CAPITOLO V

DIVISIONE

Preliminari.

73. Un tale consegnò ad un suo servo 100 lire, affinchè le dividesse in parti eguali tra 12 poveri; gli permise poi di tenere per sè quelle lire, che non si potessero giustamente spartire. Quante lire toccarono a ciascun povero?

Per trovar il numero domandato, possiamo imaginare che il servo abbia fatta la spartizione nel modo seguente: che abbia prese 12 lire e consegnatene una a ciascun povero, che ne abbia prese altre 12 e consegnate da capo una a ciascuno, e così di seguito, finchè gli son rimaste meno di 12 lire.

Per seguire aritmeticamente l'operazione del servo, bisogna sottrarre 12 da 100, poi 12 dal resto, e così via, fino a giungere ad un resto minore di 12. È manifesto che il numero delle sottrazioni, che si possono fare, è il numero domandato.

Così si trova che a ciascun povero toccarono 8 lire; (e che, essendo 4 l'ultimo resto, restarono 4 lire per il servo).

74. Un tale consegnò ad un suo servo 100 lire, con l'ordine che le dividesse tra poveri, dandone 12 a ciascuno. Si vuol sapere quanti poveri furono beneficati.

È chiaro che, sottraendo 12 da 100, poi 12 dal resto, e così via, fino ad ottenere un resto minore di 12, e contando poi le sottrazioni eseguite, si ottiene il numero domandato.

75. Confrontando ora le due questioni che abbiamo trattate, riconosciamo che identico è il processo aritmetico che le ha risolute tutte e due, benchè esse siano differenti tra loro. Nel primo caso infatti si trattava di spartire una collezione di unità (le 100 lire) in un dato numero (12) di parti eguali, e di dire quante (8) unità concorressero a formare ciascuna delle parti. Nel secondo caso, invece, si trattava parimente di dividere una data collezione (le 100 lire) in parti eguali, ma questa volta era noto il numero (12) delle unità che dovevano comporre ciascuna parte, e bisognava determinare il numero delle parti, che si potevano ricavare.

Abbiamo trovato che in ambedue i casi il numero richiesto si può determinare mediante replicate sottrazioni. Questo metodo, quando il numero delle necessarie sottrazioni non sia molto piccolo, è soverchiamente laborioso. Così, poichè si presentano spesso questioni analoghe alle due che abbiamo considerate, si è cercato di abbreviare l'artificio aritmetico che le risolve. Risultò la quarta delle operazioni fondamentali dell'Aritmetica: la *Divisione.* Codesta operazione si definisce nel modo che segue.

76. Def. *Dividere un numero per un altro significa trovare quante volte bisogna sottrarre il secondo* *dal primo e dai resti successivi, per arrivare ad un resto minore del secondo dei due numeri dati.*

Il primo dei due numeri, siccome quello che nel problema, che conduce alla divisione, rappresenta la collezione che dev' essere divisa, si chiama *dividendo.* L' altro numero si dice *divisore.* Il risultato dell' operazione, perchè indica quante volte il divisore può essere sottratto, si dice *quoziente* (dalla parola latina *quoties,* quante volte). L'ultimo resto vien detto *resto della divisione,* o *resto* senz'altro. Per indicare una divisione si scrive prima il dividendo, quindi il segno :, e in seguito, a destra, il divisore. Vedendo scritto 4000 : 420, si legge 4000 *diviso* 420.

77. Teor. *Il quoziente di una divisione è il maggior numero, per cui si possa moltiplicare il divisore, senza ottenere prodotto che superi il dividendo.*

Dim. Sia 100 il dividendo e 12 il divisore; sappiamo esser 8 il quoziente. Dico che 8 è il maggior numero, per cui si possa moltiplicare 12, senza ottenere prodotto che superi 100.

Ed invero, l' essere 8 il quoziente della divisione di 100 per 12 significa [76] che 12 si può sottrarre 8 volte, e non 9 volte. Perchè poi, sottrarre successivamente parecchi numeri, o sottrarre la loro somma, torna lo stesso [45], possiamo dire che da 100 si può sottrarre la somma di 8 numeri eguali a 12, ma non quella di 9 numeri eguali a 12. D'altra parte la somma di 8 numeri eguali a 12 è per l'appunto [48] il prodotto di 12 per 8. Dunque infine conchiudiamo che da 100 si può sottrarre il prodotto 12 · 8, ma non il prodotto 12 · 9.

Per converso, si può provare che, se 8 è il maggior numero, per il quale si può moltiplicare 12, senza che il prodotto riesca maggiore di 100, in tal caso 8 è il quoziente della divisione di 100 per 12.

Infatti, poichè il prodotto $12 \cdot 8$ non è altra cosa [48] che la somma di 8 numeri eguali a 12, possiamo scrivere

$$100 - (12 \cdot 8) = 100 - (12 + 12 + \ldots + 12).$$

E perchè, dovendo sottrarre una somma, si può [44] invece sottrarre successivamente le singole parti, si può dire che il numero 12 si può sottrarre successivamente 8 volte. Ma non 9. Quindi, dopo la ottava sottrazione, il resto deve essere minore di 12; epperò 8 è il quoziente [76] della divisione di 100 per 12.

Così resta dimostrato che *ecc.*

78. Oss. Dal teorema or ora dimostrato si trae l'importante conseguenza che, essendo dati due numeri, ad es. 100 e 12, ricercare il quoziente della divisione del primo per il secondo, o cercare il maggior numero, per cui si può moltiplicare il secondo, senza ottenere un prodotto che superi l'altro numero, torna lo stesso. In altre parole, invece che mediante replicate sottrazioni, un quoziente si può determinare mediante moltiplicazioni. Ad es., per trovare il quoziente della divisione di 100 per 12, si potrà moltiplicare il divisore per i numeri successivi 2, 3, 4..... e confrontare i prodotti col dividendo. L'ultimo moltiplicatore, che si potrà adoperare, senza che risulti prodotto maggiore del dividendo, quello sarà il quoziente.

A primo aspetto non sembra più vantaggioso il secondo processo in confronto del primo, perchè ordinariamente una moltiplicazione è più laboriosa che una sottrazione. Ma si rifletta che, seguendo il primo metodo, le sottrazioni si devono effettuare tutte, perchè ciascuna di esse deve attendere il risultato della precedente; invece le moltiplicazioni sono indipendenti l'una dall'altra, epperò, adoperando dei moltiplicatori saltuariamente, molte si possono risparmiare.

79. Oss. Il teorema precedente ci suggerisce inoltre un modo spedito per riconoscere se un dato numero sia il quoziente della divisione di due numeri dati. Basterà infatti moltiplicare il divisore per il numero dato, e poi per il numero successivo. Se il secondo prodotto sarà maggiore del dividendo, e il primo non lo supererà, il numero messo alla prova sarà [77] per l'appunto il quoziente. La seconda moltiplicazione sarà superflua ogni qual volta il primo prodotto superi il dividendo. Quando poi il primo prodotto riuscisse a dirittura eguale al dividendo, il numero dato sarebbe senz'altro il quoziente.

Come caso particolare ed importante notiamo che se, scrivendo a destra del divisore uno *zero*, risulta un numero maggiore del dividendo, ciò indica essere il quoziente minore di 10, ossia numero di una cifra. Infatti scrivere uno *zero* a destra di un numero equivale [56] a moltiplicare il numero per 10.

80. Teor. *Il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente, più il resto della divisione.*

Dim. Siano, ad es., i numeri 756 e 208. Sottraendo 208 successivamente per 3 volte, si ottiene in fine il resto 132. È dunque

$$756 - 208 - 208 - 208 = 132.$$

Ma invece di sottrarre successivamente parecchi numeri, si può [45] sottrarre la loro somma; abbiamo quindi

$$756 - (208 + 208 + 208) = 132,$$

od anche [46]

$$756 - (208 \cdot 3) = 132.$$

Il minuendo è uguale alla somma del sottraendo e del resto, quindi infine

$$756 = 208 \cdot 3 + 132.$$

Così la proposizione resta dimostrata.

81. Quando il resto di una divisione è lo *zero*, si dice che il dividendo è *divisibile* per il divisore. È evidente che questa locuzione si deve attribuire a ciò che in tal caso la collezione di unità rappresentata dal dividendo si può decomporre in tante parti eguali, quante ne indica il divisore, e che non rimangono unità del dividendo, che non si possano spartire, come accadrebbe, ad es., se con 30 soldati si volessero fare 4 drappelli egualmente numerosi.

Ma la locuzione di cui parliamo non si può dire felice, perchè dal punto di vista aritmetico ogni divisione può essere effettuata.

Divisione nel caso che divisore e quoziente siano di una cifra.

82. Sia da dividere 59 per 8. Poichè 80, decuplo del divisore 8, è maggiore di 59, il quoziente deve [77] essere minore di 10. Noi sappiamo fare a memoria i prodotti di 8 per i numeri successivi 2, 3 ... fino al 9; così si trova che 7 è il numero maggiore, per il quale si può moltiplicare 8, senza che il prodotto risultante superi il dividendo. Il quoziente è dunque 7; e poichè, sottraendo il divisore 8 successivamente 7 volte, o, ciò che torna lo stesso [45], sottraendo da 59 il prodotto $8 \cdot 7 = 56$, si ottiene 3, questo è il residuo della divisione.

Con l'esercizio si arriva al punto di saper dire, in questo caso semplice di divisione, il quoziente senza aver bisogno di cercarlo per tentativi con parecchie moltiplicazioni, siano pure mentali. Ciò dipende dall'avere più o men bene impressa nella memoria la tavola per la moltiplicazione.

Divisione nel caso che il divisore sia scritto con una cifra significativa seguita da zeri, e il quoziente sia di una cifra.

83. Sia da dividere 3961 per 700. Poichè 7000, decuplo del divisore, è maggiore del dividendo, il quoziente è [77] minore di 10. Determiniamolo intanto mediante successive [76] sottrazioni.

3961	3961
700	7
3261	32
700	7
2561	25
700	7
1861	18
700	7
1161	11
700	7
461	461

Con 5 sottrazioni si perviene al resto 461 minore del divisore; 5 è dunque il quoziente, e 461 è il resto della divisione.

Osservando il procedimento dell'operazione, si vede che, appunto perchè le ultime cifre del divisore sono degli *zeri*, altrettante cifre a destra del dividendo passano immutate di resto in resto fino all'ultimo, e che perciò il numero delle sottrazioni che si possono fare è quello stesso, che indica quante volte la cifra significativa 7 del divisore si può sottrarre da 39. E questo numero di sottrazioni è [76] ciò che chiamiamo il quoziente della divisione di 39 per 7. Il nostro ragionamento è generale, epperò possiamo conchiudere la

Regola. *Quando il divisore è scritto con una cifra significativa seguita da zeri, per trovare il quoziente, si dividerà, facendo astrazione dagli zeri del divisore e da altrettante cifre a destra nel dividendo.*

Es. Il quoziente della divisione di 7 162 804 per 900 000 è lo stesso, che il quoziente della divisione di 71 per 9. Esso è dunque 7. E perchè è $71 - (9 \cdot 7) = 8$, il residuo della divisione proposta è 862 804.

Divisione nel caso che il quoziente sia di una cifra.

84. Sia da dividere 3761 per 784. Poichè 7840, decuplo del divisore, supera il dividendo, il quoziente è minore di 10. E perchè il quoziente è il maggior numero, per cui si può moltiplicare il divisore, senza ottenere prodotto che superi il dividendo, moltiplicando successivamente il divisore 784 per i numeri 2, 3, 4 . . . 8, 9, e confrontando i prodotti con 3761, si arriverà a conoscere il quoziente.

Questo processo non sarebbe mai troppo lungo, perchè si dovrebbero eseguire tutto al più 8 semplici moltiplicazioni. Per risparmiare alcuni di questi tentativi giova spesso il seguente artificio.

Si muti il divisore, surrogando con *zeri* tutte le sue cifre, fuori della prima a sinistra. Nel caso nostro prenderemo per divisore, invece di 784, il numero 700. Così ci siamo ricondotti al caso di divisione precedente [83] (*); e il quoziente 5, che ci risulta, esprime che il numero 700 si può sottrarre 5 volte, e non 6. Il vero divisore 784, perchè maggiore di 700, non può cer-

(*) A dir vero il quoziente della divisione ausiliaria potrebbe essere 10, ed anche più grande. In questo caso la prima cifra da assaggiare è il 9.

tamente essere sottratto 6 volte (e forse neanche 5 volte). In tal modo adunque abbiamo trovato un *limite* per il quoziente richiesto; esso non può essere che uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5. Ed essendo più probabile che si trovi verso la fine di questa serie, è naturale di sperimentare queste varie cifre, cominciando dalla maggiore e discendendo, piuttosto che procedere nell' ordine opposto. Moltiplicheremo adunque il divisore per 5; se il prodotto non supererà il dividendo, sarà 5 il quoziente; perchè già sappiamo che, moltiplicando 784 per 6, si ottiene un prodotto maggiore di 3761. Ma quando ci risultasse un prodotto maggiore di 3761, si avrebbe una prova che il quoziente dev' essere minore di 5; in questo caso si proveranno una dopo l' altra le cifre 4, 3..., e si giungerà così necessariamente a conoscere qual sia questo maggior numero, per cui si può moltiplicare il divisore, senza che il prodotto superi il dividendo.

