EVCLIDIS ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

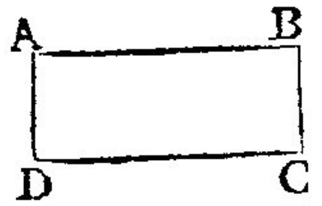
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides in ſecundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta ſint & quadrata partiũ cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectãgula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tam inter ſe, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, recte intelligenda maxime neceſſaria.

PRIORI *definitione exponit, ſub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid ſit, parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum eſt, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti; Cuius quidem duo tantum ſunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli ſunt recti, ut perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, ſi unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſario recti. Sit enim in parallelogrammo*

lelogrammo ABCD, angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint

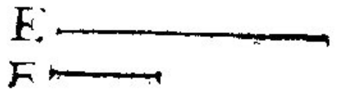
29. primi AD, BC, erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet suo opposito



34. primi est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unũ eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB, AD; vel sub AD, DC; vel sub DC, CB, vel deniq; sub AB, BC; quoniam quælibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt AB, vel DC, eius longitudinem; altera vero, ut AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB, deorsum secundum rectam AD, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum AD, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, si AD ponatur moueri in transuersum secundum rectam AB, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogramum rectangulum.

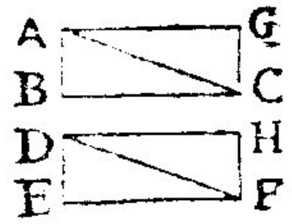
ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentũ, erit idem, quod parallelogrãmũ ABCD; quoniam latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.



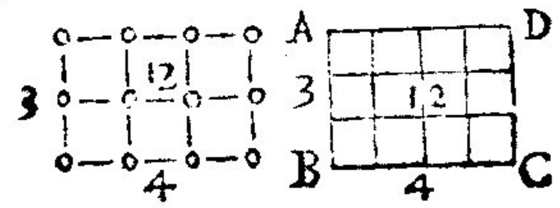
PERSPICVVM est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum; Cum enim quælibet illarum linearum æqualium æqualis sit

sit lineæ oppositæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi

ITEM manifestũ est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque vtrique, rectangulũ parallelogrãmum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, vtraq; vtriq;: Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentũ sub AB, BC æquale esse parallelogrammo rectãgulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cũ latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, triãguli DEF; & anguli B & E, æquales, nempe recti, erunt triangula ABC, DEF, æqualia; Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF: Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt. 4. primi

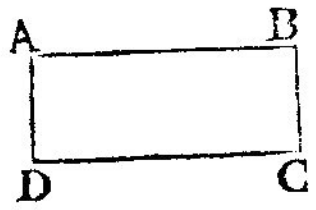


HABET autem cõprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formã parallelogrãmi cõstituitur, vnde et contineri dicitur sub 3. & 4: Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ ABCD, cõprehẽsum sub duabus rectis AB, BC quarũ illa sit 3. palmorũ, hæc autẽ 4. cõstat 12. palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ AB, 3 palmorũ in lineã BC, 4. palmorũ pducuntur, vt figura indicat notumq; est Arithmeticis, atq; Geometris. Demõstratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triãgulis propos. 16. Hinc fit, vt nõnulli dicãt, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineã BC, vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur



producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4, quam ex 4. in 3 producitur hic numerus 12.

OBITER quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum.

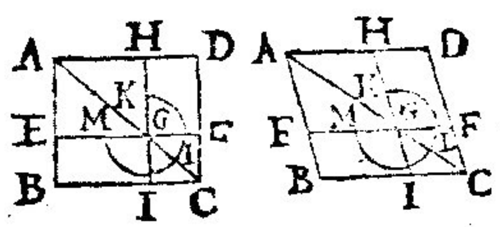


Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellant A C, *vel* B D

II.

IN omni parallelogrammo spatio, unũquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, *siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter* A C, *ex cuius puncto quolibet* G, *ducantur rectæ* E F, H I, *parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo* E H, I F, *dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo* B G, G D, *complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, ut ex* I F, *vna cum duobus complementis* B G, G D, *qualis est figura* E B C D H G E, *quam complectitur circunferentia* K L M, *dicitur Gnomon. Eadem ratione figura* F D A B I G F, *composita ex parallelogrammo* E H, *circa diametrum, & duobus*



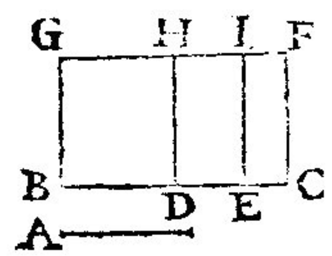
bus complementis B G, GD, *Gnomon appellabitur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. I.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.

Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur



rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, inter se quoque parallelæ *33. primi*
erũt: Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma sint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ *34 primi*
A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E; Item rectangulum E F sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis B D, DE, EC, compre-

comprehēduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

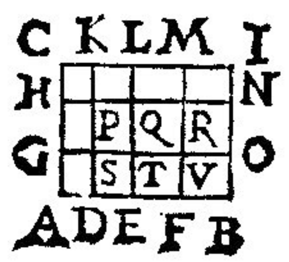
SCHOLION.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq; , vt 5. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Cōmandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum cō prehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A, *continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *cōprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub AD,* AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE. HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB GH; FB, HC, *continentur. Cōpleatur rectangulū* AI, *ducanturq;* DK, *EL, FM, parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item HN, GO, parallelæ ipsi* AB, *vel* CI; *quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniã igitur rectangulum AS, cōtinetur sub* AD, AG; *& GP sub* AD, GH; *& HK, sub* AD, HC; *(quod rectæ GS, HP, ipsi* AD, *sint æquales:)*

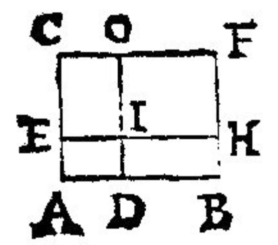


34. primi *Item*

Item rectangula DT, SQ, PI, continentur sub DE, AG; DE, GH; DE, HC; *(quod DS, SP, PK, ipsis* AG, GH, HC, *æquales sint, & ST, PQ, ipsi* DE) *Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub* EF, AG; EF, GH, EF, HC; *Nec non rectangula FO, VN, RI, sub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perspicuum est, rectangulum sub* AB, AC, *æquale esse rectangulis sub singulis partibus* AD, DE, EF, FB, *& quolibet segmentorum* AG, GH, HC, *comprehensis. Quod est propositum.* 34. primi

SI sint duę rectę lineę, secenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo sub una parte unius, & una parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ AB, AC, *angulum continentes rectum* A, *quæ secentur vtcunque in* D, *&* E; *Dico rectangulum comprehensum sub* AB, AC, *vna cum rectangulo comprehenso sub partibus* AD, EC, *æquale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; nec non & per E, recta EH, secans DG, in I, parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale est rectangulis EF, DH, AI; si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.*



IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes

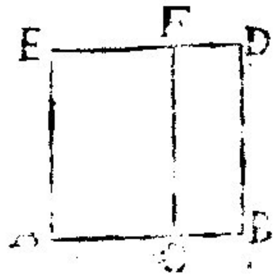
partes. 2. 3. 5. posterior vero in duas 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80 numerum productum ex 10. in 8 aequalem esse sex numeris 6.10. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul addi 80. vt volebat theorema 1 Federici.

RVRSVS, si iidem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productũ ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. aequalem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2.
THEOR. 2. PROPOS. 2.

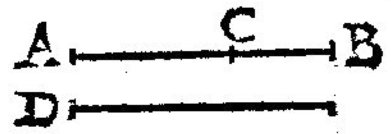
SI recta linea secta sit utcunque, Rectangula, quae sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, aequalia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea A B, diuidatur utcunque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B simul sumpta, aequalia esse quadrato totius lineae A B. Describatur enim A D, quadratum lineae A B, & ex C, ducatur C F parallela rectae A E, vel B D, quae aequalis erit rectae A E, hoc est, rectae A B.



34. primi Quoniam igitur recta A E, aequalis est rectae A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum C D, comprehensum sub A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, aequalia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, aequalia esse quadrato lineae A B. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

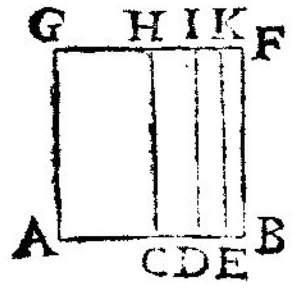
ALITER. Sumatur recta D, aequalis rectae A B, Quoniam



Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub recta D, & recta A B, nempe quadratum rectae A B, aequale duobus rectangulis, quae comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub A B, & singulis segmentis A C, C B, quod est propositum. 1. secundi.

SCHOLION.

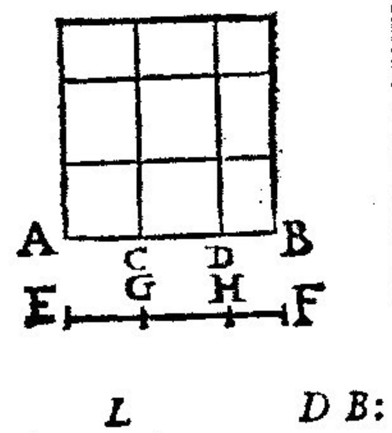
QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunq;, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7 & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. aequales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. equales 100. quadrato ipsius numeri 10.

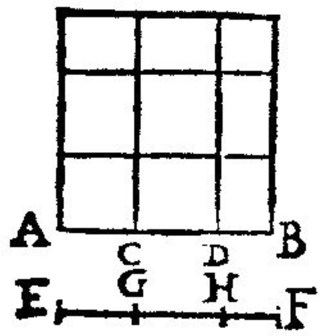


SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

Si linea recta secetur in quotcumq; segmẽta: quadratum, quod a tota fit, ęquale est eis, quae sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta A B diuisa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratũ ex A B, descriptum, aequale esse rectangulis, quae sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorũ A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B:





D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehensis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis sit ipsi A B, diuisaq; in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub A B, E F, hoc est, quadratum ipsius A B. æquale rectangulis sub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G; C D, G H; C D, H F: D B, E G; D B, G H; D B, H F. Cum igitur partes A C, C D, D B partibus E G, G H, H F, sint æquales; Erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis sub A C, A C; A C C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod est propositum.

In numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

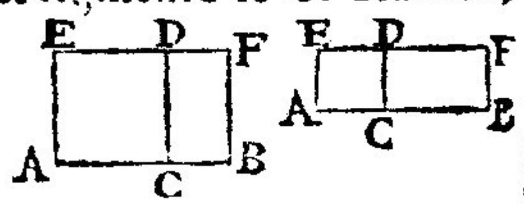
3. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secta sit vtcunq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

LINEA recta A B, diuisa sit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis A C, C B, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti A C. Constituatur enim quadratū dicti segmenti A C, quod sit A D,

& ex

& ex B, educatur B F, parallela ipsi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectæ A C, æqualis est ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehensum sub segmētis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale sit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido constat, rectangulum sub A B, tota, & segmento A C, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti A C. Itaq; si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.



ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento A C. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehēsum sub D, & A B, hoc est, sub A B, & A C, æquale rectangulo sub D, & C B, 1. secundi.
hoc est, sub A C, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C; quod est propositum.

SCHOLION.

Vt hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

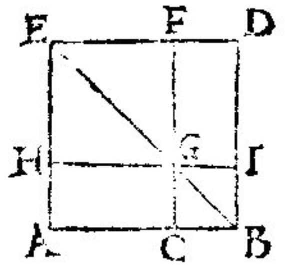
THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea secta sit vtcunq; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est

 & illis,

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA A B, diuisa sit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis A C, CB. Describatur super A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur, C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectę A B; Eritq; quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma.



Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera A B, A E, æqualia sunt; erunt duo anguli ABE, AEB,
5. primi.
æquales: Atqui tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE,
32. primi.
duobus rectis sunt ęquales; & B A E, rectus est: reliqui ergo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadē ratione ostendes, angulos D B E, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostēsum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D,
32. primi. A E D, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli EFG, ęquales sunt duobus rectis; & angulus E F G, rectus est, cum sit
29. primi ęqualis recto D, externus interno; nec nō FEG, semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus, ideoq; ęqualis angulo F E G.
6. primi. Quare æqualia erunt latera EF, & FG; quæ cum sint æqua
34. primi. lia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammū F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum A C, CB, quod
34. primi. H G, recta æqualis sit rectę A C; & rectāgula A G, DG, comprehensa erunt sub segmētis A C, CB, propterea quod C G, G I, equales sint rectæ CB; & FG, æqualis rectæ GH, hoc est rectæ A C. Quocirca cum quadratum A D, ęquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratū A D, totius lineæ A B, ęquale esse quadratis segmentorum A C, CB, & rectāgulo cōprehēso sub eisdē segmētis A C, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcūq;, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

ALI-

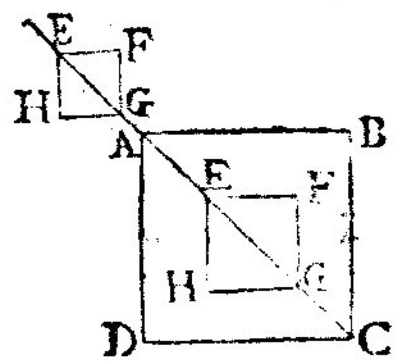
ALITER. Quoniam recta A B. diuisa est in C, erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quę sub tota A B, *2. secundi.*
& segmentis A C, CB, comprehē-duntur:

Rectangulum autem sub A B, & A C, comprehensum, æquale est rectangulo compre *3. secundi.*
henso sub A C, CB, & quadrato segmenti A C; Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, A C, comprehenso, & quadrato segmēti CB. Igitur quadratum rectę A B, ęquale est quadratis segmentorum A C, CB, & rectangulis sub A C, CB, & sub CB, A C. quod est propositum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demōstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrū B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium illud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habeant cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamē habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum.

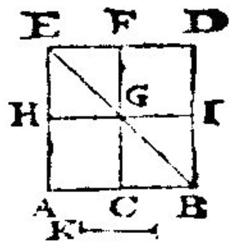


Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B CA, F G E, æquales erūt: *29 primi.*
Sunt autem anguli B A C, B CA, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, proptereaq; latera E F, *32. primi*
F G, illis opposita, æqualia, & angulus F rectus. *6. primi*
Quare cū EF, F G latera æqualia sint opposi- *34. primi*
tis lateribus GH, HE; erit F H, quadratum. Quod est propositum.

SCHOLION.

IN *numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus* 10. *diuisus vtcunq; in* 7. & 3. *Vides igitur* 100. *quadratum totius numeri æquale esse* 49. & 9. *quadratis partium* 7. & 3. *vna cum numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *procreatur, bis sumpto. Nam* 49. 9. 21. & 21. *efficiunt* 100.

PERFACILE *autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ* K. *Nam diuisa A B, bifariã in* C, *si fiat constructio, vt in theoremate; erunt quatuor parallelogramma A G,* C *I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, vt facile demonstrari potest ex propos.* 34. *lib.* 1. *omnesq; anguli recti. Quare cum quadratum* A D, *æquale sit quatuor quadratis A G,* C *I, I F, F* H, *erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A*C *hoc est, lineæ* K, *quæ æqualis est ipsi A* C. *Est .n. vtraq; dimid a lineæ A B.*



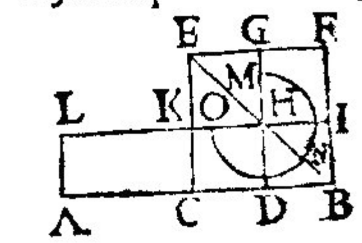
BREVIVS. *Ex hac propositione, quadratum rectæ* AB, *æquale est quadratis rectarum A* C, C B, *& rectangulo sub rectis lineis* A C, C B, *bis comprehenso.* Cum *igitur quadrata rectarum æqualium A* C, C B, *æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A* C. C B, *quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ* A C; Con*stat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ* A C *cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ* A C.

ECONTRARIO *ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ* K. Dico *latus A B, duplum esse lateris* K. *Nam diuisa recta* A *B, bifariam in C, vt A B, dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ* K. *Igitur æqualia sunt quadrata rectarum* K, & A C, *& ipsæ rectæ* K, & AC, *æquales. Est autem* A B, *ex constructione, ipsius A* C, *dupla.* D*upla igitur etiam erit ipsius* K. *Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos.* 20. *lib.* 6.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L.



Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G,
quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem
& K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, com- 34. *primi.*
prehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ
C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, vna cum qua
drato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo com-
plementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune 43. *primi.*
quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelo-
grammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, 36. *primi.*
æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur
D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune
apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æ-
qualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum
K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum

A H, vna cum quadrato A G, æquale eidem quadrato C E. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER hoc theorema ex Francisco Maurolyco demonstrabimus, hoc modo. Quia quadratum ex C B, æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub C D, D B: Et rectangulo sub C D, D B vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub C B, B D; Erit quadratum ex C B, æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub C D, D B, & rectangulo sub C B, B D, vel sub A C, B D. Atqui rectangulis sub A C, B D, & sub C D, D B, æquale est rectangulum sub tota A D, D B. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub A D, D B; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.

4. secundi.

3. secundi.

1. secundi.

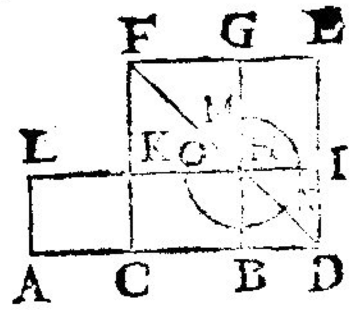
IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10 æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Videbis igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECE-

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectū adijciatur B D: Dico rectangulum comprehensum sub tota cōposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A. ducatur



rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehenditur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrāmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædā linea in rectū adijciatur, &c. Quod erat demonstrandū.

34. primi.

36. primi.

43. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B, B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B vna cū rectan-

4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub A D, D B: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

S E C E T V R iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

E X hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectãgulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

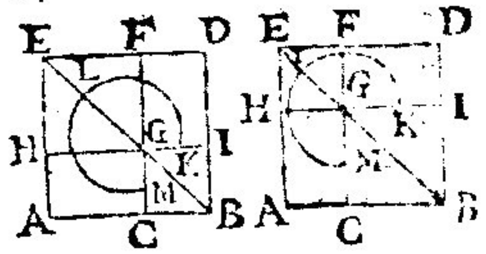
7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea secetur vtcunq;; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

RECTA

RECTA A B, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius A B, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris A C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota A B, & dicto segmento A C, vna cũ quadrato reliqui segmẽti C B. Describatur .n. super A B, quadratũ A D, & ducta diametro B E, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, secãs diametrũ in puncto G, per quod agatur H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib. C I, H F, quadrata, & quia recta G H, æqualis est rectæ A C, erit H F, quadratum segmenti A C. Rursus quia A E, æqualis est ipsi A B, erit rectangulũ A F, cõprehensum sub tota A B, & segmẽto A C. Eadem ratione rectangulum H D, comprehensum erit sub eisdẽ rectis A B, A C, quod rectæ D E, E H, æquales sint rectis A B, A C. Quoniam igitur rectangulis A F, F I, hoc est, gnomoni K L M, vna cum quadrato C I, æquale est quadratũ A D; si apponatur cõmune quadratũ H F, erũt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis A F, D H, (quę comprehenduntur sub tota A B, & segmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui segmenti C B. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum. 34. primi.



SCHOLION.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B; si addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadratis ex A C, C B, A C, vna cum rectangulo bis sub A C, C B. Sed rectangulo sub A C, C B, vna cum quadrato ex A C, æquale est rectangulum sub A B, A C; Et proinde rectangulo bis sub A C, C B, vna cum quadrato ex A C, bis, æquale est rectangulum sub A B, A C, bis. Igitur quadrata ex A B, A C, æqualia sunt reliquo quadrato ex C B, vna cum rectangulo bis sub A B, A C. Quod demonstrandum erat. 4. secundi. 3. secundi.

