CAPITOLO IV

NUMERI IRRAZIONALI

Preliminari.

121. L'argomento, che ci disponiamo a trattare, spetta veramente all'Aritmetica, e sarebbe bene fosse premesso all'Algebra. Lo abbiamo posto qui, perchè lo sviluppo riesce alquanto più agevole ove si possa far uso delle regole del calcolo letterale. Ma poichè vogliamo che il presente capitolo si possa riguardare come un'appendice dell'Aritmetica, dobbiamo osservare che le uguaglianze, che esprimono le regole del calcolo letterale, si possono considerare come relazioni tra valori aritmetici, purchè ogni quantità negativa sia aggiunta a quantità positiva che la superi anche in valore assoluto; e questa condizione è sempre sodisfatta nei casi in cui profitteremo di qualche regola del calcolo algebrico.

Classi contigue.

122. Chiameremo *classe* di numeri l'insieme di tutti i numeri che sodisfanno ad una data condizione.

Così, ad es., i numeri interi compresi tra 10 e 20 formano una classe composta di 9 *elementi*; 11 è l'elemento minimo e 19 il massimo.

Per altro esempio, i numeri minori di un numero a formano una classe; il numero degli elementi in questo caso è infinito; *zero* è l'elemento minimo; ma non c'è elemento massimo. Infatti, tale non potrebbe essere un numero b, minore di a, dacchè, aggiungendogli una parte qualunque della differenza $(a-b)$, si ottiene un numero maggiore di b, e che appartiene anch'esso alla classe.

I numeri compresi tra due dati numeri a e b formano una classe che non ha nè elemento minimo, nè elemento massimo.

Dinoteremo una classe con una lettera maiuscola; con la stessa lettera, ma minuscola, dinoteremo l'elemento della classe in generale; per accennare un elemento particolare adopreremo la stessa lettera munita d'un indice. Così, ad es., la lettera m è l'espressione generale dell'elemento della classe M; con m_1, m_2.... si dinotano elementi particolari.

123. Se due classi sien tali che qualunque elemento di una di esse sia maggiore di qualunque elemento dell'altra, si dirà che la prima classe è *maggiore* della seconda, o che questa è *minore* della prima.

Così, ad es., la classe dei numeri maggiori di 7 è maggiore della classe dei numeri minori di 7. Se M dinota la prima classe ed N l'altra, si scriverà $M > N$.

Quando sia, ad es., $M > N$ ed $N > P$, egli è $M > P$.

124. Def. *Se una classe data è maggiore d'un'altra classe, e si possono trovare due elementi, uno della prima classe e l'altro della seconda tali che la loro differenza sia minore d'un numero dato ad arbitrio, per quanto piccolo (ma diverso da zero), le due classi si dicono* contigue.

Così, ad es., se una classe H è maggiore d'un'altra classe K, e dato un numero δ qualunque, diverso da *zero*, si possono trovare un elemento h_1 della classe H ed un elemento k_1 della classe K, tali che sia $h_1 - k_1 < \delta$, le classi H, K sono *contigue.*

Significheremo che due classi H, K sono contigue, e che H è la classe maggiore, con la notazione (H, K).

Es. Preso un numero a qualunque, la classe dei numeri maggiori di a e la classe dei numeri minori di a sono contigue.

Infatti ogni numero della prima è maggiore di tutti i numeri della seconda; e, dato un numero δ qualunque, aggiungendo ad a e sottraendo da a, ad es., $\frac{1}{4}\delta$, si ottengono due elementi delle due classi, la cui differenza è uguale ad $\frac{1}{2}\delta$, epperò minore di δ.

125. Due classi contigue H, K non possono avere ad un tempo, la maggiore un elemento minimo h_1 e la minore un elemento massimo k_1, giacchè, se così fosse, la differenza tra due elementi presi, uno nella classe H e l'altro nella classe K, sarebbe uguale o maggiore della differenza $(h_1 - k_1)$, e per conseguenza non si potrebbero trovare due elementi, uno d'una classe e l'altro dell'altra la cui differenza fosse minore d'un numero dato qualunque.

126. Siano due classi H, K contigue, ed un numero a abbia la proprietà di essere minore di tutti gli elementi della classe H e di essere maggiore di tutti gli elementi della classe K; nessun altro numero può godere della stessa proprietà.

Infatti, se un altro numero b distinto da a, supponiamo minore di a, fosse anch'esso minore degli elementi della classe H e maggiore di quelli della classe K, non si potrebbero trovar due elementi, uno d'una classe e l'altro dell'altra, la cui differenza fosse minore della differenza $(a - b)$. E ciò in contradizione con l'ipotesi che le classi H, K siano contigue.

Definizioni.

127. 1°. Date due classi M, N, chiameremo *somma delle due classi* la classe composta con i numeri che si ottengono aggiungendo a ciascun elemento d'una classe ciascun elemento dell'altra. Dinoteremo la somma di due classi M, N col simbolo $M + N$.

La definizione di somma di due classi si estende a quella di quante classi si vogliano.

2°. Date due classi M, N, e posto che la classe M sia maggiore [123] della classe N, diremo *differenza delle classi* M, N la classe composta coi numeri che si ottengono sottraendo da ciascun elemento della classe M ciascun elemento della classe N. Dinoteremo la differenza delle due classi col simbolo $M - N$.

3°. Diremo *prodotto di due classi* M, N, e dinoteremo col simbolo MN, la classe composta coi numeri che si ottengono moltiplicando ciascun elemento della classe M per ciascun elemento della classe N.

La definizione di prodotto di due classi si estende a quello di quante classi si vogliano.

4°. Diremo *quoziente di due classi* M, N, e dinoteremo col simbolo $\frac{M}{N}$, la classe composta coi numeri che si ottengono dividendo ciascun elemento della classe M per ciascun elemento della classe N.

5°. Diremo *potenza p.esima d'una classe* M, e dinoteremo col simbolo M^p, la classe composta con le potenze *p.esime* di tutti gli elementi della classe M.

Oss. I simboli MMM ed M^3, presi ad es., non hanno lo stesso significato. Se la classe M è composta, ad es., di 5 elementi, la classe M^3 è composta di altrettanti elementi, laddove la classe MMM è composta di 125 elementi (fra questi ce ne possono essere di eguali).

Proprietà delle classi contigue.

128. Teor. *Date più coppie di classi contigue, la somma delle classi maggiori e la somma delle classi minori sono classi contigue.*

Dim. Siano da prima due sole le coppie di classi; siano le due coppie di classi contigue:

$$(H, K), \qquad (M, N).$$

Si vuol dimostrare che le classi $(H+M)$ e $(K+N)$ sono contigue.

Intanto, perchè gli elementi delle classi H ed M sono rispettivamente maggiori di quelli delle classi K ed N, è chiaro che qualunque elemento della classe $(H+M)$ è maggiore di qualunque elemento della classe $(K+N)$.

Resta a provare che si possono trovare due elementi, uno della classe $(H+M)$ e l'altro della classe $(K+N)$, la cui differenza sia minore di un numero dato qualunque, minore ad es. del numero δ.

Poichè le classi H, K sono contigue e così le due M, N, sappiamo di poter trovare in esse quattro elementi, siano h_1, k_1, m_1, n_1, tali che sia:

$$h_1 - k_1 < \frac{\delta}{2} \quad \text{ed} \quad m_1 - n_1 < \frac{\delta}{2}.$$

Sommando le due disuguaglianze, membro a membro, otteniamo:

$$h_1 - k_1 + m_1 - n_1 < \delta,$$

ossia: $$(h_1 + m_1) - (k_1 + n_1) < \delta.$$

Così, essendo $(h_1 + m_1)$ e $(k_1 + n_1)$ elementi delle classi $(H+M)$ e $(K+N)$, resta provato che queste due classi sono contigue.

È manifesto come, provato che la proposizione sussiste per due coppie di classi, si può riconoscere che essa sussiste per un numero qualunque di coppie.

129. Teor. *Se sono date due coppie di classi contigue, e la classe minore d'una coppia è maggiore della* *classe maggiore dell'altra, la differenza tra la classe maggiore della prima coppia e la minore della seconda e la differenza tra le altre due classi sono classi contigue.*

Dim. Siano le due coppie di classi contigue (H, K), (M, N), e sia $K > M$, epperò a maggior ragione $H > N$. Dico che le due classi $(H - N)$ e $(K - M)$ sono contigue.

Intanto, perchè di quattro elementi qualisivogliano, presi ordinatamente dalle quattro classi H, K, M, N, ciascuno è maggiore del seguente, è manifesto che la differenza tra il primo ed il quarto è maggiore della differenza tra il secondo ed il terzo. La classe $(H - N)$ è dunque in fatto maggiore della classe $(K - M)$.

Resta a provare che si possono trovare due elementi, uno della classe $(H - N)$ e l'altro della classe $(K - M)$, la cui differenza sia minore di un numero dato qualunque, minore ad es. del numero δ.

Poichè le classi H, K e così le due M, N sono contigue, sappiamo di poter trovare in esse quattro elementi, siano h_1, k_1, m_1, n_1, tali che sia:

$$h_1 - k_1 < \frac{\delta}{2} \qquad \text{ed} \qquad m_1 - n_1 < \frac{\delta}{2}.$$

Sommando le due disuguaglianze, membro a membro, otteniamo:

$$h_1 - k_1 + m_1 - n_1 < \delta,$$

ossia
$$(h_1 - n_1) - (k_1 - m_1) < \delta.$$

Così, essendo $(h_1 - n_1)$ e $(k_1 - m_1)$ elementi delle classi $(H - N)$ e $(K - M)$, resta provato che queste due classi sono contigue.

130. Teor. *Date più coppie di classi contigue, il prodotto delle classi maggiori e il prodotto delle classi minori sono classi contigue.*

Dim. Dimostreremo da prima il teorema per due sole coppie di classi. Siano adunque le due coppie di classi contigue (H, K) ed (M, N). Dico che le classi $H\,M$ e $K\,N$ sono contigue.

Intanto, perchè gli elementi delle classi H ed M sono rispettivamente maggiori di quelli delle classi K ed N, è manifesto che qualunque elemento della classe $H\,M$ è maggiore di qualunque elemento della classe $K\,N$.

Resta quindi a provare che si possono trovare due elementi, uno nella classe $H\,M$ e l'altro nella classe $K\,N$, la cui differenza sia minore di un numero dato qualunque, minore ad es. del numero δ.

Consideriamo perciò l'espressione ($h\,m - k\,n$), la quale rappresenta la differenza tra due elementi indeterminati delle due classi. Studiando questa espressione troveremo come basta scegliere nelle quattro classi date quattro elementi, affinchè, sostituiti rispettivamente alle quattro *lettere* h, m, k, n, facciano assumere all' espressione stessa un valore minore di δ.

Egli è intanto:

$$h\,m - k\,n = h\,m - h\,n + h\,n - k\,n$$
$$\text{»} \qquad = h(m - n) + n\,(h - k).$$

Ora, preso nella classe H un elemento h_1, ad arbitrio, si cerchino poi nelle classi M, N due elementi (siano i due m_1, n_1) tali che riesca:

$$m_1 - n_1 < \frac{\delta}{2h_1}$$

epperò anche:

$$h_1(m_1 - n_1) < \frac{\delta}{2} \cdot \qquad (1)$$

Due elementi delle classi M, N, che sodisfacciano la condizione voluta, si possono trovare perchè le due classi sono contigue.

Si cerchino poi nelle classi H, K due elementi (siano i due h_2, k_1) tali che riesca:

$$h_2 - k_1 < \frac{\delta}{2n_1}$$

epperò anche:

$$n_1(h_2 - k_1) < \frac{\delta}{2}. \qquad (2)$$

Due elementi delle classi H, K, che sodisfacciano la condizione voluta si possono trovare perchè le due classi sono contigue.

Sommando, membro a membro, le disuguaglianze (1) e (2), otteniamo:

$$h_1(m_1 - n_1) + n_1(h_2 - k_1) < \delta.$$

Ora, posto che sia $h_1 < h_2$, e per conseguenza:

$$h_1 - k_1 < h_2 - k_1,$$

abbiamo:

$$h_1(m_1 - n_1) + n_1(h_1 - k_1) < \delta,$$

epperò anche:

$$h_1 m_1 - k_1 n_1 < \delta.$$

Se fosse $h_1 > h_2$, sarebbe:

$$h_2(m_1 - n_1) + n_1(h_2 - k_1) < \delta,$$

epperò anche:

$$h_2 m_1 - k_1 n_1 < \delta.$$

Così, essendo $h_1 m_1$ e $k_1 n_1$ (e nel secondo caso $h_2 m_1$ e $k_1 n_1$) elementi delle classi $H M$ e $K N$, resta dimostrato che queste due classi sono contigue.

Provato che il teorema sussiste per due coppie di classi contigue, è facile dedurne che esso ha luogo per un numero qualunque di coppie.

131. Teor. *Date due coppie di classi contigue, il quoziente della divisione della classe maggiore d' una coppia* *per la minore dell'altra e il quoziente della divisione della classe minore della prima coppia per la maggiore dell'altra sono due classi contigue.*

Dim. Siano le due coppie di classi contigue (H, K) ed (M, N). Dico che le classi $\frac{H}{N}$ e $\frac{K}{M}$ sono contigue.

Intanto, perchè gli elementi delle classi H ed M sono rispettivamente maggiori di quelli delle classi K ed N, a doppia ragione il quoziente della divisione di un elemento della classe H per uno della classe N è maggiore del quoziente della divisione di un elemento della classe K per uno della classe M.

Resta a provare che si possono trovare due elementi, uno della classe $\frac{H}{N}$ ed uno della classe $\frac{K}{M}$, la cui differenza sia minore di un numero dato qualunque, minore ad es. del numero δ.

A tal fine prendiamo a considerare l'espressione:

$$\frac{h}{n} - \frac{k}{m},$$

la quale rappresenta la differenza tra due elementi indeterminati delle due classi. Studiando questa espressione troveremo come basta scegliere nelle quattro classi date quattro elementi, affinchè, sostituiti rispettivamente alle quattro *lettere* h, m, k, n, facciano assumere all'espressione stessa un valore minore di δ.

Egli è intanto:

$$\frac{h}{n} - \frac{k}{m} = \frac{hm - kn}{mn}.$$

Ed ora, preso nella classe N un elemento a caso n_1, si cerchino poi nelle quattro classi date quattro elementi (siano i quattro h_1, k_1, m_1, n_2) tali che riesca

$$h_1 m_1 - k_1 n_2 < \delta n_1^2$$

epperò anche:

$$\frac{h_1 m_1 - k_1 n_2}{n_1^2} < \delta.$$

Elementi delle quattro classi date, che sodisfacciano la condizione voluta, si possono trovare certamente perchè si è visto [130] che, date due coppie di classi contigue, si possono trovare due elementi delle classi maggiori e due delle minori, tali che la differenza tra il prodotto dei primi e il prodotto dei secondi sia minore di un numero dato, qualunque.

Ora, quando sia $n_2 > n_1$, essendo $m_1 n_2 > n_1^2$, abbiamo:

$$\frac{h_1 m_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2} < \frac{h_1 m_1 - k_1 n_2}{n_1^2}$$

epperò, a maggior ragione, egli è:

$$\frac{h_1}{n_2} - \frac{k_1}{m_1} < \delta.$$

Quando invece sia $n_2 < n_1$, allora, essendo:

$$h_1 m_1 - k_1 n_1 < h_1 m_1 - k_1 n_2$$

ed

$$m_1 n_1 > n_1^2,$$

egli è, a doppia ragione,:

$$\frac{h_1 m_1 - k_1 n_1}{m_1 n_1} < \frac{h_1 m_1 - k_1 n_2}{n_1^2},$$

epperò anche:

$$\frac{h_1}{n_1} - \frac{k_1}{m_1} < \delta.$$

Così, poichè $\frac{h_1}{n_2}$ e $\frac{k_1}{m_1}$ (e nel secondo caso $\frac{h_1}{n_1}$ e $\frac{k_1}{m_1}$) sono elementi delle classi $\frac{H}{N}$, $\frac{K}{M}$, resta provato che queste classi sono contigue.

132. Teor. *Due potenze simili di due classi contigue sono classi contigue.*

Dim. Sia la coppia di classi contigue (H, K). Dico che due potenze simili delle due classi, ad es. le due H^m, K^m, sono classi contigue.

Intanto, poichè ogni elemento della classe H è maggiore di qualunque elemento della classe K, anche la potenza *m.esima* di qualunque elemento della prima classe è maggiore della potenza *m.esima* di qualunque elemento della seconda. È dunque $H^m > K^m$.

Ci rimane quindi a far vedere che si possono trovare due elementi, uno della classe H^m e l'altro della classe K^m, tali che la loro differenza sia minore di un numero δ, qualunque.

A tal fine si prendano a considerare le due classi:

$$HHH\ldots H \qquad \text{e} \qquad KKK\ldots K,$$

ciascuna composta di m fattori. Poichè le classi H e K sono contigue, anche le due nuove classi sono contigue [130]; epperò sappiamo di poter trovare in esse due elementi, uno della prima e l'altro della seconda, tali che la loro differenza sia minore di δ. Ciascuno di codesti due elementi è il prodotto di m fattori presi tutti, per il primo dalla classe H, per l' altro dalla classe K; siffatti elementi siano, ad es., :

$$(1) \qquad h_3 \cdot h_7 \cdot h_7 \cdot \ldots \cdot h_{15},$$

$$(2) \qquad k_9 \cdot k_9 \cdot k_5 \cdot \ldots \cdot k_8.$$

Ora, se i fattori del primo prodotto fossero tutti eguali, il prodotto sarebbe un elemento della classe H^m. Imaginiamo che i fattori non siano tutti eguali, e che sia h_7 il minore. Allora il prodotto di m fattori eguali ad h_7 è minore del prodotto (1); esso poi appartiene alla classe H^m.

