# CAPITOLO XII

## LOGARITMI

---

### Definizione di logaritmo.

**388.** Proponiamoci di risolvere l'equazione *esponenziale*:

$$a^x = b,$$

nell' ipotesi, che $a$ e $b$ siano quantità positive, e che la base $a$ sia diversa da *uno*.

Proveremo dapprima che l'equazione ha sempre una soluzione ed una soltanto.

La seconda parte dell'asserzione si giustifica immediatamente rammentando di aver provato [307, 7°] che, attribuendo ad una stessa base, diversa da *uno*, esponenti diversi, si ottengono risultati disuguali.

Per la dimostrazione della prima parte distingueremo quattro casi.

**389.** 1°. Sia $a > 1$ e $b > 1$.

Anzitutto, attribuito ad $x$ un valore razionale qualunque, si può sempre decidere se la potenza $a^x$ è maggiore, uguale o minore di $b$.

Infatti, se l'esponente è la frazione $\frac{m}{n}$ a termini interi e positivi (*), basta confrontare le potenze $a^m$ e $b^n$, perchè, secondo che si trova essere:

$$a^m \quad <, \; =, \; \text{ oppure } > b^n,$$

si conchiude essere corrispondentemente:

$$a^{\frac{m}{n}} <, \; =, \; \text{ oppure } > \; b.$$

(*) Si sa [307, 6°] che con esponenti negativi si otterrebbero risultati minori dell'unità, e quindi anche minori di $b$.

Ed ora imaginiamo di spartire tutti i numeri razionali positivi in due classi $H$ e $K$, mettendo nella prima tutti i numeri $h$, per i quali è [237]:

$$a^h > b,$$

e nella seconda tutti i numeri $k$, per i quali è (*) [303]:

$$a^k < b.$$

Le due classi $H$ e $K$ così formate sono contigue.

Infatti, essendo:

$$a^h > a^k,$$

egli è intanto [307, 7°]:

$$h > k,$$

ossia ogni numero della classe $H$ è maggiore di ogni numero della classe $K$.

Ci resta a provare che si possono trovare due numeri $h$ e $k$, la cui differenza sia minore di un numero $\varepsilon$ positivo, dato, per quanto piccolo.

A tal fine, presa una frazione $\frac{1}{n}$, che sia minore di $\varepsilon$, consideriamo le frazioni:

$$\frac{0}{n}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \ldots .$$

e supponiamo di attribuirle successivamente come esponenti alla quantità $a$. Poichè si perviene a risultati che superano qualsivoglia numero dato [237, (**)], si troveranno in ogni caso due frazioni consecutive, siano le due $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, per le quali sia:

$$a^{\frac{m}{n}} < b < a^{\frac{m+1}{n}}.$$

(*) Se mai ci fosse un numero razionale $r$, per il quale fosse $a^r = b$, l'equazione avrebbe la soluzione $r$, e la questione sarebbe esaurita.

(**) Della precedente serie di frazioni fanno parte tutti i numeri interi.

Codeste due frazioni appartengono, la prima alla classe $K$, la seconda alla classe $H$, ed hanno tra loro la differenza $\frac{1}{n}$, che è minore di $\varepsilon$.

Le due classi $H$ ed $K$ sono dunque contigue, epperò esse determinano un numero, che indicheremo con $\gamma$.

Ora, essendo per definizione [305]:

$$a^{\gamma} = (a^{H}, a^{K}),$$

e per ipotesi: $\quad a^{h} > b > a^{k},$

egli è [136]: $\quad a^{\gamma} = b,$

epperò [308]: $\quad x = \gamma.$

Così, per il caso che sia $a > 1$ e $b > 1$, resta provato che l'equazione $a^{x} = b$, ha sempre una soluzione ed una soltanto.

**390.** 2°. Sia $a > 1$ e $b < 1$.

Se l'equazione da risolvere fosse:

$$a^{y} = \frac{1}{b},$$

potremmo dire, per il caso precedente, che esiste un numero positivo $\gamma$, per il quale è

$$a^{\gamma} = \frac{1}{b}.$$

Ma da questa eguaglianza si ricava:

$$\frac{1}{a^{\gamma}} = b,$$

ossia $\quad a^{-\gamma} = b.$

Anche in questo caso l'equazione data ha dunque una soluzione, e questa negativa.

**391.** 3°. Sia ora $a < 1$ e $b > 1$.

L' equazione:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^y = b,$$

ha [389] una soluzione $\gamma$. Epperò, essendo [307, 2°]:

$$\frac{1}{a^\gamma} = b,$$

ossia

$$a^{-\gamma} = b,$$

conchiudiamo che anche in questo caso l' equazione $a^x = b$ ha una soluzione, e questa negativa.

**392.** Sia da ultimo $a < 1$ e $b < 1$.

L' equazione:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{b}$$

ha [389] una soluzione positiva $\gamma$. Ma, essendo:

$$\frac{1}{a^\gamma} = \frac{1}{b},$$

egli è anche:

$$a^\gamma = b.$$

**393.** Abbiamo dimostrato che, date due quantità positive $a$ e $b$ qualsivogliano, purchè $a$ sia diversa da *uno*, esiste sempre un valore per $x$, ed uno solo, razionale od irrazionale, positivo o negativo, per il quale sussiste la relazione:

$$a^x = b.$$

Così fatto numero $x$ si dice *il logaritmo* del *numero* $b$ rispetto alla base $a$, e si rappresenta col simbolo $\lg_a b$. Pertanto la relazione tra le quantità $a$, $x$ e $b$, che è significata dalla precedente uguaglianza, si può indicare d' ora innanzi anche scrivendo:

$$x = \lg_a b;$$

e reciprocamente.

**394. Def.** *Si dice logaritmo d'un numero (positivo) rispetto ad una data base, positiva e diversa da* uno, *l'esponente della potenza a cui bisogna elevare la base per ottenere il numero dato.*

## Estrazione di logaritmo.

**395.** L'operazione, mediante la quale si trova la soluzione dell'equazione:

$$a^x = b,$$

cioè mediante la quale si trova il logaritmo d'un numero dato rispetto a base data, si chiama *estrazione di logaritmo.* Essa non vale, generalmente, che a trovare un valore approssimato, e ciò anche nel caso in cui il logaritmo sia razionale; però l'approssimazione può essere prestabilita qualunque. Le nostre precedenti considerazioni ci hanno fatto vedere che in ogni caso la difficoltà si può ridurre a questa di trovare il logaritmo d'un numero maggiore di *uno* rispetto ad una base anch'essa maggiore di *uno.*

**396.** Sia dunque da risolvere l'equazione:

$$a^x = b,$$

nella quale sia $a > 1$ e $b > 1$; e supponiamo che si voglia un valore approssimato ad $x$ a meno di $\frac{1}{n}$.

Fatta la *n.esima* potenza di $b$, si cerchi poi la maggior potenza di $a$, ad esponente intero, che è contenuta in $b^n$. Supposto che sia $a^m$ questa maggiore potenza, essendo:

$$a^m \gtreqless b^n < a^{m+1},$$

egli è anche:

$$a^{\frac{m}{n}} \gtreqless b < a^{\frac{m+1}{n}},$$

donde si conchiude che la frazione $\frac{m}{n}$ è il richiesto logaritmo di $b$, approssimato a meno di $\frac{1}{n}$ per difetto.

## Tavola dei logaritmi.

**397.** Alcuni teoremi, che dimostreremo tra poco, ci faranno vedere come dai logaritmi di più numeri (presi rispetto a una stessa base qualunque) si possa ricavare in maniera semplicissima il logaritmo (rispetto alla medesima base) del risultato di calcoli, per quanto complicati, da effettuarsi coi numeri detti. Ma perchè l'estrazione di logaritmo e l'inalzamento a potenza in senso lato sono, generalmente parlando, operazioni laboriosissime, le proprietà dei logaritmi, alle quali abbiamo fatto allusione, non potrebbero esser messe a profitto, se non quando si potesse avere agevolmente il logaritmo per qualsivoglia numero dato, e si potesse anche trovare facilmente il numero che corrisponde a dato logaritmo qualunque. Perciò si sono costruite le tavole logaritmiche.

Una tavola di logaritmi consta essenzialmente di una doppia colonna; da una banda in ordine crescente sono segnati i numeri; dall'altra, e in corrispondenza, ne sono segnati i logaritmi, tutti rispetto a una medesima base. Codesta doppia colonna costituisce *un sistema di logaritmi*. Mutando la base, si ha un altro sistema.

Ma perchè i calcoli numerici si riducono in fondo ad operazioni con numeri interi, nella colonna dei numeri di una tavola di logaritmi sono scritti solamente i numeri interi successivi; naturalmente fino ad un certo numero più o meno rimoto dall'unità.

Noi abbiamo indicato un processo [396] per costruire una tavola di logaritmi; si danno altri metodi per cui riesce meno faticosa la detta costruzione; ma di questi non è qui il luogo di fare alcun cenno.

Ogni sistema di logaritmi gode di proprietà molto importanti, che ora dimostreremo. Lascieremo indeterminata la base; per semplicità ometteremo di scriverla nei simboli con cui si rappresentano i logaritmi dei numeri.

## Proprietà d' un sistema di logaritmi.

**398. Teor.** *Il logaritmo d' un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.*

**Dim.** Sia $(X\,Y\,Z\ldots)$ un prodotto di fattori positivi qualunque, e siano $x$, $y$, $z\ldots$ rispettivamente i logaritmi di $X$, $Y$, $Z,\ldots$: il che equivale [394] a supporre (ammesso che sia $a$ la base dei logaritmi) che sia:

$$\begin{aligned} a^x &= X, \\ a^y &= Y, \\ a^z &= Z, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Moltiplicando queste uguaglianze tra loro, si ottiene [307, 3°]:

$$a^{x+y+z+\cdots} = \lg\,(X\,Y\,Z\,\ldots.),$$

donde risulta essere [393]:

$$x + y + z + \ldots = \lg\,(X\,Y\,Z\,\ldots.),$$

ossia:

$$\lg\,(X\,Y\,Z\ldots) = \lg X + \lg Y + \lg Z + \cdots,$$

come d. d. (*).

(*) Del resto giova avvertire che il teorema in questione in fondo non è che il terzo teorema del § 307, altrimenti enunciato.

**399. Oss.** In base al precedente teorema si può, usando di una tavola di logaritmi, trovare un prodotto mediante un' addizione. Basta cercare i logaritmi dei fattori e sommarli. La somma non è il prodotto richiesto, ma il logaritmo di questo numero. Converrà dunque riprendere la tavola. e cercare nella colonna dei logaritmi la somma ottenuta; in corrispondenza con questa, nell' altra colonna, si leggerà il prodotto.

**400. Oss.** Il teorema or ora dimostrato fa vedere che, quando si dovesse costruire una tavola di logaritmi, basterebbe calcolare direttamente [396] i logaritmi dei numeri primi, giacchè, ad es., si avrebbe poi il logaritmo di 14, sommando i logaritmi di 2 e di 7.

**401. Teor.** *Il logaritmo d' un quoziente è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore.*

**Dim.** Siano $X$ ed $Y$ i due termini di una divisione. Prendendo i logaritmi dei due membri dell' identità:

$$\frac{X}{Y} \cdot Y = X,$$

otteniamo [398]:

$$\lg \frac{X}{Y} + \lg Y = \lg X.$$

epperò:

$$\lg \frac{X}{Y} = \lg X - \lg Y, \qquad \text{c. d. d.}$$

**402. Oss.** Usando delle tavole dei logaritmi, si può dunque trovare un quoziente con una semplice sottrazione.

**403. Oss.** Poichè un numero frazionario rappresenta un quoziente, per trovare il logaritmo di una frazione, basta fare la differenza tra il logaritmo del numeratore e quello del denominatore.

**404. Teor.** *Il logaritmo d'una potenza, qualunque sia l' esponente (intero, frazionario, irrazionale, positivo o negativo), è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.*

**Dim.** Sia $X^p$ una potenza qualunque, ed $x$ il logaritmo della base. Sia cioè [394]:

$$a^x = X.$$

Eleviamo i due membri dell' eguaglianza alla potenza *p.esima*; qualunque sia $p$, abbiamo [307, 4°]:

$$a^{px} = X^p,$$

ossia:

$$px = \lg (X^p),$$

epperò anche:

$$\lg (X^p) = p \lg X, \qquad \text{c. d. d.}$$

**405. Oss.** In base al teorema or ora dimostrato, dovendo calcolare una potenza, basta cercare nella tavola il logaritmo della base, moltiplicarlo per l' esponente, e poi cercare il numero che ha per logaritmo il prodotto ottenuto.

**406. Cor.** *Il logaritmo d' un radicale si ottiene dividendo per l' indice il logaritmo del radicando.*

**Dim.** Sappiamo [279] infatti essere:

$$\sqrt[n]{X} = X^{\frac{1}{n}},$$

epperò, per l' ultimo teorema,:

$$\lg \sqrt[n]{X} = \frac{1}{n} \lg X.$$

**407. Oss.** Dunque, usando delle tavole dei logaritmi, in luogo di una estrazione di radice basta fare una semplice divisione. Si cercherà il logaritmo del radicando, e lo si dividerà per l'indice. Poi bisognerà riprendere la tavola, e cercare il numero che ha per logaritmo il quoziente ottenuto.

**408. Teor.** *In qualunque sistema di logaritmi l'unità ha per logaritmo lo zero, e la base ha per logaritmo l'unità.*

**Dim.** Infatti, qualunque sia la base $a$, egli è:

$$a^0 = 1 \qquad \text{ed} \qquad a^1 = a,$$

ossia, in altri simboli, :

$$\lg 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lg_a a = 1.$$

## Logaritmi volgari.

**409.** Poichè il nostro sistema di numerazione è fondato sul numero 10, il sistema di logaritmi, che ha 10 per base, gode di particolari proprietà, da meritare di essere prescelto ad ogni altro nell'applicazione ai calcoli numerici. I logaritmi a base 10 si dicono *volgari* o *decimali*; di questi esclusivamente parleremo nel seguito.

Se nelle tavole logaritmiche fosse segnato ogni numero, e accanto ad esso il corrispondente logaritmo, null'altro avremmo da aggiungere a quanto abbiamo dimostrato sui logaritmi, prima di farne applicazione in qualche esercizio. Tavole così fatte non si possono avere, epperciò sono necessarie altre considerazioni.

**410.** Elevando la base 10 a potenza con esponenti interi, positivi o negativi, si ottengono quei numeri, che sono scritti con una unità e con *zeri*. Ad es.. si ha:

$$10^3 = 1000, \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001.$$

Così, perchè [307, 7°] numeri differenti tra loro hanno differenti logaritmi, si può dire che il logaritmo di ogni numero, che non sia un' unità decimale, non può essere un numero intero. E qui dimostreremo il seguente:

**411. Teor.** *Il logaritmo volgare di qualunque numero intero, che non sia una potenza di* 10, *è irrazionale.*

**Dim.** Consideriamo l' eguaglianza:

$$10^x = b,$$

e supponiamo che $b$ sia un numero intero, il quale abbia il logaritmo $x$ razionale.

Intanto, poichè la base è maggiore di *uno*, e la potenza $b$ è pur essa maggiore di *uno*, l' esponente $x$ è [301] positivo. E poichè esso inoltre dev' essere razionale, lo possiamo rappresentare con la frazione $\frac{m}{n}$, a termini interi e positivi. Così l' eguaglianza da esaminare è la seguente:

$$10^{\frac{m}{n}} = b.$$

Elevando i due membri a potenza con l' esponente $n$, otteniamo [299, 4°]:

$$10^m = b^n,$$

ossia:
$$(2 \cdot 5)^m = b^n$$

ed anche:
$$2^m \cdot 5^m = b^n.$$

Osservando il primo membro si riconosce che il munero intero $b^n$ è divisibile per 2 e per 5, e per nessun altro numero primo (altrimenti $b^n$ si potrebbe decomporre in fattori primi in un modo diverso da quello indicato dal primo membro, e ciò contro il noto teorema d' Aritmetica: un numero non si può decomporre in fattori primi che in una sola maniera). E perchè ogni numero primo, che divide una potenza d'un intero, divide la base, e reciprocamente, anche il numero $b$ è divisibile per 2 e per 5, e per nessun altro numero primo. Si può porre pertanto:

$$b = 2^p \cdot 5^q,$$

dove $p$ e $q$ rappresentano numeri interi. Sostituendo, si ottiene:

$$2^m \cdot 5^m = (2^p \cdot 5^q)^n,$$

ossia [216, 220]:

$$2^m \cdot 5^m = 2^{np} \cdot 5^{nq}.$$

Da quest' eguaglianza, per il teorema d' Aritmetica testè rammentato, si conchiude essere $m = np$, ossia che $m$ è divisibile per $n$. Così, partendo dall' eguaglianza:

$$10^x = b,$$

ragionando nella supposizione che $x$ fosse razionale e $b$ un numero intero maggiore di *uno*, siamo giunti a questa conchiusione che l' esponente $x$ dev' essere un numero intero, epperò $b$ una potenza di 10.

