ELEMENTI

DI

ALGEBRA

AD USO

DEGL' ISTITUTI TECNICI (I° biennio) E DEI LICEI

PER

AURELIANO FAIFOFER

Professore nel Liceo Marco Foscarini

DODICESIMA EDIZIONE

VENEZIA

TIPOGRAFIA EMILIANA

1897

ELEMENTI D'ALGEBRA

CAPITOLO I

QUANTITÀ ALGEBRICA

1. La scienza, che ci proponiamo di trattare, non è che una continuazione dell'Aritmetica; ma non si saprebbe dire nettamente che cosa distingua le due scienze, l'una dall'altra. Ad ogni modo suol dirsi che l'*Algebra* tratta le questioni di numeri *in generale*. (*).

Quantità algebrica.

2. Il proposito di trattar le questioni in generale rende necessaria una importante innovazione.

Se ci proponiamo, ad es., la questione seguente: « un tale, dopo di aver vinte a lire, ne ha perdute b; quale è il risultato del giuoco? » troviamo che è necessario distinguere, e dire: quando è $a > b$, il giocatore ha vinto $(a - b)$ lire; nel caso contrario, ne ha perdute $(b - a)$.

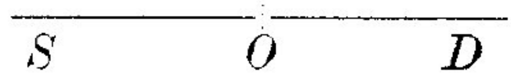
(*) Parte delle argomentazioni, che valgono a risolvere una determinata questione, dipende soltanto dalla natura della questione, e punto dai valori particolari delle grandezze di cui si tratta. Così, compiuta per una questione qualsiasi la parte di risoluzione pur ora accennata, giova conservare le conchiusioni, come quelle che si potranno applicare ad ogni questione, il cui enunciato si possa dedurre da quello della questione risoluta mutando alcuni o tutti i numeri ch'entrano in esso. Trattare una questione, per quanto essa lo consente, indipendentemente dai valori particolari dei numeri, si dice *trattare la questione in generale*.

Dall'esempio considerato apparirebbe che le questioni, nelle quali si devono considerare differenze tra grandezze e quindi differenze tra numeri, non consentissero sempre una trattazione affatto generale; ma che fosse necessario far distinzioni di casi (*), e trattar poi ciascun caso separatamente. Vedremo che c'è modo di trattare in tutta generalità anche le questioni alle quali abbiamo testè fatto allusione (**); ci gioverà, per istradarci, considerare il seguente:

3. Probl. *Sopra una retta* S D *un punto* M *ha percorso successivamente gli spazi:*

a, **b**, **c**, *d*, **e**,....

Gli spazi a, d.... *sono stati percorsi con moto diretto verso destra, e nella direzione opposta gli spazi* **b**, **c**, **e**...; *al principiare*



del movimento il mobile M *si trovava a* k *metri da un punto fisso* O *della retta, e alla destra di codesto punto. Si domanda dove (rispetto ad* O*) sia giunto il mobile* M *a moto compiuto.*

(*) Il numero dei casi da distinguere è (in generale) tanto più grande, quanto maggiore è il numero delle volte che si deve ricorrere alla sottrazione.

(**) Una difficoltà della natura stessa di quella, di cui ora ci occupiamo, fu superata in Aritmetica, e con artifizio identico a quello con cui supereremo la presente; generalizzando, cioè, il concetto d'una operazione, ossia, in altre parole, mediante adatte innovazioni (convenzioni) nel linguaggio, e per conseguenza anche nella scrittura. L'analogia tra i due argomenti si può dire completa; i raffronti ci riusciranno molto opportuni.

Supponiamo di non aver ancora considerata la moltiplicazione di un numero per una frazione e che ci si domandi: ***conoscendo il prezzo di un metro di tela, come si trova il prezzo di una data quantità della stessa tela?*** Si risponderebbe: Bisogna distinguere tre casi, secondo, cioè, che si de-

Risol. Se gli spazi fossero determinati (rappresentati da numeri), il problema si risolverebbe mediante successive addizioni e sottrazioni. Volendo trattar la questione in generale, indicare cioè il calcolo che risolve il problema, dovremmo far distinzioni; e sono queste distinzioni che vogliamo evitare.

Intanto è facile avvedersi che ciascuna delle grandezze che si devono considerare (spazi percorsi dal mobile e distanze di questo dal punto O) si presenta nella questione accompagnata da una qualità o dalla qualità opposta; intendiamo dalla direzione del movimento, o verso destra o verso sinistra, e dalla direzione in cui si deve intendere presa la distanza del mobile dal punto O (*). E codeste qualità sono essenziali, dacchè, unicamente badando ad esse, ad ogni singola fase del calcolo con cui si perviene a determinare la posizione finale del mobile, si decide se si deve eseguire un' addizione od una sottrazione.

Imaginiamo ora che i numeri dati siano interi, e di voler risolvere la questione, rinunciando all'aiuto che ci presterebbe l'Aritmetica con le sue operazioni di addizione e sottrazione, ma contando invece nei due sensi nella serie dei numeri interi. (**).

vono comperare, ad es., 5 metri, od $^1/_5$ di metro, o $^3/_5$ di metro di tela. Ecc. Ecco la questione che parrebbe non si potesse trattare generalmente, e per la quale invece, dopo le note convenzioni, non è più necessario di distinguere un caso dall'altro.

(*) Giova avvertire che uno spazio percorso dal mobile e una distanza del mobile dal punto O di riferimento sono grandezze omogenee. Infatti, ad es., nel nostro problema la distanza iniziale k si può surrogare con uno spazio percorso dal mobile.

(**) Le operazioni fondamentali dell'Aritmetica non sono che artifizi speditivi dell'operazione *contare*; in questo momento è opportuno tornare all' origine.

È manifesto che, quando ne' suoi movimenti il punto mobile restasse sempre alla destra del punto *O*, si potrebbe dire che per ogni spazio percorso verso destra si deve contare nel senso dei numeri crescenti, e nel senso opposto per ogni spazio percorso verso sinistra, e che si potrebbe pertanto indicare generalmente il calcolo da fare per risolvere il problema.

Nel caso contrario, invece, l'uniformità del processo soffre un' alterazione ogni volta che il mobile passa dall'una banda all'altra del punto *O*.

Ora, per ristabilire codesta uniformità, basta imaginare di poter disporre di due serie identiche e distinte di numeri interi, così disposte da aver lo *zero* in comune, in maniera adunque da formare una sola successione, illimitata in entrambi i sensi.

Stabiliamo intanto di chiamar *positivi* i numeri d'una delle due serie, e di indicarli per iscritto premettendo alle cifre il segno $+$; e di chiamar *negativi* i numeri dell'altra serie, e di indicarli premettendo alle cifre il segno $-$. (*).

Così, rappresentando col segno ∞, che si legge *infinito*, un numero maggiore di qualunque numero dato, e

Notiamo poi che, se tra i numeri dati ce ne fossero di frazionari, basterebbe ridurre tutti i numeri a medesimo denominatore. Il problema si potrebbe risolvere poi medesimamente contando nella serie dei numeri interi.

(*) I due segni $+$ e $-$, così adoperati, non fanno più ufficio di *verbi*, non tengono luogo delle parole *sommare* e *sottrarre*; ma in qualche modo hanno significato di *aggettivi*, giacchè il segno $+$ sta invece della parola *positivo*, e il segno $-$ invece della parola *negativo*.

Per semplicità, quando l'omissione non possa produrre inconvenienti, si tralascia di scrivere il segno $+$, che designa una quantità positiva.

supponendo, ad es., di cominciar a contare il primo numero k da *zero* verso $+\infty$, possiamo dire, ad es, che ogni numero, il quale corrisponda ad uno spazio percorso verso destra, si deve contare verso $+\infty$; e che si deve contare verso $-\infty$ ogni numero che corrisponda ad uno spazio percorso verso sinistra. E se il numero, a cui ci si arresta in fine, è positivo, si conchiude che a moto compiuto il mobile si trova alla destra del punto di partenza; a sinistra invece nel caso contrario.

Così, fin d'ora, si può intravvedere che in base all'innovazione accennata si può conseguire veramente l'intento di poter trattare generalmente, senza bisogno di distinzioni, quelle questioni in cui si devono considerare differenze tra grandezze.

4. L'insieme di un numero e di uno dei segni $+$ e $-$, e in generale di una lettera e di un segno, si dice *quantità algebrica*; e si chiama *Algebra* la scienza delle quantità algebriche.

Prescindendo dal segno di una quantità algebrica, ne rimane il valore *aritmetico*, il valor *numerico*, il valore *assoluto*. (*).

5. Affine di poterci esprimere al bisogno con semplicità e precisione, conveniamo di dir *maggiore* di una quantità algebrica qualunque altra che cada tra la prima e $+\infty$; e per conseguenza di dirla *minore*, se cade tra la prima quantità e $-\infty$.

Conseguenze di così fatta convenzione sono queste che:

(*) La base dell'Aritmetica è una successione di parole differenti, che esiste nella nostra mente, che comincia con la parola *zero* e non ha fine. La serie delle quantità algebriche non ha invece nè principio, nè fine. Si suol dire che questa serie si estende da $-\infty$ a $+\infty$.

6. *Qualunque quantità negativa è minore di qualunque quantità positiva, e minore di zero.*

Di due quantità negative è maggiore quella che ha valor numerico minore.

OPERAZIONI CON QUANTITÀ ALGEBRICHE

Addizione algebrica.

Introdotta la quantità algebrica, dobbiamo dare le definizioni delle operazioni con quantità algebriche e poi studiare le proprietà di queste operazioni. (*).

7. Supponiamo che siano date due quantità algebriche, che i loro valori numerici siano ridotti a denominatore comune, che la seconda delle quantità sia positiva e di aver la serie delle quantità algebriche che è composta con le frazioni di denominatore uguale a quello dei valori delle quantitè algebriche date.

Diremo *somma* delle due quantità algebriche quella quantità a cui si perviene contando, nella serie or ora accennata, in seguito alla prima delle quantità date e verso $+\infty$, tanti termini quante sono le unità del numeratore della seconda.

Facciamo di nuovo le stesse ipotesi che precedono con questa modificazione soltanto che la seconda delle quantità algebriche date sia negativa.

Diremo *somma* delle due quantità algebriche quella quantità a cui si perviene contando nella serie accennata, in seguito alla prima delle quantità date e verso $-\infty$, tanti termini quante sono le unità del numeratore della seconda.

(*) Non altrimenti si è fatto nell'Aritmetica, dove, introdotte le frazioni, si son date le definizioni delle operazioni con frazioni, e poi studiate le proprietà di queste operazioni.

Così, ad es., ricorrendo alla serie:

$$\ldots -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, +\frac{3}{3}, +\frac{4}{3}, + \ldots,$$

si trova che la somma delle quantità $-\frac{3}{3}$ e $+\frac{7}{3}$ è $+\frac{4}{3}$; e che la somma delle quantità $+\frac{4}{3}$ e $-\frac{7}{3}$ è la quantità $-\frac{3}{3}$.

8. Diremo *addizione* (*algebrica*) l'operazione mediante la quale si trova la somma di due quantità algebriche, sia ricorrendo o no alla serie delle quantità algebriche.

L'addizione algebrica si indica con lo stesso segno $+$, che si è adottato per indicare le quantità positive. Ma rappresenteremo la somma di quantità algebriche anche scrivendole semplicemente di seguito coi loro segni. Perciò, ad es., possiamo scrivere:

$$(-9)+(-4)=-9-4.$$

9. Diremo somma di più quantità algebriche date quella quantità che si ottiene aggiungendo la terza alla somma delle due prime, la quarta alla somma delle tre precedenti, e così via.

Anche la somma di più quantità algebriche si indica scrivendo le quantità di seguito coi loro segni, senza frapporre alcun segno d'addizione.

Dalla definizione di somma di quantità algebriche discendono immediati i seguenti:

10. Corollari. 1°. *La somma di più quantità algebriche, aventi segni eguali, ha lo stesso segno degli addendi e valor numerico eguale alla somma* (*) *di quelli degli addendi.*

(*) Useremo le voci addizione, sottrazione, somma, differenza) ecc., secondo il bisogno, o in senso aritmetico od in

2°. *La somma di due quantità algebriche, aventi segni contrari, ha valor numerico eguale alla differenza di quelli degli addendi e segno eguale a quello dell'addendo che ha valor numerico maggiore.*

3°. *La somma di due quantità algebriche, numericamente uguali, ma con segni opposti, è lo* zero.

4°. *Se la somma di due quantità algebriche, è lo* zero, *le due quantità hanno segni contrari e valori numerici eguali.*

11. Teor. *Una somma algebrica è indipendente dall'ordine in cui si seguono gli addendi.*

Dim. Per provare che in una somma si può cambiar comunque l'ordine degli addendi, basta provare che si possono scambiar tra loro di posto due addendi consecutivi qualunque.

A tal fine imaginiamo di cercare le somme parziali successive, ricorrendo alla serie delle quantità algebriche composta delle frazioni di denominatore uguale a quello a cui possiamo supporre di aver ridotti tutti gli addendi.

Così riesce immediatamente palese che si possono scambiar di posto due addendi, che siano ambidue positivi od ambidue negativi; e infatti in entrambi i casi le due addizioni successive equivalgono ad aggiungere la somma degli addendi.

Per il caso che i due addendi consecutivi abbiano

senso algebrico, senza qualificarle, perchè da quanto precede risulta sempre immediatamente in qual senso vengono usate. Dicendo, ad es., di sommare le quantità algebriche -8 e -3, si capisce, senz'altro, che s'intende parlare di addizione algebrica. Così, quando il discorso si riferisce a *valori numerici* di quantità algebriche, si capisce, senz'altro, che si intende parlare di operazioni e risultati aritmetici.

segno contrario, basta scomporre il maggiore in due parti, una delle quali sia eguale al minore, per riconoscere che anche in questo caso le due addizioni successive, in qualunque ordine si succedano, si possono surrogare con l'addizione della somma algebrica dei due addendi.

La dimostrazione vale anche per i due primi termini, perchè si può supporre che siano preceduti dal termine *zero*. (Ma per la somma di due soli termini la proposizione è una conseguenza immediata della regola per l'addizione di due quantità algebriche).

12. Corollari. 1°. *Dovendo aggiungere una somma, si possono aggiungere successivamente le singole parti.*

2°. *Dovendo aggiungere successivamente delle quantità, si può aggiungere la loro somma.*

3°. *In una somma quanti si vogliano addendi si possono surrogare con la loro somma effettuata.*

4°. *Dovendo sommare due somme, si può far una sola addizione con tutte le parti delle due somme date.*

13. Oss. 1ª. Ora possiamo riconoscere che con le introdotte innovazioni si è in fatto conseguito l'intento di poter risolvere generalmente, senza bisogno di far distinzioni, anche le questioni in cui si devono considerare differenze tra grandezze. Considerando, ad es., il problema della determinazione della posizione finale di un punto che compie movimenti successivi sopra una retta, troviamo che, stabilito di rappresentare con quantità positive quelle distanze e quegli spazi percorsi dal mobile che hanno una direzione, e di rappresentare con quantità negative le distanze e gli spazi che hanno l'altra direzione, si può poi dire che la somma di codeste quantità rappresenta in direzione ed estensione la distanza finale domandata. (*).

(Se non fossero date le direzioni degli spazi percorsi dal punto, in tal caso non si potrebbe domandare altro che la lunghezza totale della strada percorsa dal punto. In questo caso la questione sarebbe di natura prettamente aritmetica, e l'Algebra non ci avrebbe a che vedere).

14. Oss. 2ª. È facile riconoscere che il concetto di addizione di quantità algebriche non è che un perfezionamento ed estensione di quello dell'addizione aritmetica.

Infatti, ogni volta che risolvendo un problema con l'Aritmetica si debba ricorrere all'addizione, si devono sommare i valori numerici anche se si tratti la questione con l'Algebra.

