CAPITOLO XI

QUADRATI E RADICI QUADRATE

Quadrato della somma di due numeri.

247. Teor. *Per ottenere il quadrato della somma di due numeri, si può fare il quadrato della prima parte, poi il doppio del prodotto delle due parti, quindi il quadrato della seconda parte, e sommare in fine i risultati.*

Dim. Sia, ad es., la somma $(3 + \frac{5}{7})$. Dico che $(3 + \frac{5}{7})^2$, quadrato di questa somma, eguaglia la somma dei seguenti tre numeri: 3^2, quadrato della prima parte; $(3 \cdot \frac{5}{7} \cdot 2)$, doppio del prodotto delle due parti; e $(\frac{5}{7})^2$, quadrato della seconda parte.

Infatti, fare il quadrato della somma $(3 + \frac{5}{7})$ significa [70] fare il prodotto di due fattori eguali entrambi a $(3 + \frac{5}{7})$. Ma sappiamo [204] che, dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare le singole parti del moltiplicando per le singole parti del moltiplicatore, e sommare dipoi i risultati. Quindi è

$$\left(3 + \frac{5}{7}\right)^2 = 3^2 + \frac{5}{7} \cdot 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot$$

Ma [202] i due prodotti $(\frac{5}{7} \cdot 3)$ e $(3 \cdot \frac{5}{7})$ sono eguali, epperò la loro somma è il doppio di uno di essi; è dunque

$$\left(3 + \frac{5}{7}\right)^2 = 3^2 + 3 \cdot \frac{5}{7} \cdot 2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2,$$

come si voleva dimostrare.

248. Cor. 1°. *Il quadrato di un numero intero è uguale al quadrato delle decine, più il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità, più il quadrato della cifra delle unità.*

Dim. Sia, ad es., il numero 258. Sostituendo la cifra delle unità con uno zero, si ha 250, che rappresenta [17] le decine del numero dato. Così, essendo

$$258 = 250 + 8,$$

egli è appunto

$$258^2 = 250^2 + 250 \cdot 8 \cdot 2 + 8^2.$$

249. Cor. 2°. *La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi si può ottenere aggiungendo una unità al doppio del minore.*

Dim. Siano, ad es., i due numeri consecutivi 36 e 37.

Essendo $$37 = 36 + 1,$$

si ha $$37^2 = 36^2 + 36 \cdot 2 + 1.$$

Da questa eguaglianza si scorge essere appunto

$$37^2 - 36^2 = 36 \cdot 2 + 1.$$

Quadrato di un prodotto.

250. Teor. *Il quadrato di un prodotto è uguale al prodotto dei quadrati dei singoli fattori.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto $(3 \cdot 17 \cdot 8)$. Per definizione si ha

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = (3 \cdot 17 \cdot 8)(3 \cdot 17 \cdot 8).$$

Ma, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può invece [203, 1°] moltiplicare successivamente per i singoli fattori; quindi è

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = 3 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 8.$$

E perchè in un prodotto si può [203, 3°] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato, egli è

$$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = (3 \cdot 3)(17 \cdot 17)(8 \cdot 8),$$

ossia $$(3 \cdot 17 \cdot 8)^2 = 3^2 \cdot 17^2 \cdot 8^2,$$

come si voleva dimostrare.

251. Oss. Fissiamo bene l'attenzione sul seguente modo in cui si può fare il quadrato di un numero intero, perchè in ciò troveremo la chiave per risolvere un prossimo importante problema. Prendiamo, ad es., il numero 378, consideriamolo come somma di decine e di unità semplici, e formiamone il quadrato. Lasciando intanto accennate le operazioni, abbiamo

$$378^2 = 370^2 + 370 \cdot 8 \cdot 2 + 8^2.$$

Ma le decine 370 si possono considerare come prodotto di 37 (numero [16] delle decine del numero dato) per 10; quindi [250] è

$$370^2 = 37^2 \cdot 10^2.$$

E perchè 10^2 è uguale a 100, e per moltiplicare per 100 si scrivono due zeri a destra del moltiplicando, possiamo dire intanto che

Per fare il quadrato delle decine di un numero, si può fare il quadrato del numero delle decine, e scrivere due zeri a destra del risultato.

252. Passiamo a considerare il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità. Essendo

$$\begin{aligned} 370 \cdot 8 \cdot 2 &= (37 \cdot 10)\, 8 \cdot 2 \\ \text{»} \quad &= (37 \cdot 2)\, 8 \cdot 10, \end{aligned}$$

possiamo conchiudere in generale che

Per ottenere il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità, si può fare il doppio del numero delle decine, moltiplicarlo per la cifra delle unità, e scrivere poi uno zero a destra del risultato.

Quadrato di un quoziente.

253. Teor. *Il quadrato di una frazione è uguale al quoziente dei quadrati dei due termini.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{9}$. Si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{9}\right)^2 &= \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9}\\ \text{»} \quad &= \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 9}\\ \text{»} \quad &= \frac{7^2}{9^2}\,,\end{aligned}$$

come si doveva dimostrare.

254. Cor. *Il quadrato di una frazione è una frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{47}{62}$, già ridotta ai minimi termini, dimodochè 47 e 62 sono primi tra loro. Il quadrato di questa frazione è intanto $\frac{47^2}{62^2}$. Ma se due numeri sono primi tra loro, sono [129] tali anche due loro potenze qualisivogliano; i due termini della frazione $\frac{47^2}{62^2}$ sono dunque primi tra loro, e perciò 47^2 non può essere divisibile per 62^2. Pertanto $\frac{47^2}{62^2}$ è una frazione, come bisognava dimostrare.

Oss. La precedente dimostrazione fa vedere di più che *il quadrato di una frazione irreducibile è una frazione irreducibile.*

Distinzione dei numeri in quadrati perfetti e quadrati non perfetti.

255. Consideriamo la serie dei numeri interi successivi

1 2 3 4 5 6 7 8 9...

e quella dei loro quadrati

1 4 9 16 25 36 49 64 81...

Prendiamo a considerare un numero intero, che non sia uno di quelli di questa seconda serie, ad es. il 7. Evidentemente questo numero non è il quadrato di nessun numero intero; 2 dà un quadrato minore di 7, e 3 dà un quadrato maggiore di 7. E poichè [196] tutte le frazioni comprese tra 2 e 3 (il cui numero è illimitato) danno per quadrati numeri compresi tra 4 e 9, è abbastanza ovvio il pensare che ci sia una frazione tra queste, il cui quadrato sia 7. Ma ciò non può essere, dacchè si è dimostrato [254] che il quadrato di una frazione non può essere un numero intero.

Un numero, che non si possa ottenere nè facendo il quadrato di un numero intero nè quello di una frazione, si dice *quadrato non perfetto*; laddove si dice *quadrato perfetto* ogni numero, che sia il quadrato di un numero intero o di una frazione.

Neanche una frazione irreducibile, i cui termini non siano ambedue quadrati perfetti, non si può ottenere facendo il quadrato di un numero intero o d'una frazione. Sia, ad es., la frazione $\frac{20}{49}$ irreducibile, il cui numeratore non è un quadrato perfetto. Questa frazione non si può ottenere facendo il quadrato di un numero intero, perchè il quadrato di un numero intero è un intero. Poniamo che possa essere il quadrato di una frazione. Questa frazione, ridotta ai minimi termini ed elevata al quadrato, ci darà una frazione irreducibile, che, perchè uguale alla frazione $\frac{20}{49}$, parimente irreducibile, dovrà [170] avere 20 per numeratore e 49 per denominatore. Ma allora 20 sarebbe quadrato perfetto, e ciò non è. Dunque ogni frazione irreducibile, i cui termini non siano ambedue quadrati perfetti, non può essere quadrato perfetto.

Definizione di radice quadrata.

256. Def. *Si dimanda radice quadrata di un numero quello, che, elevato al quadrato, riproduce il numero proposto.*

Così 8 è la radice quadrata di 64, perchè il quadrato di 8 è 64. La radice quadrata di $\frac{9}{16}$ è $\frac{3}{4}$, perchè, facendo il quadrato di $\frac{3}{4}$, si ottiene appunto $\frac{9}{16}$.

L' operazione, mediante la quale si determina la radice quadrata di un numero, si chiama *estrazione di radice*. Il numero, sul quale si deve fare questa operazione, si dice *radicando*.

Per significare che 8 è la radice quadrata di 64, si scrive $8 = \sqrt{64}$.

Poichè l' inalzamento al quadrato consiste in una moltiplicazione, e l' estrazione di radice è l' operazione inversa, sembrerebbe che questa operazione dovesse consistere in una divisione. Ne è invece affatto differente, perchè, quantunque il radicando si debba in fatto riguardare come il prodotto di due fattori, non si conosce poi nè l' uno nè l' altro di questi; si sa questo soltanto che sono eguali tra loro.

257. La definizione, che abbiamo dato [256] di radice quadrata di un numero, suppone tacitamente che il numero sia quadrato perfetto, giacchè, nel caso contrario, non essendovi numero intero nè frazionario, che elevato alla seconda potenza riproduca il numero dato, la radice quadrata di così fatto numero non esiste (*). Ma ora vedremo che la non esistenza di radici quadrate di numeri, che non siano quadrati perfetti, non dipende da assurdità di domandare cotali radici, ma da imperfezione del concetto di numero, la quale può essere rimediata. A tal fine premetteremo la dimostrazione del seguente

Teor. *La differenza tra i quadrati di due frazioni, i cui numeratori siano due dati numeri interi consecutivi ed il cui denominatore comune sia arbitrario, può esser resa minore di qualsivoglia numero dato, col prendere per denominatore un numero grande abbastanza.*

Dim. Indichiamo con m un numero intero dato qualunque, e con n un numero intero arbitrario; consideriamo le due frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, e i loro quadrati [253] $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{(m+1)^2}{n^2}$. Si vuol provare che, col prender n grande abbastanza, si può ottenere che la differenza (che indicheremo con Δ) tra i due quadrati riesca tanto piccola quanto si voglia.

Poichè la differenza tra i quadrati di due numeri interi consecutivi si può [249] ottenere facendo il doppio del minore ed aggiungendovi 1, la differenza tra i numeratori delle due ultime frazioni è espressa

(*) Aggiungasi a ciò che, ove pure esistesse, non potremmo definirla dicendo che essa è il numero, che elevato alla seconda potenza riproduce il numero dato, giacchè non abbiamo mai parlato di moltiplicazione con un moltiplicatore che non sia nè intero nè frazionario. E definire una cosa vuol dire indicarne tal carattere che si possa adoperare per distinguerla da qualunque altra.

da $(m \cdot 2 + 1)$; epperò la differenza tra le frazioni stesse è [179]

$$\Delta = \frac{m \cdot 2 + 1}{n^2},$$

ossia [198]

$$\Delta = \left(\frac{m \cdot 2 + 1}{n}\right) \frac{1}{n},$$

od anche [175]

$$\Delta = \left(\frac{m}{n} \cdot 2 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

La differenza tra i quadrati delle due frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$ si può dunque trovare prendendo un *n.esimo* della somma chiusa tra parentesi. Ed ora è manifesto che, quando si possa asserire che la frazione $\frac{m}{n}$ (ammesso che m possa anche mutar di valore) si mantenga minore di un dato numero pur grande che sia, si può anche asserire che, col prendere n grande abbastanza, si può ottenere che la differenza Δ sia tanto piccola quanto si voglia. Ciò d. d.

257. Ciò premesso, torniamo alla nostra questione della radice quadrata di numero che non sia quadrato perfetto, e per fissare le idee, supponiamo si tratti della radice quadrata di 7.

