CAPITOLO VI

EQUAZIONI SIMULTANEE DI PRIMO GRADO

PRINCIPII GENERALI PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI SIMULTANEE

Preliminari.

185. Abbiamo già osservato che un'equazione, nella quale le incognite siano più di una, si può sodisfare in una infinità di maniere; chè infatti, attribuendo valori ad arbitrio a tutte le incognite, una eccettuata, esiste poi generalmente un valore per quest'ultima, tale che insieme con quelli arbitrari dati alle altre incognite verifica l'equazione.

Perciò, ad es., non ci proporremo il problema di trovare le soluzioni dell'equazione:

$$x + y = 10.$$

Invece, poichè codesta equazione ammette una infinità di soluzioni, si potrà proporsi di trovare tra queste soluzioni quelle, che nel tempo stesso verificano un'altra equazione, ad es. l'equazione:

$$x - y = 4.$$

Così fatto problema potrebbe esser suggerito anche da questa riflessione che, ammettendo ciascuna delle due equazioni una infinità di soluzioni, può darsi che una o più soluzioni siano comuni ad ambedue le equazioni.

Nel nostro caso, attesa la sua semplicità, è facile trovare una soluzione comune; essa è:

$$x = 7, \quad y = 3.$$

(Anzi è anche facile avvedersi che non ce ne sono altre).

186. Alquante equazioni, che devono essere sodisfatte da medesimi valori delle incognite, si dicono *simultanee*; il loro insieme si dice *sistema di equazioni*.

Una *soluzione* di un sistema di equazioni è composta di un sistema di quantità, tante quante sono le incognite, le quali, sostituite rispettivamente alle incognite, verificano tutte le equazioni.

187. Un' equazione si dice *conseguenza* di due o più altre, se è sodisfatta da tutti i sistemi di valori che verificano codeste equazioni.

188. Def. *Due sistemi di equazioni si dicono* equivalenti (o conseguenza ciascuno dell'altro), *se ammettono le stesse soluzioni.*

189. Se a tutte o ad alquante delle equazioni di un sistema si sostituiscono altrettante equazioni rispettivamente equivalenti, si ottiene un sistema che manifestamente è equivalente al primitivo; però, come si vedrà in seguito, due sistemi composti di egual numero di equazioni possono essere equivalenti, senza che le equazioni dell' uno siano rispettivamente equivalenti a quelle dell' altro.

La risoluzione di un sistema di equazioni, come quella d'una sola equazione, consiste di consueto nel dedurre dal proposto sistema uno di equivalente più semplice, e da questo un nuovo sistema equivalente anche più semplice, e così di seguito fino a che siasi ottenuto un sistema tanto semplice, che le soluzioni siano facilissime a trovare. Così fatto processo è fondato sui seguenti:

Teoremi fondamentali per la risoluzione di sistemi di equazioni.

190. Teor. *Dato un sistema di due equazioni, se ad una di esse si aggiunge o se ne sottrae l'altra equazione* (*), *si ottiene un sistema equivalente al primitivo.*

Dim. Dico che sono equivalenti i due sistemi di equazioni:

$$\left.\begin{aligned} A &= B \\ C &= D \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} A + C &= B + D \\ C &= D \end{aligned}\right\} (2)$$

il secondo dei quali è ricavato dal primo, aggiungendo alla prima equazione di codesto sistema la seconda.

La dimostrazione consiste in provare che ogni soluzione del primo sistema verifica il secondo, e reciprocamente; ma, perchè i due sistemi hanno un'equazione in comune, tutto sta a provare che ogni soluzione del primo sistema verifica l'equazione $A + C = B + D$, e che ogni soluzione del secondo sistema verifica l'equazione $A = B$.

Consideriamo adunque una soluzione del primo sistema. Codesta soluzione è un insieme di quantità, le quali, sostituite rispettivamente alle incognite nelle equazioni del primo sistema, trasformano queste equazioni in identità. È ben chiaro che queste stesse quan-

(*) Per brevità si dice che si sommano, che si sottraggono, ecc., due equazioni, invece di dire che ai due membri d'una equazione si sommano rispettivamente i due membri dell'altra, e che si eguagliano i risultati; ecc. (Un'equazione non è una quantità, che si possa aggiungere ad un'altra quantità).

tità, sostituite rispettivamente alle incognite nell'equazione $A + C = B + D$, la sodisfanno, dacchè le due parti del primo membro e quelle del secondo assumono valori rispettivamente uguali.

Consideriamo una soluzione del secondo sistema. Poichè le quantità, che compongono codesta soluzione, sostituite rispettivamente alle incognite nelle equazioni del secondo sistema, rendono C e D identicamente uguali, e tali anche le due somme $A + C$ e $B + D$, esse hanno necessariamente anche la proprietà di rendere A eguale a B: e infatti soltanto quantità eguali aumentate di quantità eguali possono dare risultati eguali. Ogni soluzione del secondo sistema verifica adunque necessariamente l' equazione $A = B$. E così resta provato che i due sistemi sono equivalenti. (*).

Se prima di sommare ad una equazione quell'altra si mutano i segni di tutti i termini di questa, poi si può dire che si è sottratto dalla prima equazione la seconda. Si è dunque provato che, *ecc.*

191. Cor. *Dato un sistema di quante si vogliano equazioni, si può surrogarne una qualunque con quella che si ottiene sommandola con alquante delle altre e sottraendo alquante altre delle rimanenti equazioni.*

Si dimostra questo corollario applicando successivamente il precedente teorema, dopo di aver fatto osservare che esso sussiste anche se applicato a due equazioni di un sistema composto di più di due equazioni.

(*) La seconda parte della dimostrazione si può surrogare con questa osservazione che dal secondo sistema si può ricavare il primo, aggiungendo alla prima equazione la seconda dopo aver mutati i segni di tutti i termini di questa.

192. Oss. Poichè un' equazione d'un sistema si può surrogare con qualunque altra che le sia equivalente, dato un sistema d'equazioni, prima di applicare il precedente corollario, le equazioni si possono apparecchiare come si creda opportuno, o trasportando termini da un membro all'altro o moltiplicando i due membri d'una stessa equazione per una stessa quantità, o cambiando i segni a tutti i termini d'una stessa equazione.

193. Teor. *Dato un sistema di due equazioni, se una è risoluta rispetto ad una incognita* (*) *e il valore di codesta incognita si sostituisce all' incognita stessa nell' altra equazione, risulta un sistema equivalente al primitivo.*

Dim. Sia il sistema:

$$x = A, \qquad C = D, \tag{1}$$

e supponiamo che nel secondo membro della prima equazione non si trovi la lettera x, cosicchè questa equazione si può dire risoluta rispetto ad x, e il secondo membro si può dire valore di codesta incognita. (**).

Supponiamo che la x si trovi nella seconda equazione e di sostituire in codesta equazione, in luogo di x, l'espressione A; e dinotiamo con $\Gamma = \Delta$ la nuova equazione, che si ottiene con tale sostituzione. Ora si tratta di dimostrare che il sistema dato ed il sistema:

$$x = A, \qquad \Gamma = \Delta \tag{2}$$

(*) Un'equazione a più incognite si dice risoluta rispetto ad una di esse, se questa incognita (con esponente *uno* e coefficiente *uno*) forma da sè sola un membro dell'equazione e non si trova nell'altro membro.

(**) Ci esprimiamo così per brevità di discorso; infatti l'espressione A contiene delle incognite. (Del resto i due sistemi sarebbero equivalenti anche se l'espressione A contenesse la x).

sono equivalenti. Tutto sta a provare che ogni soluzione del primo sistema verifica l'equazione $\Gamma = \Delta$, e che ogni soluzione del secondo sistema verifica l'equazione $C = D$.

Siano x, y, z... le incognite, e sia:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \ldots$$

una soluzione d'uno dei sistemi; lasciamo indeciso di quale dei due.

Intanto, in grazia dell'equazione $x = A$, che è comune ai due sistemi, possiamo dire che l'espressione A è tale che, quando alle incognite che essa contiene si sostituiscano i rispettivi valori, essa assume il valore α.

Ora, supponendo di voler riconoscere a quale dei sistemi appartiene la soluzione considerata, o cominceremmo a porre α in luogo di x nell'equazione $C = D$; oppure, per non ripetere operazioni già fatte (*), cominceremmo a porre α in luogo di A nell'equazione $\Gamma = \Delta$. Ma poichè le due equazioni $C = D$ e $\Gamma = \Delta$ diversificano tra loro unicamente per questo che, dove nella prima c'è l'incognita x, nella seconda si trova l'espressione A, il principio di sostituzione accennato, supponendo che sia stato fatto in tutte e due le equazioni, fa sparire ogni diversità tra le due equazioni.

(*) Dicendo che:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \ldots$$

è una soluzione di uno dei sistemi s'intende (almeno si può intendere) esprimere questo che, avendo sostituito, in ambedue le equazioni d'uno dei sistemi, alle incognite i rispettivi valori, e fatte poi le operazioni diventate possibili per queste sostituzioni, ambedue le equazioni si sono trasformate in identità. In particolare, avendo riguardo all'equazione $x = A$, il cui primo membro è costituito dalla sola lettera x, e che perciò assume manifestamente il valore α, l'espressione A per le sostituzioni assume il valore α.

Ma allora, poichè per ipotesi, compiendo le sostituzioni, una delle due equazioni diventa una identità, altrettanto avviene manifestamente dell'altra; e così possiamo conchiudere che i due sistemi sono equivalenti.

194. Cor. *Se un' equazione d' un sistema d' equazioni è risoluta rispetto ad una incognita, e il valore di questa incognita si sostituisce all' incognita stessa in alquante delle altre equazioni, risulta un sistema equivalente al primitivo.*

Si dimostra questo corollario applicando successivamente il precedente teorema, dopo di aver fatto osservare che esso sussiste anche se applicato a due equazioni di un sistema composto di più di due equazioni. (Tacitamente ci si fonda anche su questo principio manifesto che due sistemi equivalenti a un terzo sono equivalenti tra loro).

Metodi di eliminazione.

195. Si chiama *metodo di eliminazione* un artifizio mediante il quale da due equazioni simultanee contenenti una stessa incognita si ricava un' equazione priva di codesta incognita e che si può surrogare ad una delle equazioni dalle quali è dedotta, perchè il sistema che ne risulta è equivalente al primitivo. (*).

Quando si mette in pratica l'artifizio accennato, si dice che si *elimina* quella incognita da quelle due equazioni, e l' equazione ottenuta si dice *risultante* od *eliminata*.

(*) Più generalmente si può dire che *metodo di eliminazione* è un artifizio mediante il quale da due relazioni, nelle quali entra una stessa quantità, si deduce una relazione tra le rimanenti quantità che entrano nelle relazioni date.

Si danno parecchi metodi di eliminazione; esporremo i più usati.

196. Metodo di confronto. Siano due equazioni simultanee:

$$A = B \qquad C = D$$

(le quali potrebbero anche appartenere ad un sistema contenente altre equazioni). Supponiamo che contengano entrambe l' incognita x, e che siano:

$$x = M \qquad \text{ed} \qquad x = N$$

le equazioni che si ottengono risolvendole rispetto ad x. Sostituendo nell' ultima equazione alla x il valore offerto dalla precedente, otteniamo l' equazione:

$$M = N,$$

la quale, presa insieme con una delle equazioni date, forma un sistema equivalente a quello di codeste due equazioni. [193].

L' equazione $M = N$ non contiene l' incognita x, e si dice che è dedotta dalle due equazioni date eliminando l' incognita x col *metodo di confronto.* Il processo è descritto nella seguente:

Regola. *Per eliminare col metodo di confronto una incognita da due equazioni, si risolvono ambedue le equazioni rispetto all' incognita che si vuol eliminare; e poi si eguagliano i valori ottenuti.*

197. Metodo di sostituzione. Siano le due equazioni simultanee:

$$A = B \qquad C = D$$

e supponiamo che ambedue contengano l' incognita x.

Risolviamone una rispetto ad x, ad es. la prima, e sia

$$x = M$$

l' equazione risultante. Sia poi:

$$\Gamma = \Delta$$

l' equazione che si ottiene sostituendo l' espressione M

in luogo della x nella seconda delle equazioni date. L' equazione $\Gamma = \Delta$, presa insieme con la $x = M$, o con la $A = B$, costituisce un sistema equivalente al sistema dato. [193].

L' equazione $\Gamma = \Delta$ non contiene la x, e si dice che è dedotta dalle equazioni date eliminando la x col *metodo di sostituzione*. Il processo è descritto nella seguente:

Regola. *Per eliminare un' incognita da due equazioni col metodo di sostituzione, si risolve una delle equazioni rispetto all'incognita che si vuol eliminare, e il valore di questa incognita, così ricavato, lo si sostituisce all' incognita stessa nell' altra equazione.*

198. Metodo di riduzione. Siano le equazioni:

$$\begin{aligned} a x^n + B &= C \\ a' x^n + B' &= C' \end{aligned} \qquad (1)$$

nelle quali sono messi in evidenza due termini contenenti una stessa potenza di una medesima incognita. Ammettiamo che questa incognita non si trovi in nessun altro dei termini delle due equazioni, e che i coefficienti a ed a' siano quantità note, diverse da *zero*. Ed ora cerchiamo due quantità tali che, moltiplicando per una di esse la prima equazione e per l' altra la seconda, nelle nuove equazioni i termini contenenti x^n siano eguali tra loro. Questo intento si può raggiungere in ogni caso adoperando per la prima equazione il coefficiente che x^n ha nella seconda, e per la seconda equazione il coefficiente che x^n ha nella prima. Con tali moltiplicatori si ottengono le due equazioni:

$$\begin{aligned} a a' x^n + a' B &= a' C \\ a a' x^n + a B' &= a C', \end{aligned} \qquad (2)$$

le quali, poichè a ed a' sono quantità diverse da *zero* ed indipendenti dalle incognite, sono rispettivamente equivalenti [167] alle equazioni date; epperò anche i due sistemi (1) e (2) sono equivalenti tra loro.

Dalle equazioni (2), sottraendole l'una dall'altra, e poi riducendo, si ottiene l'equazione:

$$a'B - aB' = a'C - aC', \qquad (3)$$

la quale non contiene l'incognita x, e presa insieme con una delle equazioni date, costituisce [190, 191] un sistema equivalente al sistema di queste equazioni.

199. Oss. La sparizione dell'incognita x, che avviene combinando con sottrazione le equazioni (2), riesce purchè siano eguali i coefficienti di x'' nelle due equazioni, qualunque siano del resto questi coefficienti. È facile avvedersi che si possono rendere uguali anche in modo diverso da quello che abbiamo adoperato. Si potrebbe, ad es., dividere i due membri della prima equazione per a e quelli della seconda per a'; chè così x'' avrebbe poi in ambedue le equazioni il coefficiente *uno*.

Basterebbe anche modificare una sola delle equazioni. Ad es., moltiplicando la prima per il quoziente $(a' : a)$, il coefficiente di x'' diventa eguale ad a'; epperò nelle due equazioni x'' ha così medesimo coefficiente.

Ordinariamente, se i coefficienti a ed a' sono interi, se ne cerca il minimo comune multiplo m, e poi si moltiplicano, la prima equazione per il quoziente $(m : a)$, e la seconda per $(m : a')$. Dopo ciò nelle nuove equazioni x'' ha lo stesso moltiplicatore m.

Può bastare rendere eguali *numericamente* i coefficienti di x''; chè poi, se i coefficienti di x'' hanno segni contrari, sommando (*), si ottiene di eliminare la x.

L' equazione (3) si dice dedotta dalle (1) col *metodo di riduzione*; il processo è descritto nella seguente:

200. Regola. *Per eliminare un' incognita, che si trovi in due equazioni e in ciascuna in un termine solo ed elevata alla stessa potenza, si moltiplicano i due membri della prima equazione per una quantità opportuna e i due membri dell'altra per un'altra quantità, in guisa che i termini contenenti l' incognita che si vuol eliminare divengano numericamente uguali. Poi si sommano le due equazioni, o si sottraggono, affinchè poi nella riduzione i detti due termini si distruggano.*

201. Oss. Per poter applicare il metodo di confronto fa d'uopo, o che le due equazioni siano già risolute rispetto ad una stessa incognita, o che si sappiano risolvere. Il metodo di sostituzione richiede che od una delle equazioni sia risoluta rispetto all' incognita che si vuol eliminare, o che si sappia risolverla. (**). Così, perchè sappiamo risolvere equazioni di primo grado ad una incognita, possiamo dire di saper eliminare un' incognita da due equazioni, purchè una almeno di codeste sia di primo grado rispetto all' incognita da eliminare.