Così, se i fattori del prodotto (2) fossero tutti eguali, il prodotto apparterrebbe anche alla classe K'''. Supponiamo che i fattori non siano tutti eguali e che sia k_5 il maggiore. Allora il prodotto di m fattori eguali a k_5 è maggiore del prodotto (2); esso poi appartiene alla classe K'''. Ma dacchè la differenza tra i prodotti (1) e (2) è minore di δ, e le potenze $(h_7)^m$ e $(k_5)^m$ sono comprese ambedue tra i prodotti stessi, la differenza tra le due potenze è anch'essa minore di δ.

In questo modo, perchè le due potenze sono elementi, uno della classe H''' e l'altro della classe K''', resta provato che queste due classi sono contigue.

Numeri irrazionali.

133. Preso un numero qualunque q, intero o frazionario, imaginiamo di formare poi due classi H, K, mettendo nella prima tutti i numeri i cui quadrati sono maggiori di q e nella seconda tutti quelli i cui quadrati sono minori di q.

Se il numero q non è quadrato perfetto, le classi H e K contengono insieme tutti i numeri, nessuno eccettuato. Nel caso invece che q sia quadrato perfetto, supponiamo che sia il quadrato del numero r, le classi H e K contengono insieme tutti i numeri, r eccettuato, dacchè il quadrato di questo numero non è nè maggiore nè minore di q.

Ora è facile riconoscere che le classi H e K sono contigue.

Intanto, poichè i quadrati degli elementi della classe H sono maggiori di q e i quadrati degli elementi della classe K sono minori di q, qualunque elemento della prima classe è maggiore di qualunque elemento della seconda.

Si possono poi trovare due elementi, uno della classe H ed uno della classe K, la cui differenza sia minore di un numero dato δ, qualunque. Infatti, se q è quadrato perfetto, i numeri $r + \frac{1}{4}\delta$ ed $r - \frac{1}{4}\delta$, che differiscono tra loro di $\frac{1}{2}\delta$, appartengono, rispettivamente alle due classi. Se poi q non è quadrato perfetto, presa una frazione $\frac{1}{k}$, che sia minore di δ, formando successivamente i quadrati delle frazioni $\frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \ldots$ si arriverà a trovare due consecutive di queste frazioni, le quali dieno due quadrati, uno maggiore di q e l'altro minore. Poichè le due frazioni appartengono, per l'ipotesi, una alla classe H, l'altra alla classe K, conchiudiamo di nuovo che queste due classi sono contigue.

Ed ora, se imaginiamo di mettere in corrispondenza e in ordine di grandezza gli elementi delle due classi H^2 ed H, e così gli elementi delle classi K^2 e K, e di percorrere nelle serie K e H tutti i numeri partendo da *zero*, troviamo che, mentre nel passare dai numeri della classe K a quelli della classe H quando q è quadrato perfetto si oltrepassa il numero r, a cui corrisponde il numero q che cade fra le classi H^2 e K^2, nel caso opposto non si incontra nessun numero. In questo caso pertanto tra i numeri che costituiscono la classe H e quelli che costituiscono la classe K vi è una lacuna, che non possiamo colmare con nessuno dei numeri che conosciamo, perchè sono tutti distribuiti nelle due classi.

Giova osservare che la lacuna or ora accennata corrisponde al numero q, e a nessun altro.

Infatti a qualunque altro numero q', diverso da q, se è quadrato perfetto corrisponde un numero intero o frazionario.

Per il caso che q' non sia quadrato perfetto, dobbiamo considerare le classi H^2 e K^2, che sono contigue, perchè tali sono le classi H e K. Per conseguenza, essendo che il numero q è compreso tra le classi H^2 e K^2, non ha luogo altrettanto per il numero q'; ma, se è ad es. $q' > q$, esiste nella classe H^2 elemento minore di q'. Se h_1^2 sia un elemento così fatto, allora nelle serie dei numeri le lacune corrispondenti ai numeri q e q' sono distinte, perchè sono da bande opposte del numero h_1.

134. Le considerazioni fatte nel paragrafo precedente ci hanno rivelato che i numeri interi e frazionari non formano una successione *ininterotta*; ma che lasciano campo all'introduzione di una terza specie di numeri che chiameremo *irrazionali*. (*).

Ogni volta che avremo due classi contigue e non ci sia nessun numero *razionale*, il quale abbia la proprietà di esser minore degli elementi della classe maggiore e maggiore degli elementi dell'altra classe, *ammetteremo* che ci sia numero irrazionale dotato di questa proprietà. (**).

Sappiamo [126] che non può esserci che un nu-

(*) Del resto giustificazione *molto* più sodisfacente della introduzione dei numeri irrazionali è data dall'esistenza di grandezze *incommensurabili*; ma di questo più innanzi.

(**) Ammettiamo che esista un numero irrazionale che separa due classi contigue (composte di soli numeri razionali) anche nel caso che la classe maggiore contenga elemento minimo, o la minore elemento massimo. Intendiamo giustificato questo modo di vedere da ciò che, dati due numeri razionali qualunque, si può sempre trovare un numero, quadrato non perfetto, il quale sia compreso tra i quadrati dei numeri dati; donde segue esserci numero irrazionale che è compreso tra i numeri dati.

mero razionale soltanto, il quale sia compreso tra due stesse classi contigue. Per analogia ammettiamo che tra due classi contigue, fra le quali non cada alcun numero razionale, sia compreso *un solo* numero irrazionale. (*).

Poichè due classi contigue comprendono un solo numero razionale od irrazionale, due classi contigue possono essere usate come definizione del numero che le separa.

Perciò, ad es., dato un numero q, si sa di definire un numero dicendo che c'è un numero il quale è minore di quelli i cui quadrati sono maggiori di q ed è maggiore di quelli i cui quadrati sono minori di q. (Si definisce un numero perchè con le precedenti parole si accennano due classi contigue).

135. Poichè due classi contigue definiscono un numero, possiamo stabilire che il simbolo, quale ad es. (H, K), che abbiamo assunto per significare che due classi sono contigue, rappresenti il numero definito dalle classi. (**).

Perciò, ad es., se α dinoti il numero che è compreso da due classi contigue H, K, si può scrivere:

$$\alpha = (H, K).$$

(*) Avvertiamo che, quando si dice che un numero irrazionale è compreso tra due classi contigue H, K, s'intende dire che, percorrendo la serie dei numeri, si incontra il numero irrazionale dopo degli elementi della classe K, e prima di quelli della classe H. (Dicendo che un numero irrazionale è minore di un numero razionale h, non possiamo pensare che ciò significhi che si può sottrarre l'irrazionale da h, perchè non si è ancora parlato di operazioni con numeri irrazionali).

(**) Non altrimenti, ad es., nel simbolo $10 - 3$ si vede rappresentato il numero 7 e si scrive $7 = 10 - 3$.

Confronto di numeri definiti da coppie di classi contigue.

136. Siano due numeri α e β, definiti mediante coppie di classi contigue; sia:

$$\alpha = (H,\ K) \qquad \text{e} \qquad \beta = (M,\ N).$$

$$\begin{array}{cccc}
 & - & - & \\
 & - & - & \\
 & & m_3 & \\
 & h_4 & & \\
H & h_3 & m_2 & M \\
 & h_2 & & \\
 & h_1 & & \\
 & - & m_1 & \\
 & - & - & \\
 & \alpha & \beta & \\
 & - & - & \\
 & - & - & \\
 & & n_1 & \\
 & k_2 & & \\
K & k_2 & n_2 & N \\
 & k_3 & & \\
 & k_4 & n_3 & \\
 & - & - & \\
 & - & - &
\end{array}$$

Se per qualunque elemento della classe H se ne può trovare uno di eguale o minore nella classe M, e per qualunque elemento della classe K se ne può trovare uno di eguale o maggiore nella classe N, i due numeri α e β sono eguali.

Infatti, quando sono sodisfatte le predette condizioni, il numero β è minore di tutti i numeri della classe H ed è maggiore di tutti i numeri della classe K, e per conseguenza esso è uguale ad α, non essendoci che un numero solo [134] che sia compreso tra due stesse classi contigue.

Alla stessa conchiusione si perverrebbe quando fosse per qualunque numero della classe M che si potesse asserire esserci nella classe H un numero eguale o minore e per qualunque numero della classe N potersi trovare nella classe K un numero eguale o maggiore. Infatti, in tal caso, si conchiuderebbe che il numero α è compreso anche tra le classi contigue M, N e che per conseguenza [134] esso è uguale al numero β.

137. Poichè noi usiamo di coppie di classi contigue per definire numeri, ora è palese che, data una coppia di classi contigue, senza che queste cessino di esser tali e di definire lo stesso numero, si possono sopprimere elementi della classe maggiore, purchè per qualunque elemento soppresso ne sia rimasto uno di minore; e si possono sopprimere elementi della classe minore; purchè per qualunque elemento soppresso ne sia rimasto uno di maggiore. (*).

E se due date classi contigue non contengono insieme tutti i numeri, e lecito introdurre nuovi elementi nella classe maggiore, purchè per qualunque elemento introdotto ci sia nella classe stessa elemento minore; e si possono introdurre nuovi elementi nella classe minore, purchè per qualunque elemento introdotto ci sia nella classe stessa elemento maggiore.

138. Dati mediante coppie di classi contigue due numeri α e β, siano i due:

$$\alpha = (H, K) \qquad \text{e} \qquad \beta = (M, N),$$

se un elemento della classe K è uguale o maggiore di un elemento della classe M, il numero α è maggiore di β.

La stessa cosa si potrebbe asserire quando si trovasse che un elemento della classe M è uguale o minore d'un elemento della classe K.

Somma di numeri irrazionali.

139. Siano due numeri α e β definiti mediante coppie di classi contigue; sia:

$$\alpha = (H, K) \qquad \text{e} \qquad \beta = (M, N).$$

(*) In relazione all'uso che facciamo di coppie di classi contigue possiamo aggiungere che, quando si pervenga a determinare un elemento della classe maggiore, non hanno più nessun interesse gli elementi maggiori del determinato. E quando si conosce un elemento della classe minore, ecc.

Consideriamo le classi $(H + M)$ e $(K + N)$. Sappiamo [128] che queste due classi sono contigue; detto γ il numero da esse definito, possiamo scrivere:

$$\gamma = (H + M,\ K + N).$$

Ora, se i numeri α e β sono razionali, essendo:

$$h > \alpha > k \quad \text{ed} \quad m > \beta > n$$

e per conseguenza;

$$h + m > \alpha + \beta > k + n,$$

abbiamo [126]:

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

ossia:

$$(H,\ K) + (M, N) = (H + M, K + N).$$

Quest' eguaglianza, dimostrata per il caso che α e β siano razionali, si assume come definizione della somma $(\alpha + \beta)$ per il caso che uno ed entrambi i numeri siano irrazionali. In altre parole:

140. Def. *La somma di due numeri, se uno od ambidue sono irrazionali, è il numero che è minore di quelli che si ottengono sommando numeri razionali rispettivamente maggiori degli addendi dati, ed è maggiore dei numeri che si ottengono sommando numeri razionali rispettivamente minore dei dati.*

Oss. La precedente definizione non contradice quella di somma di numeri razionali; infatti la proprietà che essa attribuisce alla somma di numeri irrazionali è goduta anche dalla somma di numeri razionali.

Differenza di due numeri irrazionali.

141. Siano due numeri α e β definiti mediante coppie di classi contigue; sia:

$$\alpha = (H, K) \quad \text{e} \quad \beta = (M, N).$$

Supponiamo che, rispetto ad un numero p, ci siano nella classe K numeri maggiori e nella classe M numeri minori. Per conseguenza [138] è $\alpha > \beta$.

Imaginiamo tolti dalla classe K tutti i numeri minori di p, e dalla classe M tutti i numeri maggiori di p; così diventa $K > M$. Prendiamo a considerare le classi $(H - N)$ e $(K - M)$; sappiamo [129] che queste due classi sono contigue. Detto γ il numero che le separa, possiamo scrivere:

$$\gamma = (H - N, K - M).$$

Ora proveremo che questo numero, sommato con β, dà α per risultato.

Intanto, qualunque siano i numeri β e γ, razionali cioè od irrazionali, abbiamo [139, 140]:

$$\gamma + \beta = (H - N + M, K - M + N).$$

Ed ora, se confrontiamo la coppia di classi contigue che definiscono il numero $\gamma + \beta$ con la coppia di classi che definisce il numero α, riconosciamo che per qualunque elemento della classe $(H - N + M)$ se ne trova uno di minore nella classe H, e che per qualunque elemento della classe $(K - M + N)$ se ne trova uno di maggiore nella classe K.

Infatti, preso ad es. l'elemento:

$$h_1 - n_1 + m_1$$

della classe $(H - N + M)$, si vede che, poichè è $m_1 > n_1$, esso è maggiore di h_1, che è un elemento della classe H.

E così, ad es., l'elemento:

$$k_2 - m_2 + n_2$$

della classe $(K - M + N)$, perchè è $m_2 > n_2$, è minore di k_2, che è un elemento della classe K.

Conchiudiamo [136] essere $\gamma + \beta = \alpha$.

Abbiamo provato in questo modo che, anche per due numeri irrazionali qualunque, ed anche per il caso che siano dati un numero irrazionale ed uno razionale, vi è sempre un numero il quale, sommato col minore dei due, dà per risultato il maggiore. Questo numero si dirà differenza tra i numeri dati; e così, anche compresi i numeri irrazionali, :

142. *La sottrazione è l'operazione mediante la quale, data la somma di due numeri ed uno di questi, si determina l'altro.*

Se due numeri α, β sono dati mediante due coppie di classi contigue (H, K), (M, N), ed è $K > M$, egli è:

$$(H, K) - (M, N) = (H - N, K - M).$$

Prodotto di numeri irrazionali.

143. Siano due numeri α e β definiti mediante coppie di classi contigue; sia:

$$\alpha = (H, K) \quad \text{e} \quad \beta = (M, N).$$

Consideriamo le classi $H\,M$, $K\,N$; sappiamo [130] che esse sono contigue; così, indicando con γ il numero che le separa, possiamo scrivere:

$$\gamma = (H\,M, K\,N).$$

Ora, se α e β sono razionali, essendo:

$$h > \alpha > k \quad \text{ed} \quad m > \beta > n$$

e per conseguenza:

$$h\,m > \alpha\beta > k\,n,$$

il numero definito dalle classi $H\,M$, $K\,N$ è il prodotto dei numeri definiti dalle coppie di classi H, K ed M, N. Egli è adunque in tal caso $\alpha\beta = \gamma$, od in altri simboli: $(H, K)(M, N) = (H\,M, K\,N)$.

Assumiamo questa relazione come definizione del prodotto per il caso che uno od ambidue i fattori siano irrazionali. Adunque:

144. Def. *Il prodotto di due numeri, dei quali uno od ambidue siano irrazionali, è il numero che è minore dei* *prodotti che si ottengono moltiplicando tra loro due numeri razionali rispettivamente maggiori dei fattori, ed è maggiore dei prodotti che si ottengono moltiplicando tra loro due numeri razionali rispettivamente minori dei fattori.*

Oss. La precedente definizione non contradice quella di prodotto di numeri razionali; infatti essa esprime una proprietà che è goduta anche da questi numeri.

Quoziente di numeri irrazionali.

145. Siano due numeri α e β definiti mediante coppie di classi contigue; sia:

$$\alpha = (H, K) \qquad \text{e} \qquad \beta = (M, N).$$

Sappiamo [131] che le classi $\frac{H}{N}$ e $\frac{K}{M}$ sono contigue; così, indicando con γ il numero da esse definito, possiamo scrivere:

$$\gamma = \left(\frac{H}{N}, \frac{K}{M}\right).$$

Ora proveremo che questo numero, moltiplicato per β, dà α per risultato.

Intanto, qualunque siano i numeri β e γ, razionali cioè od irrazionali, abbiamo [143, 144]:

$$\beta\gamma = \left(M \cdot \frac{H}{N}, N \cdot \frac{K}{M}\right).$$

Ed ora dobbiamo confrontare questa coppia di classi con quella delle classi H, K che definiscono il numero α.

Prendiamo un elemento qualunque della classe $M \cdot \frac{H}{N}$, sia ad es. l'elemento $m_1 \frac{h_1}{n_1}$. Questo numero, poichè è $m_1 > n_1$, è maggiore di h_1, che è un elemento della classe H.

Così, preso nella classe $N \cdot \frac{K}{M}$ un elemento qualunque, ad es. l'elemento $n_2 \frac{k_2}{m_2}$ troviamo che, poichè è $n_2 < m_2$, esso è minore di k_2, che è un elemento della classe K.

