CAPITOLO IX

POTENZA IN SENSO LATO

POTENZA AD ESPONENTE FRAZIONARIO.

Definizione.

278. Noi abbiamo dimostrato [260] la formula:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

ma solo per il caso che m sia divisibile per n; epperò, volendo tradurla in linguaggio ordinario, bisogna dire:

Per estrarre la radice da una potenza, se l'esponente è divisibile per l'indice, *basta effettuare questa divisione.*

Questa regola non si può mettere in pratica quando l'esponente del radicale non è multiplo dell'indice. Infatti, applicandola ad es. al radicale $\sqrt[5]{a^3}$, essa ci conduce alla combinazione di segni $a^{\frac{3}{5}}$, la quale manifestamente è priva di significato. Codesta combinazione di segni ha forma di potenza; ma, se ci proviamo a dire che essa rappresenta il prodotto di $\frac{3}{5}$ di fattori tutti eguali ad a, troviamo poi di aver messo insieme parole che implicano contradizione, giacchè il numero dei fattori di un prodotto è necessariamente intero, e almeno eguale a 2.

Egli è contrario alla natura dell'Algebra avere formule che si possano applicare in certi casi e non in certi altri; dacchè l'Algebra vuole trattare le questioni in generale, indipendentemente da valori particolari, è pur necessario che le sue formule siano generali. Intanto abbiamo veduto che la formula:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

non vale, se m non è divisibile per n. Ma possiamo farla valere, appunto perciò che la scrittura $a^{\frac{m}{n}}$ non ha ancora nessun significato. Così si è giustificata la seguente convenzione:

279. Def. *Un esponente frazionario significa che bisogna inalzare la base a potenza con esponente uguale al numeratore, ed estrarre dal risultato la radice con indice uguale al denominatore.* (*).

D'ora in poi hanno dunque significato simboli quali sono i seguenti:

$$a^{\frac{5}{4}}, \qquad 25^{\frac{1}{2}}, \qquad (a+b)^{\frac{3}{2}},$$

i quali equivalgono ormai rispettivamente a:

$$\sqrt[4]{a^5}, \qquad \sqrt{25}, \qquad \sqrt{(a+b)^3}.$$

280. Oss. I due termini di una frazione, che si trovi al posto di esponente, sono a vero dire indici di operazioni; ciò nondimeno è lecito di moltiplicarli per uno stesso numero intero, epperò anche di sopprimere un loro fattore comune. Infatti i due termini di una frazione esponente rappresentano [279] uno l'esponente, l'altro l'indice di un radicale, e sappiamo [254, 259] che un radicale non viene alterato, nè quando si moltiplicano l'indice e l'esponente per uno stesso numero, nè quando si sopprime un loro fattore comune. E ridurre a denominatore comune più frazioni esponenti equivale a ridurre [258, 262] ad indice comune altrettanti radicali.

Calcolo.

281. La dimostrazione delle formule del § 224 per il calcolo delle potenze è fondato sul concetto

(*) Rammentiamo che l'ordine, in cui si succedono le due operazioni, è [271] arbitrario.

che potenza è prodotto di fattori eguali. Poichè questo non è vero nel caso che l'esponente sia una frazione, le regole per il calcolo delle potenze ad esponente frazionario richiedono dimostrazioni a posta. Tratteremo le cinque operazioni espresse nei primi membri delle formule suaccennate.

282. Anzitutto abbiamo:

$$(abc\ldots)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(abc\ldots)^m} \qquad [279]$$
$$» \quad = \sqrt[n]{a^m b^m c^m \ldots} \qquad [216]$$
$$» \quad = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{c^m}\ldots \qquad [263]$$
$$» \quad = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}\ldots \qquad [279]$$

283. Dall identità:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a,$$

elevando i due membri alla potenza $\frac{m}{n}$, si ottiene [282]:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

donde risulta essere:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

284. $$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} \qquad [279]$$
$$» \quad = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} \qquad [258]$$
$$» \quad = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} \qquad [264, 219]$$
$$» \quad = a^{\frac{mq+np}{nq}} \qquad [279]$$
$$» \quad = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}. \qquad [109]$$

285. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^m}^{\,p}}$ [279]

» $= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}$ [270, 220]

» $= \sqrt[nq]{a^{mp}}$ [272]

» $= a^{\frac{mp}{nq}}$ [279]

» $= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$ [113]

286. Passiamo alla divisione con due potenze d' egual base. Sia $\frac{m}{n}$ l' esponente del dividendo, $\frac{p}{q}$ quello del divisore, ma sia:

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q}.$$

Decomponiamo la frazione $\frac{m}{n}$ in due parti, una eguale alla minore $\frac{p}{q}$; l'altra che è la differenza delle due frazioni, si può rappresentare con la scrittura $\left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right)$. Ora, essendo:

$$\frac{p}{q} + \left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n},$$

abbiamo [284]:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}},$$

e per conseguenza:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

287. In conchiusione la regole per il calcolo delle potenze ad esponente frazionario sono quelle stesse che per le potenze ad esponente intero. E così ora possiamo dire che le formule:

(1) $$(abc\ldots h)^m = a^m b^m c^m \ldots h^m$$

(2) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

(3) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(4) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(5) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

sussistono per valori interi o frazionari, che si attribuiscano agli esponenti. Ma l'ultima suppone ancora che l'esponente del dividendo superi quello del divisore.

POTENZA AD ESPONENTE ZERO.

Definizione.

288. Noi abbiamo dimostrato [223, 286] la formula:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

per valori interi e frazionari degli esponenti, ma in ambidue i casi nell'ipotesi che l'esponente del dividendo fosse maggiore dell'esponente del divisore. Questa regola, applicata al caso in cui gli esponenti del dividendo e del divisore sono eguali, conduce alla scrittura a^0, la quale, evidentemente, è priva di significato. La formula in questione non vale adunque nel caso che gli esponenti siano eguali; ma, appunto perchè il segno a^0 non fu adoperato a rappresentare quantità alcuna, si può farla valere, attribuendo con una convenzione un significato a questo segno. E poichè è:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1,$$

otterremo l'intento con la convenzione seguente:

289. Def. *La potenza ad esponente* zero *di una base qualunque è uguale all' unità.*

Sono adunque uguaglianze di definizione le seguenti:

$a^0 = 1,\quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1,\quad (a^m)^0 = 1,\quad (-3a^2b)^0 = 1.$

Calcolo.

290. I ragionamenti, fatti per dimostrare le formule [287] del calcolo delle potenze, non si adattano per nulla al caso in cui l'esponente è uguale a *zero*. Ma facilmente si riconosce che le dette formule sussistono anche se agli esponenti si attribuisca il valore *zero*. Soltanto nella:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

non è lecito supporre $m = 0$ ed $n > 0$, dappoichè per questo caso la formula non è dimostrata.

In conchiusione troviamo che, mentre con la definizione di potenza ad esponente nullo miravamo a generalizzare l'ultima formula, abbiamo conseguita la generalizzazione anche delle altre formule per il calcolo delle potenze.

POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO.

Definizione.

291. La formula:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

è ancora soggetta a questa restrizione, che l'esponente del divisore non deve superare quello del dividendo. Perciò, quando si dovesse dividere a^m per a^n, e si sapesse essere $m < n$, la divisione dovrebbe restare indicata. Soltanto, perchè una frazione non muta quando i suoi due termini vengono divisi per una stessa quantità, potremo dividere numeratore e denominatore per a^m. In ambidue i casi, siano poi gli esponenti interi o frazionari, si può applicare la regola [287, 5°] per la divisione di due potenze di base uguale, e si ottiene:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

e supposto $n - m = p$, ossia $n = m + p$, possiamo scrivere:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m-p}} = \frac{1}{a^p}.$$

Ora, nell'intento di trovare modo di liberare la formula in discussione dall'accennata restrizione, proviamoci ad applicare la regola [287, 5°] per la divisione di due potenze della stessa base, anche in questo caso che non abbiamo contemplato quando l'abbiamo dimostrata. Affinchè la sottrazione si possa fare, ci è d'uopo riguardare gli esponenti come quantità algebriche (*), e allora il risultato della sottrazione è una quantità negativa, il cui valore assoluto è la diffe-

(*) Non si può dire che debba nascere spontaneo il pensiero che anche gli esponenti possono avere due qualità contrarie, così da potersi considerare come quantità algebriche.

Due esponenti di lettere diverse sono come vincite o perdite di giocatori distinti, che non danno occasione di fare addizioni o sottrazioni.

Esponenti d'una stessa lettera sono come vincite o perdite di uno stesso giocatore, che si cumulano o tendono a distruggersi. Se appartengono a fattori d'uno stesso prodotto, hanno una stessa qualità; se ai termini d'una divisione, hanno qualità opposte. Ecc.

renza dei valori aritmetici degli esponenti. Perveniamo così al segno a^{-p}; segno interamente nuovo, che non rappresenta nessuna quantità; e quantunque esso abbia forma di potenza, non ci è possibile di tentarne una interpretazione. La regola di divisione non vale adunque quando l'esponente del divisore superi quello del dividendo; ma, appunto perchè essa ci ha condotti ad un segno senza significato, possiamo farla valere. E poichè operando secondo questa regola si ottiene a^{-p}, quando il vero quoziente è $1 : a^{-p}$, conseguiamo di generalizzarla con la seguente convenzione:

292. Def. *Una potenza con esponente negativo equivale ad una frazione, che ha per numeratore l'unità e per denominatore la potenza della stessa base, con lo stesso esponente, ma preso positivamente.* (*).

È dunque, per convenzione, ad es.,:

$$5^{-p} = \frac{1}{5^p}, \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$

$$49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{49^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{49}}.$$

293. Le dimostrazioni delle formule per il calcolo delle potenze ad esponente positivo, intero o frazionario, non si adattano al caso che l'esponente sia negativo; perciò le regole per il calcolo delle potenze ad esponente negativo richiedono dimostrazioni a

(*) Si ammette, come inteso, che: *elevare a potenza con esponente positivo* equivalga ad elevare a potenza col valore aritmetico dell'esponente. (Così, per definizione di moltiplicazione per una quantità positiva, si può assumere la definizione di moltiplicazione per il valore aritmetico del moltiplicatore).

posta. Tratteremo le cinque operazioni espresse nei primi membri delle formule suaccennate.

Cominciando a considerare l'inalzamento a potenza nel caso in cui la base è un prodotto, abbiamo, per valori qualunque degli esponenti, interi cioè o frazionari, :

294. $(abc\ldots h)^{-m} = \dfrac{1}{(abc\ldots h)^m}$ [292]

» $= \dfrac{1}{a^m b^m c^m \ldots h^m}$ [287, 1°]

» $= \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{b^m} \cdot \dfrac{1}{c^m} \ldots \dfrac{1}{h^m}$ [114]

» $= a^{-m} b^{-m} c^{-m} \ldots h^{-m}$. [292]

295. Dall'identità :

$$\frac{a}{b} \cdot b = a,$$

elevando i due membri alla potenza $(-m)$, si ottiene [294] :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} \cdot b^{-m} = a^{-m},$$

donde risulta essere :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

296. Passiamo a considerare la moltiplicazione di due potenze della stessa base, e supponiamo dapprima che uno soltanto degli esponenti sia negativo. Abbiamo :

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n \qquad [292]$$

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} \qquad [113]$$

$$\text{»} \qquad = a^{n-m} \qquad [287,\ 5^\circ;\ 292]$$

$$\text{»} \qquad = a^{-m+n}. \qquad [11]$$

Siano ora negativi entrambi gli esponenti. Egli è:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} \qquad [292]$$

$$\text{»} \qquad = \frac{1}{a^{m+n}} \qquad [13;\ 287,\ 3^\circ]$$

$$\text{»} \qquad = a^{-(m+n)} \qquad [292]$$

$$\text{»} \qquad = a^{-m-n}. \qquad [71]$$

297. Per l'inalzamento a potenza di una potenza distingueremo tre casi.

Caso 1°. $$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} \qquad [292]$$

$$\text{»} \qquad = \frac{1}{a^{mn}} \qquad [287,\ 4^\circ]$$

$$\text{»} \qquad = a^{-mn}. \qquad [292]$$

Caso 2°. $$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n \qquad [292]$$

$$\text{»} \qquad = \frac{1}{a^{mn}} \qquad [287,\ 2^\circ,\ 4^\circ]$$

$$\text{»} \qquad = a^{-mn}. \qquad [292]$$

Caso 3°. $$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} \qquad [292]$$

$$\text{»} \qquad = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} \qquad [287,\ 2^\circ,\ 4^\circ]$$

$$\text{»} \qquad = a^{mn}. \qquad [116]$$

298. Per la divisione si decompone [18] l'esponente del dividendo in due parti, una delle quali sia eguale all'esponente del divisore, e quindi [296] il dividendo in due fattori, uno dei quali sia eguale al divisore. Ecc.

299. Conchiudiamo che le regole per il calcolo delle potenze ad esponente negativo sono quelle stesse, che per le potenze ad esponente positivo. E così ora possiamo dire che le formule:

$$(1) \qquad (abc\ldots h)^m = a^m b^m c^m \ldots h^m$$

$$(2) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(3) \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(4) \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(5) \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

sussistono per valori interi o frazionari, positivi o negativi che si attribuiscano agli esponenti; e sussistono anche se gli esponenti siano eguali a *zero*. In esse ormai gli esponenti hanno significato [46] algebrico, cosicchè, ad es., quando si traduce in parole la formula:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

e si dice che, *per moltiplicare tra loro due potenze della stessa base, si sommano gli esponenti*, s'intende di accennare a un'addizione di quantità algebriche razionali; epperò l'esponente del prodotto potrà essere, secondo il caso, una quantità razionale positiva o negativa.

POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE.

Definizione.

300. Con successive definizioni abbiamo dato significato a simboli, quali sono i seguenti:

$$a^3, \qquad a^1, \qquad a^0, \qquad a^{\frac{3}{5}}, \qquad a^{-\frac{2}{3}};$$

ma non ne hanno ancora combinazioni di segni, quali sarebbero:

$$a^{\sqrt{2}}, \qquad a^{-\sqrt{7}},$$

nelle quali l'esponente è irrazionale. Ora ci proponiamo di definire la potenza per il caso che l'esponente sia irrazionale. (*). Ci restringeremo a far questo per base positiva; e dei radicali, d'indice pari, considereremo il solo valor positivo. È necessario premettere alla definizione alcune considerazioni.

301. Teor. *Una potenza ad esponente positivo è maggiore o minore dell' unità, secondo che la base è maggiore o minore dell' unità. Quando l' esponente è negativo, la potenza è maggiore o minore dell' unità, secondo che la base è minore o maggiore dell' unità.*

Dim. Per il caso che l' esponente sia positivo ed *intero*, la proposizione è stata dimostrata [237, 238]; dobbiamo dunque considerare il caso in cui l' esponente è frazionario. Indichiamo con a la base, e l' esponente sia la frazione $\frac{m}{n}$ a termini interi e positivi. Sappiamo intanto [279] essere:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ora, secondo che a è maggiore o minore di *uno*, il ra-

(*) L'idea di considerare esponenti irrazionali è suggerita dal problema $a^x = b$.

dicando a^m è maggiore o minore di *uno* [237, 238]; epperò [238] è tale anche la radice, essendo:

$$\sqrt[n]{a^{m^n}} = a^m .$$

Se poi l'esponente è negativo (intero o frazionario), essendo [292]:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

e per quanto abbiamo veduto essendo il denominatore a^m maggiore o minore di *uno* secondo che è $a >$ oppure < 1, si conchiude che il quoziente, cioè la potenza a^{-m}, è corrispondentemente minore o maggiore dell'unità, c. d. d.