(*) Ciò suppone che si sommino i membri che contengono l'incognita; e poi insieme gli altri due. Ecc.

(**) Nel caso che l'incognita si trovasse in ciascuna delle due equazioni in un termine solo ed elevata ad una stessa potenza, basta isolare codesta potenza in una equazione per poter poi applicare il secondo metodo. Bisogna isolare questa potenza in tutte e due le equazioni, ove si voglia far poi la eliminazione col metodo di confronto.

Per il metodo di riduzione basta che l'incognita da eliminare abbia nelle due equazioni, in tutti i termini ne'quali si trova, medesimo esponente.

RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO A DUE INCOGNITE.

202. Noi sappiamo [201] eliminare una incognita da due equazioni ogni volta che una delle equazioni sia di primo grado rispetto all'incognita. Se poi le equazioni contengono due sole incognite e sono ambedue di primo grado, l'equazione risultante dalla eliminazione contiene una sola incognita ed è anch'essa di primo grado. Risolvendo codesta equazione si determina il valore di una delle incognite; ed è poi facile trovare il valore anche dell'altra. In conchiusione sappiamo ormai risolvere un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite. (*).

Es. Proponiamoci di risolvere il sistema:

$$2x + 5y = 2y - 6,$$
$$5x - 39 = 6y.$$

1°. Volendo far uso del metodo di confronto, bisogna anzitutto risolvere ambedue le equazioni rispetto ad una incognita. Risolvendole rispetto ad x si ottiene:

$$x = \frac{-3y - 6}{2}, \qquad x = \frac{39 + 6y}{5}.$$

(*) Nel caso di due equazioni di primo grado a due incognite, sappiamo fare l'eliminazione d'una incognita con tutti e tre i nostri metodi.

Eguagliando i valori di x, risulta l'equazione:

$$\frac{-3y-6}{2} = \frac{39+6y}{5},$$

dalla quale si ha $y = -4$.

Eliminando col metodo stesso la y, e risolvendo poi l'equazione risultante, si trova $x = 3$. Ma questo valore si può avere più speditamente, e per l'appunto sostituendo in luogo di y il suo valore ormai noto in una delle equazioni date, giacchè così si ottiene subito un'equazione che contiene la sola x.

2°. Volendo risolvere il sistema proposto mediante il metodo di sostituzione, risolviamo una delle equazioni, ad es. la prima, rispetto ad x. Sostituendo poi il valore di x nella seconda, si ottiene l'equazione:

$$5\left(\frac{-3y-6}{2}\right) - 39 = 6y,$$

dalla quale si ricava $y = -4$.

Analogamente si potrebbe trovare il valore di x; risolvendo, cioè, una equazione rispetto ad y, sostituendone il valore nell'altra equazione, e risolvendo l'equazione risultante.

3°. Risolviamo anche una volta il nostro sistema; questa volta mediante il metodo di riduzione.

Volendo eliminare la x, bisogna far diventare numericamente uguali i coefficienti di questa incognita. Poichè 2 e 5 sono numeri primi tra loro, moltiplicheremo la prima equazione per 5, e l'altra per 2. Si ottengono così le due equazioni:

$$10x + 25y = 10y - 30,$$

$$10x - 78 = 12y.$$

Per eliminare la x bisogna combinare le due equazioni mediante sottrazione. Sottraendo la seconda dalla prima e facendo le riduzioni, si ottiene l'equazione:

$$25y + 78 = -2y - 30,$$

dalla quale risulta $y = -4$.

Per esercizio determiniamo col metodo stesso il valore della x; bisogna eliminare la y. Poichè questa incognita nella prima equazione si trova in due termini, bisogna anzitutto unire codesti termini in uno solo. Così il nostro sistema diventa:

$$2x + 3y = -6,$$
$$5x - 39 = 6y.$$

Manifestamente, perchè la y abbia nelle due equazioni coefficienti numericamente uguali, basta moltiplicare la prima equazione per 2. E per eliminare la y, bisogna sommare poi le due equazioni. Così si ottiene l'equazione:

$$9x - 39 = -12,$$

dalla quale risulta $x = 3$.

203. Affine di poter enunciare proposizioni generali relative ai sistemi di due equazioni di primo grado con due incognite, dobbiamo considerare tale sistema dal quale ogni altro si possa intendere rappresentato. Cotale sistema generale è il seguente:

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

dove x ed y sono le incognite, e con a, b, c, a', b', c' si rappresentano quantità note qualunque. Però a, b, a', b' si suppongono diverse da *zero*. (Nel caso che taluna di esse fosse uguale a *zero*, non avrebbe senso la divisione per *zero*, che si farebbe nel risolvere il sistema).

Per giustificare la nostra asserzione, che cioè il precedente sistema comprende qualunque altro che sia di primo grado a due incognite, basta provare che qualsivoglia equazione di primo grado con due incognite si può ridurre alla forma $ax + by = c$. Ed invero una equazione così fatta non può contenere che tre sorta di termini; cioè: termini contenenti la sola x, quale fattore, con esponente *uno*; termini contenenti la sola y, come fattore, pure con esponente *uno*; infine termini tutti noti. Così, raccolti nel primo membro i termini contenenti le incognite e nel secondo membro i termini noti, e facendo poi la riduzione dei termini simili (*), resta un solo termine contenente la x, e in questo essa è moltiplicata per una quantità nota, che si può rappresentare con a; così i termini contenenti la y si riducono in un solo, rappresentato da by; infine l'aggregato delle quantità note si può intendere sia rappresentato da c. (Potrebbe poi essere $c = 0$).

Ed ora, per risolvere il nostro sistema, usando ad es. del metodo di confronto, risolviamo ambedue le equazioni rispetto ad una incognita, sia rispetto alla x. Si trova:

$$x = \frac{c - by}{a}, \qquad x = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

(*) Nel caso che una stessa incognita si trovi in più termini con uno o più coefficienti letterali, e questi termini non siano tutti simili, bisogna raccogliere cotale incognita a fattore comune.

Eguagliando i due valori di x, risulta l'equazione:

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'},$$

dalla cui risoluzione si ottiene:

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Per trovare il valore di x, sostituiremo il valore di y, ormai noto, in una delle equazioni primitive. Ricorrendo alla prima, si ha per x l'equazione:

$$ax + b\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = c,$$

dalla quale si ricava:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b};$$

e così il sistema è risoluto.

204. Abbiamo trovato che il sistema d'equazioni:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

ha la seguente soluzione:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

I valori di x ed y si dicono *formule di risoluzione* del sistema di due equazioni di primo grado con due incognite (*) appunto perchè vi si scorgono indicati i

(*) Queste formule si possono ritenere facilmente a memoria, quando si sia osservato che i denominatori sono eguali, e che si ottengono facendo la differenza dei due prodotti *in* calcoli mediante i quali, in un caso determinato qualunque, dalle quantità date si deducono i valori delle incognite. (*).

Osservando le formule, riconosciamo che i calcoli da fare con le quantità a, b, c, a', b', c', per ottenere i valori di x ed y, sono sempre possibili e che danno un solo valore per x ed uno per y. Non dobbiamo però dimenticare che alle formule in questione siamo pervenuti nell' ipotesi che i coefficienti delle incognite fossero tutti e quattro diversi da *zero*, e in fine ammettendo tacitamente che anche l' espressione $(ab' - a'b)$ fosse diversa da *zero*.

Ora, seguitando ad ammettere che nessuna delle quantità a, b, a' e b' sia *zero*, supponiamo sia:

$$ab' - a'b = 0,$$

cioè
$$ab' = a'b.$$

Dividendo i due prodotti eguali per ab, e semplificando i quozienti, otteniamo:

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

Se indichiamo con q il valore comune dei due quozienti, possiamo scrivere:

$$b' = bq \qquad \text{ed} \qquad a' = aq.$$

croce dei coefficienti delle incognite. E che dal denominatore comune si deducono poi i numeratori mutando, quando si vuole il valore di x, i coefficienti della x nelle corrispondenti quantità note; e, quando si vuole il valore di y, mutando i coefficienti della y nelle quantità note corrispondenti.

(*) La risoluzione del sistema di due equazioni di primo grado con due incognite è una operazione cotanto semplice che non vale la pena di ricorrere, ne' casi particolari, alle formule di risoluzione. Le abbiamo cercate e le discutiamo solo per tirarne conseguenze generali.

Sostituendo codesti valori di a' e b' nella seconda equazione, essa diventa:

$$a q x + b q y = c',$$

la quale, perchè q è diverso da *zero,* è equivalente all' equazione:

$$a x + b y = \frac{c'}{q} \cdot$$

Adunque, quando è:

$$a b' - a' b = 0,$$

il sistema delle due equazioni si riduce al seguente:

$$a x + b y = c$$
$$a x + b y = \frac{c'}{q} \cdot$$

Confrontando queste equazioni, si riconosce immediatamente che, se c' è tale che sia:

$$\frac{c'}{q} = c \quad \text{e quindi} \quad \frac{c'}{c} = q,$$

allora le due equazioni date sono equivalenti, epperò non costituiscono più un vero e proprio sistema di due equazioni *distinte*; non si ha infine che un' unica equazione, la quale, poichè contiene due incognite, ammette una infinità di soluzioni.

Se poi è:

$$\frac{c'}{q} \gtrless c \quad \text{e quindi} \quad \frac{c'}{c} \gtrless q,$$

in tal caso le due equazioni sono manifestamente *incompatibili*, cioè una soluzione di una di esse non può sodisfare anche l' altra.

Nel primo caso, quando è:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

egli è:

$$a'c = ac' \quad \text{e} \quad b'c = bc',$$

epperò è:

$$ac' - a'c = 0 \quad \text{e} \quad cb' - c'b = 0.$$

In tal caso adunque anche i numeratori delle formule di risoluzione si annullano; cosicchè, ricorrendo ad esse per ottenere i valori delle incognite, si troverebbe:

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{ed} \quad y = \frac{0}{0}.$$

Invece, quando le equazioni sono incompatibili, i numeratori sono diversi da *zero*, epperò in tal caso, ricorrendo alle formule di risoluzione, si trovano risultati della forma, priva di significato, $\frac{m}{0}$, dove con m si dinota una quantità diversa da *zero*.

Poichè i simboli $\frac{0}{0}$ ed $\frac{m}{0}$ indicano rispettivamente *indeterminazione* ed *impossibilità* [119, 120], possiamo dire che le formule di risoluzione valgono anche per i due casi, tacitamente esclusi nel processo seguito per trovarle, nei quali le due equazioni sono equivalenti od incompatibili.

Avevamo anche supposto che tutte e quattro le quantità a, a', b e b' fossero diverse da *zero*; e certi passaggi suppongono che sia verificata questa condizione. Lo studioso potrà riconoscere che le formule valgono tuttavia anche per il caso che uno dei coefficienti sia eguale a *zero*.

Nel caso poi che due o più delle quantità a, a', b e b' siano eguali a *zero*, le equazioni non formano più in nessun modo un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite, epperò non ce ne occupiamo.

Riassumendo conchiudiamo che:

205. *Il sistema di due equazioni di primo grado a due incognite ammette una soluzione ed una sola. Soltanto nel caso che, ridotte le equazioni alla forma generale, il quoziente dei coefficienti d'una incognita sia eguale al quoziente dei coefficienti dell'altra, il sistema è indeterminato od impossibile, cioè ammette rispettivamente innumerevoli soluzioni o nessuna.*

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI QUANTE SI VOGLIANO EQUAZIONI DI PRIMO GRADO CON ALTRETTANTE INCOGNITE.

206. Imparato a risolvere un sistema di due equazioni di primo grado con due incognite, passiamo a trattare il problema generale, considerando un sistema di n equazioni di primo grado con n incognite. Tale sia il sistema di n equazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ A_3 = B_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n = B_n \,. \end{array} \right.$$

Le n incognite siano $x, y, z \ldots t, u, v$.

Sappiamo già, anzi con parecchi metodi, eliminare un'incognita da due equazioni di primo grado con quante incognite si vogliano. Sappiamo di più che, se codeste due equazioni fanno parte di un sistema di più equazioni, l'equazione, ricavata da esse con l'eliminazione di una incognita, si può surrogare nel sistema proposto ad una delle equazioni da cui si è ricavata, perchè il nuovo sistema, che risulta, è equivalente al primitivo.

Ed ora, scelta una delle incognite, ad es. la x, e prese a considerare due equazioni che la contengano ambedue (*), si elimini la x da queste due equazioni, con l'uno o con l'altro dei metodi, e sia:

$$C_1 = D_1$$

l'equazione risultante. Si sostituisca questa equazione ad una delle due dalle quali si è ricavata.

Imaginiamo di seguitar in questo modo ad eliminare la x, finchè ci siano coppie di equazioni che la contengano, surrogando ogni volta la nuova equazione ad una delle due adoperate a formarla.

È manifesto che si finisce così ad un sistema di n equazioni, equivalente al proposto, e avente questa particolarità che in esso la x non si trova che in una equazione soltanto.

Se in codesto nuovo sistema si prescinde da quella equazione che contiene la x, rimane un sistema di $(n - 1)$ equazioni di primo grado contenenti le altre $(n - 1)$ incognite $y, z \ldots u, v$. Supponiamo sia:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 \quad = D_1 \\ C_2 \quad = D_2 \\ C_3 \quad = D_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1} = D_{n-1} \end{array} \right.$$

il nuovo sistema di $(n - 1)$ equazioni.

Scelta una delle incognite di questo sistema, ad

(*) Non sempre tutte le equazioni contengono tutte le incognite.

es. la y, la si elimini da due equazioni che la contengano e si surroghi l'equazione risultante ad una delle equazioni adoperate a formarla. Così seguitando, fintantochè ci siano coppie di equazioni contenenti la y, si perviene ad un sistema di $(n - 1)$ equazioni di primo grado, equivalente al sistema (2), e con questa particolarità che in esso la y non si trova che in una equazione soltanto. Prescindendo da questa equazione, rimane un sistema di $(n - 2)$ equazioni contenenti le $(n - 2)$ incognite $z \ldots u, v$.

È manifesto che, continuando nel processo ormai dichiarato, si perviene ad un sistema :

$$(n - 1) \qquad \begin{cases} P_1 = Q_1 \\ P_2 = Q_2 \end{cases}$$

di due equazioni contenenti due sole incognite. Siano queste le u e v.

Infine, eliminando da questo sistema una incoguita, ad es. la u, si ha l'equazione di primo grado :

$$(n) \qquad R_1 = S_1$$

che non contiene altra incognita che la v.

A tal punto, prendendo quelle equazioni che si sono lasciate da parte una dopo l'altra, si ha un sistema (detto risolvente) :

$$\begin{aligned} A &= B \\ C &= D \\ E &= F \\ &\cdots\cdots \\ M &= N \\ P &= Q \\ R &= S \end{aligned}$$

composto di n equazioni di primo grado con n incognite, equivalente al sistema (1) proposto, e la cui risoluzione non presenta più nessuna difficoltà, perchè l'ultima equazione contiene una sola incognita e ciascuna precedente contiene una sola nuova incognita che non si trova in quelle che seguono.

207. Es. Proponiamoci di risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + t &= 7, \\ -13y + 19z + 3t &= 34, \\ 4x + 7y + 5z - 3t &= 8, \\ 2x + 5y - 3z + 4t &= 11. \end{aligned}$$

È indifferente, dal lato teorico, cominciare ad eliminare un'incognita o un'altra, e si può adoperare uno o l'altro dei metodi; in pratica però si può riconoscere più opportuno, per la speditezza del calcolo, cominciare ad eliminare una incognita piuttosto che un'altra, e preferire un metodo agli altri. Nel caso nostro cominceremo ad eliminare la x, giacchè una delle equazioni è già priva di questa incognita; e useremo il metodo di riduzione che è d'ordinario il più spedito, perchè più degli altri metodi, consente di far operazioni senza scrivere.

Per eliminare la x dalle equazioni prima e terza, basta moltiplicare la prima per 4, e poi sottrarle la terza. L'equazione:

$$-15y + 7z + 7t = 20,$$

che risulta, si può surrogare alla prima o alla terza; poniamola invece di questa.