Per conseguenza ogni numero intero, che non sia una potenza di 10, ha il logaritmo irrazionale, c. d. d.

**412.** Abbiamo veduto che, eccettuati i numeri 10, 100, 1000, ecc., ogni numero intero ha il logaritmo (volgare) irrazionale. Perciò la tavola dei logaritmi volgari porge soltanto valori approssimati dei logaritmi, e questi espressi in decimali, con sufficiente approssimazione. La nostra tavoletta, che è in fine del libro, dà i logaritmi dei numeri interi da 100 a 1000 con quattro cifre decimali, quindi con l'approssimazione di *mezzo diecimillesimo* (per eccesso, o per difetto).

La parte intera di un logaritmo si dice la *caratteristica* del logaritmo; la parte decimale si dice *mantissa* (*aggiunta*). Quest' ultima soltanto è registrata nelle tavole, perchè la caratteristica si può trovare con tutta facilità, come risulta dal seguente:

**413. Teor.** *La caratteristica del logaritmo di un numero decimale, maggiore dell' unità, si ottiene sottraendo* uno *dal numero delle cifre della parte intera.*

**Dim.** Sia, ad es., il numero 304,8. Abbiamo:

$$100 < 304{,}8 < 1000,$$

epperò:

$$\lg 100 < \lg 304{,}8 < \lg 1000,$$

e per conseguenza anche:

$$2 < \lg 304{,}8 < 3.$$

Così si è provato che la caratteristica del logaritmo di ogni numero, la cui parte intera sia di 3 cifre, è 2.

E in generale, se $N$ è numero decimale, maggiore di *uno*, la cui parte intera sia di $n$ cifre, essendo in tal caso:

$$10^{n-1} \leqq N < 10^n,$$

è anche:

$$\lg (10^{n-1}) \leqq \lg N < \lg (10^n)$$

ossia $$n - 1 \leqq \lg N < n.$$

Questa limitazione mostra che, se $\lg N$ viene espresso in decimali, la parte intera (la caratteristica) è appunto ($n - 1$), eguale dunque al numero delle cifre della parte intera di $N$, astrazione fatta da una cifra.

## Uso delle tavole logaritmiche.

**414.** La piccola tavola di logaritmi, che si trova in fine del libro, porge direttamente la mantissa del logaritmo d'ogni numero intero di tre cifre. Nella tavola le mantisse sono disposte in righe e in colonne. Cercando nella prima colonna a sinistra il numero rappresentato dalle due prime cifre del numero dato, si conosce la riga in cui si trova la mantissa del suo logaritmo; cercando nella prima riga (o nell'ultima) la cifra delle unità del numero stesso, si conosce in quale colonna stia la mantissa; il posto di codesta rimane così pienamente determinato. In questo modo, ad es., si trova che la mantissa per 637 è 8041. Poichè il numero è di tre cifre, la caratteristica [413] è 2; abbiamo dunque:

$$\lg 637 = 2{,}8041.$$

Similmente, ad es., si trova:

$$\lg 500 = 2{,}6990.$$

**415.** Ora dobbiamo mostrare come dalla tavoletta si possano ricavare, con sufficiente approssimazione, le mantisse di numeri compresi ancora tra 100 e 1000, ma aventi una o due cifre decimali. Dobbiamo per ciò considerare la relazione tra l'aumento del numero e il corrispondente aumento del logaritmo.

**416.** Preso un numero $m$ positivo qualunque, diamo ad esso un aumento $a$ positivo qualsivoglia, e torniamo poi ad aggiungere di nuovo $a$ al risultato. Dei tre numeri:

$$m, \qquad m + a, \qquad m + 2a,$$

consideriamo i logaritmi:

$$\lg m, \qquad \lg (m + a), \qquad \lg (m + 2a),$$

e poi le differenze:

$$\lg (m + a) - \lg m, \quad \lg (m + 2a) - \lg (m + a),$$

le quali equivalgono [401] rispettivamente ai logaritmi:

$$\lg \frac{m + a}{m} \quad \text{e} \quad \lg \frac{m + 2a}{m + a}.$$

Riducendo i due numeri a denominatore comune, otteniamo:

$$\lg \frac{m^2 + 2am + a^2}{m(m + a)} \quad \text{e} \quad \lg \frac{m^2 + 2am}{m(m + a)}.$$

Così è reso manifesto che il primo di codesti due logaritmi è maggiore del secondo; per conseguenza è anche:

$$\lg (m + a) - \lg m > \lg (m + 2a) - \lg (m + a).$$

Codesta disuguaglianza dice che:

*Ad aumenti eguali successivi attribuiti al numero corrispondono aumenti sempre minori nel logaritmo.*

**417.** Supponendo che nelle espressioni precedenti $m$ sia un numero intero e che sia $a = 1$, i tre numeri, che abbiamo considerato, diventano tre numeri interi consecutivi, e le differenze tra i loro logaritmi diventano due *differenze tavolari* consecutive (la differenza tra i logaritmi di due interi consecutivi si dice appunto *differenza tavolare*). Così possiamo dire che:

*La serie delle differenze tavolari è decrescente.*

Nella nostra tavola la differenza tavolare è notata in carattere minore nell'intervallo tra due logaritmi consecutivi. Da questo che i logaritmi sono espressi per approssimazione, con sole quattro decimali, accade che una differenza tavolare sia eguale e talvolta perfino maggiore della precedente, e ciò in *apparente* contradizione con quanto abbiamo pur ora dimostrato.

**418.** Per noi è anche più importante considerare la serie delle differenze tra le differenze tavolari. Proveremo che codesta serie è *indefinitamente decrescente.*

Consideriamo perciò i tre numeri interi consecutivi:

$$m - 1, \qquad m, \qquad m + 1,$$

i loro logaritmi:

$$\lg (m - 1), \quad \lg m, \quad \lg (m + 1),$$

e le due differenze tavolari consecutive:

$$\lg m - \lg (m - 1), \quad \lg (m + 1) - \lg m,$$

equivalenti rispettivamente [ 401 ] a:

$$\lg \frac{m}{m - 1}, \qquad \lg \frac{m + 1}{m}.$$

La differenza tra codesti due logaritmi, ossia [417, 401]:

$$\lg \frac{m^2}{m^2 - 1} = \lg \frac{(m^2 - 1) + 1}{m^2 - 1} = \lg \left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right),$$

è l'espressione generale della differenza tra due differenze tavolari consecutive. Osservando l'ultima espressione, poichè al crescere di $m$ diminuisce il numero, e a minor numero corrisponde minor logaritmo, troviamo dimostrato che la serie delle differenze tra le differenze tavolari è *decrescente.* Ci resta da dimostrare che essa è *indefinitamente* decrescente, cioè che, data una quantità $\varepsilon$, per quanto piccola, i termini della serie, da un certo in poi, sono tutti minori di $\varepsilon$.

Intanto è manifesto che, prendendo $m$ grande abbastanza, si può sodisfare la disuguaglianza [301]:

$$1 + \frac{1}{m^2 - 1} < 10^{\varepsilon}$$

e quindi anche la seguente:

$$\lg\left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right) < \varepsilon.$$

Così ora, supponendo che $\varepsilon$ rappresenti l'unità decimale dell'ordine dell'ultima cifra di qualunque mantissa di una tavola di logaritmi, possiamo dire:

*In qualunque tavola di logaritmi da un certo punto in poi la differenza tra due differenze tavolari consecutive è minore d' una unità decimale dell' ordine dell' ultima cifra di qualunque mantissa, e per conseguenza da quel punto della tavola in poi due o più differenze tavolari consecutive appariranno (nella parte segnata nella tavola) eguali tra loro.*

Possiamo [417] poi aggiungere che se, nella regione della tavola dove due differenze tavolari consecutive sono eguali, si imagina nell' intervallo tra due numeri consecutivi inseriti dei numeri così che la differenza tra ciascuno e l'antecedente sia costante, uguale ad es. ad 0, 1, le differenze tra i corrispondenti logaritmi saranno eguali a più forte ragione. Quindi l' importante conchiusione:

**420.** *Nella regione di una tavola di logaritmi, dove due differenze tavolari consecutive sono eguali tra loro, ad aumenti eguali nel numero, minori dell' unità, corrispondono aumenti eguali nel logaritmo, epperò nell' intervallo* *tra due numeri consecutivi l' aumento nel numero e l' aumento nel logaritmo sono proporzionali tra loro.* (*).

**421.** Ed ora imaginiamo, ad es., che sia chiesto il logaritmo di 373,4.

La tavola dà intanto il logaritmo della parte intera. Si trova:

$$\lg 373 = 2{,}5717.$$

Ora si tratta di vedere di quanto si deve aumentare questo logaritmo per dedurne quello di 373,4.

Poichè la differenza tavolare prossima successiva al logaritmo trovato è 12, possiamo dire che, aggiungendo alla mantissa 5717 la differenza tavolare 12, si passa alla mantissa corrispondente a 374, si produce adunque nel numero un aumento di 1. Volendo, conoscere quanto si deve aggiungere alla mantissa, perchè nel numero l' aumento sia 0,4, si pone [420] la proporzione:

$$12 : 1 = x : 0{,}4, \qquad \text{d'onde}$$

$$x = 12 \cdot 0{,}4 = \frac{12 \cdot 4}{10} = 4{,}8.$$

Ai 5717 *diecimillesimi* bisogna dunque aggiungere 4 *diecimillesimi* ed 8 *decimi di diecimillesimo.* Così otteniamo:

$$\lg 373{,}4 = 2{,}57218.$$

Le mantisse si devono tenere con quattro decimali, perchè la quinta cifra farebbe credere ad una precisione nel logaritmo maggiore della reale. Soltanto, quando la cifra che si trascura supera 5, si

(*) Ma non si dimentichi che la proporzionalità ha luogo entro i limiti dell' approssimazione con la quale sono dati i logaritmi.

aumenta di 1 la cifra prossima a sinistra. Così infine abbiamo:

$$\lg 373{,}4 = 2{,}5722.$$

Se fosse stato chiesto il logaritmo di 373,47, la proporzione da istituire, affine di calcolare la correzione da fare nel logaritmo della parte intera, sarebbe stata:

$$12 : 1 = x : 0{,}47; \qquad \text{quindi}$$

$$x = 12 \cdot 0{,}47 = \frac{12 \cdot 47}{100} = 5{,}64.$$

Si sarebbe aggiunto 6, e trovato:

$$\lg 373{,}47 = 2{,}5723.$$

**422.** Passiamo a vedere come si trovi il logaritmo di un numero compreso tra 1 e 100 o maggiore di 1000. Dobbiamo premettere la dimostrazione del seguente:

**Teor.** *Se due numeri decimali, maggiori di* uno, *differiscono tra loro unicamente per la posizione della virgola, i loro logaritmi hanno eguale mantissa.*

**Dim.** Siano, ad es., i due numeri 324,183 e 32418,3 i quali differiscono tra loro unicamente per causa della posizione della virgola. Dico che i logaritmi di questi due numeri hanno medesima mantissa.

Infatti, perchè è:

$$32418{,}3 = 324{,}183 \cdot 100,$$

ed è $\lg 100 = 2$, abbiamo [398]:

$$\lg 32418{,}3 = \lg 324{,}183 + 2.$$

Ora, quando al logaritmo di 324,183, posto sotto forma di numero decimale, si aggiungono 2 unità, cresce la parte intera, ma resta immutata la parte decimale.

E in generale, se $M$ ed $N$ siano due numeri decimali maggiori di *uno*, ed $M$ si ottenga dal secondo numero trasportando in questo la virgola di $k$ posti verso destra, essendo allora:

$$M = N \cdot 10^k$$

e

$$\lg(10^k) = k,$$

abbiamo [398]:

$$\lg M = \lg N + k.$$

Ma quando al logaritmo di $N$, posto sotto forma di numero decimale, si aggiunge l'intero $k$, la mantissa rimane inalterata. I logaritmi dei due numeri $M$ ed $N$ hanno adunque uguali mantisse, c. d. d.

**423.** Ed ora proponiamoci, ad es., di trovare il logaritmo del numero 3,7.

Trasportando la virgola di due posti a destra, otteniamo il numero 370, di cui sappiamo trovare il logaritmo. La tavola ci dà:

$$\lg 370 = 2{,}5682.$$

Ls mantissa di questo logaritmo è quella stessa del logaritmo del numero 3,7. È dunque [413]:

$$\lg 3{,}7 = 0{,}5682.$$

Consideriamo ora un numero maggiore di 1000; cerchiamo, ad es., il logaritmo di 3456,4. La caratteristica è 3, perchè 4 sono le cifre della parte intera; vediamo della mantissa. A tale intento si sposti nel numero dato la virgola, così da ottenere un numero compreso tra 100 e 1000, perchè sapremo trovarne il logaritmo. Si ha:

$$\lg 345{,}64 = 2{,}5386.$$

Ma la mantissa di questo logaritmo e quella del logaritmo del numero dato sono eguali [422]; egli è adunque [413]:

$$\lg 3456{,}4 = 3{,}5386.$$

**424.** Ora ci resta da vedere come si possano trovare i logaritmi dei numeri minori di *uno*. Sappiamo già che devono essere negativi, e che, quando si tratti di una frazione ordinaria, basta [402] fare la differenza algebrica tra il logaritmo del numeratore e quello del denominatore.

Più particolarmente considereremo il caso in cui si tratti del logaritmo d'una frazione decimale pura. Ad es., proponiamoci di trovare il logaritmo di 0,008 75.

Riguardando 0,00875 come quoziente della divisione di 875 per 100000, e facendo [401] la differenza tra i logaritmi dei due ultimi numeri, si otterrebbe nel resto negativo il logaritmo ricercato; ma per noi è più opportuno considerare la nostra frazione decimale come quoziente della divisione in cui il dividendo è quel numero che si ottiene trasportando nella frazione data la virgola a destra della prima cifra significativa. Così, essendo:

$$0{,}00875 = 8{,}75 : 1000,$$

abbiamo [401]:

$$\lg 0{,}00875 = \lg 8{,}75 - \lg 1000$$
$$\text{»} \quad = 0{,}9420 - 3.$$

Ed effettuando la sottrazione, si ottiene:

$$\lg 0{,}00875 = -2{,}0580.$$

In pratica si trova più comodo di lasciare il logaritmo sotto la forma binomia, che esso aveva prima dell' ultima riduzione; si suole poi scrivere nel modo seguente:

$$\lg 0{,}00875 = \overline{3}{,}9420.$$

(Il segno *meno* è scritto in luogo insolito, sopra della caratteristica, affinchè non si dimentichi che questa soltanto è negativa, laddove la mantissa è positiva).

E in generale, se in una frazione decimale pura $p$ a sinistra delle cifre significative ci siano $k$ zeri, trasportando la virgola a destra della prima cifra significativa, si moltiplica la frazione per $10^k$; epperò, indicando con $m$ la mantissa del logaritmo del prodotto, si ha:

$$\lg p = 0,m - k$$
$$» = \overline{k},m.$$

Pertanto, rammentandoci d'aver dimostrato [422] che la mantissa del logaritmo d'un numero decimale maggiore dell'unità è indipendente dalla posizione della virgola, troviamo di poter dire che:

*Il logaritmo d'una frazione decimale pura ha una caratteristica negativa eguale al numero degli zeri che precedono la prima cifra significativa, e una mantissa positiva quale spetta al numero che rimane quando si cancelli la virgola.*

**425.** In pratica è comoda, ed usata, un'altra maniera di scrivere il logaritmo d'una frazione decimale pura. Prendiamo ancora, ad es., il numero 0,00875.

