

ELEMENTI

DI

ARITMETICA

AD USO

DEI LICEI E DEGLI ISTITUTI TECNICI

PER

AURELIANO FAIFOER

PROFESSORE NEL LICEO MARCO FOSCARINI

SETTIMA EDIZIONE

RIVEDUTA

VENEZIA

TIPOGRAFIA EMILIANA

1883

PROPRIETÀ LETTERARIA

ELEMENTI D'ARITMETICA



CAPITOLO I

NUMERAZIONE

Preliminari.

1. Accade spesso che si pensi a molte cose ad un tempo, perchè queste o sono, o si considerano come parti di un tutto, e che occorra accennarne con esattezza la *moltitudine*. La parola, che vale a tal uopo, si dice *numero*. Adunque

2. Def. *Numero è una parola che esprime con esattezza la moltitudine (*) di cose che si pensano come parti di un tutto (**).*

3. La scienza dei numeri si chiama *Aritmetica*. Ne accenneremo l'importanza con le seguenti parole di MELANTONE « *Mihi si linguae sint centum, oraque centum, non possem enumerare quam multis in rebus usus sit numerorum* ».

(*) Ci sono parole che accennano codesta moltitudine a un dipresso. Tali sono le voci *pochi, parecchi, molti, moltissimi, ecc.*; ma queste non sono numeri.

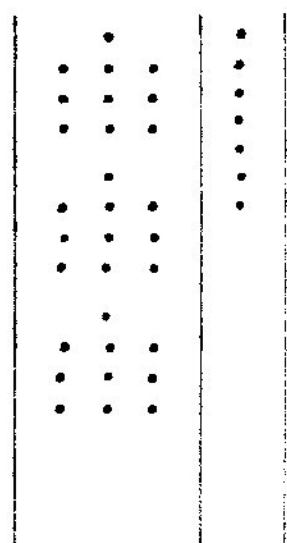
(**) È impossibile definire i concetti fondamentali. Epperò non si domanderà che cosa poi s'intenda per *moltitudine* di cose.

Composizione dei numeri.

4. La moltitudine di cose, che sono unite insieme, può variar senza fine, perchè a una data collezione di cose se ne possono aggiungere, almeno con l'immaginazione, sempre di nuove. Anche la serie dei numeri è dunque infinita; ciò nonpertanto tutti i numeri sono composti con poche parole, opportunamente combinate insieme. Codeste parole sono le seguenti: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci*, e pochissime altre introdotte senza necessità, o inutilmente dall'uso, o al solo intento di ottenere concisione nel linguaggio.

5. Le parole sopra accennate: *uno, due, tre . . . dieci* sono numeri anch'esse, e valgono ad esprimere la moltitudine di cose per i varî casi che si ottengono mettendo insieme delle cose, ad una ad una, fino ad averne unite tante, quante sono le dita delle mani.

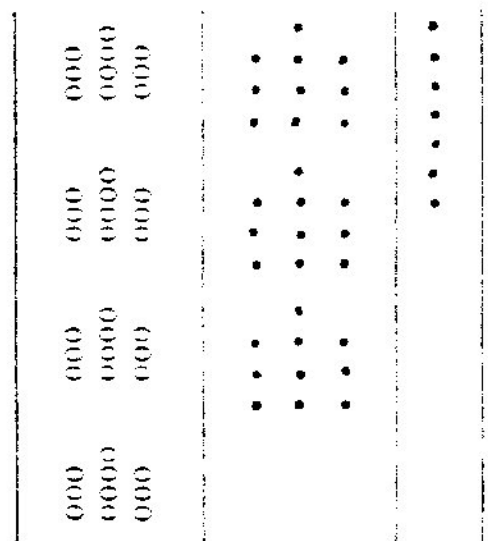
I numeri dall'*uno* al *dieci* sono parole tutte differenti tra loro; esse possono bastare, come abbiamo detto, a comporre tutti gli altri numeri. L'artificio, con cui si ottien questo intento, si presenta quasi spontaneo a chi voglia esprimere la moltitudine di più che *dieci* oggetti, pur non sapendo *contare* oltre il *dieci*. Od almeno si può dire trovato l'artificio quando sia venuta l'idea, dopo di aver contati dieci oggetti, di metterli da banda uniti insieme in un gruppo, per poi contar da capo fino a dieci, e sempre da capo fino a dieci, fintantochè ci siano oggetti abbastanza, e ciò nel pensiero di contar poi separatamente i gruppi da dieci, e gli oggetti che non fossero bastati a formare un ultimo gruppo.



Imaginando, ad es., che la figura qui accanto rappresenti la disposizione data alle cose, intendendo che ciascuna sia rappresentata da un punto, si capisce che la moltitudine viene indicata con esattezza dicendo che se ne sono ottenuti *tre* mucchi da dieci e che ne sono rimaste ancora *sette*. *Tre decine e sette* sarebbe adunque il numero delle

cose.

Nell'esempio precedente abbiamo veduto come con le sole parole dall'*uno* al *dieci* si possa esprimere la moltitudine di oggetti anche quando siano assai più di dieci. E perchè si è potuto ottenere ciò aggruppando prima gli oggetti a dieci a dieci, e contando poi separatamente i gruppi da dieci e gli oggetti rimasti, nel caso che le decine siano più di dieci, per esprimerne esattamente la moltitudine, è ben naturale di ricorrere allo stesso artificio, di formare cioè gruppi maggiori, ciascuno con dieci decine.



Imaginando che la figura qui accanto rappresenti la disposizione data alle cose, intendendo che i piccoli cerchi rappresentino le decine di decine, il numero degli oggetti è in tal caso: *quattro decine di decine, tre decine e sette*.

Con ciò l'artificio della numerazione si può dire spiegato.

Esso consiste principalmente nel riunire gli oggetti, de' quali si vuole il numero, in gruppi od *unità* di vari *ordini*, con questa legge che una unità di qualsivoglia ordine sia formata con *dieci* unità dell'ordine prossimo

inferiore e che in nessun ordine siano lasciate più di nove unità.

Gli stessi oggetti che non possono concorrere nella formazione dei gruppi si dicono *unità*, e per l'appunto unità di primo ordine. È poi manifesto potersi dare il caso che tutte le unità di un dato ordine possano concorrere alla formazione di unità dell'ordine prossimo superiore.

6. Alle unità dei varî ordini furono attribuiti i nomi registrati nella tabella seguente.

Primo ordine	<i>unità</i>
Secondo ordine	<i>decine</i>
Terzo ordine	<i>centinaia</i>
Quarto ordine	<i>migliaia</i>
Quinto ordine	<i>decine di migliaia</i>
Sesto ordine	<i>centinaia di migliaia</i>
Settimo ordine	<i>milioni</i>
Ottavo ordine	<i>decine di milioni</i>
Nono ordine	<i>centinaia di milioni</i>
Decimo ordine	<i>bilioni (*)</i>
.	<i>decine di bilioni</i>
.	<i>centinaia di bilioni</i>
.	<i>trilioni</i>
.	<i>decine di trilioni</i>
.	

7. Così, ad es., se, raggruppando delle cose secondo l'esposta legge, si sia ottenuta la disposizione rappresentata, qui a canto, contando poi separatamente le unità de' varî ordini, si conchiude che il nu-

(*) Il bilione è detto anche *miliardo*.

mero delle cose è il seguente: *due milioni, un centinaio di migliaia, quattro migliaia, due decine, sette unità.*

Posto dei milioni	Posto delle centinaia di migliaia	Posto delle decine di migliaia	Posto delle migliaia	Posto delle centinaia	Posto delle decine	Posto delle unità
000	000		000		.	.
000	0000		0000		.	.
000	000		000		.	.
000	0000		0000		.	.
000	000		000		.	.
000	0000		0000		.	.
000	000		000		.	.
000	0000		0000		.	.
000	000		000		.	.

8. Adunque, riassumendo, per trovare il numero di date cose, si formano con queste le unità dei vari ordini, in nessuno de' quali non se ne deve lasciare più di *nove*; poi si contano separatamente le unità dei vari ordini, e in questo si suol cominciare da quelle dell'ordine più elevato, passando successivamente a quelle degli ordini inferiori; ed ogni volta, dopo enunciato il numero delle unità di un ordine qualunque, si enuncia il titolo delle unità dell'ordine stesso.

Non si fa nessun cenno di quegli ordini, ne' quali non fosse rimasta alcuna unità.

L'uso però ha consacrato qualche abbreviazione ed anche taluna eccezione, che indicheremo tra poco.

Scrittura dei numeri.

9. Accadendo spessissimo di dover scrivere dei numeri, si è cercato un modo di rappresentarli più semplice dell'ordinario.

Intanto, per significare le parole: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove*, furono adottate le cifre:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dimodochè, ad es., l'ultimo numero che abbiamo considerato si può scrivere alquanto più semplicemente nel modo che segue: *2 milioni, 1 centinaio di migliaia, 4 migliaia, 2 decine, 7 unità*.

Per i titoli delle unità de' varî ordini si è trovato modo di poter tralasciare affatto di scriverli.

Anticamente chi doveva scrivere parecchi numeri si apparecchiava il foglio rigato dall'alto al basso, come si vede qui sotto; e in cima delle varie colonne

	centinaia di milioni	decine di milioni	milioni	centinaia di migliaia	decine di migliaia	migliaia	centinaia	decine	unità
			2	1		4		2	7
		3			8	1		4	
							4		2
	7		5		4			8	8

comprese tra le righe scriveva i titoli delle unità dei varî ordini. È manifesto che con un foglio così preparato, per notare un numero, bastano le *nove* cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ad es., sotto i titoli delle unità dei varî ordini si vedono scritte in una stessa linea trasversale le cifre dell'ultimo numero che abbiamo considerato, il quale si può leggere con altrettanta facilità, come quando era scritto distesamente.

Così in una seconda linea si vede rappresentato

il numero: 3 *decine di milioni*, 8 *decine di migliaia*, 1 *migliaio*, 4 *decine*.