Così, moltiplicando i due membri della prima per 2, e poi sottraendole la quarta, si ha l'equazione:

$$-9y + 9z - 2t = 3,$$

che scriveremo in luogo della quarta.

In questo modo siamo pervenuti al sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + t &= 7, \\ -13y + 19z + 3t &= 34, \\ -15y + 7z + 7t &= 20, \\ -9y + 9z - 2t &= 3, \end{aligned}$$

equivalente al primitivo e più semplice.

Ora si tratta di dedurre dalle tre ultime equazioni due altre nelle quali manchi una delle tre incognite y, z, t. Elimineremo la t, perchè ha più piccoli coefficienti.

Moltiplicando la seconda per 7, la terza per 3, e poi sottraendo dalla seconda la terza, otteniamo:

$$-46y + 112z = 178,$$

i cui due membri si possono dividere per 2. Effettuando questa semplificazione, si ha l'equazione:

$$-23y + 56z = 89,$$

che surrogheremo alla terza dell'ultimo sistema.

Così dalla seconda e dalla quarta, eliminando parimente la t, si ottiene l'equazione:

$$-53y + 65z = 77,$$

che surrogheremo alla quarta.

In tal guisa siamo pervenuti al sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + t &= 7, \\ -13y + 19z + 3t &= 34, \\ -23y + 56z &= 89, \\ -53y + 65z &= 77, \end{aligned}$$

equivalente al sistema primitivo.

Eliminando la y dalle due ultime equazioni, si ottiene l'equazione:

$$1473z = 2946,$$

che surrogheremo all'ultima.

Ecco infine il sistema risolvente:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + t &= 7, \\ -13y + 19z + 3t &= 34, \\ -23y + 56z &= 89, \\ 1473z &= 2946, \end{aligned}$$

equivalente al dato, e da cui si possono agevolmente ricavare i valori delle incognite.

Si trova successivamente:

$$z = 2, \quad y = 1, \quad t = 3 \quad \text{ed} \quad x = 0.$$

208. Abbiamo veduto come, dato un sistema di n equazioni di primo grado con n incognite, si possa ricavare un sistema di n equazioni di primo grado, equivalente al primitivo, e nel quale c'è un'equazione contenente un'incognita sola. Generalmente [181] codesta equazione ammette una soluzione ed una sola. Determinato così il valore d'una delle incognite, sostituendolo nelle equazioni dell'ultimo sistema, si trova poi tra queste un'equazione che non contiene più che una incognita sola. Risolvendo quest'equazione, la quale, perchè è di primo grado, ammette in generale una soluzione ed una sola, si viene a conoscere il valore di un'altra delle incognite. E così via. Da quanto abbiamo detto possiamo ormai conchiudere che:

Un sistema di n *equazioni di primo grado con* n *incognite ammette, in generale, una soluzione ed una soltanto.*

Sistemi d'equazioni, nei quali il numero delle incognite non è uguale al numero delle equazioni.

209. Prendiamo a considerare un sistema di equazioni di primo grado, in cui il numero delle incognite superi il numero delle equazioni. Siano $m + n$ le incognite ed n soltanto le equazioni.

Imaginiamo di attribuire ad m delle incognite dei valori ad arbitrio. Dopo di ciò il sistema di n equazioni contenendo solo n incognite ammetterà, in generale [208], una soluzione, composta di n valori. Questi n valori, insieme con gli m presi dapprima ad arbitrio, costituiscono manifestamente una soluzione del sistema d'equazioni. Cambiando gli m valori arbitrari, si troveranno altri n valori per le rimanenti incognite, formanti in tutti un'altra soluzione del sistema. Possiamo conchiudere ormai che:

Un sistema di equazioni di primo grado, in cui il numero delle incognite superi il numero delle equazioni, ammette una infinità di soluzioni, ossia è indeterminato.

210. Passiamo a considerare un sistema di equazioni di primo grado, nel quale il numero delle equazioni superi il numero delle incognite. Siano $m + n$ le equazioni ed n soltanto le incognite.

Lasciando da banda m delle equazioni, ci resta un sistema di n equazioni con n incognite, il quale ammette, in generale, una soluzione ed una soltanto. Se le quantità formanti la detta soluzione non sodisfanno le m equazioni lasciate da banda, si conchiude che il sistema è *impossibile*, che non ammette nessuna soluzione.

Se poi le m equazioni sono sodisfatte anch' esse, queste equazioni sono *superflue* (sono *conseguenze* delle rimanenti) ed il sistema proposto si dice *più che determinato.*

Sistemi che sono indeterminati od impossibili, sebbene il numero delle incognite sia eguale a quello delle equazioni.

211. Abbiamo veduto che un sistema di due equazioni di primo grado con due incognite può essere indeterminato od impossibile. Altrettanto può accadere di un sistema di n equazioni con altrettante incognite.

Ad es., se una equazione di un sistema è equivalente ad un' altra del sistema stesso, essa è sodisfatta da ogni soluzione del sistema delle rimanenti equazioni, epperò essa è superflua, e si può abbandonare. Ma il sistema che rimane, essendo composto con equazioni in numero minore delle incognite, è indeterminato [209]; epperò tale è anche il sistema primitivo.

Un sistema d' equazioni può esser indeterminato anche per questo che un' equazione sia conseguenza di alquante altre. Ad es., nel sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 7, \\ 3x + y - z &= 2, \\ 5x - 2y + 3z &= 9, \end{aligned}$$

la cui terza equazione si può ricavare delle altre due sommandole insieme, nessuna equazione è equivalente ad un' altra, e ciò non pertanto il sistema è indeterminato. Ed infatti qualsivoglia soluzione del sistema delle due prime equazioni verifica la terza necessariamente.

212. Un sistema di n equazioni di primo grado con n incognite può essere impossibile, non ammettere cioè nessuna soluzione. Ciò può accadere perchè due equazioni sono incompatibili tra loro. Ad es., nel sistema :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10, \\ 2x + 2y + 2z &= 15, \\ 5x - 7y - 4z &= 7, \end{aligned}$$

è manifesto che le due prime equazioni sono incompatibili, epperò il sistema è impossibile.

Anche in questo caso l'impossibilità può dipendere da ciò che un'equazione sia incompatibile con l'insieme di alquante altre. Ad es., nel sistema :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10, \\ 2x + 3y + 4z &= 7, \\ 3x + 4y + 5z &= 12, \end{aligned}$$

nel quale il primo membro della terza equazione è la somma dei primi membri delle altre due, è manifesto che la terza equazione è incompatibile con l'insieme delle altre. Ed infatti, qualsivoglia sistema di valori, che verifichi le due prime equazioni, al primo membro della terza equazione fa assumere necessariamente il valore $10 + 7$, epperò non sodisfa codesta equazione.

213. L'impossibilità o l'indeterminatezza di un sistema di n equazioni di primo grado con n incognite ordinariamante si riconoscerà applicando al sistema il solito processo di risoluzione. Si perverrà ad un sistema contenente equazioni manifestamente incompatibili od equivalenti. Al più tardi si riconoscerà l'impossibilità o l'indeterminatezza dall'ultima equazione contenente una sola incognita, perchè essa sarà assurda, oppure sarà una identità, secondo il caso.

214. Nel caso che un sistema da risolvere contenga più equazioni che incognite, e che si trovi che il sistema [209] formato di tante equazioni quante sono le incognite è indeterminato, bisogna sopprimere in questo le equazioni equivalenti ad altre o conseguenze di altre, e surrogarle con altrettante di quelle equazioni che si sono lasciate in disparte.

215. Da quanto precede conchiudiamo infine che:

Affinchè un problema a più incognite sia determinato, è necessario [209] *e sufficiente* [208] *che si possano stabilire, tra le incognite e le quantità date, tante equazioni distinte* [210] *quante sono le incognite.*

Esercizi.

Si risolvano i seguenti sistemi d'equazioni:

334. $\frac{12}{x}+\frac{8}{y}=8, \qquad \frac{27}{x}-\frac{12}{y}=3.$

335. $\frac{3x}{4}=1+\frac{2y}{3}, \qquad 6-\frac{5y}{6}=\frac{7x}{3}.$

336. $\frac{7y+13-5x}{4}+y=2x-\frac{3y+2(x-8)}{3},$

$$\frac{2x+5y}{6}-\frac{3x-4(3-2y)}{5}+x=4-\frac{15+2y-4x}{3}.$$

337. $\left(20-\frac{4x-5y}{9}\right):\frac{29-x}{6}=3,$

$$\frac{3x-4y}{7}-x-16=x+2y-\frac{9x+3y-1}{13}.$$

338. $(x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112,$
$2x+10=3y+1.$

339. $\frac{5}{x-2y}=\frac{7}{2x-y}, \qquad \frac{3x-2}{7}=\frac{6+y}{5}.$

340. $\dfrac{10}{2x+3y-29}+\dfrac{9}{7x-8y+24}=8,$

$\dfrac{2x+3y-29}{2}=\dfrac{7x-8y}{3}+8.$

341. $\dfrac{8}{2x-3y+17}+5x-8y+43=4,$

$\dfrac{5}{2x-3y+17}+16y-\dfrac{1}{2}=10x+88.$

(Si riguarderanno da prima, quali incognite da determiminare, le espressioni $(2x-3y+17)$ e $(5x-8y+43)$).

342. $ax=by, \qquad x+y=c.$

343. $x+ay=b, \qquad ax-by=c.$

344. $axy-by=c, \qquad dxy+ey=f.$

345. $3x-2y=a^2+5ab+b^2,$

$3y-2x=a^2-5ab+b^2$. (Sommando e sottraendo...).

346. $2(a-b)x-(a+b)y=a^2-b^2,$

$(a+b)x-(a-b)y=4ab.$

347. $ax+by=c, \qquad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}.$

348. $\dfrac{x}{m}+my=a, \qquad mx+\dfrac{y}{m}=b.$

349. $x+cxy+y=b, \qquad \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=c.$

350. $\dfrac{x-y+1}{x+y-1}=a, \qquad \dfrac{x+y+1}{x-y-1}=b.$

351. $x+y=16,$
$x+z=22,$
$y+z=28.$

352 $5y-7x+3z=4,$
$4x+9y-5z=30,$
$2x-3y+6z=1.$

353. $7x-3y-2z=16,$
$2x-5y+3z=39,$
$5x+y+5z=31.$

354. $3x-4y+5z=9,$
$7x+2y-10z=18,$
$5x-6y-15z=6.$

355. $3z-2x-4y=22,$
$2y-4x-5z=18,$
$z-6x-7y=63.$

356. $30x+20y-10z=230,$
$15x+6y-12z=138,$
$10x+5y-4z=75.$

357. $2(2x+z)-3y=40,$

$5x+7(y-z)=43,$

$3(3x-z)+8y=97.$

358. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=41,$

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=31,$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=25.$

359. $\frac{4x+3y+z}{10}-\frac{2(y+z)-x+1}{15}=\frac{25}{6}+\frac{x-z}{5},$

$\frac{9x+5y-2z}{12}-\frac{2x+y-3z}{4}=\frac{7y+z+3}{12}+\frac{1}{6},$

$\frac{5y+3z}{4}-\frac{2x+3y-z}{12}+2z=y-2+\frac{3x+2y+11}{6}.$

360. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=7,$

$\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=8,$

$\frac{4}{x}+\frac{1}{z}=3.$

361. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=11,$

$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=16,$

$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}=2.$

362. $\frac{3}{x}-\frac{4}{5y}+\frac{1}{2z}=\frac{28}{5},$

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{z}=\frac{61}{6},$

$\frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}=16,1.$

363. $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{5},$

$\frac{xz}{x+z}=\frac{1}{6},$

$\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{7}.$

364. $xy+yz+xz=9xyz,$
$yz+2xz-3xy=-4xyz,$
$3yz-2xz+xy=4xyz.$

365. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3,$

$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=5,$

$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=4.$

366. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c,$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,$

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a.$

367. $x+ay+a^2z+a^3=0,$
$x+by+b^2z+b^3=0,$
$x+cy+c^2z+c^3=0.$

368. $(a+1)x+ay+(a-1)z=a,$

$(a+1)y+az+(a-1)x=a+2,$

$(a+1)z+ax+(a-1)y=2a+\frac{1}{3}.$

369. $7u-13z=87,$
$3u+14x=57,$
$10y-3x=11,$
$2x-11z=50.$

370. $x+5z=29,$
$3y-2x+u=5,$
$4u-3z=13,$
$9x-7y-2u=8.$

371. $2x+3y-5z=1,$
$3x-4y+5u=15,$
$4x-3z+2u=9,$
$7x-2u=4.$

372. $2x-3y+2z=13,$
$4u-2x=30,$
$4y+2z=14.$
$5y+3u=32.$

373. $z+u-x-y=2.$
$2z-y+3u-4x=4,$
$z+3u-6x-15y=33.$
$4x+10y-20z-u=40.$

374. $x+2y+3z+4u=30,$
$2x-3y+5z-2u=3,$
$3x+4y-2z-u=1,$
$4x-y+6z-3u=8.$

375. $5y-4x-3z+2t=10,$
$5z-3x-2y+4t=12$
$4y-6x+2z-3t=19,$
$6y-5x+z-6t=8.$

376. $x-2y+z-3u=4,$
$7y+2x-4z+12u=12,$
$3x+y-3z+u=8,$
$2z-x+y+7u=3.$

377. $x-2y-3z+t=8,$
$5x+3y-4z+2t=5,$
$4x+7y-5z-3t=3,$
$2x-5y-3z+4t=11.$

378. $4x + 3y + 2z - v = 12,$
$4y + 3z + 2v - x = 24,$
$4z + 3v + 2x - y = 24,$
$4v + 3x + 2y - z = 20.$

379. $x + 5(y + z + t) = 16,$
$2y + 5(z + t + x) = 17,$
$3z + 5(t + x + y) = 18,$
$4t + 5(x + y + z) = 19.$

380. $3x + 2z - u = 4,$
$5y + 4z + t = 26,$
$y - 3z + 2u = 3,$
$6y - 3u + 2t = 5,$
$z + 3u = 18.$

381. $3x - 5y + 4z = 25,$
$4x - 3y + 2z - 2u = 24,$
$5x - 3t = 20,$
$10y - 3z - 5u = 12,$
$7y - 2t + 4u = 26.$

382. $2v - 3t + x - 4y + 10z = 7,$
$v + 2t - 3x + 5y - 9z = 0,$
$4v - t - 4x + 5y - 2z = 10,$
$v + t - x + 2y - 3z = 8,$
$3v + t - 2x - y - 2z = 6.$

383. $x + 3y - 6z - 6u = 8,$
$2x + 5y - 10z - 9u = 12,$
$2x + 4y - 8z - 9u = 14,$
$5x + 12y - 24z - 24u = 34.$

384. $x + 3y - 6z - 6u = 7,$
$2x + y - 4z - 2u = 15,$
$4x - y - 5z + 5u = 30,$
$5x + 10y - 22z - 20u = 39.$

385. Determinare a, b, c in modo che le sei equazioni seguenti siano verificate dai medesimi valori di x, y, z.

$ax - by + cz = 13,$
$cx - ay + bz = 17,$
$bx - ay + cz = 20,$
$5x - 6y + 4z = 15,$
$7x + 4y - 3z = 19,$
$2x + y + 6z = 46.$

(Si risolvano tre equazioni e si sostituiscano i valori di x, y, z nelle altre tre. Risolvendo queste tre rispetto ad a, b, c, si ottengono i valori richiesti).

386. Dimostrare che, se in un sistema di n equazioni ad n incognite i coefficienti d'una incognita sono eguali ordinatamente a quelli d'un'altra, il sistema è impossibile.

387. Quale cambiamento nella soluzione d'un sistema di n equazioni di primo grado ad n incognite si produce moltiplicando per una stessa quantità m i coefficienti d'una stessa incognita, oppure le quantità note?

Risposte.

