•

CAPITOLO XVII

RAPPORTO, PROPORZIONE PROPORZIONALITÀ

RAPPORTO

Definizione di rapporto.

343. Siano A e B due grandezze omogenee, e supponiamo che, sottraendo successivamente dalla A parti eguali alla B, la A rimanga esaurita compiutamente. Il numero intero, che indica quante volte si è dovuto replicare la sottrazione, si dice *rapporto* della grandezza A alla B (*).

Per questa definizione, quando si dirà, ad es., che il numero 15 è il rapporto di A a B, si esprimerà che la grandezza A equivale alla somma di 15 grandezze uguali alla B, ossia che $\frac{1}{15}$ della A è uguale alla grandezza B.

344. Siano di nuovo A e B due grandezze omogenee, e supponiamo che, divisa la B in certo numero

(*) Quando la B sia *l'unità di misura*, in tal caso il rapporto della A alla B si dice più semplicemente il *valore* della grandezza A.

di parti eguali, ad es. in 12, una di queste, sottratta 7 volte dalla A, abbia esaurita codesta grandezza. In questo caso si dice *rapporto* di A a B la frazione $\frac{7}{12}$, il cui denominatore indica in quante parti fu divisa la B, e il numeratore quante di queste parti unite insieme danno una grandezza eguale alla A.

Oss. È manifesto che se, nel caso contemplato, si fosse divisa la B in 24, od in 36, od in 48 . . . parti (in generale secondo un multiplo di 12), ciascuna di queste parti, sottratta replicatamente, avrebbe essa pure esaurita la A; ed il numeratore del rapporto, che si sarebbe trovato così operando, sarebbe multiplo di 7, precisamente come il denominatore fosse multiplo di 12. Epperò il rapporto ottenuto sarebbe [162] uguale a $\frac{7}{12}$.

345. Quando due grandezze omogenee A e B sono incommensurabili [299], il rapporto di A e B non può essere nè intero nè frazionario; per questo caso daremo la seguente

Def. *Se* A *e* B *sono due grandezze incommensurabili, il rapporto della* A *alla* B *è il numero irrazionale maggiore dei rapporti, che hanno rispettivamente alla* B *grandezze minori della* A *e commensurabili con la* B, *e minore dei rapporti, che hanno rispettivamente alla* B *grandezze maggiori della* A *e commensurabili con la* B.

Perciò, dividendo la B in un numero arbitrario di parti eguali, ad es. in 70, e sottraendo dalla A replicatamente una di queste parti, se la sottrazione si potrà replicare, ad es., 113 volte e non 114, si potrà poi dire che il rapporto della A alla B è compreso tra i due numeri $\frac{113}{70}$ e $\frac{114}{70}$.

346. Oss. La considerazione dei rapporti irrazionali ha importanza solamente dal lato teorico; in pratica, quando occorra conoscere il rapporto di una grandezza A ad un' altra B, atteso che non sia facile l'operazione per riconoscere se esista una parte aliquota della B che misuri la A, ci si contenta di un valore approssimato. Si divide la B in un numero di parti così grande, che una grandezza minore di una delle parti possa esser trascurata; poi si misura la A con una di queste parti, e si trascura il resto finale, nel caso che se ne trovi uno.

Oss. Poichè trattiamo dei rapporti, per fare poscia delle applicazioni pratiche dell' Aritmetica, ci ristringeremo a considerare rapporti razionali.

Teorema fondamentale.

Il rapporto di una grandezza ad un' altra si può anche ottenere mediatamente, come apparisce dal seguente

347. Teor. *Il quoziente dei rapporti di due grandezze ad una terza grandezza qualunque esprime il rapporto della prima grandezza alla seconda.*

Dim. Siano A e B due grandezze, e C una terza, loro omogenea, qualesivoglia. Dico che, dividendo il rapporto della A alla C per il rapporto della B alla C, si ottiene il rapporto della grandezza A alla grandezza B.

1°. Supponiamo dapprima che i rapporti delle grandezze A e B alla C siano interi, siano, ad es., i numeri 7 e 12. Diremo: Poichè 7 è il rapporto della A alla C, $\frac{1}{7}$ della A è uguale alla C. Per la ragione stessa possiamo dire che anche $\frac{1}{12}$ della B è uguale alla C. Ma quelle grandezze, che sono eguali ad una stessa, sono eguali tra loro, quindi

$$\frac{1}{7} \text{ della } A \text{ è uguale ad } \frac{1}{12} \text{ della } B.$$

Ne segue che, dividendo la B in 12 parti uguali, una di queste esaurisce la A, se venga sottratta 7 volte. Il rapporto della A alla B è dunque uguale a $\frac{7}{12}$. Ma questa frazione rappresenta [189] appunto il quoziente di 7 per 12, epperò per questo caso il teorema è dimostrato.

2°. Supponiamo ora che i rapporti delle grandezze A e B alla C siano frazionarî, e per fissare le idee, supponiamo siano rispettivamente le frazioni $\frac{3}{7}$ ed $\frac{8}{15}$.

Riducendo i due rapporti a denominatore comune otteniamo

$$\frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 15} \quad \text{ed} \quad \frac{8 \cdot 7}{7 \cdot 15}.$$

Ora la frazione $\frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 15}$, poichè esprime il rapporto della grandezza A alla C, significa che, dividendo la A in $(3 \cdot 15)$ parti eguali e la C in $(7 \cdot 15)$ parti eguali, le parti della A e quelle della C riescono tutte uguali tra loro.

Così, essendo $\frac{8 \cdot 7}{7 \cdot 15}$ il rapporto della B alla C, si comprende che anche $\frac{1}{8 \cdot 7}$ della B è uguale ad $\frac{1}{7 \cdot 15}$ della C.

Da quanto precede si conchiude che

$$\frac{1}{3 \cdot 15} \text{ della } A \text{ è uguale ad } \frac{1}{8 \cdot 7} \text{ della } B,$$

epperò anche questo che, divisa la B in $(8 \cdot 7)$ parti eguali, bisogna sottrarre una di queste parti $(3 \cdot 15)$ volte dalla A per esaurirla compiutamente. Il rapporto della A alla grandezza B è dunque $\frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 8}$; e perchè è

$$\frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 8} = \frac{3}{7} \cdot \frac{15}{8} = \frac{3}{7} : \frac{8}{15},$$

si trova confermato il teorema anche per questo secondo caso.

348. Poichè il quoziente di una divisione esprime il rapporto di due grandezze, che abbiano ad una terza rapporti rappresentati dal dividendo e dal divisore, il quoziente di due numeri si dice anche rapporto del primo numero al secondo.