302. Teor. *Al crescere dell'esponente, una potenza aumenta, se la base è maggiore di* uno, *e diminuisce nel caso contrario.*

Dim. Siano p e q due numeri razionali, positivi o negativi, e sia (algebricamente) $p > q$. Dico essere:

$$a^p > a^q, \quad \text{se è} \quad a > 1,$$
$$a^p < a^q, \quad \text{se è} \quad a < 1.$$

Consideriamo l'eguaglianza identica [299, 5°]:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

In questa, essendo l'esponente $p - q$ positivo (perchè si è supposto $p > q$), il secondo membro è maggiore o minore dell'unità [301] secondo che è $a >$ oppure < 1. Per conseguenza conchiudiamo essere corrispondentemente:

$$a^p > a^q \quad \text{od} \quad a^p < a^q, \qquad \text{c. d. d.}$$

303. (*) **Teor.** *Estraendo da una quantità positiva,*

(*) Codesto paragrafo è redatto in tal maniera da poter esser letto indipendentemente dagli altri del capitolo a cui appartiene.

diversa da uno, *la radice con indice abbastanza grande, si può ottenere che la differenza tra la radice e l'unità sia minore di una quantità data, qualunque.*

Dim. 1°. Siano date una quantità $a > 1$ e una quantità b positiva, qualunque. Si vuol dimostrare che, estraendo da a la radice con indice abbastanza grande, si può ottenere che la differenza [301] tra la radice e l'unità sia minore di b.

Poichè la serie delle potenze della quantità $(1 + b)$ è indefinitamente crescente [237], esiste un intero k per il quale è sodisfatta la disuguaglianza:

$$a < (1 + b)^k$$

e quindi anche le seguenti:

$$\sqrt[k]{a} < 1 + b,$$

$$\sqrt[k]{a} - 1 < b.$$

2°. Se la quantità a è minore di *uno*, allora, perchè la serie delle potenze di $(1 - b)$ è indefinitamente decrescente [238], esiste un intero k per il quale è sodisfatta la disuguaglianza:

$$(1 - b)^k < a$$

e quindi anche le seguenti:

$$1 - b < \sqrt[k]{a},$$

$$1 - \sqrt[k]{a} < b, \qquad \text{c. d. d.}$$

303. (*bis*). **Teor.** *Data una potenza* a^{m}, *aggiungendo all'esponente* m *una frazione* $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *abbastanza piccola, si può ottenere che la differenza tra le potenze* a^{m} *ed* $\mathrm{a}^{\mathrm{m}+\frac{1}{\mathrm{k}}}$ *sia numericamente minore d' una quantità positiva* ε, *data, per quanto piccola.*

Dim. 1°. Sia dapprima $a > 1$. In questo caso, essendo [15]:

$$m + \frac{1}{k} > m,$$

egli è [302]:

$$a^{m+\frac{1}{k}} > a^m.$$

Dico che, se la frazione $\frac{1}{k}$ è abbastanza piccola, egli è:

$$a^{m+\frac{1}{k}} - a^m < \varepsilon.$$

Abbiamo intanto [299, 3°]:

$$a^{m+\frac{1}{k}} - a^m = a^m \cdot a^{\frac{1}{k}} - a^m$$

$$» \quad = a^m (a^{\frac{1}{k}} - 1).$$

Ora, prendendo l'intero k grande abbastanza, possiamo [303] ottenere che sia:

$$a^{\frac{1}{k}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^m}.$$

Per così fatto valore di k abbiamo:

$$a^{m+\frac{1}{k}} - a^m < \varepsilon, \qquad \text{c. d. d.}$$

2°. Sia ora $a < 1$. In questo caso è [302]:

$$a^m < a^{m+\frac{1}{k}}.$$

Abbiamo poi:

$$a^m - a^{m+\frac{1}{k}} = a^m (1 - a^{\frac{1}{k}}).$$

Ora, prendendo l'intero k grande abbastanza, possiamo [303] ottenere che sia:

$$1 - a^{\frac{1}{k}} < \frac{\varepsilon}{a^m}$$

epperò anche:

$$a^m - a^{m+\frac{1}{k}} < \varepsilon, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

(*) Può darsi che in una data questione l'esponente m sia una quantità indeterminata che può assumere differenti

304. Sia un numero α qualunque, e un numero β, razionale od irrazionale, positivo o negativo, definito mediante due classi contigue M, N; sia dunque:

$$\beta = (M, N).$$

Dinotiamo con α^M la classe di numeri che si ottengono elevando α a potenza con ciascun numero m, e con α^N la classe di numeri che si ottengono elevando α a potenza con ciascun numero n. Proveremo che codeste due classi sono contigue.

Consideriamo prima il caso di $\alpha > 1$.

In questo caso, essendo $m > n$, abbiamo intanto [302]: $\alpha^m > \alpha^n$.

Poi, essendo che le classi M, N sono contigue, sappiamo di poter trovare in esse due numeri m_1, n_1, la cui differenza sia abbastanza piccola, perchè la differenza: $\alpha^{m_1} - \alpha^{n_1}$ riesca minore di un numero dato positivo δ per quanto piccolo. [303].

Le due classi sono dunque contigue, epperò esse determinano un numero.

Codesto numero, se β è razionale, è la potenza α^β, perchè, essendo $m > \beta > n$, è anche [302]:

$$\alpha^m > \alpha^\beta > \alpha^n.$$

E si può scrivere:

$$\alpha^\beta = (\alpha^M, \alpha^N).$$

Assumeremo codesta eguaglianza come definizione di α^β, per il caso che β sia irrazionale.

valori. Per questo caso, per poter far uso del teorema precedente, basta sapere che i valori che può assumere l'esponente m sono compresi tra limiti finiti. Ed invero basterebbe osservare in tal caso che il teorema sussiste per il valore di m più sfavorevole.

Quanto abbiamo detto fin qui vale anche per il caso in cui è $\alpha < 1$. Soltanto in questo caso [302] la classe α^M è minore della classe α^N.

Così ora, sapendo di accennare due classi contigue, e quindi di definire veramente una quantità, diremo:

305. Def. *Data una quantita positiva α qualunque, ed un numero irrazionale β, positivo o negativo, si dice potenza di α, con esponente β, la quantità che è compresa* (*) *tra quelle che si ottengono elevando α a potenza con esponenti razionali maggiori di β, e quelle che si ottengono elevando α a potenza con esponenti razionali minori di β.*

306. Teor. *Le potenze ad esponente irrazionale seguono nel calcolo le regole stesse che le potenze ad esponente razionale.*

Dim. Ci contenteremo di dare un saggio delle dimostrazioni, facendo vedere che la formula:

$$(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$$

sussiste anche per esponenti irrazionali.

Sia $\alpha > 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha\beta > 1$

e $\gamma = (M, N)$ irrazionale.

Per definizione [305, 302] abbiamo:

$$\alpha^\gamma = (\alpha^M, \alpha^N),$$

$$\beta^\gamma = (\beta^N, \beta^M),$$

$$(\alpha\beta)^\gamma = ((\alpha\beta)^M, (\alpha\beta)^N).$$

Per la regola di moltiplicazione dei numeri definiti mediante classi [143], abbiamo poi:

$$\alpha^\gamma\beta^\gamma = (\alpha^M\beta^N, \alpha^N\beta^M).$$

(*) Si dice *compresa* perchè, lasciando di distinguere i casi di $\alpha > 1$ ed $\alpha < 1$, non si sa se si accenni prima la classe maggiore, oppure la classe minore.

Prendiamo ora un elemento qualunque della classe $\alpha^M \beta^N$, ad es. l'elemento $\alpha^{m_1} \beta^{n_1}$, e l'elemento $(\alpha\beta)^{m_1} = \alpha^{m_1} \beta^{m_1}$ della classe $(\alpha\beta)^M$. Essendo $\beta < 1$, ed $n_1 < m_1$, egli è $\beta^{n_1} > \beta^{m_1}$. Per conseguenza è:

$$\alpha^{m_1} \beta^{n_1} > (\alpha\beta)^{m_1}.$$

Similmente si prova che, per qualunque elemento della classe $\alpha^N \beta^M$, c'è nella classe $(\alpha\beta)^N$ un elemento maggiore.

Si conchiude [136] essere:

$$(\alpha^M \beta^N, \alpha^N \beta^M) = \left((\alpha\beta)^M, (\alpha\beta)^N \right),$$

ossia:

$$\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma.$$

Analoga, o più semplice, è la dimostrazione degli altri casi.

307. In conchiusione, anche per esponenti irrazionali, positivi e negativi, sussistono le formule:

(1) $$(abc\ldots h)^m = a^m b^m c^m \ldots h^m$$

(2) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

(3) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(4) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(5) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

e le proposizioni:

(6) $a^m > 1$, se è $a > 1$ ed $m > 0$; ecc.

(7) $a^p > a^q$ se è $a > 1$ e $p > q$; ecc.

308. Cor. *Se due potenze d'una stessa base, diversa dall'unità, sono eguali, anche gli esponenti sono eguali tra loro.* [307, 7°].

CAPITOLO X

RAPPORTO, PROPORZIONE PROPORZIONALITÀ

RAPPORTO.

309. Se una grandezza A si può considerare come somma di m grandezze uguali ad una grandezza B, si dice che la A è *multipla* della B secondo il numero m; od anche che la B è un *summultiplo,* una parte *aliquota*, una *misura* della A secondo il numero m. Si esprime codesta relazione tra le grandezze A e B scrivendo:

$$A = m B, \qquad \text{oppure} \qquad \frac{A}{m} = B.$$

310. Se due grandezze A e B sono multiple di una stessa C, questa grandezza è una *comune misura* delle due prime, le quali, per questo riguardo, si dicono *commensurabili*.

311. Se due grandezze A e B hanno una comune misura C, esse hanno innumerevoli misure comuni. Infatti, ogni parte aliquota della C è una comune misura delle grandezze A e B. (*).

312. Teor. *Se due grandezze sono commensurabili, il quoziente dei numeri, che esprimono come esse sono multiple d' una loro comune misura, è costante.*

(*) Questa asserzione suppone si parli di quelle specie di grandezze per le quali, data una grandezza qualunque, esiste un suo summultiplo secondo qualsivoglia numero intero. Tali sono, ad es., le grandezze geometriche, il tempo,..

Dim. Siano due grandezze commensurabili A e B; siano C e D due loro comuni misure; le grandezze A e B siano multiple della C rispettivamente secondo i numeri m, n, e siano multiple della D rispettivamente secondo i numeri p e q. Dico che è:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Abbiamo intanto per ipotesi:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} \qquad \text{ed} \qquad \frac{A}{p} = \frac{B}{q}.$$

Ora, prendendo delle due prime grandezze summultipli secondo il numero p, e delle altre due summultipli secondo il numero m, otteniamo:

$$\frac{A}{mp} = \frac{B}{np}, \qquad \frac{A}{mp} = \frac{B}{mq}.$$

Per conseguenza è:

$$\frac{B}{np} = \frac{B}{mq},$$

epperò anche: $\quad np = mq,$

e quindi infine: $\quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n},$ c. d. d.

313. Def. *Se due grandezze sono commensurabili, il quoziente dei due numeri che indicano come esse sono multiple d'una loro comune misura, si dice* rapporto *della prima grandezza alla seconda.*

Così, ad es., se le grandezze A e B sono commensurabili, se C è una loro comune misura, ed è:

$$A = mC \qquad \text{e} \qquad B = nC,$$

la frazione $\frac{m}{n}$ è il rapporto della A alla B.

La frazione $\frac{n}{m}$ è il rapporto della B alla A.

I termini d'una frazione qualunque, che sia eguale alla frazione $\frac{m}{n}$, indicano come A e B sono multiple d'un'altra loro misura comune.

314. Se una grandezza A è multipla di un'altra B secondo il numero m, questo intero è [313] il rapporto di A e B.

Il rapporto di B ad A è la frazione $\frac{1}{m}$.

315. Data una grandezza qualunque A e un numero razionale qualunque $\frac{m}{n}$, si può trovare una grandezza, il cui rapporto alla data sia il numero dato. Basta infatti prendere il multiplo secondo il numero m dell' *n.esima* parte della grandezza data.

316. Due grandezze omogenee A e B possono essere *incommensurabili.* (*). In tal caso, prendendo un numero razionale qualunque, ad es. il numero $\frac{m}{n}$, e costruendo la grandezza che ha alla B rapporto eguale ad $\frac{m}{n}$, si otterrà una grandezza che sarà maggiore o minore della A.

Imaginiamo di spartire tutti i numeri razionali in due classi P e Q, mettendo nella prima tutti quei numeri che sono rapporti alla B di grandezze maggiori della A, e nell'altra tutti i numeri che sono rapporti alla B di grandezze minori della A. Proveremo che le classi P e Q così formate sono contigue.

Intanto ogni numero della classe P è maggiore di qualunque numero della classe Q. Infatti, presi due numeri, uno dalla prima classe e l'altro dalla seconda, si riducano a denominatore comune, e siano $\frac{h}{n}$ e $\frac{k}{n}$ i numeri che risultano. Ora, essendo:

$$h\frac{B}{n} > A \qquad \text{ed} \qquad A > k\frac{B}{n},$$

(*) Si prova questo, nel modo più luminoso, in Geometria, dove, ad es., si dimostra che nessun segmento può essere ad un tempo misura della diagonale e del lato d'un quadrato.

è necessariamente

$$h > k, \qquad \text{epperò} \qquad \frac{h}{n} > \frac{k}{n}.$$

Ci resta da far vedere che si possono trovare due numeri uno di una classe e l'altro dell'altra, tali che la loro differenza sia minore di un numero dato ε, per quanto piccolo.

A tal fine, presa una frazione $\frac{1}{n}$ che sia minore di ε, si consideri la serie delle grandezze :

$$\frac{1}{n} B, \quad \frac{2}{n} B, \quad \frac{3}{n} B, \ldots,$$

e sia $\frac{m}{n}$ B la maggiore tra queste che è contenuta nella grandezza A. Allora, essendo :

$$\frac{m+1}{n} B > A > \frac{m}{n} B,$$

i numeri $\frac{m+1}{n}$ ed $\frac{m}{n}$ appartengono, il primo alla classe P, il secondo alla classe Q; essi poi hanno tra loro la differenza $\frac{1}{n}$, che è minore di ε. (*).

Qui torna opportuno considerare la *classe* delle grandezze corrispondenti ai numeri della classe P, e quella delle grandezze corrispondenti agli elementi della classe Q; classi che chiameremo P' e Q'.

Poichè ogni elemento della classe P' è maggiore della grandezza A, ed ogni elemento della classe Q' è minore della grandezza A, ogni elemento della prima classe è maggiore di qualunque elemento della seconda.