Egli è pertanto [136]:

$$\beta \gamma = \alpha.$$

Così abbiamo dimostrato che, dati due numeri qualunque, uno dei quali od ambidue siano irrazionali, ne esiste sempre un terzo il quale, moltiplicato per il secondo, dà prodotto eguale al primo. Se i due numeri dati fossero razionali, il terzo numero sarebbe il quoziente degli altri due. Anche dopo l'introduzione dei numeri irrazionali seguiterà a valere la:

146. Def. *Si dice quoziente di due numeri quel numero il quale, moltiplicato per il secondo dei numeri dati, dà per prodotto il primo.*

Se due numeri α e β sono dati mediante coppie di classi contigue (H, K), (M, N), egli è:

$$(H, K) : (M, N) = \left(\frac{H}{N}, \frac{K}{M}\right).$$

Potenze di numeri irrazionali.

147. Def. *Si dice potenza* n.esima *di un numero (anche se irrazionale) il prodotto di* n *fattori eguali a quel numero.*

Se un numero α è dato mediante classi contigue, e sia:

$$\alpha = (H, K),$$

egli è:

$$\alpha^n = (H, K)(H, K)(H, K) \dots (H, K),$$

epperò [143, 144] anche:

$$\alpha^n = (H H H \dots H, K K K \dots K)$$

dove ciascuna classe s'intende ripetuta n volte.

Ora noi sappiamo [132] che per qualunque elemento della classe $(H H H \dots H)$ si può trovare nella classe H^n elemento eguale o minore, e che per qualunque elemento della classe $(KKK..K)$ si può trovare nella classe K^n elemento eguale o maggiore. Perciò le classi H^n, K^n sono contigue e definiscono il numero stesso che le classi $(HHH...H)$, $(KKK...K)$.

Egli è pertanto:

$$\alpha^n = (H^n, K^n)$$

ossia:

$$(H, K)^n = (H^n, K^n).$$

Radici dei numeri.

148. Dato un numero α, razionale od irrazionale, e dato un numero intero n qualunque, imaginiamo di spartire tutti i numeri razionali in due classi H, K, mettendo in una tutti quelli le cui potenze *n.esime* sono maggiori di α, e nell' altra quei numeri le cui potenze *n.esime* sono minori di α.

Può darsi che ci sia un numero razionale la cui potenza *n.esima* sia uguale ad α. Questo numero non si potrebbe mettere in nessuna delle due classi.

Sappiamo [133] come si prova che le classi H, K sono contigue; se indichiamo con β il numero che le separa [135], possiamo scrivere:

$$\beta = (H, K).$$

epperò [147]:

$$\beta^n = (H^n, K^n).$$

E perchè per ipotesi gli elementi della classe H^n sono maggiori di α e quelli della classe K^n sono minori di α, anche questo numero è compreso tra le classi contigue H^n, K^n, e per conseguenza è [134]:

$$\beta^n = \alpha.$$

Così abbiamo provato che:

149. *Dato un numero qualunque, razionale od irra-*

zionale, e dato un intero n *qualunque, esiste sempre un numero ed uno soltanto il quale, elevato alla potenza* n.esima, *riproduce il numero dato. Quel numero si chiama* radice n.esima *del numero dato.*

Calcolo dei numeri irrazionali.

150. Introdotti i numeri irrazionali e definite le operazioni con questi numeri, ora dovremmo dimostrare le proprietà generali di queste operazioni. Si troverebbe che sono le stesse che son godute dalle operazioni con numeri razionali. Ordinariamente le dimostrazioni sono semplicissime, epperciò si possono lasciare allo studioso; daremo un saggio di dimostrazione meno semplice provando che, anche trattandosi di numeri irrazionali,:

Un quoziente non muta, se si moltiplicano dividendo e divisore per un terzo numero qualunque.

Siano i numeri irrazionali:

$$\alpha = (H, K), \quad \beta = (M, N), \quad \gamma = (P, Q).$$

Dico essere: $\qquad \alpha : \beta = \alpha\gamma : \beta\gamma.$

Abbiamo intanto [143, 144]:

$$\alpha\gamma = (HP, KQ), \qquad \beta\gamma = (MP, NQ),$$

e [146]:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{H}{N}, \frac{K}{M}\right), \quad \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \left(\frac{HP}{NQ}, \frac{KQ}{MP}\right).$$

Ora, confrontando le classi $\frac{H}{N}$ ed $\frac{HP}{NQ}$, troviamo che, preso un elemento qualunque della seconda, ad es. l'elemento $\frac{h_1 p_1}{n_1 q_1}$, si può asserire che c'è nell'altra classe un elemento minore, e per l'appunto è tale l'elemento $h_1 : n_1$, perchè è $p_1 > q_1$.

Similmente si prova che, per qualunque elemento della classe $\frac{KQ}{MP}$, c'è nella classe $\frac{K}{M}$ elemento maggiore.

E da ciò si conchiude [136] l'eguaglianza dei quozienti $\alpha : \beta$ ed $\alpha\gamma : \beta\gamma$, che d. d. (*).

151. Per le operazioni con numeri irrazionali non ci sono regole di calcolo particolari; le operazioni non si possono in generale altro che indicare. Ma, prendendo in luogo dei numeri irrazionali dati, valori razionali abbastanza approssimati, si possono ottenere valori approssimati delle quantità richieste, e questi valori con una approssimazione prestabilita qualunque.

152. Compiuta l'Aritmetica dei numeri irrazionali, passiamo a considerare quantità algebriche il cui valore assoluto sia irrazionale.

Assumiamo come definizione di somma di quantità algebriche irrazionali la definizione di somma di numeri irrazionali [140]. Terremo immutate le definizioni di sottrazione, moltiplicazione, quoziente e potenza di quantità algebriche razionali, perchè in esse non è fatto cenno della specie del valor numerico delle quantità a cui si riferiscono. E così possiamo dire che le regole del calcolo letterale valgono anche per quantità algebriche irrazionali.

D'ora innanzi pertanto una lettera può rappresentare anche una quantità algebrica irrazionale, purchè però l'ufficio suo non supponga una determinata specie di numero. Ad es., una lettera al posto d'esponente rappresenterà tuttavia un numero intero aritmetico.

(*) È però manifesto che questa proposizione non richiede una dimostrazione a posta, come abbiamo fatto ora; e ciò perchè si può ricavarla da precedenti teoremi nel modo stesso che si è fatto per i numeri razionali.

CAPITOLO V

EQUAZIONI E PROBLEMI DI PRIMO GRADO AD UNA INCOGNITA

Principî fondamentali della teoria delle equazioni.

153. Prendiamo a considerare un' espressione algebrica, quale ad es. la seguente $2x + 10$, in cui si intende che x rappresenti una quantità indeterminata, qualunque. Ad ogni valore che si attribuisca alla x, l' espressione ne assume uno di corrispondente. Ad es., ai valori $0, \frac{2}{3} - 5, - 12$ della x corrrispondono i valori $10, \frac{34}{3}, 0, - 14$ dell' espressione.

Visto che l' espressione $2x + 10$ al variare della x assume differenti valori, sorge l' idea di proporsi il problema inverso, di stabilire cioè preventivamente il valore dell' espressione, e di cercare il corrispondente valore della x. Ad es., si può domandare qual sia il valore della x, per il quale $2x + 10$ assume il valore 28. In questo caso la risposta è facilissima; il valore domandato è 9, perchè per $x = 9$ riesce appunto $2x + 10 = 28$.

Se avesse dovuto essere $2x + 10 = 0$, il valore richiesto sarebbe stato $- 5$. (*).

(*) Notiamo che nello scrivere l' eguaglianza:

$$2x + 10 = 28$$

si è mutato il significato della lettera x. Infatti, laddove nell' espressione $2x + 10$ la x rappresenta una quantità qualsivoglia, nell' eguaglianza invece la x rappresenta un valore determinato, il valore 9, e nessun altro, giacchè, com' è facile riconoscere, per nessun altro valore della x, non riesce:

$$2x + 10 = 28.$$

154. Prendiamo ora a considerare, ad es., le due espressioni $2x + 10$ e $3x + 2$, e proponiamoci di trovare un valore di x, per il quale le due espressioni assumano uno stesso valore, tale dunque che riesca:

$$2x + 10 = 3x + 2.$$

A primo aspetto codesto problema sembrerebbe sostanzialmente diverso dal precedente. Ma ci si riconduce subito ad esso, osservando che la questione corrisponde a questa di trovare un valore di x per il quale l'espressione:

$$(2x + 10) - (3x + 2)$$

assuma il valore *zero*, tale dunque che riesca:

$$(2x + 10) - (3x + 2) = 0.$$

Nel caso presente, con pochi tentativi, si trova che la proprietà richiesta la gode intanto il numero 8, giacchè, attribuendo ad x questo valore, ambedue le espressioni assumono il valore 26. (*).

155. Ripensando al problema che abbiamo considerato, sorge il sospetto che data un'espressione algebrica, sia ancora ad es. la $2x + 10$, e data una quantità determinata, ad es. 100, possa non esistere quantità, la quale, sostituita ad x nell'espressione data, faccia assumere a questa il dato valore.

Per l'espressione $2x + 10$ è facile abbastanza riconoscere che un valore di x esiste sempre, qualun-

(*) La riduzione del problema di trovare un valore di x per il quale riesca:

$$2x + 10 = 3x + 2$$

a quello di trovare un valore di x, tale che riesca:

$$(2x + 10) - (3x + 2) = 0,$$

è fondata su questo che, se due quantità sono eguali, la loro differenza è nulla; e che, reciprocamente, se la differenza di due quantità è nulla, allora le due quantità sono eguali tra loro.

que sia la quantità data, e che per trovarlo basta sottrarre 10 da codesta quantità, e poi dividere il resto per 2.

Ma può anche darsi il caso contrario. Ad es., se venga chiesto un valore di x tale che riesca:

$$x^2 + 10 = -35,$$

non si tarda a riconoscere che non esiste valore così fatto, dacchè, qualunque valore si attribuisca ad x, sia positivo, sia negativo, poichè, elevandolo al quadrato, si ottiene sempre una quantità positiva (o nulla; ciò per $x = 0$), è sempre positivo il risultato finale; epperò mai eguale a -35.

156. Invece, se l'eguaglianza proposta sia:

$$x^2 + 10 = 35,$$

si vede facilmente che anzi due sono i valori che godono della proprietà richiesta, dappoichè per l'appunto, così per $x = 5$, come per $x = -5$, il primo membro dell'eguaglianza riesce uguale a 35. Nessun altro valore ha poi la proprietà stessa che i due 5 e -5.

157. Un'espressione data può anche contenere parecchie lettere rappresentanti quantità indeterminate; tale sarebbe, ad es., l'espressione $2x + 3y$. In questo caso, se venga chiesto, ad es., di assegnare ad x ed y valori tali, che riesca:

$$2x + 3y = 18,$$

si vede che ad una delle lettere si può attribuire un valore ad arbitrio, perchè poi esiste sempre un valore conveniente per l'altra lettera, tale da verificare l'eguaglianza. Ad es., posto $x = 3$, si riconosce che, attribuendo ad y il valore 4, il primo membro assume appunto il valore 18.

158. Una questione della natura di quelle che abbiamo testè considerate potrebb' essere posta generalmente. Ad es., si potrebbe domandare un valore per x, tale che riesca:

$$3a + x = 10,$$

dove con a s' intende di rappresentare una quantità nota, benchè indeterminata.

In questo caso è chiaro esser $(10 - 3a)$ il valore domandato, che cioè, quando ad a si attribuisca un valore determinato, bisogna poi porre per x il numero 10 diminuito del triplo del valore dato alla lettera a.

159. Supponiamo sia chiesto un valore di x tale che riesca:

$$(2x + 3)5 = 10x + 15.$$

In questo caso, richiamandoci alla memoria la regola per la moltiplicazione di un polinomio per un monomio, troviamo di poter rispondere che, qualunque valore si attribuisca ad x, l' eguaglianza è verificata.

L' ultima eguaglianza è dunque di natura diversa dalle precedenti che abbiamo considerate; quindi la distinzione delle uguaglianze in *equazioni* e *identità*.

160. Identità. *Si dice* identità *un' eguaglianza, che sussiste* incondizionatamente, *che sussiste, cioè,* qualunque siano *i valori che si vogliano attribuire alle lettere che si trovano ne' due membri.*

Ad es., è una identità l' eguaglianza:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm;$$

e in generale sono tali tutte le uguaglianze, un cui membro si possa dedurre dall' altro mediante operazioni del calcolo letteralc.

Si dicono identità anche le uguaglianze i cui due membri sono composti di soli numeri, com' è, ad es., nella seguente:

$$5 + 3 = 12 - 4,$$

e la cui esattezza vien riconosciuta effettuando le operazioni indicate.

161. Equazione. *Si dice* equazione *un' eguaglianza che non è verificata se non per certi valori di certe lettere che si trovano nei termini dell' eguaglianza.*

Le *lettere*, alle quali bisogna dare convenienti valori affinchè l'eguaglianza sia verificata, si dicono le *incognite* dell' equazione.

Ordinariamente si prendono per le incognite le ultime lettere dell' alfabeto: di solito le lettere x, y, z....

I valori particolari, che bisogna attribuire all' incognita d' una equazione, supposto che ci sia un' incognita sola, affinchè l' eguaglianza sia verificata, si dicono le *soluzioni* o le *radici* dell' equazione.

Quando in una equazione ci sono parecchie incognite, in questo caso s' intende per *soluzione* dell' equazione un insieme di valori (tanti quante sono le incognite) tali che, sostituiti rispettivamente alle incognite, fanno che l' eguaglianza sussista in fatto.

Si dice che le soluzioni d' una equazione *verificano l' equazione, sodisfanno l' equazione, trasformano l' equazione in una identità.*

Risolvere un' equazione significa trovarne le soluzioni.

162. Equazioni equivalenti. Se confrontiamo, ad es., le due equazioni:

$$2x = 10,$$

$$4y = 20,$$

troviamo che ambedue hanno la stessa soluzione 5, e nessun' altra.

Due equazioni, che ammettono le stesse soluzioni, si dicono equivalenti. (*).

Quando si tratta di risolvere un' equazione, si può operare, invece che sulla data, sopra un' altra che si sappia equivalente all'equazione data. E si può dire, in generale, che la risoluzione d'una equazione consiste nel derivare dall'equazione proposta un'altra ad essa equivalente, ma più semplice, e poi dalla nuova equazione una terza anche più semplice, e così di seguito, fino a che se ne sia trovata una, equivalente alla proposta e così semplice, che la soluzione o le soluzioni di essa siano manifeste. Codesto processo è fondato sui teoremi seguenti.

163. Teor. *Aggiungendo una stessa quantità ai due membri d' una equazione (o sottraendo ecc.), si ottiene un' equazione equivalente alla data.*

Dim. Si rappresentino con A e B i due membri di una data equazione, e con M una quantità qualunque, che può essere o determinata, oppure un'espressione algebrica contenente anche l'incognita. Dico che le due equazioni:

$$A = B, \qquad A + M = B + M$$

sono equivalenti.

(*) Il sapere che tutte le soluzioni d'una equazione verificano un'altra equazione non basta per poter dire che le due equazioni sono equivalenti, giacchè la seconda potrebbe aver altre soluzioni, oltre di quelle della prima. Ad es. le equazioni $2x = 8$ ed $x^2 = 16$ non sono equivalenti, perchè la prima ha unicamente la soluzione 4, laddove la seconda, oltre che da 4, è sodisfatta da -4.

Consideriamo una soluzione della prima equazione. Questa soluzione è una quantità (*) che, sostituita all'incognita (**) nei due membri A e B, fa che questi assumano uno stesso valore; supponiamo che divengano ambidue uguali a C. Imaginando di fare la stessa sostituzione nei due membri della seconda equazione, troviamo che, poichè A e B divengono per essa ambidue uguali a C, i membri dell'equazione diventano ambidue uguali a $(C + M)$. Così intanto si è provato che ogni soluzione della prima equazione verifica la seconda.

Consideriamo ora una soluzione della seconda equazione. Codesta soluzione è una quantità (*) che, sostituita all'incognita (**) nei due membri $(A + M)$ e $(B + M)$, fa che questi membri assumano uno stesso valore. Se ciò avviene, vuol dire che per questa sostituzione le espressioni A e B divengono eguali, dappoichè soltanto quantità eguali, aumentate di una stessa quantità, possono dare risultati eguali. Dunque anche ogni soluzione della seconda equazione verifica la prima. (***).

Le due equazioni ammettono dunque le stesse soluzioni; sono cioè equivalenti, c. d. d.

Nello stesso modo si potrebbe provare l'equiva-

(*) Volendo supporre che l'equazione sia a più incognite, si deve dire: *un sistema di quantità*, ecc.

(**) Volendo supporre che l'equazione sia a più incognite, si deve dire: che, *sostituite rispettivamente alle incognite, rendono* ecc.

(***) Per questa seconda parte della dimostrazione basterebbe osservare che si può dedurre la prima equazione della seconda nello stesso modo che questa si è dedotta dalla prima, cioè aggiungendo ai due membri della seconda la stessa quantità $-M$.

lenza delle due equazioni:

$$A = B,$$

$$A - M = B - M,$$

la seconda delle quali si può ricavare dalla prima sottraendo dai due membri di questa la quantità M. (*).

Così possiamo dire d'aver dimostrato che, *ecc.*

164. Cor. 1°. *Se i due membri d'una equazione contengono uno stesso termine, questo si può sopprimere.*

Basta infatti aggiungere ai due membri dell'equazione la quantità che è numericamente uguale al termine comune ai due membri, ma con segno contrario, per ottenere la sparizione di codesto termine.