15. Oss. 3ª. Il concetto di addizione algebrica non è connesso con quello di aumento. La somma può esser minore d'uno ed anche di tutti gli addendi.

In senso algebrico [5] si produce aumento quando

(*) Si è conseguito di poter trattare la questione, indipendentemente dai valori numerici delle quantità date, col dare uno stesso nome all'operazione che risolve la questione, avvenga il movimento in una direzione, o nella opposta.

Non altrimenti in Aritmetica è con la convenzione di dire *moltiplicare*, ad es., *per* $^1/_5$, invece di dire dividere per 5, e di dire *moltiplicare per* $^3/_5$, invece di dire dividere per 5 e moltiplicare poi per 3, che si raggiunge l'intento di poter indicare il modo di risolvere il problema accennato in una precedente nota, senza distinguere casi.

Come si vede egli è mediante un modo d'esprimersi e di scrivere comune ai vari casi che si evita di doverli distinguere; ma non si fanno sparire le differenze essenziali, che sono tra caso e caso, e che si palesano in fine quando si discende a far applicazione a questioni particolari.

si aggiunge [7] una quantità positiva; e diminuzione, quando si aggiunge una quantità negativa. (*).

Sottrazione algebrica.

16. Def. *Si dice sottrazione (algebrica) l'operazione mediante la quale, date due quantità algebriche, si trova quella quantità che, aggiunta alla seconda, dà per risultato la prima.*

La prima delle quantità date si dice *minuendo*, la seconda *sottraendo*, e il risultato della sottrazione si dice *resto* o *differenza* delle due quantità date.

Anche la sottrazione algebrica si indica col segno — . (**).

17. Regola. *Si trova la differenza di due quantità algebriche, aggiungendo al minuendo il sottraendo preso con segno cambiato.*

Dim. Per dimostrare codesta regola, imaginiamo di aggiungere il sottraendo alla quantità che si ottiene operando come indica la regola stessa. Il risultato è così la somma di tre parti, e per l'appunto: del minuendo, del sottraendo con segno cambiato, e del

(*) Analogamente in Aritmetica, dopo l'estensione del significato della parola *moltiplicare*, al concetto espresso dalla parola *moltiplicazione* non è più annesso il concetto di aumento.

(**) Dal doppio ufficio, a cui si fanno servire i segni + e —, non segue pericolo di errare. Quando si può dubitare qual significato abbia uno dei segni, in quel caso è indifferente interpretare in un modo o nell'altro. (Nell'espressione isolata — 3 non si può pensare che il segno indichi sottrazione. Ma pur volendo che sia così, basta pensare sottinteso il minuendo *zero* e che il sottraendo sia la quantità positiva + 3).

Così in Aritmetica la linea di separazione fra i termini d'una frazione serve anche ad indicare la divisione, senza che questo doppio uso della linea produca inconvenienti.

sottraendo col suo segno. Surrogando le due ultime parti [12, 3°] con la loro somma, che è *zero* [10, 3°], rimane il minuendo. Epperò così resta provato [16] che *ecc.* (*).

18. Oss. Poichè il problema della *sottrazione* ammette sempre una soluzione e manifestamente una sola, si può dire che:

La sottrazione (algebrica) è l'operazione mediante la quale, data la somma di due quantità ed una di queste si determina l'altra (e ciò anche nel caso che il minuendo ed il sottraendo siano due quantità prese ad arbitrio). (**).

19. Lemma. *Cambiando i segni a tutti i termini di una somma, non si muta il valor numerico della somma, soltanto se ne cambia il segno.*

Dim. Siano le due somme:

$$a - b - c + d - e,$$
$$-a + b + c - d + e.$$

Dobbiamo dimostrare che queste somme hanno valori numerici eguali e segni contrari.

(*) In base a questa regola, in una espressione algebrica tutte le sottrazioni si possono convertire in addizioni (mutando i segni dei sottraendi). Analogamente in Aritmetica, in base alla regola della divisione per una frazione, tutte le divisioni si possono convertire in moltiplicazioni.

(**) Qui vogliamo osservare che non è forse inappuntabile il dire (come si dice) che l'introduzione delle quantità negative ha per iscopo di render possibile in ogni caso la sottrazione. In Aritmetica, ad es., la sottrazione $3 - 8$ è non già impossibile, ma assurda. Ed invero, poichè una somma non è mai minore di alcuna delle parti, è assurdo il voler riguardare il numero 3 come somma ed 8 quale parte. In Algebra la sottrazione $3 - 8$ è possibile, è il risultato è -5; ma qui si tratta di operazione da non confondersi con la sottrazione dell'Aritmetica.

Imaginiamo perciò di sommare insieme le due somme. Sappiamo [12, 4°] che si può formare una somma sola con tutti i termini dell'una e dell'altra. E poichè le parti del totale sono, a due a due, numericamente uguali e con segni contrari, supponendo di sostituire [12, 3°] a ciascuna coppia di addendi così fatti la loro somma, che è *zero* [10, 3°], si riconosce che anche la somma finale è uguale a *zero*. Ma da questo si può conchiudere [10. 4°] appunto che le due somme date hanno valori numerici eguali e segni opposti, c. d. d.

20. Teor. *Dovendo sottrarre una somma, si può invece sottrarre successivamente le singole parti.*

Dim. Sia, ad es., l'espressione:

$$-m-(-a-b+c-d+e),$$

nella quale è indicato che si deve sottrarre una somma.

Sappiamo [17] che, per trovare una differenza algebrica, si aggiunge al minuendo il sottraendo preso con segno cambiato; e sappiamo [19] inoltre che, per mutare il segno d'una somma, basta mutare il segno di ciascun addendo. Pertanto, invece di operare come è indicato nell'espressione data, possiamo operare come è indicato nella seguente:

$$-m+(a+b-c+d-e),$$

epperò [12, 1°] anche come nell'espressione:

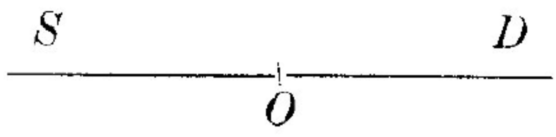
$$-m+a+b-c+d-e.$$

Confrontando questa espressione con la data, troviamo dimostrato appunto [17] che, *ecc.*

21. Cor. *Dovendo sottrarre successivamente delle quantità, si può invece sottrarre la loro somma.*

Moltiplicazione algebrica.

22. Probl. *Un corriere, che ha percorso la linea* SD, *facendo 7 kilometri all'ora, è passato a mezzodì* *per il punto O. Si domanda a quanta distanza da O esso era nell'istante, che è separato da mezzogiorno da un intervallo di 3 ore.*



Risol. Questo problema si risolve con una moltiplicazione.

Se poi si vuol sapere da quale banda del punto *O* il corriere si trovava nell' istante indicato, allora non basta sapere che percorreva 7 kilometri all'ora, ma è necessario sia detto se li percorreva da *S* verso *D* o nella direzione opposta; e fa duopo sia anche detto se si domanda dove si trovasse il corriere alle 9, oppure alle 15. In questo caso i dati della questione ed anche l' incognita si possono considerare come quantità algebriche, e l' operazione mediante la quale si risolve il problema si dice *moltiplicazione algebrica*.

Quando una grandezza può avere due direzioni opposte, si può stabilire di intenderla positiva in quale delle direzioni si vuole. (*). Così possiamo stabilire che lo spazio percorso dal corriere in un' ora (la velocità) sia positivo, se diretto da *S* verso *D*. Ammesso ciò, bisogna dire positiva la distanza del corriere da *O*, quando esso si trova in un punto della parte *O D* della linea *SD*. (**).

Anche il tempo può avere due direzioni; e perchè esso è indipendente dalle distanze, si potrebbe rite-

(*) Diremo positive le grandezze che si vogliono rappresentare con numeri positivi; e quindi negative ecc.

(**) Questa relazione tra il segno della velocità e quello della distanza riesce anche più manifesto, se si prende, invece di *O*, un altro punto della linea *SD* come punto di riferimento.

nerlo come positivo in uno o nell'altro dei due sensi. Ma si stabilisce il segno in modo che, quando i fattori sono ambidue positivi, anche il prodotto sia positivo. Quindi, nel nostro esempio, il tempo è positivo nel caso che si debba contare *dopo* il mezzogiorno.

Ciò posto, se si considerano i quattro casi differenti che si possono presentare, oppure si osserva che quando muta di segno uno dei fattori, muta di segno anche il prodotto, si trova essere:

$$\begin{aligned}(+7)\cdot(+3) &= +21,\\ (+7)\cdot(-3) &= -21,\\ (-7)\cdot(+3) &= -21,\\ (-7)\cdot(-3) &= +21.\end{aligned}$$

Con l'esempio precedente (*) abbiamo giustificata (non dimostrata) la seguente definizione di moltiplicazione algebrica:

23. Def. 1°. *Moltiplicare per una quantità positiva significa conservare il segno al moltiplicando e moltiplicarne il valore numerico per quello del moltiplicatore.*

2°. *Moltiplicare per una quantità negativa signi-*

(*) Perchè sia giustificata l'introduzione delle quantità positive e negative, e le conseguenti convenzioni, basta l'esistenza di anche un solo tipo di grandezze suscettive di direzioni contrarie. Appunto come, perchè fosse giustificata l'introduzione delle frazioni in Aritmetica, basterebbe esistesse una sola specie di grandezze divisibili comunque in parti.

Può darsi che in una determinata questione uno soltanto dei fattori appaia accompagnato da segno; in tal caso è facile riconoscere che l'altro fattore si comporta come fosse una quantità positiva.

Il calcolo algebrico si può applicare anche a questioni su grandezze di cui si considerano soltanto i valori assoluti, come in Aritmetica si possono applicare le regole del calcolo con frazioni a problemi su grandezze che non si possono decomporre in parti.

fica mutare il segno al moltiplicando e moltiplicarne il valor numerico per quello del moltiplicatore. (*).

24. Corollari. 1°. *Il prodotto di due quantità algebriche ha valore numerico eguale al prodotto di quelli dei fattori; esso è positivo, quando i fattori hanno segni eguali; ed è negativo, quando i fattori hanno segni contrari.*

2°. *Quando un fattore è uguale all' unità positiva, il prodotto è uguale all' altro fattore.*

3°. *Si moltiplica per — 1, mutando il segno all'altro fattore.*

Come in Aritmetica anche in Algebra si considerano prodotti di più di due fattori. Per questi prodotti giova dimostrare il seguente:

25. Teor. *Un prodotto è positivo, se il numero dei fattori negativi è pari; ed è negativo, quando il numero dei fattori negativi è dispari.*

Dim. Possiamo supporre che il primo fattore sia positivo, giacchè nel caso diverso si può scrivere, innanzi al primo fattore, il fattore + 1; chè il prodotto non soffre per questo nessuna alterazione. [24, 2°].

Ciò posto, imaginando di eseguire le successive

(*) Si potrebbe anche dire che: *moltiplicare per una quantità positiva significa moltiplicare il valore assoluto del moltiplicando per quello del moltiplicatore e poi aggiungere il risultato* (che ha il segno del moltiplicando) *allo zero. Se il moltiplicatore è negativo, allora il risultato si deve invece sottrarre dallo zero.*

Del resto non si deve dissimulare che la definizione di moltiplicazione con quantità algebriche è ancora una croce per l'Algebra. Almeno è tale per la larghezza con cui bisognerebbe affrontare l'argomento. In attesa d'un modo di trattar la cosa definitivo, strisciamo via; non però con la disinvoltura, forse soverchia, con cui si vede spesso saltar oltre.

moltiplicazioni, si trova che si avranno successivamente tanti mutamenti di segno, partendo dal segno del primo fattore, quanti sono i fattori negativi; dimodochè, se il numero di questi fattori è pari, il prodotto finale è positivo; e, se è dispari, esso è negativo; appunto c. d. d.

26. Cor. 1°. *Mutando il segno ad un numero pari di fattori di un prodotto, il prodotto non muta. Mutando il segno ad un numero dispari di fattori, il prodotto muta di segno.*

27. Cor. 2°. *Le potenze ad esponenti pari sono positive, qualunque sia il segno della base. Le potenze ad esponenti dispari hanno il segno stesso della base.*

Perciò, ad es., dovendo fare la *settima* potenza di -2, invece di moltiplicare tra loro 7 fattori eguali a -2, sapendo già che il risultato è negativo, basta far la settima potenza del numero 2. Tanto è espresso dall' eguaglianza $(-2)^7 = -2^7$.

28. Teor. *Un prodotto non muta, se si muta l'ordine dei fattori.*

Dim. Infatti il valor numerico di un prodotto, poichè è uguale al prodotto dei valori numerici dei fattori, è indipendente dall' ordine dei fattori.

Il segno poi del prodotto dipende unicamente [25] dal numero dei fattori negativi, e questo non cambia, se si cambia soltanto l' ordine dei fattori.

Così resta provato che anche in Algebra *ecc.*

29. Dal precedente teorema si possono ricavare, come in Aritmetica, i seguenti:

30. Corollari. 1°. *Dovendo moltiplicare successivamente per parecchie quantità, si può invece moltiplicare per il loro prodotto.*

2°. *Dovendo moltiplicare per un prodotto, si può* *invece moltiplicare successivamente per i singoli fattori.*

3°. *In un prodotto ad alquanti fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato.*

4°. *Moltiplicando un fattore per una quantità, il prodotto vien moltiplicato per la quantità stessa.*

5°. *Il prodotto di due potenze della stessa base è quella potenza della base stessa, che ha per esponente la somma degli esponenti.*

31. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per una quantità, si può invece moltiplicare i singoli addendi per il moltiplicatore e poi sommare i prodotti parziali.*

Dim. Nella dimostrazione dobbiamo distinguere quattro casi, e questi rispetto ai segni dei due fattori.

1°. Siano positivi ambidue i fattori. Sia :

$$- a - b + c - d + e$$

il moltiplicando, e sia $+ m$ il moltiplicatore.

Indicando con p il valore della somma, abbiamo intanto l' eguaglianza :

$$p = - a - b + c - d + e.$$

Aggiungendo ai due membri la somma $(+ a + b + d)$, otteniamo [12. 1°; 12, 3°: 10, 3°] :

$$p + a + b + d = c + e.$$

Moltiplicando i due membri per $(+ m)$, otteniamo :

$$(p + a + b + d)(+ m) = (c + e)(+ m).$$

Il calcolo aritmetico indicato in codesta eguaglianza consiste in due addizioni, i cui risultati si devono poi moltiplicare per il numero m; i prodotti eguali sono i valori numerici dei due membri, che sono [23, 1°] positivi. E poichè un teorema d'Aritmetica dice che, dovendo moltiplicare una somma per un numero (intero o frazionario), si può invece moltiplicare per questo numero i singoli addendi e sommar poi i prodotti parziali, dall'ultima eguaglianza conchiudiamo la seguente:

$$+(pm + am + bm + dm) = +(cm + em),$$

nella quale le espressioni entro parentesi sono espressioni aritmetiche. Dall' ultima eguaglianza, riguardando gli addendi come quantità algebriche, conchiudiamo essere:

$$pm + am + bm + dm = cm + em.$$

Aggiungendo ai due membri la somma:

$$-am - bm - dm,$$

otteniamo:

$$pm = -am - bm + cm - dm + em.$$

Infine, sostituendo alla lettera p la somma di cui essa rappresenta il valore, otteniamo l' eguaglianza:

$$(-a - b + c - d + e)\,m = -am - bm + cm - dm + em,$$

la quale (quando si osservi che il termine $-am$ si può riguardare come il prodotto di $-a$ per $+m$, ecc.) fa vedere che, per il caso considerato, il teorema in questione sussiste.

2°. Per secondo caso, imaginiamo che si debba moltiplicare una somma positiva per una quantità negativa. Sia:

$$-a - b + c - d + e$$

la somma da moltiplicare, e $(-m)$ il moltiplicatore.