In seguito si è trovato di poter far senza di scrivere in testa delle colonne i titoli delle unità dei vari ordini, perchè dal posto di una colonna rispetto a quello della prima alla destra, di quella cioè delle unità di primo ordine, si rileva con tutta facilità e speditezza il titolo delle unità registrate nella colonna che si considera.

Infine si è pensato di far senza anche delle righe, perchè dal posto occupato da una cifra rispetto a quella delle unità si rileva l'ordine delle unità rappresentate dalla cifra. Però, perchè si può dare il caso che manchino unità di qualche ordine inferiore al più elevato, si è trovato necessario di adottare un segno da porre nel posto dove non ci fosse nessuna cifra, affine di conservare alle altre il posto relativo. Questo segno è la cifra 0, che si denomina *zero*.

In seguito alle sopradette convenzioni, i quattro numeri, che si vedono nel foglietto rigato, si possono scrivere nella seguente maniera semplicissima:

2104027, 30081040, 402, 705040088.

10. Oss. Pertanto in un numero scritto ciascuna cifra ha un valore assoluto, che si rileva dalla sua forma, ed ha un valore relativo, che dipende dal posto che essa cifra occupa rispetto alla cifra delle unità.

Semplificazioni ed eccezioni alla regola nell'enunciazione dei numeri.

11. Abbiamo detto che nella composizione dei numeri c'è qualche abbreviazione ed anche qualche irregolarità. Ora, che sappiamo scrivere i numeri, possiamo accennarle con maggiore comodità.

Intanto, dopo letta la cifra delle unità, si suole ommettere la qualifica *unità*. Così, ad es., il numero 7 si enuncia semplicemente: *sette*.

Il numero 10, invece di enunciarlo *una decina*, lo si legge semplicemente: *dieci*.

I numeri 11, 12, 13, 14, 15, 16, invece di leggerli: *dieciuno, diecidue, diecitre, dieciquattro, diecicinque, diecisei*, come richiederebbe la regola generale, si enunciano: *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici*.

I numeri 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, invece di *duedieci, tredieci*, ecc., si leggono: *venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta*.

Il numero 100, invece di leggerlo *un centinaio*, si legge: *cento*.

Così i numeri 200, 300, ecc. si leggono: *dugento, trecento*, ecc.

Il numero 1000 dovrebbe esser letto: *un migliaio*. Invece si legge semplicemente: *mille*.

Così i numeri 2000, 3000, ecc. si leggono: *duemila, tremila*, ecc.

Consideriamo ora il numero 374 000. Lo si dovrebbe leggere: *trecentomila, settantamila, quattromila*. Invece, tacendo per le due prime parti la desinenza comune *mila*, si legge: *trecentosettantaquattromila*.

Ma quando mancassero unità di quarto ordine, converrebbe dire tutta intera la qualifica delle unità di quinto ordine. Perciò il numero 370 000 si leggerà: *trecentosettantamila*.

Quando infine mancheranno unità di quarto ordine e unità di quinto, allora si dovrà esprimere compiutamente il nome delle unità di sesto ordine.

Consideriamo il numero 749 000 000, per dire delle cifre scritte nei posti settimo, ottavo e nono. Dovrebbe dire: *settecento milioni, quaranta milioni, nove milioni*. Per brevità si dice invece: *settecento quarantanove milioni*.

I numeri 740 000 000 e 700 000 000 si devono leggere, il primo: *settecentoquaranta milioni*, e l'altro: *settecento milioni*.

Regola per leggere un numero.

Regola I. *Per leggere un numero scritto con tre cifre o meno, si leggono successivamente le cifre, cominciando da sinistra, e pronunciando dopo il nome di ciascuna cifra il nome delle unità corrispondente al posto occupato dalla cifra (*).*

Regola II. *Per leggere un numero rappresentato da più di tre cifre, si separano le cifre in classi di tre cifre ciascuna, partendo da destra (l'ultima classe può essere di due cifre, ed anche di una soltanto). Poi, cominciando da sinistra, si leggono successivamente i numeri rappresentati dalle singole classi, come se fossero isolati, ma in seguito a ciascuno di questi numeri bisogna dire il titolo delle unità dell'ultima sua cifra.*

Ad es., il numero 7 240 006 900 415 si legge: *sette trilioni, dugentoquaranta bilioni, sei milioni, novecento mila, quattrocentoquindici*.

(*) Salvo le eccezioni e modificazioni accennate nel precedente paragrafo.

Primi teoremi sui numeri (*).

Sono importanti le seguenti proprietà, immediate conseguenze della legge di numerazione.

13. Teorema. (*) *In un numero una unità di ordine qualunque supera il numero rappresentato (**) da tutte le cifre degli ordini inferiori.*

Dim. Consideriamo un numero le cui cifre siano altrettanti 9, quale è, ad es., il numero 99999. Se sapremo dimostrare il teorema per questo caso, esso sarà vero a maggior ragione per ogni altro. Per fissare le idee, considero una unità di quarto ordine, un migliaio, e mi propongo di provare che esso supera 999, che è il numero rappresentato dalle cifre degli ordini inferiori.

Infatti il migliaio in discorso è composto con 10 centinaia. Di queste ne lascio intatte 9 e decompongo la rimanente nelle 10 decine con le quali fu costituita. Di queste decine ne lascio intatte 9, la rimanente mi dà 9 unità, e ancora me ne resta *una*. Ecco che dall'unità rappresentata dal numero 1000 abbiamo ricavato tutte quelle espresse nel numero 999, e ci è rimasta ancora una unità. Il teorema si può dunque dire dimostrato.

14. In base alla proprietà dei numeri, or ora di-

(*) Si dice *teorema* una proposizione, che un ragionamento deduce da definizioni, o da principi che vengono accettati per veri.

(**) È molto importante giustificare codesto uso che si fa della parola *rappresentare*. — Dall'osservazione di un disegno *rappresentante* un oggetto si rilevano più o meno delle qualità dell'oggetto, secondo la perfezione del disegno. Un numero scritto si può considerare come un disegno fatto al solo intento di far conoscere la *moltitudine* delle parti dell'oggetto *rappresentato*.

mostrata, è facile decidere quale di due numeri dati sia il maggiore. Se i due numeri, come ad es. i due 30210 e 9789, sono scritti con diverso numero di cifre, quello che ne ha di più, è più grande; chè infatti nel nostro caso una sola delle unità di quinto ordine del primo numero supera il secondo.

Passiamo a considerare due numeri, come ad es. i due 3048219 e 3047980, rappresentati da cifre in egual numero. Per decidere quale dei due supera l'altro, si confrontino successivamente le cifre corrispondenti ad unità dello stesso ordine, cominciando da quelle dell'ordine più elevato. Nel nostro caso, arrivati al quarto ordine, troviamo cifre disuguali; il primo numero, avendo la cifra maggiore, è maggiore. Ed invero ciò si può dire anche per i due numeri 3048000 e 3047999 (che si trovano nella condizione più sfavorevole), perchè [13] un solo migliaio supera qualunque numero di tre cifre.

15. Teor. *Se in un dato numero si sopprime l'ultima cifra (quella delle unità) il numero rimanente esprime quante decine si possono formare con tutte le unità semplici espresse nel numero dato.*

Dim. Sia, ad es., il numero 78483. Sopprimendo la cifra delle unità, resta il numero 7848. Ora si vuol dimostrare che codesto numero 7848 esprime quanti gruppi da dieci si sono ottenuti col primo aggruppamento di quegli oggetti il cui numero è espresso da 78483.

Immaginando a tal fine di rifare l'operazione mediante la quale si è trovato il numero 78483, notiamo che per determinarne le varie cifre non è necessario attendere che siano composti tutti i gruppi de' vari ordini; ma che, formate le decine, si possono contar

subito le unità di primo ordine rimaste, e notare intanto la cifra delle unità. Così, formate le centinaia, si possono contar subito le decine rimaste, e scrivere senz'altro la cifra delle decine, e così via. In tal maniera è reso manifesto che l'operazione, che si fa dopo il primo aggruppamento, è per l'appunto la stessa che si farebbe se fosse chiesto il numero de' gruppi da dieci, considerati come oggetti primitivi da contare; soltanto ciascuna delle cifre del numero che risulterebbe, si dovrebbe in questo caso scrivere di un posto più a destra di quello della corrispondente cifra del numero dato. Risulterebbe adunque in fine appunto il numero 7848, come si voleva dimostrare.

16. Abbiamo dimostrato il teorema che precede principalmente all'intento di procurarci un modo per indicare, quando se n'abbia bisogno, il numero che rimane cancellando da un numero dato la cifra delle unità. Basterà dunque dire: il numero delle decine del numero dato.

17. Per *decine di un dato numero* intenderemo quel numero, che rimane quando si sostituisca uno zero alla cifra delle unità.

Per *cifra delle decine* si deve intendere invece la cifra, che occupa il secondo posto (ben inteso contando da destra).

Per un numero di due cifre l'espressione *numero delle decine* e l'altra *cifra delle decine* hanno lo stesso significato.

18. Dalla dimostrazione del teorema precedente risulta anche questo che,

Sopprimendo in un dato numero le due ultime cifre, nel numero che rimane si trova indicato quante centinaia si possono comporre con tutte le unità sem-

plici del numero dato. E, sopprimendo tre cifre, resta il numero delle migliaia; e così via.

19. Ora siamo in grado di giustificare in altra guisa il modo abbreviato in cui si legge un numero, dopo di averne separate le cifre in gruppi, ciascuno di tre. Ad es., si consideri il numero 14 280 327. Supponendo cancellati i due ultimi gruppi a destra, rimane il numero 14 ad esprimere quanti milioni si erano ottenuti col penultimo aggruppamento. In questa idea il numero può esser letto: *quattordici milioni, duecentomila, ottantamila, trecentoventisette*. Se poi nel numero 280 327, che è la seconda parte del numero dato, si suppongono sopprese le tre ultime cifre, il numero 280 resta ad indicare quante migliaia sono contenute nel numero, epperò lo si può enunciare: *duecentoottantamila, trecentoventisette*.