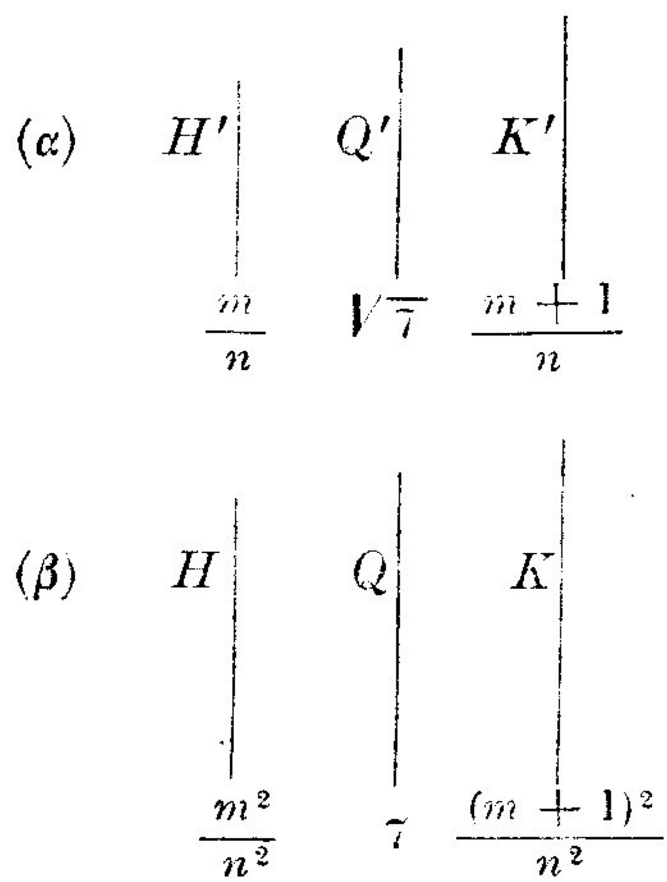
Prendiamo un segmento di retta per unità, dividiamolo in un numero arbitrario n di parti eguali, e formiamo poi le somme di 2, di 3, di 4.... di queste parti. Le grandezze risultanti (che accenneremo collettivamente chiamandole le grandezze α) sono rispettivamente rappresentate [157] dalle frazioni

$$(1) \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \frac{4}{n} \cdots \quad \frac{m}{n}, \quad \frac{m+1}{n} \cdots\cdots,$$

i cui quadrati sono [253] ordinatamente

$$(2) \qquad \frac{4}{n^2}, \quad \frac{9}{n^2}, \quad \frac{16}{n^2} \cdots \quad \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{(m+1)^2}{n^2} \cdots\cdots$$

Se ora si vogliono ottenere delle grandezze, che siano rappresentate da queste nuove frazioni, basta dividere l'unità in n^2 parti eguali, e poi far le somme di 4, di 9, di 16.... di queste parti. (Accenneremo collettivamente queste nuove grandezze chiamandole le grandezze β).



Sappiamo che tra le grandezze β (perchè tra i numeri (2) non si può mai presentare il numero 7) nessuna può essere uguale a quella grandezza, che chiameremo Q, che si ottiene sommando 7 grandezze uguali all'unità. Imaginiamo che siano H e K le due consecutive delle grandezze β tra le quali cade la Q; e siano $\frac{m^2}{n^2}$ ed $\frac{(m+1)^2}{n^2}$ le frazioni che le rappresentano. Indichiamo poi con H' e K' quelle delle grandezze α, che sono rappresentate rispettivamente da $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$.

Le grandezze α e le grandezze β si corrispondono adunque, ciascuna a ciascuna, con questa legge che il numero che rappresenta una delle β è il quadrato del numero che rappresenta la corrispondente delle α. Ma, come abbiamo detto, non si presenta mai la Q tra le β, perchè non si può presentare mai, comunque si muti n, la corrispondente tra le grandezze α.

È poi chiaro che, col prendere n grande a bastanza, si può ottenere che la differenza tra due consecutive delle α sia tanto piccola quanto si vuole. Ed altrettanto si può dire della differenza tra le due grandezze H e K. Infatti, poichè la differenza tra i numeri, che rappresentano H e K, è [257]

$$\left(\frac{m}{n} \cdot 2 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n},$$

e il numero $\frac{m}{n}$ rappresenta una grandezza minore della K', prendendo n grande a bastanza, anche la differenza tra le grandezze H e K si può far diventare piccola quanto si vuole.

Ed ora osserviamo che, per quanto grande sia n, cioè per quanto piccola sia la differenza tra H' e K', si può sempre imaginare una grandezza Q' che sia maggiore di H' e minore di K'. Ma nessun'altra grandezza Q'' potrebbe poi godere anch'essa di questa proprietà di Q', giacchè, prendendo n così grande che la differenza tra H' e K' riesca minore di quella che è tra Q' e Q'', quest'ultima sarebbe necessariamente minore di H', oppure maggiore di K'. Similmente si prova che sola la grandezza Q ha la proprietà di essere compresa tra le grandezze H e K; epperò si conchiude che le grandezze Q e Q' sono così collegate, che dall'una resta pienamente determinata quell'altra.

A tal punto, se osserviamo che le grandezze α (poichè n è arbitrario) son quelle che si possono ottenere sommando parti aliquote dell'unità, e che la grandezza Q' operando in questo modo non avvien mai che si presenti, troviamo di poter tirare da tutte le nostre precedenti considerazioni questa conchiusione notevolissima che: *si danno grandezze, che non possono essere riprodotte sommando parti aliquote dell' unità,* e che pertanto non si possono rappresentare nè con numeri interi nè con numeri frazionarî. Così fatte grandezze si dicono, per questo riguardo, *incommensurabili* con l'unità: per rappresentarle bisogna creare una nuova specie di numeri, che si diranno *incommensurabili* od *irrazionali.* Per opposizione poi i numeri interi e i frazionarî si chiameranno numeri *commensurabili* o *razionali.*

Per ora, restringendoci a definire tra i numeri della nuova specie quelli, la cui mancanza ci si è rivelata per la questione delle radici quadrate di quadrati non perfetti, seguitando ancora a tener d'occhio un caso determinato, stabiliamo di dire radice quadrata di 7 il numero che rappresenta la grandezza Q' e di designarlo con la scrittura $\sqrt{7}$. Perchè poi Q' è la grandezza che è maggiore di tutte quelle H' che sono rappresentate da numeri i cui quadrati sono minori di 7, e che è minore di tutte le grandezze K' che sono rappresentate da numeri i cui quadrati sono maggiori di 7, daremo, ora in generale, la seguente

258. Definizione. *La radice quadrata di un numero, che non è quadrato perfetto, è un numero irrazionale, maggiore dei numeri razionali i cui quadrati sono minori del numero dato, e minore dei numeri razionali i cui quadrati sono maggiori di questo numero.*

Radice quadrata a meno di una unità.

259. Consideriamo i numeri

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,

e i loro quadrati

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.

Quando si volesse, ad es., la radice quadrata di 70, si comincerebbe ad osservare che questo numero è compreso tra 64 ed 81, le cui radici quadrate sono 8 e 9. Perciò la radice quadrata di 70 è un numero compreso tra 8 e 9, composto cioè dell'intero 8, e di un'altra parte minore di *uno*. Prendendo 8, come radice di 70, si commette errore minore di *uno*. Perciò 8 si chiama *radice quadrata di 70 a meno uno*.

La radice a meno uno di un numero è la parte intera della radice, ed è la radice quadrata del più grande intero quadrato perfetto, che non supera il numero proposto.

260. Teor. *La radice quadrata a meno di una unità di un numero frazionario è uguale alla radice quadrata a meno di una unità della parte intera di questo numero.*

Dim. Infatti, supponendo, ad es., che si tratti del numero $70 + \frac{3}{4}$, questo numero è compreso tra 70 e 71. La radice a meno uno di 70 è un numero intero il cui quadrato non supera 70, laddove il quadrato del numero intero successivo supera 70, ed è perciò almeno 71. Ecco, che il quadrato dell'intero successivo alla radice a meno uno di 70 supera necessariamente anche $70 + \frac{3}{4}$; epperò resta dimostrato che la radice a meno uno di $(70 + \frac{3}{4})$ è ad un tempo la radice a meno uno di 70.

Oss. Da questo teorema si trae la conseguenza che, fintantochè ci si contenta di saper determinare la radice quadrata a meno di una unità, basta saperla estrarre da un numero intero.

261. Finchè il radicando non supera 100, la radice quadrata a meno di una unità sappiamo trovarla a memoria. Volendo, ad es., la radice quadrata di 68, ci accorgiamo facilmente che questo numero è compreso tra 64 ed 81; la radice quadrata di 64 è 8, per conseguenza 8 è la radice richiesta. Sottraendo 64 dal radicando dato, si ha 4 per resto; questo si chiama *il resto dell' estrazione di radice.*

262. Passando a considerare il caso di un radicando maggiore di 100, proponiamoci, ad es., di determinare la radice a meno uno del numero 5762. Facendo questa ricerca, otterremo di stabilire i teoremi, su cui si fonda la regola per estrarre la radice a meno uno da un numero intero qualunque.

Pensando al modo [251, 252] in cui si può fare il quadrato di un numero, ci rammentiamo che si fa anzitutto il quadrato del *numero delle decine, e che gli si scrivono a destra due zeri.* Al risultato si aggiunge poscia il doppio prodotto, ecc. Da questa osservazione rileviamo che, ove si separino alla destra del radicando due cifre, nel numero rimanente (numero delle centinaia [18] del radicando) è contenuto il quadrato del numero delle decine della radice. Così nel caso nostro possiamo dire che 57 deve contenere il quadrato del numero delle decine della radice che ricerchiamo.

Cominceremo a considerare 49, maggior quadrato contenuto in 57, ed a pensare che la sua radice 7 potrebbe essere il numero delle decine che si desidera.

E diremo: dacchè 7 è la radice a meno uno di 57, il quadrato di 7 non supera 57, laddove il quadrato di 8 lo deve superare di una unità almeno. Il quadrato di 70, cioè 4900, non supera dunque il radicando 5762, laddove il quadrato di 80 deve superarlo, perchè il numero delle sue centinaia supera, almeno di 1, il numero delle centinaia di 5762.

Pertanto la radice cercata non deve essere minore di 70, e dev' essere minore di 80. Deve avere 7 decine e non può averne 8; 7 è dunque il numero delle decine della radice.

Queste considerazioni sono generali, valgono cioè per un numero qualunque, epperò possiamo enunciare il

Teor. *La radice quadrata a meno di una unità del numero delle centinaia di un numero dato è il numero delle decine della sua radice quadrata.*

263. Passiamo a vedere come, conoscendo il numero delle decine della radice quadrata di 5762, si possa trovare la cifra delle unità di questa radice.

Sappiamo che il quadrato di un numero, composto di decine e di unità, si compone di tre parti, delle quali la prima è il quadrato delle decine. E perchè nel caso nostro le decine della radice sono già determinate, facciamone il quadrato, e sottraiamolo dal radicando.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{5762} & 7 \\ \cline{2-2}
4900 & 14 \\ \cline{1-1}
862 &
\end{array}
$$

Il resto 862 deve contenere le altre parti del quadrato. La prima di queste, cioè il doppio del prodotto delle decine per la cifra delle unità, si può formare [252] prendendo 14 (doppio del numero delle decine), moltiplicandolo per la cifra delle unità, ed infine *scrivendo uno zero alla destra del risultato*. Si comprende da ciò che 86 (numero delle decine del resto) deve contenere *il prodotto del doppio del numero delle decine della radice per la cifra delle unità.*

Se potessimo conoscere quante decine si trovano nel quadrato della cifra delle unità, e quelle provenienti da ciò che 5762 probabilmente non è un quadrato perfetto, sottraendo il loro numero da 86, avremmo nel resto precisamente il prodotto del doppio del numero delle decine per la cifra delle unità. Allora, conoscendo uno dei fattori (il doppio del numero delle decine), mediante divisione otterremmo l'altro fattore (la cifra delle unità).