Mutando il segno al moltiplicatore, ci si riconduce al primo caso; però si muta il segno del prodotto [26]. Adunque l' espressione:

$$(-a - b + c - d + e)\ m,$$

in cui vece (caso 1°) prenderemo l' equivalente:

$$-am - bm + cm - dm + em,$$

è numericamente uguale al prodotto che si vuol calcolare, ma contraria di segno.

Infine, perchè mutando i segni a tutti i termini d'una somma si muta il segno della somma [19], conchiudiamo essere:

$$(-a-b+c-d+e)(-m)=am+bm-cm+dm-em.$$

Ora, osservando che $a\,m$ è il prodotto di $(-a)$ per $(-m)$, ecc., si conchiude che il teorema in questione è dimostrato anche per il secondo caso.

3°. Per terzo caso sia da moltiplicare una somma negativa per una quantità positiva. Sia:

$$-a-b+c-d+e$$

la somma da moltiplicare, e $(+m)$ il moltiplicatore.

Mutando i segni ad ambidue i fattori [19], ci si riconduce al secondo caso, senza produrre nel risultato nessun mutamento [26]. Egli è adunque [caso 2°]:

$$\begin{aligned}(-a-b+c-d+e)\,m &= (a+b-c+d-e)(-m)\\ &= -am-bm+cm-dm+em.\end{aligned}$$

Da questa eguaglianza si conchiude che il teorema è dimostrato anche per il terzo caso.

4°. Siano infine negativi moltiplicando e moltiplicatore.

Mutando i segni ad entrambi i fattori, ci riconduciamo al primo caso, senza alterar per nulla il prodotto. Egli è adunque [19 e caso 1°]:

$$\begin{aligned}(-a-b+c-d+e)(-m) &= (a+b-c+d-e)\,m\\ &= am+bm-cm+dm-em.\end{aligned}$$

Così resta provato per ogni caso che, *ecc.*

32. Teor. *Dovendo moltiplicare per una somma, si può moltiplicare il moltiplicando per le singole parti della somma, e poi sommare i prodotti.*

Dim. Sia, ad es., da eseguire la moltiplicazione indicata nell'espressione:

$$(-m)(-a-b-c+d).$$

Per il teorema che si può cambiar l'ordine dei fattori, possiamo operare come indica l'espressione:

$$(-a-b+c+d)(-m)$$

e quindi [31] anche come indica la seguente:

$$(-a)(-m)+(-b)(-m)+(+c)(-m)+(+d)(-m).$$

Mutando in ciascun prodotto l'ordine dei fattori e confrontando l'espressione risultante con la primitiva, si riconosce che appunto che, *ecc.*

33. Teor. *Dovendo moltiplicare una somma per una somma, si può invece moltiplicare ciascuna parte d'una somma per ciascuna parte dell'altra e sommare poi i prodotti.*

Dim. Siano, ad es., da moltiplicare tra loro le due somme:

$$-a+b-c \qquad \text{e} \qquad -m+n.$$

Per il teorema precedente si può invece fare le due moltiplicazioni:

$$(-a+b-c)(-m),$$
$$(-a+b-c)(+n)$$

e sommar poi i prodotti.

E per il teorema [31] che, *dovendo ecc.*, potremo invece far il calcolo che è indicato nelle due espressioni:

$$(-a)(-m)+(+b)(-m)+(-c)(-m)$$
$$(-a)(+n)+(+b)(+n)+(-c)(+n)$$

e sommare poi i risultati.

Infine, perchè per sommare due somme si può [12, 4°) far una sola somma con tutte le parti delle due somme, resta provato che, *ecc.*

Divisione.

34. Def. *Si dice divisione (algebrica) l' operazione con la quale, date due quantità, si cerca una terza che, moltiplicata per la seconda, dia per prodotto la prima.*

35. Regola. *Per dividere l' una per l'altra due quantità algebriche, si divide il valor numerico del dividendo per quello del divisore, e così si trova il valor numerico del quoziente. Se i termini della divisione hanno segni eguali, il quoziente è positivo; altrimenti esso è negativo.*

Dim. Infatti, moltiplicando [24, 1°] per il divisore la quantità che si ottiene operando secondo la regola indicata, si ottiene appunto il dividendo.

36. Cor. *Cambiando il segno al dividendo o al divisore, il quoziente muta di segno. Cambiando il segno al dividendo e al divisore, il quoziente non muta.*

37. Oss. Poichè il problema della *divisione* ammette sempre una soluzione e manifestamente una sola, si può dire che:

La divisione (algebrica) è l' operazione mediante la quale, dato il prodotto di due quantità ed uno dei fattori, si determina l'altro fattore (e ciò anche nel caso che il dividendo e il divisore siano due quantità prese ad arbitrio).

38. In Algebra due quantità si dicono inverse, se il loro prodotto è uguale all' unità positiva. Dalla regola per la moltiplicazione si ricava immediatamente che:

Due quantità inverse hanno medesimo segno e valori numerici che sono inversi.

39. Teor. *Dividendo e moltiplicando rispettivamente una stessa quantità per due quantità inverse, si ottengono risultati eguali.*

Dim. Infatti, poichè due quantità inverse hanno medesimo segno, il prodotto ed il quoziente, che si ottengono moltiplicando e dividendo rispettivamente una stessa quantità per due inverse, hanno medesimo segno. Hanno poi valori numerici eguali, perchè, moltiplicando e dividendo rispettivamente uno stesso numero per due numeri inversi, si ottengono risultati eguali.

40. Teor. *Per dividere un prodotto per una quantità, basta dividere un fattore per quella quantità.*

Dim. Infatti, poichè per dividere per una quantità basta moltiplicare per l'inversa [39], e per moltiplicare un prodotto per una quantità, basta moltiplicare uno dei fattori [30, 4°], per dividere un prodotto per una quantità basta moltiplicare un fattore per l'inversa del divisore; e ciò equivale poi [39] a dividere quel fattore per il divisore.

41. Cor. *Per dividere un prodotto per un fattore, basta sopprimere quel fattore.*

Infatti, dividendo una quantità per se stessa, si trova per quoziente $(+1)$; e l'unità positiva, come fattore, si può tralasciare senz' altro.

42. Teor. *Il quoziente di due potenze della stessa base, se l'esponente del dividendo è maggiore di quello del divisore, è quella potenza della base che ha per esponente la differenza degli esponenti.*

Dim. Infatti, se l'esponente del dividendo è, ad es., il numero 8, e l'esponente del divisore è 5, il dividendo si può [30, 3°] riguardare come il prodotto della 5ª potenza e della 3ª potenza della base; quindi [41] il quoziente è la 3ª potenza della base.

43. Teor. *Moltiplicando o dividendo i due termini d'una divisione per una stessa quantità, il quoziente non muta.*

Dim. Infatti, secondo che la quantità è positiva o negativa, i segni del dividendo e del divisore rimangono inalterati, o mutano tutti e due; quindi in ciascun caso [36] il segno del quoziente resta immutato. Ma non muta neanche il valor numerico del quoziente, perchè in Aritmetica si è provato che, moltiplicando o dividendo i termini d'una divisione per un terzo numero qualunque, il quoziente non muta. [35].

44. Teor. *Dovendo dividere una somma per un numero, si può invece dividere ciascuna delle parti per il divisore e poi sommare i quozienti.*

Dim. Infatti, poichè, dovendo dividere per una quantità, si può [39] invece moltiplicare per la sua inversa, e, dovendo moltiplicare una somma per una quantità, si può [31] invece moltiplicare ciascuna parte del moltiplicando per il moltiplicatore, dovendo dividere una somma per una quantità, si può invece moltiplicare ciascuna parte della somma per l'inversa del divisore. Codeste moltiplicazioni poi equivalgono a dividere le singole parti della somma per il divisore [39]. Così resta provato che, *ecc.*

Esercizi.

1. Si riconosca che nel gruppo di numeri, detto *quadrato magico*, che è sotto a sinistra, tutte le somme degli elementi che sono in una stessa colonna, e tutte le somme degli elementi che sono in una stessa riga, sono eguali tra loro.
2. Il gruppo di numeri, che è sotto a destra, sarebbe un quadrato magico, se non ci fossero quattro elementi errati. Si trovi quali sono, e si correggano, sapendo che la somma di tutti gli elementi del quadrato corretto è uguale a — 95.

+34,	−15,	−28,	−39,	+10	+15,	+ 5,	−24,	−21,	+ 6
−67,	−14,	+58,	−15,	0	−10,	− 9,	+ 2,	+11,	− 5
−13,	+ 9,	−32,	−23,	+21	−16,	−12,	+ 1,	+ 9,	−14
+30,	−20,	−55,	+15,	− 8	−28,	+ 8,	+12,	− 3,	−18
−22,	+ 2,	+19,	+24,	−61.	+20,	−21,	−23,	− 7,	− 2.

3. Un quadrato magico non perde la sua proprietà se, scelto

un elemento per ciascuna riga, in modo che gli elementi scelti siano tutti in differenti colonne, poi agli elementi scelti si aggiunge una stessa quantità qualunque. Un quadrato magico conserva la sua proprietà anche se, scelti quattro elementi in modo che siano, per così dire, nei vertici di un rettangolo, a due diagonalmente opposti si aggiunge una stessa quantità, e agli altri due la quantità contraria. Fondandosi sulle proprietà ora accennate, dal quadrato magico dell'esercizio 1° se ne deduca uno nel quale tutti gli elementi d'una stessa riga o d'una stessa colonna siano eguali ad una quantità data qualunque.

4. In testa alle varie colonne e alla destra delle singole righe del quadrato magico dell'esercizio 1° si scriva una stessa quantità. Si trovi poi quella che compie un nuovo quadrato magico.

5. Preso il quadrato magico dell'esercizio 1°, gli si scriva tutt'in giro una cornice di quantità in modo che risulti un nuovo quadrato magico.

Eseguendo le operazioni indicate, si riconosca l'esattezza delle seguenti eguaglianze.

6. $-4+(-5+1-9+14)-2+(5-12)=-12.$

7. $-2-(-5+9)-(18-25-7)-11=-3.$

8. $-1-\{-2-[-10-(3-12)]\}=0.$

9. $(-2-7+3)(-5)+(-8+6)^4+(-3)^3=19.$

10. $\{-5-(-3-4)\}(10-3-8)^2(5-6)^3=-2.$

11. $$\frac{9+(2-15)}{(-3{,}5+1{,}5)^2}-\frac{1}{-6-(2-7)}+\\ +\frac{-3(2-14)}{-4^2+(2-15)^2}=-\frac{6}{7}.$$

12. $$\frac{\dfrac{3}{4-13}\cdot\dfrac{70-((-2)^3)^2}{(4-5)\frac{2}{3}}}{\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{10}-\frac{4}{5}}-\dfrac{\left(-\frac{1}{3}:\frac{1}{6}\right)^2}{\dfrac{-1}{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}}}=-3.$$

CAPITOLO II

LE OPERAZIONI FONDAMENTALI DEL CALCOLO LETTERALE

Concetto del calcolo letterale.

45. Quando i valori numerici delle quantità algebriche sono rappresentati da lettere, allora le operazioni di addizione, sottrazione, ecc. non si possono che indicare. Sulle espressioni, che ne risultano, si fanno però operazioni di calcolo; qualunque di queste consiste in una *trasformazione* dell' espressione data in un' altra espressione ad essa *equivalente*, in una espressione, cioè, nella quale sono indicate altre operazioni di addizione, sottrazione, ecc., le quali però condurrebbero al medesimo risultato che quelle indicate nella primitiva, quando alle lettere si attribuissero determinati valori numerici, qualunque poi fossero questi valori. All' intento di farci una idea dell' utilità di cotali trasformazioni, consideriamo il seguente semplice:

Probl. *Determinare il tempo in cui due fontane empirebbero una vasca di data capacità, versandovi l' acqua tutte e due insieme, essendo nota la quantità d' acqua che ciascuna fontana può fornire in un dato tempo.*

Risol. Indichiamo con a e b i numeri dei litri d' acqua che le due fontane versano rispettivamente in un minuto, e con c il numero dei litri d' acqua di cui è capace la vasca.

Indicando con x il valore *incognito* del tempo, ax e bx dinotano le quantità d' acqua che le due fontane versano in questo tempo.

Il domandato numero x dev'esser tale che riesca $ax + bx = c$, oppure $(a + b)\,x = c$, dacchè si sa che, dovendo moltiplicare parecchi numeri per uno stesso altro numero e sommare poi i prodotti, si può invece moltiplicare la somma dei moltiplicandi per il moltiplicatore. (*).

Ma, quando si conosce il prodotto di due numeri ed uno dei fattori, con la divisione si trova l'altro fattore; egli è perciò:

$$x = \frac{c}{a + b}.$$

Così in una sola volta abbiamo risoluto tutti i casi analoghi. Ad es., se una fontana dà 20 litri al minuto, 30 una seconda e 50 una terza, una vasca capace di 20000 litri verrà riempita dalle tre fontane in $\frac{20000}{20 + 30 + 50} = 200$ minuti.

Per poco si rifletta, si riconosce che la risoluzione del problema è dovuta ad una trasformazione d'una espressione in un'altra equivalente; e infatti mediante codesta trasformazione la questione proposta si è fatta dipendere da un'altra più semplice, che nel caso nostro si è anzi potuta risolvere senz'altro. Il calcolo letterale consiste in trasformazioni così fatte; e il nostro esempio, nella sua semplicità, ci lascia indovinare l'utilità di questo artifizio per mezzo del quale si può far dipendere la risoluzione di un problema da quella di un altro, e questa da quella di un terzo, e così via, fino a che ogni difficoltà sia rimossa.

(*) Nel caso presente la trasformazione dell'espressione $ax + bx$ nella equivalente $(a + b)\,x$ verrebbe suggerita dal problema stesso; si presenta infatti abbastanza spontanea l'idea di imaginare surrogata alle due fontane una terza che versi $(a + b)$ litri d'acqua al minuto.

Risolvendo problemi, si è visto quali sono le trasformazioni opportune; noi cominceremo con lo studio di queste; ne vedremo poi l'applicazione.

Estensione del significato d'una lettera.

46. Avviene spesso in Algebra che si debba considerare una quantità incognita, e che non si sappia se essa sia positiva o negativa. Questa circostanza ha suggerito di rappresentare una quantità algebrica, *valore* e *segno*, con una semplice lettera. Così si può poi dire che in Algebra si trattano le questioni non solo indipendentemente dai valori numerici delle grandezze che si considerano, ma anche indipendentemente dai *segni* delle quantità algebriche che rappresentano le grandezze.

47. L'estensione, che abbiamo dato al significato d'una lettera, rende necessaria qualche altra convenzione.

Stabiliamo intanto che i simboli: $+ a$ e $- a$ significhino rispettivamente i prodotti di $+ 1$ per a, e di $- 1$ per a. (*).

E perchè, moltiplicando una quantità per $+ 1$, il valore della quantità non viene mutato, i simboli $+ a$ ed a hanno lo stesso valore.

E perchè, moltiplicando una quantità per $- 1$, non si fa che mutare il segno della quantità, i simboli a e $- a$ rappresentano due quantità contrarie. Così, ad es., se la lettera a rappresenta la quantità algebrica $- 7$, il simbolo $- a$ ha il valore positivo $+ 7$.

(*) Nel paragrafo 72 si trova compiutamente giustificata questa convenzione.

48. Per rappresentare la somma delle quantità algebriche a e b, scriveremo $a + b$, dove il segno $+$ si deve considerare come il segno del fattore $+ 1$, per il quale si è moltiplicata la quantità b.

Per rappresentare la differenza delle quantità a e b, scriveremo $a - b$, dove il segno $-$ si deve considerare come il segno del fattore $- 1$, per il quale si è moltiplicata la quantità b. affine di mutarle il segno, come richiede la regola della sottrazione [17]. (*).