342. $x = \dfrac{bc}{a+b}, \qquad y = \dfrac{ac}{a+b}.$

343. $x = \dfrac{ac+b^2}{a^2+b}, \qquad y = \dfrac{ab-c}{a^2+b}.$

344. $x = \dfrac{ce+bf}{af-cd}, \qquad y = \dfrac{af-cd}{ae+bd}.$

345. $x = \dfrac{1}{2}(a+b)^2, \qquad y = \dfrac{1}{2}(a-b)^2.$

346. $x = a+b, \qquad y = a-b.$

347. $x = \dfrac{a(c^2-b^2)}{c(a^2-b^2)}, \qquad y = \dfrac{b(a^2-c^2)}{c(a^2-b^2)}.$

348. $x = \dfrac{m(bm^2-a)}{m^4-1}, \qquad y = \dfrac{m(am^2-b)}{m^4-1}.$

349. $x = \dfrac{b}{2+bc}, \qquad y = \dfrac{b}{2}.$

350. $x = \dfrac{(a+1)(b+1)}{ab-1}, \qquad y = \dfrac{b-a}{ab-1}.$

365. $x = a, \qquad y = 2b, \qquad z = 3c.$

366. $x = \dfrac{2}{b+c-a}, \quad y = \dfrac{2}{a+c-b}, \quad z = \dfrac{2}{a+b-c}.$

367. $x = -abc, \quad y = ab+ac+bc, \quad z = -(a+b+c).$

368. $x = \dfrac{1}{3}, \quad y = \dfrac{7}{3} - 2a, \quad z = 2a + \dfrac{1}{3}.$

383. Sistema indeterminato. La quarta equazione è conseguenza delle altre tre.

384. Sistema impossibile. La quarta equazione è incompatibile col sistema delle due prime.

385. $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$

386. Raccogliendo in ciascuna equazione il coefficiente comune a comun fattore, si riconosce che le incognite si riducono in realtà ad $(n - 1)$.

387. Nel primo caso il valore dell'incognita viene diviso per m; nel secondo caso i valori di tutte le incognite vengono moltiplicati per m.

Problemi.

388. Un asino si lamentò con un mulo dicendo: non mi resterebbe che prendere un quintale del tuo carico, perchè il peso che mi opprime diventasse doppio del tuo. Il mulo soggiunse: e s'io prendessi un quintale del tuo peso, la mia soma diverrebbe tripla della tua. Si domandano i carichi delle due bestie.

389. Il diametro di una moneta d'argento da 2 lire è di mm. 27, e quello di una moneta da 5 lire è di mm. 37. Ponendo in fila alquante monete da 2 lire e alquante da 5 lire, s'ottenne una lunghezza d'un metro. Le monete tutte insieme valevano 117 lire. Quante ne furono adoperate d'una specie e quante dell'altra?

390. Io ho il doppio dell'età che voi avevate, quando io aveva l'età che voi avete; e quando avrete l'età che ho, in tutti e due avremo 90 anni.

391. Sette anni fa l'età di A era tripla di quella di B; da qui a 7 anni l'età di A sarà doppia di quella di B. Si trovino le due età.

392. Un tale ha in oro una somma equivalente ai $^5/_7$ di quella che ha in carta. Il settuplo del valore in oro, più il quintuplo di quello in carta, più 20 lire, fanno sei volte la somma totale. Quanto possiede in oro, e quanto in carta?

393. Si domandano due numeri tali che la somma dei loro reciproci sia eguale a 5, e che $^1/_2$ dell'uno e $^1/_3$ dell'altro diano una somma eguale al doppio del prodotto dei due nnmeri.

394. Si dividano i due numeri 80 e 90, ciascuno in due parti, e in modo che la somma d'una parte del primo e d'una di quelle del secondo sia eguale a 100, e che la differenza delle altre due parti sia eguale a 30.

395. Si trovi la frazione che diventa eguale a $^1/_3$, quando s'aggiunge 1 al numeratore, ed eguale a $^1/_4$, quando invece si aumenta di 1 il denominatore.

396. Sopra un cerchio, lungo 100 metri, scorrono con moto uniforme due punti che s' incontrano ogni 20 secondi, quando si muovono nella stessa direzione, ed ogni 4 secondi nel caso contrario. Si vuol sapere quanti metri siano percorsi in un secondo da ciascuno dei due punti.

397. Un numero di due cifre ha un valore quintuplo della somma delle sue cifre. Aumentando il numero di 9, si ottiene il numero scritto con le stesse cifre che il primo, ma schierate in ordine opposto.

398. Un numero di due cifre dà 100, se gli si aggiungono la prima cifra e il quadruplo della seconda. Sommato con 36, dà il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate in ordine opposto.

399. Un tale, avendo incontrato dei poveri, voleva dare 25 cent. a ciascuno; ma per fare questo gli mancavano 10 cent. Allora egli diede 20 cent. a ciascuno, e così gli rimasero 25 cent. Si domanda il numero dei poveri.

400. Un tale ha due verghe d'oro, che pesano insieme un kilogrammo. L'oro d'una verga è del titolo 900, quello dell'altra è del titolo 780. Fondendo insieme le due verghe, risulterebbe oro del titolo 831. Si domandano i pesi delle due verghe.

401. Una somma di danaro fu divisa tra alquante persone. Se le persone fossero state 3 di più, ciascuna avrebbe ricevuto 1 lira di meno; e se le persone fossero state 6 di meno, ciascuna avrebbe ricevuto 5 lire di più. Quante erano le lire da spartire?

402. Due corpi devono scorrere con moto uniforme sopra una stessa retta, partendo da due punti distanti l'uno dall'altro d metri. Se i corpi si moveranno nella stessa direzione, si incontreranno dopo m minuti; nel caso contrario l'incontro avverrà n minuti dopo della partenza. Si domandano le velocità dei due corpi.

403. Un treno dopo un'ora di viaggio è trattenuto per 15 minuti; indi riprende la corsa con velocità eguale ai $^3/_4$ della primitiva, e giunge a destinazione con 24 minuti di ritardo. Se, prima d'arrestarsi, il convoglio avesse percorsi 5 kilometri di piu, il ritardo sarebbe stato di 21 minuti. Si domandano la velocità del treno e la distanza delle due stazioni.

404. Un tale si recò in una osteria con due recipienti per farli riempire, uno con vino da 1,20 al litro, l'altro con vino da 1,60. La spesa doveva essere di lire 11,80. Essendosi scambiati i recipienti, il costo del vino discese a lire 11,30. Si domandano le capacità dei due recipienti.

405. Un campagnuolo ha alquanti buoi e del foraggio che basta a nutrirli per un certo numero di giorni. Se vendesse 75 buoi, il fieno basterebbe per 20 giorni di più; basterebbe invece per 15 giorni di meno, se la mandra venisse accresciuta di 100 buoi. Quanti buoi possiede il campagnuolo, e per quanti giorni è egli provvisto di fieno?

406. Due numeri, uno di una cifra, l'altro di cinque cifre, danno per somma 15390. Scrivendo il primo numero a sinistra del secondo, si ottiene un numero quadruplo di quello che si ottiene se si scrive il primo numero alla destra del secondo. Si trovino i due numeri.

407. La somma di due numeri, ciascuno di tre cifre, è uguale a 999. Scrivendo una virgola a destra del più grande e poi a destra l'altro numero, s'ottiene un numero sestuplo di quello, che si otterrebbe scrivendo il maggior numero a destra del minore e separandoli con una virgola. Si trovino i due numeri.

408. Una tale aveva due recipienti e in ciascuno una certa dose di vino. Versando del vino del primo recipiente nel secondo, e precisamente tanto quanto se ne trovava nel secondo; poi raddoppiando la quantità di vino rimasta nel primo col versarvi vino attinto dal secondo recipiente, e così anche una volta, travasando dal primo recipiente nel secondo tanto vino quanto ne era rimasto in quest'ultimo, ebbe infine 80 litri di vino in ciascun recipiente. Si domanda quanti litri di vino fossero da principio in ciascuno dei vasi.

409. Quanti capi di selvaggina hai ucciso in quest'anno? Bisognerebbe aggiungere 5 al numero di quelli che ho ucciso l'anno passato, per aver la metà di quelli che ho ucciso in quest'anno. Se poi dal triplo di questa metà sottrarrete 5, avrete per l'appunto il numero di quanti ne ho uccisi l'anno passato. Qual è il numero richiesto?

410. Lungo un cerchio si muovono due punti, e questi s'incontrano ad ogni 30 secondi, quando girano nella medesima direzione, e ad ogni 20 secondi, quando girano in sensi opposti. Nel secondo caso, quando sono a una distanza di 30 metri, dopo 3 secondi sono nuovamente a una distanza di 30 metri, l'uno dall'altro. Da questi dati si deducano la lunghezza del cerchio, e le velocità dei due mobili.

411. Tre città A, B, C si trovano ai vertici di un triangolo. Per andare da A a C, passando per B, bisogna percorrere 82 kilometri; da B a C, per A, 97; e per andare da A a B, passando per C, bisogna percorrere 80 km. Si domandano le mutue distanze delle tre città.

412 I lati d'un triangolo sono tali che la differenza tra il più grande e il più piccolo è 9 m. La somma del maggiore e del medio è 24. Il doppio del più grande, il triplo del medio, e il quadruplo del minore fanno 84. Si domandano le lunghezze dei tre lati.

413. Un mercante comperò 10 buoi, 120 pecore e 46 agnelli, spendendo perciò 9428 lire. Il costo di 3 pecore fu lo stesso che quello di 5 agnelli. Un bue, una pecora e un agnello costano insieme 548 lire. Quanto costò ciascun bue, quanto ciascuna pecora. quanto ciascun agnello?

414. Tre giocatori pattuiscono che ad ogni partita il perdente debba raddoppiare il danaro che ciascuno degli altri due ha in quel momento. Dopo tre partite, perdute una per ciascuno, ciascun giocatore ha 120 lire. Quanto possedeva ciascuno dei tre al principiare del giuoco?

415. Si risolva da capo il precedente esercizio, supponendo che ciascun giocatore si trovi in fine con a lire.

416. Un tale ha due recipienti ricolmi di vino, e un terzo vuoto. Per riempire quest'ultimo, occorre tutto il vino del primo e $^1/_5$ di quello del secondo, oppure tutto il vino del secondo e $^1/_3$ di quello del primo. Si domandano le capacità dei tre recipienti, sapendosi che in tutti e tre possono contenere 1440 litri.

417. Dividere il numero 96 in tre parti così che, dividendo la prima per la seconda, si ottenga 2 per quoziente e 3 per resto; e dividendo la seconda per la terza, risulti 4 per quoziente e 5 per resto. Quali sono le tre parti?

418. Tre compagnie d'operai, lavorando insieme, compirebbero un'opera in 30 giorni. Le due prime la compirebbero in 32, le due ultime in 120. Si dica in quanto tempo ciascuna compagnia, lavorando da sè sola, darebbe l'opera compiuta.

419. Per un certo lavoro vengono presi tre operai *A*, *B*, *C*. I due primi insieme compirebbero l'opera in 12 giorni; *B* e *C* la compirebbero in 20 giorni, e in 15 *A* e *C*. Si domanda in quanti giorni ciascun operaio lavorando da sè solo saprebbe compiere l'opera.

420. Un operaio ha lavorato per 74 giorni, parte in uno, parte in altro di tre luoghi, guadagnando giornalmente nel primo luogo 36 soldi, nel secondo 30 e nel terzo 24. In fine ricevette nei tre luoghi una stessa mercede. Si vuol sapere per quanti giorni abbia lavorato in ciascuno dei tre luoghi.

421. La somma delle tre cifre di un certo numero è uguale a 9. La cifra delle centinaia è uguale all'ottavo del numero rappresentato dalle altre due cifre; e la cifra delle unità è uguale all'ottavo del numero rappresentato dalle altre due cifre. Si trovi il numero.

422. In un numero di tre cifre la media è uguale alla semisomma delle estreme. Il numero è 48 volte la somma delle sue cifre. Sottraendo 198 dal numero stesso, si ottiene per resto il numero scritto con le stesse cifre del numero primitivo, ma schierate in ordine inverso. Si trovi il numero.

423. Un tale acquistò separatamente i carichi di tre vetture. La prima conteneva 30 misure di segala, 20 d'orzo e 10 di frumento; e tutto quanto fu acquistato con 230 lire. Con 138 lire fu acquistato il carico della seconda vettura composto di 15 misure di segala, 6 d'orzo e 12 di frumento. Infine nella terza vettura vi erano 10 misure di segala, 5 d'orzo e 4 di frumento, le quali costarono in tutto 75 lire. Si domanda il prezzo di una misura di ciascuna delle tre specie di biada.

424. Sommando ordinatamente, a tre a tre, i lati d'un quadrilatero, si ottengono i numeri seguenti: 130, 135, 147, 152 (metri). Si vuol conoscere la lunghezza di ciascuno dei lati.

425. La data dell'invenzione della stampa è espressa da un numero di 4 cifre. La cifra delle unità è doppia di quella delle decine; l'eccesso della cifra delle centinaia su quella delle decine è uguale alla cifra delle migliaia; la somma delle quattro cifre è uguale a 14. Se al numero in discorso si aggiunge 4905, si ottiene il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate in ordine opposto. In che anno fu dunque inventata la stampa?

426. Quattro giocatori convengono che il perdente debba raddoppiare la somma posseduta dagli altri. Ciascuno alla sua volta perde una partita, ed alla fine tutti hanno 32 lire. Quanto possedeva ciascuno al principio del giuoco?

427. Aggiungendo ciascuno di cinque numeri al quadruplo della somma degli altri quattro, si ottengono ordinatamente i numeri: 43, 49, 55, 61, 64. Si trovino i cinque numeri.

428. Si determinino i coefficienti a, b, c del trinomio:

$$a x^2 + b x + c$$

in modo che questo trinomio si annulli per $x = m$ e per $x = n$, ed assuma il valore p per $x = q$.

429. Siano a e b le quantità di due specie di vino che formano una prima mescolanza e p il prezzo medio; siano c e d le quantità delle stesse due specie di vino che formano la seconda mescolanza e q il prezzo medio; si esprimano i prezzi unitari delle due qualità di vino.

430. Si determinino a e b in modo che la frazione:

$$\frac{ax + b - 1}{bx + a + 1}$$

sia equivalente a $\frac{5}{6}$ per $x = 1$ ed a $\frac{6}{5}$ per $x = 3$.

CAPITOLO VII

CALCOLO DELLE POTENZE

216. Teor. *La potenza* m.esima *di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze* m.esime *dei singoli fattori.*

Dim. Sia $(abc\ldots h)$ un prodotto di quanti si vogliano fattori. La sua potenza *m.esima* è il prodotto di m fattori eguali ad $(abc\ldots h)$. Facendo una prima moltiplicazione [59], otteniamo:

$$a^2 b^2 c^2 \ldots . h^2.$$

Moltiplicando di nuovo per $(abc\ldots . h)$, si ottiene:

$$a^3 b^3 c^3 \ldots . h^3;$$

così continuando si trova per ultimo:

$$(abc\ldots h)^m = a^m b^m c^m \ldots h^m, \quad \text{c. d. d.}$$

217. Appl. Dovendo, ad es., elevare alla potenza *m.esima* l'espressione $(-a)$, questa si deve considerare come il prodotto dei due fattori -1 ed a; epperò [216] egli è:

$$(-a)^m = (-1)^m a^m.$$

Ora, se m è pari, $= 2n$, il primo fattore del secondo membro è [27] uguale a $+1$; in tal caso pertanto si ha:

$$(-a)^{2n} = a^{2n}.$$

Se poi m è dispari, $= 2n+1$, il primo fattore del secondo membro è [27] uguale a -1; quindi in tal caso abbiamo:

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

218. Teor. *La potenza* m.esima *di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze* m.esime *del dividendo e del divisore.*

Dim. Abbiamo per definizione:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b},$$

dove la frazione $\frac{a}{b}$ si deve intendere ripetuta m volte. Eseguendo la moltiplicazione delle frazioni, risulta:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a\,a\,a\ldots\ldots a}{b\,b\,b\ldots\ldots b},$$

ossia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad \text{c. d. d.}$$

219. Teor. *Il prodotto di due potenze di una stessa base è quella potenza della base stessa, che ha per esponente la somma dei due esponenti.*

Dim. Sia da moltiplicare a^m per a^n.

Il primo fattore è il prodotto di m fattori eguali ad a; e il secondo è il prodotto di n fattori pure uguali ad a. Ma, dovendo moltiplicare per un prodotto, si può [30, 1°] moltiplicare successivamente per i singoli fattori. Il risultato finale è dunque il prodotto di $(m + n)$ fattori eguali ad a; abbiamo cioè:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

220. Teor. *La potenza* n.esima *della potenza* m.esima *d'una quantità* a *è uguale alla potenza di* a, *che ha per esponente il prodotto* m n.

(*) Si accenna la trasformazione espressa da questa eguaglianza, dicendo che:

Per moltiplicare tra loro due potenze della stessa base, si sommano gli esponenti.

