CAPITOLO XIII

AREE DEI POLIGONI

Ricerca di una comune misura di due grandezze.

483. Se una grandezza è ad un tempo misura [373] di due o più altre, essa si dice *comune misura* di codeste grandezze.

Ad es., una grandezza è comune misura di tutti i suoi multipli.

484. Teor. *Se una grandezza è una misura comune di parecchie altre, essa è una misura anche della loro somma.*

Dim. Infatti, se una grandezza M è una comune misura delle grandezze A, B, C . . . , poichè queste si possono considerare come composte di parti eguali ad M, altrettanto si può pensare della loro somma.

485. Cor. 1°. *Se una grandezza è misura d' un' altra, essa è misura di ogni multiplo di questa grandezza.*

486. Cor. 2°. *Se una grandezza è misura d' un' altra, ogni parte aliquota della prima è una misura della seconda.*

487. Cor. 3°. *Se due grandezze hanno una comune misura, esse hanno innumerevoli misure comuni.*

Infatti, se M è una misura comune di due grandezze A, B, ogni parte aliquota della M è una comune misura [486] delle grandezze A, B.

488. Teor. *Se una grandezza è una misura comune di due altre, essa è anche una misura del resto della divisione della maggiore per la minore.*

Dim. Siano due grandezze omogenee A e B, e sia A la maggiore; e misurando [373] A con B, si trovi un resto R. Si vuol provare che, se A e B hanno una misura comune M, questa grandezza è anche una misura del resto R.

Infatti, poichè la grandezza A si può riguardare quale somma di alquante grandezze uguali alla B è di una eguale ad R, e la M è una misura della B, se, misurando R con M, si trovasse un resto R_1, la grandezza A sarebbe anche somma di parti eguali ad M, e di una R_1 minore di M. Ma in tal caso M non sarebbe una misura della A, e ciò contro l'ipotesi. La divisione di R per M non può dunque lasciare residuo.

489. Teor. *Se una grandezza è una misura comune del divisore e del resto di una divisione, essa è anche una misura del dividendo.*

Dim. Siano A, B ed R rispettivamente dividendo, divisore e resto di una divisione, e le grandezze B ed R abbiano una misura comune M. Dico che M è anche una misura del dividendo A.

Infatti, poichè la grandezza A si può riguardare come somma di parti eguali a B e di una eguale ad R, e la grandezza M è una misura comune di tutte le parti, essa è anche una misura [484] della somma A, come d. d.

490. Teor. *Il resto di una divisione è minore della metà del dividendo.*

Dim. Sia R il resto della divisione di una grandezza A per una grandezza minore B. Dico che R è minore della metà di A.

Posto che sia m il quoziente della divisione, noi possiamo riguardare la grandezza A come composta di m grandezze uguali a B, e di una R minore di B. Ora è chiaro che, volendo rendere uguali tutte queste $(m + 1)$ di parti A, bisogna aumentare il resto R a scapito delle altre parti. Il resto è dunque minore di $\frac{1}{m+1}$ parte di A. Ma poichè è $B < A$, il quoziente m è almeno eguale ad *uno*; epperciò il resto è in ogni caso minore della metà di A. Come d. d.

491. Teor. *Se in una successione indefinita di grandezze omogenee, ciascuna grandezza è uguale alla metà della precedente o minore, da un certo posto in poi i termini della serie sono minori di una grandezza data qualunque.*

Dim. 1°. Consideriamo da prima la serie indefinita:

$$A, \quad \frac{A}{2}, \quad \frac{A}{4}, \quad \frac{A}{8} \ldots ,$$

in cui ciascuna grandezza è uguale alla metà della precedente; e sia Z una grandezza qualunque omogenea a quelle della serie. Dico che da un certo posto in poi i termini della serie sono minori di Z.

Intanto, date due grandezze omogenee qualunque, si può sempre trovare una parte aliquota d'una qualsivoglia delle due grandezze, la quale sia minore dell'altra delle grandezze date. Supponiamo che sia:

$$\frac{A}{m} < Z.$$

Ora, nella serie che consideriamo, procedendo abbastanza, si trova certamente un termine, sia ad es. $\frac{A}{n}$, per il quale il numero n, che indica qual parte esso sia della grandezza A, è maggiore di m. Ma, se è $n > m$, è:

$$\frac{A}{n} < \frac{A}{m},$$

epperò, a maggior ragione, è anche:

$$\frac{A}{n} < Z.$$

2°. Se nella successione indefinita:

$$A, \quad B, \quad C, \quad D \ldots$$

ciascuna grandezza è minore della metà della precedente, i singoli termini, prescindendo dal primo, sono rispettivamente minori di quelli della serie:

$$A, \quad \frac{A}{2}, \quad \frac{A}{4}, \quad \frac{A}{8} \ldots,$$

epperò, a maggior ragione, da un certo posto in poi i termini della prima serie sono minori d'una grandezza data, qualunque.

492. Teor. *Se due date grandezze omogenee hanno una misura comune, e si divide la prima per la seconda, poi la seconda per il resto, poi il resto per il nuovo resto, e così via, seguitando abbastanza si perviene necessariamente ad un resto che è una misura del precedente; e codesto ultimo resto è la massima comune misura delle due grandezze date.*

Dim. Siano A e B due grandezze omogenee date, le quali abbiano una misura comune M. Si divida A per B, e sia R_1 il resto della divisione. Si divida B per R_1, e sia R_2 il resto. Si divida R_1 per R_2, e così via. Dico che, seguitando abbastanza in codesto processo di divisioni successive, si perviene necessariamente ad un ultimo resto, che è una misura del precedente; e proveremo che codesto ultimo resto è la massima comune misura delle due grandezze A e B.

Consideriamo a tal fine la serie:

$$A, \quad B, \quad R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad R_4 \ldots$$

composta con le grandezze date e i resti delle divisioni successive.

Notiamo in primo luogo che una grandezza, la quale sia una comune misura di due termini consecutivi qualunque, è una misura comune di tutti i termini della serie.

Ed invero, una grandezza N, che sia misura comune di due termini consecutivi, è una misura del termine che li precede, perchè una grandezza, che sia una misura comune del divisore e del resto di una divisione, è una misura del dividendo [489]; ed è una misura del termine susseguente, perchè una grandezza, che sia una misura comune del dividendo e del divisore di una divisione, è una misura del resto. [488].

Avvertiamo, in secondo luogo, che, se nell' accennato processo delle divisioni successive non si pervenisse mai ad un resto che fosse una misura del precedente, seguitando abbastanza si perverrebbe necessariamente ad un resto minore d' una grandezza data qualunque. Infatti, se nella serie:

$$A,\quad B,\quad R_1,\quad R_2,\quad R_3,\quad R_4,\ \ldots.$$

si sopprimono i termini di posto pari, o quelli di posto dispari, i rimanenti formano una serie in cui ciascun termine è minore della metà del precedente, perchè il resto d' una divisione è sempre minore della metà del dividendo [490]; e noi sappiamo [491] che in una serie così fatta, se essa è indefinita, da un certo posto in poi i termini sono minori d' una grandezza data, qualunque.

Ed ora è facile provare che si perviene necessariamente ad un ultimo resto, che è una misura di quello che lo precede.

Infatti, poichè la grandezza M è una misura comune di A e B, che sono due termini consecutivi della serie, essa è una misura di tutti i termini della serie. Se questa continuasse indefinitamente, da un certo posto in poi i termini sarebbero minori di M, e allora sarebbe vero questo che una grandezza può essere una misura di grandezze minori di essa.

Provato che la serie ha necessariamente un ultimo termine, ci resta a far vedere che questo ultimo termine, sia esso R_n, è la massima comune misura di A e B.

Codesto termine R_n è intanto una *comune* misura di A e B, perchè, essendo una misura di se stesso e per ipotesi anche del termine precedente, esso è una misura comune di tutti i termini della serie, e quindi anche di A e B.

Esso è poi la *massima* comune misura di A e B, dacchè ogni misura comune di A e B è una misura comune di tutti i termini della serie, epperò è anche una misura di R_n. E non può una grandezza maggiore di R_n essere una misura di R_n.

Così abbiamo dimostrato che, *date ecc.*

493. Cor. *Se, applicando a due grandezze omogenee date il processo delle divisioni successive, non può darsi che si giunga ad un resto che sia una misura del precedente, le due grandezze non hanno nessuna comune misura, cioè sono incommensurabili.*

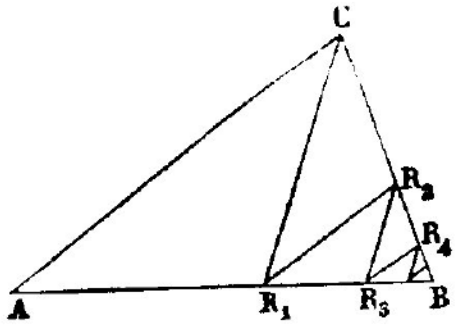
494. Teor. *Un segmento e la sua parte aurea sono incommensurabili.*

Dim. Sia AB un segmento qualunque, ed AR_1 la sua parte aurea. [302]. Si vuol provare che AB ed AR_1 sono incommensurabili.

A tal fine sul segmento R_1B, preso per base, si costruisca un triangolo isoscele CR_1B, che abbia i lati CR_1, CB eguali ad AR_1. Sappiamo [303] che l'angolo BCR_1 è metà di ciascuno di quelli alla base.

Ora è facile riconoscere che in un triangolo isoscele così fatto, se si dimezza un angolo alla base, la bisettrice divide il lato opposto in due parti disuguali, di cui la maggiore è uguale alla base del triangolo; e la minore è base di un nuovo triangolo isoscele nel quale pure l'angolo opposto alla base è metà di ciascuno di quelli alla base.

Ciò premesso, imaginiamo di applicare ai segmenti AB, AR_1 il metodo delle divisioni successive, per trovare, se pur c'è, una loro comune misura.



La prima divisione è già fatta; BR_1 è il resto.

Ora bisogna dividere AR_1, o il segmento eguale BC, per BR_1. Perciò basta dimezzare l'angolo CR_1B; e se R_1R_2 è la bisettrice, BR_2 è il resto della divisione.

Ora bisogna dividere BR_1 per BR_2. Perciò basta dimezzare l'angolo BR_2R_1; se R_2R_3 è la bisettrice, BR_3 è il nuovo resto.

Ormai è palese che il processo non termina mai, perchè, per quanto si prolunghi la spezzata $R_1R_2R_3$..., l'estremità del nuovo lato di essa non può mai cadere in B, ed il segmento compreso tra B e l'estremità del nuovo lato della spezzata è il resto della nuova divisione. Conchiudiamo [493] che il segmento AB e la sua parte aurea AR_1 sono incommensurabili, c. d. d.

495. Teor. *La diagonale e il lato d' un quadrato sono incommensurabili.* (1).

Dim. Sia un quadrato $ABCD$ qualunque. Proveremo che AC ed AB sono incommensurabili.

(1) Si legge: *Celebratissimum est hoc theorema apud veteres philosophos, adeo ut qui hoc nesciret, eum* PLATO *non hominem esse, sed pecudem diceret.*

Intanto, perchè la diagonale è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, che ha per cateti i lati del quadrato, essa è maggiore del lato del quadrato. [144].

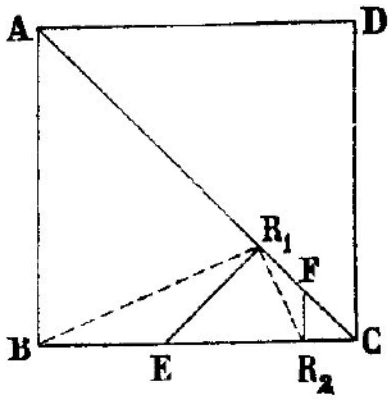
La diagonale è poi minore del doppio del lato, perchè in ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due. [145].

Perciò, se si divide la diagonale d'un quadrato per il lato, si trova resto necessariamente.

Ed ora applichiamo il processo delle successive divisioni.

Prendendo sulla AC una parte AR_1, che sia eguale ad AB, abbiamo in CR_1 il resto della prima divisione.

Ora bisogna dividere il lato del quadrato per CR_1. Perciò si conduca per R_1 la perpendicolare ad AC, e sia E il punto dove essa incontra BC. Poichè gli angoli R_1BE, ER_1B sono complementari degli angoli eguali [138] ABR_1, BR_1A, anch'essi sono eguali, epperò [142] è $BE \equiv ER_1$. Ma è $ER_1 \equiv CR_1$, perchè nel triangolo rettangolo ER_1C, essendo semiretto l'angolo ECR_1, tale è [261] anche l'angolo R_1EC. Per conseguenza abbiamo $BE \equiv CR_1$; epperò, se si intraprende la divisione di BC per CR_1, dopo una prima sottrazione si ha per resto CE. E perchè CE si può riguardare come diagonale del quadrato di lato CR_1, è ormai palese che ad un resto nullo non si può mai pervenire. Infatti a tal punto dell'operazione ci troviamo nelle stesse condizioni che da principio, dacchè



si deve dividere la diagonale d'un quadrato per il lato del quadrato. Possiamo quindi conchiudere [493] che la diagonale d' un quadrato e il lato sono incommensurabili.

Rapporto tra due grandezze omogenee.

496. Le grandezze geometriche si possono rappresentare mediante numeri, e così la Geometria può trar profitto dalla scienza del calcolo. Si ammette per il rimanente di questo capitolo che il lettore abbia conoscenza dell' Aritmetica e dell' Algebra elementare.

497. Teor. *Se due grandezze sono commensurabili, la frazione, i cui termini esprimono come le due grandezze sono multiple d' una loro comune misura, è costante.*

Dim. Siano due grandezze omogenee A, B; e C, D siano due loro misure comuni, qualunque [487]. Le grandezze A, B siano multiple della C rispettivamente secondo i numeri m, n; e siano multiple della D rispettivamente secondo i numeri p, q. Dico che le frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ sono eguali.

Infatti, essendo per ipotesi:

$$A = mC, \quad B = nC, \quad A = pD, \quad B = qD,$$

egli è: $\quad mC = pD \quad$ ed $\quad nC = qD,$

epperò anche:

$$mnC = pnD \qquad \text{ed} \qquad mnC = mqD,$$

e per conseguenza:

$$pnD = mqD.$$

Da questa eguaglianza si conchiude che è:

$$pn = mq,$$

epperò anche: $\qquad \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n}, \qquad$ c. d. d.

498. Oss. Se i termini di una frazione $\frac{m}{n}$ esprimono come due grandezze A, B sono multiple d'una loro comune misura C, ed una frazione $\frac{p}{q}$ è uguale ad $\frac{m}{n}$, anche i numeri p e q indicano come le grandezze A, B sono multiple d' una loro misura comune.

Infatti, essendo per ipotesi, :

$$A = mC, \quad B = nC \quad \text{ed} \quad mq = np,$$

indicando con D la *q.esima* parte di C, abbiamo :

$$A = mqD, \quad B = nqD,$$

epperò

$$A = npD, \quad B = nqD,$$

ed anche $A = p(nD)$ e $B = q(nD)$, le quali relazioni mostrano appunto che le grandezze A e B sono multiple rispettive secondo i numeri p e q della loro comune misura nD.

Se M è la massima comune misura di due grandezze A, B, e queste son multiple di M secondo i numeri m ed n, e la frazione $\frac{p}{q}$ è uguale ad $\frac{m}{n}$, gl'interi p e q sono equimultipli rispettivi di m, n, perchè la misura comune delle grandezze A, B, corrispondente ai numeri p, q, è una parte aliquota della massima comune misura M. [492].

499. Def. *Se due grandezze sono commensurabili, qualunque frazione, i cui termini esprimano come le due grandezze sono rispettivamente multiple d' una loro comune misura, si dice* rapporto *della prima grandezza alla seconda.*

Così, se A, B sono due grandezze commensurabili, se C è una loro comune misura, ed esse sono multiple della C secondo i numeri m, n, la frazione $\frac{m}{n}$ è il [497, 498] rapporto della A alla B.

La frazione $\frac{n}{m}$ è il rapporto della B alla A.

500. Reciprocamente, data una grandezza B ed un numero razionale qualunque, si può comporre una grandezza A, il cui rapporto alla data sia appunto il numero dato.

Se il numero dato è un intero m, codesta grandezza A è il multiplo della B secondo il numero m.

Se il numero dato è la frazione a termini interi $\frac{m}{n}$, si prende un *n.esimo* della B, e poi se ne forma il multiplo secondo il numero m.

Ma si otterrebbe la stessa grandezza A, prendendo, in luogo della frazione $\frac{m}{n}$, una frazione equivalente, ed operando sulla B come indica la nuova frazione. [498].

501. Consideriamo infine il caso di due grandezze A e B incommensurabili.

Prendendo un numero razionale qualunque r, e costruendo quella grandezza il cui rapporto alla B è il numero r, ci risulterà una grandezza maggiore o minore della A.

Imaginiamo di spartire tutti i numeri razionali in due classi, mettendo in una tutti quelli con cui si ottengono grandezze maggiori della A, e in un' altra classe tutti quei numeri con cui si ottengono grandezze minori della A.

È facile riconoscere che i numeri della prima classe sono tutti maggiori di quelli della seconda, e che si possono trovare due numeri, uno della prima classe, l' altro della seconda, la cui differenza sia minore di un numero dato qualsivoglia.

Ed invero, se $\frac{m}{n}$ è un numero della prima classe, e $\frac{p}{q}$ uno della seconda, poichè la grandezza che si ottiene dalla B operando secondo la frazione $\frac{mq}{nq}$, è maggiore di quella si ottiene operando secondo la frazione $\frac{np}{nq}$, è certamente $mq > np$, e per conseguenza è anche $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

E dividendo la B in un numero arbitrario n di parti uguali, e formando d' una di queste i multipli successivi, si troveranno due consecutivi di questi multipli tra i quali cadrà la grandezza A. Se il minore dei due multipli è composto con m *n.esimi* della B, la frazione $\frac{m+1}{n}$ appartiene alla prima classe, e la frazione $\frac{m}{n}$ alla seconda. Poichè la differenza tra i due numeri è $\frac{1}{n}$, prendendo n, che è arbitrario, grande abbastanza, si può ottenere che codesta differenza sia minore di un numero dato, qualunque.

Ad una grandezza C, maggiore o minore della A, corrisponde una separazione dei numeri in due classi, che è diversa da quella che abbiamo ottenuta.

Infatti, posto che sia $C > A$, e che il multiplo secondo il numero p di un *q.esimo* della B sia compreso [376] tra le grandezze C ed A, il numero $\frac{p}{q}$ appartiene alla maggiore delle due classi di numeri considerate, laddove apparterrebbe alla classe minore, se si spartissero i numeri rispetto alla grandezza C.

Le due classi di numeri, che abbiamo considerato, determinano un numero *irrazionale*, che si dice *rapporto* della A alla B.

Def. *Se due grandezze* A, B *sono incommensurabili, si dice rapporto della* A *alla* B *quel numero irrazionale, che è minore dei numeri, che sono i rapporti alla* B *delle grandezze maggiori della* A *e commensurabili con la* B ; *ed è maggiore dei numeri, che sono i rapporti alla* B *delle grandezze minori della* A *e commensurabili con la* B.

502. La parola *rapporto,* alla quale abbiamo ora attribuito un significato numerico, fu adottata altrove [381] per comporre una locuzione con cui esprimere che quattro grandezze sono in proporzione. Ora vedremo che è lecito attribuire in quella locuzione alla parola rapporto il suo nuovo significato numerico; proveremo cioè che:

503. Teor. *Se quattro grandezze sono tali che, misurando la prima e la terza rispettivamente con equisummultipli qualisivogliano della seconda e della quarta, si trovano sempre quozienti eguali, il rapporto numerico della prima alla seconda è uguale al rapporto numerico della terza alla quarta; e reciprocamente.*

Dim. Sia la proporzione [381]:

$$A : B = C : D,$$

e sia $\frac{m}{n}$ una frazione a termini interi qualunque.

Imaginiamo di misurare la grandezza A con un *n.esimo* della B. Secondo che il quoziente è minore, o maggiore di m, possiamo dire che il rapporto di A e B è minore, o maggiore del numero $\frac{m}{n}$. E poichè, corrispondentemente, misurando C con un *n.esimo* di D, si trova un quoziente che è minore, o maggiore di m, il rapporto di C a D è, corrispondentemente, minore anch' esso, o maggiore di $\frac{m}{n}$. Quando poi il quoziente fosse uguale ad m, in tal caso, secondo che c' è resto o no, il rapporto numerico di A a B è maggiore od uguale ad $\frac{m}{n}$. E poichè, misurando C con D, si trova [381] m per quoziente, e corrispondentemente [384] resto o no, il rapporto di C a D è, corrispondentemente, maggiore od uguale ad $\frac{m}{n}$. In conchiusione il rapporto di A e B e quello di C a D, paragonati con un numero razionale, qualunque, si trovano tutti e due minori, od eguali, o tutti e due maggiori di codesto numero. Codesti rapporti sono dunque uguali, c. d. d.

Reciprocamente, se il rapporto numerico di A a B è uguale al rapporto numerico di C a D, le quattro grandezze sono in proporzione.

Infatti, presa di B una parte aliquota arbitraria, ad es. una *n.esima* parte, si misuri con essa la grandezza A; sia m il quoziente.

Se la divisione non dà resto, il rapporto di A a B è la frazione $\frac{m}{n}$; e poichè, per ipotesi, codesta frazione è anche il rapporto di C a D, si conchiude che, anche misurando C con un *n.esimo* di D, si trova il quoziente m.

Se la prima divisione dà resto, il rapporto numerico di A e B è compreso tra le frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$; e perchè, per ipotesi, cade tra queste frazioni anche il rapporto di C a D, si conchiude che, anche misurando C con un *n.esimo* di D, si trova il quoziente m.

Così resta dimostrata l'identità delle due definizioni di proporzione tra quattro grandezze.

504. Avviene spesso di dover considerare i rapporti di più grandezze di una data specie rispetto ad una stessa grandezza di quella specie medesima. Allora questa grandezza prende il nome di *unità* (di misura) per quella data specie di grandezze.

Il rapporto d'una grandezza a quella della sua specie, che è stata scelta per unità, si suol dire brevemente il *valore* di quella grandezza.

Per unità di misura dei segmenti si può scegliere un segmento arbitrario; una volta scelto, esso si dice unità di *lunghezza* od unità *lineare*.

Per unità di misura dei poligoni giova assumere il quadrato che ha per lato l'unità lineare.

Per unità di misura degli angoli si suol assumere l'angolo retto.

Per unità degli archi di uno stesso cerchio si suol prendere il quadrante o quarto di quel cerchio.

505. Dovendo determinare il valore di una grandezza, cioè il rapporto della grandezza all'unità della sua specie, in pratica si divide l'unità in un numero più o meno grande di parti eguali, e si considera una di queste come misura comune, con l'intenzione di trascurare il resto, se un resto si presenta nella divisione della grandezza data per quella parte aliquota dell'unità. Manifestamente in questo modo si ottiene soltanto un valore approssimato e ciò, in generale, anche nel caso in cui la grandezza sia commensurabile con l'unità.

Ma quando la grandezza, di cui si deve determinare il valore, è un poligono, in questo caso la determinazione diretta, anche se approssimata, è quasi sempre oltremodo malagevole. In questo caso il valore si suol determinare indirettamente, deducendolo col sussidio del calcolo da valori di lati o di segmenti tirati convenientemente nel poligono dato.

506. Il valore di un poligono, cioè il rapporto del poligono al quadrato unità di misura, si dice *valore dell' area* del poligono, o più semplicemente *area* del poligono. (1).

Aree dei poligoni.

507. Teor. *Il rapporto tra due rombi o due triangoli di eguale altezza è uguale al rapporto delle basi.*

Dim. Si è data nel § 380. [503].

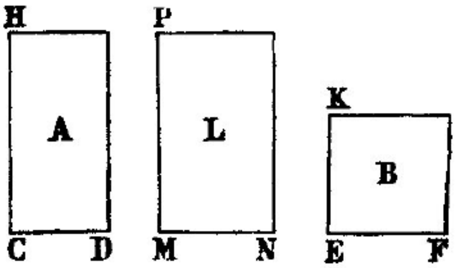
508. Teor. *Il rapporto tra due rettangoli è uguale al prodotto del rapporto delle basi per il rapporto delle altezze.*

(1) La parola *area* è dunque usata in due sensi; o per indicare *l'estensione* d'una superficie [4], o per indicare *il rapporto* di questa estensione all'estensione della superficie unità di misura. (Il linguaggio è zeppo di parole che hanno più significati, e sempre si coglie a volo, inconsciamente, il significato in cui, parlando, è usata una parola che ne abbia parecchi).

Dim. Siano due rettangoli A e B. Si vuol provare che il rapporto di A a B è uguale al rapporto di CD ad EF, moltiplicato per il rapporto di HC a KE.

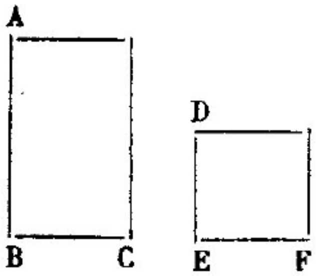
Per la dimostrazione si costruisca un rettangolo L, la cui base MN sia eguale alla base EF del rettangolo B, e la cui altezza PM sia eguale a CH.

Insegna l'Aritmetica che il rapporto di A a B si può avere moltiplicando il rapporto di A ad L per il rapporto di L a B. Ma il rapporto di A ad L, poichè questi due rettangoli hanno altezze uguali, è [507] uguale al rapporto di CD ad MN, cioè al rapporto di CD ad EF. E il rapporto di L a B, poichè questi due rettangoli, quando si prendano per basi i lati PM e KE, hanno altezze uguali, è [507] uguale al rapporto di PM a KE, cioè al rapporto di HC a KE. Dunque infine il rapporto del rettangolo A al rettangolo B è uguale al prodotto del rapporto di CD ad EF per il rapporto di HC a KE, c. d. d.



509. Teor. *L'area di un rettangolo è uguale al prodotto della base per l'altezza.* (1).

Dim. Sia AC un rettangolo qualunque, e DF un quadrato, il cui lato EF sia eguale all'unità lineare. Per il teorema precedente, il rapporto del rettangolo AC al quadrato DF è uguale al prodotto del rapporto di BC ad EF per il rapporto di AB a DE. Ma il rapporto di AC a DF, dacchè DF è l'unità di superficie, è appunto [506]



(1) Spesso, per brevità, in luogo di *valore di un seg-*

l'*area del rettangolo*, senza più; e i rapporti della base BC ad EF, e dell'altezza AB a DE, dacchè EF e DE sono eguali all'unità lineare [503], sono i *valori della base e dell'altezza* del rettangolo AC; e nel nostro caso, per brevità, si dicono la *base* e l'*altezza*, senz'altro. Per conseguenza *l'area ecc.*

510. Cor. *L'area di un quadrato è uguale alla seconda potenza del lato.*

Un quadrato infatti è un rettangolo, nel quale base ed altezza sono eguali tra loro. (1).