(*) Si potrebbe provare facilmente che nessun numero p può essere il più piccolo dei numeri della classe P, e che nessun numero q può essere il più grande dei numeri della classe Q.

Si possono poi trovare due elementi delle due classi P' e Q', la cui differenza sia minore di una grandezza data ω della stessa specie della grandezza A. Infatti, presa una parte aliquota della B, che sia minore di ω, tale sia ad es. un *n.esimo* della B, formando di questa parte i multipli successivi, si arriverà a trovarne due, tra i quali sia compresa la grandezza A.

Per conseguenza non c'è che la sola grandezza A, la quale abbia la proprietà d'essere compresa tra le due classi di grandezze P' e Q'.

Ed ora dobbiamo osservare che, laddove a ciascuna delle grandezze delle classi P' e Q' corrisponde un numero, che nasce dal confronto della grandezza stessa con la grandezza B, non c'è numero che corrisponda alla grandezza A. E questa mancanza è dovuta alla proprietà della A di essere incommensurabile con la B.

E perchè tra le classi P' e Q' c'è posto per una grandezza ed una soltanto, cioè per la grandezza A, tra le classi di numeri P e Q c'è una lacuna, dove si può introdurre un nuovo ente aritmetico, un numero irrazionale, corrispondente alla grandezza A e a nessun'altra grandezza della specie stessa.

Codesto nuovo ente aritmetico si definisce dicendo:

317. Def. *Se due grandezze omogenee* A *e* B *sono incommensurabili, si dice rapporto della* A *alla* B *il numero irrazionale, che è minore dei numeri che sono rapporti alla* B *delle grandezze commensurabili con la* B *e maggiori della* A, *ed è maggiore dei numeri che sono rapporti alla* B *delle grandezze commensurabili con la* B *e minori della* A.

318. Il rapporto di una grandezza A alla B, se questa è l'unità di misura, si chiama semplicemente *il valore* della grandezza A.

319. Teor. *Dividendo, l'uno per l'altro, i rapporti che due grandezze hanno ad una terza qualunque, si ottiene il rapporto della prima alla seconda.*

Dim. Siano A, B, C tre grandezze omogenee qualunque; siano a e b i rapporti delle grandezze A e B alla C, e sia r il rapporto della A alla B. Si vuol dimostrare che è:

$$\frac{a}{b} = r.$$

1°. I numeri a e b siano razionali; sia ad es.:

$$a = \frac{m}{n} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{p}{q},$$

epperò anche:

$$a = \frac{mq}{nq} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{np}{nq}.$$

In questo caso, poichè la grandezza A è uguale ad mq volte un *nq.esimo* della C, e la grandezza B è uguale ad np volte un *nq.esimo* della stessa C, le due grandezze A e B sono commensurabili, e il rapporto della prima alla seconda è [313] la frazione $\frac{mq}{np}$, la quale è il prodotto delle frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{q}{p}$, epperò anche il quoziente di $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, come d. d.

2°. Le grandezze A e B siano ambedue incommensurabili con la C, epperò a e b irrazionali.

Chiamiamo H la classe dei numeri razionali maggiori di a e K quella dei numeri razionali minori. [317]. Chiamiamo M la classe dei numeri razionali maggiori di b, ed N quella dei numeri razionali minori; dimodochè possiamo scrivere:

$$a = (H,\ K) \qquad \text{e} \qquad b = (M,\ N).$$

Sappiamo [146] intanto essere:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{H}{N}, \frac{K}{M}\right).$$

Ora proveremo che anche r, rapporto della A alla B, è compreso tra le due stesse classi contigue.

Consideriamo perciò un elemento qualunque della classe maggiore; sia quello, ad es., che nasce dalla divisione dei numeri h_1, n_1. Chiamiamo α e β le due grandezze che hanno per rapporti alla C rispettivamente i numeri h_1, n_1. Poichè [317] è:

$$\alpha > A \qquad \text{e} \qquad B > \beta,$$

il rapporto della α alla β è maggiore del rapporto della α alla B; ed il rapporto della α alla B è maggiore del rapporto della A alla B. (*). Per conseguenza, a maggior ragione, il rapporto della grandezza α alla β è maggiore del rapporto della A alla B. Ma poichè le grandezze α e β sono commensurabili con la C e sono h_1 ed n_1 rispettivamente i loro rapporti alla C, per il caso già considerato il rapporto della grandezza α alla β è il quoziente di h_1 per n_1. Egli è adunque:

$$\frac{h_1}{n_1} > r.$$

(*) Qui si ammette come manifesto che, di due grandezze disuguali, la maggiore ha ad una terza rapporto maggiore; e che una grandezza ha alla minore di due altre rapporto maggiore che alla maggiore.

Ad ogni modo la verità della prima proposizione si riconosce prendendo della terza grandezza una parte aliquota che sia minore della differenza tra le altre grandezze. E la seconda proposizione è conseguenza della precedente e di questo che, ad es., il rapporto di A a B e quello di B ad A sono inversi l'uno dell'altro.

Nello stesso modo si proverebbe che r è maggiore di qualunque elemento della classe $\frac{K}{M}$, epperò infine resta dimostrato essere in ogni caso (*):

$$r = \frac{a}{b}, \qquad \text{c. s. v.}$$

320. Cor. *Il rapporto della prima all'ultima di quante si vogliano grandezze omogenee date è uguale al prodotto dei rapporti che le singole grandezze hanno ciascuna alla susseguente.*

Dim. Siano $A, B, C, \ldots, H, K$ quante si vogliano grandezze omogenee; siano $a, b, c, \ldots, h, k$ i rapporti di queste grandezze ad una stessa grandezza M, omogenea ad esse, e qualunque. Sappiamo [319] che i quozienti:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{d}, \ldots, \frac{h}{k}$$

sono rispettivamente il rapporto della A alla B, quello della B alla $C, \ldots$, quello della H alla K. Moltiplicando tra loro codeste frazioni, e semplificando il prodotto, si ottiene $\frac{a}{k}$, che è appunto [319] il rapporto della A alla K, come d. d.

PROPORZIONE

Definizioni.

321. Def. (Si dice che) *Quattro grandezze sono in proporzione, quando il rapporto della prima alla seconda è uguale al rapporto della terza alla quarta.*

(*) Diciamo in ogni caso, perchè è manifesto che la dimostrazione del secondo vale invariata anche se uno soltanto dei numeri a, b è irrazionale. (Vale anche se ambidue sono razionali).

322. Oss. Una prima condizione, perchè quattro grandezze possano formare una proporzione, è questa, che la prima e la seconda siano omogenee, e così la terza e la quarta; infatti due grandezze eterogenee non hanno rapporto tra loro. Ma non è necessario che le due ultime siano della stessa specie delle due prime.

323. Def. (Si dice che) *Quattro numeri sono in proporzione, quando il rapporto* (quoziente) *del primo al secondo è uguale al rapporto del terzo al quarto.* (*).

324. Se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, ed a e b sono i rapporti delle due prime a un' altra grandezza qualunque, e c e d sono i rapporti delle grandezze C e D a una grandezza omogenea ad esse e qualunque, anche i quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione.

Infatti, il quoziente $\frac{a}{b}$ è uguale [319] al rapporto della grandezza A alla B, e il quoziente $\frac{c}{d}$ è uguale al rapporto della C alla D. E poichè i rapporti sono eguali, sono eguali anche i quozienti, e così i numeri a, b, c, d sono in proporzione.

Reciprocamente, se quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione, altrettanto si può dire di quattro grandezze di cui essi siano i valori.

Ne segue che le proprietà d' una proporzione tra numeri valgono anche per una proporzione tra grandezze, e viceversa. Soltanto, quando si tratta di una proporzione tra grandezze, i due termini di un rapporto devono essere omogenei.

(*) Applicando a due numeri la definizione di rapporto data per grandezze, risulta il quoziente dei due numeri. Se non apparisce questa identità di rapporto e quoziente immediatamente, dipende da questo che si suol definire il quoziente riportandosi alla moltiplicazione.

325. Per significare che quattro numeri **a, b, c, d** sono in proporzione, si scrive:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

oppure: $$a : b = c : d$$

e invece di leggere:

a *diviso* **b** *eguale a* **c** *diviso* **d**,

si suol dire: **a** *sta a* **b** *come* **c** *sta a* **d**.

I numeri **a, b, c, d** si chiamano i *termini* della proporzione; (**a** : **b**) è il *primo* rapporto, (**c** : **d**) è il *secondo* rapporto; **a** e **c** si dicono gli *antecedenti*, **b** e **d** i *conseguenti*; **a** e **d** gli *estremi*, **b** e **c** i *medi*.

326. Quando in una proporzione, come nella:

$$12 : 6 = 6 : 3,$$

i medi sono eguali, la proporzione toglie il nome di proporzione *continua*, e il secondo termine si dice *medio proporzionale* tra gli estremi.

Teoremi sulle proporzioni.

327. Una proporzione tra quantità non è altra cosa che un'eguaglianza, i cui due membri hanno la forma particolare di frazione. Secondo che fra i termini di una proporzione ci sono o sole quantità note, od anche quantità incognite, la proporzione è una identità od una equazione. (*).

328. Teor. *In una proporzione ciascun estremo è uguale al prodotto dei medi diviso per l' altro estremo, e ciascun medio è uguale al prodotto degli estremi diviso per l' altro medio.*

(*) A vero dire, dopo di avere trattato delle equazioni in generale, può parere superfluo di trattare in particolare delle proporzioni; però certe modificazioni di proporzioni si presentano tanto spesso da esser utile averle osservate a posta.

Dim. Sia la proporzione

$$a : b = c : d.$$

Sia essa una identità od una equazione, isoliamo successivamente tutti e quattro i termini; risultano le uguaglianze, che si dovevano dimostrare, :

$$a = \frac{b\,c}{d}, \quad b = \frac{a\,d}{c}, \quad c = \frac{a\,d}{b}, \quad d = \frac{b\,c}{a}.$$

329. Teor. *In una proporzione il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi.*

Dim. Infatti dalla proporzione :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

moltiplicando i due rapporti per $b\,d$, e poi semplificando, si ottiene : $a\,d = b\,c.$

330. Oss. Se in una proporzione i medi sono eguali, il quadrato del medio è uguale al prodotto degli estremi; epperò il medio proporzionale tra due numeri è uguale alla radice quadrata del loro prodotto.

331. Teor. *Quattro quantità* a, b, c, d *sono in proporzione, se il prodotto delle estreme è uguale al prodotto delle medie.*

Dim. Supponiamo che sia : $a\,d = b\,c.$
Dividendo per $b\,d$ i due membri e poi semplificando, si ottiene appunto :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

332. Oss. Riferendoci ai due teoremi precedenti possiamo dire che :

Condizione necessaria [329] *e sufficiente* [331] *perchè una proporzione sia esatta è questa che il prodotto degli estremi sia eguale al prodotto dei medi.*

333. Appl. Con la proporzione :

$$a : b = c : d$$

coesistono le seguenti:

$$ma : mb = nc : nd,$$
$$ma : nb = mc : nd,$$

nelle quali m ed n significano quantità qualisivogliano, diverse da *zero*.

E con la stessa coesistono le seguenti:

$$b : a = d : c$$
$$a : c = b : d,$$
$$d : b = c : a,$$

le quali si dicono dedotte dalla primitiva, rispettivamente, *invertendo*, *permutando* i medi, *permutando* gli estremi.

E coesistono con essa le seguenti:

$$(a + b) : b = (c + d) : d,$$
$$(a - b) : b = (c - d) : d,$$
$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d),$$

le quali si dicono dedotte dalla primitiva, rispettivamente, *componendo*, *dividendo*, *componendo e dividendo*.

E coesiste con la primitiva proporzione [307, 2°] anche questa che segue:

$$a^m : b^m = c^m : d^m.$$

334. Teor. *Moltiplicando tra loro ordinatamente i termini di quante si vogliano proporzioni, si ottengono prodotti in proporzione.*

Dim. Siano le proporzioni:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}, \ldots . \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{d_n}.$$

Il prodotto dei primi rapporti è uguale a quello dei secondi; quindi [114] si ha appunto:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} = \frac{c_1 c_2 \ldots c_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

335. Teor. *Dividendo ordinatamente, uno per l'altro, i termini di due proporzioni, si ottengono quozienti che sono in proporzione.*

Dim. Siano le due proporzioni:

$$a : b = c : d,$$
$$m : n = p : q.$$

Dividendo ordinatamente i due rapporti uguali, che costituiscono la prima proporzione, per quelli della seconda, si ottengono risultati eguali. È dunque:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{c}{d} : \frac{p}{q}.$$

Da questa proporzione si ha facilmente [116] che:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q}.$$

336. Teor. *Se i conseguenti di due proporzioni sono ordinatamente uguali, gli antecedenti sono in proporzione.*

Dim. Siano le proporzioni:

$$a : m = c : n,$$
$$b : m = d : n,$$

i cui conseguenti sono ordinatamente uguali. Dico essere:

$$a : b = c : d.$$

Basta dividere ordinatamente i termini della prima proporzione per quelli della seconda, perchè risulta [335] appunto la proporzione da dimostrare.

Oss. Quando gli antecedenti di due proporzioni sono ordinatamente uguali, i conseguenti sono in proporzione.

337. Teor. *Se i termini medi di due proporzioni sono rispettivamente uguali, gli estremi sono inversamente proporzionali (cioè il primo termine della prima proporzione sta al primo dell'altra come il quarto termine di questa sta al quarto termine della prima).*

Dim. Siano le proporzioni:

$$a : m = n : d,$$
$$b : m = n : c,$$

i cui medi sono ordinatamente uguali. Dico essere:

$$a : b = c : d.$$

Dividendo ordinatamente i termini della prima proporzione per quelli della seconda, risulta [335]:

$$(a : b) : 1 = 1 : (d : c),$$

dalla quale viene immediatamente [116] la proporzione che si deve dimostrare.

Oss. Se in due proporzioni date fossero eguali rispettivamente gli estremi, invertendo e poi applicando il teorema or ora dimostrato, si conchiuderebbe che i medi delle proporzioni date sono inversamente proporzionali tra loro.

338. Teor. *Se parecchie proporzioni hanno comune il secondo termine e comune il quarto, la somma dei primi termini sta al secondo, come la somma dei terzi termini sta al quarto.*

Dim. Siano le proporzioni:

$$\frac{a_1}{h} = \frac{b_1}{k}, \quad \frac{a_2}{h} = \frac{b_2}{k}, \ldots, \quad \frac{a_n}{h} = \frac{b_n}{k}.$$

La somma dei primi rapporti è uguale alla somma degli altri. Quindi [109] è:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{h} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{k},$$

e questa è la proporzione che si doveva dimostrare.

339. Teor. *Se parecchi rapporti sono eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Dim. Consideriamo i rapporti eguali:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Chiamando q il valore comune dei rapporti, abbiamo:

$a_1 = b_1 q, \quad a_2 = a_2 q, \quad a_3 = b_3 q, \ldots a_n = b_n q,$

epperò, sommando ordinatamente e raccogliendo poi il comun fattore q, risulta:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) q.$

Dividendo i due membri di questa eguaglianza per:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n,$$

otteniamo:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = q,$$

e per conseguenza anche:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n},$$

come dovevasi dimostrare.