Dividendo il rapporto della B ad una grandezza C per quello della A alla C, risulta un numero che è l'*inverso* [207] di quello, che si otterrebbe dividendo il rapporto della A alla C per il rapporto della B alla C. Perciò il rapporto di A a B e quello di B ad A si dicono *inversi*, l'uno dell'altro.

PROPORZIONE

Definizioni.

349. Def. (Si dice che) *Quattro grandezze sono in proporzione, quando il rapporto della prima alla seconda è uguale al rapporto della terza alla quarta.*

Oss. Una prima condizione, perchè quattro grandezze possano essere in proporzione, è questa, che la prima e la seconda siano omogenee, e così la terza e la quarta; chè infatti due grandezze eterogenee non hanno rapporto tra di loro. Ma non è necessario che le due ultime siano della stessa specie delle due prime.

350. Def. (Si dice che) *Quattro numeri sono in proporzione, quando il rapporto* (quoziente) *del primo al secondo è uguale al rapporto del terzo al quarto.*

351. Se quattro numeri **a, b, c, d** sono in proporzione, si può scrivere

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$$

e, sebbene i termini dei quozienti possano essere frazionarî, si scrive anche nel modo che segue

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}.$$

Invece di leggere

a *diviso* **b** *eguale a* **c** *diviso* **d**,

si suol dire

a *sta a* **b** *come* **c** *sta a* **d**.

I numeri **a**, **b**, **c**, **d** si chiamano i *termini* della proporzione; (**a : b**) è il primo rapporto, (**c : d**) il secondo rapporto; **a** e **c** si dicono gli *antecedenti*, **b** e **d** i *conseguenti*; **a** e **d** *gli estremi*, **b** e **c** i *medî*.

Teoremi relativi alle proporzioni.

352. Teor. *Se quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione, ed* **a** *e* **b** *siano i rapporti delle due prime ad un'altra grandezza loro omogenea qualunque, e* **c** *e* **d** *siano i rapporti delle* C *e* D *ad una grandezza loro omogenea qualunque, anche i quattro numeri* **a**, **b**, **c**, **d** *sono in proporzione. Reciprocamente, se i quattro numeri* **a**, **b**, **c**, **d** *sono in proporzione, anche le quattro grandezze* A, B, C, D *sono in proporzione.*

Dim. Infatti, il quoziente $\frac{a}{b}$ è uguale [347] al rapporto della grandezza A alla B, ed il quoziente $\frac{c}{d}$ è uguale al rapporto della C alla D. Quindi, se sono eguali i rapporti, sono eguali anche i quozienti, epperò [350] i numeri **a**, **b**, **c**, **d** sono in proporzione.

Viceversa, se i quozienti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono eguali, anche il rapporto della grandezza A alla B è uguale al rapporto della C alla D, ossia le quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione.

Oss. D'ora in poi, quando parleremo di proporzione, intenderemo sempre di proporzione tra numeri.

353. Teor. *In una proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medî.*

Dim. Sia, ad es., la proporzione

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}}.$$

Abbiamo dimostrato [212] che un quoziente non muta, se i due termini vengono moltiplicati per uno stesso numero. Così, moltiplicando i due termini del primo rapporto per $\frac{5}{2}$, e i due termini del secondo rapporto per $\frac{5}{7}$, otterremo risultati eguali. Lasciando indicate le operazioni, abbiamo dunque

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{7}}.$$

Ora, perchè sono eguali i divisori ed eguali i quozienti, sono eguali anche i dividendi. È dunque

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{3};$$

come si doveva dimostrare.

354. Il teorema or ora dimostrato offre il modo di calcolare un termine di una proporzione, quando siano noti gli altri tre. Consideriamo, ad es., la proporzione

$$\frac{2}{3} : x = \frac{7}{3} : \frac{5}{2},$$

nella quale un termine è incognito, e perciò appunto è rappresentato con la lettera x. Poichè in una proporzione il prodotto dei medî è uguale al prodotto degli estremi, il numero incognito deve avere tal valore, che sia

$$x \cdot \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} .$$

Ora vediamo che si conosce il prodotto $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)$ ed uno dei fattori, cioè $\frac{7}{3}$; con la divisione [208] si troverà dunque l'altro fattore x. Così, lasciando indicate le operazioni, possiamo scrivere

$$x = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{7}{3}} .$$

Considerando successivamente come incognito ciascuno degli altri termini, troveremo poi di poter dire che

355. *In una proporzione, un estremo è uguale al prodotto dei medî diviso per l'altro estremo; ed un medio è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.*

356. Teor. *Da una proporzione, permutando i medî, si ottiene di nuovo una proporzione.*

Dim. Sia, ad es., la proporzione

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{7}{3} : \frac{5}{2} .$$

Abbiamo dimostrato [353] che in una proporzione il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medî; è quindi

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3} .$$

Dividendo questi prodotti eguali per lo stesso numero

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2},$$

si otterranno risultati eguali. È pertanto

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3}}.$$

Sappiamo che, se si moltiplicano dividendo e divisore per uno stesso numero, il quoziente [212] non muta; non muterà perciò il quoziente neanco quando si sopprima un fattore comune al dividendo e al divisore. Dai due quozienti eguali otteniamo in questo modo la proporzione

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{2}},$$

che si può scrivere nel modo seguente

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{3} = \frac{5}{7} : \frac{5}{2}.$$

Confrontando questa proporzione con la primitiva. troviamo dimostrato il teorema.

357. Teor. *Da una proporzione, invertendo l'ordine dei termini di ciascun rapporto, si ottiene di nuovo una proporzione.*

Dim. Sia, ad es., la proporzione

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{7}{3} : \frac{5}{2}.$$

Dividendo il prodotto dei medî e il prodotto degli estremi per il numero $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3}\right)$, si ottengono intanto quozienti eguali. Questi, semplificati, danno [212]

$$\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{3}},$$

proporzione, che si può scrivere

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{2} : \frac{7}{3}.$$

Confrontando questa proporzione con la proposta, si trova dimostrato il teorema.

358. Teor. *Da una proporzione, moltiplicando gli antecedenti per uno stesso numero qualunque ed i conseguenti per un altro numero, si ottiene di nuovo una proporzione.*

Dim. Sia, ad es., la proporzione

$$a : b = c : d.$$

Vogliamo dimostrare che, moltiplicando gli antecedenti per un numero m qualunque, intero o frazionario, e i conseguenti per uno stesso numero n, si ricava un'altra proporzione.