511. Se a, b sono i valori dei cateti e c è il valore dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i tre numeri a^2, b^2, c^2 rappresentano le aree dei quadrati dei cateti e dell'ipotenusa. E poichè il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei cateti [361], e l'Addizione aritmetica è l'operazione mediante la quale dai valori delle parti si ricava il valore del tutto, possiamo scrivere:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

In base a questa relazione, che ha luogo tra i valori dei lati di un triangolo rettangolo, quando si conoscono i valori di due lati si può calcolare quello del terzo.

512. Oss. Abbiamo ricavata la precedente relazione tra i valori dei lati di un triangolo rettangolo (relazione che si può dire teorema di PITAGORA *metrico*) dal teorema di PITAGORA (*grafico*). A codesto

mento, se codesto segmento ha un nome, si adopera questo nome, senz'altro. Dal contesto del discorso si capisce immediatamente in qual senso è usata quella tal parola.

(1) Qui si è palesata l'origine della locuzione ***quadrato di un numero***, che s'incontra in Aritmetica, per designare la seconda potenza di un numero.

modo di dimostrazione, che farebbe apparire la detta relazione come dipendente dalla scelta dell' unità di superficie, è da preferire il seguente.

Indicando con m ed n i valori delle proiezioni dei cateti sull' ipotenusa, abbiamo le seguenti proporzioni tra numeri [437, 503]:

$$c : a = a : m, \qquad c : b = b : n,$$

donde

$$a^2 = cm, \qquad b^2 = cn$$

ed infine $$a^2 + b^2 = c(m + n) = c^2.$$

513. Teor. *L' area di un rombo è uguale al prodotto della base per l' altezza.*

Dim. Infatti, se un rombo ed un rettangolo hanno basi eguali ed eguali altezze, essi sono equivalenti [355], epperò hanno aree uguali.

514. Teor. *L' area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto della base per l' altezza.*

Dim. Infatti un triangolo è metà di un rombo, se questo ha base ed altezza rispettivamente uguali a quelle del triangolo. [513].

515. Teor. *L' area di un trapezio è uguale alla metà del prodotto della somma delle basi per l' altezza.*

Dim. Si è visto [358] infatti che un trapezio è equivalente a un triangolo, che ha base uguale alla somma dei lati paralleli del trapezio e la stessa altezza del trapezio. [513].

516. Teor. *L' area di un poligono circoscritto ad un cerchio è uguale alla metà del prodotto del perimetro per l' apotema.*

Dim. Infatti, se un triangolo ha base uguale al perimetro di un poligono circoscritto ad un cerchio e altezza eguale al raggio, esso è equivalente [359] al poligono. [514].

Cenno sull' applicazione dell' Algebra alla Geometria.

517. Quando le grandezze geometriche, a cui si riferisce una questione di Geometria, sono rappresentate da numeri, e in generale da lettere, quella tale questione si può trattare col sussidio dell' Algebra.

Quando alcune grandezze d' una questione sono date mediante i loro valori numerici, allora l' applicazione dell' Algebra è voluta dalla questione stessa. In tal caso bisogna cercare di esprimere, in base alle relazioni geometriche che hanno luogo tra le grandezze note e le incognite, le relazioni numeriche che hanno luogo tra i valori delle grandezze stesse. Risolvendo poi l' equazione o il sistema d' equazioni che ne risulta, si ottengono il valore o i valori numerici domandati.

Qui vogliamo considerare piuttosto il caso in cui l' applicazione dell' Algebra è fatta deliberatamente nell' idea di conseguire più facilmente l' intento, seppure non si debbano trovar numeri, nè formule per calcolarli quando che sia.

O che si tratti di dimostrare un teorema, o di risolvere un problema, si rappresentano le grandezze, di cui è questione, mediante lettere, intendendo che queste rappresentino i valori, noti o incogniti, delle grandezze stesse rispetto ad una unità di misura, che si lascia ordinariamente indeterminata. [504]. Quindi si cerca di esprimere le relazioni algebriche che sussistono tra i detti valori; la qual cosa manifestamente non può riuscire, se non quando si conoscano opportuni teoremi relativi alle grandezze che si considerano in quella tale questione.

Secondo che si tratterà di dimostrare un teorema o di risolvere un problema, le relazioni sopra accennate saranno eguaglianze identiche, oppure equazioni.

Nel primo caso, operando secondo le regole del calcolo letterale, si procurerà di trasformare le identità in altre esprimenti il teorema da dimostrare.

Ad es., volendo dimostrare che la differenza di due quadrati è equivalente al rettangolo della somma e della differenza dei lati dei quadrati, si può dire: siano a e b i valori dei lati dei quadrati, e Δ la differenza dei quadrati. Così, essendo [510]:

$$\Delta = a^2 - b^2,$$

per un noto teorema d'Algebra egli è anche:

$$\Delta = (a + b)(a - b),$$

dove appunto si riconosce [509] espresso il teorema da dimostrare.

Nel secondo caso, quando cioè si debba risolvere un problema, si risolve l'equazione, o il sistema d'equazioni ottenuto. La formula di risoluzione indica veramente con quali calcoli, in un caso determinato, dai valori dati si possono ottenere quelli delle grandezze incognite. Ma, studiando la formula di risoluzione, si può spesso ricavarne il processo per costruire mediante la riga e il compasso le grandezze domandate (quando, ben s'intende, la questione sia di tal natura che bastino questi strumenti). E questo è il vero scopo a cui si intende allorquando, come abbiamo detto, si ricorre all'Algebra per risolvere una questione di pura Geometria, una questione, cioè, in cui nè sono dati numeri, nè si domandano numeri.

Qui è necessario, per via d'esempi opportuni, apprendere ad interpretare le formule di risoluzione. Ci restringiamo al caso, che è l'ordinario, in cui le incognite rappresentano segmenti; e consideriamo solamente formule di risoluzione di equazioni di primo o di secondo grado.

518. È manifesto il significato delle formule:

$$x = a + b, \qquad x = a - b.$$

Consideriamo piuttosto la formula seguente $x = \frac{ab}{c}$.

Mettendola sotto la forma $c : a = b : x$, si riconosce che il segmento incognito è quarto proporzionale rispetto ai segmenti, i cui valori sono rappresentati rispettivamente dalle lettere c, a, e b.

519. L'equazione $x = \frac{a^2}{b}$ equivale alla proporzione $b : a = a : x$, la quale mostra che il segmento x è terzo proporzionale rispetto a b ed a.

520. L'equazione $x = ab$ sembrerebbe assurda, dacchè esprimerebbe che il segmento x è equivalente al rettangolo dei segmenti a e b. Però basta scriverla sotto la forma $x \cdot 1 = ab$, ed intendere che l'unità rappresenti l'unità lineare, per riconoscere che essa esprime che il segmento domandato è quarto proporzionale dopo l'unità lineare ed i segmenti a e b.

521. Il caso, che abbiamo ora considerato, può presentarsi quando uno dei segmenti che si devono considerare è l'unità lineare. In questo caso, distribuendo uno o più fattori eguali all'unità, nei numeratori o nei divisori, si fa sparire l'apparente assurdità nel significato della formula di risoluzione.

È chiaro che non occorre questa operazione, ad es., per l'equazione $x = mb$, quando si sappia che la lettera m non rappresenta un segmento, ma un coefficiente numerico.

522. L'equazione $x = \frac{abc}{de}$, messa sotto la forma $x = \frac{a}{d} \cdot \frac{bc}{e}$, mostra che bisogna cominciare a costruire il segmento che è quarto proporzionale dopo e, b e c. Detto f cotal segmento, resta poi a costruire il segmento quarto proporzionale dopo d, a ed f.

523. Analogo è il processo nel caso che il numeratore e il denominatore contengano un maggior numero di fattori. Possiamo poi dire, in generale, che il numeratore deve contenere un fattore di più che il denominatore (s'intende di quei fattori che rappresentano segmenti).

524. L'equazione $x = \frac{a^2+bc}{d}$, e meglio l'equivalente $x = \frac{a^2}{d} + \frac{bc}{d}$, mostra che il segmento x è la somma di una terza e di una quarta proporzionale.

525. L'equazione di secondo grado $x = \sqrt{ab}$ o l'equivalente $x^2 = ab$, messa sotto la forma:

$$a : x = x : b,$$

mostra che il segmento x è medio proporzionale tra i segmenti a e b.

526. L'equazione $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ indica che il segmento x è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che ha i cateti eguali ai segmenti a e b.

527. Invece l'equazione $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ esprime che il segmento x è un cateto. L'ipotenusa è il segmento a; l'altro cateto è il segmento b.

528. Sono facili da interpretare, ad es., le equazioni

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$$

ed

$$x = \sqrt{3^2 + 1 + c^2}.$$

529. Avendosi $x = \sqrt{a^2 + bc}$, si comincia a determinare il segmento d medio proporzionale tra b e c. Così, essendo $d^2 = bc$, la nostra equazione diventa $x = \sqrt{a^2 + d^2}$, che sappiamo interpretare.

Termineremo con un esempio.

530. Probl. *Dividere un segmento in due parti* *in modo che il quadrato d' una parte sia equivalente al rettangolo dell' intero segmento e dell' altra parte.*

Risol. Indichiamo con a il valore del segmento dato e con x quello della prima parte; il valore dell' altra è $(a - x)$. Tra questi valori deve sussistere l' equazione:

$$x^2 = a\,(a - x).$$

Risolvendola, si ottiene:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

La seconda soluzione, perchè negativa, non può esprimere un modo di divisione del segmento che sodisfaccia alle condizioni del problema, e quindi si trascura. L' altra soluzione mostra che, per dividere il segmento nel modo voluto, bisogna anzitutto costruire un triangolo rettangolo, un cui cateto sia eguale al segmento dato e l' altro alla metà del segmento stesso. Poi, sottraendo dall' ipotenusa del triangolo la metà del segmento dato, si ottiene la parte maggiore di quelle due in cui si deve dividere il proposto segmento. E questa è appunto la costruzione, che già conosciamo, per dividere un segmento in sezione aurea.

(La seconda soluzione, insieme con la prima, risolve il seguente problema, in cui il proposto è contenuto come caso particolare: trovare sopra una retta, che passa per due dati punti A e B, un punto tale che la sua distanza dal punto A sia media proporzionale tra la sua distanza da B ed il segmento $A\,B$).

Esercizi.

739. Dati i cateti di un triangolo rettangolo, calcolare l' altezza relativa all' ipotenusa.

740. Dato un cateto di un triangolo rettangolo e l' altezza relativa all' ipotenusa, calcolare l' area del triangolo.

741. Data l'area di un triangolo rettangolo e data l'altezza calata sull'ipotenusa, calcolare i segmenti dell'ipotenusa ed i cateti.

742. Date le distanze di un punto dai cateti di un triangolo rettangolo e dati i cateti, calcolare la distanza di quel punto dall'ipotenusa.

743. Data l'altezza e il perimetro di un triangolo isoscele, se ne calcolino i lati.

744. Dati i lati di un triangolo, se ne calcolino le mediane. [**583**].

745. Calcolare i lati e gli apotemi dei poligoni regolari di 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 lati, dato il raggio del cerchio circoscritto.

746. Nel centro di uno stagno quadrato, il cui lato è lungo 22 piedi, sorge un *bambou*, e la parte di questo, che emerge dall'acqua, è lunga 5 piedi. Tirando il bambou a riva, la sommità viene a coincidere col punto di mezzo di uno dei lati della sponda. Si calcoli la profondità dell'acqua nella vasca. (Da un libro chinese, scritto 2000 anni prima dell'era volgare).

747. Dato un cateto di un triangolo rettangolo e uno dei segmenti in cui l'ipotenusa è tagliata dalla corrispondente altezza, calcolare l'area del triangolo.

748. Calcolare l'area di un triangolo rettangolo, data la somma di un lato e dell'altezza.

749. Calcolare l'area di un triangolo rettangolo, data la somma dei cateti e la perpendicolare calata sull'ipotenusa.

750. Data una delle basi d'un trapezio e l'altezza, si calcolino i valori degli altri lati, supposto che siano eguali.

751. Dati i valori delle distanze di tre punti da due rette che sono perpendicolari tra loro, riconoscere se i tre punti sono allineati.

Avv. I seguenti problemi si risolvano col sussidio dell'Algebra.

752. Sottrarre da due dati segmenti due segmenti eguali, in modo che la somma dei resti sia eguale ad un terzo segmento dato.

753. Dividere il lato maggiore di un dato rettangolo in modo che la differenza dei quadrati delle parti sia equivalente al rettangolo.

754. Descrivere un rettangolo di dato perimetro, e così che

abbia i lati rispettivamente paralleli ai lati di un rettangolo ed equidistanti da questi lati.

755. Segnare sui lati di un rettangolo quattro punti in modo che siano equidistanti rispettivamente dai vertici del rettangolo, e che siano vertici d'una losanga.

756. Dati, sopra una retta, tre punti A, B, C, segnare sulla stessa un punto X tale che sia $(AX)^2 = BX \cdot CX$.

757. Dividere un dato segmento in tre parti in modo che la prima stia alla seconda come due dati segmenti, e la seconda alla terza come due altri segmenti dati.

758. Da due segmenti dati si taglino via due parti eguali, in modo che i resti stiano tra loro come due segmenti dati.

759. Dimezzare un triangolo con una retta parallela ad un lato. Oppure, dividerlo con questa parallela in parti che stiano tra loro come due dati segmenti.

760. Dimezzare un triangolo in modo che una parte sia un triangolo isoscele.

761. Costruire un triangolo rettangolo, dato il perimetro e l'altezza calata sull'ipotenusa.

762. Dividere un segmento in modo che il rettangolo delle parti sia equivalente ad un quadrato dato; oppure, in modo che il quadrato d'una parte sia doppio di quello dell'altra.

763. Dividere un segmento talmente che il quadrato d'una parte sia equivalente al rettangolo contenuto dall'altra parte e da un altro segmento dato.

764. Costruire un rettangolo, che sia equivalente ad un quadrato dato, ed abbia doppio perimetro.

765. Costruire un rettangolo, che abbia perimetro eguale a quello di un rettangolo dato, e che sia equivalente ad un altro rettangolo dato.

766. Iscrivere in un quadrato dato un quadrato di lato dato.

767. Iscrivere in un triangolo equilatero un triangolo equilatero, che sia equivalente alla metà del dato.

768. Sottrarre da due segmenti dati due segmenti eguali in modo che la somma dei quadrati dei resti sia equivalente ad un quadrato.

769. Iscrivere in un triangolo dato un rettangolo che sia equivalente ad un quadrato dato.

770. Costruire un triangolo rettangolo che abbia dato perimetro e che sia equivalente ad un quadrato dato.

CAPITOLO XIV

CICLOMETRIA

Classi di grandezze. Classi contigue.

531. Diremo *classe di grandezze* l'insieme delle grandezze che sodisfanno ad una determinata condizione. Codeste grandezze si diranno gli *elementi* di quella classe.

Ad es., i perimetri dei poligoni iscritti in un cerchio costituiscono una classe di segmenti.

Indicheremo una classe con una lettera maiuscola; con la stessa lettera minuscola dinoteremo l'elemento generale della classe. Dovendo significare determinati elementi, useremo della stessa lettera minuscola con differenti indici.

532. Date due classi di grandezze omogenee, se tutti gli elementi d'una classe sono maggiori degli elementi dell'altra, si dirà che la prima classe è *maggiore* della seconda o che questa è *minore* della prima.

533. Def. Diremo *contigue* due classi di grandezze omogenee, quando ogni elemento d'una classe sia maggiore di tutti gli elementi dell'altra, e si possano trovare due elementi, uno della classe maggiore e l'altro dell'altra classe, tali che la loro differenza sia minore di una grandezza della stessa loro specie, data, qualunque.

Ad es. la classe dei segmenti maggiori di un segmento dato e la classe dei segmenti minori del segmento stesso sono contigue manifestamente.

534. Rappresenteremo l'insieme di due classi contigue, scrivendo tra parentesi, separate da una virgola, le lettere che significano le due classi. La lettera, che significa la classe maggiore, si scriverà a sinistra.

Così, ad es., la notazione (M, N) rappresenta l'insieme di due classi contigue; M è la classe maggiore, ed N la minore.

535. La maggiore di due classi contigue potrebbe contenere un elemento minimo, e la minore di due classi contigue potrebbe contenere un elemento massimo. Ma non può darsi che ad un tempo la classe maggiore contenga elemento minimo e la minore elemento massimo.

Infatti, data la coppia di classi contigue (M, N), se la classe M avesse un elemento minimo m_x, e la classe N un elemento massimo n_y, essendo $m_x > n_y$, la differenza tra un elemento della classe M ed uno della classe N sarebbe necessariamente uguale o maggiore della differenza $m_x - n_y$, e ciò contro l'ipotesi che le classi M, N siano contigue, che si possano quindi trovare due elementi, uno d'una classe e l'altro dell'altra, la cui differenza sia minore d'una grandezza della loro specie, data, qualunque.

536. Postulato della continuità. *Per qualunque coppia di classi contigue esiste una grandezza che è minore degli elementi della classe maggiore ed è maggiore degli elementi della classe minore.* [1].

[1] Codesta proposizione ha la sua ragion d'essere in questo che, qualunque sia la specie delle grandezze che compongono due classi contigue, siano segmenti, od angoli, od archi d'uno stesso cerchio, o poligoni, poichè, preso un elemento qualunque della classe maggiore ed uno qualunque della classe minore, esiste sempre una grandezza che è minore del primo e maggiore del secondo, nulla vieta di ammettere che esista

537. Teor. *Data una coppia di classi contigue, esiste una grandezza ed una sola, che ha la proprietà d'essere minore di tutte le grandezze della classe maggiore e di essere maggiore di tutti gli elementi della classe minore.*

Dim. Sia una coppia di classi contigue (M, N). Dico che esiste una grandezza ed una sola, che ha la proprietà d'essere minore di tutti gli elementi della classe M, e di essere maggiore di tutti gli elementi della classe N.

Per la prima parte dell'asserzione, che esista cioè una grandezza minore degli elementi d'una classe e maggiore degli elementi dell'altra, abbiamo il postulato della continuità. Chiamiamo λ una grandezza dotata di tale proprietà.

Dico che nessun'altra grandezza differente da λ (non equivalente a λ) non può godere l'accennata proprietà di λ.

Infatti, se un'altra grandezza λ', differente da λ, fosse anch'essa minore di tutti gli elementi della classe M e maggiore di tutti gli elementi della classe N, la differenza tra un elemento della prima classe ed uno della seconda sarebbe uguale o maggiore della differenza tra λ e λ', e ciò contro l'ipotesi che le due classi siano contigue.

538. Def. *La grandezza, che è minore degli elementi della maggiore di due classi contigue ed è maggiore degli elementi della classe minore* [537], *si dirà* limite (1) *delle due classi.*

una grandezza, la quale sia minore di tutti gli elementi della classe maggiore e maggiore di tutti gli elementi della classe minore.

(1) Lo chiamiamo così nel senso di *confine comune* delle due classi.

539. Cor. *Una coppia di classi contigue si può usare per definire il loro limite.*

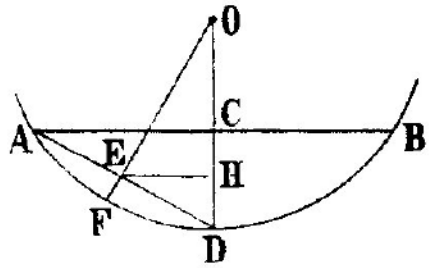
Il limite di due classi contigue è *compreso* tra le classi, *separa* le due classi.

540. Oss. Se la maggiore di due classi contigue ha elemento minimo, o la minore elemento massimo, in tal caso è meno evidente che ci sia una grandezza che separi le due classi. Per questo caso si può assumere come grandezza di separazione rispettivamente l'elemento minimo della classe maggiore o l'elemento massimo della classe minore. [1].

541. Def. Il segmento, che unisce il punto di mezzo di un arco col punto di mezzo della corda sottesa dall'arco, si dice *freccia* di quell'arco.

542. Teor. *Se due archi d'un cerchio sono entrambi minori di mezzo cerchio, ed uno è metà dell'altro, la freccia dell'arco minore è minore della metà della freccia dell'arco maggiore.*

Dim. Sia un cerchio di centro O, ed in esso una corda AB qualunque. Caliamo dal centro la perpendicolare sulla corda, e siano C e D i punti in cui essa incontra la corda e l'arco BA. Poichè C e D sono i punti di mezzo della corda e dell'arco, il segmento CD è la freccia dell'arco.



Così, tirando dal centro la perpendicolare alla

[1] Non abbiamo voluto definire la grandezza, che separa due classi contigue, in modo che fosse contemplato anche questo caso, perchè ne risulta un enunciato troppo lungo (che si dovrebbe poi ripetere spesso) ed anche per questo che le classi contigue, che dovremo considerare, non presentano mai elemento minimo od elemento massimo.

corda AD, abbiamo in EF la freccia dell' arco DA. Ora si tratta di dimostrare che EF è minore della metà di CD.

A tal fine si tiri EH, perpendicolare ad OD. Poichè questa retta passa per il punto di mezzo del lato AD del triangolo ACD, ed è parallela al lato AC, essa dimezza [289] il terzo lato CD. E poichè OE, come ipotenusa del triangolo OEH, è maggiore del cateto OH, sottraendo questi segmenti dai raggi OF, OD, troviamo essere $EF < HD$. Così resta dimostrato che *ecc.*

543. Cor. *Raddoppiando abbastanza il numero dei lati di una spezzata regolare iscritta in un arco, si può ottenere una spezzata regolare iscritta in quell' arco, nella quale la freccia dell' arco che sottende un lato sia minore di un segmento dato, qualunque.*

Infatti, poichè nella serie indefinita composta dalle freccie corrispondenti alle spezzate successive ciascun termine è minore della metà del precedente [542], da un certo posto in poi i termini sono minori d' un segmento dato, qualunque. [491].

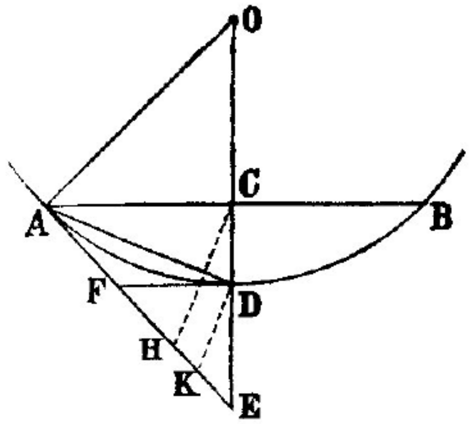
544. Teor. *La differenza tra i perimetri di due poligoni regolari di* 2 n *lati, uno circoscritto e l' altro iscritto in un cerchio, è minore della metà della differenza tra i perimetri di due poligoni regolari di* n *lati, uno circoscritto e l' altro iscritto nel cerchio stesso.*

Dim. Sia un cerchio di centro O, ed AB sia un lato di un poligono regolare iscritto di n lati.

Si cali da O la perpendicolare alla corda AB; e siano C e D i punti in cui essa incontra la corda e l' arco BA.

Si tiri la corda AD. Si tiri per A la tangente al cerchio [220], e sia E il punto dove essa incontra [258] la retta OC. Si tiri per D la tangente al cerchio, e sia F il punto dove essa incontra la retta AE.

Il segmento AC è metà [190] del lato del poligono regolare iscritto di n lati. AD è [165; 207] un lato del poligono regolare iscritto di $2n$ lati. $AF \equiv FD$ [224] è metà del lato del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati; ed AE è metà del lato del poligono regolare circoscritto di n lati.



Sul segmento AE, che è maggiore di AC perchè l'angolo ECA è retto [144], si faccia $AH \equiv AC$; e sul segmento FE, che è maggiore di FD perchè l'angolo EDF è retto, si faccia $FK \equiv FD$. Poichè i triangoli isosceli CAH, DFK hanno eguali [254] gli angoli in A e in F, i loro angoli alle basi sono tutti eguali. Ma poichè è $A(H)C \equiv A(K)D$, le rette CH, DK sono parallele. [245].

Ed ora si osservi che, poichè il perimetro del poligono circoscritto di n lati è composto di $2n$ segmenti eguali ad AE, e il perimetro del poligono iscritto di n lati è composto di $2n$ segmenti eguali ad AC, la differenza tra questi perimetri (differenza che indicheremo con δ_n) è composta di $2n$ segmenti eguali alla differenza tra AE ed AC. Abbiamo adunque:

$$\delta_n = 2n(AE - AC).$$

Così, poichè il perimetro del poligono circoscritto di $2n$ lati è composto di $2n$ segmenti eguali ad $AF + FD$, cioè uguali ad AK, e il perimetro del poligono iscritto di $2n$ lati è composto di $2n$ segmenti eguali ad AD, la differenza tra codesti perimetri (differenza che indicheremo con δ_{2n}) è composta con $2n$ segmenti eguali alla differenza tra AK ed AD. Abbiamo adunque:

$$\delta_{2n} = 2n(AK - AD).$$

Ed ora, considerando il fascio di parallele che è composto delle rette AC, FD e del punto E, troviamo che, essendo $AF < FE$, è [286] anche $CD < DE$.

Così, considerando il fascio di parallele che è composto delle rette CH, DK e del punto E, troviamo che, essendo $CD < DE$, è [286] anche $HK < KE$. Per conseguenza HK è minore della metà di HE.

Ora, essendo $AC < AD$, è:

$$\begin{aligned} AK - AD &< AK - AC \\ \text{»} \quad &< AK - AH \\ \text{»} \quad &< HK \\ \text{»} \quad &< \tfrac{1}{2} HE \\ \text{»} \quad &< \tfrac{1}{2}(AE - AC). \end{aligned}$$

Per conseguenza è:

$$2n(AK - AD) < 2n \cdot \tfrac{1}{2}(AE - AC),$$

cioè $\delta_{2n} < \frac{1}{2}\delta_n$, c. d. d.