340. Oss. Essendo dati alquanti rapporti eguali, prima di applicare il teorema or ora dimostrato, si possono moltiplicare i due termini di ciascun rapporto per una quantità qualunque. Ad es., siano i rapporti eguali:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Essendo, ad es., :

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}, \quad \frac{c}{d} = \frac{nc}{nd}, \quad \frac{e}{f} = \frac{-e}{-f},$$

si conchiude che è [339]:

$$\frac{ma + nc - e}{mb + nd - f} = \frac{a}{b}.$$

341. Probl. *Dividere un dato numero* n *in parti, che stiano tra loro ordinatamente come dati numeri* a, b, c...

Risol. Indichiamo con $x, y, z \ldots$ le quantità domandate. Le condizioni, che esse devono sodisfare, sono espresse dalle equazioni:

$$x + y + z + \ldots = n,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots\ldots$$

Per il teorema precedente il rapporto:

$$\frac{x + y + z + \ldots}{a + b + c + \ldots} = \frac{n}{a + b + c + \ldots}$$

è uguale a ciascuno dei rapporti dati. Ma dall'equazione:

$$\frac{x}{a} = \frac{n}{a + b + c + \ldots}$$

si ricava: $x = \dfrac{a\,n}{a + b + c + \ldots}$.

Nello stesso modo si trova:

$$y = \frac{b\,n}{a + b + c + \ldots},\ z = \frac{c\,n}{a + b + c + \ldots}, \ldots$$

PROPORZIONALITÀ.

342. Def. *Se alquante grandezze (o quantità) corrispondono ad altrettante, ciascuna a ciascuna, e il rapporto tra due qualunque delle prime è uguale al rapporto tra le corrispondenti delle seconde, si dice che le grandezze (o quantità) sono proporzionali (le une alle altre).*

343. Due grandezze (o quantità) variabili si dicono *dipendenti*, l'una dall'altra, se al variare d'una di esse deve (*) variare anche l'altra.

(*) Dovremmo aggiungere la restrizione « *in generale* », perchè può darsi che, per certe variazioni d'una delle grandezze, l'altra non muti. Ad es., se nell'espressione x^2 la x varia da $+7$ a -7 il valore dell'espressione si mantiene immutato.

Ad es., sono grandezze variabili dipendenti la superficie del cerchio ed il raggio, lo spazio percorso da un corpo e il tempo impiegato a percorrerlo.

La dipendenza tra due grandezze variabili si dice *univoca*, se ad ogni stato dell' una corrisponde uno stato ed uno solo dell' altra.

La legge, secondo la quale variano insieme due grandezze variabili dipendenti, può cambiare da caso a caso. Tra le differenti leggi qui ci restringiamo a considerare due delle più semplici, perchè sono quelle che si presentano in pratica molto più frequentemente d'ogni altra. (E lo scopo delle presenti considerazioni si è di dar una norma per la intavolazione e risoluzione d' una certa classe di questioni).

344. Def. *Due grandezze (o quantità) variabili, dipendenti tra loro univocamente, si dicono proporzionali tra loro, se gli stati dell' una sono proporzionali agli stati dell' altra.* [342].

Così, ad es., sono grandezze variabili proporzionali tra loro *l'angolo* al centro d' un cerchio e *l' arco* compreso, perchè, come dimostra la Geometria, il rapporto di due quali si vogliano angoli al centro è uguale al rapporto degli archi corrispondenti. [342].

345. Non ispetta all'Algebra di provare, posto che abbia luogo, la proporzionalità tra due grandezze variabili, ma alla scienza che tratta particolarmente di quelle tali grandezze.

Per grandezze variabili dipendenti, che non appartengano a nessuna scienza, si può conchiudere che esse sono proporzionali tra loro, allorchè si sia riconosciuto che la mutua loro dipendenza è così fatta, che quando, partendo da un suo stato qualunque, una delle grandezze divenga m volte tanto, anche l' altra deve diventare m volte tanto (d'onde poi segue che, se una diventa un *m.esimo* di ciò che era, anche l'altra diventa un *m.esimo* di ciò che era).

Infatti, siano X ed Y due grandezze variabili, che dipendano tra loro nel modo indicato; siano X_1, X_2 due stati qualunque della X, ed Y_1, Y_2 i corrispondenti della Y. E sia $\frac{m}{n}$ il rapporto di X_1 ad X_2. Chiamiamo X_3 un *n.esimo* di X_2, ed Y_3 lo stato della Y corrispondente ad X_3.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array}$$

Ora, perchè X_3 è $\frac{1}{n}$ di X_2, per l'ipotesi Y_3 è $\frac{1}{n}$ *di* Y_2.

E perchè X_1 è m volte X_3, per l'ipotesi Y_1 è m volte Y_3.

Conchiudiamo che Y_1 è m volte $\frac{1}{n}$ di Y_2, epperò il rapporto di Y_1 a Y_2 è appunto uguale al rapporto di X_1 ad X_2. (*).

Così, ad es., si può dire che il prezzo d'una di quelle merci, che si vendono a peso (**), è proporzionale al peso, perchè (convenuto il prezzo unitario) per un peso doppio, triplo . . . bisogna pagare rispettivamente il doppio, il triplo . . .

346. Oss. La proporzionalità tra due grandezze variabili può essere *necessaria* o *convenzionale.*

Ad es., la lunghezza del cerchio è necessariamente proporzionale al raggio. Invece il prezzo d'una

(*) Trattandosi di grandezze la cui proporzionalità vien riconosciuta nel modo ora considerato, non avviene che si presentino rapporti irrazionali.

(**) Qui s'intende parlare di quelle merci per le quali, tenuto conto delle circostanze che determinano il prezzo, non si ha poi da badare altro che al peso.

merce è proporzionale al peso in virtù d'una convenzione che si potrebbe violare.

347. Se X ed Y sono due grandezze variabili proporzionali tra loro, se X_1 ed X_2 sono due stati della prima, se Y_1 ed Y_2 sono gli stati corrispondenti dell'altra grandezza, ed x_1, x_2, y_1, y_2 sono i valori dei quattro stati, tra questi valori sussiste la proporzione [324]:

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 .$$

Per conseguenza, se tre di codesti valori sono noti, si può [328] calcolare il quarto.

348. Dalla precedente proporzione, permutando, si ottiene la proporzione:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$

la quale dice che:

Se due grandezze variabili sono proporzionali tra loro, il rapporto dei valori di due loro stati corrispondenti è costante.

Codesto rapporto si dice *coefficiente di proporzionalità.*

349. Indicando con x ed y i valori di due stati corrispondenti di due grandezze variabili X ed Y proporzionali tra loro, e con r il valore di quello stato della prima grandezza a cui corrisponde quello stato dell'altra che è stato preso per unità di misura, abbiamo [348]:

$$\frac{x}{y} = r,$$

d'onde:
$$x = r y .$$

350. Dalla precedente relazione risulta:

$$y = \frac{1}{r} x .$$

La quantità $\frac{1}{r}$ (coefficiente di proporzionalità della Y alla X) è il valore di quello stato della grandezza Y che ha per corrispondente lo stato della X che si è preso per unità di misura.

351. Se X ed Y sono due grandezze variabili proporzionali tra loro, e si siano prese per rispettive unità di misura due stati corrispondenti, in tal caso ambidue i coefficienti di proporzionalità sono eguali all'unità; e due stati corrispondenti qualunque sono rappresentati da uno stesso numero.

Ciò ha luogo, ad es., per l'angolo al centro e l'arco corrispondente, se si prendono, per unità di misura degli angoli l'angolo retto, e per unità di misura degli archi un quarto del cerchio.

352. Def. *Se alquante grandezze (o quantità) corrispondono ad altrettante, ciascuna a ciascuna, per modo che il rapporto tra due qualunque delle prime sia eguale all'inverso del rapporto tra le corrispondenti delle seconde, si dice che le grandezze (o quantità) sono* inversamente *proporzionali (le une alle altre).*

353. Def. *Due grandezze (o quantità) variabili, dipendenti tra loro univocamente, si dicono inversamente proporzionali tra loro, se gli stati dell'una sono inversamente proporzionali agli stati dell'altra.*

Così, ad es., *la* secante tirata ad un cerchio da un punto esterno è inversamente proporzionale alla sua parte esterna, perchè, come si dimostra in Geometria, tirate due secanti qualunque, la prima sta alla seconda come la parte esterna di questa sta alla parte esterna della prima.

354. Per grandezze variabili dipendenti, che non appartengano a nessuna scienza, si conchiude che esse sono inversamente proporzionali tra loro, allorchè si sia riconosciuto che la mutua loro dipendenza è così fatta, che quando, partendo da un suo stato qualunque, una di esse divenga m volte tanto, l'altra deve diventare $\frac{1}{m}$ di ciò che era (donde segue che, se la prima si riduce ad $\frac{1}{m}$, l'altra diventa m volte tanto).

Infatti, siano X ed Y due grandezze variabili che dipendano tra loro nel modo indicato; siano X_1, X_2 due stati qualunque della X, ed Y_1, Y_2 i corrispondenti della Y. E sia $\frac{m}{n}$ il rapporto di X_1 ad X_2. Chiamiamo X_3 un *n.esimo* di X_2 ed Y_3 lo stato della Y corrispondente ad X_3.

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix}$$

Ora, perchè X_3 è $\frac{1}{n}$ di X_2, per l'ipotesi è $Y_3 = n\,Y_2$.

E perchè X_1 è m volte X_3, per l'ipotesi Y_1 è $\frac{1}{m}$ di Y_3, epperò è $Y_3 = m\,Y_1$.

Conchiudiamo essere:

$$m\,Y_1 = n\,Y_2$$

e per conseguenza che il rapporto di Y_1 ad Y_2 è uguale ad $\frac{n}{m}$, che è appunto l'inverso di $\frac{m}{n}$.

355. Se X ed Y sono due grandezze variabili inversamente proporzionali tra loro, se X_1 ed X_2 sono due stati qualunque della prima, se Y_1 ed Y_2 sono gli stati corrispondenti della seconda, ed x_1, x_2, y_1, y_2 sono i valori dei quattro stati, tra codesti valori sussiste la proporzione [324]:

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1 .$$

Per conseguenza, se tre di questi valori sono noti, si può calcolare il quarto.

356. Dalla precedente proporzione si ricava l'eguaglianza:
$$x_1\,y_1 = x_2\,y_2,$$
la quale dice che:

Se due grandezze variabili sono inversamente proporzionali tra loro, il prodotto dei valori di due loro stati corrispondenti è costante.

357. Spesso una grandezza variabile dipende ad un tempo da parecchie grandezze variabili, dimodochè, se varia una sola di queste, anche la prima deve variare.

Ad es., il peso di un filo metallico dipende dalla lunghezza, dalla grossezza del filo, e dalla densità della materia di cui è composto. Variando uno solo di questi elementi, il peso del filo varia.

358. Def. *Una grandezza variabile* X *si dice proporzionale ad altre grandezze variabili* A, B, C, . . . , *ed inversamente proporzionale ad altre grandezze variabili* M, N, P . . . . . *se, variando, ad es., la sola* A, *gli stati della* X *sono proporzionali agli stati della* A, *e variando, ad es., la sola* M, *gli stati della* X *sono inversamente proporzionali agli stati della* M.

Ad es., la superficie del triangolo è proporzionale alla base e all'altezza, perchè due triangoli d'eguale altezza stanno come le basi, e due triangoli d'egual base stanno tra loro come le altezze.

Per altro esempio, se è:

$$x = \frac{a\,b\,c\,d}{m\,n\,p},$$

la quantità x è proporzionale alla a; e infatti, se x_1 ed x_2 sono i valori della x corrispondenti ai valori a_1 ed a_2 della a, essendo:

$$x_1 : x_2 = \frac{a_1 b c d}{m n p} : \frac{a_2 b c d}{m n p},$$

egli è anche:

$$x_1 : x_2 = a_1 : a_2.$$

La quantità x è invece inversamente proporzionale alla m; e infatti, se x_1 ed x_2 sono i valori della x

corrispondenti ai valori m_1 ed m_2 della m, essendo:

$$x_1 : x_2 = \frac{abcd}{m_1 np} : \frac{abcd}{m_2 np},$$

egli è per conseguenza [116]:

$$x_1 : x_2 = m_2 : m_1.$$

359. Quando una grandezza variabile X è proporzionale ad altre grandezze variabili $A, B, C, \ldots$, ed è inversamente proporzionale ad altre $M, N, P, \ldots$, e si conosce il valore x_1 della grandezza X corrispondente a noti valori $a_1, b_1, c_1, \ldots m_1, n_1, p_1, \ldots$ delle altre, si può determinare quel valore x della X, che corrisponde ad altri valori $a, b, c, \ldots, m, n, p \ldots$ delle altre grandezze.

Supponendo che gli elementi da cui dipende la X, invece di variare tutti ad un tempo, mutino successivamente ad uno ad uno, mediante proporzioni si potranno determinare i valori che la grandezza X andrà successivamente assumendo, fino all' ultimo.

Posto, ad es., che la X sia proporzionale alle tre grandezze A, B, C, ed inversamente alle due M, N, indicando con $x_2, x_3 \ldots$ i successivi valori della X sopra accennati, abbiamo la catena di proporzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &: x_2 = a_1 : a \\ x_2 &: x_3 = b_1 : b \\ x_3 &: x_4 = c_1 : c \\ x_4 &: x_5 = m : m_1 \\ x_5 &: x \;\,= n : n_1. \end{aligned}$$

Moltiplicando tra loro ordinatamente codeste proporzioni, e sopprimendo poi i fattori $x_2, x_3 \ldots x_5$ comuni ai termini del primo rapporto, si ottiene [334]:

$$x_1 : x = a_1 b_1 c_1 mn : abcm_1 n_1,$$

donde

$$x = x_1 \frac{abcm_1 n_1}{a_1 b_1 c_1 mn}.$$

È facile riconoscere la legge secondo la quale in casi analoghi si deduce dai valori dati il valore domandato.

Esercizi.

501. Si dimostri che la proporzione $a:b=c:d$ è una conseguenza dell'altra:

$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

502. Dalla proporzione $a:b=c:d$ si deduca l'altra: $ab:cd=(a+b)^2:(c+d)^2$; e reciprocamente.

503. Dalla proporzione:

$$(ma+nc):(mb+nd)=a:b$$

si deduca l'altra $a:b=c:d$; e reciprocamente.

504. Se $a:b=b:c$, anche $(a^2+b^2):(a+c)=(a^2-b^2):(a-c)$; e reciprocamente.

505. Se $a:b=c:d$, si ha:

$$(a+b)(c+d)=\frac{b}{d}(c+d)^2=\frac{a}{c}(a+b)^2.$$

506. Se $a:b=b:c$, anche $(a^2-b^2):a=(b^2-c^2):c$; e reciprocamente.

507. Se $a:b=b:c$, si ha:

$$a-2b+c=\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{(b-c)^2}{c};$$

e reciprocamente.

