MISCELLANEA ITALICA

PHYSICO-MATHEMATICA

Collegit Gaudentius Robertus Carm. Cong.

BONONIÆ, M.DC.XCII.

Ex Typographia Pisariana. Superiorum permissu.

Eminentiſsimo, & Reverendiſsimo

D. BENEDICTO

PRINCIPI PAMPHILIO

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

Magno Vrbis Priori, ac Bononiæ de Latere Legato.

EX quo TE noſce datum eſt Eminentiſſime PRINCEPS (noveram autem priuſquam à TE ipſe cognoſcerer) eo erga TE fui devictus obſequio ut, quod univerſi, qualeſcunque venerabundus EMINENTIÆ TVÆ

meos actus devoverim. Cum autem quod frequens Fama præcinerat datum est coràm experiri, tunc profectò TE NOMINE TVO longè majorem respui, qui actibus cedro dignis rumorem ipsum licèt ingentem vinceres. Hinc singularis Humanitas, erudita in differendo de quacunq; re ex tempore Sublimitas me TIBI novo ac majori obsequentissimi animi vinculo devinxerunt. In TE tanquam medio in centro Virtutes omnes confertim concurrentes omnem adulationis removent à laude periculum. Nihil nisi grande, nisi egregium, nisi Principe, immò nisi Principe PAMPHILIO dignum undequaq; moliris. In TE laudandum plurimùm, ac magnoperè extollendum quòd ad amplissimos Magistratus curandos adeò à natura sis comparatus, vt integritati Animi prestantissimam Pietatem adjungas, ac Justitiam quam summo Zelo colis, & administros, ad Beneficentiæ, ac Liberalitatis leges, absq; æquitatis præjuditio, modereris. Hinc mihi visum est, quòd si hanc variorum Mathematicorum Miscellaneam Collectionem sub TVI NOMINIS tutela emitterem mei tùm animi devotionem

pro

pro modulo exprimerem, tùm ipsorum, qui hæc scripsere causam ritè, ac gloriam promoverem. EMINENTIÆ TVÆ Opera hæc inscribere, ac sacra vovere lubens, meritòq; volui ac debui, non quidem quòd munus Purpurata Majestate satis dignum, aut pro gratijs amplissimis à TVA dignatione in me collatis, sufficiens autumem, sed ut publicum monumentum, ex quo mei constet animi veneratio, exhibeam. Tot profectò Mathematicorum scriptis TVA *Columba* fauctis *Oleæ* omnibus fœlicitatem portendet. Æqui, boniq; consule PRINCEPS AMPLISSIME exiguum licèt hoc litterarium munusculum, quod si TIBI acceptum, gratumq; percepero aliàs majoris molis Librum NOMINI TVO amplissimo inscribere audebo, si vitam, & otium donabit D. O. M. qui EMINENTIAM TVAM diu Litterarum Decori, ac nobis incolumem pro votis servet

Dicabam

EMINENTIÆ TVÆ REVERENDISS.

Humillimus, Addictissimus, & Obsequentissimus Seruus
Gaudentius Robertus Carm. Cong.

AMICO LECTORI

Gaud. Rob. S. P.

Erudita nondum varia Scriptorum Italorum quædam Opuscula jam quatuor expositis Voluminibus in vnum Corpus redigere fausto Syderum omine cœperam, cum ad id peragendum de Physico-Mathematicis impullerunt Amici, quibus nunc demùm morem gessurus hocce prius Volumen expono, cujus quidem Lector beneuole hæ sunt partes brevi argumento descriptæ.

In fronte Aquarum Fluentium Mensuram *ab Excellentissimo DOMINICO GVLIELMINO* Methodo nouâ *inquisitam conspicites. Is Auctor Solertissimus Mathesis in Bononiensi Archigymnasio primarius Lector solidiori doctrinę singularem nectit animi moderationem, spectatissimam humanitatem, qua me præcipuè summo deuinxit affectu, cum in meo è Felsineis litoribus discessu ipsius curæ hujus Voluminis editionem tradiderim, in cujus ferè calce ipsiusmet Epistolas Hydrostaticas cũ Bononiam regressus fuerim subdere curaui, ne quidquam omittatur ex tanti Viri studys, posteritati quammaximè profuturis.*

EVANGELISTÆ TORICELLI olim Serenissimi Magni Ducis Etruriæ Mathematici, cujus alia scripta in sequentibus Voluminibus promere meditor, subnectuntur de Sphæra & Solidis Sphæralibus *Libri duo, à quocunque Mathematicarum studioso vbiq. conquisiti, ne ob exemplariorum raritatem eruditi eorundem desiderio faudentur.*

FLAMINIVS de MEZAVACHIS Juris vtriusq. in hoc Archigymnasio Professor de Terręmotu *Libellum exhibet, in quo aperitur* curiosa Terręmotus Doctrina, *mox editurus plerosq. Solidioris in Jure doctrinæ Libros, quos Jurisconsultorum Cœtus exoptat; vndè ipsum ex hoc Libello, nec non ex Jam editis Ephemeridibus, ac ex edendis legalibus lucubrationibus nedum insignem Mathematicum, sed etiam præstantissimum Jurisconsultum litteraria Respublica singulari colet obsequio.*

DOMINICI CASSINI Bononiæ, Romæ, ac nunc Parisijs celeberrimi Mathematicarum Professoris Epistolas penè deperditas de Solaribus Hypothesibus, & refractionibus *restitui.* Theoriam Motus Cometæ *Angustissimæ Christinæ Suecorum Reginæ olim exhibitam subdidi; quod nempè Regium occupauerat animum Tibi quoq; gratum fore speraui.*

GEMINIANI MONTANARII, præfati CASSINI, MARCI ANTONII CELII, IOSEPHI DIONYSII PONTHÆI ac aliorum de eodem Cometarum argumento Astronomico-Physicas Dissertationes, Epistolas, et alia Opuscula subnectere curaui.

MATHÆI deniq. CAMPANI Experimentis pro demonstranda causa elevationis Aquæ, & Mercurij *Volumini finem imposui; quæ omnia grato animo suscipias Amice Lector exopto, mihiq; otium præcare, vt plura exhibeam, quæ Tibi maximæ vtilitati futura non dubito. Vale.*

SYLABVS

Operum, & Authorum hujus Voluminis.

AQVARVM FLVENTIVM
MENSURA
Nova Methodo Inquisita

AUCTORE

DOMINICO GVLIELMINO
M. D. Bononiensi
In Patrio Archigym. Scientiarum Mathematic.
Primario Professore,
Et Aquarum Bononiensium Superintendente.

AD

Illustrissimum, atq; Amplissimum
SENATUM
BONONIÆ.

✠

Illuſtriſsimi, atque Ampliſsimi SENATORES.

Eſtrum eſt, quod nunc veſtro Nomine inſcriptum in lucem prodit Opuſculum de *Aquarum Fluentium Menſura* PROCERES ILLVSTRISSIMI. Veſtrum inquam eſt, eo quòd à decennio, me longe alia meditantem, ad hæc ſtudia mandatis veſtris primi excitaſtis; Veſtrum, quia ante quinquennium collata mihi veſtrarum Bononienſium aquarum Præfectura; deinde etiam primi nominis Matheſeos Cathedra in famigeratiſſimo hoc Archigymnaſio, eadem & decoro ſtipendio, & frequenti opportunitate fouiſtis; Veſtrum tandem eſt; cum ad hos tres primos libros publici iuris faciendos in Patriæ

commodum plurimi Vestrum animos addideritis. Quod ergo tot titulis vestrum est, omni etiam iure vestris sub Auspicijs prodire debuit; ita vt mihi, nec vel pauxillùm, cunctandum fuerit in eligendo hisce laboribus, studijsque meis Patrono, quem non alium esse Fata sanxerunt, nisi ILLVSTRISSIMVM, ATQVE AMPLISSIMVM BONONIÆ SENATVM. Excipite igitur benigno, vt soletis, animo, & vultu hæc mea, qualiacumque nunc vobis offero, conamina, eo solummodo genio instituta, vt Patriæ pro viribus prodessem, & a vobis mihi demandatam Aquarum prouinciam potiori iure administrarem. Valete in æuum duraturi PROCERES ILLVSTRISSIMI, & me, meaque studia, eo, quo flagratis in promouendis scientijs amore, fouere non dedignemini.

DD. VV. ILLVSTRISSIMARVM

Bononiæ Kal. Augusti 1690.

Humillimus Addictiss. & Obsequentiss. Seruus, & Cliens

Dominicus Gulielminus.

Lector

Lectori Beneuolo.

CVM primùm Aquarum Fluentium Mensuram *nouisse animus fuit, id præstiti, quod solemne omnibus est, vt Auctorum libros, quotquot potuerim, hanc Spartam exornantium, auido ingenio lustrarem, & eorum methodum, ac demonstrationes nanciscerer; parùm tamen in ijs euoluendis laborauì, cum mole parua volumina, numero pauca non diu ingenium fuerint remorata. Quod tamen non efficit librorum moles, & numerus, abundè suppleuit difficultas, & magnitudo argumenti ab Auctoribus vix delibati, & solummodo circa generalia quædam hactenus demonstrati. Antecellit siquidem omnes, vt eruditis compertum est, æternæ memoriæ dignus P. Benedictus Castellus, vtpote qui primus, Geometria in subsidium vocata, velocitatis rationem ad certam normam, & regulas redigendam in mensurandis aquis fluentibus animaduertit, plureſquè de ea propositiones exposuit, & demonstrationes concinnauit. Sed bina in eius Tractatu dubia occurrere. Primum fuit, quòd cum constet, non vnam, & sibi vbique similem esse in omnibus aquæ fluentis partibus, velocitatem; hærebam, cuinam ex his demonstrationes applicandæ essent; & licèt facilè fuerit internoscere, ex omnibus velocitatibus mediam quamdam componendam esse, eodem pacto, quo ex inæqualibus Planetarum motibus Astronomi medium, & æqualem colligunt; adhuc tamen maior inerat difficultas in recta mediæ velocitatis determinatione, quam impossibile penitus censui ex Castellianis demonstrationibus elicere. Accedebat erronea velocitatis superficiei ad reliquas inter fundum, & superficiem applicatio, & lubrica eiusdem inquisitio, quibus omnibus factum est, vt nihil certi, nihil veri indè posset deduci.*

Alterum dubium, quod & alijs negotium facessit, fuit in pro-

propositione secunda secundi libri, cuius demonstrationem non adinuenisse, aut saltem ei non acquiuisse, ingenuè fatetur subtilissimus Auctor. Hanc autem, cum aliorum tentamina minùs placerent, demonstrare aggressus fueram, sed statim vidi, rem eò tendere, vt proportionem velocitatis inuolueret, quam Aqua e vasis erumpens ex maiori altitudine nanciscitur, de qua Torricellius, Ballianus, & alij, quæ cum propositione Castelli nullo modo potest conuenire. Hinc in vasis, aquæductibus, canalibus &c. experimẽta cæpi instituere, vt certior fierem, an velocitates crescerent in ratione altitudinum, an vero in subduplicata earundem; & in vasis quidem hanc vltimã certò deprehendi; licèt in canalium sectionibus summa ab vtraque aberratio contingeret, quod certum fuit argumentum, velocitatem sæpè sæpius aliunde deriuare, quàm ab aquæ in sectionibus altitudine.

Additus igitur animus est, vt Doctrinam totam, ab ouo, vt aiunt exordirer, measque tentarem vires, quò difficile hoc argumentum in Scientiarum additamentum, & Vitæ ciuilis commodum promouerem. Itaque cum mihi videar magnis omnino ausis hucusque non excidisse; statui literario orbi communicare, quæ de Aquarum Fluentium Mensura *pluribus ab hinc annis meditatus sum, quæque mihi videor ad Geometricam incudem reduxisse.*

Ea autem pluribus complexus sum libris, quorum tres priores publica luce nunc fruuntur, reliquis iudicium, de his, tuum, & diuturniores cogitationes expectantibus; vt aliquando, si Deus dederit, & ipsi e tenebris euoluantur. Cæterum monitum te volo, Lector humanissime, me Aquarum fluentium mensuram consultò primis hisce tribus libris in summa simplicitate consideraße, vt indè certas Naturæ leges colligerem, quibus ad vlteriora progredi liceret, pluresque canalium, & fluminum affectiones inter suppositiones inducere, quod reliquis libris præstabo: vnde hi non statim, tamquam inutiles, reyciendi erunt ex eo, quòd tales, quales in secundo, & tertio

libro

libro suppono canales, vt plurimùm, in Natura non dentur, cum ex his via sternatur, meo quidem iudicio, apertissima, qua ad Aquæ fluentis mensuram, in vulgaribus fluminibus, assequendam, deducamur. Hinc primo libro generalem doctrinam velocitatis, tum simplicis in vnica linea, tum compositæ in vnica superficie, & vno solido, complexus sum, eo quòd cum per diuersa accidentia fiat, vt in eadem sectione diuersæ perpendiculares, diuersas habeant velocitates; possit vnaquæque ex istis seorsim considerari, & ex earum vnione media quædam totius sectionis velocitas componi. Quo quidem progressu, & omnes ferè propositiones Castelli, alia tamen, & vt censeo, faciliori methodo demonstraui, & fundamentum ostendi, quo nititur mensura proportionalis aquarum fluentium, quam Baraterius suis numeris, vt ipse vocat, latiquadris exprimit, licèt eorum confectio ex falso Castelli supposito erronea sit. In secundo autem libro Aquarum Fluentium Mensuram, *eamque absolutam in Canalibus inclinatis, & in tertio in Canalibus horizontalibus, tam solitarijs, idest simplicibus, quàm vnitis, idest ex aliorum similium horizontalium confluentia aquam recipientibus, inquisiui, vt quoniam fieri nequit, vt per datam sectionem maior fluat Aquæ quantitas, quàm per Canale inclinatum integra descensu velocitate, neque minor, quàm per Canale horizontale sola velocitate a pressione; saltem mensura haberetur inter duos certos terminos media, quorum primum excedere non posset, sicuti ab altero non deficere.*

Methodum exponẽdi, quod spectat, ea me fatente varia est, sed fortasse non inconcinna; primo siquidem libro fusior fui, & laxior, quàm sublimiorum ingeniorum dignitas exposceret, tam in multiplicandis propositionibus, & demonstrationibus concinnandis, quàm in citandis marginaliter Elementorum propositionibus: id tamen prestiti, vt facilitati consulerem, & vt vulgarium Hydrometrarum ingenio me accomodarem, quorum in Geometricis cognitio Euclidiana Elementa, vt plurimum,

rimùm, non excedit, vt si aliorum librorum compotes esse non possent, saltem huius vsu, & vtilitate non fraudarentur. In reliquis autem cum materiam eorundem captum excedere animaduerterem, pressior fui, & contractior, mecum ipse meditans Eruditiores Mathematicos alloqui, quibus plurima, quãnis vulgò ignota; attamen vulgaria esse solent. Et hæc quidem methodus semper mihi probanda visa est, vt sicuti a facilioribus inchoandum, & ex his ad difficiliora progrediendum, ita primò quidem plana sit, licèt fusior demonstrandi ratio, deinde sensim contractior, tum ad euitandam nimis noxiam prolixitatem, tum ne ingenia nimiæ facilitati assueta, respuãt difficiliora.

***Beneuole igitur Lector his fruere, dum** in reliquis libris tibi parandis laboro, eo etiam animo, vt vniuersaliter ad fluidorum motum, tum naturalem, tum violentum, etiam extra Mathematicos fines, vsquè videlicet ad Medicæ Artis penetralia, si ingenium, & tempus suppetet, meditationes has meas traducam; cum a iugi fluidorum animati corporis motu, & vitam ipsam, & functiones, & lesiones, & medelas, maximã partem pendere, Recentiorum Anatomicorum inuenta, & rationes abundè persuadeant. Apparebit siquidem, quantùm hallucinentur Mathseos, & Anatomes, vtilissimarum, tam ad Theoricam, quàm ad Practicam Medicinam Artium detrectatores; cum nihil ex his inutile, nihil superuacaneum, sed ex ijsdem, & ex perenni symptomatum, & consequentium accidentium obseruatione, quam nemo non prosequitur, Medicæ, siue, vt aiunt Clinicæ Artis fundamenta, & præcepta consistãt, sitque, vel solo hoc nomine, infælix Medicina, quòd eam faciẽtes, intra nimis arctæ doctrinæ limites contineantur, eosque vlteriùs extendere, vel non valeant sæpius, vel negligant. Ignosce, Lector humanissimè, sinceritati, conculcatarum iniuria artium vindicatrici, & Vale.*

LIBER

LIBER PRIMVS

In quo Generalis Doctrina velocitatis proponitur.

DEFINITIONES.

I. AQuam fluentem eam intelligimus, quæ propriæ tantùm grauitatis momento per alueos fluminum, vel canalium versus centrum grauium descendit.

II. **Sectio fluminis naturalis** est communis sectio Aquæ fluentis cum plano orthogonaliter secante fundum fluminis, & vtramque fluminis ripam, quæ, cum vtplurimum varia sit, nec ad regulam reducibilis; ideo --

III. Sectio artificialis fluminis intelligatur quasi facta in flumine, cuius fundus per transuersum horizontalis sit; ripæ autem & inter se parallelæ, & fundo erectæ, quæ sectio semper erit parallelogramum rectangulum.

IV. Altitudo viua aquæ fluentis, seu sectionis est linea perpendicularis à superficie aquæ ad basim sectionis taliter dispositam demissa, vt cessante fluxu, nihil in ea stagnantis aquæ remanere possit, quæ & vnico nomine vocetur perpendicularis.

V. Velocitas naturalis aquæ fluentis est vis non ab extrinseco aliquo conciliata, qua mediãte pars aliqua aquæ apta est determinatum spatium certo tempore percurrere, cumque hæc varijs in partibus magis, aut minùs remotis à superficie varia sit, ideo --

VI. Velocitas maxima erit illa, qua mediante partes aliquæ aquæ sunt aptæ longiorem viam respectu reliquarum certo tempore percurrere, seu quæ alias velocitates in eadem perpendiculari existentes superat.

VII. Velocitas verò media ea eſt, quæ cum ſit in aliqua parte aquæ eiuſdem perpendicularis talis eſt, vt ſi eâ flueret ſuperiores, & inferiores, æqualis aquæ menſura flueret per illam perpendicularem, ac fluat inæqualibus exiſtentibus velocitatibus; ſeu illa eſt, quæ à maioribus velocitatibus tantò ſuperatur, quantò ea ſuperat minores.

Pro quarum definitionum clariori intelligentia ſupponatur recta perpendicularis AB taliter demerſa infra ſuperficiem aquæ fluentis, vt punctum A ſit in ſuperficie, punctum vero B in fundo. Partes aquæ inter A, & B diuerſas habent velocitates, vt experientia conſtat, Noſque ſuo loco oſtẽdemus; in ſuperficie enim minores ſunt, quò verò remotiores à ſuperficie ſemper maiores: itaq; ſi huiuſmodi velocitates rectis lineis exprimantur, erit BC velocitas partis aquæ ſitæ in B, DE velocitas aquæ in D, & ſic deinceps; cumque BC maxima ſit linearum BC, DE, FH, GI; ipſam BC dicemus maximam velocitatem. Velocitatem vero mediam dicimus v.g. lineam F H, ſi ea talis ſit, vt ſi omnes partes aquę fluentes per AB haberent velocitatem æqualem velocitati FH, tantumdem aquæ flueret per AB tempore, quo B fertur in C, ac fluat eodem tẽpore diuerſis exiſtentibus velocitatibus BC, DE, FH &c. ſeu ſi velocitas FH ſupponatur ſuperari à ſingulis velocitatibus inter F, & B exceſſu HMC; æquali exceſſu ſuperet illa velocitates inter A, & F. v.g. exceſſu KLH.

Fig. 1.

VIII. Complexus velocitatum eſt vnio omnium velocitatum exiſtentium in ſingulis aquæ partibus ſitis in eadem perpendiculari, vel ſectione, vt in ſuperiori figura complexus velocitatum perpendicularis AB, eſt figura ABCHK.

IX. Sectiones æquè veloces ſunt illæ, in quibus velocitates mediæ æquales ſunt; id eſt per quas aqua fluit æquali velocitate media.

X. Sectiones inæqualiter veloces ſunt, quarum velocitates mediæ vna alteram ſuperat, quarum quidem ea velocior dicitur, cuius velocitas media alteram ſuperat, & e contra.

XI. Aquæ quantitatem intelligimus molem aquæ totã, quæ per datam ſectionem dato tempore effluxit.

XII. Quæ diximus de ſectionibus æqualiter, vel inęqualiter velocibus, applicanda sũt etiã perpendicularibus; ſicuti quæ diximus de complexu velocitatum in perpendicularibus, applicanda ſunt proportionaliter ſectionibus; quod etiam dicendum de velocitatibus maximis, medijs, &c. quæ applicandæ ſunt ſectionibus.

AXIOMATA.

I. IN eadem ſectione artificiali quælibet perpendicularis eandem habet, vel æqualem velocitatem maximam, mediam, minimam &c. ſecluſis impedimentis contactus, adhæſionis, & extrinſecis quibuſcumque.

II. Velocitates diuerſæ inter ſe comparandæ sũt per relationem ad ſpatia, quæ poſſunt eodem, vel æquali tempore percurrere motu æquabili.

POSTVLATA.

I. DAta quacumque quantitate poſſe eam intelligi conformatam in quamlibet figuram eiuſdem gẽneris, v.g. figuram planam, in triangulum, rectangulum &c. ſolidam, in priſma, pyramidem &c. eiuſdem dimenſionis.

II. Datis quibuſcumque quantitatibus, eas poſſe poni ſub oculum per rectas habentes inter ſe eandem proportionem, quam dictæ quantitates.

PROPOSITIO I.

FLumine in eodem ſtatu manente æquales aquæ quãtitates fluunt per omnes eiuſdem ſectiones æqualibus temporibus.

Fig. 2. Sint duæ ſectiones A D, E H eiuſdem fluminis. Dico quantitatem aquæ fluentis per AD æqualem eſſe quantitati aquæ fluentis per E H æquali tempore.

Si enim maior aquæ quãtitas flueret per AD, quàm per EH, flumen inter A, & E continuò creſceret, quod eſt cõtra ſuppoſitum; ſi vero minor flueret per AD, ac per E H, flumen inter A, & E continuò decreſceret, quod pariter eſt contra ſuppoſitum; ſi ergo nec maior, nec minor quantitas fluit per A D, ac per E H; æqualis vtrobiquè fluit. Quod erat probandum.

PROP. II.

SI aqua fluens per aliquam ſectionem vel perpendicularem dato tempore, intelligatur conformata in priſma rectum, cuius baſis ſit ſectio; altitudo priſmatis erit velocitas media eius ſectionis.

Fig. 2. Sit ſectio A D, ſuper quam, tamquam baſim intelligatur conformata quantitas aquæ fluentis per eam dato tempore, in priſma rectum C F. Dico altitudinem AE eſſe velocitatem mediam ſectionis A D.

Si enim omnes partes aquæ intra rectangulum A D æquali fluerent velocitate, dum pars C, fertur in G pars A ferretur in E, B in F, D in H, & partes quælibet rectanguli AD, ad ſibi correſpondentes partes, rectanguli E H; ideoque, ſi omnes velocitates ſectionis AD eſsẽt inter ſe æquales aqua naturaliter ſe conformaret in priſma C F; ſed priſma C F æquale eſt aquæ fluẽti diuerſis velocitatibus per ſe-

ſectionem A D; ergo per eandem ſectionem æqualis aquæ quantitas flueret velocitate A E, vel C G, ac fluat diuerſis velocitatibus eodem tempore, ideoque A E altitudo priſmatis erit velocitas media. Quod &c. Def. 4 huius.

Idem oſtendetur de aqua tranſeunte per perpendicularem AC, ſi intelligatur conformata in rectangulum AG.

PROP. III.

IN ſectionibus eiuſdem fluminis velocitates mediæ ſunt in proportione reciproca ſectionum.

Sint ſectiones A D, I M. Dico, vt velocitas media ſectionis I M ad velocitatem mediam ſectionis AD, ita eſſe ſectionem A D ad ſectionem I M, Fig. 2. & 3.

Intelligantur quantitates aquæ fluxæ æquali tempore per vtramque ſectionem, conformatæ in priſmata recta, quorum baſes propria ſectio; ſitque primæ priſma A H, ſecũdæ priſma I N. Quoniam itaque eodem tempore æqualis aquæ quantitas fluit per AD, ac per I M, erunt priſmata A H, I N æqualia; ſed priſmata æqualia reciprocant baſes, & altitudines; ergo vt AD ad I M, ita I P ad AE; ſed I P eſt velocitas media ſectionis I M, & A E velocitas media ſectionis AD; ergo vt velocitas media ſectionis IM ad velocitatem mediam ſectionis AD, ita ſectio A D ad ſectionem IM. Quod &c. Prop. 1 huius. Prop. 29. xj. Elem. Prop. 2. huius.

COROLLARIVM.

EX hac propoſitione patet etiam eiuſdem conuerſum .v. quòd ſi ſectiones, & velocitates mediæ earundem inter ſe habeant rationem reciprocam, quantitates aquæ erunt inter ſe equales; priſmata enim, quæ reciprocant baſes, & altitudines, inter ſe ſunt æqualia. Prop. 30. XI. Elem.

Per

PROP. IV.

PEr ſectiones inæquales, ſed æquè veloces, quantitates aquæ fluentes æquali tempore ſunt inter ſe, vt ſectiones.

Fig. 2. & 3. Sint ſectiones inæquales A D maior, I M minor; ſint verò velocitates mediæ vtriuſq; ęquales. Dico, vt ſectio AD ad ſectionem IM, ita eſſe quantitatem aquæ fluentem per A D ad quantitatem fluentem per I M æquali tempore.

Intelligantur quantitates Aquæ conformatæ in priſmata ſupra ſuas ſectiones, & ſit primæ priſma C F, ſecundæ vero priſma M P. Erunt itaque A E velocitas media ſectionis A D, & I P velocitas media ſectionis I M. & quoniam ſectiones ſupponuntur æquè veloces erunt A E, I P inter ſe æquales; ideoque priſmata C F, M P æquè alta: Sed priſmata æquè alta inter ſe ſunt, vt baſes, ergo vt A D ad I M, ita priſma C F ad priſma MP. i. vt ſectio AD ad ſectionem I M, ita quantitas aquæ fluentis per A D, ad quãtitatem aquę fluentis ęquali tẽpore per IM. Quod &c.

Prop. 2. huius. *Def. 9. huius.* *Prop. 32. XI. Elem.*

COROLLARIVM I.

ITaque ſi ſectiones ſint artificiales, & eiuſdem altitudinis, ſed inæqualis latitudinis; quantitates aquæ erunt inter ſe, vt latitudines ſectionum.

Prop. 1. VI. Elem.

COROL. II.

ET ſi dictæ ſectiones eiuſdẽ eſſent latitudinis; inæqualis vero altitudinis; quantitates aquæ eſſent, vt altitudines, ſuppoſita tamen eadem velocitate media in vtraque ſectione.

Per

PROP. V.

PEr ſectiones æquales, ſed inæqualiter veloces, quantitates aquæ fluentes æquali tempore inter ſe ſunt, vt velocitates mediæ ſectionum.

Sint ſectiones æquales A D, I M, ſed ſectio A D ſit minùs velox ſectione IM. Dico quantitatẽ aquæ fluẽtem per A D ad quantitatem aquæ fluentem per I M æquali tempore, eſſe vt velocitas media ſectionis AD, ad velocitatem mediam ſectionis I M. *Fig. 2. & 3.*

Conformentur aquæ, vt ſupra, in priſmata C F, KO; & quoniã æquales ſunt ſectiones AD, IM, erunt priſmata CF, KO in baſibus ęqualibus, ſed priſmata in æqualibus baſibus conſtituta inter ſe ſunt, vt altitudines; ergo vt priſma C F ad priſma KO, ita altitudo AE ad altitudinem IP; ſed priſma C F eſt aqua fluens per ſectionem AD, & priſma KO eſt aqua fluens per ſectionem I M, & altitudo AE velocitas media ſectionis A D; altitudo vero I P velocitas media ſectionis I M; ergo vt quantitas aquæ per A D, ad quantitatem per I M, ita velocitas media ſectionis A D, ad velocitatem mediam ſectionis I M. Quod &c.

Comand. de Centro Grau. prop. 29. *Prop. 2. huius.*

COROLLARIVM.

EX methodo, qua ſuperiores propoſitiones probauimus liquidò apparet, ſi quantitates aquæ æquales ſint, & ſectiones, a quibus profunduntur æquè veloces; futurum vt eędem quoque ſint æquales.

COROL. II.

ET ſi quantitates aquæ æquales ſint, & ſectiones æquales; fore etiam æquè veloces.

Per

PROP. VI.

PEr ſectiones eiuſdem, vel diuerſorum fluminum quantitates aquæ eodem tempore fluentes habent inter ſe rationem compoſitam ex proportionibus ſectionis ad ſectionem, & velocitatis mediæ primę ſectionis, ad velocitatem mediam ſecundæ.

Fig. 2. & 3. Sint ſectiones AD, IM. Dico quantitatem aquæ fluentem per AD ad quantitatem aquæ fluentem per IM æquali tempore habere rationem compoſitam ex proportione ſectionis AD ad ſectionem IM, & velocitatis mediæ ſectionis AD ad velocitatem mediam ſectionis IM.

Prop. 2. huius. Comand. de centro grau. propoſ. 21. Intelligantur enim quantitates aquæ conformatæ in priſmata recta CF, KO. Erit itaque AE velocitas media ſectonis AD, & IP velocitas media ſectionis IM. Cum igitur priſmata omnia habeant rationem compoſitam, ex rationibus baſium, & altitudinum; erit ratio priſmatis CF ad priſma KO compoſita ex rationibus baſis, ſeu ſectionis AD ad baſim, ſeu ſectionem IM, & altitudinis AE, ſeu velocitatis mediæ ſectionis AD ad altitudinem IP, ſeu velocitatem mediam ſectionis IM; ſed priſma CF eſt quantitas aquæ fluentis per AD, & priſma KO eſt quantitas aquæ fluentis per ſectionem IM; ergo aqua fluens per AD ad aquam fluentem per IM habet rationem compoſitam ex rationibus ſectionis AD ad ſectionem IM, & velocitatis mediæ per AD ad velocitatem mediam per IM. Quod &c.

COROL.

Comand. ad prop. 24. VI. Elem. CVm vero ſectiones AD, IM, vtpote rectangula, habeant rationem compoſitam ex rationibus AC ad IK, & CD ad KM, ſequitur quantitatem aquæ fluentem per ſectionem AD ad quantitatem aquæ fluentem æquali tem-

tempore per ſectionem IM habere rationem compoſitam ex rationibus altitudinis ſectionis primæ AD ad altitudinem ſectionis ſecundę IM, latitudinis ſectionis AD ad latitudinem ſectionis IM, & velocitatis mediæ per AD ad velocitatem mediam per IM.

SCHOLIVM.

EX hac propoſitione vniuerſali ſequitur veritas propoſitionis quartæ, & quintæ, quas tamen cõſultò ſeorſim demonſtrauimus, nè nimia corollariorum faragine Lectores, vel ipſo initio, obrueremus.

PROP. VII.

SI flumen augmento nouæ aquæ intumeſcat; quantitas aquæ fluentis in intumeſcentia ad quantitatem aquæ fluentem ante intumeſcentiam æquali tempore, rationem habet compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ ante intumeſcentiam ad velocitatem mediam in intumeſcentia, & altitudinis ante intumeſcentiam ad altitudinem in intumeſcentia.

Sit flumen, cuius ſectio ante intumeſcentiam ſit AD, & augmento nouæ aquæ intumeſcat vſque ad EF, ita vt fiat ſectio ED. Dico quantitatem aquæ fluẽtem per ſectionem AD ad quantitatem aquæ fluentem per ſectionem ED, habere rationem compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ ſectionis AD ad velocitatem mediam ſectionis ED, & altitudinis AC ad altitudinem EC. *Fig. 4.*

Ratio enim quantitatis aquæ per AD fluentis ad quãtitatem aquæ per ED fluẽtis æquali tempore, componitur ex rationibus velocitatis mediæ per AD ad velocitatem mediam per ED, & ſectionis AD ad ſectionem ED; ſed ſectio AD ad ſectionem ED eſt, vt AC ad CE; ergo quanti- *Prop. 6. huius.*

tas aquæ fluens per AD ad quantitatem aquæ fluentem æquali tempore per ED eſt compoſita ex rationibus velocitatis mediæ per AD ad velocitatem mediam per ED, & altitudinis AC ad altitudinem EC. Quod &c.

SCHOL.

HÆc propoſitio locum non habet, niſi in ſectionibus artificialibus; naturales enim vt plurimum non habent inter ſe rationem altitudinum; omnes verò anteactæ propoſitiones verificantur etiam in ſectionibus naturalibus .I. pro facilitate demonſtrationis ſectiones artificiales ſuppoſuerimus; in ſequentibus verò propoſitionibus, ſectiones ſemper neceſſariò ſupponuntur artificiales.

PROP. VIII.

IN eodem flumine velocitas media vnius ſectiònis ad velocitatem mediam alterius habet rationem compoſitam ex rationibus altitudinis viuæ in ſecunda ſectione ad altitudinem viuam primæ, & latitudinis ſecundæ ſectionis ad latitudinem primæ.

Sint ſectiones AB, DE eiuſdem fluminis, in quibus AG, DH ſint altitudines viuæ, & GB, HE latitudines; ſitq; velocitas media ſectionis AB linea BC; velocitas verò media ſectionis DE linea EF. Dico BC ad EF habere rationem compoſitam ex rationibus DH ad GA, & HE ad GB.

Quoniam enim æqualis aqua fluit per vtramque ſectionem AB, DE; erit vt velocitas BC ad velocitatem EF, ita ſectio DE ad ſectionem AB; ſed ratio ſectionis DE ad AB eſt compoſita ex rationibus DH ad GA, & HE ad GB; ergo velocitas BC ad velocitatem EF erit in ratione compoſita ex rationibus DH ad GA, & HE ad GB. Quod &c.

Prop. 1. huius.
Prop. 3. huius.
Com. ad prop. 24. VI. Elem. Theor. 2.

In

PROP. IX.

IN eodem flumine altitudo viua aquę vnius ſectionis ad altitudinem viuam aquæ alterius ſectionis, habet rationem compoſitam ex ratione latitudinis ſecundæ ſectionis ad latitudinem primæ, & velocitatis mediæ ſecundæ ſectionis ad velocitatem mediam primæ.

Sint ſectiones eiuſdem fluminis AD, IM, quarũ altitudines viuæ ſint AC, IK, & latitudines CD, KM. Dico AC ad IK habere rationem compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ ſectionis IM ad velocitatem mediam ſectionis AD, & latitudinis KM ad latitudinem CD.

Supponantur enim quantitates æquali tempore fluentes per vtramque ſectionem conformatæ in conſueta priſmata CF, KO; Erunt itaque priſmata CF, KO æqualia, eruntque CG, KQ velocitates medię ſectionum AD, IM, ſed priſmata æqualia reciprocant baſes, & altitudines; ergo vt altitudo AC ad altitudinem IK, ita baſis KN ad baſim CH; ſed baſis KN ad baſim CH eſt in ratione compoſita ex rationibus KM ad CD, & KQ ad CG; ergo proportio AC ad IK erit compoſita ex rationibus KM ad CD, & KQ ad CG, ideſt altitudo AC ad altitudinem IK habebit rationem compoſitam ex rationibus velocitatis medię ſecundæ ſectionis IM ad velocitatem mediam primæ ſectionis AD, & latitudinis KM ſecundæ ſectionis ad latitudinẽ CD primę. Quod &c.

Fig. 2. & 3.
Prop. 1. huius
Prop. 2. huius.
Prop. 29. XI. Elem.
Com. ad prop. 24. VI. Elem.

COROL.

EX progreſſu huius propoſitionis patet, quòd ſi latitudines ſectionum CD, KM accipiantur pro altitudinibus priſmatum; erit proportio latitudinum CD, KM compoſita ex rationibus IK ad CA, & KQ ad CG .i. latitudo

 pri-

primæ ſectionis ad latitudinem ſecundæ; erit in ratione compoſita ex rationibus velocitatis mediæ ſecũdæ ſectionis ad velocitatem mediam primæ, & altitudinis viuæ ſecundæ ſectionis ad altitudinem viuam primæ.

COROL. II.

PAtet etiam, quòd anteactę duæ propoſitiones non ſolum habent locum in ſectionibus eiuſdem fluminis, ſed & diuerſorum; dummodo æqualibus temporibus per ipſas tranſeant æquales aquæ quantitates.

PROP. X.

Fig. 5. & 6. SI vnius fluminis aqua aliud flumen ingrediatur; altitudo, quam habet aqua primi fluminis in proprio alueo, ad altitudinem, quàm eadem, vel alia ipſi mole æqualis habet in ſecundo flumine, rationem habet compoſitam ex rationibus velocitatis, quam habet in ſecundo flumine ad velocitatem, quam habebat in proprio alueo, & latitudinis ſecundi fluminis ad latitudinem proprij aluei.

Sit ſectio primi fluminis influẽtis AB, cuius altitudo AG latitudo GB, & velocitas media BC; ſit verò DH altitudo, quam habet in ſecundo flumine aqua influens; latitudo verò ſecundi fluminis HE; ideoque DE ſectio, per quam tranſit aqua primi fluminis, dum fluit per ſecundum flumẽ, eiuſque velocitas EF. Dico altitudinẽ AG ad altitudinem DH habere rationem compoſitam ex rationibus velocitatis EF ad velocitatem BC, & latitudinis HE ad latitudinem GB.

Prop. 9. huius. Cum enim ęquales quantitates aquæ fluant per ſectiones AB, DE; erit AG ad DH in ratione compoſita ex rationibus EF ad BC, & HE ad GB. Quod &c.

Ad-

SCHOLIVM.

ADuertendum eſt, dum dicimus AG ad DH habere aſſignatam rationem, nos non intelligere FH pro augmento facto in flumine per additionem nouæ aquæ; non enim AG ad augmentum factum in flumine eam ſemper habet rationem, quam habet ad DH, ſed ſæpius maiorem, vt ſuo loco patebit.

COROL.

EX hac propoſitione, & octaua manifeſtum fit, velocitatem mediam, quam habebat aqua fluminis influentis in proprio alueo ad velocitatem mediam, quam habet in ſecundo flumine, habere rationem compoſitam ex rationibus latitudinis ſecundi fluminis ad latitudinem primi, & altitudinis, quam habet in ſecundo flumine ad altitudinem, quam habebat in proprio alueo.

PROP. XI.

SI complexus velocitatum alicuius perpendicularis cõformetur in rectangulum ſupra perpendicularem tamquam baſim; erit altitudo rectanguli velocitas media eius perpendicularis.

Sit perpendicularis AB, cuius velocitatum naturalium complexus contineatur figura ABCK, ſitque huiuſmodi figura conformata in rectangulum BL, ita vt baſim habeat AB. Dico eius altitudinem AL eſſe velocitatem mediam perpendicularis AB. Latus enim LM partim erit intra figuram ABCK, partim extra, vt de ſe patet; alias vel rectangulum maius eſſet figura, vel minus; ſecabit ergo lineam KC in aliquo puncto v. g. H, per quod ducatur HF paral- Fig. 1.

le-

lella altitudini AL. Quoniam igitur rectãgulum BL æquale eſt ABCHK; ſi auferatur pars cõmunis ABMHK, erit figura KHL æqualis figuræ MHC; ſed KHL eſt exceſſus velocitatum, quo FH vna ex velocitatibus inter A, & B ſuperat velocitates inter A, & F, & MHC eſt exceſſus velocitatum, quo eadem FH ſuperatur a velocitatibus inter F, & B; ergo velocitas FH tantò ſuperatur a velocitatibus inter F, & B, quantò ea ſuperat velocitates inter F, & A; ideoque erit FH velocitas media perpendicularis AB; ſed FH eſt æqualis AL; ergo & AL erit velocitas media eiuſdem perpendicularis AB. Quod &c.

Def. 4. huius.

COROL.

QVoniam rectangulum BL eſt, ex conſtructione, ęquale complexui velocitatum naturalium aquæ in perpendiculari AB; poterit & idipſum aſſummi tamquam complexus velocitatum eiuſdem perpendicularis.

PROP. XII.

COmplexus velocitatum alicuius perpendicularis ad complexum velocitatum alterius, habet rationem compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ primæ perpendicularis ad velocitatem mediam ſecundæ, & perpendicularis primæ ad perpendicularem ſecundam.

Fig. 7. & 8. Sint perpendiculares AB, CD. Dico complexum velocitatum perpendicularis AB ad complexum velocitatum perpendicularis CD habere rationem compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ perpendicularis AB ad velocitatem mediam perpendicularis CB, & AB ad CD.

Conformentur enim complexus velocitatum perpendicularium AB, CD in rectangula BE, DF; quorum baſes AB, CD; erit ergo rectangulum BE complexus velocitatum perpendicularis AB, & DF complexus velocitatum perpendicularis CD; ſed rectangula BE, DF habent inter ſe rationem compoſitam ex rationibus AE ad CF, & AB ad CD; ſunt autẽ AE velocitas media perpendicularis AB, & CF velocitas media perpendicularis CD; ergo complexus velocitatum perpendicularis AB ad complexum velocitatum perpendicularis CD, habet rationem compoſitam ex rationibus velocitatis mediæ AE ad velocitatem mediam CF, & perpendicularis AB ad perpendicularem CD. Quod &c.

Comand. ad prop. 24. VI. Elem.

Prop. 11. huius.

COROL. I.

EX hac propoſitione ſequitur, ſi velocitates mediæ ſint æquales, complexus velocitatum inter ſe habere eandem rationem, quam perpendiculares.

COROL. II.

ET, ſi perpendiculares ſint æquales, complexus velocitatum inter ſe eſſe, vt velocitates mediæ.

COROL. III.

ET, ſi complexus velocitatum duarum perpendicularium ſint inter ſe æquales, velocitates medias earumdem eſſe in reciproca proportione perpendicularium.

COROL. IV.

ET quoniam rectangula, quæ reciprocant baſes, & altitudines inter ſe ſunt æqualia; ſequitur, quòd ſi velocitates mediæ, & perpendiculares inter ſe ſint in ratione reciproca, complexus velocitatum inter ſe æquales erunt.

In

PROP. XIII.

IN ſectionibus æqualem latitudinem habentibus, complexus velocitatum vnius perpendicularis in ſingulis ſectionibus inter ſe ſunt, vt quantitates aquæ per eas ſectiones æquali tempore fluentes.

Sint duæ ſectiones AD, ED eiuſdem latitudinis CD, ſed inæqualis altitudinis AC, EC, & ſit G aqua fluens per AD, & H aqua fluxa per ED æquali tempore; ſit deinde I complexus velocitatum perpendicularis AC; L verò complexus velocitatum perpendicularis EC: denique ſit M velocitas media ſectionis AD, & N velocitas media ſectionis ED. Dico vt I ad L, ita eſſe G ad H. *Fig. 4.*

Quoniam enim ratio G ad H, ideſt aquarum componitur ex rationibus M ad N, ideſt velocitatum mediarum, & ſectionis AD ad ſectionem ED; eſt autem vt AD ad ED, ita AC ad EC, ratio G ad H erit compoſita ex rationibus M ad N, & AC ad EC; ſed ratio I ad L, ideſt complexuum velocitatum, & ipſa componitur ex rationibus M ad N, & AB ad EB, ergo vt I ad L, ita G ad H. Quod &c. *Prop. 6. huius.* *Prop. 12. huius.*

PROP. XIV.

PEr ſectiones quaſcumque artificiales, quantitates aquę æquali tempore fluentes inter ſe ſunt in ratione compoſita ex rationibus complexus velocitatum vnius perpendicularis in prima ſectione ad complexum velocitatum alterius perpẽdicularis in altera ſectione, & latitudinis primæ ſectionis ad latitudinem ſecundæ.

Sint ſectiones AG, CH. Dico quantitatem aquæ fluentem per AG ad quantitatem aquæ fluẽtem per CH æquali tempore, eſſe in ratione compoſita ex ratione complexus velocitatum perpendicularis AB ad complexum velocitatum perpendicularis CD, & ex ratione latitudinis BC primæ ſectionis ad latitudinem DH ſecundæ ſectionis. *Fig. 7. & 8.*

Sit I quantitas aquæ fluentis per AG, & K quantitas aquæ fluentis æquali tempore per CH; fiatque, vt complexus velocitatum perpendicularis AB ad complexum velocitatum perpendicularis CD, ita L ad M, & vt latitudo BG ad latitudinem DH, ita M ad N; erit ergo proportio L ad N compoſita ex rationibus complexuum velocitatum inter ſe, & latitudinum ſectionum. Sit deinde O velocitas media ſectionis AG, & P velocitas media ſectionis CH. Probandum eſt, vt I ad K, ita eſſe L ad N.

Ratio enim L ad M eſt compoſita ex rationibus AB ad CD, & O ad P ergo ratio L ad N erit compoſita ex rationibus AB ad CD, O ad P, & BG ad DH, ſed ijſdem rationibus AB ad CD, O ad P, & BG ad DH eſt compoſita ratio I ad K; ergo ratio I ad K eadẽ erit, ac L ad N. Quod &c *Prop. 12. huius. Corol. prop. 6. huius.*

PROP. XV.

COmplexus velocitatum duarum ſectionum ſunt inter ſe in ratione compoſita ex rationibus complexus velocitatum vnius perpendicularis in prima ſectione ad complexum velocitatum alterius perpendicularis in altera ſectione, & latitudinis primę ſectionis ad latitudinem ſecundæ.

Sint duæ ſectiones AD, IM, quarũ latitudines CD, KM. Dico complexum velocitatum ſectionis AD ad complexum velocitatum ſectionis IM habere rationem compoſitam ex rationibus complexus velocitatum perpẽdicularis AC ad complexum velocitatum perpendicularis IK, & latitudinis CD ad latitudinem KM. *Fig. 2. & 3.*

Fiat rectangulũ CE æquale complexui velocitatum perpendicularis AC, & intelligatur erectum plano ſectionis AD; ſimiliter conſtituatur alterum rectangulum DF ęquale *Fig. 2. & 3.*

le complexui velocitatum perpendicularis BD,& intelligatur parallelũ rectangulo CE,& iungantur FE,HG. Et quoniam AC,BD perpendiculares in eadem sectione,sunt inter se æquales, & ipsis pariter æquales quæcumque aliæ; sequitur, quòd velocitas media perpendicularis AC æqualis sit velocitati mediæ perpendicularis BD, ideòque lineæ BF,AE inter se æquales erunt & consequenter rectangula DF, CE æqualia,& similia inter se, & similiter posita; sunt autem & parallela;ergo solidum CF erit prisma,cuius basis rectangulum CE, altitudo CD,vel AB: & si complexus velocitatum omnium perpendicularium inter AC & BD conformentur in rectangula, erunt cuncta æqualia rectangulo CE,& si ponantur parallela rectangulis CE,DF; eorum rectangulorum,latera homologa lateribus EG, FH erunt in rectangulo FG, & omnes complebunt prisma CF; itaque prisma CF erit complexus velocitatum sectionis AD. Iisdem constructis in altera sectione IM ostendetur prisma KO esse complexum velocitatum sectionis IM; sed prismata habent rationem compositam ex rationibus basium, & altitudinum; ergo prisma CF ad prisma KO habebit rationem compositam ex rationibus basis CE ad basim KP, & CD ad KM; sunt autẽ CE complexus velocitatum perpendicularis AC, & KP complexus velocitatum perpendicularis IK;ergo & complexus velocitatum sectionis AD ad complexum velocitatum sectionis IM erit in ratione composita ex rationibus complexus velocitatum perpendicularis AC ad complexum velocitatum perpendicularis IK, & latitudinis CD ad latitudinẽ KM. Quod &c.

Axiom. 1. huius.

Corol. 1. p. 11. huius.

COROLLARIVM.

ET quoniam per propositionem 14. quantitates aquæ in diuersis sectionibus inter se sunt in ratione composita ex proportione, quam habent inter se complexus velocitatum in perpẽdicularibus diuersarum sectionum, & ex proportione latitudinum earundem, in superiori verò eadem composita ratio ostensa sit de complexibus velocitatum in diuersis sectionibus; sequitur quãtitates aquæ esse inter se in eadem proportione,ac complexus velocitatum sectionum, per quas fluunt; seu potius esse vnum, & idem complexum velocitatum sectionis,ac aqua per eam fluens abstractè sumpta.

SCHOL.

HÆ vltimæ propositiones de complexibus velocitatum, licèt reduci ad antecedentes, aut saltem ex ijs immediatè deduci possent; adhuc tamen eas hic seorsim demonstrare suscepimus,vt ex conuenientia proprietatũ,& passionũ liquidò appareret connexio,vel identitas, aut saltẽ proportionalitas existens inter complexus velocitatum, & quãtitates aquarum, siue in sectione integra,siue tantùm in vna perpendiculari considerentur; & interim asuesceret Lector complexus velocitatum pro quantitatibus aquarum assumere, cum in sequentibus libris eorum frequens futurus sit vsus.

Finis Primi Libri.

LIBER SECVNDVS

In quo proponitur mensura aquarum fluentium in Canalibus inclinatis solitarijs.

SVPPOSITIO.

VT Doctrinæ detur locus supponimus alueos fluminum, siue canales, oblonga esse vasa, quorum fundus in eodem semper sit plano, latera vero plana verticalia plano fundi erecta, per quæ aqua fluit, vel potest fluere a termino sublimiori ad humiliorem, eaque non flexuosa, sed recta via ad suum terminum dirigi.

DEFINITIONES.

I. CAnalis solitarius is est, qui ab ipso initio totam suam, aquam recipit, quam ad terminum vsque sui fluxus fert absq; additione, vel permixtione alterius canalis, vt sunt illi, qui a suis fontibus, vel lacubus totam suam aquam hauriunt, quæ aliorum canalium aquis non immescetur durante tractu sui fluxus.

II. Canalis vero vnitus is dicatur, qui a duobus vel pluribus minoribus canalibus inuicem vnitis, quorum vnus in alium influat, suam aquam recipit, siue vnio in vno tantum loco fiat, siue pluribus, vt sunt flumina, fere omnia, quorum aquæ ex plurium riuulorum confluentia coalescunt.

III. Canalis inclinatus is est, cuius partes inæqualiter distant a centro grauium, aliæ quidem magis, aliæ minus.

IV. Initium canalis intelligo illud punctum siue lineam, in

in qua planum inclinatum canalis productum concurrit cum superficie aquæ.

V. Horizontalis ergo per initium aluei illa dicatur, quæ per initium aluei ducitur horizonti parallela.

VI. Horizontalis sectionis est linea, vel planum per fundum sectionis ductum horizonti parallelum.

VII. Angulus inclinationis alicuius canalis est, qui fit a linea horizontali per initium aluei, & a linea directionis canalis.

VIII. Sectiones similes in alueis decliuibus, siue inclinatis illæ dicantur, quæ æqualiter distant ab initio aluei; patet autem has haberi non posse nisi in diuersis canalibus.

IX. Similiter positæ sectiones dicãtur, quæ fiunt in alueis æqualiter ad horizontem inclinatis.

X. Lumina sũt foramina variæ figuræ, circularis, quadratæ &c. insculpta in lateribus, vel fundo alicuius vasis, per quæ aqua repleto vase potest fluere.

PROPOSITIO I.

SI a vase aqua pleno educatur aqua per lumina similia, & æqualia, sed inæqualiter infra superficiem aquæ sita, erunt quantitates Aquæ eductæ inter se in subduplicata ratione altitudinum incumbentis Aquæ, dummodo tamen eadem semper perseueret supra lumina æqualis aquæ altitudo.

Hæc propositio per experientiam manifesta est, præter enim aliorum obseruationes præcipuè vero Domini Mariotte, eædem a me repetitæ sunt apud Reuerendissimum Abbatem D. Tadæum de Pepulis anno 1683. die 14. Octobris. In Cœnobio enim Diui Bernardi PP. Oliuetanorum huius Vrbis, præsentia sua fauentibus eodem Reuerendissimo Abbate (cuius memoria semper mihi grato animo recolenda erit, sicuti & mors, licèt post longæuam vitam, pau-

paulò post subsecuta perpetuò dolenda) & D.Ioanne Ludouico Donello Philosophiæ, & Medicinæ Doctore Collegiato in Mathematicis laudabiliter versato, necessitudinis vinculo mihi summopere adstricto, operamque suam meis studijs, & experimentis præstante, alijsque amicis, paratum fuerat Vas cilindricum, cuius altitudo pedum quatuor, basis verò pedum duorum in diametro, diuisaque tota altitudine in sexdecim partes æquales, vni lateri Vasis totidem circularia foramina inter se æqualia fuerant insculpta. His singulis fistulæ ligneæ adamussim æquales aptatæ, quarum interior cauitas eiusdem vbique crassitiei, & summopere læuigata vnciam vnam in diametro superabat, eisque in parte exteriori laminę æreæ applicatæ, quæ in medio lumen circulare habebant, cuius diameter vnciæ vnius quadrantem æquabat, centro suo axi fistulæ adamussim correspondens, cæteroquin exterius fistulæ foramen exactè obstruentes. Vase deinde aqua repleto, & disposito pendulo, cuius longitudo fuit vnciarum 28. $\frac{5}{7}$ quindecim vibrationum tempore exeuntes aquæ obseruatæ sunt. Primo enim ex inferiore fistula, cæteris clausis, asserto tempore aqua hausta fuit vnciarum 123. manente superficie aquæ in vase in eadem altitudine; Obstructa deinde inferiore fistula, & aperta superiore, vt aquę altitudo decresceret tribus vncijs, cessante fluxu per superiorem, inferior denuò aperta est, & alijs quindecim vibrationibus extracta aqua fuit vnciarum 118. sicque successiuè in alijs, donec deuentum ad altitudinem vnciarum 24. Eò tunc enim cum admodum difficile esset aquam in eadem altitudine conseruare durante toto tempore fluxus inferior fistula clausa est, & vase denuò aqua repleto, ea aperta fuit, quæ 24. vncias infra superficiem aquæ erat demersa, & dato tempore, vnciæ 93 aquæ fluxisse obseruatæ sunt, & successiue experimenta cõtinuata vsque ad vncias tres altitudinis iuxta methodum superiorem. Quoniam vero

verò vltimæ huius fistulæ lumen, nonnihilo, licèt ferè insensibiliter, priori maius esset, quod ex quantitate aquæ exeuntis primò, deinde etiam ex rectificatione diametri subtili experimento didicimus; ideo ex mutatione luminis, duplex instituenda fuit radicalis obseruatio, prima in altitudine vnciarum 48. secunda in altitudine vnciarum 24. Singulæ autem obseruationes habentur in subiecta Tabula vnà cum quantitatibus aquarum correspondẽtibus proportioni subduplicatæ altitudinis aquæ supra centra luminum ex duabus obseruationibus radicalibus, vt appareat quàm parùm discrepet proportio aquarum per obseruationem inuenta, a proposita ratione subduplicata.

Altitudo Aquæ supra cẽtrum fistulæ, & luminis in vncijs pedis Bononiensis.	*Quantitas aquæ exiens singulis 15. vibrationibus in vncijs libræ Bonon.*	*Propositio aquarum ex obseruatione radicali prima* subduplicata altitudinũ *in vncijs libræ Bonon.*
48	123	123
45	118	119
42	116	115
39	110	111
36	106	106
33	103	102
30	97	97 $\frac{1}{2}$
27	91	92
		Proportio aquarum ex obseruatione radicali secunda.
24	93	93
21	87	87
18	81	80 $\frac{1}{2}$
15	74	74
12	66	66
9	56	57
6	47	46 $\frac{1}{2}$
3	34	33

Ex

Ex his obseruationibus patet, quantitates Aquæ esse in subduplicata ratione altitudinum; licèt enim alicubi nonnihil discrepent ab exposita proportione; id tamen insensibile est, & in luminum siue orficiorum contactum refundendum, aut in obseruationum lubricitatem, ita vt appareat Naturam hac ratione procedere.

Præter experimenta nonnulli hanc propositionem, quã ferè omnes tamquam principium assumunt, vel immediatè ex suppositione deducunt demõstrare conantur; tutior tamen mihi videtur Torricellij demonstratio, quæ talis est.

Fig. 9. & 10. Sit Vas ABDC, cui sit foramen in E horizontale, sitque superficies aquæ AB. Et similiter intelligatur aliud Vas FG, cui foramen H æquale foramini E. Dico velocitatem, qua Aqua exit a lumine H ad velocitatem, qua exit a lumine E, esse in subduplicata ratione linearum, siue altitudinum BL, FG.

Galil. in schol. prop. 23. de Motu accel. Aqua enim exiens a luminibus E, & H detracto aeris impedimento salit vsque ad horizontales AM, NK per impetum, seu velocitatem impressam in E, & H; ergo velocitas in E, & H eadem est, ac si Aqua descendisset ab M in E, & a K in H, sed velocitas in E a descensu per ME ad velocitatẽ in H a descensu per KH habet rationem subduplicatam linearum ME, KH, siue BL, FG, ergo velocitas in E & H est pariter in ratione subduplicata linearũ BL, FG; cum autem quantitates aquæ in sectionibus, seu luminibus æqualibus sint, vt velocitates, etiam quantitates aquæ habebunt subduplicatam rationem altitudinum. Quod &c.

Galil. ibid. prop. 2.

Prop. 5. 1. huius.

COROLLARIVM.

ET quoniam velocitas in E, & H nullam aliam agnoscit causam, quàm pressionem superincumbentis aquæ in vase, sequitur pressionem agere iuxta prædictam proportionem, si actio in velocitatem tantummodo influere intelligatur.

Perin-

SCHOLIVM.

PErinde est siue foramen sit in E horizontale sursum vergens, siue in fundo CD deorsum, siue in lateribus BL, FG verticaliter, ita vt directio sit horizontalis; aqua enim quaquà versus premit æqualiter, dummodo æqualem, vel eandem habeat supra se altitudinem.

PROP. II.

EAdem est velocitas aquæ fluentis per aliquam sectionem canalis inclinati, ac si fluxerit e vase per lumen simile, & ęquale sectioni, tantundem a superficie aquæ remotum; quantùm sectio ab horizontali per initium canalis.

Sit canale inclinatum AB, per quod fluat aqua in sectione B, & sit AE horizontalis per initium canalis. Dico in sectione B eandem esse velocitatem aquæ, ac si flueret per eandem sectionem B, tanquam lumen, e vase clauso ABE, in quo aquæ superficies sit AE. *Fig.*

Quoniam enim Aqua est corpus graue; si intelligatur ab A fluxisse in B per planum inclinatum AB, eadem erit velocitas in B, ac in D, si ex A in D cecidisset (supponitur enim AD horizonti perpendicularis, & secta horizontali DB) vel ex C in B; sed & in vase clauso velocitas luminis B eadem est, ac si aqua a C in B descendisset; ergo velocitas in B eadem est, siue aqua fluat per Canale AB sectione B, siue fluxerit e vase ABE lumine B. Quod &c.

Torricellius de mot. grau. prop. 5.

COROL. I.

EX his sequitur velocitates in diuersis sectionibus eiusdem canalis esse in subduplicata ratione perpendicularium a sectionibus ad horizontalem per initium aluei,

D cum

cum enim velocitates in luminibus F,B ſint in ſubduplicata ratione linearum FG, BC; & velocitates in ſectionibus F,B eandem habebunt rationem ſubduplicatam.

COROL. II.

ET quoniam, vt FG ad BC, ita eſt FA ad BA; erunt etiã velocitates ſectionum F,B in ſubduplicata ratione linearum FA, FB, ideſt diſtantiarum ab initio aluei.

COROL. III.

INuenta ergo media proporzionali inter GF, & CB, ſiue inter AF, & AB; erit, vt GF, vel AF ad mediam, ita velocitas F ad velocitatem B.

COROL. IV.

Apolon. lib. 1. Conic. prop. 11.

QVare ſi axe AB vertice A deſcribatur ſemiparabola AHL, & ducantur ſemiordinatæ FH, BL; erunt hæ menſura velocitatum punctorum, ſiue ſectionum F,B, & ſic de cæteris.

COROL. V.

SEquitur ex ſupradictis velocitates ſemper maiores fieri, quò ſectiones ab initio aluei remotiores ſunt; e contra verò, cum velocitates, & ſectiones reciprocè ſe habeãt, canale in eodem ſtatu permanente; conſequenter ſectiones ſemper minores erunt, & ſi hę ſupponantur æquè latæ, altitudines erunt ſemper minores.

Prop. 3. 1. huius.

In

PROP. III.

IN qualibet ſectione canalis inclinati velocitas maior eſt in fundo, quàm in ſuperficie aquæ.

Sit canale inclinatum AB, in quo ſectio, cuius altitudo BC. Dico velocitatẽ in B maiorem eſſe, quàm in C. Ducatur enim per initium aluei, horizontalis, ad quam ex B, & C ducantur perpendiculares BE, CD. Itaque quoniam angulus AEB eſt rectus; erit angulus ABE acutus, & quoniã angulus CBA eſt rectus, ſi ex ipſo dematur angulus acutus ABE, remanebit angulus CBE acutus; quare demiſſa CF perpendiculari ad BE; cadet ea ad partes E, & abſcindet portionem FE minorẽ tota BE; ergo & DC minor erit eadẽ BE; ſed velocitas B competit deſcenſui BE, & velocitas C deſcenſui DC; maiori verò deſcenſui competit maior velocitas; ergo velocitas in B maior erit, quàm in C. Quod &c

Fig. 12.

Prop. 2. huius.

COROL.

QVoniam per maiorem inclinationem angulus EBA ſemper fit minor, conſequenter angulus FBC maior erit; ideoque perpendicularis CF ſemper cadet proximior puncto B; quare differentia inter velocitatem fundi, & ſuperficiei ſemper minor erit, quò magis inclinatus erit canalis & cum fuerit perpendicularis, cadente CF in CB, æquabuntur inter ſe velocitates.

PROP. IV.

IN ſectionibus diuerſis eiuſdem canalis inclinati maior eſt proportio velocitatis fundi ad velocitatem ſuperficiei, quò ſectiones initio canalis proximiores erunt.

Fig. 12.

Supponatur enim in eadem figura ſectio G proximior

initio A,quam B. Dico maiorem rationẽ esse velocitatis G ad velocitatem H, quàm velocitatis B ad velocitatem C; ijsdem.n. constructis,quoniam GH maior est,quàm BC; & in triangulis IGH, FBC omnes anguli æquales; præter enim angulos rectos ad F,I,sunt anguli FBC,IGH æquales, vtpote æqualium angulorum AGK, ABE complementa; erit & GI maior,quàm FB; & quoniam KG minor est, quã EB, ablata IG ex KG,& FB ex BE remanebit KI multo minor, quàm FE; habebit ergo GI ad FB maiorem rationem quam KI ad EF, & permutando GI ad KI maiorem, quàm FB ad EF,& componẽdo GK ad IK, seu LH,maiorem,quã BE ad EF,siue DC.Sit X media proportionalis inter GK,& LH,& Y media proportionalis inter EB,& CD.Itaque KG ad X maiorem habebit rationem, quàm EB ad Y;sed ratio KG ad X eadem est,ac velocitatis G ad velocitatem H, & ratio EB ad Y eadem,ac velocitatis B ad C;ergo velocitas G ad H habebit maiorem rationem, quàm velocitas B ad C. Quod &c.

Corol. 5. prop. 2. huius.

Corol. 3. prop. 2. huius.

COROL.

EX his constat, quòd in sectionibus plurimum a Canalis initio remotis fieri potest, vt differentia velocitatum sensibiliter æqualis sit;præcipuè in ijs, quæ non multam habent altitudinem, cum proportio semper magis, & magis ad æqualitatem accedat.

SCHOL.

CVm itaque ferè semper in sectionibus fluminum distantia superficiei aquæ a principio canalis insensibiliter differat a distantia fundi ab eodem principio, sumi poterit physicè velocitas fundi æqualis velocitati superficiei, cum præcipuè aqua in fundo sectionis retardetur propter contactũ eiusdem fundi, vnde fit, vt in fluminibus, præsertim paruæ altitudinis,aliquando velocior sit aqua in superficie,quàm in fundo.

PROP. V.

PArabolam assignare, in qua sumi possit mensura velocitatum in perpendiculari alicuius sectionis.

Sit canale inclinatũ ABG,cuius initium A, sectio B, eiusque altitudo BC: opportet parabolam assignare, in qua sumi possit mensura omnium velocitatum existentium in linea BC. *Fig. 13.*

Per A ducatur horizontalis AF, & producatur BC, donec cum AF concurrat in F, & circa axim BF describatur semiparabola FHG. Dico hanc esse parabolam quæsitam. Ducantur enim perpendiculares BD,CE ad AF,& semiordinatæ BG,CH &c.Et quoniam velocitas in B ad velocitatem in C subduplicatam habet rationem BD ad CE;est autem BD ad CE propter similitudinem triangulorum, vt FB ad FC;erit velocitas in B ad velocitatem in C subduplicata eius, quam habet FB ad FC; sed eandem rationem subduplicatam habet BG ad CH; ergo velocitates B,& C erunt inter se, vt BG ad CH. Quare si BG intelligatur velocitas puncti B; erit CH velocitas puncti C, & LM puncti M, & sic de cæteris. Quare parabola FBG erit mẽsura omnium velocitatum perpendicularis BC. Quod &c.

Prop. 1. & 2. huius.

COROLLARIVM.

EX his patet spatium parabolicum CBGH esse complexum omnium velocitatum perpendicularis BC.

Data

PROP. VI.

DAta in ſpatio parabolico ſemiordinatarum ratione,& ſegmento axis inter ſemiordinatas, inuenire axim parabolæ.

Sit in ſpatio parabolico ABCD data poportio, quam habet AB ad CD,& ſegmento axis AC: opportet inuenire altitudinem axis parabolæ. *Fig. 14. & 15.*

Fiat quadratum ſemiordinatæ maioris CD, quod ſit EH; quadratum verò minoris AB ſit EF poſitum ad communem angulum E; fiatque, vt quadratorum differentia, ideſt vt gnomon ILM ad quadratum EF, ita AC ad aliam ipſi in directum continuatam AG. Dico totam CG eſſe axim quæſitum.

Quoniam enim vt gnomon ILM ad quadratum EF, ita CA ad AG; erit componendo vt gnomon,& quadratũ EF, ideſt quadratum EH ad quadratum EF, ita CA vnà cum AG, ideſt tota CG ad GA; ergo vt GC ad GA, ita quadratum EH, ſiue CD ad quadratum EF, ſiue AB. Quare punctum G erit vertex parabolæ. Quod &c.

COROL. I.

ITaque ſi AB, CD datæ ſint in partibus ſegmenti AC, nõ ſolũ dabitur altitudo parabolæ, ſed & eius amplitudo.

COROL. II.

EX hac propoſitione ſequitur, quòd, in figura propoſitionis antecedentis, ſi dabitur ratio velocitatum BG, CH,& perpẽdicularis ſectionis BC, inuenietur axis BF parabolæ mẽſurantis omnes velocitates perpendicularis BC. *Fig. 13.*

Immo

COROL. III.

IMmò, ſi vlterius notus ſit angulus inclinationis BAD, trigonometricè innoteſcet AB,& BD, ideſt diſtãtia fundi ſectionis ab initio aluei, & eiuſdem diſtantia ab horizõtali per initium aluei; in triangulis enim ABD, ABF; præter latus BF, noti erunt omnes anguli.

PROP. VII.

SPatium Parabolicum quadrare.

Sit ſpatium parabolicum ABCD, cui opporteat ęquale rectangulum inuenire. *Fig. 16.*

Inueniatur altitudo axis CE; fiatque parabolæ AEB æquale rectangulũ AF,& ſimiliter parabolæ CED æquale fiat rectangulum CG; producaturq; AB,& vt CA ad AE, ſiue vt HO ad OG, ita ſit KO ad OI,& compleatur rectangulum HI. Dico rectangulum CI æquale eſſe ſpatio parabolico CABD. *Archim. de quadr. parab. prop. 24.*

Quoniam n. rectangulum AF eſt æquale parabolę AEB, & rectangulum CG parabolæ CED; ablato ex rectangulo CG, rectangulo AF; & ex parabola CED, parabola AEB, remanebit ſpatium KFGHCAK æquale ſpatio parabolico CABD; itaque ablato communi rectangulo CO remanebit rectangulum FO æquale reliquo ſpatio parabolico HOBD; ſed rectangulum FO eſt æquale rectangulo HI, quoniam latera habent reciprocè proportionalia; ergo rectangulum HI æquale erit ſpatio parabolico HOBD: addito itaque communi rectangulo CO, erit totum rectangulum CI æquale ſpatio parabolico CABD. Quod &c.

In

PROP. VIII.

IN Canale inclinato mediam velocitatem cuiusuis perpendicularis inuenire.

Fig. 17. Sit in canale inclinato sectio B, cuius altitudo BC: oportet mediam velocitatem perpendicularis BC inuenire.

Prop. 5. huius. Describatur parabola, quę sit mensura velocitatum perpendicularis BC; ductisque BE, CH semiordinatis, fiat rectangulum BF æquale spatio parabolico BCHE, cuius latus FI secabit parabolam in aliquo puncto G, & per G ducatur GK semiordinata ad axem BD, secans ipsum in puncto K. Dico in puncto K esse mediam velocitatem quæsitam, eamque exprimi per lineam KG.

Prop 7. huius.

Si enim omnes partes aquæ in perpendiculari BC fluerent æquali velocitate, certum est, quòd, dum C peruenit ad F, etiam K peruenirет ad G, & B ad I; quare tunc rectangulum BF esset complexus velocitatum perpendicularis BC, sed spatium parabolicum BCHE est complexus velocitatum perpendicularis BC, & rectangulum BF est ęquale dicto spatio parabolico; ergo æqualis est complexus velocitatum, siue aqua fluat sola, & vniformi velocitate KG, siue inæqualibus BE, CH &c. ergo, ex demonstratis in primo libro, etiam quantitates aquæ æquales essent, & consequenter HG erit media velocitas.

ALITER.

QVoniam rectangulum BF æquale est spatio parabolico BCKE, ablata cõmuni portione CHGIB remanebit trilineũ HGF æquale trilineo IGE; sed velocitas HG superat omnes velocitates minores, velocitatibus, quæ cõtineri possunt in trilineo HGF; superatur autem a velocitatibus maioribus ea portione, quæ continetur in tri-

trilineo IEG; ergo cum trilinea sint æqualia, tantundem HG superabit minores velocitates, quantùm superatur a maioribus; & consequenter erit media velocitas. Quod &c.

EXEMPLVM.

QVo tria superiora problemata aritmeticæ soluuntur. Sit altitudo sectionis BC pedum 4; proportio verò velocitatum BE, & CH, sit ea, quam habet 3 ad 4, siue ad faciliorem calculum 9 ad 12 (quommodo per experimẽta inuenienda sit velocitatum proportio, inferiùs docebimus) fiant velocitatum 9 & 12 quadrata .v. 81, & 144, & minus a maiori subtrahatur, eritque differentia 63. Itaque per regulam auream, vt 63 ad 81, ita 4 ad 5 cum 1 septima, tantaque erit linea CD, residuum axis integræ parabolæ, & consequenter tota BD erit 9 cum 1 septima: ducatur BD axis 9 cum 1 septima in 2 tertias lineæ BE, videlicet 8, & productum 73 cum 1 septima, erit area parabolæ BDE: similiter ducatur axis DC in 2 tertias lineæ CH, id est 6, & productum 30 cum 6 septimis, erit area parabolæ DCH. Subtrahatur 30 cum 6 septimis a 73 cũ 1 septima, & differentia 42 cum 2 septimis, erit BCHE. Itaque si 42 cum 2 septimis, diuidatur per BC 4; erit quotiens 10 cum 4 septimis reliquum latus rectanguli CF æqualis spatio parabolico BCHE. Vt autem inueniatur locus lineæ KG æqualis CF in axe BD, fiat eius quadratum 111. $\frac{37}{49}$, & per regulam auream, vt quadratum 81 ad quadratum 111. $\frac{37}{49}$, ita axis 5 cum 1 septima ad axim DK 7. $\frac{295}{343}$, quare ablato ex DK axe DC 5 cum 1 septima, remanebit CK 1 $\frac{2941}{343}$, siue, si perpendicularis BC sit in mensura pedum, pedes 1 vnc. 11 cum dimidia proximè. Quare locus velocitatis mediæ erit tantumdem demersus infra aquæ superficiem.

PROP. IX.

PRoportionem velocitatum Mecanicè inuenire.

Ex data longitudine canalis, siue distantia initij eiusdem a sectione,& angulo inclinationis, facilè inuenietur ratio velocitatum superficiei, & fundi; cum .n. triangulum ABD sit rectangulum ad B, & angulus DAB inclinationis sit cognitus, & vlterius notum sit latus AB, nota etiam fiet per trigonometriam altitudo parabolæ BD, qua cognita,& altitudine alicuius perpendicularis in sectione v.g.BC; erit ratio velocitatis B ad velocitatem C subduplicata eius, quam habet DB ad DC. Fig. 17.

Nisi vero sit cognita distantia sectionis ab initio aluei, ex ijs, quæ supra demonstrata sunt propositione 6, euidens est conuersum, .v. data proportione velocitatum BE, CH &c. reliqua inotescere.

Opportet igitur in præsenti modum assignare, quo mecanicè nota fiat huiusmodi proportio. Sit perpendicularis horizõti AD,& pendulum AB, quod sustentetur extra perpendicularem potentia BC: ostendit Herigonius prop.9. suæ Mecanicæ, quod si ex B erigatur BE parallela DA, & per E ducatur EF parallela BC, & alia EC parallela AB; erit BE ad BC, vt pondus B in perpendiculari AD ad potentiam BC. Intelligatur eleuatum pendulum in H, & fiat HK æqualis ipsi BE; erit ergo etiam in hoc casu pondus in perpendiculari ad potentiam HI, vt HK ad HI; cũq; BE,& HK sint æquales, erit vt potentia BC ad potentiam HI, ita BC ad HI. Quare si potentiæ BC,& HI operentur per lineas horizontales; cum in eo casu anguli KHI, EBC sint recti, erunt HI, BC tangentes angulorum inclinationis HKI, BEC; quare in hoc casu potentiæ erunt, vt tangentes angulorum inclinationis. Si verò potẽtiæ non sint horizontales, si tamen sit notus earum angulus cum linea verticali, vnà cum angulo inclinationis penduli cognoscetur nihilominus trigonometricè earumdem potentiarum ratio; etenim supposita HK quantitatis cuiuslibet arbitrariæ, erit in triangulo HKI notum latus HK, vnà cum angulis HKI inclinationis penduli, & KHI tractionis; quare innotescet latus HI, & similiter in altero triangulo EBC innotescet BC ad communem mensuram cum HI, si BE eius mensuræ supponatur, qualis supposita est KH; quam proportionem ergo habebunt HI, BC, eandem habebunt trahentes potentiæ. Cum vero perinde sit, siue potentia agat trahendo per HI, ac vrgendo per MH, vel NB, cũ æqualiter in vtroque casu ab ipsis, vnà cum potentijs AH, AB fiat æquilibrium cum pondere B, vel H; nota etiam erit potentiarum MH, NB impellentium ratio. Fig. 18.

Vt igitur velocitatum quæsita ratio inueniatur, pendulum aptetur quadranti in gradus, & minuta diuiso, cuius vnum latus ponatur verticale, demittaturque pondus B in aqua canalis alicuius, ita vt centrum ipsius cohæreat superficiei aquæ: euidens est velocitatem aquę distracturam pendulum a directione versus centrũ. Diligẽter ergo obseruetur angulus inclinationis. Deinde demisso pendulo (inuariata tamen fili longitudine) vsque ad fundum canalis: ita tamen, vt ab eo non impediatur, denuo obseruetur angulus inclinationis. Quoniam igitur potentia detinens pendulum in angulo inclinationis est ipsa Aquę fluentis velocitas, tam in fundo, quàm in superficie; in aqua enim stagnante pendulum dirigitur versùs centrum sine vllo angulo; erit ratio potentiarum eadem, ac velocitatum. Quare si superficies aquæ, vel nullo modo, vel insensibiliter sit ad horizontem inclinata; quam proportionem habebunt tangentes angulorum inclinationis, eandem habebunt, & velocitates. Si verò sensibilis sit superficiei aquæ ab horizonte declinatio ea mensuranda erit, & angulo recto addenda, & fiet angulus tractionis, quo habito, vt supradictum est, eruitur velocitatum proportio. Quod &c.

PROP. X.

DAto loco velocitatis mediæ, & angulo inclinationis canalis, ſpatium determinare, quod velocitas data apta eſt percurrere dato tempore.

Sit datus H locus velocitatis mediæ,& angulus DAB:opportet determinare ſpatium, quod apta ſit velocitas H pertranſire ad datum tempus B. *Fig. 19. & 20.*

Quoniam in inuentione puncti H, priùs cognoſcitur axis BD:erit in triangulo DKH notum latus DH,&,preter angulum DKH rectum,etiã angulus KDH complemẽtum anguli KAB inclinationis, quare innoteſcet latus KH. Iraque velocitas media H eadem eſt, ac ſi flueret aqua e vaſe ſub altitudine KH.

Sit igitur Vas NO, in quo altitudo OM, & lumen MP ſit notæ ſuperficiei, v.g. quadratum vnius vnciæ, cuius velocitas media ſit R; ſit autem altitudo RO æqualis altitudini KH, & ſupponatur, quòd per lumen PM fluxerit tempore L, quod ſit horæ minutum, pes cubus Aquæ v. g. QS: hæc quantitas intelligatur conformata in priſma rectum, cuius baſis ſit ipſum lumen v.g.VX,& altitudo XY; erit igitur XY velocitas media luminis PM,& propria puncti R; quoniam itaque notum eſt,tam lumen VX,quàm baſis cubi QT, erit & nota ratio QT ad VX;& quoniam priſmata QS,VY ſupponuntur æqualia,erit vt VX ad QT, ita reciprocè TS ad XY, ſed TS eſt altitudo nota; ergo & XY erit nota. Quod &c. *Fig. 21. & 22.*

EXEMPLVM.

IN noſtro caſu,quoniã QT eſt baſis pedis cubi, ideſt pes quadratus;erit QT vnciarũ 144 quadratarum; VX verò eſt vncia vna quadrata; vt igitur vncia vna ad vncias 144, ita pes vnus altitudinis TS ad pedes 144 altitudinis XY;quare velocitas media puncti R, ſiue puncti H eſt apta per-

percurrere pedes 144, tempore L, ſiue vno horæ minuto.

COROL.

ITaque inuenta, per repetita experimenta, quantitate aquæ fluentis,per datum lumen,e vaſe ſub certa altitudine intra tempus conſtitutum,in quo quidem maxima opus eſt diligentia, non ſolum determinabitur ſpatium correſpondens illi velocitati, ſed & ſpatia quarumcumque velocitatum ſub maioribus, vel minoribus altitudinibus per prop. primam huius libri. Nos ſuo loco tabulam exhibebimus, prout per experimenta nobis licuit inuenire, in qua quidem tantùm non fidimus, vt ad maiorem præciſionem redigi non poſſe exiſtimemus.

SCHOLIVM.

SAtiùs eſt,in determinanda quantitate aquæ tranſeuntis per datum lumen dato tempore, loco linearium menſurarum,vti ponderibus. Si enim ponderetur aqua fluxa tempore vnius minuti;eius quantitas vſque ad granum poterit præcisè determinari: parato deinde vaſe, cuius interna cauitas ſit cubica, & latus v.g. vnius vncię linearis, idẽ aqua impleatur, & deinde eius pondus diligentiſſimè per bilancem examinetur,quod erit pondus vnius vnciæ cubicę aquæ. Si deinde totum pondus diuidatur per pondus inuentum vnciæ vnius cubicæ aquæ; quotiens erit numerus vnciarum cubicarum, quibus æqualis eſt tota aqua, quare hæc intelligetur conformata in priſma rectum,cuius baſis vncia vna quadrata, & altitudo tot vnciarum linearium;quot erunt in quotiente prædicto vnciæ cubicę, quo priſmate ſi vtemur loco cubi QS, habebitur altitudo XY, meo iudicio exactiſſima.

Aduertendum & eſt,quòd,licèt lumina circularia primo viſu

visu videantur aptiora ratione minoris circumferentiæ, & consequenter contactus; nihilominus tamen, vt faciliùs determinari possit distantia loci velocitatis mediæ ab aquæ superficie, meliùs est vti luminibus quadratis, vel rectangulis in ærea lamina, quantùm fieri possit subtili, & læuigata, insculptis, quorum latera inferiora, & superiora sint horizontalia, quæ quidem lumina, quò ampliora, eò meliora erunt propter minorem contactum; dummodo tamen tota simul claudi, & aperiri possint, initio, & fine dati temporis.

Inuenietur autem media luminis velocitas ea methodo, qua in sectionibus prop. 8. inuenta est, supponendo lineam OM, altitudinem aquæ supra marginem inferiorem luminis, esse axim parabolæ, & altitudinem luminis MP esse altitudinem sectionis.

COROL. II.

EX dictis patet, quòd si spatium debitum velocitati, & perpendicularis, vnà cum latitudine sectionis, sint ad comunem mensuram, & multiplicetur spatium in perpendicularem, & productũ multiplicetur per latitudinem; consurget quantitas aquæ fluentis per sectionem, tempore, sub quo est determinatum spatium. Exempli gratia, Si spatium correspondens velocitati mediæ sectionis BC pro vno minuto temporis sit pedes 144; sitque altitudo, siue perpendicularis sectionis pedes 12; latitudo vero pedes 50; Multiplicetur 144 per 12, & productum 1728 ducatur in 50: huius productum 86400 erit numerus pedum cubicorum transeuntium per datam sectionem durante vno minuto. Idem proueniet, si latitudo, & altitudo sectionis, & spatium correspondens velocitati indiscriminatim vnũ ducatur in alterum, & productum multiplicetur per tertium; quartus enim numerus consurgens erit quantitas aquæ quæsita.

Finis Secundi Libri.

LIBER

LIBER TERTIVS

Continens mensuram aquarum fluentium in Canalibus horizontalibus, tam solitarijs, quàm vnitis cum aliis horizontalibus.

DEFINITIONES.

I. CAnalis horizontalis is est, cuius fundus æqualiter vbique distat a centro grauium; hoc est se accomodat sphęricæ superficiei terrestri, quæ quoniam in parua distantia non differt a plano sensibiliter; ideo fundum canalis horizontalis sæpiùs tamquàm planum aliquod considerabimus.

II. Mensura proportionalis aquæ fluentis nil aliud est, nisi proportio, quæ intercedit inter aquæ quantitates eodem, vel æquali tempore fluentes, per vnam, vel plures sectiones, quæ mensura non solum locum habet in canalibus horizontalibus, sed in alijs quibuscumque.

III. Cubus aquæ est numerus ex certis regulis consurgens, qui alio consimili comparatus ostendit proportionem aquarum, quarum sunt cubi.

IV. Centrum velocitatis dicatur punctum alicuius perpendicularis in sectione, quod correspõdet mediæ velocitati eiusdem perpendicularis.

In

PROPOSITIO I.

IN Canalibus horizontalibus ab vna parte apertis; si ex aduersa parte Aqua subministretur, quæ apta sit sub aliqua altitudine fluere; aquæ fluxus continget, & continuabitur vsque ad exitum; dummodo tamen canalium fũdus, vel altior sit extremo termino fluxus, vel saltem in eadem, cum ipso, linea horizontali.

Sit Canale AB apertum ad partes B, cuius fundus AB horizontalis, sit altior, vel in eadem horizontali cum extremo termino fluxus B, eique ad partes A suppeditetur aqua constituta in altitudine AC. Dico aquam fluxuram ab A ad B. Fig. 23.

Quoniam enim aqua non potest consistere in altitudine AC, nisi extremo termino contineatur, propter generalem naturam corporũ fluidorum; nullusq; ex hypothesi in B sit talis terminus; sequitur, quòd aqua debeat se se complanare æqualiter supra fundum AB; sed hoc non potest cõtingere, nisi aqua ab A fluat in B ergo fluxus aquæ fiet ab A in B. Et quoniam per successiuam depressionem altitudinis AC; successiuè pariter noua aqua subministratur, ex hypothesi, apta eandem altitudinẽ redintegrare; denuo aqua non poterit consistere in ea altitudine, & successiuus continuabitur motus ab A in B, patente exitu in B. Quod &c.

PROP. II.

VElocitas, qua fluit Aqua per canale aliquod horizõtale eadem est, qua flueret e vase aqua pleno, cuius altitudo eadem, ac altitudo viua aquæ in canale horizontali.

Intelligatur enim Canale horizontale AB fluens sub altitudine AC, sectum plano verticali FD; sitque aquæ & pla- Fig. 23.

plani sectio parallelogranum FD, ita vt tollatur fluxus. Certum est aquam inter A, & D ita vrgere planum DF, vt patente exitu, eadem flueret, qua priùs, velocitate; plani enim vices in fluxu continuato gerit aqua infra sectionem, sustentans aquam in sectione in eadem altitudine. Intelligantur igitur in plano DF insculpta plura lumina, ex quibus aqua erumpat, siue ob maiorem demonstrationis facilitatem, lumina intelligantur insculpta perpendiculari DG; sintque v.g. D, H, & quæcumq; alia possibilia inter D, & G; ita vt tota DG sit veluti infinita lumina, siue velut vnum lumen ex infinitis luminibus compositum; fluet ergo Aqua per perpendicularem GD eadem velocitate, qua e vase CF clauso erumperet, sed hæc eadem est, ac velocitas, qua priùs aqua fluebat per perpendicularem GD; ergo aqua GD fluit per canale horizontale, ac si erumperet e lumine GD, & consequenter aqua tota fluens per parallelogramum DF eadem fuit velocitate, qua erumperet e vase aqua pleno per lumen DF, & sub altitudine DG. Quod &c.

COROLLARIVM.

EX hac, & prima propositione secundi libri, patet velocitates perpendicularium in sectionibus canalium horizontalium inter se esse in subduplicata ratione abscisarum vsque ad superficiem aquæ, vt, si sit perpendicularis AB; erit velocitas puncti B ad velocitatem puncti C in subduplicata ratione linearum AB, AC. Fig. 24.

COROL. II.

HInc, si axi GC describatur parabola CGD, & intelligatur linea CD, vt velocitas puncti C; erit AB velocitas puncti A, & sic de singulis, & tota parabola CGD erit simul, & mensura, & complexus velocitatum perpendicularis GC.

COROL. III.

SIcuti conſtat, velocitatem fundi CD maximam eſſe, reliquas autem ſemper minores, & minores, quò ſuperficiei viciniores; dummodo tamen altitudo GC ſit viua, .i. aliquis non ſubſit gurges, aut impedimentum; eò tunc enim non ſolùm retardatur aquæ velocitas, adeo vt ſuperioribus minor ſit; ſed aliquoties fit ſtagnans, & pluries motum ſuum retrorſum conuertit, quod pendulo non ſemel experti ſumus. Quod dictum ſit, ne aliquis in experiendo errorem incidat; facilè enim in fluminibus irregularibus, niſi neceſſaria aduertat, poterit perperam iudicare.

PROP. III.

DAto complexu velocitatum alicuius perpendicularis in canale horizontali, inuenire eius velocitatem mediam.

Fig. 24. Sit perpendicularis AB, eiuſque complexus, & menſura velocitatum, parabola BAED: opportet mediam velocitatem perpendicularis AB inuenire.

Diuidatur BD in tres partes æquales BG, GH, HD, & ex his aſſumantur duæ BG, GH. Dico lineam BH eſſe velocitatem mediam quæſitam. Erigatur enim a puncto H perpendicularis HI, ſecans parabolam in E, & per E ducatur EC ſemiordinata axi AB, compleaturque parallelogramũ BI, & producta BD in F, fiat DF æqualis GH, & iungantur AF, AD. Quoniam igitur linea BF eſt ſeſquitertia lineæ BD, ex conſtructione; erit & triangulum ABF trianguli ABD ſeſquitertium; ſunt enim inter ſe, vt baſes; ſed etiam parabola AED ſeſquitertia eſt eiuſdem trianguli ABD; ergo triangulum ABF parabolæ BAED æquale erit; ſed etiam parallelogramum BI æquale eſt triangulo BAF; quoniam in

Archim. de quadr. parab. prop. 24.

in baſi dimidia, & altitudine eadem; ergo parallelogramũ BI parabolæ BAED æquale eſt; ablata ergo communi portione BAFH, remanebit trilineum AEI æquale trilineo EHD, ſed trilineo AEI menſuratur deffectus velocitatum ſuperiorum inter A, & C a velocitate CE, & trilineo HED menſuratur exceſſus inferiorum ſupra CE, ergo cum exceſſus, & deffectus ſint æquales; erit CE, vel BH ipſi æqualis, velocitas media. Quare dato complexu velocitatum &c. inuenta eſt media velocitas. Quod &c.

SCHOLIVM.

IDem aliter oſtendi poſſet, nam ſi omnes partes perpendicularis AB fluerent æquali velocitate; tempore, quo C peruenit ad E, eodem etiam A perueniret ad I, & B ad H, & ſic de cæteris; ideoque parallelogramum AI eſſet complexus velocitatum perpendicularis AB, ſed parabola BAED eſt complexus velocitatum naturalium eiuſdem perpendicularis AB; ergo complexus velocitatum æquales eſſent, & cõſequenter etiã quãtitates aquæ, ſiue fluat aqua AB velocitate vniformi CE, ſiue difformi iuxta rationem ſemiordinatarum in parabola; & conſequenter erit CE velocitas media. Quod &c. *Corol. prop. vltimæ I. huius.*

COROL. I.

QVoniam, per axioma primum, quælibet perpendicularis eaſdem habet velocitates in eadem ſectione; erit velocitas media vnius perpendicularis, velocitas etiam media integræ ſectionis.

COROL. II.

HInc patet velocitatem maximam ad mediam habere rationem ſeſquialteram; eſt enim maxima ſemiordinatarum BD ad DH, ſiue CE velocitatem mediam, in ratione ſeſquialtera.

COROL. III.

COnſtat vlteriùs, quòd ſi vna, eademque, vel æquales parabolæ aſſumantur pro velocitatum menſura; velocitates mediæ in perpendicularibus diuerſæ altitudinis, erunt inter ſe in ſubduplicata ratione perpendicularium; cum enim maximæ ad medias ſint in ratione ſeſquialtera; erunt ſingulæ maximę ad ſuas medias in eadem ratione, & permutando maximæ inter ſe in eadem ratione erunt, ac mediæ inter ſe: ſed maximę inter ſe ſunt in ratione ſubduplicata ſuarum perpendicularium; ergo etiam mediæ in eadem ratione erunt.

COROL. IV.

PAtet etiam, punctum C perpendicularis AB eſſe locum velocitatis mediæ, quod punctum, ſiue Centrum velocitatis dicere poſſumus.

COROL. V.

HOc igitur centrum velocitatis ſemper erit demerſum infra ſuperficiem aquæ ita, vt eius diſtantia a ſuperficie ſit 4 nonę partes totius perpẽdicularis, cũ .n. maxima velocitas ad mediam ſit in ratione ſeſquialtera; ſi maxima ſupponatur 3, erit media 2; quare vt quadratũ 3, ideſt

ideſt 9 ad quadratum 2, ideſt 4, ita AB ad AC, ideoque ſi tota AB intelligatur diuiſa in 9 partes erit AC 4 ex his partibus.

COROL. VI.

CVm igitur centrum velocitatis omnes perpendiculares ſimiliter ſecet, ideſt in ratione 4 ad 5; conſequens eſt, vt partes abſciſæ a centro velocitatis inter ſe ſint, vt altitudines viuæ ſectionum; quælibet enim abſciſa ad ſuam perpendicularem rationem habet 4 ad 9; ideoque vt abſciſa ad ſuam perpendicularem, ita altera ſimilis abſciſa ad ſuam perpendicularem, & permutando vt abſciſa ad abſciſam, ita perpendicularis ad perpendicularem; ita vt eadem proportione ſemper ſibi ipſis reſpondeant augmentũ perpendicularis, & depreſſio centri velocitatis infra ſuperficiem aquæ.

COROL. VII.

ET quoniam velocitates mediæ inter ſe ſunt in proportione perpendicularium ſubduplicata; ſunt autem perpendiculares inter ſe, vt abſciſæ; erunt etiam velocitates mediæ in proportione abſciſarum ſubduplicata.

COROL. VIII.

IN Canalibus igitur horizõtalibus velocitas media creſcit, & decreſcit per ſolam variationem altitudinis, & in ſubduplicata ratione diuerſarum altitudinum viuarum; hinc in ijs canalibus, quorum sũt ęquales altitudines aquę, æquales etiam ſunt velocitates mediæ.

Pa-

PROP. IV.

PArabolæ, quæ ſunt menſura velocitatum in aquis fluẽtibus vniuerſis, ſi earum maximarum ordinatarum proportio eadem ſit, ac proportio velocitatum mediarum, ſiue maximarum; eæ omnes inter ſe æquales erunt.

Fig. 25. Sint duæ parabolæ CAE, CBD, quæ aſſumantur pro menſura velocitatum diuerſarum ſectionum, ſiue in canalibus horizontalibus, ſiue inclinatis; ſitque proportio velocitatis maximæ correſpondentis altitudini parabolæ AC ad velocitatem maximam correſpondentem altitudini BC eadem, ac CE, ad CD. Dico parabolam ACE eſſe æqualem parabolæ CBD.

Diſpoſita enim vtraque ad cõmunem axem; ita vt maximæ ſemiordinatæ coincidant, per D erigatur DF parallela axi AC, ſecans lineam parabolicam AFE in F, & per F ducatur FG ſemiordinata, & conſequenter parallela CE. Quoniam igitur vt AC ad CB, ita quadratum CE ad quadratum CD, ſiue FG; erit vt quadratum CE ad quadratum FG, ita AC ad CB; ſed vt quadratum CE ad quadratum FG, ita eſt AC ad AG; ergo vt AC ad AG, ita AC ad CB; ideoque erunt AG, CB inter ſe equales; addita igitur communi GB; erit AB ipſi GC æqualis; ſed GC æqualis eſt FD; ergo etiam AB æqualis erit eidem FD: Similiter oſtendetur MH æqualem AB; ideoque & æqualem ipſi FD. Cum igitur AB, MH, FD &c. ſint æquales; erunt parabolæ AFE, BHD æquales. Quod &c.

Greg. à S. Vinc. de parab. pr. 333.

COROL.

ET quoniam parabolæ equales, ſi diuerſos habeant vertices, & ad eundem axim conſtituantur, inter ſe ſunt parallelæ, ſiue aſſymptoticæ, quarum proprietas eſt, vt earum

rum perimetri continuati ſemper magis, & magis ad inuicem accedant; nunquam tamen ſe ſecent, aut tangant; ſequitur, quòd in eadem ſectione ſub diuerſa altitudine, velocitates mediæ quidem inæquales erunt; attamen velocitatum mediarum incrementa per equales altitudines ſuperadditas, ſemper magis, & magis minora fient.

PROP. V.

QVantitates aquæ in ſectionibus canalium horizontalium eiuſdem latitudinis, ſed diuerſæ altitudinis, inter ſe ſunt in triplicata proportione velocitatũ maximarum.

Sint ſectiones BH, BI eiuſdem latitudinis BK, ſed diuerſæ altitudinis BC, BA; ſitque velocitas maxima ſectionis BH, linea BD; ſectionis vero BI velocitas maxima ſit BE, ita vt velocitatum maximarum proportio ſit ea, quæ intercedit inter BD; & BE. Dico quantitatem aquæ per BH ad quãtitatem per BC eſſe in ratione triplicata BD ad BE. *Fig. 26.*

Ducantur enim parabolæ BCD, BAE, KHG, KIF, quæ, per propoſitionem antecedentem, omnes erunt æquales. Et quoniam BC, KH perpendiculares ſunt æquales; erunt & earum maximæ velocitates æquales, videlicet BD, KG: Similiter oſtendẽtur BE, KF eſſe æquales; & quoniam binæ binis ſunt parallelæ; erit planũ ABE plano IKF parallelũ; ſi itaque per perimetrum binarum parabolarum intelligatur circumuolui linea parallela AI, vel IF deſcribetur ſuperficies cilindrici parabolici. Intelligantur igitur completi huiuſmodi cilindrici CBDGHK, ABEFIK; Et quoniam parabola BCD eſt complexus velocitatum perpendicularis CB, & parabola KHG eſt complexus velocitatum perpendicularis HK; ſuntque ſimiles, & æquales complexus velocitatum in alijs perpendicularibus ſectionis BH; erit omnium complexuum terminus in ſuperficie cilindrici para-

rabolici CDGH; ideoque complexus velocitatum sectionis CH erit cilindricum BGHD. Simili modo ostendetur complexum velocitatum sectionis BI esse cilindricum parabolicum BFIE. Et quoniam ista duo cilindrica sunt æquè alta; erunt inter se, vt bases, idest cilindricum BGHD ad cilindricum BFIE erit, vt parabola CBD ad parabolam ABE; sunt autem parabolæ æquales inter se in proportione triplicata maximarum ordinatarum, ergo cilindricum ad cilindricum erit in proportione triplicata BD ad BE; sed cilindrica ostensa sunt esse complexus velocitatũ sectionũ; ergo complexus velocitatum sectionis BI ad complexum velocitatum sectionis BH, seu aqua fluens per BI ad aquã fluentem æquali tempore per BH, erit in triplicata proportione maximæ velocitatis BD ad maximam velocitatem BE. Quod &c.

Caual. Geom. l. 2 prop. 34. Corol. 4.

Greg. à S. Vinc. pr. 241. de parab.

Prop. 15. 1. huius.

SCHOLIVM.

HÆc propositio aliter, & breuiùs posset ostendi. Cum enim quantitates aquæ habeant inter se rationem compositam ex proportione sectionis ad sectionem, & velocitatis mediæ ad velocitatem mediam; sit autem proportio sectionum, æqualis, vel eiusdem basis eadem, ac altitudinum; erit proportio aquæ ad aquam composita ex proportione altitudinis ad altitudinem, & velocitatis mediæ ad velocitatem mediam, idest erit composita ex proportione altitudinum, & ex subduplicata earumdem altitudinum. Sit igitur prima altitudo A, secunda C; eritque proportio aquarum composita ex proportione A ad C, & ex subduplicata A ad C. Si ergo inter A, & C inueniatur media proportionalis E, & quarta addatur B; erit proportio A ad B composita ex proportione A ad C, idest altitudinum, & C ad B, idest velocitatum mediarum, sed proportio A ad B est triplicata eius, quam habet A ad E, idest velocitatis mediæ per A ad velocitatem mediam per C; ergo quantitas aquæ per A ad quãtitatem aquę per C est in ratione triplicata velocitatum mediarum. Quod &c.

Prop. 6. 1. huius.

Fig. 27.

COROL. I.

ET quoniam maximæ velocitates sunt proportionales medijs; erunt & quantitates aquæ in triplicata ratione mediarum velocitatum.

Corol. 3. prop. 3. huius.

COROL. II.

PAriter, quoniam velocitates mediæ inter se sunt in subduplicata ratione altitudinum; sequitur, quantitates aquæ esse inter se in triplicata proportione eius, quæ est subduplicata altitudinum.

COROL. III.

EX his facilis consurgit methodus inueniendi mensurã proportionalem abstractam, siue proportionem, quã habent inter se aquæ fluentes per diuersas sectiones canalium horizontalium æqualis latitudinis. Si enim altitudines duarum sectionum inuicem multiplicentur, & a producto extrahatur radix quadrata; erit proportio maioris perpendicularis ad radicem inuentam, ea, quam habet maior velocitas ad minorem, siue maxima, siue media; cuius termini si cubentur; idest si multiplicentur in se, & productum denuo multiplicetur per radicem; erit cuborum proportio eadem, ac aquarum eodem, vel æquali tempore fluentium; sunt enim cubi velocitatum inter se; sicuti & quantitates aquæ, in ratione triplicata velocitatum.

EXEMPLVM.

SIt altitudo perpendicularis AB pedes 25; altitudo verò perpendicularis BC pedes 9: inquirere opportet proportionem, quam habet aqua fluens per BC ad aquam fluentem æquali tempore per AB. Multiplicetur igitur 25 per 9, fietque productum 225, cuius radix quadrata 15; erit itaque proportio velocitatis BE ad velocitatum DB, vt 25 ad 15 (est enim 15 medius proportionalis inter 25, & 9) siue vt 5 ad 3. Si ergo BE supponatur esse 5; erit BD 3; & facto cubo primi termini 5, idest 125; & secundi 3, idest 27; erit proportio aquæ fluentis per AB ad aquam fluentem per CB, vt 125 ad 27. Hi autē numeri possunt dici Numeri cubici aquarum fluentium, quorum frequens erit vsus.

COROL. IV.

SI vero latitudines non sint æquales; altitudines verò æquales; plane constat quantitates aquarum esse inter se, vt latitudines; cilindrici enim essent in eadem basi, quoniam æqualium perpendicularium æquales sunt velocitates maximæ, & consequenter inter se, vt altitudines, idest latitudines sectionum.

COROL. V.

SI verò neque latitudines, neque altitudines sint æquales; quoniam omnes cilindrici habent inter se rationem compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum; erit proportio aquæ ad aquam composita ex ratione, quam habet latitudo primæ sectionis ad latitudinem secundæ, & ex triplicata velocitatis mediæ in prima sectione ad velocitatem mediam in secunda sectione; Hinc

Cavalier. Geom. lib. 2. pr. 34. corol. 4.

si fiant

si fiant cubi aquarum fluentium per vtramque sectionem, & cum eorum proportione componatur proportio latitudinum, quas habent sectiones; erit consurgens proportio eadem, ac aquarum: Vt si cubus primæ sectionis sit 125; secundæ verò 27; sitq; proportio latitudinis primæ sectionis ad latitudinem secundæ ea, quam habet 3 ad 1; fiat vt 3 ad 1, ita 27 ad 9; eritq; proportio 125 ad 9 ea, quam habet aqua fluens per primam sectionem ad aquam fluentem per secundam æquali tempore.

PROP. VI.

PArabolam terminatam ita secare per aliquam ordinatam axi, vt parabola tota ad abscisam datam habeat rationem.

Sit parabola ABD secanda per lineam ordinatam axi AD; ita vt parabola ABD ad parabolam abscisam ad verticem v.g. ACE eam habeat rationem, quam F ad H. *Fig. 24.*

Inter F, & H inueniantur duæ mediæ proportionales, quæ licèt geometricè haberi nō possint per loca plana; saltem haberi poterunt per loca solida, & lineas organicas, atque etiam numeris per approximationem; sintque hæ rectæ G, I, & vt F ad G, ita fiat DB ad aliam v.g. CE; fiatque vt quadratum DB ad quadratum CE, ita BA ad AC, & per C applicetur CE ordinata, quæ pertinebit ad parabolam. Dico parabolam ABD per lineam CE ita esse sectā, vt ad parabolam ACE eandem habeat rationem, quam F ad H.

Quoniam enim parabola ABD ad parabolam ACE rationem habet triplicatam eius, quam habet BD ad CE; est autem BD ad CE, vt F ad G; erit proportio parabolæ ABD ad parabolam ACE, triplicata eius, quam habet F ad G; sed etiam proportio F ad H triplicata est eius, quam habet F ad G; ergo parabola ABD ad parabolam ACE est, vt F ad H. Quod &c.

SCHOL.

SI verò parabola ACE augenda esset iuxta rationem datam H ad F, quod sæpius in mensura aquarum contingere potest; inuentis, vt supra, duabus medijs proportionalibus I, G, & producto axe AC indeterminatè, fiat vt H ad I, ita EC ad aliam v.g. BD, & vt quadratum CE ad quadratum BD, ita fiat AC ad AB, & puncto B applicetur BD ordinata, quæ ad parabolam pertinebit, sunt enim quadrata CE, BD inter se, vt AC, AB; quare continuata linea parabolica AE, transibit per B, eritque parabola CAE ad parabolam ABD, vt H ad F, quod facilè eadem methodo demonstrari potest, per assumpta in propositione superiori.

SCHOL. II

ET, si secanda esset parabola ita, vt parabola abscisa ad verticem ad spatium parabolicum residuum datam rationem haberet, v.g. F ad H, facilè ex supra demonstratis fieri posset; diuisa enim parabola ABD ita, vt tota ABD ad abscisam ACE eam habeat rationem, quam F, vnà cum H, ad F, factum erit, quod quæritur, cum enim parabola ABD ad parabolam ACE ita sit, vt FH ad F; erit diuidendo, vt spatium CBDE ad parabolam ACE, ita H ad F, siue vt parabola ad spatium, ita F ad H.

PROP. VII.

DAta quantitate aquæ fluentis in canale horizontali per sectionem datæ altitudinis, & latitudinis, & latitudine alterius sectionis; inuenire altitudinem eiusdem aquę in secunda sectione.

Sit

Sit sectio canalis horizontalis CE, cuius latitudo DE, altitudo DC; sitque data GH latitudo alterius sectionis in eodem, vel eiusdem generis Canale; opportet inuenire altitudinem, quam faciet aqua fluens per sectionem CE, in sectione FH. *Fig. 28. & 29.*

Quoniam quantitas aquæ fluentis per vtramque sectionem eadem est; erunt etiam complexus velocitatum vtriusque sectionis inter se æquales. Sit itaque complexus velocitatum sectionis CE, cilindricus CEI; secundæ vero sectionis FH, cilindricus FHK. Et quoniam cilindrici ęquales reciprocant bases & altitudines; erit vt parabola CDI ad parabolam FGK, ita GH ad DE; sed proportio GH, ad DE est data, ergo etiam proportio parabolæ CDI ad parabolam FGK data erit; secetur ergo parabola CDI, ita vt parabola CDI, (quæ data est, quoniam data altitudo CD) ad parabolam CLM eandem habeat rationem, quam parabola CDI ad parabolam FGK; sitque semiordinata secans, recta LM; erit ergo parabola CLM eadem, ac parabola FGK, & consequenter CL erit æqualis FG altitudini quæsitæ. Quod &c. *Caual. Geom. lib. 2. prop. 34. corol. 4.*

COROLLARIVM.

ET quoniam datur proportio CD, ad CL; dabitur etiã eius subduplicata DI ad GK, idest proportio velocitatum maximarum, vel mediarum.

COROL. II.

EX progressu huius demonstrationis constat, quòd si, loco latitudinis GH in secunda sectione, daretur altitudo FG; posset inueniri tam proportio velocitatum, quàm latitudo secundæ sectionis; data enim proportione altitudinum, datur proportio velocitatum, quæ si lineis experimãtur

tur vt DI; GH ex multiplicatione 2 tertiarũ vtriusque cum sua altitudine, seu axe, habebitur mensura vtriusque parabolæ; quare & dabitur proportio parabolæ FGK ad parabolam CDI, sed vt parabola FGK ad parabolam CDI, ita DE latitudo primæ sectionis ad GH latitudinem secundæ; est autem DE data; ergo etiam GH data erit.

COROL. III.

SImiliter, si loco latitudinis, vel altitudinis secundæ sectionis, detur proportio velocitatum mediarum, vel maximarum vtriusque sectionis inter se; dabuntur, & altitudo, & latitudo secundæ sectionis. Si enim fiat, vt quadratum velocitatis primæ sectionis ad quadratum velocitatis secundæ, ita CD altitudo primæ sectionis ad FG; hæc erit altitudo secundæ, qua cognita, per corollarium antecedens, manifestabitur latitudo.

COROL. IV.

EX contextu demonstrationis apparet, quòd cum parabola CDI ad parabolam FGK habeat rationem reciprocam latitudinum GH, DE; sit autem proportio parabolarum CDI, FGK triplicata eius, quam habet DI ad GK; sequitur latitudines esse in proportione reciproca triplicata velocitatum; & consequenter velocitates medias diuersarum sectionum eiusdem canalis horizontalis, esse inter se in proportione reciproca subtriplicata latitudinum, siue, vt radices cubicæ latitudinum reciprocè.

PROP. VIII.

DAtis duobus canalibus horizontalibus notæ altitudinis, & latitudinis, quorum vnus influat in alium, inuenire altitudinem, quam addet canale influens, primæ altitudini alterius.

Sit sectio Canalis influentis AC notæ altitudinis viuæ AB, & latitudinis BC; sectio verò secundi recipiẽtis sit DE, cuius altitudo viua cognita sit DF, eiusquè latitudo FE, oportet inuenire altitudinem, quam addet aqua sectionis AC, altitudini sectionis DE; si vtraque aqua simul fluat per sectionem HE. Fig. 30.

Inter AB, DF inueniatur media proportionalis G; eritque, per corollarium 5 prop. 5, proportio aquæ AC ad aquam DE composita ex triplicata eius, quam habet AB ad G, & eius, quam habet BC ad FE; nota ergo erit proportio aquarum AC, DE; quare si aqua AC intelligatur addita aquæ DE; ita vt simul sectionem efficiant HE; erit nota proportio aquæ HE, ad DE. Itaque, cum quantitates aquę sint inter se in proportione triplicata velocitatum mediarum; erunt velocitates mediæ inter se in proportione subtriplicata quantitatum aquarum, siue vt radices cubicæ earumdem quantitatum. Sint igitur huiusmodi radices cubicæ KM; ergo vt M ad K, ita velocitas media aquæ DE ad velocitatem mediam aquæ HE; sed velocitates mediæ inter se sunt in proportione altitudinum subduplicata, & altitudines inter se in proportione duplicata velocitatum; ergo si tertia addatur proportionalis N; erit proportio M ad N, siue proportio quadrati M ad quadratum K ea, quam habebit altitudo FD ad altitudinem FH; ideoque erit excessus DH augmentum altitudinis quæsitum. Quod &c.

SCHOLIVM.

ALtitudo HD intelligitur pro excessu secundę altitudinis FH supra primam FD, ante ingressum aquæ AC; non verò pro altitudine, sub qua fluit aqua AC in sectio-

ctione HE; huius enim inueniendæ methodus alia est.

COROLLARIVM.

EX serie inuentionis excessus HD, liquet methodus inueniendi conuersum problematis, videlicet; Data altitudine viua, quam facit aqua influens canalis horizontalis in alium canalem horizontalem notæ altitudinis, & latitudinis, inuenire proportionem aquę influentis ad aquam canalis, in quem influit.

COROL. II.

ET, si canalis influentis vlterius nota sit latitudo, inuenietur eiusdem altitudo viua, & si altitudo nota fuerit inuenietur latitudo.

COROL. III.

QVod de augmento altitudinis dictum est, valet etiam de decremento, mediante exitu aquæ, vel efluxu a canale horizontali; hinc data proportione aquæ efluentis ad residuam, dabitur decrementum altitudinis, & dato decremento altitudinis, dabitur proportio aquę efluentis ad residuam; hinc si aqua efluens notæ fuerit quãtitatis, pariter nota erit quantitas residuæ, & vtriusque simul.

COROL. IV.

SImiliter, quod dictum est de influxu, & efluxu aquæ per alios canales horizontales, valet etiam de augmento canalis quomodocumque facto, vel per pluuias, vel per maiorem fontium, lacuum &c. turgentiam, vt per se patet.

Se-

PROP. IX.

SEctionem quamcumque canalis horizontalis, ita diuidere, vt partes aquam profundant in data ratione. *Fig. 31.*

Sit sectio AD, cuius altitudo AB: oportet eam diuidere v.g. in tres partes AH, EI, FD; ita vt aqua per AH ad aquam per EI habeat rationem, quam habet L ad M; aqua verò per EI ad aquam per FD sit, vt O ad P.

Fiat, vt O ad P, ita M ad N, & intelligatur L aqua trãsiens per AH; erit ergo M aqua transiens per EI, & N trãsiens per FD; ideoque tota LN erit aqua transiens per integram sectionem AD. Deinde axi AB describatur parabola BAK; & diuidatur, per corollarium secundum prop. 6, in partes habentes proportionem, quam habet L ad M, & M ad N, sintque AEG, EFXG, FBKX; sitque diuisio facta per semiordinatas EG, FX, quæ occurrant axi AB in punctis E, F, per quæ ducantur EH, FI parallelæ vtlibet linearum AC, BD. Dico, aquam per AH ad aquam per EI, habere eam proportionem, quam L ad M; aquam vero per EI ad aquam per FD habere eam proportionem, quam habet M ad N, siue O ad P.

Quoniam enim AEG, EFXG, FBKX sunt complexus velocitatum aquarum fluentium per partes perpendicularis AE, EF, FB; erunt per constructionem complexus velocitatum segmentorum AE, EF, FB inter se, vt L, M, N, sed in sectionibus æqualis latitudinis complexus velocitatum inter se sunt, vt quantitates aquarum; est vero eadem, vel æqualis latitudo sectionum AH, EI, FD; ergo quantitates aquarũ per AH, EI, BD erunt inter se, vt L, M, N. Quod &c. *Prop. vltim. 1. huius.*

Ex

COROLLARIVM.

EX hac propositione constat, quòd si detur proportio aquæ canalis influentis ad aquam canalis recipientis, de quibus prop. 8; poterit inueniri altitudo, sub qua fluit aqua canalis influentis, vel alia ipsi mole æqualis in superiori parte sectionis, de qua in scholio propositionis 8. Si enim diuidatur parabola iuxta proportionem aquæ influẽtis ad aquam canalis recipientis; erit axis parabolæ abscisæ ad verticem, v.g. AE altitudo quæsita; hæc autem necessariò, in canalibus horizontalibus semper maior est excessu altitudinis auctæ supra primam; eo quòd, aucta altitudine, augetur etiam velocitas aquæ inter E, & B, & altitudo minuitur in proportione velocitatis auctę, decrementum verò primæ altitudinis reparatur ab altitudine AE, quæ quia semper eo maior est; efficit excessum, de quo propositione 8. Vide notata ad propositionem 10 libri primi.

PROP. X.

DAta perpendiculari, siue altitudine viua alicuius sectionis, & latitudine eiusdem in canale horizontali; inuenire quantitatem aquæ absolutam, & determinatam transeuntem dato tempore per datam sectionem.

Fig. 24. Sit data altitudo viua AB in aliqua sectione canalis horizontalis: opportet inuenire quantitatem aquę absolutã, idest in mensura determinata fluentem, dato tempore, per sectionem, cuius est perpendicularis AB.

Inueniatur, per prop. 3. huius libri, in AC centrum velocitatis mediæ, quod sit C; erit ergo AC 4 nonę partes totius AB; & quoniam tota AB v.g. pedum 9 est data, etiam AC data erit pedum 4. Per propositionem igitur 10 libri 2, siue per tabulam suo loco exhibendam, cum ad exquisitam trutinam

tinam ẽam redegerimus, inueniatur spatium debitum velocitati aquæ sub altitudine AC; quæ supponatur esse v. g. pedes 120 in vno minuto; erit ergo CE pedes 120, quæ, si multiplicetur per totam AB pedes 9, productum 1080 erit mensura parabolæ BAD, siue rectanguli sub BA, CE contenti, quod si denuo multiplicetur per latitudinem sectionis, v. g. pedum 10, solidum indè consurgens 10800 erit quantitas aquæ fluentis vno minuto per datam sectionem in pedibus cubicis. Idem euenit, si area sectionis multiplicetur per spatium debitum velocitati. Constat autem ex dictis hanc esse veram mensurã; quia si omnes partes aquæ existentes in sectione, vel perpendiculari AB, ferrentur velocitate CE apta percurrere vno minuto pedes 120; consurgeret indè prisma rectum, cuius basis sectio data, & longitudo pedes 120. huius autem prismatis soliditas habetur per multiplicationem ad inuicem trium dimensionum. Quare &c.

COROLLARIVM.

ET quoniam, per propositionem 5. datur proportio aquarum fluentium per datas sectiones canaliu m horizontalium; sequitur, quòd si mensura aquæ sit exactè determinata in vna sectione, quod etiam experimento particulari sæpiùs repetito haberi potest; sequitur inquam, quòd in altera quacumque sectione, haberi possit præcisè determinata: vt si supponatur quantitas aquæ fluens vno minuto temporis per sectionem, cuius AB est perpendicularis, esse 10800 pedes cubicos; sitque proportio cubi aquæ in hac sectione ad cubum aquæ in altera sectione, vt 1 ad 27; fiet per regulam auream, vt 1 ad 27, ita 10800 ad 291600; eritque hic numerus pedum cubicorum fluentium vnico minuto temporis per secundam sectionem.

Finis Libri Tertij.

TABVLA Spatiorum Velocitati debitorum, de qua mentio habetur superioribus paginis 58. & 59. apposita est inferiùs ad calcem Libri Sexti pag. 137.

LIBER QVARTVS.

In quo agitur De mensura Aquarum fluentium in Canalibus inclinatis vnitis quomodocunque.

AXIOMA.

AQua nequit in suo fluxu, præcisa violentia, maiorem velocitatem habere ea, qua potiretur, si tantundem descendisset liberè per lineam perpendicularem, omni seposito impedimento.

Hæc propositio extra dubium est, cum velocitas fluxus pendeat à grauitate aquæ, & hæc suam maximam energiam exerat in linea tendente ad centrum grauium, idest perpendiculari; ideoque iure tanquam axioma potest vsurpari.

DEFINITIONES.

I. VElocitas integra aquæ fluentis illa est, quam haberet aqua in aliquo puncto canalis, vel perpendicularis &c. si eò vsque descendisset ab initio canalis sine vlla resistentia.

II. Velocitas retardata, siue residua illa est, quam habet realiter aqua in descensu, quando est minor velocitate integra, siue est velocitas integra multata ea velocitate, quã aquæ fluenti detrahunt impedimenta in descensu.

III. Velocitas deperdita est differentia inter velocitatem integram, & retardatam; siue ea portio velocitatis, quam aquæ fluenti identidem detrahunt impedimenta.

IV. Ex inæqualibus trium dictarum specierum velocitã-

tibus in perpendiculari aliqua sectionis, vel sectione ipsa, potest media velocitas componi iuxta sensum definitionis septimæ lib. primi, & dicetur media velocitas integra, media velocitas retardata, media velocitas deperdita perpendicularis, vel sectionis.

V. Perpendicularis horizonti alicuius sectionis est recta linea horizontali perpendicularis, ducta à fundo sectionis.

VI. Perpendicularis sectionis est linea ducta in plano sectionis fundo perpendicularis; quæ, si ad superficiem aquæ terminet, aliàs dicta est altitudo aquæ.

Fig. 39. VII. Prima sectio alicuius canalis est illa, quæ ante alias recipit aquam totam, quæ per canale fluere debet; siue illa, quæ cæteris omnibus in eodem alueo possibilibus altior est, per quam æqualis aquæ quantitas fluit, ac in sectionibus inferioribus. Vt si SOBA supponatur reseruatorium aliquod, vel stagnum, in quo aqua sit ad horizontalem SA æquilibrata; BE verò canalis, per quem aqua debet fluere; erit S initium canalis iuxta sensum quartæ definitionis secundi libri, & B sectio prima, quia per ipsam primò in canali SBE tota aqua, quæ à reseruatorio ex hauritur, transit; aliæ vero infra B dicantur sectiones secundæ, vel inferiores, quæ ab inuicem discriminantur pro diuersa ab initio Canalis S distantia. Sic BA dicitur perpendicularis horizonti sectionis B, & BC perpendicularis sectionis producta; & supposito, quòd M sit superficies aquæ in sectione B, vocamus BM perpendicularem sectionis simpliciter, vel altitudinem aquæ in sectione.

PROPOSITIO I.

IN Canalibus inclinatis liberè fluentibus, in quibus integra sit velocitas descensus, altitudo aquæ non auget velocitatem.

Sit canalis inclinatus AD, cuius initium A, & sectionis alti-

altitudo DE, cuius velocitas sit integra, & ex D erigatur DF perpendicularis horizontali sectionis CD, & terminata ad aquæ superficiem. Dico altitudinem DF non augere velocitatem perpendicularis, vel sectionis DE. Fig. 33.

Ducatur.n. per A linea AC perpendicularis horizontali CD; & sumptis in DE quibuslibet punctis v. g. H &c, per H ducatur HI parallela CD, & HG parallela DF, & terminata in G ad aquæ superficiem.

Quoniam enim, ex suppositione, Aquæ D velocitas est integra; eadem erit velocitas in D, ac in C: itaque si FD altitudo augeret velocitatem D esset velocitas in D maior velocitate in C; quare Aqua D velociùs flueret per planum inclinatum AD, quam per perpendicularem AC, eodem existente descensu AC. Similiter, si altitudo GH augeret velocitatem H, esset velocitas in H maior velocitate in I; & consequenter Aqua H velocius flueret, quàm si descendisset per AI: Eadem est ratio de omnibus partibus aquæ in perpendiculari DE; ergo tota aqua DE velociùs flueret per planum inclinatum AD, quam per perpendicularem AC, quod est impossibile per axioma huius libri; non ergo perpendiculares FD, GH &c. augent velocitatem. Quod &c. *Torricel. de mot. gran. prop. 5.*

COROLLARIVM.

QVoniam itaque nulla perpendicularis, siue altitudo FD minor altitudine AC auget velocitatem D, sequitur aquæ superincumbentis pressionem non agere in velocitatem, quando velocitas inferioris aliunde maior est, quàm imprimere possit pressio superioris.

COROLL. II.

SI verò altitudo FD æqualis esset AC, siue pressio agat cessante velocitate acquisita per AD, siue non (eadem

dem velocitate, & ab eadem causa remanente) sequitur velocitatem puncti D in hoc casu indistinctè desum posse, vel ab altitudine FD, vel a descensu per AD iuxta perpendicularem AC.

COROLL. III.

AT, si FD altitudo superaret perpendicularem AC, in hoc casu, quoniam aquæ superficies se se equilibrat ad lineam horizontalem, eleuabitur proportionabiliter initium canalis A, v. g. in L, & velocitas mensuranda erit à descensu per LD.

COROLL. IV.

ET ideo altitudo v.g. MD, poterit augere velocitatem D, si ea priùs tanta fuerit, quanta solummodo debetur descensui per AD; nam siue augeatur per maiorem descensum LD, vel LO, siue per altitudinem MD; perinde est, cum MD, LO sint æquales.

COROLL. V.

GEneraliter ergo altitudo aquæ in aliqua sectione non addit velocitatem partibus inferioribus, nisi earum velocitas minor sit ea, quàm potest imprimere altitudo aquæ supra fundum sectionis.

SCHOLIVM.

ATque hinc colligitur ratio, cur aquæ in canalibus horizōtalibus fluāt sola velocitate à pressione; in canalibus verò perpēdicularibus, & inclinatis sola velocitate, quæ prouenit ab inclinatione aluei; quia v. in illis aqua inferior in se-

sectione, nulla est affecta velocitate, & consequenter minori ea, quàm ipsi conciliare potest altitudo prementis aquæ; in his verò aqua inferior, quantum est ex natura rei, maiori velocitate fluit, quàm possit indere altitudo; & in hoc casu altitudo pendet a conditione velocitatis, non velocitas à quantitate altitudinis, vt in horizontalibus. Similis est ratio in fontibus, in quibus sectiones verticales salientium, & earum altitudines horizonti perpendiculares non influunt in velocitatem, siue sint horizontales salientes, siue quomodolibet inclinatę.

PROP. II.

IIsdem positis, si sectio vel tantillum superiùs obstruatur, aquæ altitudo in perpendiculari sectionis tantum crescet, vt vel superet impedimentum, & supra ipsum effluat, vel superet horizontalem ductam per initium aluei.

In canale enim inclinato AD, altitudo sectionis DE superiùs obstruatur, sitque obstructio HE, & continuetur impedimentum obstruens vsque in Q infra horizontalem AN. Dico, fore vt aqua excrescat vsque ad horizontalem KQ; donec possit fluere supra impedimentum HQ; si vero hoc ipsum impedimentum superiùs extendatur, ita vt omnem altitudinem auctam possit continere. Dico aquam tantum ascēsuram, vt superet horizontalē per initiū aluei, videlicet AN.

Diminuta enim altitudine sectionis DE; & consequenter sectione propter obstructionem HE, impossibile est, vt eadem quantitas aquæ fluat per sectionem DH, quæ antea fluebat per DE eadem velocitate; etenim, vt eadem quantitas aquæ vtrobique fluat, opportet, vt velocitates sint reciprocæ sectionibus; aliqua ergo portio remorabitur; & quoniam singulis temporibus aliæ similes portiones remorantur; hæ non solum stagnabunt supra EQ, sed propter continuum augmentum augebunt & altitudinem. Prop. 3. huius.

Sup-

Supponatur igitur aucta altitudo vsque ad KQ horizontalem: Itaque, quonian KQ est infra horizontalem AN, erit perpendicularis A C maior, quàm K C; quare descensus A C maiorem imprimet velocitatem, quàm possit pressio KC; ergo altitudo KC, vel SD non augebit velocitatem in sectione DH; & consequenter per altitudinem DS non augebitur effluxus aquæ; tota ergo quantitas aquæ, quæ post acquisitam altitudinem DS remorabitur, necesse erit, vt supra impedimentum HQ effluat. Eodem modo ostendetur altitudinem DB non augere velocitatem sectionis DH. Quare, vt altitudo possit augere velocitatem sectionis DH, necesse erit, vt supra horizontalem AN ascendat. Quod &c.

Corol. 5. prop. 1. huius.

SCHOLIVM.

PRopositionis huius veritatem, quam, vt paradoxum quoddam Amici plures, & sane docti suspiciebant vulgari præiudicio detenti, quo velocitates ab altitudine aquæ semper, saltem partialiter, pendere pro indubio habebant; dum experimento comprobarem ijsdem præsentibus nonnulla Phœnomena notatu digna obseruata fuerunt, quæ huc afferre non incongruum censeo.

Fieri curaueram ex ferrea lamella Vas parallelepipedum AB, in cuius parte anteriore emissarium apertum fuerat LS; illique aptatus eiusdem materiæ canalis versatilis circa FG, ita vt diuersæ eius haberi possent inclinationes, quem exprimimus hic per vnicam lineam SP orthographica sectione ad confusionem linearum vitandam, cuius laterales spondæ LSPM adeo erant altæ, vt impedirent, ne supra eas aqua efflueret. In medio huius canalis suis cursoribus cataracta aptata fuit MR; quæ pro libito attolli posset, & demitti.

Fig. 34.

Itaque inclinato canale v.g. in PS & rimis optimè cera-

clau-

clausis, aqua in vas immissa est per syphones recuruos eam exhauriẽtes vniformiter ab alio vase, lacu videlicet, sẽper aqua pleno, vt æqualis perpetuò esset equalibus tẽporibus aquæ per syphones haustus; & equalis itidẽ fluxus per canalem. Hæc itaque fluere cępit efficiens superficem, vel lineam IXNQ, & in sectione O altitudinem ON, qua sic manente cataracta demissa fuit, ita vt superficiei aquæ præcisè congrueret; atque his sic se habentibus nulla apparuit variatio sed nutatis circumstantijs, sequentia se se prodiderunt phęnomena.

I. Demissa cataracta infra aquæ superficiem v. g. vsque in R, aqua inter I, & N immmediatè cępit eleuari ferè vsque ad horizontalem HIB; non tamen eã præcise attigit, ita tamen, vt quater, & quinquies altitudinem residuæ portionis OR superaret.

II. Eleuatio aquæ fieri cępta est cum tumultu, & agitatione aquæ, vt veluti efferuesceret, ita vt pars aquæ per RO fluens velocitatem pristinam ex parte ammiserit, & cęperit lentiùs fluere, quod apertissimè ex diminuta amplitudine cadentis, siue salientis deorsum inclinatæ dignosci potuit; ex quo facile fuit deducere, velocitatem aquæ per descensum acquisitam ab inconditis motibus aliunde deriuatis, vti ab impedimentis, reflexionibus, vorticibus &c. alterationem, & diminutionem considerabilem pati.

III. Eleuata aqua vsque ad horizontalem DXC terminum eleuationis, hic quieuit; & cum crescente antea eleuatione sensim cessaret tumultus, amplitudo cadentis identidem maior fieri cępit, ita vt pristina primò reassumeretur, & deinde maior etiam acquireretur.

IV. Ijsdem sic manentibus, & aqua vnius syphonis addita, superficies denuo eleuata est adhuc magis vsque ad alium terminum superiorem, ijsdem rursus obseruatis, quæ phœnomeno secundo, & tertio.

V. Eleuata denuo cataracta, ita vt aqua retẽta efflueret; & re-

restituta aqua ad suam naturalem superficiem IGNQ, denuo cataracta demissa est, & ad congruentiam ipsius applicata; quibus peractis, addita aqua alterius syphonis in vase AF, eadem, quæ supra obseruata sunt, cum demissa fuerat cataracta infra aquæ superficiem.

VI. Hæc omnia proportionabiliter depræhensa sunt (remoto syphone antea addito, & eleuata cataracta, rursusque demissa vt antea) per solam additionem paruissimæ quantitatis aquæ v.g. vncię vnius, vel duarũ, immò solum tantæ quanta continetur à cocleari, quæ immittebatur imediatè supra sectionem OR.

VII. Immo idipsum contingebat absque vlla aquæ additione; sed per solam retardationem velocitatis aquæ inter SO, factam, vel digito, vel bacillo infra aquam demisso, vel etiam solo reflatu.

SCHOL. II.

IN hisce experimentis obseruandum est, quòd phœnomena sextum, & septimum eandem causam recognoscunt; etenim aquæ additio, quatenus importat certum aquæ additamentum non continuatum, tantum augere debuisset aquæ superficiem, quantum ipsius moles exigit, minimum videlicet; sed quia in additione aquæ, præsertim cũ impetu facta, vt cum aqua ex alto immittitur, fluxus velocitas retardatur, & semper magis ex turbatione inducta; hinc augmentum altitudinis insigne factum est eodem pacto, quo in phœnomeno septimo retardationi factæ digito, eleuatio superficiei successit.

SCHOL. III.

QVod autẽ in exposito experimento, phœnomeno primo, Aqua nõ superauerit horizontalem HB, vt ex natura

tura rei fieri debuit per demonstrata in superiori propositione; id ortum habuit, quia aquæ velocitas non integra fuit, quantam videl. descensus perpendicularis per TO, VR exigebat; sed retardata, ex resistentia nempe facta à confrictione fundi, & spondarum; id quod nullo artificio omnimodè potest auerti, & in canalibus inclinatis summum negotium facessit.

Huius tamen impedimenti, vel potius velocitatis retardatæ proportionem ad integram velocitatem inueniendi methodum, vel ex hoc ipso experimento inferiùs prop. 10. lib. 5. exponemus.

PROP. III.

IIsdem positis, & aucta aquæ altitudine, ita vt tandem in eodem statu semper permaneat. Dico, per minorem sectionem HD, eandem fluere aquæ quantitatem, quæ priùs fluebat per integram sectionem DE. *Fig. 33.*

Aucta enim aquæ altitudine vsque ad ML supra horizontalem AN, quoniam per canalem AD eadem fluit aquę quantitas, quæ priùs; si maior esset aquæ quãtitas fluens per sectionem DH ea, quæ fluebat antea per sectionẽ DE; maior aquæ quantitas exhauriretur, quàm subministraretur à canale; ergo horizontalis ML descenderet, quod est contra suppositum; si vero minor esset aquæ quantitas fluens per minorem sectionem DH ea, quæ fluxerat per maiorem; remorata aliqua aquæ portione, superficies ML adhuc attolleretur, quod pariter est contra suppositum; ergo si neq; maior, neque minor; eadem quantitas aquæ fluet per sectionem HD, ac ea, quæ fluxerat per sectionem DE. Quod &c.

In

PROP. IV.

IN canale inclinato, si aqua fluat faciens in sectione data determinatam altitudinem, supra quam superiùs obstruatur sectio indefinitè, & spondæ canalis adeo sint altæ, vt omnem aquæ altitudinem continere possint, & intelligatur retardata aquæ velocitas; eleuabitur aquæ superficies, donec in eadem sit linea horizontali cum initio aluei.

In canale inclinato AD fluat aqua faciens in sectione D altitudinem DE, & ab E intelligatur superiùs continuatum obstruens impedimentum EP, & reliqua, quæ in propositione; & supponatur post obstructionē retardata velocitas; ita vt per sectionē DE aqua non possit ampliùs fluere pristina velocitate. Dico Aquæ supeficiem adeo se eleuaturam, vt horizontalem AN per initium aluei attingat; dummodo tamen velocitas pristina integra fuisse supponatur. *Fig. 33.*

Cum enim retardata sit velocitas in sectione DE; non tantum aquæ imposterum fluet per DE, quantū priùs fluebat; quarè portio aliqua remorabitur inter A, & EP singulis temporibus; ergo ex continuatè retentis singulis aquæ portionibus attolletur semper magis, & magis aquæ superficies, donec altitudo eius supra lumen, siue sectionem DE talis euadat, vt amissam velocitatē possit restituere; sed sola eleuatio vsque ad horizontalem AN velocitatem pristinam restituere potest; etenim pristina velocitas, quoniam integra, illa erat quæ perpendicularibus BD, NH conuenit, & eadem est, quæ ab eleuatione superficiei in AN, sectioni DE imprimitur; ergo aqua eleuabitur vsque ad horizontalem AN per initium aluei; neque magis eleuabitur, nam augeret velocitatem in sectione, & consequenter maior aquæ quantitas transmitteretur per sectionem DE, quam suggerat Canalis AD; & superficies denuo deprimeretur ad

ad horizontalem AN. Neque in minori eleuatione consistet; etenim minor altitudo non restituit velocitatem debitam maiori descensui. Quod &c. *Coroll. 5 prop. 1.*

COROL.

CONstat hinc, quòd si retardatio cessaret, antequam facta esset eleuatio vsque ad horizontalem per initium aluei; cessaturam etiam eleuationem, quæ in eo statu consisteret; quare, vt vera sit propositio, opportet, vt retardatio duret saltem vsque ad eleuationem prædictam.

PROP. V.

IIs, quæ in propositione secūda positis. Dico velocitates inter D, & H ita inuicem proportionari, vt punctum D velocitatem habeat eam, quam ipsi tribuit altitudo DM; punctum vero H eam, quam altitudo HR, adeo vt complexus velocitatum inter D, & H sit in spatio parabolico, cuius vertex P. *Fig. 33.*

Etenim velocitas in D maior esse nequit ea, quam tribuit altitudo MD, cū nulla sit causa huius maioris velocitatis; non enim acceleratio per canalem AD, aut potiùs LD, plus potest tribuere, vt de se patet. Similiter neque minor esse potest, nam pressio MD non permittit hanc minorem velocitatem; si ergo neque maior, neque minor est velocitas in D ea, quam tribuit altitudo MD; æqualem esse necesse est. Similiter ostendetur velocitatem H eam esse, quam imprimit altitudo RH; & idipsum ostendetur de alijs velocitatibus inter D, & H respectu suarum perpendicularium vsque ad superficiem aquæ LP. Inuenta ergo parabola, quæ harū velocitatū sit mensura videl. PTV, ducātur DV, HT semiordinatæ; Fietque spatium parabolicum DHTV, quod erit complexus velocitatum perpendicularis DH. Quod &c. *prop. 5. 11 huius. Coroll. prop. 5 huius.*

SCHOL. I.

IDem oſtendi poteſt, licèt non obſtructa ſit ſectio, ſed ſolum retardata velocitas iuxta data prop. quartę; eadē enim eſt demonſtratio.

SCHOL. II.

QVoniam per eleuationem ſuperficiei LP augetur etiā longitudo canalis, producto ſuperiùs initio in L iuxta ſenſum def. quartę ſecundi libri; conſtat altitudinem MD, & deſcenſum per LAD eoſdem velocitatis gradus ſectioni D imprimere, & vlteriùs Canalem fieri tanquam vas clauſum LADEP, cuius lumen ſit DH; eique aquam ſic ſubminiſtrari, vt eandem ſemper ſeruet ſuperficiem LP; quare etiam ex hoc capite colligitur, velocitates D, & H proportionari inter ſe, ita vt ſint in ſpatio parabolico prædicto per demonſtrata in ſecundo libro.

COROL.

DVcta ergo per X parabola DXY, eiuſque ſemiordinatis DY, E &, erit ſpatium parabolicū DE & Y cōplexus velocitatum perpendicularis DE, æquale ſpatio parabolico DHTV complexui velocitatum perpēdicularis DH; quoniam cum quantitates aquæ ſint æquales, & complexus velocitatum æquales erunt.

prop. 3. huius
prop. 13. 1. huius.

COROL. II.

ITaque ſi fiant ſuper DE, DH rectangula æqualia ſpatijs parabolicis; erunt reliqua latera, ſiue eorum altitudines, velocitates mediæ, & inuento centro velocitatis perpendicularis ED v. g. H, fiat, vt quadratum velocitatis mediæ perpendicularis DH ad quadratum velocitaris mediæ perpendicularis DE; ita XH ad P 2; erit 2. centrum velocitatis perpendicularis DH; quoniam cum velocitates mediæ ſint ad parabolicas lineas parallelas, ſiue æquales; erunt axes inter ſe in proportione duplicata maximarum ordinatarum.

prop. 7. 11 huius
prop. 8. eiusdem.

prop. 4. 11. huius.

SCHOL. III.

QVoniam inuentio centri velocitatis requirit cognitā altitudinem axis DX; vt in prop. 8. ſecundi libri; quadratura enim ſpatij parabolici hanc poſcit, vt in prop. 7. eiuſdem; & vlterius altitudo axis, vt cognoſcatur methodo, qua in prop. 6. eiuſdem, exigit proportionem ſemiordinatarum maximæ, & minimæ; ſiuè in noſtro caſu velocitatis ſuperficiei, & fundi, quæ, ſi experimento v. g. pendulo exploretur, certa non eſt, cum poſſint eſſe retardatæ velocitates, & conſequenter turbata earundem proportio abſtracta deſcenſui debita; dubium poſſet inſurgere in caſu corollarij præcedentis, an centrum velocitatis rectè fuerit adinuentum; adhuc tamen, quia velocitatum ratio alia via poteſt inueniri, puta ex longitudine canalis, & angulo inclinationis, & vlteriùs per libellationes diligenter factas, inſtrumento præſertim Clariſſimi Montanarij fæ. re. Præceptoris olim mei, quibus mediantibus poteſt haberi diſtantia lineæ horizontalis per initium aluei a fundo ſectionis puta BD; & exinde DX; ſtabit centri velocitatis inuentio, & reliqua inde deducta in corollario præcedenti.

COROL. III.

QVare, ſi notus ſit angulus inclinationis canalis, cui æqualis eſt angulus BDX; vel 32 P; quoniam eſt notus

tus angulus P 32 rectus, & latus P 2; innotescet & Trigonometricè perpendicularis 32; altitudo scilicet aquæ supra centrum velocitatis perpendicularis DH.

PROP. VI.

SI in reseruatorio aqua subministretur beneficio canalis influentis perpendicularis, sitque quantitas influens maior quantitate, quæ potest effluere per datam sectionem, vel lumen, ea velocitate, quæ debetur casui ab initio canalis influentis vsque ad lumen; aqua tantùm ascendet in reseruatorio, vt superet sublimitatem canalis influentis.

Sit reseruatorium CBD, & cadens perpendicularis in ipsum influens AB, cuius initium A; sit verò velocitas cadentis in B integra; sitque lumen B non aptum emittere totam aquam cadentis AB. Dico aquam intra reseruatorium se se eleuaturam supra A initium cadentis. Fig. 35.

Continuetur enim reseruatorium vsque ad sublimitatem canalis influentis; & quoniam in hoc statu altitudo reseruatorij non potest tribuere, nisi tantam velocitatem, quanta debetur descensui perpendiculari AR; & velocitas, quæ huic debetur idest integra, nõ tanta est, vt possit aqua tota effluere per lumen B; portio aliqua remorabitur, & adhuc eleuabitur Aqua, ergo vel supra latera reseruatorij effluet, vel, eo adhuc continuato, tantam altitudinem acquiret, vt possit vrgere totam aquam per B exigita velocitate; idest altiùs ascendet, quam A. Quod &c.

COROL.

HInc sequitur, quòd si proportionatum fuerit lumen B velocitati B integræ; idest si lumen B ad sectionem cadentis in M reciprocè se habeat sicut velocitas M ad velocitatem B fore, vt nulla aquæ portio remoretur in re-

seruatorio, sed totam effluxuram. Idem erit si maior fuerit proportio luminis ad sectionem, quàm velocitatum reciprocè. E contra vero, si maior sit ratio velocitatis M ad velocitatem B, quàm luminis B ad sectionem M, qui est casus propositionis nuper demonstratæ.

SCHOL. I.

VElocitas M, & sectio M in hoc corollario, non possunt intelligi in principio canalis, sed infra ipsum; nam in principio velocitas nulla est; sectio verò infinita; etenim velocitatis B quantæ ad velocitatem A nullam, debet esse eadem proportio, ac sectionis A ad sectionem B. quanti autem ad nihil infinita est proportio; ergo & sectionis A ad sectionem B infinita debet esse proportio; qualis intercedit inter sectionem A infinitam, & sectionem B finitam.

COROL. II.

IN hoc itaque sensu; quoniam velocitas M ad velocitatem B maiorem habet proportionem, quàm lumen B ad sectionem M; fiat vt lumen B ad sectionem M ita velocitas M ad aliam velocitatem F; & vt quadratum velocitatis M. ad quadratum velocitatem inuentæ F ita fiat AM ad GR; eritque GR altitudo, ad quam excrescet aqua in reseruatorio, in casu huius vltimæ propositionis, & maior, quam AR, vt facilè ex hucusque demonstratis ostendi potest.

COROL. III.

SI velocitas canalis influentis fuerit retardata, manente lumine proportionato integræ velocitati; aqua ascendet in reseruatorio vsque ad initium canalis A; eo enim vsque

que aſcendens Aqua reſtituet integram velocitatem; ideoque per ipſum tota aqua effluet.

COROL. IV.

SI verò lumen ſit proportionatum alicui velocitati retardatæ; & adhuc aqua tota non effluat; euidens eſt velocitatem eſſe magis retardatam, quam ferat ratio reciproca luminum, & velocitatum; ideſt lumen eſſe minus, quàm exigat data velocitas aquæ retardata; quare aqua eleuabitur in reſeruatorio v.g. vſq; ad horizontalem CD, ita vt altitudo RE reſtituat eam velocitatem, quæ eſt proportionata lumini.

COROL. V.

ATque hinc conſtat altitudinem ER ſuperficiei aquæ CD, maiorem addere velocitatem lumini B, quàm totus caſus AB, quoties retardata eſt velocitas.

COROL. VI.

ET vlteriùs impetum cadentis perpendicularis, in reſeruatorio non eſſe attendendum, ſiue non influere in velocitatem luminum, quoties ſuperficies aquæ eſt manens; niſi quatenus aliquando ſus, deque tantillum ex impetu cadentis oſcillat aquæ ſuperficies; ſed ſolam altitudinem ſuperficiei aquæ ſupra centra velocitatis luminum conſiderandam eſſe.

COROL. VII.

QVidquid hucuſque oſtenſum eſt ſuppoſita cadente perpendiculari; oſtendetur eodem modo ſuppoſita cadente inclinata.

CO-

COROL. VIII.

ITaque in Figura, & datis propoſitionis ſequentis; quoniã propter auguſtiam ſectionis DH aqua nequit effluere priſtina velocitate, & aqua retenta ſe ſe æquilibrat ad ſuperficiem manentem AX; altitudo BD imprimet velocitatem in 2 (ſupponatur 2 centrum velocitatis) maiorem, quàm antea fuerit per deſcenſum AD; & conſequenter velocitas 2 facta ab altitudine 23, non erit retardata ob contactum, & confrictionem aluei ab A in D. Fig. 33.

COROL. IX.

ET ſi horizontalis AX adæquauerit initium aluei præcisè; erit altitudo ſectionis DH ea, quam habuiſſet aqua, niſi eius velocitas fuiſſet retardata (quod eſt conuerſum corollarij quarti) ſi vero horizontalis AX ſit infra horizontalem per initium aluei, erit altitudo DH maior ea, quam exigeret velocitas integra; & e contra, ſi ſit AX ſupra horizontalem per initium aluei.

PROP. VII.

SI aquæ fluentis per canale inclinatum fuerit retardata velocitas, efficiens in ſectione datam altitudinem, & ſuperiùs obſtruatur ſectio, ita vt aqua excreſcat ad altitudinem manẽtem; velocitates aquæ diuerſæ ita inter ſe proportionabuntur, vt ſint ad parabolam, cuius vertex punctũ commune perpendicularis ſectionis ſurſum productæ, & ſuperficiei aquæ; axis verò eadem perpendicularis producta.

Sit canalis LD, per quem Aquæ fluentis velocitas retardata efficiat in ſectione D altitudinem DE; cuius pars ſu- Fig. 33.

K pe-

perior EH obstruatur; & crescente aqua sit eius superficies manens AX. Dico, per reliquam sectionem DH aquam sic fluxuram, vt velocitates omnes sint ad parabolam, cuius vertex X; axis verò DX.

Quoniam enim est AX superficies aquæ in eodem statu manens, durante effluxu per sectionem DH; & influxu per canale LA; erit ADX reseruatorium, cuius lumen DH, & superficies aquæ semper in eadem altitudine manens AX durante influxu æquali per LA; sed in reseruatorijs velocitates inter se sunt in subduplicata ratione altitudinum aquę superincumbentis; ergo velocitas in D ad velocitatem in H, est in subduplicata ratione linearum BD, NH; sed vt BD ad NH, ita DP ad PH; ergo velocitas in D ad velocitatem in H, idest DY ad H 4 est in subduplicata ratione linearum DP, PH, & consequenter erunt ad parabolam DXY, cuius vertex X; axis verò DX; & erit spatium parabolicum DH 4 Y complexus velocitatum perpendicularis DH; Eodem enim pacto ostendetur omnes velocitates perpendicularis DH terminare ad segmentum parabolicum Y 4. Quod &c.

prop. prima 11. huius.

SCHOL.

PRopositio sexta eatenus ostensa est, vt auferretur scrupulus, quòd influxus per LA posset augere velocitatem aliquam in sectione DH propter impetum cadentis LA; quod tamen falsum est, tum per ibidem demonstrata; tum etiam ex eo, quòd impetus cadentis, & superficies aquæ inuicem æquilibrantur; hæc vero septima in eum finé hic demonstrata est, quoniam ex ea immediatè pendet aquæ fluentis mensura, quam nunc inquirimus; licèt aliunde posset tamquam corolarium deduci.

CO-

COROLLARIVM.

EX hac igitur propositione colligitur Regula vniuersalis mensurandi aquas omnes fluentes in canalibus, siue horizontalibus, siue inclinatis; siue solitarijs, siue quommodocumque vnitis, etiam habito respectu ad retardationem velocitatis factam à quocumque impedimento vsque ad sectionem; dummodo omnium perpendicularium sectionis, in qua instituenda est mensura, æquales sint, iuxta sensum axiomatis primi huius Tractatus, velocitates maximæ, mediæ, minimæ &c. Quare sit.

REGVLA GENERALIS.
Pro mensurandis Aquis quorumcumque fluminum.

PRimò, vt aquæ velocitas vbique sibi similis sit, eligatur ea fluminis sectio, vt alueus supra, & infra eam, quantùm fieri potest rectus sit, id quod in magnis fluminibus inuentu facile, in paruis verò non difficile factu.

II. Electo situ proportionato fluminis, ad tollendam irregularitatem, si adsit, sectionis naturalis, illi aptetur sectio artificialis, (seu, vt Castellus vocat, Regulator) ex lapide, vel lateribus, vel, quod facilius est, sublicis conflata; cuius basis AB sit exactè horizontalis; latera vero, siue spondæ AC, BD, perpendicularia, & in vno laterum v.g. BD notentur quælibet mensuræ vsuales cognitæ v.g pedes, vlnę &c. & in parte superiori aptetur cataracta EG, quæ ita possit demitti, vt superficies eius inferior EF semper retineatur in situ horizontali; & per hanc sectionem tota fluminis aqua fluere cogatur. *Fig. 36.*

III. Cum flumen in eodem statu permanet, idest cum eius

eius ſuperficies non attollitur,neque deprimitur, demittatur cataracta infra ſuperficiem aquæ. Itaque per propoſitionem ſecundam,& ibidem notata,eleuabitur Aquæ ſuperficies vſque ad terminum ſtabilem, qui ſit ex gr.KL.

IV. Altitudo BK ſuperficiei aquæ ſupra fundum ſectionis artificialis BA obſeruetur in latere BD, quæ, vt plurimùm,non multũ ſuperabit præcedentem aquæ altitudinem, tum propter paruã decliuitatẽ,qua ſolẽt eſſe inclinati fluminũ aluei,angulum inſenſibilem cum horizontali ſæpius efficientes; tum propter retardationem factam à pluribus impedimentis accidentalibus, cuiuſmodi ſunt riparum, & fundi inæqualitas, earumdemque ad inuicem inclinatio, tortuoſitates, & corroſſiones, quæ aluei rectitudinem tollunt; reciproca ſectionum anguſtia, & laxitas &c. quæ omnia maximo ſunt impedimento accelerationi motus; At ſi ob circumſtantias metui poſſet, ne aqua ob nimiam eleuationem fluminis ripas, aut ageres ſuperaret, illi muniendi erunt, & pro exigentia eleuandi.

His ſic factis, & obſeruatis intelligatur axi BK deſcripta parabola BKH; & ordinatim applicatis BH, FI, inueniatur perpendicularis BF centrum velocitatis per prop. quintam ſecundi libri; facile enim ex natura parabolæ proportio FI, ad BH innoteſcet, cognitis per experimentum KB, KF. Sit ergo centrum velocitatis M;ductaque MN ſemiordinata; hæc erit media velocitas perpendicularis KB.

Si alueus ſit ſenſibiliter inclinatus, inquirenda erit inclinatio, vt ex ea per corollarium 3.propoſitionis 5 poſsit erui altitudo aquæ ſuperincumbẽtis centro velocitatis; qua cognita,vel per propoſitionem decimã ſecundi libri,vel beneficio peculiaris Tabulæ inueniatur ſpatium debitum velocitati: Hoc per FB perpendicularem multiplicetur, & productum ducatur in latitudinem ſectionis AB;& conſurgens numerus indicabit quantitatem menſurarum cubicarum aquæ eius generis, ac eæ, quibus vſi fuerimus in his operationibus.

De-

Demonſtratio veritatis huius menſuræ pendet partim ex propoſitione antecedenti, partim ex corollario ſecundo propoſitionis 10. ſecundi libri; eſt enim menſura inuenta eius aquæ, quæ exit per ſectionem BL ſuperiùs obſtructã; ſed hæc eſt æqualis illi, quæ fluebat antea per ſectionem non obſtructam ex demonſtratis in propoſitione tertia huius libri; ergo & erit menſura quantitatis aquæ, quæ prius fluxerat per ſectionem non obſtructam, ideſt per quamlibet aliam eiuſdem fluminis ſectionem.

SCHOL. II.

SI vnica non ſufficit cataracta plures apponendæ ſunt;in idem enim recidit,fluminis vnicam,vna vice,menſuram inſtituere, vel pluribus plures ſimul copulandas; ſicuti nihil intereſt in hoc caſu, an cataractarum ſingularum inferiores ſuperficies ad eandem ſint lineam horizontalem eleuatæ; an verò diuerſam; dummodo Aquæ idem ſemper ſit ſtatus, & ſingularum perpendicularium, quarum diuerſa eſt longitudo diſtincta ratio habeatur.

SCHOL. III.

INclinatio canalis facilè inuenitur pluribus vſualibus artificijs, præſertim vero ſequenti.Sit norma duplex contexta ex regulis ABD,CB ſibi ad angulum rectum inſiſtentibus in puncto B, cui ſit affixa alia regula EBG mobilis circa verticem anguli recti B, quæ in parte inferiori BG cuſpidem habeat, qua telluri poſſit infigi; ex altera verò parte BE æqualis ſit BC; & vtraque diuidatur ſimiliter in particulas æquales ad libitum;& alia regula habeatur, vel vtrilibet ipſarum connexa in termino diuiſionum v. g. puncto E,vel quod melius eſt, ſeparata,diuiſa & ipſa in particulas conſimiles diuiſionibus EB,BC. In flumine igitur,cuius quę- *Fig. 37.*

ritur

ritur inclinatio, regula BG fundo fluminis infigatur, donec ABD secundum longitudinem, & planum fundi exactè sit disposita: opportet autem vt dicta regula EBC sit horizonti perpendicularis, quod pendulo potest explorari. His sic stantibus, alia regula EC applicata docebit quanta sit basis EC trian guli EBC in partibus laterum EB, BC; qua cognita innotescet trigonometricè angulus EBC, qui erit inclinatio Canalis; etenim ducta per B horizontali HI; quoniam anguli EBI, CBD recti sunt, si communis auferatur CBI, remanebit angulus EBC æqualis angulo IBD, inclinationi canalis.

SCHOL. IV.

NEque obijciendam huic methodo mensurandarum aquarum fluentium magnum impendium, & difficultas conficiendarum machinarum, quæ præparari debent; etenim respondendum erit, quod egregiè Castellus in hanc rem monet; magnorum videlicet fluminum mensuram magnorum etiam Principium mãdata exigere, & ideas in actũ sæpius non deducendas, nisi magna vrgente necessitate, & vtilitate, quæ impendia minuunt. Præterea consimilia machinamenta in omnibus ferè fluminibus reperiuntur, qualia sunt Aquarum deriuatoria, siue septa transuersalia fluminum, ad aquas aliorsum deducendas, vulgo *Pescaie*, seu *Chiuse*; super quorum plana superiora horizontalia dispositis ligneis columnis perpendiculariter insistẽtibus cataractæ apponi possũt; & qualia, sũt cataractæ versatiles ad sustinendam, & æquilibrandam canaliũ aquam fabrefactæ, vulgo *Sostegni*, *ò Esclusc*, quæ integra ferè machina sunt; aut pontes, quorum parastades spondas artificialis sectionis æmulantur; & minimo negotio in vsum reuocari possunt. Vidi sæpius in fluminibus aqua turgentibus, & fornicum capacitate, quibus pontes constant, aquarum effluxui non

non sufficiente, eleuatam à parte superiori aquæ libellam, donec exigita velocitate conciliata, fluminis aqua sub pontis fornicibus præterflueret; quod etiam notat Castelus factum in Tyberis exundatione Anno 1598; qua licèt aquę hinc inde ripas superassent; totæ tamen sub Pontibus Fabricio, & Cæstio effluxerunt, quo in casu non impossibile fuisset mensuram Tyberinæ aquæ in singulis perpendicularibus sectionis instituere, superiore pontis parte cataractarum vices subeunte.

Tandem, si nulla adsit in flumine consimilis machina, illamque ibidem fabricare difficile foret; ad minores fluuios influentes confugiendum est, quorum mensuræ singillatim acceptæ, & deinde inuicem vnitæ, integram fluminis maioris mensuram constituunt.

SCHOL. V.

QVoniam supra in Regula generali mentionem fecimus de Tabula, qua mediante spatia, cuilibet altitudini debita nosci possint, eam hic apponere debuissemus. Verum magis consultum duximus eam ad finem Tractatus vsque differre; tum vt tempus suppetat eam quantum decet, extendendi, tum vt à libro seiungi possit adlibitum ad vsus obuios.

Finis Libri Quarti.

LIBER QVINTVS.

In quo Variæ affectiones canalium horizontalium, perpendicularium, & inclinatorum solitariorum considerantur.

PROPOSITIO I.

SI beneficio canalis horizontalis aqua influàt in aliquod stagnum, cuius superficies manens; & effluat per alterum horizontale æqualis latitudinis, & fundus vtriusque canalis sit in eodem plano; erit etiam superficies aquæ in vtroque canali, & reseruatorio in eodem horizontali plano.

Fig. 38. Sit canale influens AB; stagnum vero DC, & canalis effluens CO; sintque AB, CO in eodem plano horizontali; & altitudo aquæ canalis influentis sit BF, & per F ducatur linea horizontalis EFGH, & ex C perpendicularis erigatur CG, quæ sit altitudo aquæ in C. Dico horizontalem communem esse EH.

prop. 3. 1111. huius. Quoniam FG superficies aquæ in stagno est manens, tantum aquæ influet, quantum effluet; quare cum æqualis supponatur latitudo vtriusque canalis in C, B; erit complexus velocitatum perpendicularis GC æqualis complexui velocitatum perpendicularis FB. Sit ergo si fieri potest minor altitudo GC, quam FB; ergo minor erit velocitas puncti C, quàm puncti B; sit CI velocitas puncti C minor BK velocitate puncti B; & describãtur parabolæ æquales FBK, GCI, quæ erunt complexus velocitatum perpendicularium FB,

Corol. 2. prop. 2. huius.

FB, GC. & quoniam CI minor est, quàm BH; fiat BL æqualis CI; & erecta ML perpendiculari, quæ secabit parabolam in M; ducatur per M semiordinata MN, quæ erit æqualis CI; & FN erit æqualis GC; & consequenter parabola GCI congruet parabolæ FNM; sed FNM minor est FBK; ergo etiam GCI minor erit FBK; sunt autẽ, vt ostensum est FBK, GCI complexus velocitatum perpendicularium FB, GC; ergo complexus velocitatum perpendicularis FB maior erit complexu velocitatum perpendicularis GC; sed & æqualis, vt ostensum est, quod fieri non potest; Non ergo FB maior est, quàm GC. Similiter ostendetur neque minor; ergo FB, GC, æquales erunt. Eadem ratione ostendetur EA æqualis HO, & prædictis FB, GC; quare eadem horizontalis erit EFGH. Quod &c.

COROLLARIVM.

SEquitur hinc superficiem canalium horizontalium esse planam, & æquidistantem fundo canalis, cum eadem est in omnibus sectionibus latitudo.

COROLL. II.

ETsi sectiones sint inæquales, id ipsum verum erit, si vltimæ sectionis latitudo aliarum minima sit, aut minimæ æqualis; ad eius enim altitudinem aliæ omnes disponuntur, sed in hoc casu aliarum sectionum latitudines non sunt viuę, aqua in partibus lateralibus stagnante, vel in vortices circumacta.

SCHOLIVM.

QVòd igitur in fluminibus etiam horizontalibus, superficies aquæ prope exitum depressior sit, quàm longe

ab exitu, in causa est maior sectionum latitudo in primo casu, quàm in secundo, quæ sensim augetur, quo magis aqua accedit ad exitum; & hoc vtique ex necessitate Naturæ contingit; etenim cum aqua prope exitum, seruata eadẽ latitudine, deberet cadere perpendiculariter, vel quasi; ex nimio impetu ripas eã corrodere necesse est, & cõsequenter etiam sibi ita sectiones proportionare, vt aquæ superficies vna sit, quantum fieri potest; sed de hoc alibi.

COROLL. III.

PAriter verificabitur propositio, si canalis influens sit inclinatus, vel perpendicularis; in eo enim casu FG, & GH erunt in eadem horizontali; disponetur enim Aqua in reseruatorio, vel stagno ad talem altitudinem, qualis requiritur à quantitate aquæ influentis, & à latitudine emissarij, vel primæ sectionis, quæ deinde continuabitur, vt ostensum est.

COROLL. IV.

PErinde ergo est, siue canalis adsit influens qualiscumque, siue, nullo existente canale, si aqua saliat a fundo reseruatorij BDC, quod in lacubus plerumque solet contingere.

PROP. II.

DAta altitudine, quam habet Aqua in reseruatorio, v. g. stagno &c. supra fundum primæ sectionis; inuenire altitudinem, quam habet eadem Aqua in perpendiculari primæ sectionis.

Hæc propositio supponit aquam stagnantem, aut saltem æquilibrem in aliquo reseruatorio; piscina, v. lacu, palude &c.

&c. & in reseruatorio factum fuisse emissarium, vel incile æmulans sectionem artificialem, cui applicatus sit canalis inclinatus, de quo in suppositione secundi Libri.

Sit igitur AB altitudo, quam habet LS superficies æquilibrata reseruatorij supra fũdum sectionis primæ B. Oportet inuenire altitudinem, quam faciet Aqua in perpendiculari primæ sectionis BD. *Fig. 39.*

Producãtur LS, BD, donec concurrant in puncto C; & centro B interuallo BA describatur arcus circuli AD secans BC in D, & circa CB descripta semiparabola BCE, sumantur inter BC, DC duæ mediæ proportionales F, G; fiatque vt BC ad F, ita BE velocitas maxima sectionis B ad BH, & per H ducatur HN parallela BC, secans lineam parabolicam in N; eo quòd BH necessariò, quàm BE minor est; est enim BC maior, quam DC; & per N ponatur NM parallela BE, secans BC in M. Dico BM esse altitudinem quæsitam.

Quoniam enim punctum B, sectionis BM, habet velocitatem competentem descensui SB, siue pressioni, quæ sit æqualis BA, & eandem haberet punctum B, si OB producta v. g. in P, efficeret à B in P canalem horizontalem; erit velocitas puncti B in vtroque casu eadem. Quare sumpta BE tamquam velocitate communi, axe BD describatur parabola BDE secans BCE in E. Quoniam igitur BD est æqualis BA, & BE velocitas puncti B; erit BDE parabola complexus velocitatum perpendicularis BA. Quia vero BC ad DC triplicatam habet rationem eius, quæ est BC, ad F, & vt BC ad F, ita BE ad BH, siue MN; erit proportio BC ad DC triplicata eius, quæ est inter BE, MN; sed in eadem proportione triplicata BE ad MN est parabola CBE ad parabolam CMN; ergo vt BC ad DC, ita parabola CBE ad parabolam CMN; & diuidendo, vt spatium BMNE ad parabolam CMN, ita BD ad DC; sed vt BD ad DC, ita parabola BDE ad spatium CDE; ergo vt spatium *prop. 7. 11 huius* *Greg. à S. Vinc. prop. 141 de parab.* *Idẽ ibid. prop. 240.*

tium BMNE ad parabolam CMN, ita parabola BDE ad ſpatium CDE; & inuertendo vt parabola CMN ad ſpatium BMNE, ita ſpatiũ CDE, ad parabolam DBE; & componendo vt parabola CMN vnà cum ſpatio BMNE, ideſt tota parabola CBE ad ſpatium BMNE, ita ſpatium CDE vnà cum parabola DBE, ideſt tota parabola CBE ad parabolam DBE; & conſequenter erit ſpatium parabolicum BMNE, ſiue complexus velocitatũ altitudinis BM, æquale parabolæ BDE complexui velocitatum perpendicularis DB, vel BA; ſed complexus velocitatum perpendicularis DB eſt aquæ exeuentis è reſſeruatorio per canale horizontale, per quod tantum effluat, quantum influit; ergo tantum etiam effluit per BM, quantum influit manente eadem horizontali LS, ideoque erit BM altitudo quæſita. Quod &c.

SCHOL.

SVpponitur in reſeruatorio ſuperficies aquæ manens, & influxus continuatus, ita vt effluens per canale horizõtale faceret altitudinem BA, & eadem ſit canalis horizõtalis, ac inclinati latitudo. Cæteroquin, ſi aqua reſeruatorij eſſet ſtagnans, & nulla denuo ſuppeditaretur; altitudo eſſet quidem BM in principio fluxus, ſed sẽſim imminuetur, prout deſcenderet horizontalis LA; & id in qualibet emiſſaris latitudine; etenim ſi latitudo maior eſſet latitudine canalis horizõtalis effluẽtis, vel inffluentis; primò maior aquæ copia ex hauriretur, quàm influeret, & eadem eſſet altitudo BM, ſed ſuperficies non eſſet manens, & tantum deſcenderet, vt imminuto aquæ effluxu per canale SBH, tandem influxus, & effluxus æquarentur; & denuo eadem proportione reſponderet altitudo BM altitudini BA.

SCHO-

SCHOL. I.

ITaque, ſi BA ſupponatur radius; erit BC ſecans anguli inclinationis, quæ ſi è Tabulis Trigonometricis eruatur, & inter ſecantem, & exceſsum ipſius ſupra radium inueniantur duæ mediæ proportionales; erit proportio ſecantis ad primã mediam, proportio velocitatum BE, MN, maximæ .I. & minimæ primę ſectionis; ſuppoſito enim, quòd BE ſit æqualis BC, erit MN ſecunda proportionalis, quæ proportio velocitatis maximæ ad minimam in prima ſectione, erit ſubtriplicata eius, quam habet ſecans anguli inclinationis ad differentiam inter ipſam, & radium.

COROL. II.

ET quoniam proportio BC, ſiue BE ad CM eſt duplicata proportionis BE ad MN, & pariter proportio BC, ſiue BE ad G eſt, ex conſtructione, duplicata eius, quam habet BE ad MN; erit vt BE ad G, ita BE ad CM; erit ergo CM æqualis ſecundæ mediæ proportionali G, quare, ſi a tota ſecante BC auferatur CM; reliqua BM erit altitudo quæſita in partibus radij BD.

Appendix Geometrica.

EX corollario præcedenti conſtat in Parabolis terminatis æquicurribus, .i. quarũ diametri ſunt æquales maximis ſemiordinatis; ſi ducatur quælibet alia ſemiordinata; erunt maxima ſemiordinata, ſecũda ſemiordinata, & ſagitta ſecundæ ſemiordinatæ, in continua proportione; vti ſi in parabola AGH ſit diameter quæcumque GB, & ſemiordinata AB æqualis diametro BG; & ſumpto quolibet puncto E, ducatur EF ſemiordinata; erunt AB, EF, FG in continua pro- *Fig. 40.*

proportione; est.n. proportio GB, siue BA ad GF duplicata eius, quam habet BA ad EF.

COROL. III.

QVare proportio, quam habet altitudo aquæ in reseruatorio supra fundum primæ sectionis, ad altitudinem, quam habet in prima sectione est ea, quam habet radius ad differentiam inter secantem anguli inclinationis, & secundam ex duabus medijs proportionalibus inter ipsam, & excessum ipsius supra radium.

COROL. IV.

ET dictis patet, quomodo ex data proportione inter velocitatem fundi, & velocitatem superficiei in prima sectione, manifestari possit angulus inclinationis canalis, cuius est prima sectio, & si data sit altitudo primæ sectionis, inueniri possit altitudo aquæ in reseruatorio; Si enim sit data proportio BE ad MN, velocitatis maximæ ad minimam; erit hæc ratio triplicata eadem, ac secantis anguli inclinationis ad differentiam inter ipsam, & radium; v.g. si BE, MN addatur tertia proportionalis, hæc erit MC; quibus si addatur quarta, hęc erit DC; quæ ablata à BE, quæ supponitur æqualis BC relinquet DB, cui æqualis est BA radius, per conuersum Apendicis Geometricæ propositæ; quare si fiat, vt AB ad BC, ita 100000 ad aliam; hæc erit secans, quæ in Tabulis inuenta ostendet angulum ABC inclinationis, & si data sit MB, dabitur etiam BA, etenim ratio BM ad BA illa est, per corollariũ antecedens, quam habet differentia inter secantem, & secundam ex duabus medijs prædictis, ad radium. Alio etiam modo poterit inueniri altitudo BA per propositionem 6. lib. secundi, eiusque corollarium tertium; sed ibi-

Fig.39.

ibidem supponitur notus angulus inclinationis; secus autem in hoc corollario.

COROL. V.

EAdem est demonstratio huius propositionis, videlicet. *Data altitudine, quam habet aqua in canale horizontali, inuenire altitudinem, quam haberet in canali quomodocumque inclinato*; etenim in canale horizontali velocitates terminant ad parabolicam lineam, cuius axis altitudo sectionis, siue altitudo aquæ supra fundum primæ sectionis canalis inclinati; idcirco, quę de reseruatorio dicta sunt, & dicentur; eadem canali horizontali conueniunt.

PROP. III.

AVcta altitudine aquę in reseruatorio, proportionaliter augetur etiam altitudo aquę in prima sectione.

Sit prima sectio B, supra cuius fundum altitudo aquę in reseruatorio sit BO faciens in sectione B altitudinem BI, & augeatur altitudo aquæ in reseruatorio vsque ad F, & ipsi correspondeat in sectione B, altitudo BE. Dico vt BO ad BF, ita esse BI ad BE.

Fig.41.

Quoniam enim ratio BO ad BI eadem est, ac radij ad differentiam inter secantem anguli inclinationis, & secundam ex duabus medijs inter ipsam, & differentiam ipsius ad radium, & eandem rationem habet BF ad BE; erit vt BF ad BE, ita BO ad BI, & permutando vt BF ad BO, ita BE ad BI; siue vt BO ad BF, ita BI ad BE. Quod &c.

SCHOL.

ADuertendum, quòd punctum F non est in superficie aquę fluentis; etenim hæc ab A ad B, semper est infra

fra AC, quæ ſumitur, tam in hac, quàm ſuperiori propoſitione pro horizontali per initiũ aluei, ſiue pro ſuperficie reſeruatorij æquilibrata, & continuata vſque ad C. Itaque cum dicimus, FB eſſe altitudinem Aquæ in reſeruatorio ſupra ſectionem B, intelligimus eſſe diſtantiam horizontalis ſectionis B ab horizontali per initium aluei A; ſiue perpendicularem AR.

SCHOI. I.

HInc colligitur, quòd ſi primæ altitudines iungãtur per lineã OI, & ipſis per F ducatur FE parallela, ſecans BC in E; erit BE ſecunda altitudo in ſectione B.

COROL. II.

ITaque; quoniam diuidendo, vt FO ad BO, ita IE ad IB, & permutando vt FO ad IE, ita BO ab IB; erunt etiam augmenta, & primæ altitudines, vel etiam ſecundæ inter ſe proportionales; & vlteriùs prima altitudo in reſeruatorio ad ſuum augmentum, eandem habebit proportionem, quam ſecunda altitudo ad ſuum augmentum. &c.

COROL. III.

ET quoniam quantitates aquæ in perpendicularibus BF, BO ſunt in triplicata ratione eius, quæ eſt ſubduplicata inter eaſdem perpendiculares, ſunt autem vt BF, BO, ita BE, BI; ſequitur, quantitates aquæ per BF, BO, vel eijſdem æquales per BE, BI, eſſe inter ſe in ratione triplicata eius, quæ eſt ſubduplicata inter BE, BI: quare ſi EH ponatur perpendicularis BE, & eidem æqualis; & vertice B, axe BE deſcribatur ſemiparabola æquicruris BHE, & per I dũratur ſemiordinata IG; erit ratio aquæ per BE ad aquam per BI triplicata rationis BE ad IG; eſt enim GI media proportionalis inter HE, ſiue BE, et BI per Appendicem Geometricam propoſitionis antecedentis; & ſi quarta ponatur BX, erit proportio aquæ per BE ad aquam per BI illa, quã habet EH, ſiue BE ad BX.

Coroll. 12 p. 5. 111. huius.

COROL. IV.

HInc, ſi inter BE, BI, vel inter BF, BO nota ſit proportio, habebitur menſura proportionalis Aquæ auctæ, & non auctæ. Vide coroll. tertium prop. quintæ libri 3.

COROL. V.

QVoniam verò complexus velocitatum diuerſarũ perpendicularium, ſiue quantitates aquæ per ipſas, rationem habent compoſitam ex proportionibus altitudinis primæ ad ſecundam, & velocitatis mediæ primæ perpendicularis ad velocitatem mediam ſecundæ; poterit ex data aquarum, & altitudinum inter ſe proportione, inueniri etiam proportio velocitatũ mediarũ; ſi enim inter BE, BI inueniatur media proportionalis IG, & quarta addatur BX; erit proportio EB ad BX eadem, ac aquarũ auctæ, & non auctæ; ſed proportio EB ad BI eſt proportio altitudinum; ergo proportio BI ad BX erit velocitatum mediarum; eſt enim proportio EB ad BX compoſita ex proportione EB ad BI, et BI ad BX prima altitudinum, ſecunda velocitatum.

p. 12. lib. 1. huius.

COROL. VI.

CVm igitur ratio BI ad BX eadem ſit, ac BE ad IG; ſequitur, proportionem velocitatum eſſe ſubtriplicatam proportionis aquarum, & ſimiliter ſubduplicatam alti-

titudinum, & inuertendo, proportionem aquarum esse triplicatam velocitatum mediarum, & proportionem altitudinum esse duplicatam mediarum velocitatum.

COROL. VII.

SImiliter, cum velocitas maxima perpendicularis BE ad velocitatem maximam in perpendicularis BI, sit in ratione subduplicata BF ad BO, siue BE ad BI, & in eadem ratione subduplicata sint velocitates mediæ; sequitur, velocitates maximas duarum perpendicularium primæ sectionis, esse proportionales velocitatibus medijs earundem perpendicularium.

COROL. VIII.

ERit ergo vt velocitas maxima BK altitudinis BE ad velocitatem maximam BL altitudinis BI, ita velocitas media v.g. MN altitudinis BE, ad PQ velocitatem mediam altitudinis BI; & permutando, vt BK ad MN, ita BL ad PQ; sed BK ad MN est in ratione subduplicata TB ad TM, ergo etiam proportio BL ad PQ erit subduplicata TB ad TM, sed proportio BL ad PQ est subduplicata eius, quam habet VB, ad VP; ergo, vt TB ad TM, ita VB ad VP, & vt TM ad MB, ita VP ad PB; Quare puncta M, P, quæ supponuntur centra velocitatum, similiter secabunt TB, VB; & consequenter centra velocitatum duarũ perpendicularium in prima sectione similiter secant axes parabolarum, quæ earum velocitatis sunt mensura. *Fig. 42.*

COROL. IX.

QVidquid ostensum est de augmento aquæ, valet proportionaliter de decremento, vt patet.

Schol-

SCHOL. II.

EX his apparet symbolizatio quædam inter sectiones canalium horizontalium, & primam canalium inclinatorum; etenim in illis, æquè & in hac: Primò augmenta proportionaliter fiunt, & decrementa. Secundò quantitates aquæ inter se sunt in ratione sesquialtera eius, quæ est altitudinum. Tertio velocitates mediæ habent inter se proportionem subduplicatã altitudinum. Quarto velocitates mediæ, maximis sũt proportionales, &c. Diuersificant tamen in pluribus; Nam in prima sectione velocitatis centrum non est demersum ad $\frac{4}{9}$ altitudinis: & pariter Secundò altitudines aquæ non similiter secantur à centro. Tertio velocitates nõ terminant ad parabolam integram, sed ad segmentum parabolæ; & complexus est spatium parabolicum, non parabola &c. vt in horizontalium canalium sectionibus. Quod vtique naturalis rerum conuenientiæ proprium est; cum enim prima sectio canalis inclinati medium sit, quo canalis horizontalis inclinato adnectitur; congruum est, vt proprietates vtriusque in ea vniantur; ipsasque veluti ex æquo participet.

PROP. IV.

SI Aqua manans à reseruatorio, introducatur in canale inclinatum, faciens in eius prima sectione determinatam altitudinem; aquæ superficies se se disponet in planum ductum per initium canalis, & altitudinem primæ sectionis. *Fig. 43.*

E reseruatorio AFC fluat aqua per primam sectionem C, cuius altitudo CD; sit verò canalis inclinatus CN applicatus, qui intelligatur productus supra, vsque ad A, superficiem aquæ. Dico, aquam reseruatorij ita fluxuram per canale AC, vt eius superficies sit in recta AD.

Sum-

Sumptis quibuslibet punctis inter A, et C v. g. K, G; erigantur ad AB horizontalem per initium aluei perpendiculares KI, GF, CO: et KM, GH perpendiculares AC.

Et quoniam C est prima sectio, eiusque altitudo CD; erit proportio CD, ad CO, ea quam habet, differentia inter secantem, & secundam ex duabus medijs proportionalibus inuentis inter secantem anguli OCD, & radium, ad ipsum radium; sed eandem proportionem habet GH ad GF; etenim anguli OCD, FGH sunt æquales, et G est prima sectio respectu aquæ superioris PA; ergo vt CD ad CO, ita GH altitudo aquæ in G ad GF aquæ altitudiuem in reseruatorio supra fundum primę sectionis G; Similiter, vt CD ad CO, ita esse ostendetur KM ad KI, & permutando vt CD, GH, KM inter se, ita CO, GF, KI; sed vt CO, GF, KI, ita AC, AG, AK; ergo vt AC, AG, AK, ita CD, GH, KM, & permutando vt AC, ad CD, ita AG, ad GH, et AK ad KM; ideoq; puncta A, M, H, D sunt in linea recta. Quod &c.

Corol. 3. p. 2. huius.

COROLLARIVM.

Constat hinc, si augeatur Aqua' in reseruatorio v. g. vsque ad TV, ita vt initium canalis sit S, aquæ superficiem disponi ad rectam SR parallelam AD; quia cũ vt CA ad AS, vel CO, ad OV, ita CD ad DR; erit per corol. 2. prop. antecedentis CR altitudo primę sectionis post augmentum; cumque Aqua disponatur ad supeficiem SR, erit superficies aquæ SR parallela AD, quoniam trianguli SCR latera proportionaliter secta sunt.

PROP. V.

Data altitudine, sub qua fluit aqua per canale horizõtale, inuenire altitudinem primæ sectionis in canale perpendiculari, sub qua eadem aqua possit fluere.

Sit

Sit canalis horizontalis AB, cuius altitudo BD; & ipsi applicatus sit canalis perpendicularis BC eiusdem latitudinis. Opportet inuenire altitudinem, sub qua aqua canalis horizontalis AB possit fluere per perpendicularem BC in eius prima sectione. Fig. 44.

Axe BD describatur parabola æquicruris BDE; quæ erit complexus velocitatum perpendicularis DB; & inuenta media velocitate FG, fiat vt BE ad FG, ita BD ad BH. Dico BH esse altitudinem quæsitam.

Quoniam enim velocitas media, qua fluit aqua per canale horizontale est FG, & velocitas, qua debet fluere per perpendiculare in prima sectione BH est BE, qualis nẽpe conuenit altitudini BD; & sectiones BD, BH, quoniam æqualis latitudinis, inter se sunt vt altitudines; erit proportio velocitatum BE, FG reciproca sectionũ BH, BD; equalis ergo aquæ quantitas fluet per vtramque sectionem BD, BH; quare BH erit altitudo quæsita. Quod &c.

COROL. I.

Quoniam BE est sesquialtera FG; etiam BD erit sesquialtera BH; ideoque duæ tertiæ partes altitudinis BD erunt altitudo BH.

COROL. II.

Data ergo DH; quoniam FI est parallela BH, et BD est sesquitertia BH; erit etiam DF sesquitertia FI; & consequenter aqua canalis horizontalis, cuius altitudo FD, faceret altitudinem FI in perpendiculari. Eadem ratione quælibet altitudines LD &c. canalis horizontalis facesserent in altitudines canalis perpendicularis, quarum omnium terminus in linea recta DH; & consequenter reflexa aqua à directione horizontali ad perpendicularem, in medio

dio transitu, se disponet sua superficie ad lineam rectam connectentem vtramque altitudinem, vt superiori propositione ostendimus in canalibus inclinatis.

COROL. III.

ITaque in augmento aquæ in canale horizontali proportionaliter crescet vtraque altitudo BD, BH &c. Vide corol. prop. antecedentis, & notata in corollarijs prop. tertiæ; symbolizat etenim vtraque canalium species.

COROL. IV.

COnstat etiam proportionē perpendicularis in reseruatorio, vel canale horizontali, ad altitudinem in prima sectione cuiuscumque canalis applicati, non posse excedere rationem sesquialteram.

COROL. V.

TOtum hoc verificatur, si in fundo canalis horizontalis perforetur lumen, vel sectio, cuius latitudo cum canali comunis; altitudo vero $\frac{2}{3}$ altitudinis Aquæ per canale horizontale fluentis; & idem valet de reseruatorio, cui sit applicatus canalis horizontalis, si fundus ipsius sit in eadem horizontali cum fundo canalis; in hoc enim si perforetur lumen in fundo, tantum aquæ exhauriet, quantum priùs fluebat per canale horizontale; si tamē fluxus per hoc impediatur.

COROL. VI.

QVòd si sectio BH non esset eiusdem latitudinis, ac BD, fiat vt latitudo sectionis BH ad latitudinem sectionis BD

BD; ita altitudo BH inuenta ad aliam, quæ erit altitudo sectionis diuersam latitudinem habentis; fient enim hoc pacto duæ sectiones æquales; sunt autem & æquè veloces, quoniam eadem vtriusque velocitas BE; ergo æqualis aquæ quantitas fluet per vtramque; tota videlicet ea, quę per canale horizontale fluit sub altitudine ED, vt ostensum est.

COROL. VII.

QVoniam verò sectiones æquè latæ, sunt inter se, vt altitudines, & altitudines sectionum canalis horizontalis, & primæ canalis perpendicularis; quarum eadem latitudo sunt inter se in ratione sesquialtera; sequitur sectiones singulas canalis horizontalis ad sectionem primam perpendicularis, esse in proportione sesquialtera, siue eadem sit latitudo, siue nō: siue etiam si primę sint rectangulæ; altera verò circularis, ellyptica &c.

COROL. VIII.

TAndem, si sectio prima canalis perpendicularis sit minor exposita, non tota aqua per ipsam poterit exhauriri; sed si sit impeditus vlterior fluxus per canalem horizontalem, crescet in canale horizontali aquæ altitudo, donec tanta sit, vt tota aqua per minorem sectionem possit fluere, Quo in casu aqua canalis horizontalis fiet, veluti aqua alicuius reseruatorij, cui tantum aquæ subministretur, quantum exit. Si vero sectio fuerit maior exposita, aqua non implebit totam sectionem; sed superfluam relinquet inanem.

SCHO-

SCHOLIVM.

LIbet hìc inquirere, quam altitudinem acquiret aqua in canale horizontali, si sectio prima canalis perpendicularis minor sit exigita; Fiat vt sectio data minor ad exigitam, ita velocitas competens altitudini sectionis in canale horizontale ad aliam, quæ applicata ordinatim ad parabolam DGE productam, dabit altitudinem necessariã, vt aqua per minorem sectionem possit fluere; etenim, vt per diuersas sectiones fluat eadem aqua; opportet, vt sectiones, & velocitates reciprocè se habeant; inuenta ergo velocitate, quæ debetur minori sectioni, dabit hæc altitudinẽ, à qua pendet, quæ vtique in parabola inuenienda est. Eadẽ ratione data altitudine ad quam excreuit aqua, vt flueret per primam sectionem canalis perpendicularis minorem exigita, vnâ cum præcedẽti altitudine canalis horizontalis, facilè inuenitur proportio sectionis minoris ad exigitam. Etenim quoniam datur vtraque altitudo aquæ; dabitur etiam velocitatum proportio, quæ reciprocè sumpta ostẽdet proportionem sectionis minoris ad exigitam; & vteriùs; quoniam data sectione canalis horizontalis, datur prima sectio canalis perpendicularis, & huius ad minorem datur proportio; dabitur etiam area minoris sectionis.

PROP. VI.

DAto lumine rectangulo in fundo Vasis, vel reseruatorij, & altitudine aquæ supra ipsum inuenire altitudinem sectionis canalis horizontalis, cuius latitudo vnum latus luminis, per quam tota aqua erumpens è lumine fluere possit.

Sit in reseruatorio ACOD lumen & rectangulum contentum lateribus FG, FE, & superficies aquæ manens sit HI,

Fig. 46.

HI, cuius altitudo OI, vel FL. Opportet inuenire altitudinem sectionis in canale horizontali, cuius latitudo v. g. FG, per quam tota aqua erumpens e lumine EG, possit fluere.

Assumpta altitudine aquæ FL, tamquam axe; vertice L describatur semiparabola, cuius maxima semiordinata sit FP, ex qua, et FE fiat rectangulum EP; & diuidatur parabola FLP; ita vt quam rationem ea habet ad rectangulũ EP, eandem habeat ad parabolam abscisam ad verticem IMK. Dico LM esse altitudinẽ, sub qua fluet eadem aqua, quæ erumpit e lumine EG, in canale horizontali, cuius latitudo eadem, ac EG luminis.

Quoniam Canale, per quem debet fluere Aqua, supponitur horizontale; erit complexus velocitatum in qualibet perpendiculari, parabola, cuius axis altitudo aquæ; quare altitudinis LM in canale horizontali complexus velocitatũ est LMK parabola, & MK velocitas maxima competens altitudini LM. Similiter quoniam FP est semiordinata in eadem parabola; erit FP velocitas puncti F, idest luminis EG: Sumpta ergo FG tanquam latitudine, & FE tanquam altitudine, erit EP rectãgulum complexus velocitatum perpendicularis FE, et FP velocitas media eius, quoniã singulorum punctorum in lumine horizontali eadem est velocitas; sed complexus EP est æquale complexui MLK, quoniã ad vtrumque parabola ELP eandem habet rationem; ergo complexus velocitatum tam perpendicularis ML, quam FE æquales erunt; & consequenter æqualis aquæ quantitas fluet per lineam EF, ac per perpendicularem LM; & cum latitudines sint æquales, idest eadem FG; fluet etiam per lumen EG, & per sectionem canalis horizontalis, cuius altitudo LM, latitudo FG, eadem, vel æqualis aquæ quantitas. Quod &c.

COROLL. I.

EAdem est ratio, si EF supponatur latitudo cõmunis luminis, & sectionis, et FG altitudo luminis, quo in casu complexus velocitatum esset contentus sub FP, FG.

COROL. II.

SI libeat determinatam habere latitudinem sectionis canalis horizontalis, quæ neutri laterum luminis FG, FE sit æqualis; facilè transmutabitur altitudo LM in aliam competentem datæ latitudini per prop. 7. lib. 3.

COROL. III.

SI data sit altitudo, quam volumus habere aquã in canale horizontali, facilè inuenietur latitudo *sectionis*; etenim si datæ LM altitudinis inueniatur velocitas media MN, & quam rationem habet rectangulum LN ad rectangulum EG, eandem habeat reciprocè latitudo luminis ad aliam; hæc erit latitudo quæsita per prop. 15. lib. primi.

COROL. IV.

SI igitur loco reseruatorij intelligatur canale horizontale, cuius altitudo excreuerit ad superficiem manentẽ propter deffectũ exigitæ sectionis primæ in canale perpendiculari; poterit inueniri altitudo canalis prima ante incrementum; hæc enim illa est, sub qua fluebat eadem aqua in canale horizontali, quæ nunc fluit per prima sectionem canalis perpendicularis.

CO-

COROL. V.

SI loco luminis in fundo reseruatorij, quod in propositione assumpsimus, aliud lumen substituamus perforatum in latere perpendiculari reseruatorij; idem omnino demonstrabitur, si dati luminis centrum velocitatis inueniatur, eiusque media velocitas; ex qua, & vno latere luminis fiat rectangulum analogum rectangulo EP.

PROP. VII.

DAta altitudine aquæ in prima sectione alicuius canalis inclinati in eodem statu manentis, inuenire altitudinem in reliquis sectionibus inferioribus.

Sit canalis inclinatus AK, cuius prima sectio B, eiusque altitudo BD. Opportet inuenire altitudinem in alia sectione inferiori C. Fig. 45.

Productis enim BE, CI perpendicularibus sectionum vsque ad horizontalem per initium aluei AI; describantur circa ipsas, tamquam axes, parabolæ æquales BEG, CIK; & per D ducatur DF semiordinata.

Et quoniam DF est parallela BG; erit parabola EBG ad parabolam EDF in ratione triplicata BG ad DF; fiat ergo vt BG ad DF, ita MN, ad NO, & ipsis ponantur OP, PQ in continua proportione; sitque NR æqualis PQ: Itaque erit vt MN ad PQ, siue RN, ita parabola EBG ad parabolam EDF; & per conuersionem rationis, vt MN, ad MR, ita parabola EBG ad spatium BDFG. Rursus quoniam parabolæ EBG, ICK sunt æquales; erunt in triplicata ratione BG ad CK; fiat ergo vt BG ad CK, ita MN ad MS, et ST, TV ponantur in eadem continua proportione; Itaque vt VT ad MN, ita parabola CIK ad parabolam BEG; sed vt parabola BEG ad spatium BDFG,

 ita

ita MN ad MR; ergo ex æquali, vt VT ad MR, ita parabola CIK ad ſpatium BDFG. Diuidatur ergo parabola CIK, ita vt, quã proportionẽ habet VT ad MR, eandem habeat tota parabola CIK ad ſpatium CHLK; erit ergo ſpatium CHLK equale ſpatio BDFG, quoniam ad vtrumque eadem eſt ratio parabolæ CIK, videlicet VT ad MR; ſunt autem ſpatia prædicta complexus velocitatum perpendicularium BD, CH; ergo complexus velocitatum, & conſequenter aquæ, per ipſas fluentes æquales erunt; ideoque erit altitudo CH illa, ſub qua eadem, vel æqualis aqua fluet in ſectione inferiori C, ac fluxerit per primã B ſub altitudine BD. Quod &c.

Schol. p. 6 lib. III. huius.

COROL. I.

ET quoniam, per prop. 2., data altitudine aquæ ſupra fũdum primæ ſectionis in reſeruatorio, datur altitudo primæ ſectionis, & ex hac datur altitudo in cæteris; plane conſtat, data altitudine aquæ ſupra fundum primæ ſectionis &c. dari altitudinem cuiuſcumque ſectionis.

COROL. II.

EX contextu demonſtrationis patet, data altitudine, quã habet aqua in prima ſectione, dari etiam proportionem, quam habet parabola CIK ad complexum velocitatum CHLK.

SCHOL. I.

PRoportio autem parabolæ EBG ad ſpatium DBFG manifeſta fit ex proportione, quam habet BG ad DF, quæ nota eſt per coroll. primum prop. ſecundæ. Si verò non fuerit nota propter defficientiam datorum ſecundæ propoſitionis; poterit inueniri altitudo axis BE per experimentum, qua cognita, & altitudine BD, ratio velocitatum BG, FD innoteſcet; & vlteriùs per pendulum, de quo in ſecundo libro; imo ex ſolo angulo inclinationis noto manifeſtatur, nam parabola EBG ad ſpatium DBGF ita ſe habet, vt ſecans anguli inclinationis ad radium, vt apparere poteſt ex ſequenti Scholio.

SCHOL. II.

BReuiùs ſoluetur problema huius propoſitionis, ſi dati anguli inclinationis inueniatur ſecans, & quam rationem habet BG ad CK, eandem habeat ſecans ad alium terminum, cui alij duo termini adiungantur in continua proportione; erique proportio quarti termini ad radium ea, quam debet habere parabola ICK, ad ſpatium CHLK. Si enim BG ſupponatur æqualis BE; erit BG ſecans, DF ſecundus proportionalis, DE tertius, & quartus XE differentia inter ſecantem, & radium; & conſequenter XB erit radius; eſt autẽ proportio BE ad BX ea, quã habet parabola BEG ad parabolam BXG, ſiue illi æquale ſpatium BDFG; quare cum parabolæ BEG ad ſpatium BDFG ea ſit, ex demonſtratis, proportio, quæ inter MN, MR; ſi MN ſupponatur ſecans, erit MR radius; & ſi MN, MS, TS, VT ponantur in continua proportione BG ad CK; erit ratio VT ad MR radium ea, quam habet parabola ICK ad ſpatium BDFG, cui equale debet eſſe ſpatium CHLK. Atque hinc apparet, proportionem parabolæ CIK ad ſpatium CHLK eſſe compoſitam ex triplicata velocitatis C ad velocitatẽ B, & ſecantis anguli inclinationis ad radium, ſiue ex ſeſquialtera eius, quæ eſt inter CI, BE, vel CA, BA, quæ eſt æqualis triplicatæ CK, BG, & ex proportione ſecantis ad radium.

CO-

COROLL. III.

HInc data in qualibet sectione altitudine aquæ, & inuento in e parabolæ quoniam datur proportio velocitatis maximæ, & minimæ, siue fundi, & superficiei; poterit methodo huius propositionis inueniri altitudo cuiuslibet alterius sectionis superioris, vel inferioris.

COROL. IV.

PAtet etiam conuersum propositionis videlicet. *Data altitudine aquæ in aliqua sectione inferiore, altitudinem primæ inuenire*. Et similiter, quia data altitudine aquæ in prima sectione, datur etiam altitudo aquæ in reseruatorio supra fundum primæ sectionis, etiam data altitudine aquæ in qualibet sectione data, innotescet altitudo aquæ &c. in reseruatorio.

COROLL. V.

SIcuti euidens est, quomodo dato augmento aquæ in prima sectione, & altitudine aquæ non auctæ ibidem, inueniri possit augmentum altitudinis in qualibet sectione data; etenim si dabitur augmentum, & prima altitudo; dabitur & altitudo aquæ auctæ, ex qua inuenietur altitudo aquæ in sectione data; & quoniam data est & altitudo minor in prima sectione, inueniri poterit altitudo ipsi correspondens in eadem inferiori sectione; itaque in hac, data erit vtraque altitudo aquę auctæ, & non auctæ, quarum differentia erit augmentum; & consequenter innotescet proportio altitudinis aquæ auctæ, & non auctæ. &c.

PRO-

PROP. VIII.

DAta altitudine, quam habet Aqua in aliqua sectione canalis perpendicularis, inuenire in reliquis sectionibus eiusdem canalis, altitudines, sub quibus Aqua fluit.

Altitudo sectionis in canale perpendiculari, est linea horizontalis mensurans altitudinem sectionis, sub qua aqua descendit; differt tamen canalis perpendicularis a cadente, vt ex sequenti scholio fiet manifestum.

Sit igitur Canalis perpendicularis SX, per quem intelligatur aqua fluere, quod erit si in fundo reseruatorij NBML intelligatur sectio, vel lumen rectangulum in situ horizontali, a quo exeat aqua sub altitudine manente SB, & sit BM altitudo aquæ in sectione B. Opportet inuenire reliquarum sectionum T, V, X altitudines. *Fig. 47.*

Describatur axe SX semiparabola SCE, & producatur MB in A; eritque BA semiordinata axi, cum ipsi perpendicularis supponatur, & per T, V, X ponantur aliæ semiordinatæ TC, VD, XE; fiantque rectangula ABM, CTF, DVG, EXH æqualia, siue, quod idem est, fiat vt CT, ad AB, ita BM ad TF; & vt DV ad CT, ita TF ad VG &c. Dico TF, VG &c. esse altitudines sectionum quæsitas.

Quoniam enim descripta est parabola circa axem SX longitudinem canalis, & velocitates sunt in subduplicata ratione altitudinum, erit BA velocitas sectionis B; TC velocitas sectionis T &c; sunt autem hæ per constructionem reciprocæ altitudinibus sectionum BM, TF; ergo quantitates aquæ per ipsas fluentes æquales erunt. Similiter ostendetur VG, XH esse altitudines, sub quibus fluit aqua, quæ fluxerat per BM. Ergo eadem existente canalis latitudine, altitudines quæsitæ erunt TF, VG &c. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

OPportet distinguere canalem perpendicularem à cadente; quia cadentis aqua sensim colligatur, iuxta augmentum velocitatis, circa axim ductum per centrum grauitatis luminis, vel sectionis, horizonti perpendicularem; in canalibus verò perpendicularibus, aqua fluens debet intelligi semper adhærere plano, siue fundo canalis, quod naturaliter fit propter partium aquæ ad inuicem adhærentiam; & etiam artificialiter, si nempe aqua cogatur fluere per tubum perpendicularem contentum tribus planis, quorum duo sint latera canalis, tertium fundus; & superficie curua, cuius genitrix consimilis linea MFGH, de qua corollario primo sequenti.

SCHOL. II.

SI loco vasis, vel reseruatorij substituatur canalis horizontalis, a quo exiens aqua debeat fluere per canalē perpēdicularem applicatum, hoc idem propemodum accidet, imo cum, ex prop. quinta, prima sectio canalis perpendicularis ex nota altitudine in horizontali inueniatur, poterit etiam tubus perpendicularis canali horizontali applicari, quem aqua fluens continuò totum repleat.

COROL. I.

EX demonstratis patet, puncta M, F, G, H, esse ad hyperboloidem curuam, cuius vna ex asymptotis sit X, & eidem ordinatæ BM, TF &c. sint in proportione reciproca subduplicata ST, SB; quare si ad singula puncta canalis SX, applicentur semiordinatæ ad axim parabolæ; fiantque æqualia rectangula ex semiordinatis axi parabolæ, & ordinatis asympoto sibi correspondentibus; puncta extrema semiordinatarum asymptoto designabunt dictam hyperboloidem, ad cuius normam se ipsam disponet in suo fluxu superficies aquæ: Hæc autē hyperboloides erit secūda in ordine, ducto initio ab hyperbola cōmuni, in qua abscisæ à cētro sūt reciprocè, vt ordinatæ asymptoto in simplici proportione; in hac autē reciprocè, vt ordinatæ asymptoto in proportione duplicata.

COROL. II.

QVidquid ostensum est in canali perpendiculari, valet etiam in inclinato, si æqualis sit ad sensum velocitas superficiei, & fundi propter maximam ab initio distantiam; vel propter maximam inclinationem; vel propter paruam altitudinem sectionum proportionaliter ad inclinationem; vel propter impedimenta, velocitates inter se æquātia, vt in coroll. & schol. prop. 5. lib. 2. notauimus. Eadē enim erit, ac descripta, superficies aquæ, cuius solidiratis frustum, cilindricū efformabit, cuius basis ex tribus rectis lineis, (longitudine videlicet canalis inter duas sectiones, & vtraque perpendiculari sectionum assumptarum) & dicta hyperboloide continebitur; Cæteroquin, si tota aquę fluentis figura consideretur; erit huius basis trilineum infinitum; spatium .v. inter asymptotam, hyperboloidem, & altitudinem primæ sectionis altitudo verò ipsa canalis latitudo. Quæ aquæ figura semper magis alterabitur, quò maior erit ratio velocitatum superficiei, & fundi.

COROL. III.

IN eadem suppositione, si ripæ canalis eiusdē, fundo perpendiculares progrederentur secundùm normam hyperboloidis predictæ; ita vt punctum S esset cōmune centrum

trum duarum hyperboloidum simul, & initium canalis; & asymptotos dirigeretur per medium eiusdem canalis; ita vt vtriq; hyperboloidi esset cõmunis, et IM esset latitudo primæ sectionis; essent altitudines singularum sectionum æquales; essent enim sectiones æqualis altitudinis, inter se vt latitudines; sed latitudines BM, TF, siue earum duplæ IM, OF, sunt in ratione reciproca subduplicata linearum ST, SB, & in eadem subduplicata ratione sunt velocitates; ergo cum sectiones velocitatibus sint reciprocæ, æqualis aquæ quantitas per ipsas transibit, & consequenter, si quis vellet in casu predicto eandem canalis altitudinem vbique sectionum retinere; opporteret, vt ripas canalis produceret secundum hyperboloidem dictam.

SCHOL. III.

ITaque, quoniam puncti S nulla est velocitas; constat, alteram ex asymptotis esse SL; cum enim rectangula ex lineis velocitatum, & altitudinum, siue latitudinum canalis, debeant esse ęqualia, & linea velocitatis in S nulla sit; sequitur altitudinem, siue latitudinem sectionis S (in supposito, quòd eadem aquæ quantitas fluere possit per S, nulla velocitate, ac per B determinata velocitate) debere esse infinitam, & consequenter nusquam occurrere hyperboloidi: Quod tamen esse nequit; quia in principio canalis, quod vnicum est punctum, nulla aquæ quantitas subministrari potest; vnde infinita sectionis altitudo præcauetur.

COROL. IV.

EX supradictis patet, si latitudines sectionum in canalibus inclinatis &c. sint æquales, esse earundem altitudines inter se reciprocè in subduplicata ratione distantiarum ab initio aluei; si verò altitudines supponantur æqua-

æquales, esse latitudines in eadem proportione.

COROL. V.

SImiliter altitudines sectionum in vno canali inclinato, aut perpendiculari, esse proportionales altitudinibus sectionum in altero canali inclinato quomodolibet, siue perpendiculari, si sectiones similes inter se comparentur; & æqualis sit vtriusq; canalis vbique latitudo.

COROL. IV.

HInc, si idem canalis magis, aut minùs inclinetur; altitudines datarum sectionum erunt sibi inuicem proportionales in vtraque, & quacunque inclinatione.

PROP. IX.

DAta vna sectione alicuius cadentis perpendicularis, & distantia eius ab initio, inuenire reliquas sectiones eiusdem.

Sit proposita cadens IQHM, cuius axis SX perpendicularis horizonti, & initium S; & data sectio, cuius diameter IM. Opporter inuenire reliquas sectiones T, V, X, &c. *Fig. 47.*

Axi SX describatur semiparabola SAE; & reliqua construantur, vt in superiori propositione; sed vt CT ad AB, ita fiat quadratum IM ad quadratum OF, siue quadratum BM ad quadratum TF; & vt DV ad CT, ita quadratum TF ad quadratum VG: & eodem pacto inueniatur XH &c. Dico BM, TF, VG, XH esse semidiametros sectionum B, T, V, X.

Quoniam enim, per scholia sequentia, omnes sectiones parallelæ alicuius cadentis inter se sunt similes; erunt inter se, vt quadrata semidiametrorum a centro; quare vt qua-

dra-

dratum BM ad quadratum TF, ita sectio IM, ad sectionem OF; sed vt quadratum BM ad quadratum TF, ita reciprocè velocitas CT ad velocitatem AB; ergo vt sectio IM ad sectionem OF, ita velocitas CT sectionis OF ad velocitatem AB sectionis IM; fluet ergo eadem aqua per sectionem IM, ac per sectionem OF. Similiter ostendetur per sectiones PG, QH &c. eandem aquæ quantitatem fluere, & consequenter sectiones PG, QH esse sectiones cadentis quæsitas.

SCHOLIVM.

LIcèt cadens perpẽdicularis de sui natura conicum corpus æmulari deberet, cuius basis prima sectio, quæcunque fuerit figuræ; apex verò centrum commune omnium grauium, quod tamen in magna distantia insensibiliter à cilindrico defficeret; adhuc tamen; quia propter augmentum velocitatis guttæ aquæ intra cilindrici soliditatem ab inuicem separari deberent vrgente aeris pressione externa, & concurrente partium adhæsione, quam visciditatem vocant, cilindricus comprimitur versus lineam perpendicularem, quæ axis eius est; ita vt aliud corpus conoideũ fiat, sua natura, infinitum; degenerans tamen (cum deuentum fuerit ad motus æquabilitatem, & velocitas eadem perseuerauerit) in cilindricum, cuius axis idem directè protensus ad centrum grauium. Atque hoc verum est detracta ea aeris inferioris resistentia; qua fit, vt conciliato magno impetu cadenti, citiùs, vel tardiùs pro eius maiori, vel minori diametro, in partes primò maiores, deinde etiam in tenuissimũ rorem dispergatur. Nos verò, cum loquimur de cadente, hoc vltimum impedimẽtum præscindimus, retinentes aquę confluxum ad axem; seu si fiat vas tale, cuius orificium superiùs congruat primæ sectioni cadentis, & circa axem ipsius cadentis, effictum; intelligimus quærere in hoc vase sectio

ctiones tales, quas aqua cadens, videl. fluens tota velocitate, quæ suo casui est debita, præcisè impleat sine excessu, aut defectu. Hoc posito ostendam, Aquam ita confluere ad axim, vt quam rationem habet distantia vnius puncti in circumferentia luminis à puncto intra ipsum, quod tangit axis, ad distantiam alterius puncti ab eodem puncto axis, eandem habeat in qualibet sectione inferiori distantia aquæ ipsi correspondentis ab axe, ad distantiam aquæ correspondentis secundo puncto ab eodem axe. Sit v.g. A punctum, ad quod terminat axis; puncta verò C, D in circumferentia luminis GDHC, Axis AB; & descendat Aqua a C in E, & à D in F; & sint FB, BE in eodem plano horizontali. Dico eandem fore rationem DA ad AC, ac FB ad BE. Quoniam enim Aqua tota lineæ AC descendit in BE; oportet, vt eadem sit ratio AC ad BE, ac velocitatis in B ad velocitatem in A. Similiter, quoniam aqua existens in linea DA descendit in FB; erit etiam vt DA ad FB, ita velocitas in B ad velocitatem in A; erit ergo vt AC ad BE, ita AD ad FB, & permutando vt AC ad AD, ita EB ad FB. *Fig. 48.*

Hoc demonstrato ostendam etiam, lumen GDHC esse simile sectioni IFKE. Quoniam enim Aqua ex AC transiens in BE confluit ad axim AB; erunt AC, AB, BE in eodem plano, descendit enim AC semper sibi parallela, & in eodem plano verticali; quare cum lumen, & sectio sint horizontales, erunt AC, BE communes sectiones planorum horizontalium (& consequenter parallelorum) cum verticali, inter se parallelæ; eadem ratione parallelæ erunt GA, BI, & DA, FB &c. quare anguli GAC, IBE æquales erunt; sunt autem, vt ostensum est, GA, AC proportionales rectis IB, BE; ergo triangula GAC, IBE similia erunt. Eadem ratione GAD, IBF &c. ostendentur similia; & consequenter poligonum GDHC erit simile, & similiter positum poligono IFKE; Quare poligonum GDHC ad poligonum IFKE erit in subduplicata ratione laterum homologorum, vt assum-

ſumpſimus in anteacta propoſitione.

SCHOL. II.

PVnctum A eſt centrum grauitatis luminis GDHC, & punctum B centrum grauitatis ſectionis IFKE; quoniam cum vtraque deſcendant verſus centrum terræ, neceſſe eſt, ita deſcendant, vt centra grauitatis ſint in linea tendente ad centrum grauium; quare axis cadentis erit linea, quæ per centrum grauitatis luminis ad centrum grauium dirigitur; Cum itaque in multis figuris centrum grauitatis, & magnitudinis idem ſit; in his euidens eſt axim cadentis transire per centrum figurarum, vt in Circulo, Ellypſi, Parallelogrammo &c. ſi talis figuræ ſit Lumen, vel prima ſectio.

SCHOL. III.

QVare ſi quælibet cadens planis alicui ſectioni parallelis ſecetur, fient omnes ſectiones inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ; & cum ad æquabilitatem peruenerit velocitas cadentis, etiam inter ſe æquales.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione propoſitionis ſequitur, lineam curuam coniungentem puncta MFGH eſſe vnam ex hyperboloidibus infinitis, in qua videlicet ordinatæ aſymptoto ſunt inter ſe in proportione reciproca ſubquadruplicata abſciſarum à centro; etenim, cum vt quadratum BM ad quadratum TF, ita ſit CT ad AB; erit proportio lineæ BM ad TF ſubduplicata proportionis CT ad AB; ſed proportio CT ad AB eſt ſubduplicata eius, quã habet ST ad SB; ergo proportio BM ad TF eſt ſubquadruplicata eius, quæ eſt inter

Fig. 47.

inter ST, et SB; ſiue proportio ST ad SB, ideſt abſciſarum à centro quadruplicata proportionis BM ad TF; eius videl., quam habent ordinatim ad ipſam applicatæ BM, TF reciprocè; Hæc igitur hyperboloides erit quarta in ordine initio ducto ab ea, quæ e cono educitur, vt innuimus coroll. primo prop. antecedentis.

COROL. II.

HInc oritur SX eſſe aſymptotam, et S centrum prædictæ hyperboloidis, per quod ſi recta ST ducatur ad angulos rectos aſymptoto, hæc erit altera aſymptotos; etenim cum in S nulla ſit velocitas; ſequitur, altitudinem ſectionis S fore infinitam, & conſequenter continuatam hyperboloidem ipſam nuſquam tangere.

COROL. III.

IN numeris ergo; ſi vt SB ad ST, ita fiat quadrato-quadratum TF ad aliud; erit huius radix quadrato-quadrata diſtantia extremæ aquæ ab axe cadentis; ſiue diſtãtia cadentis à centro grauitatis ſectionis; & idem eueniet, ſi diameter integra ſectionis OF, pro TF aſſumatur; inuenientur enim diametri analogæ ſectionum; & continuando proportionem, conſimiles omnes diſtantiæ, aut diametri inuenientur.

COROL. IV.

SI lumen IM ſit circulare, ex reuolutione figuræ BMHX circa axem manentem BX, deſcribetur ſolidum cadentis, & vas, quod ipſam præciſè continere poſſit.

CO-

COROL. V.

AT si lumen non sit circulare, sed saltem talis figuræ, vt omnes lineæ per centrum grauitatis ductæ bifariam diuidantur, vt Ellypses, & parallelograma &c. erunt hyperboloidum oppositarum æquales diametri transuersæ; si vero inæquales sint lineæ à centro grauitatis ductæ ad circumferentiam luminis, vt in triangulo æquilatero &c.; omnium quidem hyperboloidum idem centrum erit; sublimitas, videlicet, cadentis; sed diametri transuersæ inæquales; quod cuilibet in conicis sectionibus versato patere potest.

COROL. VI.

DAta ergo duarum sectionum ratione, & earum ab inuicem distantia, poterit inueniri altitudo cadentis; vt si detur proportio sectionis IM ad sectionem OF, & distantia BT, sufficit axi TB applicare perpendiculares BA, TC, quæ inter se sint reciprocè, vt sectiones, & describere parabolam per puncta C, A circa axem BT productum in S, cuius vertex S erit simul, & centrum hyperboloidis prædictæ, & initium cadentis. Quod etiam proportionaliter valet in casu propositionis antecedentis; sicuti multa ibidem notata huc proportionaliter referenda sunt.

PROP. X.

IN data sectione canalis inclinati, per quod aquæ fluẽtis velocitas fuerit retardata, inuenire proportionem, quam habet velocitas integra media, ad velocitatem mediam retardatam.

Fig. 49. Sit canalis inclinatus AB, in quo sectio B, cuius altitudo BE, sitque retardata velocitas ab A in B. Oportet inuenire

nire proportionem, quam habet velocitas media integra sectionis BE ad velocitatem mediam retardatam eiusdem sectionis BE.

Obstruatur sectio B supra BE, v.g. demittatur cataracta KE, ita vt eius pars inferior E congruat superficiei aquæ; & adhuc magis retardata velocitate sectionis BE, iuxta sensũ propositionis quartæ lib. IV. obseruetur ad quam altitudinem excrescat aqua; sitque BM, & superficies manens HI. Fig. 49.

Itaque; quoniam sub altitudine BM eadem quantitas aquæ fluit per sectionem BE, quæ prius fluebat per eandem, ante vlteriùs retardatam velocitatem; eâdem restituta, erit velocitas media, quæ priùs; Descripta igitur parabola BIQ circa axim BI; erit BEPQ complexus velocitatum perpendicularis BE, cuius media velocitas inueniatur BD; & tam complexus, quàm velocitas media erit aquæ fluentis per BE, velocitate retardata. Similiter circa axem KB describatur parabola prædictæ parallela KBC, & productis EP, BD, fiet complexus velocitatum BESC, debitus velocitati integræ perpendicularis BE; huiusque media velocitas inueniatur BN; Itaque quoniam parabolæ BIQ, BCK, sũt parallelæ; erunt BN, BD proportionales velocitatibus medijs; ergo, quam rationem habet BN ad BD, eandem habet velocitas media integra perpendicularis BE ad velocitatẽ mediam retardatam eiusdem perpendicularis. Quod &c. p. 3. lib. IV. huius

COROL. I.

HInc patet, proportionem BD ad DN esse eam, quam habet velocitas retardata ad deperditam, &c contra: Sicuti proportionem BN ad DN esse eam, quam habet integra velocitas ad deperditam.

COROL. II.

DEscriptis ergo super BD,BN,rectangulis in altitudine communi BE, videlicet BR, BO; erunt hæc complexus velocitatum integrarum,& residuarum: quare complexus integer velocitatum ad complexum residuum, proportionem habebit eam, quam rectangulum BO ad rectangulum BR; idest velocitatis mediæ integrę BN ad residuã, vel retardatam BD &c.: & idem repetatur de complexibus velocitatum totius sectionis.

COROL. III.

EX supra expositis proportionibus,& ex mensura aquę, residua velocitate fluentis, habita per regulam generalem prop. vltimæ lib.IV,facilè innotescet mensura aquæ, quæ fluere posset per sectionem, nisi retardata fuisset velocitas; & similiter mensura aquæ non fluxæ, quæ tamen fluere potuisset per eandem sectionem præcisa retardatione; hæ enim quantitates aquæ sũt proportionales velocitatibus medijs prædictis, quarum si vna cognita sit in mensura absoluta, & determinata; & reliquæ in eadem mensura manifestantur.

SCHOLIVM.

REtardatio Aquæ in sectione obstructa supra aquæ superficiem,haberi potest multipliciter, apposito quocunque impedimento ante sectionem, quod, si sectionem angustet, facta eleuatione aquæ remouendum est, & permittendum, vt aquæ superficies denuo quiescat; descendet enim nonnihil propter redditam sectioni amplitudinem. Et si per demissionem cataractæ infra aquæ superficiem aqua ex-

excreuerit ad superficiem manentem, ea denuo tantundem attollẽda,vt pristino situi restituatur,& obseruãda altitudo, ad quam se sistet aqua denuo descendens.

PROP. XI.

DAta proportione, quam habet velocitas retardata media ad velocitatem integram mediam, & altitudine,quam habet aqua fluens velocitate retardata in data sectione; reperire altitudinem in eadem sectione, sub qua flueret eadem aqua velocitate integra.

Sit proportio velocitatis residuæ ad integram ea, quam habet BD ad BN, & altitudo aquæ fluentis velocitate media BD in sectione B,sit BE. Opportet inuenire altitudinem quam faceret eadem aqua fluens velocitate integra in eadem sectione. *Fig. 49.*

Fiat vt BN ad BD,ita BE ad aliam,v.g. BF. Dico BF esse altitudinem quæsitam. Quoniam enim reciprocæ sunt altitudines sectionum, & velocitates mediæ; & vt altitudines sectionum, ita sunt sectiones ipsæ,cum eiusdem sint latitudinis; erunt velocitates mediæ sectionibus reciprocæ; Quare quantitas aquæ exiens per sectionem B altitudine BE, & velocitate BD media, æqualis erit quantitati aquæ exeunti per eandem sectionem B altitudine BF,& velocitate BN; sed BN est velocitas integra,& BD velocitas retardata; ergo per sectionem B altitudine BE, & velocitate retardata, fluet quantitas aquæ æqualis ei,quæ fluere potest per eandem sectionem altitudine BF,& velocitate integra; Est ergo altitudo BF ea, quam efficeret aqua canalis AB fluens integra velocitate. Quod &c.

COROL. I.

IDem problema ſoluitur, ſi detur proportio velocitatis integræ ad velocitatem deperditam, vel velocitatis reſiduæ ad deperditam; ex his enim facillimè colligitur proportio velocitatis reſiduæ ad integram.

COROL. II.

PAtet etiã cõuerſum problematis, videlicet. Quod ſi daretur alia methodo altitudo ſectionis, quando aqua fluit velocitate retardata; & altitudo ſectionis, quando eadem aqua fluit velocitate integra, aut ſaltem earumdem proportio; daretur etiam proportio velocitatis integræ, & retardatæ.

Finis Libri Quinti.

LIBER SEXTVS.

In quo artificium, & fundamentum diſtributionis proportionalis Aquarum erogatarum ex Aquæductibus, ſeu Canalibus, & Reſeruatorijs, proponitur.

PROP. I.

IN canale horizontali, cuius latitudo vbique eadem, ſi augeatur aqua; quam proportionem habet altitudo aquæ auctæ ad non auctam in vna ſectione, eandem habet in omnibus.

Sit canalis horizontalis AB, cuius omnes ſectiones ęqualis ſint latitudinis, & ſit eius ſuperficies FE, quæ, per nouæ aquæ additionem, intelligatur eleuari vſque in CD. Dico, quam proportionem habet altitudo AF, aquæ non auctæ ad altitudinem AC aquæ auctæ in ſectione A, eandem habere in altera ſectione B, altitudinem aquæ non auctæ BE ad altitudinem auctæ BD. *Fig. 50.*

Quoniam enim AB eſt canalis horizontalis; erit ſuperficies FE, per coroll. primum prop. primæ lib. V. parallela fũdo AB; ſed etiam CD ſuperficies ob eandem rationem æquidiſtat fundo AB ergo tres rectæ BA, EF, DC parallelæ erunt; ſunt autem & parallelæ AC, BD; ergo vt FC ad AF, ita DE ad EB, & componendo, vt CA ad AF, ita DB ad BE, & inuertendo, vt AF ad CA, ita BE ad BD. Quod. &c.

SCHOLIVM.

SI canali horizontali applicetur canale inclinatum, v. g. si canali AB horizontali applicetur BI inclinatum; eius pars GB non consideratur, tanquam canalis horizontalis; sed tanquam medium inter canalem horizontalem,& inclinatum; etenim, cum H fiat initium canalis inclinati; aqua inter H, et B deprimetur, & faciet superficiem HB humiliorem HC, vt aliàs ostendimus.

SCHOL. II.

ITaque;quoniam fieri potest, vt canali, cuius fundus horizontalis,applicetur alius canalis,adeo modicè inclinatus, vt eius initium congruat cum prima altitudine canalis, iuxta fundum horizontalis; hic propriè loquendo canalis horizontalis non erit; sed medium quid inter horizontalē, & inclinatum, cum canalis horizontalis verus is esse debeat, vt nullam habeat communionem cum canali alterius generis.

SCHOL. III.

HInc,si loco canalis horizontalis nullus alius substituatur,sed aqua liberè possit cadere;huiusmodi canalis, licèt fundum habeat horizontaliter positum; non tamen præcisè leges exequitur canalium horizontalium;Cum etenim cadens à prædicto canali describat lineam parabolicā, ex ijs, quæ demonstrata sunt à subtilissimo Torricellio;euidens est aquam cadentem infinitas subire canalium inclinationes, pro vt eius figuræ, sunt infinitæ tangentes; ideoque canalem, qui pro horizontali habetur,communionem habere cum infinitis canalibus inclinatis;& consequenter omnium

nium proprietates identidem,& successiuè participare.

SCHOL. IV.

QVoniam tamen,quo minor est canalis applicati inclinatio,eo etiam semper minor est differentia inter altitudinem in prima sectione canalis inclinati, & altitudinem in horizontali; hinc,in parua inclinatione canalis applicati,fieri potest,insensibilem esse vtriusque altitudinis differentiam, nec vllo sensu perceptibilem; ideoque etiam physicè tanquam æqualem sumi posse, & canalem impropriè horizontalem, tanquam verè talem posse considerari.

SCHOL. V.

SI canalis huiusmodi horizontalis diuersa sit latitudo, sufficit vltimam sectionem ita coarctare,vt cæterarum minima sit,vel saltem minima non minor, vt per coroll. 2. prop. 5. lib. 5., eadem vbique sit altitudo.

PROP. II.

SI per lumen in sponda canalis horizontalis insculptum, cuius eadem vbiquè latitudo,deriuetur à canale aqua; infra lumen deprimetur Aquæ superficies: sed, si data sit proportio aquæ deriuatæ ad aquam totam canalis, & restringatur sectio infra lumen, ita vt, quam rationem habet Aqua tota ad aquam residuam in canale, eandem habeat latitudo viua sectionis e regione luminis,vel supra lumen, ad similem latitudinem sectionis inferioris;eadem pariter in vtraque sectione erit Aquæ altitudo.

Sit fundus canalis horizontalis ABCD, per quem fluat aqua in eodem statu manens, eiusque latera AC, BD sint paral- *Fig. 51.*

parallela,& per lumen GF deriuetur quælibet aquæ portio. Dico, fore vt superficies aquæ infra F deprimatur: at si coarctetur sectio EF, ita vt, quam proportionem habet Aqua transiens per sectionem AB ad aquam, quæ transire debet per sectionem EF,eandem habeat latitudo AB ad latitudinem HF. Dico,eandem fore,tam in AB,quàm in HF altitudinem; & si per lumen aliud IL deriuetur alia aquæ portio,& ita restringatur sectio ML, vt quam rationem habet Aqua per AB ad aquam per NL,ita sit AB ad NL.Dico, in AB,NL eandem fore altitudinem.

Ducatur enim HO parallela longitudini canalis BD, secans AB in O; Et quoniam OB est æqualis HF; erit ratio AB ad HF eadem,ac AB ad OB; sed vt AB ad HF,ita aqua per AB ad aquam residuam HF; ergo vt AB ad OB, ita aqua per AB ad aquam per HF; sed vt AB ad OB, ita aqua per AB ad aquam per OB; ergo vt aqua per AB ad aquam per OB, ita aqua per AB ad aquam residuam; & consequenter erit aqua per OB æqualis aquæ residuæ, quæ fluere debet per sectionem HF; Quare cum latitudines OB,HF sint æquales; erunt complexus velocitatum vnius perpendicularis in sectione OB,& vnius perpendicularis in sectione HF æquales; sunt autem perpendiculares dictæ, axes parabolarum (nam ab his circumscribitur complexus velocitatum naturalium) ergo cum parabolæ sint æquales,etiam axes,siue altitudines sectionum OB, HF æquales erunt. Eodem modo ostendetur, in sectione NL eandem fore aquæ altitudinem, ac in AB. Cum igitur,vt eadem sit aquæ altitudo in sectionibus AB,EF,opporteat,sectionem inferiorem EF coarctare in HF; sequitur laxata parte EH, & reliquis sectionibus inferioribus,aquam ita fluxuram, vt eius altitudo minor sit altitudine sectionis HF restrictæ,siue AB. Quod &c.

Corol. 1. *p.* 4. 1. *huius.*

*p.*14. 1. *huius.*

corol. 2. *p.*2.III. *huius.*

CO-

COROLLARIVM.

HInc sequitur,quòd,si à canale horizõtali aqua deriuãda sit per plura lumina lateribus canalis insculpta; si i a restringatur sectio infra lumen infimũ,ita vt,quam rationem habet aqua tota canalis ad aquam in canali residuam post distributionem,eandem habeat latitudo canalis ante distributionem, idest supra lumen superius ad latitudinem sectionis restrictæ infra lumen inferius; aqua supra hanc sectionẽ semper conseruabitur in eadem altitudine,non obstante multiplici aquæ egressu per diuersa lumina; siue canale sit regulare,siue irregulare, idest siue omnes sectiones naturales sint æquè latæ,siue non dummodo sectiones naturales non sint minores restrictis respectiuè.

COROL. II.

PAtet etiam, si in augmento aquæ eadem seruetur aquarum distributarum ad totam proportio, ac ante augmentum, etiam aquæ auctæ superficiem horizontalem fore, & eandem etiam in hoc casu vbique aquæ altitudinem; secus verò si prima proportio turbetur; nam restrictio canalis in sectione inferiori debet esse proportionata quantitati aquæ residuæ.

PROP. III.

SI in canale horizontali ita sit restricta sectio inferior, vt non obstante distributione aquarum facta per plura lumina superiùs aperta, quorum bases sint in eadem horizontali; aquæ superficies adhuc sit horizontalis; erit ratio aquarum fluentium per diuersa lumina semper eadem, & superficies aquæ semper horizontalis in quocunque aug-

Q men-

mento, vel decremento aquæ in canali.

Sit canalis horizontalis, cuius fundus DABC, & latitudo viua BA; sponda verò FC, in qua sint insculpta lumina superiùs aperta KH, NL, quorum bases HI, LM sint in eadem horizontali BC; sitq; restricta sectio inferior CD, v.g. in CE, ita vt superficies Aquæ supra CE sit horizontalis v.g. OR. Dico, etiamsi eleuetur superficies aquæ in FG, adhuc FG esse horizontalem, & proportionem, quam habet aqua per IP ad aquam per QM, eandem habere aquam per HK ad aquam per LN.

Quoniam enim eadem est aquæ altitudo, tam in sectione OA, quàm in luminibus PI, QM; erit quantitas aquæ per OA ad quantitatem per PI, vt BA ad HI. Eadem ratione, vt BA ad LM, ita quantitas per OA ad quantitatem per QM; & vt HI ad LM, ita quantitas per PI ad quantitatem per QM; & vt BA ad CE, ita quantitas per OA ad quantitatem per RE. Itaque cum aqua per OA æqualis sit aquis PI, QM, RE simul sumptis; erit & latitudo BA æqualis basibus HI, LM, CE simul sumptis; &, si CD sit æqualis BA, erit ED æqualis HI, LM simul sumptis. Diuidatur ergo ED in partes ES, SD æquales HI, LM; eruntque VS, SX æquales luminibus PI, QM; cum æquales sint altitudines VE, PH &c.

Intelligatur nunc aucta aqua vsque ad FG, & luminibus obstructis supponatur aperta tota sectio GD. Itaque quoniam BA, CD sunt æquales; erit altitudo FB æqualis altitudini CG, & sectio FA sectioni GD æqualis. Diuidatur sectio GD mediantibus lineis EY, ST latitudini CD perpendicularibus; ita vt sint veluti tres sectiones GE, YS, TD, eritque YS æqualis KH, & TD æqualis LN; & vt CD, siue AB ad CE, ES, SD, ita aqua tota, siue aqua per GD ad aquas per GE, per YS, per TD. Intelligantur, simul, & eodem tempore restricta sectio CD in CE, & aperta lumina KH, NL; & quoniam KH est æquale YS, et LN æquale TD, & alti-

altitudo eadem; erit aqua per KH æqualis aquæ priùs fluenti per YS; & aquæ priùs fluenti per TD æqualis erit aqua per NL. Tantundem ergo aquæ profundetur per sectiones GE, KH, NL, quantum priùs per sectionem GD; quare eadem manebit aquæ superficies; sed hæc priùs erat horizontalis; ergo etiam postea erit horizontalis. Permanentibus ergo æqualibus altitudinibus IK, MN; erit aqua per KH ad aquam per NL, vt HI ad LM; sed vt HI ad LM, ita aqua per PI ad aquam per QM; ergo vt aqua per KH ad aquam per NL, ita aqua per PI ad aquam per QM Quod &c. *Lemma sequeni.*

LEMMA.

SI per GE, LN, KH aquæ æqualis quantitas fluat, ac per FA. Dico non mutari aquæ superficiem.

Si enim mutaretur, vel attolleretur, vel deprimeretur: non primum; quia eleuatio aquę, vel supponit augmentum, quod est contra suppositum; vel minorem effluxum, quàm influxum, quod pariter est contra suppositum. Similiter nō secundum; quià depressio superficiei, vel supponit decrementum aquæ; vel maiorem effluxum, quàm influxum, quod vtrumque pariter est contra suppositum. Vlteriùs neque potest v.g. in GE deprimi, & in LN attolli; quia, cum omnia paria sint, nulla est ratio, cur potiùs hic, quā illic attollatur, aut deprimatur. Si ergo superficies aquæ nec attollitur, nec deprimitur, eandem manere necesse est. Quod &c.

SCHOLIVM.

VErum nihilominùs est, in concreto per sectionem GD nonnihilò maiorem aquæ quantitatem fluere, quam per tres sectiones GE, LN, KH; eo quod minor est deperditio, seu imminutio velocitatis facta à contactu, & confricio-

ctione ſpondarum,& fundi in ſectione integra FA,vel GD, quàm in ſectionibus GE, LN, HK; quæ licèt theoricè non conſideretur;practicè tamen obſeruanda venit. In hoc tamen caſu aquæ ſuperficies paulisper eleuabitur vbique æqualiter, & diſtributio proportionaliter fiet, niſi quatenus maius eſt impedimentum confrictionis in luminibus minoribus, quàm maioribus; cui incommodo etiam ſuccurri poteſt ex conſilio famigeratiſſimi Abbatis Caſtelli, ſi lumina cuncta æqualia ſint,& ſimilia (addamus nos etiam in eadem horizontali) & diſtributio fiat per aſſignationem plurium luminum in data ratione.

COROLLARIVM

SI ergo e canale horizontali eroganda ſit Aqua, & tota diſtribuenda iuxta proportionem datam ; ſufficit in ſectione artificiali datam latitudinem viuam in eadem ratione diuidere;v.g.Si aqua tota fluens per ſectionem artificialem canalis horizontalis, cuius latitudo viua AB, ita diuidenda,ſeu diſtribuenda ſit,vt quarum partium Titius habet 1, Sempronius habeat 3, Mæuius 5, Caius 7, Lucius 8, Annius 6, & reliqua pars aquæ per canalem fluxura ſit 60; Fiat omniũ ſumma,videlicet 90; & AB in partes totidem æquales diuidatur, quarum 60 tribuantur latitudini ſectionis CE infra lumina,per quæ debet fieri diſtributio;& lumina ſuperiùs aperta conſtituantur ſecundùm baſim fundo canalis congruentia;quorum baſis pro Titio ſit 1, pro Sempronio 3,& ſic de reliquis;hoc enim pacto, cum aquæ ſint proportionales latitudinibus,ſiue baſibus luminum in quacunque altitudine,& baſes ſint inter ſe in data proportione; erunt & aquæ inter ſe in proportione data;tam tota, quàm reſidua,quàm quæ per lumina conſtituta erogatur; cum ſupra lumina erogatoria æqualis ſemper aquæ altitudo conſeruetur,vt oſtenſum eſt.

SCHOL.

SCHOL. II.

AD effugiendum omnem ſcrupulum,præſtat luminibus ſingulis canales horizontales applicare conuenientis longitudinis, qualis videlicet remouere poſſit dubium mixtionis cum canale inclinato in ipſis luminibus. Et vt, quantum fieri poteſt, ſuppleatur exceſſus aquæ per maiora lumina; his longior canalis applicandus eſt, vt fluxui aquæ longius impedimentum addatur, & aquæ quantitas ſuperflua præcaueatur ; aut ſupra expoſito Caſtelliano artificio vtendum, pro vt occaſio vnum,aut alterum magis proficuum fore,docuerit.

PROP. IV.

SI è canale horizontali æqualis latitudinis aqua erogetur per plura lumina rectangula, & æquè alta infra ſuperficiem aquæ in ſponda canalis inſculpta, & in ſectione poſt lumina prædicta(ideſt ſumpta in parte canalis inferiori poſt lumina) ponantur in eodem, quo baſes luminum, plano horizontali, impedimenta æqualia,ſimilia,& ſimiliter poſita ſingulis luminum areis ; Aqua vſque ad inferiorem ſectionem conſeruabitur ſecundùm ſuperficiem in eadem linea horizontali; & erit in quocunque aquæ augmento eadem aquarum erogatarum proportio.

Sit canalis horizontalis, cuius fundus BADC æqualis vbique latitudinis;ſponda verò FC, in qua ſint inſculpta lumina rectangula PI,QM; quorum baſes HI, LM ſint in eadem horizontali,v.g. fundo canalis ; Et in ſectione GD iuxta lineam CD, ſumantur lineæ SD, SE æquales baſibus luminum HI, LM, & perpendiculares erigantur VE DX æquales altitudinibus, PH,QL, & compleatur rectangulum VD; ita vt SX ſit æquale PI,et VS æquale QM. Di- *Fig. 53.*

 co,

co, si VD concipiatur tanquam impedimentum; apectis luminibus PI, QM, aquæ superficiem fore horizontalem,& eandem esse proportionem aquæ per PI ad aquam per QM in quacunque altitudine.

Cum enim Canalis BADC sit æqualis vbique latitudinis; erit superficies v. g. OR parallela fundo BC; sicuti RZ parallela CD; quare OB, KH, LN, RC, YE, DZ æquales erunt; cum inter se sint parallelæ. Ablatis ergo æqualibus PH, LQ, EV, DX; remanebunt KP, NQ, YV, ZX æquales; quare sectiones VS, SX, PI, QM eandem supra se habebunt aquæ altitudinem; & cum sectiones sint similes, & æquales; consequenter earum velocitates mediæ æquales erunt, cum singularum velocitas media ea sit, quæ perpendicularis v.g. VE sub altitudine YE; quare quantitates aquæ per ipsas erunt inter se, vt latitudines; sed SD est æqualis HI, & ES est æqualis LM, ergo Aqua per SX æqualis erit aquæ per PI, & Aqua per VS æqualis aquæ per QM; Posito ergo simul VD impedimento, & apertis luminibus PI, QM, tantum aquæ fluet per reliquam sectionem RZXVEC, & per lumina PI, QM, quantum per integram sectionem GD priùs fluxerat, vel quãtum fluit per FA; ergo, per lemma antecedẽs, aquæ superficies non mutabitur, eritque eadem OR. Similiter ostendetur aucta altitudine in FG in canale libero, sine luminibus; & denuo apposito eodem impedimento VD, & apertis luminibus, non mutari horizontalem superficiem FG. Igitur cum superficies FG æqualiter sit eleuata supra omnia lumina; erunt velocitates mediæ singulorum æquales; ideoque quantitates aquæ in quacunque eleuatione, siue statu aquę, erunt inter se, vt lumina, & cum hęc sint ęquè alta; erunt quantitates aquę inter se, vt latitudines luminum in quacunque altitudine canalis. Quod &c.

SCHOL. I.

HInc patet regula distribuendi aquas, mediante erogatione e canalibus horizontalibus per lumina sub aqua latẽtia, & ita, vt semper eadẽ proportio seruetur in quacunque aquę altitudine; si enim sectio infra lumina, cuius latitudo ęqualis sit latitudini viuę sectionis supra lumina, impediatur apposito obice, cuius superficies aquæ fluxui opposita sit rectangula, & secundum basim congruens latitudini sectionis, v. g. CABD, cuius basis AB; & diuidatur per lineas EF, GH &c. in data ratione; fiantque lumina, secundùm basim congruentia fundo canalis in lateribus insculpta, ęqualia, similia, & similiter posita rectangulis AF, FG &c.; erogabunt hęc aquam in data ratione, vt demonstratum est. Vel positis luminum basibus iuxta fundum canalis, factaque omnium ęquali altitudine; latitudine verò iuxta concupitam proportionem; ex ijs omnibus simul copulatis componi poterit area impedimenti obijciendi aquæ fluxui in sectione infra lumina. *Fig. 54.*

SCHOL. II.

EAdem est demonstratio, si lumina sint alteriùs figuræ à rectangula, & sub diuersa altitudine; si .v. singulis impedimenta apponantur in sectione similia, æqualia, & similiter posita, ita vt tantundem aquæ impediant, quantum fluere debet per lumen sibi correspondens. Nos demonstrauimus propositionem iuxta faciliorem praxim, quæ nullo negotio in vsum reuocari potest.

SCHOL. III.

SImilis est ratio erogandi aquam e lacu, palude, reseruatorio &c.;nisi quòd nullo opus est impedimento; Cũ enim in huiusmodi Aquarum receptaculis superficies aquæ in eadem semper horizontali sit; patet, si luminum bases in eadem horizontali constituantur, & omnium æqualis sit altitudo,proportiones aquarum fore inter se, vt latitudines luminum; ideoque facillimam esse huiusmodi aquarum distributionem, eo planè modo, vt supra dictum est de erogatione e canalibus horizontalibus.

SCHOL. IV.

EX his, quæ demonstrata sunt,euidenter constare potest distributionem Aquarum, quæ fit per polices, vncias, quinarias &c.non esse permanentem; nisi erogatio fiat in loco,in quo eadem semper sit aquæ superficies, nullo pacto alterabilis; quod tamen rarò, aut nunquam continget; etenim si hæc eleuari,aut deprimi possit, plane constat, si ex. gr. quinaria, vt apud veteres,sumatur in mensura determinata,& absoluta in ordine ad aream luminis; hanc quinariam quidem eandem semper esse,sed quantitatem aquæ modò maiorem,modò minorem fore; si verò quinaria sumatur in mensura determinata,non in ordine ad aream luminis,sed in ordine ad certam aquæ quantitatem per lumẽ dato tempore præterfluentem; huiusmodi quinaria, modò plures,modò pauciores ab eodem lumine effundi, pro maiori, vel minori altitudine aquæ supra centra velocitatis luminum. Atq; admodum difficile est eandem superficiem in reseruatorio semper retinere per emissaria, & diuerticula, quorum fundus sit in plano superficiei, quam volumus in aqua permanentem; etenim, cum pro vario aquæ augmento ne-

to necesse sit,vt aqua supra dictum fundum fluat varia altitudine; & hæc regula sit, iuxta quam disponitur Aquæ superficies in reseruatorio; consequenter etiam varia erit aquæ superficies, iuxta varium aquæ incrementum; ita vt, meo saltem iudicio, difficillimum, si non impossibile, sit per machinam stabilem eandem semper aquæ superficiem retinere.

SCOL. V.

EX dictis pariter videtur concludi posse, si in canalibus inclinatis detur aliquod artificium, quo fiat, vt non obstante effluxu per lumina in lateribus insculpta,aquæ superficies fundo parallela sit in quacunque altitudine: erogationem fieri posse e canale inclinato, methodo, qua vsi sumus in canale horizontali.

SCHOL. VI.

HIusmodi autem artificium esse poterit, si canalis inclinatus diuidatur in plures veluti canales horizontales; vt si canalis AB inclinatus facessat in quatuor canales AF,CG,DH,EI horizõtales;aqua .n. post casus perpẽdiculares FC, GD &c. ferè statim disponitur ad altitudinem, quam exigit fluxus, supra fundos horizontales CG, DH &c.ita vt, loco conuenienti,insculpi possint in lateribus canalis lumina aquam distribuentia, iuxta concupitam proportionem. Alia esse poterunt in eundẽ finẽ artificia, vti diuerticula lateralia, in quibus aqua horizontaliter, cessante fluxu, se se æquilibrat, in quorum spondis lumina erogatoria disponi poterunt,vt supradictum est &c. Sed hæc,& alia relinquimus Practicorum iudicio pro occasione eligenda, aut inuenienda. *Fig. 55*

SCHOL.

SCHOL. VII.

SIcuti relinquimus applicationem huius Doctrinæ ad diuersos casus, qui in praxi possunt occurrere, cum ex hucusque ad abundantiam dictis, facilè quisque possit colligere methodum applicandi nostram doctrinam, pro vt tulerit conditionum varietas, & exigentia.

Finis Libri Sexti.

AP-

APPENDIX

De Tabula spatiorum velocitati debitorum.

IMperfectæ, nisi fortè penè ac inutiles videri potuissent nostræ hæ hydrometricæ speculationes, quas sex præhabitis libris exposuimus, si methodus determinandi spatia, quæ aqua certa velocitate affecta, certo tẽpore percurrere apta est, secundo libro propositione decima, nõ fuisset demonstrata; Sed & aliquid eius perfectioni defuisset, si Lectori, & experiendi onus, & calculandi tædium reliquissem. Ne igitur, saltem quantùm permittit tenuis mearum virium, & Ingenij modulus, vnquam publicæ vtilitati deesse n, statui ab initio Operis vnum, & alterum præstare, redigendo in Tabulam peculiarem spatia velocitati debita, determinando velocitatem à sua causa, videlicet, vel à descensu, vel à pressione; nam vtramque in idem coincidere, ex hucusque demonstratis abundè patet.

Verùm id faciendum hucusq; distuli, tum, vt ex pluries repetito experimento certius haberetur Tabulæ fundamentum; tum, ne ante perspectam eius vtilitatem, & necessitatem Tabula promeretur, non sine temporis, & laboris impendio constructa.

Eam igitur tandem damus, qua mediante, nullo ferè negotio, quorumlibet fluminum, iuxta à nobis demonstratã methodum, mensuræ calculus aggredi possit; cum consistat in sola multiplicatione areæ sectionis artificialis, seu Regulatoris, in spatium Velocitati mediæ debitum, quod ad singulas vncias altitudinis, siue descensus perpendicularis, ostendit Tabula; ita vt, tota ferè nostra Aquarum fluentiũ do-

doctrina in eius vsu versetur; & veluti compendio includatur.

Cæterùm, fundamentum, vsum, & applicationem, Tabulæ ipsi subdidimus; non minùs, vt facti rationem (vt conuenit) redderemus, quàm vt & demonstratione, & præceptis, & exemplo planam, facilemque Hydrometris Viam mensurandarum Aquarum fluentium, non solum aperiremus, sed & sterneremus, & a quibuscumque obicibus liberaremus.

TABVLA

Spatiorum Velocitati debitorum iuxta altitudinem, siue descensum Aquæ durante vno horæ minuto.

Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
	1	62	6	2	1	312	5
	2	88	4	2	2	318	7
	3	108	2	2	3	324	8
	4	124	11	2	4	330	7
	5	139	8	2	5	336	5
	6	153	0	2	6	342	2
	7	165	4	2	7	347	10
	8	176	8	2	8	353	5
	9	187	5	2	9	358	11
	10	197	7	2	10	364	4
	11	207	3	2	11	369	7
1	0	216	5	3	0	374	10
1	1	225	3	3	1	380	0
1	2	233	9	3	2	385	2
1	3	242	0	3	3	390	2
1	4	249	11	3	4	395	2
1	5	257	7	3	5	400	1
1	6	265	1	3	6	404	11
1	7	272	4	3	7	409	8
1	8	279	5	3	8	414	5
1	9	286	4	3	9	419	1
1	10	293	0	3	10	423	9
1	11	299	8	3	11	428	4
2	0	306	1	4	0	432	10

Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
4	1	437	4	6	9	562	4
4	2	441	9	6	10	565	9
4	3	446	2	6	11	569	2
4	4	450	6	7	0	572	7
4	5	454	10	7	1	576	0
4	6	459	1	7	2	579	5
4	7	463	4	7	3	582	9
4	8	467	6	7	4	586	1
4	9	471	8	7	5	589	5
4	10	475	10	7	6	592	9
4	11	479	11	7	7	596	0
5	0	483	11	7	8	599	3
5	1	488	0	7	9	602	6
5	2	491	11	7	10	605	9
5	3	495	11	7	11	608	11
5	4	499	10	8	0	612	2
5	5	503	8	8	1	615	4
5	6	507	7	8	2	618	6
5	7	511	4	8	3	621	8
5	8	515	2	8	4	624	9
5	9	519	0	8	5	627	11
5	10	522	9	8	6	631	0
5	11	526	5	8	7	634	1
6	0	530	2	8	8	637	2
6	1	533	10	8	9	640	2
6	2	537	5	8	10	643	3
6	3	541	1	8	11	646	3
6	4	544	8	9	0	649	3
6	5	548	3	9	1	652	3
6	6	551	9	9	2	654	3
6	7	555	4	9	3	658	3
6	8	558	10	9	4	661	2

Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
9	5	664	2	12	1	752	4
9	6	667	1	12	2	754	11
9	7	670	0	12	3	757	6
9	8	672	11	12	4	760	1
9	9	675	10	12	5	762	8
9	10	678	8	12	6	765	2
9	11	681	7	12	7	767	9
10	0	684	5	12	8	770	3
10	1	687	3	12	9	772	10
10	2	690	1	12	10	775	4
10	3	692	11	12	11	777	10
10	4	695	9	13	0	780	4
10	5	698	6	13	1	782	10
10	6	701	4	13	2	785	4
10	7	704	1	13	3	787	10
10	8	706	10	13	4	790	3
10	9	709	7	13	5	792	9
10	10	712	4	13	6	795	2
10	11	715	1	13	7	797	8
11	0	717	10	13	8	800	1
11	1	720	6	13	9	802	6
11	2	723	3	13	10	805	0
11	3	725	11	13	11	807	5
11	4	728	7	14	0	809	10
11	5	731	3	14	1	812	2
11	6	733	11	14	2	814	7
11	7	736	7	14	3	817	0
11	8	739	3	14	4	819	5
11	9	741	11	14	5	821	9
11	10	744	6	14	6	824	2
11	11	747	1	14	7	826	6
12	0	749	9	14	8	828	10

Altitudo Aqua in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aqua in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
14	9	831	2	17	5	903	3
14	10	833	7	17	6	905	5
14	11	835	11	17	7	907	6
15	0	838	3	17	8	909	8
15	1	840	7	17	9	911	10
15	2	842	10	17	10	914	0
15	3	845	2	17	11	916	1
15	4	847	6	18	0	918	3
15	5	849	9	18	1	920	4
15	6	852	1	18	2	922	6
15	7	854	4	18	3	924	7
15	8	856	8	18	4	926	8
15	9	858	11	18	5	928	9
15	10	861	2	18	6	930	11
15	11	863	5	18	7	933	0
16	0	865	9	18	8	935	1
16	1	868	0	18	9	937	2
16	2	870	3	18	10	939	2
16	3	872	5	18	11	941	4
16	4	874	8	19	0	943	5
16	5	876	11	19	1	945	5
16	6	879	2	19	2	947	6
16	7	881	4	19	3	949	7
16	8	883	7	19	4	951	7
16	9	885	9	19	5	953	8
16	10	888	0	19	6	955	9
16	11	890	2	19	7	957	9
17	0	892	4	19	8	959	9
17	1	894	6	19	9	961	10
17	2	896	9	19	10	963	10
17	3	898	11	19	11	965	10
17	4	901	1	20	0	967	11

Altitudo Aqua in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aqua in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
20	1	969	11	22	9	1032	4
20	2	971	11	22	10	1034	2
20	3	973	11	22	11	1036	1
20	4	975	11	23	0	1037	11
20	5	977	11	23	1	1039	10
20	6	979	11	23	2	1041	8
20	7	981	11	23	3	1043	7
20	8	983	10	23	4	1045	5
20	9	985	10	23	5	1047	4
20	10	987	10	23	6	1049	2
20	11	989	10	23	7	1051	0
21	0	991	10	23	8	1052	11
21	1	993	9	23	9	1054	9
21	2	995	9	23	10	1056	7
21	3	997	8	23	11	1058	5
21	4	999	8	24	0	1060	3
21	5	1001	7	24	1	1062	1
21	6	1003	6	24	2	1063	11
21	7	1005	6	24	3	1065	9
21	8	1007	5	24	4	1067	7
21	9	1009	4	24	5	1069	5
21	10	1011	3	24	6	1071	3
21	11	1013	3	24	7	1073	1
22	0	1015	2	24	8	1074	11
22	1	1017	1	24	9	1076	9
22	2	1019	0	24	10	1078	6
22	3	1020	11	24	11	1080	4
22	4	1022	10	25	0	1082	2
22	5	1024	8	25	1	1083	11
22	6	1026	7	25	2	1085	9
22	7	1028	6	25	3	1087	6
22	8	1030	5	25	4	1089	4

Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*		*Altitudo Aquæ in mensura pedis Bononien.*		*Spatium Velocitati debitum in mens. pedis Bononien.*	
Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ	Pedes	Vnciæ
25	5	1091	1	27	9	1140	1
25	6	1092	10	27	10	1141	10
25	7	1094	8	27	11	1143	6
25	8	1096	6	28	0	1145	3
25	9	1098	3	28	1	1146	11
25	10	1100	0	28	2	1148	7
25	11	1101	10	28	3	1150	4
26	0	1103	7	28	4	1152	0
26	1	1105	4	28	5	1153	9
26	2	1107	1	28	6	1155	5
26	3	1108	10	28	7	1157	1
26	4	1110	7	28	8	1158	9
26	5	1112	5	28	9	1160	6
26	6	1114	2	28	10	1162	2
26	7	1115	11	28	11	1163	10
26	8	1117	8	29	0	1165	6
26	9	1119	4	29	1	1167	2
26	10	1121	1	29	2	1168	10
26	11	1122	10	29	3	1170	6
27	0	1124	7	29	4	1172	2
27	1	1126	4	29	5	1173	10
27	2	1128	1	29	6	1175	6
27	3	1129	9	29	7	1177	2
27	4	1131	6	29	8	1178	10
27	5	1133	3	29	9	1180	6
27	6	1134	11	29	10	1182	1
27	7	1136	8	29	11	1183	9
27	8	1138	5	30	0	1185	5

FVN-

FVndamentum suprapositæ Tabulæ habetur in prop. 10. l. 2. huius tractatus, & à sequenti experimẽto, cuius ibidẽ meminimus, & quod, dum superiora sub prælo essent; die videlicet 7 labentis Augusti, denuo institutum est Amicis compluribus auxilium præstantibus; & præsentiam suam summa benignitate largiente Illustrissimo, & eximio huius vrbis Senatore Com. Hieronymo Bentiuolo.

Reseruatorio enim aqua pleno fistula aptata est talis, qualem descripsimus prop. 1. lib. 2.; sed cuius lumen ærea lamella insculptum quadratum erat, cuius latus vnius vnciæ quadrantem æquabat; & ita constituebatur, vt latus inferius, siue basis luminis, & horizontalis esset, & infra aquæ supremam superficiem demergeretur ped. 3, vnc. 11 præcisè; adeo vt eius centro incumberent ped. 3. vnc. 10. $\frac{7}{8}$ aquæ (confundo hic centrum figuræ cum centro velocitatis, cum insensibiliter discrepent.) Rebus sic constitutis, 65 vibrationum tempore, quæ in meo horologio authomato minutum horæ æquant; hausta aqua per supradictum lumen, eadem aquæ seruata superficie, detracto vasis pondere, fuit lib 32. vnc 10, & octies repetito experimento, semper eadem absque vlla variatione, reddita est aquæ quantitas: Exinde ponderauimus aquam contentam vase æreo, cuius interna cauitas cubica, eiusque latus vnica vna præcisè; hæc in libra exactissima pependit vnciam vnã, grana 146., idest grana 786.

His suppositis sequentia calculo manifesta fiunt. Diuisis libris 32. vnc. 10. aquæ, idest vnc. 394. siue gran. 252. 160. per 786. grana, pondus vnciæ cubicæ aquæ, prodeunt vnciæ cubicæ aquæ haustæ dicto tempore 320 $\frac{320}{393}$. Quare hæc aqua conformata in prisma rectum, cuius basis vncia vna quadrata, habebit longitudinem, siue altitudinem vnc. 320 $\frac{320}{393}$, & consequenter, si intelligatur conformata in prisma rectum, cuius basis $\frac{1}{4}$ vnciæ; habebit sextidecuplam altitudinem, quoniam quadrans vnciæ quadratus est subsextidecuplus vnciæ quadratæ; Erit igitur altitudo secundi prisma-

matis vnc.5133 $\frac{11}{393}$, idest ped. 427., vnc.9. $\frac{11}{393}$, quæ erit velocitas media, siue spatium debitum velocitati aquæ sub altitudine ped.3., vnc. 10 $\frac{7}{8}$. Si ergo fiat, vt vnciæ 46 $\frac{7}{18}$ ad vncias 47, ita quadratum vnciarum 5133 $\frac{11}{393}$, idest 26.347.976 ad quadratum 26.418.237; huius radix vnc.5140. siue ped.428., vnc.4. erit spatium debitum velocitati sub altitudine aquæ vnc.47., siue ped.3. vnc.11. Eodem pacto reliquæ velocitates pro singulis altitudinibus in Tabula expressis inuentæ sunt ex experimento prædicto.

Si quis minùs fidat nostræ obseruationi, quæ est radix totius Tabulæ, vel dubitet diuersam esse vnius, vel alterius aquæ ad motum promptitudinem, & fluxibilitatem, sicuti diuersum est huius, vel illius pondus; poterit hic experimenta repetere, & sibi Tabulam conficere exactiorem, & proportionatam suæ aquæ mensurandæ fluiditati, in quo tamen longius calculi tædium, & præsertim radicum extractionem vitabit, cum ex nostra Tabula per solam regulam proportionum spatia debita velocitati ex proprio experimento quilibet possit commutare. Nobis interim sufficiet methodum indicasse, quo spatia huiusmodi manifestari possint, & Tabulam condidisse nostris experimentis superstructam, quam vltra pedum triginta profunditatem non produximus; quia rarò ad maiorem altitudinem excrescunt flumina, saltem in nostra Europa; immò, si sola velocitas centri velocitatis attendenda sit; valere poterit in Canalibus horizontalibus, ijsque, qui ad horum instar sunt vsque ad altitudinem Aquæ pedum 67. $\frac{1}{2}$.

Vsus igitur Tabulæ est. Quoties spatium debitum velocitati inquiritur; inueniatur altitudo aquæ in columna sinistra; & in area secundæ columnæ e regione apparebit spatium, quod Aqua percurret spatio vnius minuti horarij, quo vtendum erit, vt supra varijs locis, in primis verò in regula generali exposuimus: Et si altitudo aquæ præcisa non inueniatur, absque errore sensibili, pars proportionalis competens excessui, vel deffectui inuenienda erit per regulam proportionum; & addenda, vel demenda à maiori, vel minori spatio in Tabula adinuento; pro vt altitudo inuenta-

eam,

eam, quæ in Tabula habetur superat, vel ab ea defficit, vt in Tabulis sinuum, alijsque consimilibus assolet.

Vt verò cuncta exemplo manifesta fiant; tria huiusmodi addemus, quæ loco præceptorum esse poterunt; sicuti ea in præcepta distinximus: Primum in Canale inclinato: Secundum in Canale horizontali; vtrumque prout allatæ demonstrationes exigunt: Et tertium iuxta methodum Regulæ generalis, vt in omnibus casibus vsus Tabulæ, & nostra Aquarum mensurandarum praxis elucescat.

EXEMPLVM PRIMVM.

In Canale inclinato.

SIt Canalis inclinatus (*Fig.* 17.) AB, cuius Aqua in sectione B mensuranda sit; sitque altitudo aquæ BC pedes 10, latitudo sectionis pedes 50; velocitatis verò B ad C proportio, vt 4 ad 1.

I. Inueniatur altitudo axis BD; factis videlicet velocitatum 4, & 1 quadratis, idest 16, & 1; inuentaq; eorũ differentia 15, fiat vt 15 ad quadratum minoris velocitatis 1, ita 10 ad $\frac{2}{3}$; eritque DC $\frac{2}{3}$ pedis, siue vnciæ 8, & tota BD ped. 10. vnc. 8.

II. Inueniatur complexus velocitatum, idest spatium parabolicum BCHE ducendo BD ped. 10, vnc. 8; idest vnc. 128 in $\frac{2}{3}$ velocitatis BE 4, (siue, in mensura pedum, vnc. 48.) scilicet vnc. 32; fietque productum 4096. Similiter ducãtur $\frac{2}{3}$ velocitatis CF ped. 1, siue vnc. 8. in DC vnc. 8; & productum 64 subtrahatur à 4096; eritque differentia 4032 spatium parabolicum BCHE.

III. Inueniatur velocitas media KG diuidendo spatium BCHE 4032 per altitudinem BC ped. 10, scilicet vnc. 120 & quotiens vnc. 33 $\frac{3}{5}$, siue abstractè ped. 2. $\frac{4}{5}$, erit velocitas media quæsita.

IV. Inueniatur axis DK faciendo vt quadratum velocitatis

S ma-

maximæ BE 4, videlicet 16 ad quadratum velocitatis mediæ postremò inuentæ $2\frac{4}{5}$, idest $7\frac{21}{25}$, ita totus axis BD ped. 10, vnc. 8 ad portionem axis DK ped. 5, vnc. $2\frac{18}{25}$; eritque K centrum velocitatis.

V. Inueniatur (*Fig.* 19.) KH altitudo aquæ supra centrum velocitatis; siue potiùs descensus perpendicularis eiusdem centri K, siue H, resoluendo triangulum rectangulum KDH, in quo hypotenusa DH est ped. 5, vnc. $2\frac{18}{25}$, & angulus inclinationis DHR supponitur v. g. gr. 2; & prodibit latus quæsitum KH ped. 5, vnc. $2.\frac{53261}{78125}$

VI. Adeatur Tabula superior Spatiorum &c. & inueniatur spatium debitum velocitati sub altitudine ped. 5, vnc. $2\frac{53261}{78125}$; & quoniam pro altitudine ped. 5. vnc. 2 spatium est ped. 491. vnc. 11. & pro pedibus 5, vnc. 3 pedes 495, vnc. 11; differentia erit ped 4, & pars proportionalis pro $\frac{53261}{78125}$ erit ped. 2, vnc. 8, qui additi pedibus 491, vnc. 11, summam efficient ped 494, vnc. $7\frac{56528}{78125}$, quæ erit spatium velocitati debitum sub altitudine, vel descensu ped. 5, vnc. $2.\frac{53261}{78125}$

VII. Fiat area sectionis multiplicando altitudinem ped. 10 in latitudinem ped. 50; quæ erit 500 pedum quadratorum.

VIII. Tandem ducatur hæc area in pedes 494 vnc. $7\frac{56528}{78125}$, & productum 247321 erit numerus pedum cubicorum aquæ transeuntium per datam sectionem durante minuto temporis.

EXEMPLVM II.

In Canale purè horizontali.

FAcillimus est calculus mensuræ Aquarum fluentium in Canale purè horizontali, vt potè qui planam præsefert inuentio-

tionem centri velocitatis, & altitudinis aquæ supra ipsum; super quibus, veluti super duobus polis, aquarum mensura versatur. Attamen, vt huius etiam mensuræ exemplum, simul & præcepta tradamus, assumemus data sequentia.

Refert Eruditissimus Ioannes Boterus in relatione, quam habet de Mari, ipsius opusculis inserta; quærens quantum Aquæ in Pontum Euxinum ingerat vnius anni spatio Danubius; refert, inquam, huius latitudinem maximam ad vnum milliare, siue, iuxta Bononiensem mensuram, pedes 5000 extendi; profunditatem verò esse brachiorum 8, aut 10 (ponamus iuxta medietatem arithmeticam brachia 9 quæ ad eandem mensuram redacta, sunt pedes 15) velocitatem verò esse saltem trium milliarium in quamlibet horam. Ex quibus concludit vnius anni curriculo in idem mare profundi primia aquæ, cuius basis area sectionis, longitudo verò 26.352 milliaria, seu si ponamus 9 brachia pro altitudine, vti supra, correspondentia pedibus 15; ita vt area sectionis sit ped. 75.000; quoniam longitudo prædictorum milliarium 26.352 est ped. 131.760.000, deprehendetur tota quantitas aquæ vnius anni ped. cub. 9.882.000.000.000. Videamus igitur, an respondeat Boteri calculus sequenti iuxta nostram superiùs demonstratam methodum concinnato.

Supponamus autem, suam maximam latitudinem habere Danubium non longè à mari; & consequenter ob eius longissimum cursum, in situ, quo, vel horizontalis sit, vel quasi; ita vt aluei decliuitas, si quæ sit, nihil impediat, quò minùs tanquam horizontalis assumi queat; & ex supra enaratis datis ---

I. Inueniatur centrum velocitatis, sumendo videlicet 9 pedum 15; eruntque ped. $6\frac{2}{3}$, siue ped. 6, vnc. 8, & tantundem erit demersum centrum velocitatis L (*Fig.* 28.) infra aquæ superficiem.

II. Inueniatur in Tabula Spatiorum &c. sub altitudine ped. 6, vnc. 8, spatium velocitati debitum, quod erit ped. 558, vnc. 10.

III. Fiat area sectionis multiplicando DE ped. 5. 000 in DC

ped.15 altitudinis,& prodibit ped.75.000.

IV. Hæc area ducatur in ped. 558, vnc. 10, & habebitur productum 41.912.500.pro numero pedum cubicorum fluentium in Danubio intra horæ minutum .

Si dictus numerus 41.912.500 *multiplicetur per* 60 *minuta, ex quibus componitur hora, fient* 2.514.750.000.*& si denuo hic multiplicetur per* 24 *horas vnius diei, prodibunt ped.cub.*60.354.000.000 *& si hi rursus per dies anni* 366.(*vt apud Boterum*) *multiplicentur; exurgent* 22.089. 564. 000. 000.*pro totidem pedibus cubicis Aquæ à Danubio in mare integro anno deuolutis; supra duplum pluribus, quàm Boterus ex sola velocitate superficiei considerata eliciat.*

EXEMPLVM III.

In Canale quocunque iuxta methodum regulæ generalis Lib. IV.

SIt Canalis quilibet, vel horizontalis, vel inclinatus, cuius aqua fluens per aliquam sectionem proportionatam, mensuranda sit.

Aptatis omnibus, quæ ad hanc operationem necessaria esse diximus in Regula generali, & demissa cataracta infra aquæ superficiem; postquam Aqua altitudinem manentem acquisiuerit, supponatur profunditas Aquæ obseruata à superficie ad fundum regulatoris esse ped.10; à fundo autem regulatoris ad imum cataractæ ped.8, vnc.4, latitudo sectionis ped.20; inclinatio verò canalis grad. 5. Super quibus fundamentis ---

I. Inueniatur velocitatum fundi, & superficiei, idest (*Fig.36.*) B,& F proportio, idest supponendo, quod velocitas BH sit 9, per regulam proportionum fiat, vt KB distantia superficiei Aquæ à fundo regularis ped.10, vel vnc.120 ad FB distantiam fundi regulatoris ab imo cataractæ ped.8, vnc.4, siue vnc.100, ita quadratum velocitatis fundi 6, scilicet 36, ad quadratum velocitatis superficiei 30, cuius radix $5\frac{1}{2}$; eritque proportio vtriusque velocitatis BH, FI ea, quam habet 6 ad $5\frac{1}{2}$.

II. Inueniatur complexus velocitatum aquæ fluentis sub cataracta per sectionem, siue lumen EB, siue spatium parabolicum BFIH ducendo $\frac{2}{3}$ velocitatis maximæ BH 6, idest 4 in altitudinem BK vnc. 120; eritque productum 480 area parabolæ BKH; & similiter ducendo $\frac{2}{3}$ velocitatis KF $5\frac{1}{2}$, idest $3\frac{2}{3}$ in altitudinem FB vnc.20, & productum $73\frac{1}{3}$ erit area parabolæ KFI, quarum parabolarum differentia $406\frac{2}{3}$ erit spatium parabolicum BFIH quæsitum.

III. Hoc spatium parabolicum inuentum $406\frac{2}{3}$ diuidatur per BF vnc. 100, & prodibit quotiens $4\frac{1}{15}$ pro velocitate media MN.

IV. Ad inueniendum centrum velocitatis, fiat, vt quadratum velocitatis maximæ BH; idest 36 ad quadratum velocitatis mediæ MN postremò inuentæ $16\frac{121}{225}$, ita axis KB vnc.120 ad portionem axis, siuè altitudinem KM vnc.$55\frac{17}{135}$ siue ped.4, vnc. $7\frac{17}{135}$ locum, siue centrum velocitatis mediæ M tantundem demersum sub aquæ superficie.

Si Canalis sit horizontalis, siue si sponda regulatoris simul,& plano fundi canalis, & horizonti erecta sit; transeundum immediatè ad præceptum sextum; & vtendum altitudine prædicta ad inuenendum in Tabula spatium &c; si verò sit inclinatus -

V. Quoniam supponitur angulus inclinationis canalis gr.5. Inueniatur altitudo Aquæ supra centrum velocitatis, resoluendo triangulum KHD, in quo data est hypotenusa HD ped.4, vnc. $7\frac{17}{135}$, & præter angulum rectum ad K, etiam angulus H gr.5; & exurget latus KH ped.4, vnc. $6\frac{618200}{675000}$, siue altitudo aquæ supra centrum velocitatis .

VI.

VI. In Tabula ſpatiorum &c. inueniatur Spatium velocitati debitum, iuxta inuentam altitudinem ped. 4, vnc 6. $\frac{6182299}{6750000}$, quod addita parte proportionali, erit ped. 462, vnc. 11 $\frac{4797249}{6750000}$.

VII. Fiat area ſectionis ped. 166 $\frac{2}{3}$

VIII. Et Vltimò multiplicetur area ſectionis 166 $\frac{2}{3}$ in ſpatium &c. inuentum ped. 462, vnc. 11. $\frac{4797249}{6750000}$, & productum 77162, vnc. 421 oſtendet numerum pedum cubicorum aquæ fluentium in dato canale, dicto tempore vnius minuti.

F I N I S.

D E
SPHÆRA
Et Solidis Sphæralibus

LIBRI DVO

In quibus Archimedis Doctrina de Sphæra, & Cylindro denuo componitur, latiùs promouetur,

Et in omni ſpecie ſolidorum, quæ vel circa, vel intra Sphæram, ex conuerſione poligonorum regularium gigni poſſint, vniuerſaliùs Propagatur.

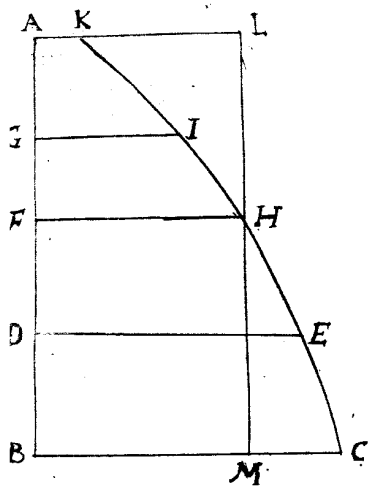
AUCTORE

EVANGELISTA TORRICELLIO

Sereniſsimi Magni Ducis Mathematico.

Ad Aquarum Fluentium Mensuram. Tab.a I.

fig.ra 1.a



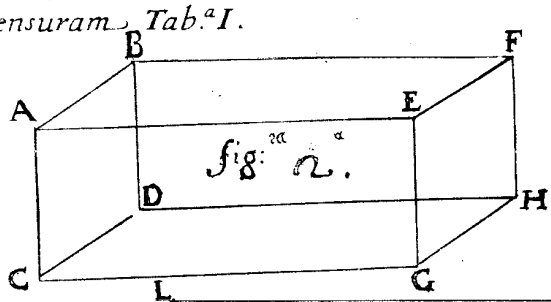


fig.ra 2.a

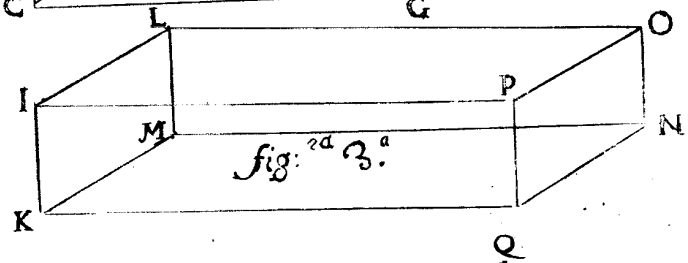


fig.ra 3.a

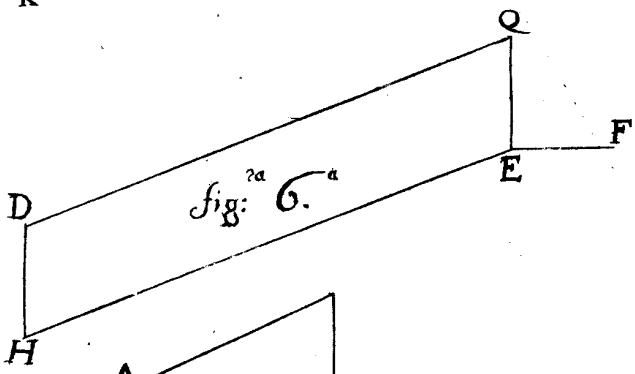


fig.ra 6.a

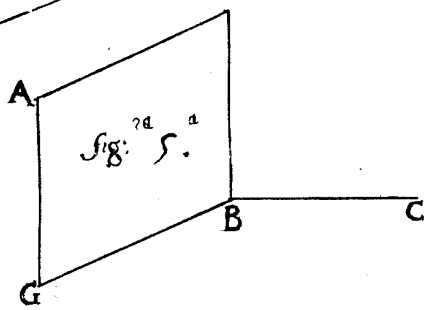


fig.ra 5.a

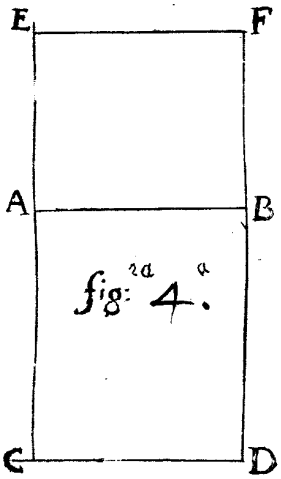


fig.ra 4.a

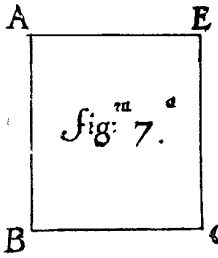


fig.ra 7.a

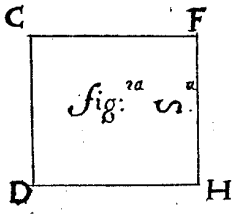
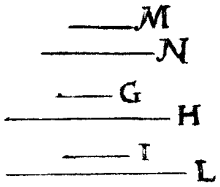
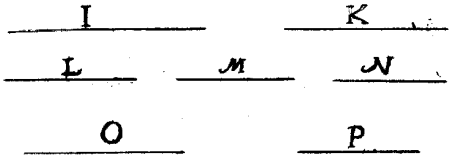


fig.ra 8.a





Ad Aquarij Fluent. Mens. Tab. II.

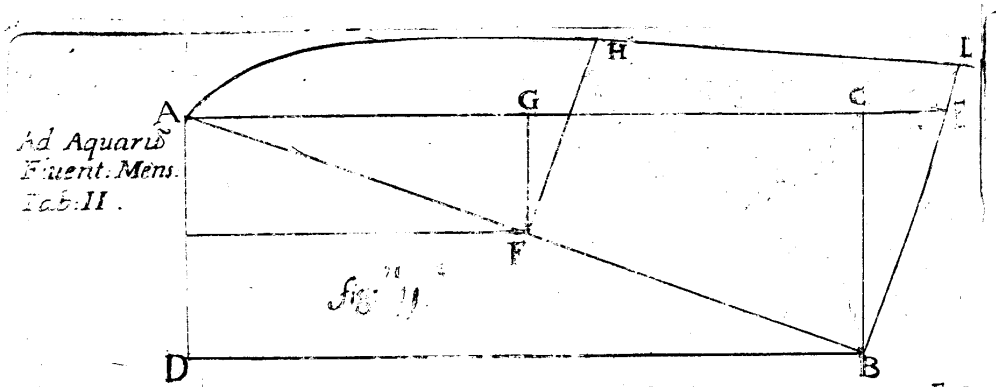


fig. 1a 11.

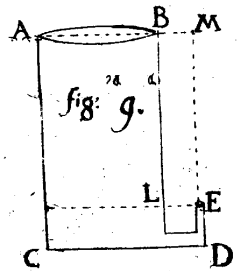


fig. 1a 9.

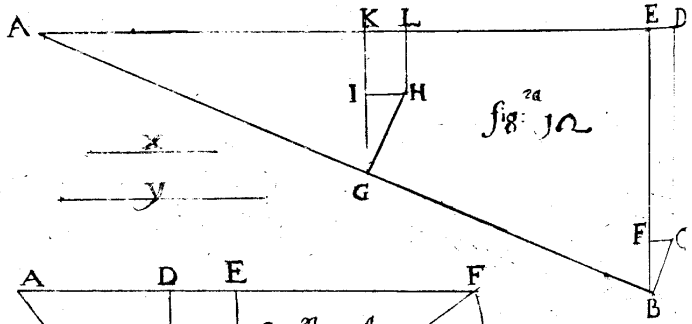


fig. 1a 12

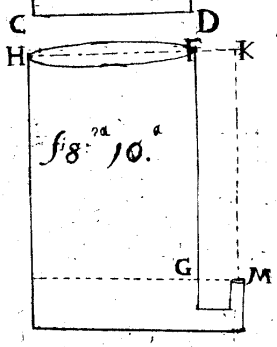


fig. 1a 10.

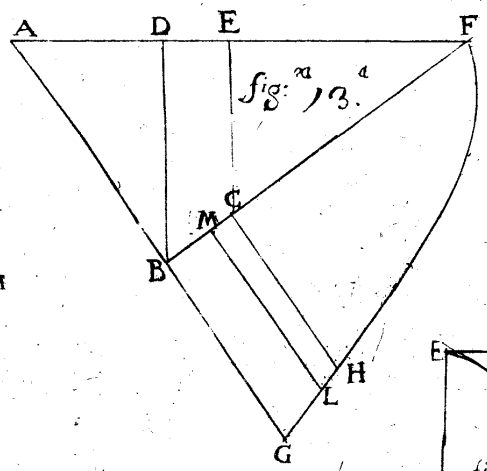


fig. 1a 13.

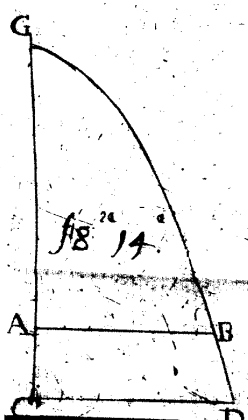


fig. 1a 14.

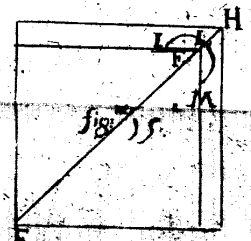


fig. 1a 15.

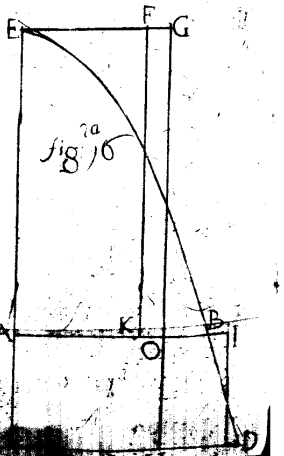


fig. 1a 16

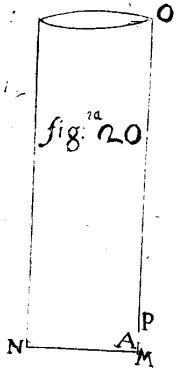


fig. 1a 20

Ad Aq. Fluent. Mens. Tab. III

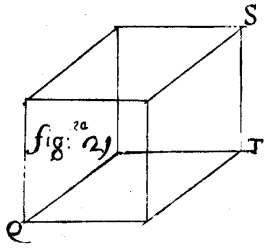


fig. 1a 21

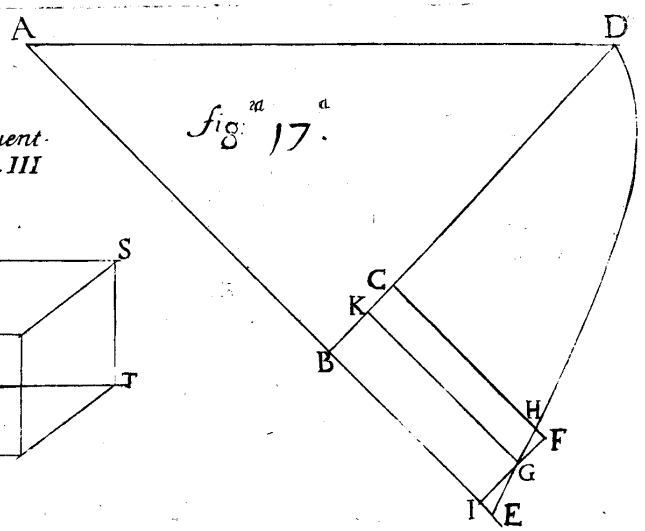


fig. 1a 17.

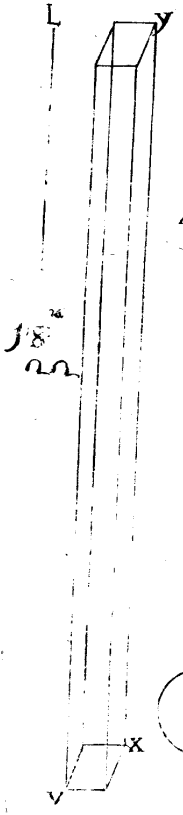


fig. 1a 22

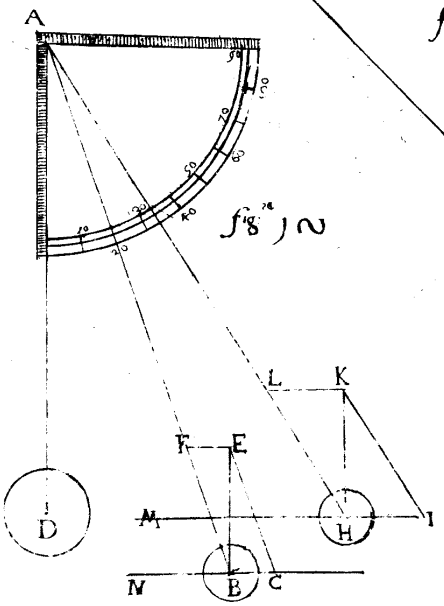


fig. 1a 18

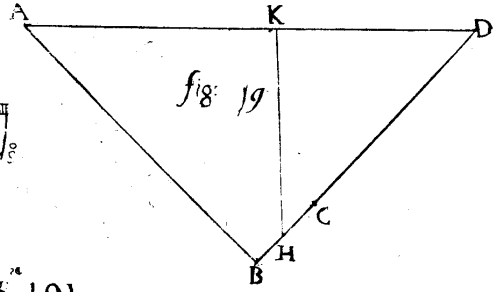


fig. 19

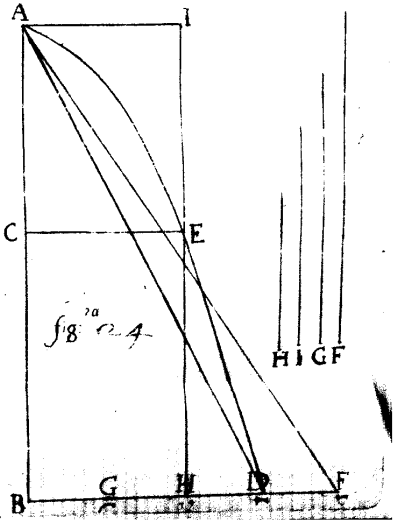


fig. 1a 24

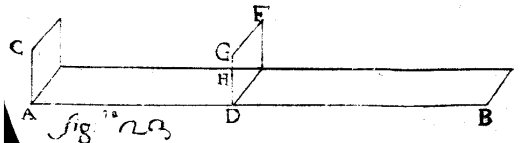


fig. 1a 23

fig.ra 25

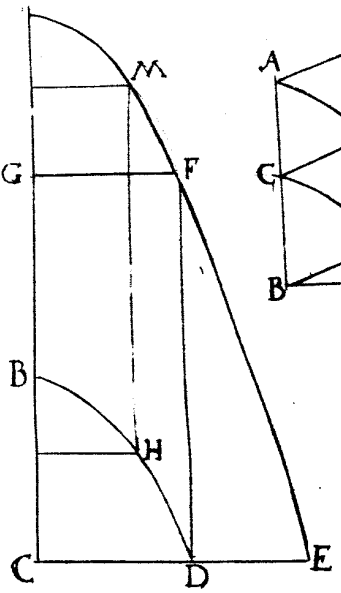


fig.ra 26

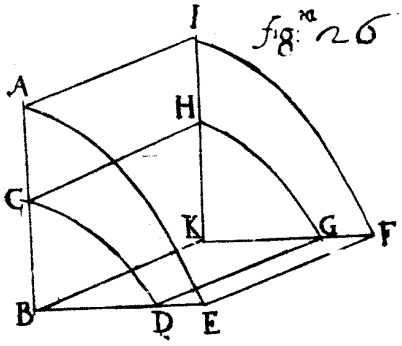


fig.ra 27

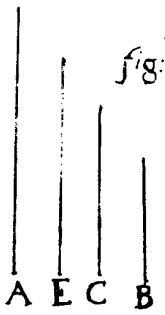
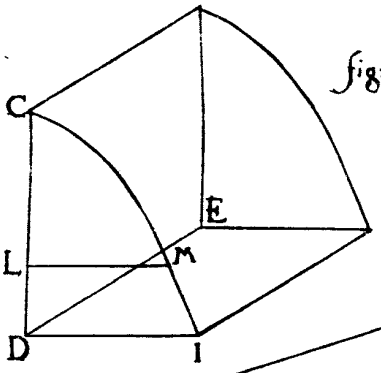


fig.ra 28



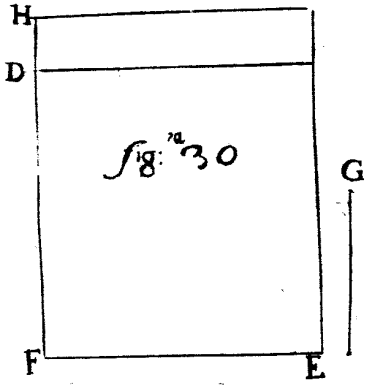


fig.ra 30

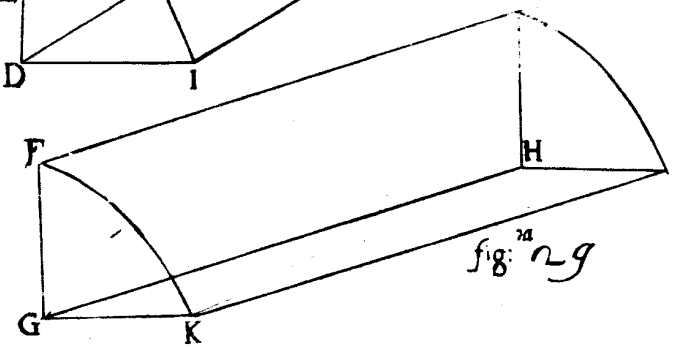


fig.ra 29

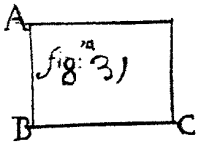
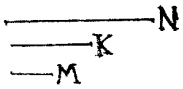
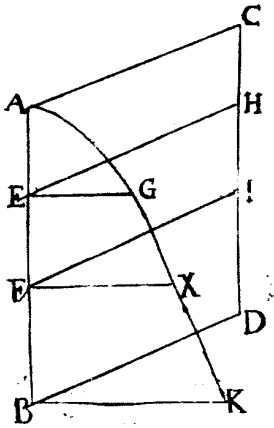


fig.ra 31





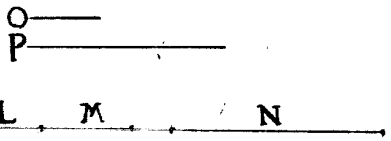


fig.ra 32

Ad Aq. Fluent. Mens. Tab. V

fig.ra 33

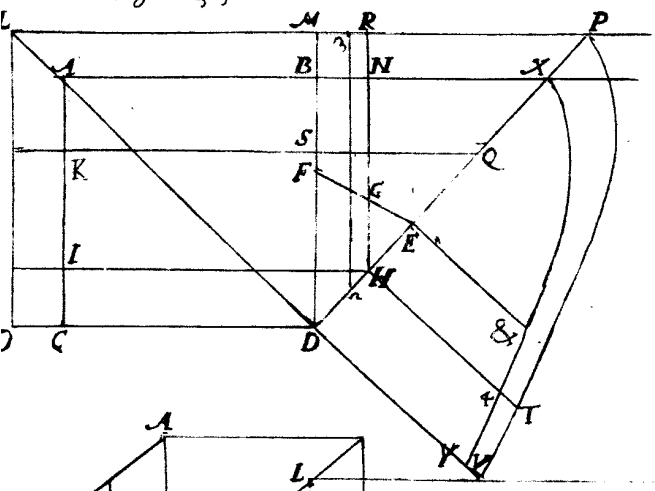
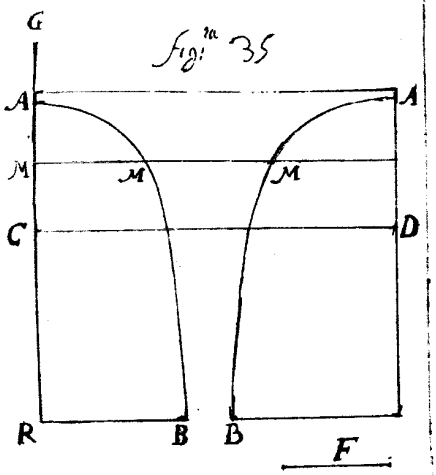


fig.ra 35



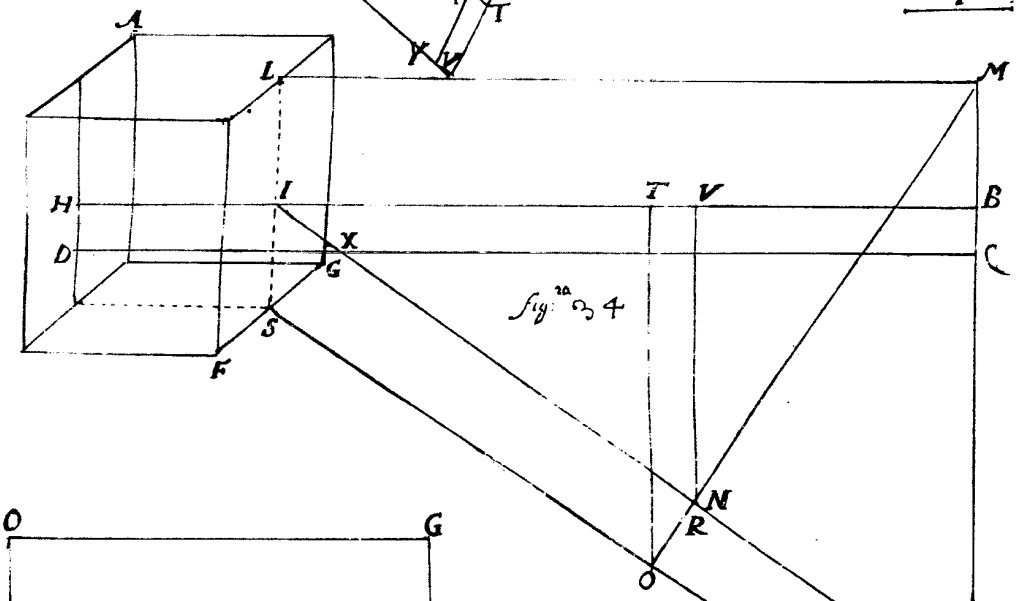


fig.ra 34

fig.ra 36

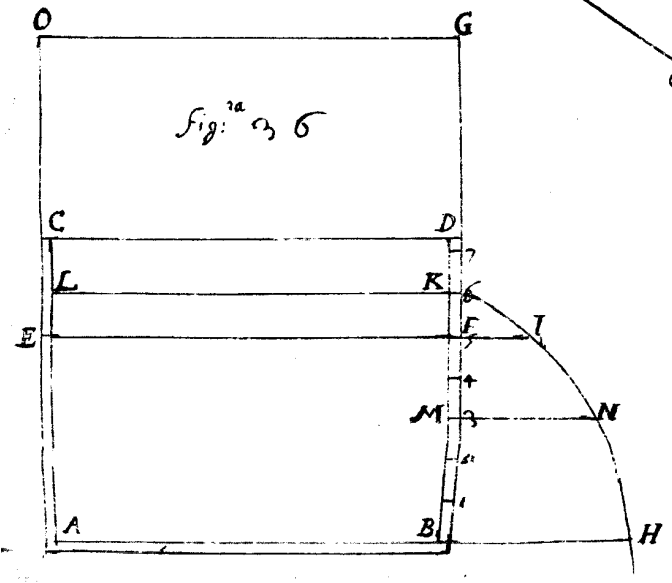
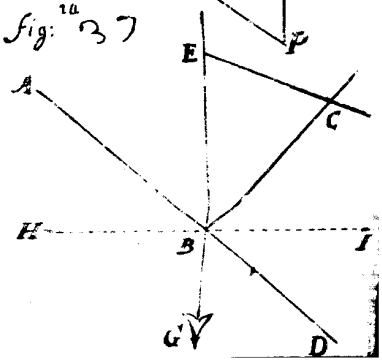


fig.ra 37



Ad Aq. Fluent. Mens. Tab. VI

fig: 38

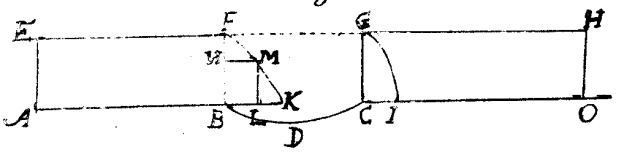


fig: 40

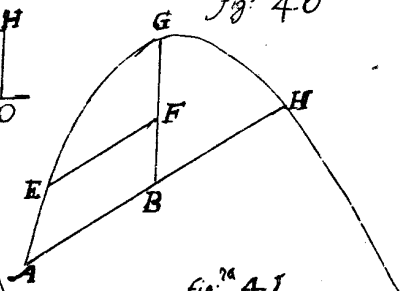


fig: 39

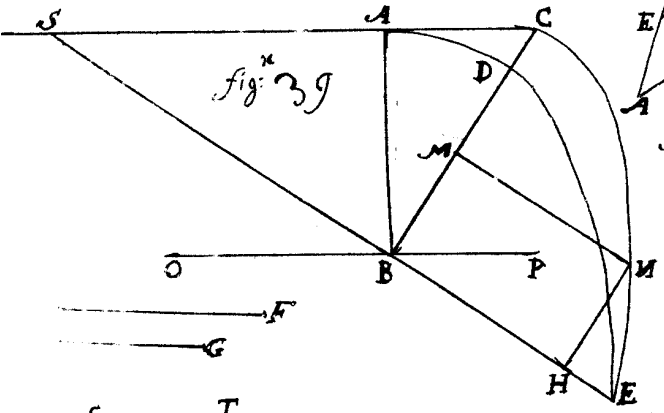
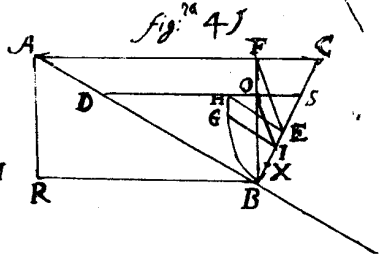


fig: 41



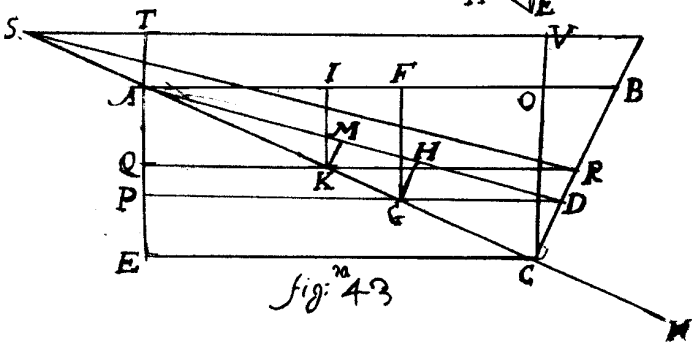
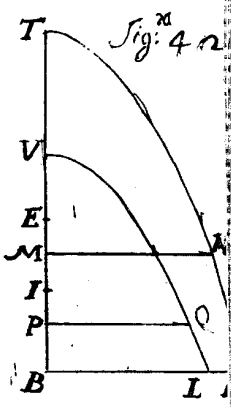


fig: 43

fig: 42



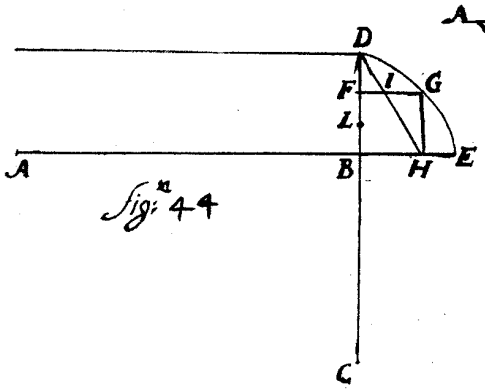


fig: 44

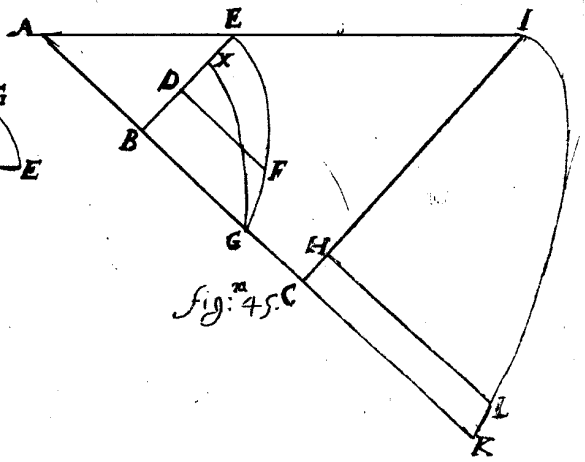


fig: 45

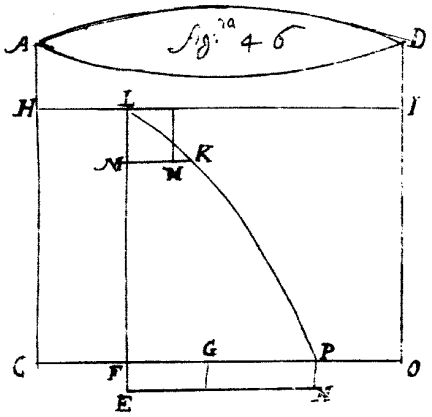


fig.ra 46

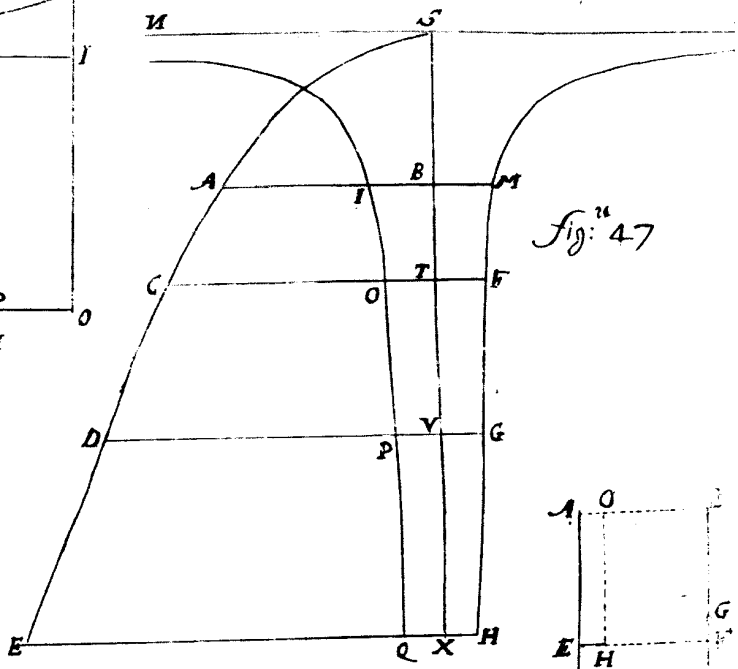


fig.ra 47

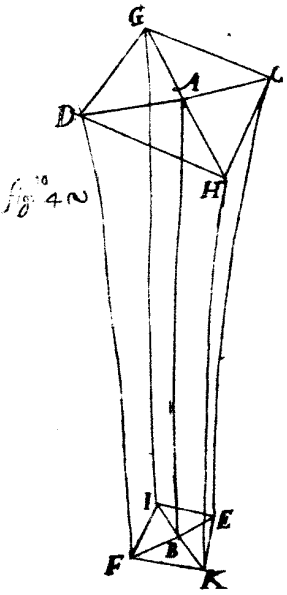


fig.ra 48

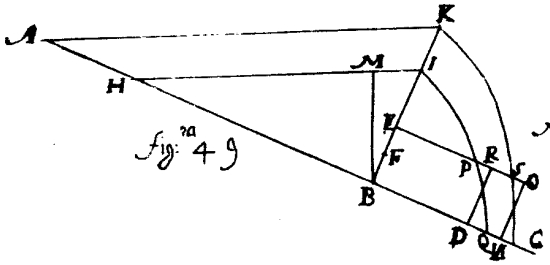


fig.ra 49

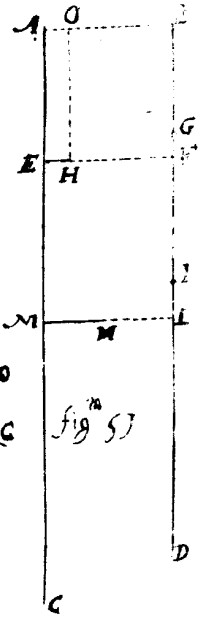
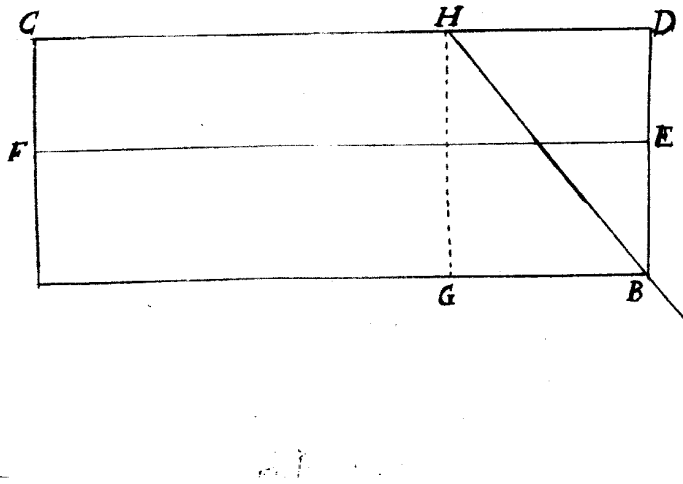
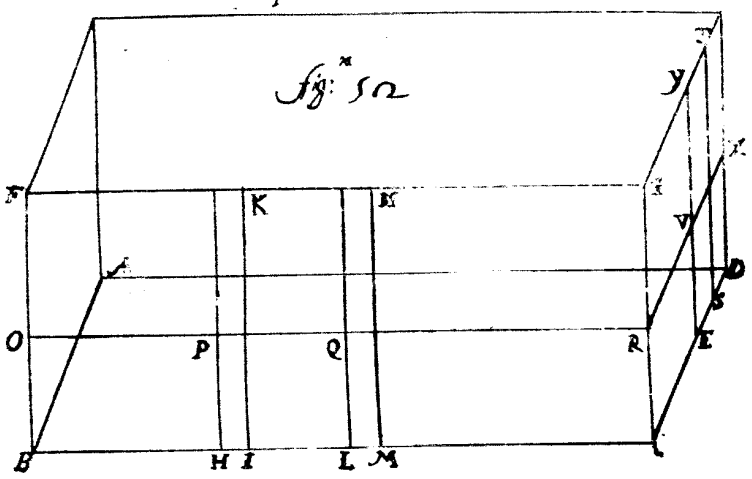


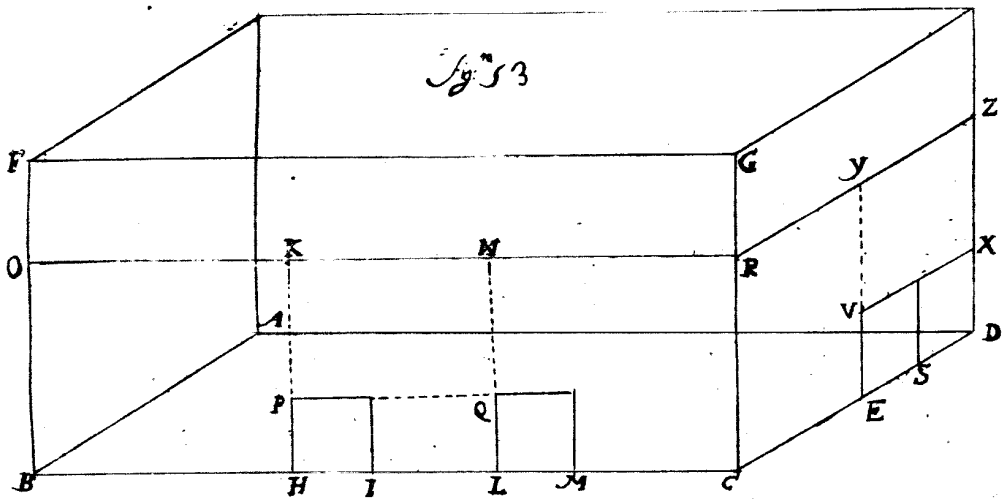
fig.ra 51

fig.ra 50



Ad Aq. Fluent. Mens. Tab. VIII





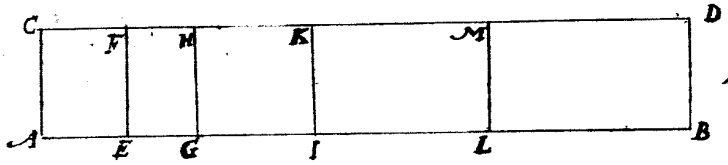


fig. 54

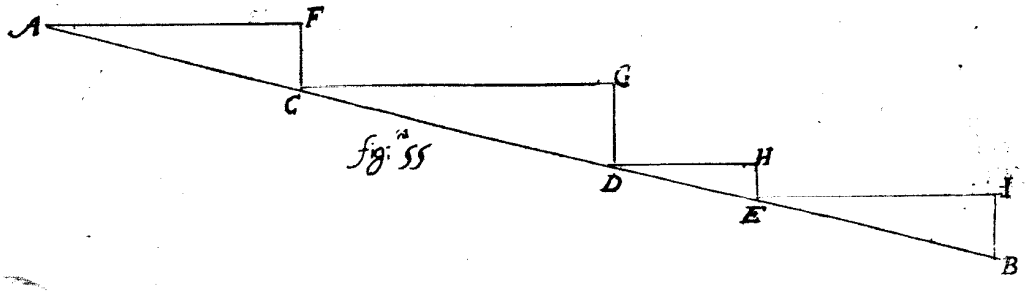


fig. 55

SERENISSIMO
Magno Duci Etruriæ
FERDINANDO II.

ERubescerem profectò, Serenissime Magne Dux, oblaturus libellum hunc Serenissimæ Celsitudini Tuæ, nisi haberem maxima Archimedis, & Galilei nomina, quæ prætendere possim audaciæ meæ: Exigua enim sunt opuscula hæc, & de rebus ætate nostra neglectis, nempe Geometricis. Attamen, nisi fallor, duo maxima Geometriæ opera promouebunt, cum veterem de Sphæra, & Cylindro, nouamque de Motu scientiam exequantur. Sed ego frustra Geometriam excuso apud eum Principem, cui non solum hæreditaria, sed etiam ingenita est Mathematicarum disciplinarum protectio. Serenissimus enim Cosmus II. Pater Tuus stipendijs celeberrimo Galileo oblatis; deinde Ser. C. Tua, beneficijs maximis in huiusmodi scientiæ cultores collocatis, optime de-

monstrauit intelligere, quanti momenti sint Mathematicæ scientiæ, vel in disponendis exercituum aciebus, vel in muniendis, exornandisque vrbibus, vtroque tempore belli, pacisque. Cum enim (vt de Mechanica facultate sileam) totum penè ciuile commercium pondere, numero, & mensura administretur, quis non videat omne hominum negotium in Mathematicis esse? quæ tria quantitatis genera cum in Scholis nostris quotidie agitentur, illi profectò maximè vtiles Reip. habebuntur, qui in huiusmodi studijs versati, exercitatique erunt. Libellorum itaque non inutilium causa penitus mala non erit, quatenùs Geometrici sunt. Vtinam mala non sit eo nomine, quòd sunt mei: Propterea humiliter oro, vt illos quales cunque sint, Tibi tamen debitos, Tuaque munificentia editos, S. C. Tua suscipere dignetur eo vultu, quo me quoque supplicem suscepit, atque ea humanitate, quæ cum tanti Principis maiestate coniuncta, amorem elicit etiam ab ignotis. Faueat Deus omnibus votis Tuis, & S. C. Tuam, imperiumque diu tueatur, & augeat.

Serenis. C. Tuæ

Humillimus Seruus
Euangelista Torricellius.

PROE-

PROEMIVM.

INTER omnia opera ad Mathematicas disciplinas pertinentia, iure optimo Principem sibi locum vindicare videntur Archimedis inuenta; quæ quidem ipso subtilitatis miraculo terrent animos. Verùm inter omnes libros egregij Authoris longè eminet ille, qui De Sphæra, & cylindro inscribitur: neque enim posteritatis tantùm consensu, sed etiam ipsius Scriptoris iudicio primas tenet. Certè hunc ipse in titulum sepulcri elegit, dignumq; præ cęteris iudicauit, qui tanti viri tumulum exornaret, ostenderetque. Hunc tamen si quis attentiùs considerare, & perpendere velit, magnum quidem inuentum fateatur necesse est, sed fortasse non absolutum. Loquor equidem de primo tantùm libro, in quo partem operis Theorematicam, & omnem doctrinæ inuentionem exequitur: quo veluti iacto fundamento, in secunda parte postea, quasi coronidis loco, problemata quædam tamquam corollaria ad eam rem spectantia ipse subnectit. Titulus libri est De Sphæra, & Cylindro; quæ quidem verba apud nos idem sonant, ac si dixisset De Sphæra, atque vnico solido sphærali; sed sphæralia solida, quorum vnum est cylindrus, multitudine sunt infinita, vt mox patebit. Ergo absolutior fortasse contemplatio videri potuisset, si eximius Author proportionem, non tantùm eam, quæ est inter sphæram, vnicumque ex sphæralibus solidis perquisisset; verùm etiam omnem aliam rationem, quæ inter sphęram ipsam, & vnumquodq; ex infinitis sphæralibus solidis intercedit, ostendendam sibi assumpsisset. Hoc itaq; propositum erit,

& institutum meum in præsenti libello. Doctrinam non solum de Sphæra, & cylindro, sed de sphæra, & sphæralibus solidis omnibus prosequemur: Mutatisq; plerumque Archimedæis fundamentis vniuersaliori demonstratione illam complecti conabimur, atque in omni specie solidorum, vel intrà, vel circà sphæram descriptorum, propagabimus.

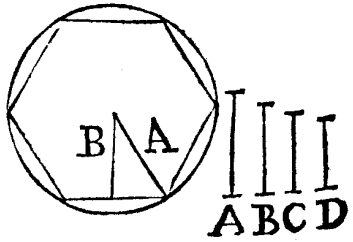
Ex libro Archimedis De Sphæra, & Cylindro duo hæc colliguntur spectantia ad illa solida, quæ nos sphæralia appellamus: Primum, quòd sphæra dupla est inscripti sibi rombi solidi æquilateri: quod quidem vnum est ex solidis sphæralibus, genitum ex reuolutione quadrati inscripti, & circa diagonalem conuersi. Alterum; quòd cylindrus ad inscriptam sibi sphæram est sesquialter, quod quidem & vnum ex solidis sphæralibus est, genitum ex conuersione quadrati circumscripti, & circa ipsius catetum reuoluti. Stantibus his, contemplatione dignum mihi videbatur vniuersalius aliquod problema huiusmodi.

Dato poligono quocumque regulari siuè intrà siuè circà circulum descripto, & siue circa diagonalem, siue circa catetum reuoluto; proportionem dicere, quam factum ex polygono solidum habeat, ad factam ex circulo sphæram.

Penitus autem ex voto successit instituta contemplatio. Nam inuenta proportione, sex ista inferiùs adnotata Theoremata ita se habere comperi, quemadmodum hìc subijciuntur.

Prima solidorum sphæralium species.

Si intrà circulum descriptum fuerit poligonum regulare habens latera numero pariâ, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio sphæræ ad factum solidum.



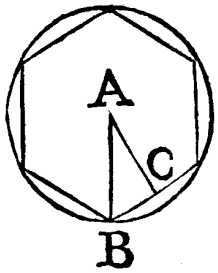
Continuetur ratio radij poligoni ad catetum eiusdem, nempe A ad B in quatuor terminis A, B, C, D. Eritque sphæra ad solidum inscriptum, vt diameter sphæræ, hoc est vt dupla ipsius A, ad vtramq; simul B, & D.

Theor. 14. lib. 2.

Secun-

Secunda species.

Si intra circulum descriptum fuerit poligonum regulare habens latera numero paria, & conuertatur figura circà diagonalem AB. Quæritur ratio sphæræ ad factum sphęrale solidum.

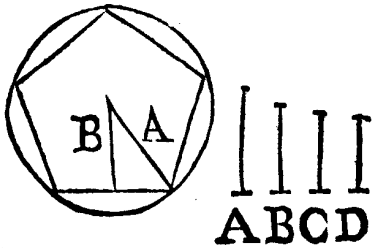


Ostenditur. Sphæram esse ad solidum, vt quadratum AB ad quadratum cateti AC.

Theor. 1. lib. ij.

Tertia species.

Si intra circulum describatur poligonum regulare habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum B. Quæritur ratio sphæræ ad factum sphærale solidum.

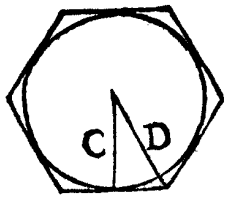


Continuetur ratio radij A ad catetum B in quatuor terminis A, B, C, D. Eritq; sphæra ad solidum, vt quadrupla ipsius A ad B semel, C bis, & D semel simulq; sumptas.

Theor. xjx. lib. ij.

Quarta species.

Si circa circulum describatur poligonum regulare habens latera numero paria, & conuertatur figura circa catetum C. Quæritur ratio solidi ad sphæram.

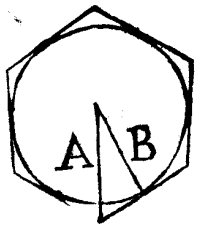


Ostenditur solidum esse ad inscriptam sibi sphæram, vt duo simul quadrata, quorum vnum fit ex radio D, alterum ex cateto C, ad duplum quadrati C,

Theor. xiij lib. ij.

Quinta species.

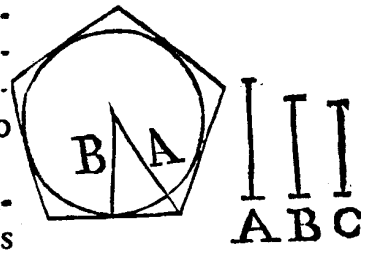
Si circa circulum describatur poligonum regulare habens latera numero paria; & conuertatur figura circa diagonalem A. Quæritur ratio solidi ad sphæram.



Ostenditur solidum ad inscriptam sibi sphæram

Theor. 6. lib. 2. ram esse, vt radius A ad catetum B hoc est, vt axis solidi ad axem sphæræ.

Sexta, & vltima Species.



Si circa circulum describatur poligonum regulare habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa B catetum. Quæritur ratio solidi ad Sphæram.

Theor. xviij. lib. ij. Continuetur ratio radij A ad catetum poligoni B in tribus terminis A, B, C. Eritque solidum ad sphæram, vt A semel, B bis, & C semel, simulque sumptæ, ad quadruplam ipsius C.

Solidorum itaq: sphæralium species omninò sex emergunt, & vniuscuiusq; speciei ratio ad suam sphæram innotescit. Possent fortasse videri tres tantum solidorum species, si solida absolutè, ac sine suis sphæris considerentur. Verùm si illa ad sphæram referantur, statim relatio variatur, & proportio alia consurgit, prout cognata solidis ipsis sphæra inscripta fuerit, vel circumscripta.

Quibus demonstratis, varia pro Corollarijs Theoremata statim emergebant; cuiusmodi sunt. Datis ex prædictarum sex specierum solidis duobus quibuscunque, alterius ad alterum rationem notam facere.

Conum æquilaterum circa sphæram descriptum, esse ad ipsam sphæram vt 9 ad 4. Nempe duplum sesquiquartum. Propterea si circa eandem sphæram conus, cylindrusq; æquilateri descripti sint, tria solida, nempe conum, cylindrum, & sphæram fore inter se in continua proportione sesquialtera.

Sphæram ad conum æquilaterum sibi inscriptum esse, vt 33 ad 9.

Sphæram ad inscriptum cylindrum æquilaterum inefabilem rationē habere, nēpe, vt diameter quadrati alicuius ad 2 lateris eiusdem.

*Rom

Rombum solidum æquilaterum sphæræ circumscriptum ad eandem sphæram incomensurabilem esse, nempe, vt diameter quadrati alicuius ad latus eiusdem.

Sphærale solidum exagonale circa catetum reuolutum esse ad inscriptam sibi sphæram sesquisextum.

Sphæram autem ad exagonale solidum sibi inscriptum, & circa diagonalem reuolutum, esse sesquitertiam.

Et alia huiusmodi, quæ quidem altiùs perscrutanti innumera patebunt. Interim satis superque mihi erit aliqua apposuisse, quæ propria claritate vltrò se se offerunt etiam aspernanti. Horum maxima pars Corollaria esse poterant præcedentium sex Theorematum; attamen illa demonstrabimus ex sola etiam Euclidis doctrina, sine ope illorum, quæ de sphæralibus præmiseramus; Vt videre est ad Propositiones 30, & 9. seqq. in secundo libro. Cæterùm huiùs contemplationis occasionem, mox etiam & scriptionis incitamentum præbuit mihi acutissimus librorum Archimedis scrutator Antonius Nardus Aretinus: huic enim refero, atque ipsius eruditis colloquijs, si quid verè Geometricum in hac scriptura exciderit mihi.

S verò pleraque mala erunt, & fortasse omnia, hoc vnum culpandus erit Ornatissimus Vir, & genere, doctrinà, moribusq; conspicuus Andreas Arrighettus Florentinus, qui post magna in me collata beneficia, editionem mali libri non suasit, sed iussit.

DEFI-

DEFINITIONES.

1 CViuſcunque poligoni regularis latera habentis numero paria, *Diagonalem* voco lineam, quæ per oppoſitos figuræ angulos ducitur. *Catetum* verò voco lineam, quæ puncta media laterum oppoſitorum connectit, ſiue earundem ſemiſſes. Cuiuſcunque verò poligoni regularis latera habentis numero imparia, *Catetum* voco lineam, quæ ab vno angulo per centrum figuræ extenditur.

2. Si poligonum quodcunque regulare conuertatur, ſiue circa diagonalem, ſiue circa catetum, donec ad eum locum redeat, vnde cæpit moueri, ſolidum illud, quod ex reuolutione circumſcribitur, *Sphærale ſolidum* appellare viſum eſt; Parilaterum quidem, ſi poligonum habuerit latera numero paria; Imparilaterum verò, quando poligonum latera numero imparia habebit.

Si cylindrus, ſiue conus, vel etiam coni fruſtum plano per axem ducto ſectum ſit; communem ſecantis plani, & curuæ ſuperficiei ſectionem vocabimus latus cylindri, ſiue coni, ſiue fruſti conici.

Suppoſitiones.

Supponimus, cuiuſcunque priſmatis circa cylindrum æque altum deſcripti, ſuperficiem maiorem eſſe cylindri ipſius ſuperficie. Cylindricam verò ſuperficiem maiorem eſſe ſuperficie priſmatis inſcripti, baſim habentis regularem, exceptis ſemper baſibus. Item pyramidis circa conum deſcriptæ ſuperficiem maiorem eſſe ipſius coni ſuperficie; Inſcriptæ verò pyramidis & regularem baſim habentis, ſupponimus ſuperficiem minorem eſſe conica ſuperficie.

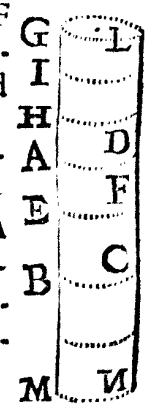
Demonſtrantur hæc apud Archimedem propoſ. 9. 10. 11. 12. lib. 1. de Sph, & Cyl. Si quis verò ea tamquam nota admittere velit, totum libellum noſtrum percurrere poterit.

DE SOLIDIS SPHÆRALIBVS

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI Cylindri recti ſuperficies ſecetur plano oppoſitis baſibus parallelo; erunt ſegmenta ſuperficiei cylindricæ inter ſe, vt ſegmenta axis, ſiue lateris cylindri, homologè ſumpta.



Eſto cylindrus rectus ABCD, ſeceturq; plano EF oppoſitis baſibus parallelo. Dico cylindricam ſuperficiem AEFD, ad cylindricam EBCF, eſſe vt axis ad axem, ſiue vt latus AE, ad latus EB.

Producatur vtrimque in infinitum cylindrus, & accipiatur recta EG multiplex ipſius EA, iuxta quamlibet multiplicitatem, ſectaque EG in partes ipſi EA æquales, agantur per puncta diuiſionum H, I, G; plana oppoſitis baſibus parallela. Eritque tam multiplex recta GE ipſius EA: quàm multiplex eſt cylindrica ſuperficies EL, ſuperficiei ED.

Sumatur etiam recta EM multiplex ipſius EB, iuxta quamlibet multiplicationem; ſimiliq. peracta conſtructione

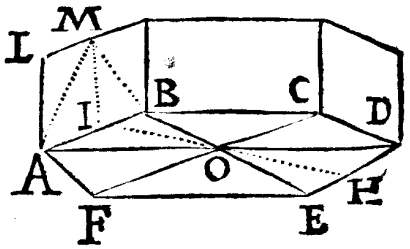
vt supra; erit tam multiplex recta EM rectæ EB, quàm multiplex est cylindrica superficies EN, superficiei EC.

Manifestum ergo est, quòd si recta EG maior fuerit, siue minor, vel æqualis rectæ EM: tunc etiam cylindrica superficies EL maior erit, siue minor, vel æqualis superficiei EN: & hoc semper: Propterea erit, vt AE ad EB, ita superficies AEFD, ad superficiem EBCF. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

SI fuerit quodcunque prisma rectum, habens basim poligonam regularem, habensque altitudinem æqualem quartæ parti cateti suæ basis; erit perimeter prismatis æqualis poligono suæ basis.

Esto poligonum regulare ABCDEF, super quo concipiatur prisma rectum, habens pro altitudine AL quartam partem cateti IH. Dico perimetrum prismatis constantem ex figuris rectangulis æqualibus, quarum vna sit LB, æqualem esse poligono suæ basis.



Ducantur enim diagonales AOD, BOE, & erectâ perpendiculari IM, iungantur AM, BM;

Cum ergo IH ponatur quadrupla ipsius IM, erit IO dupla ipsius IM: & ideo triangulum AOB duplum trianguli AMB eandem basim habentis; sed etiam rectangulum LB duplum est trianguli AMB; propterea rectangulum LB æquale erit triangulo AOB; & sic de reliquis rectangulis, reliquisque triangulis: Quare totus prismatis perimeter, constans ex figuris rectangulis, æqualis est poligono suæ basis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

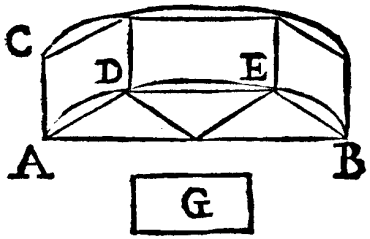
Constat ergo, quòd si altitudo prismatis maior, minorue fuerit quàm

quàm quarta pars cateti suæ basis, erit perimeter prismatis maior, minorue quàm poligonum suæ basis.

PROPOSITIO III.

SI fuerit cylindrus rectus, cuius altitudo æqualis sit quartæ parti diametri suæ basis; erit cylindrica superficies æqualis circulo suæ basis.

Esto cylindrus rectus, cuius basis circulus circa diametrum AB descriptus; altitudo verò AC, æqualis sit quartæ parti diametri AB.



Dico cylindricam superficiem æqualem esse circulo suæ basis AB.

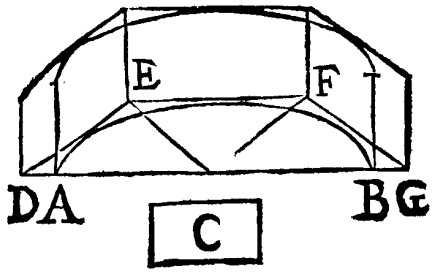
Si enim æqualis non est; erit circulus vel maior, vel minor cylindricâ superficie.

Sit primùm circulus maior, quàm cylindri superficies; & suppositâ differentia G, describatur intra circulum aliquod poligonum ADEB, quod quidem deficiat à circulo minori defectu, quàm sit spatium G; & ideo erit poligonum inscriptum adhuc maius, quàm cylindrica superficies (quomodo fiat hoc, constat ex Commentarijs in Archimedem, & ex XII. Euclidis:) Tum supra poligonum ADEB concipiatur prisma rectum eiusdem cum cylindro altitudinis.

Cùm ergò altitudo prismatis eadem sit, ac cylindri, nempe quarta pars rectæ AB, erit altitudo prismatis maior, quàm quarta pars cateti suæ basis poligonæ, & ideo perimeter prismatis maior erit, quàm poligonum suæ basis, & multo maior, quàm cylindrica superficies (factum enim est poligonum maius cylindrica supercie.) Quod est absurdum; est enim contra præmissas suppositiones. *ex Clar. ced.*

Ponatur deinde circulus minor, quàm cylindrica superficies: & suppositâ differentia G, describatur circa circulum aliquod poli-

poligonum regulare D E F G, quod excedat circulum spatio minori, quàm sit C, (quomodo hoc fiat constat apud Commentarios in Archim. & in XII. Euclidis.) eritque etiam poligonum minus, quàm cylindrica superficies.



Concipiatur suprà poligonum erigi prisma eiusdem altitudinis cum cylindro; eritque altitudo prismatis quarta pars cateti suæ basis poligonæ, (cum prismatis altitudo eadem sit asq; cylindri; cylindri autem altitudo est quarta pars rectæ AB, quæ ęqualis est cateto poligoni, quod est basis prismatis.)

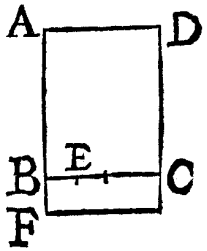
per ij huius. Ideo perimeter prismatis æqualis erit poligono suę basis; & propterea minor, quàm cylindrica superficies. Quod est contra præmissas suppositiones.

Erit ergo superficies cylindrica ęqualis circulo suę basis, Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Cylindri recti superficies ad circulum suæ basis est, vt latus cylindri ad quartam partem diametri eiusdem basis.

Esto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem sit ABCD; sumptaq; BE, quæ quarta pars sit ipsius BC; Dico cylindricam superficiem ABCD ad circulum suæ basis esse, vt AB ad BE.



Producatur cylindrus versus F, sectâque BF æquali ipsi BE, erit per precedentem, cylindrica superficies FC æqualis circulo suæ basis BC.

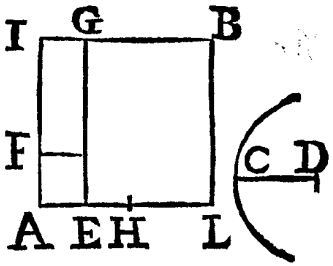
per j huius. Iam: cylindrica superficies BD ad cylindricam superficiem FC est

FC est, vt AB ad BF; superficies verò FC ad circulum BC (ob æqualitatem) est vt FB ad BE: ergo ex æquo erit cylindrica superficies BD ad circulum BC, vt AB, ad BE, nempe vt latus cylindri ad $\frac{1}{4}$ diametri basis eiusdem. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V.

Cylindri recti superficies ad circulum quemlibet, est vt rectangulum per axem cylindri ad quadratum semidiametri ipsius circuli.

Esto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axem sit AB, & centrũ basis H. Ponatur autem circulus quilibet, cuius semidiameter CD. Dico cylindricam superficiem ad circulum ex CD, esse vt rectangulum AB ad quadratum CD.



Fiat ex AE (quæ quidem 4. pars sit rectę AL) quadratum FE, producaturque EG.

Erit ergo cylindrica superficies AB ad circulum suæ basis, vt *per ced.* IA ad AE, hoc est vt IA ad AF, hoc est vt rectangulum IE ad quadratum FE; siue, sumptis quadruplis, vt rectangulum AB *Prim.* ad quadratum ex AH. Circulus verò basis AL ad circulum ex CD, est vt quadratum ex AH ad quadratum ex CD; ergò ex *2. duo cimi.* æquo erit cylindrica superficies ad circulum ex CD, vt rectangulum per axem ad quadratum CD. Quod erat demonstrandum.

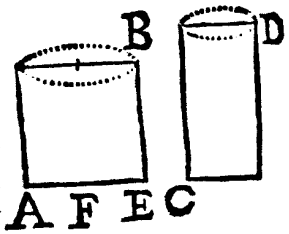
Corollarium.

Pro Corollario erit Prop. XIII. lib. 1. Archim. de Sphæra, & Cylindro. Constat enim, quòd si CD. media fuerit proportionalis inter IA, AL quadratum ex CD æquale erit rectangulo AB. & propterea, ex demonstratis, cylindricam superficiem AIBL æqualem esse circulo ex CD necesse est.

PROPOSITIO VI.

CYlindrorum superficies inter se sunt, vt eorumdem rectangula per axem homologè sumpta.

Sint cylindri recti, quorum rectangula per axem sint AB, CD. Dico cylindricam superficiem AB, ad cylindricam CD esse, vt rectangulum AB ad rectangulum CD.



Accipiatur pro circulo quolibet, circulus circa diametrum AE.

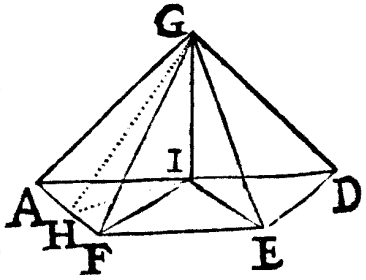
Erit ergò cylindrica superficies AB ad circulum quemlibet AE, vt rectang. AB ad quadratum AF. Circulus verò ex AF ad cylindricam superficiem CD est vt quadratum ex AF ad rectangulum CD; ergo ex æquo cylindrica superficies AB ad cylindricam CD, est vt rectangulum AB ad rectang. CD. Quod erat ostendendum.

per præced.

per præced.

PROPOSITIO VII.

SI recta pyramis basim habuerit poligonam, regularemque; erit basis pyramidis ad reliquam ipsius superficiem, vt semicatetus basis ad catetum superficiei.



Esto pyramis recta, cuius basis poligonum regulare AFED. vertex verò G, & centrum basis sit I. Secto deinde vno latere bifariam in H, iunctisque GH, IH, erit GH catetus superficiei pyramidis; IH vero semicatetus basis, quandoquidem omnia triangula in superficie sunt æquicruria, & æqualia inter se; quod etiam verum est & in basi.

Dico

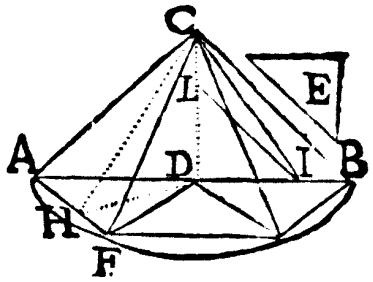
Dico basim ad superficiem esse vt IH ad HG.

Triangulum enim AIF, ad triangulum ACF (cum sint in eadem basi) est vt IH, ad HG, ergo etiam ipsorum æquemultiplicia, nempe basis, & superficies pyramidis, in eadẽ ratione erunt, nempe vt IH ad HG. Quod erat ostendendum.

15. qu. 11.

PROPOSITIO VIII.

COni recti basis ad reliquam conicam superficiem, est vt semidiameter basis ad latus coni.



Esto conus rectus, cuius basis AB, vertex verò C, axis CD.

Dico circulum basis, ad reliquã conicam superficiem, esse vt DA, ad AC.

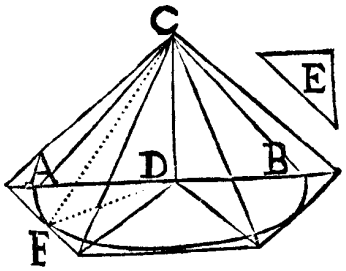
Si enim ita non est; erit circulus AB vel maior, vel min, quam oportet esse, vt ad conicam superficiem sit quemadmodum DA ad AC.

Sit primùm maior; & ponatur tanto maior, quantum est spatium E. Inscribatur in circulo poligonum deficiens à circulo, minori defectu, quàm spatium E; habebitq. huiusmodi poligonum ad conicam superficiem adhuc maiorem rationem, quàm DA ad AC. Secto deinde vno poligoni latere AE bifariam in H, iungantur DH, CH, & super poligono concipiatur pyramis, quæ verticem habeat in C; seceturque DI æqualis ipsi DH, & ducatur IL paralella ad BC, iungaturq. IC.

Cum itaq. poligonum ad conicam superficiem maiorem habeat rationem, quam DA ad AC; multo maiorem rationem habebit ad superficiem suæ pyramidis, quàm DA ad AC, vel DB ad BC. Sed poligonum ad superficiem pyramidis, per præcedentem, est vt DH ad HC; habebit ergo DH ad HC, siue DI ad IC, multo maiorem rationem, quàm DB ad BC, vel quàm DI ad IL. Et propterea IC minor esset, quàm IL. absurdum.

Nam

Nam quadratum IC æquale est duobus quadratis ID, DC; cum quadratum IL æquale sit tantùm duobus ID, DL. Ponatur deinde circulus basis AB minor, quàm oportet esse vt ad conicam superficiem sit quemadmodum recta DA ad AC, sitque tanto minor, quantum est spatium E. Circumscribatur circulo AB poligonum aliquod excedens circulum minori excessu, quàm sit spatium E. Habebitq; poligonum ad conicam superficiē, adhuc minorem rationē, quàm DA ad AC; ergo poligonum ad perimetrum suæ pyramidis multo minorem rationem habebit, quàm DA ad AC. Sed poligonum ad perimetrum suæ pyramidis est vt DF ad FC; propterea DF ad FC, multo minorem rationem habebit, quàm DA ad AC; quod est impossibile. Aequales etenim sunt tam DF, DA, inter se, quàm FC, AC, inter se.



per 2 huius.

Erit itaque basis coni recti ad reliquam superficiem, vt DA ad AC. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc patet, quòd curua superficies coni, æqualis est circulo cuidam, cuius semidiameter med. prop. sit inter CA, AD, nempe, inter latus, & semidiametrum basis coni. Nam sumpta media inter CA, AD, erit circulus, qui fit ex media, ad circulum, qui fit ex AD vt CA ad AD. Sed etiam curua coni superficies, ad circulum ex AD est vt CA ad AD. Ergo æqualis est curua coni superficies, circulo, cuius semidiameter media proportionalis sit inter CA, AD.

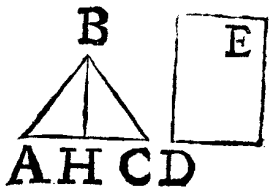
per praeced.

PROPOSITIO IX.

CViuslibet coni recti superficies, ad superficiem cuiuscunq; cylindri recti demptis basibus, est vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis coni, ad rectangulum per axem cylindri.

Esto

Esto conus ABC, cuius basis AC, axis vero BH; & cylindrus cuius rectangulum per axem sit DE: Dico conicam superficiem ad cylindricam esse, vt rectangulum BAH, ad rectangulum DE.



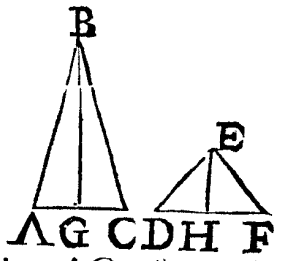
Nam conica superficies ad circulum suæ basis est vt AB ad AH, siue vt rectangulum BAH ad quadratum AH; circulus autem ex AH ad cylindricam superficiem DE, est vt quadratum AH ad rectangulum DE. Propterea, ex æquo, erit conica superficies ABC ad cylindricam DE, vt rectangulum BAH ad rectangulum DE. Quod erat ostendendum.

per 8. ius.
per 5. ius.

PROPOSITIO X.

COnicæ superficies, demptis basibus, inter se sunt, vt rectangula sub lateribus conorum, & sub semidiametris basium comprehensa.

Sint duo coni recti ABC, DEF, quorum axes BG, EH. Dico curuam coni ABC superficiem, ad curuam superficiem coni DEF esse, vt rectangulum BAG, ad rectangulum, EDH quæ nimirum sub lateribus conorum, & semidiametris basium comprehenduntur.



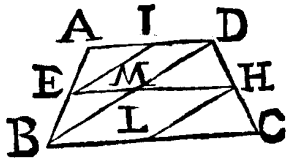
Conica enim superficies ABC, ad circulum AC, est vt recta BA ad AG, siue vt rectangulum BAG ad quadratum AG. Circulus verò AC ad DF circulum, est vt quadratum AG, ad DH; denique circulus DF ad conicam superficiem DEF, est vt quadratum DH, ad rectangulum EDH; ergo ex æquo curua coni superficies ABC ad curuam DEF, erit vt rectangulum BAG, ad rectangulum EDH. Quod erat ostendendum.

per 8. h ius.
per 8. h ius.

X Lem-

Lemma.

Si fuerit ABCD frustum coni recti, abscissum planis ad axem erectis (hoc enim modo semper intelligemus frusta conica) secenturque latera AB, DC bifariam in punctis E, & H; iungaturq; EH. Dico rectam EH componi ex vtraque BL, AI, nempe ex semidiametris basium oppositarum frusti conici.



Iungantur BD, EI, LH; Et quoniam AI, ID æquales sunt; item AE, EB, æquales: erunt parallelæ EI, BD; & ideo in parallelogrammo æqualia erunt latera ID, EM. Ob eandem causam æqualia sunt BI, MH. Ergo tota EH æqualis erit ipsis ID, BL simul sumptis. Quod erat &c.

per sexti. 2.

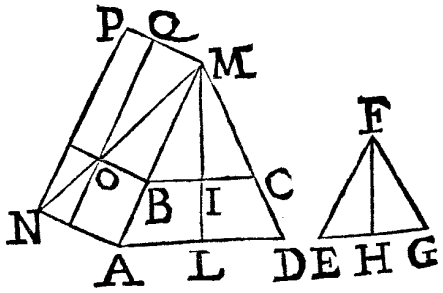
Vocabimus imposterum breuitatis causa lineam EH mediam Aritmeticam frusti conici.

Rectangulum verò sub EH, & AB latere frusti conici, dicemus rectangulum proprium frusti conici.

PROPOSITIO XI.

CVrua superficies frusti conici planis ad axem erectis abscissi, ad conicam quamlibet superficiem, est vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum sub latere, & semidiametro basis ipsius coni.

Esto frustum conicum ABCD abscissum planis ad axem erectis, sitque conus quilibet EFG, cuius axis FH. Dico curuam frusti AC superficiem, ad curuam coni EFG superficiem, esse vt rectangulum sub AB, & sub vtraque AL, BI contentum, ad rectangulũ FEH,



Com-

Compleatur conus AMD, cuius datum erat frustum, factoque angulo MAN recto, & secta AN æquali ipsi AL, compleatur rectangulum AP. Ducto deinde diametro MN, & facta BO parallela ad AN; erit BO æqualis ipsi BI: compleatur etiam figura BQ.

Iam superficies curua coni AMD ad superficiem curuam coni BMC est, vt rectangulum LAM ad rectangulum IBM; nempe vt rectangulum AP ad BQ; & diuidendo, erit curua frusti conici ABCD superficies, ad superficiem coni BMC, vt gnomõ AOP, ad rectangulum BQ, hoc est vt rectangulum sub AB, & vtraque AN, BO, siue AL, BI, ad rectangulum IBM. Curua verò superficies coni BMC ad curuam coni EFG, est vt rectangul. IBM ad rect. FEH; ergo ex æquo curua frusti conici ABCD superficies ad curuam coni EFG superficiem est, vt rectan. contentum sub AB, & vtraque AL, BI ad rectangulum FEH. per 1 huius.

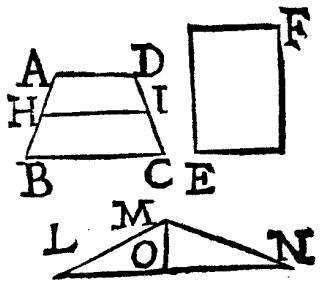
Corollarium.

Patet ergo, quòd frusti conici ABCD superficies sine basibus ad superficiem coni EFG, est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum FEH; Rectangulum autem proprium frusti comprehenditur sub recta AB, & sub vtraque AL, BI, siue potiùs sub AB, & media Aritmetica, quam demonstrauimus æqualem vtrisque AL, BI.

PROPOSITIO XII.

CViuscunque frusti conici superficies ad superficiem cylindri recti, est vt rectangulum proprium frusti ad rectangulum per axem cylindri.

Esto frustum conicum ABCD, & cylindrus, cuius rectangulum per axem sit EF. Secetur AB bifariã in H, & agatur media Aritmetica HI æquidistanter ad BC. Dico conicam frusti superficiem, ad cylindricam EF, esse vt rectangulum sub HI, & AB, ad rectangulum EF.

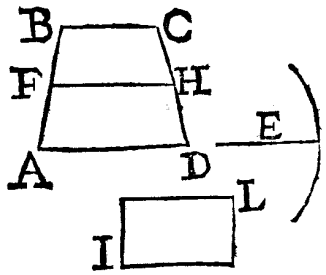


acci-

Accipiatur conus quilibet LMN, cuius axis MO. Eritq; curua frusti superficies ad conicam curuam LMN, vt rectangulum sub AB,HI,ad rectangulum MLO; sed curua coni LMN ad curuam cylindri EF superficiem, est vt rectangulum MLO, ad rectangulum EE;ergo ex æquo curua frusti conici superficies, ad curuam superficiem cylindri,est vt rectangulum sub AB,& HI, nempe vt rectangulum proprium frusti, ad rectangulum EF per axem cylindri. Quod erat ostendendum.

per prec.

Corollarium.



Curua superficies cuiuscunq;frusti conici ABCD æqualis demõstratur circulo cuidam, cuius quidem circuli semidiameter E media proportionalis sit inter latus AB frusti conici,& inter FH mediam Aritmeticam eiusdem frusti.

Esto quadratum E æquale rectãgulo sub BA, FH;sumaturque cylindrus quilibet IL;& erit curua frusti conici superficies ad curuam cylindricam IL, vt rectangulum sub BA, FH ad rectangulum IL, siue vt quadratum E ad rectangulum IL; hoc est vt circulus ex radio E,ad curuam cylindricam IL. Æquales ergo sunt inter se curua superficies frusti conici AC, & circulus ex radio E factus. Quæ quidem Archimedis Propositio est 16.libri primi de Sphær. & cyl.

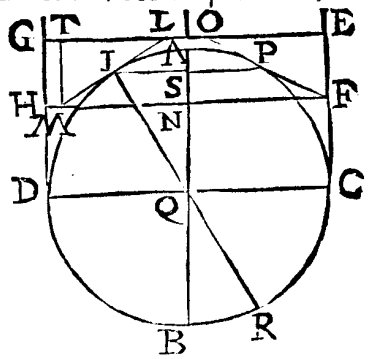
per praeced. huius.

PROPOSITIO XIII.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea æqualitèr vtrimq; producta;& conuertatur circulus circa quemlibet sui axem (dummodo axis tangentem non secet) erit conici frusti superficies, quæ à tangente linea describitur, æqualis superficiei cylindri eandem altitudinem cum frusto conico habentis, & circa eandem sphæram descriptibilis.

Esto circulus ADBC,quem duæ diametri AB, CD secent ad angu-

angulos rectos. Duas insuper tangentes habeat, alteram DG in extremitate diametri CD, alteram verò vbicunque in I, & æqualiter producantur hinc inde IL IM dummodo axem AB productũ non secent. Agantur deinde per L,& per M parallelæ ad CD, rectæ LE, MF: tum figura conuertatur circa axem. Tangens GH describet cylindricam quandam superficiem,cuius rectangulum per axem erit EFHG:Tangens verò LM designabit frustum conicæ superficiei; deniq; circulus ipse sphæram circumscribet. Dico cylindricam superficiem à linea GH descriptam, & conicam superficiem à linea LM factam æquales esse inter se.



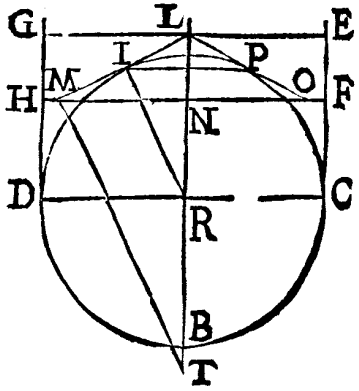
Ducatur IP media Aritmetica conici frusti; & agatur IR per centrum Q: eritq; IR perpendicularis ad LM: Ducatur etiam MT perpendicularis ad EG.

Quoniam duo anguli TMI, TLM vni recto sunt æquales, nempe ipsi LIQ,demptis alternis TLM, LIS, erunt æquales reliqui T M L, SIQ; ideoque triangula TML, SIQ, cum rectangula sint,similia erunt; Ergo vt TM ad ML, ita SI ad IQ; hoc est (sumptis duplis) PI ad IR: & ideo rectangulum sub TM,IR (quod quidem est rectangulum EFHG) æquale erit rectangulo sub ML, IP, quod proprium vocamus frusti conici. Propterea per præcedentem, æqualis erit superficies conici frusti, quæ à linea ML describitur, superficiei cylindri EFHG, eandem altitudinem cum ipso frusto habentis, & circa eandem sphæram ADBC descriptibilis. Quod &c.

PROPOSITIO VIV.

SI circulum tetigerit recta linea æqualiter vtrinq; producta, & conuertatur circulus circa axem,qui cum tangente conue-

ueniat in extremitate ipsius tangentis, erit superficies coni, quæ à tangente describitur, æqualis superficiei cylindri, eandem cum cono altitudinem habentis, & circa eandem sphæram descriptibilis.



Positis ijsdem, vt in præcedentis propositionis constructione; si linea ML incidat in axem BL productum, sintq; æquales vtrinque IL, IM, tunc describet ipsa ML conicam superficiem. Dico conicam huiusmodi superficiem æqualem esse superficiei cylindri FFHG eandem altitudinem habentis cum ipso cono, & circa eandem sphæram descriptibilis.

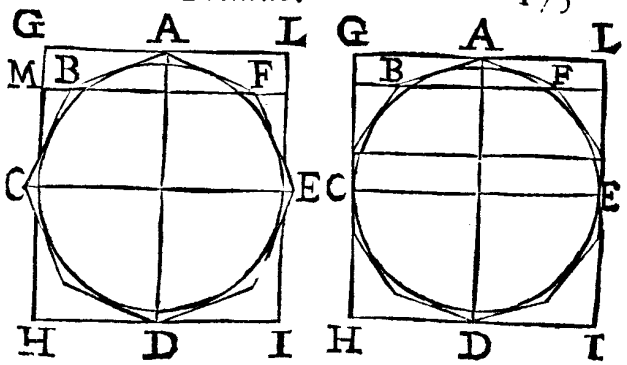
Fiat enim angulus LMT rectus, & cum LM dupla ponatur ipsius LI, erit MT dupla ipsius IR, hoc est æqualis diametro sphæræ, siue ipsi FH; cum autem, per quartam sexti, sit vt ML ad LN, ita TM ad MN; erit rectangulum LMN æquale rectangulo sub TM, LN, hoc est rectangulo sub FH, LN, quod quidem per axem est cylindri EFHG. Aequalis ergo est superficies coni OLM, superficiei cylindri EFHG. Quod &c.

9. huius.

PROPOSITIO XV.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantum à binario, & conuertatur figura circa diagonalem, erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis.

Esto poligonum ABCDEF parilaterum, siue à quaternario numerus laterum mensuretur, vt in prima figura; siue tantùm à binario, vt in secunda; & conuertatur figura circa axem AD, nem-



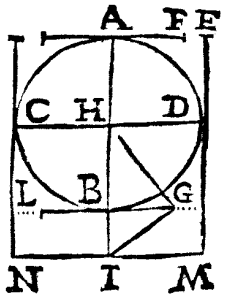
nempe circa diagonalem poligoni. Dico vniuersam superficiem facti solidi sphæralis æqualem esse superficiei cilyndri GHIL eandem altitudinem habentis cum ipso solido, & circa eandem sphæram descriptibilis.

Superficies enim coni BAF, æqualis est superficiei cylindri ML; Superficies autem frusti conici, quæ inter plana BF, CE intercipitur, æqualis est superficiei cylindri inter eadem plana intercepti; & sic de singulis partibus superficierum, quæ solidum sphærale circumsepiunt; Ergò omnes simul superficies ambientes sphærale solidum æquales erunt superficiei cylindri GHIL. Quod erat ostendendum.

per p ced.

3. ius.

Lemma.



Si circulum duæ diametri AB, CD, ad angulos rectos secuerint, eundemq; circulum duæ æquales rectæ lineæ AF, BG tetigerint in extremitatibus axis AB: Tum figura circà axē AB conuertatur: describent AF, BG duos circulos æquales, cum ipsę æquales sint Oportet segmentum cylindri circa eandem sphæram descriptibilis reperire, cuius superficies æqualis sit duobus simul circulis ex AF, BG descriptis.

Fiat angulus HGI rectus, eritq; BI altitudo quæsiti cylindri. Nam propter angulum rectum HGI, erit rectangulum HBI æquale quadrato BG; & rectangulum ABI, hoc est rectangulum LM duplū

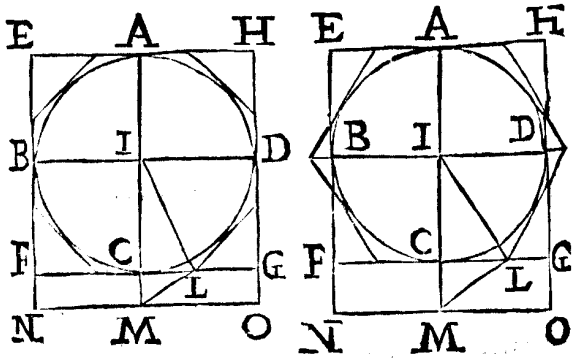
erit

erit quadrati BG. Propterea superficies cylindri LM dupla erit circuli ex BG descripti, & ideo æqualis ambobus circulis ex BG, AF simul sumptis. Quod &c.

5. huius.

PROPOSITIO XVI.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, siue tantùm à binario, & conuertatur figura circa catetum; erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis, altitudinẽ verò habentis æqualem lineæ compositæ ex diametro sphæræ, & ex tertia proportionalium, si fiat vt sphæræ semidiameter ad semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam.



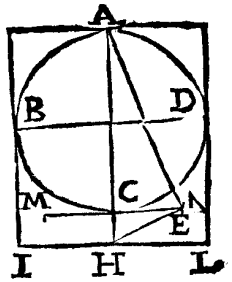
Esto circulus ABCD, quem secent duæ diametri AC, BD ad angulos rectos, & circa ipsum sit poligona figura habens latera numero paria, siue à quaternario mensurentur, vt in prima figura; siue tantùm à binario, vt in secunda. Tum conuertatur figura circa catetum AC, hoc est circa lineã connectentem bisectiones laterum oppositorum; Ex reuolutione poligoni solidum sphærale describetur contentum sub circularibus, conicisque superficiebus, & vna cylindrica, vt in prima figura; siue circularibus, & conicis tantùm, vt in secunda. Fiat deinde vt IC ad CL, ita CL ad CM, quod facile erit, si fiat angulus ILM rectus, & per M agatur planum NO erectum ad axẽ. Dico vniuersam superficiem solidi sphæralis æqualem esse superficiei cylindri ENOH.

Hoc autem patet ex præmissis; Nam tota sphæralis solidi superficies, demptis circulis oppositis, æqualis est superficiei cylindricæ inter plana EH, FG comprehensæ. Duo verò circuli oppositi, quorum centra A, & C æquales sunt (per præcedens lemma) superficiei cylindricæ inter duo plana FG, NO contentæ. Propterea vniuersa simul sphæralis solidi superficies æqualis erit superficiei cylindri ENOH circa eandem sphæram descripti, & altitudinem habentis AM, quæ componitur ex diametro sphæræ AC, & ex recta CM, quæ quidem tertia proportionalis est ad semidiametrum IC, & semilatus, CL. Quod &c.

deducitur 13. huius.

Lemma.

Si circulum ABCD duæ diametri AC, BD secent ad angulos rectos; recta autem linea CE eundem contingat in extremitate axis AC, & conuertatur figura circa AC; ipsa CE circulum describet. Oportet segmentum cylindri circa eandem sphæram descripti reperire, cuius superficies æqualis sit circulo ex CE descripto.



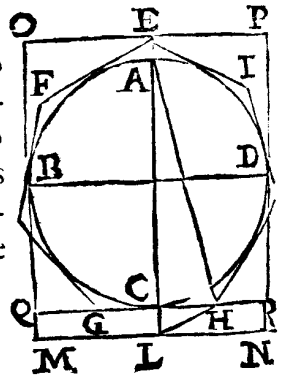
Fiat angulus AEH rectus, ductoque plano per H ad axem erecto. Dico cylindricam superficiem MILN æquari circulo ex CE. Est enim ob angulum rectum AEH, rectangulum ACH, hoc est rectangulum ML, æquale quadrato CE. Propterea superficies cylindri MILN æqualis erit circulo ex CE. Quod &c.

per 5. huius.

PROPOSITIO XVII.

SI circa circulum describatur poligonum habens latera numero imparia, & conuertatur figura circa catetum poligoni: erit vniuersa superficies facti sphæralis solidi, æqualis superficiei cylindri circa eandem sphæram descriptibilis, altitudinem verò

verò habentis æqualem lineæ compositæ ex cateto poligoni, & ex tertia proportionalium, si fiat vt diameter circuli ad semilatus poligoni, ita semilatus ad aliam.



Esto circulus ABCD, circa quem sit poligonum EFGHI habens latera numero imparia; & conuertatur figura circa catetum EC, nempe circa lineam, quæ ab vno angulo E perducitur ad bisectionem lateris oppositi; orieturq; solidum sphærale contentum sub conicis superficiebus, vnicoque circulo.

Facto deinde angulo recto AHL, ductoq; per L plano MN ad axem erecto. Dico vniuersam solidi superficiem æqualem esse superficiei cylindri OMNP.

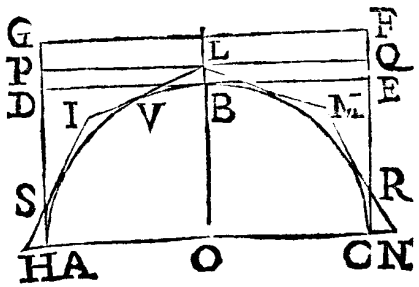
13 huius. Nam superficies solidi sphæralis, dempto circulo ex CH descripto, æquatur superficiei cylindri inter plana OP, QR contenti: circulus autem ex CH factus æqualis est (præcedens lemma) superficiei cylindri inter plana QR, MN contenti: Propterea vniuersa solidi superficies æqualis erit superficiei cylindri OMNP, qui quidem circa eandem sphæram cum ipso solido describitur, altitudinem verò habet lineam EL, quæ componitur ex cateto EC, & ex linea CL, quæ tertia proportionalis est, si fiat vt AC diameter sphæræ, ad CH semilatus poligoni, ita CH ad aliam. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVIII.

HEmisphærij superficies æqualis est superficiei curuæ cylindri eandem ipsi basim, & eandem altitudinem habentis.

Esto hemisphærium ABC, & circa ipsum cylindrus eiusdem altitudinis, ADEC.

Dico



Dico superficiem hemisphærij æqualem esse superficiei cylindri ADEC.

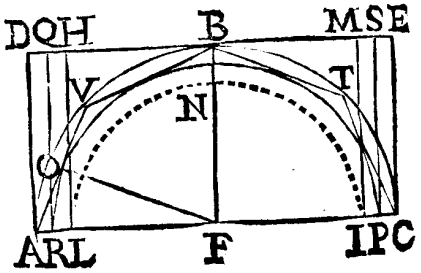
Si enim non est æqualis, vel maior erit, vel minor. Ponatur primùm sphærica superficies maior: fiatque vt cylindri superficies ad superficiem hemispherij, quæ maior ponitur, ita recta AD ad AG: intelligaturq; cylindrus productus vsque ad GF. Secetur deinde arcus AB bifariam, iterumq; portiones eius bifariam, & hoc semper, donec poligoni circà semicirculum ABC descripti semilatus VL minus sit, quàm recta DG (quod fieri posse constat ex prima Decimi; semilatera enim poligonorum circulo circumscriptorũ ex continua arcuum bisectione semper minuuntur plusquam pro medietate, vt ab alijs ostensum est.) Factum ergò sit; & esto poligonum HILMN, conuersàque figura circa axem LO, fiat ex poligono, semisolidum sphærale sub conicis superficiebus comprehensum. Cum itaque recta DG maior sit, quàm semilatus LV, multo maior eadem erit, quàm LB, & propterea planum PQ productum per L intra puncta D, & G cadet.

Iam quia superficies cylindri AE ad superficiem hemisphærij est, vt AD ad AG, hoc est vt cylindrica superficies AE ad cylindricam AF, erit cylindrica superficies AF æqualis sphæricæ. Propterea, si sphærica superficies æqualis sit cylindricæ AF, maior erit, quàm cylindrica AQ, hoc est quàm conicæ omnes HILMN, multoq; maior, quàm omnes ASILMRC, quod est absurdum. Est enim contra principium ab Archimede præmissum. 6. huius. ex xv. huius.

Assumpsimus conicam, quæ describitur à linea HS maiorem esse, quàm illa superficies, quæ describitur à linea AS, quod patet ex 12. huius. Rectangulum enim proprium conicæ superficiei multò maius est, quam rectangulum per axem cylindricæ, quandoquidem sub maioribus lateribus continetur.

Pona-

Ponatur iam sphærica ABC minor, quã cylindrica ADEC. Fiat vt superficies cylindrica ADEC ad sphęricam, quę ponitur minor; ita recta AF ad FL. Fiatque ex FL semidiametro aliud hemisphærium LNI, priori concentricum, & circà ipsum intelligatur cylindrus LHMI: Inscribatur etiam intra semicirculum ABC figura laterum æqualium, ita vt latera ipsius non tangant semicirculum LNI. (quod fieri posse constat ex Euclide.) Describaturq; alius semicirculus semidiametro FO, qui contingat singula latera factæ figuræ, & conuertatur vniuersa figura circa FB, ita vt fiat semisolidum sphærale AVBTC conicis superficiebus circumseptum; ex semicirculo autem FO fiat aliud hemisphærium, circa quod concipiatur cylindrus RQSP.



Iam sic; superficies cylindri ADEC ad superficiem hemisphærij est, per constructionem, vt AF ad FL, hoc est vt AC ad LI, hoc est vt rectangulum AE ad rectaugulum LM, hoc est vt cylindrica AE ad cylindricam LM. Quare sphærica superficies æqualis erit cylindricæ LM, & propterea minor, quàm cylindrica RS, hoc est quàm omnes conicæ AVBTC, absurdum. sphærica enim superficies ABC maior est, quàm omnes conicæ AVBTC.

6. huius.

ob 15 huius.

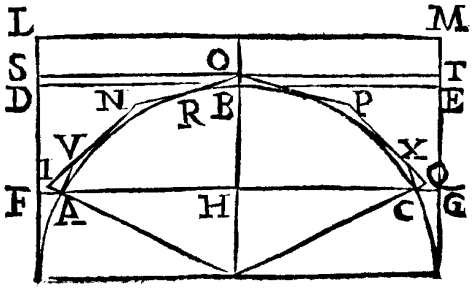
Hemisphærij ergò superficies æqualis erit superficiei cylindri eandem ipsi basim, eandemque altitudinem habentis. Cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIX.

CViuscunque minoris portionis Sphæræ superficies ęqualis est curuæ superficiei cylindri circa integram sphæram descripti.

scripti, & eandem altitudinem cum ipsa portione habentis.

Esto minor sphæræ portio ABC, & portio cylindri FDEG; circa integram sphęram descripti, eandem tamen altitudinem HB cũ ipsa portione sphærica habentis. Dico sphæricam superficiem ABC æqualẽ esse superficiei cylindri FDEG.



15 quinti.

Si enim non est æqualis, vel maior erit, vel minor.

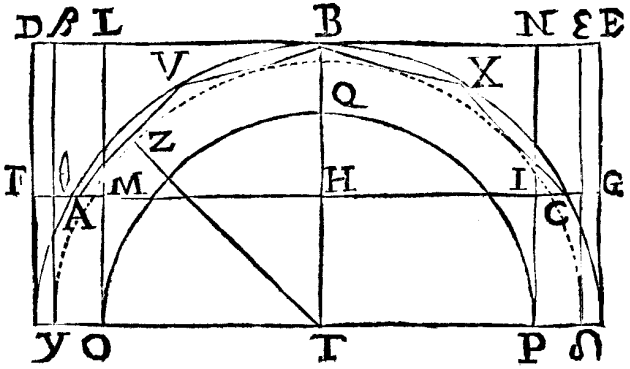
Ponatur primum maior; & ipsi sphæricæ superficiei ABC construatur æqualis (vt in pręcedenti) cylindrica FLMG: secto deinde arcu AB bifariam, & portiones eius iterum bifariam, & sic semper, circumscribatur arcui ABC figura multorum laterum INOPQ, terminata ad diametros, quę ducuntur per puncta A, & C. Sitque per prędictam bisectionem arcuum, semilatus RO minus, quàm recta DL, vt propterea planum ST, ductum per O, cadat intra puncta D, & L. Quemadmodum in pręcedenti &c Conuertatur deinde figura vniuersa circa OH, & ex conuersione figurę INOPQ nascetur portio solidi sphęralis sub conicis superficiebus contenta.

Iam sic. Quia sphærica superficies ABC æqualis est per constructionem cylindricæ FLMG, maior eadem erit, quàm cylindrica FSTG, & multò maior, quàm omnes conicæ INOPQ, multoq; etiam maior, quam omnes conicæ AVNOPXC. Quod est absurdum, & contra principia Archimedis.

Assumpsimus cylindricam superficiem FSTG maiorem esse omnibus conicis INOPQ; Hoc enim patet. Nam ex 13.14. & 15. huius colligi potest, conicas INOPQ æquales esse superficiei cylindricæ contentæ inter planum ST, & planum, quod duceretur per puncta I, Q.

Assumpsimus etiam, ductâ tangente AV. conicam superficiem,

ciem, quæ fit à linea IV, maiorem esse, quàm illa, quæ fit à linea AV. Quod quidem demonstratur apud Archimedem ad Propositionem 37. de Sphæra, & cylindro. Sed & ex nostris deduci potest. Nam rectangulum proprium superficiei, quæ fit à linea IV, maius est, quàm rectangulum proprium illius, quæ fit à linea AV. Continetur enim sub lineis maioribus.



Ponatur deinde sphærica superficies portionis ABC min. quã cylindrica FDEG.

Fiat vt cylindrica FDEG ad sphæricam superficiem ABC, quæ minor ponitur, ita FH ad HM: & centro T semidiametro autem HM fiat hemisphærium OQP, circa quod intelligatur cylindrus OLNP. Intra arcum autem ABC figura inscribatur multorum laterum AVBXC per continuam bisectionem arcuum, ita vt latera ipsius non tangant semicirculum OQP, & conuertatur vniuersa figura circa axem BT. Intelligatur autem radio TZ (quæ recta perpendicularis sit ad vnum latus figuræ inscriptæ) describi sphæram, quæ tangat singula figuræ AVBXC latera, & circa huiusmodi sphæram descriptus concipiatur suus cylindrus γβεδ.

Iam sic, cylindrica superficies FDEG per constructionem est ad sphæricam ABC, vt FH ad HM, hoc est vt FG ad MI. hoc est vt rectangulum FE ad rectangulum MN, hoc est vt eadem cylindrica FE, ad cylindricam MN. Erit ideò sphærica superficies ABC æqualis cylindricæ MN, nempe minor cylindrica θε. hoc est minor omnibus conicis AVBXC; quod est absurdum.

6 huius.

ex 6 huius.

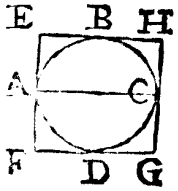
explicatur infra

Assum-

Assumpsimus cylindricam superficiem θε æqualem esse omnib. conicis AVBXC. Quod patet ex demonstratis. Sunt enim tam cylindrus θε, quàm omnes illæ conicæ eiusdem altitudinis HB, & circa eandem sphæram δγ describuntur.

Constat ergo superficiem ABC æqualem esse cylindricę DFGE; cum demonstratum sit neque maiorem esse, neque minorem. Quod &c.

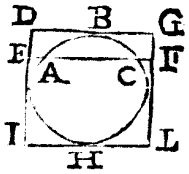
Corollarium I.



Ex prima duarum premissarum Propositionum patet, superficiem integram sphæræ æqualem esse superficiei cylindri sibi circumscripti, & eiusdem cum ipsa sphæra altitudinis.

Cum enim hemisphærium ABC superficiem habeat æqualem superficiei cylindri AEHC, & item hemisphærium alterum ADC, superficiem habeat æqualem superficiei cylindri AFGC, erit coniunctim tota sphæræ superficies æqualis superficiei cylindri FEHG; exceptis semper basibus.

Corollarium II.



Manifestum etiam est ex vltima propositione, superficiem maioris sphæræ portionis æqualem esse superficiei cylindri eandem cum portione altitudinem habentis, & circa eandem sphæram descriptibilis.

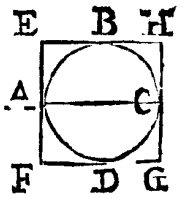
Cum enim integra sphæræ superficies æqualis sit superficiei cylindri IDGL, & demonstratum sit superficiem segmenti minoris ABC æqualem esse superficiei cylindri EDGF, erit reliqua superficies sphæræ AHC, æqualis reliquæ superficiei EILF. Quod oportebat &c.

PROPOSITIO XX.

SVperficies sphæræ quadrupla est maximi circuli in eadem sphæra descriptibilis,

Sit

Sit sphæra ABCD, cuius diameter AC; & circa ipsam intelligatur cylindrus eiusdem altitudinis FEHG.



Dico superficiem sphęrę quadruplam esse maximi circuli in ea descriptibilis.

Superficies enim cylindri FEHG siue basibus, est ad circulum suæ basis circa FG, sine circa AC descriptum, vt EF ad quar. partem ipsius FG, hoc est vt EG ad quar. partem ipsius FG; hoc est quadrupla. Propterea etiam superficies sphæræ, quæ cylindricæ est æqualis, quadrupla erit circuli circa AC descripti, qui in sphæra maximus est. Quod &c.

4. huius.

ex prim. Corolar. praced.

Aliter.

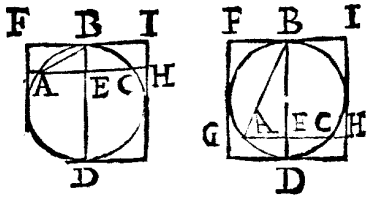
Sphærica superficies ABCD æqualis est cylindricæ FEHG; cylindrica verò FEHG ad circulum, cuius semidiameter sit AC, est vt rectangulum per axem EG, ad quadratum ex semidiametro AC, nẽpe ad quadratum EG; & ideò æqualis: propterea etiam sphærica superficies æqualis erit circulo, cuius semidiameter sit AC; ergo quadrupla erit circuli cuius diameter sit AC. Quod &c.

5. huius.

PROPOSITIO XXI.

CViuscunq; portionis sphæræ superficies æqualis est circulo, cuius semidiameter æqualis sit lineæ quæ ex polo portionis perducitur ad circulum, qui in eiusdem portionis basi est.

Esto sphæræ portio, siue minor, siue maior ABC, cuius ex polo ducta sit recta AB. Dico superficiem portionis æqualem esse circulo, qui fit ex AB, tamquam semidiametro.



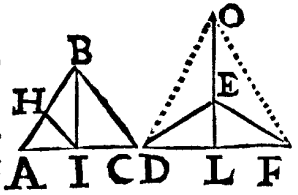
Cum enim quadratum AB æquale sit rectangulo DBE ob circulum, æquale erit & rectangulo GFIH, quod idem est, ac rectangulum DBE. Propterea circu-

circulus ex AB æqualis erit superficiei cylindri, cui per axem sit rectang. GFIH, & ideo æqualis etiam superficiei sphæricæ portionis ABC. Quod &c. 5. hui

Tria hæc Theoremata, quæ sequuntur, ex Archimede desumpta sunt; quod quidem fecimus, ne lector Archimedem adire cogeretur, sed vniuersam hanc doctrinam in hoc libello haberet.

PROPOSITIO XXII.

SInt duo coni recti ABC, DEF. Sitq; curuæ coni ABC superficiei æqualis circulus DF; nempe basis alterius coni DEF; rectæ verò IH, quæ ex centro I ducitur perpendiculariter ad latus AB, æqualis sit altitudo EL: Dico conos ABC, DEF, esse æquales.



Nam altitudo BI ad altitudinem EL est vt BI ad IH (ob æqualitatem) siue vt BA, ad AI, nempe vt curua superficies ABC ad basim AC; siue vt basis DF ad basim AC reciprocè. Quare æquales erunt coni ABC, DEF. Quod erat &c.

per 4 sexti. 8 huius.

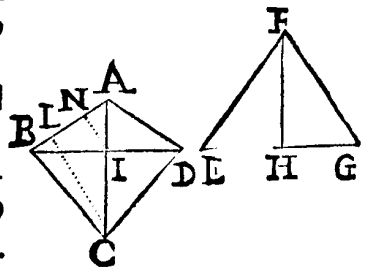
Corollarium.

Hinc patet, quòd si conus aliquis, puta DOF basim quidem habeat DF æqualem curuæ superficiei ABC; altitudinem verò OL non æqualem perpendiculari IH; Ita fore conum ABC ad conum DOF, vt est IH ad OL. Nam conus DEF ad conum DOF est, vt EL ad LO. Ergo (sumptis antecedentium æqualibus) conus ABC ad conum DOF, erit vt IH ad OL.

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit rombus solidus ABCD, ex duobus conis rectis compositus; Sitq; conus EFG habens basim EG æqualem superficiei curuæ alterius conorum rombi, puta BAD; altitudinem verò FH æqualem rectæ CI, quæ quidem ex vertice reli-

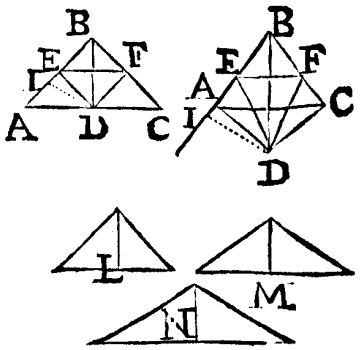
qui coni BCD ducitur perpendiculariter in latus AB productũ alterius coni BAD. Dico rombum solidum ABCD æqualem esse cono EFG.



Ducatur IN perpendicularis ad AB. Iam, conus BCD, ad conum BAD, est vt CI ad IA: & componẽdo, rombus ABCD ad conum BAD est vt CA ad AI; siue vt CL, ad IN. Conus verò BAD ad conum EFG est vt IN ad FH: ergo ex æquo rombus ABCD ad conum EFG est vt CL ad FH. Ergo æqualis. Quod erat, &c.

per Cor. præced.

PROPOSITIO XXIV.



SI fuerit conus, siue rombus solidus ABCD sectus plano EF ad basim parallelo. Intelligaturque ex integro solido ABCD ablatus rombus solidus EBFD. Dico reliquum solidum excauatũ AEDFC, quod superest, æquale esse cono cuidam M, cuius basis M sit æqualis frusto curuæ superficiei conicæ AEFC inter plana EF, AC, interceptæ, altitudo verò M sit æqualis perpendiculari DI, quæ à vertice ablati rombi D ducitur in latus BA.

Intelligantur tres coni æque alti L, M, N, quorum vnicuique altitudo sit æqualis rectæ DI; basis verò coni L sit æqualis curuæ superficiei coni EBF; at basis M æqualis sit segmento conicæ superficiei inter plana EF, AC intercepto: coni tandem N basis æqualis sit vtrisque simul prædictis basibus; siue (quod idem est) integræ superficiei curuæ coni ABC.

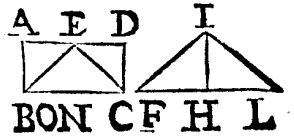
Manifestum est, quòd integrum solidum ABCD æquale erit cono N (per alterutram præcedentium duarum Propos.) sed etiam

etiam duo coni L, & M simul sumpti æquales sunt eidem cono N; ergo integrum solidum ABCD æquale erit duobus conis L, & M simul sumptis. Demptis itaque, rombo EBFD, & cono L, qui per præcedentem sunt ęquales, reliquum solidum excauatũ AEDFC æquale erit reliquo cono M. Quod erat &c.

ex Quin.

PROPOSITIO XXV.

SI ex cylindro auferatur conus eandem ipsi basim, & eandẽ altitudinem habens, erit reliquum excauatum solidũ, quod ex cylindro supereſt, æquale cono cuidam, cuius basis æqualis sit superficiei curuæ cylindri; altitudo verò æqualis semidiametro basis ipsius cylindri.



Esto cylindrus, cuius rectangulum per axem sit ABCD, & ex ipso auferatur conus BEC, vt dictum est. Sumatur autem alius conus FIL, cuius basis FL æqualis sit superficiei curuæ cylindri, altitudo æqualis rectæ NB, hoc est semidiametro basis cylindri. Dico reliquum ex cylindro solidum, dempto cono BEC, æquale esse cono FIL.

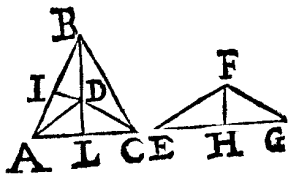
Secetur BN bifariam in O. Conus ergo FIL ad conum BEC, rationem habet compositam ex ratione altitudinum HI ad BA, hoc est NB ad BA, & ex ratione basium, hoc est basis quæ circa FL ad basim, quæ circa BC, siue, quod idem est, superficiei cylindricæ ad basim propriam, quę circa BC, hoc est, lineę AB ad BO. Erit ergo conus FIL ad conum BEC, vt NB ad BO, nempe duplus: solidum etiam cylindricum excauatum, dempto cono BEC, duplum est eiusdem coni BEC. Propterea solidum cylindricum excauatum æquale erit cono FIL, cuius basis æquatur superficiei cylindri, altitudo verò æqualis est semidiametro basis cylindri. Quod &c.

4. huius.

PROPOSITIO. XXVI.

SI ex cono conus auferatur eandem habens basim; altitudinem verò minorem, erit excauatam solidum conicum, quod relinquitur, æquale cono cuidam, cuius quidẽ basis ęqualis sit curuæ superficiei totius prioris coni, altitudo verò æqualis perpendiculari, quę ex vertice ablati coni demittitur in latus maioris coni.

Esto conus rectus ABC, ex quo auferatur conus ADC, vti dictum est. Ponatur autem conus EFG, habens basim EG, ęqualem curuę superficiei coni ABC; altitudinem verò HF æqualem rectæ DI, quæ perpendiculariter à vertice ablati coni cadit in latus AB. Dico solidum conicum excauatum ADCB, dempto cono ADC, æquale esse cono EFG.



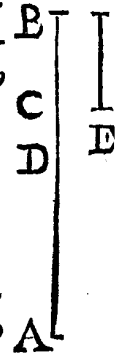
Nam cum triangula BLA, BID, rectangula sint, habeantque angulum communem ABL, similia erunt. Sed conus EFG ad conum ADC rationem habet compositam ex ratione basium, nempe circuli circa EG, siue superficiei curuę coni ABC, ad circulum circa AC, hoc est rectę BA ad AL, siue BD ad DI, & ex ratione altitudinum, nempe HF ad DL, siue DI ad DL. Conus ergo EFG, ad conum ADC erit, vt linea BD ad LD. Sed conus ABC ad conum ADC est, vt BL ad LD, & diuidendo, etiam solidum excauatum ADCB ad conum ADC est, vt linea BD ad DL. Propterea constat solidum excauatũ ADCB ęquale esse cono EFG. Quod &c.

8. huius 4. sexti.

Lemma.

Si ab eadem magnitudine AB duæ magnitudines inæquales auferantur AC maior, & AD minor; fueritq; DC, nempe differentia inter ablatas, æqualis differentię, siue excessui, quo maius residuum BD superat quandam magnitudinem E. Dico ipsam E minori residuo CB æqualem esse.

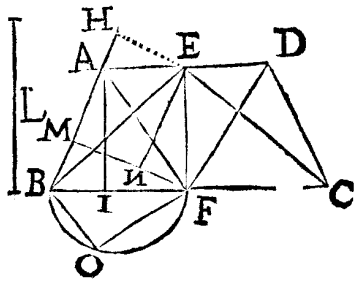
Patet hoc. Cum enim maius residuum DB superet magnitudinem E excessu DC, si excessus abijciatur, erit reliqua CB æqualis magnitudini E. Propterea magnitudo E æqualis est minori residuo. Quod &c.



PROPOSITIO XXVII.

SI ex conico frusto conus auferatur, qui pro basi habeat maiorem frusti basim, altitudinem verò eandem cum frusto; Erit reliquum excauatum solidum æquale cono cuidam, qui basim habeat æqualem superficiei curuæ frusti, altitudinem verò æqualem perpendiculari, quæ ducitur ex vertice ablati coni in latus alterum conici frusti.

Esto conicum frustum ABCD, cuius maior basis sit circulus circa BC. Et ex ipso auferatur conus BEC, cuius basis sit idem circulus circa BC; altitudo verò FE eadem cum frusto. Dico reliquum solidum excauatum dẽpto cono BEC, ęquale esse cono cuidam, cuius basis æqualis si curuæ superficiei conici frusti ABCD; altitudo verò sit linea EH, quæ nimirum ex E vertice ablati coni cadit perpendiculariter in AB latus conici frusti.



Inscribatur alius conus AFD habens basim circa AD, & verticem in F. Ducaturque AI parallela ad EF, eritque tota IC æqualis vtrique simul semidiametro basium, nempe ipsi EA, ipsiq; FB. Fiat deinde circa FB semicirculus FOB, in quo applicetur BO æqualis ipsi FI, siue ipsi EA; eritque circulus ex semidiametro FO differentia inter duos circulos, quorum semidiametri sint, FB, BO, siue FB, & EA; nempe differentia inter

ter bases oppositas conici frusti, hoc est inter bases conorum BEC, AFD, & propterea conus, cuius basis sit circulus ex FO semidiametro, altitudo verò FE, differentia erit, siue excessus, quo maior conus BEC superat minorem AFD.

Ponatur recta quædam L, cuius quadratum æquale sit rectangulo ex AB in IC, eritque circulus, qui fit ex L semidiametro, æqualis conicæ superficiei frusti ABCD. Demittatur denique ex F recta FM perpendicularis ad AB, & ex E recta EN parall. ipsi HM, eritque facta figura EHMN parallelogrammum rectangulum. *per Cor. prop. xij huius.*

Iam cum propter parallelas HM, RN, sint æquales anguli BAD, NED, demptis rectis IAD, FED, erunt reliqui BAI, NEF æquales; & ideò triangula BAI, NEF, cum rectos habeant angulos ad I, & N æquiangula erunt.

Cum autem rectangulum BIC simul cum quadrato FI æquale sit quadrato FB, vel quadratis FO, OB, demptis æqualibus BO, FI, erit reliquum rectangulum BIC quadrato FO æquale. *5. secundi.*

Concipiatur iam conus AFD detrahi ex conico frusto ABCD, eritq; reliquum excauatum solidum, dempto prædicto cono, æquale cono cuidam, cuius basis semidiameter sit L, altitudo verò FM. *4. huius.*

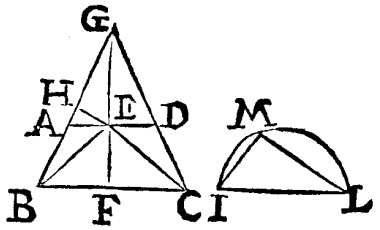
Iam; quoniam ob similitudinem triangulorum, est NF ad FE, vt BI ad BA, hoc est (sumpta communi altitudine) vt rectangulum BIC ad rectangulum BA in IC, hoc est, sumptis æqualibus, vt quadratum FO ad quadratum ex L reciprocè, æquales erunt coni reciproci, quorum alter altitudinem habeat FE, & semidiametrum basis FO; alter verò altitudinem habeat FN, & semidiametrum basis L. Sed conus ille, qui altitudinem habeat FE, & radium basis FO, est excessus inter ablatas magnitudines, nempe inter conos BEC, AFD; Conus verò ille, qui altitudinem habet FN, & radium basis L, est excessus, quo maius residuum totius magnitudinis (nempe conus cuius altitudo FM, & radius basis L) superat quandam aliam magnitudinem, nempe conum, cuius altitudo NM, siue EH, radius autem basis L; *24. huius.*

erit

erit itaque hæc magnitudo, per Lemma præmissum, æqualis minori residuo; ergo conus prædictus, cuius altitudo EH, & basis circulus ex L æqualis superficiei conici frusti, æqualis erit minori residuo, hoc est reliquo conici frusti ABCD dempto cono BEC. Quod erat &c.

Aliter.

Sed conemur idem ostendere minus laboriosa demonstratione; si possibile erit ex difficultate materiæ, & veriùs ex tenuitate ingenij.



Sit conicum frustum ABCD, cuius maior basis BC, & ex ipso auferatur conus BEC, altitudinem habens eandem cum frusto, & pro basi, maiorem ipsius frusti basim. Compleatur conus BGC, cuius datũ erat frustum, ductaque EH ad angulos rectos ipsi BG, ponatur IL media proportionalis inter GB, BF, eritque circulus ex IL semidiametro descriptus, æqualis superficiei coni BGC. Fiat circa IL semicirculus IML, in quo aptetur IM media proportionalis inter GA, AE, eritq; circulus ex semidiametro IM factus æqualis superficiei coni AGD; Reliquus circulus ex semidiametro ML factus, æqualis erit superficiei conicæ frusti ABCD (si enim ab æqualibus æqualia demas reliqua sunt æqualia.) *per Cor. 8. huius.* *per Cor. 8. huius.*

Dico reliquum solidum frusti conici ABCD, ablato cono BEC, æquale esse cono cuidam, cuius altitudo sit EH; basis verò æqualis superficiei conicæ ipsius frusti; hoc est circulus ex semidiametro ML descriptus.

Cum n. duo circuli ex radijs IM, LM facti æquales sint circulo ex IL descripto, si altitudo vnicuique eadem assumatur EH, erunt duo coni simul (quorum altitudo communis EH, bases verò circuli ex radijs IM, LM) æquales cono, cuius altitudo eadem EH, basis verò circulus ex IL; iste verò conus æqualis est solido conico BECG, dempto cono BEC, ergo duo illi coni æquales erunt solido BECG. Propterea ablatis vtrinque æqualibus conis, nempe cono, cuius basis *26. huius.*

ex

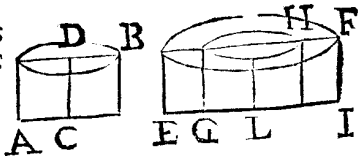
ex 1M est, altitudo EH, & cono AGD (sunt enim æquales per 22. huius) remanrbunt æqualia, solidum nempe excauatum frusti ABCD, detracto cono BEC, & conus cuius altitudo EH, basis circulus ex LM radio factus, qui quidem æqualis est superficiei conica frusti ABCD. Quod &c.

Definitio.

Si ex cylindro cylindrus auferatur æquealtus, & circa eundem axem descriptus, solidum excauatum, quod relinquitur, Tubum cylindricum appellabimus.

PROPOSITIO XXVIII.

CYlindrus ad tubum cylindricum æquealtum, est vt quadratum semidiametri basis cylindri ad rectangulum basis ipsius tubi cylindrici.



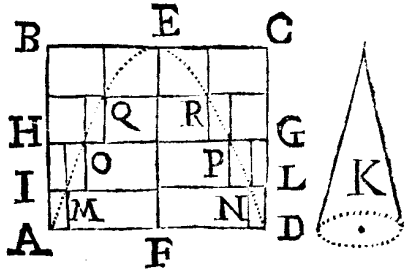
Esto cylindrus AB, cuius axis CD. Tubus verò cylindricus EF [dempto nimirum cylindro GH æquealtus sit cum cylindro AB. Di co cylindrum AB ad tubum EF es se vt quadratum AC semidiametri basis cylindri, ad rectangulum EG', nempe ad rectangulum basis tubi, hoc est, quod fit à differentia EG, & ab aggregato GI semidiametrorum basis ipsius tubi.

Nam cylindrus integer EF ad cylindrum GH, est vt quadratum EL ad LG quadratum. Et diuidendo, Tubus cylindricus EF ad cylindrum GH est, vt rectangulum EGI ad quadratum GL. Sed cylindrus GH ad AB cylindrum est, vt quadratum GL ad quadratum BC. Ergo ex æquo erit tubus cylindricus EF ad cylindrum AB, vt rectangulum EGI ad quadratum AC. Conuertendo igitur patet, quod propositum erat.

PROPOSITIO XXIX.

DAtæ figuræ solidæ rotundæ figuram inscribere, alteramq; circumscribere ex cylindris æquealtis, ita vt descriptarũ differentia minor sit quolibet dato solido.

Esto



Esto cylindrus ABCD, cuius axis EF: datoque intra cylindrũ solido AED circa eundem axem EF, reuoluto, siue hemisphæriũ, siue conus, vel conoides sit, oportet ipsi solido AED duas figuras ex cylindris æquealtis cõpositas, alteram quidem inscribere, alteram verò circumscribere ita, vt circumscripta superet inscriptam minori excessu quam sit quodlibet datum solidũ K.

Secetur bifariam cylindrus AC plano HG ad axem EF erecto; iterumq; cylindrus HD bifariam secetur plano IL, & hoc fiat semper donec cylindrus aliquis puta AL minor remaneat quàm solidum K. Tunc diuiso toto cylindro AC in cylindros æquealtos ac ipse AL, oriantur in solido AED sectiones MN, OP, QR. Concipiamus super vnoquoque circulorum MN, OP, QR, duos cylindros, alterum quidem versus E, alterum autem versus partes F conuersum. Eruntq; omnes simul cylindri, qui verticem habent versus F, æquales omnibus simul cylindris verticem versus E habentibus [cum singuli singulis æquales sint] Ergo si omnibus cylindris, qui verticem habent versus E, addas cylindrum AL, superabit iam figura circa solidum AED descripta, figuram eidem inscriptam, differentia AL; Nempe minori excessu, quàm sit solidum K. Quod erat &c.

Corollarium.

Hinc patet quòd data figura solida, siue hemisphærium sit, siue conus, siue conoides &c., ipsi duæ figuræ solidæ ex cylindris æquealtis compositę altera inscribi potest, altera vero circumscribi; ità vt differentia inter datam solidam figuram, & descriptarum alterutrã. minor sit quolibet dato solido K.

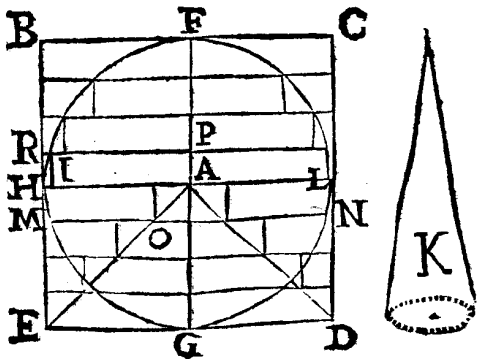
Differentia enim inter figuram datam, & alteram descriptarũ minor vtiq; erit, quam differentia inter descriptas: est enim pars eiusdem, ergo multò minor, quam solidum K.

Pro-

PROPOSITIO XXX.

SPhæra quadrupla est coni cuiusdam, qui quidem conus basim habeat æqualem maximo sphæræ circulo, altitudinem vero eiusdem sphæræ semidiametro æqualem.

Esto circulus cuius centrum A, quadratum ipsi circũscriptum sit BCDE; iunctisque EA, AD. conuertatur figura circa axẽ FG, ita vt a quadrato fiat cylindrus, à sphęra circulus; à triangulo EAD, conus EAD.



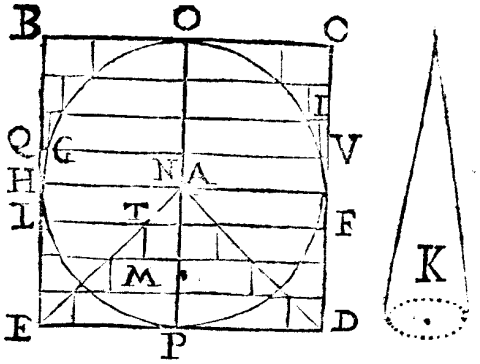
Dico, sphæram quadruplam esse coni EAD. Nisi enim quadrupla sit, non erit hæmisphærium æquale solido, quod describitur à triangulo EHA circa axem FG conuerso [cum hoc solidũ duplum sit coni EAD.] Erit itaq; hemisphærium vel maius, vel minus solido trianguli EHA.

Esto primùm maius, si potest esse; sitque excessus æqualis solido K. Inscribatur in hemisphærio figura ex cylindris æquealtis constans, ita vt ab hemisphęrio deficiat minori defectu, quam sit solidum K. Et erit figura inscripta adhuc maior, quàm solidum trianguli EHA. Secetur etiam axis AG in tot partes æquales in quot sectus erit AF. Ductisq; per puncta sectionum planis ad axem erectis, intelligatur in solido trianguli EHA inscripta figura ex tubis cylindricis æquealtis cõstans, quorum vnus sit, cuius sectio est rectangulum HO. *per 29. huius.*

Iam cylindrus IL ab tubum cylindricum HO, est vt quadratum

tum IP ad rectangulum MNO. Sed quadratum IP æquale est rectangulo FPG, nempe ipsi MNO (nam FP æqualis est rectæ BR, siuè ME, siue MO, & reliqua PG reliquæ ON) ergo cylindrus IL æqualis est tubo cylindrico HO. Hoc modo procedendo ostenduntur omnes cylindri in hæmisphærio æquales omnibus tubis in solido trianguli EHA. Quare figura in hemisphærio inscripta ex cylindris constans, æqualis erit figuræ in solido trianguli EHA descriptæ ex tubis cylindricis compositæ. Sed figura in hemisphærio descripta maior erat integro solido trianguli EHA. Ergò necesse est quod figura inscripta in solido EHA eodem solido maior sit, pars suo toto. Quod esse non potest. *per 28. huius.*

Esto deinde, si fieri potest, hemisphærium minus solido triãguli EHA; sitq; defectus æqualis solido K



Circumscribatur ipsi hemisphærio figura solida ex cylindris æquealtis constans, ita vt excessus figuræ super hemisphæriũ minus sit solido K. Tunc enim circumscripta figura adhuc minor erit solido trianguli EHA. Concipiamus deinde solido triãguli EHA aliquam figuram esse circumscriptam constantem ex tubis cylindricis æquealtis, ac cylindris ex quibus constat figura hæmisphærio circumscripta. *per 25 huius.*

Iam primus cylindrus HV figuræ circa hemisphærium descriptæ, æqualis est primo tubo cylindrico figuræ circumscriptæ solido trianguli EHA; nam & iste tubus cylindrus est HF.

Secundus cylindrus GI ad secundum tubum LM, est vt quadratum GN ad rectangulum LTF, nempe æqualis (quadratum enim GN, æquale est rectangulo ONP, siue LTF, nam recta ON rectæ BQ, siue LE. siue LT, æqualis est, & reliqua NP reliquæ TF.) *per 8. huius.*