Dalla proporzione data, permutando, otteniamo

$$a : c = b : d.$$

Ma sappiamo [212] che un quoziente non muta di valore, se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati per uno stesso numero. Perciò egli è

$$(a \cdot m) : (c \cdot m) = (b \cdot n) : (d \cdot n),$$

donde, permutando, si ricava la proporzione

$$(a \cdot m) : (b \cdot n) = (c \cdot m) : (d \cdot n),$$

che si doveva dimostrare.

359. Teor. *Moltiplicando ordinatamente tra loro i termini di quante si vogliano proporzioni, si ottengono prodotti che sono in proporzione.*

Dim. Siano, ad es., le due proporzioni

$$a : b = c : d,$$

$$m : n = p : q,$$

nelle quali le lettere rappresentano numeri qualunque, interi o frazionarî.

Poichè in ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medî, abbiamo

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$m \cdot q = n \cdot p,$$

donde, moltiplicando ordinatamente, si ottiene

$$a \cdot d \cdot m \cdot q = b \cdot c \cdot n \cdot p,$$

oppure [203, 3°]

$$(a \cdot m)(d \cdot q) = (b \cdot n)(c \cdot p).$$

Dividendo questi due prodotti eguali per il prodotto $(b \cdot n)(d \cdot q)$ e semplificando i quozienti, si ottiene

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot n} = \frac{c \cdot p}{d \cdot q},$$

proporzione, che si può anche scrivere

$$(a \cdot m) : (b \cdot n) = (c \cdot p) : (d \cdot q).$$

Il teorema è così dimostrato per il caso che due sole siano le proporzioni date: ma è facile estenderlo a quante si vogliano proporzioni. Infatti, applicato il teorema alle due prime, lo si applicherà poi alla proporzione risultante ed alla terza; quindi alla nuova proporzione e alla quarta delle date, e così via, finchè queste siano tutte esaurite.

360. Teor. *Se quattro numeri sono in proporzione, anche la somma dei due primi sta al secondo, come la somma del terzo e del quarto sta al quarto.*

Dim. Sia, ad es., la proporzione

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}}.$$

Si tratta di dimostrare che sono eguali anche i due quozienti

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{7}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}.$$

Consideriamo intanto il primo di questi. Il dividendo è una somma, e si è dimostrato [209] che, dovendo dividere una somma per un numero, si può invece dividere separatamente le singole parti del dividendo per il divisore, e sommare in fine i quozienti parziali. Nel caso nostro, la prima divisione dà per quoziente il primo rapporto della proporzione data; il secondo quoziente è uguale all'unità. Nello stesso modo si riconosce che il secondo dei quozienti supera di uno il secondo dei rapporti della proporzione data. E poichè i rapporti di questa sono eguali, è eziandio

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{7}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}.$$

Questa è appunto la proporzione che si doveva dimostrare.

Oss. La seconda proporzione si dice dedotta dalla prima *componendo*.

361. Teor. *Se parecchi rapporti sono eguali, si ottiene un rapporto eguale ai dati, dividendo la somma degli antecedenti per la somma dei conseguenti.*

Dim. Consideriamo i rapporti eguali

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \ldots\ldots,$$

e di questi intanto i due primi. Dalla proporzione formata da questi due, permutando [356], si ottiene

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n},$$

e quindi, componendo [360], si ricava

$$\frac{a+m}{m} = \frac{b+n}{n}.$$

Permutando di nuovo si ritrae la proporzione

$$\frac{a+m}{b+n} = \frac{m}{n}.$$

Il teorema è così dimostrato per il caso che due soltanto siano i rapporti dati; ma può essere esteso senza difficoltà ad un numero maggiore. Infatti, sostituendo nell'ultima eguaglianza al secondo rapporto l'eguale $\frac{p}{q}$, ed applicando il teorema in questione, che, per il caso che i rapporti eguali siano due soltanto, è ormai dimostrato, si trova

$$\frac{a+m+p}{b+n+q} = \frac{p}{q}.$$

Così il teorema si può dire dimostrato per quanti siano i rapporti dati.

PROPORZIONALITÀ.

Proporzionalità diretta.

362. Una grandezza (*) si dice *dipendente* da un'altra, quando una variazione di questa produce una variazione nella prima. Ad es., il prezzo di una merce dipende dal peso di questa; la superficie di un circolo varia, se varia il raggio.

363. Def. (Si dice che) *Due grandezze sono proporzionali tra loro, quando dipendono l'una dall'altra in modo che il rapporto di due stati qualunque della prima è uguale al rapporto dei due stati corrispondenti della seconda grandezza.*

Non ispetta all'Aritmetica dimostrare, se ha luogo, la proporzionalità tra due grandezze, ma alla scienza che tratta particolarmente delle grandezze, che si considerano. Così, ad es., tocca alla Geometria dimostrare che il raggio e la circonferenza di un cerchio sono grandezze proporzionali tra loro. Tuttavia, poichè si danno grandezze, dipendenti l'una dall'altra, che non si riferiscono a nessuna scienza, giova conoscere il seguente

364. Teor. *Se due grandezze dipendono l'una dall'altra in maniera che, quando una di esse divenga doppia, tripla.... oppure si riduca alla metà, alla terza... parte, l'altra debba diventare rispettivamente doppia, tripla... oppure ridursi anch'essa alla metà, alla terza... parte, in tal caso le due grandezze sono proporzionali tra loro.*

(*) Qui e talvolta anche nel seguito la parola *grandezza* non accenna una grandezza determinata, ma piuttosto una specie di grandezze.

Dim. Infatti siano A e B due grandezze, che abbiano tale dipendenza l'una dall'altra, e supponiamo che la A passi ad uno stato A_1, che sia, ad es., 7 volte più grande del primitivo. L'altra grandezza diverrà anch'essa 7 volte più grande. In tal caso adunque il rapporto tra i due stati della prima grandezza è uguale a quello tra gli stati corrispondenti della seconda.

Passiamo a considerare il caso generale. Imaginiamo cioè che il nuovo stato A_1 abbia al primitivo A un rapporto $\frac{7}{5}$, e cerchiamo qual sia il rapporto di B_1 a B. Noi possiamo supporre che la prima grandezza sia passata al nuovo stato in due volte, e precisamente che prima si sia ridotta ad $\frac{1}{5}$ di ciò che era, e poi sia diventata 7 volte più grande. La B avrà dovuto anch'essa ridursi dapprima ad $\frac{1}{5}$ del suo valore, e poi diventare 7 volte più grande. Dunque il rapporto di B_1 a B è precisamente $\frac{7}{5}$, come quello di A_1 ad A.