Nel nostro caso, poichè $784 \cdot 5 = 3920$ è maggiore del dividendo, si conchiude che la cifra 5 è maggiore del quoziente (si suole dirla: *troppo forte*); quindi si *assaggia* il 4. E poichè il prodotto ($784 \cdot 4$), cioè 3136, non supera il dividendo, 4 è il quoziente. Si fa poi la sottrazione $3761 - 3136$; il numero 625, che risulta, è il resto della divisione.

Caso generale della divisione.

85. Proponiamoci di dividere 9637024 per 283. Il numero, che intendiamo di determinare, è quello che esprime quante volte bisogna sottrarre 283, per giungere ad un resto minore del divisore; ma si può dire eziandio che esso è il maggior numero, per cui si può moltiplicare 283, senza ottenere prodotto che superi 9637024.

Abbiamo adunque due modi per determinare il quoziente; o con sottrazioni successive, o con successive moltiplicazioni; ed è per l'appunto nell'uso combinato e disciplinato di tutti e due questi espedienti che consiste l'operazione, che ora ci occupa.

Abbiamo già osservato [78] che il secondo metodo, per ciò che le moltiplicazioni sono indipendenti le une dalle altre, conduce più spedito a scoprire il quoziente. Ed ora, cominciando con questo, troviamo naturale di scegliere per moltiplicatori, per i primi saggi, i numeri scritti con l'unità e zeri, perchè con questi numeri i prodotti si fanno [56] con la massima facilità. Nel caso nostro, tra questi prodotti, quello di 283 per 10 000 è il più grande, che si possa sottrarre dal dividendo. Il quoziente è perciò almeno eguale a 10 000, ma dev'essere minore di 100 000; il quoziente è dunque scritto con cinque cifre.

Per conoscere il maggiore dei prodotti in discorso, ci siamo presentate mentalmente le sottrazioni

$$\begin{array}{r} 9637024 \\ 2830 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9637024 \\ 28300 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9637024 \\ 283000 \\ \hline \end{array}$$

e, per decidere se fossero possibili o no, si faceva astrazione dagli zeri scritti alla destra del divisore e dalle corrispondenti cifre del minuendo. L'ultima sottrazione, che abbiamo trovata possibile, fu dunque la seguente

$$\begin{array}{r} 9637024 \\ 2830000 \\ \hline \end{array}$$

e per questo possiamo dire che il divisore 283 non supera il numero 963 a cui è sottoposto, e che 2830, decuplo del divisore, deve superare questo numero, perchè altrimenti il prodotto di 283 per 100000 si potrebbe sottrarre anch' esso dal dividendo.

E qui, per conto del numero delle cifre del quoziente, notiamo che quella d'ordine supremo è dello stesso ordine che quella del dividendo sotto cui viene a cadere la cifra delle unità del divisore.

Ritorniamo all' argomento. Ora che sappiamo che il quoziente è almeno 10000, ed al più 99999, dobbiamo fare altri tentativi con numeri compresi tra questi limiti, e i nuovi saggi sono da fare naturalmente co' numeri 20000, 30000, 40000..., perchè i prodotti si ottengono agevolmente, moltiplicando [55] cioè il divisore per i numeri 2, 3, 4...., e scrivendo di poi quattro zeri a destra di ciascun prodotto. E quando confrontiamo uno di questi prodotti col dividendo, facciamo astrazione dai quattro zeri finali e da altrettante cifre alla destra del dividendo, perchè evidentemente uno di questi prodotti si può sottrarre o no dal dividendo, secondo che il prodotto di 283 per la prima cifra del moltiplicatore, che si assaggia, può essere sottratto o no da 963. Ora, il maggior numero, per cui si può moltiplicare 283, senza ottenere un prodotto che superi 963, è il quoziente della divisione di 963 per 283. E perchè il dividendo di questa divisione è minore del decuplo del divisore, noi sappiamo [84] trovare il quoziente. Dividendo 963 per 283, si trova per quoziente 3; possiamo quindi conchiudere che il prodotto di 283 per 30000 non supera 9637024, e che questo numero è superato dal prodotto di 283 per 40000. Pertanto il quoziente della nostra divisione è almeno 30000, e al più 39999, epperò, qualunque esso sia, è scritto con cinque cifre, e la prima di queste è 3.

La nostra argomentazione è generale, epperò possiamo trarne l' importante

86. Teor. *Separando a sinistra del dividendo tante cifre, quante bastano a formare un numero da cui si possa sottrarre il divisore, e dividendo questo numero per il divisore, si ottiene la prima cifra del quoziente. Questa prima cifra poi è dello stesso ordine dell'ultima a destra del numero separato dal dividendo.*

Stabilito questo teorema, riprendiamo la nostra divisione di 9 637 024 per 283. Separate alla sinistra del dividendo tre cifre, perchè tante bastano a dare un numero da cui si possa sottrarre il divisore, si divida [84] il numero 963 per 283. Il quoziente è 3, ed è [86] questa la prima cifra del quoziente richiesto. E perchè l' ultima delle cifre separate dal divisore è del quinto ordine, il quoziente [86] ha 5 cifre. Esso è pertanto almeno 30000, ma è minore di 40 000.

Si moltiplichi il divisore per 30 000, e si sottragga il prodotto dal dividendo; si ottiene per residuo 1 147 024.

9 6 3 7 0 2 4	2 8 3
8 4 9 0 0 0 0	3 0 0 0 0
1 1 4 7 0 2 4	

Con questa operazione d' un tratto siamo giunti allo stesso resto, come se avessimo effettuate, una dopo l'altra, 30 000 sottrazioni. Infatti il prodotto che abbiamo sottratto è appunto la somma di 30 000 numeri eguali al divisore, e si sa che sottrarre una somma, o sottrarre successivamente le parti, torna lo stesso. E per ciò che il resto è maggiore del divisore, occorrono altre sottrazioni per ottenere in fine un resto minore del divisore 283; ed è chiaro che il quoziente, che stiamo ricercando, è maggiore di 30 000 precisamente di tante unità, quante volte ancora il 283 si può sottrarre cominciando da 1 147 024. In altre parole [76] la parte incognita del quoziente (la quale si dovrà aggiungere a 30000) è niente altro che il quoziente della divisione di 1147024 per 283.

A tal punto possiamo dire d'aver trovato il processo secondo cui si compie la divisione, dacchè si vede che il metodo stesso, che abbiamo trovato per determinare la prima cifra del quoziente, si può far valere a determinare la seconda, e quindi naturalmente anche le rimanenti, una dopo dell'altra. Lo vedremo in fatto seguitando l'operazione.

Abbiamo dunque trovato che il numero, da aggiungere a 30000 per compiere il quoziente, è per l'appunto il quoziente della divisione del resto 1147024 per il divisore 283. Seguendo le indicazioni del teorema or ora dimostrato, noi troveremo la prima cifra di questo quoziente, e sapremo dir anche di quale ordine essa sia. Separiamo intanto da sinistra tante cifre, quante bastano a formare un numero da cui si possa sottrarre il divisore 283. Ci conviene separarne quattro, e, poichè l'ultima delle cifre separate è del quarto ordine, il quoziente parziale, che siamo per determinare, è scritto con quattro cifre. Dividendo il numero separato, cioè 1147, per 283, si trova per quoziente 4; questa è per l'appunto la seconda cifra del quoziente.

9637024	283
8490000	30000
1147024	4000
1132000	
15024	

Ora sappiamo che dal resto 1147024 il divisore può essere sottratto 4000 volte e non 5000. Moltiplicheremo così il divisore per 4000, e sottrarremo il prodotto dal resto. Al nuovo residuo 15024 si perviene dopo 4000 sottrazioni, ove si parta da 1147024, dopo

34 000 sottrazioni, quando si cominci a sottrarre 283 dal numero 9 637 024.

Poichè 15 024 è maggiore di 283, il quoziente è maggiore di 34 000; e lo supera appunto di tante u-nità, quante volte 283 può essere sottratto da 15 024 e dai resti successivi. La parte ancora ignota del quoziente (e che si dovrà aggiungere a 34 000) non è dunque altra cosa, che il quoziente della divisione di 15 024 per 283; e di questo quoziente, operando secondo il noto teorema [86], noi troveremo la prima cifra, e sapremo anche dire di che ordine essa sia. Dobbiamo separare quattro cifre; e poichè l'ultima è di secondo ordine, da 15 024 il divisore può essere sottratto almeno 10 volte, ma certamente meno di 100 volte. Ne segue che il quoziente definitivo deve essere minore di 34 100, epperò la cifra delle centinaia è lo *zero*. Dividendo 1502 per 283 si ottiene 5. Questo quoziente ci significa che 283 si può sottrarre ancora

9637024	283
8490000	30000
1147024	4000
1132000	50
15024	3
14150	
874	
849	
25	

9637024	283
849	34053
1147	
1132	
1502	
1415	
874	
849	
25	

50 volte almeno, ma non 60. Si moltiplichi intanto il divisore per 50, e si sottragga il prodotto dall'ultimo resto. Dopo di ciò possiamo dire d'aver sottratto 34 050 volte il divisore, e d'essere pervenuti al resto 874.

Il divisore si può sottrarre ancora 3 volte, perchè dopo queste sottrazioni il resto 25 è minore del divisore.

In conchiusione il quoziente della divisione di 9637024 per 283 è 34053, e il resto è 25.

Ora faremo alcune osservazioni, affine di poter raccogliere da quanto precede la regola pratica per la divisione.

Si dicono intanto *dividendi parziali* i numeri, che vengono divisi uno dopo l'altro per il divisore, affine di ottenere le varie cifre del quoziente. Nel nostro esempio i dividendi parziali sono: 963, 1147, 150, 1502, 874.

Poi, osservando il procedimento dell' operazione, si riconosce che alcune cifre del dividendo, più di tutte le ultime a destra, vengono trascritte più volte a formare i resti successivi, prima che vengano adoperate veramente nel calcolo delle cifre del quoziente. Per ispeditezza, in pratica si scrivono allora soltanto che occorre veramente di farne uso, e si tralascia quindi di scrivere quegli zeri che si scrivono a destra dei prodotti del divisore per le singole cifre del quoziente. Le cifre del dividendo vengono così calate una per volta, e ad ogni cifra, che discende (dal posto del dividendo) corrisponde una cifra dello stesso ordine nel quoziente. Codeste cifre del quoziente vengono scritte, una in seguito all'altra, a misura che sono date dal calcolo.

Ora possiamo enunciare la regola generale per la divisione.

87. Regola. *Si separano a sinistra del dividendo tante cifre, quante bastano ad esprimere un numero da cui si possa sottrarre il divisore. Si divide* *questo numero per il divisore, e così si ottiene la prima cifra del quoziente (quella d'ordine più elevato).*

Si calcola il resto della divisione, che ha fornito la prima cifra del quoziente, e a destra di questo residuo si scrive quella cifra del dividendo che segue le cifre già separate.

Il numero, che risulta così, è il nuovo dividendo parziale. Diviso per il divisore, esso dà la seconda cifra del quoziente.

A destra del resto di quest'ultima divisione si scrive quella cifra del dividendo, la quale segue l'ultima, che si è calata.

Il numero così formato è il nuovo dividendo parziale. Diviso per il divisore, esso dà la cifra del quoziente, che segue l'ultima determinata.

Così si continua finchè non vi siano altre cifre del dividendo da calare. L'ultimo resto è il resto della divisione.

Oss. 1ª. Un dividendo parziale potrebb' essere minore del divisore. In tal caso si scrive uno zero al quoziente, e, calando una nuova cifra accanto dell'ultimo dividendo, si forma il dividendo successivo.

Oss. 2ª. Quando il quoziente di una divisione debba avere un gran numero di cifre, e il divisore non sia semplice assai, si rende l'operazione più facile e spedita preparando una tavola dei prodotti del divisore per i nove primi numeri (*). Con questa si trovano immediatamente, senza bisogno di prove, le

(*) Questi prodotti elementari si formano aggiungendo replicatamente il divisore. Ottenuto il nonuplo, gli si aggiunga il divisore; deve risultare il decuplo del divisore. Ciò vale a verificare d'un tratto tutti i multipli.

varie cifre del quoziente, e si hanno pronti quei prodotti, che si devono sottrarre dai dividendi parziali.