508. Se $a:b=c:d$, si ha:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a-b)-(c-d)}{bc}.$$

509. Si dimostri che in una proporzione la somma del termine più grande e del più piccolo supera la somma degli altri due termini. (Si può supporre che il primo termine sia il massimo. L'ultimo è allora il minimo. Poi, dividendo....).

510. Vi può essere una proporzione, da cui si possa ottenere una proporzione aggiungendo uno stesso numero ai quattro suoi termini? (Si ammette che una proporzione con tale proprietà esista, e che sia x il numero che bisogna aggiungere, ecc. Dalla:

$$(a+x):(b+x)=(c+x):(d+x)$$

si conchiude che tra i quattro termini a, b, c, d deve sussistere la relazione $a + d = b + c$. Eguagliando i valori di a, ricavati da quest' ultima e dalla proporzione, si ha $b(c - d) = d(c - d)$; donde il rimanente).

511. In qual caso, sommando ordinatamente i termini di due proporzioni, si ottengono quattro numeri in proporzione?

512. Se tra i quattro numeri a, b, c, d sussistono le relazioni:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right);$$

i quattro numeri sono in proporzione. Reciprocamente, se in una proporzione $a : b = c : d$ si ha:

$$b = \frac{a+c}{2}, \quad \text{egli è} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right).$$

513. Si dimostri che, se più rapporti sono eguali, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente, così la radice quadrata della somma dei quadrati degli antecedenti sta alla radice quadrata della somma dei quadrati dei conseguenti.

514. Essendo $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$, $d : e = 7 : 8$, quali sono i rapporti di ciascuna delle quantità a, b, c, d a ciascuna delle seguenti?

515. Un negoziante, costretto a vendere la sua merce, per ogni 43,5 Kg. riceve quanto gli erano costati 36 Kg. Quanto per cento ha egli perduto?

516. Un diamante del peso di grammi 1,18 costò 250 lire. Quanto costerà un diamante della stessa bellezza e forma e che pesa grammi 2,36? (Il prezzo dei diamanti è proporzionale al quadrato del loro peso).

517. Un tale vuol pagare 1218 rubli in talleri prussiani. Quanti di questi dovrà sborsare, se 14 rubli equivalgono a 5 ducati, e 6 ducati a 17 talleri prussiani?

518. Due ruote dentate hanno, una 15 denti, l'altra 28. Se la prima in 7,5 secondi fa 16 giri, quanti ne farà quell'altra in 21 secondi?

519. Due corpi percorrono la stessa linea e sono partiti dallo stesso punto. Il secondo fu posto in movimento 12 minuti dopo dell'altro, ma la sua velocità sta a quella del primo come 8 : 3. Dopo quanti minuti accadrà l'urto dei corpi?

520. Le lunghezze delle periferie di due ruote di una carrozza stanno come 2 : 5, e la ruota posteriore ha una periferia di metri 2,40. Quanta strada conviene percorrere, affinchè una delle ruote anteriori abbia fatto 660 giri di più di una delle ruote più grandi?

521. A mezzogiorno gl'indici d'un orologio sono sovrapposti. In quali altre ore l'indice dei minuti tornerà a coprire l'indice delle ore?

522. In quali ore gl' indici formano angolo retto?

523. Si sa che 28 operai in 15 giorni, lavorando 10 ore al giorno, hanno scavato un fosso lungo m. 560, largo m. 6 e della profondità di m. 4,5. Quanti giorni occorrono a 36 operai, lavorando 8 ore al giorno, affine di scavare un altro fosso lungo m. 780, largo m. 9 e profondo m. 3,5?

524. Un tale morendo lascia 8400 lire, perchè siano distribuite a tre vecchi servitori in ragione delle loro età. Il primo ha 62 anni, il secondo 68, ed il terzo ha 80 anni. Quanto riceverà ciascuno? e quanto riceverebbe, se la ripartizione si dovesse fare in ragione inversa delle loro età?

525. Due punti si muovono uniformemente lungo un cerchio. Il primo percorre 1 metro ogni 2'', e l'altro 1 metro in 5''. Essi coincidono una prima volta dopo 20'', l'altra dopo 70'', contati dall' origine del movimento. Si domandano la distanza iniziale e la lunghezza del cerchio.

526. Un miscuglio di nitro e di zolfo pesa 80 Kg. e per ogni 7 parti di nitro vi sono 3 parti di zolfo. Quanto nitro bisogna aggiungere, affinchè il rapporto dei pesi del nitro e dello zolfo divenga eguale a quello di 11 a 4?

527. Si vorrebbe raggiungere lo stesso intento aggiungendo quantità eguali di nitro e di zolfo.

528. Si vorrebbe conservare il peso e raggiungere l'intento togliendo zolfo e aggiungendo nitro.

529. Si dimostri che una quantità variabile proporzionale a molte altre è proporzionale al loro prodotto.

530. Se una grandezza variabile è direttamente proporzionale a due altre, queste due sono inversamente proporzionali tra loro.

531. Se una quantità è direttamente proporzionale a un'altra e inversamente proporzionale a una terza, queste due sono direttamente proporzionali tra loro.

532. Si dimostri che, quando sia:

$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$

e i numeri $a_1, a_2 \cdots a_n$ siano proporzionali ai numeri $b_1, b_2, \ldots b_n$, si ha:

$$\sqrt{AB} = \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n}.$$

(Detto q il rapporto che ciascuno dei numeri b ha al corrispondente dei numeri a, abbiamo $b = aq$, epperò:

$$ab = a^2 q, \quad \sqrt{ab} = a\sqrt{q}\ ; \text{ ecc.} \ldots\ldots).$$

533. Due quantità variabili non possono essere proporzionali tra loro, se allo *zero* dell'una non corrisponde lo *zero* dell'altra.

534. Se due quantità variabili sono proporzionali, ad aumenti eguali d'una corrispondono aumenti eguali dell'altra.

535. Se due grandezze variabili sono proporzionali tra loro, e uno stato A della prima è uguale alla somma di parecchi altri $B, C\ldots$, lo stato della seconda corrispondente ad A è uguale alla somma degli altri stati corrispondenti a $B, C\ldots$

536. Se due quantità variabili x, y sono legate dalla relazione $ax + by = 0$, e si attribuiscono ad x degli aumenti m, n, p, questi sono proporzionali ai corrispondenti aumenti m', n', p' della variabile y.

537. In qual caso il valore della frazione:

$$\frac{ax + by + cz + \cdots}{a'x + b'y + c'z + \cdots}$$

è indipendente dai valori delle indeterminate $x, y, z\ldots$? (Posto che il valore sia indipendente da quelli di $x, y, z\ldots$, si può fare $x = 1, y = 0, z = 0\ldots$ ecc.).

538. Se due grandezze variabili dipendono l'una dall'altra per modo che alla somma di qualisivogliano stati della prima corrisponda la somma degli stati corrispondenti dell'altra, le due grandezze sono proporzionali tra loro.

CAPITOLO XI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risoluzione dell' equazione generale di secondo grado.

360. Un'equazione a una incognita è di secondo grado, quando si può ridurre alla forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

nella quale x rappresenta l'incognita, e a, b, c sono quantità note. I coefficienti b e c possono esser nulli; ma non può esser tale il coefficiente a, altrimenti il primo termine sparirebbe, e l'equazione non sarebbe più di secondo grado.

Dividendo i due membri dell'equazione per a, si ottiene l'equazione equivalente [167]:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Per semplicità di scrittura rappresenteremo i quozienti $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ con le lettere p e q; sicchè infine la forma generale delle equazioni di secondo grado è per noi la seguente:

$$x^2 + px + q = 0.$$

361. Quando è $q = 0$, l'equazione si dice *spuria*; la sua risoluzione non presenta nessuna difficoltà. Mettendo l'equazione sotto la forma:

$$x(x + p) = 0,$$

e rammentando che, perchè un prodotto sia nullo, è necessario e sufficiente che uno dei fattori sia nullo, si riconosce che l'equazione è sodisfatta, o che si faccia $x = 0$, oppure $x = -p$, e che non si può sodisfare in nessun altro modo. Così possiamo dire che un'equazione di secondo grado spuria ha sempre due radici; e sempre una di queste è uguale a *zero*.

362. Supponiamo, in secondo luogo, che sia $p = 0$. In questo caso l'equazione si dice *pura*. Portando il termine noto nel secondo membro, si ha l'equazione equivalente:

$$x^2 = -q,$$

la quale mostra che il problema si riduce a trovare un numero, il quale, elevato alla seconda potenza, riproduca un altro numero dato. La risoluzione di questo problema fu già appresa sotto il nome di *estrazione di radice quadrata*. Se prescindiamo dai segni, possiamo dire che esiste sempre [150] una soluzione e una sola, (e ciò perchè esiste sempre un numero e uno solo, razionale o irrazionale, il cui quadrato è uguale a un altro numero dato). Ma, dovendo tener conto dei segni, dobbiamo distinguere due casi, secondo cioè che $-q$ è quantità negativa, oppure positiva.

Nel primo caso l'equazione non ha soluzioni, perchè ogni quadrato, sia la base positiva, oppure negativa, è sempre positivo.

Nell'altra ipotesi, quando cioè $-q$ è quantità positiva (il che avviene quando q è quantità negativa), l'equazione ha due soluzioni, numericamente uguali e contrarie di segno. Ammesso che $\sqrt{-q}$ rappresenti il valor numerico della radice quadrata del valore assoluto di $-q$, le due soluzioni si rappresentano unitamente scrivendo:

$$x = \pm \sqrt{-q}.$$

363. Passiamo infine a considerare l'equazione *completa*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Per risolvere quest'equazione, proviamoci dapprima ad estrarre la radice quadrata dal primo membro (*), a trovare cioè quell'espressione, che, elevata al quadrato, dà il trinomio $x^2 + px + q$.

Dappoichè il quadrato d'un binomio è un trinomio, cominceremo ad ammettere che ci sia un binomio, il cui quadrato sia appunto $x^2 + px + q$; per trovarlo faremo il ragionamento seguente. Dovendo x^2 essere il quadrato della prima parte, la prima parte della radice è x. Dovendo px essere il doppio del prodotto delle due parti, $\frac{px}{2}$ ne sarà il prodotto semplice; dividendo questo prodotto per la prima parte ormai nota, si ha per quoziente $\frac{p}{2}$; ecco la seconda parte della radice. Elevando al quadrato il binomio $\left(x + \frac{p}{2}\right)$, si ottengono dapprima i due termini x^2 e px; si ha poi, per quadrato della seconda parte, la quantità $\frac{p^2}{4}$.

Nel caso che sia per l'appunto $q = \frac{p^2}{4}$, l'equazione (1) si può scrivere nel modo seguente:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Quest'equazione è equivalente all'altra:

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

perchè soltanto lo *zero*, elevato a potenza, dà *zero*. Pertanto, quando è $q = \frac{p^2}{4}$, è:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Per il caso che non sia $q = \frac{p^2}{4}$, si aggiunga ai

(*) Qui si tratta naturalmente d'una operazione del calcolo letterale, di quella che serve a trovare (quando ci sia) l'espressione razionale, che, elevata alla seconda potenza, riproduce un'espressione data. Non abbiamo considerato preventivamente questa operazione, perchè, per l'unico caso in cui fa d'uopo usarla in questo corso, si rimedia facilmente al difetto.

due membri dell'equazione (1) la quantità $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$. Risulta l'equazione equivalente [163]:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

che si può scrivere:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \qquad (2)$$

Codesta equazione dice che il valore di x dev'esser tale che, aggiungendogli $\frac{p}{2}$, ed elevando la somma al quadrato, si ottenga la quantità $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$. Qui bisogna distinguere due casi.

Quando il secondo membro dell'equazione (2) è negativo, l'equazione non ha soluzioni; e infatti, qual valore si voglia provare per x, il calcolo indicato nel primo membro non può condurre a un risultato negativo. Per questo caso adunque possiamo dire che la trasformazione dell'equazione (1) nella (2) ha reso evidente che l'equazione (1) non ha soluzioni; e così per questo caso la questione è risoluta.

Supponiamo infine che $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ sia quantità positiva. In questo caso esistono due quantità, eguali numericamente e opposte di segno, che, elevate alla seconda potenza, danno per risultato il secondo membro. Il valor numerico di codeste quantità si rappresenta col simbolo $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, e vien trovato, ne' casi particolari, con l'operazione aritmetica che si chiama estrazione di radice quadrata. Così possiamo dire che le soluzioni dell'equazione (2), epperò anche le soluzioni dell'equazione (1), sono quelle delle due equazioni:

$$x+\frac{p}{2}=+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Queste equazioni di primo grado danno infine:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ed è facile accertare che entrambi questi valori sodisfanno veramente l'equazione data.

364. L'equazione:

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

nel caso che p e q siano tali quantità, per cui l'espressione $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ abbia valore positivo, ha dunque due soluzioni. Scrivendole unitamente, nel modo che segue, si ottiene l'eguaglianza:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{3}$$

che si dice formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado, ridotte alla forma (1), appunto perchè indica, per il caso in cui $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ è quantità positiva, con quali operazioni da p e q si ricavano le radici dell'equazione.

L'ultima formula vale però anche per il caso in cui è $\frac{p^2}{4} = q$, giacchè in questa ipotesi, essendo nullo il radicando $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$, e quindi nulle anche le radici dello stesso, essa si riduce alla:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

E questa è appunto, come abbiamo veduto, la radice dell'equazione (1) nel caso in discorso.

La formula (3) può ritenersi appropriata anche al caso in cui la quantità $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ è negativa, e nel quale l'equazione (1) non ha radici. In tal caso infatti il simbolo $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, che si trova nella formula (3), non ha nessun significato, e in tal guisa la formula stessa avverte che l'equazione non ha soluzioni.

Si noti infine che la formula vale anche quando sia $p = 0$, oppure $q = 0$.

Pertanto, senza che sia mestieri distinguere caso da caso, si può dire che:

365. Le soluzioni d'una equazione di secondo grado ridotta alla forma:

$$x^2 + px + q = 0$$

sono date in ogni caso dalla formula:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ossia, in linguaggio ordinario, :

Se un' equazione di secondo grado è ridotta alla forma $x^2 + px + q = 0$, *l' incognita è uguale alla metà del coefficiente del secondo termine, preso con segno cambiato, più o meno la radice quadrata del quadrato della detta metà diminuito del termine noto.*

366. Abbiamo veduto che l'equazione di secondo grado $x^2 + px + q = 0$ ha soluzioni, purchè $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ non sia quantità negativa. Ora, volendo tornare su questo argomento, cominceremo a notare che il primo termine del binomio $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$, perchè è un quadrato, è in ogni caso positivo. Il secondo termine è il termine noto dell' equazione, preso però con segno cambiato. Così, ogni volta che questo termine è negativo, anche il secondo termine del binomio $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ è positivo, e l'equazione ha certamente soluzioni. Quando nell'equazione $x^2 + px + q = 0$ il terzo termine è positivo ed è minore di $\frac{p^2}{4}$, in tal caso l'espressione $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ ha ancora valore positivo, e l'equazione ha ancora due radici.