Resta provato così che, quando due grandezze, dipendenti l'una dall'altra, variano come esprime il teorema, le grandezze sono *proporzionali tra loro.*

Es. Ad es., il prezzo della merce e il peso dipendono tra loro, e precisamente per un peso doppio, triplo... bisogna pagare il doppio, il triplo...; laddove per un peso metà, un terzo... basta pagare la metà, il terzo... Si può dunque asserire che il peso di una merce e il prezzo sono grandezze proporzionali tra loro (*).

365. Oss. La proporzionalità tra due grandezze può essere necessaria, può aver luogo cioè senza restrizione. Così è, ad es., della proporzionalità tra il raggio e la circonferenza del cerchio. Tal'altra volta

(*) Qui s'intende naturalmente di parlare delle merci che si vendono a peso. Fanno eccezione le gemme.

la proporzionalità è convenzionale, e non ha luogo che entro certi limiti. Così non si può dire in modo assoluto che il prezzo di una merce sia proporzionale al suo peso, dacchè ognuno sappia che, se, ad es., per un kilogrammo di caffè si devono pagare 4 lire, 100 kilogrammi si potranno acquistare con meno di 400 lire; ma avviene anche il caso che una forte ricerca di una merce la fa rincarire, anzichè avvilirne il prezzo. Ma quando in Aritmetica vien proposta una questione, che sia fondata sulla proporzionalità tra le grandezze su cui la questione si aggira, si ammette che la proporzionalità abbia luogo senza restrizione.

366. Regola del tre diretta. Quando due grandezze A e B sono proporzionali tra loro, e si conoscono due loro valori corrispondenti a_1 e b_1, allora si può calcolare il valore x, che assume la grandezza A, corrispondente ad un dato valore b_2 dell'altra grandezza. Il metodo per questo calcolo si dice *regola del tre*.

A	B
a_1	b_1
x	b_2

Poichè le grandezze A e B sono proporzionali tra loro, ed a_1 ed x sono valori di due stati della prima, e b_1 e b_2 sono i valori dei due stati corrispondenti della grandezza B, ha luogo [352] la proporzione

$$a_1 : x = b_1 : b_2$$

da cui [355] si ricava

$$x = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1} .$$

367. Es. Probl. *Se metri* 48,50 *di una certa stoffa furono acquistati con lire* 157,45, *quanto costeranno metri* 62,32 *della stoffa stessa?*

Metri	Lire
48,50	157,45
62,32	x

Risol. Poichè il prezzo della stoffa è [364] proporzionale alla lunghezza, ha luogo la proporzione

$$48{,}50 : 62{,}32 = 157{,}45 : x,$$

da cui

$$x = \frac{62.32 \cdot 157.45}{48{,}50} = 202{,}32\ldots$$

R. Metri 62,32 costeranno lire 202,32.

368. Metodo di riduzione all'unità. Il calcolo dell'incognita in una regola del tre consiste in una moltiplicazione ed una divisione, e non è necessario conoscere a tal uopo la teoria delle proporzioni, ma è sufficiente il buon senso. Consideriamo a prova di ciò il problema precedente. Per poco si pensi sull'argomento, si presenta naturale l'idea di cercare intanto il prezzo di un metro di stoffa, e questo si ha dividendo il prezzo noto per la lunghezza relativa; giacchè si sarebbe detto: se con 10 lire si possono acquistare, ad es., 5 metri di stoffa, il prezzo di un metro si ottiene dividendo 10 per 5 (*). Così, dividendo 157,45 per 48,50, si trova il prezzo di un metro di stoffa; poi moltiplicando il risultato per 62,32, si otterrà il prezzo richiesto.

Proporzionalità inversa.

369. Def. (Si dice che) *Due grandezze sono inversamente proporzionali tra loro, quando dipendono*

(*) Questa argomentazione è suggerita da ciò, che il nome dei calcoli da effettuare si conosce più facilmente quando i dati sono numeri interi. E si sa [192] che il *nome* delle operazioni non muta al mutare dei numeri.

l'una dall'altra in modo che il rapporto di due stati qualunque dell'una è uguale all'inverso del rapporto degli stati corrispondenti dell'altra.

Come abbiamo detto altra volta non è debito dell'Aritmetica dimostrare la proporzionalità diretta od inversa tra due grandezze; ma perchè si danno grandezze, che non sono oggetto di studio di scienza alcuna, giova conoscere il seguente

370. Teor. *Se due grandezze dipendono l'una dall'altra in maniera che, quando una di esse divenga doppia, tripla,... oppure si riduca alla metà, alla terza... parte, l'altra si debba ridurre rispettivamente alla metà, alla terza... parte, oppure diventare doppia, tripla...., in tal caso le grandezze sono inversamente proporzionali tra loro.*

Dim. Infatti, siano A e B due grandezze che abbiano tale dipendenza l'una dall'altra, e supponiamo, per considerare a dirittura il caso generale, che la grandezza A passi ad uno stato A_1, il quale abbia al primitivo, ad es., il rapporto $\frac{7}{5}$.

Cerchiamo il rapporto di B_1 a B. Noi possiamo supporre che la prima grandezza sia passata al nuovo stato in due riprese, e precisamente che prima si sia ridotta ad $\frac{1}{5}$ di quanto era primitivamente, e poi sia diventata 7 volte più grande. Per causa del primo mutamento della A, la grandezza B avrà dovuto diventare 5 volte più grande, e per il secondo si sarà dovuta ridurre dipoi ad $\frac{1}{7}$ di quanto era diventata. Si vede così che, mentre il rapporto A_1 ad A è espresso da $\frac{7}{5}$, quello di B_1 a B è espresso [344] da $\frac{5}{7}$. Dunque il rapporto di due stati della prima grandezza è uguale all'inverso del rapporto dei due stati corrispondenti dell'altra grandezza, ossia [369] le grandezze A e B sono inversamente proporzionali tra loro, come si voleva dimostrare.

Es. Ad es., il tempo necessario a costruire un edificio dipende dal numero degli operaî che sono adoperati, e precisamente, raddoppiando, triplicando.... il numero degli operaî, si ottiene l'opera compiuta in metà, in un terzo di quel tempo...; laddove, se il numero degli operaî si riduce alla metà, al terzo..., il tempo necessario a fornir l'opera diventa doppio, triplo.... Si può dunque asserire che il numero degli operaî e il tempo in cui compiono l'opera sono grandezze inversamente proporzionali tra loro.