Esempio.

```
3 7 7 5 3 6 0 3 6 6 2 0 8     | 2 8 6
2 8 6                         |---------------------
-----                         | 1 3 2 0 0 5 6 0 7 2 1
  9 1 5
  8 5 8
  -----
    5 7 3
    5 7 2
    -------
      1 6 0 3
      1 4 3 0
      -------
        1 7 3 6
        1 7 1 6
        -------
          2 0 6 2
          2 0 0 2
          -------
            6 0 0
            5 7 2
            -----
              2 8 8
              2 8 6
              -----
                  2
```

1	286
2	572
3	858
4	1144
5	1430
6	1716
7	2002
8	2288
9	2574

Oss. 3ª. Quando il divisore è di una sola cifra, allora la divisione si effettua con tutta facilità e speditezza. In tal caso infatti (poichè in ogni divisione parziale oltre del quoziente anche il divisore è d'una sola cifra) le divisioni parziali dànno [82] le singole cifre del quoziente senza che occorra di sperimentarle; e si fanno a memoria [53] i prodotti che si devono sottrarre dai dividendi parziali. Le sottrazioni sono pure semplicissime, dacchè i residui (dovendo essere minori del divisore, che è d'una sola cifra) sono minori di 10. Perciò anche le sottrazioni si fanno mentalmente, senza scrivere i sottraendi, e si notano soltanto i residui, alla cui destra si calano poi le cifre del dividendo, come richiede la regola della divisione.

Come esempio, effettuiamo la divisione di 43 675 per 7. Operiamo prima per disteso, secondo la regola generale [87], poi col processo abbreviato.

```
43675 | 7                      43675 | 7
42    |------                   16   |------
---   | 6239                     27  | 6239
 16                               65
 14                                2
 ---
  27
  21                           43675 | 7
  ---                              2 |------
   65                                | 6239
   63
   ---
    2
```

Un po' d' esercizio mette in grado di risparmiare di scrivere i successivi residui, e in grado di pensare i dividendi parziali senza scriverli. Operando così viene scritto soltanto il quoziente e il resto finale. Effettuando, ad es., la divisione di 43 675 per 7, si dice

43 diviso 7, dà 6 (che si scrive),
6 per 7, 42; dal 43, 1.
16 diviso 7, dà 2 (che si scrive),
2 per 7, 14; dal 16, 2.
27 diviso 7, dà 3 (che si scrive),
3 per 7, 21; dal 27, 6.
65 diviso 7, dà 9 (che si scrive),
7 per 9, 63; dal 65, 2 (che si scrive).

È assai importante esercitarsi in divisioni così fatte, perchè, sapendole eseguire con disinvoltura, si ha un metodo spedito per accertare le cifre del quoziente nel caso generale della divisione.

88. Le divisioni, nelle quali quoziente e residuo si possono trovare nel modo più semplice, sono quelle in cui il divisore è uno dei numeri 10, 100, 1000, ecc. Infatti sia, ad es., da dividere 27 835 per 1000.

Supponiamo di voler determinare il quoziente e il residuo finale sottraendo successivamente il divisore. È allora manifesto che le tre ultime cifre del dividendo (per ciò che il divisore ha tre zeri finali) passano immutate di resto in resto fino all' ultimo residuo, e che ogni sottrazione non fa altro che diminuire di una unità il numero che precede dette tre cifre. Così con 27 sottrazioni si perviene al resto 835. Possiamo adunque enunciare la

Regola. *Quando il divisore è un numero scritto con l' unità seguita da zeri, il quoziente si ottiene col sopprimere a destra del dividendo tante cifre, quanti sono gli zeri del divisore. E il numero rappresentato dalle cifre cancellate è il resto della divisione.*

89. Nella stessa maniera si dimostra la seguente

Regola. *Quando il divisore termina con zeri, si può far astrazione da questi zeri finali e da altrettante cifre a destra nel dividendo. Il quoziente, che così si ottiene, è il quoziente della divisione proposta; e, per averne il residuo, basta scrivere a destra del residuo ottenuto quelle cifre del dividendo dalle quali si era fatto astrazione.*

Ad es., dovendo dividere 384 740 per 27 000, basterà dividere 384 per 27; e per ottenere il residuo basterà scrivere il numero 740 a destra del residuo di quella divisione che fu eseguita.

Metodo per provare le cifre del quoziente.

90. Sappiamo che le varie cifre di un quoziente si trovano mediante divisioni parziali. Rammentiamo oltracciò che, quando si deve effettuare una divisione il cui quoziente è minore di 10, si comincia [84] a calcolare un limite superiore alla cifra che si desidera; per conoscerla, bisogna poscia sperimentare varie cifre, cominciando dal limite avuto e discendendo fino ad aver trovato il maggior numero, per il quale si può moltiplicare il divisore, senza che risulti prodotto superiore al dividendo. Ora, che sappiamo effettuare con tutta facilità ogni divisione il cui divisore sia di una cifra, possiamo far conoscere un processo, sovente più comodo di quello che abbiamo appreso, per accertare le cifre date dalle divisioni parziali.

E per fissare le idee poniamo sia 42 164 un dividendo parziale, ed 8726 il divisore. Si divide, come ben sappiamo, il 42 per 8; il quoziente 5 è la cifra da sperimentare, prima di scriverla al quoziente; e perchè possa essere accettata, bisogna che il prodotto di 8726 per 5 non superi il dividendo. Volendo provare il 5 con la moltiplicazione, dobbiamo operare procedendo da destra verso sinistra, ed è soltanto ad operazione compiuta che si riconosce se la cifra in questione possa essere accettata o no.

Più opportuno d'ordinario per accertare le cifre del quoziente è il seguente processo. Seguitando nell'esempio assunto, proponiamoci di provare la cifra 5, di riconoscere cioè se, moltiplicando per essa il divisore 8726, si ottenga prodotto maggiore o no del dividendo 42 164. Ebbene, dividasi a tale intento 42 164 per 5; operazione quasi tanto semplice, quanto quella che dà il prodotto di 8726 per 5. Rammento prima di tutto che il numero, che ottengo con questa operazione, è il maggiore per cui posso moltiplicare il 5, senza che il prodotto risultante superi 42 164. Se il quoziente di questa divisione ausiliaria sarà più grande di 8726, sarò certo che il prodotto di 8726 per 5 non supera il dividendo, epperò la cifra 5 sarà da ritenere. Quando invece risultasse un numero minore del divisore 8726, allora potrò conchiudere che, moltiplicando 8726 per 5, otterrei prodotto maggiore del dividendo, epperò la cifra 5 sarà troppo forte.

La ragione, per cui questo metodo merita la preferenza, dipende unicamente da ciò, che per solito già le prime cifre del quoziente ausiliario fanno intendere se la cifra da assaggiare sia quella che si cerca, ovvero sia troppo grande.

4 2 1 6 4	8 7 2 6
	5

Applichiamo questo artificio per provare la cifra 5, avuta dividendo 42 per 8. Prendo adunque 5 per divisore, e mentalmente divido 42 164. Non iscriverò il quoziente, ma invece lo confronterò cifra per cifra, a mano a mano che lo otterrò, col numero 8726. Operando, trovo 8 per prima cifra, e 2 per residuo. La seconda cifra è 4, laddove la seconda cifra del divisore è 7. Non occorre seguitare nell'operazione, perchè tanto basta a far capire che 5 è troppo forte. Ed infatti, il maggior numero, per cui posso moltiplicare 5, senza ottenere prodotto maggiore di 42 164, comincia così: *ottomila quattrocento....* Se moltiplicherò 8726 per 5 avrò dunque prodotto maggiore del dividendo.

Proviamo la cifra 4. Dividendo 42 per 4, ottengo 10. Non occorre di più per poter dire che la cifra 4 è buona. Ed invero, neanco *diecimila*, moltiplicato per 4, mi dà prodotto maggiore del dividendo; a maggior ragione potrò moltiplicare 8726 per 4, senza che mi risulti prodotto maggiore di 42 164. Ma tale è appunto la condizione che doveva essere sodisfatta dalla cifra 4 per essere accettata.

Prova della divisione.

91. Per fare la prova della divisione, si moltiplica il divisore per il quoziente, e si aggiunge il resto al prodotto ottenuto. Qualora risulti il dividendo, si ha [80] una forte probabilità che l'operazione sia stata fatta a dovere; altrimenti una almeno delle due operazioni, la divisione cioè o la prova, sarà affetta da errore.

92. Nella regola precedente per la prova della divisione è sottinteso che il resto della divisione sia minore del divisore, altrimenti la prova potrebbe riuscire, e ciò nondimeno la divisione non sarebbe compiuta a dovere.

Teoremi relativi alla divisione.

93. Teor. *Se si moltiplicano per uno stesso numero il dividendo e il divisore di una divisione già effettuata, e si divide il primo prodotto per il secondo, si trova il medesimo quoziente della prima divisione; il resto invece è il prodotto del resto già avuto e del numero per cui si sono moltiplicati dividendo e divisore.*

Dim. Dividendo 67 per 15, si trova 4 per quoziente e 7 per resto. Dico che, ove si moltiplichino 67 e 15 per uno stesso numero qualunque, ad es. per 23, e si divida poi il prodotto $(67 \cdot 23)$ per il prodotto (15 · 23), si deve trovare di nuovo 4 per quoziente; ma per resto il prodotto (7 · 23).

Infatti, poichè 4 è il quoziente della divisione di 67 per 15 e 7 il resto, cominciando dal 67, il numero 15 si può sottrarre 4 volte, e dopo di ciò si deve ottenere il residuo 7. Possiamo quindi riguardare il 67 come la somma di 5 numeri, 4 di questi eguali a 15, e l'ultimo eguale a 7. Abbiamo adunque

$$67 = 15 + 15 + 15 + 15 + 7.$$

I due membri di questa eguaglianza rappresentano, sebbene in diverso modo, il medesimo numero; moltiplicandoli per uno stesso numero, qualunque esso sia, si avranno risultati eguali. Il secondo membro poi è una somma, e sappiamo che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece [61] moltiplicare le singole parti per il moltiplicatore, e sommare dipoi i prodotti parziali. Così, prendendo per moltiplicatore il numero 23, abbiamo

$$67 \cdot 23 = 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 23 + 7 \cdot 23.$$

Notisi ora che 7, ultima delle parti di 67, è minore delle altre, perchè essa è il resto della divisione eseguita con 15 quale divisore; epperò anche il prodotto (7 · 23) è minore di (15 · 23). Poi, osservando la precedente uguaglianza, si riconosce che, cominciando a sottrarre (15 · 23) dal numero (67 · 23), dopo 4 sottrazioni si deve ottenere (7 · 23) per residuo. Pertanto (67 · 23), diviso per (15 · 23), dà 4 per quoziente, e per resto il prodotto (7 · 23). Appunto come volevamo dimostrare.

94. Teor. *Un prodotto è divisibile per uno qualunque de' suoi fattori, e il quoziente è il prodotto degli altri fattori.*

Dim. Consideriamo, ad es., il prodotto

$$8 \cdot 14 \cdot 5 \cdot 42.$$

Si tratta di provare che, dividendo questo prodotto per uno dei fattori, ad es. per 5, si ottiene per quoziente il prodotto $8 \cdot 14 \cdot 42$, e resto nullo.

Infatti, il prodotto in questione si può [69] considerare come risultante dal moltiplicare 5 per il numero $(8 \cdot 14 \cdot 42)$, epperò [48] può anche essere riguardato come somma di tanti numeri eguali a 5, quante sono le unità del prodotto $(8 \cdot 14 \cdot 42)$. Da ciò risulta che, se dal prodotto dato si sottragga 5, e si continui a sottrarre 5 dai resti successivi, dopo $(8 \cdot 14 \cdot 42)$ sottrazioni si deve trovare zero per resto. Appunto come dovevasi dimostrare.

Oss. Dovendo adunque dividere, ad es., il prodotto $(47 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 130)$ per 14, possiamo dire che il quoziente è $(47 \cdot 7 \cdot 130)$. Si dice in tal caso che si è *soppresso* il fattore 14.

95. Teor. *Il quoziente della divisione di un numero per il prodotto di più fattori si può trovare anche dividendo successivamente per i singoli fattori.*

Dim. 1°. Consideriamo dapprima il caso in cui il numero dato è divisibile per il prodotto, e sia, ad es., da dividere il numero 420 per 42, che è il prodotto dei numeri 2, 3, e 7. Dico che si può trovare il quoziente (invece che col dividere 420 per 42) dividendo 420 per 2, poi il quoziente per 3, e in fine il nuovo quoziente per 7.