545. Cor. *Dato un cerchio ed un segmento qualunque, si possono trovare due poligoni, uno circoscritto e l'altro iscritto, nei quali la differenza tra i perimetri sia minore del segmento dato.*

Infatti, se si costruiscono due poligoni regolari, uno circoscritto e l'altro iscritto nel dato cerchio, e poi si vanno successivamente costruendo i poligoni di numero doppio di lati, la differenza tra i perimetri dei poligoni è ciascuna volta minore della metà della differenza tra i perimetri dei due poligoni precedenti [544], e perciò, seguitando a bastanza, si perviene necessariamente [491] a due poligoni, uno circoscritto e l'altro iscritto, nei quali la differenza tra i perimetri è minore del segmento dato, per quanto piccolo esso sia.

546. Teor. *Per qualsivoglia cerchio, esiste un segmento ed uno solo, il quale ha la proprietà di essere minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto e maggiore del perimetro di qualunque poligono iscritto.*

Dim. Preso un cerchio qualunque, consideriamo le classi composte, una coi perimetri dei poligoni circoscritti, l'altra coi perimetri dei poligoni iscritti. Proveremo che codeste due classi sono contigue.

Intanto, poichè qualunque poligono iscritto in un cerchio è parte di qualunque poligono circoscritto ed è convesso, il perimetro di qualunque poligono circoscritto è maggiore [179] del perimetro di qualunque iscritto. Ogni elemento della prima classe è dunque maggiore di tutti gli elementi dell'altra.

Si possono poi trovare un elemento della classe maggiore ed uno dell'altra la cui differenza sia minore d'un segmento dato, qualunque, perchè, dato un cerchio ed un segmento qualunque, si possono trovare [545] due poligoni uno circoscritto ed uno iscritto, nei quali la differenza tra i perimetri sia minore del segmento dato.

Le due classi sono adunque contigue; epperò resta provato che, *ecc.* [537].

547. Oss. Giova osservare che delle due classi contigue considerate nel precedente paragrafo, nè la maggiore ha elemento minimo, nè la minore ha elemento massimo; in altre parole, non c'è poligono circoscritto, il quale abbia perimetro minore di quello di ogni altro poligono circoscritto; nè poligono iscritto, il quale abbia perimetro maggiore di quello di ogni altro poligono iscritto.

Infatti, dato un poligono circoscritto, basta tirare una tangente al cerchio, distinta da quelle a cui appartengono i lati del poligono, per ottenere un poligono circoscritto, che abbia perimetro minore [145] di quello del poligono dato. E dato un poligono iscritto, basta unire le estremità d'un lato con un punto dell'arco che lo sottende, e poi sopprimere il lato, per ottenere un poligono iscritto che abbia perimetro maggiore [145] di quello del poligono dato.

Ed ora, iscritto in un cerchio un poligono regolare di un numero qualunque di lati, imaginiamo di andar successivamente raddoppiando e senza fine il numero dei lati del poligono. Andrà crescendo senza fine il numero dei punti comuni al cerchio ed al contorno del poligono; e il contorno del poligono tenderà a confondersi col cerchio [543], senza però poter mai diventare con questo coincidente. [215].

Nel tempo stesso il perimetro del poligono cresce, avvicinandosi a quel [544] segmento che è minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto e maggiore del perimetro di qualunque poligono iscritto, e in modo da differirne di meno d'un segmento dato, qualunque, senza poter mai eguagliarlo. ([1]).

([1]) Analogamente si può dire del poligono regolare circoscritto. Intanto dalla figura del § 544 risulta che, raddoppiando il numero dei lati di un poligono regolare circoscritto, il lato del poligono diventa minore della sua metà; donde segue [491] che, se il numero dei lati di un poligono regolare circoscritto è grande abbastanza, il lato è minore d'un segmento dato qualunque. E perchè la differenza tra la distanza di un vertice del poligono dal centro ed il raggio è [146] minore della metà di un lato del poligono, quando il numero dei

Queste considerazioni [1] c' inducono a dare la seguente:

548. Def. *Il segmento, che è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto in un cerchio, e minore del perimetro di ogni poligono circoscritto, è equivalente al cerchio.* [2].

549. Il problema di costruire il segmento equivalente a un cerchio dato, problema che porta il titolo « *rettificazione del cerchio* », non si può risolvere [3] col solo sussidio di rette e di cerchi (cioè mediante riga e compasso). Perciò bisogna contentarsi di costruire

lati di un poligono circoscritto è grande abbastanza, la distanza tra un punto qualunque del contorno del poligono ed il cerchio (presa sul segmento che unisce quel punto col centro) è minore [221, 162] d'un segmento dato, qualunque.

(1) Aggiungiamo che a cerchio maggiore corrisponde un segmento λ maggiore. Infatti, posti a coincidere i centri dei due cerchi, e iscritto nel maggiore un poligono regolare, raddoppiando a bastanza il numero dei lati del poligono, si può ottenere che il contorno cada tutto fuori del cerchio minore. Ciò ha luogo quando la freccia dell'arco, che sottende un lato, è minore della differenza dei raggi dei cerchi, [543, 225]. Facilmente se ne ricava poi un poligono circoscritto al cerchio minore, e tutto interno al poligono iscritto nel cerchio maggiore. Ecc. [179, 546].

(2) La ragione della difficoltà, che s'incontra nel confronto di un cerchio con un segmento, è questa che non si può dire che il cerchio è maggiore (più lungo) del perimetro d'un poligono iscritto, perchè nessuna parte del perimetro è uguale a parte del cerchio. Infatti finora, dicendo che un ente era minore d'un altro, intendevamo dire che il primo era eguale od equivalente ad una parte dell'altro. Più difficile è il confronto del cerchio col perimetro d'un poligono circoscritto, perchè non interviene l'antico assioma « la retta è il più breve cammino da un punto all'altro ».

(3) Questa impossibilità fu dimostrata (1882) dal Lindemann.

dei segmenti che siano *approssimativamente* equivalenti ad un cerchio dato. Un modo sarebbe questo di dividere il cerchio in parti eguali, poi una di queste per metà, poi una delle nuove parti per metà, e così via, perchè così si trova il lato di un poligono regolare iscritto, e quindi anche il perimetro del poligono, che è un segmento approssimato al cerchio per difetto. E perchè, conoscendo l'*n.esima* parte di un cerchio, si può [318] costruire il lato e quindi il perimetro del poligono regolare di n lati circoscritto, si potrà trovare anche un segmento approssimato al cerchio per eccesso; dimodochè si potrà poi conoscere anche il grado d'approssimazione. Ma in pratica gli errori di costruzione, dovuti all'imperfezione degl'istrumenti e all'imperfetto loro uso, impediscono manifestamente di trovar nel modo accennato un segmento che abbia un grado prestabilito, qualunque, di approssimazione. Perciò si è cercato di risolvere il problema col sussidio del calcolo; e questo metodo è suscettivo di quella approssimazione qualunque che si può desiderare. Per questa via, invece del segmento equivalente al cerchio, si trova il *valore*, la *lunghezza* del segmento (1), cioè il suo rapporto ad un segmento preso per unità di misura. Ma se ne deducono poi anche regole semplici per la *rettificazione approssimata*.

550. Teor. *Due cerchi stanno tra loro come i raggi.* (2).

Dim. Indichiamo con C e C' i segmenti, che sono rispettivamente equivalenti a due cerchi di raggi R ed R'. Costruiamo due poligoni qualunque, uno iscritto

(1) S'intende il *valore della lunghezza* del segmento.

(2) S'intende dire che i segmenti, equivalenti rispettivamente a cerchi dati, stanno tra loro come i raggi.

e l' altro circoscritto al secondo cerchio, e indichiamo con p' e P' i loro perimetri. Costruiamo poi [476] due altri poligoni rispettivamente simili ai due considerati e che siano uno iscritto e l'altro circoscritto al primo cerchio; e indichiamo con p e P i loro perimetri. Sappiamo che hanno luogo [477] le proporzioni:

$$p : p' = R : R'$$

e $$P : P' = R : R'.$$

Se indichiamo con D il segmento quarto proporzionale rispetto ad R, R' e C, tale, cioè, che sia:

$$R : R' = C : D,$$

abbiamo [386] poi che:

$$p : p' = C : D$$

e $$P : P' = C : D.$$

Da queste proporzioni, essendo $p < C$ e $C < P$, conchiudiamo [402] essere:

$$p' < D < P',$$

ossia che il segmento D ha la proprietà di esser maggiore del perimetro di qualunque poligono iscritto nel cerchio di raggio R', e di essere minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto. Pertanto [546, 548] egli è $D \equiv C'$, e per conseguenza:

$$R : R' = C : C', \qquad \text{c. d. d.}$$

551. Cor. *Il rapporto del cerchio al diametro è costante.* (1).

Dim. Se C e C' indicano i segmenti, che sono equivalenti rispettivamente a due cerchi di raggi R ed R', essendo [550]:

$$C : C' = R : R',$$

(1) Cioè: i rapporti dei segmenti, equivalenti rispettivamente a cerchi dati, ai rispettivi diametri dei cerchi sono eguali.

è anche [387]:

$$C : C' = 2R : 2R'$$

epperò [402]:

$$C : 2R = C' : 2R', \qquad \text{c. d. d.}$$

Calcolo del numero π.

552. Abbiamo provato [551] che il rapporto del cerchio al diametro è costante. Rappresentando questo numero con la lettera π, e con c ed r i valori del segmento equivalente ad un cerchio qualunque e quello del suo raggio, abbiamo:

$$\frac{c}{2r} = \pi, \quad \text{donde} \quad c = 2\pi r.$$

Questa formula mostra che, quando fosse noto il valore di π, dato il raggio si potrebbe calcolare la lunghezza del cerchio.

553. Se indichiamo con p e P i valori dei perimetri di due poligoni qualunque, uno iscritto e l'altro circoscritto ad un cerchio, con c il valore del segmento equivalente al cerchio, e con r quello del raggio, essendo [548]:

$$p < c < P,$$

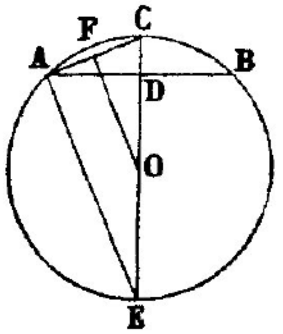
egli è [552]:

$$\frac{p}{2r} < \pi < \frac{P}{2r}.$$

Questa limitazione fa vedere che, se i perimetri p e P differiscono poco tra loro, i quozienti, che si ottengono dividendoli per il diametro, sono due valori approssimati di π, uno per difetto e l'altro per eccesso. La differenza tra i due quozienti esprime il grado d'approssimazione. Bisogna dunque trovar modo di calcolare, sia pure per approssimazione, i valori dei perimetri di due poligoni, uno circoscritto, l'altro iscritto in un cerchio di raggio noto, qualunque.

554. Probl. *Dato il valore del raggio di un cerchio e quello dell'apotema di un poligono regolare iscritto, calcolare l'apotema del poligono regolare iscritto che ha numero doppio di lati.*

Risol. Sia un cerchio qualunque, O il centro, ed AB il lato del poligono regolare iscritto di n lati. Se si tira il diametro CE perpendicolare alla corda AB, questa viene dimezzata in D, e l'arco AB in C, dimodochè AC è il lato del poligono regolare iscritto di $2n$ lati. E se da O tiriamo OF perpendicolare ad AC, otteniamo in OF l'apotema del poligono di $2n$ lati; OD è l'apotema del poligono di n lati. Indichiamo con r, a_n ed a_{2n} rispettivamente i valori dei segmenti OC, OD ed OF.



Ora si tiri AE, e si osservi intanto che il segmento OF, perchè unisce i punti di mezzo [190] di due lati del triangolo CAE, è [293] uguale alla metà del terzo lato. Pertanto il valore di AE è $2a_{2n}$. E perchè l'angolo CAE, come iscritto in mezzo cerchio, è [307] retto, e AD è perpendicolare ad EC, e in ogni triangolo rettangolo il quadrato d'un cateto è equivalente al rettangolo dell'ipotenusa e della sua proiezione sull'ipotenusa [362], abbiamo [510, 509]:

$$(2a_{2n})^2 = 2r(r + a_n).$$

Per conseguenza è:

$$2a_{2n} = \sqrt{2r(r + a_n)}.$$

Questa è la formula domandata.

555. Probl. *Dato il valore del raggio di un cerchio, e quello dell' apotema di un poligono regolare iscritto, calcolare il perimetro del poligono regolare circoscritto d' egual numero di lati.*

Risol. Indichiamo rispettivamente con p_n ed a_n i valori del perimetro e dell'apotema di un poligono regolare di n lati, iscritto in un cerchio; e con r e P_n i valori del raggio e del perimetro del poligono regolare, circoscritto, di n lati.

Notiamo anzitutto che, in base al teorema di PITAGORA (s' intende il teorema *metrico* [511]), dai valori del raggio d' un cerchio e dell' apotema di un poligono regolare, iscritto, si può dedurre il valore della metà del lato del poligono e quindi anche il valore del perimetro del poligono. Per il nostro caso la formula per il calcolo di p_n è la seguente:

$$p_n = 2n\sqrt{r^2 - a_n^2}.$$

Ed ora, poichè manifestamente [261, 473] i due poligoni, che consideriamo, sono simili, e l' apotema dell' iscritto e il raggio del cerchio si possono riguardare come i raggi di due cerchi a cui i poligoni stessi sono circoscritti, abbiamo [477]:

$$P_n : p_n = r : a_n$$

epperò:

$$P_n = \frac{p_n \cdot r}{a_n}.$$

Questa è la formula domandata.

556. Le formule trovate nei §§ 554, 555 mostrano che, per poter calcolare i valori dei perimetri di due poligoni, uno circoscritto e l' altro iscritto in un cerchio di raggio dato, e tanto approssimati quanto si voglia, basta conoscere l' apotema di un poligono regolare, iscritto. Facilmente si trova, ad es., essere

$a_4 = r\sqrt{2} : 2$ ed $a_6 = r\sqrt{3} : 2$. Così, fondando il calcolo sull' apotema del quadrato iscritto, si possono calcolare successivamente i valori degli apotemi dei poligoni regolari, iscritti, di 8, 16, 32 lati, ecc. Conoscendo l' apotema di un poligono regolare, iscritto, e il raggio del cerchio, si può [555] poi dedurne il perimetro, e infine anche il perimetro del poligono regolare, circoscritto, di altrettanti lati. [555].

Con questo metodo, e per l' appunto partendo dal l' esagono iscritto, spingendo il calcolo fino ad ottenere i perimetri dei poligoni regolari, iscritto e circoscritto, di 96 lati, Archimede trovò che π è compreso fra $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{10}{70}$. Il secondo valore, ossia $\frac{22}{7}$, molto usato in pratica, supera π di meno di *mezzo centesimo.*

Mezio ha trovato per π il valore $\frac{355}{113}$, facile a tenere a mente, e molto approssimato, giacchè supera π di meno di *mezzo milionesimo.*

Ludolf da Colonia ha calcolato 32 cifre decimali di π.

Recentemente Shanks ne ha calcolate 707.

Questi due ed altri, con vari metodi, trovarono tutti:

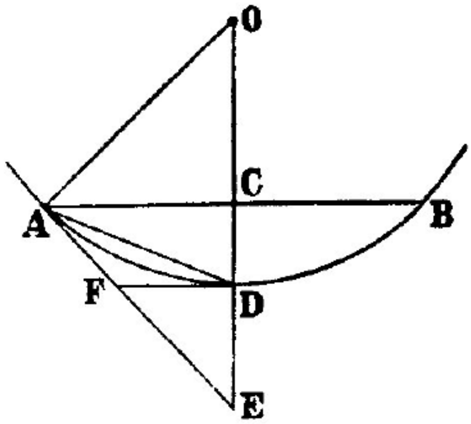
$$\pi = 3,14159\,26535\,89793\,23846\ldots$$

Ma per qualunque uso pratico ha sufficiente approssimazione il valore $\pi = 3,1416$.

Area del cerchio.

557. Teor. *La differenza tra due poligoni regolari di* 2n *lati, uno circoscritto e l' altro iscritto in un cerchio, è minore della metà della differenza tra i poligoni regolari di* n *lati, uno circoscritto e l' altro iscritto nel cerchio stesso.*

Dim. Sia AB un lato di un poligono regolare di n lati, iscritto in un cerchio. Tiriamo per il centro O la OC perpendicolare alla corda AB, e sia D il punto in cui essa incontra l'arco BA. Si tiri poi per A la tangente, e sia E il punto in cui essa incontra [258] la retta OC. Infine tiro per D la tangente, e sia F il punto dove essa incontra la AE.



Poichè il poligono di n lati circoscritto è composto di $2n$ triangoli eguali al triangolo AOE, ed il poligono di n lati iscritto è composto di $2n$ triangoli eguali al triangolo AOC, la differenza tra i due poligoni (differenza che indicheremo con Δ_n) è composta di $2n$ triangoli eguali al triangolo ACE.

E perchè il poligono di $2n$ lati circoscritto è composto di $2n$ quadrangoli eguali al quadrangolo $AODF$, ed il poligono di $2n$ lati iscritto è composto di $2n$ triangoli eguali al triangolo AOD, la differenza tra i due poligoni (differenza che indicheremo con Δ_{2n}) è composta di $2n$ triangoli eguali al triangolo ADF.

Così, per provare che Δ_{2n} è minore della metà di Δ_n, basta provare che il triangolo ADF è minore della metà del triangolo ACE.

Perciò basta osservare che, essendo $FE > FD$, ed $FD \equiv AF$, è $FE > AF$, e che per conseguenza il triangolo FDE è maggiore [348] del triangolo AFD. Poichè questi due triangoli sono parti distinte del triangolo ACE, il triangolo AFD è minore della metà del triangolo ACE.

Conchiudiamo che è $\Delta_{2n} < \frac{1}{2} \Delta_n$, ed in generale che *ecc.*

558. Cor. *Dato un cerchio ed un poligono* (1) *qualunque, si possono trovare due poligoni, uno circoscritto e l'altro iscritto nel cerchio, la cui differenza sia minore del poligono dato.*

Infatti, se si costruiscono due poligoni regolari di egual numero di lati, uno circoscritto e l'altro iscritto nel dato cerchio, e poi si va raddoppiando successivamente il numero dei lati, la differenza tra i poligoni è ogni volta minore della metà della differenza tra i due poligoni precedenti [557]; e perciò, seguitando abbastanza, si perviene necessariamente [491] a due poligoni, uno circoscritto e l'altro iscritto, la cui differenza è minore del poligono dato.

559. Teor. *Un triangolo, che abbia la base equivalente ad un cerchio dato e altezza eguale al raggio, è minore di qualunque poligono circoscritto ed è maggiore di qualunque poligono iscritto.*

Dim. Chiamiamo T un triangolo, che abbia la base C equivalente ad un cerchio dato e l'altezza eguale al raggio.

Poichè un poligono circoscritto è equivalente [359] ad un triangolo, che ha per base il perimetro P del poligono ed altezza eguale al raggio, ed è $C < P$ [548], il triangolo T è minore [348] di qualunque poligono circoscritto.

Consideriamo ora un poligono iscritto, qualunque; dividiamolo in triangoli unendo il centro coi vertici; e prendiamo per altezze dei triangoli le perpendicolari

(1) Se invece d'un poligono fosse data una parte di piano qualunque, si prenderebbe da questa una parte che fosse un poligono e si trascurerebbe il rimanente.

calate dal centro sui lati del poligono. Tutte queste altezze sono minori del raggio del cerchio. [190, 215]. Quindi il poligono iscritto è minore d'un triangolo avente base uguale al perimetro p ed altezza eguale al raggio. [1]. E poichè così fatto triangolo, perchè è $p < C$, è minore del triangolo T, a più forte ragione il poligono iscritto è minore del triangolo T.

Così si è provato che *ecc.*

560. Teor. *La superficie di un cerchio è equivalente ad un triangolo che ha la base equivalente al cerchio ed altezza eguale al raggio.*

Dim. Dato un cerchio qualunque, consideriamo la classe composta coi poligoni circoscritti e quella composta coi poligoni iscritti. Codeste due classi sono contigue. Infatti qualunque poligono circoscritto è maggiore di qualunque poligono iscritto; e si possono trovare [558] due poligoni, uno circoscritto e l'altro iscritto, la cui differenza sia minore di qualsivoglia superficie data.

Tra le due classi contigue considerate è compresa manifestamente la superficie del cerchio dato. Ma è compreso tra codeste classi anche il triangolo, che ha la base equivalente al cerchio ed altezza eguale al raggio, perchè, come si è dimostrato [559], anch'esso è minore di qualunque poligono circoscritto e maggiore di qualunque poligono iscritto. Pertanto la superficie del cerchio ed il triangolo sono equivalenti [537], c. d. d.

561. Cor. *L'area di un cerchio è uguale al prodotto di π per il quadrato del raggio.*

[1] Veramente il ragionamento esclude quei poligoni per i quali il centro del cerchio è esterno. Ma per qualunque di questi è facile costruire un poligono col centro interno e di cui quell'altro è una parte.

Infatti, dacchè la superficie di un cerchio è [560] equivalente ad un triangolo, che ha la base equivalente al cerchio e altezza eguale al raggio, se indichiamo con a l'area del cerchio (l'area della superficie del cerchio), con r il valore del raggio e con c la lunghezza del cerchio, abbiamo [514] intanto:

$$a = \frac{c\,r}{2}.$$

Ma [552] è $\qquad c = 2\pi r,$

quindi è $\qquad a = \pi r^2, \qquad$ c. d. d.

562. Teor. *La superficie di un cerchio sta al quadrato del raggio come il cerchio sta al diametro.*

Dim. Imaginiamo che il segmento AB sia equivalente ad un cerchio dato, qualunque. Posto il raggio del cerchio perpendicolarmente ad AB, ad es. in

AC, si unisca C con B. Sappiamo [560] che il triangolo ABC è equivalente alla superficie del cerchio. Ed ora, costruito un quadrato $DEHF$, di lato eguale al raggio del cerchio, si prolunghi DE di un segmento $EK \equiv ED$, e si tiri FK. Il triangolo KDF è equivalente al quadrato HD; e DK è uguale al diametro.

Ora, perchè triangoli d'eguale altezza stanno [380] tra loro come le basi, abbiamo:

$$ABC : DKF = AB : DK;$$

epperò, indicando con S la superficie del cerchio, con

R il raggio, con R^2 il quadrato del raggio, e con C il segmento equivalente al cerchio, anche:

$$S : R^2 = C : 2R, \qquad \text{c. d. d.}$$

563. Cor. *Le superficie di due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi.*

Poichè la superficie d'un cerchio sta al quadrato del raggio come il cerchio sta al diametro [562], e il rapporto del cerchio al diametro è costante [551], anche il rapporto della superficie del cerchio al quadrato del raggio è costante. Così, se indichiamo rispettivamente con S ed S' le superficie di due cerchi di raggi R ed R', abbiamo la proporzione:

$$S : R^2 = S' : R'^2$$

epperò [402] infine:

$$S : S' = R^2 : R'^2, \qquad \text{c. d. d.}$$

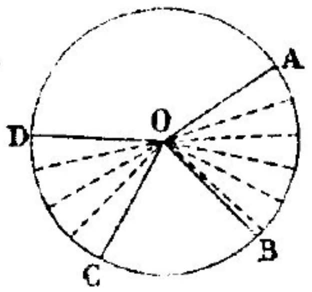
564. Def. La parte della superficie di un cerchio, che è compresa tra un arco ed i raggi che hanno i termini nelle estremità dell'arco, si dice *settore*. L'angolo dei due raggi si dice *angolo del settore.*

565. Teor. *Due archi, o due settori di un medesimo cerchio, stanno tra loro come gli angoli al centro corrispondenti.*

Dim. In un cerchio qualunque siano due archi qualunque AB e CD. Dico che questi archi stanno tra loro come i corrispondenti angoli al centro AOB, COD. E che anche i due settori AOB, COD stanno tra loro come i loro angoli AOB, COD.

Presa dell'arco CD una parte aliquota ad arbitrio, ad es. una *n.esima* parte, si misuri con essa l'arco AB. Sia m il quoziente della divisione, e supponiamo che ci sia un resto. Se ora uniamo col centro tutti i punti di divisione dei due archi, troviamo che l'angolo COD

resta diviso in n parti eguali [204], ed in $(m+1)$ parti l'angolo AOB; m di queste sono eguali [204] tra loro e alle parti di $C(O)D$, ed una, quella corrispondente al resto, è minore [205] delle altre parti. Pertanto, misurando l'angolo AOB con una *n.esima* parte dell'angolo COD, si trova m per quoziente, appunto come s'è trovato il quoziente m misurando l'arco AB con una *n.esima* parte dell'arco CD.



Se una divisione non dà resto, altrettanto avviene dell'altra.

Così resta dimostrata la proporzione:

$$\text{arco } AB : \text{arco } CD = A(O)B : C(O)D.$$

Nello stesso modo, perchè ad angoli eguali corrispondono settori eguali, e ad angolo minore settore minore, si prova che:

$$\text{settore } AOB : \text{settore } COD = A(O)B : C(O)D.$$

566. Cor. *Il rapporto di un arco all'intero cerchio, e quello di un settore alla superficie del cerchio, sono eguali ambidue al rapporto del corrispondente angolo a quattro retti.*

Infatti quattro retti è l'angolo al centro che corrisponde all'intero cerchio, e la superficie di un cerchio si può riguardare quale un settore il cui angolo è di quattro retti.

567. Poichè si sanno calcolare la lunghezza e l'area di un cerchio di dato raggio, si possono calcolare la lunghezza di un arco e l'area di un settore, purchè, oltre del raggio, sia dato il valore dell'angolo corrispondente.

Se per unità degli angoli prendiamo l'angolo retto, e dinotiamo con x la lunghezza dell'arco, con y l'area del settore e con α il valore dato del corrispondente angolo al centro, abbiamo le proporzioni:

$$x : 2\pi r = \alpha : 4,$$

ed
$$y : \pi r^2 = \alpha : 4,$$

le quali valgono a determinare i valori di x e di y.

Esercizi.

771. Se $AB, BC, CD, \ldots HK$ sono segmenti consecutivi e per diritto, la linea, composta dai semicerchi dei quali detti segmenti sono diametri, è equivalente al mezzo cerchio, che ha per diametro AK. [413].

772. Se sui lati di un triangolo rettangolo, presi come diametri, si costruiscono tre cerchi, la superficie del maggiore è equivalente alla somma di quelle degli altri due. [413].