Quando è per l'appunto $q = \frac{p^2}{4}$, allora $\left(\frac{p^2}{p} - q \right)$ è uguale a *zero*, e l'equazione ha l'unica soluzione $-\frac{p}{2}$. Si suol dire che in questo caso l'equazione ha due radici eguali.

Quando infine q è maggiore di $\frac{p^2}{4}$, l'equazione non ha soluzioni.

Così, riassumendo, possiamo dire che:

Affinchè un' equazione di secondo grado, ridotta alla forma:

$$x^2 + px + q = 0,$$

abbia radici, è necessario e sufficiente che il termine noto non superi il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine. (*).

367. Per risolvere l'equazione di secondo grado si può tenere un altro metodo. Per varietà questa volta considereremo l'equazione generale di secondo grado sotto la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Poniamo:

$$x = y + z, \tag{2}$$

dove y e z rappresentano due nuove incognite. Ad una di queste, ad es. alla z, si può manifestamente attribuire un valore ad arbitrio, perchè esiste poi sempre un valore conveniente di y, per cui la somma riesca eguale ad x (il cui valore è incognito, ma non indeterminato). Attribuiremo alla z un valore, in processo di calcolo, quando sarà reso manifesto qual sia il valore opportuno, affinchè la y si possa poi determinare facilmente.

La somma $(y + z)$, dappoichè dev' essere uguale

(*) Se il termine noto è negativo, la condizione è sodisfatta [6] qualunque sia il valor numerico di q.

ad x, deve intanto verificare l'equazione (1). Sostituendo, otteniamo:

$$a(y+z)^2 + b(y+z) + c = 0,$$

ossia:

$$ay^2 + 2ayz + az^2 + by + bz + c = 0,$$

od anche, ordinando rispetto ad y,:

$$ay^2 + (2az + b)y + (az^2 + bz + c) = 0. \quad (3)$$

Ora è manifesto che, ove si attribuisca a z tal valore, per cui risulti:

$$2az + b = 0,$$

cioè il valore:

$$z = -\frac{b}{2a}, \quad (4)$$

l'equazione (3) diventa un'equazione in y di secondo grado, ma *pura*, e che si risolve senza difficoltà. Ponendo adunque nella (3) per z il valore $-\frac{b}{2a}$, risulta:

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

dalla quale si ha:

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

e quindi infine:

$$y = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Infine, sostituendo nella (2) ad y e z i loro valori, si ottiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (5)$$

E facilmente si riconosce che questi due valori di x sodisfanno veramente l'equazione (1).

368. L'osservazione della (5), che si deve chiamare formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado ridotte alla forma $ax^2 + bx + c = 0$, mostra che, se $(b^2 - 4ac)$ è quantità negativa, l'equazione non ha soluzioni; che ne ha due, quando $(b^2 - 4ac)$ è quantità positiva; e che le due radici si confondono nell'unica $\frac{-b}{2a}$, quando è $b^2 - 4ac = 0$.

369. La formula di risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si può ricavare da quella dell'equazione $x^2 + px + q = 0$. Basta porre in quest'ultima formula $\frac{b}{a}$ in luogo di p, e $\frac{c}{a}$ invece di q.

Esempi.

370. Es. 1°. Sia da risolvere l'equazione:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Poichè essa ha già la forma dell'equazione generale:

$$x^2 + px + q = 0,$$

possiamo applicare immediatamente la relativa formula di risoluzione, sostituendo -10 in luogo di p, e 21 in luogo di q. Così si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 21} \\ &= 5 \pm \sqrt{25 - 21} \\ &= 5 \pm 2. \end{aligned}$$

Quindi infine $x_1 = 7$ ed $x_2 = 3$.

Facilmente si riconosce che i valori 7 e 3 sodisfanno ambidue l'equazione proposta.

Es. 2°. Sia da risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

Moltiplicando i due membri per $4(x^2 - 1)$, risulta l'equazione:

$$2(x + 1) + 12 = x^2 - 1.$$

Raccogliendo tutti i termini in un membro, e riducendo, si ottiene:

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Ora che l'equazione è ridotta alla forma:

$$x^2 + px + q = 0,$$

si applica la formula di risoluzione relativa a questa forma, e si trova:

$$x_1 = 5 \quad \text{ed} \quad x_2 = -3.$$

Poichè, per risolvere l'equazione data, se ne sono moltiplicati i due membri per un'espressione contenente l'incognita, in questo caso la verificazione dei valori trovati è necessaria.

Es. 3°. Risolvendo l'equazione:

$$x^2 - 10x + 25 = 0,$$

si trova:

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 25},$$

ossia: $x_1 = 5$ ed $x_2 = 5.$

In questo caso le radici sono eguali tra loro.

Es. 4°. Applicando la solita formula all'equazione:

$$x^2 - 10x + 36 = 0,$$

si trova:

$$x = 5 \pm \sqrt{-11},$$

risultato, che vale a rendere manifesto che l'equazione data non ammette soluzioni.

Es. 5°. Se sia data da risolvere l'equazione:

$$3x^2 + 7x + 4 = 0,$$

si può cominciare col dividere i due membri per 3, per ridurla alla forma $x^2 + px + q = 0$. Ma si può ricorrere alla formula di risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Seguendo codesta formula, ponendo $a = 3$, $b = 7$ e $c = 4$, si trova:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6}.$$

Quindi $\quad x_1 = -1 \quad$ ed $\quad x_2 = -\frac{4}{3}$.

Es. 6°. Sia da risolvere l'equazione:

$$x + \frac{1}{x} = m.$$

Riducendola alla forma generale, si ottiene:

$$x^2 - mx + 1 = 0,$$

epperò:

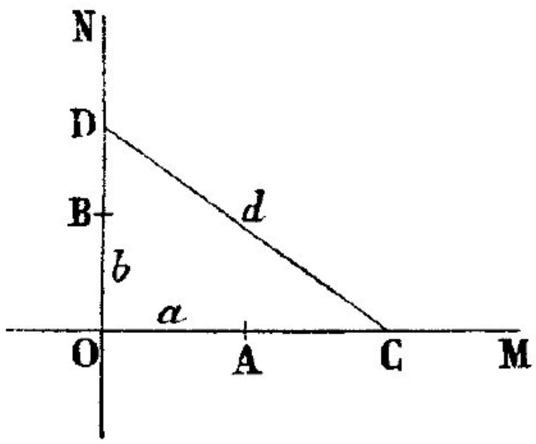
$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1},$$

$$= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}.$$

Così si riconosce che l'equazione, se m ha valor numerico minore di 2, non ha radici; le radici sono eguali ed eguali ad 1, se è $m = 2$; e vi sono due radici disuguali, ogni volta che m è numericamente maggiore di 2.

Oss. Così, poichè x ed $\frac{1}{x}$ sono due valori reciproci, possiamo dire che 2 è il più piccolo valor numerico che si può trovare sommando due numeri reciproci.

Es. 7°. Probl. *Due punti scorrono di moto uniforme con velocità note lungo due rette perpendicolari tra loro, e sono note le posizioni dei due mobili in un dato istante. Si domanda in che istante i due punti avranno tra loro una distanza data.*



Risol. Siano $O\,M$, $O\,N$ le due rette lungo le quali scorrono i due mobili, ed A e B i punti dove questi si trovano in un istante noto. Supponiamo di riferire i punti delle due rette al punto d'incontro O, e di ritenere come positiva la distanza da O di un punto della OM, se questo punto cade alla destra di O; e come positiva la distanza da O di un punto della ON, quando questo punto si trovi superiormente ad O. Le distanze note dei punti A e B dal punto O, siano positive o negative, indichiamole rispettivamente con le lettere a e b. Indichiamo con v e con u le velocità rispettive dei due mobili, gli spazi cioè che i mobili percorrono rispettivamente sulla OM e sulla ON nell' unità di tempo (in un minuto secondo). Se il primo mobile si muove da sinistra verso destra, v è quantità positiva; altrimenti negativa. Se l' altro mobile scorre dal basso all' alto, u è positiva; altrimenti rappresenta una quantità negativa. Indichiamo con x la durata di tempo, che intercede tra l' istante del passaggio dei mobili per i punti A e B e l' istante in cui i mobili hanno la distanza data, che indicheremo con la lettera d. Se il secondo istante è posteriore a quello del passaggio dei mobili per i punti A e B, il tempo x è positivo; altrimenti è negativo.

Per intavolare il problema, affine cioè di scrivere la relazione tra l' incognita e i dati della questione, dobbiamo operare come se anche il valore di x fosse noto, e si trattasse di accertare che esso sodisfa veramente alle condizioni del problema.

Bisogna dire perciò: nel tempo x il primo mobile percorre lo spazio vx, epperò la distanza del punto C, dove si trova il mobile nell' istante domandato, è precisamente $(a + vx)$. Non occorrono distinzioni. Così $(b + ux)$ è la distanza da O, del punto D, dove si trova l' altro mobile nell' istante or ora accennato. E perchè $(a + vx)$ e $(b + ux)$ sono i valori dei cateti di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa ha la lunghezza d, per il teorema di PITAGORA, ha luogo l'eguaglianza:

$$(a + vx)^2 + (b + ux)^2 = d^2.$$

Ecco intavolato il problema; ora resta da risolvere l'equazione.

Sviluppando i quadrati, si ha:

$$a^2 + 2avx + v^2x^2 + b^2 + 2bux + u^2x^2 = d^2,$$

epperò:

$$(v^2 + u^2)x^2 + 2(av + bu)x + (a^2 + b^2 - d^2) = 0.$$

Ora, applicando la formula di risoluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, si ottiene:

$$x = \frac{-2(av + bu) \pm \sqrt{4(av + bu)^2 - 4(v^2 + u^2)(a^2 + b^2 - d^2)}}{2(v^2 + u^2)}.$$

Sopprimendo il fattore 2 comune al numeratore e al denominatore, effettuando poi le operazioni indicate sotto il segno di radice, si ottiene:

$$x = \frac{-(av + bu) \pm \sqrt{d^2(v^2 + u^2) - (au - bv)^2}}{v^2 + u^2}.$$

Supponendo, ad es., $a = 1$, $b = -8$, $v = 3$, $u = 4$, $d = 20$, sostituendo nell'ultima formula, ed effettuando le operazioni, si trova $x = 5$ ed $x = -\frac{67}{25}$. Ciò significa che la distanza tra i mobili è uguale a 20 in due istanti e per l'appunto una volta $\frac{67}{25}$ di secondo *anteriormente*, e l'altra 5 secondi *posteriormente* all'istante del passaggio dei mobili per i punti dati.

Osservando la formula di risoluzione del problema, si scorge che il problema è impossibile, cioè che non ammette soluzioni, se le quantità date a, b, u, v, d siano tali che l'espressione:

$$d^2(v^2 + u^2) - (au - bv)^2$$

riesca negativa. Il problema ammette una soluzione, quando l'ultima espressione è nulla; ne ammette due quando essa ha valore positivo.

Una volta che siano attribuiti ad a, b, u, v determinati valori, calcolando il valore di d, per il quale riesce:

$$d^2(v^2 + u^2) - (au - bv)^2 = 0,$$

si ottiene il più piccolo valore che si può attribuire a d, affinchè il problema ammetta soluzioni, si ottien dunque la più piccola distanza a cui vengono a trovarsi i due punti nel loro movimento.

Calcolato il tempo, sostituendone il valore nelle due espressioni:

$$a + vx \quad \text{e} \quad b + ux,$$

si ottengono le distanze dei mobili dal punto O nell'istante in cui i mobili hanno l'uno dall'altro la distanza data d. Facendo i quadrati dei risultati, e sommando, si deve ottenere d^2. In ciò sta la verificazione dei valori di x.

Quando sia $d = 0$, sia richiesto cioè in che istante i mobili s'incontrano nel punto O, affinchè il problema abbia soluzioni, ossia perchè l'incontro abbia luogo veramente, bisogna che le due equazioni:

$$a + vx = 0, \qquad b + ux = 0$$

ammettano la stessa soluzione. Sappiamo infatti che i primi membri esprimono le distanze da O dei due mobili nell'istante in cui i mobili stessi hanno la distanza data; e nel caso presente le dette distanze sono nulle. Le due equazioni sussistono insieme, quando sia:

$$\frac{-a}{v} = \frac{-b}{u}, \quad \text{ossia quando è} \quad \frac{v}{u} = \frac{a}{b}.$$

Così si può dire che i due mobili passano nello stesso istante per il punto di concorso delle rette, se il rapporto delle distanze, che essi hanno da questo punto nell'istante contemplato, è uguale al rapporto delle rispettive velocità.

Alla stessa conchiusione si perviene considerando la formula di risoluzione generale. Si trova che, quando è $d = 0$, perchè ci siano soluzioni, è necessario che sia:

$$a u - b v = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{v}{u} = \frac{a}{b}.$$

In tal caso resta:

$$x = -\frac{a v + b u}{v^2 + u^2},$$

e posto in luogo di u il valore $\frac{v b}{a}$, esibito dalla precedente proporzione, si ottiene:

$$x = -\frac{a}{v},$$

che è appunto il valore che verifica la prima delle due equazioni di condizione considerate superiormente.

Relazione tra i segni delle radici e i segni del coefficiente del secondo termine e del termine noto.

371. La formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado della forma:

$$x^2 + px + q = 0$$

indica come, mediante il coefficiente del secondo termine e il termine noto, si calcolino le radici dell'equazione. I calcoli non sono molto complicati, epperò è facile riconoscere le relazioni che passano tra i segni delle radici e quelli dei coefficienti dell'equazione.

Prendiamo adunque la formula:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

e supponiamo che $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ sia quantità positiva.

Cominciamo a supporre che il termine noto sia positivo. In questo caso $-q$ è quantità negativa, e il radicando $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ è minore di $\frac{p^2}{4}$; epperò anche il valore assoluto di $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ è minore del valore assoluto di $\frac{p}{2}$. Per conseguenza [10] il valore del binomio:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ha il segno stesso che il suo primo termine, e ciò, sia che si prenda il secondo termine con un segno, oppure con l'altro.

E perchè il primo termine del binomio ha segno opposto a quello del coefficiente del secondo termine dell'equazione, si può conchiudere intanto che:

Quando il termine noto è positivo, le radici hanno egual segno, e per l'appunto segno opposto a quello del coefficiente del secondo termine.

Supponiamo, in secondo luogo, che il termine noto sia negativo. In questo caso $-q$ è quantità positiva, e il radicando $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ è maggiore di $\frac{p^2}{4}$; epperò anche il valore assoluto di $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ è maggiore del valore assoluto di $\frac{p}{2}$. Per conseguenza il valore del binomio:

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ha [10] quel segno con cui si prende il secondo termine. Adunque, quando q è negativo, le radici hanno segni contrari.

Ma si può dire di più; cioè si può dire quale delle due radici sia numericamente maggiore. Infatti, quando p è positivo, allora $-\frac{p}{2}$ è quantità negativa, epperò coi valori assoluti dei due termini del binomio si deve [10] eseguire una sottrazione per ottenere il valore assoluto della prima radice, un'addizione [10] invece per ottenere quell'altra. Così in questo caso è numericamente maggiore la radice negativa.