165. Cor. 2°. *Un termine qualunque d'una equazione si può trasportare dal membro, in cui si trova, in quell' altro, purchè gli si muti il segno.*

Infatti sia M un termine positivo o negativo di una equazione, e si supponga di aggiungere ai due membri la quantità che è numericamente uguale a codesto termine ma di segno opposto. Il termine sparirà dal membro, dove si trova, per ricomparire nell' altro, ma qui con segno cambiato.

Ad es., sia l'equazione:

$$5x - 8 = 40 + 4x.$$

Aggiungendo ai due membri le quantità $(+ 8)$ e $(- 4x)$, si ottiene l'equazione equivalente:

$$5x - 4x = 40 + 8.$$

E i termini $(- 8)$ e $(+ 4x)$ sono, in certo modo, passati da un membro all'altro mutando di segno.

(*) Ma si potrebbe ricondursi senz' altro al caso precedente, perchè sottrare una quantità M equivale [17] ad aggiungere codesta quantità dopo di averle cambiato il segno.

166. Cor. 3°. *Si può cambiare il segno a tutti i termini d'una equazione.*

Sia, ad es., l'equazione:

$$-2x^2 - 8x = -34 + b.$$

Scambiando di posto i due membri, otteniamo intanto:

$$-34 + b = -2x^2 - 8x.$$

Ora, cambiando di membro tutti i termini, risulta l'equazione:

$$2x^2 + 8x = 34 - b.$$

Così, per altro esempio, da:

$$-x = 8 \quad \text{si ricava} \quad x = -8.$$

167. Teor. *Moltiplicando, o dividendo, i due membri d'una equazione per una stessa quantità che non sia* zero *e non contenga l'incognita, si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

Dim. Siano le equazioni:

$$A = B,$$

$$A\,M = B\,M,$$

la seconda delle quali si è derivata dalla prima, moltiplicandone i due membri per la quantità M, che supporremo diversa da *zero* e indipendente dall' incognita. Si tratta di provare che le due equazioni sono equivalenti.

Consideriamo una soluzione della prima equazione. Codesta soluzione è una quantità (*) che, sostituita all' incognita (**) nei due membri A e B, fa assumere ai due membri uno stesso valore; supponiamo

(*) È un *sistema di quantità*, nel caso che l'equazione contenga due o più incognite.

(**) Nel caso che l'equazione contenesse due o più incognite, si direbbe: *sostituite rispettivamente alle incognite*, ecc.

che ambidue divengano eguali a C. È manifesto che, ove si faccia la stessa sostituzione nei due membri della seconda equazione, questa è sodisfatta; ed invero, diventando eguali a C i due fattori A e B, i membri dell' equazione diventano ambidue uguali a CM. Così intanto è provato che ogni soluzione della prima equazione verifica la seconda.

Consideriamo ora una soluzione della seconda equazione. Codesta soluzione è una quantità (*) che, sostituita (**) all'incognita nei due membri AM e BM, fa assumere a questi membri uno stesso valore. Ma poichè accade questo, possiamo conchiudere che per questa sostituzione i due fattori A e B divengono eguali. Infatti soltanto quantità eguali, moltiplicate per una stessa quantità M, *che non è uguale a zero* (***), possono dare prodotti eguali. Dunque ogni soluzione della seconda equazione rende A e B identicamente uguali, epperò è anche soluzione della prima equazione.

Le due equazioni sono adunque equivalenti.

Nello stesso modo si proverebbe l' equivalenza delle equazioni:

$$A = B \quad \text{ed} \quad \frac{A}{M} = \frac{B}{M},$$

(*) È un *sistema di quantità*, nel caso che l'equazione contenga due o più incognite.

(**) Nel caso che l'equazione contenesse due o più incognite, si direbbe: *sostituite rispettivamente alle incognite*, ecc.

(***) Anche quantità disuguali, moltiplicate per *zero*, danno prodotti eguali (eguali a *zero*). Epperò, quando M fosse uguale a *zero*, dall'eguaglianza $AM = BM$ non si potrebbe conchiudere come conseguenza necessaria l'altra $A = B$.

Quando poi M fosse un'espressione contenente l'incognita, in tal caso M potrebbe diventar *zero*, attribuendo all' incognita un valore conveniente.

la seconda delle quali è dedotta dalla prima, dividendone i due membri per la stessa quantità M, che si suppone ancora diversa da *zero* e indipendente dall'incognita. (*).

168. Noi abbiamo dimostrato che, moltiplicando o dividendo i due membri d'una equazione per una stessa quantità M, si ottiene un'equazione equivalente alla primitiva; ma avevamo posta la condizione che la quantità M non fosse *zero*, e che non contenesse l'incognita. Ora vogliamo renderci ragione di codesta restrizione.

Anzitutto, per il caso che sia $M = 0$, è manifesto che non si può più parlare di equivalenza dell'equazione $A = B$ con l'eguaglianza $A\,M = B\,M$, giacchè questa è una identità. Ed infatti, qualunque siano i valori che si vogliano attribuire alle lettere che entrano nelle due espressioni A e B, e qualunque siano i valori corrispondenti delle espressioni stesse, l'eguaglianza $A\,M = B\,M$ ha sempre luogo, perchè qualsivoglia quantità, moltiplicata per *zero*, dà per risultato *zero*.

Anche meno si può dire che sia equivalente ad una data equazione quella dedotta dividendone i due membri per *zero*, perchè il risultato d'una divisione per *zero*, od è indeterminato [119] o senza nessuna significazione [120].

In relazione con quanto precede dobbiamo aggiungere che, trattando equazioni, non avviene mai che si moltiplichino o si dividano i due membri per uno *zero* esplicito. Ma si viene a far questo inconscia-

(*) Questa seconda parte della dimostrazione si potrebbe ricondurre alla prima, osservando che dividere per M equivale a moltiplicare per $\frac{1}{M}$.

mente, ove si moltiplichino o si dividano i due membri per una lettera, che rappresenti una quantità indeterminata, ed alla quale si attribuisca poi più tardi il valore *zero*. Ove si faccia questo, divengono necessarie considerazioni particolari al caso che si sta trattando.

169. Consideriamo le due equazioni:

$$A = B \tag{1}$$

$$A\,M = B\,M \tag{2}$$

nell'ipotesi che M sia un'espressione contenente l'incognita.

Sembrerebbe intanto manifesto che ogni soluzione della prima equazione verificasse la seconda. Parrebbe infatti che si potesse asserire, senz'altro, che quella quantità, che posta in luogo dell' incognita rende A e B identicamente uguali, facendo assumere naturalmente uno stesso valore all'espressione M, verificasse in ogni caso anche l'equazione $A\,M = B\,M$.

Considerando poi l'equazione $A\,M = B\,M$, sembrerebbe anche qui che si potesse asserire, senz'altro, che essa è sodisfatta e da quelle quantità che, poste in luogo della x, rendono $A = B$; e da quelle, per le quali riesce $M = 0$.

Sembrerebbe che, quando non ci fosse nessun valore che annullasse M, si potesse dire che le due equazioni sono equivalenti; e che son tali anche quando tutti i valori, che annullano M, fossero nel tempo stesso soluzioni dell' equazione $A = B$; e che le equazioni non sono equivalenti, se ci sono valori che annullano M ma che non sodisfanno l'equazione $A = B$.

Tutto questo può aver luogo veramente; ma può anche darsi il contrario. Ci persuaderemo considerando casi particolari.

170. Se moltiplichiamo i due membri dell'equazione:

$$2x = 10,$$

la quale ammette la soluzione 5 e nessun'altra, per l'espressione $(x - 3)$, otteniamo l'equazione:

$$2x(x-3) = 10(x-3),$$

la quale oltre della soluzione 5 ha la soluzione 3; epperò le due equazioni non sono equivalenti.

Questo esempio ci ha fatto vedere che, moltiplicando i due membri d'una equazione per una espressione contenente l'incognita, può accadere che si ottenga un'equazione, la quale abbia altre soluzioni oltre di quelle dell'equazione primitiva. Queste soluzioni sono quantità che sodisfanno alla doppia condizione di annullare l'espressione per la quale si sono moltiplicati i due membri dell'equazione data e di far assumere a codesti membri due valori determinati, disuguali.

Quando avvenga questo caso, e si siano moltiplicati i due membri dell'equazione data per un'espressione contenente l'incognita allo scopo di risolvere l'equazione, allora in fine tra le quantità cercate se ne trovano di non richieste, che si devono rigettare. Appunto perciò codeste quantità si dicono *soluzioni estranee*. L'esempio considerato ci permette adunque di dire che:

Moltiplicando i due membri d'una equazione per una espressione contenente l'incognita, può darsi che si introducano soluzioni estranee.

171. Se si moltiplicano i due membri dell'equazione:

$$2x = 10$$

per l'espressione $(x - 5)$, si ottiene l'equazione:

$$2x(x-5) = 10(x-5),$$

la quale è equivalente alla primitiva, perchè la quantità 5, che annulla il moltiplicatore, è nel tempo stesso soluzione dell'equazione primitiva. Adunque:

Moltiplicando i due membri di una equazione per una espressione contenente l'incognita può accadere che si ottenga un'equazione equivalente alla primitiva.

172. Sia ora l'equazione:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{5}, \qquad (1)$$

la quale, com'è manifesto, ha la soluzione 8 e nessun'altra.

Moltiplicando i due membri per $(x-3)$ e lasciando indicate le moltiplicazioni, otteniamo:

$$\frac{1}{x-3}(x-3) = \frac{1}{5}(x-3). \qquad (2)$$

Quest'equazione, ove si fermi l'attenzione soltanto sul binomio che è tra parentesi, sembrerebbe avere la soluzione $x=3$. Ma, se effettuiamo compiutamente la sostituzione, troviamo che il primo membro, anzichè il valore *zero*, assume [119] il valore *uno*, laddove il secondo membro per $x=3$ in fatto si annulla. L'equazione (2), che si può mettere [104] sotto la forma più semplice:

$$1 = \frac{x-3}{5},$$

poichè, come la (1), ha la soluzione 8 e nessun'altra, è equivalente all'equazione primitiva. Da questo esempio conchiudiamo, di nuovo, che:

Moltiplicando i due membri d'una equazione per un'espressione contenente l'incognita può accadere che si ottenga un'equazione equivalente alla primitiva.

173. Ora dobbiamo considerare il caso in cui si dividono i due membri d'una equazione per una espressione contenente l'incognita. Veramente sembrerebbe che non fossero necessarie considerazioni a posta, potendosi ricondurre questo caso al precedente, in base a ciò che si divide per una quantità moltiplicando per la sua inversa. Ma negli esempi considerati l'espressione, per la quale abbiamo moltiplicati i due membri d'una equazione, aveva forma intera, cosicchè con la moltiplicazione si introduceva in uno od in ambidue i membri un nuovo fattore, o si faceva sparire un fattore di qualche denominatore. Importa perciò che si esamini il caso in cui si dividano i due membri per una espressione contenente l'incognita. Anche qui supporremo che questa espressione sia di forma intera rispetto all'incognita; anzi ci restringeremo al caso più particolare, che è il più frequente in pratica, a quello cioè in cui il divisore è un fattore comune ai due membri dell'equazione.

Sia dunque l'equazione:

$$AM = BM, \tag{1}$$

nella quale intenderemo che M rappresenti un'espressione contenente l'incognita.

Raccogliendo tutti i termini in uno stesso membro, e raccogliendo poi M a fattore comune, otteniamo l'equazione, equivalente alla data, :

$$(A - B) M = 0. \tag{2}$$

Manifestamente le soluzioni di questa equazione sono quelle delle due equazioni:

$$A - B = 0 \qquad \text{ed} \qquad M = 0,$$

e ciò per questa ragione che, perchè un prodotto sia nullo, è necessario e sufficiente che uno almeno dei fattori sia nullo.

L' equazione $A - B = 0$, o la sua equivalente $A = B$, si può riguardare come ricavata dalla (1) dividendone i due membri per il loro fattor comune M.

Conchiudiamo che:

Quando si sopprime un fattore contenente l'incognita, comune ai due membri d'una equazione, bisogna poi risolvere, oltre dell'equazione risultante, l'equazione che si ottiene eguagliando a zero *il fattore soppresso.*

Es. Sopprimendo il fattore comune ai due membri dell' equazione:

$$3x(2x - 10) = 40(2x - 10),$$

l'equazione perde la radice 5, la quale ha la proprietà di annullare il fattore $2x - 10$, ed è perciò radice dell'equazione: $2x - 10 = 0$.

Es. Sopprimendo il fattore x comune a tutti i termini (e quindi ai due membri) dell'equazione:

$$x^2 + 7x = 12x,$$

l'equazione perde la soluzione $x = 0$.

174. Applicazione. Quando un'equazione da risolvere abbia dei termini frazionari, in generale torna opportuno di liberare l'equazione dai divisori, ossia di dedurre dalla proposta un'equazione, i cui termini abbiano forma intera. Questo si ottiene moltiplicando tutti i termini dell' equazione (che è quanto dire [66] i due membri dell'equazione) per una quantità, che sia divisibile (*) per tutti i denominatori. Si otterrà l' intento in ogni caso prendendo per moltiplicatore il

(*) Qui la parola *divisibile* ha un senso od un'altro, secondo che i denominatori sono numeri ovvero espressioni letterali.

prodotto dei denominatori; ma, se questi hanno dei fattori comuni, può valere al medesimo intento un'espressione più semplice del prodotto dei denominatori.

Quando la quantità, per la quale si moltiplicano i due membri d'una equazione, non contiene l'incognita, l'equazione risultante è [167] equivalente alla data; nel caso contrario può darsi [170] che l'equazione ottenuta ammetta qualche radice *estranea*.

Es. 1°. Liberiamo dai divisori l'equazione:

$$\frac{3-x}{8a^2b}-\frac{m}{6a^2c}=\frac{1}{15b}-\frac{5x-2}{9ac^3}.$$

$$2^3a^2b \qquad 2\cdot 3a^2c \qquad 3\cdot 5b \qquad 3^2ac^3$$

$$2^3\cdot 3^2\cdot 5a^2bc^3$$

$$3^2\cdot 5c^3 \qquad 2^2\cdot 3\cdot 5bc^2 \qquad 2^3\cdot 3a^2c^3 \qquad 2^3\cdot 5ab$$

$$45c^3(3-x)-60bc^2m=24a^2c^3-40ab(5x-2).$$

Nella linea, che è immediatamente sotto dell'equazione data, sono scritti i denominatori, coi coefficienti decomposti in fattori primi. Il monomio sottoposto, $360a^2bc^3$, è un multiplo comune dei denominatori. Moltiplicando per questa quantità i due membri dell'equazione data, questa viene liberata dai divisori.

Nella penultima riga sono scritti i quozienti delle divisioni del detto multiplo per i singoli denominatori. Così, invece di moltiplicare il primo termine per $360a^2bc^3$, si moltiplica dapprima per il suo denominatore, e con ciò questo denominatore sparisce; resta a moltiplicare per $45c^3$, relativo quoziente. Altrettanto si dica per gli altri termini. (L'operazione, fino ad un certo punto, ha dell'analogia con la riduzione di frazioni a denominatore comune).

In questo caso, poichè la quantità, per la quale si sono moltiplicati i due membri, non contiene l'incognita, l'equazione ottenuta è equivalente all'equazione data. (Sempre però che le lettere a, b, c abbiano valori diversi da *zero*).

Es. 2°. Liberiamo dai divisori l'equazione:

$$\frac{2x+3}{x^2-a^2}+\frac{1}{6}=m-\frac{a}{2x-2a}.$$

$$(x+a)(x-a) \qquad\qquad 2\cdot 3 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2(x-a)$$

$$2\cdot 3(x+a)(x-a)$$

$$6 \qquad (x+a)(x-a) \qquad 6(x^2-a^2) \qquad 3(x+a)$$

$$6(2x+3)+(x^2-a^2)=6m(x^2-a^2)-3a(x+a).$$

Nella prima linea, che è sotto dell'equazione data, si vedono i denominatori decomposti in fattori. (Un termine, che abbia forma intera, si può intendere affetto da denominatore *uno*). La più semplice quantità, che sia divisibile per tutti i denominatori, è:

$$2\cdot 3(x+a)(x-a)=6(x^2-a^2).$$

Poichè questa espressione contiene l'incognita, l'equazione risultante potrebbe ammettere radici estranee. Tali non potrebbero essere altro che le quantità $+a$ e $-a$, le quali hanno la proprietà di annullare l'espressione per la quale si sono moltiplicati i due membri dell'equazione data. È facile riconoscere che nessuna di queste due quantità non verifica l'ultima equazione; epperò si può asserire che essa è equivalente alla primitiva.

Es. 3°. Per ultimo esempio proponiamoci di liberare dai divisori l'equazione:

$$\frac{4x^2 - 3x}{1 + x} - \frac{3x}{1 - x} = \frac{4x^3 + 2x}{x^2 - 1}. \quad (1)$$

Moltiplicando i due membri per $x^2 - 1$, si ottiene:

$$(4x^2 - 3x)(x - 1) + 3x(x + 1) = 4x^3 + 2x,$$

e da questa facilmente si ricava:

$$-x^2 + x = 0. \quad (2)$$

Codesta equazione, perchè si è dedotta dalla (1) moltiplicandone i due membri per una espressione contenente l'incognita, potrebbe contenere delle soluzioni estranee. Tali non potrebbero essere altro che le quantità $+1$ e -1, che hanno la proprietà di annullare il moltiplicatore. E perchè, come si può riconoscere mediante sostituzione, la quantità -1 non verifica la (2), e la quantità $+1$ sodisfa la (2) e non sodisfa la (1), si conchiude che $+1$ è soluzione estranea, epperò le equazioni (1) e (2) non sono equivalenti.