Non potendo conoscere il numero, che vorremmo sottrarre da 86, ci rassegneremo a dividere 86 per 14 (doppio del numero delle decine della radice), pensando che il quoziente intero potrà essere maggiore della cifra delle unità, appunto perchè si è diviso per 14 un numero che può superare di 14, e anche di più, quello che avremmo dovuto dividere.

Questa conchiusione è importante, e ci gioverà enunciarla sotto forma di

Teor. *Se dal radicando si sottrae il quadrato delle decine della radice, e si divide il numero delle decine del residuo per il doppio del numero delle decine della radice, si ottiene nel quoziente intero o la cifra delle unità od una cifra troppo forte.*

264. Dividendo 86 per 14, si ha 6 per quoziente intero. Sappiamo [263] che questo numero è uguale o maggiore della cifra delle unità. Cerchiamo ora un modo co-

$\sqrt{5762}$	75	
4900	146	145
862	6	5
725	876	725
137		

modo per riconoscere se questo quoziente intero sia la cifra cercata, e per rettificarla nel caso che la si trovi troppo grande.

La cifra 6 sarà la cifra delle unità, se, facendo il doppio del prodotto delle decine della radice per 6, ed aggiungendovi il quadrato di 6, si otterrà risultato che non sia maggiore del resto 862. Le operazioni da eseguire sono indicate nell'espressione

$$70 \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \qquad \text{oppure [68]}$$
$$140 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \qquad \text{o per il teorema [61]}$$
$$(140 + 6)\, 6 \qquad \text{o finalmente}$$
$$146 \cdot 6.$$

Si vede che: *per riconoscere se il quoziente intero sia o no la cifra delle unità, basta scriverlo in seguito al doppio del numero delle decine della radice, e moltiplicare il numero così ottenuto per questa cifra, che si assaggia.*

Nel caso nostro, il prodotto 876, che ci risulta, supera il resto 862. Ciò prova che la cifra 6 è troppo forte. Facendo la prova con la cifra 5 prossima inferiore, si ottiene per prodotto 725. Questo si può sottrarre da 862, e da ciò si conchiude che 5 è la cifra ricercata.

Sottraendo da 862 il numero 725, abbiamo avuto per resto 137. Ciò vuol dire che il numero proposto non è quadrato perfetto. La sua radice quadrata è irrazionale, ed è compresa tra 75 e 76.

265. Sappiamo [262] che, per trovare il numero delle decine della radice quadrata di un numero, basta estrarre la radice a meno uno dal numero delle centinaia del radicando. Determinato il numero delle decine, sappiamo poi [263, 264] trovare la cifra delle unità. Proponiamoci ora di determinare la radice quadrata di un numero qualunque, ad es. di 39648213, e ciò allo intento di fissare definitivamente la regola per calcolare la radice a meno uno di qualsivoglia numero dato.

Affine di fissare il discorso, si finga che sia 6427 la radice a meno uno del numero dato. Sappiamo [262] che 642 (numero delle decine della radice) si determina estraendo la radice a meno uno dal numero delle centinaia del radicando. Siamo così condotti a separare nel numero dato le due ultime cifre a destra, ed a prescindere per il momento da queste cifre. Quando avremo trovato il numero delle decine, sapremo [263, 264] determinare la cifra delle unità.

Così abbiamo ridotto la difficoltà alla ricerca della radice a meno uno di un numero, che ha due cifre di meno del proposto.

Dobbiamo adunque per ora cercare la radice quadrata a meno uno del numero 396482, radice che imaginiamo sia 642. Qui ci troviamo in condizioni analoghe a quelle nelle quali eravamo al principio del ragionamento. Perciò possiamo dire che si otterrà 64, numero delle decine di questa radice, estraendo la radice a meno uno da 3964 (numero delle centinaia del radicando 396482). Determinato il numero delle decine, sapremo trovare la cifra delle unità. Dal numero proposto dobbiamo dunque separare altre due cifre, e troviamo poi di essere da capo per conto del numero rimanente.

La difficoltà è per ora ridotta alla ricerca della radice a meno uno del numero 3964, radice che è per noi rappresentata da 64. Il 6 (numero delle decine di questa radice) lo dobbiamo trovare estraendo la radice a meno uno da 39, numero delle centinaia del nuovo radicando. Così siamo condotti a separare dal radicando proposto un' altra coppia di cifre, ed a ripetere sul numero rimanente considerazioni già fatte.

$\sqrt{39\vert 64\vert 82\vert 13}$	6296	
36	123	122
364	3	2
244	369	244
12082	1249	
11241	9	
84113	11241	
75516	12586	
8597	6	
	75516	

Senonchè, nel caso nostro, siamo già pervenuti ad un numero, del quale sappiamo trovare la radice a meno uno a memoria. La radice a meno uno di 39 è 6, e questo è il numero delle decine della radice di 3964, che dovevamo determinare. Per trovare la cifra delle unità, sottraggo da 39 il quadrato di 6, e accanto al residuo scrivo 64. Con ciò ho sottratto dal radicando 3964 il numero 3600 (quadrato di 60, decine della radice). Faccio [263] il doppio del numero delle decine della radice, e per questo doppio divido 36 (numero delle decine del resto). Provando [264] la cifra 3, fu riconosciuta troppo forte, e si trovò da ritenere la cifra 2. In tal modo si è trovato 62, quale radice a meno uno di 3964, ed il resto 120.

Ora dobbiamo rammentarci che dovevamo determinare la radice a meno uno di 396482; abbiamo già trovato il numero delle decine della sua radice, calcoliamo adunque la cifra delle unità. A tale intento bisogna [263] sottrarre dal radicando il quadrato delle decine. Poichè abbiamo sottratto da 3964 il quadrato di 62, scrivendo 82 a destra del resto 120, avremo il residuo, sul quale si deve operare per ottenere la cifra delle unità. Faremo adesso [263] il doppio del numero delle decine, e per 124, che risulta, divideremo 1208 (numero delle decine del resto). Il quoziente intero 9 dev' essere provato. Si riconosce esatto; e il nuovo resto 841 si può intendere risultante dal sottrarre da 396482 il quadrato della sua radice a meno uno, la quale è 629.

Siamo finalmente al radicando proposto 39648213. Il numero 629 non è che il numero delle decine della radice; un ragionamento analogo a quello testè fatto ci indica di scrivere l' ultima coppia 13 accanto all'ultimo resto, e di dividere 8411 (numero delle decine del numero risultante) per 1258, doppio del numero scritto nel posto della radice. Provando il quoziente intero 6, si trova che 6 è veramente la cifra delle unità.

Il resto definitivo dell' operazione è 8597, e questo, aggiunto al quadrato di 6296, riproduce il dato radicando.

Da tutto ciò che precede si conchiude la

Regola. *Per estrarre la radice quadrata a meno uno da un numero intero:*

1°. *Si separano le cifre di questo numero in coppie di due cifre partendo da destra; l' ultima coppia a sinistra potrà constare di una sola cifra.*

2°. *Si estrae la radice a meno uno dalla prima coppia a sinistra, e si ottiene così la cifra d' ordine più elevato della radice.*

3°. *Si sottrae dalla prima coppia il quadrato* *della cifra determinata, e accanto del resto si scrive la seconda coppia.*

4°. *Si divide il numero delle decine del numero così ottenuto per il doppio della cifra già scritta nel posto della radice; il quoziente intero è la seconda cifra della radice, oppure una cifra troppo forte. Per provare questa cifra, la si scrive a destra del doppio, che ha servito da divisore; si moltiplica il numero, che così viene formato, per la cifra stessa che si assaggia; e si sottrae il prodotto dal numero ottenuto calando la seconda coppia. Se la sottrazione si può fare, la cifra provata è buona; altrimenti essa è troppo forte. Si sperimenta in tal caso la cifra prossima inferiore, e si seguita, ove occorra, fino a che sia possibile la sottrazione.*

5°. *Per continuare, a destra dell'ultimo resto si cala la terza coppia; si divide il numero delle decine del numero così ottenuto per il doppio del numero già scritto nel posto della radice, e si sperimenta il quoziente trovato, prima di scriverlo come terza cifra della radice.*

6°. *Così si continua, finchè tutte le coppie siano state calate.*

7°. *Per prova dell'operazione, si aggiunge l'ultimo resto al quadrato della radice trovata. Deve risultare il radicando.*

Oss. 1ª. Può accadere che una delle divisioni, che si fanno per calcolare la radice a meno uno di un numero dato, dia *zero* per quoziente intero. Questo *zero* si deve scrivere nella radice, e alla destra dell' ultima coppia calata si scrive una nuova coppia, se ve ne sia, e si continua l' operazione.

Oss. 2ª. Uno dei quozienti interi può essere maggiore di 9. In tal caso la prima cifra da sperimentare è 9. Chè infatti, più grande non può essere il numero delle unità dell'ordine che si sta calcolando, altrimenti si dovrebbe crescere di uno almeno la parte già trovata della radice, e ciò contradirebbe il teorema: il numero delle decine della radice è uguale alla radice a meno di una unità del numero delle centinaia del radicando.

Oss. 3ª. Nessuno dei residui, che si trovano nell'estrarre la radice a meno uno da un numero, può superare il doppio della radice trovata fino a quel punto. Consideriamo nel nostro esempio il residuo 841. La radice calcolata, fino a quando si ebbe questo residuo, è 629. Sappiamo che 629 dev'essere la radice a meno uno di 396482, dimodochè questo numero deve risultare quando si aggiunga 841 al quadrato di 629. Sappiamo [249] che, se al quadrato di un numero si aggiunga il doppio del numero stesso ed una unità, si ottiene il quadrato del numero successivo. Ne segue che, se 841 superasse il doppio di 629, allora 629 non sarebbe più la radice a meno uno di 396482, poichè da questo numero si potrebbe sottrarre anche il quadrato di 630.

Calcolo della radice quadrata con una data approssimazione.

266. Noi conosciamo una operazione con la quale si determina la radice a meno di una unità di un numero intero qualunque. Se il radicando è frazionario, per ottenere la sua radice a meno uno, si estrae la radice dalla parte intera [260].

Proponiamoci ora di trovare una regola per calcolare la radice quadrata di un numero intero o frazionario con una approssimazione prestabilita qualunque. Per fissare l'attenzione, prendiamo il numero $\frac{31}{7}$, e vediamo di trovarne la radice a meno $\frac{1}{12}$, di trovare cioè un numero razionale, così da poter dire che la differenza tra esso e la radice quadrata del numero dato è certamente minore di $\frac{1}{12}$.

A tale intento consideriamo la serie di frazioni

$$\frac{0}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{4}{12} \cdots,$$

ciascuna delle quali supera l'antecedente di $\frac{1}{12}$. Imaginiamo di formare uno dopo l'altro i quadrati di queste frazioni; troveremo risultati sempre più grandi. Ed è chiaro che dobbiamo pervenire ad una frazione (con un certo numeratore, che intenderemo rappresentato dalla lettera x) tale che il suo quadrato sia minore di $\frac{31}{7}$, laddove il quadrato della frazione successiva (che sarà rappresentata da $\frac{x+1}{12}$) superi $\frac{31}{7}$. Per la definizione di radice quadrata, la radice quadrata di $\frac{31}{7}$ è compresa tra le due frazioni $\frac{x}{12}$ ed $\frac{x+1}{12}$. E perchè queste due frazioni differiscono tra loro precisamente di $\frac{1}{12}$, dalla radice di $\frac{31}{7}$, che è da esse compresa, differiscono, la prima per difetto, la seconda per eccesso, meno di $\frac{1}{12}$.