371. Regola del tre inversa. Quando due grandezze A e B sono inversamente proporzionali tra loro, e si conoscono due loro valori corrispondenti a_1 e b_1; allora si può calcolare il valore x della grangrandezza A. corrispondente ad un dato valore b_2 dell'altra grandezza.

$$\begin{array}{ll} A & B \\ a_1 & b_1 \\ x & b_2 \end{array}$$

Infatti, poichè le grandezze A e B sono inversamente proporzionali tra loro, e a x pə ı sono i valori di due stati della prima, e b_1 e b_2 sono i valori dei due stati corrispondenti della grandezza B, ha luogo [352] la proporzione

$$a_1 : x = b_2 : b_1$$

da cui si ricava

$$x = \frac{a_1 \cdot b_1}{b_2}.$$

372. Es. Probl. *Se 14 operaî condussero a termine un certo lavoro in 36 giorni, in quanti giorni lo avrebbero compiuto 21 operaî?*

Operaî	Giorni
14	36
21	x

Risol. Poichè il numero dei giorni e quello degli operaî sono inversamente proporzionali tra loro, ha luogo la proporzione $14 : 21 = x : 36$

da cui

$$x = \frac{14 \cdot 36}{21} = 24.$$

R. 21 operaî avrebbero compiuto il lavoro in 24 giorni.

373. Metodo di riduzione all'unità. Senza ricorrere alla teoria delle proporzioni si sarebbe risoluto il problema precedente, cercando dapprima il tempo necessario perchè il lavoro venisse compiuto da un solo operaio, dicendo: poichè 14 operaî compirono l'opera in 36 giorni, un solo operaio in questo tempo avrà fatto soltanto $\frac{1}{14}$ dell'opera, epperò a compierla da sè solo avrebbe dovuto lavorare per $(36 \cdot 14)$ giorni. Se tanto tempo occorre ad un solo operaio, dividendo per 21, si troverà il tempo in cui il lavoro sarebbe condotto a compimento da 21 operaî.

Proporzionalità composta.

374. Avviene spesso che una grandezza X dipenda nel tempo stesso da parecchie grandezze A, B, C, D... in modo che, attribuendo a queste valori determinati, la X debba assumere necessariamente un determinato valore.

Ad es., il numero delle pietre necessarie per costruire un muro dipende ad un tempo dalla lunghezza, dalla grossezza e dall'altezza del muro. Fissate le tre dimensioni di questo, il numero delle pietre resta determinato.

375. Def. (Si dice che) *Una grandezza* X *è proporzionale ad altre grandezze* A, B, C . . . , *quando essa dipende da queste grandezze in modo che, se tutte rimangono immutate, tranne che una, la* X *è proporzionale a questa che varia.*

Dunque, ad es., il numero delle pietre necessarie a costruire un muro è proporzionale [370] alla lunghezza, alla grossezza ed all' altezza del muro, perchè, se, ad es., (senza mutare la grossezza e l'altezza) si fa doppia, tripla . . . oppure si riduce alla metà, alla terza . . . parte la lunghezza del muro, il numero delle pietre diventa doppio, triplo . . . oppure si riduce alla metà, alla terza . . . parte del numero primitivo.

376. Una grandezza X può essere nel tempo stesso direttamente proporzionale alle grandezze A, B, C . . . ed inversamente proporzionale ad altre M, N, P . . . In tal caso, se varî soltanto la M, se questa divenga doppia, tripla . . . . oppure si riduca alla metà, al terzo . . . del valore primitivo, la X deve ridursi alla metà, al terzo . . . o diventare rispettivamente doppia, tripla, . . .

Ad es., il tempo necessario a costruire un muro è direttamente proporzionale alla lunghezza, alla grossezza, all'altezza del muro; è invece inversamente proporzionale al numero degli operaî, al numero delle ore giornaliere di lavoro, alla quantità di muro che vien fatta da un operaio in un giorno.

377. Regola del tre composta. Quando una grandezza X è proporzionale ad alcune grandezze A, B, C . . . , ed inversamente proporzionale ad alcune altre M, N . . . , e si conosce il valore x della X, corrispondente a noti valori a, b, c . . . m, n . . . delle grandezze da cui dipende, può essere proposto di determinare il valore x_1, che la grandezza X acquista, quando le altre passino rispettivamente ad altri valori a_1, b_1, $c_1 \ldots m_1$, $n_1 \ldots$ Il calcolo, che conduce allo scopo, si dice *regola del tre composta.*

Supponiamo che gli elementi, da cui dipende la grandezza X, invece di variare tutti ad un tempo, mutino successivamente, uno per volta. Mediante regole del tre, dirette od inverse secondo il caso, noi sapremo determinare i successivi valori, che andrà assumendo la grandezza X, e l'ultimo sarà il valore domandato.

Intanto stabiliamo di rappresentare con x_2 il valore che assume la X, quando varia soltanto la grandezza A, da a ad a_1. Poi dinoteremo con x_3 il nuovo valore a cui passa la X, perchè la grandezza B muta di valore, da b a b_1, e così via. Tutto ciò è significato nella tabella seguente.

x	corrisponde ad	a	b	c	m	n
x_2	»	a_1	b	c	m	n
x_3	»	a_1	b_1	c	m	n
x_4	»	a_1	b_1	c_1	m	n
x_5	»	a_1	b_1	c_1	m_1	n
x_1	»	a_1	b_1	c_1	m_1	n_1

Poichè da ciascuno dei valori della X si passa al seguente mutando una soltanto delle grandezze a cui la X è proporzionale, direttamente od inversamente, possiamo scrivere le proporzioni

$$\begin{aligned} x &: x_2 = a : a_1 \\ x_2 &: x_3 = b : b_1 \\ x_3 &: x_4 = c : c_1 \\ x_4 &: x_5 = m_1 : m \\ x_5 &: x_1 = n_1 : n. \end{aligned}$$

Per dedurre da queste proporzioni il valore x_1, moltiplichiamone i termini ordinatamente. I quattro prodotti, che si ottengono, sono [359] in proporzione; e sopprimendo [212] i fattori x_2, x_3, x_4, x_5, che sono comuni ai due termini del primo rapporto, si ottiene

$$x : x_1 = (a \cdot b \cdot c \cdot m_1 \cdot n_1) : (a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot m \cdot n),$$

dalla quale [355] si ricava

$$x_1 = \frac{x \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot m \cdot n}{a \cdot b \cdot c \cdot m_1 \cdot n_1}.$$