773. Se un triangolo rettangolo è iscritto in mezzo cerchio, e sui cateti ed esternamente si descrivono due mezzi cerchi, da questi e dal primo sono compresi due *menischi* (*lunule* d'Ippocrate), la cui somma è equivalente al triangolo.

774. Se sui lati di un quadrato iscritto in un cerchio ed esternamente si descrivono quattro semicerchi, la somma delle quattro *lunule* è equivalente alla superficie del quadrato.

775. Se sopra ciascun lato di un triangolo equilatero, iscritto in un cerchio, si descrive, esternamente al cerchio, mezzo cerchio, la somma delle tre lunule supera il triangolo di un ottavo della superficie del cerchio dato.

776. Se due poligoni regolari di n lati sono l'uno iscritto e l'altro circoscritto ad uno stesso cerchio, questo cerchio è medio proporzionale tra il cerchio iscritto nel primo poligono ed il cerchio circoscritto al secondo. E così dicasi delle superficie dei tre cerchi.

777. Se un diametro AB si divide in n parti eguali $AC, CD \ldots MB$, e poi sui segmenti $AC, AD, \ldots AM$ da una banda, e sui segmenti $CB, DB, \ldots MB$ dall'altra, presi per diame-

tri, si descrivono dei semicerchi, la superficie del cerchio dato resta divisa in n parti, che hanno perimetri equivalenti e superficie equivalenti.

778. Se sopra un raggio OA di dato cerchio si descrive un cerchio, e condotti per O ed O' due raggi OB, $O'B'$, da una stessa banda di OO' e perpendicolari ad OO', poi su BB', preso come diametro, e dalla banda opposta di O, si descrive mezzo cerchio, e si dica C il punto dove esso taglia il cerchio dato, la figura, compresa tra i due archi BC, è equivalente alla somma delle due figure OBB' e $BC'A$.

779. Se sopra due raggi OA, OB di uno stesso cerchio, che siano perpendicolari tra loro, si descrivono due semicerchi dalla banda del quarto di cerchio AB (*quadrante* AB), e sia C il punto dove i semicerchi si tagliano, la figura compresa dai due archi OC è equivalente a quella compresa dagli archi CA, CB e dal quadrante AB.

780. La superficie, compresa tra due cerchi concentrici (*anello*), è equivalente a quella di un cerchio, che ha per diametro una corda del maggior cerchio, che sia tangente al minore.

781. La superficie di un anello è equivalente a quella di un rettangolo, che ha base equivalente a quel cerchio il cui raggio è la semisomma dei raggi dei cerchi che comprendono l'anello, ed altezza eguale alla differenza dei raggi stessi.

782. Se AB, BC, CD sono segmenti consecutivi di una stessa retta, e il primo ed il terzo sono eguali, e si descrivono da una stessa banda tre semicerchi sui diametri AB, CD, AD, ed uno da banda opposta con diametro BC, si ottiene una figura (*salinon*), la cui superficie è equivalente a quella del cerchio, che ha per diametro la somma dei raggi dei due cerchi concentrici.

783. Se sul diametro AB di un cerchio si prendono due punti C e D ad arbitrio, e si descrivono, su AC e AD da una banda, e su BD e BC dall'altra, quattro semicerchi, il contorno della figura (*pelecoide*) risultante è equivalente al cerchio dato, e la superficie sta a quella del cerchio, come CD sta ad AB.

784. Se si divide in C ad arbitrio il diametro AB di mezzo cerchio, e sui segmenti AC, CB come diametri si descrivono due mezzi cerchi dalla stessa banda del dato, la figura (*arbelo*) limitata dai tre mezzi cerchi è equivalente ad un cerchio, che ha il diametro medio proporzionale tra AC e CB.

785. Se quattro cerchi hanno per diametri rispettivi le parti di due corde di un cerchio che si tagliano ad angolo retto, la somma delle loro superficie è equivalente a quella del cerchio dato.

786. Dividere la superficie di un cerchio in n parti equivalenti, e ciò con cerchi concentrici col dato.

787. Dividere la superficie di un cerchio dato in n parti equivalenti, e ciò con cerchi tangenti al cerchio dato in un punto dato.

788. Due settori circolari, che siano compresi tra angoli eguali, hanno perimetri che stanno come i raggi, e superficie che stanno come i quadrati dei raggi.

789. Se un cerchio ha per diametro un raggio di un altro, i segmenti dei due cerchi, tagliati via da una retta tirata per il punto di contatto, sono uno quadruplo dell' altro.

790. Se un cerchio rotola nell' interno di un cerchio di raggio doppio, ogni punto del primo cerchio percorre un diametro del secondo.

791. Calcolare l' area della superficie che è chiusa da tre cerchi eguali, che si toccano esternamente a due a due.

792. Sul lato di un esagono regolare, iscritto in un cerchio, ed esternamente al cerchio dato, si descriva mezzo cerchio. Si calcoli l' area della superficie compresa da un sesto del cerchio dato e dal semicerchio descritto.

793. Sopra un lato di un triangolo equilatero preso come diametro, e dalla banda del triangolo, si descriva mezzo cerchio. Si calcolino le aree delle parti della superficie del cerchio, che si trovano fuori del triangolo, e quella della parte del triangolo, che è fuori del cerchio.

794. Due cerchi eguali passano ciascuno per il centro dell' altro. Si calcoli l' area della superficie compresa dai due archi interni dei due cerchi.

795. Un cerchio rotola tutto intorno ad un triangolo equilatero. Si calcoli l' area della superficie descritta dal cerchio. Si risolva lo stesso problema, supponendo che il triangolo sia qualunque, e che sia dato il perimetro del triangolo e il raggio del cerchio.

796. Calcolare l'area del segmento della superficie di un cerchio, che è compreso tra due corde parallele ed eguali rispettivamente ai lati del quadrato e dell'esagono regolare iscritti.

797. A e B sono due vertici consecutivi di un esagono regolare, iscritto in un cerchio. Da A si cali la perpendicolare sulla tangente nel punto B. Si calcoli l'area della superficie compresa tra la perpendicolare, la tangente e l'arco AB.

798. Dati i lati di un triangolo, calcolare l'area del cerchio iscritto.

799. ABC è un triangolo rettangolo in C. Sul cateto BC, esternamente al triangolo, si descriva mezzo cerchio, e poi si faccia girare la figura intorno al punto A. Si domanda l'area descritta in una rotazione dal semicerchio, supposti noti i valori dei cateti.

800. Dato un rettangolo (di lati a e b), determinare il centro del cerchio di diametro a, che tocca due lati opposti del rettangolo in modo che una delle parti del rettangolo, che cadono fuori del cerchio, sia equivalente alla superficie del cerchio.

STEREOMETRIA

CAPITOLO XV

PIANO E RETTA PERPENDICOLARI

Preliminari.

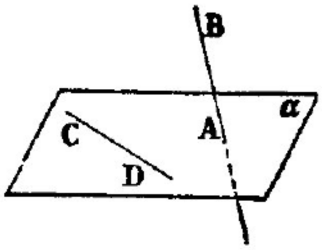
568. Teor. *Una retta, che passi per un punto di un piano, e per un punto che non appartenga al piano, ha con questo piano quel solo punto in comune.*

Dim. Sia un piano α, un suo punto A, e un altro punto B non appartenente al piano. Dico che la retta AB ha in comune col piano il solo punto A.

Infatti se, oltre che A, la retta avesse in comune col piano un altro punto C, essa giacerebbe nel piano per intero [40, 1°], epperò giacerebbe nel piano anche il punto B. Ciò contro l'ipotesi che il punto B non sia situato nel piano.

569. Quando una retta ha in comune con un piano un punto solo, si dice che la retta *incontra* il piano in quel punto, od anche che il piano *taglia* la retta in quel punto.

570. Teor. *Se una retta incontra un piano, e un'altra retta situata nel piano non passa per il punto d'incontro, non vi è piano che passi per ambedue le rette.*



Dim. Sia un piano α e una retta AB, che lo incontri nel punto A. Un'altra retta CD giaccia nel piano α, senza passare per A. Dico che non c'è nessun piano che passi per ambedue le rette.

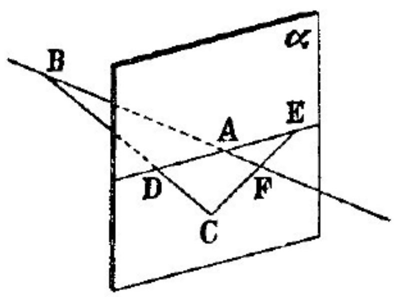
Infatti, se ci fosse un piano che passasse per ambedue le rette, questo piano, passando per la retta CD e per il punto A, coinciderebbe [42] col piano α, il quale, per ipotesi, anzichè passare per la retta AB, la taglia.

571. Due rette, situate in guisa che nessun piano, condotto per una, possa passare per l'altra retta [570], si dicono *sghembe*.

572. Teor. *Se una retta ha con un piano un punto solo in comune, i raggi, in cui la retta è divisa da quel punto, cadono da bande opposte del piano.*

Dim. Sia un piano α e su questo un punto A. Per il punto A passi una retta che non abbia col piano nessun altro punto in comune. [568]. Dico che i raggi, in cui la retta è divisa dal punto A, cadono da bande opposte del piano α.

Perciò, preso sulla retta un punto qualunque B, si consideri poi un punto C qualunque, tale però che B e C siano da bande opposte del piano α. Il segmento BC incontra necessariamente il piano [40, 7°]; sia D il punto d'incontro. Si tiri la retta AD. Questa, poichè ha col piano α due punti in comune, vi giace per intero.



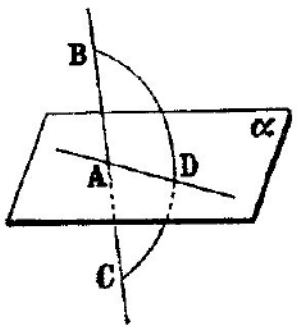
[40, 1°]. Sulla retta AD prendo un punto E, così che D ed E siano da bande opposte del punto A, e tiro CE. Codesto segmento, prescindendo dal suo punto E, cade per intero da quella banda del piano in cui si trova il punto C, epperò dalla banda opposta a quella in cui si trova il raggio AB.

Ora dobbiamo considerare il piano [43] delle rette AB, BC, ossia il piano del triangolo CDE. Poichè la retta AB nel punto A entra nel triangolo, essa deve incontrare di nuovo il contorno dello stesso; e ciò avviene necessariamente in un punto del lato CE, perchè la retta BC incontra già, in B, la retta CD. Sia F il punto d'incontro. Poichè questo punto, rispetto al piano α, cade dalla banda opposta a quella in cui si trova il punto B, i raggi AB, AF cadono da bande opposte del piano, c. d. d.

573. Teor. *Due piani, se hanno un punto in comune, hanno in comune una retta passante per il punto comune.*

Dim. Sia A un punto comune a due piani distinti α e β. Dico che questi piani hanno in comune una retta che passa per A.

Si tirino per il punto A in uno dei piani, ad es. nel piano β, una retta qualunque, e poi si prendano su codesta retta due punti B, C, in modo che giacciano da bande opposte del punto A, e quindi [572] da bande opposte del piano α. Si segni poi nel piano β una linea qualunque che abbia le estremità nei punti B, C. Codesta linea incontrerà il piano α almeno in un punto D. La retta AD, poichè ha con ciascuno dei piani in comune i punti A e D, è comune [40, 1°] ad ambidue i piani.



Fuori della AD i piani α e β non possono avere nessun altro punto in comune, perchè [42] altrimenti coinciderebbero. Così si è provato che *ecc.*

574. Teor. *Se due piani hanno una retta in comune, le due falde, in cui ciascun piano è diviso da cotal retta, sono situate da bande opposte dell'altro piano.*

Dim. Infatti, se si prendono sopra uno dei piani due punti A e B, che siano da bande opposte [40, 2°]

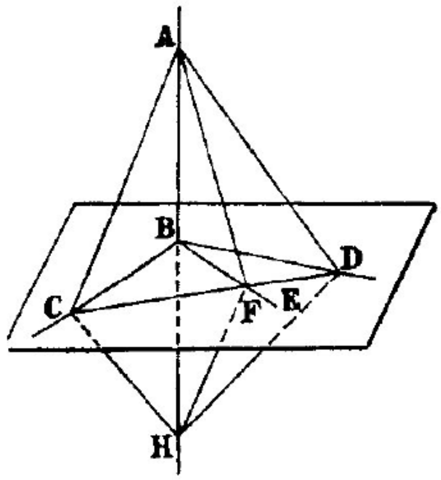
rispetto alla retta comune, e si tira la retta AB, questa incontra la retta comune in un punto C, e i due raggi CA, CB [572] e per conseguenza anche i punti A e B sono situati da bande opposte rispetto all' altro piano.

575. Se due piani hanno una retta in comune, si dice che *si segano* o *s' incontrano* in questa retta, la quale si dice *intersezione* dei due piani.

Piano e retta perpendicolari.

576. Teor. *Se due rette sono perpendicolari ad una terza in uno stesso punto, questa retta è perpendicolare a qualunque altra condotta per il detto punto nel piano delle due prime.*

Dim. Due rette BC, BD siano perpendicolari ad una terza AB in un medesimo punto B. Dico che la AB è perpendicolare a qualunque altra retta condotta per il punto B nel piano determinato [43] dalle BC, BD.



Condotta per B e nel piano delle BC, BD una retta BE qualesivoglia, si uniscano due punti C e D, presi ad arbitrio sulle BC, BD. Sia F il punto d' incontro delle rette CD, BE. (1). Poi, presi sulla AB due segmenti eguali BA, BH, si uniscano i punti C, F e D con A e con H.

Ora, perchè le rette BC, BD sono assi del seg-

(1) Si può sempre prendere i punti C, D così che abbia luogo codesto incontro.

mento AH, abbiamo $AC \equiv HC$ e $AD \equiv HD$. Se ora si considerano i triangoli ACD, HCD, si trova che hanno i lati rispettivamente uguali e si conchiude che è $A(C)D \equiv D(C)H$. Ora, confrontando i triangoli ACF, HCF, si trova [151] che è $AF \equiv HF$. Infine, poichè i punti B ed F sono equidistanti da A ed H, la retta BF è [167] un asse del segmento AH, epperò la retta AB è perpendicolare alla BE.

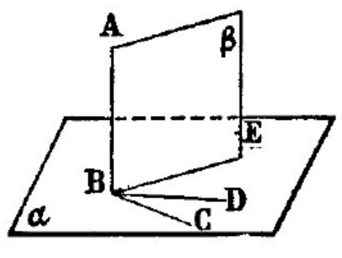
577. Def. *Se una retta incontra un piano ed è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il punto d' incontro, la retta ed il piano si dicono perpendicolari tra loro.*

Il punto comune ad una retta ed un piano, che siano perpendicolari tra loro, si dice il *piede* della perpendicolare.

578. Oss. In base al teorema del § 576, per poter asserire che una retta è perpendicolare ad un piano, basta sapere che la retta è perpendicolare a *due* rette del piano che la incontrano.

579. Teor. *Tutte le rette, perpendicolari a una stessa in un medesimo punto, giacciono in un medesimo piano.*

Dim. Siano una retta AB e quante si vogliano altre rette BC, BD, BE... perpendicolari alla AB nel punto B. Si deve provare che le rette BC, BD, ... giacciono tutte in uno stesso piano. Perciò basta considerare il piano determinato [43] da due qualunque delle rette, sia ad es. il piano α delle BC e BD, e provare che in codesto piano si trova un'altra qualunque delle altre rette, ad es. la BE.



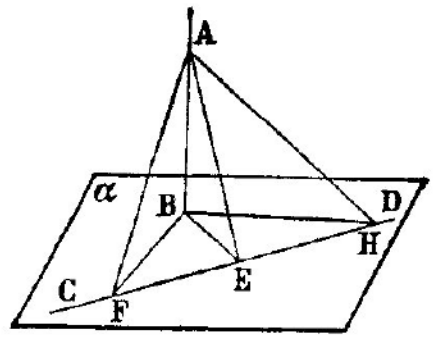
Consideriamo il piano β delle rette AB, BE. Questo piano ed il piano α, poichè hanno in comune il punto B, si segano [573] in una retta che passa per B. Sia BF l' intersezione. Ora la retta AB, perchè perpendicolare alle due BC, BD, è perpendicolare [579] al piano α, epperò [578] anche alla BF. E perchè nel piano β non si può condurre che una retta soltanto che sia perpendicolare ad AB, la BE e la BF non sono che una retta stessa. La BE giace adunque nel piano α.

580. Cor. *Se un angolo retto vien fatto girare intorno ad un suo lato, l' altro lato genera un piano.*

Quando una figura ha compiuta una rotazione intorno ad una retta, ogni punto della figura ha descritto un cerchio.

581. Teor. *Se dal piede di una retta, perpendicolare ad un piano, si cala la perpendicolare su di una retta qualesivoglia situata nel piano stesso, una terza retta, che unisca un punto qualunque della prima perpendicolare col piede della seconda, è essa pure perpendicolare alla retta del piano.*

Dim. Siano una retta AB perpendicolare ad un piano α nel punto B, e una retta CD qualunque, situata nel piano stesso. Da B, piede della perpendicolare, si tiri la BE perpendicolare alla CD. Ora si tratta di provare che qualsivoglia retta, che unisca un punto della prima perpendicolare, ad es. il punto A, col piede E della seconda, è perpendicolare alla CD.



A tal fine si prendano sulla retta CD, partendo da E, due segmenti eguali EF, EH, e si uniscano i punti F ed H con A e B.

Intanto, poichè BE è un asse del segmento FH, egli è $BF \equiv BH$. I due triangoli ABF, ABH hanno $BF \equiv BH$, hanno il lato AB in comune, e retti [577] gli angoli ABF, ABH, perchè la AB è per ipotesi perpendicolare al piano α; per conseguenza è $AF \equiv AH$.

Ma poichè i punti A ed E sono equidistanti dai punti F ed H, la retta AE è [167] perpendicolare ad FH, cioè alla retta CD, come d. d.

582. Cor. *Se dal piede di una retta, perpendicolare ad un piano, si conduce la perpendicolare ad una retta qualunque del piano, quest' ultima retta è perpendicolare al piano delle prime due.*

Infatti, poichè la retta CD è perpendicolare alle rette BE, EA, essa è perpendicolare [578] al piano di queste rette, che è poi il piano delle rette AB, BE. [43].

583. Teor. *Per qualsivoglia punto di una retta si può far passare un piano che sia perpendicolare alla retta, ed uno soltanto.*

Dim. Sia una retta AB, e su questa un punto C. Dico che per C si può tirare un piano perpendicolare alla retta, ed uno solo.

Intanto, se per C si conducono due rette distinte CM, CN perpendicolari alla AB, queste determinano [43] un piano α, che è perpendicolare [578] alla AB.

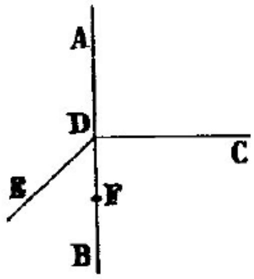
Resta da provare che per un punto d' una retta non si può condurre che un piano soltanto che sia perpendicolare alla retta.

Due piani α, β siano perpendicolari ambidue ad una stessa retta AB in uno stesso punto C. Tutte le rette dei piani α e β, passanti per C, sono perpendicolari [577] alla AB, epperò [579] giacciono tutte in uno stesso piano. I due piani α, β adunque coincidono [43]; epperò resta dimostrato che *ecc.*

584. Teor. *Per qualsivoglia punto, situato fuori di* *una retta, si può condurre un piano perpendicolare alla retta ed uno soltanto.*

Dim. Sia data una retta AB, e fuori di questa un punto C. Proveremo che per C si può tirare un piano perpendicolare alla retta AB ed uno solo.

Intanto si cali [128] da C la CD perpendicolare alla AB, e poi per il piede D si tiri [121] un' altra retta DE, che sia perpendicolare alla AB. Il piano, determinato [43] dalle due rette CD, DE, passa per C ed è [578] perpendicolare alla AB.



Ci rimane da provare che nessun altro piano può sodisfare ad un tempo queste due condizioni.

Intanto un altro piano, che passi per C ed incontri la retta AB in D, non può essere perpendicolare alla AB, giacchè si è provato pur ora [583] che per un punto di una retta non passa che un solo piano, il quale sia perpendicolare alla retta.

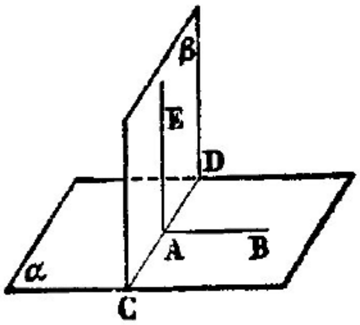
Ma neppure un altro piano che, passando per C, incontri la retta AB altrove che in D, sia ad es. nel punto F, potrebb' essere anch' esso perpendicolare alla AB. Giacchè, se fosse tale, l' angolo AFC sarebbe [577] retto, e in tal caso esisterebbe un triangolo CDF con due angoli retti, il che non può [135] essere.

Così si è dimostrato che *ecc.*

585. Teor. *Per qualsivoglia punto di un piano si può condurre una retta perpendicolare al piano, ed una soltanto.*

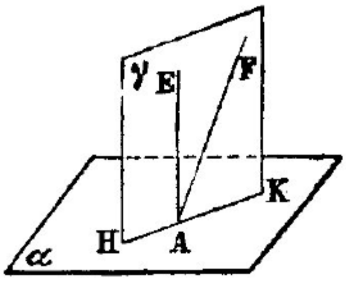
Dim. Sia dato un piano α, e su questo un punto A. Si tratta di provare che per A si può condurre una retta perpendicolare al piano, ed una soltanto.

Per A e nel piano α si tiri una retta AB ad arbitrio. Quindi si costruisca [583] il piano β perpendicolare alla AB nel punto A; e sia CD l'intersezione [573] dei due piani α e β. Infine, nel piano β, si tiri la AE perpendicolare alla CD; la AE è perpendicolare al piano α.



Infatti, poichè la AB è perpendicolare al piano β, essa è [577] perpendicolare alla AE, e viceversa la AE è perpendicolare alla AB. La AE è inoltre perpendicolare alla CD; essa è dunque [578] perpendicolare al piano α.

Ci rimane da provare che nessuna altra retta, condotta per A, quale sarebbe ad es., la AF, può essere perpendicolare al piano α. A tal fine si consideri il piano γ, che passa per le rette AE, AF. Questo piano e il piano α, avendo in comune il punto A, si tagliano [573] in una retta che passa per A; sia essa la HK. Ora, poichè la AE è perpendicolare al piano α, essa è perpendicolare alla HK; per conseguenza [121] la AF è obliqua alla HK. Tanto basta [577] per conchiudere che la AF non è perpendicolare al piano α.

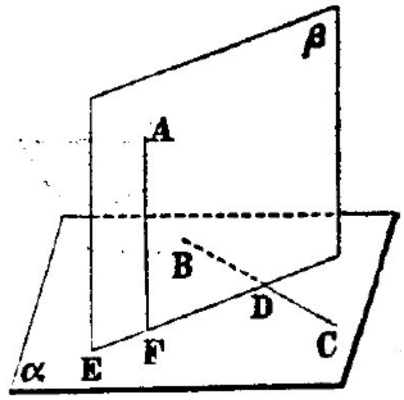


Così rimane dimostrato che *ecc.*

586. Teor. *Per qualsivoglia punto, preso fuori di un piano, si può condurre una retta perpendicolare al piano, ed una soltanto.*

Dim. Sia dato un piano α, e fuori di questo un punto A. Si tratta di provare che dal punto A si può condurre una perpendicolare al piano, ed una soltanto.

Sul piano α si tiri ad arbitrio una retta BC, e poi per A si conduca [584] il piano β perpendicolare alla BC. Sia D il punto d'incontro del piano β con la BC, e sia DE l'intersezione [573] dei piani α e β. Dal punto A si cali [128] la AF perpendicolare alla retta ED. Dico che la AF è perpendicolare al piano α.



Infatti, poichè la BC è perpendicolare al piano β in D, e da questo punto è tirata la DE perpendicolare alla retta AF del piano, la AF è perpendicolare [582] al piano delle due rette ED, DC, cioè al piano α.

Ci rimane da dimostrare che da un punto, che sia fuori d'un piano non si può condurre al piano che una perpendicolare soltanto.

Infatti, se da un punto A, che sia fuori di un piano α, si potessero condurre al piano due perpendicolari distinte AB, AC, ci sarebbe un triangolo ABC con due angoli retti, e ciò non può essere. [135].

Così si è dimostrato *ecc.*

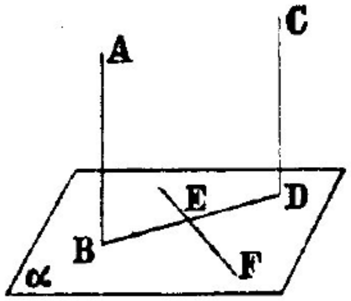
Proiezione di una retta sopra un piano.

587. Teor. *Due rette perpendicolari a uno stesso piano giacciono in uno stesso piano e non s' incontrano.*

Dim. Due rette AB, CD siano perpendicolari ad uno stesso piano α nei punti B e D. Si uniscano questi punti e poi si tiri, nel piano α, una retta che sia perpendicolare alla BD; tale sia la retta EF.

Ed ora, poichè la AB è perpendicolare al piano α

e la BE è perpendicolare alla EF, questa retta è perpendicolare [582] al piano delle rette AB, BE. Per la stessa ragione la retta EF è perpendicolare al piano delle rette CD, DE. Ma poichè il piano delle rette AB, BE e quello delle rette CD, DE sono perpendicolari ad una stessa retta in uno stesso punto, essi si confondono in uno stesso piano. [583]. Così resta provato che le rette AB, CD giacciono in uno stesso piano.

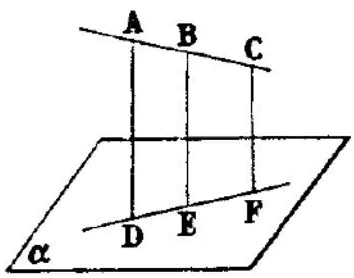


Le rette AB, CD, perchè perpendicolari al piano, sono entrambe perpendicolari alla BD, quindi non s'incontrano. [137, oppure 586].

588. Teor. *Le perpendicolari, condotte ad un piano, dai punti di una stessa retta, giacciono tutte in un medesimo piano.*

Dim. Siano un piano α ed una retta AB qualunque. Dico che le perpendicolari, tirate al piano α dai punti della AB, giacciono tutte in un medesimo piano.