Intanto, essendo 40 il quoziente della prima divisione, e non essendoci resto, abbiamo [80]

$$420 = 42 \cdot 10, \qquad \text{ossia}$$

$$420 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10.$$

Ora è manifesto che, dividendo il numero 420 per 2, si ottiene [94] il quoziente $(3 \cdot 7 \cdot 10)$. Dividendo questo quoziente per 3, si ottiene il nuovo quoziente $(7 \cdot 10)$. E finalmente, dividendo per 7, risulta per quoziente finale lo stesso numero 10, che si era ottenuto d'un tratto con la divisione di 420 per il prodotto $(2 \cdot 3 \cdot 7)$ (*).

2ª. Passiamo a considerare il caso in cui la divisione lascia resto. Proveremo, ad es., che, poichè dividendo 47 per 6 (che è il prodotto di 2 per 3) si ottiene per quoziente 7 ed un resto, dividendo 47 per 2, e il quoziente per 3, si deve trovare in fine di nuovo lo stesso quoziente 7.

Intanto, poichè dividendo 47 per 6 si ha 7 per quoziente, il numero 47 si può riguardare come la somma di 7 numeri eguali a 6, ed un altro (il residuo 5) minore necessariamente di 6. Osservando l'eguaglianza

$$47 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5,$$

e notando che $6 = 2 \cdot 3$ è la somma di 3 numeri eguali a 2, si riconosce che, sottraendo il numero 2 replicatamente, cominciando da 47, dopo $(3 \cdot 7)$ sottrazioni si giunge allo stesso residuo, che si era ottenuto dividendo 47 per 6. E perchè il residuo in questione è minore di 6, se pure siano possibili altre sottrazioni, il loro numero è minore di 3. Da tuttociò si conchiude che il quoziente della divisione di 47 per 2 è uguale a

$$3 \cdot 7 + \text{un numero minore di } 3.$$

Ora è chiaro che, dividendo questo quoziente

(*) Giova osservare che nel caso considerato le divisioni parziali successive si compiono tutte [94] senza residuo.

per 3, dopo 7 sottrazioni, si otterrà un residuo minore di 3. Il nuovo quoziente è adunque 7; e così, per il caso che il divisore sia il prodotto di due fattori soltanto, il teorema resta dimostrato.

Ma è facilissimo estenderlo al caso in cui siano più di 2 i fattori, dai quali risulta il divisore. Posto, ad es., che il divisore sia il prodotto $(2 \cdot 3 \cdot 7)$, noi lo possiamo riguardare [68] come prodotto dei due fatfattori $(2 \cdot 3)$ e 7, epperò, ricondotti al caso precedente, possiamo dire che, in luogo di dividere per il prodotto $(2 \cdot 3 \cdot 7)$, si può dividere prima per 7, e poi il quoziente per $(2 \cdot 3)$. E di nuovo, invece di quest'ultima divisione, potremo dividere, prima per 2, ed il quoziente per 3. Così il teorema resta pienamente dimostrato.

Oss. In fine, moltiplicando il divisore per l'ultimo quoziente e sottraendo il prodotto dal dividendo, si otterrà il residuo della divisione; se questo residuo sarà minore del divisore, si avrà la prova che tutta l'operazione è esente da errore.

96. Teor. *Il quoziente di due potenze dello stesso numero è uguale a quella potenza dello stesso numero, che ha per esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e quello del divisore.*

Dim. Sia da dividere 32^7 per 32^3; dico essere 32^{7-3}, ossia 32^4, il quoziente.

Rammentiamoci perciò che in un prodotto si può [69] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato. Nel dividendo, che è il prodotto di 7 fattori eguali a 32, si sostituisca a tre di questi il loro prodotto 32^3, ed ai quattro rimanenti il loro prodotto 32^4. Così abbiamo il dividendo sotto la forma $(32^3 \cdot 32^4)$; ed ora è manifesto [94] che, quando si divide 32^7

per 32^3, si ottiene per quoziente 32^4. Per l'appunto come si doveva dimostrare.

Esercizî.

9. Che resti si otterrebbero dividendo per uno stesso numero, ad es. per 17, altrettanti numeri consecutivi?

10. Se, dopo eseguita una divisione, si divide il dividendo per il quoziente, si troverà per quoziente il divisore, e lo stesso resto che nell'altra divisione? (Si rifletta al teor. 80, e che il resto di una divisione può essere minore, uguale o maggiore del quoziente. Si esamini ciascuno di questi casi).

11. In qual caso si può aumentare il divisore di una o più unità senza alterare il quoziente? (Quando il resto supera il quoziente ecc. Il divisore indica quante volte almeno si può sottrarre il quoziente; ma se il resto supera ecc.).

12. Fuor del caso in cui il quoziente è nullo, il dividendo è necessariamente maggiore del doppio del resto.

13. Si dimostri che il numero delle cifre di un quoziente è uguale alla differenza tra il numero delle cifre del dividendo e quello delle cifre del divisore; oppure a codesta differenza diminuita di una unità.

CAPITOLO VI

DIVISIBILITÀ

Definizioni e teoremi.

97. Quando un numero diviso per un altro non lascia nessun residuo, esso si può riguardare quale somma di numeri tutti eguali al divisore; e il quoziente indica il numero di queste parti. In questo caso il dividendo è un *multiplo* [48] del divisore: infatti si può ottenerlo moltiplicando il divisore per il quoziente; perciò il minore dei due numeri si può chiamare *fattore* dell'altro. Però, affine di indicare che una divisione si compie senza residuo, si suol dire che il maggiore dei due numeri è *divisibile* per il secondo, e questo si chiama semplicemente *divisore* di quello; ma si dice anche che il secondo numero divide il primo *esattamente*, o soltanto che il secondo numero *divide* (senza altro) il primo.

Viceversa, poichè un multiplo di un numero non è altro che una somma di numeri eguali a quest'ultimo, la divisione del primo per il secondo non lascia residuo.

Conchiudiamo da ciò che le due espressioni: numero divisibile per un altro, e numero multiplo di un altro, hanno il medesimo significato.

Così, ad es., in luogo di dire: 35 è un multiplo di 7, potremo dire: 35 è divisibile per 7, ed anche che 7 è un divisore, un fattore di 35. Al contrario 24 *non è divisibile* per 9, dappoichè, effettuando la divisione, si ottiene 6 per residuo.

Quando ci occorra di rappresentare un multiplo di un numero, senza che poi ci importi di far conoscere se esso ne sia piuttosto il doppio, il decuplo od altro, scriveremo il divisore, segnandolo superiormente con un punto. Perciò, ad es., il simbolo $\dot{7}$ ci rappresenta un multiplo di 7. (Rammentiamo che tra i multipli di un numero si considera [50] il numero stesso ed anche lo *zero*).

Così, sapendo che 245, diviso per 33, dà per resto 14, possiamo [80] scrivere

$$245 = \dot{33} + 14;$$

e per converso, da questa eguaglianza (dappoichè 14 è minore di 33) si comprende che, dividendo 245 per 33, si ottiene 14 per resto della divisione.

L'oggetto di questo capitolo è di ricercare dei metodi di facile applicazione, che permettano di determinare i resti delle divisioni di un numero qualunque per certi divisori, senza effettuare le divisioni, ed in conseguenza di riconoscere agevolmente se un dato numero sia o no divisibile per questi divisori. Dobbiamo premettere la dimostrazione di alcune proposizioni.

98. Teor. *La somma di più multipli di un numero è anch'essa un multiplo di questo numero.*

Dim. Consideriamo, ad es., i numeri 35, 70 e 14, che sono tutti divisibili per 7. Dico che anche la loro somma è divisibile per 7.

Infatti, ciascuno dei numeri 35, 70 e 14, appunto perchè divisibile per 7, può essere riguardato come somma di parti tutte uguali a 7. E perchè, per ottenere la somma di più somme, basta fare l'addizione di tutte le parti delle somme parziali, anche la somma dei numeri dati si può dire composta di parti tutte uguali a 7. Essa è dunque un multiplo di 7, come dovevasi dimostrare.

99. Teor. *Un numero, che divide un altro, ne divide i multipli.*

Dim. Il numero 7, ad es., divide 35; dico che esso divide qualunque multiplo di 35, ad es. (35 · 12).

Infatti, un multiplo di 35 non è altro che una somma di parti tutte uguali a 35. E poichè tutte queste parti sono multiple di 7, anche la loro somma (cioè il multiplo di 35) è [98] un multiplo di 7, è divisibile per 7. Così il teorema resta dimostrato.

100. Teor. *Se un numero divide due altri, esso divide anche la loro differenza.*

Dim. Il numero 7, ad es., divide 70 e 28; dico che esso divide anche la differenza di questi due numeri.

Infatti, dacchè 70 e 28 sono multipli di 7, l'uno e l'altro si possono considerare come somme di parti tutte uguali a 7; possiamo intendere pertanto che la differenza in questione sia rappresentata da

$$(7 + 7 + 7 + \ldots) - (7 + 7 + \ldots).$$

Sappiamo [40] poi che il resto di una sottrazione non muta, ove si diminuiscano minuendo e sottraendo di uno stesso numero. Nel caso nostro potremo quindi trovare il resto cancellando nel minuendo tanti 7, quanti compongono il sottraendo. Ecco provato che anche la differenza di due multipli di un numero è un multiplo di questo numero.

101. Oss. Poichè il minuendo è uguale alla somma del sottraendo e della differenza, il teorema precedente si può enunciare nel modo che segue:

Un numero, che divide la somma di due numeri e uno di questi, divide anche l'altro.

102. Teor. *Un numero, che divida dividendo e divisore, divide anche il resto della divisione.*

Dim. Dividendo il numero 248 per 10, si ottiene per resto 8. Dico che ogni numero, che divide 248 e 10, divide anche il resto 8.

Poichè 248, 10 ed 8 sono ordinatamente dividendo, divisore e resto di una divisione, possiamo [80, 97] scrivere l'eguaglianza

$$248 = \dot{10} + 8.$$

Ora si osservi che ogni numero, che divide 248 e 10, divide la somma 248, e la prima parte $\dot{10}$ (perchè un numero che divide un altro ne divide [99] i multipli); esso deve quindi [101] dividere anche l'altra parte 8, che è il resto. Così il teorema resta dimostrato.

103. Teor. *Se un numero divide il divisore e il resto di una divisione, esso divide anche il dividendo.*

Dim. Dividendo 248 per 10, si ottiene per resto 8. Dico che ogni numero, che divide 10 ed 8, divide necessariamente anche il dividendo 248.

Scrivasi l'eguaglianza

$$248 = \dot{10} + 8,$$

e si osservi che ogni numero, che divide 10, divide [99] la prima parte del secondo membro, che è multiplo di 10. Ecco che qualunque numero, che divide 10 ed 8, divide le due parti della somma, epperò [98] divide anche la somma 248, come volevasi dimostrare.

104. Teor. *Se un numero divide una delle due parti di una somma, la somma e l'altra parte, divise per quel numero, danno resti eguali.*

Dim. Ad es., il numero 103 è la somma dei due numeri 60 e 43, e la prima parte 60 è divisibile per 10. Dico che la somma 103 e l'altra parte 43, divise per 10, devono dare resti eguali.

Abbiamo intanto

$$103 = \dot{10} + 43.$$

E perchè, dividendo 43 per 10 si trova per resto 3, si può scrivere

$$43 = \dot{10} + 3.$$

Ora bisogna dimostrare che anche 103, diviso per 10, deve dare 3 per residuo. Sostituendo nella penultima eguaglianza, in luogo di 43, l'espressione indicata dall'eguaglianza ultima, otteniamo intanto

$$103 = \dot{10} + \dot{10} + 3.$$

Poichè le due prime parti del secondo membro sono multiple di 10, tale è [98] anche la loro somma; è dunque

$$103 = \dot{10} + 3;$$

ed ora si riconosce che 103, diviso per 10, dà 3 per resto; appunto come dovevasi dimostrare.

105. Teor. *Se parecchi numeri si dividono per uno stesso divisore, la somma dei numeri dati e la somma dei resti, divise per lo stesso divisore, danno resti eguali.*

Dim. Consideriamo, ad es., i numeri

306, 4618 e 913.

Dividiamoli per uno stesso numero, ad es. per 10; si ottengono rispettivamente i residui 6, 8 e 3. Dico che la somma $(306 + 4618 + 913)$ e la somma $(6 + 8 + 3)$, divise per 10, devono dare resti eguali.