Ora possiamo enunciare la seguente

Regola. *Conoscendo il valore* x *di una grandezza, corrispondente a dati valori* a, b, c . . . m, n . . . *di altre grandezze, alle quali la prima è proporzionale direttamente od inversamente, per ottenere il valore* x_1 *della prima grandezza, corrispondente ai valori* a_1, b_1. c_1 . . . m_1. n_1 . . . *di quelle altre da cui dipende, si moltiplica il numero noto* x *per i valori primitivi* m, n . . . *delle grandezze alle quali la prima è inversamente proporzionale, e per i nuovi valori* a_1, b_1, c_1 . . . *di quelle a cui è proporzionale direttamente; e si divide il prodotto per il prodotto dei nuovi valori* m_1, n_1 . . . *delle grandezze a cui la cercata è inversamente proporzionale e dei valori primitivi* a, b, c. . . . *delle grandezze a cui la cercata è proporzionale direttamente.*

Es. Probl. 5 *operaî, lavorando* 12 *ore al giorno, scavarono, in* 24 *giorni, un canale della lunghezza di* 168 *metri. Quanti operaî sono necessarî per compiere in* 36 *giorni lo scavo dei rimanenti* 252 *metri del canale, dovendosi restringere il lavoro a sole* 10 *ore al giorno?*

Risol. Scriviamo su due linee i dati della questione:

Operaî	Ore	Metri	Giorni
5	12	168	24
x	10	252	36.

Osserveremo poi che il numero degli operaî è inversamente proporzionale al numero delle ore quotidiane di lavoro (se questo diventa doppio, basta la metà degli operaî, ecc.); è invece direttamente proporzionale al numero dei metri (se infatti il numero di questi diventa doppio, è necessario raddoppiare il numero degli operaî, ecc.); è inversamente proporzionale al numero dei giorni (infatti, volendo compiuto il lavoro in metà tempo, bisogna raddoppiare il numero degli operaî...). Secondo la regola precedente si ha perciò

$$x = \frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{10 \cdot 36 \cdot 168} = 6.$$

378. Metodo di riduzione all'unità. Anche nel caso di una regola del tre composta si può adoperare il metodo di riduzione all'unità. Esso consiste nel calcolare dapprima il valore, che assumerebbe la grandezza dipendente, quando tutti i dati della questione divenissero l'unità. Facilmente si trova poscia il valore cercato, che corrisponde ai nuovi valori.

Consideriamo, ad es., il precedente problema. Si calcoli intanto quanti operaî sarebbero necessarî a scavare *un* metro del canale, in *un* giorno, ma lavorando *un*'ora soltanto. Diremo:

Se invece di far lavorare per 12 ore al giorno, si farà durare il lavoro una sola ora al giorno, sarà necessario un numero d'operaî 12 volte più grande; occorreranno adunque 5 · 12 operaî.

Se poi, invece di un canale della lunghezza di 168 metri, si dovrà scavarne uno di un solo metro, il numero degli operaî necessarî diverrà $\frac{1}{168}$ del primitivo. Basteranno cioè $\frac{5 \cdot 12}{168}$ operaî.

Infine se, invece di eseguire il lavoro in 24 giorni, lo si vorrà compiuto in un giorno, sarà necessario un numero d'operaî 24 volte più grande. Dovranno adunque lavorare $\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168}$ operaî.

Dunque $\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168}$ rappresenta il numero degli operaî, che possono scavare un metro del canale, lavorando un sol giorno, ed in questo per un'ora soltanto.

Ora, se invece di lavorare per una sola ora, gli operaî lavoreranno per 10 ore, il loro numero si ridurrà ad $\frac{1}{10}$ del primitivo, basteranno cioè

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24}{168 \cdot 10} \text{ operaî.}$$

Ma se questi operaî, invece che un solo metro del canale, dovranno scavarne 252 metri, il loro numero dovrà diventare 252 volte più grande; dovrà diventare

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{168 \cdot 10}.$$

Finalmente se, invece che in un giorno, l'opera dovrà essere compiuta in giorni 36, il numero degli operaî diverrà $\frac{1}{36}$ del primitivo. Bisogna dunque adoperare definitivamente

$$\frac{5 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 252}{168 \cdot 10 \cdot 36} = 6 \text{ operaî.}$$

CAPITOLO XVIII

PROBLEMI

Interesse semplice.

372. Si dice *interesse* il guadagno che fa chi presta altrui il suo denaro. La somma prestata si dice *capitale*.

Al momento del prestito si concorda l'interesse dovuto per un anno per la somma di 100 lire. Questo interesse è chiamato *tassa*. Se sia convenuto, ad es., che 100 lire del capitale prestato producano in un anno il beneficio di 5 lire, la tassa è 5, e si dice che il capitale è impiegato al 5 per 100.

L'interesse è *semplice* quando il capitale resta immutato durante tutto il tempo per cui dura l'imprestito; laddove, se alla fine di ogni anno non si riscuote l'interesse, ma si lascia che esso vada ad aumentare il capitale, producendo così interesse negli anni seguenti, in tal caso il capitale si dice mutuato ad interesse *composto*. Noi ci restringeremo a considerare questioni d'interesse semplice.

Il frutto o l'interesse di un capitale qualunque per un anno si dice semplicemente *rendita*. Si può dire adunque che *la tassa è la rendita di* 100 *lire*; la rendita di una lira (*rendita unitaria*) si ottiene dividendo la tassa per 100.

380. Gli elementi di una questione d'interesse sono quattro: il *capitale*, l'*interesse*, la *tassa* ed il *tempo* per cui dura l'imprestito. Quando sono dati tre di questi elementi, si può calcolare il quarto. Per trattare l'argomento generalmente, stabiliamo di dinotare con la lettera c il capitale, con i l'interesse dovuto al capitale c, con r la rendita di una lira (rendita unitaria), e con t il tempo per cui dura l'imprestito (*). Vediamo ora di fissare la relazione tra c, i, r e t. Diremo:

Poichè r è la rendita di una lira, c lire danno una rendita $(r \cdot c)$. Ma $(r \cdot c)$ è l'interesse di un anno; in t anni l'interesse è quindi $(r \cdot c)\, t$. È dunque

$$i = r \cdot c \cdot t. \tag{1}$$

Dalla precedente relazione, ove si rifletta che dividendo il prodotto di due fattori per uno di questi si ottiene l'altro fattore, si ricavano le altre uguaglianze

$$r = \frac{i}{c \cdot t}, \tag{2}$$

$$c = \frac{i}{r \cdot t}, \tag{3}$$

$$t = \frac{i}{r \cdot c}. \tag{4}$$

Le quattro uguaglianze (1), (2), (3), (4) si dicono *formule*, perchè simbolicamente indicano il calcolo che

(*) L'unità di tempo è l'anno; perciò, se il capitale sia prestato per 200 giorni, egli è $t = \frac{200}{365}$. Se il capitale sia prestato per 5 mesi, e si computi l'anno di 360 giorni, egli è $t = \frac{5}{12}$.

bisogna fare quando, essendo note tre delle quattro quantità i, r, c, t, si vuol trovare la quarta.

