prendiamo a considerare una frazione ordinaria, già ridotta ai minimi termini, quale è, ad es., la frazione $\frac{15}{28}$. Abbiamo già dimostrato [170] che la condizione, perchè una data frazione irreducibile possa essere trasformata in un'altra con denominatore prestabilito, si è che questo numero sia multiplo del denominatore della frazione proposta.

D'altra parte i numeri 10, 100, 1000, ecc., (perchè prodotti di fattori eguali a 10) decomposti in fattori primi, non presentano altri fattori che 2 e 5; ed è noto [135] che un numero divide un altro, soltanto allora che sia composto con soli fattori primi del dividendo. Da tutto ciò si conchiude che una prima condizione, a cui deve sodisfare una frazione ordinaria irreducibile, perchè possa essere convertita in frazione decimale, è questa che il denominatore non sia divisibile per fattori primi diversi da 2 e da 5.

Questa condizione è poi sufficiente; quando cioè essa è sodisfatta, la frazione ordinaria può essere convertita in frazione decimale. Infatti, purchè si osservi essere

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \cdot 5 \\ 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\ 1000 &= 2^3 \cdot 5^3 \\ 10000 &= 2^4 \cdot 5^4 \quad \text{ecc.,} \end{aligned}$$

si riconosce che, quando il denominatore di una frazione ordinaria è composto unicamente coi fattori primi 2 e 5, allora, moltiplicando replicatamente i due termini della frazione o per 2 o per 5, secondo il caso, si otterrà che il denominatore sia composto con fattori eguali a 2 ed altrettanti eguali a 5, nel qual caso il denominatore è appunto uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc., e si è trovata così la frazione decimale equivalente [162] alla frazione ordinaria data.

Ad es., abbiamo

$$\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{28}{100} = 0{,}28.$$

$$\frac{11}{40} = \frac{11}{2^3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{275}{1000} = 0{,}275.$$

In questo modo si è dimostrato il

Teor. *Affinchè una frazione ordinaria irreducibile si possa trasformare in frazione decimale, è necessario e sufficiente che il denominatore non sia divisibile per fattori primi diversi da 2 e da 5.*

234. Oss. Dalla seconda parte della dimostrazione ora data si vede che si può dire *a priori* quante cifre decimali deve avere il numero decimale, che è equivalente a una data frazione ordinaria, quando naturalmente sia sodisfatta la condizione, perchè la trasformazione sia possibile. Infatti, ridotta la frazione ai minimi termini, e decomposto il denominatore in fattori primi, il maggiore dei due esponenti, da cui sono affetti i fattori 2 e 5, indica appunto quante cifre decimali ha il numero decimale equivalente alla frazione.

235. Dal teorema che precede risulta che, per riconoscere se una frazione ordinaria data si possa convertire in decimali, basta ridurre la frazione ai minimi termini, e decomporre il denominatore in fattori primi. Se si trovino fattori primi differenti da 2 e 5, in questo caso la trasformazione è impossibile. In questo caso si può proporsi di trovare una frazione decimale, il cui valore sia tanto approssimato quanto si voglia a quello della frazione proposta; ed è appunto in questa valutazione approssimativa che consiste generalmente la *riduzione di una frazione ordinaria in decimali.*

236. Proponiamoci di ridurre in decimali la frazione $\frac{28}{13}$.

Poichè la frazione $\frac{28}{13}$ è ridotta ai minimi termini, e il denominatore è divisibile per un numero primo differente da 2 e 5, non vi è [233] numero decimale che sia eguale a $\frac{28}{13}$; non può dunque trattarsi d'altro che di trovare un numero decimale, che esprima approssimativamente il valore della frazione $\frac{28}{13}$; e per fissare le idee supponiamo di voler che l'errore non superi *un millesimo.*