Il prodotto ed il quoziente di due quantità algebriche a, b, si rappresenteranno ancora scrivendo: $a\,b$ ed $(a : b)$. (Codesti due simboli, se le quantità a e b hanno segni eguali, rappresentano quantità positive; altrimenti rappresentano quantità negative).

Definizioni.

49. Un' espressione algebrica, nella quale non sia indicata nessuna addizione, nè sottrazione, si dice *monomio*.

Un monomio, nel quale non sia indicata nessuna divisione, si dice monomio *intero*.

In un monomio intero quel fattore, il cui valore è espresso numericamente, si dice il *coefficiente* del monomio. Ad es., nei monomi $- 3\,a^2 b$, $- 0{,}7\,m$, $\frac{2}{3}\,a$, i coefficienti sono rispettivamente $- 3$, $- 0{,}7$ e $+ \frac{2}{3}$.

(*) Così possiamo dire ancora che si rappresenta la somma di quantità algebriche, scrivendole di seguito, omettendo il segno d'addizione. È chiaro del resto che non muterebbe il valore d'una espressione, se si volessero considerare i segni $+$ e $-$ come indicanti rispettivamente addizione e sottrazione.

Nei monomi a^2b e $-c$ i coefficienti sono rispettivamente $+1$ e -1.

Il segno del coefficiente di un monomio si suol dire il segno del monomio.

L'espressione, che si ottiene indicando l'addizione di più monomi, si dice *polinomio*; e i monomi, onde risulta un polinomio, si dicono i *termini* del polinomio.

Il polinomio di due termini si dice *binomio*; quello di tre *trinomio*.

Addizione d'un polinomio.

50. Sia, ad es., l'espressione:

$$-m+(-a-b+c-d+e),$$

nella quale è indicato di aggiungere un polinomio.

Per il teorema [12, 1°] il quale dice che, dovendo aggiungere una somma, si può invece aggiungere successivamente le singole parti, l'espressione data è equivalente all'espressione:

$$-m-a-b+c-d+e.$$

Il passaggio dalla prima alla seconda delle precedenti espressioni è una operazione del calcolo letterale; si chiama: *addizione d'un polinomio.* Per questa operazione abbiamo la:

51. Regola. *Per aggiungere un polinomio ad una quantità, si scrivono in seguito di questa quantità i termini del polinomio.*

52. Reciprocamente, dato, ad es., il polinomio:

$$-a+b+c-d+e-f,$$

per il teorema [12, 3°]: in una somma alquanti addendi si possono surrogare con la loro somma effettuata, possiamo chiudere tra parentesi alquanti termini e premettere alla parentesi il segno $+$. In tal modo, ad es., dall'espressione che precede si deduce l'equivalente:

$$b - f + (-a + c - d) + e.$$

Quest' ultima operazione del calcolo letterale è in qualche modo la contraria di quella che si dice *addizione d'un polinomio*; ma essa non ha un nome a posta.

53. Oss. L'operazione del calcolo letterale, detta addizione d'un polinomio, mediante la quale si passa, ad es., dalla prima alla seconda delle espressioni che sono nel § 50, non è indicata da un segno particolare. Infatti il segno $+$, che precede la parentesi, indica un' addizione [8] che non si può compiere se non quando, discendendo ad un caso particolare, alle lettere si attribuiscano valori determinati.

La stessa osservazione si può ripetere per tutte le operazioni del calcolo letterale, tantochè, sebbene ancora ingiustificata, enunciamo la seguente proposizione:

54. *Non si sono adottati segni particolari per indicare le operazioni del calcolo letterale.*

Sottrazione d' un polinomio.

55. Sia, ad es., l'espressione:

$$-m - (-a + b + c - d + e),$$

nella quale è indicato di sottrarre un polinomio (sottrazione che non si può compiere se non quando alle lettere si attribuiscano valori determinati).

Per il teorema [20] il quale dice che, dovendo sottrarre una somma, si può invece sottrarre successivamente le singole parti, l'espressione assunta è equivalente a questa che segue [17, 47, 26]:

$$- m + a - b - c + d - e.$$

Il passaggio dalla prima alla seconda delle precedenti espressioni è una operazione del calcolo letterale; si chiama *sottrazione d'un polinomio.* Dall'esempio considerato possiamo conchiudere la:

56. Regola. *Per sottrarre un polinomio si scrivono i suoi termini, con segni cambiati, in seguito al minuendo.*

57. Reciprocamente:

Quanti si vogliano termini di un polinomio si possono chiudere tra parentesi con segni mutati, scrivendo poi innanzi della parentesi il segno —.

Così, ad es., seguendo questa regola, dall'espressione:

$$- a + b + c - d + e - f$$

si ricava l'espressione:

$$c - (- b + d - e) - a - f.$$

Le due espressioni sono equivalenti, perchè dalla seconda, effettuando la sottrazione del polinomio, si deduce appunto la precedente. [11].

Moltiplicazione dei monomi.

58. Consideriamo, ad es., l'espressione:

$$(4a^2b^3cd^2)\left(-\frac{2}{3}a^5b^2c^3f\right),$$

nella quale è indicata la moltiplicazione d'un monomio per un altro (moltiplicazione che non si può effettuare, se non quando alle lettere si attribuiscano determinati valori).

Per i teoremi [30, 1°; 30, 3°; 42]: dovendo moltiplicare per un prodotto si può moltiplicare successivamente per i singoli fattori; in un prodotto ad alquanti fattori si può sostituire il loro prodotto effettuato; il prodotto di due potenze della stessa base è uguale a quella potenza della base stessa, che ha per esponente la somma degli esponenti, l'espressione assunta è equivalente a questa che segue:

$$-\frac{8}{3}a^7b^5c^4d^2f.$$

L' operazione del calcolo letterale, mediante la quale dalla prima si deduce la seconda delle precedenti espressioni, si dice *moltiplicazione dei monomi*. Dall' esempio considerato possiamo conchiudere la:

59. Regola. *Per fare il prodotto di due monomi: si fa il prodotto dei coefficienti; si scrive col suo esponente ogni lettera, che si trovi in un solo fattore; ogni lettera, che si trovi in ambidue i fattori, si scrive con esponente uguale alla somma de' suoi esponenti.* (*).

60. Oss. Dalla regola per la moltiplicazione di due monomi risulta che *il prodotto di due monomi contiene ogni lettera, che si trovi in uno dei fattori, e la contiene con esponente uguale o maggiore di quello che essa ha nel fattore.*

61. Grado di un monomio. Si dice *grado di un monomio* la somma degli esponenti di tutte le lettere che entrano nel monomio. E si dice *grado di un monomio rispetto ad una lettera* l' esponente che ha questa lettera.

In base alla regola [59] della moltiplicazione dei

(*) Nei monomi a e $-b$ i coefficienti sono $+1$ e -1. Epperò egli è:

$$a \cdot -b = -ab.$$

monomi si può dire che: *il grado del prodotto di due monomi è uguale alla somma dei gradi dei due fattori*, e ciò sia che s' intenda parlare di grado assoluto, oppure di grado relativo ad una lettera.

Divisione dei monomi.

62. Consideriamo, ad es., l' espressione:

$$(-2a^7b^3c^2d) : (\tfrac{3}{5}a^2b^3)$$

nella quale è indicata la divisione di un monomio per un' altro. (Questa divisione [35] non si può effettuare se non quando alle lettere si attribuiscano determinati valori numerici). Allorquando ciascuna lettera del divisore si trova nel dividendo con esponente uguale o maggiore, come ha luogo nel nostro caso, l'espressione si può trasformare in un monomio (intero). Questo monomio moltiplicato, nel senso del calcolo letterale, per il divisore, riproduce il dividendo. La trasformazione, di cui parliamo, si dice *divisione de' monomi.*

La condizione sopra accennata è necessaria [60], perchè esista un monomio quoziente; richiamandosi la regola della moltiplicazione dei monomi, si trova che la condizione è anche sufficiente, e si conchiude la:

63. Regola. *Per dividere un monomio per un altro: si divide il coefficiente del dividendo per il coefficiente del divisore; si scrive col suo esponente ogni lettera che si trovi soltanto nel dividendo: ogni lettera comune, che abbia nel dividendo maggior esponente che nel divisore, si scrive con esponente uguale alla differenza degli esponenti; si tralascia ogni lettera comune, che abbia nel dividendo lo stesso esponente che nel divisore.*

Se nel dividendo manca una lettera che si trovi nel divisore, od una lettera abbia nel dividendo esponente minore che nel divisore, la divisione dei monomi è impossibile. (*).

Nel nostro esempio la condizione di divisibilità è sodisfatta (intendasi divisibilità del calcolo letterale) e si trova:

$$(-2a^7b^3c^2d) : (\tfrac{3}{5}a^2b^3) = -\tfrac{10}{3}a^5c^2d.$$

Invece nell' espressione:

$$(-a^3bc^2) : (-5a^5d)$$

la divisione (**) non si può effettuare. In questo caso il quoziente si suol rappresentare scrivendo nel seguente modo: $\frac{-a^3bc^2}{-5a^5d}$. (Di forme così fatte ci occuperemo nel seguito).

64. Dato il prodotto di due monomi ed uno dei fattori, la condizione di divisibilità del primo per il secondo è sodisfatta [60]; operando secondo la regola precedente, si troverà l'altro fattore.

Moltiplicazione di un polinomio per un monomio.

65. Sia, ad es., l' espressione:

$$(-a-b+c-d+e)(-m),$$

dove si vede indicata la moltiplicazione d'un polino-

(*) Stabilendo che un esponente possa anche essere uguale a *zero*, e che in tal caso la potenza, qualunque sia la base. abbia per valore l' unità, la regola si semplifica. Infatti il caso d'una lettera, che si trovi soltanto nel dividendo diventa un caso particolare di quello d' una lettera comune, che ha nel dividendo esponente maggiore. E mutando la parola *maggiore* in *non minore*, si fa diventare caso particolare d' un precedente, il caso d'una lettera comune, che abbia nel dividendo lo stesso esponente che nel divisore.

(**) Bisogna intendere « la divisione del *calcolo letterale* ».

mio per un monomio (questa moltiplicazione [23] non si può effettuare; ma qui si tratta di trasformare l'espressione in una equivalente).

Per il teorema [31] il quale dice che, dovendo moltiplicare una somma per una quantità, si può invece moltiplicare le singole parti della somma per il moltiplicatore e sommar poi i prodotti parziali, l'espressione assunta è equivalente a questa che segue [59]:

$$am + bm - cm + dm - em.$$

Il passaggio dalla prima alla seconda delle precedenti espressioni è una operazione del calcolo letterale; si chiama *moltiplicazione di un polinomio per un monomio.*

Dall' esempio considerato si ricava la:

66. Regola. *Per moltiplicare un polinomio per un monomio, si moltiplicano i singoli termini del polinomio per il monomio e si sommano i prodotti parziali.*

Es. $(-3a^2bc - 0{,}7\,ac^2m + b^3m^2n)(-4ab^3m) =$
$= 12a^3b^4cm + 2{,}8a^2b^3c^2m^2 - 4ab^6m^3n.$

67. Oss. La precedente regola si può applicare anche ad una espressione nella quale sia indicata la moltiplicazione di un monomio per un polinomio, perchè si può cambiar l'ordine dei fattori.

Divisione di un polinomio per un monomio.

68. Un'espressione, nella quale sia indicata la divisione di un polinomio per un monomio, se ciascun termine del dividendo è divisibile [62] per il divisore, si può trasformare in un polinomio a termini interi. Perciò basta dividere [63] ciascun termine del dividendo per il divisore e sommare i quozienti. E infatti, moltiplicando [66] il polinomio, che si ottiene in tal modo, per il monomio divisore, si riproduce il dividendo. Questa operazione del calcolo letterale si dice *divisione di un polinomio per un monomio.* Così possiamo enunciare la:

69. Regola. *Per dividere un polinomio per un monomio, se tutti i termini del polinomio sono divisibili per il monomio, si fanno queste divisioni e si sommano i risultati.*

Es. $(4a^2b^2c - 3a^4b + a^2b - 10a^2b^2m^2) : (-4a^2b)$
$$= -bc + \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{1}{4} + 2{,}5bm^2.$$

Raccoglimento di un fattore comune.

70. Se tutti i termini di un polinomio presentano un fattore comune, il polinomio è divisibile [69] per questo fattore, epperò si può mettere sotto forma di prodotto, nel quale uno dei fattori sia il fattor comune; l'altro fattore si troverà dividendo [69] il polinomio per il fattor comune. Quando si fa questa trasformazione, si dice che *si raccoglie quel fattore dal polinomio.*

Es. I termini del polinomio:
$$-18a^4b^2c + 6a^2bc - 4a^2bc^2m$$
presentano il fattor comune $(6a^2bc)$. Raccogliendo questo fattore, il polinomio si trasforma nell'espressione equivalente:
$$(-3a^2b + 1 - \tfrac{2}{3}cm)\,6a^2bc.$$

Raccogliendo invece, ad es., il fattore $(-6abc)$, si ottiene:
$$(3a^3b - a + \tfrac{2}{3}acm)(-6abc).$$

71. Poichè qualunque monomio è divisibile per (-1), da qualsivoglia polinomio si può raccogliere il fattore (-1). Così si ha, ad es.,:

$$-a-b+c-d+e=(a+b-c+d-e)(-1).$$

Scrivendo il fattore (-1) per primo, ed omettendo la cifra 1, si trova giustificata la seguente trasformazione (*):

$$-a-b+c-d+e=-(a+b-c+d-e).$$

Riduzione dei termini simili.

72. Due monomi si dicono *simili rispetto ad una lettera*, se contengono ambidue quella lettera con medesimo esponente.

Due monomi, che siano simili rispetto a tutte le lettere che essi contengono, si dicono *simili*, senz'altro.

Quando fra i termini di un polinomio ce ne sono di simili, questi si possono surrogare con un termine solo, il quale si trova con l'operazione detta *riduzione dei termini simili*.

Sia, ad es., il polinomio:

$$-2ab^2-3a^2b-15ab^2+8ab^2-2c+0{,}4ab^2-ab^2,$$

nel quale, a proposito, ci sono parecchi termini simili. Poichè in una somma alquanti addendi si possono surrogare con la loro somma effettuata [12, 3°], i termini simili si possono surrogare con la loro somma:

$$-2ab^2-15ab^2+8ab^2+0{,}4ab^2-ab^2,$$

la quale, raccogliendo a fattor comune la parte lette-

(*) Si può giustificare codesta trasformazione anche premettendo o supponendo premesso al polinomio il termine *zero*. Ecc. [57].

rale $a\,b^2$, diventa:

$$(-2-15+8+0{,}4-1)\,a b^2,$$

ossia: $$-9{,}6\,a b^2.$$

Da questo esempio si ricava la:

73. Regola. *In un polinomio più termini simili si possono surrogare con un solo termine, il quale è simile ai termini a cui viene surrogato, ed ha il coefficiente uguale alla somma dei coefficienti dei termini stessi.*

Quando la somma dei coefficienti di più termini simili è *zero*, anche la somma dei termini è uguale a *zero*: in tal caso pertanto si può dire che essi reciprocamente si elidono.

74. Compiuta l'addizione o la sottrazione di polinomi, ed in generale una operazione il cui risultato sia un polinomio, si ha cura di far la riduzione dei termini simili che ci fossero, dacchè sia sempre utile aver le espressioni letterali nella più semplice forma.

Moltiplicazione dei polinomi.

75. Sia, ad es., l'espressione:

$$(-a+b+c-d)\,(-m+n-p),$$

nella quale si vede indicata la moltiplicazione di due polinomi (moltiplicazione che non si può fare, se prima alle lettere non si attribuiscano determinati valori). Qui si tratta di trasformare la data espressione in una di equivalente.