381. Probl. *Quale è l'interesse di 2600 lire, prestate per 200 giorni, alla tassa del 5,50?*

Risol. Quali calcoli dobbiamo eseguire, li troviamo accennati nel secondo membro della formula (1). Nel caso proposto è $r = 5.50 : 100 = 0{,}055$; $c = 2600$ e $t = \frac{200}{365}$. È quindi il richiesto

$$i = 0{,}055 \cdot 2600 \cdot \frac{200}{365}.$$

Oss. Nel caso fosse stata richiesta semplicemente la rendita, si sarebbe inteso che fosse domandato l'interesse di un anno. Così, essendo $t = 1$, si sarebbe scritto

$$i = 0{,}055 \cdot 2600.$$

382. Probl. *A quale tassa fu impiegato un capitale di 25000 lire, se in 3 mesi ha dato per interesse 400 lire?*

Risol. Ricorrendo alla formula (2), ponendovi nel secondo membro $i = 400$, $c = 25000$ e $t = \frac{3}{12}$, ed eseguendo le operazioni, si trova

$$r = 0{,}064.$$

Ma r rappresenta la rendita di una lira, laddove la tassa domandata è la rendita di 100 lire. Basterà dunque moltiplicare per 100: così si trova che il denaro fu impiegato al 6,40 per 100.

383. Probl. *Qual capitale impiegato, al 6 per 100, produrrebbe un interesse di 2400 lire in 225 giorni?*

Risol. Ricorrendo alla formula (3), si porrà nel secondo membro

$$i = 2400, \quad r = 6 : 100 = 0{,}06, \quad e\ t = \frac{225}{365}.$$

Eseguendo l'operazione, si trova che il capitale richiesto è di lire 64888,89.

384. Probl. *In quanto tempo* 10000 *lire, poste al* 5 *per* 100, *producono* 100 *lire di frutto?*

Risol. Dobbiamo ricorrere alla formula (4), e porvi $c = 10000$, $r = 0{,}05$ ed $i = 100$. Così si trova $t = \frac{1}{5}$ di un anno $= 73$ giorni.

Regola di sconto.

385. Quando si vuole riscuotere una somma prima dell'epoca in cui si ha diritto, conviene lasciare a chi la paga un premio che si dice *sconto*. In commercio si accorda per isconto l'interesse che la somma, che si riscuoterebbe aspettando la scadenza, frutta ad una tassa pattuita (tassa dello sconto) nel tempo di cui si anticipa il pagamento. Le questioni relative allo sconto non differiscono adunque da quelle d'interesse semplice.

Probl. *Una cambiale di* 3700 *lire scade dopo* 80 *giorni. Si propone di scontarla al* 6 *per* 100. *Si calcoli lo sconto.*

Risol. Lo sconto richiesto è niente altro che l'interesse dovuto a 3700 lire, impiegate per 80 giorni, al 6 per 100. Ricorrendo alla formula $i = r \cdot c \cdot t$, otteniamo $$i = 0{,}06 \cdot 3700 \cdot \frac{80}{365} = 48{,}65.$$

Sulle 3700 lire chi sconta si trattiene adunque lire 48,65 e ne paga 3651,35. Questo è il *valore attuale* del biglietto; 3700 si dice il *valore nominale* od anche il *montante*.

Oss. Nell'esempio precedente si vede che colui che sconta si trattiene l'interesse di 3700 lire, mentre effettivamente ne presta 3651,35. La tassa, a cui impiega il suo danaro, è dunque più elevata della tassa dello sconto.

Regola di società.

386. La regola di società ha per oggetto di dividere il guadagno o la perdita fatta da una società commerciale tra le persone che la compongono, ed in ragione ai loro rispettivi diritti.

Probl. *Tre negozianti si sono associati in un'impresa; il primo ha posto nella società* 2500 *lire, il secondo* 4600, *ed il terzo* 3200. *Il guadagno netto fu di* 865 *lire; si domanda quanto spetti a ciascuno.*

Risol. Il capitale complessivo impiegato è di 10300 lire, e queste hanno prodotto un utile di 865 lire. Si può dire che ciascuna lira ha dato un guadagno di $\frac{865}{10300}$ di lira.

È poichè delle 10300 lire, 2500 sono del primo negoziante, a lui spetterà 2500 volte il guadagno fatto da una lira. Da ciò si comprende che le quote a cui hanno diritto i tre socî sono rispettivamente

$$\frac{865}{10300} \cdot 2500 = 209,95$$

$$\frac{865}{10300} \cdot 4600 = 386,31$$

$$\frac{865}{10300} \cdot 3200 = 268,73$$

$$\overline{864,99.}$$

Sommando i guadagni dei singoli socî, deve risultare il guadagno della società. Ciò serve a provare l'esattezza dell'operazione.

387. Può avvenire che dei negozianti uniscano i loro capitali per una speculazione, impiegandoli per tempi differenti. Ciò avviene, ad es., quando uno s'avventura in una speculazione, e dopo qualche tempo ha bisogno di formare società con altri per condurre a termine l'impresa. In tal caso, nel distribuire il guadagno, conviene avere riguardo ai capitali ed ai tempi per cui furono impiegati.

Probl. *In un affare il socio* A *ebbe impegnate* 3000 *lire per* 5 *mesi, il socio* B 2400 *lire per* 3 *mesi, ed un terzo* 4600 *lire per* 6 *mesi. Quale deve essere la parte di ciascuno, posto che si sia ottenuto un guadagno di* 1200 *lire?*

Risol. Il socio A ha impiegato 3000 lire per 5 mesi. A lui spetta la stessa parte, che se avesse posto in società $3000 \cdot 5 = 15000$ lire per un solo mese.

Così la parte del socio B è quale gli spetterebbe, se avesse prestato per un solo mese un capitale di lire $2400 \cdot 3 = 7200$. Per conto del terzo è come se avesse impiegato $4600 \cdot 6 = 27600$ lire per un mese.

Il problema è così ricondotto al caso precedente, dacchè si può supporre che i tre socî abbiano poste in società, il primo 15000 lire, il secondo 7200, ed il terzo 27600 lire, per lo stesso intervallo di tempo. Si hanno così le tre quote

$$\frac{1200}{49800} \cdot 15000 = 361{,}44$$

$$\frac{1200}{49800} \cdot 7200 = 173{,}49$$

$$\frac{1200}{49800} \cdot 27600 = 665{,}06$$

$$\overline{1199{,}99.}$$

388. Se torniamo a considerare la precedente questione [386], vediamo che essa consiste nel

Dividere un dato numero in parti proporzionali a numeri dati.