Anzitutto, poichè [189] una frazione rappresenta il quoziente della divisione del numeratore per il denominatore, riducendo il numeratore *in millesimi* [164], possiamo scrivere

$$\frac{28}{13} = \frac{28000}{1000} : 13.$$

Sappiamo [191] che, per dividere una frazione per

$$\begin{array}{r|l} 28000 & 13 \\ \cline{2-2} 20 & 2153 \\ 70 & \\ 50 & \\ 11 & \end{array}$$

un intero, se questo divida (in senso ristretto) il numeratore, basta eseguire questa divisione. Ma nel nostro caso, dividendo 28000 per 13, si trova 2153 per quoziente ed il resto 11. Si può scrivere pertanto

$$\frac{28}{13} = \left(\frac{13 \cdot 2153 + 11}{1000}\right) : 13,$$

od anche [175]

$$\frac{28}{13} = \left(\frac{13 \cdot 2153}{1000} + \frac{11}{1000}\right) : 13.$$

Sappiamo [209] inoltre che, dovendo dividere una somma per un numero, si può invece dividere separatamente per questo numero le varie parti della somma, e sommare poi i quozienti parziali. È dunque [191]

$$\frac{28}{13} = \frac{2153}{1000} + \frac{11}{1000} : 13,$$

od anche [218]

$$\frac{28}{13} = 2{,}153 + \frac{11}{1000} : 13.$$

Da questa eguaglianza si rileva che la frazione $\frac{28}{13}$ è maggiore del numero 2,153, minore però del numero 2,154. Difatti il quoziente

$$\frac{11}{1000} : 13$$

è minore di 0,001 (chè sarebbe uguale ad 0,001, se, invece di 11, il numeratore del dividendo fosse 13).

Il numero 2,153 è dunque il richiesto, e lo si dice *approssimato a meno di $\frac{1}{1000}$ per difetto alla frazione* $\frac{28}{13}$. Il numero 2,154 sarebbe invece approssimato a meno di 0,001 per *eccesso*.

Se poi badiamo all'operazione, che ci ha dato il numero 2,153, riconosciamo ch'essa consiste nello scrivere 3 zeri a destra del numeratore, dividere (in senso ristretto) il numero ottenuto per il denominatore, e separare infine con la virgola 3 cifre decimali dal quoziente.

Così, se avessimo cercato un valore di $\frac{28}{13}$ approssimato a meno di 0,000001, avremmo dovuto scrivere 6 zeri a destra di 28, dividere poi per 13, e da ultimo separare a destra del quoziente 6 cifre decimali.

In pratica non occorre scrivere gli zeri a destra del numeratore, ma basta scriverli successivamente uno alla volta alla destra dei resti. Possiamo quindi enunciare la

Regola. *Per ridurre una frazione ordinaria in decimali, si divide il numeratore per il denominatore, e si pone una virgola a destra del quoziente, il quale è rappresentato da uno zero ogni volta che il numeratore sia minore del denominatore. Poi si scrive uno zero alla destra del residuo ottenuto, e si divide il numero, così formato, per il denominatore; il quoziente è la prima cifra decimale. Si scrive uno zero alla destra del nuovo resto, e si divide il numero così ottenuto per il denominatore; il quoziente è la seconda cifra decimale. Si continua così indefinitamente. Se una volta si trovi un resto nullo, il numero scritto nel posto del quoziente esprime esattamente la frazione proposta; nel caso contrario si spinge l'operazione finchè il risultato abbia un grado sufficiente d'approssimazione.*

237. La regola [232], che abbiamo trovata per la divisione con numeri decimali, ci insegna a formare il quoziente sotto forma di frazione ordinaria; però, trattandosi di decimali, e volendo anche il quoziente espresso in decimali, si eseguirà la trasformazione secondo la regola [236] or ora stabilita. Si otterrà il quoziente espresso in decimali esattamente, se, dopo semplificata (*) la frazione, il divisore non sia divisibile per altri fattori primi che 2 e 5; altrimenti si potrà soltanto calcolare un quoziente approssimato; l'approssimazione però potrà essere spinta tanto avanti quanto si voglia.