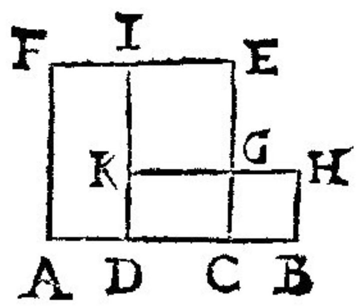
I 3

In numeris autem, diuidatur numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea AD; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, C B. vna cum quadrato lineæ D C. Constituantur quadrata A E, C H; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti D B, æqualis; est autẽ & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH: Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E,



34.primi. ipsi DC, sit æqualis; erunt GE, IE, æquales: ideoq; IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est.n. AC, vtriq; lineæ AF, DB; & CB, vtriq; AD, BH, æqualis:) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.

SCHOLION.

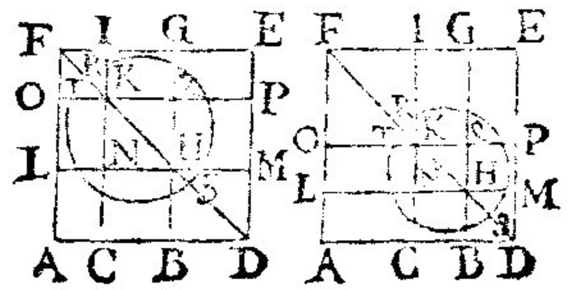
In numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita

ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D F, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, 34.primi.
quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est 34.primi.
rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H, sit æqualis rectæ AB. Eadẽ rõne erũt duo 34 primi

rectan-

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cũ NH,
34. primi. HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erũt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quãobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrãdum erat.

SCHOLION.

ALITER idem ex Francisco Maurolyco demonstrabi-
4. secundi. *mus. Quia quadratũ ex AD æquale est quadratis ex AB, BD, vna cũ rectangulo sub AB, BD, bis; hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC,*
7. secundi. *æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratũ ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

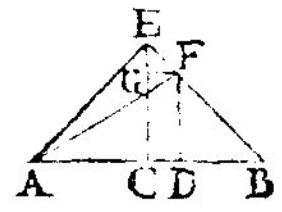
SECETVR iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

9.
THEOR. 9. PROPOS. 9.

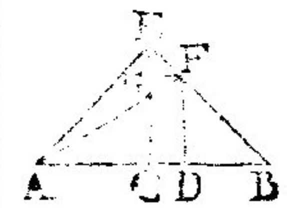
SI recta linea secetur in æqualia, & nõ æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, dupla esse quadratorum, quę fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB; Ducanturq; rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoq; ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturq; AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt; erunt an-
guli CAE, CEA, æquales. Est autem 5. primi.
angulus ACE, rectus; reliqui igitur angu-
li alium rectum conficient, ideoq; AEC 32. primi.



semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia tri-
anguli FGE, angulus EGF, æqualis est recto ECB, externus 29. primi.
interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: osten- 32. primi.
sum autem est, angulum FEG, esse semirectum; igitur & EFG, semirectus erit, propterea que cum anguli
FEG, FGE, æquales sint, erunt & latera EG, GF, æ- 6. primi.
qualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia; nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, erit quadra-
tum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, 47. primi.
CE; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ AC, CE, æquales sint; Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est,
erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis 47. primi.
laterum EG, GF; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF; Igitur

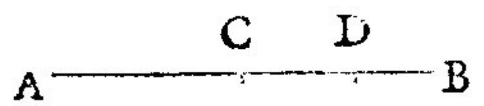


Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G, hoc est, quadrati [illegible] C D; Est enim C D, recta recta F G æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. [illegible] duo quadrata rectarum A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D. 34. prim.

47. primi. Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale 47. primi. duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B; ostensum enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

A L I T E R ex Federico Commandino. Quoniam A C ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoq; A C, ipsam C D, eadem recta D B. *Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ* D B; *Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C* D, *bis*



vna cum quadrato rectæ D B, *dupla sunt quadratorum ex A C, C* D: *Sed quadratis rectarum A C, C* D, *vna cum rectangulo* [illegible] *sub A C, C* D, *bis, est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum. A D,* D *B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

A L I T E R ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex [illegible] *recta A* D, *descriptum æquale est quadratis descriptis ex A C, C* D, *vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune ponatur quadratum ex D B, erunt quadrata ex A D,* D B, *æqualia quadratis ex A C, C* D, DB, *vna cum rectangulo bis sub* AC, CD. *vel*

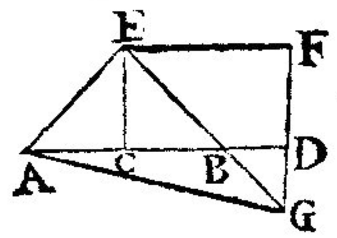
vel sub B C, C D, Atqui quadrato ex D B, *vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex* B C, *seu* A C, 7. secundi. *& ex C D. Quadrata igitur ex* A D, D B, *æqualia sunt bis quadratis ex* A C, C D; *Ac propterea quadrata ex* A D, DB, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod ostendendum erat.*

I A M vero rursus numerus, 10. *diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.*

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

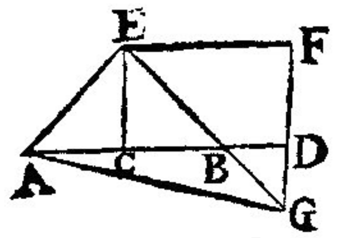
S E C E T V R recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, BD, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectę C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iã,



angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque. Est autem angulus F, rectus, cum in paral- 29. primi 34. primi

lelogrammo

lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur; Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F æqua- 32. primi
6. primi lis. Quare rectæ E F, F G, & angulis F E G, E G F, opposite, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æ-
47. primi quale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C.



47. primi Rursus quia quadratũ rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplũ quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, cum C D,
34. primi recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G,
47. primi æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, D G, descibuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER *ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam* C B, *recta* B D; *superabit quoque* C D, *ipsam* A C, *eadem recta B D. Quare, vt ad 7. ꝑpos huius lib. ostẽdimus, quadrata ex* A C, C D, *æqualia sunt rectangulo sub* A C, C D, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D; A*c propterea quadrata rectarũ* A C, C D,

& rectangulum sub A C, C D, *bis, vna cum quadrato rectæ* B D, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Atqui quadratis*
4. secundi *rectarũ* A C, C D, *vna cũ rectangulo sub* A C, C D, *bis, æquale est quadratum rectæ* A D. *Igitur & quadrata rectarũ* A D, *B D, dupla sunt quadratorum ex* A C, C D.

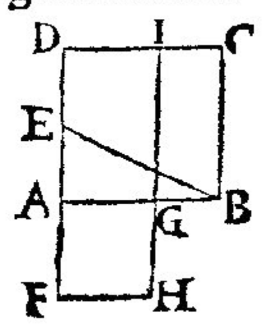
ALITER *ex Francisco Maurolyco. Quia quadratũ ex* A D, *æquale est quadratis ex* A C, C D, *vna cũ rectangulo bis* 4. secundi
sub A C, C D, *vel sub* B C, C D; *si commune addatur quadratũ ex* B D, *erunt quadrata ex* A D, B D, *æqualia quadratis ex* A C, C D, B D, *vna cũ rectangulo bis sub* B C, C D. *Sed quadrato ex B D, vna cũ rectangulo bis sub B C, C D, æqualia* 7. secundi
sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, *æqualia sunt quadratis ex* A C, C D, *bis; Ac proinde quadrata ex* A D, B D, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod erat demonstrandum.*

NUMERUS 10. *bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. vt totus numerus cõpositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9 horum numerorũ 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.*

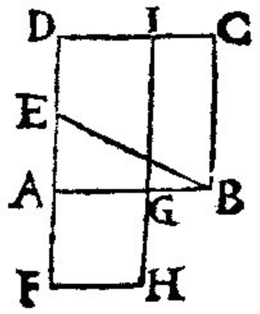
PROBL. I. PROPOS. XI. — 11.

DATAM rectam lineam secare, ut cõprehensum sub tota, & altero segmentorũ rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cõprehensum sub tota A B, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex A B, quadratũ A C, & diuiso latere A D, quod cũ linea data A B, angulũ rectũ efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F; & ipsi A F, abscindatur ex recta A B, data æqualis A G. Dico rectam A B, sectã esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub A B, & B G, æquale sit quadrato rectæ A G.



Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrãmum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint 34. primi æqualia; & rectangulum C G, comprehensum sub A B, & segmento B G, quod A B, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum



A F, erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, AB: Quare rectangulum D H, vna cũ quadrato rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

6. *secundi*

47. *primi*

S C H O L I O N.

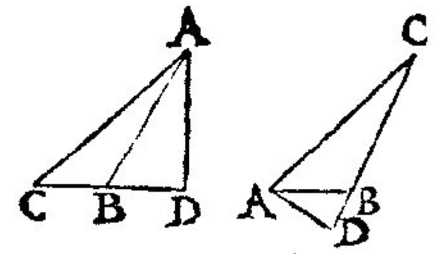
H O C *theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, ut demonstrabimus ad propos.* 14 *lib.* 9. *Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus.*

12.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

T R I A N G V L V M A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub CB, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, una cũ rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Cum enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarũ C B, B D, & rectangulo cõprehenso bis sub CB, B D. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarũ C B, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D: Est aũt quadratis rectarũ C D, D A, æquale quadratũ rectæ A C; Quare & quadratũ rectæ A C, æquale erit trib⁹ quadratis rectarũ CB, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Cum igitur quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



4. *secundi.*

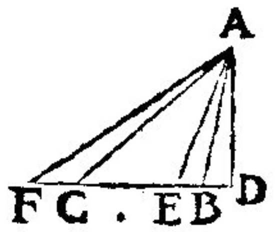
47. *primi*

47. *primi*

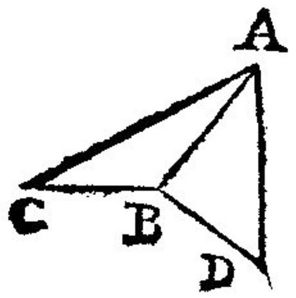
S C H O L I O N.

Q V O N I A M *assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo A B C, angulus A B C, obtusus, & latus C B, ad partes B, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus C B, protractum, cuiusmodi est recta A D. Si enim caderet*

caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, *duo anguli* ABF, AFB, *maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.*



CONVERSVM *quoque huius theorematis ita ostendemus. In triangulo* ABC, *quadratum lateris* AC, *maius sit quadratis laterum* AB, BC; *Dico angulum B, quem dictum latus subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad* AB *perpendicularis* BD, *lineæ* BC, *æqualis, iungaturq; recta AD.*
47.primi *Quoniam igitur quadratū ex* AD, *æquale est quadratis ex* AB, BD, *hoc est ex* AB, BC; *Ponitur autē quadratū ex* AC, *maius quadratis ex* AB, BC: *Erit quadratū ex* AD, *minus quadrato ex* AC, *& idcirco recta* AD, *minor quā recta* AC. *Itaque quia latera* AB, BC, *triāguli* ABC, *æqualia sunt lateribus* AB, BD, *trianguli* ABD, *vtrumq; vtriq;*
25. primi. *& basis* AC, *maior est base* AD; *Erit angulus* ABC, *maior angulo* ABD: *sed* ABD, *rectus est. Igitur* ABC, *recto maior, & obtusus erit.*

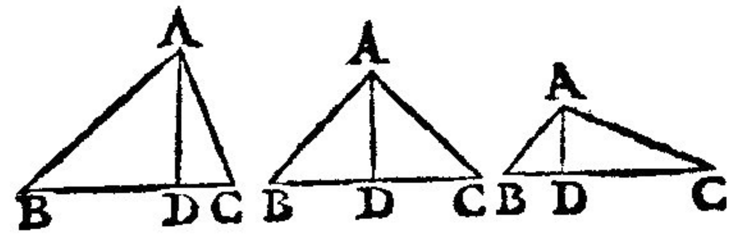


13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triāgulis, quadratū a latere angulū acutū subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulū cōprehendentibus, rectangulo bis comprehēso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutū angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli ABC, acuti, & ex A, perpendicularis AD, demissa cadat in latus BC. Dico quadratū lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum lateris AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD æquale esse duob' quadratis laterū AC, CB. Cum enim recta BC, diuisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarū BC, CD, æqualia rectangulo cōprehenso bis sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. 7.secundi



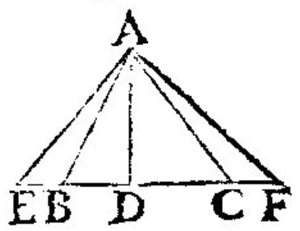
Addito ergo cōmuni quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectāgulo bis cōprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarū BD, DA:
Duobus autem quadratis rectarū CD, DA, æquale est quadratum rectæ CA; Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cū ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB; 47. primi
erunt duo quadrata rectarū BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB: quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo cōprehenso bis sub CB, BD. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat. 47 primi

SCHOLION.

QVAMVIS *Euclides theorema hoc proponat de triāgulis dūtaxat oxygonijs, quæ scilicet oēs angulos habēt acutos; Idē tamen verum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangu-*

 lis

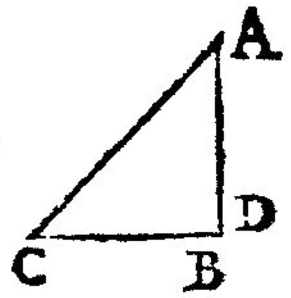
lis rectangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso; in oxygonijs vero a quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C. A C B. acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior



16. primi A B C, acutus, maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiam si perpendicularis A D non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A C, vt in rectangulis, vel extra triangulũ cadat, vt in obtusangulis accidit. ceu in scholio propos. præcedentis demõstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

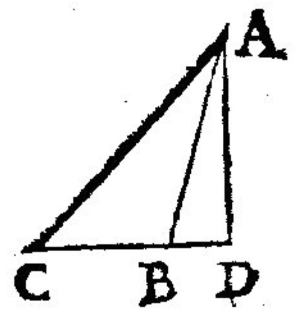
SIT triangulũ rectangulũ A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadẽ erit, quæ latus A B, propter angulũ rectũ B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulũ C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim



47. primi quadrata ex A B, C B, æqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est quod rectangulum sub C B, C D; Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C,

A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D, Quod est propositum.

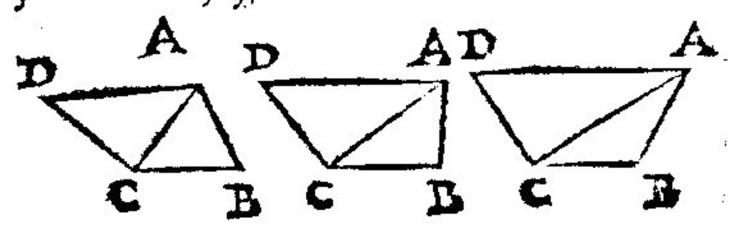
RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B & C D. Quoniam quadrata ex A D, 47. primi
C D, æqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, cõmuni, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duo bus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, 4. secundi B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vna cũ quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis



sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, æqualia quadrato ex A B. Quare 47. primi
quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo sub C B, B D, æquale est rectangulum sub C D, C B; Ac pro- 3. secundi
pterea duplo quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.

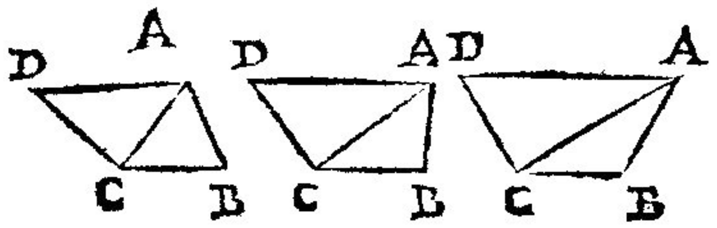
CONVERSVM quoque huius theorematis in quodam antiquo scholio demonstratur in hunc fere modum.

IN triangulo quocunque A B C, quadratum lateris A B, minus sit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulũ C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad A C perpendicularis C D, lineæ C B, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam



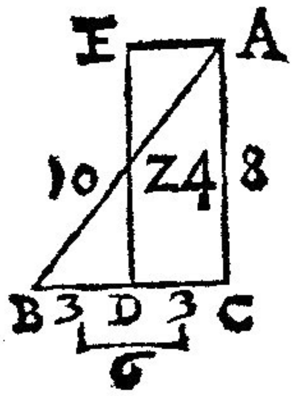
igitur quadratum ex A D, æquale est quadratis ex A C, C D, 47. primi
hoc est, ex A C, C B; Ponitur autem quadratum ex A B, minus-

nus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B & ideo recta AD, maior quam recta A B.



Itaque quia duo latera A C, CD trianguli A C D, aequalia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrunque vtrique: 25. primi & basis A D, maior base A B: Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed ACB, rectus est, ex constructione: ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

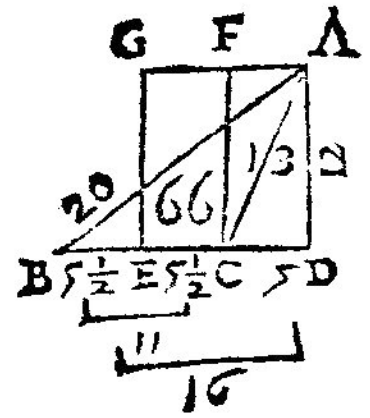
Ex his autem, quae in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulum



A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. BC, 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sit C D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod aequale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, aequale. Quod est propositum.

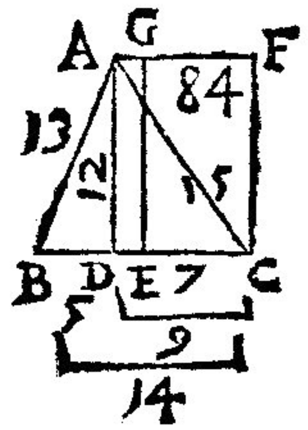
Sit secundo triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. BC, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineae A D, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, maius 12. secund. est, quam quadrata laterum A C B C, rectangulo bis comprehenso sub BC, C D; si quadrata laterum A C, BC, nempe 169. 121. quae efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat

strat propos. 17. lib. 1. de triangulis. Quia vero quadrata laterum A D, C D, aequalia sunt quadrato lateris A C; si 47. primi quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5 palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144 sit 12. Itaque diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectae A G, quae per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum. (Est



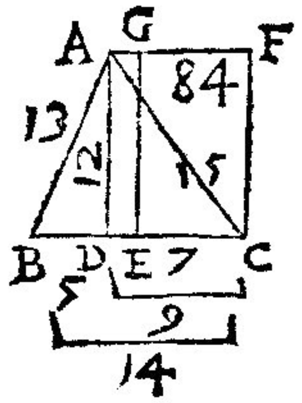
enim C F, ipsi A D, aequalis,) exurget area rectanguli 34. primi CG, 66. palmorum, quod cum aequale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

Sit postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. BC, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis A D, hac ratione: Quoniam quadratum lateris A B, minus 13. secundi est, quam quadrata laterum A C, B C,



rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, F C hoc est, ex 225. 169. quae efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub B C, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC CD Si igitur 126. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9 vt constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. Quoniam autem quadrata ex A D, CD, aequalia sunt quadrato 47. primi ex A C; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. pal-

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Itaque diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C F, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (est enim E G, recta ipsi A D, *æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo* A B C, *sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1 (sunt enim rectangulum E F, & triangulum* ABC *in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli* A B C, *84. palmorum. Quod est propositum.*

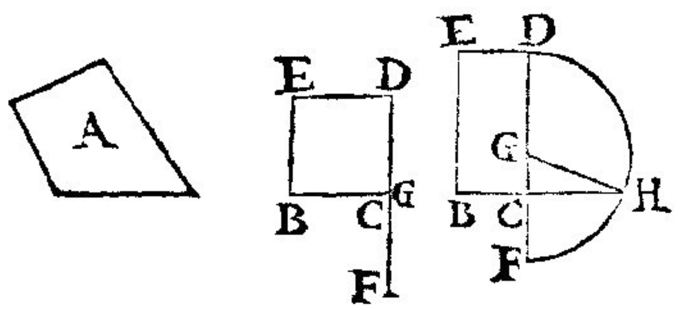


ITAQVE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, ceu in exemplis datis est manifestum.

14. PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale con-
45. primi stituendum est. Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut D C, producatur ad F, fitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidaturque D F, bifariã in puncto G quod cadet aut in punctũ C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangu-
34. primi lum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, æqualia sint



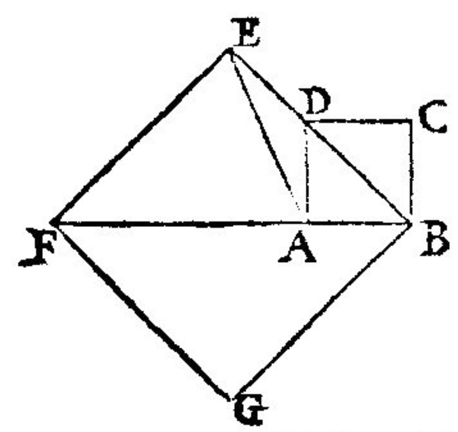
sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nõ cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, uel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducatur enim recta GH. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit
rectãgulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectan- 5. secundi
gulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F,
GH, sint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale est 47. primi
quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

SCHOLION.

QVONIAM in secundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inferri hic poterit sequens problema de quadrato nõ iniucundum, ad hunc modum.

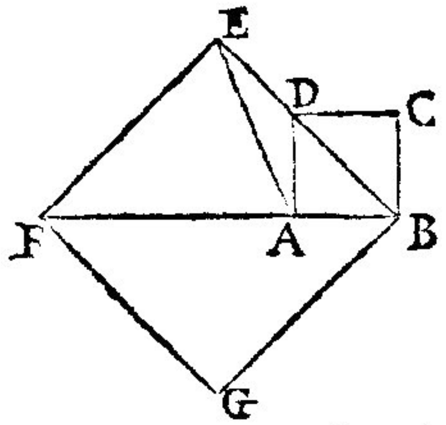
DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta BD, *producatur ad E, vt sit D E, recta rectæ* A D, *æqualis. Dico rectam B E, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus* BE, *excessu dato* AB.



Ducatur

32. primi — Ducatur enim EF, perpendicularis ad B E. quæ rectam BA, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus F E B, rectus est, & EBF, semirectus; erit & B F E,



6. primi — semirectus. Quare recta B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi BE; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum rectæ BE. Quod si ducatur recta A E, erunt anguli A E D, E A D, æqualibus lineis D E,

5. primi — D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales, ideoque rectæ E F, A F. æquales erunt. Quoniam vero diame-

6. primi — ter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadē diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B; quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS

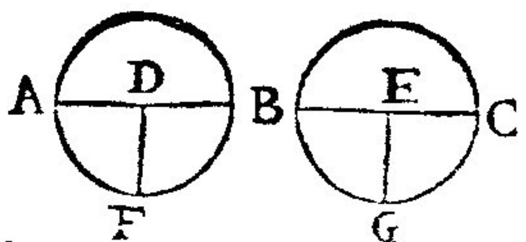
ELEMENTVM III.

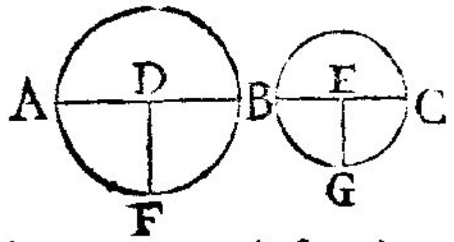
DEFINITIONES.

I.

AEQVALES circuli sunt, quorū diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

QVONIAM Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterū extremū fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perspicuū est eos circulos esse æquales, quorū semidiametri, seu rectæ ex cētris ductæ, sūt æquales; uel etiā quorū totæ diametri æquales sunt Vt si diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & BGC. Sic etiam si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales,



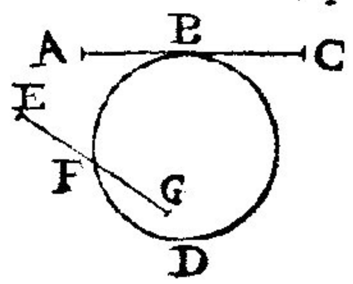


quales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

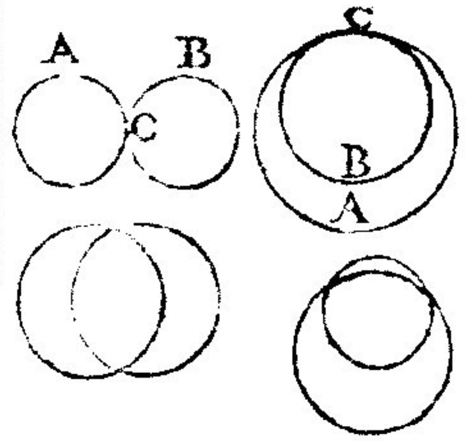
VT recta AB, quia ita circulum BFD, tangit in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, quia ita se se contingunt in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.



IIII.

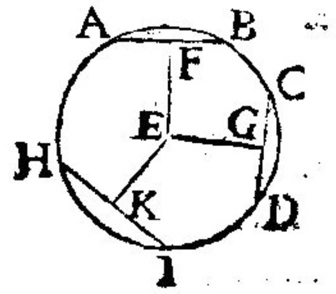
IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam du untur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est breuior, quod angulus AED, vel AFD minor sit angulo recto ADE. Immo non solum AE, AF, maiores sunt quam AD, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AF, maior, quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, Et AFE, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur distare a centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicetur a centro E quam linea HI, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK.

19. primi.

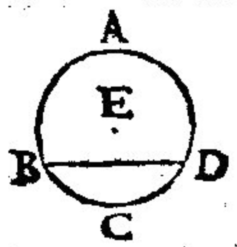
19. primi.



V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

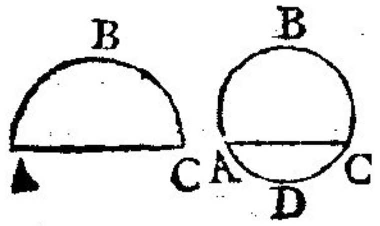
N VT



Vt si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunq;, dicetur tam figura A B D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quam B C D, comprehensa recta B D, & circunferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmẽtum B C D. Vocatur a plerisq; Geometris recta BD, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autẽ angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



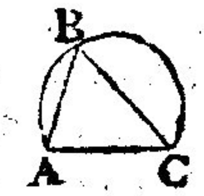
Definit iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtũ B A C, vel B C A, contentum sub recta linea A C, & circunferentia A B C, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si deniq; segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit

quod-

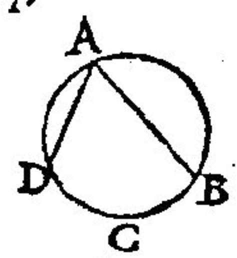
quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.



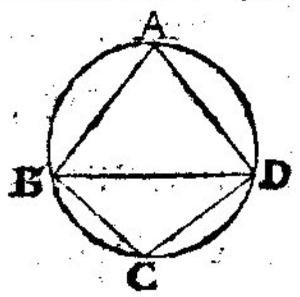
Sit segmentum circuli quodcunq; A B C, cuius basis recta A C: Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam assumũt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

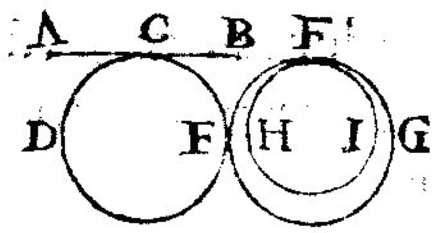


Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D circunferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaq; rectilineus BAD, insistere dicitur circunferentiæ BCD. Perspicuum autem est, hunc angulum a præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circunferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circunferentiæ, circunferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmen-



segmentum aliquod circuli B C D, *in circulo* A B C D, *non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circunferentiæ insistens.* **Angulus** *enim in eo existens, erit* B C D; *at eius circunferentiæ* C B D, *insistens, erit* B A D, *qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circunferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circunferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facile constat ex verbo græco* βεβηκέναι, *quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus* D A B, *supra circunferentiam* C B D.

PRAETER *tres dictos angulos cõsideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circunferentia circuli; vel certe duabus circunferentijs se mutuo tãgentibus, siue hoc exterius fiat, siue interiꝰ. Exemplum. Si recta* A B, *tangat circulum* C D E, *in* C; *angulus mixtus* A C D, *vel* C B E, *dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus* C E D, *tangat circulum* E F G, *exterius in* E: *Item circulus* H F I, *circulum* E F G, *interius in* F; *appellabitur tam angulus curuilineus* C E F, *quã* E F H, *vel* G F I, *angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaq;, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.*



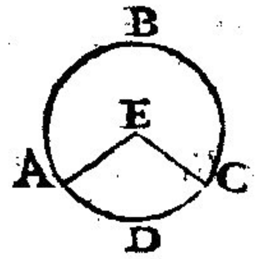
IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

pheria ab illis assumpta.

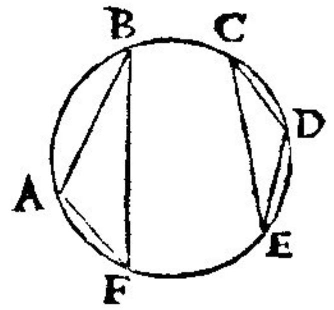
SI *in circulo* A B C D, *cuius centrum* E, *rectæ* A E, C E, *constituant angulum* A E C, *ad centrum* E; *nominabitur figura* A E C D, *contenta rectis* A E, E C, *& circunferentia* A D C, *quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam* A D C, *quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis* A E, C E, *assumptæ: Ita quoq; in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti; quandoquidem in vtraq; definitione vsus est eodem verbo græco* ἀπολαμβάνω.



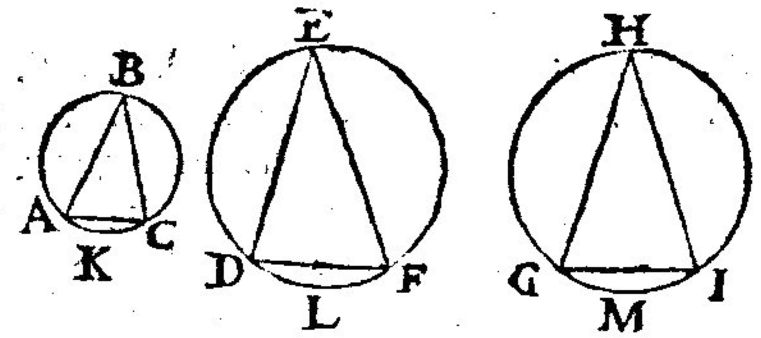
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

SEGMENTA, *seu circunferentiæ* A B D F, D C A F, *quæ capiunt hos duos angulos* A B F, D C E, *æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.*



EODEM *modo segmenta diuersorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli* A B C, D E F, G H I, *fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ* A B C, D E F, G H I, *quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc*

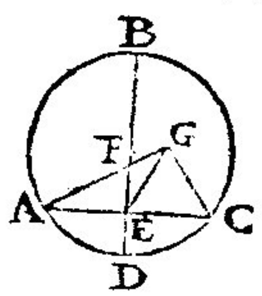


segmentorũ, circunferentiarũue similitudo in eo, quod qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit altera circunferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circunferentia A B C, totius circunferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars sit circunferentia D E F, totius circunferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferentiæ G H I G. *Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad totas circunferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib.6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.*

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.

SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quę bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, pręter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (a centro



centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, ęquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex 8.primi.
constructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

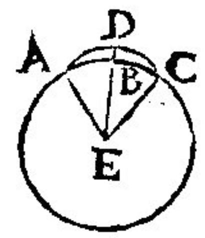
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

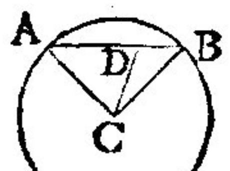
IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta. Inuento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta 1. tertij.
A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, ęqualia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli E A D, E C D; 5. primi.
æquales: Est autem angulus E D A, angulo E C D, 16.primi.
maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur &an-



& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A.
Quare recta E A, maiori angulo opposita, hoc est, recta
19. primi. E B, sibi ęqualis, maior erit, quam recta E D, pars quam
totum; Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C,
ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo
demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quę circunferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaq; si in circuli peripheria duo quęlibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Idem hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, *coniungat duo puncta* A, & B, *in circunferentia circuli* A B, *cuius centrũ* C *Dico rectã* AB, *intra circulũ cadere, ita vt omnia eius pũcta media intra circulũ existãt. Assumatur.n. quodcunq; eius punctũ intermediũ* D, *& ex centro educãtur rectæ* C A, C B, C D.



Quoniam igitur duo latera C A, C B *trianguli* C A B, *æqua-*
5.primi. *lia sunt, erunt anguli* C A B, C B A, *æquales: Est autem an-*
16.primi. *gulus* C D A, *angulo* C B A, *maior, externus interno; Igi-*
tur idem angulus C D A *angulo* C A D, *maior erit, & ob*
19.primi. *id latus* C A, *latere* C D, *maius erit. Quare cum* C A, *sit*
ducta a centro ad circunferentiam vsque, non perueniet recta C D, *ad circunferentiam, ideoq; punctum* D, *intra circulum cadet: Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta* A B, *intra circulũ cadit; quod est propositũ.*

COROLLARIVM.

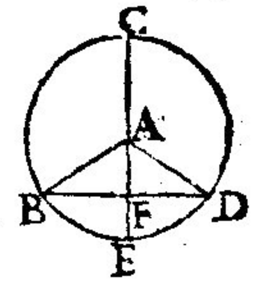
Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tãgit, ita vt eum non secet, in vno tãtum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum; Quare circulum secaret, quod est cõtra hypothesin.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoq; eam secabit.

Per A, centrum circuli B C D, recta C E, extensa diuidat rectam B D, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam A F, esse ad angulos rectos ipsi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus lateribus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & bases A B, A D, æqua-



les; Igitur anguli A F B, A F D, æquales erũt, 8.primi.
hoc est recti. Quod erat primo propositũ.
Sit iam A F, ad angulos rectos ipsi B D; dico rectam B D bifariam secari in F a recta C E. Ductis .n. iterum rectis A B, A D; cum latera A B, A D, trianguli A B D,
sint æqualia, erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam 5.primi.
igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, ęquales sunt
duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F, & latera A B,
A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia
quoq;; erunt latera F B, F D, æqualia. Quod secundo propo 26.primi.
nebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

Facile quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione.
Si enim A F, perpendicularis est ad B D, erit tam quadra
tum rectę A B, æquale quadratis rectarum A F, F B, quam 47. primi.
quadratum rectæ A D, quadratis rectarum A F, F D. Cum igitur quadratũ rectæ A B, æquale sit quadrato rectæ A D; erunt & quadrata rectarum A F, F B, æqualia quadratis rectarum A F, F D. Quare dempto communi quadrato rectę A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atq; idcirco rectæ F B, F D, æquales erunt.

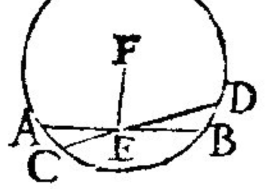
THEOR.

4.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent non per centrum extenſæ; ſeſe mutuo bifariam non ſecabunt.

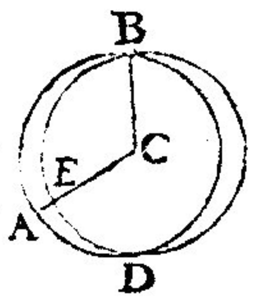
DVAE rectæ A B, C D, ſe mutuo in E, ſecent in circulo A C B D, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & A B, & C D, ſi fieri poteſt, bifariam in E. Inuento
1. tertij. igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E,
recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur
ſecare rectam A B, bifariam in E, ſecabit
3. tertij. ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione
ſecabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectę lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



5.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent; non erit illorum idem centrum.



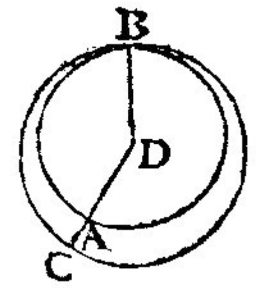
CIRCVLI A B D, E B D, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idē centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, vero ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur cir

culi

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli A B, B C, ſe interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, a quo duæ rectę ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, ſecans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, ęqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

EVCLIDES *propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cum vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.*

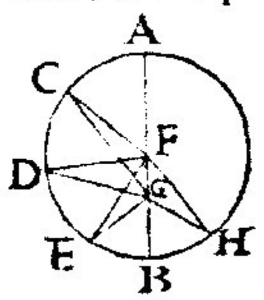
THEOR. 6. PROPOS. 7. 7

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea,

in qua

in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

In diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est centrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior est, maiorem recta G D, quę a centro plus distat, & eadem ratione G D, maiorem recta G E; Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineæ G B, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectę lineæ F C, F D, F E. Quoniã



20. primi. igitur duo latera G F, F C trianguli GFC, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est, rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

20. primi. Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem F E, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera G F, F C, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; erit ba-
24 primi. sis G C, maior base G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea propin-

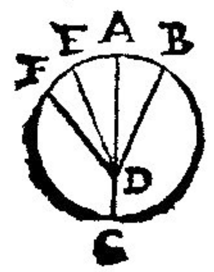
propinquior centro maior est ea, quæ remotior.

Fiat iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter distent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius li- 4 primi.
neæ minimæ G B, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit centro propinquior, maior quam G H; si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior a centro, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duę igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ G B, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Hanc *propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.*

Si intra circulum pũctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autẽ ab eo æqualiter distabũt.



In circulo A B C, punctum sumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C; ipsarum vero D E, D F, maior sit D E, denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C,

D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, propinquiorem esse centro, quam D F. Denique D E, D B, æqualiter a centro abesse. Primum enim si D A, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium e
7. tertij. *D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.*

DEINDE, *si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D, in directũ, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cũ DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.*

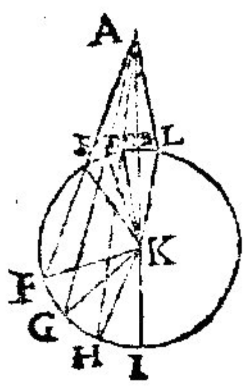
RVRSVS, *si DE, non est vicinior cẽtro, quã DF; aut æqualiter distabũt ab eo, aut D E, longius ab eo abest: Si æqualiter*
7. tertij. *distant, ipsæ erunt æquales; quod est absurdum, ponitur enim D E, maior. Quod si D F, dicatur esse propinquior centro, ipsa*
7. tertij. *erit maior, quam D E. Quod magis est absurdum.*

POSTREMO, *si DE, DB, non æqualiter distant a cen-*
7. tertij. *tro, erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

8. ## THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadẽtium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq;. Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior existit, maiorem recta A G, quæ remotior est a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse. Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorem esse recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipsam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, rectæ A I, erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quã A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. 20. primi.



DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior est angulo AKG; erit basis AH, base AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quam AF; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior est linea remotiore. 24. primi.

RVRSVS, qa in triãgulo ACK, recta AK, minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K, remanebit 20. primi.

adhuc

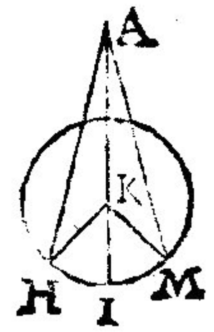
adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K, erunt A C,
21. primi. C K, minores, quam A D, D K; Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, di-
4 primi. ctis lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L, ex vtraq; parte minimæ A B, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam A L; Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasq; partes maximæ A I. Fiat enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M;



4. primi. *sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.*

THEOR.