Del resto un numero può esser letto in altri modi; ad es., separando nel numero in discorso le cifre nel modo seguente 142.8.032.7. e leggendo corrispondentemente, si ottiene: *centoquarantadue centinaia di migliaia, otto decine di migliaia, trentadue decine, sette unità*.

Numerazione pratica.

20. Il raccogliere in gruppi di vari ordini le unità da numerare non può essere effettuato materialmente che in rari casi. Chè non è certo possibile comporre gruppi da dieci, da cento, ecc., quando le unità da contare sono, ad es., stelle, alberi, città. Tanto meno quando le unità fossero astratte, come, ad es., rintocchi di campana, passi, parole. In questi casi l'aggruppamento della teoria è puramente imaginario, quando

però non si prendessero oggetti mobili per rappresentare materialmente le unità che si vogliono contare.

In pratica, per contare, ad es., i rintocchi di campana, si recitano i numeri successivi, l'uno dopo l'altro, pronunciando, ad ogni presentarsi di una nuova unità, il numero susseguente all'ultimo usato. Se un poco si rifletta, si vedrà che in questo modo si van componendo le decine a misura che vengono unità da contare, e si contano le decine a misura che si compiono, e, quasi si temesse di dimenticare quelle già ottenute, si continua a rammentarle, dicendo, ad es., *settantuno, settantadue, settantatre, ecc.* Appena ricavate dieci decine, si forma il centinaio, che, pur continuamente viene rammentato col dire: *centouno, centodue...*, ecc.



CAPITOLO II

A D D I Z I O N E

Preliminari.

21. Tre collezioni di medaglie, composte rispettivamente di 9807, di 12419 e di 850 esemplari, si vogliono unire in una sola. Si domanda quante medaglie conterrà quest'ultima.

Se avessimo le medaglie, fattone tutto un cumulo, potremmo poi distribuirle ne' soliti gruppi da dieci, da cento, da mille, ecc., e trovar così il numero domandato. Potremmo anche prender de' sassolini (*calcoli*), contarne 9807, poi altri 12419, e in fine altri 850; quindi, fattone un mucchio solo, procedere alla numerazione.

Ma il numero richiesto si può anche ricavare dai tre numeri dati 9807, 12419 e 850, senz'altro. L'artificio è naturalmente una operazione numerica, una operazione aritmetica, perchè si fa con numeri; codesta operazione si chiama *Addizione*. Il risultato dell'addizione si chiama *somma* o *totale*; e i numeri, che si sommano, si dicono *addendi*, *poste*, od anche *parti*

della somma. *Fare una somma* significa calcolare, mediante l'addizione, la somma dei numeri dati (*).

Consideriamo anche la questione seguente :

Un tale possiede tre boschi, composti rispettivamente di 9807, di 12419 e di 850 alberi; quanti alberi possiede egli in tutto?

Se immaginiamo di rappresentare gli alberi con altrettanti sassolini, riconosciamo subito che l'operazione aritmetica, con la quale si può trovare il numero richiesto, è la stessa che per il problema precedente.

La riunione di tutte le unità (gli alberi) in un solo tutto nel nuovo problema si fa unicamente con l'immaginazione. Ma per ambedue i problemi si può dire che le tre collezioni (di medaglie una volta, di alberi l'altra) sono le parti di quella collezione, che è rappresentata dal numero domandato. Perciò diremo che

22. Def. *L'Addizione è l'operazione aritmetica per mezzo della quale dai numeri, che rappresentano le parti, si ricava il numero che rappresenta il totale.*

23. Oss. Giova osservare che le unità rappresentate dai numeri, che si sommano, si devono poter raccogliere sotto una denominazione comune. Sarà il caso di far l'addizione quando, trattandosi, ad es., di 50 pecore e 12 buoi, si chieda soltanto quanti *animali* in tutto.

24. In Aritmetica, come i numeri si rappresentano co' segni abbreviativi che conosciamo, così anche le operazioni vengono indicate con segni particolari.

(*) Manifestamente all'operazione aritmetica, al risultamento e ai numeri dati vengono attribuiti i nomi rispettivi delle cose alle quali si riferisce la questione, e il nome dell'operazione che s'intende di fare con le cose stesse. Nel nostro caso sono veramente le medaglie che si addizionano le une alle altre; ecc.

Per l'addizione il segno è il seguente $+$, che si legge *più*; epperò vedendo scritto, ad es., $8 + 37$, s'intende che al numero 8 si deve aggiungere 37. Volendo indicare che al risultato si deve aggiungere 103, si scrive $8 + 37 + 103$. E così via (*).

Regola per l'addizione.

25. Per trovare la regola per l'addizione distingueremo tre casi. Il primo, il più semplice, ma che è d'altra parte il caso fondamentale, è quello in cui si tratta di far la somma di due numeri, minori ambidue di 10. Per questo caso l'Aritmetica non possiede nessun artificio, e bisogna imparare a memoria la tavola per l'addizione, nella quale sono registrati tutti i casi, che si possono presentare, col risultato per ciascuno. Così si sa poi dire, senza fatica nè indugio, trattandosi, ad es., dell'addizione $8 + 5$, che il totale è 13.

26. Il secondo caso dell'addizione è quello in cui bisogna aggiungere un numero minore di 10 a un numero qualunque. Supponiamo, ad es., di dover far l'addizione indicata in $37 + 6$.

Qui giova imaginare una questione, per rispondere alla quale si debba appunto far l'operazione $37 + 6$; possiamo supporre che si voglia sapere quante monete si ottengono, mettendone insieme 37 e 6. Osserviamo che la prima collezione è composta di 3 gruppi da 10 e di 7 monete. Dovendo aggiungerne 6, è naturale di metter queste insieme con le 7, perchè, quando oggetti

(*) Un insieme di simboli aritmetici (cifre e segni di operazioni) quale è, ad es., $8 + 37 + 103 + 2$, si dice *espressione aritmetica*. Il risultato dei calcoli, indicati nell'espressione, si dice *valore dell'espressione*.

dati sono distribuiti in gruppi di varî ordini, se ne può conoscere il numero totale agevolmente. Senonchè nel caso nostro ci avvediamo facilmente che nel primo ordine le unità sono in numero maggiore di quello che comporta la legge di numerazione. Ma noi sappiamo a memoria [25] che $7 + 6$ fanno 13, che fanno, cioè, 1 decina e 3 unità. La decina, messa insieme con le decine, le fa diventare 4; e così possiamo conchiudere che $37 + 6$ fanno 43.

Con altrettanta facilità si giustificano le seguenti eguaglianze (*)

$$\begin{aligned} 52 + 7 &= 59, \\ 196 + 9 &= 205. \end{aligned}$$

Facciasi anche l'addizione indicata in $27 + 2 + 8 + 5 + 6$. Si dirà: 27 e 2 29; 29 e 8, 37; 37 e 5, 42; 42 e 6, 48. Con l'esercizio si arriva a saper dire francamente le somme successive che si vanno formando, senza pronunciare, sia pur sottovoce, i numeri da aggiungere. Operando così, si corre minor pericolo d'imbrogliarsi nel conteggio. Nel caso considerato si direbbe semplicemente: 27, 29, 37, 42, 48.

27. Ora, che sappiamo trovare la somma di due numeri minori di 10, ed anche aggiungere mentalmente un numero di una cifra ad altro numero qualunque, possiamo trattare il caso generale dell'addizione.

(*) Il segno $=$ è il segno d'*eguaglianza*; lo si legge: *eguale*. Lo si adopera quando si vuole indicare per iscritto che due espressioni aritmetiche hanno il medesimo valore.

L'affermazione scritta, che due espressioni aritmetiche rappresentano, sebbene in varia guisa, il medesimo numero, si dice *eguaglianza*. Le due espressioni, separate dal segno $=$, sono chiamate *membri* dell'eguaglianza; quello a sinistra è detto il *primo* membro, l'altro il *secondo*.

Sia da trovare la somma dei numeri 9807, 12419 ed 850.

Scrivansi intanto i tre numeri, uno sotto l'altro, come si troverebbero di già, se ancora fosse in uso, per scrivere i numeri, quell'abaco a colonne di cui abbiamo parlato nel precedente capitolo. Così le cifre, rappresentanti unità dello stesso ordine, cadranno in una stessa colonna.

9 8 0 7	conterrà tante cifre, quanti sono i numeri
1 2 4 1 9	da addizionare; nelle altre colonne non
8 5 0	avverrà altrettanto necessariamente, perchè i numeri dati potranno differire l'uno dall'altro nel numero delle cifre con cui sono rappresentati. Sotto agli addendi si tiri una linea; sotto di questa scriveremo il risultato dell'addizione.

I tre numeri, con cui vogliamo eseguire l'operazione, sono quelli del problema, che ci siamo proposti nel principio del capitolo. Per fissare le idee, gioverà al principiante immaginare che, dove sono scritti i numeri, si trovino le tre collezioni (le medaglie) corrispondenti, e di vedere gli oggetti raccolti in gruppi e disposti come accennano le varie cifre.

Sappiamo già che la somma richiesta si potrebbe ottenere unendo insieme tutti gli oggetti delle varie collezioni, e facendone in seguito la numerazione. Anche in questo caso sarebbe naturale di unire insieme le unità semplici, insieme i gruppi da dieci, senza confonderli, insieme le centinaia, ecc., perchè in questo modo gli oggetti si troverebbero poi raccolti così da poterne avere il numero speditamente. È vero però che in un posto, ad es. in quello riservato alle unità di terzo ordine, potrebbero poi esservi più di 9 gruppi, laddove il sistema di numerazione richiede che nessun ordine

contenga più di 9 unità. Generalmente sarà quindi necessaria una successiva rettificazione; ma nel farla si compirebbe la numerazione, contando cioè i gruppi dei varî ordini. Dopo queste osservazioni veniamo al calcolo.