Intanto possiamo scrivere [80, 97]

$$\begin{array}{rl} 306 = \dot{1}\dot{0} + 6 & \\ 4618 = \dot{1}\dot{0} + 8 & \\ 913 = \dot{1}\dot{0} + 3 & \text{epperò [31, 98]} \\ \hline 306 + 4618 + 913 = \dot{1}\dot{0} + (6 + 8 + 3). & \end{array}$$

Ora vediamo che 10 divide una delle due parti di una somma, quindi [104] la somma (306 + 4618 + 913) e l' altra parte (6 + 8 + 3), divise per 10, danno resti eguali; per l'appunto come dovevasi dimostrare.

106. Teor. *Se due numeri si dividono per uno stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti, divisi per lo stesso divisore, devono dare resti eguali.*

Dim. Consideriamo, ad es., i due numeri 178 e 36. Dividiamoli per uno stesso numero, ad es. per 10; si ottengono rispettivamente i residui 8 e 6. Dico che il prodotto (178 · 36) ed il prodotto (8 · 6), divisi per 10, devono dare resti eguali.

Intanto possiamo scrivere [80, 97]

$$178 = \dot{1}\dot{0} + 8,$$

$$36 = \dot{1}\dot{0} + 6.$$

I due membri di ciascuna di queste uguaglianze rappresentano, se pure in diverso modo, il medesimo numero. Il prodotto dei primi membri è dunque uguale al prodotto dei secondi. E poichè i secondi membri hanno forma di somma, al momento di farne il prodotto, ci rammentiamo che, dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può [63] invece moltiplicare i singoli termini del moltiplicando per i singoli termini del moltiplicatore, e sommare in fine i prodotti parziali. Nel nostro caso, operando così, troviamo quattro prodotti parziali; i tre primi sono manifestamente dei multipli di 10, tale è quindi [98] anche la loro somma. Pertanto possiamo scrivere:

$$178 \cdot 36 = \dot{10} + (8 \cdot 6).$$

Ora vediamo che 10 divide una delle due parti di una somma; quindi [104] la somma $(178 \cdot 36)$ e l'altra parte $(8 \cdot 6)$, divise per 10, danno resti eguali. Appunto come dovevasi dimostrare.

Divisori 2 e 5.

107. Teor. *Il resto della divisione di un numero qualunque per 2 o per 5 è uguale al resto della divisione per 2 o per 5 della cifra delle unità del numero stesso.*

Dim. Sia, ad es., il numero 4679. Dico che, dividendolo per 2 o per 5, si deve trovare lo stesso resto, che dividendo per 2 o per 5 la sua ultima cifra.

È intanto

$$4679 = 4670 + 9;$$

e perchè, per moltiplicare per 10, basta [57] scrivere uno zero a destra del moltiplicando, è pure

$$4679 = 467 \cdot 10 + 9.$$

Evidentemente i numeri 2 e 5 dividono 10; essi dividono [99] perciò anche $(467 \cdot 10)$, multiplo di 10. Ma sappiamo [104] che, se un numero divide una delle due parti di una somma, la somma e l'altra parte, divise per questo numero, danno resti eguali. Quindi 4679 e l'ultima cifra 9, divisi per 2 o per 5, devono dare resti eguali. Questo è quanto dovevasi dimostrare.

108. Cor. *Un numero è divisibile per 2 o per 5, se la cifra delle unità è divisibile per 2 o per 5.*

Dim. Infatti, abbiamo veduto che il resto della divisione per 2 o per 5 di un numero, qualunque esso sia, è uguale al resto della divisione per 2 o per 5 della cifra delle unità del numero stesso. I resti saranno dunque ambedue eguali a zero, od ambedue diversi da zero.

Oss. I numeri di una sola cifra divisibili per 2 sono: 0, 2, 4, 6, 8. Quindi soltanto i numeri, che terminano con una di queste cifre, sono divisibili per 2.

Oss. I numeri di una sola cifra divisibili per 5 sono: 0 e 5. Dunque soltanto i numeri, che terminano per 0 o per 5, sono divisibili per 5.

Oss. I numeri divisibili per 2 si dicono *pari*; gli altri *dispari*.

109. Oss. Nello stesso modo si possono stabilire le condizioni di divisibilità per 4 e per 25, per 8 e per 125.

Divisore 9.

110. Lemma. *Ogni unità, qualunque sia il suo ordine, è uguale a un multiplo di 9, aumentato di una unità.*

Dim. Intanto è $10 = 9 + 1$.

Consideriamo il numero 100. Poichè questo numero è la somma di 10 numeri tutti eguali a 10, e tutte queste parti sono eguali a $9 + 1$, esso è uguale a un multiplo di 9, aumentato di 10 unità. Ma è $10 = 9 + 1$; quindi è anche

$$100 = \dot{9} + 1.$$

Passiamo al 1000. Poichè questo numero è la somma di 10 parti tutte uguali a 100, e ognuna di queste, come si è appena veduto, eguaglia un multiplo di 9 aumentato di 1, esso è uguale [98] a un multiplo di 9 aumentato di 10 unità. Ed essendo $10 = 9 + 1$, è infine

$$1000 = \dot{9} + 1.$$

Nello stesso modo si proverebbe essere

$$10000 = \dot{9} + 1\text{; ecc.}$$

111. Lemma. *Ogni numero scritto con una cifra significativa seguita da zeri è uguale a un multiplo di di 9, aumentato di questa cifra.*

Dim. Questo teorema è già dimostrato per il caso che la cifra significativa sia l'unità. Consideriamo ora il caso opposto, prendiamo, ad es., il numero 7000. Noi possiamo riguardare questo numero come somma di 7 parti tutte uguali a 1000. E poichè ognuna di queste è uguale a un multiplo di 9 aumentato di una unità, è [98]

$$7000 = \dot{9} + 7,$$

come dovevasi dimostrare.

112. Lemma. *Un numero qualunque è uguale a un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre.*

Dim. Sia, ad es., il numero 72108. In base al lemma precedente possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 70000 &= \dot{9} + 7 \\ 2000 &= \dot{9} + 2 \\ 100 &= \dot{9} + 1 \\ 8 &= \phantom{\dot{9} + {}} 8. \end{aligned}$$

La somma dei primi membri, cioè il numero dato, è uguale alla somma dei secondi membri. Qui la somma dei multipli di 9 è [98] essa pure un multiplo di 9; è dunque

$$72108 = \dot{9} + (7 + 2 + 1 + 8),$$

come si doveva dimostrare.

113. Teor. *Il resto della divisione per 9 di un* *numero qualunque è uguale al resto, che si ottiene dividendo per 9 la somma delle cifre di detto numero.*

Dim. Sia, ad es., il numero 70187. Dico che, dividendo per 9 questo numero, e dividendo per 9 la somma delle sue cifre, si trovano resti eguali.

Infatti, poichè un numero qualunque è [112] uguale a un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre, abbiamo

$$70187 = \dot{9} + (7 + 1 + 8 + 7).$$

Sappiamo poi [104] che, se un numero divide una delle due parti di una somma, la somma e l'altra parte, divise per lo stesso numero, danno resti eguali; quindi, dacchè 9 divide la prima parte del secondo membro, il numero 70187 e la somma delle sue cifre $(7 + 1 + 8 + 7)$, divisi per 9, danno lo stesso resto. Così il teorema è dimostrato.

114. Cor. *Un numero è divisibile per 9, se la somma delle sue cifre è divisibile per 9.*

Dim. Sappiamo infatti che un numero e la somma delle sue cifre, divisi per 9, danno resti uguali: quindi nel solo caso che la somma delle cifre di un numero, divisa per 9, dia per resto zero, anche il numero è divisibile per 9.

Oss. Quando si fa la somma delle cifre di un numero, per conoscere il resto della divisione per 9, si può mentalmente sottrarre 9 ogni volta che la somma parziale avuta superi 9.

Divisore 3.

115. Teor. *Il resto della divisione per 3 di un numero qualunque è uguale al resto che si ottiene dividendo per 3 la somma delle sue cifre.*

Dim. Sia, ad es., il numero 97064. Noi sappiamo che un numero è uguale a un multiplo di 9, aumentato della somma delle sue cifre; è dunque

$$97064 = \dot{9} + (9 + 7 + 6 + 4).$$

E perchè 3 divide 9, esso [99] divide anche ogni multiplo di 9. Possiamo scrivere pertanto

$$97064 = \dot{3} + (9 + 7 + 6 + 4).$$

Ora vediamo che 3 divide una delle due parti di una somma, quindi [104] la somma 97064 e l'altra parte $(9 + 7 + 6 + 4)$, divise per 3, danno resti eguali. Così il teorema è dimostrato.

116. Cor. *Un numero è divisibile per* 3, *quando la somma delle sue cifre è divisibile per* 3.

Prove del 9.

117. La facilità, con cui si può ottenere il resto della divisione per 9 di un numero qualunque, può esser messa a profitto per fare la prova delle quattro operazioni dell'Aritmetica.

Addizione. *Per fare la prova del* 9 *di un' addizione, si cercano i resti delle divisioni per* 9 *degli addendi: la somma di questi resti e la somma dei numeri dati, divise per* 9, *devono* [105] *dare resti eguali.*

Sottrazione. Poichè sommando il sottraendo e il resto si deve ottenere il minuendo,

Per fare la prova del 9 *di una sottrazione, si cercano i resti delle divisioni per* 9 *del sottraendo e del resto: la somma di questi resti e il minuendo, divisi per* 9, *devono dare resti eguali.*

Moltiplicazione. *Per fare la prova del* 9 *della moltiplicazione di due numeri, si cercano i resti delle divisioni per* 9 *dei due fattori: il prodotto di questi re-*

sti e il prodotto trovato, divisi per 9, devono [106] *dare resti eguali.*

Divisione. *Per fare la prova del 9 di una divisione, si cercano i resti delle divisioni per 9 del divisore, del quoziente e del resto. Aggiungendo quest'ultimo al prodotto degli altri due, e dividendo per 9 il risultato, si deve ottenere lo stesso resto, che dividendo per 9 il dividendo.*

Dim. Dividendo 1739845 per 738 si è trovato 2357 per quoziente e 379 per resto. La divisione è esatta, se tra questi numeri sussiste la relazione

$$1739845 = 738 \cdot 2357 + 379.$$

Intanto, prendendo i resti delle divisioni per 9 dei due numeri ($738 \cdot 2357$) e 379, e dividendo la somma di questi resti per 9, si deve [105] trovare lo stesso resto, che dividendo per 9 il numero 1739845. D'altra parte, per avere il resto della divisione per 9 del prodotto ($738 \cdot 2357$), basta [106] dividere per 9 i fattori, fare il prodotto dei resti, e dividere questo prodotto per 9. Resta così dimostrata la regola della prova per 9 della divisione.

Oss. Quando riesce una prova di una operazione, è soltanto probabile che l'operazione sia stata fatta a dovere, giacchè l'operazione e la prova potrebbero essere affette dal medesimo errore. Ad es., nel caso della prova per 9, se l'errore nel risultato è un multiplo di 9, la prova col 9 lo lascia [104] inavvertito. In particolare, quando l'errore consiste in trasposizione di cifre, il resto della divisione per 9 è lo stesso [113] come se le cifre fossero disposte a dovere; epperò la prova del 9 non vale a scoprire errore di questa fatta.

Esercizî.

14. Può una somma essere divisibile per un numero, se una soltanto delle parti non è divisibile per questo numero?
15. Può una somma essere divisibile per un numero, non essendo tali alcune delle parti?
16. Due numeri non possono essere entrambi divisibili per un terzo, che sia maggiore della loro differenza. [100].
17. Due numeri, divisi per la loro differenza, danno resti eguali. [104].
18. Se due numeri divisi per un terzo danno resti eguali, la loro differenza è divisibile per questo terzo numero. (Togliendo dai due numeri il resto comune, si ottengono numeri divisibili per il terzo. Poi [40, 100]....).
19. Se si aggiunga o si sottragga uno stesso numero da due altri, che divisi per un terzo danno resti eguali, anche i risultati, divisi per lo stesso divisore, danno resti eguali. (Intanto (Es. 18) la differenza dei due numeri è un multiplo del divisore. Poi [40]....).
20. Se due numeri, che divisi per un terzo danno resti eguali, vengono moltiplicati per un numero qualunque, anche i prodotti, divisi per lo stesso divisore, devono dare resti eguali. (Intanto (Es. 18) la differenza dei due numeri è un multiplo del divisore. Quindi il maggiore è uguale.... Si moltiplicherà per un numero qualunque... [62, 99, 104]).
21. Quali numeri divisi per 5 danno per resto 3?
22. Quali sono i numeri scritti unicamente con cifre uguali ad 1, o con cifre uguali a 2, o con cifre tutte uguali a 3, ecc., che sono divisibili per 9?
23. Quando due numeri sono scritti con le medesime cifre, ma disposte in ordine differente, la loro differenza è un multiplo di 9. (Ogni numero è uguale a un multiplo di 9 aumentato della somma delle sue cifre, quindi [40, 100]...).