Egualmente si riconosce che, quando p è negativo, allora è maggiore, anche numericamente, la radice positiva. Così resta dimostrato che:

Quando il termine noto è negativo, le radici hanno segni contrari, ed è numericamente maggiore la radice che ha segno opposto a quello del coefficiente del secondo termine.

Proprietà delle radici d'una equazione di secondo grado.

372. Sappiamo che, quando q non superi $\frac{p^2}{4}$, l'equazione:

$$x^2 + px + q = 0$$

è sodisfatta dai valori seguenti:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$\beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Sommando queste uguaglianze e riducendo, si ottiene:

$$\alpha + \beta = -p.$$

Dunque:

La somma delle radici d'una equazione di secondo grado (ridotta alla forma $x^2 + px + q = 0$*) è uguale al coefficiente del secondo termine, preso con segno cambiato.*

Moltiplichiamo ora le due precedenti eguaglianze tra di loro. Poichè i secondi membri sono due binomi, essi danno quattro prodotti parziali. Ma i due, che provengono dalle moltiplicazioni in croce, si distruggono; resta perciò:

$$\alpha\,\beta = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2$$

$$» = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Adunque:

Il prodotto delle radici d'una equazione di secondo grado (ridotta alla forma $x^2 + px + q = 0$*) è uguale al termine noto.*

373. Dalle proprietà delle radici, or ora dimostrate, si possono dedurre le relazioni tra i segni delle radici e i segni dei coefficienti dell'equazione, relazioni che abbiamo già trovate, considerando la formula di risoluzione dell'equazione di secondo grado.

q	p	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$	α	β
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Infatti, cominciando a supporre che q sia positivo, diremo: poichè il prodotto delle due radici dev'essere uguale, in valore e *segno*, al termine noto, le radici in questo caso devono [23] avere segni eguali. E perchè la somma delle radici è uguale al coefficiente del secondo termine preso con segno cambiato, se p è positivo, le radici sono [10] negative; e quando p è negativo, allora le radici sono [10] entrambe positive.

Supponiamo, in secondo luogo, che il termine noto sia negativo. Poichè il prodotto delle radici dev'essere uguale, in valore e *segno*, al termine noto, in questo caso le radici devono [23] avere segni contrari. Badando poi al coefficiente del secondo termine, si può decidere se sia numericamente maggiore la radice positiva o la radice negativa. Infatti, quando il coefficiente del secondo termine è positivo, la somma delle radici è negativa, epperò [10] in tal caso deve essere numericamente maggiore la radice negativa; se p è negativo, allora è [10] più grande, anche numericamente, la radice positiva. (*).

374. Proponiamoci ora il problema di *trovare due numeri, de' quali si conoscano la somma ed il prodotto.*

Risol. Indicando con x ed y i due numeri domandati, con s la loro somma e con p il prodotto, il problema si riduce a risolvere il sistema d'equazioni:

$$x + y = s, \qquad xy = p.$$

Per eliminare un'incognita, ad es. la y, risolvo la prima equazione rispetto ad y e sostituisco il valore nella seconda. Così si ottiene l'equazione:

$$x(s - x) = p$$

ossia:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Se questa equazione ha soluzioni, essa dà due valori di x; a ciascuno dei quali corrisponde poi un valore di y, che si trova ricorrendo all'una o all'altra

(*) Ma non si deve credere che queste conchiusioni ora siano state trovate per via diversa da quella tenuta nel § 371. Infatti le relazioni tra α, β, p e q, espresse nel § 372, non sono che una semplice trasformazione di quelle significate nella formula di risoluzione dell'equazione.

delle equazioni date. Ma poichè [372] i due valori di x sommati insieme danno s e moltiplicati tra loro danno p, le due soluzioni non differiscono l' una dall' altra. Dimodochè infine si conchiude che l'unica soluzione del problema (se ne ammette) è costituita dalle radici dell' equazione di secondo grado che ha per coefficiente del secondo termine la somma data, presa con segno mutato, e per termine noto il prodotto dato. (*).

375. Le ultime nostre considerazioni ci permettono di conchiudere che condizione necessaria [372] e sufficiente [374], perchè due numeri siano radici di una equazione di secondo grado, si è che la loro somma sia eguale al coefficiente del secondo termine preso col segno cambiato, e il prodotto sia eguale al termine noto. Conseguentemente si può sempre costruire una equazione di secondo grado, che abbia per radici due numeri dati. Sommandoli, e mutando il segno al risultato, si avrà il coefficiente del secondo termine; nel prodotto si avrà il termine noto.

Così, ad es., l' equazione, le cui radici sono:

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{7},$$
$$\beta = \sqrt{2} - \sqrt{7},$$

è la seguente:

$$x^2 - 2\sqrt{2}\, x - 5 = 0 \cdot$$

(*) Ricorrendo immediatamente, per suggerimento delle proprietà [372] delle radici, all'equazione $x^2 - sx + p = 0$, si poteva poi sospettare che la soluzione risultante fosse *una* delle possibili. Infatti, per questo solo che le radici hanno quelle proprietà, non si può asserire che con nessuna altra coppia di quantità non si possa trovare la stessa somma e lo stesso prodotto.

Decomposizione del primo membro d'una equazione di secondo grado in fattori di primo grado.

376. Indicando con α e β le radici dell'equazione:

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$

sappiamo [372] essere:

$$\alpha + \beta = -p$$
$$\alpha\beta = q.$$

Sostituendo nell'equazione (1) a p e q codeste loro espressioni, si ha:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0,$$

ossia: $$x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0.$$

Raccogliendo dai due primi termini il fattore comune x, e dagli altri due il fattor comune $-\beta$, si ottiene:

$$x(x-\alpha) - \beta(x-\alpha) = 0.$$

Ed ora, raccogliendo il binomio $(x - \alpha)$, risulta:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0,$$

donde si conchiude che:

Il primo membro d'una equazione di secondo grado della forma $x^2 + px + q = 0$, *quando l'equazione ammette radici, è il prodotto di due fattori di primo grado, ciascuno dei quali si ottiene sottraendo dalla lettera* x *una delle radici.*

377. Oss. Quando un'equazione di secondo grado abbia l'ultima forma che abbiamo trovata, in tal caso è manifesto che α e β sono radici. Infatti, attribuendo alla x o l'uno o l'altro di questi valori, il primo membro si annulla. Riesce inoltre manifesto che l'equazione non ammette altre soluzioni.

Quando le radici dell'equazione sono eguali, allora i due fattori di primo grado, in cui si può decomporre il primo membro, sono eguali tra loro. In questo caso, essendo $\frac{p^2}{4} = q$, il primo membro ha la forma:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2.$$

Quando l'equazione $x^2 + px + q = 0$ non ammette radici, la decomposizione del primo membro in fattori di primo grado è impossibile; chè altrimenti, prendendo uno dei fattori, eguagliandolo a *zero*, si otterrebbe un'equazione di primo grado, la cui radice [181], poichè annulla il fattore, annullerebbe anche il primo membro dell'equazione data; la quale avrebbe così una radice, e ciò contro l'ipotesi.

Decomposizione di un trinomio di secondo grado in fattori di primo grado.

378. Si dice trinomio di secondo grado un'espressione quale la seguente:

$$ax^2 + bx + c,$$

dove x rappresenta un valore indeterminato arbitrario. Questo trinomio si può mettere sotto la forma:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

oppure, rappresentando $\frac{b}{a}$ con p, e $\frac{c}{a}$ con q, sotto la forma:

$$a(x^2 + px + q).$$

Si chiama *radice* di un trinomio quel valore della indeterminata, per cui il trinomio si annulla. Se il nostro trinomio ha radici, esse sono le radici del secondo fattore, quelle cioè dell'equazione:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Se questa equazione ammette soluzioni, e queste siano α e β, in tal caso il primo membro si può mettere sotto la forma $(x - \alpha)(x - \beta)$, epperò, in tale ipotesi, si ha:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Ma quando la quantità q superi $\frac{p^2}{4}$, in tal caso l'equazione:

$$x^2 + px + q = 0$$

non ammette soluzioni, e allora il suo primo membro [377] e quindi neanche il trinomio:

$$ax^2 + bx + c$$

non si possono decomporre in fattori di primo grado.

Equazioni che si risolvono come quelle di secondo grado.

379. Si può talvolta far dipendere la risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo da quella di equazioni di secondo grado, e ciò mediante opportuni artifici. Il più usato consiste nel prendere momentaneamente per incognita un' espressione contenente la incognita che si deve determinare. Daremo qualche esempio.

380. Quando un' equazione non contiene che due potenze dell' incognita, e l' esponente dell' una è doppio dell' esponente dell' altra, l' equazione si può ridurre alla forma:

$$x^{2m} + px^m + q = 0. \qquad (1)$$

Prendendo per incognita x^m, questa equazione *trinomia* diventa di secondo grado. Infatti, ponendo $x^m = y$, si ha $x^{2m} = y^2$, e così l' equazione (1) diventa:

$$y^2 + py + q = 0,$$

dalla quale si ha y, cioè:

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

e da ultimo:

$$x = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

381. Oss. Quando sia $m = 2$, l'equazione (1) è di quarto grado, e la formula di risoluzione mostra che essa può avere quattro radici, a due a due uguali e di segni contrari. Prima condizione per l'esistenza di radici si è che $\left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ non sia quantità negativa. Poi, se i valori di y sono ambidue positivi, l'equazione data ha quattro radici; se uno solo dei valori di y è positivo, allora le radici si riducono a due; quando infine le radici dell'equazione di secondo grado ausiliaria sono entrambe negative, in tal caso l'equazione trinomia non ammette nessuna soluzione.

382. Es. Sia da risolvere l'equazione:

$$x^2 + 5 = 8x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$$

Scrivendola nel modo seguente:

$$(x^2 - 8x + 40) - 35 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40},$$

si riconosce l'opportunità di prendere per incognita il radicale. Posto:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 40} = y,$$

essendo allora:

$$x^2 - 8x + 40 = y^2,$$

l'equazione proposta diventa:

$$y^2 - 35 = 2y.$$

Risolvendo questa equazione, si trova:

$$y_1 = 7, \qquad y_2 = -5.$$

L'equazione proposta si scinde così nelle due equazioni:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 40} = 7,$$
$$\sqrt{x^2 - 8x - 40} = -5,$$

le quali porgono:

$$x_1 = 9, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 5, \qquad x_4 = 3.$$

Le due ultime soluzioni non verificano l'equazione proposta, epperò sono da rigettare come estranee.

Esempi di equazioni simultanee di grado superiore al primo.

383. I metodi, che abbiamo usato per risolvere sistemi d'equazioni di primo grado a più incognite, si possono adoperare anche nel caso che in parte o anche tutte le equazioni del sistema siano di grado superiore al primo; ma d'ordinario l'equazione, risultante dall'eliminazione di tutte le incognite fuori di una, richiede, per esser risoluta, cognizioni superiori a quelle che abbiamo acquistate finora. Ci restringeremo pertanto ad alcuni esempi semplicissimi.

384. Consideriamo un sistema di due equazioni a due incognite, una di primo grado, l'altra di secondo. In generale un sistema così fatto si può rappresentare nel modo seguente:

$$ax + by = c, \tag{1}$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{2}$$

Dalla prima intanto si ricava:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Sostituendo questo valore di x nella (2), risulta un'equazione di secondo grado in y, da cui si ricavano (se l'equazione ha radici) due valori per questa incognita;

a ciascuno dei quali corrisponderà poi un valore di x dato dalla (3).

385. In casi particolari giovano artifici, che si imparano con la pratica. Ne vedremo qualcuno negli esempi seguenti.

Es. Sia da risolvere il sistema:

$$x + y = 11,$$
$$x^2 + y^2 = 73.$$

Basterebbe sostituire [384] nella seconda equazione il valore di una delle incognite ricavato dalla prima; ma si può operare come segue. Elevando al quadrato i due membri della prima equazione, si ha:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 121.$$

Sostituendo ad $(x^2 + y^2)$ il valore indicato dalla seconda delle equazioni date, si ottiene:

$$2xy + 73 = 121,$$

da cui

$$xy = 24.$$

Ora si conosce, oltre della somma, anche il prodotto delle incognite; il problema è così ricondotto ad uno già risoluto. [374].

386. Es. Sia il sistema:

$$x^2 + y^2 = 169,$$
$$xy = 60.$$

Sostituendo nella prima delle equazioni il valore di una delle incognite ricavato dalla seconda, risulta un'equazione di quarto grado, che sappiamo [380] risolvere.

Più elegante è il processo che segue. Aggiungendo alla prima equazione la seconda, dopo di averne moltiplicati i due membri per 2, si ha:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 289,$$

ossia

$$(x + y)^2 = 17^2$$

ed

$$x + y = \pm 17.$$

Così s'è trovata la somma delle incognite; il prodotto è dato, epperò il problema è ricondotto ad uno già risoluto. [374].

387. Es. Sia da risolvere il sistema:

$$x^2 - y^2 = 7,$$
$$x\,y = 60.$$

Elevando al quadrato la seconda, e prendendo per incognite x^2 e $-y^2$, basterà [374] poi risolvere l'equazione:

$$z^2 - 7z - 3600 = 0.$$

Esercizi.

Si risolvano le seguenti equazioni.

539. $(3x-5)(2x-5) = (x+3)(x-1)$.

540 $(5x-3)^2 - 7 = 44x + 5$.

541 $3(x-5)(2x-7)(8x-23) = (4x-9)(3x-13)(4x-19)$.

542. $\dfrac{5x^2}{7} + \dfrac{7x}{5} + \dfrac{73}{140} = 0$.

543. $\dfrac{5x(x+1)}{21} - \dfrac{2x^2+x-1}{7} = \dfrac{4(x+1)}{35}$.

544. $\dfrac{21x^3-16}{3x^2-4} - 4x = 5 + 3x$.

545. $\dfrac{7x+10}{x-2} = \dfrac{5x}{12} + \dfrac{35}{6}$.

546. $\dfrac{12}{x-5} + \dfrac{4}{x+5} = 9 + \dfrac{8(2x-3)}{x^2-25}$.

547. $\dfrac{12x^3 - 11x^2 + 10x - 78}{8x^2 - 7x + 6} = \dfrac{3x-1}{2}$.

548. $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2}{x-3}$.

549. $\dfrac{21}{x} - \dfrac{10}{x-2} - \dfrac{4}{x-3} = 0$.

550. $\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{3}{x^2-1} = \dfrac{1}{4}$.

551. $\frac{x}{15} + \frac{40}{3(10-x)} = \frac{3(10+x)}{95}$.

552. $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} = \frac{9+x}{9-x} - \frac{9-x}{9+x}$.

553. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$.

554. $(m-n)x^2 - nx = m$.

555. $adx - acx^2 = bcx - bd$.

556. $x^2 - 2mx = (n-p+m)(n-p-m)$.

557. $(a^2+1)x - ax^2 = a$.

558. $abx^2 + ab = (a^2+b^2)x$.

559. $a^2+b^2+x^2 = 2ab + 2ax + 2bx$.

560. $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2$.

561. $mqx^2 - mnx = np - pqx$.

562. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{b}{x} + \frac{x}{b}$.

563. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$.