Dim. La potenza *n.esima* di a^m è il prodotto di n fattori eguali ad a^m. Effettuando [219] una prima moltiplicazione, si ottiene:

$$a^{m+m}.$$

Continuando nelle moltiplicazioni, si ha per ultimo:

$$a^{m+m+\dots+m},$$

nella quale espressione la lettera m si deve intendere ripetuta n volte. Abbiamo adunque:

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

222. Cor. *Dovendo elevare una quantità alla potenza* m.esima *e il risultato alla potenza* n.esima, *si può invece far prima la potenza* n.esima *e poi la potenza* m.esima.

Dim. Infatti, essendo [220]:

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{ed} \quad (a^n)^m = a^{nm},$$

ed essendo $mn = nm$, è anche:

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

223. Teor. *Il quoziente di due potenze della stessa base è quella potenza della base, che ha per esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e l'esponente del divisore.*

Dim. Sia da dividere a^m per a^n, e sia l'esponente del dividendo maggiore di quello del divisore.

Poichè in un prodotto si può sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto effettuato, e il dividendo a^m è il prodotto di m fattori ad a, sostituendo ad n

(*) La trasformazione espressa in questa eguaglianza si suol accennare dicendo che:

Per elevare a potenza una potenza, si moltiplicano tra loro gli esponenti.

fattori il loro prodotto a^n e ai rimanenti $(m - n)$ fattori il loro prodotto a^{m-n}, otteniamo:

$$a^m = a^n \cdot a^{m-n}.$$

Quest' eguaglianza mostra che (a^{m-n}) è la quantità per la quale si deve moltiplicare a^n, affinchè risulti a^m; egli è adunque:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \text{c. d. d.}$$

Oss. Non dimenticheremo di avere dimostrato l' ultima eguaglianza nella supposizione che sia $m > n$. Considereremo più avanti il caso, in cui sia $m = n$, oppure $m < n$.

224. Raccogliamo le formule dimostrate per il calcolo delle potenze. Esse sono le seguenti:

(1) $$(abc \ldots h)^m = a^m b^m c^m \ldots h^m.$$

(2) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

(3) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

(4) $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(5) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

In queste formule le lettere $a, b, c \ldots h$ rappresentano valori qualunque, senza nessuna restrizione; invece le lettere m ed n rappresentano numeri interi assoluti; e la formula (5) suppone di più che sia $m > n$.

225. I ragionamenti, che abbiamo fatti per dimostrare le regole per il calcolo delle potenze, suppongono tutti che ogni esponente sia almeno eguale a 2. È però facile riconoscere che le dette regole [224] sussistono anche quando agli esponenti si dia il valore 1. Ma nell' ultima (5) non attribuiremo questo valore alla lettera m, perchè allora l'esponente del dividendo non supererebbe quello del divisore.

226. Calcolando, per mezzo della moltiplicazione, le successive potenze del binomio $(a+b)$, si trova:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

I precedenti sviluppi inducono ad enunciare il seguente:

227. Teor. *Lo sviluppo della potenza* m.esima *del binomio* (a + b) *è un polinomio di* (m + 1) *termini. La lettera* a *si trova nel primo termine con l'esponente* m, *e nei termini successivi con esponenti successivamente decrescenti. La lettera* b *si trova nel secondo termine con l'esponente* uno, *e nei termini successivi con esponenti ascendenti* (*). *Il primo e l'ultimo termine dello sviluppo hanno coefficienti eguali all'unità; i coefficienti del secondo termine e del penultimo sono eguali ad* m.

Dim. Per la dimostrazione useremo del metodo di conchiusione da m ad $(m+1)$. Ammettiamo adunque che il teorema sussista per la potenza *m.esima*; sia cioè (dinotando con B, C, D... i coefficienti del 3°, 4°, 5°... termine dello sviluppo):

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \dots + mab^{m-1} + b^m,$$

(*) Dalla legge, a cui sono soggetti gli esponenti delle lettere a e b nello sviluppo di $(a+b)^m$, risulta manifesto che la somma degli esponenti, che le due lettere a e b hanno in un termine qualunque dello sviluppo, è costantemente uguale ad m. Perciò, e perchè non manca nessuna potenza di a e b di grado inferiore ad m, si dice che lo sviluppo di $(a+b)^m$ è un polinomio *del grado* m, *omogeneo e completo rispetto alle lettere* a e b.

e moltiplichiamo i due membri per il binomio $(a + b)$, affine di ottenere lo sviluppo di $(a + b)^{m+1}$.

$$
\begin{array}{l}
a^m + m a^{m-1} b + B a^{m-2} b^2 + C a^{m-3} b^3 + \cdots + m a b^{m-1} + b^m \\
\hfill a + b \\
\hline
a^{m+1} + m a^m b + B a^{m-1} b^2 + C a^{m-2} b^3 + \cdots + m a^2 b^{m-1} + a b^m \\
\quad + a^m b + m a^{m-1} b^2 + B a^{m-2} b^3 + \cdots + m a b^m + b^{m+1} \\
\hline
a^{m+1} + \left.\begin{matrix} m \\ +1 \end{matrix}\right\} a^m b + \left.\begin{matrix} B \\ +m \end{matrix}\right\} a^{m-1} b^2 + \left.\begin{matrix} C \\ +B \end{matrix}\right\} a^{m-2} b^3 + \cdots + \left.\begin{matrix} 1 \\ +m \end{matrix}\right\} a b^m + b^{m+1}
\end{array}
$$

Questo risultato prova che, se il teorema sussiste veramente per la potenza *m.esima*, sussiste necessariamente per la potenza successiva. Ma la legge fu verificata per la quarta potenza (e per le precedenti); essa è dunque generale, c. d. d.

228. Dalla precedente dimostrazione risulta che:

Ogni coefficiente dello sviluppo della potenza m.esima *d'un binomio è la somma del coefficiente dello stesso posto e del coefficiente che precede quest'ultimo nello sviluppo della potenza* (m — 1).esima.

229. In base a questa legge si può comporre il seguente *Triangolo di Tartaglia* contenente i coefficienti delle potenze d' un binomio.

1ª.	1,	1.									
2ª.	1,	2,	1.								
3ª.	1,	3,	3,	1.							
4ª.	1,	4,	6,	4,	1.						
5ª.	1,	5,	10,	10,	5,	1.					
6ª.	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1.				
7ª.	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1.			
8ª.	1,	8,	28,	56,	70,	56,	28,	8,	1.		
9ª.	1,	9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9,	1.	
10ª.	1,	10,	45,	120,	210,	252,	210,	120,	45,	10,	1.

. . . .

Es. Così, ad es., per la sesta potenza del binomio $(a + b)$ si ha:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + \\ + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

230. Oss. Volendo lo sviluppo di $(a - b)^m$, basta mutare b in $(-b)$ nello sviluppo di $(a + b)^m$. Perchè poi [217] le potenze ad esponente pari di b e $(-b)$ sono eguali, anche nel segno, e quelle ad esponente dispari hanno segni opposti, la diversità tra gli sviluppi di $(a + b)^m$ e di $(a - b)^m$ consiste nei segni, e questo soltanto nei termini nei quali la seconda parte del binomio è affetta da esponente dispari. Perciò è ad es., :

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + \\ + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

231. Oss. Nello sviluppo di $(a + b)^m$ possiamo attribuire alle lettere a e b valori ad arbitrio. Ponendo $a = 1$ e $b = 1$, risulta:

$$2^m = 1 + m + B + C \ldots . + m + 1,$$

cioè a dire che:

La somma dei coefficienti dello sviluppo della potenza m.esima *di un binomio è uguale alla* m.esima *potenza di* 2. (*).

232. Abbiamo imparato [288] a formare successivamente i coefficienti delle potenze del binomio; però qualsivoglia coefficiente si può calcolare indipendentemente dagli altri. Il modo è indicato dal seguente:

233. Teor. *Il* k.esimo *coefficiente* (**) *della potenza*

(*) Questo corollario, del resto, è una conseguenza immediata del modo di costruzione del triangolo di *Tartaglia*.

(**) Si prescinde dal coefficiente del primo termine. Epperò il *k.esimo* coefficiente è quello del $(k + 1)$.*esimo* termine.

m.esima *d'un binomio è uguale al quoziente di due prodotti, ciascuno di* k *numeri interi consecutivi. Nel dividendo il maggior fattore è* m; *nel divisore il più grande fattore è* k.

Dim. Per la 4ª potenza, ad es., i cui coefficienti sono ordinatamente 4, 6, 4 ed 1, è infatti:

$$4 = \frac{4}{1},\ 6 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2},\ 4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3},\ 1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Ammettiamo che il teorema abbia luogo per la potenza *m.esima*, e vediamo di dimostrare che allora esso ha luogo anche per la potenza susseguente.

Prendendo a considerare, ad es., il *k.esimo* coefficiente della potenza $(m + 1)$*.esima*, dobbiamo rammentarci che esso è uguale [228] alla somma dei coefficienti *k.esimo* e $(k - 1)$*.esimo* della potenza *m.esima*. Questi coefficienti, per ipotesi, sono (*):

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+2)(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)k},$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)}.$$

Dovendo sommare queste due frazioni, dobbiamo ridurle innanzi tutto a denominatore comune. Perciò basta moltiplicare i due termini della seconda per k. Poi bisogna sommare i numeratori. Raccogliendo nella somma dei numeratori il fattor comune, si ha:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+2)\{m-k+1+k\}.$$

(*) Affine di scrivere l'ultimo fattore del numeratore, si osserva che nel 2° fattore da m è sottratto 1, nel 3° da m è sottratto 2, nel 4° da m è sottratto 3, ecc.; si otterrà dunque il *k.esimo* fattore, se da m si sottragga $(k - 1)$. È poi:

$$m - (k - 1) = m - k + 1.$$

L'ultimo fattore è uguale ad $(m+1)$; scrivendolo al primo posto, troviamo, ad esprimere il *k.esimo* coefficiente della $(m+1)$.*esima* potenza, la formula:

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,.\,.\,.\,.\,.\,k}.$$

E così possiamo conchiudere che, se il teorema da dimostrare sussiste veramente per la potenza *m.esima*, esso ha luogo anche per la successiva. Ma si è riconosciuto che il teorema ha luogo in fatto per la 4ª potenza (e per le antecedenti); esso sussiste adunque anche per la 5ª, epperò anche per la 6ª, e così via.

234. Ora possiamo scrivere generalmente:

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^{m-2} b^2 +$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} a^{m-k} b^k +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)} a^{m-k-1} b^{k+1} + \ldots$$

$$\ldots + m a b^{m-1} + b^m.$$

235. Oss. Confrontando due coefficienti successivi, si vede che, arrivati ad un termine qualunque dello sviluppo della potenza *m.esima* del binomio $(a+b)$, per calcolare il coefficiente del termine successivo basta moltiplicare il coefficiente dell' ultimo termine, che si è scritto, per l' esponente che ha in questo termine la lettera a, e dividere il prodotto per l' esponente, aumentato di una unità, dal quale nel termine stesso è affetta la lettera b.

Così, ad es., si trova:

$$(a+b)^{15} = a^{15} + 15a^{14}b + 105a^{13}b^2 + 455a^{12}b^3 + \text{ecc.}$$

236. Def. Una successione di quantità, ciascuna delle quali occupa rispetto alle altre un posto determinato, si dice *serie*.

Una serie si dice *crescente* o *decrescente*, quando ciascun suo termine sia rispettivamente maggiore o minore di quello che lo precede.

Una serie illimitata è *indefinitamente* crescente, quando, prolungandola abbastanza, si possono trovare termini che superino una quantità data, qualsivoglia.

Una serie illimitata, con termini tutti positivi, si dice *indefinitamente* decrescente, quando, prolungandola abbastanza, si possono trovar termini minori di qualsivoglia quantità data, positiva, per quanto piccola.

237. Teor. *Le potenze successive di una quantità maggiore di uno formano una serie indefinitamente crescente.*

Dim. Sia una quantità qualunque $a > 1$; dinotando con h l'eccesso di a sull'unità, abbiamo:

$$a = 1 + h.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per a^m, otteniamo:

$$a^{m+1} = a^m + a^m h.$$

E poichè il termine $a^m h$ è positivo (perchè prodotto di quantità positive), egli è [15]:

$$a^{m+1} > a^m,$$

ossia ogni potenza di a è maggiore della precedente.

Sia ora una quantità qualsivoglia b, comunque grande. Dico che, elevando a a potenza con esponente abbastanza grande, si ottiene un risultato maggiore di b.

Moltiplicando ordinatamente i due membri dell'eguaglianza:

$$a - 1 = h \qquad (1)$$

e quelli delle disuguaglianze che si ottengono successivamente, per i due membri della disuguaglianza:

$$a > 1,$$

otteniamo:

$$a^2 - a > h \tag{2}$$

$$a^3 - a^2 > h \tag{3}$$

$$a^4 - a^3 > h \tag{4}$$

. . . .

. . . .

$$a^{m-1} - a^{m-2} > h \tag{$m-1$}$$

$$a^m - a^{m-1} > h; \tag{m}$$

in quest' ultima disuguaglianza la lettera m rappresenta un numero intero qualsivoglia.

Sommando [51] i primi membri dell' eguaglianza (1) e delle $(m-1)$ disuguaglianze susseguenti e riducendo, si ottiene $(a^m - 1)$. La somma dei secondi membri, perchè tutti eguali ad h ed in numero m, è uguale ad mh. È dunque:

$$a^m - 1 > mh,$$

ed a più forte ragione:

$$a^m > mh, \tag{*}$$

e ciò qualunque sia l' intero m.

Supponiamo ora che, dividendo b per h, si ottenga il quoziente q; dimodochè è:

$$hq = b.$$

(*) Si può dimostrare questa disuguaglianza, ricorrendo alla formula del binomio [234], nel modo seguente. Per detta formula, essendo $a = 1 + h$, si ha:

$$a^m = (1+h)^m = 1 + mh + \text{ecc.},$$

donde $$a^m > mh.$$

Allora, moltiplicando h per un intero n, maggiore di q, si ottiene:

$$nh > b.$$

Ma, attribuendo questo intero n per esponente ad a, sappiamo che risulta:

$$a^n > nh.$$

È dunque a maggior ragione:

$$a^n > b, \qquad \text{c. d. d.}$$

238. Teor. *Le potenze successive di una quantità positiva, minore di* uno, *formano una serie indefinitamente decrescente.*

Dim. Sia una quantità qualunque a, positiva e minore di 1. Essendo $a < 1$, è $\frac{1}{a} > 1$; epperò [237, 218] la serie:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \dots \qquad (1)$$

è indefinitamente crescente.

Intanto dalla disuguaglianza:

$$\frac{1}{a^{m+1}} > \frac{1}{a^m}$$

si conchiude essere:

$$a^m > a^{m+1},$$

ossia che la serie delle potenze successive della quantità a è decrescente.

Resta a provare che la serie è *indefinitamente* decrescente; che, cioè, i suoi termini da un certo in poi sono minori di una quantità data qualunque, per quanto piccola; sia b questa quantità.

Poichè la serie (1) è indefinitamente crescente, confrontando successivamente i suoi termini con la quantità $\frac{1}{b}$, arriveremo ad uno, sia desso l'*n.esimo*, il quale sia maggiore di $\frac{1}{b}$. Ma dalla disuguaglianza:

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{b}$$

si conchiude essere:

$$a^n < b.$$

Così resta dimostrato che *ecc.*

Esercizi.

Si semplifichino le seguenti espressioni:

431. $a^{n-1} \cdot b^{n+1}\, a^4 b^2. \qquad (-ab)^2 \cdot (ab)^{n-2} \cdot (-a)^3.$

432. $(a+b)^m \cdot (a-b)^m. \qquad (a-b)^3 \cdot (b-a)^5.$

433. $a(b-a)^3 \cdot a^{n-1} b (a-b)^{n-3} \cdot a^2 b^{n-1}.$

434. $(a^2-b^2)^{2n+1} (b-a)^{2n} (a+b)^{2n}.$

435. $\left(\frac{26a}{5b}\right)^2 \left(\frac{-5b^2}{13a}\right)^2. \qquad \left(\frac{12a^2}{b}\right)^n \left(\frac{b}{3c}\right)^n \left(\frac{c}{4a^2}\right)^n.$

436. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^3 \frac{(a-b)^3}{(x-y)^3}.$

437. $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{d-c}{a+b}\right)^4.$

438. Si sviluppi $\left(y^2 + \frac{c^3}{y}\right)^5$ e $\left(\frac{3a^2}{b} - \frac{3}{a}\right)^4.$

439. Si riconosca che il polinomio:

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Hx + K,$

ove si ponga $x = y - \frac{B}{Am}$, prende la forma:

$Ay^m + B'y^{m-2} + C'y^{m-3} + \ldots + H'y + K',$

dove manca il termine che è di grado $(m-1)$.*esimo* rispetto ad y.