CAPITOLO VII

NUMERI PRIMI

Definizioni.

118. Un numero, che non è divisibile che per sè stesso e per l'unità, si dice numero *semplice* o numero *primo*.

Un numero, che ammetta divisori diversi da sè stesso e dall'unità, si dice *composto*, od anche *non primo*.

Due numeri, che non abbiano altro divisore comune che l'unità, si dicono *primi tra loro*.

Oss. Due numeri possono essere primi tra loro, senza essere numeri primi (semplici). Due numeri primi sono necessariamente primi tra loro.

Teoremi relativi ai numeri primi.

119. Teor. *Ogni numero ammette almeno un divisore primo.*

Dim. Se il numero dato è primo, esso è divisibile per sè stesso. Per questo caso adunque il teorema ha luogo.

Ma sia dato un numero composto, ad es., il numero 527; dico che tra i suoi divisori se ne trova uno almeno, che è primo. Supponiamo di dividere il numero dato successivamente per i numeri 2, 3... ecc.;

dacchè 527 non è primo, dobbiamo imbatterci presto o tardi in un numero, compreso tra 1 e 527, che lo divida esattamente. Nel nostro caso infatti, si trova per la prima volta che 17 divide il numero dato; questo primo divisore è necessariamente un numero primo. Infatti, se ciò non fosse, un numero minore di 17 e diverso da *uno*, lo dividerebbe, e questo numero, perchè divisore di 17, dividerebbe [99] anche 527, multiplo di 17. Ma ciò non può essere, perchè (prescindendo dall'unità) 17 è il minore dei divisori di 527. Così resta dimostrato che ogni numero ammette almeno un divisore primo.

120. Teor. *Se due numeri non sono primi tra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune.*

Dim. Prendiamo a considerare due numeri, ad es. 170 e 290, che non sono primi tra loro. Dico che tra i loro divisori comuni ce n'è uno almeno che è primo.

Infatti, poichè 170 e 290 non sono primi tra loro, essi hanno, oltre dell'unità, qualche altro divisore comune. Nel nostro caso, ad es., li riconosciamo divisibili per 10. Questo divisore comune ammette almeno un divisore primo, giacchè [119] ogni numero ha questa proprietà. E questo numero primo, che divide 10, divide poi anche [99] i numeri dati, che ne sono multipli. Il teorema resta così dimostrato.

121. Teor. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Dim. Si dimostra facilmente che l'esistenza di quanti si vogliano numeri primi trae con sè l'esistenza di un altro numero primo da loro differente. Consideriamo, ad es., i numeri primi 2, 3 e 7; facciamone il prodotto, ed aggiungiamovi poi l'unità. Otteniamo così

$$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43.$$

Osserviamo intanto che il numero risultante non è divisibile per nessuno dei numeri primi che si sono considerati. Non è divisibile per 3, perchè è uguale, come si vede, a un multiplo di 3, aumentato di 1; epperò, diviso per 3, dà per resto 1. Così, dividendo 43 per 2, o per 7, si deve ottenere parimente il resto 1. D'altra parte sappiamo [119] che ogni numero ammette almeno un divisore primo; dunque, oltre 2, 3 e 7, deve esistere almeno un altro numero primo, il quale divida 43.

Nello stesso modo l'esistenza di quattro numeri primi prova l'esistenza di un quinto; quella di cinque di un sesto, e così via. La serie dei numeri primi è dunque illimitata, come dovevasi dimostrare.

Costruzione di una tavola di numeri primi.

122. Poichè la serie dei numeri primi è illimitata, volendo costruire una tavola di numeri primi, si è obbligati a prefiggersi un limite. Proponiamoci di costruire la tavola dei numeri primi inferiori a 1500.

Si scrivano intanto tutti i numeri consecutivi fino a 1500, col proposito di sottosegnare poi tutti quelli che non sono primi.

$\underline{1}$	2	3	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	$\underline{8}$	$\underline{9}$	$\underline{10}$
11	$\underline{12}$	13	$\underline{14}$	$\underline{15}$	$\underline{16}$	17	$\underline{18}$	19	$\underline{20}$
$\underline{21}$	$\underline{22}$	23	$\underline{24}$	$\underline{25}$	$\underline{26}$	$\underline{27}$	$\underline{28}$	29	$\underline{30}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	1499	$\underline{1500}$.

Cominciamo a segnare l'*unità*, perchè molti teoremi sui numeri primi non valgono per l'*unità*, epperò giova considerarla come numero non primo. (Un pretesto per escludere l'*unità* dai numeri primi può già segnati. Il primo multiplo di 7 da cancellare è 49, perchè i prodotti di 7 per numeri minori di 7 sono già soppressi.

Possiamo dire di più che tutti i numeri minori di 49, che a tal punto dell'operazione non sono segnati, sono primi. Infatti, un numero minore di 49, che non sia primo, è necessariamente il prodotto di due fattori, dei quali uno almeno è minore di 7. In altre parole un numero minore di 49, che non sia primo, è multiplo di un numero minore di 7, epperò, al punto in cui ci troviamo con l'operazione, esso è già cancellato. Questa osservazione è generale: quindi si può dire: *quando l'operazione porta a considerare un nuovo numero primo, a quel punto è provato essere primi tutti i numeri della tavola, che non sono segnati e che sono minori del quadrato del numero primo.*

Nel nostro caso, arrivati al 41, che ci portava a segnare il numero (41 · 41), numero maggiore di 1500, l'operazione fu compiuta.

123. Probl. *Riconoscere se un numero dato sia primo o no.*

Risoluzione. Se il numero dato non supera il maggiore segnato nella nostra tavola dei numeri primi, dalla semplice ispezione della tavola si conosce se esso è primo o composto.

Ma quando il numero dato superi il maggiore della tavola, allora bisogna dividerlo successivamente per i numeri primi ad esso inferiori. Se tutte queste divisioni danno resto, si può asserire che il dato numero è primo, giacchè nessuno dei numeri minori può [99] dividerlo esattamente.

Giova notare che è superfluo tentare altre divisioni dopo di quella che abbia dato un quoziente minore del numero primo adoperato per divisore. Ad es., dividendo il numero 2221 per i numeri primi successivi, si ottengono costantemente dei resti, e giunti al divisore 53, si trova il quoziente 41, minore del divisore. A tal punto si può asserire che 2221 è primo, poichè, se esso fosse divisibile per un numero maggiore di 53, sarebbe divisibile anche per il quoziente di questa divisione. Ma questo quoziente è minore di 41, e le prove fatte hanno ormai messo fuori di dubbio che il numero 2221 non può essere divisibile per un numero che sia minore di 53.

Oss. Nel caso che il numero, dato per riconoscere se sia primo, superi il quadrato del maggior numero primo della tavola, fa mestieri prolungare la tavola, oppure dividere il numero proposto per i numeri susseguenti all'ultimo della tavola, tralasciando di adoperare quelli che per una ragione o per l'altra si conoscano non primi. E basterà seguitare, se le divisioni continuino a dar resti, fino a quella il cui quoziente è minore del divisore con cui fu effettuata.

Teoremi relativi alla teoria dei numeri primi.

124. Teorema fondamentale. *Se due numeri sono entrambi minori di un numero primo, il loro prodotto non è divisibile per questo numero primo.*

Dim. Consideriamo un numero primo, ad es. 131. Dico che non può darsi che esso divida il prodotto di due numeri minori ambedue di 131.

Ammettiamo che ciò non sia vero, e che, ad es., il prodotto dei numeri 32 e 57, minori entrambi di 131, sia divisibile per 131. Ammettiamo oltracciò che 57 sia il più piccolo numero per cui si deve moltiplicare 32, affine di ottenere un prodotto divisibile per 131. Chè, se ci fossero numeri minori di 57, dotati di codesta proprietà, si prenderebbe in luogo di 57 il minore di questi numeri.

Ciò posto, si divida 131 per il numero minore 57. Si trova 2 per quoziente e 17 per resto: un resto dovea risultare necessariamente, perchè 131 è un numero primo (non divisibile che per sè stesso e per l'unità); il resto è poi necessariamente minore del divisore 57.

Si sa che il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente, più il resto; abbiamo quindi

$$131 = 57 \cdot 2 + 17.$$

I due membri rappresentano in diverso modo lo stesso numero; moltiplicandoli per 32 ci daranno risultati eguali. Il secondo membro ha forma di somma, e noi sappiamo che, dovendo moltiplicare una somma, si può invece [61] moltiplicare le singole parti per il moltiplicatore e sommare i prodotti. Quindi si ha

$$131 \cdot 32 = 57 \cdot 2 \cdot 32 + 17 \cdot 32,$$

ossia [68]

$$131 \cdot 32 = (32 \cdot 57)\, 2 + 32 \cdot 17.$$

Ora 131 divide il suo multiplo ($131 \cdot 32$), e, dividendo per ipotesi il prodotto ($32 \cdot 57$), ne divide [99] anche il multiplo ($32 \cdot 57$) 2. Ma quando un numero divide una somma e una delle due parti, esso divide [101] anche l'altra parte. Dunque 131 divide anche il prodotto ($32 \cdot 17$); ma ciò non può essere, perchè si è supposto che sia 57 il più piccolo moltiplicatore di 32, col quale si trova un multiplo di 131.

Essendo così caduti in contradizione, riteniamo provato che, *ecc.*

125. Teor. *Se un numero primo non divide nè l'uno nè l'altro dei due fattori di un prodotto, esso non divide neanche il prodotto.*

Dim. Sia, ad es., il numero primo 131. Dico ch'esso non può essere divisore di un prodotto di due fattori, se esso non divide nè l'uno, nè l'altro dei fattori.

Se i due fattori del prodotto sono ambedue minori di 131, si sa [124] già che 131 non può dividere il prodotto.

Passiamo a considerare il caso in cui uno dei fattori o tutti e due superano 131. Basterà considerare la seconda combinazione, e, per fissare le idee, siano 834 e 508 i numeri non divisibili per 131. Dico che questo non può essere divisore del prodotto di quelli.

Si dividano intanto 834 e 508 per 131; si otterranno dei resti minori di 131. Si trovano infatti i numeri 48 e 115. Possiamo scrivere adunque

$$834 = \dot{131} + 48$$
$$508 = \dot{131} + 115.$$

Il prodotto dei primi membri di queste uguaglianze è uguale naturalmente al prodotto dei secondi membri. Questi hanno forma di somma, e sappiamo [63] che, dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare le singole parti del moltiplicando per le singole parti del moltiplicatore, e sommare dipoi i prodotti parziali. Si osservi inoltre che i tre primi prodotti parziali sono multipli di 131; anche la loro somma è quindi [98] un multiplo di 131; pertanto possiamo scrivere

$$834 \cdot 508 = \dot{131} + 48 \cdot 115.$$

Ora, se 131 potesse dividere il prodotto (834 · 508), esso dividerebbe la somma di due numeri ed uno di questi, epperò [101] dividerebbe anche l'altra parte, che è (48 · 115). E ciò non può essere, perchè due numeri minori di un numero primo non possono [124] dare un prodotto divisibile per questo numero primo. Così resta dimostrato che, *se ecc.*

126. Teor. *Se un numero primo divide un prodotto di due fattori, esso divide almeno uno di questi.*

Dim. Il numero primo 7 divide il prodotto (42 · 15). Dico che 7 divide necessariamente almeno uno dei fattori.

Infatti, se non dividesse nè l'uno nè l'altro dei fattori, esso non dividerebbe [125] neanche il prodotto.

127. Teor. *Se un numero primo divide un prodotto di quanti si vogliano fattori, esso divide necessariamente almeno uno dei fattori* (*).

Dim. Supponiamo che il numero primo 13 divida il prodotto

$$39 \cdot 77 \cdot 302 \cdot 81\,;$$

dico che esso divide uno almeno dei fattori.

Il prodotto dato si può riguardare come risultante dalla moltiplicazione dei due fattori (39 · 77 · 302) l'uno, e 81 l'altro. Noi sappiamo [126] che, quando un numero primo divide il prodotto di due fattori, esso divide necessariamente uno almeno di questi. Quindi, se 13 non divide 81, esso dividerà (39 · 77 · 302).

Questo prodotto si può riguardare come risultante dalla moltiplicazione del fattore (39 · 77) per 302. Poniamo che 13 non divida 302; allora esso [126] dividerà l'altro fattore (39 · 77).

(*) Le tre proposizioni precedenti si possono considerare come tre premesse, fatte allo intento di dimostrare questa proposizione.