175. Gli esempi, che abbiamo trattato, ci hanno fatto vedere che, moltiplicando i due membri d'una equazione per una espressione contenente l'incognita allo intento di liberar l'equazione dai divisori, può darsi che si ottenga un'equazione equivalente alla primitiva, ed anche il caso che si introducano soluzioni estranee. Un modo per decidere il dubbio sarebbe questo di cercar i valori che annullano il moltiplicatore e poi riconoscere, mediante sostituzione, se questi valori hanno ad un tempo la proprietà di verificare la nuova equazione e di non verificare la primitiva. Soltanto se ha luogo questo caso, le equazioni non sono equivalenti, ed i valori provati sono soluzioni estranee.

176. Un processo per liberare un'equazione dai divisori che contengono l'incognita, senza introdurre soluzioni estranee, sarebbe questo di raccogliere anzitutto in un membro i termini frazionari, aventi l'incognita nel denominatore, sommare poi codeste frazioni, e sopprimere infine nella somma tutti i fattori comuni contenenti l'incognita. Indichiamo con:

$$\frac{A}{M} = B \qquad (1)$$

l'equazione così ottenuta.

Può darsi che il divisore M non contenga l'incognita, e allora l'intento è raggiunto, senz'altro. [167].

Nel caso poi che M contenga l'incognita, l'equazione:

$$A = B\,M \qquad (2)$$

è tuttavia equivalente alla (1). Infatti, ammesso che ci siano valori dell'incognita per i quali si annulli M e quindi anche $B\,M$, questi valori non possono essere soluzioni della (2), perchè per essi il primo membro A assume valore diverso da *zero*. È ciò per questa ragione che, se una quantità α annullasse ad un tempo M ed A, queste due espressioni sarebbero divisibili [98] per $(x - \alpha)$, e ciò contrariamente all'ipotesi che i due termini della frazione che costituisce il primo membro della (1) non abbiano fattori comuni contenenti l'incognita.

Però codesto processo, che vale a liberar un'equazione dai divisori senza introdurre soluzioni estranee, richiede che si sappia semplificare una frazione, qualunque siano i termini; e ciò non sempre sappiamo fare.

L'altro metodo, che vale a riconoscere se con la moltiplicazione si sono introdotte soluzioni estranee, suppone che si sappiano trovare i valori che annullano M, ossia che si sappia risolvere l'equazione $M = 0$. E questa risoluzione può presentare maggiori difficoltà che quella della nuova equazione.

Perciò, in pratica, quando si siano moltiplicati i due membri d'una equazione per una espressione contenente l'incognita, si risolve l'equazione risultante, e in fine, mediante sostituzione, si riconosce se le soluzioni trovate verificano tutte l'equazione primitiva. Quelle, se ci sono, che non sodisfanno codesta equazione si rigettano come *estranee.*

177. Classificazione delle equazioni. Le equazioni si distinguono, innanzi tutto, secondo il numero delle incognite, in equazioni ad una incognita, a due incognite, ecc.

Poi si distinguono in gradi. Quando in una equazione nessuna incognita non si trovi nei divisori (*), il grado dell'equazione è dato dalla maggiore tra le somme che si ottengono sommando per ciascun termine gli esponenti che hanno le incognite che si trovano in esso.

Perciò, ad es., l'equazione:

$$\frac{3x}{a} - 7 = \frac{5x^2y^2}{4} - y^3 + 3x$$

è di *quarto* grado. Essa è di *terzo* grado rispetto ad y; di *secondo* rispetto ad x.

(*) Bisogna poi oltre a ciò che non siano indicate, relativamente alle incognite, operazioni diverse da quelle che conosciamo.

L' equazione:

$$\frac{a x^2}{5} + \frac{x^2 y^2 - 3 y^4}{m y} = 0,$$

che si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{a x^2}{5} + \frac{x^2 y}{m} - \frac{3 y^3}{m} = 0,$$

e di grado assoluto *quarto*; è di *terzo* rispetto ad y; di *secondo* rispetto ad x.

L' equazione:

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 - 5$$

non è di *secondo* grado, ma di *primo*. Infatti, sviluppando il quadrato indicato nel primo membro, e sopprimendo poi il termine $4x^2$ comune ai due membri, l' equazione si trasforma nell' equivalente:

$$12x + 9 = -5.$$

L' equazione:

$$(5x^2 - 3)(2x^3 + 9) = 7$$

è manifestamente di *quinto* grado.

L' equazione:

$$\frac{3x^2}{x-4} = \frac{2x}{3} + 7 + \frac{48}{x-4}$$

è di *primo* grado. Infatti, portando l' ultimo termine nel primo membro, si ottiene:

$$\frac{3x^2 - 48}{x-4} = \frac{2x}{3} + 7,$$

$$\frac{3(x^2 - 16)}{x-4} = \frac{2x}{3} + 7,$$

$$3(x+4) = \frac{2x}{3} + 7.$$

Risoluzione d'una equazione di primo grado a una incognita.

178. I principî, finora stabiliti relativamente alle equazioni, bastano per risolvere un'equazione di primo grado a una incognita. Lo vedremo in alcuni esempi.

Es. 1°. Sia da risolvere l'equazione:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 16 - \frac{x+3}{4}.$$

Liberiamo anzitutto l'equazione dai divisori, moltiplicando i due membri per 12, minimo comune multiplo dei divisori. L'equazione:

$$6(x+1) + 4(x+2) = 192 - 3(x+3),$$

che risulta, è [167] equivalente alla primitiva, perchè il moltiplicatore adoperato non contiene l'incognita.

Effettuando le operazioni indicate, otteniamo:

$$6x + 6 + (4x + 8) = 192 - (3x + 9),$$

dalla quale equazione si deduce l'altra:

$$6x + 6 + 4x + 8 = 192 - 3x - 9.$$

Raccogliendo [165] nel primo membro tutti i termini contenenti l'incognita, e nel secondo i termini noti, risulta l'equazione:

$$6x + 4x + 3x = -6 - 8 + 192 - 9,$$

pur essa equivalente all'equazione data. Effettuando nei due membri le riduzioni, si ottiene:

$$13x = 169.$$

Infine, dividendo i due membri per 13, si ha l'equazione:

$$x = 13,$$

anch'essa equivalente alla primitiva. Ma quest'ultima equazione è verificata quando alla lettera x si sostituisca il numero 13, e non ammette nessun'altra soluzione; quindi 13 è soluzione ed unica soluzione dell'equazione proposta.

Sostituendo nell' equazione primitiva alla lettera x il valore 13, ed effettuando le riduzioni, entrambi i membri divengano eguali a 12. Ciò serve di prova.

Es. 2°. Sia l' equazione:

$$\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}.$$

Moltiplicando i due membri per 12, otteniamo:

$$3x-6+4=12x-(8x-4).$$

Raccogliendo nel primo membro i termini contenenti l' incognita e nel secondo gli altri, risulta l' equazione:

$$3x-12x+8x=6-4+4,$$

ossia:

$$-x=6.$$

Mutando il segno ai due membri, si ha: $x=6-6$.

L' equazione proposta ha dunque la soluzione negativa -6. Sostituendola alla x, per accertarne l' esattezza, ambidue i membri assumono il valore $-\frac{5}{3}$. La soluzione -6 è dunque esatta.

Es. 3°. Sia l' equazione:

$$\frac{x-a}{a-b}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}.$$

Moltiplicandone i membri per (a^2-b^2), si ottiene:

$$(x-a)(a+b)-(x+a)(a-b)=2ax.$$

Da questa facilmente si deduce:

$$2bx-2ax=2a^2.$$

Ora si può dividere i due membri dell' equazione per 2; poi, raccogliendo nel primo membro la x a fattore comune, risulta:

$$x(b-a)=a^2,$$

donde, dividendo i due membri per $(b-a)$, si ha:

$$x=\frac{a^2}{b-a}.$$

Si riconosce facilmente che questa soluzione sodisfa l'equazione proposta.

Es. 4°. Sia da risolvere l'equazione:

$$\frac{9x+4}{5x-48}+\frac{4x-17}{51}=\frac{5x+32}{17}-\frac{11x+11}{51}.$$

In questo caso, mettendosi subito a liberar l'equazione dai divisori, si dovrebbero fare operazioni, che, procedendo altrimenti, si possono risparmiare. Torna opportuno trasportare la seconda frazione nel secondo membro, e, moltiplicati i due termini della terza frazione per 3, eseguire poi le operazioni che si trovano indicate nel secondo membro. Così si ottiene speditamente:

$$\frac{9x+4}{5x-48}=2,$$

donde $\qquad 9x+4=10x-96,$

e infine: $\qquad x=100.$

Es. 5°. Sia da risolvere l'equazione:

$$\frac{ac}{m(a-b)b}-\frac{(m+n)^2x}{mb}-\frac{nx}{b}=\frac{c}{m(a-b)}-\frac{3nx}{b}.$$

Separando i termini noti dagl'incogniti, si ottiene:

$$\frac{ac}{m(a-b)b}-\frac{c}{m(a-b)}=\frac{(m+n)^2x}{mb}+\frac{nx}{b}-\frac{3nx}{b},$$

ossia:

$$\frac{c(a-b)}{m(a-b)b}=\frac{(m+n)^2x}{mb}-\frac{2nx}{b},$$

epperò anche:

$$\frac{c}{mb}=\frac{(m+n)^2x}{mb}-\frac{2mnx}{mb}.$$

Ora, moltiplicando i due membri per mb, sviluppando il quadrato di $m+n$, e raccogliendo la x a fattor comune, si ottiene:

$$c=(m^2+2mn+n^2-2mn)x,$$

epperò infine:

$$x = \frac{c}{m^2 + n^2}.$$

Anche in questo caso, ove si fosse voluto liberare da bel principio l'equazione dai divisori, si sarebbero dovuti fare lunghi calcoli, che si sono schivati operando con discernimento.

179. Dagli esempi trattati ricaviamo la:

Regola. *Per risolvere un' equazione di primo grado ad una incognita:*

1°. *si libera l' equazione dai divisori;*

2°. *effettuando le operazioni indicate, si fanno sparire le parentesi, se queste racchiudono l' incognita;*

3°. *si raccolgono in un membro i termini contenenti l' incognita, e nell' altro membro tutti gli altri termini,*

4°. *si fanno le riduzioni nei due membri; e se l' incognita si trova in parecchi termini ed ha coefficienti letterali, la si raccoglie a fattore comune;*

5°. *infine si dividono i due membri per il coefficiente dell' incognita.*

180. Oss. Gli esempi considerati ci hanno fatto vedere che, per risolvere un' equazione di primo grado a un' incognita, non occorrono in ogni caso tutte le operazioni accennate nella regola precedente. Nè, giova ripeterlo, è necessario, nè sempre opportuno, quando occorrano alquante di esse, effettuarle per l' appunto nell' ordine in cui sono accennate.

Risoluzione dell' equazione generale di primo grado ad una incognita.

181. Abbiamo risoluto equazioni di primo grado ad una incognita e trovato che ognuna delle equazioni risolute ammetteva una soluzione ed una sola. Ma non possiamo per questo asserire che altrettanto ha luogo per qualunque altra equazione di primo grado ad una incognita, giacchè, per quanti casi particolari si fossero considerati, resterebbe sempre il dubbio di non esserci mai imbattuti in qualche caso che fa eccezione. Per decidere siffatta questione non c'è altro modo che prendere a considerare tale equazione da cui possa intendersi rappresentata ogni equazione che sia di primo grado ad una incognita. Codesta equazione generale è la seguente:

$$a x + b = a' x + b' \qquad (1)$$

nella quale x è l'incognita, ed a, b, a' e b' rappresentano quantità note qualunque, compreso lo *zero*.

Che la precedente equazione rappresenti in fatto qualunque che sia di primo grado ad una sola incognita è facile persuadersi. Infatti un' equazione, che sia veramente di primo grado ad una incognita, non può contenere che due sorta di termini; cioè: termini contenenti l'incognita con esponente *uno*, e termini tutti noti (*). Effettuando nei due membri la riduzione dei termini simili, o raccogliendo l'incognita a comun fattore nel caso che essa abbia coefficienti letterali, in ciascun membro resterà un solo termine contenente la x, con un moltiplicatore noto che intendiamo di rappresentare rispettivamente con a ed a'. E le lettere b e b' rappresentano le somme dei termini noti rispettivamente del primo e del secondo membro.

(*) Se nell'equazione ci fosse un termine, quale ad es. il seguente $\frac{mx+n}{p}$, bisognerebbe metterlo sotto la forma $\frac{m}{p}x + \frac{n}{p}$.

Risolvendo l'equazione (1), si ha:

$$ax - a'x = b' - b,$$

$$x(a - a') = b' - b,$$

epperò

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}. \qquad (2)$$

Qui dobbiamo avvertir subito che l'ultima operazione è fatta nell'ipotesi che il coefficiente $(a - a')$ sia diverso da *zero*; infatti essa non ha senso nel caso contrario.

Il secondo membro dell' equazione (2) mostra con quali operazioni si trova il valore dell' incognita nel caso che $(a - a')$ non sia *zero*, che è quanto dire nel caso che i coefficienti dell' incognita nei due membri dell' equazione (1) non siano eguali. Poichè le operazioni accennate si possono sempre effettuare, e ciascuna ammette un solo risultato (*), ora possiamo asserire che:

Ogni equazione di primo grado ad una incognita la quale, ridotta alla forma:

$$ax + b = a'x + b',$$

abbia per coefficienti dell'incognita nei due membri quantità disuguali (**), *ammette una soluzione ed una soltanto.*

Ora naturalmente ci resta da considerare il caso che sia $a - a' = 0$, cioè $a = a'$. In questo caso l'equazione (1) ha la forma:

$$ax + b = ax + b'.$$

Qui è manifesto che, qualunque valore si attri-

(*) Se nella formula di risoluzione fosse indicato, ad es., di estrarre la radice quadrata dalla quantità a, allora si conchiuderebbe che, per questo riguardo, quando a fosse una quantità negativa, non ci sarebbero valori di x; laddove, quando a fosse positiva, ci sarebbero per x due valori.

(**) Uno dei due coefficienti potrebbe esser nullo. In questo caso l'incognita non si trova che in un membro soltanto.

buisca alla x, i due primi termini dei due membri assumono uno stesso valore; dimodochè, se i termini noti b e b' sono eguali, allora l'equazione è sempre sodisfatta, e non può esserlo in nessun modo nel caso contrario. Nel primo caso non si ha dunque più una propria equazione, ma una identità. Nel secondo caso l'equazione non ammette nessuna soluzione.

Nei due casi d'eccezione, or ora considerati, non si può, per ottenere il valore dell'incognita, ricorrere al secondo membro della (2), appunto perchè a quel risultato siamo pervenuti nell'ipotesi che a ed a' fossero disuguali. Chi vi ricorresse medesimamente troverebbe per valore di x, nel primo caso il simbolo *indeterminato* $\frac{0}{0}$; nel secondo troverebbe il simbolo $\frac{m}{0}$, che non rappresenta nessuna quantità.

Ma poichè nel primo caso l'equazione è sodisfatta da qualunque valore della x e nel secondo da nessuno, si può poi infine conchiudere che:

Il secondo membro dell'equazione:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}$$

è la formula di risoluzione di qualunque equazione di primo grado ad una incognita, quando sia ridotta alla forma:

$$a x + b = a' x + b'. \ (*).$$

Problemi.

182. Quando nella risposta ad una questione entrano numeri incogniti, l'Algebra si presta spesso a determinarli.

(*) In pratica non c'è nessun vantaggio, per risolvere un'equazione di primo grado ad una incognita, di ricorrere alla relativa formula di risoluzione.

La risoluzione algebrica di un problema consta di due parti. La prima, che si dice *intavolazione* del problema, consiste nello esprimere con equazioni le condizioni, che devono essere sodisfatte dalle quantità incognite. Poi viene la *risoluzione* di queste equazioni.

I problemi vanno distinti secondo il numero delle incognite e in gradi, e ciò come le equazioni dalla cui risoluzione dipende quella dei problemi. Con le cognizioni finora acquistate, noi sapremo risolvere un problema di primo grado ad una incognita, ogni volta che sapremo scrivere l'equazione corrispondente.

È facile prevedere che, attesa l'infinita varietà delle questioni che possono esser proposte, non si può dare una regola generale per intavolare un problema. Ad ogni modo, quando si voglia usare dell'Algebra per la risoluzione d'un problema, la strada che bisogna tenere è la seguente:

Si rappresenta il valore dell'incognita con una lettera (*). *Poi, quasi il problema fosse già risoluto, e la lettera fosse il numero desiderato, si opera* (**) *come per accertare che questo numero sodisfa veramente le condizioni del problema* (***). *Naturalmente le operazioni*

(*) Talvolta la risoluzione del problema dipende, o almeno riesce facilitata, da una scelta opportuna dell'incognita. Invece del numero richiesto è opportuno cercarne un altro, da cui il domandato si potrà poi dedurre agevolmente.

(**) La difficoltà sta ordinariamente in questo di spogliare l'enunciato del problema da ciò che vi sia d'accessorio, affine di conoscere le condizioni aritmetiche che devono essere sodisfatte dalle incognite.