La frazione $\frac{x}{12}$ è perciò la radice di $\frac{31}{7}$ a meno di $\frac{1}{12}$; ma rimane da determinare il numeratore x.

Per ipotesi abbiamo intanto

$$\frac{x^2}{12^2} < \frac{31}{7} < \frac{(x+1)^2}{12^2}.$$

Moltiplichiamo questi tre numeri per 12^2. I tre prodotti sono disuguali, ed è per l'appunto

$$x^2 < \frac{31}{7} \cdot 12^2 < (x+1)^2.$$

Meditando su questa *limitazione* si comprende quale è il calcolo, che si deve fare, per ottenere il numero x. Diremo infatti: x è un intero, ed $(x+1)$ è l'intero successivo. Il quadrato di x è minore del numero $(\frac{31}{7} \cdot 12^2)$, laddove il quadrato di $(x+1)$ supera questo numero. Ne segue che x è precisamente la radice a meno di una unità del prodotto $(\frac{31}{7} \cdot 12^2)$.

La radice richiesta è rappresentata da $\frac{x}{12}$: quindi, trovato l'intero x, bisogna poi dividerlo per 12.

Le precedenti considerazioni sono generali, e se ne ricava la

Regola. *Per estrarre la radice quadrata a meno di* $\frac{1}{n}$ *da un numero dato, si moltiplica questo numero per il quadrato di* n, *dal prodotto si estrae la radice quadrata a meno di una unità, e finalmente si divide per* n *questa radice.*

Esempio. Sia da estrarre la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ a meno di $\frac{1}{7}$.

Moltiplichiamo $\frac{73}{5}$ per 49, quadrato di 7. Il prodotto è

$$\frac{73 \cdot 49}{5} = \frac{3577}{5} = 715 + \frac{2}{5}.$$

La radice quadrata a meno di una unità di $(715 + \frac{2}{5})$ è la stessa [260] che quella di 715, ed è 26. Per conseguenza la radice a meno di $\frac{1}{7}$ del numero $\frac{73}{5}$ è $\frac{26}{7}$; in altre parole la radice quadrata di $\frac{73}{5}$ è compresa tra $\frac{26}{7}$ e $\frac{27}{7}$.

267. Oss. Supponiamo sia data una frazione, il cui denominatore sia quadrato perfetto, ad es. la frazione

$$\frac{13}{49} = \frac{13}{7^2},$$

e di dover estrarne la radice quadrata a meno di $\frac{1}{7}$.

Secondo la regola or ora stabilita, bisogna anzitutto moltiplicare per 7^2 il numero proposto; nel caso nostro il prodotto è precisamente il numeratore 13. Poichè 3 è la radice a meno di una unità del prodotto, $\frac{3}{7}$ è la radice a meno di $\frac{1}{7}$ di $\frac{13}{49}$.

Da questo esempio conchiudiamo la

Regola. *Quando il denominatore di una frazione è un quadrato perfetto, ad es.* n^2, *dividendo la radice a meno uno del numeratore per* n, *radice del denominatore, si ottiene la radice quadrata della frazione proposta a meno di* $\frac{1}{n}$.

Valutazione in decimali della radice quadrata di un numero.

268. Ordinariamente, quando si tratta di determinare la radice quadrata di un numero, si vuole che questa radice sia espressa in decimali, e la frazione stessa, che esprime il grado d'approssimazione, è una parte decimale dell'unità. In tal caso la regola [266] per l'estrazione di radice quadrata con approssimazione data si può enunciare più semplicemente.

Supporremo che il radicando sia un numero decimale, perchè a questo caso si può ricondurre ogni altro. (Infatti, quando sia data una frazione ordinaria, si può convertirla [236] in decimali, onde applicarle poi la regola che stiamo per esporre).

Anzitutto per estrarre la radice a meno di $\frac{1}{10}$, o di $\frac{1}{100}$, o di $\frac{1}{1000}$ ... bisogna [266] moltiplicare il radicando per $10^2 = 100$, o per 10 000, o per 1 000 000 ... Dal prodotto si deve poi estrarre la radice a meno uno; e finalmente dividere questa radice per 10, o per 100, o per 1000.., secondo il caso. Sappiamo che si moltiplica un numero decimale per 100, per 10 000, per 1 000 000 . . . avanzando la virgola (verso destra) di due, di quattro, di sei posti . . ; e che [231] si divide un numero decimale per 10, per 100, per 1000 . . . ritirando la virgola (verso sinistra) di uno, di due, di tre posti . . . , secondo il caso. Possiamo quindi enunciare la regola per l'estrazione di radice con approssimazione data (per il caso che l'approssimazione sia una parte decimale dell'unità) nel modo seguente.

Regola. *Per estrarre la radice quadrata a meno di* $\frac{1}{10}$, *o di* $\frac{1}{100}$. *o di* $\frac{1}{1000}$ . . . *da un numero decimale, si avanza in questo la virgola (verso destra) rispettivamente di due, o di quattro, o di sei . . . posti, e si estrae la radice quadrata a meno di una unità dal numero così ottenuto. Finalmente nella radice trovata si ritira la virgola (verso sinistra) di uno, o di due, o di tre . . . posti.*

Esempî. Si calcoli la radice di 7 a meno di *un millesimo*. Dovendo trasportare la virgola di sei posti, scrivo sei zeri a destra di 7. La radice a meno uno di 7 000 000 è 2645; la radice ricercata è quindi 2,645.

Supponiamo ora di voler estrarre la radice quadrata a meno $\frac{1}{100}$ dalla frazione $\frac{22}{7}$. Trasformeremo questa frazione in decimali, poi avanzeremo la virgola di quattro posti, ed estrarremo quindi la radice quadrata dal numero ottenuto. E perchè [260] la radice a meno uno di un numero frazionario coincide con la radice a meno uno della parte intera, nel trasformare $\frac{22}{7}$ in decimali, basterà calcolare tante cifre, quante devono essere oltrepassate dalla virgola. Il calcolarne di più è superfluo, dacchè non se ne fa nessun uso. Nel nostro caso dovremo spingere la divisione fino alla quarta decimale; e poichè è

$$\frac{22}{7} = 3,1428\ldots,$$

estrarremo la radice a meno uno da 31428. Si trova 177; epperò 1,77 è la radice di $\frac{22}{7}$ a meno di $\frac{1}{100}$.

Esercizî.

97. Dimostrare che un numero intero, la cui cifra delle unità sia una delle cifre 2, 3, 7, 8, non può essere quadrato perfetto. (Si osservi che il quadrato di un numero termina con la stessa cifra, che il quadrato della cifra delle unità del numero dato [251]. Si considerino tutti i casi possibili; ecc.).

98. Il quadrato di un numero intero non può terminare con un numero impari di zeri.

99. Dimostrare che, se un numero intero, che termina per 5, è un quadrato perfetto, la cifra delle decine è 2. (La radice deve terminare per 5: si faccia il quadrato di un numero così fatto secondo il § 251).

100. La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un numero intero sia il quadrato di un altro numero intero, è che tutti i suoi fattori primi abbiano esponente pari.

101. Un numero intero divisibile per un numero primo, non può essere un quadrato perfetto, se non è divisibile anche per il quadrato di detto numero primo. (La ragione sta nell'esercizio antecedente).

102. Trovare la condizione, a cui devono sodisfare due numeri interi, affinchè il loro prodotto sia un quadrato perfetto. (Si suppongano decomposti in fattori primi, e si badi all'esercizio 100).

103. Quale è il più piccolo numero intero, per cui si deve moltiplicare 600, per ottenere un prodotto quadrato perfetto? (Si decomponga in fattori, e si badi all'esercizio 100).

104. Perchè una frazione sia un quadrato perfetto è necessario e sufficiente che il prodotto de' suoi termini sia un quadrato perfetto. (È sufficiente perchè in tal caso, moltiplicando i due termini per il numeratore o per il denominatore, si ha un quadrato perfetto [253]. È necessario perchè, semplificandola, i due termini devono riuscire quadrati perfetti [254], nel qual caso il prodotto è quadrato perfetto, e resta tale contemplando i fattori soppressi. Esercizio 100).

105. Trasformare una frazione data in altra il cui denominatore sia quadrato perfetto, ed inoltre il più piccolo possibile.

106. La differenza dei quadrati di due numeri interi consecutivi è 55. Quali sono questi numeri? (Si badi al § 249).

107. Quale è la frazione che, divisa per la sua inversa, dà $^{25}/_{64}$ per quoziente?

108. Quale è il numero di cui il terzo, moltiplicato per la metà, dà per prodotto 864? (Che cosa risulta dalla moltiplicazione del terzo di un numero per la sua metà? Dunque 864 è il sesto, ecc.).

109. Valutando in decimali la radice quadrata di un numero, che non sia quadrato perfetto, non può risultare una frazione periodica.

110. Che quoziente intero può risultare dalla divisione di un numero per la sua radice quadrata a meno di una unità?

CAPITOLO XII

CUBO E RADICE CUBICA

Cubo della somma di due numeri.

269. Teor. *Il cubo della somma di due numeri si compone del cubo del primo, di tre volte il prodotto del quadrato del primo numero per il secondo, di tre volte il prodotto del primo per il quadrato del secondo, e del cubo del secondo.*

Dim. Siano 7 e 4 i numeri proposti. Formare il cubo della loro somma significa calcolare il prodotto di tre fattori eguali a $(7 + 4)$. Il prodotto dei due primi fattori è il quadrato di $(7 + 4)$, e noi sappiamo [247] che è $(7 + 4)^2 = 7^2 + 7 \cdot 4 \cdot 2 + 4^2$.

Per ottenere il cubo resta dunque da moltiplicare il quadrato per $(7 + 4)$. Ma dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può [204] moltiplicare le singole parti del moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore, e sommare dipoi i risultati. È dunque

$$(7 + 4)^3 = 7^2 \cdot 7 + 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 7$$
$$+ 7^2 \cdot 4 + 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 4.$$

Poichè per moltiplicare un prodotto per un numero basta moltiplicare [203, 2°] uno dei fattori per questo numero, e perchè [202] si può cambiare l'ordine dei fattori, è pure

$$(7 + 4)^3 = 7^3 + (7^2 \cdot 4)\, 2 + 4^2 \cdot 7 + 7^2 \cdot 4 + (4^2 \cdot 7)\, 2 + 4^3.$$

Se alla somma di due numeri eguali a $(7^2 \cdot 4)$ si aggiunge il numero stesso, risulta il triplo di $(7^2 \cdot 4)$; ecc.; perciò infine è appunto

$$(7 + 4)^3 = 7^3 + 7^2 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4^2 \cdot 3 + 4^3.$$

270. Cor. 1°. Dovendo fare il cubo di un numero intero, si può decomporlo in due parti, separando le decine dalla cifra delle unità; poi si otterrà il cubo sommando: 1°. *il cubo delle decine,* 2°. *il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità,* 3°. *il triplo del prodotto delle decine per il quadrato della cifra delle unità,* 4°. *il cubo della cifra delle unità.*

271. Cor. 2°. *La differenza dei cubi di due numeri interi consecutivi è composta del triplo del quadrato del minore dei due numeri, del triplo di questo numero minore, e di* 1.

Infatti è, ad es.,

$$27^3 = (26 + 1)^3 = 26^3 + 26^2 \cdot 3 + 26 \cdot 3 + 1,$$

epperò

$$27^3 - 26^3 = 26^2 \cdot 3 + 26 \cdot 3 + 1,$$

come si doveva dimostrare.