440. Si dimostri che il numero dei termini dello sviluppo dell'*m.esima* potenza del trinomio $(a+b+c)$ è uguale ad $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

(Si svolga [234] prima la potenza *m.esima* di $(a+b+c)$, riguardando $(b+c)$ come un solo termine).

441. Si dimostri che la somma dei coefficienti di posto pari nella potenza *m.esima* del binomio è uguale alla somma dei coefficienti di posto dispari. (Basta porre $a = 1$ e $b = -1$ nella formula del § 234).

442. Si dimostri che nello sviluppo di $(a+b)^m$ i coefficienti di due termini equidistanti dagli estremi sono eguali. (Scritti due coefficienti così fatti secondo il § 233, si osserverà che il prodotto del numeratore del primo per il denominatore dell'altro è uguale al prodotto del denominatore del primo per il numeratore del secondo. Ecc.).

443. Si dimostri che il coefficiente *k.esimo* della *m.esima* potenza del binomio è uguale alla somma dei coefficienti di posto $(k-1)$.*esimo* delle potenze precedenti. (Il coefficiente *k.esimo* dell'*m.esima* potenza del binomio si suol rappresentare col simbolo $\binom{m}{k}$, che si legge m sopra k. Così il teorema del § 228 si può rappresentare scrivendo:

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}.$$

In questa relazione si muti m in $(m-1)$, in $(m-2)$... in $m-(m-n)$; si sommino le relazioni che così si ottengono, e si riduca).

Risposte.

431. $(ab)^{n+3}$. $-a^{n+3}b^n$. **432.** $(a^2-b^2)^m$. $-(a-b)^8$.

433. $-(a-b)^n a^{n+2}b^n$. **434.** $(a^2-b^2)^{4n+1}$.

435. $4b^2$. 1. **436.** 1. **437.** $\dfrac{c-d}{(a+b)^3}$.

CAPITOLO VIII

ESTRAZIONE DI RADICE DAI NUMERI
CALCOLO DEI RADICALI

Preliminari.

240. Sappiamo [149] che, dato un numero a qualunque, razionale od irrazionale, e dato un intero m qualunque, vi è sempre un numero ed uno solo, razionale od irrazionale, che elevato alla potenza *m.esima* riproduce il numero a. Il numero dotato di tale proprietà si chiama radice *m.esima* del numero a e si rappresenta col simbolo $\sqrt[m]{a}$. Egli è adunque, per definizione, :

$$\sqrt[m]{a}^{\,m} = a.$$

L'operazione, mediante la quale si trova la radice *m.esima* d'un numero, si dice *estrazione della radice m.esima* da quel numero. Il numero dato si chiama *radicando* e l'intero m si chiama *indice della radice*. (*).

La radice *seconda* e *terza* si sogliono chiamare rispettivamente radice *quadrata* e *cubica*. L'indice, quando è uguale a 2, non si scrive.

241. Qualunque numero, che elevato alla potenza *m.esima* dia un risultato minore di un dato radicando a, si chiama radice *m.esima di* a *per difetto*.

Qualunque numero, che elevato alla potenza *m.esima* dia un risultato maggiore di un dato radicando a, si chiama *radice m.esima di* a *per eccesso*.

(*) In altro modo: quando sono dati una potenza e l'esponente e si deve determinare la base, questa si chiama *radice*, la potenza *radicando*, e l'esponente si chiama *indice* della radice.

Il più piccolo numero che si conosca, il quale, aggiunto ad una radice per difetto, o sottratto da una radice per eccesso, la muta rispettivamente in radice per eccesso o radice per difetto, si chiama *grado di approssimazione* di quella radice.

Se il grado d'approssimazione è il numero k, la radice si chiama, secondo il caso, *radice* m.esima *a meno* k *per difetto*, o *radice* m.esima *a meno* k *per eccesso* di quel dato radicando.

Il maggior numero intero, che elevato alla potenza *m.esima* dà un risultato che non supera il radicando, si suol chiamare *radice* m.esima *a meno* uno *per difetto*. È meglio chiamarlo *radice* m.esima *intera* di quel radicando.

242. Teor. *La radice* m.esima *intera di un radicando non intero è la radice* m.esima *intera della parte intera del radicando.*

Dim. Sia un numero a, frazionario od irrazionale, e sia b la sua parte intera; cosicchè è:

$$b < a < b + 1.$$

Indicando con r la radice *m.esima* intera di a, abbiamo: $$r^m < a < (r + 1)^m.$$

Ora, poichè l'intero r^m è minore di a, e b è contenuto in a, è manifesto che r^m non può superare l'intero b.

D'altra parte, essendo:

$$b < a \quad \text{ed} \quad a < (r + 1)^m,$$

abbiamo, a maggior ragione, $b < (r + 1)^m$.

Egli è adunque:

$$r^m \leqq b < (r + 1)^m,$$

donde risulta appunto che r, che è la radice *m.esima* intera di a, è ad un tempo anche la radice *m.esima* intera di b, parte intera di a.

243. Teor. *Dato un numero qualunque, la frazione che ha per denominatore un intero* k, *e che ha per numeratore la radice* m.esima *intera del prodotto del numero dato e della potenza* m.esima *di* k, *è una radice* m.esima *del numero dato a meno di* $\frac{1}{k}$ *per difetto.*

Dim. Se la frazione a termini interi $\frac{r}{k}$ è radice *m.esima* di un numero dato a a meno di $\frac{1}{k}$ per difetto, abbiamo:

$$\left(\frac{r}{k}\right)^m \gtreqless a < \left(\frac{r+1}{k}\right)^m,$$

epperò [218] anche:

$$\frac{r^m}{k^m} \gtreqless a < \frac{(r+1)^m}{k^m}.$$

Moltiplicando queste tre quantità per k^m, si ottiene:

$$r^m \gtreqless a \cdot k^m < (r+1)^m,$$

dove si riconosce che l'intero r è appunto la radice *m.esima* intera del prodotto $(a \cdot k^m)$. Così resta dimostrato che, *ecc.*

244. Oss. Dai due teoremi precedenti risulta che, per saper estrarre da un numero qualunque la radice *m.esima* con una approssimazione prestabilita qualsivoglia, basta saper estrarre la radice *m.esima* intera da un numero intero.

Estrazione della radice m.esima intera da un numero intero.

245. La potenza *m.esima* di 10 è il numero scritto con la cifra 1 ed m zeri; ed è il più piccolo numero intero di $(m+1)$ cifre. Ne segue che la radice *m.esima* intera di un intero, scritto con m cifre o meno, è un numero d'una sola cifra. Per trovare la radice intera in questo caso l'Aritmetica non possiede nessun artificio; ma bisogna fare, una dopo l'altra, le potenze *m.esime* dei numeri 1, 2, 3..., e confrontarle col radicando dato. In tal modo, ad es., si trova che 2 è la radice settima intera di 537; ed è in fatti:

$$2^7 < 537 < 3^7.$$

246. La radice *m.esima* intera di un numero intero a, scritto con più di m cifre, ha più di una cifra. Indicando con x il numero delle decine della radice e con y la cifra delle unità, abbiamo:

$$(10x + y)^m \overline{\gtrless} a < (10x + y + 1)^m.$$

Nel primo membro della limitazione sostituiamo ad y lo *zero*, che è il più piccolo suo valore possibile; nel terzo membro sostituiamo ad y il maggior valore che può assumere, cioè 9. Così otteniamo:

$$(10x)^m \overline{\gtrless} a < (10x + 10)^m$$

epperò [216]:

$$10^m x^m \overline{\gtrless} a < 10^m (x + 1)^m$$

e per conseguenza:

$$x^m \overline{\gtrless} \frac{a}{10^m} < (x + 1)^m.$$

E perchè per dividere un intero a per 10^m basta separare con una virgola m cifre alla destra di a, e perchè un intero, che non superi un numero non intero, non può superare la parte intera di codesto numero, se indichiamo con a' la parte intera del quoziente $a : 10^m$, possiamo scrivere:

$$x^m \overline{\gtrless} a' < (x + 1)^m.$$

Quindi il:

247. Teor. *Il numero delle decine della radice* m.esima *intera di un numero intero è la radice* m.esima *intera del numero che si ottiene dal radicando col sopprimere* m *cifre alla destra.*

248. Ed ora, supponendo di conoscere il numero d delle decine della radice *m.esima* intera dell'intero a, passiamo alla ricerca della cifra y delle unità della radice stessa.

Presa la relazione :

$$(d \cdot 10 + y)^m \gtreqless a,$$

si sviluppi [227] la potenza *m.esima* del binomio $(d \cdot 10 + y)$, arrestandosi al secondo termine. Si ottiene [216] :

$$d^m \cdot 10^m + md^{m-1} \cdot 10^{m-1} \cdot y \gtreqless a,$$

donde intanto :

$$md^{m-1}\, y \gtreqless \frac{a - d^m \cdot 10^m}{10^{m-1}}.$$

Esaminando il secondo membro, non è difficile riconoscere che la parte intera del numero da esso rappresentato si ottiene : sottraendo dal radicando, dopo d'aver soppresse in esso m cifre alla destra, la potenza *m.esima* del numero delle decine della radice, e scrivendo poi alla destra del residuo la cifra d'ordine più elevato tra quelle cancellate. E perchè il numero rappresentato dal primo membro è un intero, indicando con i la parte intera del secondo, abbiamo :

$$md^{m-1}\, y \gtreqless i,$$

donde $$y \gtreqless \frac{i}{md^{m-1}}.$$

Notiamo infine che, poichè il numero y è intero, esso non può superare il quoziente *intero* q della divisione indicata nel secondo membro ; si può dire adunque che codesto quoziente è un limite superiore della cifra delle unità della radice.

249. Nel precedente paragrafo si è visto come, conoscendo il numero d delle decine della radice *m.esima* intera d' un intero a, si trovi un limite superiore della cifra y delle unità. Così, poichè la radice cercata è al più $(d \cdot 10 + q)$, il quoziente q sarà la cifra delle unità, se la potenza *m.esima* del numero $(d \cdot 10 + q)$ non sarà maggiore del radicando. Nel caso contrario si farà la potenza *m.esima* del numero prossimo inferiore, ed eventualmente del successivo, inferiore, sino a che si ottenga un risultato che non superi il radicando. Sottraendo quest'ultimo numero dal radicando, si ottiene *il resto dell'estrazione di radice.*

250. Ora possiamo proporci e condurre a compimento l'estrazione di radice di qualunque grado da qualunque numero. La regola generale si ricava facilmente anche da un caso determinato, che prenderemo all'intento di fermar meglio il discorso. Proponiamoci adunque di estrarre la radice *settima* intera del numero $a = 53\,789\,648\,935\,678\,904$.

Dobbiamo [247] anzitutto sopprimere *sette* cifre alla destra di a, e poi cercare la radice settima intera del numero $a' = 5\,378\,964\,893$, perchè così si trova il numero delle decine della radice domandata. Trovato il numero delle decine, sapremo [248, 249] poi determinare la cifra delle unità.

La questione non ha cambiato natura, perchè ancora si tratta dell'estrazione di radice *settima*; ma il nuovo radicando a' ha *sette* cifre di meno che il primitivo. Alla destra di a' sopprimeremo *sette* cifre, perchè la radice *settima* del numero $a'' = 537$, che rimane, è [247] il numero delle decine della radice di a'; e trovato il numero delle decine, sappiamo poi trovare la cifra delle unità.

Così siamo pervenuti ad un numero, la cui radice settima intera è [245] minore di 10. Formando le *settime* potenze dei numeri naturali successivi, si trova che 2 è la radice *settima* intera del numero 537. Così si è determinato il numero delle decine della radice di a'. Per determinare la cifra delle unità, si sottrae [248] la *settima* potenza di 2, che è 128, da a'', e alla destra del residuo si scrive la cifra d'ordine più elevato del gruppo di sette cifre prossimo al primo a sinistra. Poi si divide il numero:

$$r' = 4098 \quad \text{per} \quad 7 \cdot 2^6 = 448.$$

Il quoziente intero 9, od è la seconda cifra della radice, o la supera. Poichè la settima potenza di 29 supera a', si fa la settima potenza di 28, poi quella di 27, e così via. In questo caso, soltanto 24^7 si può sottrarre da a'; il residuo è 792 493 469.

Il numero 24, radice intera di a', è soltanto il numero delle decine della radice di a. Poichè da a' si è sottratto $d^m = 24^7$, per trovare la cifra delle unità si scrive [248] alla destra dell'ultimo residuo la cifra d'ordine più elevato del gruppo seguente, e si divide il numero 7 924 934 695 per $7 \cdot 24^6 = 1\,337\,720\,832$. Il quoziente intero 5, od è la cifra delle unità della radice cercata, o la supera.

Provando, si trova che la cifra 5 è troppo forte; è invece da ritenere la cifra 4, perchè da a si può sottrarre $244^7 = 51\,490\,698\,625\,368\,064$, e si trova per resto finale $r = 2\,298\,950\,310\,310\,840$.

Si conchiude essere:

$$244^7 + r = a < 245^7,$$

ossia che 244 è la radice *settima* intera del numero a.

La cura di raccogliere la regola generale si lascia allo studioso, il quale in tutto l'argomento precedente avrà osservato un'analogia con quanto ha imparato in Aritmetica trattando della radice quadrata.

Radici di quantità algebriche.

251. Def. *Si chiama radice* m.esima *d' una quantità data ogni quantità che, elevata alla potenza* m.esima, *riproduca la quantità data.*

Ogni radice *m.esima* d'una quantità a si rappresenta col simbolo $\sqrt[m]{a}$. Se non c'è radice, questo simbolo non significa nessuna quantità; se mai ci sono più radici, esso ha altrettanti valori. Abbiamo adunque, per definizione, l'eguaglianza:

$$\sqrt[m]{a}^{\,m} = a.$$

Il simbolo $\sqrt[m]{a}$ si dice *radicale*; e un'espressione algebrica contenente radicali si dice *irrazionale*. Ma questa denominazione allude solo alla forma, dacchè manifestamente per valori convenienti del radicando e dell'indice il valore di un radicale può essere razionale.

Oss. La definizione di radice comprende anche il caso in cui l'indice è uguale ad *uno*, perchè si è considerato il caso in cui l'esponente d'una potenza è uguale ad *uno*. E poichè la *prima* potenza d'una quantità è la quantità stessa, anche la radice *prima* d'una quantità è la quantità stessa. Egli è così, per definizione, :

$$\sqrt[1]{a} = a.$$

Un'espressione razionale si può dunque considerare come un radicale d'indice *uno*; e così nelle regole del calcolo con radicali è compreso il caso che tra i radicali ci siano forme razionali (*). (Questo naturalmente suppone, ciò che ha luogo in fatto, che le regole del calcolo dei radicali valgano anche se l'indice sia eguale all' unità).

252. Sappiamo [27] che il valore numerico della potenza *m.esima* d'una quantità algebrica si ottiene elevando alla potenza *m.esima* il valor numerico della base. Per conseguenza si troverà il valore numerico della radice *m.esima* d'una quantità algebrica estraendo la radice *m.esima* dal valor numerico della quantità data. Per questo riguardo qualsiasi quantità algebrica avrebbe una radice *m.esima* ed una soltanto.

Per conto del segno bisogna distinguere quattro casi:

1°. Se il radicando è positivo e l'indice è pari, ci sono due radici: e queste sono numericamente uguali e di segni opposti.

2°. Se il radicando è positivo e l'indice è dispari, c'è una sola radice, e questa è positiva.

3°. Se il radicando è negativo e l'indice è pari, non c'è nessuna radice, perchè qualunque quantità positiva o negativa, elevata a potenza pari dà un risultato positivo.

4°. Infine, se il radicando è negativo e l' indice è dispari, c' è una sola radice, e questa negativa.