Abbiamo trovato:

$$\lg 0{,}00875 = \overline{3},9420.$$

Manifestamente possiamo scrivere:

$$\lg 0{,}00875 = \overline{3},9420 + 10 - 10.$$

Eseguendo le riduzioni nel secondo membro, lasciando però intatto l'ultimo termine, si ottiene:

$$\lg 0{,}00875 = 7{,}9420 - 10.$$

Nello stesso modo si troverebbe, ad es.,:

$$\lg 0{,}875 = 9{,}9420 - 10$$
$$\lg 0{,}0875 = 8{,}9420 - 10$$
$$\lg 0{,}000875 = 6{,}9420 - 10, \qquad \text{ecc.}$$

Queste caratteristiche, di 10 più grandi del vero, si dicono *alterate*. Dagli esempi precedenti si conchiude che:

*Il logaritmo d' una frazione decimale pura ha una caratteristica alterata, che si ottiene sottraendo da* 10 *il numero degli zeri che precedono la prima cifra significativa; e la mantissa quale spetta al numero che si ottiene cancellando la virgola.*

**426. Oss.** Chi ha fatto pratica nell' uso dei logaritmi tralascia di scrivere il termine — 10, che segue un logaritmo a caratteristica alterata, e ne tien conto mentalmente. Non è facile che avvenga di dimenticare uno di questi termini negativi, perchè da tale dimenticanza risulterebbe enorme errore nel risultato.

La ragione, per la quale il logaritmo di un numero minore di *uno* si tiene sotto forma binomia con un termine positivo e uno negativo, è questa che le tavole logaritmiche contengono soltanto mantisse positive.

Con tale artificio poi si raggiunge una maggiore uniformità nell' uso dei logaritmi, dacchè in quanto alla mantissa, si evita di dover distinguere se il numero sia maggiore o minore dell' unità, e si può dire in generale che *la mantissa di un numero decimale è indipendente dalla posizione della virgola.*

**427.** Dopo di avere imparato a trovare il logaritmo di qualsivoglia numero dato, dobbiamo considerare il problema inverso, che è di trovare il numero di cui sia dato il logaritmo.

Supponiamo, ad es., di voler conoscere quel numero il cui logaritmo è 0,3756.

Anzitutto dobbiamo rammentarci che la caratteristica di un logaritmo dipende [413, 425] unicamente dalla posizione della virgola, laddove la mantissa è indipendente [422, 425] affatto dalla posizione della virgola. Così, quando in un logaritmo venisse mutata la caratteristica, non muterebbero le cifre, nè l'ordine nel quale si succedono le cifre del numero corrispondente al logaritmo dato. Nel nostro caso ci sarà utile di considerare, per il momento, il logaritmo che ha 2 per caratteristica e la mantissa stessa del logaritmo proposto. Così si tratta per ora di trovare quel numero il cui logaritmo è 2, 3756.

La caratteristica 2 ci fa capire che il numero è compreso tra 100 e 1000; badiamo alla mantissa. Cercando nel corpo della tavola, troviamo, invece della mantissa data, le due mantisse successive 3747 e 3766, la prima minore, l'altra più grande di 3756. Avremmo trovate queste mantisse, quando avessimo cercati i logaritmi dei numeri 237 e 238. Il numero, che cerchiamo, è dunque compreso tra questi due, e si può dire sin d'ora che 237 è la sua parte intera; ci resta da trovare la parte frazionaria.

La differenza tra le mantisse, che abbiamo trovate nella tavola e che comprendono la mantissa 3756, è 19 (diecimillesimi). Aggiungendo 19 alla mantissa minore, si passa dal logaritmo del numero 237 a quello dell' intero successivo. Aggiungendo invece 9 (differenza tra la mantissa data e la prossima inferiore trovata nella tavola), si ottiene la mantissa data. Per questo aumento nel logaritmo si deve aumentare il numero; di quanto lo dirà la proporzione:

$$19 : 1 = 9 : x \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{9}{19}.$$

Il numero richiesto è dunque $237 + \frac{9}{19}$. Riducendo la frazione $\frac{9}{19}$ in decimali, si ha infine, per approssimazione, 237, 47. E perchè il logaritmo dato ha la caratteristica *zero*, il numero corrispondente ha una sola cifra nella parte intera; il numero domandato è dunque infine 2,3747.

Come altro esempio, proponiamoci di trovare quel numero, il cui logaritmo è:

$$\bar{3},7447 = 7,7447 - 10.$$

La mantissa prossima inferiore alla 7447, e che si trova nella tavola, corrisponde al numero 555. Ragionando, come per il caso precedente, si trova che l'aggiunta da fare a 555 è la frazione $\frac{4}{8}$. Il denominatore è la differenza tavolare; il numeratore è la differenza tra la mantissa data e la mantissa 7443, che è la prossima inferiore trovata nella tavola. Ed essendo $\frac{4}{8} = 0,5$, il numero ricercato, prescindendo dalla virgola, è il seguente 5555. La caratteristica negativa 3 (o l'alterata 7) ci fa capire che il numero richiesto deve avere tre zeri prima delle cifre significative: il numero, che ha $\bar{3},7447$ per logaritmo, è dunque 0,005 555.

Quando fosse domandato il numero $x$, sapendosi essere:

$$\lg x = 6,1819,$$

dopo averne trovate le tre prime cifre, e una quarta usando della differenza tavolare, bisognerebbe scrivere tre zeri alla destra delle cifre trovate: e ciò perchè la caratteristica 6 indica che il numero $x$ deve avere 7 cifre nella parte intera. Si trova così:

$$x = 1\,520\,{\scriptstyle 000}.$$

I tre zeri finali furono scritti in carattere distinto per far comprendere, a chi legge il numero, che la cifra delle centinaia è incerta. Appunto perciò non si è continuato nella divisione che ha dato la quarta cifra, per averne delle successive, perchè codeste altre cifre avrebbero fatto credere una approssimazione, che non può essere raggiunta affatto con la nostra tavola.

Volendosi maggiore approssimazione, bisogna ricorrere a tavole più esatte. Ma anche il logaritmo deve allora esser dato con maggiore esattezza.

**428.** Proponiamoci di trovare il numero, il cui logaritmo è la quantità negativa $-2{,}3184$.

Poichè nelle nostre tavole si trovano soltanto mantisse positive, prima di ricorrere alle tavole è necessario di trasformare il logaritmo proposto rendendone positiva la parte decimale. (*). Aggiungiamo a tal fine e sottraiamo un' unità; con ciò il logaritmo dato si riduce alla forma :

$$\begin{aligned} -2-0{,}3184+1-1 &= -3+(1-0{,}3184) \\ &= -3+0{,}6816 \\ &= \overline{3}.6816. \end{aligned}$$

Quando avessimo aggiunta e sottratta la quantità 10, avremmo ottenuto :

$$7{,}6816-10.$$

Così ci siamo ricondotti al caso precedente. e si trova essere 0,004 804 il numero domandato.

## Esempi d'applicazione dei logaritmi.

**429.** Avvertiamo anzitutto che in qualcuno degli esempi, che stiamo per trattare, o non varrebbe la pena di usare dei logaritmi, oppure prima di ricorrere alle tavole sarebbe opportuno eseguire talune riduzioni. Applicheremo invece immediatamente i logaritmi, perchè abbiamo in mira di presentarci con semplicità quei casi, che possono occorrere nei

(*) Logaritmi, numericamente uguali ma contrari di segno, appartengono a numeri inversi.

calcoli con logaritmi, e che potrebbero esser causa d'impaccio al principiante, che non li avesse mai incontrati.

**Es.** 1°. Proponiamoci di calcolare, con l'aiuto dei logaritmi, il valore di:

$$x = 12 \cdot 0,042 \cdot 0,8268.$$

Sappiamo [398] intanto essere:

$$\lg x = \lg 12 + \lg 0,042 + \lg 0,8268.$$

Dalle tavole abbiamo:

$$\begin{aligned} \lg 12 &= 1,0792 \\ \lg 0,042 &= 8,6232 - 10 \\ \lg 0,8268 &= 9,9174 - 10. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\lg x = 19,6198 - 20.$$

Dovendo sommare delle espressioni algebriche, abbiamo fatto la riduzione (addizione) dei termini positivi, e poi ridotti in uno i termini negativi. Si potrebbe eseguire un'altra riduzione; ma perchè risulterebbe un logaritmo con mantissa negativa, ci contentiamo di sopprimere 10 unità positive e 10 di negative. Si ottiene in tal maniera:

$$\lg x = 9,6198 - 10$$

e infine

$$x = 0,4167.$$

**Es.** 2°. Si calcoli il valore di:

$$x = \frac{67,2}{793}.$$

Abbiamo [401]:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg 67,2 - \lg 793 \\ &= 1,8274 - 2,8993. \end{aligned}$$

Effettuando immediatamente la sottrazione, risulterebbe un logaritmo con mantissa negativa. Si evita ciò con aggiungere 10 alla caratteristica del minuendo. Si ha in tal modo:

$$\begin{aligned}\lg x &= (11{,}8274 - 10) - 2{,}8993 \\ &= 11{,}8274 - 2{,}8993 - 10 \\ &= 8{,}9281 - 10.\end{aligned}$$

Quindi: $x = 0{,}08474.$

**Es.** 3°. Si calcoli il valore di:

$$x = \frac{0{,}0843}{0{,}0064}.$$

Abbiamo [401]:

$$\lg x = \lg 0{,}0843 - \lg 0{,}0064.$$

Dalle tavole si ha:

$$\begin{aligned}\lg 0{,}0843 &= 8{,}9258 - 10 \\ \lg 0{,}0064 &= 7{,}8062 - 10.\end{aligned}$$

Dovendo sottrarre un binomio, bisogna mutare i segni a' suoi termini, e poi aggiungerli al minuendo. Così si ottiene:

$$\lg x = 1{,}1196 \quad \text{ed infine} \quad x = 13{,}17.$$

**Es.** 4°. Si calcoli il valore di:

$$x = 0{,}0587^3.$$

Abbiamo intanto [404]:

$$\lg x = 3 \lg 0{,}0587.$$

Ed essendo $\lg 0{,}0587 = 8{,}7686 - 10,$

si ha [31] $\lg x = 26{,}3058 - 30$

$$= 6{,}3058 - 10.$$

Quindi $= 0{,}000\,202\,2.$

**Es.** 5°. Si trovi il valore di:

$$x = \sqrt{0{,}00345.}$$

Si sa [406] essere:

$$\lg x = \frac{1}{2} \lg 0{,}00345.$$

Dalle tavole si ha:

$$\lg 0{,}00345 = 7{,}5378 - 10.$$

Qui, dovendo dividere per 2, bisogna [44] dividere ciascuno dei termini del binomio; ma risulterebbe un logaritmo con una caratteristica alterata di 5. Giova per uniformità che le caratteristiche alterate siano sempre alterate di 10; perciò nel caso presente aggiungeremo 10 unità positive e 10 di negative, chè così, dividendo poi il secondo termine per 2, otterremo 10 per quoziente. Abbiamo dunque:

$$\lg 0{,}00345 = 17{,}5378 - 20.$$

Quindi $\lg x = 8{,}7689 - 10$

e infine $x = 0{,}058737.$

**Es.** 6°. Sia da calcolare il valore di:

$$x = \sqrt[3]{0{,}0000468}.$$

È intanto [406]:

$$\lg x = \frac{1}{3} \lg 0{,}0000468$$

e $\lg 0{,}0000468 = 5{,}6702 - 10.$

Qui pure, prima di eseguire la divisione per 3, giova alterare la caratteristica di tanto, che a divisione compiuta si trovi alterata di 10. A tal fine scriveremo:

$$\lg 0{,}0000468 = 25{,}6702 - 30.$$

Quindi $\lg x = 8{,}5567 - 10$

epperò $x = 0{,}036033.$

**Es.** 7°. Sia da calcolare il valore di:

$$x = 0{,}082^{1{,}53}.$$

Si ha [404]: $\lg x = 1{,}53 \cdot \lg 0{,}082.$

Dalle tavole $\lg 0{,}082 = 8{,}9138 - 10.$

Moltiplicando per 1,53 (conservando alla mantissa quattro cifre) si ottiene:

$$\begin{aligned}\lg x &= 13{,}6381 - 15{,}3\\ &= 13{,}6381 - 10 - 5{,}3\\ &= 8{,}3381 - 10.\end{aligned}$$

Quindi $\qquad x = 0{,}02168.$

Però in questo caso, e negli analoghi, è meglio ridurre il logaritmo in un unico numero negativo.

Avevasi $\lg 0{,}082 = -1{,}0862.$

Moltiplicando per 1,53, si ottiene:

$$\begin{aligned}\lg x &= -1{,}6619\\ &= -1{,}6619 + 10 - 10\\ &= 8{,}3381 - 10,\end{aligned}$$

come s'era trovato nell'altro modo.

## Risoluzione dell'equazione $a^x = b$ per mezzo delle tavole dei logaritmi.

**430.** Abbiamo veduto quanto riescano semplificati i calcoli numerici, qualora si effettuino profittando delle tavole logaritmiche. Le tavole giovano anche quando si tratta della settima operazione, cioè *dell'estrazione di logaritmo.*

Supponiamo di dover calcolare il logaritmo di un numero $b$ rispetto alla base $a$, di aver cioè da risolvere l'equazione esponenziale:

$$a^x = b.$$

Supposto che la tavola dei logaritmi, di cui possiamo disporre, sia calcolata rispetto alla base $c$, prendendo i logaritmi dei due membri, abbiamo [404]:

$$x \lg_c a = \lg_c b,$$

epperò
$$x = \frac{\lg_c b}{\lg_c a}.$$

Così, in luogo d'una estrazione di logaritmo, si ha da fare soltanto una divisione.

**Es.** Si risolva l'equazione:

$$0{,}826^x = 2{,}88.$$

Prendendo i logaritmi dei due membri, si ha:

$$x \lg 0{,}826 = \lg 2{,}88$$ epperò

$$x = \frac{\lg 2{,}88}{\lg 0{,}826} = \frac{0{,}4594}{-0{,}0830} = -5{,}53.$$

## Passaggio da un sistema di logaritmi ad un altro.

**431.** Abbiamo or ora risoluto, usando delle tavole logaritmiche, l'equazione esponenziale:

$$a^x = b,$$

e trovato
$$x = \frac{\lg_c b}{\lg_c a},$$

dove $c$ rappresenta la base di un sistema qualunque di logaritmi. Codesta eguaglianza scritta nel modo seguente:

$$\lg_a b = \frac{1}{\lg_c a} \cdot \lg_c b,$$

mostra che, avendo una tavola di logaritmi, se ne possono dedurre facilmente i logaritmi di un altro sistema. Basta moltiplicare i logaritmi dati per il valore inverso del logaritmo della nuova base, preso nel vecchio sistema.

## Esercizi.

Si calcolino, col mezzo dei logaritmi, i valori delle seguenti espressioni:

**682.** $8,759 : 0,05764$. $\qquad 0,877^4$.

**683.** $8,095^{-3}$. $\qquad (3390 \cdot 4,347 : 13814)^{\frac{1}{3}}$.

**684.** $\sqrt[3]{0,7413}$. $\qquad \sqrt[7]{9,387}$ $\qquad \sqrt[7]{0,06647}$.

**685.** $\sqrt[3]{\dfrac{229}{531}}$. $\qquad \dfrac{8\sqrt{10}}{7}$. $\qquad \dfrac{109}{716}\sqrt{\dfrac{76}{93}}$.

**686.** $\left(\dfrac{13}{9 \cdot 17}\right)^3$. $\qquad \sqrt[4]{0,47\sqrt{\frac{19}{34}}}$.

**687.** $\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2} : \sqrt{10}}$. $\qquad \sqrt[4]{1,84 + \sqrt[5]{31}}$.