(***) Il decidere se una risposta ad una questione sia esatta è ordinariamente molto facile, anche quando il trovarla è molto difficile. Non tutti, ad es., sanno rispondere a un indovinello; quasi tutti sanno riconoscere se, chi pretende *aritmetiche, che si dovrebbero effettuare, restano indicate (perchè si ha una lettera invece di un numero) e i risultati di due differenti serie di operazioni, e che devono* (*) *riuscire uguali, sono rappresentati da due espressioni algebriche. Scrivendo tra queste due il segno d'eguaglianza, si ottiene una equazione* (**). Da tal punto in poi il compito spetta all' Algebra. Alcuni esempi varranno a chiarire questi accenni.

Probl. 1°. *Da una sala uscì la metà delle persone che vi stavano raccolte, e più tardi se ne andò la terza parte delle rimaste. Dopo ciò il numero delle rimanenti superava di 3 il decimo del numero primitivo. Si domanda questo numero.*

Risol. Vediamo se mai le persone fossero state 60 (***). La prima volta sarebbero uscite 30 persone. Il terzo della metà rimasta, o, ciò che è lo stesso, il sesto del numero primitivo è 10. Sarebbero così uscite

di aver indovinato, ha colto nel segno. Allorchè, intavolando un problema, si ottenga un'equazione che si sappia risolvere, si può dir dunque che, mediante l'Algebra, si riduce la difficoltà di scoprire un numero a quella di saper riconoscere se è esatto, quando altri abbia detto quale esso sia.

(*) Nella massima parte dei casi l'enunciato del problema indica chiaramente quali sono i risultati, che devono riuscire uguali; talvolta invece la difficoltà massima consiste in capire quali sono questi risultati, che devono essere uguali tra loro. In questo caso può esser utile di cercar di modificare l'enunciato del problema, così da far comparire la parola *eguale*.

(**) Se sono più d'uno i numeri incogniti, bisogna rappresentarli con altrettante lettere (purchè tra le incognite non sussistano relazioni semplicissime). In tal caso dall'enunciato del problema si deducono più equazioni.

(***) Giova spesso al principiante istradarsi con l'attribuire all'incognita un valore numerico a capriccio, e provare se mai questo numero sia il domandato.

40 persone in tutto, e quindi rimastene 20. È poi detto che il numero delle persone rimaste superava di 3 il decimo del numero primitivo. In altre parole, togliendo 3 dal numero delle persone rimaste, si deve ottenere un resto eguale a 6 (decimo di 60). Ciò non avviene, e quindi si conchiude non esser vero che nella sala ci fossero in origine 60 persone.

Ripigliamo, intendendo di rappresentare con x il numero ricercato. La prima volta uscirono $\frac{x}{2}$ persone, poi altre $\frac{x}{6}$, in tutto adunque uscirono $\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right)$ persone; epperò il numero delle persone rimaste è rappresentato da:

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right).$$

Sottraendo 3 da questo numero deve risultare $\frac{x}{10}$, decimo del numero primitivo.

Il numero x deve dunque sodisfare l'equazione:

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}\right)-3=\frac{x}{10};$$

cosicchè, dal lato puramente algebrico, il problema è questo di trovare un numero da cui togliendo la sua metà, il suo sesto e anche 3, si ottenga il decimo del numero stesso. Il numero, che sodisfa queste condizioni, vien trovato risolvendo l'equazione; esso è:

$$x=\frac{90}{7}=12+\frac{6}{7},$$

ed è facile la verificazione.

Ma perchè il valore della x deve esprimere un numero di persone, e questo numero (almeno nel nostro problema) non può essere frazionario, così conchiudiamo che la questione non ammette una soluzione esatta. Il numero trovato sodisfa tutte le altre condizioni, e non questa di essere intero; condizione di cui non si è tenuto conto nell' intavolare il problema.

Probl. 2°. *Un punto, che si muove lungo una retta, partendo da O, ha percorso 20 metri verso destra, poi ha eseguito un movimento ignoto, e quindi un altro in direzione opposta all' ultimo, e uguale in valor numerico alla terza parte di codesto. Con questi movimenti il mobile è arrivato a 2 metri alla sinistra del punto di partenza. Si vogliono conoscere i due movimenti incogniti.*

Risol. Stabiliamo di ritenere come positivi gli spazi percorsi verso destra. Il primo movimento ignoto, sia esso positivo o negativo, si rappresenti con x; il secondo si dovrà rappresentare con $-\frac{x}{3}$. (Se il valore di x è positivo, quest' ultima espressione ha valore negativo; e viceversa). La somma algebrica delle tre lunghezze dev' essere uguale a -2. Il valore della x deve dunque sodisfare l' equazione:

$$20+x-\frac{x}{3}=-2.$$

Risolvendola, si trova $x=-33$, il che significa che il punto, dopo aver percorso 20 metri verso destra, ne ha percorso 33 verso sinistra, e quindi in seguito 11 verso destra.

Probl. 3°. *Alcuni soci, che chiameremo* A, B, C..., *hanno fatto un guadagno. In conformità ai loro patti, per farne la spartizione,* A *si prende* 10 *lire, più il sesto del rimanente. Poi* B *si prende* 20 *lire, e il sesto della somma rimasta; quindi* C *prende* 30 *lire e un sesto del residuo; e così via. In fine ognuno dei soci ha la medesima somma. Si domandano il numero dei soci, e la parte d' ognuno.*

Risol. È facile accorgersi che, conosciuto il guadagno totale, si sanno poi dire immediatamente il numero dei soci e la parte di ciascuno.

Indichiamo con x il guadagno totale. Dopo che A si è preso 10 lire, ne rimangono $(x - 10)$, il cui sesto è $\frac{x-10}{6}$. Così la parte A è espressa da:

$$10 + \frac{x - 10}{6} = \frac{60 + x - 10}{6} = \frac{50 + x}{6}.$$

Dopo che il socio A ha presa la sua parte, rimane la somma:

$$x - \frac{50 + x}{6} = \frac{6x - 50 - x}{6} = \frac{5x - 50}{6}.$$

Da questa il socio B preleva 20 lire; rimangono:

$$\frac{5x - 50}{6} - 20 = \frac{5x - 50 - 120}{6} = \frac{5x - 170}{6}$$

lire, il cui sesto è:

$$\frac{5x - 170}{36}.$$

La parte del socio A e quella del socio B devono essere uguali; quindi x deve sodisfare l'equazione:

$$\frac{50 + x}{6} = 20 + \frac{5x - 170}{36};$$

e così il problema è intavolato.

Risolvendo l'equazione, si trova $x = 250$. Per conseguenza 50 lire è la parte di ciascun socio, e 5 è il numero dei soci.

Probl. 4°. *Una verga, composta d'oro e d'argento, pesa* 7465 *grammi; e immersa nell'acqua pesa* 467 *grammi di meno. Sapendo che l'oro puro perde* 52 *millesimi del suo peso quando viene immerso nell'acqua, e che l'argento perde* 95 *millesimi, si trovino le quantità d'argento e d'oro contenute nella verga.*

Risol. Sia x il peso, in grammi, dell'argento contenuto nella verga. Il peso dell'oro è di $(7465 - x)$ grammi. Ora si deve procedere come se x fosse il numero che si cerca, e come si trattasse di accertare che questo numero corrisponde veramente alla questione.

Poichè un grammo d'argento perde, quando è immerso nell'acqua, g. 0,095, la perdita degli x grammi d'argento è rappresentata da $0{,}095\,x$. Così la perdita di peso dei $(7465 - x)$ grammi d'oro è rappresentata dal prodotto $0{,}052\,(7465 - x)$. La somma di queste perdite parziali deve (?) essere uguale alla perdita di peso sofferta dalla lega. Abbiamo così l'equazione:

$$0{,}095\,x + (7465 - x)\,0{,}052 = 467.$$

Risolvendola, si ha la quantità domandata d'argento

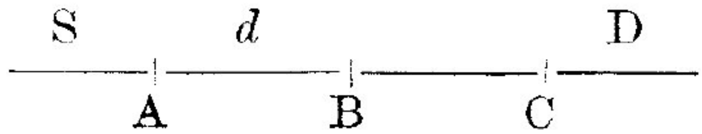
$$x = \text{g. } 1833{,}02;$$

e per conseguenza la quantità dell'oro è:

$$\text{g. } (7465 - 1833{,}02) = \text{g. } 5631{,}98.$$

183. Molto più importante è la risoluzione generale dei problemi. Si risolve un problema in generale quando si lasciano indeterminati (si rappresentano con lettere) gli stessi dati della questione. Trattiamo, ad es., il seguente:

Probl. *Lungo una retta* SD, *da tempo indefinito, con moto uniforme e con velocità date, scorrono due mobili* M *ed* M'; *ed è indicata la loro posizione in un istante dato. Si domanda di determinare l'istante dell'incontro dei due mobili.*



Risol. Siano A e B i punti, dove si trovano rispettivamente i due mobili M ed M' nell'istante dato.

Stabiliamo che siano *positive* quelle distanze, misurate partendo dal punto A, che sono alla destra di questo punto; le altre saranno negative.

Così le distanze dal punto B sono positive, se esistono alla destra; e negative, se alla sinistra di questo punto.

Indichiamo con v la velocità del mobile M, cioè lo spazio percorso da M in un secondo. Se il movimento avviene nella direzione $S\,D$, la quantità v è *positiva* (*), altrimenti è negativa. E sia v' la velocità del mobile M'. Sarà v' positiva, se il mobile M' si muove da sinistra a destra; nel caso opposto v' è una quantità negativa.

Riferendo la posizione del punto B al punto A, la distanza $A\,B$ nel nostro caso è positiva; supponiamo che sia rappresentata dalla lettera d.

Il segno del tempo e quello della distanza non sono indipendenti tra loro, appunto perchè tempo e distanza di un mobile dal punto di riferimento sono grandezze che dipendono l'una dall'altra. Riferendo l'istante dell'incontro dei mobili all'istante nel quale è nota la loro posizione, si deve stabilire che il tempo sia positivo, se l'incontro avviene *dopo* del passaggio del mobile M per il punto A; e per conseguenza è negativo se l'incontro è accaduto *prima*.

Ora, per intavolare il problema, considereremo uno dei casi che si possono presentare. Supponiamo che ambidue i mobili scorrano verso destra, e che la velocità di M sia maggiore di quella di M'. È evidente che in questo caso l'incontro avviene dopo che i mobili sono passati per i punti A e B; avviene alla destra di B, supponiamo sia nel punto C. Il tempo x è positivo e in questo tempo il mobile M, per raggiun-

(*) Abbiamo già osservato che la velocità e la distanza di un mobile da un punto della linea che percorre si devono prendere con lo stesso segno, se hanno la stessa direzione.

gere M' deve anzitutto percorrere la distanza d, e poi tutto lo spazio percorso da M' nel tempo stesso.

Perchè poi in un secondo i due mobili percorrono rispettivamente gli spazi v e v', in x secondi percorreranno gli spazi vx e $v'x$. L'incognita x deve pertanto sodisfare l'equazione:

$$vx = d + v'x,$$

dalla quale si ricava:

$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Dimodochè, posto, ad es., che il mobile M percorra 8 metri al secondo, 2 metri al secondo l'altro mobile, e che sia $d = 180$, si trova che l'incontro avviene 30 secondi *dopo* del passaggio per i punti A e B.

All'equazione $vx = d + v'x$ siamo pervenuti considerando uno dei casi che si possono dare. Ma l'equazione stessa esprime la relazione tra le quantità v, v', d e x in qualunque altro caso.

Supponiamo dapprima che v e v' siano ancora positive; ma che sia $v < v'$. È manifesto che in questo caso l'incontro avviene *prima* del passaggio dei mobili per i punti A e B, e alla sinistra d'ambidue questi punti. Gli spazi percorsi nel tempo x sono ancora rappresentati dai prodotti vx e $v'x$; ma questi prodotti questa volta (perchè il fattore x è negativo) sono negativi, e le distanze dei mobili dai punti A e B nell'istante dell'incontro sono appunto negative. In questo caso, all'opposto che nel precedente, $v'x$ in valore assoluto supera vx; ma ancora la somma algebrica delle quantità d e $v'x$ è uguale a vx. Così, sussistendo la stessa equazione, si ottiene lo stesso risultato finale:

$$x = \frac{d}{v - v'},$$

dimodochè, ponendo, ad es., $v = 2$, $v' = 8$ e $d = 180$, si trova $x = -30$; e ciò significa che l'incontro avviene 30 secondi *prima* del passaggio dei mobili per i punti A e B.

Si lascia allo studioso la cura di considerare gli altri casi.

Discussione della formola di risoluzione di un problema generale.

184. Quando vien proposto un problema particolare, i cui dati sono rappresentati da numeri, la soluzione, se ce n'è, è rappresentata da un numero; e una volta che questo sia stato determinato, la questione è esaurita.

Invece, quando una questione vien trattata in generale, le operazioni aritmetiche, con le quali dai numeri dati si ricava l'incognita, non si possono effettuare; in tal caso la ricerca si considera esaurita, quando sia stata trovata l'espressione che indica quali sono le operazioni or ora accennate. (*).

L'espressione mentovata si dice *formula di risoluzione* del problema, appunto perchè indica il calcolo che in un caso determinato qualunque conduce al valore, che risolve il problema. Così, ad es., nell'ultimo problema, il secondo membro del risultato dice che, affine di conoscere il tempo richiesto, basta dividere la distanza data per la differenza (algebrica) delle velocità.

(*) È molto importante, quando la formula di risoluzione di un problema è complicata, metterla sotto la forma che richiede il più semplice calcolo aritmetico. Ad es., quando si fosse trovato $x = a^2 + 2ab + b^2$, se ne dedurrebbe $x = (a + b)^2$. In generale, facendo comparire parentesi in una data espressione, il calcolo aritmetico si semplifica.

Si può dire che, quando si tratta un problema in generale, si esaurisce soltanto quella parte della risoluzione, la quale è comune a tutti casi particolari possibili. I calcoli, che rimangono indicati, possono poi, secondo i valori dei dati, condurre a risultamenti tra i quali ci siano diversità o circostanze degne d'esser prese in esame. Il mettere in rilievo queste circostanze si dice *discussione della formula di risoluzione del problema.*

La discussione della formula di risoluzione di un problema ha anzitutto per intento di decidere se il problema ha sempre soluzioni; e. se no, entro quali limiti devono essere contenuti i valori dei dati, perchè il problema ne ammetta. Talvolta l'importante è di stabilire quande le soluzioni siano positive, quando negative. Talvolta importa sopra tutto scoprire ed analizzare casi singolari, che si possono presentare; il che, in generale, non verrebbe mai fatto, considerando solo casi particolari di quella data questione.

Così, ad es., l'esame della formula di risoluzione dell'ultimo problema mostra che esiste sempre una soluzione ed una soltanto; che cioè l'incontro avviene sempre ed una volta soltanto; eccettuato però il caso in cui le velocità sono eguali in valore e segno, perchè in questo caso l'equazione non ha soluzioni. (È poi facile riconoscere il perchè dell'eccezione; quando le velocità sono eguali in valore e segno, i mobili si mantengono costantemente alla distanza d). Si riconosce inoltre, ad es., che, quando le velocità hanno egual segno e differenza piccolissima, il tempo è grandissimo; che se, senza alterare le velocità, la distanza dei punti A e B si prenda doppia, tripla..., diventa doppio, triplo... il tempo; ecc.

Esercizi.