Intanto, perchè, dovendo moltiplicare una quantità per una somma, si può invece [32] moltiplicare la quantità per le singole parti della somma e sommar poi i prodotti parziali, l'espressione data è equivalente a questa che segue:

$$\begin{aligned}&(-a+b+c-d)(-m)\\+&(-a+b+c-d)(+n)\\+&(-a+b+c-d)(-p),\end{aligned}$$

e quindi [66] anche alla seguente:

$$\begin{aligned}&(am-bm-cm+dm)\\+&(-an+bn+cn-dn)\\+&(ap-bp-cp+dp).\end{aligned}$$

Codesto risultato ci permette di dire che:

76. Teor. *Il prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei polinomi che si ottengono moltiplicando uno dei polinomi dati per ciascun termine dell'altro.*

77. Sommando [51] i polinomi che compongono l'ultima espressione, si ottiene un'espressione che è equivalente alla primitiva:

$$(-a+b+c-d)(-m+n-p).$$

L'operazione del calcolo letterale, mediante la quale da questa espressione si deduce l'equivalente sopra accennata, si dice *moltiplicazione dei polinomi*. Dall'esempio considerato possiamo conchiudere la:

78. Regola. *Per moltiplicare tra loro due polinomi, si moltiplicano i singoli termini di uno di essi per i singoli termini dell'altro, e si sommano i prodotti parziali.* (*).

79. La moltiplicazione di due polinomi si dispone ordinariamente come in Aritmetica, un fattore sotto l'altro. Si scrivono in una stessa linea i prodotti par-

(*) Secondo l'ultimo teorema [76] il prodotto di due polinomi apparisce come somma di alquanti polinomi; secondo l'ultima regola apparisce come somma di monomi.

ziali, che si ottengono moltiplicando i singoli termini del polinomio moltiplicando per uno stesso termine del moltiplicatore, avendo cura di mettere in colonna i prodotti parziali simili, se ce ne sono, e ciò allo intento di aver in fine in vista le possibili riduzioni. (Di quei prodotti parziali, che si devono scrivere sotto di qualche altro prodotto già scritto, perchè simili a codesto, basterebbe scrivere solo il coefficiente).

Esempio.

$$
\begin{array}{llllll}
-5ab^3 + a^2b^2 - 2b^4 + 3a^4 & & & & & \\
-3a^2 + b^2 + 2ab & & & & & \\
\hline
15a^3b^3 & -3a^4b^2 & +6a^2b^4 - 9a^6 & & & \\
 & +3a^4b^2 & +a^2b^4 & -5ab^5 - 2b^6 & & \\
2a^3b^3 & & -10a^2b^4 & -4ab^5 & & +6a^5b \\
\hline
17a^3b^3 & & -3a^2b^4 - 9a^6 & -9ab^5 - 2b^6 & & +6a^5b.
\end{array}
$$

80. Nella moltiplicazione dei polinomi, se prima dell'operazione i polinomi sono stati *ordinati*, si riconosce poi più agevolmente, durante l'operazione, se un prodotto parziale, che si sta per calcolare, è simile a qualche altro già calcolato.

Ordinare un polinomio rispetto ad una lettera vuol dire disporre i termini del polinomio [11] in modo che primi siano i termini nei quali questa lettera ha il più grande esponente, poi seguano quelli in cui questa lettera ha l'esponente prossimo inferiore, e così via, mettendo per ultimi, se ce ne sono, i termini privi della lettera ordinatrice (*).

(*) Nello stabilire il significato della parola *ordinare* si potrebbe dispensarsi dal far cenno dei termini privi della let-

Ad es., il polinomio:

$$-3b^2 - 3a^4b^2 + 5a^2bc + a^4b^4 - 4a^2 + 7b^3c,$$

ordinato rispetto alla lettera a, diventa:

$$-3a^4b^2 + a^4b^4 + 5a^2bc - 4a^2 - 3b^2 + 7b^3c.$$

Di consueto la lettera ordinatrice ha esponente diverso da termine a termine; invece nel nostro caso abbiamo trovato un *gruppo* di termini nei quali la lettera a ha l'esponente 4, poi un gruppo di termini nei quali questa lettera ha l'esponente 2, e un ultimo gruppo di termini privi di questa lettera. I termini del primo gruppo sono simili rispetto ad a; ma non si possono ridurre tra loro, perchè in essi un'altra lettera, nel nostro caso la b, ha esponente diverso da un termine all'altro. Così si può proporsi di ordinare i termini di ciascun gruppo rispetto alla lettera b. E dopo ciò il polinomio:

$$a^4b^4 - 3a^4b^2 + 5a^2bc - 4a^2 + 7b^3c - 3b^2$$

si può dire *ordinato rispetto alle lettere* a *e* b.

È facile comprendere che potrebbe darsi il caso di poter ordinare subordinatamente rispetto ad una terza lettera, *ecc.*

Talvolta un polinomio, invece che secondo le potenze *discendenti*, si ordina secondo le potenze *ascendenti*. Ma quando si dice *ordinare*, senz'altro, s'intende accennata la prima maniera.

81. Teor. *Nel moltiplicare tra loro due polinomi si ottengono almeno due prodotti parziali, che non sono simili nè tra loro nè agli altri.*

tera ordinatrice, ammettendo che anche questi ultimi la contengano, però con l'esponente *zero*, e facendo la convenzione che la potenza d'esponente *zero* sia eguale all'unità, qualunque sia la base.

Dim. 1°. Se i due polinomi non hanno nessuna lettera comune, i prodotti parziali sono tutti *dissimili*. Infatti, moltiplicando due termini d'uno dei polinomi per uno stesso o per due distinti dell'altro, si ottengono due prodotti ne' quali c'è lo stesso carattere di dissimiglianza che nei due termini da cui provengono.

2°. Supponiamo, per secondo caso, che i polinomi abbiano una lettera comune, e che in ciascun polinomio questa lettera abbia l'esponente massimo in un solo termine e pure in un solo termine l'esponente minimo (*). È manifesto che il prodotto dei due termini di grado massimo e quello dei due di grado minimo non sono simili nè tra loro nè agli altri.

3°. Passiamo all'ultimo caso, il quale, sebbene meno frequente in pratica, tuttavia è teoricamente il caso generale (**). Intendiamo accennare il caso in cui una lettera comune, che si vuol considerare per prima come lettera ordinatrice, in uno od in entrambi i polinomi ha l'esponente massimo in due o più termini.

Per fermare l'attenzione, supponiamo che sia a la lettera comune e che siano 7 e 4 gli esponenti massimi che essa ha rispettivamente nei due polinomi. Manifestamente tutti i prodotti parziali, che provengono dalla moltiplicazione dei termini contenenti a^7 per quelli che contengono a^4, e che contengono perciò la lettera a con l'esponente 11, non sono simili a nessuno degli altri prodotti parziali; infatti in questi

(*) Intenderemo che l'esponente minimo sia lo *zero*, se c'è un termine privo della lettera ordinatrice.

(**) Nella maggior parte dei trattati d'Algebra questo terzo caso, per brevità, è passato sotto silenzio.

la lettera a ha esponente minore di 11. Ma può darsi che in parte siano simili tra loro. Ora, imaginando di sopprimere il fattore a^7 ed il fattore a^4 in quei termini dei polinomi che contengono questi fattori, e chiamando M ed N i polinomi composti dai termini che risultano da questa soppressione, possiamo dire che quei termini del prodotto che contengono a^{11}, si possono ottenere moltiplicando per a^{11} il prodotto dei polinomi M ed N. Se questi polinomi non hanno nessuna lettera comune, i termini del loro prodotto sono tutti dissimili, epperò sono tali anche i termini contenenti a^{11}. Se invece M ed N hanno una lettera comune b, in tal caso il prodotto di quei termini dei polinomi M ed N, ne' quali b ha l'esponente massimo, non è simile a nessun altro, e altrettanto vale per il corrispondente termine contenente a^{11}.

Nello stesso modo, supposto che la lettera ordinatrice abbia l'esponente minimo in due o più termini in ciascuno dei polinomi, si trova che il prodotto di quei due termini di grado minimo rispetto ad a, che sono nel tempo stesso subordinatamente di grado minimo rispetto ad un'altra lettera, non è simile a nessun altro prodotto parziale.

Dalla precedente dimostrazione abbiamo come:

82. Cor. 1°. *Se due polinomi ed il loro prodotto si ordinano similmente* (*), *si trova poi che il primo termine del prodotto è il prodotto dei due primi dei fattori, e che l'ultimo è il prodotto degli ultimi.*

83. Cor. 2°. *Il grado del prodotto di due polinomi, rispetto ad una lettera qualunque, è uguale alla som-*

(*) Cioè secondo una stessa lettera. E nel caso che si debbano considerare più lettere, s'intende: secondo le medesime lettere, prese nel medesimo ordine.

ma dei gradi, rispetto alla lettera stessa, del moltiplicando e del moltiplicatore.

84. Cor. 3°. *Nel prodotto di due polinomi ci sono tutte le lettere che si trovano nei fattori; e il maggior esponente che una lettera qualunque ha nel prodotto è uguale o maggiore del massimo esponente che questa lettera ha in uno qualunque dei fattori.*

85. Oss. Quando due polinomi contengono parecchie lettere, ordinando i polinomi *variamente*, possono cambiare i termini estremi. In tal caso si può provare che tra i prodotti parziali ce ne sono necessariamente anche più di due che non sono simili, nè tra loro, nè agli altri.

Casi notevoli di moltiplicazione di polinomi.

86. Mediante moltiplicazione si trova:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Quindi il:

87. Teor. *Il quadrato di un binomio è uguale alla somma dei quadrati dei due termini, aumentata del loro doppio prodotto.*

Moltiplicando $(a + b + c)$ per $(a + b + c)$, si trova:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Da questi esempi, per induzione, ricaviamo il:

88. Teor. *Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei singoli termini, più i doppi prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun termine per ciascuno dei seguenti.*

Dim. Per la dimostrazione useremo del metodo così detto: da m ad $(m + 1)$. Esso consiste (per questo caso) in supporre che la legge valga per un polinomio di m termini, e provare che allora essa sussiste necessariamente anche per un polinomio di $(m + 1)$ termini.

Sia adunque il polinomio di $(m + 1)$ termini:

$$P = a + b + c + \ldots + h + k.$$

Riguardandolo come un binomio, la cui prima parte sia la somma dei primi m termini, abbiamo [87]:

$$P^2 = (a + b + c + \ldots + h)^2 + 2(a + b + c + \ldots + h)k + k^2.$$

Ora, se il teorema in questione vale per un polinomio di m termini, egli è:

$$(a + b + c + \ldots + h)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2 +$$
$$+ 2ab + 2ac + \ldots + 2ah + 2bc + \ldots + 2gh.$$

Abbiamo poi:

$$2(a + b + c + \ldots + h)k = 2ak + 2bk +$$
$$+ 2ck + \ldots + 2hk.$$

Sostituendo, nel secondo membro, cioè nel valore di P^2, in luogo delle due prime parti, i loro sviluppi testè considerati, si riconosce poi facilmente che il quadrato del polinomio P consta appunto dei quadrati dei singoli termini, e dei doppi prodotti che si formano moltiplicando ciascun termine del polinomio per ciascuno di quelli che lo seguono.

Così si è provato che, se la legge da dimostrare vale veramente per un polinomio di m termini, allora essa vale anche a sviluppare il quadrato di un polinomio di $(m + 1)$ termini.

Ma la legge sussiste per un trinomio (ce ne siamo accertati con la moltiplicazione); essa ha dunque luogo anche per un polinomio di 4 termini. E dacchè vale per uno di 4, vale anche per uno di 5; e quindi anche per uno di 6, ecc.; vale infine per un polinomio di quanti si vogliano termini, c. d. d.

89. Il cubo del binomio $(a + b)$ è il prodotto di tre fattori eguali ad $(a + b)$. Mediante moltiplicazione si trova:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Per ottenere il cubo della differenza $(a - b)$, basta sostituire $(-b)$ alla lettera b nell'ultima eguaglianza. Risulta:

$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3,$$

ossia:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

90. Si presenta spesso nella pratica del calcolo il caso di dover moltiplicare la somma di due quantità per la loro differenza. Mediante moltiplicazione si trova:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Quindi il:

Teor. *Il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza eguaglia la differenza dei quadrati delle quantità stesse.* (*).

Esempi. $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1.$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4.$$

(*) In generale, se due binomi son tali che uno si possa dedurre dall'altro col semplice mutare il segno ad uno dei termini di uno dei binomi, uno qualunque dei due binomi si può considerare come la somma di due quantità; l'altro rappresenta allora la differenza delle quantità stesse. Così nel nostro prodotto $(a + b)(a - b)$ si potrebbe riguardare il secondo fattore come la seconda delle due quantità a e $-b$; allora il primo fattore rappresenta la differenza di codeste quantità.

La formula precedente è anche importante perchè insegna a *decomporre la differenza di due quadrati in un prodotto di due fattori, dei quali uno è la somma e l'altro è la differenza delle basi.*

Esempi. $a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$

$$\text{»} \quad = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$\text{»} \quad = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$$

$$(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2 = (2a^2 + 2b^2)2ab$$

$$\text{»} \quad = (a^2 + b^2)\,4ab.$$

Divisione dei polinomi.

91. Proponiamoci di risolvere il seguente problema: *Dato il prodotto di due polinomi ed uno di questi, trovare quell' altro.*

L'operazione del calcolo letterale, che vale a tale uopo, si dice *divisione de' polinomi*. Il prodotto dato si dirà *dividendo*; si dirà *divisore* il fattore dato, e *quoziente* l'altro fattore. Per semplicità di discorso chiamiamo A il dividendo, B il divisore e Q il quoziente.

Dovendo determinare un polinomio, è chiaro che non si potrà calcolare che un termine alla volta. Vediamo dunque di trovar modo di determinare intanto un termine del quoziente. Qui dobbiamo richiamarci le proprietà della moltiplicazione dei polinomi; quella che fa per il caso nostro è anzitutto la seguente: Ordinando *similmente* il prodotto di due polinomi e i due polinomi, poi si può dire che il primo termine del prodotto è il prodotto dei due primi termini dei fattori. Pertanto, ordinando similmente i polinomi A e B, e poi dividendo [63] il primo termine di A per il primo di B, otterremo un termine del polinomio Q.

Da tutto ciò possiamo intanto conchiudere che:

Dato il prodotto di due polinomi ed uno di questi, ordinando similmente i due polinomi, e poi dividendo [63] *il primo termine del prodotto per il primo termine del fattore noto, si ottiene un termine dell' altro fattore.*

Ora che abbiamo imparato a determinare un termine del quoziente, vediamo come si trovino gli altri. A tal fine è utile rammentare che il polinomio A si può riguardare [76] come la somma dei prodotti del polinomio B per i singoli termini di Q. Così, poichè conosciamo ormai uno di questi termini, uno dei polinomi ora accennati si può calcolare, e appunto moltiplicando [66] il divisore per il termine già trovato del quoziente.

Sottraendo [56] il prodotto dal dividendo, nel resto, che chiameremo R, avremo la somma di quegli altri polinomi, che si otterrebbero moltiplicando il divisore per i termini del quoziente ancora incogniti; e perchè questa somma è il prodotto [76] del divisore per la parte ancora incognita del quoziente, altrettanto possiamo dire del resto R. Per conseguenza a questo punto ci troviamo nelle stesse condizioni che al principio dell' operazione; epperò, applicando le conchiusioni a cui siamo pervenuti, ordineremo similmente resto e divisore, chè poi, dividendo il primo termine del resto per il primo termine del divisore, otterremo un secondo termine del quoziente. Per questo termine si moltiplicherà il divisore, e, sottraendo il prodotto dal resto R, si otterrà un nuovo resto, che a sua volta si dovrà riguardare come un nuovo dividendo. E così via.