**688.** $\sqrt[5]{\dfrac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$. $\qquad 2,718^{4,605}$.

**689.** $\sqrt[5]{2,459^{6,5} - 8,74^{2,3}}$. $\qquad (-9,576)^{-0,4}$.

**690.** $\sqrt[3]{\dfrac{413,9\sqrt{0,5127}}{372 \cdot 9,046}}$. $\qquad 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

**691.** Sapendo che è $\lg 2 = 0,3010$ e $\lg 3 = 0,4771$, si trovino, senza ricorrere alle tavole, i logaritmi dei numeri seguenti:

$16 \qquad 125 \qquad 12 \qquad 5 \qquad 30 \qquad 1,5 \qquad 2,5$

$40 \qquad 3,6 \qquad 0,036 \qquad 1080 \qquad \sqrt[5]{0,0125} \qquad \sqrt{31,25}$.

(Ad es., si noterà essere $125 = \frac{1000}{8}, \ldots$; talvolta gioverà decomporre il numero in fattori primi...).

Dalle equazioni seguenti si ricaverà il valore dell'incognita senza ricorrere alle tavole.

**692.** $\lg x = 2$. $\qquad \lg x = 3$. $\qquad \lg x = 0,5$.

**693.** $\lg x = -\frac{5}{2}$. $\qquad \lg x = \lg a - \lg b$.

**694.** $\lg x = n \lg a + n \lg b$. $\qquad \lg x = \lg 24 - \lg 8$.

**695.** $\lg x = 3 \lg 18 - 4 \lg 12$.

**696.** $2 \lg x = \lg \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$.

**697.** $3 \lg x = \frac{5}{4} + 2 \lg \frac{x}{3}$.

---

**698.** Si calcoli il logaritmo di 6574 rispetto alla base 12.

**699.** Si trovi la base del sistema nel quale 13 è uguale al suo logaritmo.

**700.** In quale sistema $\sqrt{7}$ è il logaritmo di $\sqrt[3]{5}$?

---

Si risolvano le seguenti equazioni:

**701.** $4^{x+2} = 60$. $\qquad 5^{2x-1} = 71{,}7$.

**702.** $10^{(5-x)(6-x)} = 100$. $\qquad ab = \sqrt[x]{c}$.

**703.** $3^{x^2-4+5} = 1200$.

(Si prende dapprima come incognita l'esponente).

**704.** $8^{2x} - 9 \cdot 8^x + 20 = 0$.

(Si prende dapprima per incognita $8^x$).

**705.** $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$.

**706.** $5^{2x} \cdot 3^x = 1875 \cdot 225$.

(Si eguaglino i logaritmi dei due membri).

**707.** $10 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 3^x - 132 = 0$.

**708.** $5^{x+1} + 5^{x-2} - 5^{x-3} + 5^{x-4} = 4739$.

**709.** $3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} \cdot 11^{2-x}$.

**710.** $a^{x+1} + \frac{b}{a^{x-1}} = c$.

**711.** $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$.

---

**712.** $\lg \sqrt{x} - \lg \sqrt{5} = 0{,}5$, $\qquad y^2 + xy = 159$.

(Si ricaverà dalla prima equazione il valore di $x$).

**713.** $\lg x + \lg y = 2, \qquad 5x^2 - 3y^2 = 1925.$

(La prima equazione dà il valore di $xy$).

**714.** $y^x = 32760, \qquad \sqrt[x]{y} = 1,5.$

(Si prendano i logaritmi dei due membri di ciascuna equazione. Si moltiplichino tra loro le equazioni risultanti, membro a membro. Così si potrà determinare $\lg y$ e poi $y$).

**715.** Dimostrare che, essendo:

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}} \quad \text{e} \quad z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}, \quad \text{egli è} \quad x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

## Risposte.

**682.** 151,9. 0,5915. **683.** 0,001885. 1,022.
**684.** 0,905. 1,377. 0,6788. **685.** 0,7555. 3,614 0,1376.
**686.** 0,0006135. 0,7698. **687.** 0,9618. 1,399.
**688.** 0,643. 100. **689.** 2,885. 0,405. **690.** 0,449. 3,83.
**692.** 100. 1000. $\sqrt{10}$. **693.** $1 : \sqrt{10^5}$. $\frac{a}{b}$.
**694.** $(ab)^n$. 3. **695.** $\frac{9}{32}$. **696.** $1 : 2\sqrt{10^3}$.
**697.** $\sqrt[4]{10^5} : 9$. **698.** 3,539. **699.** 1,218. **700.** 1,225.
**701.** 0,953. 1,827. **702.** 7. $+$ 4. $\frac{\lg c}{\lg a + \lg b}$.
**703.** 4,335, $-0,335$. **704.** 0,7742, $\frac{2}{3}$. **705.** 2.
**706.** 3. **707.** 1,087. **708.** $x = 4 + (\lg 4739 - \lg 3146) : \lg 5.$
**709.** $\frac{40337}{37475}$. **710.** $x = \{\lg(c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b}) - \lg 2a\} : \lg a.$
**711.** $x = \lg(a-b) : \lg(a+b).$
**712.** $x = 50, \quad y = 53 = -3.$ **713.** $x = 20, \quad y = 5.$
**714.** $x = 2,085, \quad y = 146,5.$

# CAPITOLO XIII

## PROGRESSIONI

### Progressioni aritmetiche.

**432. Def.** *Una serie* [236] *di quantità si dice progressione aritmetica, se le differenze, che si ottengono sottraendo da ciascuna di esse quella che la precede, sono tutte uguali tra loro.*

La differenza fra un *termine* di una progressione aritmetica e l'antecedente si dice la *differenza* della progressione.

Si indica che delle quantità $a, b, c, d \ldots$ sono in progressione aritmetica scrivendo:

$$\div\ a,\ b,\ c,\ d\ \ldots .$$

Quando la differenza d'una progressione aritmetica è positiva, la progressione è *crescente*; quando la differenza è negativa, allora la progressione è *decrescente.*

**433.** Se $a_m$ ed $a_{m+1}$ sono due termini consecutivi d'una progressione aritmetica, e se $d$ è la differenza della progressione, abbiamo:

$$a_{m+1} - a_m = d,$$

donde $$a_m + d = a_{m+1}$$

ed $$a_{m+1} - d = a_m.$$

Le due ultime uguaglianze dicono che:

**434.** *Aggiungendo ad un termine qualunque d' una progressione aritmetica la differenza della progressione, si ottiene il termine susseguente.*

*Sottraendo da un termine qualunque d' una progres-*

*sione aritmetica la differenza della progressione, si ottiene il termine antecedente.*

**435. Teor.** *Un termine qualunque d'una progressione aritmetica è uguale ad un termine precedente qualunque aumentato della differenza moltiplicata per il numero dei termini intermedi aumentato di uno.*

**Dim.** Siano $p$ e $q$ due termini qualunque d'una progressione aritmetica, e sia $m$ il numero dei termini della progressione che stanno tra i due $p$ e $q$.

Se si aggiunge, partendo dal termine $p$, successivamente $m$ volte la differenza $d$, si formano [434] uno dopo l'altro i termini compresi tra $p$ e $q$; aggiungendo all'ultimo di nuovo la differenza, si ottiene il termine $q$. Ma, invece di aggiungere successivamente dei numeri, si può aggiungere la loro somma, e nel nostro caso la somma dei numeri aggiunti è il prodotto $(m + 1)\,d$. Abbiamo dunque:

$$q = p + (m + 1)d, \qquad \text{c. d. d.}$$

**436.** Se i termini d'una progressione aritmetica sono rappresentati da simboli portanti un numero d'ordine, sottraendo dal maggiore il minore di questi numeri d'ordine corrispondenti a due termini della progressione, si ottiene manifestamente il numero dei termini intermedi aumentato di *uno*. Così, se $a_m$ ed $a_n$ rappresentano due termini d'una progressione aritmetica, ed è $n > m$, abbiamo [435]:

$$a_n = a_m + (n - m)\,d, \tag{1}$$

epperò anche:

$$a_m = a_n - (n - m)\,d. \tag{2}$$

**437. Oss.** Dalla formula or ora trovata si desume che, prolungando abbastanza una progressione aritmetica crescente, si giunge ad ottenere termini che superano qualunque quantità data. Infatti, nel prodotto $(n - m)\,d$, il fattore $d$ si mantiene costante, finito, e l'altro fattore può diventar tanto grande quanto si voglia.

**438. Probl.** *Inserire* m *medi aritmetici tra due quantità* a *e* b.

**Risol.** Ciò vuol dire: trovare $m$ quantità $x, y, \ldots z$, tali che le $(m + 2)$ quantità $a, x, y \ldots . z, b$ formino una progressione aritmetica. Manifestamente la difficoltà si riduce a determinare la differenza $d$ della progressione.

Imaginando già risoluto il problema, poichè tra $a$ e $b$ ci sono $m$ termini, abbiamo [435]:

$$b = a + (m + 1)\,d$$

epperò
$$d = \frac{b - a}{m + 1}.$$

Si vede che il problema è sempre possibile, e che ammette una sola soluzione.

**439. Oss.** Se $m$ è arbitrario, prendendolo grande abbastanza, si può ottenere che la differenza $d$ sia minore in valore assoluto d'un numero dato, positivo, per quanto piccolo.

**440. Oss.** Se $a$ e $b$ sono numeri razionali, tale è anche la differenza $\frac{b-a}{m+1}$, e quindi anche tutti i termini della progressione che risulta. Pertanto, se $a$ e $b$ siano razionali, ed $h$ sia un numero irrazionale da essi compreso, per quanti medi aritmetici s'inseriscano tra $a$ e $b$, non si potrà mai ottenere che un medio sia eguale ad $h$.

Quando invece $h$ sia razionale, inserendo tra $a$ e $b$ un numero conveniente di medi aritmetici, si può ottenere che uno di questi medi sia eguale ad $h$. Infatti, imaginando ridotti i tre numeri $a, h, b$ a denominatore comune, e che questo sia $n$, si vede che le frazioni, che hanno $n$ per denominatore e per numeratori i numeri interi successivi, formano una progressione aritmetica, di cui fanno parte i numeri $a$, $h$, $b$.

**441. Teor.** *Inserendo tra ciascun termine ed il seguente di una progressione aritmetica data, uno stesso numero di medi, si ottiene una serie che è anch' essa una progressione aritmetica.*

**Dim.** Sia la progressione:

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n\,.$$

Supponiamo di inserire $m$ medi tra $a_1$ ed $a_2$, poi $m$ medi tra $a_2$ ed $a_3$, e così via. Le differenze rispettive di queste progressioni parziali sono [438]:

$$\frac{a_2 - a_1}{m+1},\quad \frac{a_3 - a_2}{m+1},\ \ldots\quad \frac{a_n - a_{n-1}}{m+1};$$

e queste frazioni sono eguali, perchè i numeratori sono tutti eguali alla differenza della progressione data. Tutte le progressioni parziali hanno adunque uguale differenza; e poichè inoltre l'ultimo termine di ciascuna è il primo della seguente, esse insieme formano veramente una progressione aritmetica.

**442. Teor.** *In una progressione aritmetica la somma di due termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma dei termini estremi.*

**Dim.** Siano $a$ e $b$ due termini qualunque d' una progressione aritmetica. Partendo da $a$, contiamo $m$ termini consecutivi; e partendo da $b$ contiamo altri $m$ termini consecutivi, ma nella direzione contraria. Siano $p$ e $q$ i due termini a cui siamo così pervenuti. Poichè ci sono $(m-1)$ termini tra $a$ e $p$, ed $(m-1)$ tra $q$ e $b$, detta $d$ la differenza della progressione, abbiamo [436, (1) e (2)]:

$$p = a + md,$$
$$q = b - md.$$

Sommando queste uguaglianze, si ottiene:

$$p + q = a + b.$$

Ora, se $a$ è il primo e $b$ è l'ultimo termine della progressione, $p$ e $q$ si possono dire due termini equidistanti rispettivamente dagli estremi $a$ e $b$; e così la nostra proposizione è dimostrata.

**443.** In una progressione aritmetica, composta di un numero dispari di termini, vi è un termine $c$ egualmente distante dagli estremi $a$ e $b$. Posto che sia $(2m + 1)$ il numero dei termini della progressione, il termine $c$ è preceduto da $m$ termini, e seguito da altrettanti. Quindi, essendo [436]:

$$c = a + md,$$

e

$$c = b - md,$$

sommando si ottiene:

$$2c = a + b, \qquad \text{donde} \qquad c = \frac{a+b}{2}.$$

Così si può dire che:

*In una progressione aritmetica, composta di un numero dispari di termini, il termine medio è uguale alla semisomma degli estremi.*

**444. Cor.** *Il medio aritmetico tra due quantità è uguale alla loro semisomma.*

**445. Teor.** *La somma dei termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma degli estremi moltiplicata per il numero dei termini.*

**Dim.** Siano $a$ e $b$ il primo e l'ultimo termine d'una progressione aritmetica di $m$ termini. Poichè la somma di due termini qualunque, che siano equidistanti dagli estremi, è uguale [442] alla somma degli estremi, e il termine medio, quando c'è, è uguale alla semisomma degli estremi [443], se a ciascun termine della progressione si sostituisce la semisomma degli estremi, la somma di tutti i termini rimane invariata. Così è reso manifesto che è appunto:

$$s = \frac{a + b}{2} m.$$

**446.** Nei problemi sulle progressioni aritmetiche si devono considerare ordinariamente: il primo termine $a_1$, l'ultimo termine $a_n$, la differenza $d$, il numero dei termini $n$ e la loro somma $s$. Queste cinque quantità sono legate dalle due relazioni [436, 445]:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d,$$

$$s = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

epperò, quando tre saranno note, si potranno calcolare le altre due. Si possono dare dieci differenti problemi.

## Progressioni geometriche.

**447. Def.** *Una serie si dice progressione geometrica, se i quozienti, che si ottengono dividendo ciascun termine per il precedente, sono tutti eguali tra loro.*

Codesto quoziente costante si chiama il *quoziente* della progressione.

Si indica che delle quantità $a$, $b$, $c$, $d$ . . . . formano una progressione geometrica, scrivendo:

$$\div\div\; a,\; b,\; c,\; d \;.\;.\;.\;.$$

**448.** Se $a_m$ ed $a_{m+1}$ sono due termini consecutivi d'una progressione geometrica, e il quoziente è $q$, abbiamo per definizione:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = q, \qquad \text{donde}$$

$$a_{m+1} = a_m q \qquad \text{ed} \qquad a_m = \frac{a_{m+1}}{q}.$$

Le due ultime uguaglianze dicono che:

**449.** *Moltiplicando un termine d' una progressione geometrica per il quoziente, si ottiene il termine successivo.*

*Dividendo un termine d' una progressione geometrica per il quoziente, si ottiene il termine precedente.*

**449.** (*bis*). Quando un termine di una progressione geometrica è positivo ed il quoziente è positivo, tutti [449] i termini della progressione sono positivi. Noi ci limiteremo a considerare progressioni così fatte, e così possiamo dire che:

Quando il quoziente di una progressione geometrica è maggiore di *uno*, la progressione è *crescente*. Quando il quoziente è minore di *uno* la progressione è *decrescente*.

**450. Teor.** *Un termine qualunque di una progressione geometrica è uguale ad un termine precedente qualunque, moltiplicato per quella potenza del quoziente, il cui esponente è uguale al numero dei termini intermedi aumentato di* uno.

**Dim.** Siano $a$ e $b$ due termini qualunque d'una progressione geometrica, sia $m$ il numero dei termini che stanno tra $a$ e $b$, e sia $q$ il quoziente.

Se si moltiplica, cominciando da $a$, successivamente $m$ volte per $q$, si formano [449] uno dopo l'altro i termini compresi tra $a$ e $b$; e moltiplicando l'ultimo per $q$, si ottiene $b$. Ma, invece di moltiplicare successivamente per dei numeri, si può moltiplicare per il loro prodotto, e nel caso nostro il prodotto dei moltiplicatori adoperati è la potenza $q^{m+1}$. Abbiamo pertanto:

$$b = a\,q^{m+1}, \qquad \text{c. d. d.}$$

**451.** Se $a_1$ dinota il primo termine d'una progressione geometrica ed $a_n$ l'*n.esimo*, abbiamo [450]:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

**452. Teor.** *Una progressione geometrica crescente, illimitata, è indefinitamente crescente; una progressione geometrica decrescente, illimitata, è indefinitamente decrescente.*

**Dim.** Sia $a$ un termine di una progressione geometrica e $q$ il quoziente. I termini susseguenti ad $a$ sono:

$$aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \quad aq^4, \ldots.$$

Ciascun termine, come si vede, è il prodotto della quantità $a$ per una potenza del quoziente. Se questo quoziente è maggiore di *uno*, le sue potenze formano una serie *indefinitamente* crescente [237]; altrettanto si può dire perciò dei termini della progressione.