Consideriamo la retta data ed una delle perpendicolari, ad es. la AD; sappiamo [43] che per queste rette passa un piano ed un solo. Proveremo che in questo piano giacciono tutte le perpendicolari; basta considerarne una qualunque, sia ad es. la BE.



Poichè due rette, perpendicolari ad uno stesso piano, giacciono in uno stesso piano [587], tanto vale per le rette AD, BE. Nel piano di queste rette giace anche la retta AB, perchè [40, 1°] ha con esso in comune i punti A, B. Ma due rette d'un piano bastano [43] a determinarlo; quindi si può dire che la retta BE giace nel piano delle due AD, AB.

589. Cor. *I piedi delle perpendicolari, tirate ad un piano dai punti di una stessa retta, giacciono sopra una retta.*

Si è visto [588] infatti che le perpendicolari, tirate ad un piano α dai punti di una retta, giacciono tutte in uno stesso piano, che chiameremo β. I piedi delle perpendicolari, poichè appartengono ad entrambi i piani α e β, non possono essere altrove che sulla retta intersezione dei due piani, intersezione che è il luogo dei punti comuni ai due piani.

590. Def. *La retta, sulla quale giacciono i piedi di tutte le perpendicolari che si possono tirare dai punti di una retta data a un piano dato, si dice* proiezione *della retta data sul piano.*

591. Poichè due punti bastano a determinare una retta, per ottenere la proiezione di una retta sopra un piano dato, basta calare sul piano le perpendicolari da due punti qualisivogliano della retta (*proiettare* sul piano due punti qualunque della retta), e tirare poi la retta, che passa per i piedi delle perpendicolari (per le *proiezioni* dei due punti sul piano).

Quando una retta incontra un piano, per ottenere la proiezione della retta sul piano, basta proiettare sul piano un punto della retta, e poi unire il piede della perpendicolare col punto nel quale la retta data incontra il piano dato.

592. Def. *Per proiezione di un segmento sopra un piano* si intende il segmento che unisce le proiezioni (sul piano) delle estremità del segmento dato.

Oss. Se un segmento è perpendicolare ad un piano, la sua proiezione sul piano si riduce ad un punto (al piede della perpendicolare).

Perpendicolare ed oblique tirate da un punto ad un piano. Angolo di una retta con un piano.

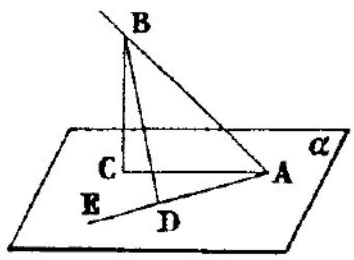
593. Teor. *La perpendicolare, tirata da un punto ad un piano, è minore di ogni altro segmento compreso tra il punto stesso ed il piano.*

Dim. Infatti, unendo il piede della perpendicolare con quello di un' obliqua qualsivoglia, si ottiene un triangolo rettangolo, nel quale l' ipotenusa è l' obliqua, e la perpendicolare è un cateto. Quindi [162] la perpendicolare è minore dell' obliqua, c. d. d.

594. Def. *La perpendicolare, tirata da un punto ad un piano, si dice* distanza *del punto dal piano.*

595. Teor. *L' angolo, che un raggio uscente da un punto di un piano ed obliquo al piano, forma con la sua proiezione sul piano, è minore dell' angolo che il raggio forma con qualunque altro tirato nel piano per il punto d' incontro.*

Dim. Sia un piano α, e un raggio AB uscente da un punto A del piano ed obliquo al piano. Preso su AB un punto B qualunque, si cali la BC perpendicolare al piano α, e si tiri il raggio AC. Proveremo che l' angolo CAB, fatto del raggio AB con la sua proiezione AC, è minore dell' angolo che AB forma con qualunque altro raggio tirato nel piano α per il punto A.



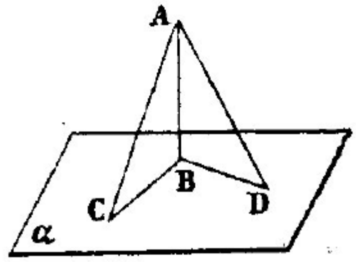
Per A e nel piano α si tiri adunque ad arbitrio un raggio AE, e preso su questo il segmento $AD \equiv AC$, si tiri BD. Ora, se si confrontano i triangoli ABC, ABD, si trova che hanno il lato AB in comune,

$AC \equiv AD$ per costruzione, e $BC < BD$, perchè la perpendicolare è [593] minore di ogni obliqua. Per conseguenza [152] è $C(A)B < D(A)B$, c. d. d.

596. Def. *L'angolo acuto, che una retta obliqua ad un piano forma con la sua proiezione sul piano, si dice* inclinazione *od* angolo *della retta col piano.*

597. Teor. *Se due oblique, tirate ad un piano da uno stesso punto, hanno proiezioni eguali, esse sono eguali e fanno col piano angoli eguali.*

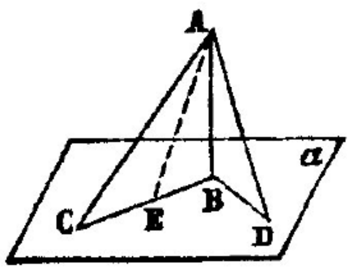
Dim. Da un punto A siano tirate ad un piano α la perpendicolare AB e due oblique AC, AD. I segmenti BC, BD sono le proiezioni delle oblique, e gli angoli ACB, ADB sono gli angoli delle oblique col piano.



Se è $BC \equiv BD$, i due triangoli ABC, ABD hanno due lati e l'angolo compreso [577] rispettivamente uguali, e per conseguenza è anche $AC \equiv AD$ ed $A(C)B \equiv A(D)B$.

598. Teor. *Se due oblique, tirate ad un piano da uno stesso punto, hanno proiezioni disuguali, l'obliqua, che ha proiezione maggiore, è maggiore; fa poi col piano angolo minore.*

Dim. Da un punto A siano tirate ad un piano α la perpendicolare AB e due oblique AC, AD; e sia $BC > BD$. Si vuol provare che è $AC > AD$, ed $A(C)B < A(D)B$.



A tale intento si faccia $BE \equiv BD$, e si tiri AE. Allora, perchè le due oblique AE, AD hanno proiezioni eguali, è [597] $AE \equiv AD$ ed

$A(E)B \equiv A(D)B$. Ma [162] è $AC > AE$, ed [133] $A(C)B < A(E)B$; quindi è $AC > AD$, ed $A(C)B < A(D)B$, c. d. d.

Esercizi.

801. Se tre segmenti eguali hanno una estremità in comune, per le altre estremità si può far passare un cerchio.

802. Una retta ed un piano, perpendicolari a una stessa retta in due punti distinti, non s'incontrano.

803. Di due oblique disuguali, condotte a uno stesso piano da uno stesso punto, la maggiore ha proiezione maggiore ed inclinazione minore.

804. Se due rette sghembe AB, CD sono perpendicolari a uno stesso segmento rispettivamente nelle estremità A e C, ogni altro segmento, che unisce un punto di una retta con un punto dell'altra, è maggiore di AC. (Preso sulla AB un punto E, si tiri EF perpendicolare a CD. Basta provare che è $EF > AC$. Perciò si tiri un piano perpendicolare ad AC in C; si cali da E la EH perpendicolare al piano. Si prova [89] essere $AE \gtreqless CH$; quindi è $AE > CF$, e per conseguenza è $AC < EF$).

805. Se una retta e un piano sono perpendicolari a una stessa retta rispettivamente in A ed in B, e si prendono sulla prima retta due segmenti eguali AC, AD, i punti C e D sono equidistanti dal piano.

806. Se due rette sono perpendicolari a una stessa rispettivamente in A ed in B, e si prendono sulla prima due segmenti eguali AC, AD, e sulla seconda due segmenti eguali BE, BF, anche i segmenti CE, DF sono eguali. (Si tiri un piano perpendicolare alla AB in A, e si proietti su questo l'altra retta).

807. Per il centro di un cerchio si tiri una obliqua al piano del cerchio, e si prenda su questa un punto A. Quale è il maggiore, quale il minore dei segmenti, che si possono condurre dal punto A ai punti del cerchio?

808. Se per il piede B di un segmento AB, obliquo ad un piano, passano due rette che facciano angoli eguali con la proiezione di $A B$, esse hanno dal punto A distanze uguali; e se fanno con la proiezione angoli disuguali (che però non siano supplementari), esse hanno distanze disuguali.

809. Se una retta fa angoli eguali con tre rette che giacciono in un piano, essa è perpendicolare al piano.

810. Se da un punto si calano le perpendicolari sopra due piani che si segano, e dai piedi delle due perpendicolari si calano due perpendicolari sull'intersezione dei piani, le nuove perpendicolari hanno il piede in comune.

811. Ogni punto dell'asse di un cerchio (così si chiama la retta perpendicolare al piano di un cerchio, e che passa per il centro) è equidistante dalle rette che sono perpendicolari al piano del cerchio nei punti del cerchio stesso.

812. Se una retta incontra due piani, che si segano, in punti egualmente distanti dall'intersezione, la retta fa coi piani angoli eguali. E reciprocamente.

813. Luogo dei punti equidistanti da due punti dati.

814. Luogo dei punti di un piano, che hanno data distanza da un punto situato fuori del piano.

815. Luogo dei punti equidistanti dai punti di un cerchio dato.

816. Luogo dei punti equidistanti dai vertici di un triangolo equilatero.

817. Luogo delle perpendicolari tirate da uno stesso punto ai piani passanti per una stessa retta.

818. Luogo dell'estremità B di un segmento costante $A B$, che ha l'estremità A in un punto di un piano, e che ha col piano stesso inclinazione costante.

819. Dati due punti sopra due piani che s'incontrano, tracciare sui due piani la più breve spezzata che unisce i punti dati.

820. Date le proiezioni sopra un piano delle estremità di un segmento, e date le proiettanti, costruire il segmento.

821. Date le proiezioni sopra un piano dei vertici di un triangolo, e date le proiettanti, costruire un triangolo eguale al primo.

822. Condurre un piano, che passi per due punti dati, e che sia equidistante da due altri punti dati.

823. Trovare un punto, che abbia data distanza dai punti di un cerchio dato.

824. Per un punto di un piano condurre nel piano una retta, che abbia data distanza da un punto situato fuori del piano.

825. Dati due punti da una stessa banda di un piano, trovare, su questo, cotal punto, che la somma de' segmenti, che lo uniscono co' punti dati, sia la più piccola possibile.

826. Per il piede di una obliqua ad un piano tirare nel piano cotal retta che formi con la data angolo dato.

Def. *Il luogo dei punti, che da un punto fisso hanno distanze uguali a un dato segmento, si dice* sfera (*superficie sferica*).

Quel punto, quel segmento, si dicono rispettivamente *centro* e *raggio* della sfera.

Se un cerchio, che abbia il centro nel centro della sfera e raggio eguale al raggio della sfera, ruota intorno ad un suo diametro qualsivoglia, esso descrive la sfera.

Una sfera taglia lo spazio in due parti. Quella parte, nella quale è il centro, si dice *interna* alla sfera.

Un segmento, che abbia i termini sopra una sfera, si dice *corda* della sfera. Ogni corda, che passa per il centro, si dice *diametro*.

827. Se la distanza di una retta dal centro di una sfera è minore del raggio, la retta incontra la sfera in due punti. Ogni punto, compreso tra quelli d'incontro, è interno; ogni altro è esterno.

828. Una retta, perpendicolare ad un raggio di una sfera nella estremità, non ha con la sfera in comune altro che l'estremità del raggio, ed ogni altro punto è fuori della sfera. (Una retta così fatta si dice *tangente* della sfera).

829. Se la distanza di una retta del centro di una sfera è maggiore del raggio, la retta non ha con la sfera nessun punto in comune, ed è tutta esterna.

830. Se la distanza di un piano dal centro di una sfera è minore del raggio, e il piano non passa per il centro, il piano taglia la sfera in un cerchio, il cui raggio è minore di quello della sfera. Ogni punto del piano situato nell'interno del cerchio è interno alla sfera, ogni altro punto è esterno.

831. Se un piano passa per il centro di una sfera, esso taglia la sfera in un cerchio, il cui raggio è uguale al raggio stesso della sfera. (Così fatto cerchio si dice cerchio *massimo* della sfera).

832. Se la distanza di un piano dal centro di una sfera è uguale al raggio, il piano ha con la sfera un solo punto in comune; ogni altro punto è esterno. (Un piano così fatto si dice piano *tangente* della sfera).

833. Se la distanza di un piano dal centro di una sfera è maggiore del raggio, il piano non ha con la sfera nessun punto in comune, ed è tutto fuori della sfera.

834. Due cerchi massimi di una sfera si tagliano sempre e si tagliano in due punti che sono le estremità di un diametro della sfera.

835. Per un punto di una sfera si può sempre condurre un piano tangente, ed uno soltanto.

836. La tangente in un punto di una sfera ad un cerchio qualsivoglia segnato sopra la sfera giace nel piano che tocca la sfera in quel punto.

837. Due piani equidistanti dal centro di una sfera e che taglino la sfera, la tagliano in cerchi eguali.

838. Se due piani, che tagliano una sfera, hanno dal centro distanze disuguali, delle due sezioni (cerchi *minori*) è maggiore quella che è fatta dal piano che ha distanza minore.

839. Se due cerchi minori sono eguali, i loro centri sono equidistanti dal centro della sfera; e se sono disuguali, il piano del minore ha dal centro maggiore distanza.

840. Per due punti di una sfera passano innumerevoli cerchi minori ed un solo cerchio massimo.

841. Un cerchio massimo divide la sfera in parti eguali; ed un cerchio minore la divide in parti disuguali.

842. Il piano perpendicolare a una corda nel punto di mezzo, passa per il centro della sfera.

843. Trovare il centro di una sfera data.

844. Luogo dei punti di contatto delle tangenti tirate ad una sfera da un punto esterno.

845. Luogo dei punti di contatto dei piani tangenti ad una sfera e passanti per un punto che sia fuori della stessa.

846. Di tutti i segmenti, che si possono tirare a una sfera da un punto che non sia il centro, il maggiore è quello che passa per il centro; e quello un cui prolungamento passa per il centro è minore di ogni altro.

847. Se la distanza dei centri di due sfere è maggiore della somma dei raggi, ciascun punto dell'una è fuori dell'altra.

848. Se la distanza dei centri di due sfere è uguale alla somma dei raggi, le sfere hanno un punto in comune, situato sulla retta dei centri e fra i centri; e ciascun altro punto di ciascuna sfera è fuori dell'altra.

849. Se la distanza dei centri di due sfere è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, le sfere si segano lungo un cerchio posto in un piano perpendicolare alla retta dei centri.

850. Se la distanza dei centri di due sfere è uguale alla differenza dei raggi, le sfere hanno in comune un solo punto, situato sul prolungamento del segmento dei centri, che è dalla banda del centro della sfera minore. Ciascun altro punto della sfera maggiore è fuori della minore; e ciascun altro punto di questa è interno a quella.

851. Se la distanza dei centri di due sfere è minore della differenza dei raggi, le sfere non hanno nessun punto in comune; ciascun punto della maggiore è esterno all'altra, e ciascun altro punto di questa è interno a quella.

852. Se due sfere hanno in comune un punto, che non sia sulla retta dei centri, hanno in comune un cerchio passante per questo punto, e lungo questo cerchio si tagliano.

853. Teoremi inversi di quelli dall'esercizio 848 all'852.

CAPITOLO XVI

DIEDRO

Sezione normale di un diedro.

599. Def. Due falde, uscenti da una stessa retta, dividono lo spazio in due parti, che si dicono *diedri.*

Un diedro si può anche definire come la parte di spazio che vien percorsa da una falda, se questa vien fatta rotare intorno all' origine.

Le due posizioni, prima ed ultima, d'una falda, che abbia descritto un diedro, si dicono *facce* del diedro; la retta comune alle facce si dice *spigolo* o *costola* del diedro.

600. Qualunque punto, per cui sia passata la falda che ha descritto un diedro, si dice *interno* al diedro; ogni altro punto si dirà *esterno.* (1).

Una figura si dirà *interna* od *esterna* ad un diedro, se tutti i suoi punti sono interni od esterni al diedro.

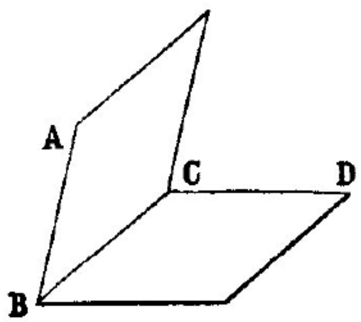
Se il prolungamento di una faccia di un diedro cade fuori del diedro, questo si dice *convesso*; altrimenti esso è *concavo.*

Quando le facce di un diedro formano un piano, il diedro si dice *piatto.*

601. Perchè sia individuata una falda, basta siano dati l' origine e un punto qualunque della falda. [42]. Così due punti dello spigolo di un diedro, un

(1) Se la falda, che ha generato un diedro, ha compiuta una rotazione, non c'è nessun punto che sia esterno al diedro. Ma non vogliamo pensare a diedri che siano eguali o maggiori di tutto lo spazio.

punto d'una faccia e un punto dell'altra bastano ad individuare spigolo e facce d'un diedro; ma non bastano ad individuare il diedro, perchè due falde aventi origine comune dividono lo spazio in due regioni, che sono diedri ambidue. Manifestamente, perchè il diedro fosse pienamente determinato, basterebbe fosse indicato un quinto punto interno al diedro. Ma poichè non ci accade mai di considerare diedri concavi, ma consideriamo soltanto diedri convessi, i quattro punti accennati superiormente ci basteranno per indicare un diedro. Le lettere, che indicano i due punti dello spigolo, si pronunciano e si scrivono frammezzo alle altre due.



Così la notazione: *diedro* $ABCD$, o la più semplice $A(BC)D$, esprimerà il diedro convesso, che ha la retta BC per ispigolo, e le cui facce passano rispettivamente per i punti A e D.

602. Def. L'angolo, compreso da due raggi perpendicolari in uno stesso punto allo spigolo di un diedro e situati uno in una faccia e l'altro nell'altra (1), si dice *sezione normale del diedro.*

Oss. Il piano di una sezione normale di un diedro è perpendicolare allo spigolo [578], e i lati della sezione si possono considerare come le intersezioni di codesto piano con le facce del diedro.

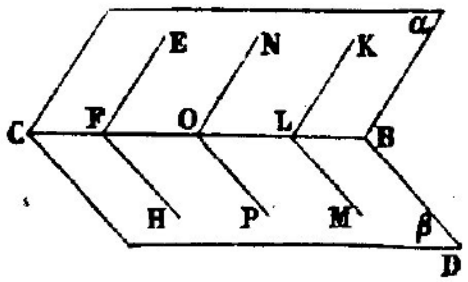
603. Teor. *Tutte le sezioni normali di un diedro sono eguali tra loro.*

(1) Veramente, perchè l'angolo fosse pienamente determinato, bisognerebbe aggiungere: *e i cui punti sono interni al diedro.* Ma, non volendo considerare diedri concavi, si intende l'angolo convesso compreso dai due raggi.

Dim. Sia un diedro $ABCD$, e siano $E(F)H$, $K(L)M$ due sezioni normali qualunque. Dimostreremo che esse sono eguali.

A tal fine, diviso FL per metà in O, si tirino i raggi ON, OP, rispettivamente nelle facce α e β, e perpendicolarmente allo spigolo CB.

Ed ora si muova la figura invertendo [78] l'angolo NOP (¹). Con ciò i lati ON, OP si scambiano di posto. E perchè il piano dell'angolo NOP, a moto compiuto, ha ripreso [43] la posizione primitiva, e il punto O non ha cambiato di posto, e lo spigolo CB è perpendicolare [578] al piano NOP, dopo il movimento lo spigolo CB si trova nella primitiva sua posizione. [585].



Ma poichè le rette CB, ON della faccia α sono andate a coincidere con le rette BC, OP della posizione primitiva della faccia β, e le rette BC, OP della faccia β sono andate a coincidere con le rette CB, ON della posizione primitiva della faccia α, dopo il movimento la faccia α si trova [43] nella posizione primitiva della faccia β, e questa nella posizione primitiva di quella.

Infine, perchè è $OF \equiv OL$, dopo il movimento i punti F ed L si trovano scambiati di posto. E perchè in un piano ad una retta in un punto dato non si può tirare che una sola perpendicolare, a moto compiuto, ciascuno degli angoli EFH, KLM si trova a coincidere con la posizione primitiva dell'altro.

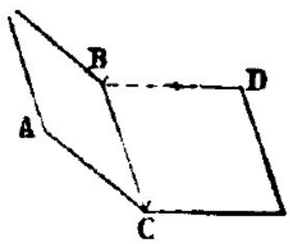
(¹) Si potrebbe anche dire : si faccia compiere alla figura mezza rotazione intorno alla bisettrice dell'angolo NOP.

Così resta dimostrato che *ecc.*

604. Cor. 1°. *Un diedro è invertibile (cioè si può rimettere in una sua primitiva posizione anche scambiando tra loro di posto le facce).*

605. Cor. 2°. *Un diedro può scorrere su se stesso.*

Sia un diedro $ABCD$. Supponiamo che (restando sempre la traccia della primitiva posizione) il diedro venga mosso, e in modo che una faccia, ad es. la BCD scorra sopra se stessa. [51]. Dico che in questo movimento anche la faccia BCA scorre su se stessa.

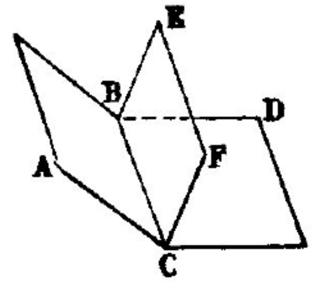


Infatti, ove questa faccia si staccasse una volta dalla posizione primitiva, tagliando poi i diedri (il primitivo dato, e il diedro nella nuova posizione) con un piano perpendicolare allo spigolo comune, si otterrebbero due sezioni normali disuguali. (Una infatti sarebbe parte dell'altra). E ciò non può essere, perchè infine codeste due sezioni sarebbero sezioni normali ottenute con due piani distinti in un medesimo diedro, e si sa che due sezioni così fatte sono sempre uguali.

606. Oss. Affine di riconoscere se due diedri sono eguali, si trasporta un diedro sull'altro in guisa che due facce divengano coincidenti, e i diedri cadano da una stessa banda della faccia comune. Se dopo di ciò anche le altre due facce coincidono, i diedri sono eguali; altrimenti sono disuguali. Infatti con nessuna altra disposizione si potrebbe [605, 604] [1] ottenere la coincidenza delle due figure.

[1] Questo esempio fa vedere che in qualche caso, senza certe cognizioni di Geometria, non si saprebbe decidere, mediante sovrapposizione, se due figure sono eguali, o no.

607. Se una falda piana, con successive rotazioni parziali fatte in un medesimo senso intorno alla sua origine, sia passata da una posizione primitiva a parecchie altre, ciascuna volta avrà descritto un diedro. Due di questi diedri, se descritti con due movimenti parziali prossimi successivi, si dicono *consecutivi*; e il diedro generato nel movimento, che ha portato la falda generatrice dalla primitiva posizione all'ultima, si dice *somma* dei diedri generati nei singoli movimenti parziali successivi.



Così, nella nostra figura, il diedro $ABCD$ è la somma dei due $A(BC)E$, $E(BC)D$.

La somma di più diedri è indipendente dall'ordine in cui essi si succedono, giacchè, senza alterare la somma [604], si possono scambiare di posto due addendi consecutivi.

608. Teor. *Se due diedri hanno sezioni normali eguali, essi sono eguali.*

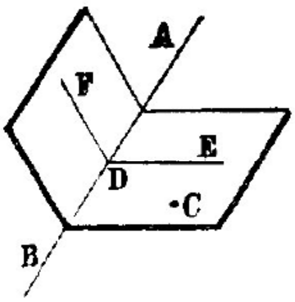
Dim. Infatti, se i due diedri vengono trasportati uno sull'altro in modo che due loro sezioni normali coincidano, divengono intanto coincidenti anche gli spigoli, perchè essi sono [578] rispettivamente perpendicolari alle sezioni normali, e in uno stesso punto ad uno stesso piano non si può inalzare [585] che una perpendicolare soltanto. Ma quando due piani hanno due rette in comune, essi coincidono [43]; per conseguenza anche le facce dei diedri dopo il trasporto coincidono.

609. Teor. *Se due diedri hanno sezioni normali disuguali, è maggiore quello che ha sezione maggiore.*

Dim. Infatti, se si taglia la sezione maggiore in modo che una parte sia eguale alla sezione normale minore, e poi si conduce un piano per lo spigolo e per il raggio che si è tirato per dividere la prima sezione [43], uno dei diedri resta diviso in due parti, una delle quali è [608] uguale all' altro diedro.

610. Probl. *Costruire un diedro una cui faccia sia una falda data e la cui sezione normale sia eguale ad un angolo dato.*

Risol. La retta AB sia l'origine d'una falda data e sia C un altro punto qualunque della falda stessa; sia poi dato un angolo. Si vuol costruire un diedro una cui faccia sia la falda ABC e la cui sezione normale sia eguale all' angolo dato.



Si tiri perciò un piano α perpendicolare alla retta AB [583]; sia DE il raggio in cui questo piano taglia la falda data. Nel piano α si costruisca [130] l'angolo FDE uguale all' angolo dato, e infine si tiri la falda che ha per origine AB e che comprende il raggio DF. Il diedro $FABE$ è una soluzione del problema proposto, perchè $F(D)E$ ne è una sezione normale.

È manifesto che il problema ammette due soluzioni.

611. Un diedro si dice acuto, retto, ottuso, secondo che tale denominazione conviene alla sua sezione normale.

Due diedri si dicono complementari o supplementari, secondo che tali sono le loro sezioni normali.

Due diedri consecutivi, se formano un diedro piatto, si dicono *adiacenti*.

612. Teor. *Due diedri adiacenti sono supplemen-*

tari; e reciprocamente, se due diedri supplementari sono consecutivi, le facce non comuni formano un piano (sono per diritto).

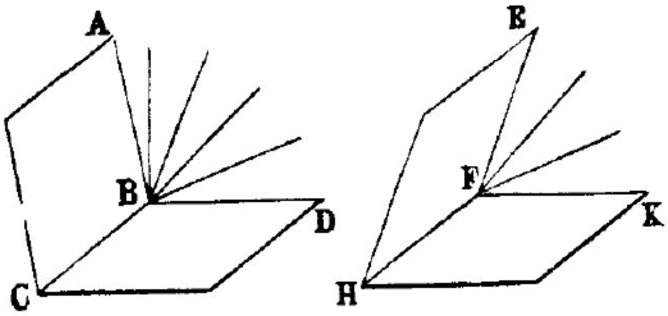
Dim. La cura della dimostrazione si può lasciare allo studioso.