Ma col sottrarre successivamente le singole parti di una somma, la somma finisce ad essere esaurita;

perciò, continuando l'operazione, si deve pervenire necessariamente al resto *zero*. Allora la divisione sarà compiuta.

La giustificazione del processo di calcolo, che abbiamo trovato pur ora, è fondata *essenzialmente* sull'ipotesi che esista un polinomio, il quale, moltiplicato per il divisore, riproduca il dividendo. Ora è facile prevedere che, presi due polinomi qualunque A e B, non esisterà se non in via d'eccezione un terzo polinomio, che moltiplicato per B, riproduca il polinomio A (*). Nell'impossibilità di prevedere se esista o no un polinomio quoziente, si procede tuttavia secondo le conchiusioni del nostro precedente ragionamento e il calcolo si dice ancora *divisione dei polinomi*. Posto che l'operazione si arresti prima d'aver trovato un residuo nullo, e ciò o per l'impossibilità di proseguire, o per altra ragione, l'ultimo resto si chiama *resto della divisione*, e il polinomio scritto nel posto del quoziente si chiama tuttavia il *quoziente* (si dovrebbe almeno dirlo quoziente *incompleto*).

A tal punto possiamo raccogliere le nostre conclusioni nella seguente:

92. Regola. *Per dividere un polinomio per un altro*:

Si ordinano similmente i due polinomi.

Si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, e si ottiene così un primo termine del quoziente.

Per questo termine si moltiplica il polinomio divisore, e si sottrae il prodotto dal dividendo.

(*) Basta, ad es., che nel polinomio A manchi una lettera, che ci sia nel polinomio B, per poter asserire [84] che non esiste un polinomio, il quale, moltiplicato per B, riproduca A.

Si ordina il resto come fu ordinato il divisore, e poi si divide il primo termine del resto per il primo termine del divisore. Con ciò si ottiene un secondo termine del quoziente.

Per il nuovo termine del quoziente si moltiplica il divisore, e si sottrae il prodotto dal resto.

Si ordina il nuovo resto come il divisore, e poi si divide il primo termine del resto per il primo termine del divisore. Da ciò risulta un termine del quoziente.

Si continua così fino a che si pervenga ad un resto nullo; oppure fino a che non s' incontri una impossibilità di proseguire, o fino a che si abbia una ragione per non voler proseguire.

93. Es. 1°. Sia da dividere il polinomio:

$$7a^3b^2 + 3b^5 - 22ab^4 + 8a^5 - 26a^4b + 30a^2b^3$$

per il polinomio:

$$2a^3 + b^3 - 5ab^2 - 3a^2b.$$

Si dispone l' operazione nel modo seguente:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
8a^5 & -26a^4b & +7a^3b^2 & +30a^2b^3 & -22ab^4 & +3b^5 & 2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3 \\ \cline{7-7}
-8a^5 & +12a^4b & +20a^3b^2 & -4a^2b^3 & & & 4a^2-7ab+3b^2 \\ \cline{1-6}
 & -14a^4b & +27a^3b^2 & +26a^2b^3 & -22ab^4 & +3b^5 & \\
 & +14a^4b & -21a^3b^2 & -35a^2b^3 & +7ab^4 & & \\ \cline{2-6}
 & & +6a^3b^2 & -9a^2b^3 & -15ab^4 & +3b^5 & \\
 & & -6a^3b^2 & +9a^2b^3 & +15ab^4 & -3b^5 & \\ \cline{3-6}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Es. 2°. Sia da dividere il polinomio:

$$17a^2b^2c + bc^4 - 2ac^4 - 13a^3bc - 13a^2bc^2 +$$
$$+ 6a^3b^2 + 6a^3c^2 + 3abc^3 + 5ab^2c^2$$

per il polinomio $(5abc + c^3 - 3a^2c + 2a^2b)$.

In questo caso, ordinati i polinomi rispetto ad una qualunque delle lettere, è necessario ordinare poi subordinatamente rispetto ad un'altra lettera, perchè ciascuna ha l'esponente massimo in più d'un termine. Nel rimanente la divisione non presenta altro di singolare, e perciò si lascia allo studioso la cura di eseguirla. Con tre divisioni parziali si perviene al resto *zero*.

Es. 3°. Dividendo $(a^5 - 3a^3 + a - 1)$ per $(a^2 + 2)$, con due divisioni parziali si perviene ad un resto, il cui primo termine non è divisibile per il primo termine del divisore. Così l'operazione viene arrestata, e si conchiude che non esiste un polinomio il quale, moltiplicato per il divisore, riproduca il dividendo.

Es. 4°. Anche dividendo $(a^3 - 2a)$ per $(a^2 - a)$ l'operazione viene arrestata da una impossibilità di calcolo.

Se poi (come è lecito [82]) si ordinano i polinomi secondo le potenze ascendenti dell'unica lettera, si riconosce ben presto che l'operazione si può continuare indefinitamente.

94. Quando la divisione di due polinomi finisce ad un resto diverso da *zero*, tutta l'operazione è fondata sopra un'ipotesi che non è verificata, epperò non si può pensare che il quoziente ed il resto siano quali il quoziente ed il resto d'una divisione di numeri interi. Tanto è vero che in tal caso, cambiando la lettera ordinatrice, può avvenire che si trovino diverso quoziente e diverso residuo. Però anche in seguito ad una di cotali divisioni si può stabilire un'eguaglianza che esprima una trasformazione d'una espressione in un'altra equivalente. E ciò in base alla proposizione seguente, la quale è verificata anche se la divisione sia stata arrestata arbitrariamente, e perfino anche nel caso che si fosse violata la regola della divisione, scegliendo i due termini del dividendo e del divisore, e in seguito di un resto e del divisore, con questa sola avvertenza che il primo fosse divisibile per l'altro. In ogni caso si dirà *resto*, senza più, l'ultimo resto; e *quoziente*, senz'altro, l'espressione ottenuta e scritta al posto del quoziente.

95. Teor. *In una divisione di polinomi, il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente, più il resto della divisione.*

Dim. Al resto d'una divisione di polinomi si perviene sottraendo successivamente, la prima volta dal dividendo, i prodotti del divisore per i singoli termini del quoziente. Il medesimo resto si potrebbe ottenere [21] con una sottrazione sola, e per l'appunto sottraendo dal dividendo la somma dei prodotti del divisore per i singoli termini del quoziente, sottraendo cioè [76] il prodotto del divisore per il quoziente. Per conseguenza il dividendo è uguale a codesto prodotto più il resto, c. d. d.

96. Se A, B, Q ed R indicano ordinatamente dividendo, divisore, quoziente e resto della divisione di due polinomi, ha luogo [95] la relazione:

$$A = B \cdot Q + R.$$

Si dividano ora i due membri per B. Poichè il secondo membro è una somma, possiamo dividere ciascun termine per B, e sommare i quozienti [44]. Così si ottiene [41]:

$$A : B = Q + R : B.$$

Codesta eguaglianza esprime che:

Il quoziente di due polinomi è uguale al quoziente trovato con la divisione del calcolo letterale più il quoziente della divisione del resto per il divisore.

Condizione perchè un polinomio sia divisibile per un binomio della forma $(x - a)$.

97. Qui si tratta di stabilire una regola per riconoscere *a priori* se un polinomio dato sia divisibile o no per un binomio (*) della forma $(x - a)$.

Rappresentiamo con X un polinomio qualsivoglia dato. Trattandosi di dividerlo per $(x - a)$, supponiamolo ordinato secondo le potenze discendenti della x. (Se non contenesse questa lettera, non sarebbe divisibile [84] per $(x - a)$, e la questione sarebbe esaurita).

Poichè il primo termine del divisore consta della sola lettera x, i quozienti delle singole divisioni parziali (cioè a dire i singoli termini del quoziente) si ottengono col semplice diminuire di una unità l'esponente della x rispettivamente nel primo termine del polinomio X e dei resti successivi; epperò la divisione non si arresta che quando si pervenga ad un resto in cui non ci sia la lettera x. (**).

(*) La prima parte del binomio è rappresentata da una lettera, con esponente *uno* e coefficiente *uno*. Nel secondo termine non c'è la detta lettera.

(**) È facile convincersi che, continuando abbastanza l'operazione, ad un resto così fatto si perviene necessariamente.

Supponiamo, per fermare le idee, che 7 sia il maggior esponente da cui la x è affetta nel dividendo, e supponiamo che, con tale esponente, la x si trovi in tre termini. Questi, quando il polinomio viene ordinato, diventano i tre primi; supponiamo, ad es., che essi siano i tre seguenti: $5\,a^4\,x^7$, $-0,2\,a\,x^7$, $+\,m^3x^7$. Il primo termine del quoziente è allora $5\,a^4\,x^6$; e quando moltiplichiamo per questo termine il divisore $(x - a)$, otteniamo due prodotti parziali; il primo va a

Se dinotiamo con Q il quoziente e con R il resto, possiamo [95] scrivere l'eguaglianza:

$$X = (x - a) Q + R,$$

nella quale, senza che cessi di esser esatta, possiamo attribuire alla lettera x qualsivoglia valore. Attribuendo ad x il valore a (che è il secondo termine del divisore, preso con segno cambiato), e indicando con le scritture X_a e Q_a i valori che i polinomi X e Q assumono quando si sostituisce a ad x, abbiamo:

$$X_a = (a - a) Q_a + R.$$

(R non muta per la nostra sostituzione, perchè esso non contiene la lettera x).

Ma il prodotto $(a - a) Q_a$ è uguale a *zero*, perchè il fattore $(a - a)$ è nullo, e l'altro fattore Q_a ha valore determinato (*). Ci rimane adunque:

$$X_a = R.$$

distruggersi col primo termine del dividendo; l'altro contiene la x con esponente 6 e, se non trova termine con cui ridursi, passa nel resto con segno mutato.

Ora è palese che, dopo altre due divisioni parziali, si ha un resto nel quale il più grande esponente della x non supera 6. E se in questo resto ci fossero 4 termini contenenti x^6, con altre quattro divisioni parziali al più si perverrebbe ad un resto nel quale la x non potrebbe avere un esponente maggiore di 5; e così via. (Questo schiarimento non è superfluo; infatti, in una divisione che finisce ad un resto diverso da zero, nel resto può esserci la lettera ordinatrice). Si noti anche che nessun resto può aver più termini del resto precedente.

(*) Si può dire che Q_a ha valore *determinato*, perchè la x non può trovarsi in un divisore. Se potesse accadere che nel polinomio Q ci fosse un termine come $\frac{1}{x-a}$, quando si facesse $x = a$, codesto termine diventerebbe $\frac{1}{0}$, e quest'espressione non ha alcun significato; e per conseguenza non avrebbero senso operazioni che si facessero poi con tale espressione.

Quest' eguaglianza notevole esprime il:

Teor. *Il resto della divisione di un polinomio per un binomio della forma* (x — a) *è uguale al valore che il polinomio assume, quando in esso si faccia* x = a.

98. Cor. *Affinchè un polinomio sia divisibile per un binomio della forma* (x — a), *è necessario e sufficiente che il polinomio si annulli per* x = a.

Infatti è $R = 0$, allora soltanto che sia $X_a = 0$.

99. Appl. Applicheremo il teorema, or ora dimostrato, a stabilire le condizioni perchè la somma o la differenza di due quantità divida la somma o la differenza di due potenze *simili* (potenze con eguali esponenti) delle quantità stesse.

1°. Sia $(x^m - a^m)$ il dividendo ed $(x - a)$ il divisore.

Quando nel dividendo si faccia $x = a$, si ottiene $a^m - a^m = 0$. Dunque *la differenza di due potenze simili di due quantità è sempre divisibile* (*) *per la differenza delle due quantità.*

(*) Qui la voce *divisibile* accenna ad una divisione di polinomi, e non ha il senso che in Aritmetica, dove si adopera ad esprimere che il quoziente è un numero intero. Infatti, attribuendo alle lettere x ed a valori frazionari, il quoziente della divisione di $(x^m - a^m)$ per $(x - a)$ assumerà in generale un valore frazionario, nel qual caso il valore assunto dal dividendo non è divisibile per quello del divisore.

Ma quando ad x ed a si attribuiscano valori numerici interi, anche il polinomio quoziente assume un valore intero, epperò in tal caso la divisibilità di $(x^m - a^m)$ per $(x - a)$ ha luogo anche in senso aritmetico. Perciò nell' ultima nostra conchiusione è compreso il teorema d'Aritmetica: *la differenza di due potenze simili qualunque di due numeri interi è divisibile per la differenza dei due numeri.*

Calcolando alcuni termini del quoziente della divisione di $(x^m - a^m)$ per $(x - a)$, si riconosce facilmente la legge con cui esso è formato, e si può scrivere:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + a^{m-2} x + a^{m-1}.$$

E si ha la conferma, moltiplicando [78] il quoziente per il divisore, perchè si ottiene appunto il dividendo.

2°. Invece $(x^m + a^m)$ *non è divisibile per* $(x - a)$. giacchè, se nel dividendo si fa $x = a$, si ottiene $2a^m$.

3°. Sia ora $(x^m - a^m)$ il dividendo ed $(x + a)$ il divisore. Ponendo il divisore sotto la forma $x - (-a)$ si vede che, per conoscere il resto della divisione, bisogna sostituire nel dividendo, in luogo della x, la quantità $(-a)$. Con ciò si ottiene $(-a)^m - a^m$; e si riconosce che bisognerebbe che fosse $(-a)^m = a^m$, perchè il resto della divisione fosse uguale a *zero*. Ma questo succede veramente [27] quando m sia un numero pari. Dunque $(x^m - a^m)$ *è divisibile per* $(x + a)$, *purchè* m *sia numero pari.*

4°. Sia per ultimo da dividere $(x^m + a^m)$ per $(x + a)$. Abbiamo visto che, in questo caso, per conoscere il resto della divisione, bisogna sostituire nel dividendo la quantità $(-a)$ in luogo di x. Con ciò si ottiene $(-a)^m + a^m$. Ma perchè questo resto sia nullo, è necessario che sia $(-a)^m = -a^m$; e ciò avverasi unicamente [27] se m sia dispari. Dunque $(x^m + a^m)$ *è divisibile per* $(x + a)$, *purchè* m *sia numero dispari.*

100. Teor. *Se un polinomio* X *si annulla, quando in luogo della* x *si sostituisca una qualunque delle quan-*

tità a, b, c, *ecc. differenti tra loro, il polinomio è divisibile per il prodotto:*

$$(x - a)(x - b)(x - c)\dots$$

Dim. Poichè il polinomio X si annulla, quando si faccia $x = a$, esso è divisibile per $(x - a)$. Detto Q' il quoziente, abbiamo:

$$X = (x - a)\,Q'.$$

Quest'eguaglianza ha luogo qualunque valore si attribuisca alla x. Facendo $x = b$, si ottiene:

$$X_b = (b - a)\,Q'_b.$$

E poichè per ipotesi è $X_b = 0$, anche il prodotto $(b - a)\,Q'_b$ è nullo. Ma non può esser tale il fattore $(b - a)$, giacchè b ed a sono disuguali; è quindi necessariamente $Q'_b = 0$. Ciò prova [98] che il polinomio Q' è divisibile per $(x - b)$. Rappresentando con Q'' il quoziente di questa divisione, si ha:

$$Q' = (x - b)\,Q''$$

epperò:

$$X = (x - a)(x - b)\,Q''.$$

Da quest'eguaglianza, attribuendo ad x il valore c, si conchiude che Q'' è divisibile per $(x - c)$, e che per conseguenza è:

$$X = (x - a)(x - b)(x - c)\,Q'''.$$

Questa relazione mostra [41] che il polinomio X è divisibile per il prodotto:

$$(x - a)(x - b)(x - c).$$

È manifesto ormai come procederebbe la dimostrazione; epperò resta provato che, *ecc.*

Esercizi.