150. $3x + (7 - x) = 11. \qquad 9 = 5x - (3 + 2x).$

151. $4(10 - 2x) - 3(x - 5) = 0.$

152. $8(3x - 2) - 7x - 5(12 - 3x) = 13x.$

153. $4x - 3(20 - x) = 6x - 7(11 - x) + 11.$

154. $x - \frac{3x}{2} + 9 = \frac{2x}{3} + 4 + \frac{5x}{6} - \frac{6x}{5} + \frac{1}{5}.$

155. $\frac{3x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2x}{5} + 2 = 2x - \frac{3x}{5}.$

156. $\frac{2x}{3} = \frac{176 - 4x}{5}. \qquad \frac{3x}{4} + \frac{180 - 5x}{6} = 29.$

157. $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}.$

158. $4 - \frac{7 - 3x}{5} = 3 - \frac{3 - 7x}{10} + \frac{x + 1}{2}.$

159. $\frac{x - 1}{4} - \frac{x - 5}{32} + \frac{15 - 2x}{40} = \frac{9 - x}{2} - \frac{7}{8}.$

160. $\frac{x + 1}{7} - x(2 - x) = (x - 1)^2.$

161. $\frac{5x + 4}{2} - \frac{7x + 5}{10} = \frac{28}{5} - \frac{x - 1}{2}.$

162. $\frac{6 - x}{11} - \frac{4 - 3x}{12} = \frac{16}{3} - \frac{18 + 2x}{3} - \frac{3 - 3x}{4}.$

163. $\frac{5x - 3}{7} - \frac{9 - x}{3} = \frac{5x}{2} + \frac{19(x - 4)}{6}.$

164. $\frac{5x}{12} - \frac{3x + 11,1}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}.$

165. $\frac{5x}{2} - \frac{7x}{8} + \frac{4x - 13}{5} = 14 + \frac{8x - 5}{20} - \frac{12x - 9}{15}.$

166. $\frac{7(7 - x)}{6} - \frac{3(17 - 2x)}{9} = \frac{4x - 9}{7} - \frac{13 - x}{2} + 4.$

167. $\frac{5x+2}{3} - \left(\frac{3x-1}{2} - 3\right) = \frac{3(x+1)}{2} - \left(\frac{x+1}{6} + 3\right).$

168. $\frac{3+x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4}\right) + \left(\frac{7-x}{6} - \frac{9+3x}{8}\right) = 0.$

169. $\frac{4x+9}{20} - \frac{2x+3}{15} = \frac{16x+81}{24} - \frac{8x+27}{30} - \frac{9}{40}.$

170. $(5x - 32)(2x + 10)\left(3x - \frac{x}{2} + 7\right) = 0.$

171. $\frac{2x-3}{15} - \frac{4x-9}{20} = \frac{8x-27}{30} - \left(\frac{9}{40} + \frac{16x-81}{24}\right).$

172. $\frac{3x^2}{5} = \frac{(7x-2)(3x-6)}{35} + \frac{2x+8}{5}.$

173. $\frac{2}{7}\left\{\frac{5}{12}\left(\frac{7}{8}\left[\frac{3x}{4} + 5\right] - 10\right) + 3\right\} - 8 = 0.$

174. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 2\right) + 2\right] + 2\right) + 2\right\} = 1.$

175. $\frac{9x-0{,}7}{4} - \frac{7x-1{,}1}{3} = \frac{5x-1{,}5}{7} - \frac{5(0{,}4-2x)}{6}.$

176. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{39+x}{9}.$

177. $\frac{7x-6}{35} - \frac{x-5}{6x-101} = \frac{x}{5}.$

178. $\frac{6x+5}{8x-15} - \frac{1+8x}{15} = \frac{1-x}{3} + \frac{3-x}{5}.$

179. $\frac{2x^2-7}{14x-14} - \frac{5x-6}{15} = \frac{3x+1}{21} - \frac{10x-11}{30} + \frac{1}{105}.$

180. $\frac{18x-40}{45-6x} + 2x + \frac{16x-15}{24} = \frac{77}{12} - \frac{165-64x}{24}.$

181. $\frac{7x+1}{x-1} = \frac{35}{9}\left(\frac{x+4}{x+2}\right) + \frac{28}{9}.$

182. $\frac{3+x}{3-x} - \frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{2+x}{2-x}.$

183. $\dfrac{3-2x}{1-2x}-\dfrac{5-2x}{7-2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7-16x+4x^2}.$

184. $\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{3}{2(x+3)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2(x+3)}.$

185. $\dfrac{2x+1}{3x-15}-\dfrac{x-11}{2x-10}=1.$

186. $\dfrac{3x-1}{2x-6}+\dfrac{5x-7}{3x-9}=11-\dfrac{7x+1}{4x-12}.$

187. $\dfrac{3-2x}{1-x}=\dfrac{5-4x}{4-4x}-\dfrac{3-3x}{3x-1}.$

188. $\dfrac{75-x}{3(x+1)}+\dfrac{80x+21}{5(3x+2)}=5+\dfrac{23}{x+1}.$

189. $\dfrac{x+2}{x+7}+\dfrac{x+7}{x+5}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{9+x}{7+x}-\dfrac{3-x}{5+x}+\dfrac{x+4}{3+x}.$

190. $\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-5}.$

191. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x-8}{x-6}-\dfrac{x+1}{1-x}.$

192. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{4-x}{5-x}-\dfrac{x-5}{x-6}.$

193. $\dfrac{7x^n}{x-1}=\dfrac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}-\dfrac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}.$

194. $a^2x-a^2+b^2x+b^2=2abx.$

195. $(a-x)^2-2(a-b)x+x^2=\dfrac{(6x+b)x}{3}.$

196. $(a+x)(b+x)-\dfrac{a^2c}{b}=a(b+c)+x^2.$

197. $cx-\dfrac{dx}{abc}+\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{ax}{b}+ab-\dfrac{d}{c^2}.$

198. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}+\dfrac{x}{c}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}.$

199. $\dfrac{mx-(c-x)n}{m(2x-c)}=1.$

200. $\left(\frac{x+b}{x-b}\right) : \left(1-\frac{x-2b}{x-b}\right) = \frac{3x-5b-8}{b}$.

201. $\frac{ax}{b(x+c)} + \frac{bx}{ax+ac} = 1$.

202. $\frac{1+a}{2} = \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x(x-1)}$.

203. $\frac{x-a}{a-b} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$.

204. $\frac{ax}{a+c} + 2ac - a^2 = \frac{cx}{a-c} - c^2$.

205. $\frac{2x+7b}{2a+b} = 1 - \frac{x+a}{b-2a}$.

Si risolvano le due uguaglianze seguenti rispetto a ciascuna delle lettere che sono in esse.

206. $1 - \frac{c-1}{2c} = \frac{a}{a-n}$. $\qquad \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}$.

207. $\frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$.

208. $\frac{x}{ab} + ab = \frac{1}{a+b} + (a+b)x$.

209. $\frac{x-a}{x-b} = \left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2$.

210. $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$.

211. $\frac{a}{x} + \frac{x}{a} + \frac{a(x-a)}{x(x+a)} - \frac{x(x+a)}{a(x-a)} = \frac{ax}{a^2-x^2} - 2$.

212. $(m+n)^2 = 3m^2 + n^2 - \frac{(m^2-n^2)m}{x}$.

213. $a+b+\frac{x}{a+b} = a-b+\frac{x}{a-b}$.

214. $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2x}{ab}$.

215. $\frac{a(a^2x-b^2x)}{b}+\frac{b(a^2x-b^2x)}{a}+\frac{2ab}{a+b}=$

$=\frac{(a+b)^2(a^2x-b^2x)}{ab}.$

216. $\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2}.$

217. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

218. $\frac{(2a-b)^2x}{ab}+\frac{b^2-(a-2b)x}{a+b}-\frac{2a(2a^2+bx)}{(a+b)^2}=$

$=\frac{(5a+3b)b^3}{(a+b)^3}-b.$

219. $\frac{a^2b^3x}{(a^2-b^2)^2}+\frac{2a^2}{a+b}-\frac{abx}{a-b}-\frac{ab^3x}{(a^2-b^2)(a-b)}=$

$=a-\frac{ab^4x}{(a^2-b^2)^2}-\frac{2ab}{a+b}+\frac{a^2x}{a-b}.$

220. $\frac{1-x}{1-a}-\frac{1-x}{1-a^2}+\frac{1-x}{1-a+a^2-a^3}-2=$

$=2-\frac{1-x}{1+a}-\frac{1-x}{1+a^2}-\frac{1-x}{1+a+a^2+a^3}.$

221. $\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=$

$=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}.$

Risposte.

194. $\frac{a+b}{a-b}$. 195. $\frac{3a^2}{12a-5b}$. 196. $\frac{ac}{b}$. 197. $\frac{ab}{c}$.

198. $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$. 199. c. 200. $3b+4$.

201. $\frac{abc}{a^2-ab+b^2}$. 202. $\frac{a+1}{a-1}$. 203. $\frac{a^2}{b-a}$.

204. a^2-c^2. 205. $3a-2b$.

206. $\left(a = \frac{n(1+c)}{1-c},\quad n = \frac{a(1-c)}{1+c},\quad c = \frac{a-n}{a+n}\right).$

$\left(a = \frac{bd}{2d-c},\ b = \frac{a(2d-c)}{d},\ c = \frac{(2a-b)d}{a},\right.$

$\left. d = \frac{ac}{2a-b}\right).$ **207.** $\frac{a^2+b^2}{a+b}.$ **208.** $\frac{ab}{a+b}.$

209. $\frac{ab}{a+b}.$ **210.** $\frac{2ab}{a+b}.$ **211.** $4a.$

212. $\frac{m+n}{2}.$ **213.** $a^2-b^2.$ **214.** $\frac{ab}{a+b}.$

215. $\frac{ab}{(a+b)^2(a-b)}.$ **216.** $\frac{a+b+3}{2}.$

217. $\frac{ab}{a+b}.$ **218.** $\frac{ab}{a+b}.$ **219.** $\frac{a-b}{a+b}.$

220. a^4 **221.** $\frac{5a(2b-a)}{3a-d}.$

Problemi.

222. Quale è il numero che, sommato col suo triplo e con la sua quinta parte, dà 42 per risultato?

223. Quale è il numero che, sommato con l'eccesso del suo doppio su 12, dà 30 per risultato?

224. Si domanda un numero tale, che prendendone $^1/_2$, $^1/_3$ $^1/_4$, e $^2/_7$, e sommando, si ottenga 575.

225. Dal numero 40 si vuol sottrarre tanto che il resto superi di 8 il numero sottratto.

226. Dividere 46 in due parti tali che, dividendole, l'una per 7, l'altra per 3, e sommando i quozienti, si ottenga 10.

227. Dividere 100 in due parti tali che il doppio dell'una eguagli i $^2/_3$ dell'altra.

228. Dividere 20 in due parti tali che la somma del triplo d'una parte e del quintuplo dell'altra superi di 4 il quadruplo del numero stesso.

229. La somma di due numeri è 52, e 12 è la differenza. Si trovino i due numeri.

230. Il doppio di un numero supera di $8\,{}^1/_2$ la somma di $^3/_8$ ed $^{11}/_{12}$ del numero. Si trovi questo numero.

231. Trovare due numeri consecutivi tali che la somma della metà e della quinta parte dell'uno sia eguale alla somma della terza e della quarta parte dell'altro.

232. La somma di tre numeri è 100; l'eccesso del più grande sul medio è 7; l'eccesso del medio sul più piccolo è 3. Si trovino i tre numeri.

233. Un servo s'era accordato per 300 lire l'anno e un vestito. Dopo 5 mesi, poichè volle partire, ricevette 90 lire e l'abito. Quanto fu computato quest'ultimo?

234. Una contadina, a cui fu chiesto quante uova avesse da vendere, rispose: Se avessi $^1/_2$, più $^1/_3$, più $^1/_4$ di quante ne ho, ne avrei 20 di più. Quante uova aveva?

235. Una frazione è equivalente a $^5/_7$, e la somma de'suoi termini è uguale a 108. Si trovi la frazione.

236. In una stalla ci sono dei fagiani e dei conigli; essi hanno in tutti 100 gambe e 36 teste. Quanti sono i fagiani e quanti i conigli?

237. Un padre e suo figlio hanno insieme 72 anni. L'età del figlio è $^2/_7$ di quella del padre. Dicansi le due età.

238 Due amici posseggono insieme 570 lire. Se l'uno avesse il quadruplo e l'altro il quintuplo di quanto hanno, avrebbero in tutti e due 2350 lire. Si vuol sapere quanto abbia ciascuno.

239. Sopra due rami c'erano dei passeri; 42 sul più alto e 24 sull'inferiore. Poco dopo sul primo ramo c'era un numero di passeri quintuplo che sull'altro. Si domanda quanti uccelli siano volati dal ramo inferiore sul più alto.

240 Un palo è piantato in terra per $^1/_4$ della sua lunghezza; $^1/_3$ di esso è sott'acqua, ed emerge per metri 2,5. Si vuol sapere la lunghezza del palo.

241 In due botti c'è uguale quantità di vino. Spillandone 34 litri dalla prima e 80 dalla seconda, resta nella prima botte il triplo di vino che nell'altra. Quanti litri di vino ci sono nelle due botti?

242. Un tale ha 61 anni, e suo figlio ne ha 29. Quanti anni addietro l'età del padre era nonupla di quella del figlio?

243. Un tale ha comperato un cavallo, poi un bue del prezzo di $^5/_7$ di quello del cavallo e infine un asino che gli co-

stò $^1/_{10}$ del valore del bue. Si trovino i prezzi delle singole bestie, sapendo che in tutte e tre costarono 1550 lire.

244. Dividere 53 in due parti in modo che i $^5/_6$ dell'una equivalgano ai $^3/_7$ dell' altra.

245. Un tale si mette a giocare e perde $^2/_5$ di quanto aveva. Poi vince 90 lire; quindi perde $^4/_9$ di quanto possedeva dopo questa vincita; poi vince 670 lire; e in fine perdendo $^4/_7$ di quanto nuovamente aveva, si trova con 360 lire. Si domanda quanto ha vinto o perduto in tutto.

246. Un capo di famiglia comperò una botte di vino, e calcolò che un litro gli costava 30 centesimi. Ma nel trasporto ne andarono perduti 40 litri, epperò il costo vero diventò di 35 centesimi al litro Si domanda quanti litri di vino conteneva la botte.

247. Una signora comperò 18 metri di stoffa per farsi un vestito, dimenticando che, quando si bagna la stoffa, questa si restringe. La lunghezza essendo diminuita di $^1/_{20}$, quanta stoffa dovrà comperare ancora per avere 18 metri di stoffa dopo la bagnatura?

248. Un tale disse a suo figlio: se indovini quante noci ho in questo sacchetto, te ne darò la quarta parte e 10 in aggiunta, o, ciò che fa lo stesso, te ne darò una quinta parte più 15 Quante erano le noci?

249. In una lotteria composta di 10000 biglietti, una metà di quelli a premio e $^1/_3$ di quelli senza premio sono insieme 3500. Si domanda quanti biglietti delle due specie ci sono nella lotteria.

250. In un miscuglio di vino ed acqua, di vino c'è la metà più 25 litri, e di acqua ce n'è $^1/_3$, meno 5 litri. Quanti sono i litri di vino e quanti quelli dell'acqua?

251. Due amici hanno insieme 170 lire. Se il primo dà al secondo $^1/_3$ di quanto possiede, ciò che gli rimane è $^{10}/_7$ di quanto ha poi il secondo. Si trovi quanto hanno i due amici.

252. Quattro persone si spartiscono una somma nel modo seguente: alla prima tocca $^1/_2$, alla seconda $^1/_5$, alla terza $^1/_6$, alla quarta il resto. Così a quest' ultima toccano 48 lire di meno che alla terza. Quante sono le lire spartite?

253. Una strada lunga kilometri 19 $^1/_5$ è costata 60000 lire. La parte in montagna è $^3/_5$ di quella in pianura; e ciascun kilometro di questa costò $^2/_5$ di quanto costò al kilometro in montagna. Si domanda quanto al kilometro è costato ciascun tronco di quella strada.

254. In un cortile ci sono delle oche e delle galline; e il numero delle prime è $^3/_{10}$ di quello delle seconde. Un cane fa scappare un'oca e $^5/_7$ delle galline, e così ne restano tante delle une quante delle altre. Si trovi il numero totale degli animali in discorso.

255. Due amici hanno rispettivamente lire 18 e lire 13 $^3/_4$. Dopo il pranzo, pagato metà per uno, il secondo ha $^2/_3$ di quanto ha il primo. Si domanda quanto hanno speso.

256. Un tale dona 1000 lire a 5 suoi figli. Questi se le spartiscono in guisa che a ciascuno toccano 20 lire di più che al prossimo inferiore d'età. Quanto ebbe il più giovane?

257. Una guarnigione si compone di 1250 soldati. Ogni cavaliere riceve 15 lire al mese, e 10 lire ciascun fante. Il soldo mensile per tutti i soldati ammonta a 13500 lire. Quanti sono i soldati di cavalleria, quanti quelli di fanteria?

258. Un fanciullo ha tanti fratelli quante sorelle. Una di queste potè dire: il numero de' miei fratelli è doppio di quello delle mie sorelle. Quanti sono i fratelli, e quante le sorelle?

259. Il denominatore d'una frazione supera di 3 il numeratore. Aumentando entrambi i termini di 1, la frazione diventa eguale a $^2/_3$. Si trovi la frazione.

260. Un istituto d'educazione è composto di 4 classi. Nella prima vi è $^1/_5$, nella seconda $^1/_4$, e nella terza $^1/_3$ del numero totale degli scolari. Qual è questo numero, se nella quarta classe si contano 26 allievi?

261. Il quadrato di un numero supera di 1189 il quadrato del numero inferiore d'una unità. Si trovi questo numero.

262. In una società il numero degli uomini era triplo di quello delle signore. Essendo partiti 5 uomini con le loro mogli, il numero degli uomini divenne quintuplo di quello delle signore. Quante di queste e quanti di quelli erano insieme da principio?

263. Si vuol dividere tra due persone una somma di lire 307,50 in modo che l'una abbia poi tanti pezzi da 2 lire, quanti da 50 centesimi l'altra. Quanto toccherà a ciascuno?

264. Dovendo pagare 82 lire con 20 monete, che siano da 2 lire e da 5 lire, quanto della prima specie e quante dell'altra si dovranno prendere?

265. Due amici vorrebbero acquistare insieme un cavallo. L'uno non può pagare che $^1/_5$ del prezzo, l'altro $^1/_7$; e riunendo i loro denari trovano mancare 276 lire per poter fare l'acquisto. Si trovi il prezzo del cavallo.

266. In una fortezza ci sono 2600 soldati. Per ogni cavaliere vi sono 3 artiglieri e 9 fantaccini. Quanti sono i soldati di ciascuna arma?

267. Un tale, al quale fu domandato il nome di persona a lui cara, rispose: I tre numeri, corrispondenti al posto occupato nell'alfabeto dalle tre lettere che formano il nome richiesto, hanno le seguenti proprietà. Se al terzo tra i numeri si aggiunge 1, a una metà del risultato si aggiunge 2, a un terzo del nuovo risultato si aggiunge 3, a un quarto del nuovo risultato si toglie un quinto della somma che si ottiene aggiungendo 4 al numero, si ottiene la ventesima parte del numero stesso diminuito di 1. La somma dei due ultimi numeri è decupla dell'ultimo. La somma di tutti e tre è uguale a un terzo del primo, più un terzo del secondo, più 17.