9 8 0 7	Cominceremo dalle unità semplici. Il
1 2 4 1 9	primo numero (si conta dal basso) non ne
8 5 0	contiene alcuna, il secondo ne ha 9, e 7 il
2 3 0 7 6	terzo. Dai due numeri 9 e 7 sappiamo ri-

cavare mentalmente la loro somma 16, cioè 1 decina e 6 unità. Noteremo a drittura le 6 unità; ma la decina, che è fuori di posto, si deve trasportare nella prossima colonna a sinistra.

In questa ora vi sono: 1 decina, che vi abbiamo portato; 5, che vi erano, che fanno 6; e un'altra che fa 7. Tante non bastano a comporre centinaia, si noti adunque questo 7.

L'artificio è così semplice da esser superfluo seguirlo nella spiegazione.

Ripetendo l'operazione, si osserva che nell'eseguirlo non è necessario pronunciare i nomi delle unità dei varî ordini, e che il processo è affatto conforme per tutte le colonne. Quindi la

28. Regola. *Per trovare la somma di quanti si vogliono numeri, si scrivono questi numeri gli uni sotto gli altri in modo che le cifre di uno stesso ordine si trovino in colonna. Poi si fa la somma delle cifre della prima colonna a destra, e se questa somma non supera 9, la si scrive sotto, in colonna con le cifre che l'hanno data; se poi risulta un numero maggiore di 9, allora se ne scrive la sola cifra delle unità, e si ritiene a memoria il numero delle decine [16], per sommarlo con le cifre della seconda colonna. Su questa colonna si opera*

come sulla prima, e così si continua fino ad avere operato sull'ultima colonna, la cui somma (riunita col numero che può aver dato da portare la colonna precedente) si scrive tutta intera a sinistra delle cifre già trovate.

Considerazioni sull'addizione.

29. Gettando ancora uno sguardo sull'operazione che abbiamo imparata, troviamo che essa si può riguardare infine come una numerazione di oggetti, originariamente spartiti in più collezioni, fatta (questa numerazione) senza adoperare gli oggetti, ma adoperando in lor vece i numeri, che rappresentano le collezioni parziali. E perchè, com'è manifesto, nell'atto di numerare più oggetti, è indifferente affatto l'ordine in cui questi vengono considerati, anche nell'addizione aritmetica deve esserci alcun che d'arbitrario. Questo arbitrario è espresso dalle proposizioni seguenti:

30. *La somma di più numeri è indipendente dall'ordine in cui vengono presi, quando se ne fa l'addizione.*

31. *E per ottenere la somma di più numeri, si può anche formare da prima delle somme parziali, e poi fare con queste la somma definitiva.*

32. In particolare: per ottenere la somma di più numeri, si può sommarne intanto due, alla somma ottenuta aggiungerne un terzo, al nuovo risultato aggiungere un quarto numero, e così successivamente fino ad averli tutti esauriti. E questo è veramente il processo indicato, ad es., nell'espressione

$$190 + 41 + 7 + 602,$$

per quanto sia lecito di variarlo al momento d'intraprendere il calcolo.

Prova dell'addizione.

33. In generale si chiama *prova* di una operazione una seconda operazione, possibilmente alquanto diversa dalla prima, e che vale a riconoscere l'esattezza di codesta.

Per conto dell'addizione, atteso che la somma di più numeri è indipendente [30] dall'ordine in cui si prendono per sommarli, la prova si fa addizionando i numeri stessi, dopo di averli scritti in altro ordine. Di solito, per risparmiare di scrivere i numeri da capo, si effettua la prova procedendo dall'alto al basso del foglio, se la prima volta si è sommato, come di consueto, dal basso all'alto.

Allorchè i risultati delle due operazioni sono disuguali, è certo che una almeno delle due operazioni è sbagliata, e bisogna rifare il calcolo con più attenzione.

Quando il risultato della prima operazione e quello della prova coincidono, allora è *probabile* che tutte e due le operazioni siano state fatte a dovere; ma non è *certo*, giacchè le due operazioni potrebbero essere affette da errori della stessa conseguenza finale, i quali cospirerebbero in questo modo per tenersi celati. Ma questo caso non può presentarsi che in via d'eccezione; epperò, ogni volta che il risultato di una operazione e quello della prova sono eguali tra loro, ambedue le operazioni si ritengono esenti da errore.

CAPITOLO III

SOTTRAZIONE

Preliminari.

34. Da un sacco, che contiene 32678 pezzi da una lira, si devono estrarre 20472 lire, per fare un pagamento. Si domanda quante lire resteranno nel sacco.

Il numero richiesto si può ricavare dai due numeri dati; l'operazione aritmetica, che valè a tal uopo, si dice *Sottrazione*. Affine di definirla, si osservi che le monete del sacco si devono separare in due parti; 20472 rappresenta la parte che si estrae, e il numero domandato rappresenta la parte che rimane. Codesto numero e il numero 20472, sommati insieme, devono adunque produrre il numero 32678. Pertanto si può dire che

35. Def. *La sottrazione è l'operazione aritmetica con la quale, data la somma di due numeri ed uno di questi, si calcola l'altro.*

36. Poichè il maggiore dei due numeri dati rappresenta la collezione, che dev'essere diminuita, esso si dice *minuendo*; il minore invece, perchè rappre-

sentata la parte da sottrarre, si chiama *sottraendo*; il risultato dell'operazione, perchè esprime quante unità rimangono della collezione data, dopo che essa ha sofferto la sottrazione, si dice *resto* (*).

Il resto esprime manifestamente quante unità la collezione rappresentata dal minuendo contiene più di quella rappresentata dal sottraendo; perciò esso si dice eziandio *differenza* tra il minuendo e il sottraendo, od anche *eccesso* del minuendo sul sottraendo.

Il segno della sottrazione è il seguente —, che si pronuncia *meno*. Perciò l'espressione $406 - 124$ indica che dal numero 406 si deve sottrarre il numero 124.

Regola per la sottrazione.

37. Il caso più semplice della sottrazione è quello in cui il sottraendo è un numero di una sola cifra, e il minuendo è minore del numero che si ottiene aggiungendo 10 al sottraendo.

Tale è il caso, ad es., della sottrazione $14 - 8$, perchè, aggiungendo 10 al sottraendo 8, si ottiene un numero maggiore del minuendo 14.

Per questo caso non esiste nessun artificio aritmetico; ma il resto si trova senza difficoltà, perchè, avendo bene in mente la tavola per l'addizione, si scopre subito il numero che, sommato col sottraendo, dà il minuendo.

Nel nostro esempio il resto è 6, perchè è appunto $8 + 6 = 14$.

(*) Il minuendo e il sottraendo possono anche essere uguali tra loro. In questo caso il resto è lo *zero*, che vien così adoperato a rappresentare il nulla.

38. Il secondo caso è quello in cui nessuna cifra del sottraendo supera la cifra dello stesso ordine che è nel minuendo.

Ad es., proponiamoci la sottrazione indicata in $32678 - 20472$, che è quella del problema con cui ci siamo introdotti nella sottrazione.

Scriviamo intanto i due numeri uno sotto l'altro, il sottraendo sotto il minuendo, in modo che le cifre rappresentanti unità dello stesso ordine si corrispondano.

$$\begin{array}{r} 32678 \\ 20472 \\ \hline 12206 \end{array}$$

Tiriamo sotto una linea; sotto di questa scriveremo il residuo.

Per fissare le idee immaginiamo che dove sono scritte le cifre del minuendo siano state messe le monete, e queste così raccolte in gruppi di varî ordini, come indicano le cifre del minuendo. Dove è scritto il sottraendo, a ridosso delle cifre, in modo da coprirle, supporremo di mettere le monete con le quali si deve fare il pagamento. Sotto la linea scriveremo le cifre, che esprimono le unità dei varî ordini, che restano nel minuendo dopo l'operazione.

Ed ora, cominciando la sottrazione dalle unità di primo ordine, nel minuendo ne vediamo 8; togliamone 2, come vuole il sottraendo. Ne restano 6, e si scriva questa cifra.

Nel minuendo vi sono 7 decine; altrettante bisogna sottrarne; non ne rimane dunque nessuna, epperò bisogna scrivere *zero* nel residuo, nel posto delle decine.

Da tal punto è superfluo continuare la spiegazione. Così si compie la sottrazione, sempre operando sui numeri, e puramente con l'immaginazione sulle cose numerate.

39. Passiamo all'ultimo caso, nel quale taluna cifra del sottraendo supera quella dello stesso ordine che è nel minuendo. Si deva, ad es., sottrarre 18478 dal numero 42016.

Disposti i numeri come per il caso precedente, cominceremo a dire: nel minuendo vi sono soltanto 6 unità di primo ordine, e bisogna invece prenderne 8. Ebbene, si vada a prendere una decina, e, scompostala nelle 10 unità con le quali fu costituita, si pongano queste insieme con le altre unità di primo ordine. Dalle 16, che si trovano nel posto delle unità dopo questa operazione, posso prenderne 8, e rimangono tuttavia 8 unità. Scrivasi questa cifra, sotto quelle da cui proviene, nel posto del residuo.

Ora bisogna sottrarre 7 decine, e nel minuendo non ce ne sono punte, perchè l'unica, che vi si trovava, fu già portata via. Non essendovi neanche centinaia, passo a prendere un migliaio; decompostolo in 10 centinaia, depongo 9 di queste nel posto delle centinaia; l'altro centinaio mi dà 10 decine, che pongo nella colonna delle decine. Ora posso sottrarne 7, e ne restano 3. Lo scrivo nel posto delle decine.

Unità di terzo ordine, mi rammento d'averne 9; devo sottrarne 4; ne rimangono 5. Scrivo 5.

Ora devo togliere 8 migliaia, e nel minuendo non ce n'è che una sola, perchè una fu già asportata. Ebbene, si prenda una decina di migliaia dalla prossima colonna a sinistra; questa unità di quinto ordine mi dà 10 migliaia, ed 1 che c'è ancora al minuendo fa 11; togliendone 8, restano 3 migliaia.