Cubo di un prodotto.

272. Teor. *Il cubo di un prodotto è uguale al prodotto dei cubi dei fattori.*

Dim. Sia, ad es., il prodotto $(8 \cdot 12 \cdot 5)$. È intanto

$$(8 \cdot 12 \cdot 5)^3 = (8 \cdot 12 \cdot 5)(8 \cdot 12 \cdot 5)(8 \cdot 12 \cdot 5).$$

Ma, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può [203, 1°] moltiplicare successivamente per i fattori, quindi è

$$(8 \cdot 12 \cdot 5)^3 = 8 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 5.$$

E perchè in un prodotto si può [203, 3°] sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato, abbiamo

$$(8 \cdot 12 \cdot 5)^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8)(12 \cdot 12 \cdot 12)(5 \cdot 5 \cdot 5)$$
$$\text{»} \quad = 8^3 \cdot 12^3 \cdot 5^3. \qquad \text{c. d. d.}$$

273. Prendiamo ora un numero intero, ad es. 347. Consideriamolo quale somma di due parti, separando le decine [17] dalle unità semplici, ed eleviamolo al cubo, operando secondo la regola che insegna a fare il cubo della somma di due numeri. Otteniamo intanto

$$347^3 = 340^3 + 340^2 \cdot 7 \cdot 3 + 340 \cdot 7^2 \cdot 3 + 7^3.$$

Cominciamo a fare il cubo delle decine. Essendo

$$340 = 34 \cdot 10,$$

è [272]

$$340^3 = 34^3 \cdot 10^3$$

ossia

$$340^3 = 34^3 \cdot 1000.$$

Per moltiplicare per 1000, si scrivono tre zeri a destra del moltiplicando; così possiamo dire che

Per fare il cubo delle decine di un numero, si può fare il cubo del numero delle decine, e scrivere tre zeri a destra del risultato.

274. Passiamo a formare il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità. Si ha

$$340^2 \cdot 7 \cdot 3 = (34 \cdot 10)^2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$\text{»} \quad = 34^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^2$$
$$\text{»} \quad = (34^2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 100.$$

Da questo esempio riconosciamo che

Per ottenere il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità, si può fare il triplo del quadrato del numero delle decine, moltiplicarlo per la cifra delle unità, e scrivere due zeri a destra del risultato.

Cubo di un quoziente.

275. Teor. *Il cubo di un quoziente è uguale al quoziente dei cubi dei due termini.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{7}{9}$. Si ha

$$\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9}$$

$$» \quad = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{9 \cdot 9 \cdot 9}$$

$$» \quad = \frac{7^3}{9^3},$$

come si doveva dimostrare.

276. Cor. *Il cubo di una frazione è una frazione.*

Dim. Sia, ad es., la frazione $\frac{47}{62}$, già ridotta ai minimi termini, dimodochè 47 e 62 sono primi tra loro. Il cubo di questa frazione è $\frac{47^3}{62^3}$. Ma [129] se due numeri sono primi tra loro, tali sono anche due loro potenze qualisivogliano: i due termini della frazione $\frac{47^3}{62^3}$ sono dunque primi tra loro, e perciò 47^3 non può essere divisibile per 62^3. Pertanto $\frac{47^3}{62^3}$ è una frazione, come bisognava dimostrare.

Oss. La precedente dimostrazione ci ha fatto vedere di più che il cubo di una frazione irreducibile è una frazione irreducibile.

Distinzione dei numeri in cubi perfetti e cubi non perfetti.

277. Consideriamo la serie dei numeri interi successivi

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...

e quella dei loro cubi

1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000...

Prendiamo a considerare un numero intero, che non sia di quelli di questa seconda serie, ad es. 20. Questo numero evidentemente non è il cubo di nessun numero intero; ma non si può neanche ottenere elevando al cubo una frazione, giacchè sappiamo [276] che il cubo di una frazione è una frazione. Perciò 20 non è cubo perfetto.

Neanche una frazione irreducibile, i cui termini non siano ambedue cubi perfetti, si può ottenere elevando al cubo un numero intero od una frazione. Infatti, sia, ad es., la frazione irreducibile $\frac{40}{27}$, il cui numeratore non è un cubo perfetto. Questa frazione non può risultare dall'elevazione al cubo di un numero intero, perchè il cubo di un numero intero è un intero. Ammettiamo possa essere il cubo di una frazione. Questa frazione, ridotta ai minimi termini, ed elevata al cubo, ci darà [276, oss.] una frazione irreducibile, che, perchè uguale alla frazione $\frac{40}{27}$, dovrà [170] avere 40 per numeratore e 27 per denominatore. Ma allora 40 sarebbe cubo perfetto, e ciò non è vero. Dunque ogni frazione irreducibile, i cui termini non siano ambedue cubi perfetti, non può essere cubo perfetto.

Definizione di radice cubica.

278. Def. *Si chiama radice cubica di un numero quel numero che, elevato al cubo, riproduce il numero proposto.*

Così 5 è la radice cubica di 125, perchè il cubo di 5 è appunto 125. La radice cubica di $\frac{8}{125}$ è $\frac{2}{5}$, perchè è

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}.$$

Per indicare che 5 è la radice cubica di 125, si scrive

$$5 = \sqrt[3]{125}\ .$$

La definizione di radice cubica, che abbiamo data, non contempla il caso di un numero che non sia cubo perfetto, giacchè in tal caso la radice non può essere nè un numero intero nè una frazione.

Def. *La radice cubica di un numero, che non sia cubo perfetto, è un numero irrazionale* (il quale si definisce dicendo che è) *maggiore dei numeri razionali i cui cubi sono minori del numero dato, e minore dei numeri razionali i cui cubi sono maggiori di questo numero.*

L'operazione, mediante la quale si determina la radice cubica di un numero, è detta *estrazione di radice cubica.*

Radice cubica a meno di una unità.

279. Si chiama radice cubica a meno di una unità la parte intera della radice cubica di un numero. Essa è quindi la radice cubica del più grande cubo intero contenuto nel numero dato.

280. Teor. *La radice cubica a meno di una unità di un numero, che non sia intero, è ad un tempo la radice cubica della parte intera del numero stesso.*

Dim. Si consideri, ad es., un numero compreso tra 93 e 94. Dico che la radice cubica a meno uno di cotal numero è nel tempo stesso la radice cubica a meno uno di 93.

Infatti la radice cubica a meno uno di 93 è il maggior numero, il cui cubo è contenuto in 93. Il cubo del numero successivo è dunque almeno 94. Tra questi due interi consecutivi è quindi compresa anche la radice del numero proposto, e però il minore dei due numeri è la parte intera della sua radice cubica, ossia la sua radice cubica a meno di una unità. Ciò appunto si doveva dimostrare.

Oss. Dal teorema or ora dimostrato discende la conseguenza che, fintantochè ci contentiamo di saper trovare la radice cubica a meno di una unità, ci basta saperla estrarre da un numero intero.

281. Finchè il radicando non supera 1000, la radice cubica a meno di una unità si trova con la semplice ispezione della tabella [277] dei cubi dei primi 9 numeri.

Es. La radice cubica a meno uno di 712 è 8, perchè 712 è compreso tra 512 e 729, le cui radici cubiche sono 8 e 9.

Allorchè il radicando è maggiore di 1000, la sua radice cubica a meno di una unità è scritta con più di una cifra. Il metodo per determinarla si fonda su due teoremi, che ora cercheremo di stabilire.

282. Supponiamo di dover determinare la radice cubica di 98 654.

Pensando al modo [275] in cui si può formare il cubo di un numero intero, troviamo da rammentare che si fa anzitutto il cubo *del numero delle decine, e che gli si scrivono a destra tre zeri.* Al risultato s'aggiunge poscia il triplo del prodotto, ecc. Da questa osservazione rileviamo che, ove si separino a destra del radicando tre cifre, nel numero rimanente (numero delle migliaia [18] del radicando) è contenuto il cubo del numero delle decine della radice. Perciò nel caso nostro 98 deve contenere il cubo del numero delle decine della radice che ricerchiamo.

Comincieremo a considerare 64, maggior cubo intero contenuto in 98, ed a pensare che la sua radice 4 potrebbe essere il numero delle decine, che si desidera.

E diremo: poichè 4 è la radice a meno uno di 98, il cubo di 4 non supera 98, laddove il cubo di 5 lo deve superare di una unità almeno.

Perciò il cubo di 40, cioè 64000, non supera il radicando dato, laddove il cubo di 50 deve superarlo, e ciò perchè il numero delle migliaia del cubo di 50 supera almeno di una unità il numero delle migliaia di 98654.

Pertanto la radice cercata non deve essere minore di 40, e deve essere minore di 50. Deve avere 4 decine almeno, e non può averne 5; adunque 4 è il numero delle decine della radice.

Queste considerazioni sono generali, valgono cioè per un numero qualunque: possiamo quindi enunciare il

Teor. *La radice cubica a meno di una unità del numero delle migliaia di un numero dato è il numero delle decine della sua radice cubica.*

283. Passiamo ora a vedere come, conoscendo il numero delle decine della radice cubica di un numero, si trovi la cifra delle unità.

Cercando la radice cubica a meno uno del numero 98654, abbiamo trovato che 4 è il numero delle decine di questa radice. Vediamo di determinare la cifra delle unità.

Sappiamo che il cubo di un numero, composto di decine ed unità, si compone di quattro parti, delle quali la prima è il cubo delle decine. E giacchè nel caso nostro le decine della radice sono già determinate, facciamone il cubo e sottraiamolo dal radicando.

Il resto 34654 deve contenere le altre parti del cubo.

$\sqrt[3]{98654}$	4
64000	48
34654	

La prima di queste, cioè il triplo del prodotto del quadrato delle decine per la cifra delle unità, si può formare [275] nel modo seguente: si fa il quadrato del numero delle decine e il risultato (che è 16) si moltiplica per 3. Il prodotto 48 si deve moltiplicare per la cifra delle unità, e *per ultimo bisogna scrivere due zeri a destra del risultato.* Da tutto ciò conchiudiamo che 346, numero delle centinaia del resto, deve contenere il prodotto del triplo del quadrato del numero delle decine della radice per la cifra delle unità. Se potessimo conoscere quante centinaia sono portate dalle altre due parti del cubo, e quelle provenienti da ciò che 98654 probabilmente non è un cubo perfetto, sottraendo il numero di queste centinaia da 346, avremmo nel resto precisamente il prodotto del triplo del quadrato del numero delle decine per la cifra delle unità. Allora, conoscendo uno dei fattori (il triplo del quadrato del numero delle decine), mediante divisione otterremmo l'altro fattore (la cifra delle unità).

Non potendo conoscere il numero, che vorremmo sottratto da 346, ci rassegneremo a dividere questo 346 per 48 (triplo del quadrato del numero delle decine della radice) pensando che il quoziente intero potrà essere maggiore della cifra delle unità, perchè si è diviso per 48 un numero che può superare di 48, ed anche di più, quel numero che avremmo dovuto dividere.

Questa conchiusione è importante; ci gioverà darle forma di

Teor. *Se dal radicando si sottrae il cubo delle decine della radice cubica, e si divide il numero delle centinaia del resto per il triplo del quadrato del numero delle decine della radice, si ottiene nel quoziente intero, o la cifra delle unità, ovvero una cifra maggiore.*

284. Nel caso nostro, dividendo 346 per 48, troviamo 7 per quoziente; la cifra delle unità è dunque 7, oppure una cifra minore.