È chiaro infatti che in codesta questione il guadagno ed il capitale corrispondente sono grandezze proporzionali tra loro [364]. Se indichiamo con a e b i capitali di due socî, e con m ed n i guadagni corrispondenti, e supponiamo che a sia doppio di b, è giusto che sia m doppio di n; se triplo, triplo, ecc.

Tratteremo di nuovo l'argomento facendo uso della teoria delle proporzioni; per generalità proponiamoci il seguente

389. Probl. *Dividere un numero* n *in tre parti, che siano proporzionali ai numeri* a, b, c.

Risol. Rappresentando le tre parti richieste con le lettere x, y, z, possiamo dire che esse devono essere tali da verificare l'eguaglianza

$$x + y + z = n,$$

e le proporzioni

$$x : y = a : b$$
$$y : z = b : c,$$

dalle quali, permutando [356], otteniamo

$$x : a = y : b$$
$$y : b = z : c.$$

Dev'essere adunque

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Sappiamo poi [361] che, avendo parecchi quozienti uguali, col dividere la somma dei dividendi per quella dei divisori, si ottiene un quoziente uguale ai proposti. Così, poichè è $x + y + z = n$, abbiamo

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{n}{a + b + c}.$$

Moltiplicando per a il primo rapporto ed il quarto, otterremo prodotti eguali; cioè

$$x = a \cdot \frac{n}{a + b + c}.$$

Così, moltiplicando il secondo ed il quarto per b, poi il terzo ed il quarto per c, si trova

$$y = b \cdot \frac{n}{a + b + c}, \quad z = c \cdot \frac{n}{a + b + c}.$$

Ora possiamo enunciare la

Regola. *Per dividere un numero* n *in parti proporzionali a dei numeri dati* a, b, c..., *si divide il numero* n *per la somma dei numeri* a, b, c..., *e si moltiplica il quoziente per questi numeri. I prodotti sono le parti domandate.*

390. Oss. Quando fosse richiesto di dividere un numero n in parti inversamente proporzionali a dei numeri a, b, c ... si dividerebbe n in parti direttamente proporzionali ai numeri $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ..., che sono rispettivamente gl'inversi dei numeri dati.

Regola di alligazione.

391. Si adopera in due casi la regola di alligazione, cioè quando si vuole:

1°. *Conoscendo la quantità e il prezzo unitario di talune sostanze da riunire, trovare il prezzo unitario del miscuglio.*

2°. *Dato il prezzo unitario del miscuglio e quelli delle sostanze da riunire, trovare in quali rapporti bisogna fare la mescolanza.*

Troveremo la regola di alligazione risolvendo i seguenti problemi.

392. Probl. *Si sono mescolati 80 litri di vino da 75 cent. il litro con 25 litri di vino da 60 cent. Quale è il prezzo di un litro della mescolanza?*

Risol. È chiaro che

80 litri a lire 0,75	il litro costano	$0,75 \cdot 80 = 60$	lire,
25 »	0,60 »	$0,60 \cdot 25 = 15$	» ;

epperò i 105 litri di vino costano in tutto 75 lire.

Ora, dividendo per 105 il prezzo del miscuglio, si avrà il prezzo *medio* di un litro della mescolanza. Si trova lire 0,71, cioè cent. 71.

393. Oss. Supponiamo che i prezzi unitarî delle due specie di vino aumentino egualmente, ad es.,

il vino da 75 cent. il litro divenga da 95 cent. il litro,
ed » 60 » 80 »

Il miscuglio naturalmente crescerà di prezzo. Dico che l'aumento del suo prezzo unitario è precisamente quello stesso dei prezzi dei componenti.

Supponendo di rifare il calcolo, vediamo [204] che

il prezzo degli 80 litri cresce di $0.20 \cdot 80$, ed
» dei 25 » $0.20 \cdot 25$;

quindi il prezzo del miscuglio cresce di $0.20 \cdot 105$.

Sicchè il prezzo unitario del miscuglio si otterrà prendendo $\frac{1}{105}$ della somma $75 + 0.20 \cdot 105$. Il quoziente si potrà [209] ottenere dividendo per 105 le due parti della somma, e sommando i risultati. Il prezzo unitario del miscuglio è quindi: $0,71 + 0,20$, come avevamo asserito. Questa osservazione ci permette di dire in generale che

Quando i prezzi unitarî delle sostanze componenti un miscuglio ricevono un medesimo aumento o diminuzione, il prezzo unitario del miscuglio subisce la stessa variazione.

394. Probl. *In qual rapporto bisogna mescolare acqua con vino da 65 cent. il litro, per ottenere una mescolanza da 45 cent.?*

Risol. Un litro della mescolanza deve costare

45 centesimi; questi sono dovuti naturalmente al vino che essa contiene. Ora, poichè un litro del vino che si adopera costa 65 cent., $\frac{1}{65}$ di litro costerà 1 cent., e saranno $\frac{45}{65}$ di litro, che costeranno 45 cent.

Un litro del miscuglio deve adunque essere composto di $\frac{45}{65}$ parti di vino e $\frac{20}{65}$ parti di acqua.

395. Probl. *In qual rapporto bisogna mescolare del vino da 80 cent. il litro con vino da 50 cent., per ottenere del vino da 62 cent.?*

Risol. Imaginiamo che i prezzi unitarî di ambedue le specie del vino subiscano un medesimo rinvilio. Sappiamo [393] che il prezzo unitario di un miscuglio qualunque delle due specie di vino subisce allora l'identico deprezzamento. Supponiamo che il prezzo della seconda specie di vino si riduca a *zero*, e che il prezzo dell'altra qualità diminuisca egualmente di 50 cent., si riduca cioè a 30 cent. Il prezzo unitario del miscuglio discenderà a 12 cent. Così il problema è condotto al caso antecedente, nel quale una delle due sostanze ha valore nullo.

La questione è dunque di determinare in quale rapporto bisogna mescolare del vino da 30 cent. con vino da 0 cent. (acqua) per ottenere una mescolanza da 12 cent. Ragionando come per il caso precedente, si conchiude che un litro della mescolanza deve constare di $\frac{12}{30}$ di vino da 30 cent., ed i rimanenti $\frac{18}{30}$ devono essere dell'altra specie di niun valore.

Così abbiamo trovato che, supposta divisa la mescolanza, che si vuol fare, in 30 parti eguali, 12 di queste devono essere di vino da 80 cent., e le altre 18 parti di vino da 50 cent.

INDICE