564. $\frac{m}{x^2} = \frac{n}{x^2 - 2ax + a^2}$.

565. $\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{x+2b}{a+b} = 2$.

566. $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} - 2 = \frac{4a^2}{2a+1}$.

567. $abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$.

568. $x^2 + \frac{a-b}{ab^2} = \frac{14a^2-5b(a+2b)}{18a^2b^2} + \frac{(2a-3b)x}{2ab}$.

569. $abcy^2 - \frac{7a^2b}{c^2} - \frac{(a-3b)by}{c} + y^2 + \frac{ab(8a+b)}{c^2} =$

$= \frac{b(3b+1)y}{c} + \frac{(a+abc^2y)y}{c}$.

570. $\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+72}$.

571. $\sqrt{x+4} = \sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+6}$.

572. $\sqrt{1+x+x^2} = a - \sqrt{1-x+x^2}$.

573. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}} = 1$.

574. $\dfrac{x+a+2b}{x+a-2b} = \dfrac{b-2a+2x}{b+2a-2x}$.

575. $\dfrac{(x+a)^2+(x-b)^2}{(x+a)^2-(x-b)^2} = \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$.

576. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \dfrac{a}{x}$.

577. $\dfrac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{c}{x}$.

578. $(a+5b+x)(5a+b+x) = 3(a+b+x)^2$.

579. $(a+5b+x)(5a+b+3x) = 4(a+2b+x)^2$.

580. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b) = 0$.

581. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1) = (3b^2+a^2)(x^2+x+1)$.

582. $\sqrt{\dfrac{a+x}{b+x}} + \sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}} = 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

583. $\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}} = \sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$.

584. $\dfrac{x}{63-x} + \dfrac{63-x}{x} = 2{,}05$.

(Si badi che il primo membro è qui la somma di due quantità inverse, il cui prodotto è dunque uguale all'unità. [374]).

585. $\dfrac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}} + \dfrac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2}$.

586. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} = a$.

587. $\dfrac{(a-x)^2+(b-x)^2}{(a-x)(b-x)} = \dfrac{5}{2}$.

(Il primo membro si può decomporre in due quantità inverse l'una dell'altra. Si potrebbe invece moltiplicare per 2 i denominatori e poi, componendo, ecc.).

588. $\dfrac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)}=\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$.

589 $\left(\dfrac{a-x}{x-b}\right)^2=8\left(\dfrac{a-x}{x-b}\right)-15.$

(Qui è manifesta l'opportunità di prendere per incognita ausiliaria la frazione tra parentesi).

590. $x+ab=(a+b)\sqrt{x}+2(a-b)^2.$

591. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6.$

592. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=4{,}75.$

593. $x^2(x-1)^2-x(x-1)=132.$

594. $(x^2-5)^2+(x^2-1)^2=40.$

595. $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1.$

596. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1.$

597. $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0.$

598. $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=20.$

599. $\dfrac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1.$

600. $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

601. $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24.$

602. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0.$

603. $\sqrt{x^2-8x+31}+(x-4)^2=5.$

604. $2x^2+3\sqrt{x^2-x+1}=2x+3.$

605. $ax^2+4\sqrt{ax^2+bx}=21-bx.$

606. $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$

Si faccia $\sqrt[m]{\dfrac{1+x}{1-x}} = y$.

607. $\sqrt[pq]{x^{p+q}} = \dfrac{2a}{4a^2+1}\left(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\right)$.

608. $2x = 5y + 3,$
$x^2 + xy = 20.$

609. $x^2 + 3y^2 = \dfrac{7}{9},$
$4x^2 + 2y^2 = 2.$

610. $x^2 + xy = 24,$
$y^2 + xy = 40.$

611. $x^2y + xy^2 = 30,$
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}.$

612. $x + y + \sqrt{x+y} = 12,$
$x^3 + y^3 = 728.$

613. $2(x+4)^2 - 5(y-7)^2 = 75,$
$7(x+4)^2 + 15(y-7)^2 = 1075.$

614. $x^2 + y^2 + x + y = 18,$
$xy = 6.$

615. $x + y = \dfrac{21}{8},$
$\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{35}{6}.$

616. $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{y^2} = 20,$
$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{y} = 6.$

617. $x + y + \sqrt{x+y} = 12.$
$x^3 + y^3 = 189.$

618. $x^2 + y^2 + 10(x+y) = 16,$
$xy - 8(x+y) = 0.$

619. $(x+y)(x^2+y^2) = 1400,$
$x^3 + y^3 = 728.$

620. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 6,$
$\sqrt{xy} = 5.$

621. $x\sqrt{y} + y = 40,$
$x^2y + y^2 = 1312.$

622. $x^2 - 2xy + 2y = 10,$
$x^2 + xy + y = 5.$

623. $x + y = xy = x^2 - y^2.$

624. $x^3 - y^3 = x^2 + y^2,$
$xy = x^2 - y^2.$

625. $x^2 + xy = 66,$
$xy - y^2 = 5.$

626. $2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17,$
$y^2 - x^2 = 16.$

627. $x^2 + xy - 6y^2 = 24,$
$x^2 + 3xy - 10y^2 = 32.$

628. $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{37}{13},$
$xy = 48.$

(Dalla prima, componendo successivamente tre volte, si ottiene il valore di $\dfrac{x}{y}$).

629. $x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y},$
$x^2 + y^2 = 34.$

630. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{61}{\sqrt{xy}} + 1,$
$\sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78$

631. $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 8,$
$3x - 2y + 5z = 23,$
$4x - 3y + 2z = 16.$

632. $x + y + z = 6,$
$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$
$3xy = 2z.$

633. $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2(x-y)},$
$xy = \dfrac{a^2 - b^2}{4(x-y)}.$

634. $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = a,$
$x^2 + y^2 = b.$

635. $\dfrac{x^3 - y^3}{x^2y - xy^2} = a,$
$x + y = b.$

636. $\sqrt{\dfrac{3x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{3x}} = 2,$
$xy - x - y = 54.$

637. $x^3 + y^3 = (a+b)(x-y),$
$x^2 - xy + y^2 = a - b.$

638. $(\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = (\sqrt{y})^{\frac{8}{3}},$
$(\sqrt{y})^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = (\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}.$

Problemi.

639. Si risolva l'equazione $x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$, sapendo che è sodisfatta da $x = 3$. [98].

640. Si scriva l'equazione di secondo grado, le cui radici sono eguali rispettivamente ai quadrati delle radici dell'equazione $x^2 + px + q = 0$.

641. Si scriva l'equazione, le cui radici sono reciproche di quelle dell'equazione $x^2 + px + q = 0$.

642. Si scriva l'equazione, le cui radici superano di m quelle dell'equazione $x^2 + px + q = 0$.

643. Si scriva l'equazione, le cui radici hanno rapporto eguale ad m con le radici dell'equazione $x^2 + px + q = 0$.

644. Si scriva l'equazione, le cui radici sono rispettivamente uguali alla somma e al prodotto delle radici dell'equazione $x^2 + px + q = 0$.

645. Si scriva l'equazione, le cui radici sono eguali, una al quadrato della differenza, l'altra alla somma dei quadrati delle radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

646. Quale relazione deve sussistere tra p e q, affinchè sia $\alpha = 2\beta$?

647. Quale relazione deve sussistere tra p e q, affinchè sia $\alpha = m\beta$?

648. Quale relazione ha luogo tra p e q, se è $5\alpha - 3\beta = 3$?

649. Quale relazione ha luogo tra p e q, se è $\alpha^2 + \beta^2 = m$? e quale, se è $\alpha^2 - \beta^2 = n$?

650. Essendo data l'equazione $x^2 - 8x + q = 0$, si determini q in modo che riesca $3\alpha - 4\beta = 3$.

651. Essendo data l'equazione $x^2 - 8x + q = 0$, si determini q per modo che riesca $\alpha^2 + \beta^2 = 40$.

652. Essendo data l'equazione $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, si determini a così che riesca $\alpha^2 + \beta^2 = 28$.

653. Essendo data l'equazione $x^2 - px + 6 = 0$, si determini p in modo che sia $\alpha = 24\beta$.

654. Data l'equazione $x^2 - px + 6 = 0$, si determini p in modo che sia $\alpha^2 + \beta^2 = 24$.

655. Qual valore convien dare ad m nell'equazione:
$$x^2 + 2(m-4)x + (m^2 + 6m + 3) = 0,$$
affinchè l'equazione abbia radici eguali?

656. Si trovi la relazione che deve esistere tra p, q, p', q', affinchè le due equazioni $x^2 + px + q = 0$ ed $x^2 + p'x + q' = 0$ abbiano una radice comune.

657. Ad alcuni poveri furono distribuite 110 lire; se a ciascun povero si fosse dato una lira di più, il numero delle lire date a ciascuno sarebbe stato eguale al numero dei poveri. Quanti erano i poveri?

658. Un tale comperò alquanti buoi e spese perciò 3000 lire. Se con la stessa somma avesse potuto comperare 3 buoi di più, ciascun bue gli sarebbe costato 50 lire di meno. Quanti erano i buoi?

659. Si trovi un numero di due cifre sapendo che, diviso per il prodotto delle cifre, esso dà per quoziente $^{16}/_3$, e che, diminuito di 9, esso diventa eguale al numero che si ottiene scrivendo le due cifre nell'ordine opposto.

660. Il quadrato del maggiore di tre numeri interi consecutivi è uguale alla somma dei quadrati degli altri due. Si trovino i tre numeri.

661. Dividendo la somma dei quadrati di due numeri per il primo, si ottiene 14 per quoziente e 4 per resto; dividendo invece la somma stessa per il secondo numero, si ottiene 10 per quoziente e 4 per resto. Si trovino i due numeri.

662. Facendo il quadrato dei $^3/_7$ dell'ora attuale, risulta l'ora che sarà da qui a due ore. Che ora è?

663. Una cisterna è alimentata da due condotti. Uno è capace di riempirla in 6 ore di meno che l'altro. Tutti e due insieme la riempiono in 4 ore. In quanto tempo ciascun condotto riempirebbe da sè solo la cisterna?

664. Due corrieri furono spediti ad un luogo lontano 90 kilometri. Il primo, perchè percorse ad ogni ora un kilometro di più che l'altro, impiegò nel tragitto un'ora di meno. Si trovino le velocità dei corrieri.

665. Si trovino tre numeri, che stiano tra loro come i numeri $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, e tali che la somma dei loro quadrati sia eguale a 10 309.

666. Un numero è composto di due cifre, e la cifra delle decine supera di 3 quella delle unità. Moltiplicando il numero per la somma delle sue cifre, si ottiene 814. Si trovi questo numero.

667. La somma di due numeri dispari consecutivi, la somma

dei loro quadrati e la differenza dei loro cubi danno in tutto 304. Si trovino i due numeri.

668. Un numero è il prodotto di tre numeri dispari consecutivi. Dividendo per ciascuno dei fattori e sommando i quozienti, si ottiene 239. Si trovi il numero.

669. Si divida 16 in due parti, per modo che, sommandone i cubi, i quadrati e la differenza delle parti, si ottenga 1356.

670. Si formi una proporzione continua, il cui primo termine sia 12, e tale che la somma dei quattro termini sia eguale a 27.

671. Le ruote minori d'una carrozza, quando questa percorre 120 metri, fanno 6 giri di più che le ruote posteriori. Se le periferie delle due ruote fossero rispettivamente un metro più lunghe, a percorrere 120 metri, le ruote minori dovrebbero fare 4 giri di più delle più grandi. Si dicano le periferie delle ruote.

672. Da un barile, che conteneva 360 litri di vino, fu estratto del vino e surrogata altrettanta acqua. Quindi fu estratto del miscuglio, e precisamente 84 litri di più che la prima volta, e rimessa altrettanta acqua. Dopo di queste due operazioni nel barile vi erano acqua e vino in quantità eguali. Si domanda quanti litri di vino siano stati spillati la prima volta.

673. Due viaggiatori A e B partono nello stesso istante da due luoghi C e D per recarsi il primo in D, il secondo in C. Al loro incontro, A riconosce d'aver fatto 30 kilometri di più di B e che, continuando tutti e due con le proprie velocità, egli arriverebbe in D in 4 giorni, laddove B arriverebbe in 9 giorni in C. Si vuol sapere la distanza tra C e D.

674. Trovare i quattro termini d'una proporzione, sapendo che la loro somma è uguale a 20, che la somma dei quadrati è 130, e che la somma dei cubi è 980.

675. Due punti M ed N si muovono sopra una stessa retta con tal legge che tra le loro distanze x ed y da un punto O della retta stessa ha luogo costantemente la relazione:

$$y(cx + d) = ax + b,$$

dove a, b, c, d denotano quantità qualisivogliano, costanti. Si domanda in qual punto della retta accade l'incontro dei due mobili.

676. Una vasca si può vuotare per due rubinetti A e B. Affine di vuotarla, si lasciò aperto il rubinetto B per $^3/_5$ del tempo necessario per vuotar la vasca per l'altra apertura. Chiuso il rubinetto B, si aprì quell'altro. Così per vuotare la vasca si impiegarono 6 ore di più, che se si fossero aperti nel tempo stesso i due rubinetti, nel qual caso per l'apertura B sarebbero defluiti $^2/_3$ dell'acqua della vasca. Si domanda in quante ore la vasca si poteva vuotare aprendo il solo rubinetto A, o il solo rnbinetto B.

677. Tra quali limiti si può far variare x, volendo che il trinomio $2x^2 - 5x + 3$ sia costantemente positivo o costantemente negativo?

678. Trovare le condizioni perchè il valore della frazione:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

sia indipendente da x.

679. Dimostrare che, se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha radici, il primo membro è uguale al prodotto di a per la somma di due quadrati.

680. Provare che per nessun valore di x la frazione:

$$\frac{2x - 7}{2x^2 - 2x - 5}$$

può acquistare un valore compreso tra 1 ed $^1/_{11}$.

681. Dimostrare che, se è $p > 1$, la frazione:

$$\frac{x^2 - 2x + p^2}{x^2 + 2x + p^2}$$

ha valori compresi tra:

$$\frac{p-1}{p+1} \quad \text{e} \quad \frac{p+1}{p-1}.$$

Risposte.

640. $y^2 + (2q - p^2)\,y + q^2 = 0.$

641. $y^2 + \dfrac{p}{q}\,y + \dfrac{1}{q} = 0.$

642. $y^2 + (p - 2m)\,y + (q - pm + m^2) = 0.$

643. $y^2 + pmy + qm^2 = 0$. **644.** $y^2 + (p-q)y - pq = 0$.

645. $a^4y^2 + (6a^3c - 2a^2b^2)y + b^4 - 6ab^2c + 8a^2c^2 = 0$.

646. $9q = 2p^2$. **647.** $q(m+1)^2 = mp^2$.

648. $64q = 15p^2 - 6p - 9$.

649. $p^2 - 2q = m$. $p^2(p^2 - 4q) = n^2$. **650.** 15.

651. 12. **652.** ± 2. **653.** $\pm \frac{25}{2}$. **654.** ± 6.

655. $\frac{13}{14}$. **656.** $(q' - q)^2 = (p' - p)(pq' - p'q)$.