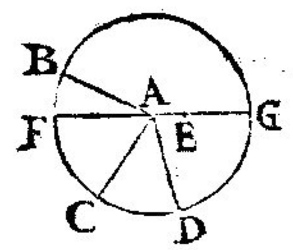
THEOR. 8. PROPOS. 9. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æqua-

les, ideoque recti. Eodem modo ostende- 8. primi
mus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C;



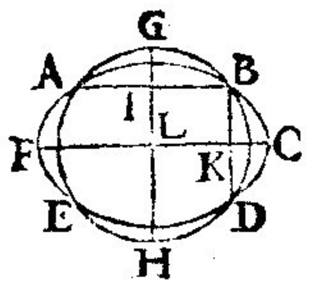
erit recta A D, quæ propinquior est cen- 7. tertij
tro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

O THEOR.

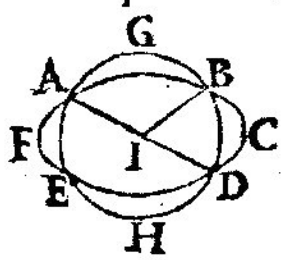
10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulũ AGBDHE, in pluribus, quã duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus bifariam diuisis in I, & K, educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrũ ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrũ dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo se-
5. tertij. cantes idem possident centrum. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat. Quod erat demonstrandum.



ALITER. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in
1. tertij. tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, a quo ad dicta tria puncta ducantur IA, IB, ID. quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniã igitur intra circulũ ABCDEF, assumptũ est punctũ I, a quo cadunt in circunferẽ-
9. tertij. tiã plures, quã duæ rectę æquales, erit I, centrũ circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem
5. tertij. centrum; quod est absurdum.

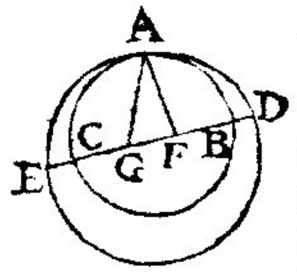


11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta,

cta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrũ circuli ABC, & G, centrũ circuli ADE. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in cõtactum A. Si enim non cadit, secet utrumq; circulũ in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triã-
gulo AFG duo latera GF, FA, maiora 20. primi
sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrũ circuli ADE) Erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD: Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positũ fuerit centrũ circuli ABC) erit & FB, maior, quã FD, pars toto, quod est absurdũ. Quod si quis velit cõtendere F, esse centrũ circuli ADE; & G, centrũ circuli ABC, instituetur argumẽtatio hac ratione. In triãgu-
lo AFG, duo latera FG, GA, maiora sunt latere FA; Est 20. primi
autẽ recta FA, rectæ FE, æqualis: (cum F, ponatur centrũ circuli ADE.) Igitur rectę FG, GA, maiores sunt recta FE; dempta ergo cõmuni FG, remanebit GA, maior, quã GE: Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponatur esse centrũ circuli ABC,) erit quoque GC maior, quã GE, pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrũ maioris circuli extra minorẽ ponatur. Nõ ergo recta FG, extensa vtrumq; circulum secabit sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



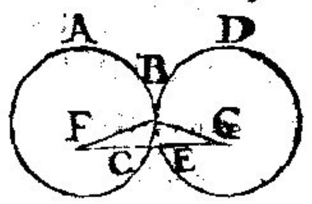
THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI ABC, DBE tangãt se exterius in B, & centrũ circuli ABC, sit F; circuli uero DBE, centrũ sit G; Dico rectã extensam p F, & G, trãsire per contactũ B. Si enim non

 transit,

transit, secet circunferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniã igitur in triangulo F B G, latera duo B F,

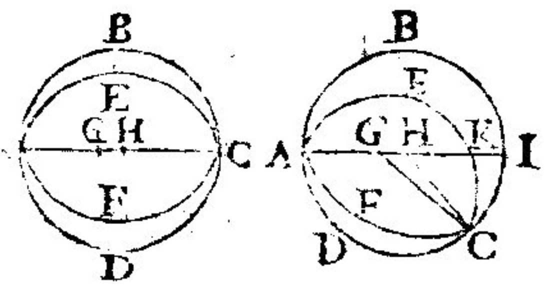


20. primi B G, maiora sunt latere F G: Est autẽ recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, sit centrũ circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, sit centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quã totũ, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

CIRCVLI A B C D, A E C F, tangant se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H in utramque partem extendatur, quam necesse est
11. tertij cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si enim G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C. Quod si quis dicat rectã G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrũ circuli

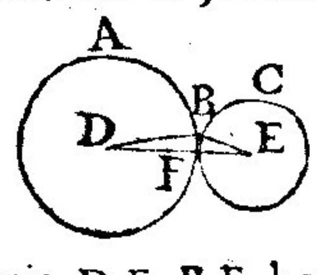


circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K; (quod H C, H K, sint ex centro) & recta G C, rectæ G I; (quod & hæ sint ex centro) erit quoque recta G K, maior, quam G I, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta sit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno.

20. primi

20. primi

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, necessario transibit. 12 tertij Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B; Ductis igitur rectis D B,

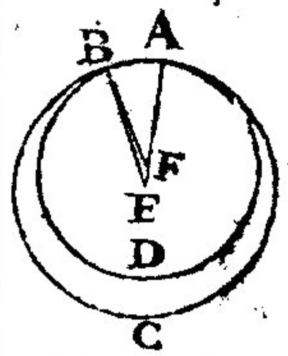


E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi D E: Sunt autem & maiores: quod est absurdum. 20. primi Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra unũ circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliũ, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno uidetur ea potissimum concludere, circulum nõ posse tangi a circulo in duobus, uel pluribus punctis, quæ longo interuallo a se dissideant; nõ autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem *argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse esse plura puncta, quam*



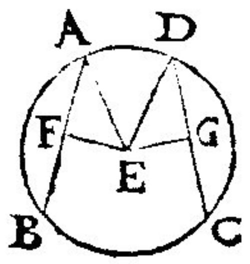
unum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, recta ducatur E F, quæ ad contactū
11. tertij *perueniet necessario, vt ad punctū A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio puncto, vt in B; ductis ex B ad centra E, & F, rectis*
20. primi *B E, B F, erunt rectæ E F, F B, maiores recta E B; Est autem recta E B, æqualis rectæ E A, cum vtraq; sit ex centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quā F A; quod est absurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circunferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant.*

13.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distāt a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipsas æqualiter distare a centro E.



Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D; Secabuntque
3. tertij. rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariā. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter se sunt æqualia: Quadratum autem rectæ E A æquale est quadratis re-
47. primi ctarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarū A F, F E, æqualia quadratis rectarū D G, G E. Ablatis ergo quadratis æquali-

æqualibus æqualiū rectarū A F, D G, remanebunt quadrata rectarū F E, G E æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

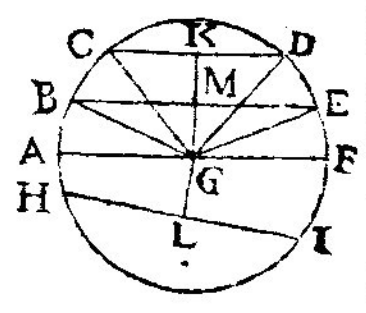
RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterū ex cētro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas A B, C D, bifariā. 3. tertij.
Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earū quadrata æqualia: Est autem quadratū rectæ E A, æquale quadratis rectarū A F, 47. primi
F E; & quadratū rectæ E D, æquale quadratis rectarū D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq; ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erūt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

14.

IN circulo maxima quidē linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

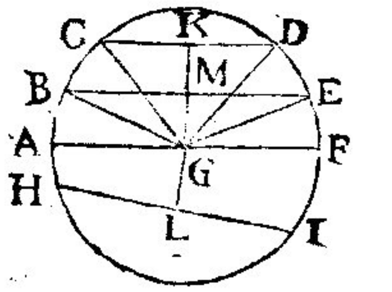
IN circulo A B C D E F, cuius centrū G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quam C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, a cētro, quā H I, erit G K, maior quā G L, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atq; per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & cōnectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quoniam igitur rectæ



perpendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabūt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter se 14. tertij
æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores 20. primi

 quidem

quidem sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E; Eadem ratione ostenditur A F, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, GD, triãguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo C G D; erit recta

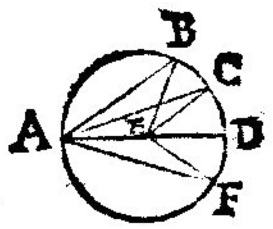


24. primi B E, maior quam C D; atque adeo H I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLION.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto circunferentiæ plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim a puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omniũ maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE, cum in triangulo AEC, latera AE, EC, maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC,



20. primi *æquales rectis AE, ED, hoc est, rectæ AD; maior erit AD, quam AC; Eademque ratione maior erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.*

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC; æqualia sunt duobus lateribus AE, EB trianguli AEB; & angulus AEC, totus, maior est angulo AEB; erit basis
24. primi *AC, maior base AB; Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.*

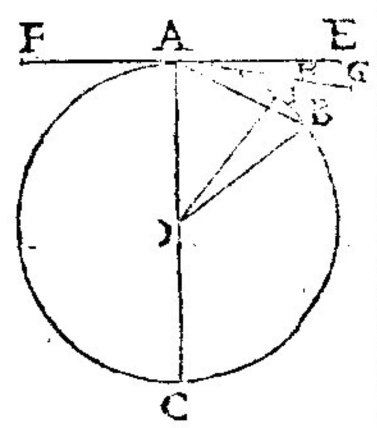
CAETERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad utrasque partes maximæ AD. Si namq; angulo AEC, æqualis fiat angulus AEF, iungaturque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF, æquales;
4. primi *Erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero ulla alia his duabus æqualis potest exhiberi; Quæcunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea*

ea maior erit, ut iam demonstratum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

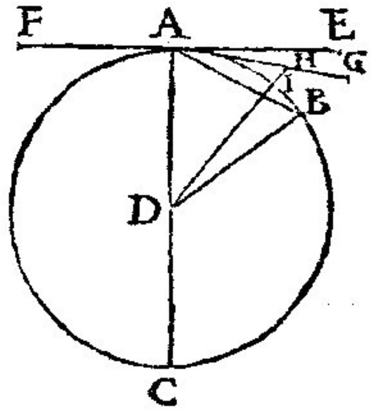
QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularẽ necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta
D B, erunt duo anguli D A B, DBA, æquales; sed D AB, rectus est per constructionem igitur & D B A, rectus erit, 5. primi
quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. 17. primi Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: nec eandẽ ob causam in ipsam circunferentiã, sed extra, qualis est E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiã A B, non posse cadere alteram rectã. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circunferentiam in I. Quoniam igitur



in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores 17 primi
sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A,
hoc est, recta DI, æqualis DA, maior erit quam D H, pars 19. primi
quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: sed quæcunque ex A, du-

A, ducatur infra A E, ea fecabit circulũ. Dico deniq; angulũ femicirculi, contentũ diametro A C, & circunferẽtia A B, maiorẽ effe omni acuto angulo rectilineo; reliquũ uero angulũ cõtingentiæ, qui cõtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorẽ effe omni acuto angulo rectilineo. Quoniã oftenfũ eft, omnẽ rectã ex A ductã infra perpendicularẽ A E, cadere intra circulũ, faciet neceffario ea cum A C, minorẽ angulũ angulo femicirculi, at uero cũ A E, maiorẽ angulo cõtingentiæ, cũ ille fit pars anguli femicirculi, hic uero totum quidpiam ad angulũ contingentiæ. Angulus igitur femicirculi maior eft omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiufque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oftendendum.

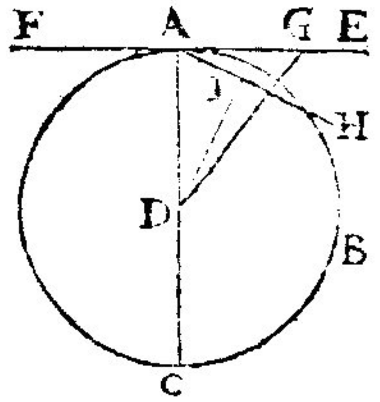


COROLLARIVM.

HINC manifeftum eft, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipfum circulum tangit. Oftenfum enim fuit, ipfam cadere extra circulum; Quare folum in puncto illo diametri extremo ipfum attingit.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonftrari oftenfiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo ABC, cuius centrũ D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quã dico extra circulũ cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniã igitur in triãgulo ADG, duo



17. primi angulı DAG, DGA, minores funt duobus rectis, & DAG, factus eft rectus; erit DGA,
19. primi recto minor. Quare maior erit recta D G, quã D A; ideoq; punctũ G, extra circulũ erit. Eademq; eft ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quã dico neceffario fecare circulũ. Fiat n. angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erũt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq; minores

11. pron. duobus rectis; quare coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, ut in I. Dico igitur punctũ I, effe intra circulũ. Quoniã tres anguli in triã

gulo

gulo D A I, æquales funt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, oftẽfi funt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo 32. primi

maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior eft quam D I. 19. primi

Non igitur D I, ad circunferentiã perueniet; propterea; punctum I, intra circulum exiftet; atque adeo recta A H, circulum fecabit. Reliquæ partes theorematis oftendentur, ut prius.

SCHOLION.

EXISTIMAT Peletarius, angulũ contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem effe omni acuto angulo rectilineo, nihil effe, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circũferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem fententia illius planior fiat, afferemus in medium digreffionem illam, quã ipfe hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput poftremũ attentius confiderarem, mihi fane in mentem fubijt prima fpecie, Geometriã nõ fatis fibi conftare; immo adeo, repugnantiã in fe admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiã eft, ut inter quãtitates minima dari poffit; qualẽ hoc loco angulũ, quẽ dicunt contingentiæ, feu rectius, contactus, minorẽ omni acuto pofuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus femicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas eft, quod partibus conftet, & fecundũ eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cõtinuæ in infinitum fectio eft. Atque adeo cum in primam propofitionem decimi incidiffem, tum magis anxie expendere cœpi, quonam pacto conciliari poffet tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

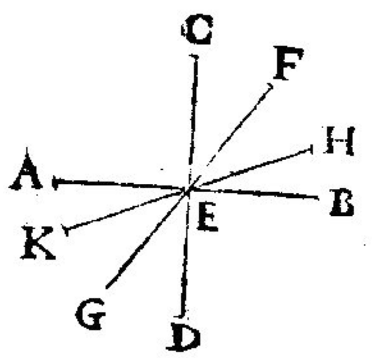
SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rurfus ex reliquo maius, quã dimidiũ, idq; continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore pofita.

VERBI caufa. Sint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, [illegible] (fi modo fit angul9) cõtactus: Vult prima decimi [illegible] ab angulo A, maius q̃ dimidium, ac rurfus a reliqua

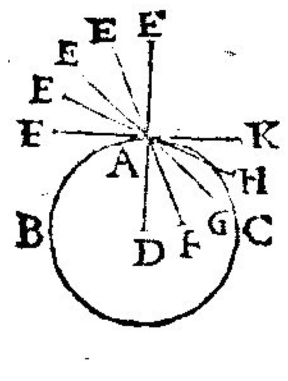
parte

parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (ut sic dicam) magis naturaliter uera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non uidet propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, ut quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc uentum erit, manifestum faciemus Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliisque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.

NOS *igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulũ non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis* A B, *&* C D, *se scindẽtibus in puncto* E *ad angulos rectos, intelligatur* C D, *sic moueri in orbẽ, scilicet super puncto E, fixo, vt ex* C D, *fiat F G; hinc sane ex recto angulo* A E C, *fiet obtusus A E F: Inde ex recto* B E C, *fiet acutus* B E F *Cũque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior* BE H; *sicque continuo, donec peruenerit ad* A B, *& intra eosdem terminos concludatur cũ ea. Tum enim immersa, vt sic dicam linea* C D, *in lineam* A B, *euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo*



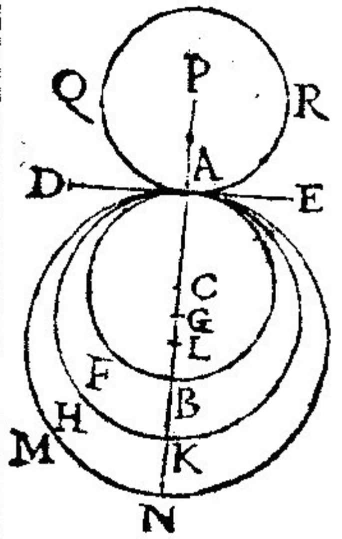
culo A B C A *cuius centrum D, linea* D E, *præteriens peripheriam, & secans ipsam in* A, *puncto fixo, super quod circunducatur ipsa* D E, *per puncta F, G, H. Tum fient anguli cõtinuo varii cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea F D, facta sit* E K *& tangat circulum* A c*tum linea* D E, *non iam inclinata intelligitur sed immersa in lineam* B A C *quantũ ad angulum attinet: non aliter, quam si* B A H, *esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque spatium* C A K. *Nam id sola* A C, *linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto* A, *amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cõsistat quam vno; fit, vt punctum* A, *tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum* A, *lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque* A, *peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita, fiant manifestiora: Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum* A B C, *circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hec Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.*



CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT *enim circulus* AFBA, *cuius centrum* C, *diameter vero* A B, *per cuius extremitatem* A, *ducatur linea* D E, *ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæ sextæ, lineam* D E, *contingere ipsum* A F B A, *circulum: ac propterea*

rea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, cẽtrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quãtitatem.



Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cõtactui D A F: Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cõtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

Sed & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excluduntur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum circulorum exterior, quantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quãtitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq; D A F, sit quantitas, per secundam earundem; neq; D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

Anguli, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

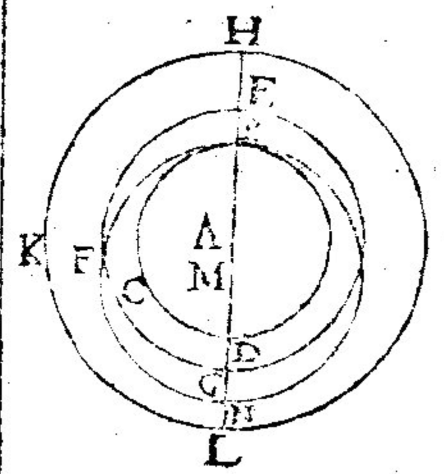
Vt in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quãtitas nõ est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

Hæc Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

In circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

Sint

SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G & secet E G ambos circulos in punctis E, B, D, & G Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

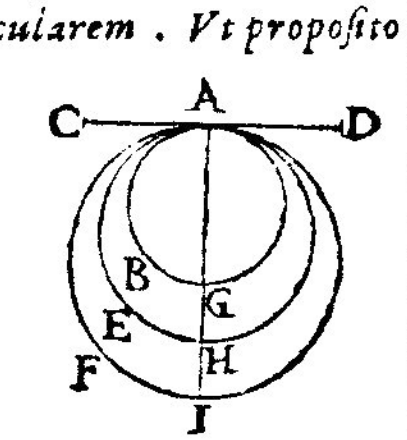


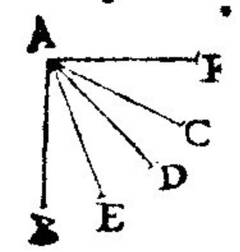
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorẽ, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat F C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D æqualis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio, eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset,

vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt a nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem; Immo vero asseueramus, quemuis angulũ contactus, & si ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod si adhuc maior circulus A F I, describatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor est recto B A F; & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse in ſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G, deſcribantur tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum, ſed ſemper recto, uel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Immo aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi B A G, maior eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus ſemicirculi F A I: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo ſemicirculi F A I, minor eſt angulus ſemicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus ſemicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior eſt, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonſtrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus ſint inæquales inter ſe, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, ſimiliter & anguli ſemicirculorum, ex eo manifeſtum eſt, quod angulus quilibet conſiſtit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt conſtat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiuſdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi vnus alteri ſuperponatur; Ea enim æqualia ſunt, quæ ſibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis ſemicirculorum, nequaquam reperiatur ſemper eadem inclinatio, quod (vno ſuperpoſito alteri) lineæ eorum non ſibi reſpondeant, ſed prorſus inter ſe diſſideant, ceu ex figuris ſuperioribus perſpicuum eſt; Non erunt omnes anguli huiuſcemodi inter ſe æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam ſecari nequeat, vt recte oſtendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri poteſt cauſa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum ſecabit, donec iterum ipſum contingat: Tunc enim primum ſecare deſinet circulum: Quare ſi uel minime inclinari intelligatur ſuper puncto illo contactus fixo, ſecabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum poſſit tangere, vt ex 2. propoſitione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli ſemicirculorum æquales inter ſe erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ ſibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui a peripherijs maioribus, minores. Anguli denique ſemicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obſcure intelligi poteſt ex ſuperioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum ſibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere pares, & vnum alteri poſſe æqualem exhiberi, ac rurſus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo ſemicirculi dici poteſt. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam eſſe quantitatem, angulum vero ſemicirculi, maximam.