Dalle 3 decine di migliaia, ne tolgo 1; restano 2. Scritto questo 2 al suo posto, la sottrazione è compiuta.

In pratica si suol fare la sottrazione in guisa alquanto differente da quella che abbiamo seguita; per darne la giustificazione dimostreremo prima il seguente

40. Teor. *Sottraendo od aggiungendo a due numeri un terzo numero qualunque, la loro differenza non muta.*

Dim. Sottraendo dal numero 42016 il numero 18478, abbiamo trovato 23538 per differenza. Ora si tratta di dimostrare che, se dai due primi numeri si sottrae o si aggiunge ad essi un terzo numero qualunque, ad es. 275, e si ripete poi la sottrazione coi risultati, si deve trovare per resto di nuovo il numero 23538.

È sufficiente a tal uopo rammentarsi che il resto è esatto ogni qual volta, sommandolo col sottraendo,

$$\begin{array}{r} 42016 \pm 275 \\ 18478 \pm 275 \\ \hline 23538 \end{array}$$

risulti il minuendo. Se dopo d'aver riconosciuto ch'esso soddisfa effettivamente a questa condizione, noi ci riponiamo alla prova con un sottraendo

aumentato o diminuito di un terzo numero, ad es. di 275, sappiamo già, prima di fare l'addizione, che il risultato dovrà essere di altrettanto maggiore o minore di quello ottenuto con l'addizione precedente. Ecco che la prova diventa superflua, quando si sappia che anche il minuendo fu già aumentato o diminuito del numero stesso.

41. Riprendiamo ora la sottrazione, che si era già eseguita (ed ancora fingeremo di vederci dinanzi piuttosto le vere unità reali, anzichè i numeri corrispondenti).

Dal minuendo dobbiamo togliere intanto 8 unità di primo ordine, e non ne abbiamo che 6. Si aggiungano

$$\begin{array}{r} 42016 \\ 18478 \\ \hline 23538 \end{array}$$
 al minuendo, affinchè la sottrazione sia possibile, 10 unità; allora da 16 unità semplici possiamo sottrarne 8, e ne rimangono ancora 8: cifra da notare nel residuo nel posto delle unità.

Passiamo alle decine. Veramente dovremmo sottrarne 7; ma poichè, per rendere possibile la sottrazione, noi abbiamo or ora aumentato il minuendo di 10, cioè di 1 decina, aumenteremo [40] di 1 decina anche il sottraendo, senza di che s' otterrebbe infine un resto differente da quello che si desidera. Fingeremo adunque che nel minuendo si trovi la cifra 8 nel posto delle decine, invece della cifra 7, che vi sta scritta realmente.

Ma ora ci troviamo nella stessa difficoltà. Dobbiamo sottrarre 8 decine, e nel minuendo se ne trova 1 soltanto. Aggiungeremo al minuendo 10 decine, che con l'una, che vi è, fanno 11. Ora possiamo toglierne 8; ne resteranno 3, e noteremo questa cifra.

Passiamo alle centinaia. Vediamo di doverne sottrarre 2; ma poichè, affine di rendere possibile la sottrazione, poco fa abbiamo alterato il minuendo, aumentandolo di 10 decine, ossia di 1 centinaio, dobbiamo aumentare di 1 centinaio anche il sottraendo; senza di ciò avremmo da ultimo un residuo differente da quello che si ricerca. Invece di 4 centinaia, ne sottrarremo adunque 5; e così via.

Continuando l'operazione, e ripetendola, se ne scorge l'uniformità, e si trova giustificata la seguente

42. Regola. *Per trovare la differenza di due numeri, si scrive il minore sotto del maggiore (*), in modo che le cifre dello stesso ordine cadano in colonna.*

(*) Se i numeri dati sono eguali, non occorre far nulla; il resto in tal caso è lo zero.

Quindi, cominciando da destra, si sottrae ciascuna cifra del sottraendo dalla corrispondente del minuendo, e si scrive ciascun resto parziale sotto, in colonna con le cifre adoperate. Quando una di queste sottrazioni parziali non si può fare, allora si aggiunge mentalmente 10 alla cifra del minuendo; ma in tal caso si deve aumentare di 1 la cifra successiva del sottraendo.

Prova della sottrazione.

43. Poichè scopo di una sottrazione è di trovare quel numero che, sommato col sottraendo, dà il minuendo, per provare se il resto di una sottrazione è esatto, lo si sommerà col sottraendo; dovrà risultare il minuendo.

La prova di una sottrazione si può fare anche sottraendo il resto dal minuendo. Deve risultare il sottraendo dato.

Sottrazione di una somma.

44. Teor. *Dovendo sottrarre una somma, si può invece sottrarre successivamente le singole parti.*

Dim. Supponiamo, ad es., che si deva eseguire il calcolo indicato dall'espressione

$$124 - (21 + 4 + 38 + 6).$$

Bisogna, come si vede, prima calcolare la somma indicata tra parentesi, e poi sottrarre la somma da 124. Ora si tratta di provare che il medesimo risultato finale si può ottenere operando nel modo che segue: sottraendo 21 da 124, poi 4 dal resto ottenuto, quindi 38 dal nuovo resto, e finalmente 6 dall'ultimo residuo.

Imaginiamo di aver appunto effettuato i calcoli accennati nell'espressione

$$124 - 21 - 4 - 38 - 6.$$

Egli è manifesto che, se al risultato finale aggiungiamo 6, e poi aggiungiamo 38 alla somma, e poi 4 alla nuova somma, e infine ancora 21, otteniamo in fine per risultato 124. Ma poichè, aggiungendo successivamente i numeri 6, 38, 4 e 21, si ottiene il medesimo risultato che aggiungendo la loro somma, l'ultimo residuo è appunto lo stesso che si ottiene sottraendo la somma da 124. Così abbiamo dimostrato, come volevamo, essere esatta la seguente eguaglianza :

$$124 - (21 + 4 + 38 + 6) = 124 - 21 - 4 - 38 - 6.$$

45. I due membri dell'eguaglianza precedente indicano, come sappiamo, due modi d'operare differenti, ma che pur conducono allo stesso risultato. Avverrà talvolta che, in luogo di operare come esprime il secondo membro, metta conto di procedere come indica il primo; si accenna a questo cambiamento della maniera di operare enunciando nel modo che segue l'antecedente

Teor. *Dovendo sottrarre successivamente parecchi numeri, si può invece sottrarre la loro somma.*



CAPITOLO IV

MOLTIPLICAZIONE

Preliminari.

46. Si presenta frequentemente il caso di dover fare un'addizione, in cui tutti gli addendi sono eguali tra loro. In questo caso il totale si può trovare più speditamente con una operazione aritmetica, che si chiama *Moltiplicazione*. Codesta operazione si fa con due numeri; e questi sono: uno degli addendi e il numero degli addendi. Il primo si chiama *moltiplicando*, il secondo si chiama *moltiplicatore*. Il risultato della moltiplicazione si dice *prodotto*. Moltiplicando e moltiplicatore collettivamente si dicono i *fattori* del prodotto.

Per indicare la moltiplicazione si scrive il moltiplicatore a destra del moltiplicando, e tra i due fattori si mette un punto. Perciò, scrivendo, ad es., $148 \cdot 72$, si indica la moltiplicazione di 148 per 72. Si legge: 148 *moltiplicato per 72*, od anche, più semplicemente: 148 *per 72*.

(Chi non sa fare la moltiplicazione può trovare il prodotto sommando 72 numeri eguali a 148).

Fisseremo le convenzioni che precedono con le seguenti due definizioni.

47. Def. *La moltiplicazione è l'operazione aritmetica, che determina la somma di più numeri eguali mediante uno degli addendi e il numero degli addendi.*

48. Def. *Il prodotto di due numeri è uguale alla somma di tanti numeri eguali al primo (al moltiplicando), quante sono le unità dell'altro (del moltiplicatore) (*).*

49. Oss. Poichè un moltiplicatore indica quanti sono gli addendi eguali di una addizione, un moltiplicatore sarà almeno eguale a 2. È utile però considerare anche il caso in cui il moltiplicatore è uguale ad 1, e quello in cui il moltiplicatore è uguale a zero. La precedente definizione non comprende questi casi; per essi ne occorre adunque una a posta, ed è la seguente

50. Def. *Quando il moltiplicatore è uguale all'unità, il prodotto è uguale al moltiplicando. Se il moltiplicatore è lo zero, anche il prodotto è zero, e ciò qualunque sia il moltiplicando.*

Son dunque uguaglianze di convenzione, ad es., le seguenti

$$\begin{aligned} 148 \cdot 1 &= 148, \\ 148 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

(*) Dal punto di vista scientifico sarebbe preferibile aprire il capitolo della moltiplicazione dicendo: *moltiplicare*, ad es., *142 per 7*, significa far la somma di 7 numeri eguali a 142. Poi dimostrare i teoremi dei § 61, 62 e 63, e giovarsene per giustificare il processo della moltiplicazione. Certo per questa strada si arriva anche più presto alla fine; ma codesta economia è a scapito della perfetta intelligenza dell'argomento. Epperò è meglio presentare al principiante la moltiplicazione come un'operazione sostanzialmente nuova; laddove non è altro che un'addizione fatta con accorgimento.

(Più innanzi vedremo l'utilità di aver convenuto che sia così, piuttosto che diversamente).

51. Oss. Giova osservare che *ogniqualevolta il moltiplicando è uguale all'unità, il prodotto è uguale al moltiplicatore*. Infatti, ad es., $1 \cdot 7$, equivalendo [48] alla somma di 7 numeri eguali ad 1, è uguale a 7.

Quando il moltiplicando è lo zero, è zero anche il prodotto. E infatti la somma di quanti si vogliano zeri è uguale a zero.

Moltiplicazione con due numeri di una sola cifra.

52. Come al solito, per il caso più semplice l'Aritmetica non possiede artificio di sorta alcuna. Perciò, volendo, ad es., il prodotto di 8 per 5, converrà [48] fare la somma di 5 numeri tutti eguali ad 8. Così si trova essere $8 \cdot 5 = 40$.