Nel caso che il divisore sia un numero intero, invece [232] di pareggiare con zeri il numero delle cifre decimali, cancellare le virgole, ed eseguire la divisione, è più semplice dividere secondo la regola trovata per la trasformazione di una frazione ordinaria in decimali. Soltanto, dopo aver divisa la parte intera del dividendo, e scritta una virgola a destra del quoziente, invece di scrivere uno zero alla destra del resto, si cala la cifra dei decimi, poi quella dei centesimi, e così via. Scese tutte le cifre, se la divisione non sia esaurita, si scrive uno zero a destra dell'ultimo resto, e si continua fino a che il quoziente abbia il grado di approssimazione che si desidera. Per giustificare questa regola basta porre il numero

1 3,4 0 3	7
6 4	1,9 1 4 7 1 4 . . .
1 0	
3 3	
5 0	
1 0	
3 0	
2	

(*) L'operazione non richiede che la semplificazione si faccia; il quoziente è [212] indipendente dalla semplificazione.

decimale dato [217] sotto forma di frazione decimale, e ripetere poi il ragionamento che si è fatto per il caso precedente.

238. Nel caso che il dividendo e il divisore siano decimali, e il dividendo abbia più cifre decimali che il divisore, si suole ricondurre la divisione al caso precedente, nel quale il divisore soltanto è intero.

Sia, ad es., da dividere il numero 103,60981 per 2,41. Abbiamo già mostrato [212] che un quoziente non muta se il dividendo e il divisore vengano moltiplicati per uno stesso numero. Così, moltiplicando i due numeri dati per 100 (perchè 2 sono le cifre decimali del divisore), il divisore diventa intero, e si ha quindi da fare, invece della divisione proposta, quella di 10360,981 per 241.

Da questo esempio si può trarre la

Regola. *Dovendo fare la divisione con due numeri decimali, si può sopprimere la virgola nel divisore, ed avanzare nel dividendo la virgola di tanti posti verso destra, quante sono le cifre decimali del divisore, ed eseguire poscia la divisione coi numeri così ottenuti.*

Frazioni decimali periodiche.

239. Sappiamo [233] che, quando si vuol ridurre in decimali una frazione ordinaria, i cui termini siano primi tra loro, ed il cui denominatore ammetta divisori primi differenti da 2 e 5, l'operazione [236] non può riuscire compiutamente, perchè non si giunge mai ad un resto nullo. Più si spinge la divisione, si ottiene una frazione decimale maggiormente approssimata alla ordinaria, che si vuol trasformare. Nel corso dell'operazione s'incontra poi un fatto notevole, di cui ora vogliamo occuparci; e per fissare l'attenzione proponiamoci di ridurre in decimali la frazione $\frac{5}{7}$.

$$\begin{array}{l|l}
50 & 7 \\ \cline{2-2}
\;\;10 & 0{,}71428571\ldots \\
\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}$$

In tutte le divisioni parziali, il divisore essendo costantemente 7, il resto è sempre minore di 7, e non può mai esser nullo (altrimenti $\frac{5}{7}$ sarebbe riducibile in numero decimale esattamente, il che [223] non può darsi). Nel corso dell'operazione possiamo dunque ottenere al più sei resti differenti, l'uno o l'altro cioè dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ne segue che, al più dopo aver calcolate sei cifre, necessariamente si deve ricadere in uno dei resti già avuti. Da tal punto manifestamente ci si trova nelle stesse condizioni che in un precedente momento dell'operazione, e perciò i resti e le cifre del quoziente si devono riprodurre *periodicamente*.

Operando [236] per convertire $\frac{5}{7}$ in numero decimale, si trova

$$0{,}714285\,714285\,714285\ldots.$$

Per altro es., riduciamo in decimali $\frac{93}{148}$; si trova

$$0{,}62\,837\,837\,837\,837\ldots.$$

Si chiamano *frazioni periodiche* le frazioni decimali indefinite, le cui cifre, a partire da un certo rango, si ripresentano indefinitamente nello stesso ordine; e si dà il nome di *periodo* al numero rappresentato dal gruppo di cifre, che costantemente si riproducono. Quando il periodo comincia immediatamente dopo la virgola, come nella frazione 0,61 61 61..., la frazione vien detta *periodica semplice*; nell'altro caso, come, ad es., nella frazione 0,38 061 061..., la frazione si dice *periodica mista*. Il periodo nella prima è 61, e nella seconda è 061. In questa ultima il numero 38, rappresentato dalle cifre poste tra la virgola e il primo periodo, si dice *antiperiodo*.

Ricerca della frazione generatrice di una frazione periodica data.