Per riconoscere se 7 sia la cifra delle unità, si fa il cubo di 47; se questo cubo non supera il radicando, 7 è la cifra cercata, altrimenti bisogna provare la cifra minore di una unità. Nel nostro caso, facendo il cubo di 47, si ottiene 103 823, numero maggiore del radicando; ciò prova essere la cifra 7 troppo forte. Il cubo di 46 è 97 336. Poichè questo numero si può sottrarre dal radicando, 46 è la radice cubica a meno uno di 98 654. E perchè il resto della sottrazione è 1318, egli è

$$98\,654 = 46^3 + 1318.$$

285. Sappiamo [282] che, per trovare il numero delle decine della radice cubica di un numero, basta estrarre la radice cubica a meno uno dal numero delle migliaia del radicando. Determinato il numero delle decine, sappiamo [283, 284] poi trovare la cifra delle unità. Proponiamoci ora di determinare la radice cubica di un numero qualunque, ad es. di 98 654 965, e ciò all'intento di trovare la regola per l'estrazione della radice cubica a meno uno da un numero dato qualesivoglia.

Per fissare il discorso, si finga che sia 346 la radice a meno uno, che si cerca. Sappiamo che si trova

34, numero delle decine della radice, estraendo la radice cubica a meno uno dal numero delle migliaia del radicando. Siamo così condotti a separare dal numero dato le tre ultime cifre a destra, e a prescindere per il momento da queste cifre. Quando avremo trovato il numero delle decine, sapremo determinare la cifra delle unità.

Così la difficoltà è ridotta alla ricerca della radice cubica a meno uno di un numero, che ha tre cifre di meno del numero proposto.

$\sqrt[3]{98.654.965}$	462
64	48
346.54	6348
13189.65	
43837	

Dobbiamo adunque per ora estrarre la radice cubica a meno di una unità dal numero 98654, radice che supponiamo rappresentata da 34. Il 3, numero delle decine di questa radice, lo troveremo estraendo la radice cubica a meno uno da 98, numero delle migliaia del radicando 98654. Trovato il numero delle decine, sapremo poi calcolare la cifra delle unità. Così siamo condotti a separare dal radicando proposto un altro gruppo di tre cifre, a considerare il numero rimanente, ed a ripetere su questo considerazioni già fatte.

Senonchè nel caso nostro siamo già pervenuti ad un numero, di cui sappiamo [281] determinare immediatamente la radice cubica a meno di una unità. La radice cubica a meno uno di 98 è 4. Questo è il numero delle decine della radice cubica di 98654, che volevamo determinare. Per trovare la cifra delle unità, sottraggo da 98 il cubo di 4, e accanto del resto scrivo 654. Con ciò da 98654 ho sottratto 64000, che è il cubo di 40, cubo adunque delle decine della radice. Faccio [274] il triplo del quadrato del numero delle decine, e per 48 (che è il risultato) divido 346 (numero delle centinaia del resto). Provando la cifra 7, questa fu riconosciuta [284] troppo forte, e si trovò da ritenere la cifra 6, perchè da 98654 si potè sottrarre il cubo di 46; anzi si ebbe 1318 per resto.

A tal punto dobbiamo rammentarci che si tratta veramente di estrarre la radice cubica a meno di una unità dal numero 98654965. Abbiamo già trovato il numero delle decine della radice, terminiamo adunque cercando la cifra delle unità. A tale intento bisogna [284] sottrarre dal radicando il cubo delle decine.

$\sqrt[3]{98.654.965}$	462
64	48
346.54	6348
13189.65	
43837	

Poichè abbiamo sottratto da 98654 il cubo di 46, scrivendo 965 a destra del resto, otteniamo il residuo sul quale si deve operare per ottenere la cifra delle unità. Si faccia adunque il triplo del quadrato di 46, e per 6348, che è il numero risultante, si divida 13189 (numero delle centinaia del resto). Il quoziente intero 2 si deve provare, e ciò si fa elevando al cubo il nnmero 462. Il cubo si può sottrarre dal numero proposto, e si ha per residuo 43837. La radice cubica a meno di una unità del numero 98654965 è dunque 462. Aggiungendo al cubo di 462 il resto 43837, si produce naturalmente 98654965.

Da tutto ciò che precede si conchiude la

Regola. *Per estrarre la radice cubica a meno di una unità da un numero intero dato:*

1°. *Si separano le cifre in gruppi di tre cifre, par-*

tendo da destra. L'ultimo di questi gruppi può constare di due cifre od anche di una sola.

2°. *Si estrae la radice cubica a meno di una unità dal numero rappresentato dal primo gruppo a sinistra; con ciò si ottiene la prima cifra a sinistra della radice.*

3°. *Trovata la prima cifra della radice, se ne fa il cubo, e lo si sottrae dal numero rappresentato dal primo gruppo.*

4°. *A destra del residuo si scrive la prima cifra del secondo gruppo, e si divide il numero così ottenuto per il triplo del quadrato della prima cifra della radice. Il quoziente intero è la seconda cifra della radice, ovvero una cifra troppo forte.*

5°. *Si prova la seconda cifra, scrivendola a destra della prima della radice, e formando il cubo del numero così ottenuto. Se questo si può sottrarre dal numero rappresentato dai due primi gruppi, la cifra che si prova è da ritenere; altrimenti bisogna provare successivamente le cifre inferiori, finchè la sottrazione possa esser fatta.*

6°. *Alla destra del resto si scrive la prima cifra del terzo gruppo, e si divide il numero così formato per il triplo del quadrato del numero rappresentato dalle due prime cifre della radice; il quoziente intero è la terza cifra, ovvero è una cifra troppo forte.*

7°. *Si sperimenta questa terza cifra scrivendola a destra delle altre due già trovate, e facendo il cubo del numero così ottenuto. Se questo cubo si può sottrarre dal numero rappresentato dai primi tre gruppi, la cifra è da ritenere, altrimenti bisogna provare le cifre inferiori.*

8°. *Trovata la terza cifra, con processo affatto analogo si trovano le susseguenti, continuando l'opera-*

zione fino a che siano esauriti tutti i gruppi di cifre del radicando.

286. Lasciamo allo studioso la cura di trovare la regola per l'estrazione della radice cubica con approssimazione data, e di dedurre poi la regola per la valutazione della radice in decimali, perchè le considerazioni necessarie a tal uopo sono del tutto analoghe a quelle fatte allo stesso fine nei § 266, 267, 268 per conto della radice quadrata.

CAPITOLO XIII

OPERAZIONI ABBREVIATE

Preliminari.

287. Avviene spesso, nelle applicazioni dell' Aritmetica, che basti calcolare un numero decimale approssimato ad un valore richiesto; per questo caso sono utili regole di calcolo a posta, affine di risparmiare le operazioni, che non hanno influsso su quelle cifre del risultato che sono desiderate.

Avviene eziandio, e più frequentemente, che si debbano fare dei calcoli con numeri decimali che sono, o si deggiono riguardare come più o meno affetti da errore. Tali sono, ad es., i numeri decimali, che esprimono approssimativamente quantità irrazionali, e tutti quei numeri che risultano dalla misurazione di grandezze, numeri affetti necessariamente da errori dovuti all'imperfezione degli strumenti e dei sensi. In questo caso, conteggiando nel modo ordinario, si ottengono risultati nei quali vi sono cifre di dubbia esattezza, e che devono perciò essere trascurate per la massima parte essendo affatto illusorio il grado di approssimazione che sarebbe fatto credere dalla loro presenza.

```
            9 2,4 6 0 4 5
              2,0 7 0 4 6
1 8 4 9 2 0 9|0
    6 4 7 2 2|3 1 5
        3 6 9|8 4 1 8 0
          5 5|4 7 6 2 7 0
1 9 1,4 3 5 6|6 3 3 0 7 0
```

Consideriamo, ad es. di ciò, la moltiplicazione qui di contro, e supponiamo che l'ultima cifra in ciascuno dei fattori sia dubbia. Tale è perciò l' ultima e forse anche la penultima (alla destra) del prodotto parziale, che si ottiene con la cifra del moltiplicatore d' ordine supremo, epperò, essendo già incerta la quarta decimale del prodotto, è irragionevole conservare le cifre degli ordini inferiori, dacchè [222] la loro somma è minore di *un diecimillesimo*. Soltanto, essendo probabile che detta somma superi $\frac{1}{2}$ *diecimillesimo*, si aumenterebbe in questo caso di *uno* la quarta cifra decimale, e sarebbe quindi 191,4357 il prodotto approssimato da ritenere. Ma intanto vediamo che la maggior parte delle cifre, che sono alla destra della linea verticale, fu calcolata inutilmente.

Ecco l' importanza di conoscere i metodi abbreviativi a cui abbiamo fatto allusione; essi infatti permettono di calcolare solamente le cifre, che meritano di essere calcolate; e per essi si può anche arguire con quanta approssimazione (quando questa sia arbitraria) sono da ricercare i dati di un calcolo, allorchè sia prestabilito il grado di precisione che deve avere il risultamento finale.

288. *In ogni numero approssimato si supporrà che l'errore sia minore di una unità dell'ordine dell'ultima cifra, e questo errore potrà essere per eccesso o per difetto.*

In questa ipotesi

2,018	indica	un	numero	compreso	tra	2,017	e	2,019,
172	»	»	»	»	»	171	e	173,
0,400	»	»	»	»	»	0,399	e	0,401.

In quest'ultimo caso adunque gli zeri *finali* non sono senza importanza.

Addizione abbreviata.

289. Siano, ad es., da sommare i seguenti numeri decimali indefiniti

3,1419..., 0,7149... 0,00038..., 1,7086..., 2,4113...,

e supponiamo che si voglia la somma a meno di un *centesimo*.

$$\begin{array}{r} 3,141 \\ 0,714 \\ 1,708 \\ 2,411 \\ \hline 7,974 \end{array}$$

Basterà conservare a ciascuno addendo tre cifre decimali ed eseguire l'addizione. Nel caso nostro in ciascuno dei numeri si trova un errore, per difetto, minore di 0,001: e perchè gli addendi non sono più di 10, l'errore per difetto nella somma è minore di $0,001 \cdot 10 = 0,01$. La vera somma è dunque compresa tra 7,974 e 7,984; e poichè da questi numeri (differenti tra loro di 0,01) è compreso anche il numero 7,98, questo differirà dalla somma anch'esso meno di 0,01; non si può dire per altro se per eccesso o per difetto.

Da ciò che precede risulta la

Regola. *Per ottenere, a meno di una unità di un certo ordine, la somma di non più di dieci numeri, si valuta ciascuno di essi per difetto a meno di una unità dell'ordine immediatamente inferiore a quello che indica il grado d'approssimazione. Fatta l'addizione, si sopprime nel risultato la cifra dell'ordine infimo, e si aumenta di uno la cifra precedente.*

Oss. Quando gli addendi fossero più di dieci e meno di cento, bisognerebbe valutare ciascuno di essi per difetto con due cifre decimali di più di quante sono richieste per la somma. Fatta l'addizione, e soppresse le due ultime cifre alla destra, si dovrebbe poi aumentare di uno la cifra che le precede.

Oss. Quando l'approssimazione degli addendi non sia arbitraria, ma data, in tal caso la somma non può essere richiesta con più cifre decimali di quante ne ha quell'addendo che ne ha in minor numero; anzi sarà dubbia (potrà cioè differire dalla vera di più di una unità del suo ordine) anche l'ultima cifra del risultato.

Sottrazione abbreviata.