613. Dei quattro diedri, formati da due piani che si segano, due, che siano adiacenti ad uno stesso dei quattro, si dicono *opposti allo spigolo.* Due diedri opposti allo spigolo sono eguali. [608].

614. Teor. *Due diedri stanno tra loro come le loro sezioni normali.*

Dim. Siano due diedri qualunque $ABCD$, $EFHK$; $A(B)D$, $E(F)K$ siano due loro sezioni normali. Si vuol dimostrare [381] che:

$$A(BC)D : E(FH)K = A(B)D : E(F)K.$$



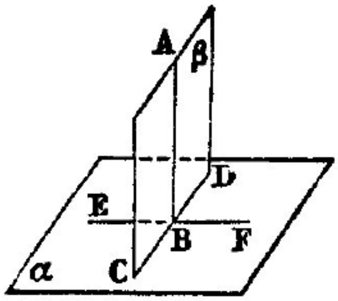
Presa dell'angolo EFK una parte aliquota ad arbitrio, ad es. una *n.esima* parte, si misuri con essa l' angolo ABD. Ecc. [608, 609].

Piani perpendicolari.

615. Teor. *Se un diedro è retto, è retto anche il diedro adiacente.*

Dim. Sia un diedro retto $ADCF$. Dico che è retto anche il diedro adiacente $EDCA$.

Perciò, per un punto qualunque B dello spigolo comune, e nella faccia β, si tiri BA perpendicolare alla CD; e poi si tiri la EF nel piano α, perpendicolarmente alla stessa CD in B. I due angoli EBA, ABF sono sezioni normali dei due diedri.



Poichè per ipotesi il diedro $ADCF$ è retto, l'angolo ABF è retto. È quindi retto anche l'angolo EBA, epperò è retto anche il diedro $EDCA$, come d. d.

616. Def. *Due piani si dicono perpendicolari tra loro, se i diedri formati da essi sono eguali.*

617. Teor. *Se due piani sono perpendicolari tra loro, i diedri compresi dai due piani sono retti.*

Dim. I due piani α e β siano perpendicolari tra loro, siano cioè uguali i diedri $EDCA$, $ADCF$. Dico che questi diedri sono retti.

Preso un punto B qualunque sull' intersezione dei piani, si tirino le BA, EF perpendicolari a CD, e poste rispettivamente nei piani β ed α.

Gli angoli EBA, ABF sono eguali, altrimenti anche i diedri sarebbero disuguali. [609]. I due angoli sono adunque retti, e tali [611] i diedri, c. d. d.

618. Teor. *Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che passa per la retta è perpendicolare al piano dato.*

Dim. Sia un piano α ed una retta AB perpendicolare a questo piano; e un piano β passi per la retta AB. Si vuol provare che il piano β forma col piano α diedri adiacenti eguali. [616].

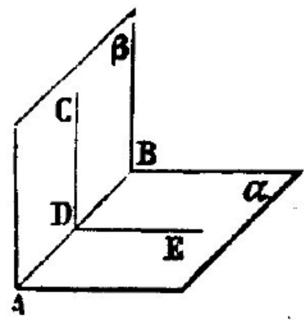
Posto che B sia il piede della perpendicolare AB, i due piani si tagliano [573] in una retta che passa per B; sia dessa la CD. Si conduca per B, e nel piano α, la retta EF perpendicolare a CD.

Allora, poichè anche la AB (perchè [577] perpendicolare al piano α) è perpendicolare alla CD, gli angoli EBA, ABF sono le sezioni normali dei diedri $EDCA$, $ADCF$. Ma è $E(B)A \equiv A(B)F$, perchè la AB, come perpendicolare al piano α, è perpendicolare alla EF. Quindi [608] anche i diedri $EDCA$, $ADCF$ sono eguali, c. d. d.

619. Cor. *Un piano, perpendicolare alla comune intersezione di due altri, è perpendicolare ad ambidue questi piani.*

620. Teor. *Se due piani sono perpendicolari tra loro, ogni retta, tirata in un piano perpendicolarmente all' intersezione comune, è perpendicolare all' altro piano.*

Dim. Siano due piani α e β perpendicolari tra loro, e sia AB l' intersezione. In uno dei piani, ad es. nel piano β, si tiri ad arbitrio una retta CD perpendicolare alla AB. Dico che la CD è perpendicolare al piano α.



A tal fine si tiri per D, e nel piano α, la DE perpendicolare ad AB. L'angolo CDE è pertanto una sezione normale del diedro dato; e poichè questo è retto per supposizione, $C(D)E$ è retto. Ma poichè la CD è perpendicolare alle rette AB e DE situate nel piano α, essa è perpendicolare [578] a questo piano, c. d. d.

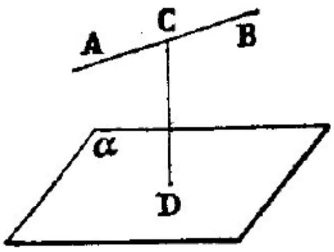
621. Cor. *Se due piani sono perpendicolari tra loro e una retta è perpendicolare ad uno in un punto che non sia sull' intersezione dei due piani, essa non ha con l' altro piano nessun punto in comune.*

Infatti, se la retta potesse incontrare il secondo piano in un punto M, tirando per M la perpendicolare alla intersezione dei piani, si otterrebbe [620] una nuova retta perpendicolare al primo piano. Ma allora da uno stesso punto M sarebbero tirate ad uno stesso piano due perpendicolari; e ciò non può [586] essere.

622. Teor. *Per una retta, che non sia perpendicolare ad un piano, si può condurre un piano perpendicolare al dato ed uno soltanto.*

Dim. Sia un piano α, ed una retta AB, che non sia perpendicolare al piano. Dico che per la AB si può far passare un piano, che sia perpendicolare al piano α, ed uno solo.

Intanto, se da un punto C, preso ad arbitrio sulla retta data, si tira la CD perpendicolare al piano α, il piano, che passa per la AB e per la CD [43], è perpendicolare [618] al piano dato.



Nessun altro piano, che passi per la AB, non può essere perpendicolare al piano α.

Infatti, se un secondo piano così fatto potesse esistere, la sua intersezione col piano α non passerebbe per D (1); ma allora, calando da C la perpendicolare su questa intersezione, si otterrebbe [620] un' altra perpendicolare al piano α; e ciò non può [586] essere.

623. Cor. *Se due piani perpendicolari ad un terzo si tagliano, la loro intersezione è perpendicolare al terzo piano.*

(1) Infatti, se passasse per D, avendo in comune con l'altro piano la retta AB e un punto esterno a questa, coinciderebbe col piano stesso. [42]. Come si vede, la dimostrazione suppone che la AB non giaccia nel piano α, e neppure il punto C. Il teorema però vale anche se la AB giace nel piano.

Infatti, se l'intersezione fosse obliqua al terzo piano, allora per una retta, che non è perpendicolare ad un piano, passerebbero due piani perpendicolari entrambi ad un terzo; e ciò non può essere. [622].

Esercizi.

854. La sezione normale di un diedro è l'inclinazione di ciascun lato della sezione con la faccia che contiene l'altro lato.

855. Se per uno stesso punto dello spigolo di un diedro si conducono una obliqua allo spigolo in una faccia e la perpendicolare nell'altra, si ottiene un angolo che è maggiore, uguale o minore della sezione normale, secondo che il diedro è acuto, retto od ottuso.

856. Tra i piani, che si possono tirare per una retta obliqua ad un piano, quello, che interseca il piano dato lungo la perpendicolare alla proiezione dell'obliqua, forma col piano dato il minore diedro.

857. Tutti i piani condotti per uno stesso punto, perpendicolarmente a rette poste in un piano, passano per una stessa retta.

858. Luogo dei punti equidistanti da due piani che si tagliano.

859. Luogo dei punti equidistanti da due rette che si tagliano.

860. Luogo dei punti equidistanti dai lati di un triangolo.

861. Se una retta è perpendicolare ad un piano, la sua proiezione sopra un altro piano è perpendicolare all'intersezione dei due piani.

862. Due piani, perpendicolari ad un terzo lungo due rette poste in questo piano e che non hanno nessun punto in comune, non possono avere alcun punto in comune. [620, 586].

863. Se due rette sono perpendicolari ad un piano, e due piani condotti per queste si tagliano, l'intersezione è perpendicolare al primo piano.

864. I piani, che dimezzano due diedri adiacenti sono perpendicolari tra loro.

865. Sui lati di una sezione normale di un diedro si segnino due punti ad eguale distanza dal vertice, e poi si tiri un piano per questi punti e per un punto qualunque dello spigolo del diedro. Codesto piano forma diedri eguali con le facce del diedro dato.

866. Per un punto dato condurre un piano perpendicolare a due altri.

867. Per una retta obliqua ad un piano condurre un piano, che formi col dato un diedro dato.

868. Per il vertice di un angolo tirare una retta, che formi angoli eguali coi lati dell'angolo dato, ed abbia col piano dell'angolo data inclinazione.

869. Per un punto condurre un piano perpendicolare a due altri, e ciò senza usare dell'intersezione dei piani.

870. Si confrontino i diedri formati col piano di un cerchio da tre piani condotti per uno stesso punto dell'asse del cerchio rispettivamente per una secante, una tangente ed una retta esterna al cerchio.

CAPITOLO XVII

TRIEDRO

Preliminari.

624. Def. Tre o più raggi uscenti da uno stesso punto, considerati in un certo ordine, e tali che tre consecutivi qualunque [1] non siano in uno stesso piano, determinano una figura che si dice *angoloide* (*angolo solido, spazio piramidale*).

I raggi, che determinano un angoloide, si dicono gli *spigoli* o le *costole* dell'angoloide; il loro punto comune si chiama il *vertice* dell'angoloide.

Gli angoli *convessi,* che hanno per lati due spigoli consecutivi, si dicono le *facce* dell'angoloide.

La *superficie di un angoloide* è quella composta dalle sue facce.

Secondo che il numero delle facce (che è pur quello degli spigoli) è 3, 4, 5..., l'angoloide vien chiamato *angoloide triedro, tetraedro, pentaedro...*

Un angoloide triedro si suol dire *triedro,* senz'altro.

Per indicare un angoloide si nominano con lettere il vertice e poi un punto per ciascuno spigolo, prendendo questi punti nell'ordine stesso in cui si seguono gli spigoli. Scrivendo, chiuderemo tra parentesi la lettera che accenna il vertice dell'angoloide. Così, ad es., la scrittura $(V)ABCDE$ accenna l'angoloide pentaedro, che ha il vertice in V, di cui VA, VB, VC, VD, VE sono gli spigoli successivi, ed $A(V)B$,

[1] Si considerano come consecutivi anche l'ultimo ed il primo.

$B(V)C$, $C(V)D$, $D(V)E$, $E(V)A$ sono le facce, prese consecutivamente.

625. Un angoloide si dice *convesso*, se il piano di ciascuna faccia lascia l'angoloide tutto da una stessa banda; altrimenti si dice *concavo*.

Per ottenere un angoloide convesso, basta prendere un punto fuori del piano di un poligono convesso, e, tirati da quel punto dei raggi a tutti i vertici del poligono, considerare gli angoli convessi compresi da ciascuna coppia di raggi passanti per due vertici consecutivi del poligono. Questo poligono e qualunque altro che si ottenga con un piano, che tagli tutte le facce dell'angoloide, si dicono *sezioni dell' angoloide.*

626. In un angoloide convesso si dicono *diedri dell' angoloide* i diedri convessi ciascuno dei quali è compreso da due facce consecutive; codeste facce si dicono *adiacenti* al diedro.

Nel seguito, parlando di angoloidi, intenderemo sempre che siano convessi.

La superficie d' un angoloide convesso divide lo spazio in due regioni illimitate. I prolungamenti degli spigoli cadono tutti in una stessa di queste regioni. [572]. Ogni punto di questa regione si dice *esterno* all' angoloide; ogni punto dell' altra è *interno.*

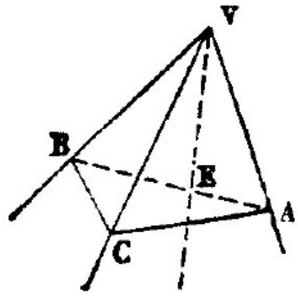
Proprietà di ogni angoloide.

627. Teor. *Ciascuna faccia d' un angoloide è minore della somma delle altre.*

Dim. 1°. Consideriamo dapprima il caso in cui l' angoloide è triedro. È evidente che basta provare che il teorema sussiste anche per una faccia, la quale superi ciascuna delle altre due.

Sia adunque un triedro $(V)ABC$, e supponiamo che in esso la faccia $A(V)B$ sia maggiore di ciascuna delle altre due.

Dall'angolo maggiore AVB si tagli l'angolo EVB eguale al minore CVB. Poi, uniti due punti A, B presi ad arbitrio sui raggi VA, VB, e fatto $VC \equiv VE$, si tirino CA, CB.



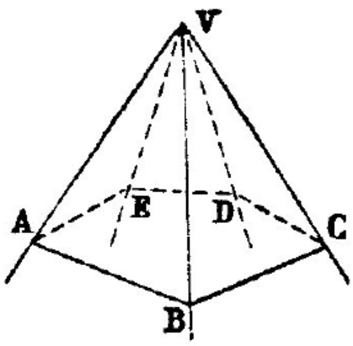
Intanto, poichè nei triangoli BVE, BVC due lati e l' angolo compreso sono rispettivamente uguali, è anche $BE \equiv BC$. Ma nel triangolo ABC è [145]:

$$BC + CA > BE + EA.$$

Per conseguenza è anche $CA > EA$. Ed ora, dacchè i triangoli VAC, VAE hanno il lato VA in comune, uguali i lati VC, VE, e il terzo lato CA del primo è maggiore di EA, è [152] $A(V)C > A(V)E$. Aggiungendo rispettivamente a questi angoli disuguali gli angoli eguali CVB, EVB, si ottiene appunto:

$$A(V)C + C(V)B > A(V)B.$$

2°. Passiamo a considerare un angoloide qualunque, ad es. l'angoloide $(V)ABCDE$, e proponiamoci di provare che la faccia $A(V)B$ è minore della somma delle altre.



Consideriamo i triedri: $(V)ABC$, $(V)ACD$, $(V)ADE$.

Intanto nel triedro $(V)ABC$ è:

$$A(V)B < B(V)C + A(V)C.$$

Ma nel triedro $(V)ACD$ è:

$$A(V)C < C(V)D + A(V)D;$$

quindi, a maggior ragione, è:

$$A(V)B < B(V)C + C(V)D + A(V)D.$$

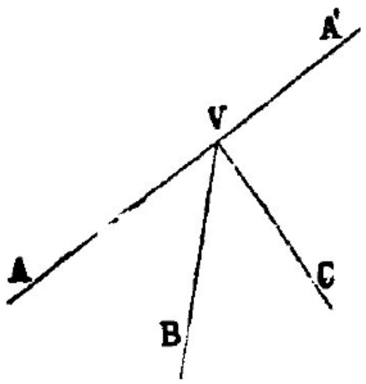
Nel triedro $(V)ADE$ si ha:

$$A(V)D < D(V)E + E(V)A;$$

quindi infine, a maggior ragione, è:

$$A(V)B < B(V)C + C(V)D + D(V)E + E(V)A.$$

628. Teor. *La somma delle facce d'un angoloide convesso è minore di quattro retti.*



Dim. 1°. Consideriamo dapprima un triedro $(V)ABC$.

Prolungando lo spigolo AV in A', si ottiene il triedro $(V)A'BC$, nel quale [627] è:

$$B(V)C < A'(V)C + A'(V)B.$$

Aggiungendo ai due membri della disuguaglianza gli angoli CVA, BVA, si ottiene:

$$B(V)C + C(V)A + B(V)A < A'(V)C + \\ + A'(V)B + C(V)A + B(V)A.$$

Ma ciascuna delle due somme $A'(V)C + C(V)A$ ed $A'(V)B + B(V)A$, perchè composta di due angoli adiacenti, è uguale a due retti; quindi la somma:

$$B(V)C + C(V)A + B(V)A$$

è minore di quattro retti, c. d. d.

2°. Sia ora un angoloide qualunque, ad es. l'angoloide $(V)ABCDE$.

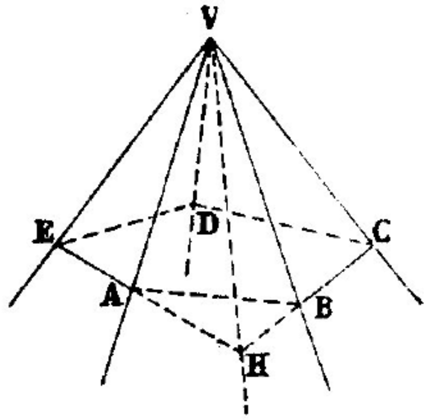
Sia VH l'intersezione de' piani [573] delle facce $A(V)E$, $C(V)B$ contigue alla faccia $A(V)B$. (1).

(1) Questi piani si segano perchè hanno il punto V in comune. Dei due raggi, in cui l'intersezione è divisa dal punto V, bisogna prendere quello che, rispetto alla faccia $A(V)B$, sta dalla banda dove non si trova l'angoloide.

Osserviamo intanto che l'angoloide $(V)HCDE$ ha una faccia di meno che il dato, e che la somma delle sue facce è maggiore della somma delle facce dell'angoloide dato, perchè nel triedro $(V)HBA$ è [627]:

$$B(V)H + H(V)A > B(V)A.$$

Nel modo stesso si può passare dall'angoloide $(V)EHCD$ ad un nuovo angoloide, nel quale il numero delle facce sia di nuovo diminuito di una unità; e nel nuovo angoloide la somma delle facce è maggiore che nell'ultimo. Così, proseguendo, giungeremo infine ad un triedro, nel quale la somma delle facce è maggiore che in qualunque degli angoloidi precedenti. Ma si è dimostrato che la somma delle facce di un triedro è minore di quattro retti; altrettanto, a maggior ragione, si può dire della somma delle facce dell'angoloide $(V)ABCDE$.



Così si è provato che *ecc.*

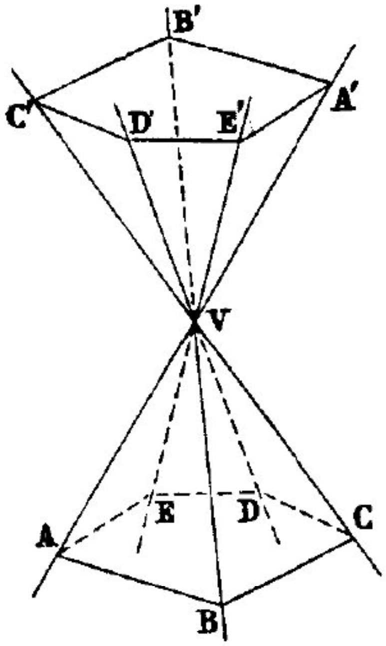
Angoloidi simmetrici.

629. Sia $(V)ABCDE$ un angoloide qualunque. Prolunghiamo tutti gli spigoli, e consideriamo l'angoloide determinato dai prolungamenti.

I due angoloidi, *opposti al vertice*, hanno intanto le facce rispettivamente uguali, perchè gli angoli opposti al vertice sono eguali. Ed anche i diedri degli angoloidi sono eguali rispettivamente, perchè due diedri opposti allo spigolo sono eguali.

Gli elementi dei due angoloidi sono anche *ordinatamente* uguali, perchè a facce o diedri consecutivi dell'uno corrispondono facce o diedri consecutivi nell'altro.

Eppure i due angoloidi in generale, non sono eguali. Infatti, come ora vedremo, non si può ottenere che divengano coincidenti.



Ed invero, se mai la coincidenza è possibile, questa deve aver luogo quando la faccia $A'(V)B'$ coincida con la faccia $A(V)B$. Per il nostro intento ci giova imaginare che l'angolo $A'(V)B'$ vada a sovrapporsi all'angolo $A(V)B$, una volta compiendo, nel piano comune, mezza rotazione intorno al vertice V; un'altra compiendo mezza rotazione intorno alla retta che dimezza gli angoli AVB', $A'VB$.

Nel primo caso i due angoloidi, che prima del movimento giacciono da bande opposte del piano delle facce $A'VB'$, AVB, si mantengono tali durante il movimento, epperò a moto compiuto non hanno in comune altro che le facce diventate coincidenti.

Nel secondo caso, a moto compiuto, i due angoloidi cadono dalla stessa banda della faccia comune; ma, poichè lo spigolo VA' è venuto a coincidere con VB, e i diedri degli angoloidi, che hanno codesti spigoli, in generale non sono eguali, la faccia $A'(V)E'$ e la faccia $B(V)C$ giacciono in piani distinti.

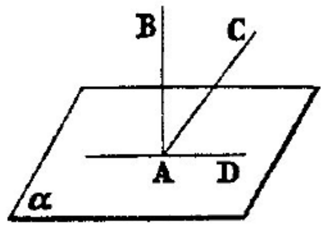
Così possiamo conchiudere che i due angoloidi non sono eguali.

630. Imaginiamo che due osservatori si trovino nell'interno dei due angoloidi opposti al vertice considerati nel paragrafo precedente, co' piedi nei vertici, e che siano rivolti rispettivamente verso due facce opposte al vertice, ad es. verso le facce $A(V)B$, $A'(V)B'$. Imaginiamo poi che la retta AVA', rotando intorno a V, percorra le superficie dei due angoloidi, cominciando a descrivere le facce considerate. È facile riconoscere che, mentre l'osservatore posto nel triedro superiore vede la retta mobile passare dinanzi a sè con movimento diretto dalla sua destra alla sua sinistra, per l'altro osservatore il movimento del raggio che descrive la faccia $A(V)B$ è diretto dalla sinistra alla destra. Gli elementi dei due angoloidi sono adunque *ordinatamente* uguali, ma non sono *similmente disposti.*

Triedri supplementari.

631. Lemma 1°. *Se un angolo ha il vertice sopra un piano, se un suo lato è perpendicolare al piano, e tutti e due i lati cadono da una stessa banda del piano, l'angolo è acuto. Reciprocamente: se un angolo acuto ha il vertice sopra un piano, e un lato è perpendicolare al piano, i due lati giacciono da una stessa banda del piano.*

Dim. Sia un piano α, e un angolo BAC abbia il vertice A sul piano; il lato AB sia perpendicolare al piano, ed ambidue i lati cadano da una stessa banda del piano. Dico che l'angolo BAC è acuto.



Infatti, se AD è l'intersezione del piano dell'angolo col piano α, poichè AB è perpendicolare a questo piano, l'angolo BAD è retto. Per conseguenza $B(A)C$, che è parte di $B(A)D$, è acuto.

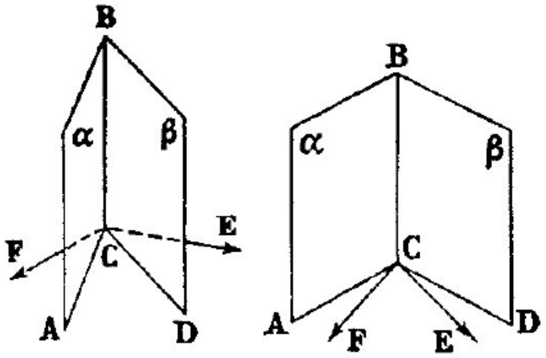
Invece, se AB ed AC giacessero da bande opposte del piano, allora $B(A)D$ sarebbe parte di $B(A)C$, epperò questo angolo sarebbe ottuso.

Perciò, dall'ipotesi che AB sia perpendicolare al piano, e che $B(A)C$ sia acuto, si può conchiudere che i due lati AB, AC cadono necessariamente da una stessa banda del piano.

632. Lemma 2°. *Se per un punto dello spigolo di un diedro si tirano due raggi rispettivamente perpendicolari alle facce, e in modo che ciascuno cada, rispetto alla faccia alla quale è perpendicolare, dalla stessa banda che l'altra faccia, l'angolo dei due raggi è supplementare della sezione normale del diedro.*

Dim. Sia un diedro $ABCD$; dinotiamo le facce con α e β.

Per un punto C qualsivoglia dello spigolo si tiri il raggio CE perpendicolarmente alla faccia α, e in maniera che il raggio e la faccia β cadano da una stessa banda della faccia α. Poi, di nuovo per il punto C, si conduca il raggio CF perpendicolarmente alla faccia β, e da quella banda di questa faccia dove si trova la faccia α.



Poichè i due raggi CE e CF sono perpendicolari ambidue allo spigolo BC, anche [578] il loro piano è perpendicolare a codesto spigolo. Epperò, se CA e CD sono le intersezioni di codesto piano con le facce α e β, l'angolo DCA è la sezione normale del diedro. Dico che gli angoli ECF, DCA sono supplementari.

Infatti, poichè i raggi CE, CF, come perpendicolari rispettivamente alle facce α, β, sono [577] perpendicolari ai lati CA, CD, abbiamo :

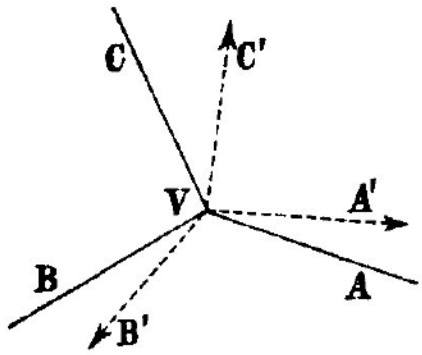
$$E(C)A + D(C)F \equiv 2R.$$

E da questa eguaglianza, per un caso e per l'altro, si ricava facilmente :

$$E(C)F + D(C)A \equiv 2R.$$

633. Teor. *Se per il vertice di un triedro si tirano tre raggi rispettivamente perpendicolari alle facce, e in modo che ciascuno di essi, rispetto alla faccia alla quale è perpendicolare, cada dalla stessa banda dove è lo spigolo opposto alla faccia stessa, le tre perpendicolari determinano un secondo triedro, che è reciproco del primo, tale cioè che il primo si può derivare dal secondo, come questo da quello. E le facce di ciascun triedro sono rispettivamente supplementari delle sezioni normali dei diedri dell'altro triedro.*

Dim. Sia il triedro $(V)ABC$. Per V si tiri il raggio VA', perpendicolarmente alla faccia $B(V)C$, e in guisa che VA e VA' cadano da una stessa banda della faccia stessa. Analogamente si tirino gli altri due raggi VB', VC'. Ora proveremo che il raggio VA è perpendicolare alla faccia $B'(V)C'$, e che rispetto a questa faccia esso è situato dalla stessa banda che il raggio VA'. Ed analogamente per gli altri due raggi VB, VC.



$$\begin{array}{ccc} VA & VB & VC \\ VA' & VB' & VC' \end{array}$$

Intanto, poichè VB' è perpendicolare alla faccia $A(V)C$, esso è perpendicolare [577] a VA, epperò VA è perpendicolare a VB' (1). E perchè VC' è perpendicolare alla faccia $A(V)B$, esso è perpendicolare [577] a VA, epperò VA è perpendicolare a VC'. Il raggio VA è dunque perpendicolare alle rette VB', VC', epperò [578] al loro piano.