253. Ora dobbiamo considerare le trasformazioni delle espressioni contenenti radicali. In questo ci restringeremo a trattare la parte aritmetica dell'argo-

(*) Si consegue un vantaggio analogo a quello che si ottiene in Aritmetica stabilendo che il denominatore d'una frazione possa essere uguale anche all'unità. (Il calcolo dei radicali presenta frequenti analogie con quello delle frazioni aritmetiche).

mento; considereremo cioè soltanto relazioni tra valori assoluti. Così ogni radicando sarà soltanto un valore numerico (senza segno), ed ogni radicale avrà uno ed un solo valore aritmetico. Rimettiamo a ciascun caso particolare le considerazioni relative ai segni di radicandi e radicali algebrici.

Calcolo dei radicali.

254. Teor. *Il valore di un radicale non viene alterato, se si moltiplicano l' indice e l' esponente del radicale per un medesimo numero intero.* (*).

Dim. Sia, ad es., il radicale $\sqrt[m]{a^n}$ ed un intero qualunque p. Dico essere:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

È intanto, per definizione [240],:

$$\sqrt[mp]{a^{np}}^{\,mp} = a^{np}.$$

Sappiamo [220] poi che, dovendo elevare una quantità alla potenza *mp.esima*, si può elevare prima a potenza con esponente m, e poi il risultato a potenza con esponente p. Applicando questo teorema alla nostra eguaglianza, essa si trasforma nella seguente:

$$\left(\sqrt[mp]{a^{np}}^{\,m}\right)^p = (a^n)^p.$$

E perchè, se due potenze simili sono eguali, tali sono anche le basi (**), dall' ultima eguaglianza si con-

(*) Già questo teorema richiederebbe commenti se si volesse applicarlo a radicali algebrici. [252]

(**) In Algebra due potenze simili possono essere uguali senza che siano eguali le basi. Infatti è, ad es.,:

$$(+5)^2 = (-5)^2.$$

chiude che è:

$$\sqrt[mp]{a^{np}}^{\,m} = a^n .$$

Questa eguaglianza infine dice appunto che è:

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}, \qquad \text{c. d. d.}$$

255. Cor. 1°. *Qualsivoglia radicale si può trasformare in uno di equivalente il cui indice sia un multiplo qualunque dell' indice.*

Perciò basta moltiplicare [254] l' indice e l' esponente del radicale dato per il quoziente della divisione del multiplo dell' indice per l' indice.

256. Cor. 2°. *Un' espressione razionale si può mettere sotto un segno radicale con qualsivoglia indice, purchè la si elevi a potenza con esponente uguale all' indice.*

Infatti qualsivoglia quantità razionale si può considerare come un radicale d' indice *uno*, e qualunque intero è multiplo dell' unità.

Così è, ad es., :

$$a = \sqrt[1]{a} = \sqrt[m]{a^m}$$

(la quale eguaglianza del resto è una conseguenza immediata della definizione di radice. [251]).

257. Cor. 3°. *Dati più radicali ed un multiplo comune dei loro indici, i radicali si possono trasformare in altri rispettivamente ad essi equivalenti, i quali abbiano per indice comune il dato multiplo degl' indici.* [255, 254].

258. Oss. Se, volendo ridurre più radicali dati a medesimo indice, si prende per multiplo comune degl' indici il loro prodotto, l' operazione riesce semplificata, perchè il quoziente della divisione del multiplo degl' indici per un indice qualunque è il prodotto degli altri indici; per questo caso l' operazione è descritta nella seguente:

Regola. *Si riducono più radicali ad indice comune, moltiplicando l' indice e l' esponente di ciascun radicale per il prodotto degl' indici di tutti gli altri.*

Es. Così le espressioni:

$$\sqrt[m]{a^n}, \qquad \sqrt[p]{b^q}, \qquad \sqrt[r]{c^s}, \qquad d$$

sono rispettivamente equivalenti ai radicali:

$$\sqrt[mpr]{a^{npr}}, \qquad \sqrt[mpr]{b^{mqr}}, \qquad \sqrt[mpr]{c^{mps}}, \qquad \sqrt[mpr]{d^{mpr}}.$$

259. Cor. 4°. *Se l' indice e l' esponente d' un radicale hanno un fattore comune, questo fattore si può sopprimere, chè il valore del radicale non viene alterato.*

Così è, ad es.,:

$$\sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^5}, \qquad \sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}.$$

260. Cor. 5°. *Se in un radicale l' esponente del radicando è divisibile per l' indice, si può sopprimere il segno di radice, purchè in luogo dell' esponente si ponga il quoziente della divisione dell' esponente per l' indice.*

Adunque, *purchè* m *sia divisibile per* n, sussiste l' eguaglianza:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

(Ma non dobbiamo dimenticare che a questa conchiusione siamo pervenuti nell' ipotesi che m sia divisibile per n, nel qual caso soltanto si può dire che il simbolo $a^{\frac{m}{n}}$ rappresenta il prodotto di $\frac{m}{n}$ fattori eguali ad a). (*).

261. Consideriamo l'eguaglianza:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[p]{a^q}.$$

Sappiamo [254] che l'eguaglianza può sussistere senza che indici ed esponenti siano rispettivamente uguali. Riducendo i radicali ad indice comune, otteniamo:

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[mp]{a^{mq}}.$$

Da questa relazione si conchiude essere:

$$mq = np$$

e per conseguenza:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Ora, se i numeri m ed n sono primi tra loro, per un noto teorema d'Aritmetica della teoria delle frazioni, i numeri p e q sono equimultipli di m ed n. Così si è dimostrato che: *Se l'indice e l'esponente di un radicale sono primi tra loro, l'indice e l'esponente non si potrebbero surrogare con numeri rispettivamente minori senza che il valore del radicale fosse alterato.*

262. Una conseguenza della proprietà dei radicali or ora dimostrata è questa che: *Se in ciascuno di più radicali dati l'indice e l'esponente sono primi tra loro, il minimo indice comune a cui si possono ridurre i radicali è il minimo comune multiplo degl' indici.*

263. Teor. *La radice* m.esima *di un prodotto è uguale al prodotto delle radici* m.esime *dei singoli fattori.*

(*) Volendo dimostrare questa proposizione indipendentemente dal teorema 254, basta [224, 4°] mettere il radicando sotto la forma di potenza di a con esponente $\left(\frac{m}{n} \cdot n\right)$.

Dim. Dico essere:

$$\sqrt[m]{abc\ldots} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots$$

Intanto per definizione abbiamo:

$$\sqrt[m]{a}^{\,m}\,\sqrt[m]{b}^{\,m}\,\sqrt[m]{c}^{\,m} = abc\ldots.$$

Quindi [215] è:

$$(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots)^m = abc\ldots,$$

dove si riconosce che è appunto:

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots = \sqrt[m]{abc\ldots} \qquad \text{c. d. d.}$$

264. La trasformazione, per mezzo della quale si passa dal primo membro dell' ultima eguaglianza al secondo, si chiama *moltiplicazione dei radicali.* Per effettuarla, abbiamo la:

Regola. *Quando più radicali hanno medesimo indice, per farne il prodotto, si moltiplicano tra loro i radicandi, e si dà al risultato lo stesso segno radicale da cui sono affetti i fattori.*

Es. $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4.$

$$\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^3}.$$

265. Oss. Quando si voglia fare la moltiplicazione di radicali aventi indici disuguali, conviene ridurli ad indice comune; poi si applica la regola precedente.

Es. $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}\,\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a^7}.$

266. La regola precedente vale anche [256] per moltiplicare un radicale per una espressione razionale. Così è, ad es.,:

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[1]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.$$

Quando dall'espressione $a\sqrt[m]{b}$ si sia ricavata la equivalente $\sqrt[m]{a^m b}$, si dice che si è fatto passare il fattore a sotto il segno radicale. Quando si fa la trasformazione opposta, allora si dice che si fa uscire il fattore dal segno radicale.

Es. $\sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{a^2} = a^2\sqrt[3]{a^2}$.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}\,.$$

267. Teor. *La radice* m.esima *di un quoziente è uguale al quoziente della radice* m.esima *del dividendo per la radice* m.esima *del divisore.*

Dim. Dico essere, ad es., :

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\,.$$

Infatti, dalla identità :

$$\frac{a}{b}\cdot b = a,$$

estraendo dai due membri la radice *m.esima*, abbiamo

[263] : $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a}\,,$$

donde viene immediatamente l'eguaglianza che si deve dimostrare.

268. L'ultima eguaglianza, in quanto ci insegna a passare dal primo membro al secondo, esprime la :

Regola. *Quando due radicali hanno medesimo indice, per dividere l'uno per l'altro, si fa il quoziente* *dei radicandi e gli si dà lo stesso segno radicale da cui sono affetti il dividendo e il divisore.*

Es. $$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^2b}{ab}} = \sqrt[3]{a}\,.$$

269. Oss. Quando si dovranno dividere, l' uno per l' altro, due radicali aventi indici disuguali, si ridurranno ad indice comune, e poi si applicherà la regola precedente.

Es. $$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^4}{a^3}} = \sqrt[6]{a}\,.$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[1]{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b^m}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}\,.$$

270. Teor. *La radice* m.esima *della potenza* n.esima *di una quantità* a *è uguale alla potenza* n.esima *della radice* m.esima *di* a.

Dim. Poichè la potenza *n.esima* di una quantità è il prodotto di n fattori eguali alla quantità stessa, abbiamo:

$$\sqrt[m]{a}^{\,n} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{a}\ldots\sqrt[m]{a}\,,$$

epperò [264]:

$$\sqrt[m]{a}^{\,n} = \sqrt[m]{aaa\ldots a}\,,$$

ossia: $$\sqrt[m]{a}^{\,n} = \sqrt[m]{a^n}\,,$$ c. d. d.

271. Oss. Possiamo ripetere l' enunciato dell' ultimo teorema con le parole: *dovendo fare successivamente un inalzamento a potenza ed una estrazione di radice, è indifferente l'ordine nel quale si fanno succedere le due operazioni.*

Es. $\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{64}^{\,2} = 4^2 = 16.$

$$\sqrt{5}^{\,3} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}\,.$$

$$\sqrt[m]{a^m} = \sqrt[m]{a}^{\,m} = a.$$

272. Teor. *La radice* m.esima *della radice* n.esima *di una quantità* a *è uguale alla radice di* a *che ha per indice il prodotto dei due indici.*

Dim. Dico essere, ad es., :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}\,.$$

Infatti, essendo:

$$\sqrt[mn]{a}^{\,mn} = a,$$

abbiamo [220]:

$$\left(\sqrt[mn]{a}^{\,m}\right)^n = a,$$

e per conseguenza:

$$\sqrt[mn]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a}\,,$$

donde infine si ricava l'eguaglianza che d. d.

273. Applicando replicatamente il teorema or ora dimostrato, si ha, ad es., :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}.$$

Questa relazione, letta cominciando dal secondo membro, dice che, dovendo estrarre una radice il cui esponente sia un prodotto $mnp...$, si può estrarre prima la radice m.*esima*, poi dal risultato la radice n.*esima*, quindi la radice p.*esima*, ecc., essendo poi indifferente l' ordine in cui si fanno succedere queste operazioni.

Es. $\sqrt[6]{7} = \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt{\sqrt[3]{7}}.$

Applicazioni.

274. Quando si dovesse, ad es., calcolare un valore approssimato dell' espressione $5 : \sqrt{2}$, bisognerebbe estrarre la radice indicata nel divisore, e poi effettuare la divisione. È chiaro che, quando si volesse una grande approssimazione, il calcolo riuscirebbe incomodo per questo che il divisore sarebbe un numero di molte cifre. È quindi opportuno di rendere razionale il denominatore di una frazione, quando tale non sia. Ci ristringeremo a dare qualche esempio in cui ci siano radicali d' indice 2.

1°. Sia $m : \sqrt{a}$. In questo caso basta moltiplicare i due termini del quoziente per $\sqrt{a}$. Si ottiene [104]:

$$\frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2°. Sia $$\frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Basta moltiplicare i due termini per $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, perchè così [90] il denominatore diventa razionale. Infatti egli è:

$$\frac{m}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

3°. Analogamente si trova:

$$\frac{m}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{m(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

4°. Volendo rendere razionale il denominatore della frazione:

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}},$$

se consideriamo il denominatore come la somma delle quantità $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ e $\sqrt{c}$, ci troviamo indicato di moltiplicare per $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c}$. Si ottiene così:

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c}$$

$$\text{»} \qquad = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + 2\sqrt{ab} + b - c},$$

e così ci siamo ricondotti al terzo caso.

5°. Quando il denominatore fosse:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d},$$

moltiplicando i due termini della frazione per:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d}),$$

si otterrebbe una frazione equivalente, che sarebbe da trattar poi come quella del quarto caso.

Appendice alla teoria delle equazioni.

275. Teor. *Elevando i due membri d'una equazione alla stessa potenza, si ottiene un'equazione la quale ammette ordinariamente altre soluzioni, oltre di quelle dell'equazione primitiva.*

Dim. Siano le due equazioni:

$$A = B, \qquad (1)$$

$$A^m = B^m. \qquad (2)$$

Pensiamo una soluzione dell' equazione (1). Poichè questa soluzione, sostituita nei due membri A e B, fa assumere a questi uno stesso valore, altrettanto avviene manifestamente dei due membri dell' equazione (2), ove si faccia la stessa sostituzione. L' equazione (2) ammette dunque tutte le soluzioni dell' equazione (1).

Ma non si può dire che ogni soluzione dell' equazione (2) verifichi necessariamente la (1), perchè in generale non si può dire che, se due potenze simili sono eguali, tali sono necessariamente le basi. E infatti, ad es., le seconde potenze delle quantità disuguali $(+7)$ e (-7) sono ambedue uguali a 49.

Che l' equazione (2) abbia in generale più soluzioni, che l' equazione (1), si può dimostrare nel modo che segue.

Raccogliendo tutti i termini nel primo membro, l' equazione (2) diventa:

$$A^m - B^m = 0.$$

E perchè il primo membro è divisibile [99, 1°] per $(A - B)$, e che il quoziente è:

$$A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3} B^2 + \dots\dots + B^{m-1},$$

l' equazione (2) si può anche scrivere nel modo seguente:

$$(A - B)(A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3} B^2 + \dots\dots + B^{m-1}) = 0.$$

Ora è manifesto che, se esiste un valore il quale, sostituito in luogo dell' incognita, annulli il secondo fattore, e faccia assumere ad A e B valori disuguali, esso è una soluzione dell' equazione (2), senza essere soluzione della (1).

Ad es., l' equazione $A^2 = B^2$ non è sempre equivalente alla $A = B$. Infatti, mettendola sotto la forma $A^2 - B^2 = 0$, oppure $(A + B)(A - B) = 0$, si riconosce che essa è sodisfatta non solo dai valori che rendono $A = B$, ma anche da quelli per cui riesce $A = -B$; e quest'ultima equazione non sempre equivale alla precedente.

Così resta provato che, elevando ad una stessa potenza i due membri d'una equazione, si possono introdurre soluzioni *estranee.* Epperò quando, allo scopo di risolvere un'equazione, si dovrà elevarne i due membri ad una stessa potenza, bisognerà verificare in fine le soluzioni trovate, e si rigetteranno come estranee quelle, che non sodisfacessero l'equazione proposta.

276. Applicazione. Quando in una equazione da risolvere l'incognita si trova sotto segno di radice, allora è opportuno generalmente di liberare l'equazione dai radicali, cioè di ricavare dall'equazione data un'altra, i cui membri siano razionali rispetto all'incognita, e che ammetta tutte le soluzioni dell'equazione primitiva. Però questa trasformazione si può compiere soltanto in casi particolari. Ne daremo qualche esempio.

Es. 1°. Sia l'equazione:

$$a + b\sqrt[m]{x^2 + c} = 5.$$

Col trasporto dei termini da un membro all'altro si isoli il termine contenente il radicale. Si ottiene così:

$$b\sqrt[m]{x^2 + c} = 5 - a.$$

Elevando i due membri alla potenza *m.esima*, si ha:

$$b^m(x^2 + c) = (5 - a)^m.$$

Quest'equazione ammette tutte le radici della proposta, e potrebbe anche avere qualche soluzione estranea.

Es. 2°. Sia l'equazione:

$$7x^2\sqrt[m]{2x+c}+a\sqrt[m]{2x+c}+5bx=\sqrt[m]{2x+c}+8f,$$

nella quale si trovano più radicali; questi però con medesimo indice e medesimo radicando.