DEINDE non eſt, quod anxium reddat Peletarium prima propoſitio decimi libri. Ea enim intelligenda eſt tam de quantitatibus eiuſdem generis, quam diuerſi, dummodo vtranis multiplicata alteram excedere poſſit; cuiuſmodi non ſunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus ſiue bis ſumatur, ſiue ter, quaterue, ſiue deniq; quoties libuerit, ſemper minor eſt angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter ſe æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel ſe illis æquarent; eſſet quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui eſt centeſima pars propoſiti anguli acuti rectilinei; quod eſt abſurdum, cum quilibet angulus contactus minor ſit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonſtratum. Quare nullo modo ex illa propoſitione colligere licebit, ſi ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rurſus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus propoſito; quoniam angulus contactus, vt dictum eſt, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, ſiue quantumuis auctus, ſemper minor exiſtit angulo acuto; nec vnquam ipſum ſuperare poteſt: quod tamen neceſſario requiritur ad demonſtrationem dictæ propoſitionis. Vt enim demonſtretur, multiplicanda eſt minor quantitas propoſita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipſe Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propoſ. lib. 10. aſſumit ſemper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere poteſt.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis ſe ſecantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt conſtat ex anguli plani deſcriptione tradita ab Euclide, quanquam ſe mutuo non ſecent, ſi producantur; cuiuſmodi ſunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ ſe tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonſtratio Peletarij, qua conatur oſtendere, contactum interiorem non eſſe quantitatem, nullius eſt momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores ſint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter ſe omnes æquales eſſe neceſſe eſt, ſed poteſt alio alius maior eſſe, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores ſunt angulo recto, & tamen ipſi inter ſe non ſunt omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores ſunt homine, vel monte, cum tamen ipſæ inter ſe valde ſint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.

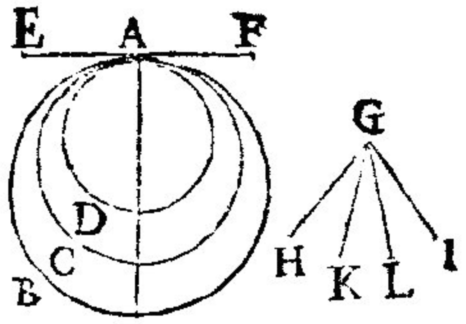
NEGAMVS deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe, ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Neque enim hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales exiſtunt. Immo magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt aperte conſtabit ex propoſitione. 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit vera pars eius, cum contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem conſtituunt duo circuli ſe exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremo hallucinatus eſt quoque Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Cardanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi maior ſit angulo recto. Sem-

cto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a periphæria, & linea tangente. Quemadmodum etiam cuius angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus contactus B A F, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant G K, G L, diminuetur continue angulus acutus: Et tamē semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

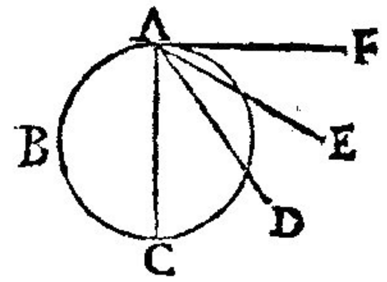
EX CAMPANO.

1. poster. CAETERVM ex hac propositione 16 perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius, vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta

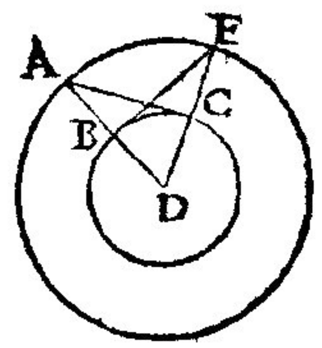
cta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectū maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

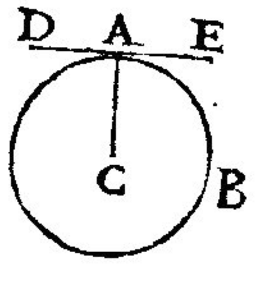
A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

EX puncto A, ducenda sit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq; D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ijs, æquales: 4. primi. Est autem D B E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciēdū erat.



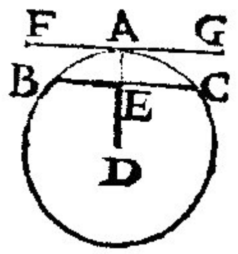
SCHOLION. I.

QVOD si punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.



EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

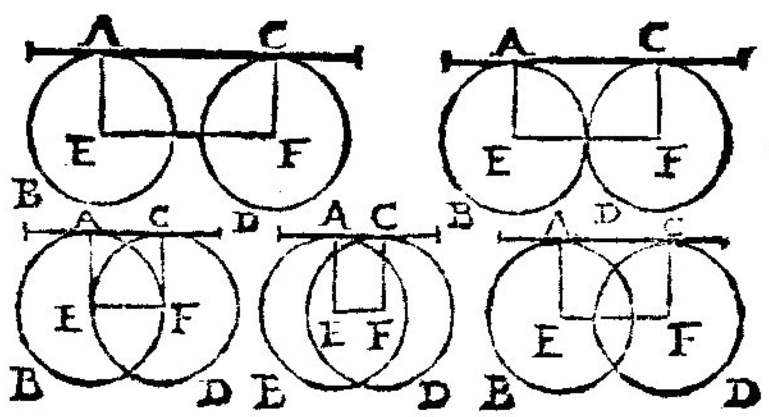


CIRCVLVM A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G,
28.primi. parallela ipsi B C, tangetq; circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.

SCHOLION. II.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

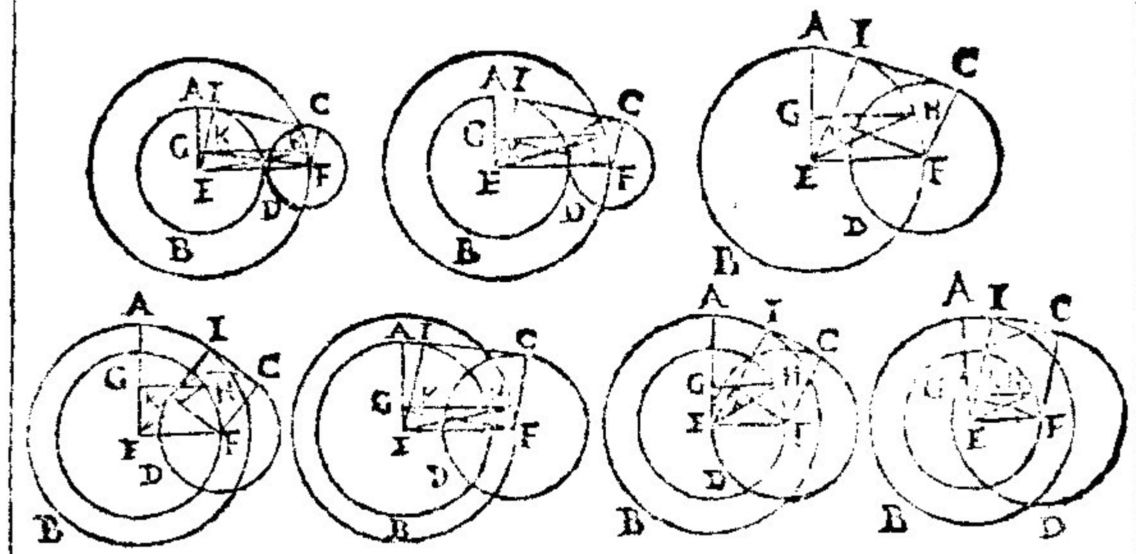
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



SINT primũ duo ꝓpositi circuli æquales A B, C D, quorũ centra E, & F, recta iungantur E F, ad quã ducãtur perpendiculares E A, F C, secãtes circun-

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim E A, F C, se-
midiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, 28.primi.
quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; E F, A C, æqua- 33.primi.
les & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, 29.primi.
per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrunq; circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales A B, C D, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter

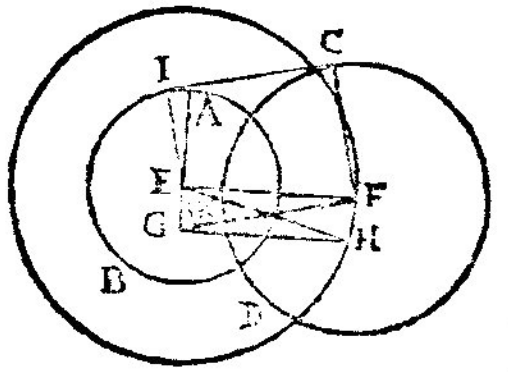


uallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea recta A G, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsq; ad circunferentiã circuli vltimo descripti. Ducta aũt recta H E, fiat angulo H E A, angulus FEI, æqualis; atq; ex F, agatur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectã ꝑ pũcta I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur n. ex I E, recta IK, ipsi A G, vel semidiametro FC, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igitur latera HE, EG trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis
cõtenti æquales ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKE, æ- 4.primi.
quales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK æquales sunt, & parallelæ,
ex cõstructione, erũt quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; 33.primi.
propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, rect⁹ erit; 29.primi.
Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ppositũ.

SATIS aũt constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut.n. alius extra aliũ cadit, aut se mutuo cõtingũt, aut se inuicẽ p cẽtra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistant in cõmuni eorũ segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli ppositi fuerint inæquales, id cõtingere posse septẽ modis. Aut.n. minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipsum tãgit, aut ipsũ secat, ita vt vel cẽtrũ eius sit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãseat, vel cẽtrũ minoris sit extra circunferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris p maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.



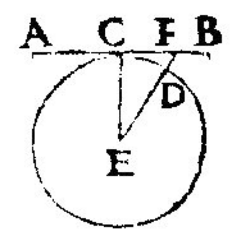
QVONIAM vero, circulis inæqualibus existẽtibus, initiũ cõstructionis sumpsimus semp a maiori, si quis maluerit a minori īcipere, id efficiet eadẽ cõstructione, demõstrationeq;, nisi qđ rectæ AF, IE, protrahẽdæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, qđ HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq; angulũ EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ esse ad AB.

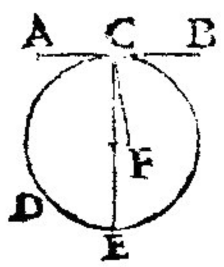
AB. Si.n. nõ est, ducatur EF, perpẽdicularis ad AB, secãs circunferentiã in D. Quoniã igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis, Et est EFC, rectus, ex cõstructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, ED, quã EF, pars quã totũ. qđ est absurdũ. Est igitur EC, perpẽdicularis ad AB. Quare si circulũ tãgat recta quæpiam linea, &c. Qđ demõstrãdũ erat. *17. primi.* *19. primi.*



ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorũ ACE, obtusus, & alter acutus: Sit ergo ECB, acutus, q cũ maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdũ. Oĩs siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto. *16. tertij.*

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cõtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.



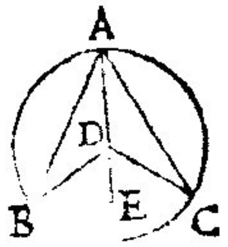
TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdũ. Nõ igitur extra CE, cẽtrũ circuli existet. Itaq; si circulũ tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demõstrandũ. *18. tertij.*

THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

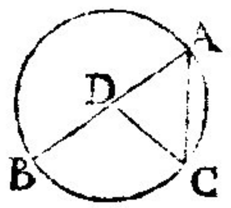
IN

In circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ esse anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã



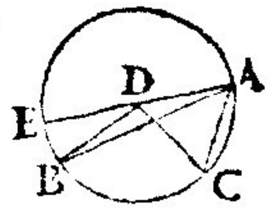
igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt
5.primi. anguli DAB, DBA, æquales: Est autem ex-
32.primi. ternus angulus BDE, æqualis duob⁹ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB. Eodẽ mõ duplus ostẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ est ꝓpositũ.

Secundo non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis



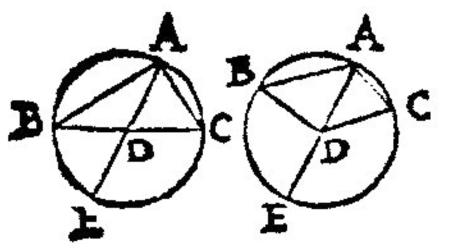
32.primi. est duob⁹ internis DAC, DCA: Hi aũt duo
5.primi. inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

Tertio recta AB, secet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ basin EC, & recta AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostẽsum



fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n. hi anguli eandẽ basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n. totum totius est duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circu-
19 pron. lo igitur angul⁹ ad cẽtrũ duplex est, &c. Quod erat demõstrãdũ.

SCHOLION.



Quod si recta BD CD, in cẽtro angulũ nõ cõstituãt ad partes basis BC; quod tũ demũ fit, quãdo segmentũ BAC, est vel semicirculus, vel segmentũ minus; nihilo minus spatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eadẽ habeat basin, quã spatiũ illud. Ducta.n. recta AE, per centrũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt ostẽsum est. Spatiũ igitur ad centrũ D, basin habẽs BEC, cõstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

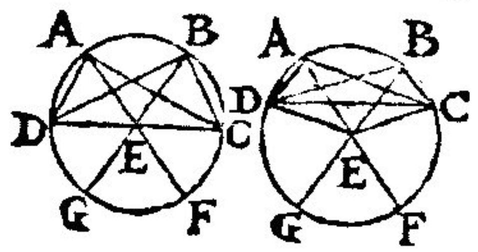
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

In circulo ABCD, cuius centrum E, existãt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primo segmentum DABC, semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli

20. tertij.

E. Quare inter se æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendent' esse æquales. 7. pron.

Sit secũdo segmentũ DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducãtur ꝑ centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angul⁹ DEF, ad cẽtrũ, dupl⁹ est anguli DAF, ad peripheriã: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo

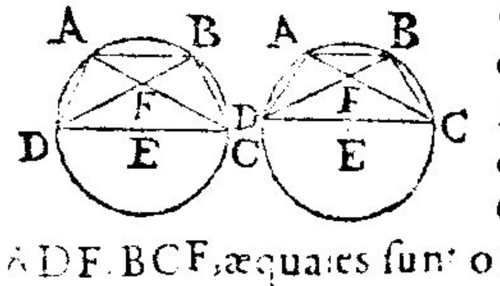


20. tertij.

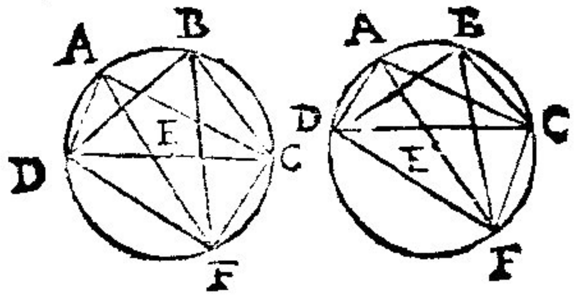
DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

Aliter. Quoniam, vt in scholio propos. præcedẽtis demonstrauimus, spatiũ ad centrũ E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: 7. pron.
Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

Aliter. Secẽt sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam



quā hi æquales ſunt duobus re-
ctis: Si auferantur anguli AFD, 15.primi.
BFC, qui æquales ſunt; erūt reli-
qui ADF, DAF, reliquis BCF,
CBF, æquales. Atqui & anguli
ADF, BCF, æquales ſunt oſteſi in ſegmēto maiori ADCB.
Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, ęquales ſunt.

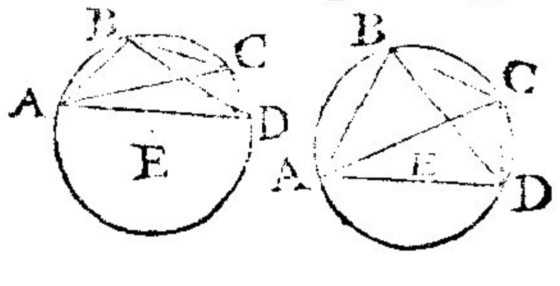


ALITER. Ductis re-
ctis DF, CF, ad pūctū cir-
cūferētiæ quoduis F, in-
cludētibus cētrū E, ita vt
tā DABCF, q̃ FDABC,
ſit ſegmētū maius, iungā-
tur quoq; rectæ AF, BF.
Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem ſegmento maiori
DABCF, ęquales ſunt; nec nō & anguli FAC FBC, in ſeg-
mēto etiā maiori FDABC, exiſtētes: Si hi illis addātur, fiet
totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaq; in cir-
culo, qui in eodē ſegmento ſunt, &c. Quod erat oſtēdendū.

21. THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in cir-
culis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo,
duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius cētrū E, inſcriptū ſit quadrilaterū AB-
CD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CDA: Itē BCD,



DAB, æquales eſſe duobus
rectis. Ductis.n. diametris
AC, BD, erunt duo anguli
ABD, ACD, in eodē ſegmē- 21.tertii.
to ABCD, ęquales. Simili-
ter erūt duo anguli CBD,
CAD, in eodē ſegmēto CBAD, æquales. Quare duo anguli
ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, æqualis eſt duo-
bus angulis ACD, CAD. Addito igit cōi angulo CDA,
erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD,
CAD, CDA: Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis; igitur 32.primi.
& duo

& duo ABC, CDA, duobus erūt rectis æquales. Eodem mo-
do oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis
ęquales. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorū, &c.
Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM quoq; huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, q ex aduerſo, duo-
bus rectis ſint æquales; circulus, qui p tres quoſ-
cūq; eius angulos deſcribitur, trāſibit etiam per
reliquū quartū angulū; Atq; adeo circa ipſum
quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

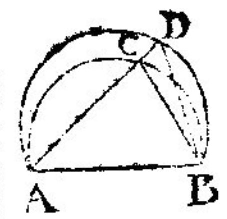
IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autē hoc fieri poſſit, in 25. propoſ. huius lib. & in 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiā per D. Si .n. nō, tranſibit vel vltra D. vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad

circunferētiā, ita vt nō ſecent rectas CD, AD. Quo facto, erūt anguli B & E, æquales duobus rectis; Erāt aūt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato cōi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdū. Ducta.n. recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus p pūctū D. qđ eſt propoſitū. 22.tertij. 21.primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

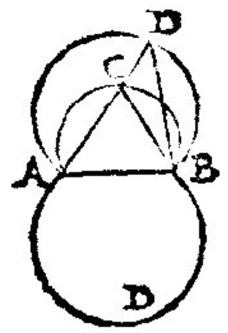
SVPER eadem recta linea, duo ſeg-
menta circulorum ſimilia, & inæqualia, nō
conſtituentur ad eaſdem partes.