Se poi la progressione è decrescente, ossia se è $q < 1$, le potente del quoziente formano una serie *indefinitamente* decrescente [238]; altrettanto si può dire perciò dei termini della progressione.

**453. Oss.** Una progressione geometrica, illimitata in ambidue i sensi, da una banda è indefinitamente crescente e dall'altra è indefinitamente decrescente.

**454. Probl.** *Inserire* m *medi geometrici tra due quantità* a *e* b.

**Risol.** Ciò vuol dire: trovare $m$ quantità $x, y \ldots z$, tali che le $(m + 2)$ quantità $a, x, y \ldots z, b$ formino una progressione geometrica. Manifestamente la difficoltà si riduce a determinare il quoziente $q$ della progressione.

Imaginando già risoluto il problema, poichè tra

$a$ e $b$ ci sono $m$ termini, abbiamo [450]:

$$b = a q^{m+1}.$$

Quindi è $$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Essendo $a$ e $b$ quantità positive, il problema è sempre possibile, e in un modo soltanto.

**455. Oss.** Quando si voglia inserire un solo medio geometrico tra $a$ e $b$, il quoziente è:

$$q = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quindi il medio è [449]:

$$a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 b}{a}} = \sqrt{ab};$$

risultato non nuovo, perchè tre termini consecutivi di una progressione geometrica formano una proporzione continua.

**456. Teor.** *Inserendo tra due quantità date un numero di medi geometrici abbastanza grande, si può ottenere che la differenza tra due termini consecutivi sia minore d'una quantità data positiva, per quanto piccola.*

**Dim.** Siano $a$ e $b$ le quantità date; sia $a < b$, e $q > 1$ il quoziente della divisione di $b$ per $a$. Quando si siano inseriti $m$ medi geometrici tra $a$ e $b$, il quoziente della progressione è $\sqrt[m+1]{q}$; ed essendo $a$ e $b$ numeri finiti, tali saranno tutti i medi, poichè i loro valori sono compresi tra quelli degli estremi. Si consideri un termine qualunque $z$ della progressione; il successivo è:

$$z \cdot \sqrt[m+1]{q},$$

e la differenza:

$$z\sqrt[m+1]{q} - z = z\left(\sqrt[m+1]{q} - 1\right)$$

è positiva. Ora, poichè il maggior valore che può assumere $z$ è minore di $b$, considereremo la differenza:

$$b\left(\sqrt[m+1]{q} - 1\right),$$

e basterà provare che questo prodotto, quando $m$ sia grande abbastanza, è minore di un numero dato $\varepsilon$ qualunque.

Noi sappiamo [300] che, estraendo da una quantità diversa da *uno* la radice con indice grande abbastanza, si può ottenere che la differenza tra la radice e l'unità sia minore d'un numero dato qualunque. Esiste adunque valore di $m$ per cui sia:

$$\sqrt[m+1]{q} - 1 < \frac{\varepsilon}{b}.$$

Per così fatto valore di $m$, è:

$$b\left(\sqrt[m+1]{q} - 1\right) < \varepsilon;$$

epperò resta provato che, *ecc.*

**457. Teor.** *Inserendo tra ciascun termine ed il seguente di una progressione geometrica data uno stesso numero di medi, si ottiene una serie che è anch' essa una progressione geometrica.*

**Dim.** Sia la progressione:

$$\div\!\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n.$$

Supponiamo di inserire $m$ medi tra $a_1$ ed $a_2$, poi $m$ medi tra $a_2$ ed $a_3$, e così via. I quozienti rispettivi di queste progressioni parziali sono [454]:

$$\sqrt[m+1]{\frac{a_2}{a_1}},\quad \sqrt[m+1]{\frac{a_3}{a_2}},\quad \ldots\quad \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

ed essi sono eguali, perchè i radicandi sono tutti eguali al quoziente della progressione geometrica data. Tutte le progressioni parziali hanno dunque uguale quoziente; e poichè inoltre l'ultimo termine di ciascuna è il primo di quella che segue, esse insieme formano veramente una progressione geometrica.

**458.** Consideriamo la progressione geometrica:

$$\div\; 1,\quad 10,\quad 10^2,\quad 10^3,\quad 10^4 \ldots.$$

Cerchiamo di determinare la condizione, che dev' essere sodisfatta da un numero intero $n$, perchè possa far parte di una progressione ottenuta inserendo dei medi geometrici fra i termini della progressione data.

Supponiamo che, inserendo $m$ medi tra ciascun termine ed il seguente, uno dei termini della nuova progressione, ad es. il *p.esimo*, sia eguale ad $n$. Allora, essendo $\sqrt[m+1]{10}$ il quoziente ed essendo il primo termine uguale ad *uno*, abbiamo [451]:

$$n = \sqrt[m+1]{10}^{\,p-1} = \sqrt[m+1]{10^{p-1}}\,.$$

Elevando i due membri a potenza con l' esponente $(m + 1)$, si ottiene:

$$n^{m+1} = 10^{p-1}\,.$$

Questa eguaglianza non può aver luogo, se $n$ non sia una potenza di 10. [V. § 411].

Dunque le potenze di 10 sono i soli numeri interi, che possono far parte di una progressione geometrica, due termini della quale siano due potenze di 10.

**459. Teor.** *La somma dei termini di una progressione geometrica è uguale alla differenza tra il prodotto dell' ultimo termine per il quoziente ed il primo termine divisa per la differenza tra il quoziente e l' unità.*

**Dim.** Se $a_1$ indica il primo termine d'una progressione geometrica, $q$ il quoziente, ed $s$ la somma di $n$ termini consecutivi, egli è:

$$(1) \qquad s = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots\ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Moltiplicando per $q$ i due membri di questa eguaglianza, otteniamo:

$$(2) \qquad qs = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Sottraendo [56] l'eguaglianza (1) dalla (2), si ottiene:

$$qs - s = a_1 q^n - a_1$$

ossia
$$s(q-1) = a_1 q^n - a_1$$

ed infine
$$s = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}, \qquad \text{c. d. d. [451].}$$

**460. Oss.** Quando la progressione è decrescente, i due termini della frazione, che esprime la somma, sono negativi. Per questo caso si può cambiar il segno al numeratore e al denominatore, e scrivere:

$$s = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}.$$

**461. Teor.** *La somma dei termini di una progressione geometrica decrescente, illimitata, ha per limite il quoziente della divisione del primo termine per l'eccesso dell'unità sul quoziente della progressione.*

**Dim.** Sia $a_1$ il primo termine di una progressione geometrica decrescente, e $q < 1$ il quoziente. Sappiamo che la somma dei primi $n$ termini è espressa da:

$$s = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}.$$

Ma possiamo anche scrivere [44]:

$$s = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n.$$

Osserviamo che l'ultima operazione, che si deve fare per ottenere il valore di $s$, è una sottrazione. Il minuendo non contiene $n$, epperò esso non muta, quando si voglia la somma di un maggior numero di termini; il sottraendo invece al crescere di $n$ diminuisce, perchè $q$ è minore di *uno*, e si sa che la serie delle potenze di un numero minore dell'unità è decrescente. Sappiamo di più [238] che, prendendo $n$ bastantemente grande, si può ottenere che la potenza $q^n$ divenga minore di qualsiasi quantità data per quanto piccola. Pertanto, al crescere indefinito del numero dei termini della progressione, la loro somma s'accosta al valore del minuendo senza poterlo raggiungere, e s'accosta in modo da poter differire da esso di meno di qualsiasi quantità data. Ciò si esprime col dire che il minuendo è il *limite* della somma, e si scrive:

$$\text{lim. } s = \frac{a_1}{1-q}.$$

**462. Es.** Calcoliamo, ad es., il limite della somma dei termini della progressione geometrica decrescente:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.$$

Qui il quoziente è uguale ad $\frac{1}{2}$; abbiamo perciò:

$$\text{lim. } s = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Il che vuol dire che col sommare incessantemente nuovi termini ci si avvicina all'unità senza poterla raggiungere, e si può ottenere che la differenza tra l'unità e la somma sia minore di qualsiasi quantità data. (Ed è facile rendersi ragione di questo fatto purchè si osservi che, ogni volta che si aggiunge un nuovo termine, si aggiunge appunto la metà di quanto manca per arrivare all'unità. [238]).

**463.** Nei problemi, in cui trova applicazione la teoria delle progressioni geometriche, si devono considerare ordinariamente: il primo termine $a_1$, l'ultimo $a_n$, il quoziente $q$, il numero dei termini $n$ e la somma $s$ dei termini della progressione. Queste cinque quantità sono legate [451, 461] dalle due relazioni:

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

$$s = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

epperò, quando tre di esse sono note, le altre due sono determinate. Si possono dare dieci casi distinti.

## LOGARITMI.

### Definizione d'un sistema di logaritmi.

**464.** Se una progressione geometrica, illimitata in ambidue i sensi, ha un termine uguale all'*unità*, il prodotto di due termini qualunque della progressione è anch'esso un termine della progressione. Codesta proprietà si riconosce facilmente, se si rappresenta con una lettera, sia ad es. con la lettera $q$, il termine che segue l'unità (il qual termine è quindi [447] il quoziente della progressione) e poi mediante la stessa lettera gli altri termini della progressione. La progressione è allora rappresentata dalla serie seguente [449]:

$$\div\!\div \;\cdots\; \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\quad 1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3\ \cdots$$

**465.** Se una progressione aritmetica, illimitata in ambidue i sensi, ha un termine uguale a *zero*, la somma di due termini qualunque della progressione è anch'essa un termine della progressione. Codesta proprietà si riconosce facilmente, se si rappresenta con una lettera, sia ad es. con la lettera $d$, il termine che segue lo *zero* (il qual termine è quindi [432] la differenza della progressione) e poi mediante la lettera stessa gli altri termini della progressione. La progressione è allora rappresentata dalla serie seguente [434]:

$$\div \; \ldots \; -3d, \; -2d, \; -d, \; 0, \; d, \; 2d, \; 3d, \; \ldots$$

**466.** Imaginiamo ora che fra i termini delle due progressioni considerate sia stabilita la corrispondenza seguente: che al termine *uno* della progressione geometrica corrisponda il termine *zero* della progressione aritmetica, e che a termini consecutivi d'una progressione corrispondano termini consecutivi dell'altra. Cotal coppia di progressioni ha manifestamente la seguente proprietà notevole:

*Il termine della progressione aritmetica, che corrisponde al prodotto di due termini della progressione geometrica, è uguale alla somma dei termini corrispondenti ai fattori.*

In base a codesta relazione, quando le due progressioni siano scritte coi loro termini in corrispondenza, si potrà trovare mediante un'addizione il prodotto di due numeri che facciano parte della progressione geometrica. Ed è facile intravvedere che potranno per conseguenza essere semplificate altre operazioni. Ma perchè la cosa riesca veramente utile in pratica, bisogna far che essa valga per numeri qualunque, e non soltanto per quelli che sono termini della progressione geometrica assunta. Intanto per ispeditezza di linguaggio:

**467.** *Ciascun termine della progressione aritmetica si dice* logaritmo *del termine corrispondente dell' altra progressione.*

**468. Oss.** Manifestamente le due progressioni possono esser formate in modo che, presi un numero $m$ qualunque ed una quantità algebrica $n$ qualunque, questa sia il logaritmo di $m$. Basta perciò che $m$ sia il quoziente della progressione geometrica ed $n$ la differenza dell' altra progressione. Ma poi ad ogni altro termine della progressione geometrica corrisponderà un logaritmo determinato.

**469.** Imaginiamo ora che in ciascun intervallo compreso tra due termini consecutivi della progressione geometrica venga inserito uno stesso numero *qualunque* di medi geometrici; ed *equal* numero di medi aritmetici venga inserito in ciascun intervallo compreso tra due termini consecutivi della progressione aritmetica. Sappiamo [441,457] che risultano due nuove progressioni; ed è manifesto che il loro insieme ha la stessa proprietà fondamentale delle due progressioni primitive; proprietà che, seguitando a dir logaritmo di qualunque termine della progressione geometrica il termine corrispondente dell' altra progressione, si può accennare dicendo che:

*Il logaritmo del prodotto di due termini della progressione geometrica è la somma dei logaritmi dei fattori.*

**470. Oss.** È manifesto che qualunque numero che si presenti inserendo dei medi fra i termini della progressione geometrica, si può presentare anche inserendo un numero diverso di medi. Ad es., se dopo di aver inserito 10 medi geometrici tra due numeri $a$, $b$ inseriamo un medio geometrico in ciascuno intervallo, otteniamo la stessa progressione che se avessimo inseriti d'un tratto tra $a$ e $b$ 21 medi. Ora proveremo che il logaritmo d'un numero che possa essere inserito fra i termini della progressione geometrica è indipendente dal numero dei medi inseriti.

Supponiamo di inserire $m$ medi geometrici tra i due termini consecutivi $q^2$ ed $q^3$ della progressione geometrica. Il quoziente della nuova progressione [454] è $\sqrt[m+1]{q}$, e il medio *h.esimo* [451] è espresso da $q^2 \sqrt[m+1]{q}^{\,h}$. Affine di avere il logaritmo di questo numero, dobbiamo [469] inserire $m$ medi aritmetici tra $2d$ e $3d$, e calcolare l'*h.esimo* medio. La differenza [441] è $\frac{d}{m+1}$, e l'*h.esimo* medio [435] è $2d + \frac{d}{m+1}h$.

Supponiamo di inserire, invece di $m$ medi, $n$ medi geometrici fra $q^2$ e $q^3$. Il *k.esimo* medio è:

$$q^2 \sqrt[n+1]{q}^{\,k},$$

ed il suo logaritmo [469] è:

$$2d + \frac{d}{n+1}k.$$

Ammettiamo ora che sia:

$$q^2 \sqrt[m+1]{q}^{\,h} = q^2 \sqrt[n+1]{q}^{\,k}$$

(cosicchè uno stesso numero si sarebbe ottenuto, una volta inserendo $m$ medi, e una seconda volta quando furono inseriti $n$ medi). Proveremo che anche i logaritmi sono eguali.

Dall'ultima eguaglianza, sopprimendo il fattore comune ed elevando poi a potenza con l'esponente $(m+1)(n+1)$, si ottiene [224, 4°]:

$$q^{h(n+1)} = q^{k(m+1)},$$

donde segue essere:

$$h(n+1) = k(m+1),$$

epperò
$$\frac{h}{m+1} = \frac{k}{n+1}.$$

Per conseguenza è:

$$2d + \frac{d}{m+1}h = 2d + \frac{d}{n+1}k, \quad \text{c. d. d.}$$

**471.** Sappiamo [440,458] che, dati due numeri $a$, $b$, non possono far parte di una progressione, vuoi geometrica od aritmetica, a cui appartengano i numeri dati, se non numeri che sodisfacciano a date condizioni.

Ad es., ad una progressione geometrica a cui appartengano i numeri 10 e 1000 non possono appartenere [458] numeri interi che non siano potenze di 10.

E ad una progressione aritmetica, a cui appartengano due numeri razionali, non possono appartenere numeri irrazionali.

Perciò, all'intento che ogni numero abbia logaritmo e che qualsivoglia quantità algebrica sia logaritmo d'un numero, completeremo la definizione nel modo seguente:

*Si dice logaritmo d'un numero, che non può far parte di nessuna progressione geometrica dedotta dalla progressione fondamentale, la quantità che è compresa tra i logaritmi dei numeri maggiori del dato e i logaritmi dei numeri che sono minori del dato, e che appartengono a progressioni dedotte dalla progressione geometrica fondamentale.*

Poichè, inserendo fra due numeri dati dei medi geometrici [456] od aritmetici [439] in numero abbastanza grande, si può ottenere che la differenza tra due medi consecutivi sia minore d'un numero dato qualunque, le parole precedenti accennano due coppie di classi contigue, le quali determinano, una il numero dato e l'altra il suo logaritmo.