Egli è di somma importanza, per conteggiare spedatamente, sapere a memoria tutti i prodotti, che si ottengono con fattori entrambi d'una sola cifra. Per questo si considerarono tutti i casi possibili, e notando i risultati si formò la tavola per la moltiplicazione; noi la abbiamo già appresa a memoria, epperò, ad es., sappiamo dire, senza indugio, che 8 per 5 fa 40.

Nel costruire la tavola per la moltiplicazione, si è osservato che il prodotto di due numeri è lo stesso, qualunque dei due si prenda per moltiplicando. Ad es., il prodotto di 8 per 5 e quello di 5 per 8 sono entrambi eguali a 40. Per questa ragione si è potuto ridurre a minor numero i casi da registrare, e la tavola per la moltiplicazione divenne più facile da tenere a mente.

53. Qui è opportuno dimostrare il

Teor. *Un prodotto non cambia, quando si muti l'ordine dei fattori.*

Dim. Siano due numeri qualunque, ad es. 7 e 4. Dico essere il prodotto di 7 per 4 eguale al prodotto di 4 per 7. Intanto, poichè [48] un prodotto è uguale alla somma di tanti numeri, tutti eguali al moltiplicando, quante sono le unità del moltiplicatore, egli è

$$7 \cdot 4 = 7 + 7 + 7 + 7.$$

Ora dobbiamo imaginare di aver sotto mano i 4 gruppi, ciascuno di 7 oggetti, e di prender via un oggetto da ciascun gruppo. Poichè i gruppi sono 4, avremo così un insieme di 4 oggetti; poniamolo in disparte. Prendasi un'altra unità da ciascuno dei gruppi; si otterrà così di nuovo un gruppo di 4 oggetti. Noi possiamo ripetere questa operazione 7 volte, dopo di che tutti i 4 gruppi saranno esauriti. Ma in questa maniera tutte le unità, che erano raccolte in 4 gruppi, ciascuno da 7, le troviamo poi distribuite in 7 gruppi, ognuno da 4. È dunque

$$7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4.$$

Ma la somma di numeri eguali [48] non è altro che il prodotto di uno di questi per il numero, che indica quante volte esso è ripetuto; dunque infine è

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7.$$

Il ragionamento vale qualunque siano i fattori; si è dunque dimostrato che *ecc.*

Oss. La dimostrazione precedente non si adatta al caso che l'uno o l'altro dei fattori sia eguale all'unità, oppure sia lo *zero*. Ma si riconosce, rammentando la definizione di prodotto, data per il caso che il moltiplicatore sia l'unità o lo *zero* [50, 51], che il

teorema in questione sussiste anche in questo caso. Così è, ad es.,

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &= 1 \cdot 7, \\ 7 \cdot 0 &= 0 \cdot 7. \end{aligned}$$

Moltiplicazione di un numero di parecchie cifre per uno di una sola cifra.

54. Sia, ad es., da moltiplicare 40536 per 7.

Poichè un prodotto è [48] uguale alla somma di tanti numeri eguali al moltiplicando, quanti ne indica il moltiplicatore, il prodotto richiesto è uguale alla somma di 7 numeri eguali a 40536. Scriviamo questi 7 numeri in colonna, e fingiamo di accingerci

4 0 5 3 6	}	7	all'addizione; così troveremo la regola per la moltiplicazione per il caso di un moltiplicatore d'una sola cifra.
4 0 5 3 6			
4 0 5 3 6			
4 0 5 3 6			
4 0 5 3 6			
4 0 5 3 6			
4 0 5 3 6			
2 8 3 7 5 2			Ed ora cominciando, come bisogna [28], dalla colonna delle unità, troviamo di dover fare anzitutto la somma di 7 numeri eguali a 6. Questa prima somma è dunque il prodotto di 6 per 7; e questo prodotto è 42; lo sappiamo [52] dire all'istante, senza difficoltà. Adunque la somma delle cifre della prima colonna è 42; la regola per l'addizione [28] dice di scrivere 2, e di portare 4.

Passiamo alla seconda colonna. Riservandoci di aggiungere in fine il 4 di porto, possiamo dire di nuovo che si tratta di trovare la somma di 7 numeri eguali. Ne prendo uno, lo moltiplico per 7, ed ecco la somma 21, trovata speditamente. Ora aggiungo il 4 di porto, ed ho 25. Scrivo 5, e porto 2.

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 7 \\ \hline 283752 \end{array}$$

Non occorre continuare nella spiegazione, perchè l'artificio è ormai chiarito. È poi facile avvedersi come sia superfluo scrivere tutti i numeri eguali, che si dovrebbero sommare. In pratica se ne scrive uno soltanto (il moltiplicando) e sotto, oppure accanto, si scrive il numero degli addendi, cioè il moltiplicatore.

Da quanto precede risulta la

Regola. *Per moltiplicare un numero di parecchie cifre per un numero di una sola cifra, si moltiplicano successivamente le singole cifre del moltiplicando per il moltiplicatore, cominciando da destra. Coi singoli prodotti parziali si opera come con le somme, che si trovano operando sulle colonne di numeri disposti per l'addizione.*

Moltiplicazione di un numero di parecchie cifre per un moltiplicatore scritto con una cifra significativa seguita da zeri.

55. Sia, ad es., da moltiplicare 4874 per 700.

Supponiamo di ricorrere all'addizione [48] per trovare il prodotto richiesto. Dobbiamo allora scrivere in colonna 700 numeri tutti eguali a 4874. Però, rammentandoci che un prodotto non cambia [53], se si muta l'ordine dei fattori, possiamo supporre che sia richiesto invece il prodotto di 700 per 4874, prodotto, che si può ottenere sommando 4874 numeri, tutti eguali a 700. Siano già scritti questi numeri, e supponiamo di intraprendere l'addizione. Le due prime colonne a destra sono interamente occupate da zeri; perciò la cifra delle unità e quella delle decine della somma

sono due *zeri*. Passando alla terza colonna, troviamo

-	
700	}
700	
700	
700	
. . .	
. . .	
. . .	
700	
700	
3411800	

di dover sommare parecchi numeri eguali a 7, e il numero di questi addendi è precisamente 4874. Il risultato sarà [48] il prodotto di 7 per 4874. Questa moltiplicazione non la sappiamo ancora eseguire; ma sappiamo bene moltiplicare 4874 per 7, e il risultato è lo stesso, per il principio [53] del cambiamento dell'ordine dei fattori.

Eseguendo la moltiplicazione, si ottiene 34118; e questo numero si deve [28] scrivere a sinistra dei due *zeri*.

Badando all'operazione, che ha dato il prodotto di 4874 per 700, dacchè il ragionamento fatto è generale, si conchiude la

Regola. *Per moltiplicare per un numero scritto con una cifra significativa seguita da zeri, basta moltiplicare il moltiplicando per questa cifra, e scrivere a destra del risultato tutti gli zeri del moltiplicatore.*

56. La dimostrazione e la regola testè ricavata valgono naturalmente anche per il caso, che la cifra significativa del moltiplicatore sia l'unità. L'una e l'altra possono tuttavia essere semplificate. Supponiamo infatti che, essendo ancora 4874 il moltiplicando, il moltiplicatore sia 100, in luogo di 700. La terza delle colonne (riportandoci alla precedente dimostrazione) è allora composta di 4874 unità, la cui somma è null'altro che 4874. Per questo caso la regola generale si riduce pertanto alla seguente

Regola. *Per moltiplicare per un numero scritto*

con l'unità e zeri, basta scrivere a destra del moltiplicando tutti gli zeri del moltiplicatore.

57. Oss. Questa regola è compresa nella precedente, la quale indica di moltiplicare il moltiplicando per la cifra significativa del moltiplicatore. Perchè, quando questa cifra è l'unità, il prodotto è [50] il moltiplicando stesso. (Così resta giustificata l'estensione data al concetto di moltiplicazione, col considerare anche il caso di moltiplicatore uguale all'unità).

58. In base all'ultima regola è, ad es.,

$$\begin{aligned} 700 \cdot 10 &= 7000 \\ 700 \cdot 100 &= 70000 \\ 6 \cdot 1000 &= 6000 \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Questi esempî ci porgono occasione di osservare la seguente proprietà dei numeri:

Trasportando una cifra di uno, di due, di tre ... posti verso sinistra, si ottiene che la cifra rappresenti rispettivamente un numero decuplo, centuplo, 1000 volte il numero primitivo.

Moltiplicazione con due numeri qualunque.

59. Ora possiamo proporci la moltiplicazione con due numeri qualunque. Sia, ad es., da moltiplicare 40536 per 2957.

Supponiamo da prima di scrivere in colonna 2957 numeri eguali al moltiplicando, come se volessimo calcolare il prodotto [48] mediante addizione. Scriveremo prima 2000 numeri, poi sotto altri 900, quindi altri 50, e in fine altri 7.

Sappiamo [31] che, trattandosi di sommare molti numeri, si può calcolare dapprima delle somme parziali, per riunirle poscia in un solo numero mediante

addizione. Supponiamo nel caso nostro di fare quattro somme parziali, e precisamente di sommare dapprima

4 0 5 3 6	}	2 0 0 0
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
...		
...		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6	}	9 0 0
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
...		
...		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6	}	5 0
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
...		
...		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6	}	7
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
4 0 5 3 6		
...		
...		
4 0 5 3 6		

i 7 ultimi numeri, che abbiamo scritto, poi gli altri 50, quindi i 900, e per ultimo i rimanenti 2000.

La somma dei 7 ultimi numeri si può [48] trovare mediante moltiplicazione. Il moltiplicatore è d'una sola cifra, ed abbiamo già [54] stabilita la regola per questo caso.

Passiamo al secondo gruppo di 50 numeri. La loro somma è [48] il prodotto di 40536 per 50. Questa volta il moltiplicatore è scritto con una cifra significativa e zeri di seguito; anche per questo caso la regola di moltiplicazione fu già [55] dimostrata. Mettendola in pratica, si trova il numero 2026800.