240. Sappiamo che una frazione ordinaria irreducibile, il cui denominatore ammetta divisori primi differenti da 2 e da 5, quando venga ridotta in decimali dà origine ad una frazione periodica. Noi intendiamo ora di dimostrare che per qualsivoglia frazione periodica data esiste sempre una frazione ordinaria da cui la periodica si può supporre generata; e troveremo la legge per formare tale generatrice. Ci restringeremo a considerare frazioni decimali periodiche senza parte intera; se una frazione periodica ne avesse, se ne farebbe astrazione da principio, riservandosi di aggiungerla in fine alla frazione ottenuta.

Dobbiamo premettere la dimostrazione del seguente

241. Lemma. *Una frazione ordinaria, i cui termini siano scritti con egual numero di cifre, o siano resi tali con zeri scritti a sinistra del termine che avesse meno cifre, è equivalente a tutte quelle frazioni, i cui termini si possono dedurre rispettivamente da quelli della data, scrivendo di seguito, uno stesso numero di volte, i termini di questa.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{75}{801}$. Affinchè i due termini siano scritti con egual numero di cifre, scrivo uno zero a sinistra del numeratore. Così ottengo la frazione $\frac{075}{804}$. Ora dico essere, ad es.,

$$\frac{075}{804} = \frac{075\,075\,075}{804\,804\,804}.$$

Si ha infatti

$$075\,075\,075 = 75\,000\,000 + 75\,000 + 75$$
$$» \quad = 75 \cdot 1\,000\,000 + 75 \cdot 1000 + 75.$$

E poichè dovendo moltiplicare un numero per una somma, si può [62] moltiplicarlo per le singole parti e sommare dipoi i prodotti parziali, è pure

$$075\,075\,075 = 75\,(1\,000\,000 + 1000 + 1)$$
$$» \quad = 75 \cdot 1001001.$$

Egualmente si dimostra essere

$$804\,804\,804 = 804 \cdot 1001001.$$

Si è provato così che i termini della frazione

$$\frac{075\,075\,075}{804\,804\,804}$$

sono equimolteplici di quelli della frazione $\frac{75}{804}$, epperò [162] le due frazioni sono equivalenti, come si voleva dimostrare.

242. Oss. Nel caso che le ultime cifre di uno dei termini della frazione ordinaria data siano degli *zeri*, si può prescindere da questi, quando si voglia formare una frazione equivalente, operando secondo il lemma or ora dimostrato, non dimenticando però di scrivere in fine questi *zeri* a destra del numeratore o del denominatore, secondo il caso. Ad es., dico che è

$$\frac{7}{13\,000} = \frac{07\,07\,07\,07}{13\,13\,13\,13\,000}.$$

Vediamo infatti che è

$$\frac{7}{13\,000} = \frac{7}{13 \cdot 1000} \qquad [56]$$

$$» \quad = \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{1000} \qquad [198]$$

$$» \quad = \frac{07\,07\,07\,07}{13\,13\,13\,13} \cdot \frac{1}{1000} \qquad [241]$$

$$» \quad = \frac{07\,07\,07\,07}{13\,13\,13\,13\,000}, \qquad [198]$$

come si voleva dimostrare.

Frazioni periodiche semplici.

243. Dopo queste premesse, prendiamo a considerare, ad es., la frazione periodica semplice

$$0,72\,72\,72\,72\ldots.$$

È intanto manifesto che, quanto più grande è il numero delle cifre di cui si voglia tener conto, e tanto maggiore è il numero che si ottiene; ma perchè la serie delle cifre, per quante se ne prendano, non può esser mai esaurita, non avvien mai che non si possa ottenere un valore più grande di un ultimo avuto. Sembrerebbe pertanto che, prendendo cifre a bastanza, si potesse anche ottenere un risultato tanto grande, quanto si volesse. E si sa [224] invece che, aumentando di 1 una qualunque delle cifre, ed abbandonando tutte le susseguenti, si ottiene un numero che supera il valore della frazione decimale illimitata. Così nel caso nostro possiamo dire, ad es., che la periodica è minore di 0,8; che è minore di 0,73; ecc.