Finalmente, poichè 13, numero primo, divide (39 · 77), prodotto di due fattori, esso dividerà [126] almeno uno dei fattori.

In ogni caso adunque 13 divide uno almeno dei fattori, e così resta provato in generale che, *ecc.*

128. Cor. 1°. *Un numero primo, che divide una potenza di un numero, divide anche questo numero.*

Dim. Infatti una potenza di un numero non è altro [71] che un prodotto, i cui fattori sono tutti eguali a questo numero. Così, poichè un numero primo, che divide un prodotto, divide [127] almeno uno dei fattori, un numero primo, che divide una potenza, divide necessariamente anche la base.

129. Cor. 2°. *Se due numeri sono primi tra loro, due loro potenze sono anch'esse prime tra loro.*

Dim. Siano, ad es., i due numeri 13 e 20, primi tra loro. Dico che due loro potenze, ad es. 13^4 e 20^7, sono parimente prime tra loro.

Supponiamo che non siano tali; allora avranno un divisore primo comune, dacchè abbiamo veduto [120] che, se due numeri non sono primi tra loro, essi hanno almeno un divisore primo comune. D'altra parte il numero primo, che dividesse 13^4 e 20^7, dividerebbe anche 13 e 20, perchè [128] un numero primo, che divide una potenza, ne divide la base. Ma allora 13 e 20, primi tra loro, avrebbero un divisore comune, e ciò è assurdo. Conchiudiamo che in fatto, *ecc.*

130. Cor. 3°. *Un numero primo, che divide un prodotto di fattori primi, è uguale necessariamente ad uno dei fattori.*

Dim. Infatti si è dimostrato [127] che un numero primo, che divide un prodotto, divide uno almeno dei fattori. Nel caso nostro dobbiamo dire che il numero primo divide un fattore, che è primo. Ne segue che divisore e fattore sono uguali tra loro, perchè un numero primo non è divisibile che per sè stesso e per l'unità.

Decomposizione di un numero in fattori primi.

131. Teor. *Ogni numero non primo è uguale ad un prodotto di fattori primi.*

Dim. Sia un numero non primo qualunque, ad es. il numero 1170. Dico ch'esso è uguale ad un prodotto di fattori primi.

Intanto 1170, non essendo primo, ammette certamente [119] almeno un divisore primo. Lo riconosciamo divisibile per il numero primo 2, e il quoziente è 585. È dunque

$$1170 = 2 \cdot 585.$$

Se il quoziente 585 fosse primo, il numero dato sarebbe già un prodotto di fattori primi; invece 585 non è primo; ammetterà però [119] almeno un divisore primo. Manifestamente 585 è divisibile per il numero primo 5; e il quoziente è 117. È quindi

$$585 = 5 \cdot 117,$$

epperò è

$$1170 = 2\ (5 \cdot 117).$$

Ma, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece [67] moltiplicare successivamente per i singoli fattori; quindi è anche

$$1170 = 2 \cdot 5 \cdot 117.$$

Se 117 fosse primo, il numero dato sarebbe già un prodotto di numeri primi; invece 117 non è primo. Ammetterà quindi almeno un divisore primo; è manifesto che 117 è divisibile per il numero primo 3, ed è 39 il quoziente. Perciò, essendo

$$117 = 3 \cdot 39, \qquad \text{è eziandio}$$
$$1170 = 2 \cdot 5\,(3 \cdot 39) \qquad \text{e [67]}$$
$$1170 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 39.$$

Così seguitando, si deve arrivare necessariamente ad un quoziente primo, perchè ciascuno dei quozienti è minore di quello della precedente divisione, epperò il numero dei quozienti è limitato. Quando avremo ottenuto un quoziente primo, l' operazione sarà compiuta, ed avremo trovato un sistema di numeri primi, il cui prodotto è uguale al numero dato.

Oss. La dimostrazione non richiede che i fattori primi siano differenti tra loro. Il medesimo fattore può figurare più volte nel prodotto.

132. Teor. *Un numero non si può decomporre in fattori primi che in una sola maniera.*

Dim. Decomponendo il numero 1170 in fattori primi, si trova

$$1170 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Ora si tratta di dimostrare che lo stesso numero non si può decomporre in fattori primi in altro modo, o in altre parole che non può un altro sistema di numeri primi dare egualmente 1170 per prodotto.

Supponiamo che alcuni numeri primi, che intenderemo rappresentati dalle lettere $a, b, c, d \ldots$, moltiplicati tra loro, diano 1170. Sarà quindi

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots$$

Come ben si vede, 2 è un divisore del primo membro: divide dunque anche il prodotto rappresentato dal secondo membro. Ma sappiamo [130] che, se un numero primo divide un prodotto di fattori primi, esso è uguale ad uno dei fattori. Dunque uno dei numeri, raffigurati dalle lettere $a, b, c \ldots$, dev'essere uguale a 2. Questo sia a, ad es. Dividansi ora i membri per $a = 2$; i quozienti saranno eguali. Egli è [94] adunque

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = b \cdot c \cdot d \cdot \ldots$$

Nello stesso modo si prova che un altro dei fattori del secondo membro, b ad es., è uguale ad uno dei fattori del primo membro, ad es. a 3. Sopprimendo [94] questo fattore comune, si ottiene

$$3 \cdot 5 \cdot 13 = c \cdot d \cdot \ldots$$

Così seguitando resteremo nel primo membro con un solo fattore, ad es. con 13. Poichè questo è primo, a quel punto nel secondo membro dovrà essere rimasto unicamente il numero 13.

Non esiste dunque che un modo unico di decomposizione di un numero in fattori primi.

133. Noi abbiamo soltanto fatto vedere la possibilità di decomporre un numero in fattori primi; ora si tratta di stabilire un processo per effettuare tale decomposizione.

Per fissare le idee, proponiamoci di decomporre in fattori primi il numero 25480.

Noi sappiamo che il più piccolo dei divisori di un numero è un numero primo; è quindi naturale di provare successivamente i numeri primi 2, 3, 5 .... fino a che si sia trovato quello, che divide il numero dato esattamente. Abbiamo osservato [123] che, se tutte le divisioni lasciano residuo, giunti a quella il cui quoziente è minore del divisore, possiamo arrestarci e conchiudere che il dato numero è primo.

Ma nel nostro caso, il numero proposto è divisibile per 2; e poichè 12740 è il quoziente, si può scrivere

$$25480 = 2 \cdot 12740.$$

Intanto vediamo che 2 è uno dei fattori richiesti; 12740 è il prodotto di tutti gli altri. La difficoltà è dunque ridotta a decomporre 12740. Anche questo numero è divisibile per 2; risultando 6370 per quoziente, si ha

$$12740 = 2 \cdot 6370.$$

Sostituendo si ottiene

$$25480 = 2\ (2 \cdot 6370), \qquad \text{ossia [67]}$$
$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 6370.$$

Se 6370 fosse primo, l'operazione sarebbe compiuta; non essendo così, la difficoltà è ridotta a decomporre questo nuovo quoziente. Il minore de' suoi divisori è di nuovo 2; ed essendo

$$6370 = 2 \cdot 3185, \qquad \text{si ha}$$
$$25480 = 2 \cdot 2\ (2 \cdot 3185), \qquad \text{ossia}$$
$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3185.$$

Il nuovo quoziente 3185 non è divisibile, nè per 2, nè per 3; ma bensì per 5, ed è 637 il quoziente. Così, essendo

$$3185 = 5 \cdot 637,$$

si conchiude essere

$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 637.$$

Il minor numero primo, che divida 637, è 7, e si ottiene

$$637 = 7 \cdot 91, \qquad \text{quindi è}$$
$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 91.$$

Il numero 91 è anch'esso divisibile per 7, e non per numeri minori; e dacchè infine il quoziente 13 è primo, l'operazione è compiuta, ed è

$$25480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13.$$

Oss. 1ª. Dappoichè in un prodotto a più fattori si può [68] sostituire il loro prodotto effettuato, l'ultima eguaglianza si può scrivere nel modo seguente

$$25480 = (2 \cdot 2 \cdot 2)\ 5\ (7 \cdot 7)\ 13.$$

Ma il prodotto di più fattori eguali si rappresenta [70] scrivendo un solo fattore, e in seguito, un poco elevato, il numero dei fattori (esponente); dunque infine in modo conciso si scriverà

$$25480 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13.$$

(Veramente il numero 25480 così è decomposto piuttosto in potenze di fattori primi, che non in fattori primi; ma quali e quanti siano questi fattori si riconosce anzi con maggiore evidenza).

L'operazione si dispone di solito nel modo seguente:

25480	2
12740	2
6370	2
3185	5
637	7
91	7
13	13.

Nella colonna a sinistra sono scritti i successivi quozienti; a destra della linea stanno i successivi divisori primi.

134. Oss. 2ª. Come si vede nell'esempio precedente lo stesso numero primo può essere il minor divisore di più quozienti consecutivi; ma quando si ottenga un quoziente, che non lo ammetta per divisore, non occorre provarlo per i quozienti che seguono. Infatti, è manifesto che un quoziente qualunque è multiplo di tutti i successivi, epperò un numero, che divide un quoziente, è divisore [99] di tutti i quozienti ottenuti precedentemente.

Ricerca dei divisori di un numero.

135. Teor. *Affinchè un numero divida un altro, è necessario e sufficiente ch'esso sia composto con soli fattori primi del dividendo.*

Dim. Il numero 153472 è divisibile per 704. Dico che 704 è composto unicamente con fattori primi del dividendo.

Intanto, essendo 218 il quoziente, abbiamo la relazione

$$153472 = 704 \cdot 218.$$

Imaginiamo ora tutti e tre questi numeri decomposti in fattori primi. Poichè, per moltiplicare per un prodotto, basta [66] moltiplicare successivamente per i singoli fattori, si può dire che il prodotto di tutti i fattori primi dati dalla decomposizione dei numeri 704 e 218, è uguale al prodotto dei fattori primi in cui si è decomposto il numero 153472. Ma abbiamo veduto [132] che uno stesso numero non può essere decomposto in fattori primi che in un modo soltanto; tutti i fattori del divisore si trovano adunque tra quelli del dividendo. Da ciò si conchiude che una condizione necessaria, perchè un numero divida un altro, è questa che il divisore sia composto con soli fattori primi del dividendo.

Questa condizione è poi sufficiente. Siano infatti i due numeri $(2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11)$ e $(2^3 \cdot 7^2)$, dei quali il secondo è composto con soli fattori primi dell'altro. Si tratta di provare che $(2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11)$ è divisibile per $(2^3 \cdot 7^2)$. A tale intento separiamo da prima i fattori del dividendo in due gruppi, e in modo che uno di questi sia formato con gli stessi fattori del divisore. In questa guisa il dividendo assume l'aspetto

$$2^3 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11.$$

E perchè [68] in un prodotto ad alquanti fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato, si può scrivere il dividendo sotto la forma

$$(2^3 \cdot 7^2)\,(2^2 \cdot 3 \cdot 11).$$

Il primo fattore è uguale al divisore; è dunque palese ormai [94] che la divisione del primo dei numeri dati per il secondo si compie esattamente.

Oss. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero sia divisibile per un altro, si può anche esprimere dicendo che: *Ogni fattore primo del divisore si deve trovare nel dividendo ripetuto almeno tante volte quante nel divisore*; od anche: *Perchè un numero sia divisibile per un altro bisogna che contenga ogni fattore primo del divisore con esponente almeno eguale.*

136. Probl. *Trovare tutti i divisori di un numero dato.*

Risol. Sia dato, ad es., il numero 4200, e proponiamoci di formare tutti i divisori di questo numero. Decomponendolo intanto in fattori primi, si trova

$$4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Sappiamo che un numero è divisore di 4200 soltanto se sia composto con fattori primi di questo numero; perciò la difficoltà si riduce a formare coi fattori primi del numero dato tutti i gruppi (prodotti) differenti possibili. Per formare tutti questi gruppi, senza ripeterne nè tralasciarne alcuno, scriviamo intanto la tabella:

1	2	2^2	2^3
1	3		
1	5	5^2	
1	7		

(Non occorre spendere parole per fare intendere con quale norma sia stata composta).

Ora dobbiamo moltiplicare tutti i numeri della prima riga trasversale per ciascuno dei numeri della seconda; si ottengono con ciò i prodotti

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 3, \quad 2 \cdot 3, \quad 2^2 \cdot 3, \quad 2^3 \cdot 3.$$

Fatto ciò, moltiplicheremo tutti questi prodotti per ciascuno dei numeri della terza riga; e poi tutti i nuovi prodotti per ciascuno dei numeri della quarta riga. I prodotti ultimi sono *tutti* i divisori del numero dato.