Le altre addizioni ci si presentano nelle stesse condizioni di quest'ultima; anche per esse ricorreremo adunque alla moltiplicazione.

Per ottenere il prodotto resta soltanto da sommare i quattro prodotti parziali. La loro somma 119864952 è il numero desiderato.

In pratica si risparmia di scrivere più volte il moltiplicando; gli si scrive sotto il moltiplicatore; si scrivono i prodotti parziali, a misura che vengono calcolati, uno sotto l'altro, disponendoli per l'addizione. Si

lasciano sottintesi quegli zeri, che si dovrebbero scrivere prima delle singole moltiplicazioni per le varie cifre del moltiplicatore.

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 7 \\ \hline 283752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 50 \\ \hline 2026800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 900 \\ \hline 36482400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 2000 \\ \hline 81072000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 283752 \\ 2026800 \\ 36482400 \\ 81072000 \\ \hline 119864952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40536 \\ 2957 \\ \hline 283752 \\ 202680 \\ 364824 \\ 81072 \\ \hline 119864952 \end{array}$$

Il ragionamento, che abbiamo fatto, è generale, e se ne ricava la seguente

Regola. *Per fare il prodotto di due numeri di parecchie cifre, si scrive il moltiplicatore sotto del moltiplicando. Poi si moltiplica il moltiplicando separatamente per le singole cifre del moltiplicatore, e si scrivono i prodotti parziali uno sotto l'altro, con le cifre in colonne e in modo che per ciascun prodotto parziale la prima cifra a destra cada in colonna con quella cifra del moltiplicatore, che fu adoperata a formarlo. In fine si fa la somma dei prodotti parziali così disposti; dessa è il prodotto cercato.*

Oss. Avendo stabilito [50] che un prodotto, quando il moltiplicatore è lo zero, sia zero, non abbiamo avuto bisogno nell'enunciare la regola generale per la moltiplicazione di far cenno degli zeri, che ci fossero nel moltiplicatore. Ma è evidente che dovremo operare senza por mente a questi zeri, se per avventura il moltiplicatore ne contenesse.

Prova della moltiplicazione.

60. La maniera più semplice di fare la prova di una moltiplicazione consiste nell'eseguire una nuova moltiplicazione, ma dopo aver mutato l'ordine dei fattori. Se risulterà lo stesso prodotto, che la prima volta, sarà *probabile* che entrambe le operazioni siano esenti da errore.

Maniera in cui si può calcolare il prodotto, quando uno od ambedue i fattori si presentano sotto forma di somma.

61. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può invece moltiplicare i singoli termini per questo numero, e sommare i prodotti.*

Dim. Sia da moltiplicare la somma

$$(14 + 7 + 10 + 602) \text{ per } 3.$$

Indicheremo questa operazione scrivendo nel modo seguente $(14 + 7 + 10 + 602) 3$,

dove, per semplicità di scrittura, è tralasciato il segno di moltiplicazione. Dovrebbe adunque fare l'addizione indicata tra parentesi, e moltiplicare il risultato per 3. Ora si tratta di dimostrare che il prodotto stesso si può ottenere operando altrimenti, e per l'appunto moltiplicando i singoli termini della somma per il moltiplicatore, e sommando dipoi tutti i prodotti.

A tal fine si scrivano in una riga i numeri, che compongono il moltiplicando, e si ripeta la riga tante volte, quante sono le unità del moltiplicatore; così risulta lo schema seguente

14	7	10	602
14	7	10	602
14	7	10	602.

Ed ora supponiamo di dover calcolare la somma di tutti questi numeri. È facile avvedersi che si può trarre profitto dalla moltiplicazione; e questo in due modi.

O calcolando con l'addizione la somma di tutti i numeri scritti in una riga, e moltiplicando poi questa somma per il numero delle righe. Questo è il calcolo indicato dall'espressione

$$(14 + 7 + 10 + 602) 3.$$

Oppure, dacchè ogni colonna è composta di 3 numeri eguali, moltiplicando ciascun numero di una stessa riga per 3, e sommando poi i prodotti parziali. Questo è il calcolo indicato dall'espressione

$$14 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 602 \cdot 3.$$

Così resta dimostrata l'eguaglianza

$(14 + 7 + 10 + 602) 3 = 14 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 602 \cdot 3$,
che esprime appunto il teorema, che si voleva dimostrare.

62. Teor. *Dovendo moltiplicare un numero per una somma, si può invece moltiplicare il numero per i singoli termini della somma, e sommare i prodotti.*

Dim. Sia proposta l'operazione indicata da

$$13(4 + 7 + 15).$$

Bisognerebbe eseguir prima l'addizione accennata entro parentesi, e poi moltiplicare 13 per la somma ottenuta. Ora si vuol provare che il prodotto stesso si può ottenere operando in modo diverso, e per l'appunto moltiplicando 13 per le singole parti del moltiplicatore, e facendo poi la somma di tutti i prodotti.

Imaginiamo a tal fine di voler prima trovare il prodotto mediante addizione [48]. Perciò, dovendo scrivere in colonna tanti numeri eguali a 13, quante sono le unità del moltiplicatore, ne scriveremo pri-

ma 4, poi sotto altri 7, ed infine altri 15. Al momento poi di intraprendere l'addizione, supponiamo, com'è permesso [31], di calcolare prima delle somme parziali, e per l'appunto di far la somma dei primi 4 addendi, poi quella dei 7 che seguono, infine quella dei 15 rimanenti. E perchè codeste somme parziali si possono anche ottenere [48] con le moltiplicazioni

$$13 \cdot 4, \quad 13 \cdot 7, \quad 13 \cdot 15,$$

concludiamo essere

$$13 (4 + 7 + 15) = 13 \cdot 4 + 13 \cdot 7 + 13 \cdot 15,$$

appunto come intendevasi di dimostrare.

63. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare i singoli termini del moltiplicando per i singoli termini del moltiplicatore, e sommare da ultimo tutti i prodotti parziali.*

Dim. Sia proposto di calcolare il valore dell'espressione

$$(9 + 14)(7 + 5).$$

Si dovrebbero eseguire le due addizioni, e moltiplicare dipoi la prima somma per la seconda. Ma sappiamo [62] che, dovendo moltiplicare un numero per una somma, si può invece moltiplicare per i singoli addendi, e sommare i risultati. Pertanto egli è

$$(9 + 14)(7 + 5) = (9 + 14)7 + (9 + 14)5.$$

Sappiamo [61] inoltre che, dovendo moltiplicare una somma per un numero, si può avere lo stesso prodotto anche moltiplicando i singoli addendi per questo numero, e sommando poscia i risultati. Quindi è pure

$$(9 + 14)(7 + 5) = 9 \cdot 7 + 14 \cdot 7 + 9 \cdot 5 + 14 \cdot 5,$$

appunto come dovevasi dimostrare.

Prodotti di molti fattori.

64. Quanti minuti costituiscono la durata di 5 settimane?

Moltiplicheremo 5 per 7, e il prodotto $5 \cdot 7$ esprimerà quanti giorni. Moltiplicheremo questo prodotto per 24, e così avremo il tempo espresso in ore. Questa operazione si indica semplicemente scrivendo

$$5 \cdot 7 \cdot 24.$$

L'ultimo prodotto, moltiplicato per 60, numero dei minuti che costituiscono un'ora, darà il numero domandato.

Queste operazioni s'indicano adunque scrivendo

$$5 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60.$$

Il risultato finale si dice *prodotto dei numeri 5, 7, 24 e 60*; e questi numeri sono detti i *fattori del prodotto*.

Si presentano spesso problemi, che si risolvono calcolando il prodotto di parecchi fattori; ora dimostreremo alcune proprietà di questi prodotti.

65. Teor. *Un prodotto non cambia comunque si muti l'ordine dei fattori.*

Dim. Per il caso che i fattori siano due soltanto il teorema fu già dimostrato; ora si tratta di provare ch'esso sussiste in generale, qualunque sia il numero dei fattori.

1°. In primo luogo proveremo che un prodotto di *tre* fattori non muta, ove si scambino di posto i due ultimi. Dico, ad es., essere $12 \cdot 5 \cdot 3 = 12 \cdot 3 \cdot 5$. Scrivasi a tale intento il primo fattore in una riga tante volte, quante ne indica il secondo; e poi si ripeta la riga fino ad averne scritte tante, quante sono le

unità del terzo fattore. Otteniamo in questo modo lo schema seguente

12	12	12	12	12
12	12	12	12	12
12	12	12	12	12.

Se ora immaginiamo di dover calcolare la somma di tutti questi numeri, ci avvediamo di poter trarre profitto dalla moltiplicazione, e ciò in parecchi modi.

Intanto, moltiplicando 12 per 5, si ottiene la somma dei numeri che sono in una riga; poi, moltiplicando questo prodotto per 3, si ottiene la somma totale. Questo calcolo è indicato dall'espressione $12 \cdot 5 \cdot 3$.

Ma si può invece calcolare prima la somma dei numeri che sono scritti in una colonna; e questa somma si ottiene anche moltiplicando 12 per 3. Poi, essendo le colonne identiche e 5 di numero, si moltiplicherà il prodotto ($12 \cdot 3$) per 5. Ecco dimostrato che è

$$12 \cdot 5 \cdot 3 = 12 \cdot 3 \cdot 5,$$

come avevamo asserito.

2°. Dobbiamo provare, in secondo luogo, che in un prodotto si possono scambiare di posto due fattori consecutivi qualunque. E per fissare l'attenzione si consideri il prodotto

$$12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 42 \cdot 5.$$

Sappiamo già essere $12 \cdot 7 = 7 \cdot 12$; si possono dunque scambiare di posto i due primi fattori. Ma è lecito lo scambio anche di due fattori intermedi consecutivi qualunque, quali sono, ad es., i due fattori 13 e 42. Infatti, trovato (*) il prodotto dei tre primi fattori, che

(*) Nella scuola in questo caso, e in ogni caso analogo, si prenderà un numero a sorte per risultato, perchè distraendosi a cercarlo, si può smarrire il filo del ragionamento, il quale d'altra parte dev'essere indipendente dai valori particolari dei numeri.