268. Si muti nell'equazione dell'esercizio 162 il primo termine del secondo membro in modo che l'equazione divenga equivalente a quella dell'esercizio 167.

269. Alquanti oggetti son da riporre in alquante casse. Mettendo 10 oggetti per cassa, una cassa resta vuota; mettendone 9, restano fuori 2 oggetti. Quanti sono gli oggetti, e quante le casse?

270. Si trovi un numero tale che, sottraendo 1 dal suo doppio, e poi 2 dal doppio del residuo, e dividendo infine l'ultimo resto per 4, risulti un numero di una unità minore del numero domandato.

271. La somma di due numeri è 100, la differenza dei loro quadrati è 1400. Si trovino questi numeri.

272. La differenza di due numeri è 45; la differenza dei loro quadrati è 225. Si trovino i due numeri.

273. Un tale propose di dare 8 scudi a chi raddoppiasse il numero degli scudi che possedeva. Tizio lo accondiscese per tre volte, e così restò con la borsa vuota. Quanti scudi aveva egli mai da principio?

274. Una contadina arrivò al mercato con un canestro d'uova e col proposito di venderle a 7 cent. l'uno. Nel deporre il canestro ne ruppe 5. Facendo poi i suoi conti, trovò che, vendendo le uova rimaste a 8 cent. l'uno, si sarebbe rifatta del danno. Quante uova aveva nel canestro?

275. Un mercante ha 60 buoi e tanto fieno da bastare per 90 giorni. Dopo 20 giorni egli vende 20 buoi; ma 15 giorni dopo vuol comperare tanti buoi che il fieno gli basti ancora per 50 giorni. Quanti buoi deve egli comperare?

276. Una partita di grano, da quando fu messa in granaio, seccandosi, diminuì di $^1/_{20}$; nel tempo stesso il prezzo crebbe di $^1/_{12}$; dimodochè il negoziante potè dire di aver già fatto un guadagno di 12000 lire. Si domanda quanto gli sia costato quel grano.

277. Un tale, se avesse speso 5 lire di più, sarebbe rimasto con $^1/_2$ di quanto aveva. E se avesse speso 7 lire di meno, sarebbe restato con $^2/_3$. Quante lire aveva?

278. Un tale da una botte di vino ne cava $^1/_9$ e vi aggiunge dell'acqua. Poi cava $^4/_7$ del miscuglio e vi aggiunge dell'acqua. Infine spilla ancora $^1/_4$ del miscuglio. Dopo ciò, nella botte, di vino non ce ne sono più che 80 litri. Quanto vino c'era da principio?

279. Un tale disse: ho speso $^1/_5$ di quanto aveva più una lira, poi ho speso $^2/_5$ del resto più 2 lire, poi $^3/_5$ del nuovo resto più 3 lire, e son rimasto con 91 lire. Quante lire aveva?

280. Da una botte piena di vino si spilla $^1/_4$ del totale, poi $^4/_9$ del rimanente e in fine altri 16 litri. Il vino rimasto è $^1/_7$ di quanto se ne è spillato le due prime volte insieme. Si domanda quanti litri di vino conteneva la botte.

281. In una città il giorno più lungo supera di 10 ore e 2 minuti la notte più corta. Si domanda quanto duri in quel luogo il giorno più lungo e quanto la notte più breve.

282. Qual numero, sottratto da n, o diviso per n, dà risultati eguali?

283. Trovare le formule che insegnano a calcolare due numeri dei quali si conoscono la somma e il quoziente.

284. Si supponga che nell'esercizio 162 l'ultimo denominatore non si possa leggere. Come si può determinarlo, sapendo che la soluzione dell'equazione è — 5?

285. Un libro ha 36 righe per pagina e 40 lettere per riga. Se si fossero messe 4 righe di più per pagina e 5 lettere di più per riga, si sarebbero risparmiate 4 pagine. Di quante pagine è questo libro?

286. In una società viene proposto di raccogliere una somma a scopo di beneficenza. Se ognuno desse 16 lire, si ricaverebbero 240 lire di più delle occorrenti; se ne desse 10, mancherebbero 300 lire a compiere la somma. Quante erano le persone, e quante lire si volevano raccogliere?

287. Diofanto, antico matematico, fe' scrivere sulla sua tomba che egli aveva passato $^1/_6$ della sua vita nella fanciullezza, $^1/_{12}$ nell'adolescenza: che, presa moglie, era vissuto con essa $^1/_7$ della sua vita e altri 5 anni prima di avere un figlio. Che era sopravvissuto 4 anni al figlio, il quale non avea raggiunto se non la metà degli anni del padre. A che età compose Diofanto questo esercizio?

288. Un soldato in rango aveva $^1/_5$ di tutta la compagnia alla sua destra. Essendo stato traslocato di due posti verso sinistra, riconobbe che aveva poi a sinistra $^3/_4$ di tutta la compagnia. Quanti erano i soldati in tutti?

289. Un tale ha due cestelli di noci. Trasporta $^1/_4$ delle noci che sono nel primo cestello e poi altre 3 noci nel secondo. Poi trasporta 9 noci del secondo nel primo. Poi trasporta $^2/_3$ delle noci di questo più altre 3 noci nel secondo. Infine trasporta 10 noci di questo cesto e $^1/_3$ delle rimanenti nel primo. Dopo ciò in ambidue i cestelli ci sono 32 noci. Si vuol sapere quante noci erano da principio in un cesto e quante nell'altro.

290. Due viaggiatori avevano, uno 100 lire, e l'altro 60. Dei malandrini rubarono al secondo $^5/_9$ di quanto tolsero al primo, e così i due amici restarono con somme uguali. Si domanda di quanto sia stato derubato ciascuno dei due viaggiatori.

291. Volendo distribuire a dei poveri $^1/_{20}$ di una somma (dando una lira a ciascuno), $^1/_4$ dei poveri non riceverebbe niente. Volendo distribuire $^1/_{12}$ di quella somma (ancora consegnando una lira a ciascun povero), avanzerebbero 2 lire. Quanti sono i poveri?

292. Un oste ha due specie di vino; da 45 e da 20 centesimi il litro. Vuol fare 50 litri di miscuglio da vendere a 30 centesimi. Quanti litri deve prendere d'una specie e quanti dell'altra?

293. Due persone A e B salivano una torre, e B era costantemente di 24 gradini indietro. Quando A fu al mezzo dell'ascesa, disse all'altro: quando io sarò giunto alla cima, tu sarai arrivato a una altezza ottupla di quella a cui ora ti trovi. Di quanti gradini era la scala della torre?

294. Un colonnello voleva disporre il suo reggimento in forma di quadrato. In una prima prova avanzavano 88 uomini; mettendo un soldato di più per riga, per compiere il quadrato mancavano 57 uomini. Quanti erano i soldati?

295. La cifra delle decine d'un numero di due cifre supera di 4 quella delle unità. Dividendo il numero per la somma delle sue cifre, si ottiene 7 per quoziente. Si trovi questo numero.

296. Una contadina vendè una prima volta la metà più 4 delle uova portate al mercato. Più tardi vendè la metà più 2 delle rimaste. Infine vendè la metà e 6 delle rimaste; e tornò a casa con 2 uova invendute. Quante uova avea essa da principio?

297. Un tale si prese per il mese di Maggio un compagno di lavoro, e gli promise per compenso giornaliero il vitto, più lire 1,30. Si convenne poi di computare il mantenimento a lire 1,15, per i giorni in cui non si lavorasse. Alla fine del mese, fatti i conti, il primo deve dare al compagno lire 23,15. Si domanda il numero de' giorni ne' quali non si è lavorato.

298. Qual numero bisogna aggiungere ai termini della frazione $\frac{a}{b}$, affinchè essa divenga eguale alla frazione $\frac{c}{d}$?

299. A una prima fontana occorrono a ore per riempire un bacino; un'altra può riempirlo in b ore. Versando insieme, in quante ore riempirebbero esse il bacino?

300. Alquanti soldati erano stati disposti in quadrato. Volendo allungare di 5 soldati la fronte, con uomini presi dalle 3 ultime file, si trova che per ottenere la nuova formazione occorrerebbe un soldato di più. Si domanda il numero dei soldati.

301. Un tale ha due bicchieri d'argento e un solo coperchio. Il primo pesa 12 oncie, e col coperchio pesa il doppio che l'altro. Questo, col coperchio, pesa un terzo di più che il primo preso senza coperchio. Si domanda il peso del coperchio.

302. Un numero è scritto con due cifre la cui differenza è 3. Invertendo l'ordine delle cifre risulta un numero eguale ai $^4/_7$ del primitivo. Si trovi il numero.

303. Aggiungendo 63 a un numero di due cifre, che danno 11 per somma, si ottiene per risultato il numero scritto con le stesse cifre del proposto, ma schierate in ordine inverso. Si trovi il numero.

304. Un numero di sei cifre ha 4 per cifra delle unità. Trasportando questa cifra a sinistra delle altre, risulta un numero quadruplo del primitivo. Si vuol conoscere questo numero.

305. Tre numeri interi danno 70 per somma. Dividendo il secondo per il primo, si ottiene 2 per quoziente ed 1 per resto; il terzo, diviso per il secondo, dà 3 per quoziente e 3 per residuo. Si trovino i tre numeri.

306. Dividere il numero 330 in cinque parti talmente che, aggiungendo 1 alla prima, aggiungendo 2 alla seconda, sottraendo 3 dalla terza, moltiplicando per 4 la quarta, dividendo per 5 la quinta, si ottengano sempre risultati eguali.

307. La somma delle tre cifre d'un numero è uguale a 13; la cifra delle unità è tripla di quella delle centinaia. Aumentando il numero di 396, si ottiene per risultato il numero scritto con le stesse cifre che il primitivo, ma schierate in ordine opposto. Si trovi il numero.

308. Due stazioni A e B distano, l'una dall'altra, di 225 Km. In A 100 Kg. di carbone costano lire 3,75 e in B lire 4,25. Si domanda quale sia il punto della linea AB, dove il carbone viene a costare ugualmente, o che lo si faccia venire da A, oppure da B, sapendosi che una tonnellata di carbone paga per il trasporto 8 cent. per kilometro.

309. Si può disporre di due verghe d'argento, i cui titoli sono 0,775 e 0,940 (cioè, nel secondo caso, su 1000 parti, 940 sono argento puro, e le rimanenti 60 di lega). Quanto si deve prendere d'una verga, quanto dell'altra, per comporre 25 grammi d'argento del titolo 0,900?

310. Due fontane hanno riempito una vasca della capacità di 3000 litri in 96 minuti. La seconda fontana dà 25 litri al minuto ed ha versato nel bacino $^2/_3$ del liquido che fu versato dall'altra. Si domanda per quanto tempo le due fontane hanno versato insieme, sapendosi che la prima versa in 5 minuti tant'acqua, quanta in 6 la seconda.

311. Un oste, mescolando del vino da a cent. con vino da b cent., ottenne n litri di miscuglio, che vendè poi a c cent. il litro. Si domanda quanto vino prese d'una specie e quanto dell'altra.

312. Un cacciatore per ogni colpo mancato deve dare a un compagno a lire; ne riceve poi b per ogni tiro riuscito. Dopo n colpi, i due cacciatori nulla si devono scambievolmente, o il primo deve c lire al secondo, o questo deve c lire a quello. Si domanda una formula propria a questi tre casi, e che faccia conoscere il numero dei colpi falliti.

313. Una vasca si può vuotare per tre canali. Per il primo si vuoterebbe in 1 ora, per il secondo in 3, e per il terzo in 6. In quanto tempo si vuoterà la vasca, quando l'acqua si farà defluire ad un tempo per tutti e tre i canali?

314. Si deve alberare una strada. Mettendo 2 alberi per ogni tratto di 7 metri, avanzano 118 degli alberi che si sono comperati. Piantandone invece 3 per ogni tratto di 7 metri, mancano 120 alberi. Si vuol sapere il numero degli alberi acquistati, e la lunghezza della strada.

315. Una vasca da bagno è alimentata da due chiavi. Quella dell'acqua calda da sè sola la riempirebbe in m minuti, l'altra in n minuti. Nel fondo della vasca c'è una chiave per la quale la vasca può vuotarsi in p minuti. Si vuol sapere in quanto tempo si riempirebbe la vasca, restando aperte nel tempo stesso tutte e tre le chiavi.

316. In un numero la cifra delle centinaia è uguale ad $^1/_3$ del numero rappresentato dalle cifre che sono alla sua sinistra ed è $^1/_2$ del numero rappresentato dalle cifre che sono alla sua destra. Dividendo il numero per 400 e sottraendo 28,41 dal resto, si ottiene lo stesso numero che surrogando nel numero con una virgola la cifra delle centinaia.

317. Una persona, che camminando percorre a kilometri all'ora, può disporre di b ore. A quale distanza potrà farsi trasportare con una carrozza, che percorre c kilometri all'ora, per poter essere di ritorno a piedi al termine delle b ore?

318. Un tale ha tre recipienti. Avendo riempiuto il secondo

con acqua attinta dal primo, che era ricolmo, rimasero in questo $^2/_7$ del liquido primitivo. Se i due ultimi sono ripieni, e se ne versi il contenuto nel primo, supposto vuoto, questo non viene riempiuto totalmente, perchè occorrono a tal uopo altri 10 litri d'acqua. Tutti e tre i recipienti contengono insieme 270 litri. Quale è la capacità di ciascuno dei vasi?

319. Un tale ha due recipienti con entro dell'acqua, e il primo ne contiene 10 litri di più che non il secondo. Se versasse metà del liquido del primo nel secondo, poi metà del liquido di questo nell'altro, e così ancora per due volte, avrebbe in fine nel primo recipiente 20 litri d'acqua di più che nell'altro. Si vuol sapere quant'acqua ci sia nei due recipienti.

320. Ho preso un numero intero minore di 10. Scritta la cifra 8 alla destra di tal numero, ho poi aggiunto 4. Scritta la cifra 4 alla destra del numero ottenuto, ho poi diviso per 27. Nel quoziente, che è intero, la cifra delle unità era appunto il numero preso da principio. Avendo cancellata questa cifra, mi rimase il numero 1. Qual numero aveva io preso in origine?

321. Da un mazzo di 52 carte ne fu estratta una, e poi sovrapposte a questa tante carte cosicchè il loro numero, sommato col numero dei punti rappresentati dalla prima carta, desse 16. Questa operazione con le carte rimaste fu ripetuta altre 6 volte, e dopo di ciò rimasero 5 carte. Dal numero dei monti e dal numero delle carte rimaste si deve ricavare la somma dei punti delle sette carte infime dei monti. (Indichiamo ω_1, ω_2, ... ω_7 i numeri dei punti rappresentati dalle 7 carte. I sette mucchi sono composti rispettivamente di $(17 - \omega_1)$, $(17 - \omega_2)$..., $(17 - \omega_7)$ carte. Sommando questi binomi ...).

322. Si esprima generalmente la regola per calcolare la somma domandata nel precedente esercizio, supponendo che n sia il numero dei mucchi, a la somma del numero dei punti espressi dalla carta inferiore di ciascun mucchio e del numero delle carte sovrapposte alla carta stessa, ed r infine il numero delle carte rimaste.

323. Si esprima la regola per trovare la somma, di cui si tratta nel precedente esercizio, supponendo $a = 13$.

324. Un cane vede una lepre alla distanza di 150 metri. La lepre fa 5 salti mentre il cane ne fa 3; ma questo con 3 salti si avanza quanto la lepre con 8. Con ciascun salto la lepre percorre 2 metri. Quanti salti può fare ancora la lepre?

325. Una lepre, inseguita da un levriero, ha 60 salti di vantaggio; essa fa 3 salti mentre il cane ne fa 2; ma 3 salti di questo valgono quanto 7 di quella. Quanti salti deve fare il cane per acchiappare la lepre?

326. I due indici d' un orologio a mezzodì sono sovrapposti. Dopo quanti minuti sono sovrapposti nuovamente?

327. In quale istante, tra le ore 2 e le 3, gl'indici d'un orologio sono per diritto?

328. Alle tre gl'indici di un orologio sono ad angolo retto. Dopo quanti minuti sono nuovamente ad angolo retto?

329. In quale istante, tra le ore 11 e le 12, l'intervallo tra i due indici d'un orologio è uguale a $^2/_3$ di quello che era 10 minuti prima?

330. Si calcoli l'ora segnata da un orologio, sapendo che l'indice minore si trova tra le cifre XI e XII, e il maggiore tra le cifre XII ed I; e che in un altro istante, più tardi, i due indici si troveranno precisamente scambiati di posto.

331. Un tale stabilì nel suo testamento che i figli si dovessero spartire l'eredità con questa legge: Il più vecchio si prendesse anzitutto a lire e poi l'*m.esima* parte del resto. Il secondo d'età si prendesse in seguito 2 a lire e l'*m.esima* parte del resto. Il terzo si prendesse 3 a lire e poi l'*m.esima* parte del resto; e così via. Così fu fatto; e, confrontando le parti, le si trovarono tutte uguali tra loro. Si domanda quanta fosse la sostanza paterna, quale la quota di ciascun erede, e quanti i figli.

332. Che valore bisogna attribuire a k, affinchè il polinomio $a^4 + k a^3 b - 2 a^2 b^2 + 3 a b^3 - b^4$ sia divisibile per $a^2 - a b + b^2$?

333. Dopo quanto tempo conterranno la stessa quantità di liquido due vasi che ne contengono v e v' litri, se vengono aperti due fori per i quali ne perdono u ed u' litri al minuto?