299. I due termini della sottrazione qui di contro siano approssimati, e, non sapendo in qual senso, consideriamo dapprima il caso più sfavorevole, il minuendo sia approssimato per eccesso, ed il sottraendo per difetto.

$$\begin{array}{r} 7,329 \\ 3,842 \\ \hline 3,48^{7} \end{array}$$

Allora, poichè il minuendo può superare di quasi 0,001 il giusto valore, questo stesso errore si troverà nel residuo; e perchè, sottraendo 3,842, si toglie meno del giusto, di altrettanto si aumenta l'errore nel residuo. In questo può dunque esservi per eccesso un errore di quasi 0,002; epperò si conserva l'ultima cifra, ma in modo distinto dalle rimanenti.

Se il minuendo sia in difetto ed il sottraendo in eccesso, in tal caso si può affermare che il residuo è approssimato a meno di 0,002 per difetto.

E quando si sappia che i due termini della sottrazione sono approssimati a meno di 0,001, ambedue per eccesso od ambedue per difetto, in tal caso il residuo sarà approssimato a meno di 0,001; ma non si può asserire se per eccesso o per difetto.

Da ciò che precede risulta la

Regola. *Per ottenere la differenza di due numeri a meno di una unità di un certo ordine, bisogna valutare questi numeri entrambi per eccesso oppure per difetto, a meno di una unità dell'ordine dato, e calcolar quindi la differenza dei due numeri approssimati.*

Moltiplicazione abbreviata.

291. Proponiamoci, ad es., di calcolare a meno di 0,01 il prodotto dei due numeri decimali indefiniti

$$321{,}484748\ldots, \qquad 36{,}7415926\ldots$$

Osserviamo innanzi tutto che, trascurando la parte del moltiplicatore che segue le cifre scritte, non si commette errore che abbia influsso sulle cifre del prodotto che sono richieste. Infatti, essendo il moltiplicando minore di 1000, e minore di 0,0000001 la parte non scritta del moltiplicatore, l'errore, che si commette trascurandola, è [222] minore di

$$1000 \cdot 0{,}000\,000\,1$$

minore dunque di 0,0001. E siamo in fine disposti a tollerare un errore, purchè minore di 0,01.

Nel caso nostro avremo adunque bisogno di calcolare al più 9 prodotti parziali (tante essendo le cifre scritte del moltiplicatore); e poichè questi prodotti non possiamo averli che per approssimazione, dobbiamo [289] procurarceli ciascuno a meno di 0,001.

Consideriamo per il primo il prodotto parziale corrispondente alla cifra delle unità del moltiplicatore. È chiaro che, per ottenere questo prodotto a meno di 0,001 per difetto, basterà moltiplicare la parte del moltiplicando che finisce alla cifra dei *diecimillesimi*, trascurando tutte le cifre d' ordine inferiore. Infatti, la somma di queste è minore di 0,0001, e l' errore, che si commette nel nostro caso, è minore di $0{,}0001 \cdot 6 = 0{,}0006$; in ogni caso è quindi minore di $0{,}0001 \cdot 9$; minore a più forte ragione di 0,001, come si desiderava.

$$\begin{array}{r} 321{,}484748\ldots \\ 6 \\ \hline 1928{,}9082 \end{array}$$

Passiamo a considerare il prodotto corrispondente alla cifra delle decine. Poichè in questo caso il moltiplicatore è $30 = 3 \cdot 10$, si potrà [203, 1°] moltiplicare prima per 10 e poi per 3. La prima operazione si compie col semplice trasportare la virgola di un posto verso destra; il prodotto 3214,84748 ... si deve quindi moltiplicare per 3, e in modo da avere il risultato a meno di 0,001. Basterà, come abbiamo già veduto, cominciare la moltiplicazione dalla quarta decimale (cifra che è la quinta nel moltiplicando primitivo); la prima cifra, che risulta dalla moltiplicazione in discorso, esprime *diecimillesimi*, e si deve scrivere in colonna con quella dell' infimo ordine del primo prodotto parziale. L' errore del nuovo risultato è minore di 0,0003, e in ogni caso di 0,0009; minore a più forte ragione di 0,001.

$$\begin{array}{r} 321{,}484748\ldots \\ 36 \\ \hline 1928{,}9082 \\ 9644{,}5422 \end{array}$$

Se nel moltiplicatore ci fosse cifra delle centinaia, analoga argomentazione proverebbe che la cifra dell' ordine infimo del moltiplicando, che si dovrebbe moltiplicare per questa delle centinaia, sarebbe di un posto più a destra di quella adoperata per il prodotto corrispondente alla cifra delle decine.

Passiamo al prodotto parziale corrispondente alla cifra dei decimi. Ora si tratta di moltiplicare per $\frac{7}{10}$, ed il prodotto deve essere calcolato a meno di 0,001. Intanto si dividerà il moltiplicando per 10, ritirando la virgola di un posto verso sinistra; il risultato, che è 32,1484748..., si deve moltiplicare per 7. E, volendosi il prodotto a meno di 0,001, si comincerà dalla quarta decimale (che è la terza nel moltiplicando dato). La prima cifra che si ottiene, poichè esprime *diecimillesimi*, si deve scrivere in colonna con quelle dell'ordine infimo dei prodotti parziali già calcolati. L'errore nel risultato è minore di 0,001.

Così, quando si adoprerà la cifra dei centesimi del moltiplicatore, si dovrà cominciare a moltiplicare la seconda decimale del moltiplicando; e la prima cifra che si ottiene andrà scritta, come di solito, in colonna con quelle dell' ordine infimo degli altri prodotti parziali. E così via.

Pertanto, una volta fissata la cifra del moltiplicando da cui si deve cominciare quando si adopera la cifra delle unità del moltiplicatore, è poi facilissimo conoscere la cifra del moltiplicando da cui bisogna incominciare per ogni altra delle cifre del moltiplicatore. Anzi è manifesto che, rovesciando il moltiplicatore, tenendo fissa la sua cifra delle unità (*), ciascuna delle cifre del moltiplicatore vien a cadere sotto quella

(*) Scrivendone cioè le cifre in ordine opposto, ma in modo che non muti la posizione della cifra dell' unità (che s' intende posta sotto la cifra del moltiplicando, che viene moltiplicata per prima da questa cifra delle unità del moltiplicatore).

del moltiplicando, dalla quale comincia l'operazione per calcolare il prodotto parziale corrispondente.

Abbiamo trovato così che, ogni volta che si passa da una cifra del moltiplicatore a quella dell'ordine prossimo inferiore, il moltiplicando si abbrevia di una cifra. Esso finirà adunque ad essere esaurito, epperò il processo trovato mostra esso stesso da quale cifra in poi il moltiplicatore si può trascurare. Nel nostro caso ciò avviene alla settima decimale; e poichè il moltiplicando è minore di 1000, e la parte che si trascura nel moltiplicatore è minore di 0,0000007, si commette perciò un nuovo errore più piccolo di 0,0007, minore ad ogni modo di 0,001.

$$
\begin{array}{r}
321.484748\ldots \\
\ldots 62951476\mathbf{3} \\
\hline
9644.5422 \\
1928{,}9082 \\
225{,}0388 \\
12.8592 \\
3214 \\
1605 \\
288 \\
6 \\
\hline
11811{,}8597
\end{array}
$$

Nel caso adunque che le cifre del moltiplicatore, ch'entrano nel calcolo, non siano più di 10, il prodotto risultante è approssimato per difetto a meno di

$$0{,}0009 \cdot 10 + 0{,}001,$$

a meno cioè di 0,01. Nel caso nostro il vero prodotto è dunque compreso tra 11811,8597 ed 11811,8697, differenti tra loro di 0,01; epperò 11811,86, che è anch'esso tra loro compreso, è il prodotto domandato.

Oss. Nel caso che il moltiplicando fosse stato un numero esatto con 5 decimali, il primo dei prodotti parziali sarebbe riuscito esatto, anzichè approssimato. Se il moltiplicando, essendo esatto, avesse avuto 3 cifre decimali soltanto, anche il secondo dei prodotti parziali sarebbe riuscito esatto; si sarebbe poi scritto uno zero nel posto della quarta cifra decimale. Ecc.

Così, se il moltiplicatore non si fosse prolungato a sinistra oltre la cifra 2, e questa fosse esatta, non si sarebbe avuto da considerare l'ultima causa d'errore.

Dall' esempio considerato si ricava la

Regola. *Per ottenere il prodotto di due numeri decimali a meno di una unità di un dato ordine, si scrive il moltiplicatore sotto del moltiplicando con le cifre in ordine inverso, e in modo che la cifra delle unità del moltiplicatore cada sotto quella del moltiplicando che è inferiore di due ordini a quella che corrisponde al grado di approssimazione domandato; dipoi si moltiplica per ciascuna cifra del moltiplicatore la parte del moltiplicando che finisce a destra con la cifra che sta sopra quella del moltiplicatore che si considera; si scrivono i prodotti parziali in modo che le loro cifre dell'infimo ordine cadano in colonna; si fa quindi l' addizione; nella somma si sopprimono le due ultime cifre a destra e si aumenta di uno la cifra seguente. Infine si pone la virgola così che il prodotto abbia tante cifre decimali quante ne accenna il grado di approssimazione.*

292. La regola per la moltiplicazione abbreviata si può usare per risolvere la seguente questione: *Trovare il prodotto di due numeri approssimati con la maggiore approssimazione possibile e determinare questa approssimazione.*

Ad es., si voglia il prodotto dei due numeri 321,48 e 36,741, approssimati a meno di una unità dell' infimo ordine.

Rappresenteremo le cifre incognite con lettere scrivendo i fattori nel modo seguente: 321,48*abc*.., 36,741*pq*..; poi disporremo i numeri per la moltiplicazione abbreviata in modo che le cifre note intervengano nel calcolo in maggior numero che sia possibile. Così il posto della cifra delle unità del moltiplicatore non è più arbitrario, ma determinato. Il prodotto 11810,6, che risulta nel caso nostro, è approssimato a meno di

```
   3 2 1,4 8 a b c...
 p q 1 4 7 6 3
   -------------
   9 6 4 4 4
   1 9 2 8,4
     2 2 4 7
       1 2 8
           3
 ---------------
 1 1 8 1 0,6
```

$(3 + 6 + 7 + 4 + 2) = 22$ *decimi*, epperciò, abbandonando la cifra dei decimi, possiamo poi dire che il prodotto 11810 è approssimato a meno di 28 *decimi*. Invertendo l' ordine dei fattori, si troverebbe lo stesso risultato e si potrebbe poi dire che l'errore è minore di 25 *decimi*.

Bisogna osservare però che il calcolo dell' errore è fatto nell' ipotesi che i fattori siano ambedue approssimati per difetto. Se l' uno od entrambi fossero approssimati per eccesso, il limite dell' errore sarebbe inferiore a quello che abbiamo trovato.

Oss. Nel caso che i due numeri dati siano scritti con disugual numero di cifre, si dovrà prendere per moltiplicatore il numero che ne ha di più, e la ragione di ciò è manifesta.

Divisione abbreviata.

Per il caso in cui i termini di una divisione siano scritti con molte cifre, e sia chiesto il quoziente con data approssimazione, esiste un processo di calcolo molto più spedito dell' ordinario. Fonderemo la dimostrazione della regola per la divisione abbreviata sul seguente

293. Teor. *Se prima di eseguire una divisione, in cui il quoziente è minore di* 10, *si diminuisce il divisore intero di una unità, l'aumento del quoziente è minore di quell'unità decimale, il cui ordine si ottiene cancellando due cifre nel divisore e contando le rimanenti.*

Dim. Siano, ad es., il quoziente (minore di 10)

$$\frac{710568}{96176} \quad \text{e l'altro} \quad \frac{710568}{96175},$$

dedotto dal primo sottraendo una unità dal divisore. Si tratta di dimostrare che (poichè cancellando nel divisore *due* cifre ne restano *tre*) l'eccesso del secondo quoziente sul primo è minore di una unità decimale del *terzo* ordine, minore cioè di 0,001.