Ora, se tra i valori che superano quello della nostra periodica, prendiamo, ad es., il numero 0,8, troviamo che, col tener conto di un numero di cifre di più in più grande, ci si accosta a 0,8 sempre più; ma non si può accostarsi tanto quanto si voglia, dacchè, ad es., essendo il risultato minore sempre di 0,73, per quante cifre si siano prese, la differenza tra 0,8 ed il risultato è sempre maggiore di 0,8 — 0,73, maggiore cioè di 0,07.

Ma tra i valori maggiori di quello della periodica ve ne deve pur esser uno al quale, col prender sempre più cifre, ci si possa accostar tanto che la differenza riesca tanto piccola quanto si voglia. Questo valore si dice il *limite* della somma dei numeri rappresentati dalle cifre successive della frazione periodica, od anche il *valore* di questa frazione. Ora si tratta di esprimere questo valore, ma con un numero limitato di cifre; vedremo poi che, se venisse convertito in decimali, esso genererebbe da capo la frazione periodica.

Il limite, che cerchiamo, è intanto compreso tra le due frazioni $\frac{72}{100}$ e $\frac{73}{100}$, le quali differiscono tra loro di *un centesimo*. Volendo una frazione intermedia tra queste due, si scorge facilmente esser tale la frazione $\frac{72}{99}$, che è infatti maggiore della prima, perchè [160] ha eguale numeratore e denominatore più piccolo. È poi minore di $\frac{73}{100}$, perchè $\frac{72}{99}$ è frazione pura, epperò minore di quella qualunque, che si ottiene aggiungendo un medesimo numero ai suoi due termini (*).

(*) La proposizione, che qui si accenna, è facilissima da dimostrare. Dico, ad es., essere $\frac{3+10}{7+10} > \frac{3}{7}$. Osservo da prima che la differenza tra i termini di una frazione è uguale [40] alla differenza tra i termini dell'altra. Nel nostro caso è 4. Per ottenere l'unità, alla prima frazione bisogna aggiungere $\frac{4}{17}$, alla seconda $\frac{4}{7}$. Così, essendo $\frac{4}{17} < \frac{4}{7}$, la proposizione è dimostrata.

Essendo adunque

$$\frac{72}{100} < \frac{72}{99} < \frac{73}{100},$$

ne segue che, se $\frac{72}{99}$ non è il valore che cerchiamo, ne differisce però meno di $\frac{1}{100}$.

Consideriàmo ora le due frazioni

$$0{,}72\,72 = \frac{72\,72}{10\,000} \qquad 0{,}72\,73 = \frac{72\,73}{10\,000}.$$

Anche tra queste due frazioni è compreso il valore della periodica data. Ma tra esse sta pure la frazione $\frac{7272}{9999}$. E poichè le due frazioni differiscono tra loro di $\frac{1}{10000}$, la differenza tra il limite che cerchiamo e la frazione $\frac{7272}{9999}$ è minore di *un diecimillesimo*. D'altra parte la frazione $\frac{7272}{9999}$ equivale [241] a $\frac{72}{99}$; quindi ora possiamo dire: se $\frac{72}{99}$ non è il valore della frazione periodica proposta, ne differisce però meno di *un diecimillesimo*.

Considerando tre periodi, e ragionando identicamente, troveremmo che $\frac{72}{99}$ non può differire dal valore che cerchiamo, neanco di *un milionesimo*; poi nemmeno di *un centomilionesimo*; ecc.

Potendosi così dimostrare che la differenza tra il valore della frazione periodica e la frazione $\frac{72}{99}$ è minore di qualunque quantità data per quanto piccola, resta provato che $\frac{72}{99}$ è appunto il *valore* della frazione periodica 0,72 72 72...

Che poi $\frac{72}{99}$ sia la frazione generatrice della periodica 0,72 72 72..., ce ne persuadiamo nel modo seguente. Poniamo, ad es., che riducendo $\frac{72}{99}$ in decimali, si potesse ottenere 0,72 72 75... Allora non sarebbe più vero che la frazione $\frac{72}{99}$ è compresa tra le frazioni 0,72 72 72 e 0,72 72 73, come ce lo hanno provato le antecedenti considerazioni.