**472.** Poichè a numeri che appartengono a progressioni dedotte dalla progressione geometrica corrispondono quantità che appartengono a progressioni dedotte dalla progressione aritmetica; quantità, che non possono appartenere a progressioni dedotte dalla progressione aritmetica, sono logaritmi di numeri che non possono appartenere a progressioni dedotte dalla progressione geometrica fondamentale.

**473.** Scelti il quoziente della progressione geometrica e la differenza della progressione aritmetica fondamentali, resta stabilito *un sistema di logaritmi.* Mutando solo il quoziente o soltanto la differenza, si ottiene un altro sistema.

Quando si parla di logaritmi, si ammette sia stato scelto il sistema. In questa ipotesi, il logaritmo di un numero $n$ si rappresenta col simbolo $\lg n$, senz'altro.

## Proprietà di qualunque sistema di logaritmi.

**474. Teor.** *Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.*

**Dim.** 1°. Siano dapprima due soli i fattori, ed ammettiamo in aggiunta che ambidue siano termini di una progressione geometrica dedotta dalla progressione geometrica fondamentale inserendo uno stesso numero di medi in ciascuno intervallo compreso tra due termini consecutivi. Sappiamo [464], supposto che $a$ e $b$ siano i fattori, che il prodotto $ab$ è un termine della stessa progressione, e che [466] è appunto:

$$\lg (a b) = \lg a + \lg b.$$

2°. Supponiamo, in secondo luogo, che uno o nessuno dei fattori $a, b$ possa appartenere a progressione dedotta dalla geometrica fondamentale, o che non possano appartenere ambidue ad una stessa di codeste progressioni.

In ciascuno intervallo compreso fra due termini consecutivi della progressione geometrica fondamentale inseriamo $m$ medi. Chiamiamo $h, k$ i termini tra i quali cade $a$; chiamiamo $p, q$ quelli tra i quali cade $b$. Il prodotto $ab$ cade tra i prodotti $hp$ e $kq$, i quali appartengono [464] alla stessa progressione. (*).

Ammesso che ambedue le progressioni fondamentali siano crescenti (analoghe considerazioni varrebbero per gli altri casi), essendo:

$$\lg h < \lg a < \lg k,$$
$$\lg p < \lg b < \lg q,$$

egli è:

$$\lg h + \lg p < \lg a + \lg b < \lg k + \lg q.$$

D'altra parte, essendo:

$$hp < ab < kq,$$

è anche:

$$\lg (hp) < \lg (ab) < \lg (kq),$$

ossia, per il primo caso,:

$$\lg h + \lg p < \lg (ab) < \lg k + \lg q.$$

Ma poichè, prendendo $m$ grande a bastanza, si può ottenere che le differenze $(\lg k - \lg h)$, $(\lg q - \lg p)$ e quindi la differenza $\{(\lg k + \lg q) - (\lg h + \lg p)\}$ siano minori di un numero dato qualunque, la differenza tra $\lg (ab)$ e $(\lg a + \lg b)$ è nulla, ossia è:

$$\lg (ab) = \lg a + \lg b.$$

(*) Nè ora, nè prima abbiamo detto che i termini sono consecutivi.

3°. Il teorema si estende facilmente a un numero qualunque di fattori. Ad es., si ha:

$$\lg(abcde) = \lg(abcd) + \lg e$$
$$\text{"} \qquad = \lg(abc) + \lg d + \lg e,$$

e così via.

**475. Cor. 1°.** *Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza tra i logaritmi del dividendo e del divisore.*

**Dim.** Siano $a$ e $b$ due numeri qualunque, e si consideri l'identità:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Prendendo i logaritmi dei due membri, si ha [474]:

$$\lg \frac{a}{b} + \lg b = a,$$

donde: $$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$ c. d. d.

**476. Cor. 2°.** *Il logaritmo di una potenza (ad esponente intero e positivo) è uguale al logaritmo della base moltiplicato per l'esponente.*

**Dim.** Sia una quantità $a$ positiva, ed un numero $n$ intero e positivo. Essendo:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a,$$ egli è:

$$\lg(a^n) = \lg a + \lg a + \ldots + \lg a,$$

ossia $$\lg(a^n) = n \lg a,$$ c. d. d.

**477. Cor. 3°.** *Il logaritmo di un radicale si ottiene dividendo per l'indice il logaritmo del radicando.*

**Dim.** Si prendano i logaritmi dei due membri dell'identità:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Applicando il precedente teorema, si ha:

$$n \lg \sqrt[n]{a} = \lg a,$$

donde $$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}, \qquad \text{c. d. d.}$$

## Concetto d' un sistema di logaritmi.

**478. Teor.** *I logaritmi di numeri, che formino una progressione geometrica, formano una progressione aritmetica.*

**Dim.** Sia la progressione geometrica crescente:

$$\div\!\div \; . \; . \; . \; a, \; b \; . \; . \; . \; m, \; n \; . \; . \; . \; . \; p, \; q \; . \; . \; .$$

Consideriamo due coppie di termini consecutivi, siano le due $m$, $n$ e $p$, $q$. Essendo [447]:

$$n : m = q : p,$$

egli è [475]:

$$\lg n - \lg m = \lg q - \lg p.$$

Codesta eguaglianza prova [431] appunto che i logaritmi dei termini della precedente progressione geometrica formano una progressione aritmetica.

**479.** In seguito al precedente teorema si può dire che:

*Un sistema di logaritmi è costituito dall'insieme della serie dei numeri (aritmetici) e della serie delle quantità algebriche con i loro elementi posti in corrispondenza talmente che ad elementi della prima serie che formino progressione geometrica, corrispondono elementi della seconda formanti progressione aritmetica.*

## Sistema dei logaritmi volgari.

**480.** Atteso che il nostro sistema di numerazione ha per base il numero 10, fra i sistemi di logaritmi merita d'esser preferito quello che ha per fondamento le progressioni:

$$
\begin{array}{lllllll}
\div\!\div & \ldots & 0{,}01 & 0{,}1 & 1 & 10 & 100 \;\ldots \\
\div & \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \;\ldots
\end{array}
$$

I logaritmi di codesto sistema si dicono *tavolari* o *volgari*. In così fatto sistema i logaritmi dei numeri interi, che non siano potenze di 10, sono irrazionali; nelle tavole sono dati, per approssimazione, in decimali.

Per il seguito della teoria dei logaritmi vedi i §§ dal 412 al 429 incl. Il § 411 è surrogato dal 458. (Questa avvertenza suppone che dei due modi in cui si può esporre la teoria dei logaritmi, si sia preferito quello che ha per fondamento il confronto di due progressioni). Nel § 419 è necessaria la modificazione che segue.

Per provare che in una tavola di logaritmi da un certo punto in poi due o più differenze tavolari consecutive sono eguali, bisogna provare che, prendendo $m$ grande abbastanza, si può ottenere chè il logaritmo della quantità:

$$1 + \frac{1}{m^2 - 1}$$

sia minore d'una quantità data $\varepsilon$ per quanto piccola. Consideriamo perciò i due intervalli:

$$
\begin{array}{llll}
\div\!\div & \ldots & 1, & q \;\ldots \\
\div & \ldots & 0, & d, \;\ldots
\end{array}
$$

delle progressioni fondamentali, e supponiamo di inserire tra 0 e $d$ dei medi aritmetici in numero grande abbastanza, perchè il primo, che indicheremo con $h$, sia minore di $\varepsilon$. Inserito egual numero di medi geometrici fra 1 e $q$, chiamiamo $(1 + k)$ il primo medio; talchè è:

$$\lg (1 + k) = h.$$

Allora preso $m$ grande abbastanza, perchè riesca:

$$\frac{1}{m^2 - 1} < k,$$

essendo per conseguenza:

$$\lg\left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right) < \lg(1 + k),$$

egli è, a maggior ragione,:

$$\lg\left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right) < \varepsilon.$$

## Interessi composti.

**481.** Un capitale si dice impiegato ad *interesse composto*, quando è convenuto che gl' interessi maturati alla fine d' ogni anno (e in generale alla fine d' un periodo stabilito di tempo) si aggiungano al capitale e producano insieme con esso il frutto dell' anno seguente, e così per più anni successivi fino alla restituzione del capitale insieme con tutti gl' interessi.

**482.** Sia $r$ l'interesse dell'unità di capitale, $c$ il capitale primitivo e $C$ il *montante*, ossia ciò che diventa il capitale in $n$ anni.

Alla fine del primo anno il capitale sarà divenuto:

$$c + cr = c(1 + r).$$

Questo primo risultato ci permette di dire che: per calcolare che cosa diventa un capitale in un anno, bisogna moltiplicarlo per $(1 + r)$. Alla fine di $n$ anni, egli è per conseguenza:

$$C = c(1 + r)^n. \tag{1}$$

**483.** Nel caso che il capitale non sia impiegato per un numero intero d' anni, ma per numero intero d' anni $n'$, e per una frazione $f$ di anno, si calcolerà, secondo la formula precedente, ciò che diventa il capitale nel tempo $n'$, e si aggiungerà l'interesse semplice che il risultato produce durante il tempo $f$.

**484.** Per la pratica si fa una convenzione che ha per effetto di rendere la formula (1) valida anche per il caso in cui $n$ sia frazionario. Codesta convenzione consiste nell'ammettere che, in luogo di capitalizzare gl'interessi alla fine d'ogni anno, si capitalizzino alla fine d'una parte aliquota dell'anno, e a tale tassa d'interesse che alla fine d'un anno l'unità di capitale sia diventata medesimamente $1 + r$.

Sia adunque un tempo frazionario $\frac{p}{q}$, dove $p$ e $q$ sono numeri interi. L'unità di tempo sia la frazione $\frac{1}{q}$ di anno, ed indichiamo con $x$ l'interesse prodotto dall'unità di capitale in questo periodo. In un anno, cioè in $q$ periodi, l'unità di capitale diventerà [482]:

$$(1 + x)^q.$$

Quindi l'eguaglianza:

$$(1 + x)^q = 1 + r,$$

donde: $1 + x = \sqrt[q]{1 + r} = (1 + r)^{\frac{1}{q}}$.

Dopo $p$ periodi, cioè alla fine del tempo $\frac{p}{q}$, l'unità di capitale sarà diventata:

$$(1 + x)^p = (1 + r)^{\frac{p}{q}},$$

ed il capitale $c$ sarà diventato:

$$C = c\,(1 + r)^{\frac{p}{q}}.$$

Codesta relazione, quando $p$ sia multiplo di $q$, coincide con la formula che abbiamo trovata nell'ipotesi che il tempo fosse un numero intero. Così, rappresentando il valore del tempo, sia esso intero o frazionario, con $n$, la formula fondamentale dell'interesse composto è ancora:

$$C = c\,(1 + r)^n. \qquad (1)$$

**485.** Sull'interesse composto si possono dare quattro differenti questioni, secondo cioè che sia incognita l'una o l'altra delle quattro quantità ch'entrano nella formula (1), e siano note le altre tre.

In ogni caso giova risolvere la questione valendosi delle tavole logaritmiche.

Prendendo i logaritmi dei due membri della (1), risulta l'eguaglianza:

$$\lg C = \lg c + n \lg (1 + r), \qquad (2)$$

che si trasforma nelle tre seguenti:

$$\lg c = \lg C - n \lg (1 + r), \qquad (3)$$

$$\lg (1 + r) = \frac{\lg C - \lg c}{n}, \qquad (4)$$

$$n = \frac{\lg C - \lg c}{\lg (1 + r)}, \qquad (5)$$

le quali indicano rispettivamente la risoluzione dei seguenti problemi:

*Che somma bisogna collocare ad interesse composto alla tassa unitaria* r, *per avere alla fine di* n *anni il capitale* C? (*).

*A che tassa unitaria fu impiegato il capitale* c, *se nel tempo* n *è diventato* C?

*Per quanto tempo si dovrà impiegare ad interesse composto il capitale* c, *alla tassa unitaria* r, *perchè ne risulti il capitale* C?

## Annualità.

**486.** Si dà il nome di *annualità* ad una somma di danaro che si paga ad ogni dato periodo di tempo (in generale annualmente) o per formare un capitale, o per estinguere un debito.

(*) Codesto problema si può enunciare così: *Quale è il valore attuale di un capitale* C *pagabile tra* n *anni?*

**487. Formazione d'un capitale mediante annualità.** *Per* n *anni, al principio d'ogni anno, si versa un' annualità costante* a; *la tassa unitaria dell' interesse composto è* r. *Si calcoli l' ammontare del capitale che si ottiene alla fine dell'* n.esimo *anno.*

Calcoleremo separatamente la parte del capitale dovuta ad ogni singola annualità, e sommeremo i risultati.

Poichè la prima annualità resta impiegata per $n$ anni, la seconda per $(n - 1)$, la terza per $(n - 2)$, ecc., infine l'ultima per un anno, i relativi montanti, per la formula dell'interesse composto, sono:

$$a(1 + r)^n, \quad a(1 + r)^{n-1}, \; \ldots \; a(1 + r).$$

Codeste quantità formano una progressione geometrica di $n$ termini, della quale $a(1 + r)$ è il primo termine, ed $(1 + r)$ è il quoziente. Applicando la formula [459]:

$$s = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

indicando con $A$ la somma, abbiamo:

$$A = \frac{a(1 + r)\{(1 + r)^n - 1\}}{r}.$$

Questa formula dà il valore d'un capitale, formato mediante annualità, un anno dopo il versamento dell' ultima.

**488.** L' ultima formula contiene le quattro quantità: $A$, $a$, $n$ ed $r$; quando tre di queste siano note, si può proporsi di determinare la quarta.

Il caso in cui l'incognita sia $r$ non ha nessun interesse pratico. Quando $r$ sia nota, si comincia, o mediante logaritmi, od altrimenti, a calcolare il valore di $(1 + r)^n - 1$; detto $z$ il risultato, si ha poi:

$$\lg A = \lg a + \lg(1 + r) + \lg z - \lg r,$$

la quale relazione, per il calcolo di $a$, si trasforma nella seguente:

$$\lg a = \lg A - \lg(1 + r) - \lg z + \lg r.$$

Il valore di $n$ è dato da:

$$n = \frac{\lg \{ rA + a(1 + r) \} - \lg a}{\lg(1 + r)} - 1.$$

In questo caso la natura della questione richiede che $n$ sia un numero intero. Se non risulta tale, il problema è impossibile. Allora si può proporsi di mutare $a$ od $A$, così che il numero delle annualità divenga intero.

**489. Ammortimenti.** *Un debito* A *si vuol pagare insieme con gl' interessi composti, in* n *rate annuali, cominciando dopo passato il primo anno. Sia* r *la tassa unitaria ed* a *l' ammontare di ciascuna rata.*

Ciascuna annualità $a$ si deve manifestamente riguardare come un capitale collocato ad interesse composto alla tassa stessa del capitale. Perciò la prima rata $a$ negli $(n - 1)$ anni, che trascorrono dall' istante in cui viene versata fino a quello in cui con l' ultima si salda il debito, diventa:

$$a(1 + r)^{n-1}.$$

Analogamente la seconda annualità diverrà:

$$a(1 + r)^{n-2},$$

e così via fino all' ultima. La somma di questi valori, poichè costituiscono una progressione geometrica di $n$

termini, della quale $a$ è il primo termine ed $(1+r)$ è il quoziente, è espressa:

$$\frac{a(1+r)^n - a}{r}.$$

D'altra parte il capitale prestato $A$, in $n$ anni, diventa

$$A(1+r)^n.$$

Dev'essere adunque:

$$A(1+r)^n = \frac{a(1+r)^n - a}{r}.$$

Codesta formula contiene le quattro quantità $A$, $a$, $r$ ed $n$; quando tre di queste siano note, si può calcolare la quarta. Il caso in cui è incognito $r$ non ha nessun interesse pratico.

Nel linguaggio comune si dice che l'annualità $a$ *ammortizza* in $n$ anni (o semestri,...) la somma $A$, sborsata un anno prima del primo versamento.