Si riconosca l'esattezza delle seguenti eguaglianze, facendo diventare identicamente uguali i due membri di ciascuna di esse, e ciò mediante operazioni (trasformazioni) del calcolo letterale eseguite, secondo il caso, sopra uno od ambidue i membri.

13. $1-(7-a)+(8-3b+c^2)-(2-3b+c^2-d)=a+d.$

14. $20-\{a+7-[11+(3a-9)-5a]\}=1-\{a-13-(1-2a)\}.$

15. $p-\{p-[p-(p-m)]\}=5q-\{3q+[6q-(6q-(2q-m))]\}.$

16. $(x^4+y^4)(x+y)-(x^3+y^3)xy=x^5+y^5.$

17. $2(p+q)^2-(p^2-2q^2)=(p+2q)^2.$

18. $(a+b)^2+(a-b)^2=4a^2-2(a^2-b^2).$

19. $(a-b)(b-c)(c-a)=ac(a-c)-ab(a-b)-bc(b-c).$

20. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4.$

21. $(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac+nbd)^2+n(bc-ad)^2.$

22. $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2=4xy(x^2+y^2).$

23. $(a^2+b^2)^2-\big(2ab-(a^2-b^2)\big)^2=4ab(a^2-b^2).$

24. $m(m+1)(m+2)(m+3)+1=(m^2+3m+1)^2.$

25. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)=a^2+b^2-(c^2+d^2)$
$+2(ab-cd).$

26. $(a^3+2a^2+2a+1)(a^3-2a^2+2a-1)=a^6-1.$

27. $(a^2+b^2+c^2)^2-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$
$(a+b-c)=2(a^4+b^4+c^4).$

28. $3a^2+2b^2+6c^2=(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a-2c)^2.$

29. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)$
$(-a+b+c+d)=4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$

30. $(a+b+c)^3-(a+b)^3-(a+c)^3-(b+c)^3+a^3+$
$+b^3+c^3=6abc.$

31. $(a^2+b^2)^4=\{4ab(a^2-b^2)\}^2+\{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2\}^2.$

32. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)-(am+bn+cp)^2=$
$=(an-bm)^2+(bp-cn)^2+(cm-ap)^2.$

33. $x^2(y+z)^2(y-z)+y^2(z+x)^2(z-x)+z^2(x+y)^2(x-y)=$
$=(xy+yz+zx)(y-z)(z-x)(x-y).$

Si eseguiscano le seguenti divisioni, accertando poi in ogni caso il quoziente. (In queste operazioni c'è da esercitarsi su quasi tutte le regole di calcolo finora dimostrate. Il principiante farà molto bene di eseguirle tutte).

34. $(6x^3-17x^2y+16y^3):(3x-4y).$

35. $(a^7-6a^6b^3+14a^5b^6-12a^4b^9):(a^3-2a^2b^3).$

36. $(x^5-1+x+6x^4-4x^2+4x^3):(x+x^2-1).$

37. $(a^4+4b^4):(a^2+2ab+2b^2).$

38. $(2m^3n^3+m^6+n^6):(2mn+m^2+n^2).$

39. $(5-6a+a^6):(1+a^2-2a).$

40. $(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4):(a+b+c).$

41. $(x^2y^2-2xyz^2-x^2z^2-y^2z^2):(xy+xz+yz).$

42. $(xy^3+2y^3z-xy^2z+xyz^2-x^3y-2yz^3+x^3z-$
$-xz^3):(y+z-x).$

43. $(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5):(a^3-b^3).$

44. $(a^2-a-1)(2a^2+3)(a^2+a-1)(a-4):(a^4-3a^2+1).$

45. $(a^6+2a^3c^3+c^6):(a^2-ac+c^2).$

46. $(4m^4n^4+1):(2m^2n^2-2mn+1).$

47. $(2m^5n^5+m^{10}+n^{10}):(2mn+m^2+n^2).$

48. $(15a^3+a^2b-31ab^2+15b^3):(5a-3b).$

49. $(9a^4-58a^2b^2+49b^4):(3a^2-4ab-7b^2).$

50. $(144a^4-289a^2b^2+100b^4):(7ab-10b^2+12a^2).$

51. $(12a^4+ab^3+20b^4-32a^2b^2-a^3b):(ab-4a^2-b^2).$

52. $(a^6-b^6):(2ab^2-b^3-2a^2b+a^3).$

53. $(a^8-b^8):(a^2b+ab^2+a^3+b^3).$

54. $(a^8-b^8):(ab^4+a^4b+b^5+a^5).$

55. $\left(\frac{1}{3} - 6x^2 + 27x^4\right) : \left(\frac{1}{3} + 2x + 3x^2\right)$.

56. $(m^6 + 64n^6 - 16m^3n^3) : (4n^2 + m^2 - 4mn)$.

57. $(a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad + 2bc) : (a - b - c + d)$.

58. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) : (a + b + c)$.

59. $(21a^4b^3c^2 - 9a^3b^2c^4 + 6a^5b^2c^3) : (2a^3bc - 3abc^2 + 7a^2b^2)$.

60. $(10a^5b - 56ab^5 - 21a^4b^2 - 3a^2b^4 - 10a^3b^3) : (8b^3 + 5a^2b - 3a$

61. $(3m^3n^6 - n^9 + m^9 - 3m^6n^3) : (m^4 - m^3n - mn^3 + n^4)$.

62. $(64a^6 + 432a^3c^3 + 729c^6) : (12ac + 9c^2 + 4a^2)$.

63. $(15a^8 - 9a^7b - 25a^6b^2 + 19a^5b^3 - 6a^4b^4 + 13a^3b^5 -$
$- 4a^2b^6 - 5ab^7 + 2b^8) : (3a^3 - 5ab^2 + 2b^3)$.

64. $(9a^2b^2 - 3a^2b^4 - 9a^4b^2 + 12a^4b^3 - 4a^3b^4 - 6a^2b^3) :$
$(3a^2b - 3ab - ab^2)$.

65. $(a^3b^3c^2 + a^4b^4 - a^5b^2c - a^3b^2c^3 - b^4c^4 - a^4bc^3 -$
$- a^4b^2c^2 + b^6c^2 + a^2b^3c^3 + a^6c^2 - ab^4c^3 - a^2b^5c +$
$+ a^2b^4c^2 + a^4c^4) : (b^2c^2 - a^2bc + a^2c^2 + a^4)$.

66. $(a^{m+n}b^n - 4a^{m+n-1}b^{2n} - 27a^{m+n-2}b^{3n} + 42a^{m+n-3}b^{4n}) :$
$: (a^nb^n - 7a^{n-1}b^{2n})$.

67. $(1 + 2x) : (1 - 3x)$.

(In questo e nei seguenti due esercizi si ordini secondo le potenze ascendenti).

68. $(1 - ax) : (1 + bx)$.

69. $1 : (1 - 2x + x^2)$.

Si raccolga:

70. il fattore $a - b$ da $a^2 - ab + 2(b^2 - ab) + 3(a^2 - b^2)$.

71. » $a^2 - b^2$ » $a^4 - b^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2a^4 + 2a^2b^2$.

72. » $x + y$ » $x^3 + y^3 + 3ab(x + y)$ [90, 4°].

73. » $m - n$ » $m^3 - n^3 - m(m^2 - n^2) + n(m - n)^2$.

Si decompongano in fattori le seguenti espressioni:

74. $(a^2 - b^2) - (a - b)^2$. $5ab^2x^2 - 10ab^2xy + 5ab^2y^2$.

75. $ac - ad + bc - bd$. $14x^2 - 7x - 20ax + 10a$.

76. $m^2 - mx - m + x.$ $(a - b)^3 - (a - b)^2.$

77. $m^6 + m^4n^2 - m^2n^4 - n^6.$ $x^2 - 1 - ax - a.$

78. $(2a - b)^2 - (a - 2b)^2.$ $a^2 + 3ab + 2b^2.$

79. $2ab - a^2 - b^2 + c^2.$ $a^2 - b^2 - 4a^2c^2 + 4b^2c^2.$

80. $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad + 2bc.$ $x^2 - 2x + 1.$

81. $1 - a^2 - b^2 + a^2b^2.$ $a^3 - 4a^2b + 4ab^2 - b^3.$

82. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2.$ $a^3 - b^3 + a^2 - b^2.$

83. $(1 + ax)^2 - (a + x)^2.$

84. $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2.$

85. Raccogliendo successivamente a fattor comune la lettera x dai termini che la contengono, si metta il polinomio:

$$7x^5 - 6x^4 + 9x^3 + x^2 - 10x - 4$$

sotto una forma comoda per calcolare il valore che esso assume, quando alla x si attribuisca un valore determinato.

86. Il polinomio $12x^4 - 4x^3y - 5x^2y^2 + y^4$ è divisibile per $(y - 2x)$.

87. Che proprietà deve avere un polinomio, perchè sia divisibile per x (cioè per $x - 0$)?

88. L'espressione:
$(a + b + c)(bc + ca + ab) - (b + c)(c + a)(a + b)$ è divisibile per abc. (È divisibile per a, cioè per $a - 0$; ecc.).

89. Il polinomio $3x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 5x + 10$ è divisibile per $(x - 1)(x + 2)$.

90. Il polinomio $ax^2 - ab^2 + b^2x - x^3$ è divisibile per $(a - x)(x + b)$.

91. Il resto della divisione di $2x^3 - 5a^2x + 11a^2$ per $(x - 2)$ è divisibile per $(4 + a)$.

92. Il resto della divisione dell'espressione:
$x^3 - (a - 2)x^2 - (4b - c)x + b(2a + 3c)$ per $(x - a)$ è divisibile per $(a - 3b)$.

93. Se un polinomio è composto di soli termini di grado pari rispetto ad x ed è divisibile per $(x - a)$, esso è anche divisibile per $(x^2 - a^2)$.

94. L'espressione $(a^2 + ab + b^2)^3 + (a^2 - ab + b^2)^3$ è divisibile per $2(a^2 + b^2)$.

95. L'espressione $(x+1)^m + (x-1)^m$ è divisibile per x, se m è dispari.

96. L'espressione:
$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$
è divisibile per $(a+b+c)$
(Si sostituisca $(-b-c)$ in luogo di a. Ecc.).

97. L'espressione $(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$ è divisibile per $(a+b)(a+c)(b+c)$, se m è dispari.

98. Il polinomio:
$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n - x^n y^m - y^n z^m - z^n x^m$ è divisibile per il prodotto $(x-y)(x-z)(y-z)$.

99. L'espressione $n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1$ è divisibile per $(x-1)^2$.

(Dividendola per $(x-1)$, si riconosce poi che anche il quoziente è divisibile per $(x-1)$).

100. In base all'eguaglianza:
$(x-1)(x+3)(x-5) = x^3 - 3x^2 + 13x + 15$ si dica quali siano i segni dei valori, che il polinomio scritto nel secondo membro assume, quando alla lettera x si attribuiscano valori compresi tra -6 e $+4$.

CAPITOLO III

CALCOLO DELLE FRAZIONI ALGEBRICHE

101. In Algebra la divisione, più spesso che col solito segno composto di due punti, si suol indicare mediante una linea tirata tra il dividendo e il divisore, posti il primo sopra del secondo. Ogni espressione così composta si dice *frazione algebrica*: il dividendo si chiama *numeratore*, e il divisore si chiama *denominatore*. Così, ripetendo in sostanza la definizione di quoziente, possiamo dire che:

102. *Una frazione algebrica, moltiplicata per il suo denominatore, dà per risultato il numeratore.*

103. I termini di una frazione algebrica possono avere valore numerico determinato; e possono essere monomi o polinomi. (*).

Quando il numeratore d'una frazione algebrica è divisibile (nel senso del calcolo letterale) per il denominatore, la frazione si può trasformare in una espressione *intera* equivalente.

Vedremo che gli enunciati delle regole del calcolo delle frazioni algebriche sono gli stessi che per le frazioni aritmetiche.

104. Teor. *Una frazione algebrica non muta, se ambidue i termini vengono moltiplicati o divisi per una stessa quantità.*

Dim. Sappiamo [43] infatti che un quoziente non

(*) Quando uno od ambidue i termini di una frazione algebrica sono polinomi, la linea di separazione, oltre che di segno d'operazione, tien luogo di parentesi.

muta, se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi per una stessa quantità.

105. Se i due termini d'una frazione algebrica hanno un fattor numerico o un fattore letterale comune, dividendo i due termini per questo fattore (o, come si suol dire, *sopprimendo* questo fattore), si fa assumere alla frazione una forma più semplice.

Se i termini di una frazione algebrica sono monomi, i fattori comuni, che ci fossero, sono manifesti (almeno per quanto riguarda la parte letterale). Se i termini sono polinomi, è tuttavia facile scorgere i fattori comuni monomi; ma non si può dire altrettanto dei fattori comuni polinomi, che soltanto in certi casi la pratica del calcolo fa conoscere. Se poi riesca di decomporre in fattori uno solo dei termini, si proverà se qualcuno dei fattori divida l'altro termine.

Es. $$\frac{8x^5y^2 - 72x^3y^4}{4x^3y^3 + 12x^2y^4} = \frac{8x^3y^2(x^2 - 9y^2)}{4x^2y^3(x + 3y)} = \frac{2x(x - 3y)}{y}.$$

Es. $$\frac{x^3 + 7x^2 + x + 7}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1} = \frac{x^2(x+7) + (x+7)}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1}$$

$$\text{»} \quad = \frac{(x+7)(x^2+1)}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1}.$$

Abbiamo saputo decomporre in fattori il numeratore; non è altrettanto agevole decomporre il denominatore. Facilmente si riconosce che il denominatore non è divisibile per $(x + 7)$. Mediante divisione si è trovato che è divisibile per $(x^2 + 1)$. Per conseguenza egli è:

$$\frac{x^3 + 7x^2 + x + 7}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1} = \frac{x + 7}{x^2 - 3x + 1}.$$

106. Riduzione delle frazioni a denominatore comune. La riduzione delle frazioni aritmetiche a denominatore comune è fondata unicamente [28] sulla loro proprietà di non mutar di valore, quando se ne moltiplichino i termini per uno stesso numero. Poichè questa proprietà appartiene anche alle frazioni algebriche, abbiamo per esse la stessa:

107. Regola. *Quante si vogliano frazioni algebriche si riducono a denominatore comune moltiplicando i due termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.*

Ma, quando nei denominatori delle frazioni si scorgano dei fattori comuni, le frazioni si possono ridurre a un denominatore comune più semplice del prodotto dei denominatori, dappoichè si può prendere per nuovo denominatore qualsivoglia espressione che sia divisibile per tutti i denominatori. Scelto il nuovo denominatore, bisogna dividerlo per i singoli denominatori, e moltiplicar poi i numeratori per i rispettivi quozienti.

Es. Per ridurre a denominatore comune le frazioni:

$$\frac{a+b}{a^3-2a^2b+ab^2}, \quad \frac{a-b}{6ab^2}, \quad \frac{5}{4a^2b-4b^3},$$

si decompongono i denominatori in fattori. Poichè si trova:

$$a(a-b)^2, \quad 2\cdot 3ab^2, \quad 2^2b(a+b)(a-b),$$

si prenderà per nuovo denominatore il prodotto:

$$12ab^2(a+b)(a-b)^2.$$

Dividendo codesta espressione per i singoli denominatori, si ottengono i quozienti:

$$12b^2(a+b), \quad 2(a+b)(a-b)^2, \quad 3ab(a-b);$$

e queste sono le quantità per le quali si devono moltiplicare rispettivamente i numeratori. Le frazioni richieste sono adunque le seguenti:

$$\frac{12b^2(a+b)^2}{12ab^2(a+b)(a-b)^2},\ \frac{2(a+b)(a-b)^3}{12ab^2(a+b)(a-b)^2},\ \frac{15ab(a-b)}{12ab^2(a+b)(a-b)^2}$$

108. Addizione delle frazioni. Per primo caso proponiamoci di sommare le frazioni $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, che hanno denominatore comune.