Riunendo in un membro tutti i termini contenenti il radicale e gli altri termini nell'altro membro, e raccogliendo poi il radicale a fattore comune, si ottiene:

$$\sqrt[m]{2x+c}\ \{7x^2+a-1\}=8f-5bx.$$

Ora, elevando i due membri alla potenza *m.esima*, risulta:

$$(2x+c)\{7x^2+a-1\}^m=(8f-5bx)^m.$$

Ecco liberata l'equazione dai radicali.

Es. 3°. Sia l'equazione:

$$3\sqrt{x}-5=\sqrt{x-a}+bx.$$

Riunendo i due termini coi radicali in un membro, e nell'altro gli altri termini, si ottiene:

$$3\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=bx+5.$$

Elevando i due membri al quadrato, risulta:

$$9x-6\sqrt{x(x-a)}+(x-a)=(bx+5)^2.$$

Così abbiamo ottenuto un'equazione con un radicale soltanto, e noi sappiamo liberarnela.

Es. 4°. Sia l'equazione:

$$\sqrt{x+15}+\sqrt{x-24}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x}.$$

Si porterà uno dei termini del primo membro nel secondo; elevando poi i due membri al quadrato, si otterrà un'equazione con due radicali soltanto, e si potranno quindi far sparire anche questi due.

APPENDICE. (*)

Estrazione della radice quadrata intera da un numero intero.

α). **Teor.** *La radice quadrata intera del numero delle centinaia di un numero dato è il numero delle decine della radice quadrata del numero stesso.*

Dim. Sia dato un intero n qualunque, maggiore di 100; la sua radice quadrata è quindi maggiore di 10. Se indichiamo con x il numero delle decine della radice e con y la cifra delle unità, possiamo scrivere:

$$(10x + y)^2 \gtreqless n < (10x + y + 1)^2.$$

Se nel primo membro di questa limitazione sostituiamo lo *zero* ad y, e nel terzo membro sostituiamo ad y il numero 9, la limitazione non cessa di sussistere. Abbiamo così:

$$(10x)^2 \gtreqless n < (10x + 10)^2,$$

epperò anche [216]:

$$100x^2 \gtreqless n < 100(x + 1)^2,$$

ed

$$x^2 \gtreqless n : 100 < (x + 1)^2.$$

Questa limitazione fa vedere che x è la radice quadrata intera di $(n : 100)$. È perchè la radice intera di un numero non intero è [242] ad un tempo la radice intera della parte intera del radicando, l'intero x è la radice quadrata intera della parte intera di $(n : 100)$; in altre parole x è la radice quadrata intera del numero delle centinaia del numero n, come d. d.

β). **Teor.** *Se da un numero dato si sottrae il quadrato delle decine della sua radice quadrata, e poi si divide il numero delle decine del resto per il doppio del numero delle decine della radice, si ha nel quoziente intero un numero che non può essere superato dalla cifra delle unità della radice.*

(*) Può darsi che allo studioso basti di conoscere l'estrazione di radice di secondo grado, in luogo dell'estrazione di radice in generale. Ecco la ragione di questa appendice. Occorrerà che lo studioso adatti al suo bisogno i teoremi dei §§ 242, 243.

Dim. Sia un numero n maggiore di 100 Indichiamo con d il numero delle decine della sua radice quadrata intera e con y la cifra delle unità. Così possiamo scrivere:

$$(10d + y)^2 \overline{\gtrless} n,$$

epperò:

$$100d^2 + 2 \cdot 10dy + y^2 \overline{\gtrless} n.$$

Trascurando il termine y^2, e risolvendo poi l'equazione o disuguaglianza rispetto ad y, otteniamo:

$$y \overline{\gtrless} \frac{n - 100d^2}{2 \cdot 10d}.$$

Effettuando il calcolo indicato nel secondo membro, si ottiene un numero che è uguale o maggiore di y; ma poichè y è un numero intero, altrettanto si può dire anche del quoziente intero della divisione. Osservando il secondo membro si riconosce che, per ottenere il quoziente intero, si può: sottrarre dal numero delle centinaia di n, il quadrato d^2 (che è il quadrato del numero delle decine) e scrivere accanto del resto le due ultime cifre di n. (Con ciò si ottiene il numeratore). Poi, separando con una virgola la cifra delle unità, si divide intanto per 10. Resta a dividere per $2d$. Ma poichè del quoziente non si vuole altro che la parte intera, si può trascurare la cifra dei decimi del dividendo, e dividere per $2d$ la parte intera soltanto; la quale si può formare: *sottraendo dal numero delle centinaia del radicando il quadrato del numero delle decine della radice e scrivendo a canto del resto la cifra delle decine del radicando.* Così il teorema è dimostrato.

γ). **Oss.** Abbiamo veduto [β] come, conoscendo il numero delle decine della radice quadrata di un numero, si trovi un limite superiore della cifra delle unità della radice stessa. Supponiamo che sia n il radicando, d il numero delle decine della radice e q il quoziente intero trovato con la divisione indicata nel precedente teorema. Questo numero q sarà la cifra delle unità, se il quadrato di $(10d + q)$, cioè il trinomio $(10d)^2 + 2 \cdot 10dq + q^2$, si potrà sottrarre dal radicando. Ma, poichè per determinare q si è tolto dal radicando il primo termine del trinomio, perchè q sia la cifra delle unità basterà che dal resto $(n - 100\,d^2)$ si possa sottrarre la somma:

$$2 \cdot 10\,d\,q + q^2 = (2\,d \cdot 10 + q)\,q.$$

Osservando l'ultima espressione si conchiude che:

Per riconoscere se il quoziente intero della divisione che si fa allo scopo di determinare la cifra delle unità di una radice quadrata intera sia la cifra delle unità della radice, si scrive questo quoziente a destra del divisore e si moltiplica il numero così formato per il quoziente stesso. Se il prodotto non supera il resto della sottrazione precedente, esso quoziente è la cercata cifra delle unità. Altrimenti si provano successivamente i numeri inferiori, fino ad ottenere un prodotto che si possa sottrarre dal resto.

δ). A tal punto è facile stabilire la regola per l'estrazione della radice quadrata intera d'un intero qualunque.

Sia, ad es., da determinare la radice quadrata intera di 39648213. Fingiamo che sia 6427 la radice. Sappiamo [α] che 642, numero delle decine della radice, si trova estraendo la radice quadrata intera da 396482 (numero delle centinaia del radicando). Trovato il numero delle decine della radice, sappiamo [β, γ] determinare la cifra delle unità. Così la difficoltà è ridotta alla ricerca della radice quadrata intera di un numero, che ha due cifre di meno del proposto.

Qui da capo possiamo dire che si otterrà 64, numero delle decine della radice intera di 396482, estraendo la radice intera da 3964.

Ormai è palese come proceda il ragionamento e che in ogni caso si perviene infine ad un numero di una o due cifre, la cui radice quadrata intera si trova senza difficoltà. Prendendo poi a considerare, in ordine inverso, successivamente, le coppie di cifre del radicando che si sono via via abbandonate, ed operando nel modo già noto [β, γ], che serve a trovare la cifra delle unità di una radice quadrata intera di cui si conosca già il numero delle decine, si ottiene in ultima la radice intera desiderata.

Possiamo lasciare allo studioso la cura di sviluppare l'esempio e di dedurne poi la regola per l'estrazione della radice quadrata intera di qualunque numero intero.

Esercizi.

Si semplifichino le seguenti espressioni:

444. $\sqrt{16a^2bc^5}$ (*), $\sqrt[3]{27ab^3}$, $\sqrt[3]{16(a-b)^5}$.

445. $\sqrt{20a^2c-60abc+45b^2c}$, $\sqrt[3]{a^{6m}+a^{7m}c^2}$.

446. $7a^2\sqrt{3b^2}-3a\sqrt{12a^2b^2}+7\sqrt{48}-6\sqrt{75}$.

447. $\sqrt[3]{a^3b^2+a^3c}-2\sqrt[3]{m^3b^2+m^3c}$.

448. $\sqrt{2a^3b+4a^2b^2+2ab^3}-\sqrt{2a^3b-4a^2b^2+2ab^3}$.

449. $\sqrt{\dfrac{a^3b^2}{cd^2}-\dfrac{a^2b^3}{c^2d}}$, $\dfrac{\sqrt{a^5b}+\sqrt{4a^3b^3}+\sqrt{ab^5}}{a+b}$.

450. $\sqrt[m]{2^m a^{mn+3}b^{mn+5}}+\sqrt[m]{3^m a^{2m+mn+3}b^{m+5}}-\sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}}$.

451. $\sqrt[m]{a^{m+1}b^m-a^mb^{m+1}}-\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}-a^{m+2n}b^{2m+n}}$.

Si eseguiscano le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

452. $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}-$

$$-\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}.$$

453. $\dfrac{ab^2c^3}{d^4}\sqrt[m]{\dfrac{d^{4m-4}}{a^{m-1}b^{2m-2}c^{3m-3}}}$, $(x+1)\sqrt{\dfrac{a^2b}{x^2-1}}$.

* Ordinariamente si considera come semplificazione d'un radicale il trasporto di fattori fuori del segno. Se l'esponente d'un fattore non è divisibile per l'indice ed è maggiore dell'indice, il fattore si decompone in due [219]: il primo ha per esponente il prodotto dell'indice per il quoziente, che si ottiene dividendo l'esponente primitivo per l'indice (e questo fattore si può [266] portare fuori del segno), il secondo fattore ha per esponente il resto della divisione. Così, ad es., è:

$$\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{a^6\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{a^2}=a^2\sqrt[3]{a^2}.$$

454. $(\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b})(\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b})$. $\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}\,\sqrt{3+\sqrt{6}}$.

455. $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$, $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

456. $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $a\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[n]{a^{n-1}}}}$.

457. $(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[6]{a}-2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a})$, $\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$.

458. $\sqrt{a-x}+\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-ax}}$. $1:\frac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a^3-3ab^2+2b^3}}$.

459. $\sqrt[2n]{\frac{a^m b}{c^2d^3}}:\sqrt[3n]{\frac{a^{m-1}b}{c^3d^5}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}^{\,7}$.

460. $\frac{(a-b)\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)\sqrt{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}}$, $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^7\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^3}^{\,4}}$.

461. $\sqrt[m]{a}^{\,3n-p}\cdot\sqrt[m]{a}^{\,2m-3n}\cdot\sqrt[n]{a^{p-m}}$.

Si trasformino le espressioni seguenti in modo che il denominatore divenga razionale.

462. $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\frac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

463. $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

464. $\frac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$, $\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{8}+\sqrt{18}}$.

465. $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+2+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

466. $\frac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$, $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

467. $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}$, $\qquad \sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$.

468. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$, $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$.

469. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-\sqrt{x}}}$, $\qquad \dfrac{1}{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$.

---

470. Si semplifichi l'espressione:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

471. Si accerti l'eguaglianza:

$$2\sqrt{72-12\sqrt{27}}-\sqrt{32-8\sqrt{12}}=8\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

(Basta semplificare i due primi radicandi).

472. Si riconosca che le quantità:

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

sostituite ad x nel trinomio x^2+px+q, lo annullano.

473. Si riconosca che la quantità:

$$\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

sostituita ad x nel trinomio ax^4+bx^2+c, lo annulla.

474. Si riconosca che il valore:

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

annulla l'espressione $x^3+3px+2q$.

475. Si accerti l'eguaglianza:

$$\sqrt{3-\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}.$$

(Basta elevare i due membri al quadrato).

476. Si accerti l'eguaglianza:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

477. Si accerti l'eguaglianza:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})+\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})=3\sqrt{6}.$$

478. Si accerti l'eguaglianza:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

(È opportuno liberare prima di tutto i denominatori dalla irrazionalità. Il denominatore comune $\sqrt{3}$ si passi poi a moltiplicatore del secondo membro. Fatte le moltiplicazioni, raccogliendo il fattore comune:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}},\qquad \text{e da due altri termini}\qquad \sqrt{2+\sqrt{3}},$$

si ottiene l'eguaglianza dell'esercizio precedente).

479. Si accerti l'eguaglianza:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

480. Si accerti l'eguaglianza:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

481. Si accerti l'eguaglianza:

$$\frac{4a^3\sqrt{2} - 11\,a^2x + 6\,a\,x^2\sqrt{2} - 3\,x^3}{8a^7(x^2 - a\,x\sqrt{2} + a^2)^2\sqrt{2}}$$

$$+\ \frac{4\,a^3\sqrt{2} + 11\,a^2x + 6\,a\,x^2\sqrt{2} + 3\,x^3}{8\,a^7(x^2 + a\,x\sqrt{2} + a^2)^2\sqrt{2}} = \frac{1}{(x^4 + a^4)^2}.$$

Si risolvano le seguenti equazioni:

482. $\dfrac{16 - \sqrt{x}}{2} - \dfrac{10 - \sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}.$

483. $2x + \sqrt{4x^2 - 7x - 6} = 9.$

484. $\dfrac{7}{\sqrt{2x - 9}} - \dfrac{5}{3} = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 9}} + \dfrac{28}{15}.$

485. $\sqrt{2x - 3n} = 3\sqrt{n} - \sqrt{2x}.$

486. $17 - 4\sqrt{\dfrac{3x + 5}{x - 7}} \quad 1.$

487. $\sqrt[m]{a + x} = \sqrt[2m]{x^2 + 5\,a\,x + b^2}.$

488. $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1.$

489. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1.$

490. $\sqrt[4]{3x^2 + 5x + 4} = \sqrt{2x - 2}.$

491. $2\sqrt{2x + 2} + \sqrt{x + 2} = \dfrac{12\,x + 4}{\sqrt{8x + 8}}.$

492. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}.$

493. $\dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \sqrt{b}.$

494. $\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} - \sqrt{a+x} = \sqrt{2a+x}.$

495. $a+x = \sqrt{x^2 + 2a\sqrt{a^2+x^2}}.$

496. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

497. $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \sqrt{\frac{4}{a^2x^2} - \frac{7}{x^4}}}.$

498. $\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}} = \sqrt{a-x} - 2\sqrt{a+x}.$

499. $\sqrt{x+15} + \sqrt{x-24} - \sqrt{x-13} = \sqrt{x}.$

500. $\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = 2\sqrt[4]{1-a^2}.$

Risposte.

444. $4ac^2\sqrt{bc}$, $3b\sqrt[3]{a}$, $2(a-b)\sqrt[3]{2(a-b)^2}$.

445. $(2a-3b)\sqrt{5c}$, $a^{2m}\sqrt[3]{1+a^m c^2}$.

446. $(a^2b-2)\sqrt{3}$. 447. $(a-2m)\sqrt[3]{b^2+c}$.

448. $2b\sqrt{2ab}$. 449. $\frac{ab}{cd}\sqrt{ac-bd}$, $(a+b)\sqrt{ab}$.

450. $(2a^p b^n + 3a^{2+n}b - c^2)\sqrt[m]{a^3b^5}$.

451. $ab(\sqrt[m]{a-b} - \sqrt[m+n]{a^m b^n - a^n b^m})$.

452. 1. 453. $\sqrt[m]{\frac{ab^2c^3}{d^4}}$, $a\sqrt{\frac{b(x+1)}{x-1}}$.

454. $(a-c^2\sqrt[3]{b^2})\sqrt[4]{3}$. 455. $x-y$, $x-2+\frac{1}{x}$.

456. $\sqrt{2^{15}}$, $\sqrt[n^3]{a^{2n^3-1}}$.

457. $3\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + 2\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$.

458. $\dfrac{a\sqrt{a-x}}{a-x}$, $a - b$. **459.** $\sqrt[6n]{a^{m+2}bd}$, $2a$.

460. $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$, $\dfrac{1}{80}$. **461.** a.

462. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2} + 2$. $2 - \sqrt{3}$.

463. $\dfrac{11 + 6\sqrt{2}}{7}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\sqrt{6} + 2$.

466. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$, $\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

467. $\dfrac{(a + \sqrt{x})\sqrt{a^2 - x}}{a^2 - x}$, $\dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{a-b}}{a-b}$.

468.
$$\frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y},$$

$$\frac{(x + \sqrt{y})\sqrt{x - \sqrt{y}}}{x^2 - y}$$

469.
$$\sqrt{x} + \sqrt{x - \frac{\sqrt{x}}{x}},$$

$$\frac{(x^2 - x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x - \sqrt{x}})}{x^4 - 2x^3 + x^2 - x}.$$