### Esercizi.

**716.** Il primo termine d'una progressione aritmetica è 3, il tredicesimo è 55. Si trovi la differenza.

**717.** Si inseriscano 4 medi aritmetici tra 100 e 40.

**718.** Si inseriscano 10 medi aritmetici tra $-7$ e 114.

**719.** La somma di 15 termini d'una progressione aritmetica è 600; la differenza è 5. Si trovino i termini estremi.

**720.** In qual caso la somma dei primi $n$ numeri naturali è pari; e quando è essa dispari?

**721.** Si esprima la somma dei primi $n$ numeri dispari.

**722.** Trovare la somma dei primi $n$ numeri della forma $4m+1$. (I numeri si formerebbero attribuendo successivamente ad $m$ i valori $0, 1, 2, 3.., n-1$).

**723.** Provare che i quadrati di $x^2-2x-1$, $x^2+1$, ed $x^2+2x-1$ sono in progressione aritmetica.

**724.** Esprimere la somma di $n$ termini della serie:

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 \ldots$$

(Si determinerà dapprima la somma degli $n$ termini positivi, ecc........).

725. A quale condizione devono sodisfare tre quantità $a, b, c$, per poter essere i termini $m^o$, $n^o$, $p^o$ d'una progressione aritmetica? (Quanti termini si trovano fra $a$ e $b$; epperò quale dev' essere la differenza?...).

726. Dimostrare che la somma di $2n + 1$ numeri interi consecutivi è divisibile per $2n + 1$.

727. Sommando o sottraendo ordinatamente i termini di due progressioni aritmetiche, si ottengono risultati che stanno in progressione aritmetica.

728. Se nell'espressione $ax + b$ si sostituiscono ordinatamente, in luogo della $x$, i termini di una progressione aritmetica, si ottengono risultati, che sono in progressione aritmetica.

729. Se $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ ed $\frac{1}{b+c}$ sono in progressione aritmetica, sono in progressione aritmetica anche $a^2$, $b^2$, $c^2$.

730. Le differenze tra i quadrati dei numeri naturali formano una progressione aritmetica.

731. Le differenze tra i quadrati di quantità, che stiano in progressione aritmetica, formano esse pure una progressione aritmetica.

732. Quanti termini della progressione aritmetica 10, 8, 6... ecc. conviene prendere, perchè risulti una somma eguale a 30; e quanti per ottenere una somma eguale a 28?

733. Quanti termini della progressione 3, 5, 7 ecc. bisogna sommare, perchè risulti 24?

734. Il primo termine di una progressione aritmetica è:

$$n^2 - n + 1,$$

la differenza è 2. Si trovi la somma di $n$ termini.

735. Si divida 85 in parti, che stiano in progressione aritmetica. La prima parte sia eguale a 7, la differenza sia eguale ad $\frac{1}{3}$. Quante sono le parti, e quale l'ultima?

736. Trovare quanti termini della progressione 1, 3, 5, 7 ecc. danno per somma 12345654321.

X 737. Il 14°, il 134° e l'ultimo termine di una progressione aritmetica sono eguali rispettivamente a 66, 666, 6666. Si trovi il primo termine e il numero dei termini.

738. Se in una serie ogni termine è la semisomma di quelli che lo comprendono, la serie è una progressione aritmetica.

**739.** Cento pietre sono schierate alla distanza di 10 metri l'una dall'altra. Quanta strada deve fare un operaio per portarle ad una ad una nel luogo occupato dalla prima pietra? (Si supporrà che l'operaio prenda le mosse dalla prima pietra).

**740.** Calcolare i valori dei lati di un triangolo rettangolo, sapendo che formano una progressione aritmetica la cui differenza è 7.

**741.** Due mobili partono nel medesimo istante dalle estremità di un segmento $A\,B$, lungo 289 metri, e si muovono uno verso l'altro. Il primo percorre 3 metri nel primo minuto, 4 nel secondo, 5 nel terzo e così via; l'altro mobile percorre costantemente 6 metri al minuto. Si domanda dopo quanti minuti accadrà l'incontro dei due mobili.

**742.** Due mobili $M$ ed $N$ partono nel medesimo istante rispettivamente da due punti $A$ e $B$ distanti tra loro 75 metri, e si muovono sulla retta $A\,B$ nello stesso senso; $M$ insegue $N$. Il mobile $M$ percorre 1 metro nel primo minuto, 3 nel secondo, 5 nel terzo, e così via. L'altro mobile percorre 3 metri nel primo minuto, 4 nel secondo, 5 nel terzo, e così via. Si domanda dopo quanti minuti avviene l'incontro.

**743.** Una nave, contenente 175 uomini, aveva acqua abbastanza per il viaggio. Dopo il trentesimo giorno, l'equipaggio perdè giornalmente 3 uomini, e una tempesta ritardò il viaggio di 3 settimane. Così l'acqua bastò egualmente fino al compimento del viaggio. Si domanda quanti giorni esso sia durato.

**744.** La somma di tre numeri in progressione aritmetica è uguale a 21, e la somma dei loro quadrati è uguale a 179. Si trovino i tre numeri. (S'indichi con $x$ il medio e con $y$ la differenza).

**745.** Trovare tre numeri in progressione aritmetica, sapendo che la loro somma è uguale a 21, e che la somma del primo e del secondo è uguale a $\frac{3}{4}$ di quella del secondo e del terzo.

**746.** La somma di tre numeri in progressione aritmetica è uguale a 10, e il prodotto del secondo e del terzo è uguale a $\frac{100}{3}$. Si trovino i tre numeri.

**747.** Trovare 5 numeri in progressione aritmetica, conoscendone la somma e il prodotto. (S'indichi con $x$ il termine medio e con $y$ la differenza medio).

**748.** Trovare quattro numeri in progressione aritmetica, conoscendone la somma e quella dei loro valori inversi. (Si indichi con $x - 3y$ il termine minore e con $2y$ la differenza).

**749.** La somma di 5 numeri in progressione aritmetica è uguale a 35 e il prodotto è uguale a 10395. Si trovino i 5 numeri. (Si dirà $x$ il medio ed $y$ la differenza).

**750.** In una progressione aritmetica di 10 termini, la somma di tutti i termini è uguale a 65, e la somma dei loro quadrati è eguale a 1165. Quali sono i termini estremi? (Si rappresentino i due termini di mezzo con $x - y$ ed $x + y$).

**751.** Un numero è scritto con tre cifre, i cui valori assoluti sono in progressione aritmetica. Dividendolo per la somma delle tre cifre, si ha per quoziente 26. Aggiungendogli 198, si ottiene il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate nell'ordine opposto. Si trovi il numero.

**752.** Se si prendono i $(2n + 1)$ primi numeri dispari, la somma dei seguenti: 1, 5, 9, 13 ecc. sta alla somma dei rimanenti 3, 7, 11 ecc., come $n + 1$ sta ad $n$.

**753.** Determinare la lunghezza della carta formante un rotolo, conoscendo il raggio del rotolo e il numero dei giri. (Si supponga che ciascun giro della carta sia compreso tra due superficie cilindriche).

**754.** Dimostrare che la somma dei quadrati dei primi $n$ numeri è uguale a $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2 \cdot 3}$.

(La somma è uguale a quella dei numeri in corsivo. Compiuto il quadrato si osservi che la somma dei numeri che sono da una banda della diagonale è doppia di quella dei numeri che sono dall'altra. Si può quindi trovar questa somma. Ecc.).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 1 | 1 | 1 | . | . | 1 |
| *2* | *2* | 2 | 2 | . | . | 2 |
| *3* | *3* | *3* | 3 | . | . | 3 |
| *4* | *4* | *4* | *4* | . | . | 4 |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| *n* | *n* | *n* | *n* | . | . | *n* |

**755.** Le differenze fra i termini consecutivi d'una progressione geometrica sono esse pure in progressione geometrica.

**756.** Trovare la somma dei termini di una progressione geometrica di cui sono dati il primo ed il quinto termine.

757. Dimostrare che in una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante.

758. In una progressione geometrica di un numero dispari di termini, il termine medio è medio proporzionale fra gli estremi.

759. Esprimere il prodotto dei termini di una progressione geometrica.

760. Moltiplicando tra loro, o dividendo, ordinatamente, i termini di due progressioni geometriche, si ottiene una progressione geometrica.

761. Se due progressioni geometriche hanno medesimo quoziente, o esse sono identiche, o non hanno nessun termine comune. In questo secondo caso, tra due termini consecutivi d' una progressione cade un termine e uno solo dell' altra.

762. Si esprima la somma dei divisori di un numero. Quindi si provi che, se $2^n - 1$ è un numero primo, il numero:

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

è *perfetto*, eguale cioè alla somma de' suoi divisori, escluso da questi se stesso.

763. In una progressione geometrica composta di $2n$ termini, la somma di quelli di posto pari è $a$, la somma degli altri è $b$. Si determini la progressione. (Si consideri il rapporto delle due somme,..).

764. Una progressione geometrica è composta di 7 termini. La somma de' sei primi è uguale a $7 + \frac{1}{2}$ e la somma de' sei ultimi è doppia della prima somma. Si determini la progressione.

765. Il quinto termine di una progressione geometrica è uguale a 9, l'ottavo è 72. Si trovi il primo termine.

766. Trovare tre numeri in progressione geometrica che superino egualmente i numeri 3, 5, 8.

767. La somma e la differenza dei medi aritmetico e geometrico di due numeri sono eguali rispettivamente a 9 e all'unità. Si trovino i due numeri.

768. Il secondo termine di una progressione geometrica decrescente è uguale ad $m$; il limite della somma è uguale ad $n$. Si trovi il primo termine.

769. Due mobili $M$ ed $M_1$ partono nel medesimo istante da due punti $A$ e $B$ posti ad una distanza di m. 240. La velocità

di $M_1$ sta a quella di $M$ come 5 sta a 9. Quanta strada deve fare $M$ per raggiungere $M_1$? (Si considererà l'incognita come il limite della somma dei termini di una progressione geometrica decrescente).

**770.** Le lancette delle ore e dei minuti si trovano in coincidenza tra le 4 e le 5. Si dica l'ora segnata dall'orologio. (Medesima osservazione che per l'esercizio precedente).

**771.** Posto che $s_n$ rappresenti la somma di $n$ termini di una progressione geometrica, si esprima la seguente somma:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n.$$

(Si consideri il valore di $s$ sotto la forma:

$$s = \frac{a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}.$$

I primi termini dei singoli binomi sono in progressione geometrica ...).

**772.** Il quadrato del medio aritmetico fra due quantità è uguale al medio aritmetico fra i due medi, aritmetico e geometrico, dei quadrati delle quantità primitive.

**773.** Calcolare la somma dei termini della serie illimitata:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32} \ldots.$$

(In luogo della frazione $\frac{4}{16}$ si scriva in colonna quattro volte $\frac{1}{16}$; e così per ognuno degli altri termini. Le varie frazioni, che si troveranno schierate in una riga orizzontale, formano una progressione geometrica decrescente, illimitata, ecc. Infine si cercherà la somma delle somme parziali).

**774.** Trovare la somma di $n$ termini della serie:

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ldots\ldots$$

(Si moltiplichino i termini per $\frac{1}{2}$ e poi si faccia la differenza dei polinomi).

**775.** Si risolva l'equazione:

$$a^1 \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a^7 \ldots a^{2x+1} = b.$$

(Quanti sono i fattori? ...).