Prendiamo l'eguaglianza manifesta [41]:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{\left\{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right\}m}{m}.$$

Nel secondo membro vediamo indicato di moltiplicare una somma per una quantità. Sappiamo [31] che si trova lo stesso risultato, moltiplicando le singole parti della somma per il moltiplicatore e sommando poi i prodotti. Pertanto egli è [102]:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}.$$

Codesta eguaglianza (*) esprime la seguente:

109. Regola. *Per sommare delle frazioni, che abbiano denominatore comune, si sommano i numeratori, e si sottopone al risultato, come denominatore, il denominatore comune.*

Se le frazioni da sommare hanno denominatori diversi, si riducono a denominatore comune, e poi si applica la regola precedente.

110. Sottrazione. Proponiamoci di trovar la differenza di due frazioni aventi medesimo denominatore. Siano, ad es., le frazioni $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{m}$.

(*) Del resto potevamo scrivere a dirittura quest'eguaglianza, e dire che è esatta per la proposizione del § 44.

Poichè, per trovare una differenza, bisogna [17] mutare il segno al sottraendo, e aggiungerlo poi al minuendo, e per mutare il segno ad una frazione, basta [36] mutare il segno ad uno dei termini, abbiamo:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{-b}{m}.$$

In tal modo ci siamo ricondotti all'addizione. Quindi si ha:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m};$$

donde la:

111. Regola. *Per trovare la differenza di due frazioni, che abbiano denominatore comune, dal numeratore del minuendo si sottrae il numeratore del sottraendo, ed al resto si sottopone, come denominatore, il denominatore comune.*

Se le frazioni date hanno denominatori diversi, si riducono a denominatore comune, e poi si applica la regola precedente.

112. Moltiplicazione. Siano da moltiplicare tra loro le frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Dalle uguaglianze [102]:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} \cdot d = c,$$

moltiplicando membro a membro, si ricava:

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot \frac{c}{d} \cdot d = ac,$$

donde segue [30, 3°]:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)(b \cdot d) = ac.$$

Dividendo i due membri per bd, si ottiene [41]:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Quindi la:

113. Regola. *Per moltiplicare tra loro due frazioni, si moltiplicano tra loro i numeratori, e tra loro i denominatori (e si sottopone, come denominatore, il secondo prodotto al primo).*

114. È facile riconoscere che la regola precedente vale per quante si vogliano frazioni.

Dovendo moltiplicare tra loro due o più frazioni, giova cominciare ad indicare le operazioni, ed esaminare, prima di effettuarle, se i due termini del prodotto hanno fattori comuni da sopprimere.

115. Passando alla divisione delle frazioni, proponiamoci di dividere la frazione $\frac{a}{b}$ per la frazione $\frac{c}{d}$.

Poichè la frazione, che si vuol determinare, moltiplicata per $\frac{c}{d}$, deve produrre la frazione $\frac{a}{b}$, se i termini di questa fossero divisibili rispettivamente per i termini del divisore, con le due divisioni otterremmo i termini del quoziente. Ma noi possiamo [104] conseguire che i termini del dividendo divengano divisibili rispettivamente per c e per d, moltiplicandoli ambidue per c e per d. Così otteniamo:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} : \frac{c}{d},$$

$$» \quad = \frac{ad}{bc},$$

$$» \quad = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Quindi la:

116. Regola. *Si divide una frazione per un'altra, moltiplicando il dividendo per l' inversa* (*) *del divisore.*

117. Nella regola precedente, e in generale in tutte quelle del calcolo con frazioni, è compreso il caso che tra frazioni ci siano forme intere. Infatti codeste forme si possono considerare come frazioni aventi per denominatore l'unità. Così è, ad es.,:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b} \quad \text{ed} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}.$$

118. Anche la divisione delle frazioni si rappresenta spesso scrivendole una sotto l'altra e separandole con una linea. È dunque, ad es.,:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Si notino i due casi seguenti:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \quad \text{ed} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}.$$

(*) Due frazioni aventi termini rispettivamente uguali, ma disposti in ordine contrario, sono quantità inverse [37]. Infatti il prodotto [113] delle due frazioni è uguale a $+1$.

Per dimostrare la regola della divisione, si può anche partire dalla seguente uguaglianza, che è fondata sulla definizione della divisione,:

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \frac{c}{d} = \frac{a}{b},$$

e moltiplicare i due membri per $\frac{d}{c}$. (Analogamente per la sottrazione delle frazioni).

119. Oss. Accade spesso nella pratica del calcolo letterale che si debba dividere una quantità rappresentata da una lettera per una di eguale. Ad es., quando si semplifica la frazione $\frac{am}{an}$, sono in fondo i due fattori a che si dividono per a, e che poi si surrogano coi quozienti eguali ad *uno*, i quali non si scrivono. Qui dobbiamo osservare che l' eguaglianza $a : a = 1$ è vera anche nel caso particolare di $a = 0$; ma che in questo caso c' è da dire dell' altro. Infatti, se fosse chiesto a che cosa sia eguale la frazione $\frac{0}{0}$, si dovrebbe rispondere: *a qualsivoglia quantità*, perchè qualunque quantità, moltiplicata per il divisore *zero*, dà il dividendo *zero*. Però, quando e alla divisione $0 : 0$ si sia condotti dall' attribuire, nell' espressione $a : a$, alla lettera a il valore 0, in tal caso *si ammette convenzionalmente* che sia $0 : 0 = 1$, e questo perchè, essendo il quoziente uguale all' unità per ogni altro valore di a, non si vuol far eccezione per il caso particolare $a = 0$.

Il simbolo $\frac{0}{0}$, perchè, preso isolatamente, può essere uguagliato a qualunque quantità, si dice che rappresenta una quantità *indeterminata*.

120. Quando si fanno operazioni con frazioni, tacitamente si ammette che alle lettere non si diano tali valori, per cui un divisore divenga eguale a *zero*, almeno senza che tale divenga anche il dividendo, perchè, quando avesse luogo questo caso, l'espressione sarebbe assurda, cioè non rappresenterebbe nessuna quantità. E infatti, ad es., nessuna quantità può essere uguagliata all' espressione $\frac{3}{0}$, perchè qualunque quantità, moltiplicata per *zero*, dà per prodotto *zero*.

Esercizi.

Si semplifichino le frazioni seguenti:

101. $\dfrac{12a^4b^2cd^3}{18a^2b^2c^3e}$, $\dfrac{6x-6}{7x-7}$, $\dfrac{x-x^2}{4x-4}$, $\dfrac{a-b}{5b-5a}$.

102. $\dfrac{5a^2+10ab}{15ab}$, $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$, $\dfrac{7a^3b-7ab^3}{7a^3c-7ac^3}$.

103. $\dfrac{a^4c^2-b^4c^2}{3a^2c+3b^2c}$, $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$, $\dfrac{cx+x^2}{a^3c+a^3x}$.

104. $\dfrac{3abc}{a^2bc+ab^2c+abc^2}$; $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$, $\dfrac{x^4-a^4}{x^5-a^2x^3}$.

105. $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$, $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$, $\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$.

106. $\dfrac{mx+m-x-1}{m^2-1}$, $\dfrac{an-2a+3n-6}{an-2a-3n+6}$.

107. $\dfrac{ac+by+ay+bc}{af+2bx+2ax+bf}$, $\dfrac{a^2+ax-bx-ab}{bx+ab+a^2+ax}$.

108. $\dfrac{a^2-c^2+b^2+2ab}{2ac-b^2+c^2+a^2}$, $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2-b^4}{a^2b+a^2c-abc-ab^2}$.

109. $\dfrac{a^3-b^3}{a^3-b^3-2ab(a-b)}$, $\dfrac{(x+a)^2-(b-c)^2}{(x+b)^2-(a-c)^2}$.

110. $\dfrac{a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

111. $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$.

Si eseguiscano le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

112. $\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{b-c}{bc}$.

113. $a-2c+\dfrac{a-2a^2-2c}{2a-1}$, $m-n-\dfrac{2(mn-n^2)}{m+n}$.

114. $\dfrac{1+x}{1+x+x^2}+\dfrac{1-x}{1-x+x^2}$.

115. $\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}, \quad \dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{4ab}{a^2-b^2}.$

116. $\dfrac{3a-4b}{7} - \dfrac{2a-b-c}{3} + \dfrac{15a-4c}{12} - \dfrac{a-4b}{21}.$

117. $\dfrac{3+4x}{3-x} - \dfrac{3x-2}{3+x} - \dfrac{10x^2-5x+15}{9-x^2}.$

118. $\dfrac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2} + \dfrac{a^3+a^2x}{a^2+2ax+x^2} - \dfrac{a^2-2ax}{a-x}.$

119. $\dfrac{a}{a^2-ab+b^2} + \dfrac{b^2}{a^3+b^3} + \dfrac{1}{a+b}.$

120. $\dfrac{x^{2n}}{x^n-1} - \dfrac{x^{2n}}{x^n+1} - \dfrac{1}{x^n-1} + \dfrac{1}{x^n+1}.$

121. $\dfrac{x-1}{2x+2} - \dfrac{3x-4}{3x+3} + \dfrac{2x-1}{6x-6} - \dfrac{4-x}{6x+6}.$

122. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{y}{y-x} + \dfrac{y}{x+y}.$

123. $\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{x^2}{1-2x+x^2} - \dfrac{x^3-x^2}{(1-x)^3}.$

124. $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{ab}{a^2-b^2} - \dfrac{a^2}{a^2+b^2}.$

125. $\dfrac{a}{1+a} - \dfrac{a}{a-1} - \dfrac{2a^2}{1-a^2} - \dfrac{a(a-1)}{1+2a+a^2}.$

126. $\dfrac{a^2-3ab+b^2}{a^2-b^2} - \dfrac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} + \dfrac{3a-b}{a-b} -$

$$- \frac{2ab^2}{(a^2-b^2)(a-b)}.$$

127. $\dfrac{1}{2a^2+4a+2} + \dfrac{1}{2a^2-4a+2} - \dfrac{1}{a^2-1}.$

128. $\dfrac{a+b}{a^3-b^3} - \dfrac{1}{a^2-b^2}, \quad \dfrac{ax}{(a-x)^2} \cdot \dfrac{a^2-x^2}{ab}.$

129. $\dfrac{6ab}{3c-d}\left(\dfrac{c+d}{4} - \dfrac{d}{3}\right).$

130. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2} \cdot \dfrac{a^2+c^2-2ac}{b^2+2ab+a^2}.$

131. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)(x^2 - x + 1)$.

132. $\frac{5x + 3y}{12x - 3y} \cdot \frac{16x - 4y}{15x + 9y}$.

133. $\frac{a}{bx}\left(b + \frac{bx}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{a+x}\right)$.

134. $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{b-a}$.

135. $\frac{1 - x^2}{1 + 2y + y^2} \cdot \frac{1 - y^2}{y^2 - 2xy + x^2} \cdot \left(\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right)$.

136. $\frac{x^2 + xy}{x - y} : \frac{x^4 - y^4}{(x-y)^2}$, $\left(1 - \frac{a^3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^3}\right)$.

137. $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2 - b^2}$.

138. $\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$.

139. $\left(a + \frac{b-a}{1+ab}\right) : \left(1 - \frac{ab - a^2}{1+ab}\right)$.

140. $\frac{x^2 + (a-b)x - ab}{x^2 + (c-d)x - cd} : \frac{x^2 + (a+c)x + ac}{x^2 - (b+d)x + bd}$.

141. $\frac{a^3b^2 + 3a^2bc(a+b)^2}{3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)(a+b)b^2} : \frac{ab}{a+b}$.

142. $\frac{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}}$, $\frac{1}{a + \frac{1}{1 + \frac{a+1}{3-a}}}$.

143. $\frac{a + \frac{1}{b}}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} - \frac{1}{b(abc + a + c)}$.

144. Si accerti l'esattezza della seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p^2q^2}.$$

145. Si riconosca che le due espressioni:

$$abx^2 + \frac{3a^2x}{c} \quad \text{e} \quad \frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$$

assumono valori eguali, ove si faccia $x = \dfrac{2a-b}{c}$.

146. Si accerti che, se è:

$$x = \frac{2b^2 - a^2 + d^2}{3a} \quad \text{ed} \quad y = \frac{2a^2 - b^2 + d^2}{3b},$$

le quantità x ed y sono legate dalla relazione:

$$\frac{a}{b+y} = \frac{b}{a+x}.$$

147. Si raccolga il fattore $-2a^3b$ dall'espressione:

$$6a^4b - 2a^3b - 7ab^3 - ab + 5.$$

148. Si raccolga il fattore $(a^2 - b^2)$ dall'espressione:

$$2a^2 - 2b^2 - a^2 + 2ab - b^2 - a + 3b.$$

149. Da quante si vogliano frazioni eguali si ricava un'altra frazione uguale alle date, dividendo la somma dei numeratori per la somma dei denominatori.

150. Date alquante frazioni a termini positivi, la frazione, che si ottiene dividendo la somma dei numeratori per la somma dei denominatori, è compresa tra la più grande e la più piccola delle frazioni date.

Risposte.

101. $\dfrac{2a^2d^3}{3c^2e}$, $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{-x}{4}$, $-\dfrac{1}{5}$.

102. $\dfrac{a+2b}{3b}$, $\dfrac{a+b}{a-b}$, $\dfrac{a^2b-b^3}{a^2c-c^3}$.

103. $\dfrac{a^2c-b^2c}{3}$, $\dfrac{a+b}{a}$, $\dfrac{x}{a^3}$.

104. $\dfrac{3}{a+b+c}$, $\dfrac{a-b}{a+b}$, $\dfrac{x^2+a^2}{x^3}$.

105. $\dfrac{a-1}{a+1}$, $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$, $\dfrac{(a^2+b^2)(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

106. $\frac{x+1}{m+1}$, $\frac{a+3}{a-1}$. **107.** $\frac{c+y}{f+2x}$, $\frac{a-b}{a+b}$.

108. $\frac{a+b-c}{a-b+c}$, $\frac{(a+b)(b-c)}{a}$.

109. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$, $\frac{x+a-b+c}{x-a+b+c}$.

110. $\frac{a-b+c}{a+b-c}$. **111.** $\frac{1}{1-x^2}$. **112.** 0.

113. $\frac{4ac}{1-2a}$, $\frac{(m-n)^2}{m+n}$. **114.** $\frac{2}{1+x^2+x^4}$.

115. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, $\frac{a-b}{a+b}$. **116.** $\frac{81a-4b}{84}$.

117. $\frac{3x}{3+x}$. **118.** $\frac{ax}{a-x}$. **119.** $\frac{2(a^2+b^2)}{a^3+b^3}$. **120.** 2.

121. 0. **122.** 1. **123.** $\frac{x}{1-x}$.

124. $\frac{2a^2b^2}{a^4-b^4}$. **125.** $\frac{3a+a^2}{(1+a)^2}$. **126.** $\frac{a-b}{a+b}$.

127. $\frac{2}{(a-1)^2}$. **128.** $\frac{ab}{a^4-ab^3+a^3b-b^4}$, $\frac{ax+x^2}{ab-bx}$.

129. $\frac{ab}{2}$. **130.** $\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}$. **131.** $x^2+1+\frac{1}{x^2}$.

132. $\frac{4}{9}$. **133.** 1. **134.** $\frac{a}{b}$. **135.** $\frac{1+x}{(1+y)(x-y)}$.

136. $\frac{x}{x^2+y^2}$, x^2+ax+a^2. **137.** $\frac{2}{b}$.

138. $\frac{x+y}{y}$. **139.** b. **140.** $\frac{(x-b)^2}{(x+c)^2}$.

141. 1. **142.** 1, $\frac{4}{3(a+1)}$. **143.** 1.