Affine di persuaderci di questo osserviamo che:

1°. Tutti i prodotti così ricavati sono divisori del numero dato, perchè [135] composti con più o meno de' suoi fattori primi.

2°. Tutti questi prodotti sono differenti. Infatti, quando nel formarli si muta il solo moltiplicando, in quel caso si ottengono naturalmente risultati disuguali. Quando poi si ripiglia a moltiplicare gli stessi numeri per un nuovo moltiplicatore, allora si ottengono prodotti necessariamente diversi dai precedenti, perchè il moltiplicatore introduce nei prodotti un nuovo fattore primo [132].

3°. Resta a provare che nel modo indicato si ottengono veramente *tutti* i divisori del numero proposto. A tale intento formiamo un suo divisore arbitrariamente, prendendo più o meno de' suoi fattori primi, ad es. si consideri il divisore $(2 \cdot 5^2 \cdot 7)$. Ora si tratta di provare che questo divisore si trova necessariamente tra quelli ottenuti col processo adoperato. Intanto, tra i prodotti avuti adoperando i numeri delle due prime righe c'è il 2; e per l'appunto lo si è ottenuto moltiplicando il secondo numero della prima riga per il primo della seconda. Più tardi, quando si moltiplicarono i prodotti, or ora considerati, per i varî numeri della terza riga, tra gli altri risultò il prodotto $(2 \cdot 5^2)$. Finalmente quando si moltiplicarono i nuovi prodotti per i numeri dell'ultima fila, si trovò anche il divisore $(2 \cdot 5^2 \cdot 7)$.

Resta così dimostrata la seguente

137. Regola. *Per formare tutti i divisori di un numero, lo si decompone in fattori primi, e si scrive una tavola di numeri composta di tante linee trasversali, quanti sono i fattori primi differenti. A ciascun* *fattore primo corrisponde una riga, e questa comincia con l'unità, che è poi seguita dalle successive potenze del fattore primo, fino a quella che figura nel numero proposto. Quindi si moltiplicano tutti i numeri della prima riga per tutti quelli della seconda, poi i risultati si moltiplicano per i singoli numeri della terza riga, e così di seguito fino ad avere adoperata l'ultima riga della tavola. Gli ultimi prodotti sono i divisori del numero dato.*

Massimo comun divisore.

138. Numeri dati possono avere parecchi divisori comuni; il più grande di questi si dice *loro massimo comun divisore.*

È molto semplice la determinazione del massimo divisore comune di parecchi numeri, se questi siano decomposti in fattori primi.

Basta infatti riflettere che ogni divisore di un numero è composto [135] con fattori primi di questo numero, per comprendere che un divisore comune di parecchi numeri deve essere composto con fattori primi comuni a questi numeri, e che nessun fattore può avere esponente maggiore di quello da cui è affetto nel numero, dove si trova con esponente minore. Da queste considerazioni emerge la

Regola. *Si forma il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri, facendo il prodotto dei loro fattori primi comuni, prendendo ciascun fattore con esponente uguale a quello, ch'esso porta nel numero, in cui è affetto da esponente minore.*

Es. Siano i numeri (già decomposti in fattori primi)

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 11, \qquad 2^2 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 29, \qquad 2^4 \cdot 5 \cdot 29.$$

I soli fattori primi comuni sono 2 e 5. Il primo ha 2 per minore esponente, l'altro l'unità. Secondo la regola precedente il massimo comun divisore è

$$2^2 \cdot 5 = 20.$$

Che realmente siasi ottenuto in tal modo il massimo divisore comune, lo si argomenta da ciò che, qualora il fattore 2 si prendesse con esponente maggiore, il numero risultante non dividerebbe [135] il secondo dei numeri dati. Quando si aumentasse l'esponente di 5, prendendo, ad es., $(2^2 \cdot 5^2)$, il numero ottenuto non potrebbe essere un divisore del terzo dei numeri dati. Ove si prendesse il fattore 11, il numero non dividerebbe il terzo, ecc. Dunque $(2^2 \cdot 5)$ è veramente il massimo divisore comune richiesto.

Minimo comune multiplo.

139. Moltiplicando quanti si vogliano numeri tra di loro, si ha nel prodotto un loro multiplo comune; e in generale si dice *multiplo comune* di parecchi numeri dati ogni numero divisibile per ciascuno di essi.

Se un numero è divisibile per parecchi altri, questi dividono [99] anche ogni multiplo del primo. Risulta da ciò che la serie dei multipli comuni di alquanti numeri è illimitata. Fra tutti questi multipli ve n'ha naturalmente uno di più piccolo, ed è spesso importante il conoscerlo. Lo si dice *minimo comune multiplo* dei numeri dati; ora si tratta di stabilire un processo per determinarlo.

Prendiamo, per fissare le idee, i seguenti numeri, già decomposti in fattori primi,

$$2^3 \cdot 3 \cdot 11, \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 3 \cdot 7^2 \cdot 13^5.$$

Poichè questi numeri devono essere divisori del numero che si ricerca, essi devono [135] essere composti con più o meno fattori primi di questo numero. Volendo ch'esso riesca il più piccolo possibile, lo formeremo operando come indica la seguente

Regola. *Per formare il minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri decomposti in fattori primi, si fa il prodotto di tutti i fattori differenti, attribuendo a ciascun fattore l'esponente maggiore da cui è affetto nei numeri dati.*

Nel caso nostro il minimo comune multiplo deve essere

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^5,$$

ed è facile persuadersi che questo numero sodisfa la condizione voluta. Infatti, qualora si fosse ommesso, ad es., il fattore 11, esso non sarebbe riuscito multiplo del primo dei numeri dati. Se al fattore 2 avessimo dato un esponente minore di 3, non avremmo ottenuto un multiplo del primo numero; e così via.

Oss. Dal lato teorico le regole, che abbiamo trovate per la determinazione del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di quanti si vogliano numeri dati, nulla lasciano a desiderare. Non si può dire altrettanto relativamente alla semplicità dei calcoli, perchè la decomposizione di un numero in fattori primi, quando tra i fattori primi ve ne siano di grandi, può essere una operazione assai laboriosa. Nel capitolo seguente vedremo altre regole per calcolare il massimo divisore comune e il minimo comune multiplo, regole indipendenti dalla decomposizione in fattori primi.

Esercizî.

24. Un numero primo è primo con ogni altro che non sia suo multiplo. (Se di due numeri uno è primo, quali sono i divisori comuni possibili? ecc.).

25. Due numeri consecutivi sono primi tra loro. (La loro differenza è l'unità. Poi si pensi al teor. 100).

26. Due numeri dispari consecutivi sono primi tra loro.

27. Qualunque divisore di un numero è primo col numero successivo.

28. Se la somma di due numeri è un numero primo, i due numeri sono primi tra loro. [98].

29. Se due numeri sono primi tra loro, sono primi anche con la loro somma e con la loro differenza.

30. Se la differenza di due numeri è un numero primo, essi sono o multipli di questo numero, o primi tra loro.

31. Se un numero p divide il numero, che si ottiene aggiungendo l'unità al prodotto di tutti i numeri minori di p, questo numero è primo. (Ad es., 7 divide il numero $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$; perciò 7 è primo. Infatti, ove 7 non fosse primo, uno dei numeri 2, 3... 6 dovrebbe dividere 7, e quindi anche il suo multiplo $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$...... [100].).

32. Ogni numero non divisibile per 3 è uguale a un multiplo di 3 aumentato o diminuito di una unità. (Dividendo il numero per 3, che resto può risultare?..).

33. Ogni numero dispari è uguale a un multiplo di 4 aumentato o diminuito di una unità. (Quali resti possono risultare dividendo un numero per 4?..).

34. Ogni numero primo, eccettuati 2 e 3, è uguale a un multiplo di 6, aumentato o diminuito di una unità. (Dividendo un numero per 6, qual resto si può ottenere? Quando il resto fosse 2, il numero potrebbe esser primo? No, per i teoremi 80, 99, 98. Ecc.).

35. Dati due numeri decomposti in fattori primi, come si riconosce se essi sono primi tra loro? [135].

36. Quale condizione deve sodisfare un numero affinchè sia primo con 1000? e in generale con un numero scritto con l'unità e zeri? (Quali sono i divisori primi di ogni numero così fatto?).

37. Scritti i primi 1000 numeri, quali bisogna cancellare, affinchè rimangano quelli che sono primi con 1000? Quanti sono adunque i numeri da 1 a 1000 primi con 1000?

38. Quando due numeri sono primi con 10, la somma od altrimenti la differenza dei loro quadrati è divisibile per 10. (Quale può essere la cifra delle unità di un numero primo con 10? Con quale cifra può terminare allora il quadrato di questo numero?).

39. Dimostrare che un numero, primo con tutti i fattori di un prodotto, è primo altresì col prodotto. (Ammettendo che il numero dato e il prodotto non siano primi tra loro, bisogna ammettere... [120]. Ma un numero primo... [127]. Ma allora il numero dato ed uno dei fattori avrebbero un divisore ecc.).

40. Dimostrare che, se un numero è primo con un prodotto, esso è primo altresì con ciascuno dei fattori. (Ammettendo che il numero ed un fattore non siano primi, si trova che il loro divisore comune dovrebbe dividere [99] anche il prodotto. Ma allora il numero dato ed il prodotto non sarebbero....).

41. Se due numeri sono primi tra loro, la loro somma e il loro prodotto sono pure primi tra loro; e così la loro differenza ed il prodotto. (Vedi esercizi 29 e 35).

42. Dalla regola 137 si deduca quella per determinare *a priori* il numero dei divisori di un numero dato, supponendo che codesto numero sia decomposto in fattori primi.

43. Si trovino i divisori dei numeri 360, 504, 4620, 17640, 16632.

44. Determinare *a priori* il numero dei divisori dei numeri del precedente esercizio.

45. Riconoscere che i numeri 28, 496, 8128 sono *perfetti*. (Un numero è detto *perfetto*, quando è uguale alla somma di tutti i suoi divisori, escluso da questi il numero stesso).

46. Riconoscere che i due numeri 284 e 220 sono *amicabili*, che ciascuno, cioè, è uguale alla somma dei divisori dell'altro.

47. Trovare i divisori primi di 42^8. (Si badi al teor. 128).

48. Trovare il più piccolo numero che ha 11 divisori, ed il più piccolo che ammette 12 divisori. (Si sa che il numero dei divisori si ottiene... Es. 42. Si decomporrà in fattori il numero dei divisori, che deve avere il dato numero; poi, diminuendo di una unità ciascuno dei fattori, si ottengono gli esponenti. Resta a scegliere i fattori primi (le basi) in modo che il numero risultante sia il più piccolo possibile).

49. Trovare il più piccolo numero che ha 81 divisori.

50. Quale è la condizione perchè il numero dei divisori di un numero sia dispari?

51. Trovare il più piccolo numero che è divisibile per 16, e che ha 20 divisori.

52. Dimostrare che, se i divisori di un numero sono scritti gli uni in seguito agli altri in ordine di grandezza, cominciando con l'unità e terminando col numero stesso, il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è uguale al numero dato. (Basta osservare che, dividendo un numero dato per un suo divisore, si ha per quoziente un altro divisore). Ma dacchè i divisori sono così coniugati, come è che il loro numero può essere dispari?

53. Dimostrare che ogni divisore comune di alquanti numeri divide il loro massimo divisore comune, e che ogni multiplo comune di più numeri è multiplo del loro minimo comune multiplo. (Basta riflettere alle regole 138, 139, e al teorema 135).

54. Dimostrare che il massimo comun divisore di due numeri non muta, se si divide uno dei due per un suo divisore che sia primo con l'altro numero. (Si può fondarsi sui teor. 138, 135).

55. Dimostrare che il minimo comune multiplo di due numeri è uguale al loro prodotto diviso per il loro massimo comun divisore. (Si osserverà che il minimo comune multiplo è composto coi fattori primi rimasti dalla composizione del massimo divisore comune).

56. Se un numero a non è divisibile per un numero primo p, i multipli successivi di a, fino a quello ottenuto col moltiplicatore $p - 1$, divisi per p, danno resti disuguali. (Supponiamo che due dei multipli, ad es. i due $a \cdot 15$ ed $a \cdot 9$, diano resti uguali. Sottraendo dai due multipli il resto, si hanno risultati divisibili per p, e la loro differenza (che è poi nel tempo stesso [40] la differenza tra $a \cdot 15$ ed $a \cdot 9$) è [100] anch'essa divisibile per p. La differenza dei due multipli di a è poi il prodotto di a per un numero minore di p, e poichè p è primo e non divide a, nè l'altro fattore, non può [125] neanche dividere il prodotto. Ecc.).