Consideriamo a tal fine la differenza

$$\frac{710568}{96175} - \frac{710568}{96176}.$$

Se, per eseguire la sottrazione, riduciamo le due frazioni a denominatore comune, i nuovi numeratori sono due multipli consecutivi di 710568, e la loro differenza è perciò lo stesso numero 710568. È dunque

$$\frac{710568}{96175} - \frac{710568}{96176} = \frac{710568}{96176 \cdot 96175}$$

$$\text{»} \qquad = \frac{710568}{96176} \cdot \frac{1}{96175}.$$

Il primo fattore del secondo membro è per ipotesi minore di 10. Il denominatore del secondo fattore, essendo (*) un numero di cinque cifre, esso è almeno

(*) Si prescinde dal caso in cui il denominatore del quoziente dato sia precisamente uno dei numeri 100, 1000, ecc.

eguale a 10000; così si può dire che il secondo fattore è uguale o minore [160] di 0,0001. Possiamo scrivere pertanto

$$\frac{710568}{96175} - \frac{710568}{96176} < 10 \cdot 0{,}0001$$
$$\text{»} \qquad < 0{,}001.$$

Quest'ultima disuguaglianza esprime appunto ciò che si doveva dimostrare.

Nello stesso modo si dimostrerebbe, ad es., che è

$$\frac{47343}{9617} - \frac{47343}{9618} < 0{,}01$$
$$\frac{8492}{961} - \frac{8492}{962} < 0{,}1.$$

Oss. Per il caso che il divisore sia scritto con due sole cifre, il teorema direbbe che l'aumento del quoziente è minore di una unità decimale di ordine *zero*. Da queste parole dobbiamo intendere accennata l'unità, ed infatti, nel modo stesso dianzi adoperato, dimostreremmo, ad es., essere

$$\frac{804}{96} - \frac{804}{97} < 1.$$

291. Proponiamoci ora, ad es., di calcolare il quoziente della divisione di 6481086 per 961753, e siano questi numeri approssimati ambedue a meno di una unità.

Poichè il vero dividendo può superare od essere superato da 6481086 di quasi un'unità, l'errore del quoziente, dovuto all'errore del dividendo, è [209] in ogni caso minore di (1 : 961753), minore a più forte ragione [160] di (1 : 100000) cioè di 0,00001. Nel seguito, tenendo così calcolo dell'errore, riguarderemo il dividendo come numero esatto.

Il vero divisore è compreso, o tra i numeri 961 754 e 961 753, oppure tra 961 753 e 961 752. Perciò il vero quoziente è compreso o tra

$$\frac{6481\,086}{961\,752} \quad \text{e} \quad \frac{6481\,086}{961\,753},$$

oppure tra i numeri

$$\frac{6481\,086}{961\,753} \quad \text{e} \quad \frac{6481\,086}{961\,754}.$$

E poichè [293] la differenza tra i due primi quozienti, come la differenza tra i due ultimi, è minore di 0,0001, l'errore nel quoziente, dovuto all'errore del divisore, è anch'esso minore di 0,0001, e ciò a maggior ragione. D'ora in poi, tenendo così calcolo dell'errore, riguarderemo anche il divisore come esatto.

Dobbiamo dunque dividere 6481 086 per 961 753. La regola ordinaria ci dà intanto la cifra 6, parte intera del quoziente; e alla destra di questa cifra porremo la virgola.

6481086	961753	961753
5770518	6,7388	88376
710568		5770518
673225		673225
37343		28851
28851		7688
8492		768
7688		36
804		6481086
768		
36		

La parte del quoziente, che ci rimane da tradurre in decimali, è espressa esattamente dalla frazione

$$\frac{710568}{961753} = \frac{710568}{96175{,}3 \cdot 10}$$

$$» \quad = \frac{710568}{96175{,}3} \cdot \frac{1}{10} .$$

Ora, se osserviamo che è

$$\frac{710568}{96176} < \frac{710568}{96175{,}3} < \frac{710568}{96175} ,$$

e che la differenza tra il terzo e il primo dei tre quozienti è [293] minore di 0,001 (perchè essi sono minori di 10, e il terzo è dedotto dal primo diminuendone il divisore di *uno*), conchiudiamo che a più forte ragione si può dire minore di 0,001 la differenza tra il terzo dei quozienti ed il secondo.

Consideriamo ora l'ineguaglianza

$$\frac{710568}{961753} < \frac{710568}{96175} \cdot \frac{1}{10} .$$

Dacchè sappiamo che l'errore in eccesso, commesso nel primo fattore del secondo membro trascurando i decimi del denominatore, è minore di 0,001, possiamo dire che l'errore del quoziente è minore di

$$0{,}001 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}0001.$$

E perchè è

$$\frac{710568}{96175} \cdot \frac{1}{10} = \left(7 + \frac{37343}{96175}\right) \frac{1}{10}$$

$$» \quad = 0{,}7 + \frac{37343}{96175} \cdot \frac{1}{10} ,$$

il quoziente che ricerchiamo (prescindendo dagli errori dei quali abbiamo tenuto conto) è rappresentato dall' espressione

$$6{,}7 + \frac{37\,343}{96\,175} \cdot \frac{1}{10}. \qquad (*)$$

La parte del quoziente, che ancora ci rimane da valutare in decimali, è adunque espressa esattamente (così possiamo riguardare la cosa, dacchè abbiamo tenuto conto degli errori) da

$$\frac{37\,343}{96\,175} \cdot \frac{1}{10} = \frac{37\,343}{9617{,}5} \cdot \frac{1}{100}.$$

Se trascuriamo in 9617,5 la cifra dei decimi, commettiamo nel quoziente $\frac{37343}{9617{,}5}$ un errore per eccesso, minore però [293] di 0,01. E l'errore per eccesso, che ne conseguita nel quoziente finale, è minore di

$$0{,}01 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}0001.$$

Così, tenuto conto degli errori, per ottenere il quoziente, dobbiamo aggiungere a 6,7 la quantità

$$\frac{37\,343}{9617} \cdot \frac{1}{100} = \left(3 + \frac{8482}{9617}\right)\frac{1}{100}$$

$$» \qquad = 0{,}03 + \frac{8492}{9617} \cdot \frac{1}{100}.$$

La parte del quoziente ancora da tradurre in decimali è

$$\frac{8492}{9617} \cdot \frac{1}{100} = \frac{8492}{961{,}7} \cdot \frac{1}{1000}.$$

(*) Fin d'ora si palesa la differenza tra la divisione ordinaria e l'abbreviata. Nella prima, quando nel dividendo non vi sono cifre da calare, si scrive uno zero alla destra del resto, e si divide per il divisore; nella seconda invece si sopprime una cifra nel divisore (il che equivale a dividerlo per 10 (*e, se ci si restringesse a ciò, l'operazione equivarrebbe all'ordinaria di moltiplicare il resto per 10)* ed abbandonare poscia la cifra dei decimi) e si divide il resto per il divisore abbreviato.

Trascurando la cifra 7, si commette per eccesso un nuovo errore, minore però di 0,0001. E poichè è

$$\begin{aligned}\frac{8492}{961}\cdot\frac{1}{1000} &= \left(8+\frac{804}{961}\right)\cdot\frac{1}{1000}\\ \text{»}\qquad &= 0{,}008+\frac{804}{961}\cdot\frac{1}{1000},\end{aligned}$$

il quoziente, che cerchiamo, è rappresentato (prescindendo dagli errori) da

$$6{,}738+\frac{804}{961}\cdot\frac{1}{1000}.$$

Estraendo in questo modo i *diecimillesimi* dalla seconda parte, si trova la cifra 8, ma il quoziente viene ancora aumentato; però anche questo nuovo errore è minore di 0,0001.

Da questo punto in poi il processo non condurrebbe che ad una approssimazione illusoria; anzi la stessa cifra 8, che abbiamo trovato per ultima, si deve trascurare. Infatti, poichè degli errori, che abbiamo commessi successivamente, non sappiamo dire altro che sono minori di 0,0001, la cifra dei diecimillesimi è da rigettare del tutto.

Trascurando la quarta decimale e la frazione complementare, commettiamo nel caso presente un errore per difetto minore di 0,0009; e poichè la somma degli errori per eccesso è minore di 0,0009, possiamo dire infine che l'errore complessivo nel quoziente che abbiamo trovato è minore in ogni caso di 0,0009, per eccesso o per difetto, minore a più forte ragione di 0,001.

Il quoziente della divisione dei due numeri approssimati 6481086 e 961753 è dunque 6,738 a meno di una unità dell'infimo ordine.

Oss. Il caso di divisione che abbiamo trattato è particolare; i termini sono numeri interi ed il quoziente è compreso tra 1 e 10. Ma a questo caso si può ridurre ogni altro. Notiamo intanto che il processo, che abbiamo trovato, insegna a calcolare il quoziente con due cifre di meno del divisore, ed approssimato a meno di un'unità dell'ordine dell'ultima cifra.

295. Proponiamoci di calcolare a meno di 0,001 il quoziente della divisione dei due numeri decimali indefiniti 11 617,879 38.... e 321,454 545....

Determiniamo dapprima il numero delle cifre del quoziente. Moltiplicando il divisore successivamente per 10, per 100...., si riconosce che il quoziente ha due cifre nella parte intera; il quoziente domandato ha dunque cinque cifre.

All'intento di ridurre il caso presente di divisione a quello che abbiamo considerato, trasportiamo nei due numeri dati le virgole verso destra o verso sinistra dello stesso numero di posti, e in modo che la parte intera del divisore presenti due cifre di più di quante deve averne il quoziente. Per questa operazione il quoziente non resta punto [212] alterato; possiamo dunque supporre che ci sia proposta la divisione di

116 178 793,8 . . . per 3 214 545,45 . . .

Trasportiamo ora di nuovo la virgola nel dividendo in guisa che la parte intera del numero risultante sia compresa tra la parte intera del divisore e il decuplo di questa. Per questo fatto il quoziente viene alterato, ma soltanto in ciò che in esso la virgola si sposta nello stesso modo che viene spostata quella del dividendo. Nel caso nostro il dividendo diventa 11 617 879,38.., ed il quoziente viene diviso per 10. Trascurando la parte decimale, ci troviamo ridotti alla divisione di 11617879 per 3214545, e col processo abbreviato si trova il quoziente 3,6141. Epperò 36,141 è il quoziente domandato a meno di un *millesimo*. Quindi la

296. Regola. *Per ottenere il quoziente di due numeri decimali a meno di una unità di ordine dato:*

Si determina il numero delle cifre che deve avere il quoziente.

Si separano a sinistra del divisore tante cifre, quante sono quelle del quoziente più due, e si trascurano tutte le altre. Così si ottiene il primo divisore.

Si forma il dividendo abbreviato separando a sinistra del dividendo tante cifre quante bastano a rappresentare un numero che contenga il divisore, e si trascurano tutte le altre.

Si divide il dividendo abbreviato per il primo divisore, senza badare alle virgole. Così si ottiene la prima cifra del quoziente.

Si divide il resto per il numero che rimane sopprimendo l'ultima cifra a destra del divisore, e così si ottiene la seconda cifra del quoziente.

Così si continua, sopprimendo una alla volta le cifre del divisore, finchè il quoziente abbia il numero di cifre prestabilito.

Infine si segna la virgola nel quoziente, in modo che l'ultima cifra esprima la voluta approssimazione.

Oss. Nel fare la divisione abbreviata, col metodo esposto, può avvenire che una delle divisioni parziali dia 10. In tal caso si scrivono nel quoziente tanti 9, quante cifre mancano per ottenerne il numero prestabilito.