SI



SI .n. fieri pōt, sup recta AB, cōstituātur ad easdem partes duo segmēta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuū ē aūt, qđ se solū interse
10. tertij. cēt in pūctis A, & B; circulus .n. circulū nō secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmēti tota erit extra peripheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, secās circunferētias in C, & D, & cōnectātur rectę CB, DB. Quoniā igitur segmēta ponūtur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo
16. primi ADB, externus interno: qđ est absurdū. Nō igitur segmēta similia. Quare sup eadē recta linea, &c. qđ erat demōstrādū.

SCHOLION.



EADEM ratione, neq; ad diuersas partes super eadē recta linea duo segmēta circulorū similia, & inæqualia cōstituētur. Nā si alterū eorū intelligatur moueri circa lineā AB vt iā ambo sint ad easdē partes, in idē absurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōstituta sint segmēta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento CFD, cōgruere. Si.n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cōstituētur super eadē recta CD, duo segmēta AEB, AFB, similia, & inæqualia; qđ est

10. tertij. absurdū. Demōstratū.n. est cōtrariū. Qđ si partim extra cadat, partim intra, secabūt sese in pluribus pūctis, quā duobus, nimirū in A, B, G. Qđ est absurdū. Circuli.n. nō se secāt in plu-
10. tertij. ribus pūctis, quā duobus. Cōgruet igitur segmētū AEB, segmento CFD,

CFD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erūt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

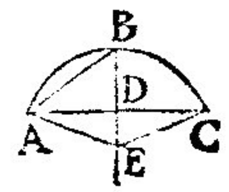
NON solum in hac propositione ostēditur segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verū etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior est angulo DAB uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidē contingit, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib, quod est extra segmentum; cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quam DB,



cum DB, perficiens diametrum, sit omnium minima, quæ 7. tertij.
ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, 18. primi
æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentū ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triāguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare bases EA, EC, æquales erunt; 4 primi

Q Et

6. primi Est autẽ & E A, æqualis ipsi E B, quod anguli E A B, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ E A, EB, EC, æquales erũt, ac
9. tertij. propterea E centrũ erit circuli ABC. quandoquidẽ ex E, plures quã duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

Sit secundo angulus D B A, angulo D A B, æqualis; (Quod demũ continget, quando segmentũ ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, cẽtrum, atq; adeo rectæ D A, DB, æquales; quare

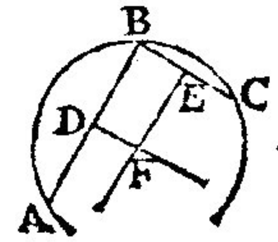
5. primi & anguli D A B, DBA, æquales erunt) Erunt
6. primi igitur rectæ D A, DB, æquales: Erat autem & D C, æqualis ipsi D A; Quapropter cum tres rectæ D A,
9. tertij. DB, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidẽ eueniet, si segmentũ ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrũ, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidẽ intra segmentum, cũ maius
7. tertij. esse ponatur, existit; erit D B, omnium, quæ ex D, in circunferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quã

18. primi D A, ideoq; angulus DAB, maior angulo DBA.) fiatq; angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostẽdetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B ut constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

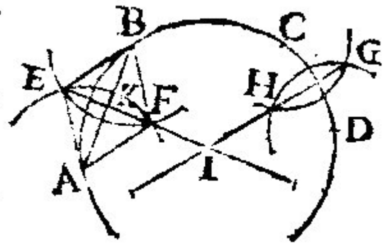
SCHOLION.

BREVIUS *inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus rectis coniungantur* AB, B C, *quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educãtur ad* AB, BC, *perpendiculares* D F, *E F Quoniã igitur p corollariũ propos. 1. huius lib. tam DF, quã E F, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentũ, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum; quod est propositum.*



ALITER, *vt Mechanici solent. Accipiantur in circunferentia*

ferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idẽ interuallum quodcunque, qui se intersecent in F, & F, Posteaex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describãtur ad quoduis interuallum, siue idẽ quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F. GH, transibunt ambæ per centrũ: quare punctum

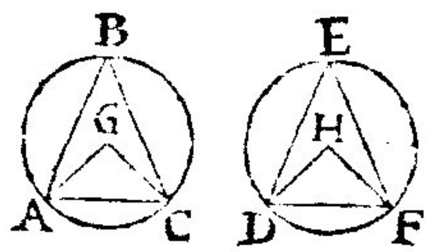


I, in quo coeunt, erit centrum Quod autẽ lineæ E F, GH, per cẽtrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, AF, BE, BF quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorũ. Quoniã igitur latera A E, FF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales: Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta re- 8. primi
*cta AB, quæ secet E F, in K; quoniã latera AE, FK, triãguli AEK, æqualia sunt lateribus B E, EK, triãguli B E K; & anguli AEK, BEK, ostensi quoque æquales; erunt & bases A*K, *B K, & anguli A K E, BKE, æquales, ideoque recti. Quare* 4. primi
cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per centrũ ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum.

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

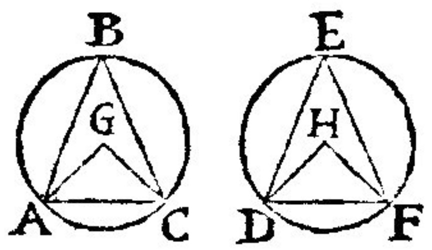
IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorũ cẽtra G, H, cõstituti sint primo ad cẽtra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, qb⁹ insistũt, siue sup quas ascẽderũt, esse ęquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo pũcta B, E, ad q̃ rectę ducant̃ AB. CB, DE, FE, cõnectãturq; rectę A C, DF. Quoniam igitur anguli B, & E, dimi-



10. tertij. dij sunt ęqualiũ angulorum G, & H; erunt ipsi æquales inter se: Quare ex definitione segmẽta ABC, DEF, similia erunt.

Q 2 Et

Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorũ æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales, ex hypothesi; erũt



4. primi bases A C, D F, æquales: Cum igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales

24 tertij. A C, D F, erunt ipsa inter se æqualia; Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod est propositum.

SINT secundo ad periperipherias constituti duo anguli æquales B, & E; dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta A B C, D E F, similia. Cum igitur sint super æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales sint,

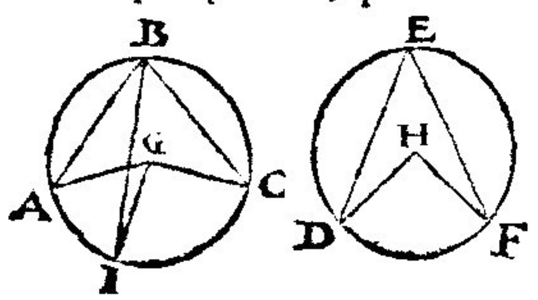
20. tertij. quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt

24. tertij. prius; rectæ A C, D F, æquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

20. tertij. *HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniã anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.*

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Itẽ angulus A B C, ad circunferentiam maior angulo D E F, ad circunferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H E, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, ut ostensum est, peripheriæ C I, D F, æquales;

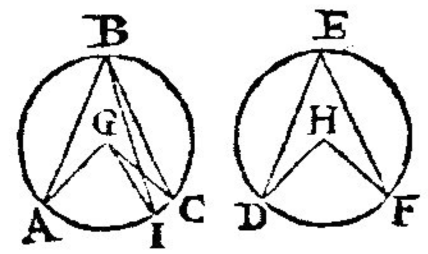


les; Ac propterea A C, maior, quam D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistũt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F; Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales. 26. tertij.



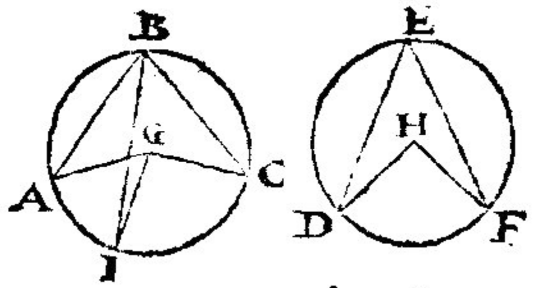
INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. 26. tertij.

SCHOLION.

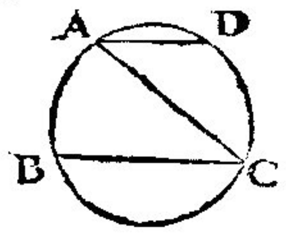
HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniã anguli A B C, & E, dimidii sunt angulorum A G C, & H, quos iã ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales. 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim scholii præcedentis sit peripheria A C maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem

rem eſſe angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ DF, ducanturq́; rectæ IG, IB, erunt, ut oſtẽſum eſt, tã anguli ad centrũ CGI, DHF, quã anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo DHF, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



E x *hac porro propoſitione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuo nõ ſecantes, eſſe parallelas. Et ſi ſint parallelæ, ab ipſis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ* A D, B C, *intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, eſſe parallelas. Ducta namque recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, erunt anguli*



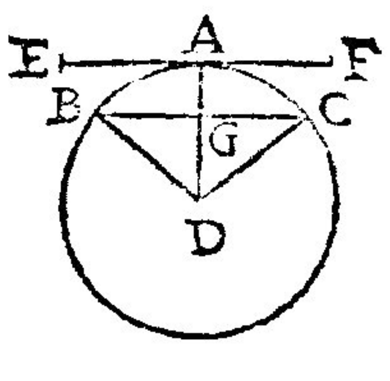
27. tertij *A C B, C A D, ipſis inſiſtentes, æquales; qui cum ſint alter-*
27. primi *ni, erunt A D, BC, parallelæ.*

S I N T *iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, eſſe æquales. Cum enim ſint parallelæ AD, BC, ducta*
29. primi *recta AC; erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; Ac pro-*
26. tertij. *inde arcus A B, DC, quibus inſiſtunt, æquales erunt.*

V I S V M *eſt quoque hoc loco apponere ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: uidelicet.*

L I N E A recta quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectę lineæ; quæ peripheriam illam ſubtendit.

I N *circulo A B C, cuius centrũ D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ* BAC, *linea* EF *tangens circulum. Dico EF, parallelam eſſe rectæ* BC, *arcũ* BAC, *ſubtendenti. Ducta enim ex centro* D, *ad punctũ contactus A, recta D A, connexiſq́; rectis* DB, D C, *erunt anguli*



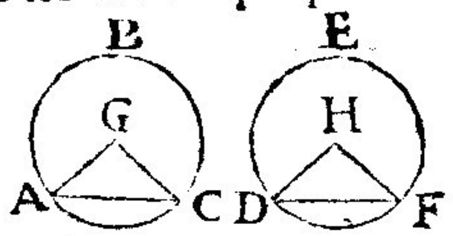
27. tertij. ADB, A DC *circunferẽtijs æqualibus* AB, AC, *inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera* B D, D G, *trianguli* BDG *lateribus* C D, D G, *trianguli*
4. primi CDG, *æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad* G, *æquales*

les ſunt ſuper baſes G B, G C, *ac propterea recti. Igitur &* AGB AGC, *illis deinceps recti ſunt. Sunt autem & anguli*
GAE, GAF, *recti, quod* D A, *perpẽdicularis ſit ad* EF; *Ergo* 18. tertij.
E F, BC, *parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.* 28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

I N æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorẽ quidem maiori, minorem autem minori.

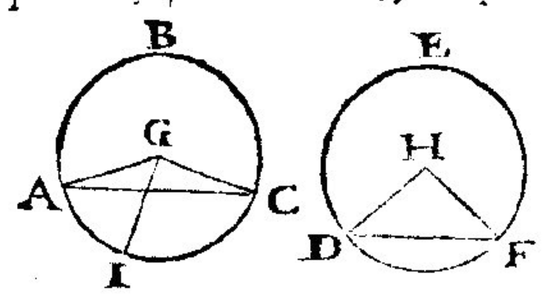
I N circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorẽ peripheriam ABC, æqualẽ eſſe maiori DEF; & minorẽ AC, minori D F. Ductis n. rectis AG, GC, DH, H F, erunt latera AG, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H,



HF, trianguli DHF; Sunt autẽ & baſes A C, DF, æquales:
Igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peri- 8. primi
pheriæ A C, D F, quibus inſiſtunt, æquales erunt; quæ abla- 26. tertij.
tæ ex totis æqualibus, relinquent æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I O N.

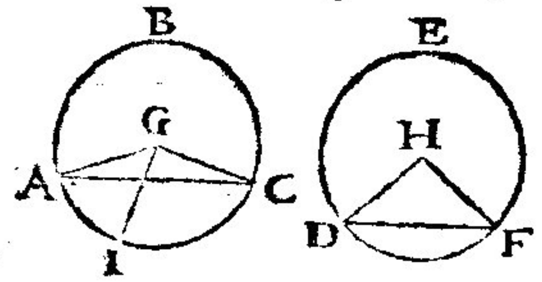
Q V O D *ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorẽ peripheriã, quam minor, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo. Nã ſi de ſegmẽtis circuli maioribꝰ ſermo habeat, maior linea auferet minorem peripheriã, q̃ minor. In circulis. n. æqualibꝰ*



ABC, D E F, *quorum centra G, & H, ſit recta* A C, *maior, quam D F. Dico peripheriam A C, ſemicirculo minorem, maiorem eſſe peripheria D F; At peripheriam A B C, mi-*

norem

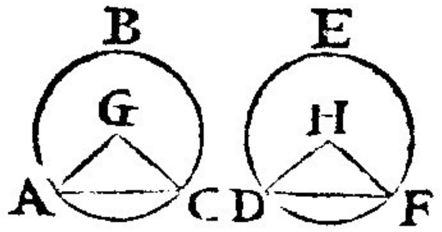
norem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F trianguli D H F; Ponitur autem basis A C,
5. primi maior base D F: Igitur angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F æqualis; eritque propterea peripheria C I,
26. tertij. peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F. Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.



28.
THEOR. 26. PROPOS. 29.

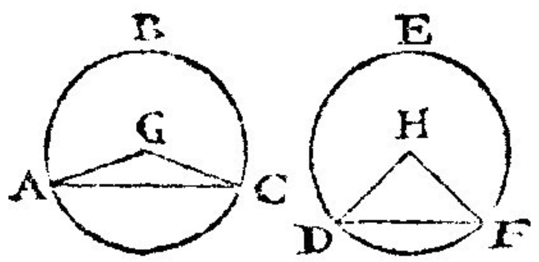
IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

IN circulis eiſdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Sunt autẽ & anguli G, H, æqua-
27. tertij. les, quod æqualibus peripherijs A C, D F, inſiſtant: Igitur
4 primi baſes A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum.



SCHOLION.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet maiorẽ maior linea, quam minorem, ſi de ſegmẽtis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmẽtis maioribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet maiorem minor linea, quam minorem.



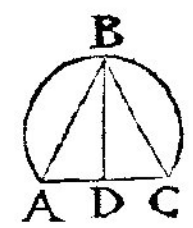
rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H ſint peripheriæ ſemicirculo minores A C, D F, ſitque A C, maior, quam D F; Ac proinde A B C, minor quam D E F. Dico lineam A C, maiorem eſſe, quam D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. Cum igitur latera A G, G C trianguli A G C, æqualia ſint lateribus D H, H F, trianguli D H F, erit baſis A C, maior baſe 24. primi
D F, &c.

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. ut conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemque circulo.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam biſariam ſecare.

SIT peripheria A B C, ſecanda biſariam. Ducatur recta ſubtendens A C, quæ diuiſa biſariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, biſariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: Igitur & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propte- 4. primi
rea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peri- 28. tertij.
pheriam biſariam ſecuimus: Quod erat faciendum.

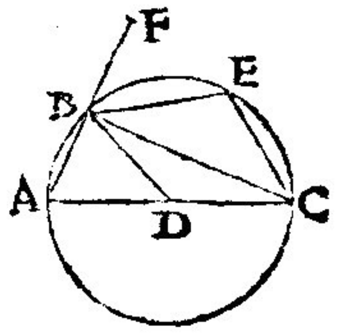


THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui uero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris

ioris segmenti, recto quidẽ maior est: minoris autẽ segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrũ D, diameter sit A C, cõstituaturque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmẽto CAB, constituatur quoq; in CEB, minori segmẽto angulus B E C. Dico angulum ABC, in se-



micirculo rectum esse; angulum uero BAC, in maiore segmento, minorem recto; & angulũ B E C, in minori segmento, maiorem recto. Item angulũ maioris segmenti cõprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehẽsum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducantur enim rectæ B C, B D, & extendatur A B, in F. Quoniã igitur rectæ DA, DB, æqua-

5 primi les sunt, erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis;

32. primi erit: Est autem & angulus F B C externus eisdem duobus internis angulis B A C B C A in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli A B C, F B C; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus A B C; quod est primum.

QVONIAM uero in triãgulo ABC, duo anguli ABC,

17 primi & BAC, sunt duobus rectis minores Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulũ de-

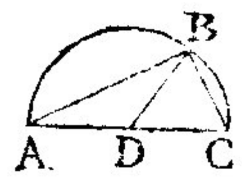
22. tertij. scripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, ostensus est recto minor: Erit B E C, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cũ angulus segmenti minoris, comprehensus

hensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoq; anguli rect. FBC; Erit angulus segmẽti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC, & centrũ D, sit angulus ABC, quem dico esse rectũ. Ducta. n. recta BD, erunt an-

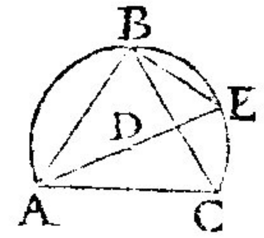


5. primi guli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cũ igitur angulus BDC,

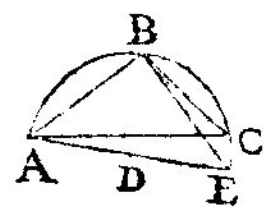
32. primi externus æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triãgulo ABD: Erit angulus BDC, duplus anguli DBA; Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC; atq; adeo duo anguli ad D, dupli erũt totius an-

13. primi guli ABC. Cũ igitur anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorũ dimidius, rectus: quod est primũ.

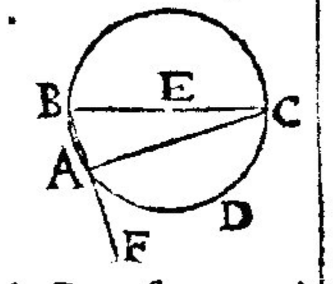
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod est secundum.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus A B C, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius A BC, & segmentum minus A D C, quorum centrum B. Dico angulũ C A B, segment. maioris, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro C B & recta B A F; erit angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C. Cum igitur angulus rectu B A C, sit pars anguli C A B, segmenti maioris: & angulus G A D, segmenti minoris, pars quoque



quoque anguli recti F A C; constat utrumque.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

EX CAMPANO.

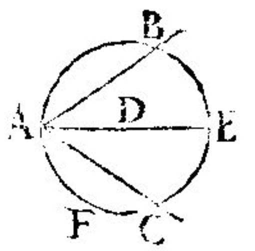
Ex hac propositione perspicuum quoque est, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propos 16. huius lib. quarum una est.

Transitvr a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

Altera uero est eiusmodi.

Contingit reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

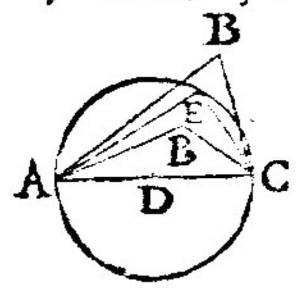
In circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cũ peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moueatur ad A C, faciet a fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, uel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, uitiosas esse prædictas consequentias.



SCHOLION.

Manifestvm quoque est conuersum huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maius, angulus in eo foret acutus; si minus, obtusus; & sic de reliquis partibus theorematis.