è 336, si dovrebbe poi moltiplicarlo per 13, e il risultato per 42. Ma otterremmo lo stesso numero anche moltiplicando 336 per 42, e poi il risultato per 13, perchè, come abbiamo visto poco fa, in un prodotto di tre fattori è lecito di scambiare di posto i due ultimi.

Questo ragionamento vale manifestamente anche per il caso, che siano i due ultimi i fattori consecutivi da scambiare tra loro.

3°. Ora siamo alla conclusione. Dico che i fattori di un prodotto, quale ad es.

$$42 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 16 \cdot 31,$$

si possono prendere in un ordine qualunque, ad es. nell'ordine

$$100 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 42 \cdot 16.$$

Infatti, abbiamo provato potersi fare lo scambio di due fattori consecutivi qualunque, senza che il prodotto venga punto alterato. Ebbene, si replichi questo scambio, fino a che il fattore 100 sia passato nel primo posto. Otteniamo così successivamente i prodotti (tutti eguali al dato)

$$42 \cdot 7 \cdot \mathbf{100} \cdot 3 \cdot 16 \cdot 31,$$

$$42 \cdot \mathbf{100} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 31,$$

$$\mathbf{100} \cdot 42 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 31.$$

Partendo dall'ultimo prodotto, nel modo stesso, potremo fare che il fattore 31 passi nel secondo posto; poi continuando si farà andare il 3 nel terzo, ecc. Resta così dimostrato che il prodotto di più fattori è indipendente dall'ordine in cui questi vengono presi per eseguire le successive moltiplicazioni.

66. Teor. *Dovendo moltiplicare per il prodotto di parecchi fattori, si può invece moltiplicare successivamente per questi fattori.*

Dim. Sia da moltiplicare 814 per 336, che è il prodotto dei numeri 12, 7 e 4. Dico che si ottiene lo stesso risultato, moltiplicando 814 per 12, poi il prodotto per 7, e il nuovo prodotto per 4.

Il primo modo d'operare è intanto indicato dall'espressione $814 (12 \cdot 7 \cdot 4)$. Ma dacchè [65] un prodotto non muta ove si muti l'ordine dei fattori, si può eziandio procedere nel calcolo come indica l'espressione $(12 \cdot 7 \cdot 4) 814$, la quale indica le operazioni stesse [64] che l'altra $12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 814$. Ora, trasportando [65] l'ultimo fattore nel primo posto, si ottiene l'eguaglianza

$$814 (12 \cdot 7 \cdot 4) = 814 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 4,$$

che è quella che dovevasi dimostrare.

67. Teor. *Moltiplicando un fattore di un prodotto per un numero, si moltiplica il prodotto per questo numero.*

Dim. Sia il prodotto $62 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 100$. Si moltiplichino uno dei fattori, ad es. il 9, per un numero qualunque, ad es. per 20. Intenderemo di rappresentare l'operazione e il risultato scrivendo

$$62 \cdot 7 (9 \cdot 20) 100.$$

Ora si tratta di dimostrare che si può ottenere lo stesso risultato anche moltiplicando per 20 il prodotto primitivo.

Infatti, nell'ultima espressione noi vediamo di dover moltiplicare il numero $(62 \cdot 7)$ per il prodotto $(9 \cdot 20)$. Si è già dimostrato [66] che, dovendo moltiplicare per un prodotto, torna lo stesso moltiplicare successivamente per i singoli fattori; è dunque

$$62 \cdot 7 (9 \cdot 20) 100 = 62 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 100,$$

epperò anche [65]

$$62 \cdot 7 (9 \cdot 20) 100 = 62 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 100 \cdot 20.$$

Ora, scrivendo nel modo seguente

$$62 \cdot 7 (9 \cdot 20) 100 = (62 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 100) 20,$$

è resa manifesta la verità della proposizione enunciata.

68. Teor. *In un prodotto di parecchi fattori si può surrogarne alcuni col loro prodotto effettuato.*

Dim. Consideriamo il prodotto

$$100 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 39 \cdot 25,$$

e fissiamo in questo alcuni fattori, ad es. i numeri 9, 7 e 25; poi, cambiando [65] l'ordine dei fattori, facciamo che essi si presentino per primi. Otteniamo così

$$9 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 13 \cdot 39.$$

Supponiamo eseguite le due prime moltiplicazioni; e s'indichi ciò scrivendo

$$(9 \cdot 7 \cdot 25) 100 \cdot 13 \cdot 39.$$

Questo prodotto è uguale al primitivo; ma vediamo surrogati i fattori 9, 7 e 25 col loro prodotto effettuato. Ciò è quanto dovevasi dimostrare.

69. Faremo un'applicazione dei teoremi precedenti per dimostrare la

Regola. *Dovendo fare il prodotto di due numeri terminati da zeri, si può fare astrazione da questi zeri finali, ed, eseguita la moltiplicazione, scrivere questi zeri a destra del risultato.*

Dim. Siano da moltiplicare tra loro i due numeri 80700 e 62000. Dico che, per averne il prodotto, basta moltiplicare 807 per 62, e scrivere di poi a destra del risultato tutti gli zeri *finali*, che si trovano nei due fattori. La dimostrazione risulta chiara dal quadro seguente:

$$80700 \cdot 62000 = 807 \cdot 100 (62 \cdot 1000) [56]$$

$$\gg = 807 \cdot 100 \cdot 62 \cdot 1000 [66]$$

$$\gg = (807 \cdot 62) (100 \cdot 1000) [68]$$

$$\gg = (807 \cdot 62) 100\,000.$$

Fatto il prodotto di 807 per 62, resterà a scrivergli [56] a destra 5 zeri; e tanti sono appunto gli zeri finali dei due fattori.

Potenze.

70. Tra i prodotti sono da considerare particolarmente quelli, i cui fattori sono tutti eguali tra loro.

Il prodotto di parecchi fattori eguali ad un numero si dice *potenza* di questo numero.

Uno dei fattori eguali si dice la *base della potenza*, che risulta effettuando le moltiplicazioni.

Il numero dei fattori eguali vien detto l'*esponente della potenza*, od anche il *grado* della potenza.

Per semplicità di scrittura, per rappresentare una potenza, cioè un prodotto di fattori eguali, si scrive uno soltanto dei fattori, e a destra, un poco elevato, l'esponente. Così, ad es., 25^7 rappresenta la *settima* potenza di 25, ossia il prodotto di 7 numeri eguali a 25.

La seconda potenza di un numero si suol chiamare *quadrato* del numero; e la terza potenza è anche detta *cubo* del numero.

L'operazione, con cui si forma una potenza di un numero, porta il nome di *elevazione a potenza*. Questa operazione però non consiste che in moltiplicazioni successive, nelle quali è sempre lo stesso numero che fa da moltiplicatore.

71. Teor. *Il prodotto di due potenze della stessa base è quella potenza della base stessa, che ha per esponente la somma degli esponenti.*

Dim. Consideriamo il prodotto

$$32^7 \cdot 32^4.$$

Poichè una potenza è il prodotto di tanti fattori eguali alla base, quante sono le unità dell' esponente, possiamo scrivere

$$32^7 \cdot 32^4 = 32^7 (32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32).$$

Nel secondo membro vediamo di dover moltiplicare 32^7 per un prodotto; sappiamo [66] che fa lo stesso moltiplicare successivamente per i singoli fattori; è dunque

$$32^7 \cdot 32^4 = 32^7 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32.$$

Ma quando si moltiplica 32^7 (prodotto di 7 fattori eguali a 32) per 32, si ottiene il prodotto di 8 fattori eguali a 32; prodotto, che si rappresenta col simbolo 32^8 . Moltiplicando di nuovo per 32, si ottiene la nona potenza, e così di seguito; sarà infine nel caso nostro

$$32^7 \cdot 32^4 = 32^{7+4}$$

come volevasi dimostrare.

72. Oss. Abbiamo veduto che $32^7 \cdot 32 = 32^{7+1}$. Si riconosce che la base si comporta nel calcolo, come una potenza con esponente 1. Per questo un numero viene riguardato quale *prima potenza* di sè stesso, e lo si può intendere affetto dall' esponente 1.

Esercizi.

1. Si dimostri che, se tutte le cifre del moltiplicatore sono dei 9, per ottenere il prodotto, basta scrivere altrettanti zeri a destra del moltiplicando, e sottrarre il moltiplicando dal numero così formato.
2. Si può, nel fare la moltiplicazione, adoperare le cifre del moltiplicatore in un ordine qualunque, invece che prenderle ordinatamente principiando da destra? [30].
3. Di quanto si aumenta un prodotto, aumentando di una unità il moltiplicatore? di quanto lo si aumenta, se si accresce di una unità il moltiplicando? [53].
4. Dimostrare che il prodotto di due fattori diminuisce, quando si aumenti di una unità il maggiore e si diminuisca il minore

di una unità. (Si prenda il minore per moltiplicatore, e lo si diminuisca di 1. Di quanto diminuisce perciò il prodotto? Si aumenti di 1 l'altro fattore. Di quanto cresce perciò il prodotto? ecc.).

5. Se si prendono quattro numeri consecutivi, il prodotto dei medi supera di 2 il prodotto degli estremi.
6. Il quadrato di un numero supera di una unità il prodotto del numero antecedente per il numero successivo.
7. Si moltiplichi il numero 347 per 1001 001 001. Si giustifichi la singolarità del prodotto. (Si consideri il moltiplicatore come somma di unità di vari ordini, e si moltiplichi poi come suggeriscono i teoremi 62 e 56).
8. Dimostrare che il prodotto di due numeri ha tante cifre, quante ne hanno insieme i due fattori, o una di meno. (Posto, ad es., che il moltiplicatore sia scritto con quattro cifre, si prenderà per moltiplicatore una volta 1000, e un'altra 10000).