D'altra parte, perchè il raggio VA' fu tirato perpendicolarmente al piano BVC, e rispetto a questo dalla stessa banda del raggio VA, l'angolo AVA' è [631] acuto. Ne segue [631] che, reciprocamente, il raggio VA, perpendicolare alla faccia $B'(V)C'$, ed il raggio VA' giacciono da una stessa banda della faccia $B'(V)C'$.

Il ragionamento stesso si può ripetere per i due raggi VB, VC; epperò resta provato che il triedro $(V)ABC$ si può derivare dal triedro $(V)A'B'C'$, come si è derivato questo dal primo.

Ci resta da provare che una faccia qualsiasi di uno dei triedri e la sezione normale del diedro corrispondente nell'altro triedro sono supplementari. Perciò consideriamo, ad es., la faccia AVB e il diedro $A'VC'B'$.

Il raggio VA è perpendicolare in V (punto dello spigolo VC' del diedro) alla faccia $B'(V)C'$, e rispetto a questa faccia è situato dalla stessa banda che l'altra faccia del diedro stesso. Infatti VA e VA', raggio posto nella faccia $A'(V)C'$, stanno da una stessa banda rispetto alla faccia $B'(V)C'$.

Similmente si prova che il raggio VB è perpendicolare alla faccia $A'(V)C'$, e che rispetto a que-

(1) Giova forse, in questa dimostrazione, tener d'occhio, invece della figura, il quadro sottoposto, formato con le notazioni de' suoi spigoli.

sta è situato dalla stessa banda in cui si trova l'altra faccia del diedro.

Conchiudiamo [632] che l'angolo AVB e la sezione normale del diedro $A'VC'B'$ sono supplementari.

Resta dunque dimostrato che *ecc.*

634. Per la relazione che passa tra le facce e le sezioni normali dei diedri di due triedri derivati l'uno dall'altro nella maniera accennata dal precedente teorema, così fatti triedri si dicono *supplementari.*

Relazioni tra gli elementi di due triedri.

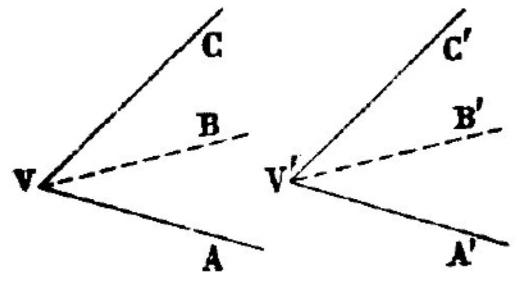
635. Teor. *Due triedri, se hanno due facce e il diedro compreso rispettivamente uguali, hanno eguali ordinatamente anche gli altri elementi.*

Dim. Nei due triedri $(V)ABC$, $(V')A'B'C'$ sia $A(V)B \equiv A'(V')B'$, $B(V)C \equiv B'(V')C'$ ed

$$A(VB)C \equiv A'(V'B')C'.$$

Dico che anche gli altri elementi sono ordinatamente uguali.

Consideriamo prima il caso, il quale ha luogo appunto nella nostra figura, in cui gli elementi contemplati nell'ipotesi sono anche similmente disposti.



Ed ora imaginiamo di trasportare il triedro (V) in modo che il vertice V cada in V', che lo spigolo VB si disponga sullo spigolo $V'B'$, e la falda BVA sulla falda $B'V'A'$.

Poichè è $B(V)A \equiv B'(V')A'$, lo spigolo VA

cade sullo spigolo $V'A'$. Per l'eguaglianza dei due diedri $AVBC$, $A'V'B'C'$, la falda BVC coincide con la falda $B'V'C'$. Infine, essendo $B(V)C \equiv B'(V')C'$, il terzo spigolo VC cade sullo spigolo $V'C'$. Così è provata la coincidenza delle due figure, epperò l'eguaglianza rispettiva di tutti gli elementi delle due figure e delle figure stesse.

Quando gli elementi, di cui parla l'ipotesi, si succedono in un triedro in senso opposto che nell'altro, ciascun triedro è uguale [629, 635] all'opposto al vertice dell'altro. Pertanto anche in questo caso i rimanenti elementi dei due triedri sono ordinatamente uguali; ma i due triedri non sono eguali.

636. Teor. *Due triedri, se hanno una faccia e i diedri adiacenti rispettivamente uguali, hanno eguali ordinatamente anche gli altri elementi.*

Dim. Siano due triedri (V) e (V'). Dinotiamo con A, B, C i diedri del primo, e con a, b, c rispettivamente le facce opposte. Similmente A', B', C', a', b', c' dinotino gli elementi del triedro (V'). E sia $a \equiv a'$, $B \equiv B'$ e $C \equiv C'$. Dico che anche gli altri elementi sono ordinatamente uguali.

A tal fine consideriamo i triedri supplementari dei dati. Poichè i triedri (V) e (V') hanno una faccia e i diedri adiacenti rispettivamente uguali, ne' triedri supplementari sono eguali rispettivamente due facce e il diedro compreso. Per conseguenza tutti gli elementi dei triedri supplementari sono ordinatamente uguali. [635]. Epperò anche i triedri (V) e (V') hanno tutti gli elementi ordinatamente uguali. (1).

(1) Questo teorema, nel caso che gli elementi di cui parla l'ipotesi siano similmente disposti, si può dimostrare facilmente, imaginando di far coincidere una figura con l'altra.

637. Teor. *Due triedri, se hanno le facce rispettivamente uguali, hanno i diedri ordinatamente uguali.*

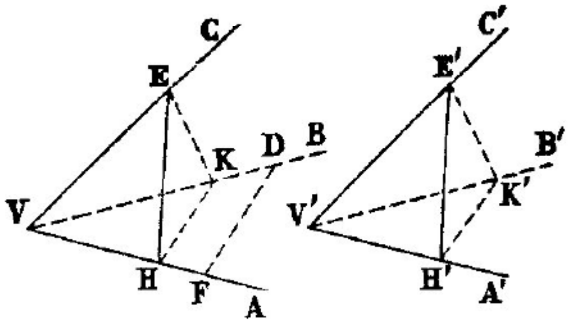
Dim. Nei triedri $(V)ABC$, $(V')A'B'C'$ le facce siano rispettivamente uguali; sia cioè:

$$A(V)B \equiv A'(V')B', \quad B(V)C \equiv B'(V')C'$$

e
$$C(V)A \equiv C'(V')A'.$$

Caso 1°. Supponiamo, per primo caso, che almeno due facce d'un triedro, e quindi anche le corrispondenti nell'altro, siano angoli acuti. Tali siano, ad es., le facce BVA, CVA e le corrispondenti. Proveremo che i diedri compresi da queste facce, e i cui spigoli sono VA e VA', sono eguali.

Sugli spigoli VB, VC di uno dei triedri si prendano ad arbitrio due punti D ed E, e si calino [128] da questi le perpendicolari DF, EH sul terzo spigolo VA. Poi dal punto H (poichè è il piede della perpendicolare EH quello che è venuto a cadere tra il vertice del triedro e il piede dell' altra perpendicolare) si tiri, nel piano BVA, la HK perpendicolare alla retta VA.



Questa perpendicolare, poichè entra per H nel triangolo FVD e non può [137] incontrare la retta FD, incontra necessariamente [54] il lato VD; sia K il punto d'incontro. (1).

Nella scelta della dimostrazione abbiamo imitato EUCLIDE, il quale, quando può o sa farlo, schiva di ricorrere all'artificio della sovrapposizione. Notiamo che si potrebbe dimostrare il teorema del § 635 in modo analogo a quello del § 637.

(1) Con questo artificio si schiva il postulato della pa-

Ciò fatto, sugli spigoli dell'altro triedro si prendano i segmenti $V'E'$, $V'K'$, $V'H'$ eguali ordinatamente ai segmenti VE, VK, VH, e si tirino EK, $E'K'$, $E'H'$, $K'H'$.

Se confrontiamo i triangoli EVH, $E'V'H'$, troviamo che hanno $E(V)H \equiv E'(V')H'$ per ipotesi, ed eguali per costruzione i lati che comprendono i due angoli; quindi è anche:

$$EH \equiv E'H' \text{ e } V(H)E \equiv V'(H')E'.$$

Ma $V(H)E$ è retto, tale è quindi $V'(H')E'$.

Similmente, confrontando i triangoli HVK, $H'V'K'$, si viene alla conchiusione che è $HK \equiv H'K'$ e $V(H)K \equiv V'(H')K'$. Ma $V(H)K$ è retto per costruzione; quindi $V'(H')K'$ è retto.

Si osservino ora i triangoli EVK, $E'V'K'$. In questi è $E(V)K \equiv E'(V')K'$ per ipotesi, e per costruzione è $VK \equiv V'K'$ e $VE \equiv V'E'$. Per conseguenza è anche $EK \equiv E'K'$.

Infine, se confrontiamo i triangoli EHK, $E'H'K'$, troviamo che hanno i lati rispettivamente uguali. Pertanto gli angoli EHK, $E'H'K'$ sono eguali. Ma questi angoli sono sezioni normali dei diedri $CVAB$, $C'V'A'B'$; i due diedri sono [608] dunque uguali, epperò [635] *ecc.*

Caso 2°. La dimostrazione precedente suppone che due facce almeno di un triedro, epperò anche le corrispondenti nell' altro, siano angoli acuti. Passiamo a considerare il caso nel quale in ciascun triedro una faccia sola o nessuna è un angolo acuto. (1).

rallela, al quale non si è mai fatto ricorso nei tre primi capitoli della *Stereometria*.

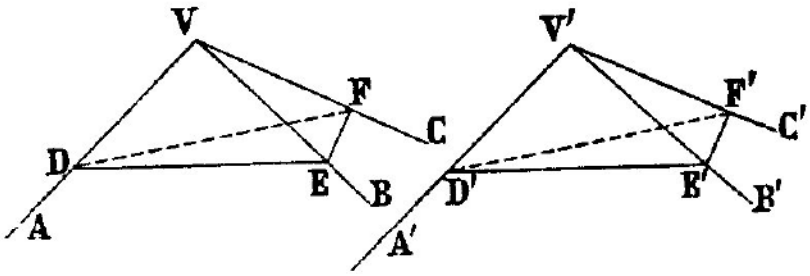
(1) Se due angoli di un triedro e quindi anche i corrispondenti dell'altro sono retti, ci si riconduce subito al teorema del § 635.

Partendo dai vertici, si prendano sugli spigoli dei triedri dei segmenti VD, VE, VF, $V'D'$, $V'E'$, $V'F'$ tutti eguali tra loro, e si compiano i triangoli DEF, $D'E'F'$.

Poichè i due triedri (V) e (V') hanno le facce rispettivamente uguali, i sei triangoli isosceli, tagliati via dalle facce de' triedri, hanno eguali rispettivamente [151] le basi e gli angoli alle basi. Così è:

$$D(F)V \equiv D'(F')V' \text{ ed } E(F)V \equiv E'(F')V'.$$

Sono poi eguali anche gli angoli EFD, $E'F'D'$, come angoli corrispondenti di triangoli i cui lati sono rispet-



tivamente uguali. I due triedri $(F)DEV$, $(F')D'E'V'$ hanno adunque facce rispettivamente uguali. Inoltre le facce $D(F)V$, $E(F)V$, $D'(F')V'$, $E'(F')V'$ sono angoli acuti, perchè [139] angoli alla base di triangoli isosceli. Per questi due triedri vale adunque la precedente dimostrazione, epperò quei loro diedri che hanno per ispigoli le rette VC, $V'C'$ sono eguali. Ma codesti diedri son diedri compresi da facce rispettivamente uguali ne' due triedri dati; quindi [635].

Resta dunque provato che, *se ecc.*

638. Teor. *Due triedri, se hanno i diedri rispettivamente uguali, hanno anche le facce ordinatamente uguali.*

Dim. Due triedri (V), (V') abbiano i diedri rispettivamente uguali. Proveremo che anche le facce sono eguali, ciascuna a ciascuna.

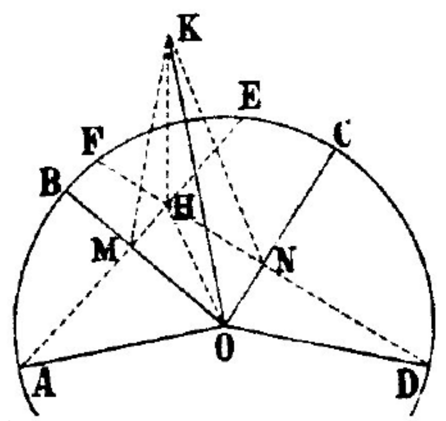
A tal fine si considerino i triedri supplementari dei dati. Poichè le loro facce sono rispettivamente supplementari delle sezioni normali dei diedri dei triedri dati, ed in questi i diedri sono eguali ciascuno a ciascuno, nei triedri supplementari le facce sono eguali rispettivamente [87], e per conseguenza [637] sono eguali ordinatamente anche i diedri.

Ma le facce dei triedri dati sono supplementari rispettivamente delle sezioni normali dei diedri dei loro supplementari. E poichè s' è dimostrato che questi diedri sono eguali ciascuno a ciascuno, si conchiude che sono eguali rispettivamente anche le facce dei triedri dati.

Problemi.

639. Probl. *Costruire un triedro, le cui facce siano eguali rispettivamente a tre angoli dati, la cui somma è minore di quattro retti e ciascuno dei quali è minore della somma degli altri due.*

Risol. Si costruiscano in un piano tre angoli consecutivi AOB, BOC, COD, che siano eguali rispettivamente agli angoli dati. Poi, con centro O e raggio arbitrario si descriva un cerchio; e siano A, B, C, D i punti nei quali esso taglia i lati degli angoli. Poichè la somma dei tre angoli, che si son posti consecutivamente intorno ad O, è minore di quattro retti, l'arco $ABCD$ è minore



dell' intero cerchio. E perchè ciascuno degli angoli dati è minore della somma degli altri due, ciascuno degli archi AB, BC, CD è [203] minore della somma degli altri due; egli è adunque:

(1) $$\text{arco } AB < \text{arco } BCD,$$
(2) $$\text{arco } BC < \text{arco } AB + \text{arco } CD,$$
(3) $$\text{arco } CD < \text{arco } ABC.$$

Dai punti A e D si tirino le corde AE, DF rispettivamente perpendicolari ai raggi OB, OC. Così, essendo arco $BE \equiv$ arco AB, ed arco $FC \equiv$ arco CD, per le disuguaglianze (1) e (3) è pure: arco $BE <$ arco BCD, ed arco $FC <$ arco ABC. Queste disuguaglianze provano che il punto E cade necessariamente sull' arco BCD, e il punto F sull' arco ABC.

Prendiamo ora la disuguaglianza (2), ed aggiungiamo a' suoi membri l' arco AB e l' arco CD. Ci risulta:

$$\text{arco } ABCD < 2 \text{ arco } AB + 2 \text{ arco } CD,$$

ossia: $$\text{arco } ABCD < \text{arco } AE + \text{arco } FD.$$

Sottraendo dai due membri l' arco FD, otteniamo:

$$\text{arco } AF < \text{arco } AE.$$

Questa disuguaglianza prova che il punto F cade necessariamente sull' arco AE, e fra i termini di questo arco.

I quattro punti A, F, E, D sull' arco AD, minore di un cerchio, sono dunque schierati necessariamente nell' ordine in cui li vediamo nella nostra figura; epperò le corde AE, DF si tagliano necessariamente (senza che occorra prolungarle) nell' interno del cerchio. Diciamo H il punto d' intersezione.

Ed ora si tiri OH, e poi per H la perpendicolare al piano della figura [585]; e infine si tagli questa perpendicolare, sia nel punto K, con un cerchio descritto nel piano OHK con centro O e raggio OA. L'intersezione ha luogo, perchè il raggio è maggiore di OH, distanza della retta HK dal centro. [215].

Infine si tiri il raggio OK. Il triedro $(O)BCK$ è il triedro domandato.

Dim. Intanto la faccia $B(O)C$ è uno degli angoli dati. Sta dunque a provare che è $B(O)K \equiv A(O)B$ e $C(O)K \equiv C(O)D$.

A tal fine, tirati i segmenti KM, KN, si confrontino i triangoli KMO ed AMO; troviamo OM comune, $OA \equiv OK$, ed eguali gli angoli OMA, OMK, perchè retti ambidue; il primo per costruzione; il secondo, perchè KH è perpendicolare al piano, ed HM è perpendicolare alla retta OB posta nel piano. [581]. Pertanto [157] è $B(O)K \equiv A(O)B$.

Nello stesso modo, considerando i triangoli KON, DON, si prova essere $C(O)K \equiv C(O)D$.

Così resta dimostrato che le facce del triedro $(O)BCK$ sono eguali rispettivamente agli angoli dati.

Prolungando gli spigoli del triedro $(O)BCK$, si ottiene una seconda soluzione del problema; la quale si sarebbe ottenuta, considerando la seconda intersezione fatta nella retta HK da quel cerchio di centro O e raggio OA, che si è descritto nel piano OKH.

640. Oss. Le condizioni, poste nel precedente problema agli angoli dati, sono *necessarie,* perchè il triedro si possa costruire. Esse infatti sono sodisfatte [628, 627] da ogni triedro. La costruzione precedente prova che quelle condizioni sono anche *sufficienti*, perchè il problema ammetta soluzione.

641. Probl. *Costruire un triedro, i cui diedri siano eguali rispettivamente a tre diedri dati.*

Risol. Si prendano tre angoli, che siano rispettivamente supplementari delle sezioni normali dei diedri dati, e si costruisca [639] un triedro, le cui facce siano eguali rispettivamente ai tre angoli. Costruendo poi il triedro supplementare [633] del triedro ottenuto, risulta il triedro domandato.

Dim. Infatti, poichè le sezioni normali dei diedri del secondo triedro sono supplementari delle facce dell' altro, esse sono eguali rispettivamente alle sezioni normali dei diedri dati, epperò [608] anche i diedri del triedro sono eguali rispettivamente ai diedri dati.

Prolungando gli spigoli del triedro trovato, si ottiene nel nuovo triedro la [638] seconda soluzione del problema.

642. Indicando con A, B, C le sezioni normali dei diedri di un triedro, e con a', b', c' le facce del triedro supplementare, abbiamo [633]:

$$A + a' = 2R,\quad B + b' = 2R,\quad C + c' = 2R.$$

1°. Da queste relazioni, sommando, si ottiene:

$$(A + B + C) + (a' + b' + c') = 6R,$$

dalla quale, perchè $(a' + b' + c')$ è minore [628] di $4R$, si conchiude che:

La somma dei diedri d' un triedro qualunque è maggiore di due retti e minore di sei.

2°. Essendo $a' < b' + c'$, abbiamo:

$$2R - A < 2R - B + 2R - C,$$

ossia:

$$B + C < A + 2R.$$

Adunque:

In un triedro ciascun diedro, aumentato di un diedro piatto, diventa maggiore della somma degli altri due.

Così abbiamo trovato le condizioni che devono esser sodisfatte de tre diedri dati, perchè si possa [640] con essi costruire un triedro.

CAPITOLO XVIII

PARALLELISMO DI RETTE E DI PIANI

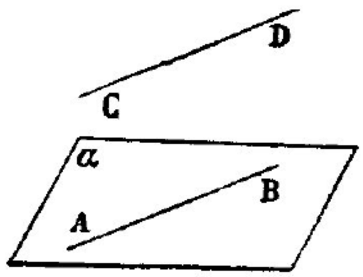
Retta e piano paralleli.

643. Teor. *Dati comunque nello spazio una retta ed un punto che non sia sulla retta, per il punto si può condurre una retta parallela alla data, ed una sola.*

Dim. Infatti si può [42] condurre un piano ed uno solo che passi per il punto e per la retta; e in codesto piano per il punto dato si può condurre una retta [248] ed una sola [250] che non incontri la retta data.

644. Teor. *Una retta, se è parallela ad una retta d' un piano, o giace in questo piano, ovvero non ha con esso nessun punto in comune.*

Dim. Sia un piano α, e in esso una retta AB. E sia CD un' altra retta parallela alla AB. Dico che la CD, o giace nel piano α, o non ha con questo piano nessun punto in comune.



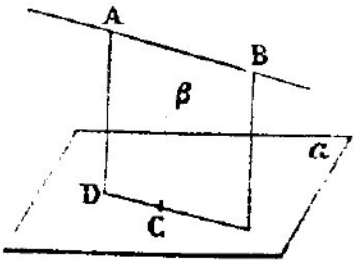
Intanto, se la CD ha col piano α un punto in comune, allora il piano α e il piano delle parallele, avendo in comune una retta e un punto fuori di essa, coincidono. [42]. Per conseguenza in tal caso anche la CD giace nel piano α.

Ma quando la retta CD passi per un punto che sia fuori del piano α, essa non può aver nessun punto in comune con questo piano, giacchè, ove un punto comune ci fosse, si conchiuderebbe nuovamente che la retta CD giace nel piano, e ciò contro la supposizione che essa passi per un punto che sia fuori del piano.

645. Def. *Una retta ed un piano, che non abbiano nessun punto in comune* [621], *si dicono* paralleli.

646. Teor. *Se una retta è parallela ad un piano, qualunque piano, che passa per la retta e per un punto del primo, taglia questo piano in una retta parallela alla data.*

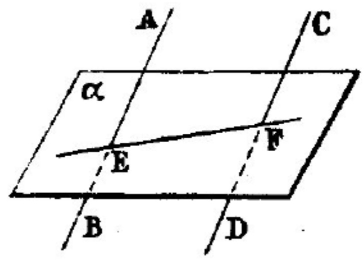
Dim. Sia un piano α e una retta AB ad esso parallela. E un secondo piano, che chiameremo β, passi per la retta AB e per un punto C del piano α. Dico che i due piani α e β si segano in una retta parallela alla AB.



Intanto, poichè i due piani hanno in comune il punto C, essi si segano [573] in una retta CD, che passa per questo punto. E perchè la AB, per l'ipotesi, non può incontrare il piano α, essa non può incontrare la CD. In conchiusione le rette AB e CD sono in uno stesso piano β, e non s'incontrano; sono dunque parallele.

647. Teor. *Se due rette sono parallele, e un piano ne incontra una, esso incontra anche l'altra.*

Dim. Siano due rette parallele AB, CD, e un piano α ne incontri una, sia la AB, nel punto E. Dico che il piano α incontra anche la CD.



Intanto, poichè il piano α *incontra* la AB, esso è distinto dal piano delle parallele; e poichè codesti due piani hanno in comune il punto E, essi si segano in una retta EF, che passa per E. [573].

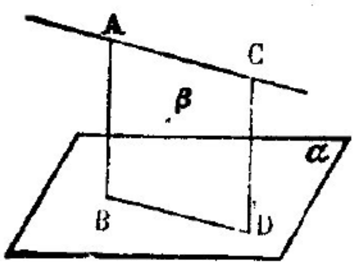
Ed ora, perchè la retta EF giace nel piano delle parallele, e ne incontra una, in E, essa incontra [252] anche l'altra; sia F il punto d'incontro. Così intanto abbiamo provato che il piano α e l'altra parallela hanno un punto in comune. Ci rimane da provare che in questo punto il piano sega la retta.

Infatti, poichè il piano α e il piano delle parallele hanno la EF in comune e sono distinti, essi non possono aver nessun altro punto in comune [42], epperò la CD non può giacere nel piano α.

Così è dimostrato che, *se ecc.*

648. Teor. *Se due rette sono parallele, ed una è perpendicolare ad un piano, anche l'altra è perpendicolare a questo piano.*

Dim. Siano due rette parallele AB, CD, ed una, supponiamo la AB, sia perpendicolare in B ad un piano α; dico che anche la CD è perpendicolare a codesto piano.



Intanto il piano β delle parallele, poichè comprende la AB, che è perpendicolare al piano α, è [618] perpendicolare a questo piano. Sia BD l'intersezione dei due piani.

Ora, perchè la AB è perpendicolare al piano α, essa è perpendicolare alla BD; per conseguenza [250] questa retta è perpendicolare alla CD.

Sappiamo [620] poi che, se due piani sono perpendicolari tra loro, una retta, che giaccia in uno e sia perpendicolare all'intersezione comune, è perpendicolare all'altro piano. La CD è dunque perpendicolare al piano α, come d. d. (1).

(1) La proposizione si potrebbe anche dimostrare dicendo: la perpendicolare al piano α, condotta per C, è parallela [587] alla AB e per conseguenza [643] essa coincide con la CD.

649. Teor. *Se due rette sono parallele a una terza, esse sono parallele tra loro.*

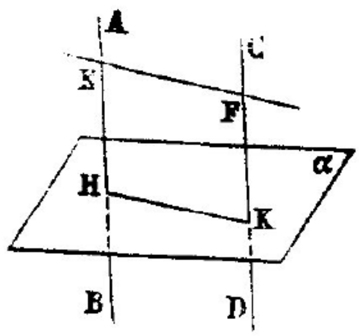
Dim. Due rette A, B siano parallele ad una terza C. Dico che esse sono parallele tra loro.

Si tiri un piano α, perpendicolare alla retta C.

Ora, poichè le due rette A e C sono parallele, e la C è perpendicolare al piano α, anche la retta A è [648] perpendicolare a questo piano. Similmente, perchè la retta B è parallela alla C, e questa è perpendicolare al piano α, anche la retta B è perpendicolare a codesto piano. Le rette A e B sono dunque perpendicolari ambedue al piano α. Per conseguenza [587] esse giacciono in uno stesso piano e non s'incontrano; sono dunque parallele, c. d. d.

650. Teor. *Segmenti paralleli, compresi tra un piano e una retta paralleli, sono eguali.*

Dim. Siano due rette parallele AB, CD, tagliate da una retta EF nei punti E ed F, e da un piano α nei punti H e K. E la retta EF e il piano α siano paralleli. Si vuol provare che è $EH \equiv FK$.