Nello stesso modo troveremmo, ad es., essere

$$\text{lim.}\ (0{,}031\ 031\ 031\ \ldots) = \frac{31}{999};$$

quindi in generale il

Teor. *La frazione ordinaria, generatrice di una frazione periodica semplice, ha per numeratore il periodo e per denominatore il numero scritto con tanti 9, quante sono le cifre del periodo.*

244. Può accadere che si possa semplificare la frazione che si forma con la regola precedente, e far perdere al suo denominatore la forma particolare che ha. Ma perchè un numero, che ha 9 per cifra delle unità, non è [108] divisibile nè per 2, nè per 5, e perchè, semplificando una frazione, si sopprimono anzichè introdurre fattori comuni ai due termini, troviamo quale

Cor. *Il denominatore di una frazione irreducibile, generatrice di una frazione periodica semplice, non è divisibile nè per 2, nè per 5.*

Frazioni periodiche miste.

245. Proponiamoci ora di trovare la generatrice di una frazione periodica mista, quale è, ad es.,

$$0{,}532\ 67\ 67\ 67\ \ldots$$

Separiamo intanto l'antiperiodo dal rimanente, consideriamo cioè la somma

$$0{,}532 + 0{,}000\ 67\ 67\ 67\ \ldots,$$

ed occupiamoci prima della seconda parte.

Il valore di questa è compreso tra

$$0{,}000\ 67 \quad \text{e} \quad 0{,}000\ 68 \qquad \text{ossia tra}$$

$$\frac{67}{100\ 000} \quad \text{e} \quad \frac{68}{100\ 000} \qquad \text{cioè tra}$$

$$\frac{67}{100} \cdot \frac{1}{1000} \quad \text{e} \quad \frac{68}{100} \cdot \frac{1}{1000},$$

frazioni, che differiscono la prima dalla seconda di *un centomillesimo.*

Tra queste è poi compresa evidentemente la frazione

$$\frac{67}{99} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{67}{99000} .$$

Ne segue che, se la frazione $\frac{67}{99000}$ non è il limite che cerchiamo, ne differisce però di meno di *un centomillesimo.*

Consideriamo ora le due frazioni

$$0{,}000\,67\,67 \qquad \text{e} \qquad 0{,}000\,67\,68$$

equivalenti alle due

$$\frac{67\,67}{10\,000\,000} \qquad \text{e} \qquad \frac{67\,68}{10\,000\,000} .$$

Tra queste, differenti tra loro di un *diecimilionesimo*, è compreso il valore che cerchiamo, ed è pur compresa la frazione $\frac{6767}{9\,999\,000}$, equivalente [242] alla $\frac{67}{99\,000}$. Ora dunque possiamo dire: se la frazione $\frac{67}{99\,000}$ non è il valore cercato, ne differisce però di meno di *un diecimilionesimo.*

Considerando tre periodi, e ragionando identicamente, troveremmo che $\frac{67}{99\,000}$ non può differire dalla frazione, che cerchiamo, neanco di *un bilionesimo*; poi nemmeno di *un centobilionesimo*, e così via. Non può dunque esservi differenza alcuna per quanto piccola; epperò $\frac{67}{99\,000}$ è veramente la frazione cercata.

Dopo ciò possiamo dire che la frazione periodica mista: 0,532 67 67 67 . . . è equivalente alla somma

$$\frac{532}{1000} + \frac{67}{99\,000} .$$

Riducendo a denominatore comune, abbiamo

$$\frac{532 \cdot 99}{99\,000} + \frac{67}{99\,000} ,$$

e sommando

$$\frac{532 \cdot 99 + 67}{99\,000}.$$

E perchè il prodotto di 532 per 99 (somma [48] di 99 numeri eguali a 532) si può anche ottenere moltiplicando 532 per 100, e sottraendo dipoi 532, abbiamo

$$\frac{53200 + 67 - 532}{99\,000},$$

e finalmente

$$\frac{53267 - 532}{99\,000}.$$

E questa è la generatrice della nostra frazione periodica mista 0,532 67 67 67 . . .

Infatti, se torniamo a considerare il risultato sotto la forma

$$\frac{532}{1000} + \frac{67}{99\,000},$$

troviamo che il primo termine, perchè equivalente a 0,532, ci dà intanto l'antiperiodo; convertendo poi in decimali la seconda parte, si deve trovare 0,000 67 67 67 . . . ., giacchè, se si trovasse, ad es., il numero seguente 0,000 67 68 . . . , ciò contradirebbe quanto abbiamo provato, che cioè la frazione $\frac{67}{99\,000}$ è minore di 0,000 67 68.