# LOGARITMI

| | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | | 0043 | | 0086 | | 0128 | | 0170 | | 0212 | | 0253 | | 0294 | | 0334 | | 0374 | |
| 11 | 0414 | 39 | 0453 | 39 | 0492 | 39 | 0531 | 38 | 0569 | 38 | 0607 | 38 | 0645 | 37 | 0682 | 37 | 0719 | 36 | 0755 | 37 |
| 12 | 0792 | 36 | 0828 | 36 | 0864 | 35 | 0899 | 35 | 0934 | 35 | 0969 | 35 | 1004 | 34 | 1038 | 34 | 1072 | 34 | 1106 | 33 |
| 13 | 1139 | 34 | 1173 | 33 | 1206 | 33 | 1239 | 32 | 1271 | 32 | 1303 | 32 | 1335 | 32 | 1367 | 32 | 1399 | 31 | 1430 | 31 |
| 14 | 1461 | 31 | 1492 | 31 | 1523 | 30 | 1553 | 31 | 1584 | 30 | 1614 | 30 | 1644 | 29 | 1673 | 30 | 1703 | 29 | 1732 | 29 |
| 15 | 1761 | 29 | 1790 | 28 | 1818 | 29 | 1847 | 28 | 1875 | 28 | 1903 | 28 | 1931 | 28 | 1959 | 28 | 1987 | 27 | 2014 | 27 |
| 16 | 2041 | 27 | 2068 | 27 | 2095 | 27 | 2122 | 26 | 2148 | 27 | 2175 | 26 | 2201 | 26 | 2227 | 26 | 2253 | 26 | 2279 | 25 |
| 17 | 2304 | 26 | 2330 | 25 | 2355 | 25 | 2380 | 25 | 2405 | 25 | 2430 | 25 | 2455 | 25 | 2480 | 24 | 2504 | 25 | 2529 | 24 |
| 18 | 2553 | 24 | 2577 | 24 | 2601 | 24 | 2625 | 23 | 2648 | 24 | 2672 | 23 | 2695 | 23 | 2718 | 24 | 2742 | 23 | 2765 | 23 |
| 19 | 2788 | 22 | 2810 | 23 | 2833 | 23 | 2856 | 22 | 2878 | 22 | 2900 | 23 | 2923 | 22 | 2945 | 22 | 2967 | 22 | 2989 | 21 |
| 20 | 3010 | 22 | 3032 | 22 | 3054 | 21 | 3075 | 21 | 3096 | 22 | 3118 | 21 | 3139 | 21 | 3160 | 21 | 3181 | 20 | 3201 | 21 |
| 21 | 3222 | 21 | 3243 | 20 | 3263 | 21 | 3284 | 20 | 3304 | 20 | 3324 | 21 | 3345 | 20 | 3365 | 20 | 3385 | 19 | 3404 | 20 |
| 22 | 3424 | 20 | 3444 | 20 | 3464 | 19 | 3483 | 19 | 3502 | 20 | 3522 | 19 | 3541 | 19 | 3560 | 19 | 3579 | 19 | 3598 | 19 |
| 23 | 3617 | 19 | 3636 | 19 | 3655 | 19 | 3674 | 18 | 3692 | 19 | 3711 | 18 | 3729 | 18 | 3747 | 19 | 3766 | 18 | 3784 | 18 |
| 24 | 3802 | 18 | 3820 | 18 | 3838 | 18 | 3856 | 18 | 3874 | 18 | 3892 | 17 | 3909 | 18 | 3927 | 18 | 3945 | 17 | 3962 | 17 |
| 25 | 3979 | 18 | 3997 | 17 | 4014 | 17 | 4031 | 17 | 4048 | 17 | 4065 | 17 | 4082 | 17 | 4099 | 17 | 4116 | 17 | 4133 | 17 |
| 26 | 4150 | 16 | 4166 | 17 | 4183 | 17 | 4200 | 16 | 4216 | 16 | 4232 | 17 | 4249 | 16 | 4265 | 16 | 4281 | 17 | 4298 | 16 |
| 27 | 4314 | 16 | 4330 | 16 | 4346 | 16 | 4362 | 16 | 4378 | 15 | 4393 | 16 | 4409 | 16 | 4425 | 15 | 4440 | 16 | 4456 | 16 |
| 28 | 4472 | 15 | 4487 | 15 | 4502 | 16 | 4518 | 15 | 4533 | 15 | 4548 | 16 | 4564 | 15 | 4579 | 15 | 4594 | 15 | 4609 | 15 |
| 29 | 4624 | 15 | 4639 | 15 | 4654 | 15 | 4669 | 14 | 4683 | 15 | 4698 | 15 | 4713 | 15 | 4728 | 14 | 4742 | 15 | 4757 | 14 |
| 30 | 4771 | 15 | 4786 | 14 | 4800 | 14 | 4814 | 15 | 4829 | 14 | 4843 | 14 | 4857 | 14 | 4871 | 15 | 4886 | 14 | 4900 | 14 |
| 31 | 4914 | 14 | 4928 | 14 | 4942 | 13 | 4955 | 14 | 4969 | 14 | 4983 | 14 | 4997 | 14 | 5011 | 13 | 5024 | 14 | 5038 | 13 |
| 32 | 5051 | 14 | 5065 | 14 | 5079 | 13 | 5092 | 13 | 5105 | 14 | 5119 | 13 | 5132 | 13 | 5145 | 14 | 5159 | 13 | 5172 | 13 |
| 33 | 5185 | 13 | 5198 | 13 | 5211 | 13 | 5224 | 13 | 5237 | 13 | 5250 | 13 | 5263 | 13 | 5276 | 13 | 5289 | 13 | 5302 | 13 |
| 34 | 5315 | 13 | 5328 | 12 | 5340 | 13 | 5353 | 13 | 5366 | 12 | 5378 | 13 | 5391 | 12 | 5403 | 13 | 5416 | 12 | 5428 | 13 |
| 35 | 5441 | 12 | 5453 | 12 | 5465 | 13 | 5478 | 12 | 5490 | 12 | 5502 | 12 | 5514 | 13 | 5527 | 12 | 5539 | 12 | 5551 | 12 |
| 36 | 5563 | 12 | 5575 | 12 | 5587 | 12 | 5599 | 12 | 5611 | 12 | 5623 | 12 | 5635 | 12 | 5647 | 11 | 5658 | 12 | 5670 | 12 |
| 37 | 5682 | 12 | 5694 | 11 | 5705 | 12 | 5717 | 12 | 5729 | 11 | 5740 | 12 | 5752 | 11 | 5763 | 12 | 5775 | 11 | 5786 | 12 |
| 38 | 5798 | 11 | 5809 | 12 | 5821 | 11 | 5832 | 11 | 5843 | 12 | 5855 | 11 | 5866 | 11 | 5877 | 11 | 5888 | 11 | 5899 | 12 |
| 39 | 5911 | 11 | 5922 | 11 | 5933 | 11 | 5944 | 11 | 5955 | 11 | 5966 | 11 | 5977 | 11 | 5988 | 11 | 5999 | 11 | 6010 | 11 |
| 40 | 6021 | 10 | 6031 | 11 | 6042 | 11 | 6053 | 11 | 6064 | 11 | 6075 | 10 | 6085 | 11 | 6096 | 11 | 6107 | 10 | 6117 | 11 |
| 41 | 6128 | 10 | 6138 | 11 | 6149 | 11 | 6160 | 10 | 6170 | 10 | 6180 | 11 | 6191 | 10 | 6201 | 11 | 6212 | 10 | 6222 | 10 |
| 42 | 6232 | 11 | 6243 | 10 | 6253 | 10 | 6263 | 11 | 6274 | 10 | 6284 | 10 | 6294 | 10 | 6304 | 10 | 6314 | 11 | 6325 | 10 |
| 43 | 6335 | 10 | 6345 | 10 | 6355 | 10 | 6365 | 10 | 6375 | 10 | 6385 | 10 | 6395 | 10 | 6405 | 10 | 6415 | 10 | 6425 | 10 |
| 44 | 6435 | 9 | 6444 | 10 | 6454 | 10 | 6464 | 10 | 6474 | 10 | 6484 | 9 | 6493 | 10 | 6503 | 10 | 6513 | 9 | 6522 | 10 |
| 45 | 6532 | 10 | 6542 | 9 | 6551 | 10 | 6561 | 10 | 6571 | 9 | 6580 | 10 | 6590 | 9 | 6599 | 10 | 6609 | 9 | 6618 | 10 |
| 46 | 6628 | 9 | 6637 | 9 | 6646 | 10 | 6656 | 9 | 6665 | 10 | 6675 | 9 | 6684 | 9 | 6693 | 9 | 6702 | 10 | 6712 | 9 |
| 47 | 6721 | 9 | 6730 | 9 | 6739 | 10 | 6749 | 9 | 6758 | 9 | 6767 | 9 | 6776 | 9 | 6785 | 9 | 6794 | 9 | 6803 | 9 |
| 48 | 6812 | 9 | 6821 | 9 | 6830 | 9 | 6839 | 9 | 6848 | 9 | 6857 | 9 | 6866 | 9 | 6875 | 9 | 6884 | 9 | 6893 | 9 |
| 49 | 6902 | 9 | 6911 | 9 | 6920 | 8 | 6928 | 9 | 6937 | 9 | 6946 | 9 | 6955 | 9 | 6964 | 8 | 6972 | 9 | 6981 | 9 |
| 50 | 6990 | 8 | 6998 | 9 | 7007 | 9 | 7016 | 8 | 7024 | 9 | 7033 | 9 | 7042 | 8 | 7050 | 9 | 7059 | 8 | 7067 | 9 |
| 51 | 7076 | 8 | 7084 | 9 | 7093 | 8 | 7101 | 9 | 7110 | 8 | 7118 | 8 | 7126 | 9 | 7135 | 8 | 7143 | 9 | 7152 | 8 |
| 52 | 7160 | 8 | 7168 | 9 | 7177 | 8 | 7185 | 8 | 7193 | 9 | 7202 | 8 | 7210 | 8 | 7218 | 8 | 7226 | 9 | 7235 | 8 |
| 53 | 7243 | 8 | 7251 | 8 | 7259 | 8 | 7267 | 8 | 7275 | 9 | 7284 | 8 | 7292 | 8 | 7300 | 8 | 7308 | 8 | 7316 | 8 |
| 54 | 7324 | 8 | 7332 | 8 | 7340 | 8 | 7348 | 8 | 7356 | 8 | 7364 | 8 | 7372 | 8 | 7380 | 8 | 7388 | 8 | 7396 | 8 |
| | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | |

# LOGARITMI

| | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 8 | 7412 | 7 | 7419 | 8 | 7427 | 8 | 7435 | 8 | 7443 | 8 | 7451 | 8 | 7459 | 7 | 7466 | 8 | 7474 | 8 |
| 56 | 7482 | 8 | 7490 | 7 | 7497 | 8 | 7505 | 8 | 7513 | 7 | 7520 | 8 | 7528 | 8 | 7536 | 7 | 7543 | 8 | 7551 | 8 |
| 57 | 7559 | 7 | 7566 | 8 | 7574 | 8 | 7582 | 7 | 7589 | 8 | 7597 | 7 | 7604 | 8 | 7612 | 7 | 7619 | 8 | 7627 | 7 |
| 58 | 7634 | 8 | 7642 | 7 | 7649 | 8 | 7657 | 7 | 7664 | 8 | 7672 | 7 | 7679 | 7 | 7686 | 8 | 7694 | 7 | 7701 | 8 |
| 59 | 7709 | 7 | 7716 | 7 | 7723 | 8 | 7731 | 7 | 7738 | 7 | 7745 | 7 | 7752 | 8 | 7760 | 7 | 7767 | 7 | 7774 | 8 |
| 60 | 7782 | 7 | 7789 | 7 | 7796 | 7 | 7803 | 7 | 7810 | 8 | 7818 | 7 | 7825 | 7 | 7832 | 7 | 7839 | 7 | 7846 | 7 |
| 61 | 7853 | 7 | 7860 | 8 | 7868 | 7 | 7875 | 7 | 7882 | 7 | 7889 | 7 | 7896 | 7 | 7903 | 7 | 7910 | 7 | 7917 | 7 |
| 62 | 7924 | 7 | 7931 | 7 | 7938 | 7 | 7945 | 7 | 7952 | 7 | 7959 | 7 | 7966 | 7 | 7973 | 7 | 7980 | 7 | 7987 | 6 |
| 63 | 7993 | 7 | 8000 | 7 | 8007 | 7 | 8014 | 7 | 8021 | 7 | 8028 | 7 | 8035 | 6 | 8041 | 7 | 8048 | 7 | 8055 | 7 |
| 64 | 8062 | 7 | 8069 | 6 | 8075 | 7 | 8082 | 7 | 8089 | 7 | 8096 | 6 | 8102 | 7 | 8109 | 7 | 8116 | 6 | 8122 | 7 |
| 65 | 8129 | 7 | 8136 | 6 | 8142 | 7 | 8149 | 7 | 8156 | 6 | 8162 | 7 | 8169 | 7 | 8176 | 6 | 8182 | 7 | 8189 | 6 |
| 66 | 8195 | 7 | 8202 | 7 | 8209 | 6 | 8215 | 7 | 8222 | 6 | 8228 | 7 | 8235 | 6 | 8241 | 7 | 8248 | 6 | 8254 | 7 |
| 67 | 8261 | 6 | 8267 | 7 | 8274 | 6 | 8280 | 7 | 8287 | 6 | 8293 | 6 | 8299 | 7 | 8306 | 6 | 8312 | 7 | 8319 | 6 |
| 68 | 8325 | 6 | 8331 | 7 | 8338 | 6 | 8344 | 7 | 8351 | 6 | 8357 | 6 | 8363 | 7 | 8370 | 6 | 8376 | 6 | 8382 | 6 |
| 69 | 8388 | 7 | 8395 | 6 | 8401 | 6 | 8407 | 7 | 8414 | 6 | 8420 | 6 | 8426 | 6 | 8432 | 7 | 8439 | 6 | 8445 | 6 |
| 70 | 8451 | 6 | 8457 | 6 | 8463 | 7 | 8470 | 6 | 8476 | 6 | 8482 | 6 | 8488 | 6 | 8494 | 6 | 8500 | 6 | 8506 | 7 |
| 71 | 8513 | 6 | 8519 | 6 | 8525 | 6 | 8531 | 6 | 8537 | 6 | 8543 | 6 | 8549 | 6 | 8555 | 6 | 8561 | 6 | 8567 | 6 |
| 72 | 8573 | 6 | 8579 | 6 | 8585 | 6 | 8591 | 6 | 8597 | 6 | 8603 | 6 | 8609 | 6 | 8615 | 6 | 8621 | 6 | 8627 | 6 |
| 73 | 8633 | 6 | 8639 | 6 | 8645 | 6 | 8651 | 6 | 8657 | 6 | 8663 | 6 | 8669 | 6 | 8675 | 6 | 8681 | 5 | 8686 | 6 |
| 74 | 8692 | 6 | 8698 | 6 | 8704 | 6 | 8710 | 6 | 8716 | 6 | 8722 | 5 | 8727 | 6 | 8733 | 6 | 8739 | 6 | 8745 | 6 |
| 75 | 8751 | 5 | 8756 | 6 | 8762 | 6 | 8768 | 6 | 8774 | 5 | 8779 | 6 | 8785 | 6 | 8791 | 6 | 8797 | 5 | 8802 | 6 |
| 76 | 8808 | 6 | 8814 | 6 | 8820 | 5 | 8825 | 6 | 8831 | 6 | 8837 | 5 | 8842 | 6 | 8848 | 6 | 8854 | 5 | 8859 | 6 |
| 77 | 8865 | 6 | 8871 | 5 | 8876 | 6 | 8882 | 5 | 8887 | 6 | 8893 | 6 | 8899 | 5 | 8904 | 6 | 8910 | 5 | 8915 | 6 |
| 78 | 8921 | 6 | 8927 | 5 | 8932 | 6 | 8938 | 5 | 8943 | 6 | 8949 | 5 | 8954 | 6 | 8960 | 5 | 8965 | 6 | 8971 | 5 |
| 79 | 8976 | 6 | 8982 | 5 | 8987 | 6 | 8993 | 5 | 8998 | 6 | 9004 | 5 | 9009 | 6 | 9015 | 5 | 9020 | 5 | 9025 | 6 |
| 80 | 9031 | 5 | 9036 | 6 | 9042 | 5 | 9047 | 6 | 9053 | 5 | 9058 | 5 | 9063 | 6 | 9069 | 5 | 9074 | 5 | 9079 | 6 |
| 81 | 9085 | 5 | 9090 | 6 | 9096 | 5 | 9101 | 5 | 9106 | 6 | 9112 | 5 | 9117 | 5 | 9122 | 6 | 9128 | 5 | 9133 | 5 |
| 82 | 9138 | 5 | 9143 | 6 | 9149 | 5 | 9154 | 5 | 9159 | 6 | 9165 | 5 | 9170 | 5 | 9175 | 5 | 9180 | 6 | 9186 | 5 |
| 83 | 9191 | 5 | 9196 | 5 | 9201 | 5 | 9206 | 6 | 9212 | 5 | 9217 | 5 | 9222 | 5 | 9227 | 5 | 9232 | 6 | 9238 | 5 |
| 84 | 9243 | 5 | 9248 | 5 | 9253 | 5 | 9258 | 5 | 9263 | 6 | 9269 | 5 | 9274 | 5 | 9279 | 5 | 9284 | 5 | 9289 | 5 |
| 85 | 9294 | 5 | 9299 | 5 | 9304 | 5 | 9309 | 6 | 9315 | 5 | 9320 | 5 | 9325 | 5 | 9330 | 5 | 9335 | 5 | 9340 | 5 |
| 86 | 9345 | 5 | 9350 | 5 | 9355 | 5 | 9360 | 5 | 9365 | 5 | 9370 | 5 | 9375 | 5 | 9380 | 5 | 9385 | 5 | 9390 | 5 |
| 87 | 9395 | 5 | 9400 | 5 | 9405 | 5 | 9410 | 5 | 9415 | 5 | 9420 | 5 | 9425 | 5 | 9430 | 5 | 9435 | 5 | 9440 | 5 |
| 88 | 9445 | 5 | 9450 | 5 | 9455 | 5 | 9460 | 5 | 9465 | 4 | 9469 | 5 | 9474 | 5 | 9479 | 5 | 9484 | 5 | 9489 | 5 |
| 89 | 9494 | 5 | 9499 | 5 | 9504 | 5 | 9509 | 4 | 9513 | 5 | 9518 | 5 | 9523 | 5 | 9528 | 5 | 9533 | 5 | 9538 | 4 |
| 90 | 9542 | 5 | 9547 | 5 | 9552 | 5 | 9557 | 5 | 9562 | 4 | 9566 | 5 | 9571 | 5 | 9576 | 5 | 9581 | 5 | 9586 | 4 |
| 91 | 9590 | 5 | 9595 | 5 | 9600 | 5 | 9605 | 4 | 9609 | 5 | 9614 | 5 | 9619 | 5 | 9624 | 4 | 9628 | 5 | 9633 | 5 |
| 92 | 9638 | 5 | 9643 | 4 | 9647 | 5 | 9652 | 5 | 9657 | 4 | 9661 | 5 | 9666 | 5 | 9671 | 4 | 9675 | 5 | 9680 | 5 |
| 93 | 9685 | 4 | 9689 | 5 | 9694 | 5 | 9699 | 4 | 9703 | 5 | 9708 | 5 | 9713 | 4 | 9717 | 5 | 9722 | 5 | 9727 | 4 |
| 94 | 9731 | 5 | 9736 | 5 | 9741 | 4 | 9745 | 5 | 9750 | 4 | 9754 | 5 | 9759 | 4 | 9763 | 5 | 9768 | 5 | 9773 | 4 |
| 95 | 9777 | 5 | 9782 | 4 | 9786 | 5 | 9791 | 4 | 9795 | 5 | 9800 | 5 | 9805 | 4 | 9809 | 5 | 9814 | 4 | 9818 | 5 |
| 96 | 9823 | 4 | 9827 | 5 | 9832 | 4 | 9837 | 5 | 9841 | 4 | 9845 | 5 | 9850 | 4 | 9854 | 5 | 9859 | 4 | 9863 | 5 |
| 97 | 9868 | 4 | 9872 | 5 | 9877 | 4 | 9881 | 5 | 9886 | 4 | 9890 | 4 | 9894 | 5 | 9899 | 4 | 9903 | 5 | 9908 | 4 |
| 98 | 9912 | 5 | 9917 | 4 | 9921 | 5 | 9926 | 4 | 9930 | 4 | 9934 | 5 | 9939 | 4 | 9943 | 5 | 9948 | 4 | 9952 | 4 |
| 99 | 9956 | 5 | 9961 | 4 | 9965 | 4 | 9969 | 5 | 9974 | 4 | 9978 | 5 | 9983 | 4 | 9987 | 4 | 9991 | 5 | 9996 | 4 |
| | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | |

# INDICE