Intanto, poichè il piano delle parallele e il piano α hanno in comune i punti H e K, essi si segano nella retta HK. E poichè il piano delle parallele passa per la retta EF, e questa retta è parallela al piano, la retta HK è parallela [646] alla EF. Il quadrangolo $EFKH$ è dunque un rombo, epperò è [271] $EH \equiv FK$, c. d. d.

651. Cor. *I punti di una retta parallela ad un piano sono egualmente distanti dal piano.*

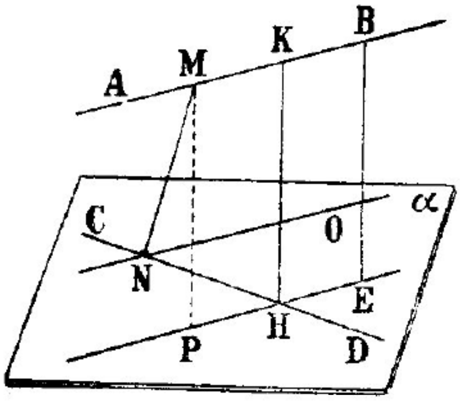
Infatti le perpendicolari, calate sul piano da due punti qualisivogliano della retta, sono [587] parallele. Per la proposizione precedente esse sono eguali.

652. Def. Se una retta è parallela ad un piano, la [651] distanza dei punti della retta dal piano si dice *distanza della retta dal piano.*

Se una retta è parallela ad un piano, qualunque segmento, che unisca un punto della retta con un punto dal piano senza essere perpendicolare al piano, è maggiore [593, 651] della distanza della retta dal piano.

653. Teor. *Date due rette sghembe, esiste un segmento ed uno solo, che è compreso dalle rette ed è perpendicolare ad ambedue; esso è minore di qualunque altro segmento che sia parimente compreso dalle rette.*

Dim. Siano due rette sghembe AB, CD. Per una di esse, ad es. per la CD, si faccia passare un piano α, che sia parallelo all' altra retta. Perciò basta tirare per un punto della CD una retta parallela alla AB. Codesta parallela e la CD determinano [43] appunto un piano α, che è [644] parallelo alla AB. Ed ora da un punto B qualunque della AB si tiri la BE perpendicolare al piano α; e poi si consideri il piano determinato dalle AB, BE. Questo piano sega [573] il piano α in una retta EP, che è parallela [646] alla AB, e che, non potendo [649] essere parallela alla CD, incontra necessariamente questa retta; sia H il punto d'incontro. Infine, nel piano delle rette AB, EP, si tiri per H una retta perpendicolare ad EP. Questa perpendicolare incontra [252] la AB;



dicasi K il punto d'incontro. Proveremo anzitutto che il segmento HK è perpendicolare ad ambedue le rette date.

Intanto, poichè le rette AB ed EP sono parallele, e la HK è perpendicolare alla EP, essa è perpendicolare [256] anche alla AB.

Poi si osservi che il piano delle rette AB, EP, come quello che passa per la retta BE, la quale è perpendicolare al piano α, è perpendicolare [618] a questo piano. E perchè la retta HK giace in uno di questi piani ed è perpendicolare alla loro intersezione, essa è perpendicolare [620] all'altro piano, cioè al piano α; quindi [577] è perpendicolare alla retta CD.

Il segmento HK è dunque in fatto perpendicolare ad ambedue le rette date.

Ora proveremo che nessun altro segmento, che unisca un punto della AB con uno della CD, non può essere perpendicolare ad ambedue le rette. Tale non potrebbe essere un segmento che abbia una estremità in H od in K, perchè da uno stesso punto non si può condurre ad una stessa retta che una perpendicolare soltanto. Ammettiamo che il segmento MN sia perpendicolare ad ambedue le rette; e consideriamo il piano delle rette AB, MN. Questo piano sega il piano α [573] in una retta NO, che è parallela [646] alla AB. Allora la retta MN, perchè è perpendicolare ad AB, è perpendicolare anche [256] ad NO. Ma per ipotesi è perpendicolare anche a CD; essa è quindi perpendicolare [578] al piano α, e per conseguenza essa giace in uno stesso piano [587] con la retta HK. Ma, se MN ed HK giacciono in uno stesso piano, giacciono in uno stesso piano anche le rette AB, CD; e ciò è contrario all'ipotesi che codeste due rette siano sghembe. Non c' è dunque altro segmento che HK, che sia perpendicolare ad un tempo ad ambedue le rette date.

Ci resta a provare che il segmento HK è minore di qualsivoglia altro segmento che abbia le estremità sulle rette AB, CD. Proveremo, ad es., che HK è minore di MN.

Per la dimostrazione tiro per M la MP perpendicolare ad EH. Sappiamo [620] che essa è perpendicolare al piano α; epperò [593] essa è minore di MN, che necessariamente è un' obliqua. [586]. Ma [279] è $HK \equiv MP$; quindi infine è $HK < MN$.

Così resta provato che *ecc.*

654. Def. Il segmento, che è compreso tra due rette sghembe ed è perpendicolare ad ambedue, si chiama *distanza* tra le due rette.

Piani paralleli.

655. Teor. *Due piani, perpendicolari a una medesima retta in punti distinti, non hanno nessun punto in comune.*

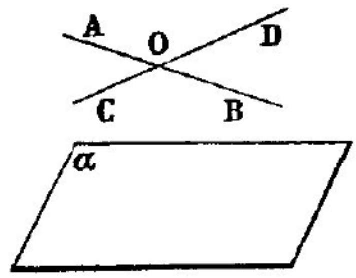
Dim. Infatti, se i due piani avessero in comune un punto, per questo punto, necessariamente esterno alla retta, passerebbero due piani perpendicolari alla retta, il che è impossibile. [584].

656. Def. *Due piani, che non abbiano nessun punto in comune, si dicono* paralleli.

657. Teor. *Se due rette, che si tagliano, sono pararelle ad uno stesso piano, il piano delle due rette e il piano dato sono paralleli.*

Dim. Due rette AB, CD, che si segano in O, siano parallele a uno stesso piano α. Dico che il piano delle due rette [43] e il piano α non hanno nessun punto in comune.

Infatti, se i due piani avessero un punto in comune e quindi [573] una retta in comune, questa dovrebbe essere parallela ad un tempo [646] ad ambedue le rette AB, CD. Ma allora per uno stesso punto O passerebbero due parallele ad una stessa retta (all'intersezione dei piani), e ciò non può [643] darsi.

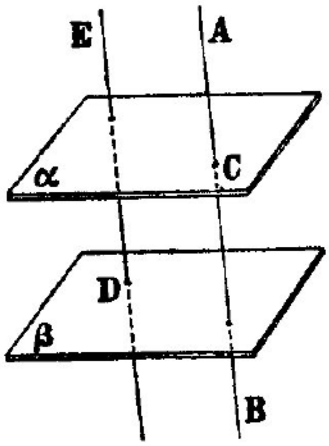


Così si è dimostrato che, *ecc.*

658. Teor. *Se due piani sono paralleli, e una retta ne incontra uno, essa incontra anche l' altro.*

Dim. Siano due piani paralleli α, β, e una retta AB ne incontri uno, sia il piano α, nel punto C. Dico che essa incontra anche il piano β.

Per un punto D qualunque del piano β si conduca la retta DE parallela alla AB. Poichè le rette AB, DE sono parallele, e il piano α incontra la AB, esso incontra [647] anche la DE. Dacchè la retta DE incontra il piano α, che non ha nessun punto in comune col piano β, essa non può giacere nel piano β; ma lo incontra nel punto D. Infine, poichè le rette DE, AB sono parallele, e la DE incontra il piano β, anche la AB incontra [647] questo piano, c. d. d.



659. Cor. *Se due piani sono paralleli, e un terzo piano ne sega uno, esso sega anche l' altro.*

Siano due piani paralleli α, β, e un terzo piano γ

ne seghi uno, seghi ad es. il piano α. Dico che esso sega anche il piano β.

Infatti una retta AB, tirata nel piano γ per un punto della sua intersezione col piano α, incontra questo piano, e quindi [658] incontra anche il piano β, che è parallelo ad α. Il punto d'incontro C, appartiene ad ambidue i piani γ e β, i quali per conseguenza [573] si segano.

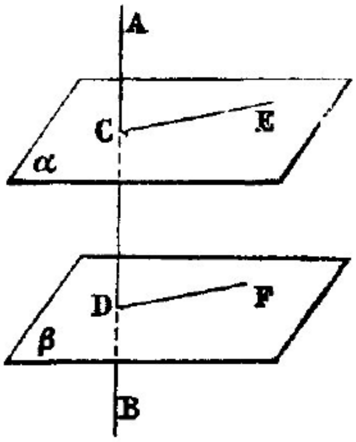
660. Teor. *Se due piani paralleli sono tagliati da un terzo, le intersezioni sono parallele.*

Dim. Siano due piani paralleli α, β, e un terzo piano γ ne incontri uno, e quindi [659] anche l'altro. Dico che le intersezioni sono parallele.

Queste due rette giacciono intanto in uno stesso piano, nel piano γ. Ma non possono incontrarsi, perchè i piani α, β, in cui giacciono rispettivamente, non hanno nessun punto in comune. Adunque, *ecc.*

661. Teor. *Se due piani sono paralleli, e una retta è perpendicolare ad uno, essa è perpendicolare anche all'altro.*

Dim. Siano due piani paralleli α, β, e una retta AB sia perpendicolare ad uno; sia perpendicolare al piano α, nel punto C. Dico che essa è perpendicolare anche al piano β.



Intanto, perchè i piani α e β sono paralleli, e la retta AB incontra il piano α, essa incontra [658] anche il piano β. Sia D il punto d'intersezione.

Per il punto D e nel piano β si tiri una retta qualunque DF e poi si consideri il piano delle rette [43] AB,

DF. Questo piano, poichè ha in comune col piano α il punto C, ha in comune con codesto piano [573] una retta che passa per C; sia la retta CE. Ma poichè i piani α, β sono paralleli e le rette CE, DF sono le loro intersezioni con un terzo piano, queste rette sono parallele [660]. E poichè la retta AB è perpendicolare al piano α, essa è perpendicolare [577] alla CE e per conseguenza [256] anche alla DF. La retta AB è dunque perpendicolare alle rette del piano β che passano per D, ossia [577] è perpendicolare al piano β.

Così si è dimostrato che, *ecc.*

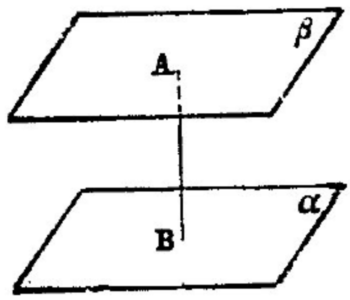
662. Teor. *Due piani paralleli ad un terzo sono paralleli tra loro.*

Dim. Due piani α e β siano paralleli ad un terzo γ. Dico che essi sono paralleli tra loro.

Infatti, se si tira una retta, che sia perpendicolare al piano γ, essa è poi perpendicolare anche ai piani α e β [661], e per conseguenza [655] questi piani sono paralleli.

663. Teor. *Dati comunque un piano ed un punto, per il punto si può far passare un piano, ed uno soltanto, che sia parallelo al piano dato.*

Dim. Siano dati un piano α, e un punto A che sia fuori del piano. Proveremo che per A si può condurre un piano ed uno soltanto, che sia parallelo al piano α.



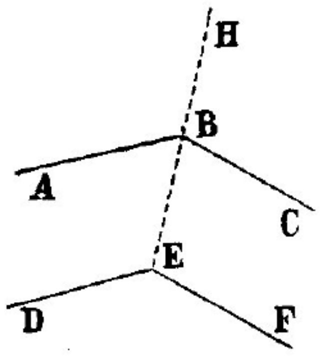
A tal fine si cali [586] da A la AB perpendicolare al piano α. Poi si tiri [583] un piano β perpendicolare ad AB in A. Il piano α e il piano β, perchè perpendicolari a una stessa retta AB, sono [655] paralleli.

Nessun altro piano, che passi per A e sia distinto dal piano β, può essere parallelo al piano α. Infatti, se un piano γ così fatto esistesse, i piani β e γ, perchè ambidue paralleli al piano α, sarebbero [662] paralleli tra loro, e ciò è assurdo (perchè hanno il punto A in comune).

Così si è dimostrato che, *se ecc.*

664. Teor. *Se i lati di due angoli hanno direzioni rispettivamente uguali, gli angoli sono eguali, e i loro piani sono paralleli.*

Dim. Siano due angoli ABC, DEF, i cui lati abbiano direzioni rispettivamente uguali. Dico che gli angoli sono eguali, e che i loro piani sono paralleli.



Si tiri la retta EH, e si considerino i triedri $(B)AHC$, $(E)DHF$. In questi le facce ABH, DEH sono eguali [254], perchè angoli corrispondenti fatti dalle parallele BA, ED con la EH; le facce HBC, HEF sono eguali, come angoli corrispondenti fatti dalle parallele BC, EF con la EH; il diedro compreso è comune; per conseguenza [635] gli angoli ABC, DEF sono eguali.

Ci rimane da provare che i piani dei due angoli sono paralleli. Perciò basta osservare che, essendo le rette AB, BC parallele rispettivamente alle DE, EF, esse sono [644] parallele al piano dell'angolo DEF, epperò [657] anche il piano dell' angolo ABC è parallelo a quello dell'angolo DEF.

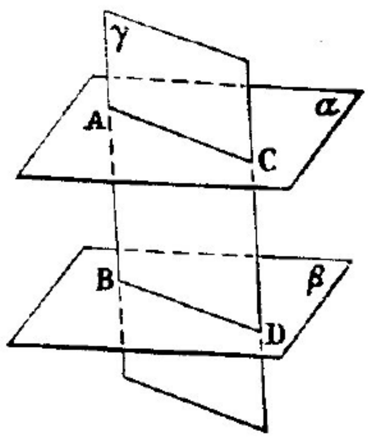
665. Oss. Se per un punto qualunque si tirano due rette rispettivamente parallele a due rette sghembe, le due rette fanno angoli rispettivamente uguali agli angoli compresi da due altre rette tirate per un altro punto qualunque parallelamente alle due rette sghembe stesse. [649, 664].

Uno degli angoli acuti formati da due rette, condotte per uno stesso punto parallelamente a due rette sghembe, si dice *inclinazione* od *angolo* di queste rette. Se le nuove rette sono perpendicolari tra loro, si dicono perpendicolari tra loro anche le rette sghembe. Così possiamo dire, ad es., che, se una retta è perpendicolare ad un piano, essa è perpendicolare a *tutte* le rette del piano.

666. Teor. *Segmenti paralleli, compresi tra due piani paralleli, sono eguali.*

Dim. Siano due piani paralleli α, β, e due rette parallele AB, CD che li incontrino [647, 658] rispettivamente nei punti A, B, C, D. Dico essere $AB \equiv CD$.

Si tirino le rette AC, BD. Queste sono parallele, perchè [660] sono le intersezioni del piano γ delle rette AB, CD coi piani paralleli α e β. Il quadrangolo $ABCD$ è dunque un rombo, epperò [271] è $AB \equiv CD$, come d. d.



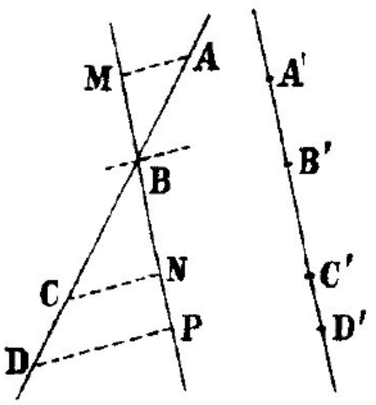
667. Oss. Sappiamo [587] che, se due rette sono perpendicolari a uno stesso piano, esse sono parallele; e che, se una retta è perpendicolare ad uno di due piani paralleli, essa è [661] perpendicolare anche all' altro. Per questo, e per il teorema precedente, possiamo dire che, se due piani sono paralleli, le distanze dei punti di un piano dall' altro piano, e le distanze dei punti di questo dal primo piano sono tutte uguali tra loro. In altre parole, se due piani sono paralleli, la distanza di un punto d'uno dei piani dall'altro piano è *costante.*

La detta distanza è poi minore [593] di qualunque segmento che sia compreso tra i due piani e che non sia perpendicolare ai due piani.

Se due piani sono paralleli, la distanza di un punto d'un piano dall'altro piano si dice *distanza dei due piani.*

668. Teor. *I segmenti di due trasversali di un fascio di piani paralleli sono proporzionali.*

Dim. Dei piani paralleli $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ siano incontrati [658] da due trasversali, rispettivamente nei punti A, A', B, B', C, C' ... Dico che i segmenti delle trasversali sono proporzionali. [405].



Per uno dei punti d'incontro di una delle rette con uno dei piani, ad es. per B, si tiri la parallela all' altra trasversale. Siano $M, N, P \ldots$ i punti in cui la nuova retta incontra [658] i piani dati.

Il piano delle rette AD, MP sega i piani α, γ, δ... nelle rette MA, CN, DP..., le quali sono parallele, appunto perchè intersezioni di uno stesso piano con piani paralleli. [660, 251]. Quindi, per il teorema di Talete, i segmenti della AD sono proporzionali a quelli della MP. Ma i segmenti di questa retta sono ordinatamente uguali [666] a quelli della $A'D'$; quindi i segmenti della AD sono proporzionali ai segmenti della $A'D'$, come d. d.

Esercizi.

871. Se due rette sono parallele, ed una è parallela ad un piano, anche l'altra è parallela al piano, o vi giace tutta intera.

872. Se due piani passano per due rette parallele, ciascuno per una, e si segano, l'intersezione è una retta parallela alle altre due.

873. I piani, condotti per uno stesso punto, parallelamente a una stessa retta data, passano per una medesima retta.

874. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano parallelo alla retta è perpendicolare al piano dato.

875. Se una retta è parallela ad un piano, ogni piano perpendicolare alla retta è perpendicolare al piano.

876. Se per un punto O si conducono due rette $O A$, $O B$ parallele ad un piano α, e poi per O due piani rispettivamente perpendicolari alle rette $O A$, $O B$, l'intersezione di questi piani è perpendicolare al piano α.

877. Due segmenti eguali e paralleli si proiettano sopra uno stesso piano in segmenti eguali e paralleli.

878. Rette parallele fanno con uno stesso piano angoli eguali.

879. Se due rette si proiettano sopra due piani non paralleli in rette rispettivamente parallele, esse sono parallele.

880. Se dalle estremità e dal punto di mezzo di un segmento situato per intero da una stessa banda di un piano, si tirano tre segmenti paralleli fino al piano, il segmento, che parte dal punto di mezzo, è uguale alla semisomma degli altri due.

881. I diedri, formati da un piano con due altri piani paralleli, sono rispettivamente uguali.

882. La proiezione di un segmento è minore del segmento, purchè questo non sia parallelo al piano di proiezione.

883. Se un triangolo ha un solo lato parallelo a un piano, la proiezione del triangolo su questo piano è minore del triangolo dato.

884. Se un triangolo giace in un piano non parallelo al piano di proiezione, la proiezione del triangolo è minore del triangolo primitivo.

885. In qualunque solido poliedro ciascuna faccia è minore della somma di tutte le altre.

886. Si può sempre condurre un piano, che tagli tutti gli spigoli di un angoloide convesso.

887. Se più rette parallele incontrano due piani paralleli, le figure che si ottengono unendo ordinatamente i punti d'intersezione, sono eguali.

888. Se due piani sono paralleli, e per i punti di un cerchio, posto in uno de' piani, si tirano delle rette parallele, queste incontrano l'altro piano lungo un cerchio eguale al dato.

889. Se si hanno due piani paralleli e un cerchio in uno di essi, le rette, che passano per uno stesso punto, situato fuori dei piani, e per punti del cerchio dato, incontrano l'altro piano in punti che appartengono ad uno stesso cerchio.

890. I punti, dove le rette che passano per uno stesso punto, sono tagliate da due piani paralleli, sono i vertici di due poligoni simili (*omotetici*).

891. Se due triangoli simili giacciono in piani paralleli, e due lati omologhi sono paralleli, le rette, che passano per i vertici omologhi, passano per un medesimo punto.

892. I segmenti, che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti di un quadrangolo (gobbo), si dimezzano scambievolmente.

893. Se da un punto si tirano tre raggi con direzioni rispettivamente uguali a quelle degli spigoli di un triedro, si ottiene triedro eguale al dato.

894. In ogni triedro la somma degli angoli, compresi ciascuno da uno spigolo e dalla bisettrice della faccia opposta, è minore della somma delle facce.

895. Se per il vertice di un triedro e in ciascuna faccia si tira la perpendicolare allo spigolo opposto, le tre perpendicolari giacciono in uno stesso piano.

896. I piani, che dimezzano i diedri di un triedro, si segano lungo una stessa retta.

897. I piani, perpendicolari rispettivamente alle facce di un triedro lungo le bisettrici delle facce, passano per una stessa retta.

898. I piani, ciascuno dei quali passa per uno spigolo di un triedro ed è perpendicolare alla faccia opposta, si segano in una medesima retta.

899. I piani, ciascuno dei quali passa per uno spigolo di un triedro e per la bisettrice della faccia opposta, passano per una stessa retta.

900. Il punto d'incontro delle altezze del triangolo, che si ottiene tagliando con un piano un triedro trirettangolo, è la proiezione del vertice del triedro sul piano della sezione.

901. Luogo dei punti di un piano, i quali sono equidistanti da due punti dati.

902. Luogo dei punti equidistanti da tre punti dati, che non sono allineati.

903. Luogo delle rette parallele ad un piano dato e che passano per un medesimo punto.

904. Luogo delle rette, che tagliano una retta data, e che sono parallele a un' altra retta data.

905. Luogo delle rette, che sono parallele a due rette parallele date e sono equidistanti da queste rette.

906. Luogo dei punti, che hanno data distanza da un piano dato.

907. Luogo dei punti equidistanti da due piani paralleli.

908. Luogo dei punti, le cui distanze da due piani paralleli stanno in rapporto dato.

909. Luogo dei punti, ne' quali i segmenti compresi tra due piani paralleli sono divisi in rapporto dato.

910. Luogo de' punti, le cui distanze da due piani che si tagliano stanno in rapporto dato.

911. Luogo de' punti nei quali i segmenti, compresi tra un punto dato e un piano dato, sono divisi in rapporto dato.

912. Luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto dato sulle rette che giacciono in uno stesso piano e passano per uno stesso punto.

913. Luogo de' punti, le cui distanze da due piani che si tagliano fanno una somma data.

914. Luogo de' punti, le cui distanze da due punti dati stanno in rapporto dato. [452].

915. Quale è la condizione perchè si possano condurre tre piani paralleli che passino rispettivamente per tre rette date?

916. Per un punto condurre una retta, che tagli due rette date.

917. Tirare una retta parallela ad una data, e che tagli due altre rette date.

918. Dati un punto ed un triedro, condurre per il punto un

piano, che tagli gli spigoli del triedro in punti equidistanti dal vertice.

919. Condurre per un punto dato un piano parallelo a due rette date.

920. Tirare un piano, che passi per due punti dati e che sia equidistante da due altri punti dati.

921. Tirare un piano, che abbia data distanza da tre punti dati.

922. Tirare un piano che sia equidistante da quattro punti dati.

923. Condurre un piano parallelo a uno dato e tangente a una sfera data.

924. Trovare un punto, che sia egualmente distante da quattro punti dati.

925. Trovare un punto che abbia date distanze da tre piani dati.

926. Trovare sopra un piano dato un punto, che sia equidistante da tre punti dati.

927. Trovare un punto che disti egualmente da tre rette parallele date e da due punti dati.

928. Trovare sopra un piano un punto, che sia equidistante da due punti dati, e che sia equidistante da due dati piani paralleli.

929. Tirare da un punto dato a un piano dato un segmento, che sia eguale a segmento dato e parallelo a un piano dato.

930. Condurre una retta, che tagli due rette date, che sia parallela ad un piano dato, e che abbia da questo piano data distanza.

931. Condurre in un piano una retta, che sia parallela ad una retta del piano, e che abbia data distanza da un punto dato fuori del piano.

932. Condurre, da un punto dato fuori di un piano, una retta che tagli una retta posta nel piano, e in modo che abbia col piano inclinazione data.

933. Trovare un punto, che sia equidistante da due piani paralleli dati, e che abbia date distanze da due punti dati.

934. Condurre per un punto dato un piano, che abbia data distanza da una retta data.

935. Per un punto dato condurre una retta in modo che sia parallela ad un piano dato e che il segmento di essa, compreso tra due dati piani, sia dimezzato dal punto dato.

936. Tirare una retta, che sia equidistante da un piano e da due rette parallele tra loro e parallele al piano.

937. Per due punti tirare due piani che siano paralleli a una retta data, e che abbiano distanza data.

938. Tirare in un piano una retta, che abbia date distanze da due punti non situati nel piano.

939. Per un punto dato condurre un segmento, che sia eguale a un segmento dato, che termini su due piani dati, che sia egualmente inclinato con questi piani.

940. Tirare il piano che dimezza un diedro dato, e ciò senza usare dello spigolo del diedro.

941. Condurre per un punto dato un piano, che passi per l'intersezione di due altri, ma senza usare di questa intersezione.

942. Condurre per un punto dato una retta, che passi per il punto di concorso di due altre, senza usare di questo punto.

943. Per trovare la distanza di due rette, si può tirare due piani rispettivamente perpendicolari alle rette date, e poi una retta che le tagli e che sia parallela all'intersezione dei piani.

944. Una retta parallela ad un piano è equidistante dalle rette, che giacciono nel piano e non le sono parallele.

945. Tirare un piano, che sia equidistante da due rette date.

946. Dato un punto, un piano, e una retta parallela al piano, condurre per il punto una retta, che incontri la retta data e il piano in due punti che abbiano data distanza.

947. Tagliare un angoloide tetraedro in modo che la sezione sia una losanga di lato dato.

948. Condurre un piano, che passi per un punto dato, e che faccia angoli eguali con tre rette date.

949. Condurre per una retta data un piano, che con un altro piano dato comprenda un diedro dato.

950. Condurre per un punto dato un piano parallelo a una retta data, e che formi con un piano dato un diedro dato.

951. Costruire un triedro trirettangolo, i cui spigoli passino per tre punti dati.

952. Tagliare un triedro trirettangolo in modo che la sezione sia eguale a un triangolo dato.