Nello stesso modo troveremmo, ad es., che la generatrice della periodica mista 0,007 426 426 . . . . è la frazione

$$\frac{7426 - 7}{999\,000}.$$

Possiamo perciò enunciare il

Teor. *La frazione ordinaria, generatrice di una frazione periodica mista, ha un numeratore, che si ot-*

tiene sottraendo l'antiperiodo dal numero scritto con le cifre dell' antiperiodo e quelle del periodo. Il denominatore è il numero scritto, prima con tanti 9 quante sono le cifre del periodo, e poi tanti zeri quante sono le cifre dell' antiperiodo.

246. In una periodica mista l'ultima cifra dell'antiperiodo e l'ultima cifra del periodo non possono essere uguali. Chè infatti, se una periodica mista avesse 7041 per antiperiodo e 71 per periodo, fosse cioè la seguente 0,7041 71 71 71 . . . , l'antiperiodo sarebbe 704 e 17 il periodo.

Ora, poichè le cifre delle unità dei due numeri, la cui differenza è il numeratore della generatrice della frazione periodica mista non possono essere uguali, detto numeratore non può essere numero, che finisca per *zero*. Epperò non può essere ad un tempo divisibile [148] per 2 e per 5. Quindi, ove si riduca ai minimi termini la frazione generatrice formata secondo la regola indicata [245], uno o l'altro dei fattori 2 e 5 resterà necessariamente nel denominatore con esponente uguale al numero degli zeri scritti in seguito alle cifre 9. Così resta dimostrato il

Cor. *Il denominatore della frazione irreducibile, generatrice di una periodica mista, è divisibile per la potenza di 2 o di 5, che ha esponente uguale al numero delle cifre dell' antiperiodo.*

Oss. Dai teoremi 233, 242 e 245, indirettamente, si ricava che

Una frazione irreducibile, il cui denominatore non sia divisibile nè per 2 nè per 5, convertita in decimali, dà origine ad una frazione periodica semplice. E una frazione irreducibile, il cui denominatore ammetta uno almeno dei fattori 2 e 5, e inoltre altri fattori primi, ri-

dotta in decimali, produce una frazione periodica mista, nella quale il numero delle cifre dell'antiperiodo è uguale all'esponente della maggior potenza di 2 o di 5, che divide il denominatore della frazione data.

Esercizî.

89. Si dimostri che il prodotto di due frazioni periodiche semplici, minori dell'unità, è una frazione decimale periodica semplice. (I denominatori delle generatrici non ammettono 2 e 5 per divisori, quindi nemmeno il loro prodotto, ecc.).

90. Si trovi il prodotto delle due frazioni

$$0{,}58333\ldots \qquad 0{,}0857142857142\ldots$$

(Si moltiplichino le generatrici).

91. Può il prodotto di due periodiche miste essere numero decimale finito, oppure frazione periodica semplice o mista? (Si imaginino decomposti in fattori primi i termini delle generatrici).

92. Si trovi un multiplo di 7, che sia scritto con soli 9. (Si trasformi in decimali una frazione con denominatore 7, ecc.).

93. La differenza tra due periodiche semplici è una periodica semplice. (Si riducano le generatrici a denominator comune, fondandosi sul teor. 241).

94. Si converta la frazione $^5/_8$ in una somma di frazioni aventi per denominatori le potenze successive di 3. (Non è che la generalizzazione del problema [233] della trasformazione di una frazione ordinaria in decimali).

95. Si convertano le frazioni $^{17}/_{40}$, $^{17}/_{81}$ ciascuna in una somma di frazioni aventi per denominatore le potenze successive di 12. I due numeri cercati son essi composti di un numero limitato o di un numero illimitato di frazioni?

96. Essendo data la frazione periodica mista 0,62837837837..., si può considerarla come avente 6283 per antiperiodo, e 783 per periodo. La sua frazione generatrice è espressa allora da

$$\frac{6283783 - 6283}{9990000}.$$

Si provi la coincidenza di questo risultato con quello, che si ottiene considerando 62 per antiperiodo ed 837 per periodo.