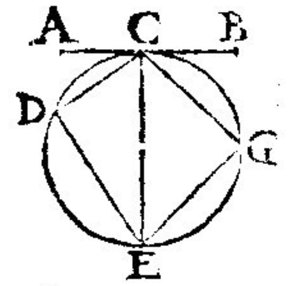
Hinc etiã perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circulus describatur ad interuallum dimidiæ subtensæ; circulum transire per angulum rectum. Angulo enim recto A B C, *subtensa* A C, *bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, uel* D C, *circulus describatur* A E C, *quem dico transire per* B, *si enim transeat citra* B, *uel ultra, ductis rectis* A E, C E, *erit angulus* A E C, *rectus quoque. Quare anguli recti* B, *&* E, *æquales erunt; quod est absurdum, cum angulus* E, *sit necessario, uel maior, uel minor angulo* B. *Transit igitur circulus per punctum* B, *quod est propositum.* 31. tertij. 21. primi

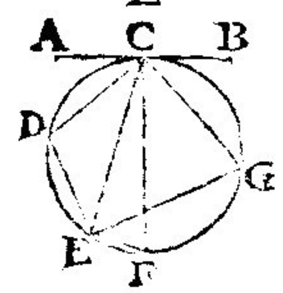


THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

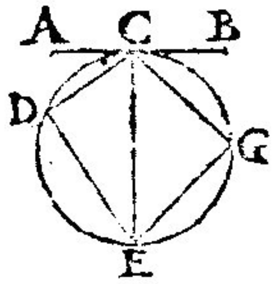
Tangat recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Transeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: sunt 18. tertii
autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti; Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est. 31. tertii



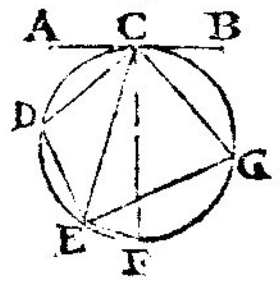


Non transeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis ad 18. tertii

31. tertii ad A B, & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, æquales erunt uni recto, ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis:



21. tertii Est autem angulo C F E, æqualis quoq; angulus C G E, cum uterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero C D E G, duo anguli



22. tertii C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: Sunt autẽ & duo anguli A C E, B C E,
13. primi duobus rectis æquales; si auferantur ęquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

POTEST *theorema hoc conuerti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineę circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem constructione transeat prius recta C E, per centrum, secans circulum CDE, *& ducatur recta* A B, *per C faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tan-*
31. tertii *gere circulum. Quoniam angulus C G E, rectus est; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos.* 16. *huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non transeat per centrum, construaturque figura, ut supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E;*
21. tertii *in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo* E C F, *erit angulus* A C F, *æqualis duobus*

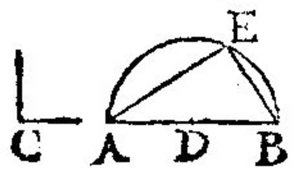
bus angulis E F C, E C F; *Atqui anguli* E F C, E C F,
æquales sunt uni recto, quod angulus C E F, *rectus sit in se-* 31. tertii
micirculo, & tres anguli in triangulo C E F, *æquales sint* 32. primi
duobus rectis. Angulus igitur A C F, rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos. 16. *huius lib.* A B, *circulum tanget.*

EODEM *modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo* C D E, *in alterno segmento minori, ostendetur recta* A B,
tangere circulum. Cum enim anguli B C E, *A C E; duo-* 13. primi
bus sint rectis æquales: Item duo anguli: C D E, C G E, *duo-* 22. tertii
bus rectis æquales; si demantur æquales B C E, C D E *remanebunt anguli* A C E, C G E, *æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta* A B, *circulum tanget.*

PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

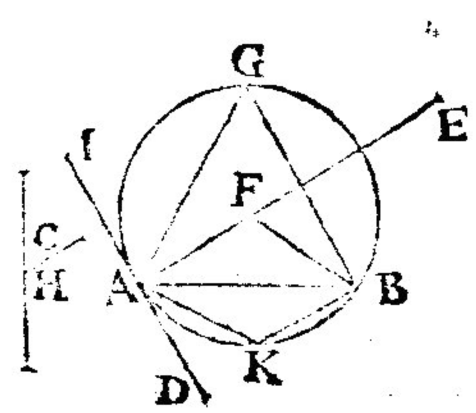
SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit A B, & datus angulus primo rect9 C. oportet igitur super A B, segmentũ describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus A E B, in descripto



semicirculo rectus est, ideoque æqualis 31. tertii
angulo C, recto.

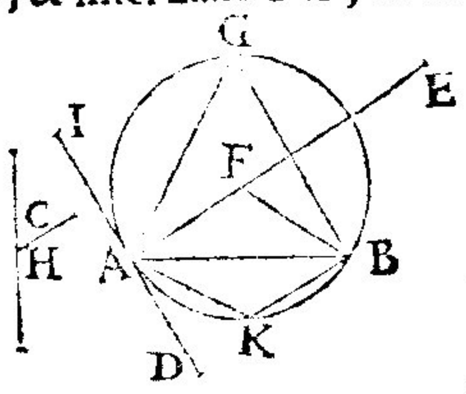
SIT secundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, ęqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, q̃ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, ęqualis angulus F B A, secetq; B F, rectã A E, in F. Erũt igitur rectę



F A, F B, ęquales. Quare si cẽtro 6. primi

F, &

F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æquale angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos 16. huius lib. Quapropter angulus



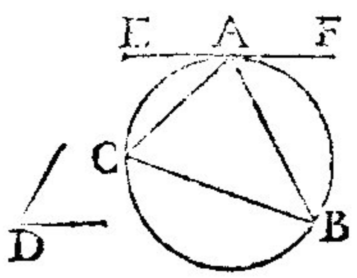
32. tertii. D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno.

Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, describitur que erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo alterno I A B, hoc est, angulo dato obtuso H. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33. PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit A B C, a quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo



17. tertii. D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulũ A C B, in segmento ablato A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim

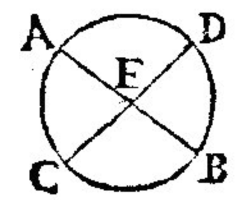
32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc est, angulo D. A dato ergo circulo abscidimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

THEOR.

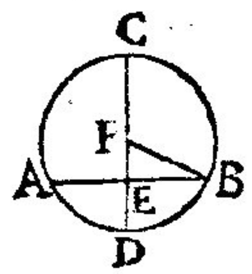
34. THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ A B, C D, in E; Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis C E, E D. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primo utraque per cẽtrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus, æquale esse ei, quod sub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.

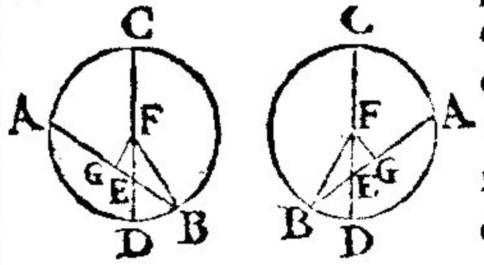


TRANSEAT secundo C D, sola per centrum F, di-
uidatque prius rectam A B, bifariam, ac propterea ad angu- 3. tertij.
los rectos, coniungaturque recta B F. Quoniam igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum sub C E, E D, una
cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato 5. secundi
rectæ F D, deoque quadrato rectæ F B; Sunt.n. rectæ F D, F B æquales: Est autẽ qua-
dratum rectæ F B, æquale quadratis recta- 47. primi
rum F E, E B; Igitur rectangulum sub C E, E D, una cum quadrato rectæ E F, æquale erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B; cum A E, E B, rectæ sint æquales.



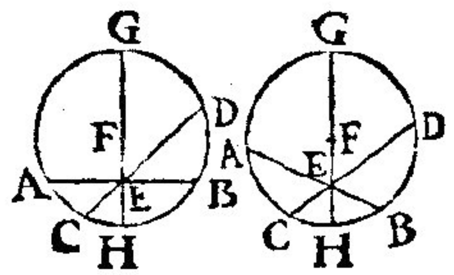
Diuidat iam C D, transiens per centrum rectam A B, nõ bifariam. Secetur ergo A B, bifariam in G, ducanturque re-
ctæ F G, F B, eritque F G, perpendicularis ad A B. Quo- 3. tertij.
niam uero rectangulum sub C E, E D, una cum quadrato

5. ſecundi rectæ F E, æquale eſt quadrato rectæ F D, hoc eſt, quadra-
47. primi to rectæ F B: Eſt autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum ſub C E, E D, una cum quadratis rectarũ F G, G E, ęquale quadratis rectarũ FG, GB.



Dempto ergo cõmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulũ ſub C E, E D, una cum quadrato rectæ GE, æqua le quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulũ ſub A E, EB,
5. ſecundi una cum quadrato rectæ GE, æquale eſt eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulũ ſub C E, E D, una cũ quadrato rectæ GE, æquale eſt rectangulo ſub A E, EB, una cum quadrato eiuſdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum ſub C E, E D, æquale rectangulo ſub A E, EB. quod eſt propoſitum.

TERTIO neutra per centrũ tranſeat, ſiue una illarum biſariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum ſectionis E, recta G H. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub A E, E B, æquale eſſe rectangulo ſub G E, E H, ſiue A B, diuidatur biſariam, ſiue non: Item rectangulum ſub CE, E D, æquale eſſe quoq; eidem rectangulo ſub G E, E H, ſiue C D, ſecta ſit biſariam, ſiue non; Erit rectangulum ſub A E, E B, æquale rectangulo ſub C E, E D. quod eſt propoſitum.

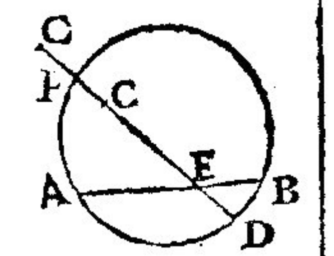


SCHOLION.

CONVERTI *poterit theorema iſtud hoc modo.*

SI duæ rectæ ita ſe ſecent, ut rectangulum ſub unius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

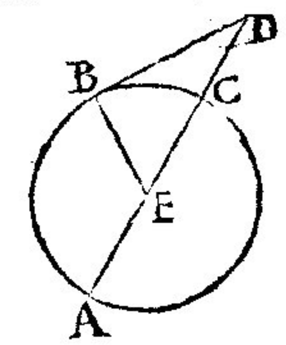
SECENT *ſe mutuo rectæ A B, CD, in E, ſitque rectangulum ſub* A E, E B, *æquale rectangulo ſub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea circulum poſſe deſcribi. Deſcribatur enim per tria puncta A,* D, *& B, circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, oſtendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui ſi non tranſeat per C, tranſibit aut ultra C, uel citra, ut per F. Quoniam ergo re-*
ctangulum ſub F E, E D, æquale eſt rectangulo ſub A E, E B; 35. tertij.
& rectangulum ſub C E, *E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo ſub A E, E B: Erunt rectangula ſub C E, E D; & ſub* F E, E D, *æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Tranſibit igitur circulus per punctum C. quod erat propoſitũ.*



THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

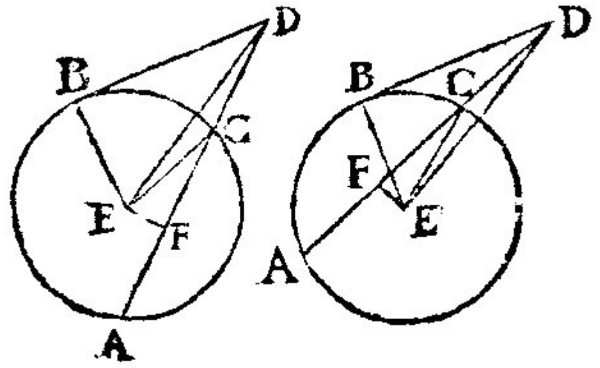
SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera uero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente deſcribitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum ſumatur D, a quo linea ducatur D A, ſecans circulum in C, & linea D B, cir-
culum tangens in B. Dico rectangulum 17. tertij.
ſub D A, D C, æquale eſſe quadrato rectæ D B. Tranſeat enim primo recta D A, per centrum E, & iungatur recta
E B, quæ perpendicularis erit ad D B. 18. tertij.
Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, erit rectangulum ſub D A, D C, una
cum quadrato rectæ E C, hoc eſt, cum quadrato rectæ E B, 6. ſecundi



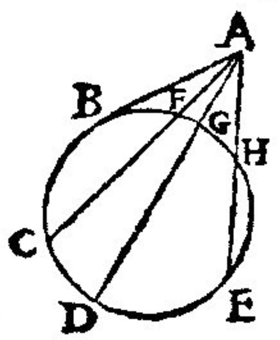
æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ
47. primi D E, æquale quadratis rectarum E B, B D; Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; Quod est propositum.

NON transeat iam D A, per centrũ E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque



18. tertij. E B, ad B D, perpendicularis; & E F, ad A C.
3. tertij. Quoniam igitur C A, diuisa est per ęqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ C F, æ-
6. secundi quale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. primi D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratũ rectæ EB; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ EB æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadra-
47. primi tum rectæ D E, æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo cõmuni quadrato rectę B E, remanebit rectangulum sub D A, DC, quadrato rectæ D B, æquale; quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

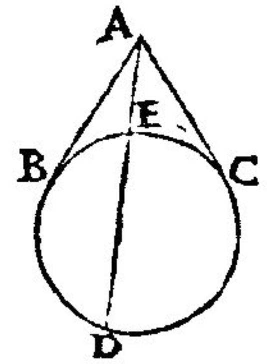
COROLLARIVM. I.



HINC manifestum est, quod si a puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula cõprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A F; Item sub

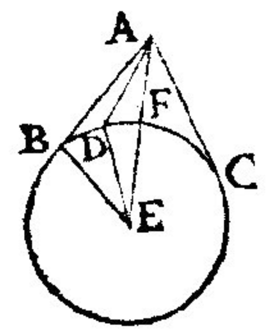
sub A D, A G; & sub A E, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula di- 36. tertij.
cta rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

COROLLARIVM. II.



CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse ęquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ
A B, quam quadratum rectæ A C, æquale re- 36. tertij.
ctangulo sub A D, AE; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.

COROLLARIVM. III.



PERSPICVVM denique est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangãt. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundẽ tangens; ductis rectis EB, ED,
ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, 18. tertij.
ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si
ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior 21. primi
angulo A B E.

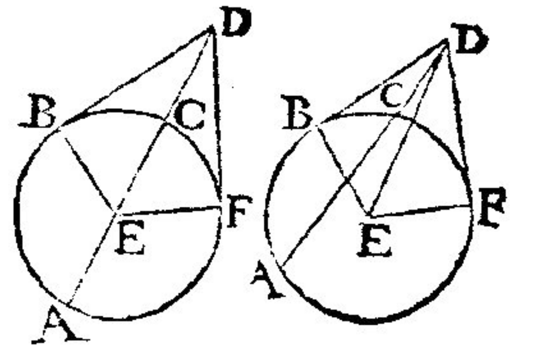
ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrũ E, quæ circulum secet in F, erit A D, cum sit propinquior minimę
A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Solum igi- 8. tertij.
tur duæ rectę ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, com-

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Di-
17. tertij. co D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, æqua-
36. tertij. le est quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B, erunt quadrata rectarum D F, D B, inter se æqualia, ideoq; & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus D B,
8. primi B E, trianguli D B E, & basis D E, communis; erunt angu-
18. tertij. li D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D F E, rectus est, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulū sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandū.



SCHOLION.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI TERTII.

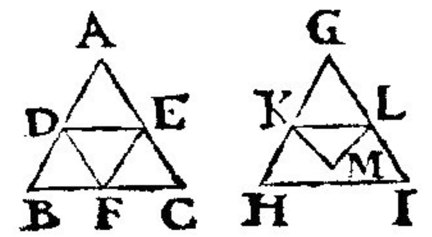
EVCLIDIS
ELEMENTVM IIII.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cū singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS Euclides in quarto hoc libro de uariis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus; nec nō de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.



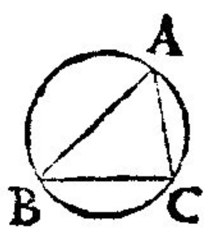
II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circunſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum DEF; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cũ ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.



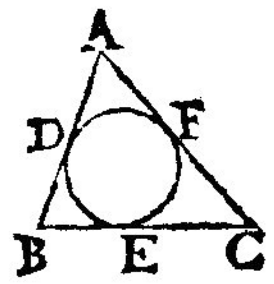
VT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ eſse inſcriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cũ ſingula latera eius, quæ circunſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT

AT vero, ſi latera trianguli ABC, ſingula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

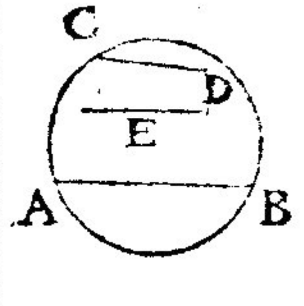
CIRCVLVS autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circunſcribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, inſcriptus eſſe in triangulo ABC: At vero circulus ABC, deſcriptus eſſe circa triangulum ABC. Idem indicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

VT recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-

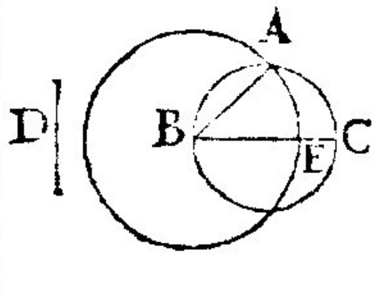


periphería circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, uel CD; quia hæc unum duntaxat extremum, nempe C, habet in periphería circuli; Illa uero nullum.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

In circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circu-
15. ter. ij. li dati. (Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta, diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autẽ BE, circulus describatur EA, secans circulũ ABC, in A; Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. Est enim BA, æqualis ipsi BE; & D, æqualis eidẽ BE, per constructionẽ: Quare AB, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

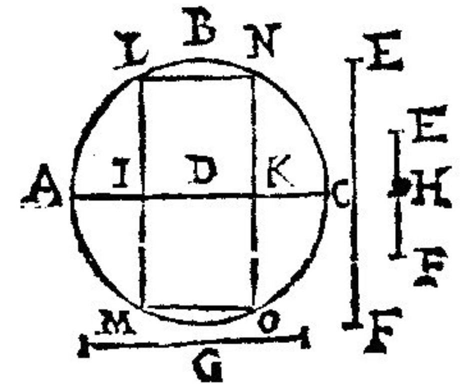


EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accõmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodanda sit recta

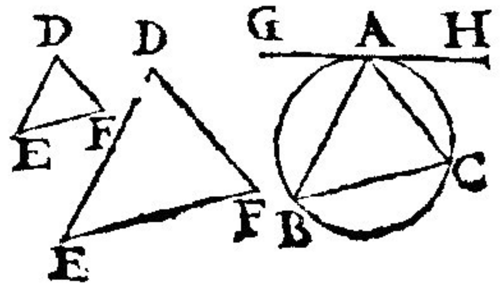
æqualis rectæ EF, quę diametro maior non sit, & alteri rectæ
G, parallela. Ducatur per centrum D, diameter AC, rectę G, pa- 31. primi
rallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit,
quod proponitur. Si uero EF, diametro minor fuerit, ea secta bifariam
in H, abscindatur DI, ipsi HE, & DK,
ipsi HF, æqualis, ut tota IK, toti EF, 11. primi
sit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO; iungaturq; LN. Dico LN, accõmodatam esse æqualem ipsi EF, & ipsi G, pa-
rallelam. Cum enim LM, NO, ęqua- 14. tertij.
liter a centro distent, ipsæ æquales in-
ter se erunt: quæ cum diuidantur bi- 3. tertij.
fariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta AC, per
centrum D, transeunte; erunt & earum dimidię LI, NK, æquales.
Quia uero LI, NK, parallelę etiam sunt; erunt quoque LN, IK, 28. primi
æquales, & parallelę, Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF, & paral- 33. primi.
la ipsi G; Erit etiam LN, æqualis ipsi EF, & ipsi G, parallela. Ea- 30. primi
dem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.



PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendũ triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatq; angulus GAB, angulo F, ęqualis, & angulus HAC, angulo E; atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circunferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse
æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C,
æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis 32. tertij.
est angulus F, ex constructione: Quare anguli C, & F, in-
ter se quoq; erũt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis
est angulo HAC, & eidem angulo HAC, ęqualis est, per cõ- 32. tertij.
structionẽ, angul' E; erũt etiã anguli B, & E, inter se ęquales.



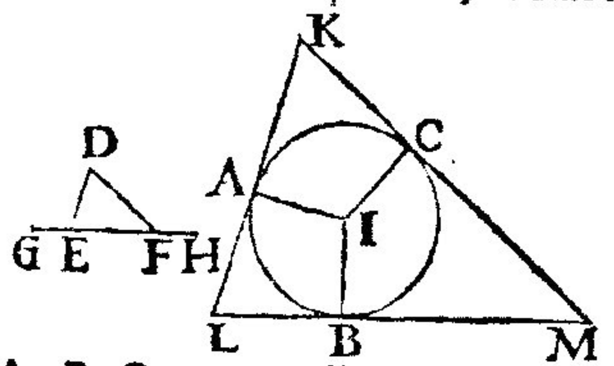
Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3. ## PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triãgulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus B I C, angulo D F H; Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K L, M; (si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulũ triangulum K L M, quod dico esse æquiangulũ triangulo D E F. Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32 propos. lib. 1 ostensum fuit; & anguli I A L, & I B L, sunt duo recti; erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G,

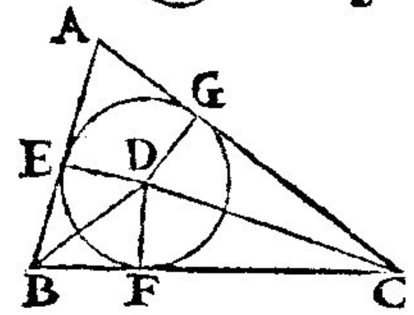


13. primi. D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
32. primi angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere. 4.

SIT describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis A B C A C B, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; & latus B D, commune; erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia



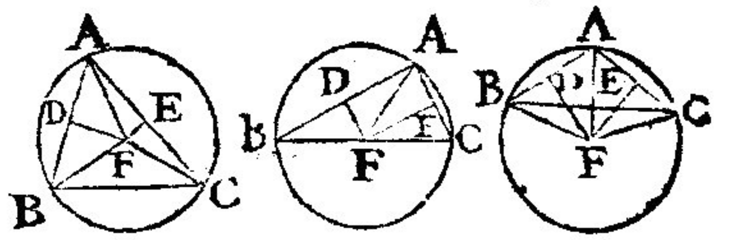
26. primi erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

5. ## PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triangulũ A B C Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtusangulo sumenda sunt circa rectum, uel obtusum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet.

tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel in latere B C, uel extra triãgulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera A D, DF, trianguli A DF, æqualia sunt lateribus B D, D F,



4. primi triãguli B D F, & anguli ad D, recti: erũt bases F A, FB, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cum ergo tres rectæ F A, F B, F C, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum F A, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

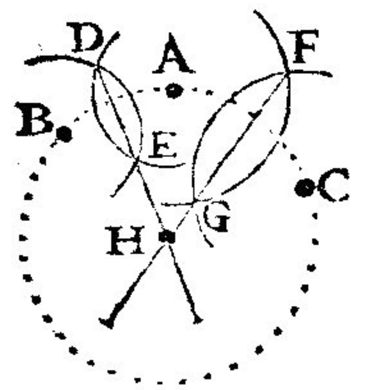
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere B C, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulũ BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLION.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H.

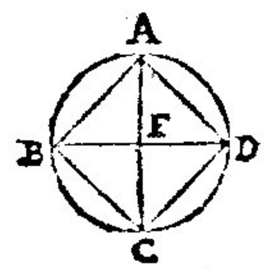


D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, si placet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam a rectis DH, FH, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; erũt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione



æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B C D; propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi

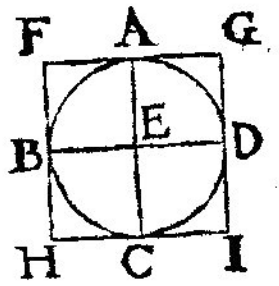
31. tertij.

PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C,
B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A,
B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares
F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis
F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratũ
circa circulum datum descriptum. Cum
enim anguli A E B, F B E, sint recti, erũt



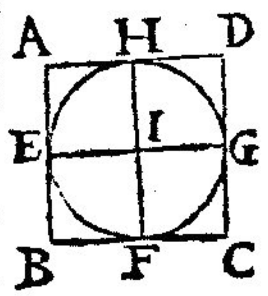
28. primi F H, A C, parallelæ; similiterque erunt
30. primi G I, A C, parallelæ. Quare & F H, G I
parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ
erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est
34. primi A C H F, erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: sed A C H est rectus,
igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia
esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G æqualia,
ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa
datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus.
Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG,
FH, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Quare



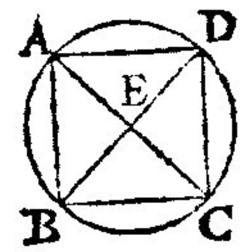
33. primi & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H.
Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C,
parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D,
ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H,
E B, D H, A E; sunt autem hæ inter se æquales, cum sint
dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F,
I G,

I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex
I, ad interuallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H;
qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll.
propo. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, de- 29. primi
scriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

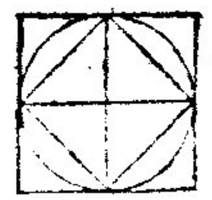
SIT describendus circulus circa quadratum A B C D.
Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam
igitur latera A B, D A trianguli A B D, æqualia sunt; erunt
anguli A B D, A D B, æquales: est autẽ 5. primi
angulus B A D, rectus; Quare A B D, 32. primi
A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A,
B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli E A D,



E D A, sint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Ea- 6. primi
dem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C;
Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum
ergo quadratum circulũ descripsimus, quod erat faciendũ.

SCHOLION.

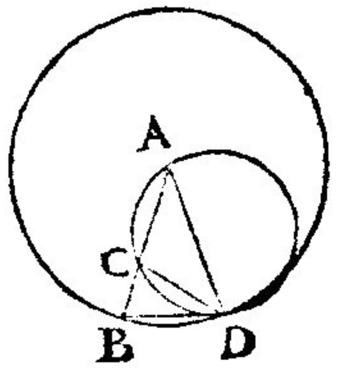
QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulũ constituere, quod habeat utrumq; eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in
11. secundi C, ita ut rectangulũ sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus describatur,
1. quarti in quo accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico utrumq; angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta



5. quarti. C D, describatur circa triangulũ A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectę A C, hoc est, quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus
37. tertij. 32. tertij. B D C, æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur cõmuni C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A; sed his eisdem æqualis est
32. primi etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis
5. primi erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, cum A B D, A D B,
6. primi æquales sint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autẽ B D, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi
5. primi C A, æqualis erit, ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Cum igitur angulus A, ęqualis sit ostẽsus angulo B D C, erũt quoque anguli B D C, C D A, æquales; ac propterea angulus A D B, duplus erit anguli C D A, hoc est, anguli A, sibi ęqualis. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdẽ anguli A. Isosceles ergo triangulum cõstituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

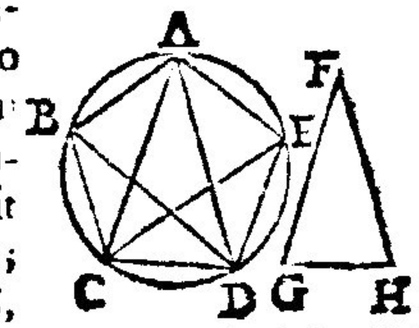
SCHOLION.

NON est autem quod se excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, ut eũ nullo modo secet. Nã propterea quod quadratũ rectæ B D, æquale est rectangulo sub A B, B C, ostensum est in ultima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularẽ esse ad semidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. 11. PROPOS. 11. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo A B C D E, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Construatur triangu-
lum Isosceles F G H, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus sit 10. quarti
reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum A C D, æquian- 2. quarti
gulum triangulo F G H, & uterq; angulorũ A C D, A D C, bifariam diuidatur rectis C E, D B; atque rectæ iungantur 9. primi
A B, B C, C D, D E, E A. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse ęquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D; & diuisus bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, A C E, æquales. Quare arcus A B, B C, C D,

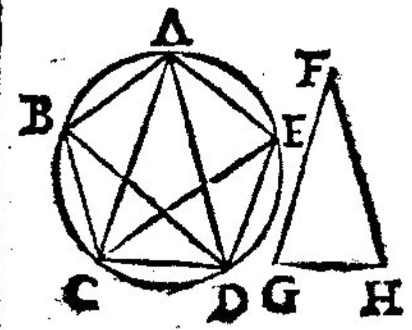


D E, E A, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectæ A B, 26. tertij.
B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Aequilaterum est igitur 29. tertij.
pentagonum A B C D E. Rursus quia arcus A B, E D, æquales sunt, addito communi B C D, fient æquales A B C D, E D-
C B; Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistẽtes æqua- 27. tertij.
les erunt. Eodẽ modo æquales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulũ est ergo pentagonum A B C D E. Quare cũ & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptũ erit in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendũ erat.

SCHOLION.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea

10. quarti *constituemus petagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. Fiat triangulum Isosceles F G H, habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituant anguli ACD, ADC, æquales angulis G, H, coeantes rectæ CA, DA, in A, quæ efficient* 32. primi *angulum CAD, æqualem angulo F; atque propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triangulum ACD,* 5. quarti *circulus describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.*

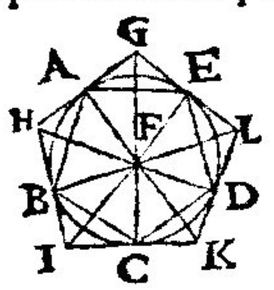


12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inscribatur in 11. quarti eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducant perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L, Cum .n. anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, coibunt 11. pron. rectæ A G, E G, ad partes G; & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H, 47. primi æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H, B H,



B H, æquales erunt. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus B F, F H, trianguli BFH; Est autem & basis A H, basi B H, æqualis, ut ostensum est: erunt anguli A F H, B F H, æquales; Igitur & angu 8. primi li A H F, B H F. Duplus igitur est angulus A F B, anguli 4 primi. B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo ostendemus, angulum B F C, duplum esse anguli B F I, & anguli B I C, anguli B I F. Cum igitur anguli AFB, BFC, 27. tertii. sint æquales, quod insistant circunferentiis A B, B C, quæ 28. tertii. æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur A B, B C; erunt & dimidii eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales sint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; erunt & latera B H, B I, æqua- 26. primi lia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ H A: Sunt autem ostensæ æquales H B, H A; igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erũt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales esse cuilibet rectarum H I, H G. Aequilaterum ergo est pentagonum G H I K L. Rursus quoniam ostensum est angulos B H F, B I F, æquales esse, ac dimidios angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, erunt æquales cuilibet angulorum B H A, B I C. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat.

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribẽdus circulus in dato pentagono ABCDE; Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, bifariam rectis 9. primi A F, B F, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, sint minores duobus rectis, coibunt necessario rectæ A F, B F: Connectantur deinde rectæ FC, F D, FE. Quoniã igitur latera A B, B F, trianguli A B F, æqualia sunt lateribus

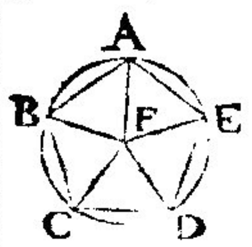
CB, BF, triãguli CBF; Sunt autẽ & anguli ipsis contenti æquales ABF, C B F, erunt
4. primi bases AF, CF, & anguli B A F, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponãtur æquales, & B A F, dimidium sit anguli B A E, per constructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A. F A G, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; estque latus A F, subtensum uni æqualium angulorum, commune; erunt &
26. primi rectæ F G, F L, æquales. similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo F G, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib 3. eo quod angulos rectos faciant cũ rectis F G, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

14.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ circulũ describere.

Sit circa pentagonũ ABCDE, æquilaterũ, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE,



ABC, bifariã rectis A F, B F, quæ coeant in F; & coniũctis rectis FC, FD, FE, ostẽdemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, DEA, secari bifariã; Erunt ergo oẽs anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponãtur. Qm̃ igitur in triãgulo AFB, duo

duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ F A, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autẽ F A, transibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datũ ergo pentagonũ, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Sit in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendũ hexagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo uero D G, qui secet circulũ datũ in punctis C, & E, e quibus per centrũ G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur cõnectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cũ

enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter se. Ideoq; triangulum C D G, erit æquilaterũ. Quare tres anguli CGD, GDC, 5. primi
D C G, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint 32. primi.
duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars unius recti. Eodẽ modo erit angulus DGE, tertia pars unius recti. Sunt autẽ tres anguli CGD, DGE, EGF, ęquales duo 13. primi
bus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars est unius recti. Sũt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se ęquales; quibus cũ etiã ęquales sint anguli FGA, AGB, 15. primi
BGC; erũt sex anguli ad cẽtrũ G, ęquales. Quare circũferen 26. tertij.
tię, quibus insistũt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, 29. tertij.
FA, ęquales erunt. Quapropter ęquilaterum est hexagonũ ABCDEF. Rursus quia circunferentia B C, æqualis est circunferentiæ A F; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, AEC. æquales erunt. Similiterq; ostẽ 27. tertij.
demus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorũ. Quare ęquiangulũ quoq; est hexago

 num

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonũ æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

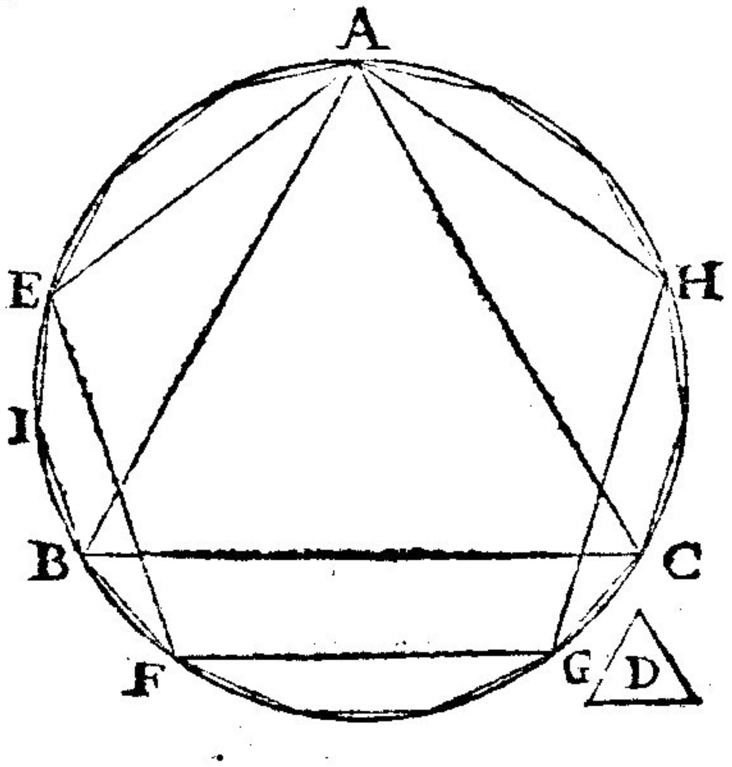
Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

Caeterum per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo
2. quarti gulo æquilatero D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ,
28. tertij. eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualiũ igitur partiũ æqualium quindecim est circunferẽtia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, & tertia pars est totius circunferentiæ. Inscribatur rursus in dato
11. quarti. culo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum
28. tertij. A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A



H A, æquales Qualium igitur partium æqualiũ quindecim est tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, 30. tertij.
bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inscriptum erit in 1. quarti
circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangu 27 tertij.
lum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum.

Similiter autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLION I.

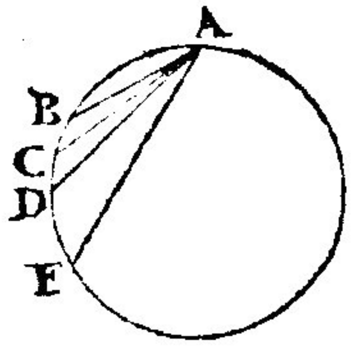
Ex huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinitæ propemodũ figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur

duo

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera inclusus, tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR *in circulo ABCDE, initio semper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni uero AC, & quadrati AD, trianguli deniq; æquilateri AE. Quoniã igitur denominator lateris AB nempe 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter dicta latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30 est tota circunferentia, taliũ 5. est arcus AB, sexta pars circunferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus BC, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris AB, uidelicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero CD, complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus CE, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique DE, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.*



EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta, est

est quoque æquiangula. Nam figuræ inscriptæ anguli, cum insistant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circunscriptæ, æquales ostendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta, quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono est factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterũ, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION II.

OMNES figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt officio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

IMPARIVM enim laterũ figuræ inscribentũ officio triãgulorũ Isosceliũ, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum. Vt officio Isoscelis, cuius uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad uerticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulũ æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulũ æquilaterũ erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterq; angulorũ ad basin duplus sit eius, qui ad uerticem, inscribetur secunda figura imparium laterũ, utpote pentagonũ, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam ueluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonũ, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triãgulũ Isosceles habens utrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad uerticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticẽ. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur officio Isoscelis, cuius uterq; angulorũ ad basin quadruplus est eius, qui ad uerticem, si uterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c. 6. primi 23. primi 23 primi

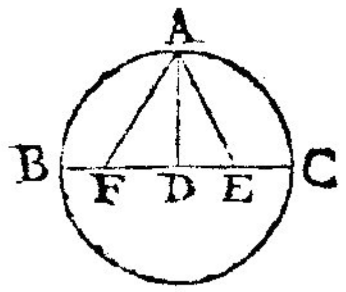
PARIVM

Parium vero laterum figuræ in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis vtrunque angulorum ad basin triplum sesquialterum angulo ad uerticem, &c.

Si igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplũ anguli ad uerticem, facile in circulo describerentur figuræ omnes laterum imparium. Quod si arcus earum diuiderentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum, atque adeo qualibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota existit: Non enim recte sibi eam uendicat Orontius Finæus in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato, de absoluta rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, ut Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

Qvoniam vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

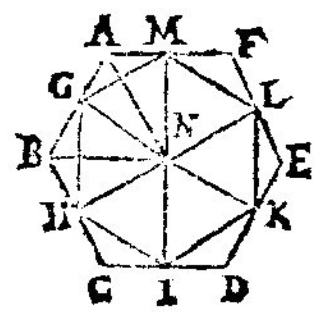
culus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æquales abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Caterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in propos. 13. differenda.



Non erit autem præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienũ, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

Sit enim figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Aequilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos æquales cõprehensos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, GML, LMF, quam tres FLM, MLK, KLE, duobus sunt rectis æquales; Sunt autem AMG, LMF; FLM, KLE, inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendantque a basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Aequiangula igitur quoque est figura GHIKLM. Quod autem



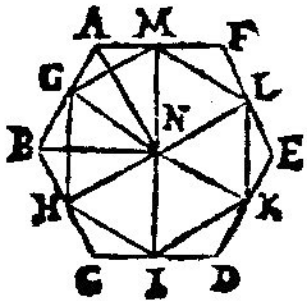
4. primi

13. primi.

8. primi.

13. primi

autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur



rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figurã descripti, æquales: Aequales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Qua-
8 primi *re N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium a centro N; æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur*
14. tertij. *tur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod est propositum.*

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS