EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Comitato scientifico:

Simonetta Bassi
Università di Pisa

Umberto Bottazzini
Università Statale di Milano

Michele Ciliberto
Scuola Normale Superiore di Pisa

Giuseppe Da Prato
Scuola Normale Superiore di Pisa

Paolo Freguglia
Università di L'Aquila

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore di Pisa, Centro di ricerca matematica "Ennio De Giorgi", Presidente

Angelo Guerreggio
Università Bocconi di Milano

Michele Marini
Fourweb Service srl

Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore di Pisa, tesoriere

Massimo Mugnai
Scuola Normale Superiore di Pisa

Pietro Nastasi
Università di Palermo

Luigi Pepe
Università di Ferrara

M.G. AGNESI

INSTITUZIONI ANALITICHE

2

INSTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

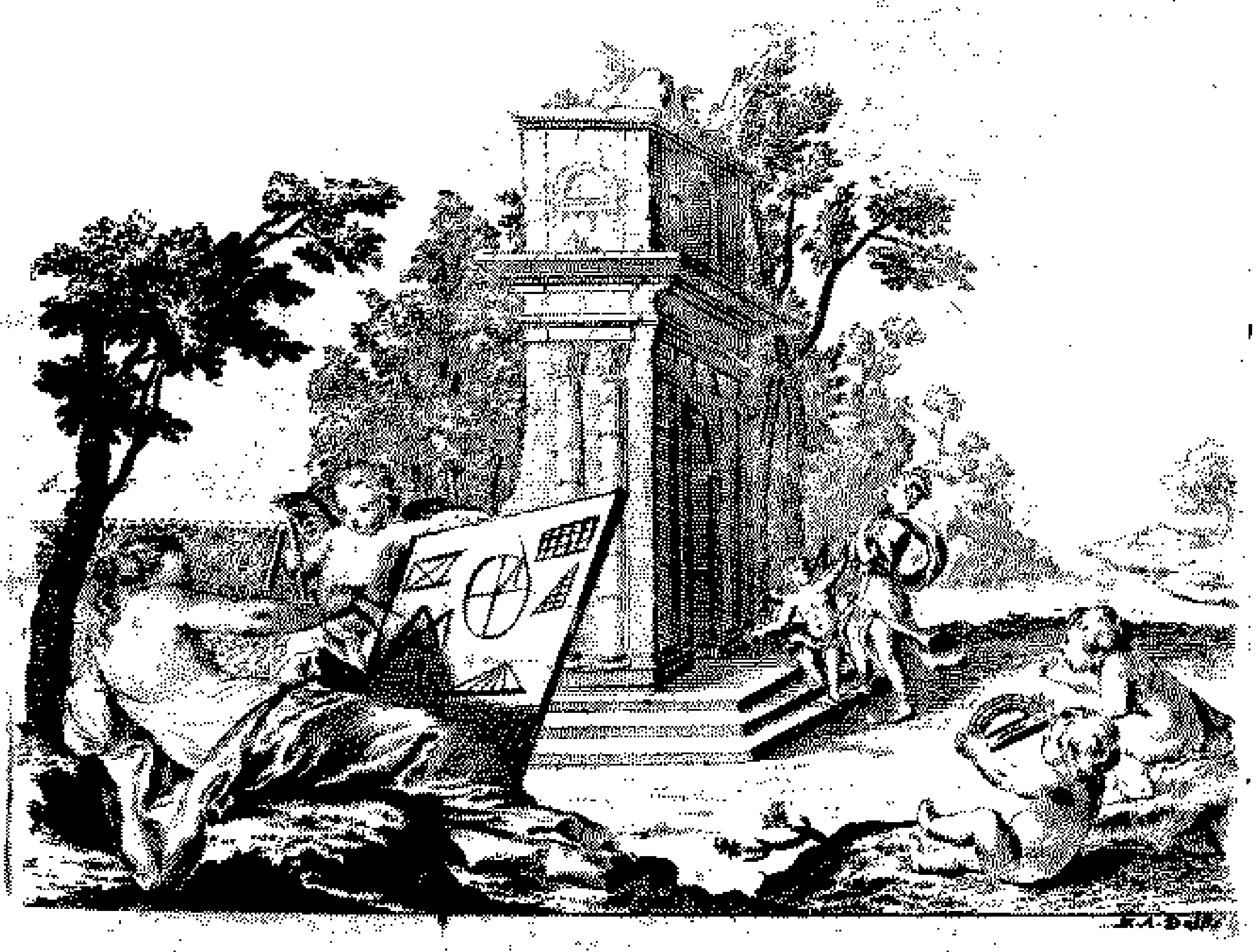
DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.NA MARIA GAETANA AGNESI

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO II.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

L'Analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Flussioni suole chiamarsi, è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine sieno esse differenze. Questo calcolo contiene i Metodi delle Tangenti; de' Massimi, e Minimi; de' Flessi contrarj, e Regressi delle Curve; de' Raggi Osculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia sia.

CAPO I.

Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini, e del Calcolo de' medesimi.

1. COl nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

S'intenda (*Fig.* 1.) la retta ABC, generata dal moto del punto A, prodotta in infinito, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, l'altra retta BD, e suppongasi, che mentre il punto B giungne da B in C, seco portando la linea BD sempre a se stessa parallela da BD in CE, il punto D trascorra lo spazio FE con tal legge, che descriva la curva ADE; egli è chiaro, che l'assisse AB, AC, siccome l'ordinate BD, CE, e gl'archi AD, AE saranno quantità continuamente crescenti, e decrescenti, e però variabili.

2. Quantità costanti sono quelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, come i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

Le costanti si denominano colle prime lettere dell' Alfa-

Alfabeto, e le variabili colle ultime in quella guisa, che si è fatto nell' Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note, ed incognite.

3. Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.

Sia (*Fig.* 2., *e* 3.) la curva AM, il di cui asse, o diametro AP; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'assissa AP, e si potranno considerare per eguali le due AP, Ap, non essendovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp. Da' punti P, p si alzino le due ordinate parallele PM, pm in qualunque angolo, e si tiri la corda mM prodotta in B, e la retta MR parallela ad AP; poichè sono simili i due triangoli BPM, MRm, sarà BP, PM :: MR, Rm, ma le due quantità BP, PM sono finite, ed MR è infinitesima, adunque sarà pure infinitesima la Rm, e però sarà essa la differenza dell' ordinata PM; per la stessa ragione sarà infinitamente piccola la corda Mm, ma (come dimostrerò in appresso) la corda Mm non si distingue dall'archetto, e si può prendere indifferentemente l'uno per l'altra,

adun-

adunque sarà l'archetto Mm quantità infinitesima, e però la differenza dell'arco AM della curva. Da ciò chiaramente si vede, che anco lo spazio $PMmp$, chiuso dalle due ordinate PM, pm, dalla infinitesima Pp, e dall'archetto infinitesimo Mm, sarà la differenza dell' area AMP compresa fra le due coordinate AP, PM, e la curva AM; e condotte le due corde AM, Am, sarà il triangolo mistilineo MAm la differenza del segmento AMS chiuso dalla corda AM, e dalla curva ASM.

4. La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d, quindi posta l'assissa $AP=x$, sarà Pp, o $MR=dx$; e similmente posta l'ordinata $PM=y$, sarà $Rm=dy$, e posto l'arco di curva $ASM=s$, lo spazio $APMS=t$, il segmento $AMS=u$, sarà $Mm=ds$, $PMmp=dt$, $AMm=du$, e tutte queste sono differenze prime, o flussioni del primo ordine.

E si avverta, che le predette differenze si scrivono col segno positivo, se per esse crescano le variabili loro, e col negativo se le variabili calino. Così nella curva NEC (*Fig.* 4.) essendo $AB=x$, $BF=dx$, $BC=y$, sarà $DC=-dy$, differenza negativa della y.

Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antichi de' Poligoni inscritti, e circoscritti,

scritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata *MN* (*Fig.* 4.) si vada continovamente accostando alla *BC*, finchè con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che queste due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno *BC*, *FE*, adunque *BF*, *CD* saranno quantità minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.

Anzi con la sola comun Geometrìa è sicuro, che non solo queste, ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica. Si danno in geometrìa le quantità incommensurabili, ed infinite di genere, come è noto a' Geometri, ed agl' Analisti, dunque si danno le grandezze infinitesime di varj ordini.

Ed in fatti sia a cagion d'esempio (*Fig.* 5.) *AB* il lato, ed *AC* il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10. di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. Dico per tanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineeta *CE*, per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un' altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime.

Fingasi, che la linea *EC* finita renda, s'egli è possibile, le due *AB*, *AC* asimmetre; in conseguenza la la restante AE sarà commensurabile al lato AB. Sia la retta F comune loro misura, la quale non può mai essere eguale alla EC, altrimenti sarebbero commensurabili il lato, ed il diametro; sarà adunque, o maggiore, o minore.

Nel primo caso si sottragga F da EC, quante volte si può, ed il residuo sia GC. E perchè F misura AB, AE, ed anco EG, le due rette AB, AG averanno fra loro una proporzione razionale, conseguentemente non era la grandezza EC, che facesse incommensurabili le AB, AC, ma una quantità più piccola, per esempio la GC, la quale però è finita, essendosi dalla finita EC sottratta una, o più fiate la finita F. Dividasi F per metà, ed indi ancora per metà sino a tanto, che si venga ad una parte aliquota di F minore di GC, e levata questa da GC, resterà HC, la quale, replicato il discorso, non è quella che rende incommensurabili le linee AB, AC; ed atteso che il raziocinio vale per qual si sia grandezza finita, si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data, lo che si verifica parimente nell'altro caso, mentre cioè sia la comune misura F maggiore di EC, il che ec.

Dopo di ciò vado avanti, e dico, che i quadrati sopra le rette AB, AC, i quali si rispondono come l'unità al binario, non ostante, che i lati sieno irrazionali,

zionali, ſono però commenſurabili, e fatti tali da una quantità infiniteſima del ſecondo ordine. Eſpoſti (*Fig. 6.*) i due quadrati *AB*, *AC*, ſegno le due quantità eguali, ed infiniteſime, che rendono aſimmetri i lati *AD*, *AG*, *AI*, *AH*, e ſieno queſte *ED*, *FI*, e compiuta la preparazione (come nella Figura) ſi noti, che i due rettangoli *DK*, *IK* ſono incommenſurabili al quadrato *AB*, e la ragione ſi è, perchè ſono compreſi dalle rette *EK*, *FK* commenſurabili alle due *AG*, *GB*, e di più dalle linee minime, ed inaſſegnabili *ED*, *FI*, che ſono quelle, dalle quali naſce l'aſimmetrìa de' lati *AD*, *AG*, *AI*, *AH*. Aggiunto però a' ſuddetti rettangoli il quadrato *AK*, averemo il gnomone compoſto delle tre accennate grandezze aſimmetro al quadrato *AB*; ma l'intiero quadrato *AC* ſta all'altro *AB* in razional proporzione, dunque il quadrato *AC* è reſo tale dal quadrato infiniteſimo *KC*, quantità del ſecondo ordine, per la quale ſupera il ſuddetto gnomone aſimmetro.

Noto, che i cubi ſopra le linee *AI*, *AH* ſono incommenſurabili, tutto che ſieno razionali le loro baſi, e ſi può facilmente provare, che ſono ridotti tali da una grandezza inaſſegnabile del terzo ordine, ed in tal guiſa col diſcorſo di mano in mano ſi proceda.

5. In quella guiſa che le differenze prime non ânno proporzione aſſegnabile alle quantità finite, così

le differenze ſeconde, o fluſſioni del ſecondo ordine non ânno proporzione aſſegnabile alle differenze prime, e ſono di eſſe infinitamente minori per modo, che due quantità infiniteſime del primo ordine, ma che differiſcono tra loro d'una differenza ſeconda, poſſono aſſumerſi per eguali. Lo ſteſſo ſi dica delle differenze terze riſpetto alle ſeconde, e così di mano in mano.

Le differenze ſeconde ſi ſogliono marcare con doppia d, le terze con trè d ec. La differenza adunque di dx, cioè la differenza ſeconda di x ſi ſcriverà ddx, o pure d^2x, nel che ſi avverta, non eſſere lo ſteſſo d^2x, e dx^2, perchè il primo ſignifica, come ô detto, la differenza ſeconda di x, ed il ſecondo ſignifica il quadrato di dx; la differenza terza ſarà $dddx$, o pure d^3x ec. Così ddy ſarà la differenza di dy, cioè la differenza ſeconda di y ec.

Ma per formare giuſta idea delle ſeconde, terze ec. differenze ſaranno opportuni i ſeguenti Teoremi.

TEOREMA I.

6. Sia una qualunque curva MBC, (*Fig.* 7.) ed una porzione di eſſa BC infiniteſima del primo ordine. Da' punti B, C ſi conducano perpendicolari alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA ſi potranno aſſumere per eguali.

Si

Si conducano le tangenti BD, CD, e la corda BC. Se le due BA, CA non sono eguali, sia quella, che si vuole di loro, come CA, maggiore dell'altra, e ad essa si conduca perpendicolare la BH. La differenza fra le linee BA, CA sarà minore dell' intercetta CH, per l'angolo retto in H, e CH minore della corda BC, ma la corda BC è infinitesima del primo ordine, essendosi supposto infinitesimo l'arco; adunque la differenza tra BA, e CA almeno non sarà maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine, e però le rette BA, CA potranno assumersi per eguali.

COROLLARIO I.

Adunque il triangolo BAC sarà isoscele, e però gl'angoli ABC, ACB alla base eguali tra loro, e sottratti questi da' retti ABD, ACD, rimarranno eguali i due BCD, DBC, e per conseguenza anche eguali le due tangenti BD, CD.

COROLLARIO II.

Condotta la retta DA, essendo simili, ed eguali i due triangoli ADB, ADC, taglierà essa in due parti eguali gl'angoli BAC, BDC; e perchè vengono pure ad essere simili, ed eguali i due triangoli AEB, AEC, sarà la stessa AD normale a BC, e la dividerà egualmente in E.

COROLLARIO III.

Ed essendo simili i due triangoli DAC, EDC, sarà l'angolo DCE eguale all'angolo DAC, ed i due angoli DCE, DBE presi assieme eguali all' angolo BAC.

COROLLARIO IV.

Da ciò si raccoglie, che un' arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro A, e raggio AB, o AC.

COROLLARIO V.

Essendo simili i due triangoli AEB, BED, averemo AE, $EB :: EB$, ED; ma AE è linea finita, ed EB infinitesima del primo grado, dunque ED sarà infinitesima del secondo, e sarà il suo valore $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$.

Ma il rettangolo sotto la doppia AE in EI è eguale (per la proprietà del circolo) al quadrato EB; dunque $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$, e per conseguenza $2AE$, $AE :: ED$, EI; ma il primo termine dell' analogia è doppio del secondo, dunque anco il terzo del

del quarto, e conseguentemente saranno eguali le due linee del secondo ordine *IE*, *ID*.

COROLLARIO VI.

E perchè la differenza tra la semicorda *BE*, e la toccante *BD* è una quantità minima del terzo grado; conciosiacchè, condotto dal centro *B*, coll' intervallo *BE* l'arco di cerchio *EL*, grandezza della seconda classe, la quale con il suo seno si confonde, saranno simili i due triangoli *BDE*, *EDL*, che oltre gl' angoli retti in *E*, ed *L*, ânno l'angolo comune in *D*, dunque *BD*, *DE* :: *ED*, *DL*; ma *BD* è flussione prima, e *DE* seconda (per l'antecedente Corollario) dunque *DL* sarà una terza flussione. Quindi essendo l'arco *BI* della curva maggiore della semicorda *BE*, e minore della tangente *BD*, non può differire dall' una, e dall' altra se non per una grandezza al più del terzo ordine.

TEOREMA II.

7. Sia una qualunque curva *DAE*, (*Fig.* 8., *e* 9.) nel di cui asse prese due porzioni infinitesime del primo ordine, ed eguali *HI*, *IM*, si conducano le ordinate parallele *HA*, *IB*, *ME*, le quali taglieranno nella data curva gl' archetti *AB*, *BE* parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduca la corda *ABC*, la quale concorra

nel

nel punto C con l'ordinata ME prodotta, se occorre. Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta sarà infinitesima del secondo ordine.

Si conduca la corda AE. Se la retta IM fosse quantità assegnabile finita, anco il triangolo ACE sarebbe finito; ma accostandosi sempre alla ordinata HA la ME in maniera, che la IM divenga pure flussione, o sia infinitesima del primo ordine, l'angolo ACE rimane sempre lo stesso, e l'angolo AEC si accresce, facendosi sempre minore l'angolo CAE, fino a che divenga finalmente minore di un qualunque dato, cioè si faccia infinitesimo. In questo caso, siccome il seno di un'angolo infinitesimo del primo ordine col raggio finito assegnabile è quantità infinitesima del primo ordine, così il seno dell'angolo CAE infinitesimo del primo ordine nel raggio AE, o AC infinitesimo del primo ordine sarà quantità infinitesima del secondo ordine; ma ne' triangoli i lati sono proporzionali ai seni degl'angoli opposti, adunque anche la retta CE sarà infinitesima del secondo ordine.

Chiamate per tanto le $DH = x$, $HA = y$, $HI = IM = dx$, sarà $FB = GC = dy$, ed $EC = - ddy$, prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e non cresce la dy, (*Fig.* 8.) e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresca la dy, cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse DM. (*Fig.* 9.)

COROL-

COROLLARIO.

Se dal punto E si conduca alla BC la normale ES, saranno pure ES, CS flussioni del secondo ordine, imperciocchè ciascuna minore di EC.

TEOREMA III.

8. Se nel circolo si prenda un'arco infinitesimo del primo ordine; dico che il seno verso sarà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto, e la tangente sarà infinitesima del terzo.

Sia l'arco DC (*Fig.* 10.) infinitesimo del primo ordine, DB il seno retto, CE la tangente, e si conduca DF parallela ad AC. Per la natura del circolo si à $GB, BD :: BD, BC$; ma GB è quantità finita, e BD infinitesima del primo ordine, adunque siccome GB è infinitamente maggiore di BD, così sarà BD infinitamente maggiore di BC, e però BC, o sia DF infinitesima del secondo ordine. Per la similitudine de' triangoli ABD, DFE, sarà $AB, BD :: DF, FE$; ma AB quantità finita è infinitamente maggiore di BD infinitesima del primo ordine, adunque DF infinitesima del secondo ordine sarà infinitamente maggiore di FE; e però FE flussione del terzo.

COROL-

COROLLARIO I.

9. E poichè la tangente è sempre maggiore dell' arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacchè non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anco assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto.

COROLLARIO II.

10. Se s'immagineremo, che il raggio del circolo sia AN infinitesimo del primo ordine, sarà l'arco NO, ed il seno OM infinitesimo del secondo, e però il seno verso MN infinitesimo del terzo.

COROLLARIO III.

11. Sieno nell'asse DM (*Fig.* 11., *e* 12.) due differenze prime, ed eguali HI, IM, alle quali corrispondono i due archi infinitesimi di curva AB, BE, e si tirino le due corde BE, AB, e questa prodotta incontri in C l'ordinata ME parimenti prodotta, se fa d'uopo. Si tiri ES perpendicolare a BC, e col centro B, raggio BE l'arco EO. Per il Corollario del Teorema II., CS è infinitesima del secondo grado, e per l'antecedente, OS è infinitesima del terzo, dunque CO è infini-

infinitesima del secondo, perchè l'infinitesima del terzo aggiunta, o sottratta dall' infinitesima del secondo non fa alcuna alterazione; ma essendo $HI = IM$, o sia $AF = BG$, per i triangoli simili, ed eguali AFB, BGC, è anco $AB = BC$, ma gl'archi possono assumersi eguali alle corde, dunque CO sarà la differenza de' due archi AB, BE, e però se sia la curva $DA = s$, sarà $AB = BC = ds$, $CO = -dds$ col segno negativo, perchè AB và calando, essendo BE minore di AB nella *Fig.* 11., ed all'opposto col segno positivo nella *Fig.* 12.

SCOLIO.

12. Nel determinare le seconde differenze dell' ordinata, e dell' arco della curva ô supposto, e nel Teorema II., ed in quest'ultimo Corollario, che le HI, IM sieno eguali, vale a dire, che la differenza prima dell' assissa non si alteri giammai, ma rimanga costante, nel qual caso la differenza seconda dell' assissa è nulla, cioè chiamata x l'assissa, dx la prima differenza, è $ddx = 0$.

Si fanno però due altre supposizioni ancora, cioè l'una, che sia costante la differenza prima dell' ordinata, e variabile quella dell' assissa, e della curva; l'altra, che sia costante la differenza prima della curva, e variabile quella dell' assissa, e dell' ordinata.

Ma dalle premesse cose è facile il passaggio a quest' altre due ipotesi. Ritenuto ciò, ch'è stato detto di sopra, sia (*Fig.* 13., *e* 14.) $BF=EG$, cioè costante la flussione dell'ordinata, si conduca EP parallela a BG, e PT perpendicolare, sarà dunque $BF=PT$, quindi $AF=BT$, $AB=BP$, e però GT, o sia EP la differenza tra HI, ed IM; e descritto col centro B, intervallo BE, l'arco EO, sarà PO la differenza tra l'arco AB, e l'arco BE, potendosi assumere le corde per gl'archi infinitesimi. Ma, per i triangoli simili BTP, CEP, avremo PT, $TB :: CE$, EP; PT, $PB :: CE$, CP; e PT, TB, BP sono flussioni prime, e CE flussione seconda, dunque saranno EP, CP, e molto più OP flussioni seconde, onde se sia $DH=x$, $DA=s$, sarà $TG=PE=ddx$, $PO=dds$ nella *Fig.* 13., e $PE=-ddx$, $PO=-dds$ nella *Fig.* 14., e $ddy=0$.

Sia costante il differenziale primo della curva, cioè $AB=BE$. Dal punto O si abbassi ON parallela a TP. Poichè per la supposizione è $AB=BE=BO$, sarà anco $AF=BN$, adunque VE, o sia NG è la differenza tra HI, ed IM; ma sarà anco $FB=NO$, dunque VO è la differenza tra BF, ed EG. Ma egli è chiaro, che essendo flussione del secondo ordine EC, lo sono pure EV, ed VO; dunque se sia $DH=x$, $HA=y$, sarà $NG=ddx$, $OV=-ddy$ nella *Fig.* 13., ed $NG=-ddx$, $OV=ddy$ nella *Fig.* 14., e $dds=0$.

La supposizione di una prima flussione costante rende

rende più brevi e facili i calcoli, come si vedrà nel farne uso; in varj incontri però, a fine di maggiore universalità, si procede dalle prime alle seconde differenze, senza fare la supposizione di alcuna prima flussione costante, ed è facile il determinarle.

Siano (*Fig.* 15., *e* 16.) HI, IM flussioni prime dell'assissa DH, ma non eguali, e la differenza tra loro sia ML, flussione seconda, e fatto il rimanente come sopra, si tiri l'ordinata LN, e la Ei parallela a BG. Essendo adunque LM la differenza di HI, sarà $HI = IL$, cioè $AF = BR$, e però simili, ed eguali i triangoli ABF, BRN, ed in conseguenza $BF = NR$; dunque Ni sarà la differenza tra BF, ed EG, cioè la differenza di BF, o sia la differenza seconda di AH. Similmente sarà $AB = BN$, dunque NO sarà la differenza tra l'arco AB, e l'arco BE; e però la differenza dell'arco AB, o sia la differenza seconda dell'arco DA, poichè egli è chiaro, che sono Ni, NO flussioni del secondo grado. Lo stesso discorso vale, se in luogo di supporsi IM maggiore di HI, di un differenziale secondo, si supponga minore.

13. Avvertirò, che le determinazioni fissate non racchiudono condizione alcuna intorno all' angolo delle coordinate, sebbene nelle Figure mostra di esser retto, ma nulla meno si deducono, qualunque siasi esso angolo.

LEMMA.

14. **Gl'angoli rettilinei sono tra loro nella ragione diretta degl'archi, e nell'inversa de' raggi.**

Sieno i due angoli (*Fig.* 17.) EAB, FAC. Prodotta AE in D, per la similitudine de' settori ABE, ACD, sarà $AB, BE :: AC, CD$, e però $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$. Ma l'angolo EAB, o sia DAC, è all'angolo FAC, come CD a CF; dunque l'angolo EAB sarà all'angolo FAC, come $\frac{BE \times AC}{AB}$ a CF, cioè come $\frac{BE}{AB}$ a $\frac{CF}{AC}$.

TEOREMA IV.

15. Preso l'arco CF (*Fig.* 18.) infinitesimo del primo grado della curva ACF qualunque, e condotte le perpendicolari CI, FI alla curva, se col centro I, intervallo IF, si descriverà l'arco di circolo FS, dico: che egli caderà tutto al di dentro della curva ACF verso C, e l'intercetta CS sarà quantità infinitesima del terzo grado.

Sulla curva AQR s'intenda condotto un filo, il quale essendo fisso al disotto nel punto R, e preso nel punto A, si vada scostando dalla curva, ma in modo, che sia sempre teso, onde il punto A descriva la curva ACF. Essendo il filo nella posizione CQ, sarà tangen-

te

te della curva nel punto Q; e nella posizione FR, che intendo infinitamente prossima alla CQ, sarà tangente in R, e prodotta CQ incontrerà FR in I. Poichè, per la generazione della curva ACF, la retta QC è eguale alla curva QA, e la retta RF alla curva RQA, e le due tangenti infinitesime QI, RI sono assieme maggiori dell' elemento QR; saranno anco CI, IR prese assieme maggiori della curva RQA, o sia della retta FR, dunque tolta la comune IR, sarà IC maggiore di IF, ed il circolo FS, descritto col centro I, intervallo IF, caderà dentro la curva. Ma per il I., e III. Teorema le due tangenti QI, RI non superano l'arco QR, che per una flussione terza, dunque la curva AQ assieme con le rette QI, IR supera della stessa quantità la curva AQR, cioè la retta FR; e detratta la comune IR, sarà AQ con QI, cioè IC maggiore di IF per una infinitesima del terzo ordine.

COROLLARIO.

16. Adunque si potrà considerare l'arco di circolo FS, come se si confondesse con l'arco di curva FC; e potrà prendersi indifferentemente l'uno per l'altro, e la tangente RF sarà perpendicolare alla curva ACF nel punto F, e QC nel punto C.

La curva AQR si chiama l'*Evoluta*, ACF la *Generata dell' evoluta*, cioè nata dallo scioglimento del filo

filo della AQR; ed il circolo FS, del centro I, raggio IF, il *Circolo Osculatore*.

TEOREMA V.

17. Se alla curva $DABE$ (*Fig.* 11., *e* 12.) ne' punti infinitamente prossimi A, B, E, cioè essendo gl'archetti AB, BE infinitesimi primi, si conducano le perpendicolari QA, QB, ed NE, la quale incontri la BQ nel punto N. Dico: che gl' angoli AQB, BNE potranno assumersi per eguali.

Per l'antecedente Lemma, l'angolo AQB stà all' angolo BNE, come $\frac{AB}{AQ}$ ad $\frac{EB}{BN}$, cioè come $AB \times BN$ ad $EB \times AQ$, ma il rettangolo $EB \times AQ$ non è minore del rettangolo $AB \times BN$, se non per il rettangolo $BE \times QN$, e per il rettangolo di BN nella differenza degl'archetti AB, BE; ed essendo QN, BE quantità infinitesime del primo grado, sarà il rettangolo da esse fatto quantità infinitesima del secondo, siccome essendo la differenza degl'archetti AB, BE infinitesima del secondo, sarà pure il rettangolo di questa in BN quantità infinitesima del secondo, adunque i due rettangoli $AB \times BN$, $EB \times AQ$ non sono diversi, se non per due rettangoli infinitesimi del secondo grado; adunque possono prendersi per eguali, ed in conseguenza anco gl' angoli AQB, BNE.

COROL-

COROLLARIO I.

18. Si conduca *PBR* tangente nel punto *B*; questa dividerà in due egualmente l'angolo *CBE* fatto dalle due corde *ABC*, e *BE*; imperciocchè essendo (Corollario III. Teorema I.) l'angolo *BQA* doppio dell'angolo *PBA*, a cui è eguale l'angolo *CBR*, anche l'angolo *BNE* sarà doppio dell'angolo *CBR*; ma, per lo stesso Corollario, l'angolo *BNE* è doppio pure dell'angolo *RBE*, adunque sono eguali gl'angoli *CBR*, *RBE*.

COROLLARIO II.

19. Sarà adunque l'angolo *CBE* eguale all'angolo *BNE*, e quindi il settore *BNE* simile al settore *EBO*.

TEOREMA VI.

20. Se in due circoli, i diametri de' quali si eccedano d'un' infinitesima prima, si prenderanno due seni retti eguali, ed infinitesimi del primo grado; la differenza dei seni versi sarà infinitesima del terzo.

Sieno i due circoli *ABC*, *PFH*, (*Fig.* 19.) i seni retti infinitesimi del primo grado, ed eguali sieno *BE*, *FG*, i seni versi *EC*, *GH*. Si tirino le corde de AB, BC. Essendo il seno BE, e però l'arco BC flussione prima, sarà l'angolo BMC infinitesimo del primo ordine, e però anche l'angolo BAC, che ne è la metà, e l'angolo EBC, che a quello è eguale; adunque poichè l'angolo EBC, ed i lati EB, BC sono infinitesimi primi, sarà il seno verso EC infinitesimo secondo.

Lo stesso vale del seno verso GH. Ma il seno verso EC (per la proprietà del circolo) si trova essere $= \frac{\overline{EB}^2}{AE}$, ed il seno verso $GH = \frac{\overline{GF}^2}{PG} = \frac{\overline{EB}^2}{PG}$, dunque avremo l'analogia EC, $GH :: PG$, AE; ma PG quantità finita supera AE quantità finita d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del primo ordine, per l'ipotesi, dunque EC quantità infinitesima del secondo ordine supererà GH infinitesima del secondo, d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del terzo.

TEOREMA VII.

21. Sia la curva BEG (*Fig.* 20., *e* 21.) riferita al fuoco, cioè tale, che le ordinate tutte si partano da un punto dato, che si chiama il fuoco, e sia A, da cui si conducano tre ordinate infinitamente prossime AB, AE, AG, le quali comprendano i due archetti infinitesimi del primo grado BE, EG, e si tiri la corda

da BE, la quale prodotta incontri in L l'ordinata AG pure prodotta, se fa bisogno. Col centro A si descrivano gl'archi BC, EF, e sieno BM, EN i loro seni retti; indi si faccia l'angolo NEP eguale all'angolo MBE, dico: che l'intercetta GP sarà differenza infinitesima del secondo ordine dell'ordinata AB.

Si tiri la corda EG. Poichè gl'angoli MBE, NEP sono eguali per la costruzione, e gl'angoli in M, ed N sono retti, saranno simili i triangoli EBM, PEN; quindi preso per costante il seno BM, cioè supposto eguale ad EN, i predetti triangoli saranno in oltre eguali, e però sarà $ME = NP$. Ma supposto $BM = EN$, per l'antecedente teorema, la differenza de' seni versi MC, NF è infinitesima rispetto a loro, dunque saranno anco eguali le CE, FP, e però GP sarà la differenza tra CE, ed FG. Ma condotte perpendicolari alla curva ne' punti E, G le rette EQ, QG, l'angolo LEG è eguale all'angolo EQG per il Corollario II. del Teorema V., (il quale si verifica, o sia la curva riferita all'asse, o sia riferita al fuoco) e l'angolo EQG è infinitamente piccolo, dunque sarà infinitamente piccolo anche l'angolo LEG; e perchè sono infinitesime del primo ordine le rette EG, EL, sarà GL infinitesima del secondo, e molto più GP rispetto alla *Fig.* 20.

Per il Corollario I. del Teorema III. il seno BM

è eguale all' arco BC; dunque, preso per costante in luogo del seno l'arco, e chiamato esso $= dx$, $AB = y$, $CE = dy$, sarà $GP = -ddy$. E descritto col centro E, intervallo EG l'arco GV, sarà $VP = -dds$, se sia $BE = ds$.

COROLLARIO.

22. L'angolo LEP sarà eguale all'angolo EAG; imperciocchè l'angolo EPA, per la costruzione, è eguale all'angolo BEA, ma EPA esterno è eguale ai due interni L, ed LEP; e l'altro BEA eguale ai due L, ed EAG, dunque tolto il comune L, rimarranno eguali i due LEP, EAG. E perchè ciò si verifica, o sia la curva concava al punto A, (*Fig.* 20.) o sia convessa, (*Fig.* 21.) come è facile a vedere, sarà nella stessa *Fig.* 21. infinitesimo l'angolo LEP, e quindi infinitesima del secondo ordine la LP, ma si è veduto, che GL è pure infinitesima del secondo, dunque lo sarà anche tutta la GP, che sarà $= ddy$; e col centro E, intervallo EG descritto l'arco GV, sarà $PV = dds$.

Facendo l'ipotesi della dy costante, col centro A, intervallo AG si descriva l'arco GT, e dal punto T si tiri la retta TOA. Poichè $FG = EC$, per l'ipotesi, sarà il triangolo TEO simile, ed eguale al triangolo EBC, e però $BC = EO$, e $BE = ET$; dunque

que $OF = ddx$, e $TV = dds$ nella *Fig.* 20.; ma $OF = -ddx$, e $TV = -dds$ nella *Fig.* 21.

Presa ds costante, si conduca la retta VRA, sarà $EG = EV = BE$, e però simili, ed eguali i triangoli EBC, EVR, adunque $BC = ER$, $CE = RV$; onde $RF = ddx$, $VI = -ddy$ nella *Fig.* 20., ma $RF = -ddx$, $VI = ddy$ nella *Fig.* 21.

Che se non si prenda alcuna prima flussione costante: sia EF maggiore di BC (*Fig.* 22., *e* 23.) per la flussione seconda RF; si conduca la retta ART; col centro A, intervallo AG l'arco GT; e col centro E, intervallo EG l'arco GV. Poichè dunque $BC = ER$, sarà anco $CE = RI$, e $BE = EI$, adunque TI sarà la differenza tra CE, ed FG, ed VI la differenza tra BE, ed EG.

SCOLIO.

23. Non sarà fuor di proposito il prevenire una difficoltà, che mi potrebbe esser mossa. Ella è, che nel Teorema antecedente si assumono per eguali le CE, FP in virtù però del Teorema VI., ed il Teorema VI. suppone eguali i seni BM, EN; dunque pare, che le determinazioni fissate de' differenziali secondi abbiano luogo solo nel caso, che si faccia l'ipotesi della flussione costante BC, e non nell'altre; ma per togliere questa difficoltà basta riflettere, che quan-

tunque si ponga variabile la BC, la differenza però è infinitesima del secondo grado, che non toglie l'egua-glianza tra le flussioni prime BC, EF; e così nè meno tra i seni BM, EN.

SCOLIO II.

24. Ne' premessi Teoremi si contengono i princi-pj, con i quali si maneggiano le quantità infinitesime di qualunque grado, e ci si apre la strada di far buon uso del calcolo differenziale, e sommatorio; ed ancora di applicare in oltre alle grandezze minime la Sintesi, e l'Analisi degli Antichi, e di servirsi della pura geo-metrìa, il che riesce di una particolare semplicità, ed eleganza.

Per iscansare poi i paralogismi, ne' quali pur trop-po è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, con-forme si pratica anco nelle finite, ânno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che cre-dono tali grandezze infinitesime un mero nulla.

Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qua-lunque ordine persistono le medesime; e perchè di tre linee

linee della ſteſſa claſſe può coſtituirſi un triangolo, ſi noti, che minorandoſi proporzionalmente i lati fino a far tranſito da un grado all' altro, non ſi mutano gli angoli, che ſempre fra loro la ſteſſa ragione conſervano. In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adequazione dove non ci può eſſere, anzi conviene tener ferme le analogìe, e paragonare i triangoli d'un genere con quelli dell'altro, cioè gl'infiniteſimi coi finiti, e gl'infiniteſimi del ſecondo ordine con quelli del primo, e con i finiti, e così vadaſi diſcorrendo.

Ma ſe due grandezze di qual ſi ſia ordine diferiranno per una grandezza, che riſpetto a loro ſia inaſſegnabile, ſicuramente, e ſenza riſchio alcuno d'errare una ſi può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adequamento porti un minimo ſconcerto.

Fa d'uopo adunque ſtare molto guardinghi quando ſi tratta della poſizione delle linee, e degl'angoli, conciofiacchè il confondergli quando non deeſi tira ſeco manifeſti paralogiſmi.

25. Stabiliti i fondamenti principali di queſto calcolo, farò paſſaggio alle maniere, o regole di differenziare le formole. Ed in primo luogo, debbaſi prendere la differenza di varie quantità ſommate aſſieme, o ſottratte l'una dell'altra, per eſempio di $a+x+z+y-u$. Siccome la differenza di x è dx, di z è dz ec.,

e

e della a costante è nulla, considerando ogni quantità accresciuta della sua differenza con quel segno, che le compete, la formola proposta si muterà in quest' altra $a + x + dx + z + dz + y + dy - u - du$, da cui sottraendo la prima, sarà il residuo $dx + dz + dy - du$, che è appunto ciò, per cui è cresciuta la quantità proposta, vale a dire la sua differenza.

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso di quantità analitiche di una dimensione, basterà prendere le differenze di ciascheduna variabile coi loro segni, ed il complesso di queste differenze sarà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di $b - s - z$ sarà $-ds - dz$; la differenza di $aa - 4bz + by$ sarà $-4bdz + bdy$.

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come xy, mentre x diviene $x + dx$, la y diviene $y + dy$, ed xy diviene $xy + ydx + xdy + dxdy$, che è il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy, rimane $ydx + xdy + dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell' altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà $xdy + ydx$.

Sia

Sia da differenziarſi xyz; il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$ in $z + dz$ è $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$, il quale, ſottratta la quantità propoſta, rimane $yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$; ma il primo, ſecondo, e terzo termine è ciaſcuno il prodotto di due quantità finite, e di una infiniteſima; ed il quarto, quinto, e ſeſto è ciaſcuno il prodotto di una quantità finita, e di due infiniteſime, dunque ciaſcuno di queſti è infinitamente minore di ciaſcuno di quelli, e però ſi potrà traſcurare, e molto più l'ultimo, che è il prodotto di trè infiniteſimi; traſcurati per tanto tutti i termini, principiando dal quarto, ſarà $yzdx + xzdy + xydx$ la differenza di xyz.

Quindi naſce la regola, che per differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate aſſieme, ſi dovrà prendere la ſomma de' prodotti della differenza di ciaſcuna di tali quantità nel prodotto dell' altre. La differenza adunque di $bxzt$ ſarà $bxzdt + bxtdz + btzdx + xzt \times 0$, perchè la differenza della coſtante b è nulla, cioè la differenza di $bxzt$ ſarà $bxzdt + bxtdz + btzdx$. La differenza di $\overline{a + x} \times \overline{b - y}$ ſarà $dx \times \overline{b - y} - dy \times \overline{a + x}$, cioè $bdx - ydx - ady - xdy$.

27. La formola da differenziarſi ſia una frazione, per eſempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y} = z$, ſarà dunque $x = zy$,

e

e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = zdy + ydz$, quindi $dz = \frac{dx - zdy}{y}$; ora $z = \frac{x}{y}$, ſoſtituito pertanto queſto valore in luogo di z, ſarà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; ma ſe $z = \frac{x}{y}$, ſarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ ſarà $\frac{-xdy + ydx}{yy}$.

E la regola ſarà, che il differenziale d'una frazione ſarà un'altra frazione, il di cui numeratore ſia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della propoſta frazione; ed il denominatore ſia il quadrato del denominatore della ſteſſa propoſta frazione da differenziarſi.

La differenza adunque di $\frac{a}{x}$ ſarà $-\frac{adx}{xx}$. La differenza di $\frac{a+x}{x}$ ſarà $\frac{xdx - adx - xdx}{xx}$, cioè $-\frac{adx}{xx}$. La differenza di $\frac{y}{b-y}$ ſarà $\frac{bdy - ydy + ydy}{\overline{b-y}^2}$, cioè $\frac{bdy}{\overline{b-y}^2}$. La differenza di $\frac{3xy}{a-x}$ ſarà $\frac{\overline{3xdy + 3ydx} \times \overline{a-x} + dx \times 3xy}{\overline{a-x}^2}$, cioè $\frac{3axdy + 3aydx - 3xxdy}{\overline{a-x}^2}$.

28. Debbansi differenziare le potestà. E sia in primo luogo una potestà perfetta, e positiva, cioè di esponente intero positivo, per esempio, xx; ora xx è il prodotto di x in x, adunque per la regola de' prodotti il differenziale sarà $xdx + xdx$, cioè $2xdx$. Sia da differenziarsi x^3; ma x^3 è il prodotto di x in x in x, adunque il differenziale sarà $xxdx + xxdx + xxdx$, cioè $3xxdx$, e comecchè la facenda procede con lo stesso ordine all' infinito, il differenziale di x^m, essendo m un numero qualunque intiero positivo, sarà $mx^{m-1}dx$.

Se l'esponente sarà negativo, per esempio ax^{-2}, o sia $\frac{a}{xx}$, il differenziale, per la regola delle frazioni, sarà il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, diviso il tutto per il quadrato del denominatore; ma il differenziale del denominatore è $2xdx$, dunque il differenziale di ax^{-2}, o sia $\frac{a}{xx}$, sarà $-\frac{2axdx}{x^4}$, cioè $-\frac{2adx}{x^3}$; il differenziale di x^{-3}, o sia di $\frac{1}{x^3}$, sarà $-\frac{3xxdx}{x^6}$, cioè $-\frac{3dx}{x^4}$; e generalmente il differenziale di $\frac{ax^{-m}}{b}$, o sia di $\frac{a}{bx^m}$, sarà $-\frac{max^{m-1}dx}{bx^{2m}}$, cioè $-\frac{max^{-m-1}dx}{b}$.

Sia la potestà imperfetta, ed in primo luogo positiva (cioè l'esponente sia rotto positivo) $\sqrt[n]{x^m}$, o sia $x^{\frac{m}{n}}$, esprimendo $\frac{m}{n}$ un qualunque rotto positivo. Si ponga $x^{\frac{m}{n}} = z$, ed elevando ciascun membro alla potestà n, $x^m = z^n$, e differenziando, $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, onde $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$, ma essendo $x^m = z^n$ è anco $z^{n-1} = x^{m-\frac{m}{n}}$, dunque sostituito questo valore in luogo di z^{n-1}, sarà $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}}$, cioè $dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$.

Se l'esponente sarà negativo, come $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, cioè $x^{-\frac{m}{n}}$, o sia $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, il differenziale, per la regola delle frazioni, sarà $\frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}}$, cioè $-\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$.

La

La regola generale è adunque, che il differenziale d'una qualunque potestà perfetta, o imperfetta, positiva, o negativa, è il prodotto dell'esponente della potestà nella quantità elevata alla potestà minore, per l'unità, della potestà data, ed il tutto moltiplicato nella differenza della quantità.

Sia da differenziarsi $x^{\frac{3}{2}}$, il differenziale sarà $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}dx$, cioè $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, o sia $\frac{3}{2}dx\sqrt{x}$.

Sia $x^{\frac{5}{4}}$, la differenza sarà $\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}dx$, cioè $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$, o sia $\frac{5}{4}dx\sqrt[4]{x}$.

Sia $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, cioè $x^{-\frac{3}{2}}$, la differenza sarà $-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}dx$, cioè $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}dx$, o sia $-\frac{3dx}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

Sia da differenziarsi $\overline{ax+xx}^2$, sarà la differenza $2\times\overline{ax+xx}\times\overline{adx+2xdx}$, cioè $2aaxdx+6axxdx+4x^3dx$.

Sia $\overline{xy+ax}^3$, la differenza sarà $3\times\overline{xy+ax}^2\times\overline{xdy+ydx+adx}$,

 cioè

cioè $3x^3yydy + 6ax^3ydy + 3aax^3dy + 3y^3xxdx + 9ayyxxdx + 9aayxxdx + 3a^3xxdx$.

Sia $\frac{1}{\overline{ax-yy}^{2}}$, sarà la differenza $\frac{-2\times\overline{ax-yy}\times\overline{adx-2ydy}}{\overline{ax-yy}^{4}}$, cioè $\frac{-2adx+4ydy}{\overline{ax-yy}^{3}}$.

Sia $\sqrt{ax-xx}$, cioè $\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}$, sarà la differenza $\frac{1}{2}\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{adx-2xdx}$, cioè $\frac{adx-2xdx}{2\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}}$, o sia $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$.

Sia $\sqrt{xx+xy}$, cioè $\overline{xx+xy}^{\frac{1}{2}}$, sarà la differenza $\frac{1}{2}\times\overline{xx+xy}^{\frac{1}{2}-1}\times\overline{2xdx+xdy+ydx}$, o sia $\frac{2xdx+xdy+ydx}{2\sqrt{xx+xy}}$.

Sia $\sqrt[3]{ax-xx}$, cioè $\overline{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, sarà la differenza $\frac{1}{3}\times\overline{ax-xx}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{adx-2xdx}$, o sia $\frac{adx-2xdx}{3\times\overline{ax-xx}^{\frac{2}{3}}}$.

Sia

Sia $\frac{1}{\sqrt[3]{ay+xy}}$, cioè $\frac{1}{\overline{ay+xy}^{\frac{1}{3}}}$, farà la differenza

$$-\frac{\frac{1}{3}\times\overline{ay+xy}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{ady+xdy+ydx}}{\overline{ay+xy}^{\frac{2}{3}}}\text{, cioè}$$

$$\frac{-ady-xdy-ydx}{3\times\overline{ay+xy}^{\frac{4}{3}}}.$$

Sia $\overline{a-x}\sqrt[3]{a+x}$, cioè $\overline{a-x}\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza $-dx\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{1}{3}-1}\times\overline{a-x}\times dx$, o sia $-dx\sqrt[3]{a+x}+\frac{\frac{1}{3}dx\times\overline{a-x}}{\sqrt[3]{\overline{a+x}^{2}}}$.

Sia $\sqrt{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}$, cioè $\overline{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}^{\frac{1}{2}}$; farà la differenza

$$\frac{adx+2xdx-\frac{x^3dx}{\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}}}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4-x^4}}}\text{, cioè }\frac{adx+2xdx\times\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}-x^3dx}{2\times\overline{a^4-x^4}^{\frac{3}{4}}\sqrt{ax+xx+\sqrt[4]{a^4-x^4}}}.$$

Sia

Sia $\dfrac{aa+xx}{\sqrt{ax+xx}}$, farà la differenza

$$\frac{3axxdx + 2x^3dx - a^3dx - 2aaxdx}{2\times\overline{ax+xx}^{\frac{3}{2}}}.$$

Sia $\dfrac{x\sqrt{ax+xx}}{a\sqrt{ay-xy}}$, farà la differenza

$$\frac{3aayxdx + 2ayxxdx - 3yx^3dx - aaxxdy + x^4dy}{2a\times\overline{ay-xy}^{\frac{3}{2}}\sqrt{ax+xx}}.$$

29. In quella guisa, che si prendono le differenze prime delle quantità finite, si prendono ancora le differenze delle quantità infinitesime del primo ordine, e le differenze delle quantità infinitesime del secondo, e così successivamente, servendosi delle stesse regole, che ô fin'ora spiegate.

Solo vi sarà da riflettere, se alcuna flussione prima sia stata assunta per costante, e quale essa sia, poichè la di lei differenza sarà nulla, e si dovrà ommettere nel differenziare.

Sia proposta da differenziarsi la formola $ydx - xdy$, e non sia stata assunta costante flussione alcuna, la differenza sarà $dxdy + yddx - dxdy - xddy$, cioè $yddx - xddy$. Sia stata assunta costante la flussione dx, sarà la differenza $dxdy - dxdy - xddy$, cioè $-xddy$. Sia costante la flussione dy, sarà la differenza $dxdy + yddx - dxdy$, cioè $yddx$.

Sia

Sia $\frac{ydx}{dy}$, in cui nessuna flussione prima si prenda costante, sarà la differenza $\frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; presa costante dx, sarà $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2}$; presa per costante dy, sarà $\frac{dy^2dx + ydyddx}{dy^2}$, cioè $\frac{dydx + yddx}{dy}$.

Sia $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz}$, e costante la dz, sarà la differenza $\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + ydz \times \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{dz^2}$, cioè $\frac{dx^2dy + dy^3 + ydxddx + ydyddy}{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Presa per costante dy, sarà

$\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{ydzdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè

$\frac{dx^2dydz + dy^3dz + ydzdxddx - ydx^2ddz - ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Presa per costante dx, sarà

$\frac{dydz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{ydz \times dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$, cioè

cioè $\dfrac{dx^2dydz + dy^3dz + ydzdyddy - ydx^2ddz - ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$

E finalmente presa nissuna flussione costante, sarà la differenza

$$\frac{dydz\sqrt{dx^2+dy^2} + ydz \times \dfrac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} - yddz\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz^2},$$

cioè $\dfrac{dx^2dydz + dy^3dz + ydzdxddx + ydzdyddy - ydx^2ddz - ydy^2ddz}{dz^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

E se in questa si cancelleranno tutti i termini, ne' quali si trova la ddz, cioè fatta l'ipotesi di dz costante, si muterà essa nella prima; cancellando quelli, ne' quali si trova la ddy, si muterà nella seconda; e cancellando quelli, ne' quali si trova la ddx, si muterà nella terza, come è chiaro.

Sia $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{xx+yy}}$, e costante dx, sarà la differenza

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2 + yddy}\sqrt{xx+yy} - \dfrac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{xx+yy}}}{xx+yy},$$

cioè $\dfrac{xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + y^3ddy - 2xydxdy}{\overline{xx+yy}^{\frac{3}{2}}}$.

Presa

Presa per costante dy, sarà

$$\frac{\overline{dx^2 + xddx + dy^2}\sqrt{xx+yy} - \frac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{xx+yy}}}{xx+yy},$$

cioè $$\frac{x^3ddx + xxdy^2 + yydx^2 + yyxddx - 2xydxdy}{\overline{xx+yy}^{\frac{3}{2}}}.$$

E finalmente presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{\overline{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy}\sqrt{xx+yy} - \frac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{xx+yy}}}{xx+yy},$$

cioè $$\frac{x^3ddx + xxdy^2 + xxyddy + yydx^2 + yyxddx + y^3ddy - 2xydxdy}{\overline{xx+yy}^{\frac{3}{2}}}.$$

Sia proposta da differenziarsi la formola differenziale del secondo grado $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, o sia $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, e si prenda dx costante, sarà la differenza

$$\frac{3 \times dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times -dxddy + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}.$$

L'ipotesi di dy costante ripugna per questa formola, in cui già si trova la ddy.

Presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{3 \times \overline{dxddx + dyddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times \overline{-dxddy + dxdddy - ddxddy} \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2},$$

Con simil metodo si proceda in tutti gl'altri casi più composti.

CAPO

CAPO II.

Del Metodo delle Tangenti.

30. ALla Curva ADF (*Fig.* 24., *e* 25.) sia tangente in un qualunque punto la retta TDG, e perpendicolare all' asse AB l'ordinata BD nel punto B, alla quale sia infinitamente prossima CF, che prodotta (se fa bisogno) incontri la tangente nel punto G, e si tiri DE parallella all' asse AB. Per quanto è stato dimostrato ne' premessi Teoremi, e suoi Corollarj, la GF sarà infinitesima rispetto ad EF, e sarà pure infinitesima rispetto all' archetto DF la differenza tra DF, e DG; dunque si potranno usurpare per eguali le due EF, EG, siccome le due DF, DG; e però, se sia $AB = x$, $BD = y$, sarà $EF = EG = dy$, $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ma i triangoli simili GED, DBT ci danno l'analogìa GE, $ED :: DB$, BT, cioè in termini analitici, dy, $dx :: y$, BT, dunque $BT = \frac{ydx}{dy}$, ed ecco la formola generale della sottotangente per qualunque curva.

Nel caso per tanto di una curva data nulla altro rimarrà da farsi, per averne la sottotangente, che differenziare l'equazione, ed il valore della dx, o dy sostituirlo nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, con che svaniranno i differenziali, ed averassi il valore della sottotangente espresso in termini finiti, che compete alla data curva per un qualunque punto, e se si voglia per un determinato punto, basterà sostituire in luogo dell'incognite quel valore, che loro compete, rispetto al punto determinato.

31. Dal potersi assumere $EF=EG$, e $DF=DG$, ne viene, che si può considerare il punto G, come se cada in F, cioè, che la tangente DG, l'arco DF, e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si dovranno computare le seconde, non si confonderà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi, farassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda.

32. Lo stesso triangolo GDE ci somministra le formole per l'altre linee analoghe alla sottotangente.

Per la similitudine de' triangoli GED, DBT, sarà

GE,

GE, $GD :: DB$, DT, cioè dy, $\sqrt{dx^2 + dy^2} :: y$, DT; e però $DT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, formola generale della tangente.

Sia DN perpendicolare alla curva nel punto D, faranno fimili i triangoli GDE, DBN, onde farà DE, $EG :: DB$, BN, cioè dx, $dy :: y$, BN; e però $BN = \frac{ydy}{dx}$, formola generale della fottonormale.

Sarà ancora DE, $DG :: DB$, DN, cioè dx, $\sqrt{dx^2 + dy^2} :: y$, DN; e però $DN = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, formola generale della normale.

Dal punto B fi conduca BM normale a DN, e BH normale a DT. Il triangolo GDE farà fimile al triangolo DBM, onde farà GD, $GE :: DB$, BM, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dy :: y$, $BM = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola generale della linea BM.

Lo ftesso triangolo GDE farà anco fimile al triangolo DBH, onde farà GD, $DE :: DB$, BH, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx :: y$, $BH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola generale della linea BH.

33. La fimilitudine de' due triangoli GED,

DBT

DBT ci farà scoprire in oltre l'angolo, che fa con l'asse la tangente ad un qualsivoglia punto di curva, conciosiacchè sarà noto l'angolo *DTB*, qualora sia nota la ragione del seno retto *DB* al seno del complemento *BT*, cioè la ragione di *GE* ad *ED*, o sia di dy a dx.

Adunque data l'equazione della curva, se si differenzierà, e si risolverà in analogìa, di cui sieno due termini dy, dx, avrassi la ragione de' seni dell' angolo *DTB*, e però noto l'angolo.

34. In virtù dello stesso discorso nascono le medesime formole anco nelle curve riferite al fuoco, (*Fig.* 26., *e* 27.) solo che si rifletta, che condotta dal fuoco *B* normale all'ordinata *BD* la retta *BT*, che incontri la tangente in *T*, i triangoli *DBT*, *DGE* saranno simili, perchè gl'angoli *TBD*, *DEG* sono retti, e l'angolo *TDB* non è maggiore dell' angolo *DGE* se non per l'angolo infinitesimo *DBG*, il che si vede chiaro conducendo *GQ* normale a *TB*; adunque si potranno assumere per eguali i due angoli *TDB*, *DGE*, ed in conseguenza anco i due *BTD*, *GDE*, e però simili i due triangoli *DTB*, *GDE*; ma in oltre *GF* è infinitesima rispetto ad *EF*, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO I.

35. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$. Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e $dx = \frac{2ydy}{a}$. Sostituito per tanto questo valore in luogo di dx nella formola generale della sottangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, o pure $2x$, posto in luogo di yy il valore ax dato dall' equazione della curva. La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell' assissa, e però se si prenda $AT = AB$, e dal puto T si tiri al punto D la retta TD, essa sarà tangente della curva nel punto D. Se in luogo del valore di dx dato dall' equazione della curva, sostituiremo il valore di dy, cioè $\frac{adx}{2y}$ nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, sarà essa ciò nulla ostante $\frac{2yy}{a}$, come prima, il che basterà d'avere notato in quest' esempio.

Nella stessa parabola si ricerchi la sottonormale BN. La formola generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si â $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, sarà la sottonormale nella parabola

rabola $= \frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro, e però presa $BN = \frac{a}{2}$, e dal punto N condotta al punto D la retta ND, sarà essa normale alla curva in D.

Si ricerchi la tangente DT, la di cui formola generale è $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$. Per l'equazione della curva abbiamo $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione di questo valore in luogo di dx nella formola, avremo $\frac{y\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{ady} = \frac{y}{a}\sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4xx + ax}$, (posto in luogo di yy il valore ax dato dall'equazione) che è la tangente cercata.

Si ricerchi la normale DN. Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, sarà essa $\frac{y\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{2ydy} = \frac{\sqrt{4yy + aa}}{2} = \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2}$, posto in luogo di yy il valore dato dall'equazione.

Si ricerchi la retta BM. Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sarà essa

$$\frac{aydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{ay}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{a\sqrt{ax}}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Si

Si ricerchi la retta BH. Sostituito il valore di dx nella formola generale $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, sarà essa

$$\frac{2yydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{2yy}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{2ax}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Ritrovata la sottotangente, non è necessario alcun uso di formole per ritrovare l'altre linee, sebbene a motivo di esercizio me ne sono quì servita, imperciocchè, essendo nota la BT, il triangolo TBD rettangolo in B ci somministra la tangente TD, e la similitudine de' triangoli TBD, DBN, DMB, DHB l'altre linee tutte, e però ne' seguenti Esempj applicherò il metodo alle sole sottotangenti.

Se vogliasi l'angolo, che fa la tangente della parabola con l'asse. Presa l'equazione differenziale $adx = 2ydy$, e risoluta in analogia, troverassi dy, $dx :: a$, $2y$, cioè che il seno retto BD è al seno del complemento BT, come il parametro al doppio dell' ordinata, dovunque siasi il punto D; e se si vorrà fissata la tangente ad un punto determinato, per esempio al punto D, a cui corrisponda l'assissa $AB = x = \frac{a}{4}$, dall'equazione della curva trovata la y corrispondente ad $x = \frac{a}{4}$, che in questo caso è $y = \frac{a}{2}$, sarà l'analogìa dy, $dx :: a$, a; cioè femiretto l'angolo DTB, quando fia $y = \frac{a}{2}$, o $x = \frac{a}{4}$.

Nel vertice A è $y = 0$, e però l'analogìa per l'angolo della tangente nel vertice farà dy, $dx :: a$, 0, cioè la ragione di dy a dx infinita, vale a dire il feno del complemento farà nullo, e però la tangente nel vertice farà perpendicolare all'affe.

ESEMPIO II.

36. Sia l'equazione generale di tutte le parabole di qualunque grado $x = y^m$, intendendo per m un qualunque numero pofitivo intiero, o rotto, e che l'unità fupplifca alle dimenfioni. Differenziando farà $dx = my^{m-1}dy$, e foftituito quefto valore in luogo di dx nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, farà la fottotangente $= my^m = mx$. Sia $m = 3$, cioè la parabola prima cubica $x = y^3$, farà la di lei fottotangente $= 3x$. Sia $m = \frac{3}{2}$, cioè la feconda parabola cubica $xx = y^3$, farà la di lei fottotangente $= \frac{3}{2}x$ ec.

L'equazione differenziale $dx = my^{m-1}dy$ della curva ci dà l'analogìa dy, $dx :: 1$, my^{m-1}; ma pofta $y = 0$, fe farà m maggiore dell'unità, l'analogìa fa-

rà

rà dy, dx :: 1, o, cioè la ragione di dy a dx infinita, e però la tangente nel vertice perpendicolare all'asse; e se sarà m minore dell'unità, sarà l'analogìa dy, dx :: 1, $\frac{m}{y^{1-m}}$, cioè posta $y = o$, dy, dx :: 1, $\frac{m}{o}$, vale a dire la ragione di dy a dx infinitamente piccola, e però la tangente nel vertice parallela all'asse.

ESEMPIO III.

37. Sia la curva DCE, (*Fig.* 28.) di cui si vuole la sottotangente, l'iperbola fra gl'asintoti dell'equazione $xy = aa$. Differenziando sarà $xdy + ydx = o$, e $dx = -\frac{xdy}{y}$; sostituito per tanto nella formola $\frac{ydx}{dy}$ della sottotangente il valore di dx, sarà la sottotangente $= -x$, valore negativo, e questo vuol dire, che la sottotangente BT dee prendersi della parte opposta alle assisse.

Presa adunque $BT = BA$, e condotta al punto C la retta TC, sarà essa tangente della curva nel punto C.

Poichè nella curva DCE crescendo l'assissa, cala l'ordinata y, s'avrebbe dovuto nel differenziare prendere negativa la differenza dy, ma perchè per la stessa ragione s'avrebbe dovuto prendere negativa la stessa dy anco nella formola generale, si â ommesso di farlo

 nell'

nell'uno, e nell'altro luogo, giacchè senza imbarazzarsi co' segni torna lo stesso, il che ora avvertito servirà per gl'altri simili casi.

Sia l'equazione generale $x = \frac{1}{y^m}$ a tutte le infinite iperbole fra gl'asintoti, essendo m un qualunque numero positivo intero, o rotto. Differenziando averemo $dx = -\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}} = -\frac{mdy}{y^{m+1}}$, e sostituito questo valore nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, la sottotangente sarà $-\frac{m}{y^m}$, o sia $-mx$, per l'equazione della curva.

ESEMPIO IV.

38. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) un circolo del diametro $= 2a$, $AB = x$, $BD = y$, sarà l'equazione $2ax - xx = yy$, e differenziando $2adx - 2xdx = 2ydy$, e però $dx = \frac{ydy}{a-x}$, e sostituendo questo valore nella formola $\frac{ydx}{dy}$, sarà la sottotangente $\frac{yy}{a-x}$, cioè $\frac{2ax - xx}{a-x}$, posto in luogo di yy il valore dato dall'equazione. Sarà dunque la sottotangente nel circolo la quarta proporzionale di $a-x$, di $2a-x$, e della x.

Ma se il circolo sarà dell'equazione $aa - xx = yy$, nel

nel quale (*Fig.* 29.) si prendano le assisse $AB = x$ dal centro, differenziando avremo $- xdx = ydy$, e $dx = -\frac{ydy}{x}$, sostituendo per tanto questo valore nella formola, sarà la sottotangente $= -\frac{yy}{x}$, cioè la terza proporzionale di AB, e BD, ma negativa, vale a dire da prendersi da B verso T.

ESEMPIO V.

39. Sia la curva ADF (*Fig.* 24.) l' Ellissi dell' equazione $ax - xx = \frac{ayy}{b}$, prese le assisse dal vertice A. Differenziando averemo $adx - 2xdx = \frac{2aydy}{b}$, e $dx = \frac{2aydy}{b \times \overline{a - 2x}}$. Sostituito questo valore nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, sarà $\frac{2ayy}{b \times \overline{a - 2x}}$ la sottotangente, o pure $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, posto in luogo di $\frac{ayy}{b}$ il valore $ax - xx$ dato dall' equazione. Fatta $x = \frac{1}{2} a$, metà dell' asse trasverso, nel valore della sottotangente, sarà essa $\frac{2aa}{0}$, cioè infinita; adunque la tangente nel punto, in cui l' asse conjugato taglia la curva, sarà parallela all' asse

traftrasverso, il che troveremo esser vero anche cercando, qual sia l'angolo, che essa tangente fa con il medesimo asse trasverso.

Sia generalmente l'equazione alle ellissi di qualunque grado $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$, intendendo per m, n due numeri positivi intieri, o rotti. Differenziando sarà $\frac{\overline{m+n}}{b} \times ay^{m+n-1}dy = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - ndx \times \overline{a-x}^{n-1} \times x^m$, e però

$$dx = \frac{\overline{m+n} \times ay^{m+n-1}dy}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$$, e sostituito questo valore nella formola generale, sarà essa

$$\frac{\overline{m+n} \times ay^{m+n}}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$$, e posto in luogo di $\frac{ay^{m+n}}{b}$ il valore dato dall'equazione, sarà la

sottotangente $\frac{\overline{m+n} \times x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - nx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}$,

e dividendo il numeratore, e denominatore per $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}$, sarà finalmente $\frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma-mx-nx}$.

Sia

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'ellissi apolloniana, farà la sottotangente $\frac{2ax-2xx}{a-2x}$, come sopra. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^5}{b}=x^3\times\overline{a-x}^2$, farà la sottotangente $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$ ec.

Se l'equazione fosse $\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m\times\overline{a+x}^n$, esprimerebbe essa tutte le iperbole di qualunque grado riferite agl'assi, prese istessamente le assisse dal vertice A. Operando nello stesso modo, troveremo essere la sottotangente $\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}$, diversa solo dall'antecedente ne' segni, siccome diversa solo ne' segni è l'equazione, da cui si ricava.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'iperbola apolloniana, farà la sottotangente $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^5}{b}=x^3\times\overline{a+x}^2$, farà la sottotangente $\frac{5ax+5xx}{3a+5x}$ ec.

40. Da questo metodo delle tangenti si ricava ancora la maniera di riconoscere, se le curve ànno asin-

asintoti, ed il modo di condurli, quando essi sono inclinati all'asse, giacchè nel caso più semplice, che ad esso sieno, o perpendicolari, o paralleli, abbastanza si à parlato nel Libro I. Capo 5.

ESEMPIO I.

41. Sia la curva *ADE* (*Fig.* 30.) dell' equazione di sopra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$, la di cui sottotangente $TB = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}$, sarà dunque l'intercetta $AT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx} - x$, cioè $\frac{nax}{ma+mx+nx}$.

Egli è chiaro, che la tangente *TD* diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'assissa $AB=x$, essendo infinita, l'intercetta *AT* rimanga finita; ma posta x infinita nell' espressione di *AT*, il primo termine ma del denominatore è infinitamente minore degl'altri, e però da trascurarsi, onde in questo caso sarà $AT = \frac{nax}{mx+nx} = \frac{na}{m+n}$, quantità finita, adunque la curva à l'asintoto, il quale partirà dal punto *M*, fatta $AM = \frac{na}{m+n}$. Ma per con-

durlo:

durlo: si alzi AH normale ad AB, e sia egli per esempio MHP; ciò posto, se si prenda x infinita, sarà dx, $dy :: MA, AH$, ed in questa supposizione di x infinita l'equazione della curva $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x}^n$ (essendo a nullo rispetto ad x) si muta in quest' altra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$, o sia, estraendo la radice, e facendo per maggior comodo $m+n=t$, $y\sqrt[t]{a} = x\sqrt[t]{b}$, ma differenziando è $dy\sqrt[t]{a} = dx\sqrt[t]{b}$; dunque dx, $dy :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, dunque $MA, AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, e perchè $MA = \frac{na}{t}$, sarà $\frac{na}{t}$, $AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, cioè $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$. Se per tanto si prenda $AM = \frac{na}{t}$, e si alzi la normale $AH = \frac{na\sqrt[t]{b}}{t\sqrt[t]{a}}$, e si conduca infinita la retta MHP, sarà essa l'asintoto della curva ADE.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'equazione $\frac{ayy}{b} = ax + xx$ all'iperbola apolloniana, sarà $t=2$, e però $AM = \frac{a}{2}$,

 $AH=$

$AH = \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, cioè AM la metà dell' asse trasverso, ed AH la metà del conjugato, appunto come dalle sezioni coniche si sa, dover essere.

ESEMPIO II.

42. Sia ADE la curva dell' equazione $y^3 - x^3 = axy$, fatte le $AB = x$, $BD = y$. Differenziando avremo $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, e però $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, ed $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$, o pure, posto in luogo di $3y^3 - 3x^3$ il valore $3axy$ dato dall' equazione della curva, sarà $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$; e fatta x infinita, cioè nel caso dell' asintoto, in cui AT diviene AM, il termine ay è nullo rispetto a $3xx$, adunque sarà $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$.

Ma poichè nell' equazione proposta non si possono separare le indeterminate, nè in conseguenza determinare il valore della AM; si ponga $AM = \frac{ay}{3x} = t$, (il medesimo, o simile artificio potrà servire in altri casi

casi della stessa natura) sarà $y = \frac{3tx}{a}$, e sostituito questo valore nell' equazione proposta, sarà essa $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 3txx$, ma quando sia x infinita, l'ultimo termine è nullo rispetto agl'altri; adunque sarà $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$, cioè $t = \frac{a}{3}$. Presa adunque $AM = \frac{a}{3}$, dal punto M si dovrà condurre l'asintoto. Deve in oltre essere MA, $AH :: dx$, dy, e l'equazione proposta $y^3 - x^3 = axy$, o sia $y^3 = x^3 + axy$ si riduce ad essere $x^3 = y^3$, cioè $x = y$, quando sia x infinita, e però $dx = dy$; adunque fatta $MA = AH$, se dal punto M per lo punto H si condurrà una retta, essa sarà l'asintoto della curva.

Aggiungo in oltre, che deve necessariamente la linea AT accostarsi ad un certo limite, oltre il quale non possa trascorrere, e che il menzionato limite talora è infinitesimo, o nulla. Eccone un' esempio semplice.

Sia l'iperbola equilatera BCF, (*Fig.* 31.) e posta $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$, abbiasi l'equazione $aa + xx = yy$, e differenziando, $xdx = ydy$. Quindi la sottotangente $ED = \frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{x} = \frac{aa + xx}{x}$, e conseguentemente $ED - AD = \frac{aa + xx}{x} - x = \frac{aa}{x} = AE$.

Posta $x = 0$, si trova AE infinita, e la tangente del punto B parallela all'asse AD; e fatta $x = \infty$, si à $AE = 0$. Per la qual cosa il punto E scorre tutta la AE infinitamente prodotta, e si ferma nella origine A, oltre cui non trascorre, quantunque la nostra curva volti il convesso all'asse. L'asintoto adunque AG nasce dal punto A, e forma con la linea delle assisse un'angolo semiretto, stante che nella equazione locale $aa + xx = yy$, posta $x = \infty$, svanisce la costante aa, e diventa $xx = yy$, o sia $x = y$.

43. Fino ad ora è stato da me supposto, che l'angolo delle coordinate sia retto. Che se egli sia ottuso, o acuto, poste come sopra $BC = x$, $CE = y$, $CD = dx$, $OG = dy$, (*Fig.* 32., *e* 33.) la sottotangente sarà nè più nè meno $\frac{ydx}{dy}$, perchè saranno sempre simili i due triangoli GEO, EAC; ma l'altre formole avranno bisogno di riforma.

Nel triangolo EOG l'angolo O eguale all'angolo ACE si suppone noto, adunque dal punto G abbassata GI normale ad AD; e prodotta, se fa bisogno, EO in H, nel triangolo GOH sarà noto l'angolo GOH, ma l'angolo in H è retto, quindi noto l'angolo OGH, e però noto in spezie il triangolo OGH, cioè data la ragione di GO a GH, e sia quella di a ad m, sarà per tanto $a, m :: dy, GH = \frac{mdy}{a}$; sarà pure data la ragione

di

di GO ad OH, e sia quella di a ad n, e però a, $n :: dy$, $OH = \frac{ndy}{a}$; adunque $EH = dx \pm \frac{ndy}{a}$ (cioè il segno positivo nella *Fig.* 32., ed il negativo nella *Fig.* 33.), quindi $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{aa}$; ma se OG si esprime per a, GH per m, OH per n, sarà $aa = mm + nn$, ed $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$, adunque sostituito questo valore nell' espressione di $\overline{EG}^2$, sarà $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{aa}$, ed $EG = ds = \sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}}$, espressione dell' elemento della curva. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli EGO, AEC, sarà GO, $GE :: EC$, EA, cioè dy, $\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}} :: y$, $EA = \frac{y}{dy}\sqrt{\frac{adx^2 \pm 2ndxdy + ady^2}{a}}$, formola della tangente.

Sia TE normale alla curva, ed ES al diametro AI, per la similitudine de' triangoli GOH, ECS, avremo $ES = \frac{my}{a}$, e $CS = \frac{ny}{a}$; e per la similitudine de' triangoli GEH, EST, avremo EH, $HG :: ES$, ST, cioè $\frac{adx \pm ndy}{a}$, $\frac{mdy}{a} :: \frac{my}{a}$, $ST = \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy}$,

e

e però $CT = \frac{mmydy}{a \times \overline{adx \pm ndy}} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mmydy + nnydy \pm anydx}{a \times \overline{adx \pm ndy}} =$

$= \frac{aydy \pm nydx}{adx \pm ndy}$, formola della sottonormale.

In simil modo si ridurranno l'altre formole, il che basti d'aver indicato.

44. Ma le curve, delle quali si vogliono le tangenti, possono esser trascendenti, cioè non esprimibili da alcuna equazione algebraica, ma dipendenti dalla rettificazione d'altre curve non rettificabili. Sia la curva APB, (*Fig.* 34) di cui si sappia condurre la tangente PTK ad un qualunque punto P, e prodotta in M la QP normale ad AQ, la relazione di MP all'arco PA sia espressa da un'equazione qualunque, e si ricerchi la tangente MT della curva CMA descritta da' punti M; condotta qm infinitamente prossima a QM, ed MR parallela a PT, e supposto rettificabile l'arco AP, cioè $= x$, e chiamata $PM = y$, sarà $Pp = dx$, $Rm = dy$, e simili i due triangoli mRM, MPT, e però mR, $RM :: MP$, PT, cioè dy, $dx :: y$, $PT = \frac{ydx}{dy}$, formola per la sottangente della curva CMA da prendersi sulla tangente della curva APB. Dall'equazione data della curva AMC si ritroverà il valore della dx, o dy da sostituirsi nella formola, e si farà il rimanente al solito.

ESEM-

ESEMPIO.

45. Mentre il circolo DPC si arruota uniformemente sulla retta AB cominciando dal punto A, (*Fig.* 35.) il punto C della sua periferìa, che nel principio del moto cade sul punto A, lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, e si continovi questo moto sino a che pervenga di nuovo il punto C nella retta AB; descriverà esso una curva ACB, la quale dalla sua generazione viene chiamata la *Cicloide*; e dicesi Cicloide ordinaria, quando il circolo si muova talmente sulla retta AB, che tutta l'abbia esattamente misurata colla sua periferìa dopo, che il punto C da A sia giunto in B per modo, che sia AB eguale alla periferìa dello stesso circolo. Dicesi Cicloide allungata quando il moto sia tale, che la retta AB sia maggiore della periferìa del circolo; e finalmente Cicloide contratta quando la stessa AB sia minore della periferìa.

Dalla descrizione di questa curva chiaramente si vede, che condotta da un qualunque punto la retta MQ parallela ad AB, avrà l'intercetta MP fra la curva, ed il circolo CPD all'arco CP quella ragione, che à la retta AB a tutto il circolo.

Ed in fatti sia il circolo generatore nelle due posizioni EMF, DPC; condotte le corde ME, PD,

poi-

poichè sono eguali gli archi EM, DP, saranno eguali, e parallele le corde EM, DP, e però sarà $MP = ED$; ma per la natura della curva è AE, EM :: AD, EMF :: AB, $EMFE$, e nella stessa ragione è pure ED ad MF; ed $MF = PC$, $ED = MP$, dunque sarà MP, PC :: AD, EMF :: AB, $EMFE$. Se però si chiami la retta $AB = a$, la periferìa $EMFE$ del circolo generatore $= b$, ed un qualunque arco CP per assissa $= x$, l'ordinata $PM = y$, sarà l'equazione della curva cicloide $\frac{by}{a} = x$.

Avuta l'equazione alla curva, la differenzio, per ritrovare la sottotangente, e però $\frac{bdy}{a} = dx$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola $\frac{ydx}{dy}$, sarà $PT = \frac{by}{a} = x$. Presa adunque sulla tangente PK (*Fig.* 34.) del circolo, che si suppone condotta, una porzione PT eguale all'arco AP del circolo, e condotta al punto M la retta TM, essa sarà tangente della cicloide nel punto M.

Che se in oltre la cicloide sia l'ordinaria; poichè in questo caso si à $b = a$, e però $y = x$, sarà $PM = PT$, e l'angolo $PTM = PMT$; ma l'angolo TPQ esterno è doppio dell' angolo TMP, e gl'angoli TPA, APQ (per la 32., e 29. prop. del 3. d'Euclide) sono eguali, li, dunque farà l'angolo APQ eguale all'angolo TMP, e però la tangente MT parallela alla corda PA.

46. Senza supporre la tangente della curva APB (*Fig.* 34.) si potrà avere la sottotangente della curva AM presa nell'asse KAB. Sia $AQ = x$, $QP = y$, l'arco $AP = s$, $QM = z$, e la relazione dell'arco AP all'ordinata MP sia espressa da un'equazione qualunque. Sia qm infinitamente prossima alla QM, ed MS parallela ad AB, sarà $MS = dx$, $Sm = dz$, e la similitudine de' triangoli mSM, MQN ci darà dz, $dx :: z$. $QN = \frac{zdx}{dz}$, formola per la sottotangente.

Se in luogo di assumere per ordinata $QM = z$, si prenda $PM = u$, condotta MR parallela all'archetto Pp, sarà $mR = du$, $RS = po = dy$, e però $MS = du + dy$, mS
ed i triangoli simili mSM, MQN ci daranno $du + dy$, $dx :: u + y$, $QN = \frac{\overline{u+y} \times dx}{du + dy}$, altra formola della sottotangente.

ESEMPIO I.

47. Sia la curva APB (*Fig.* 34.) un circolo del diametro $= 2r$, e la ragione di PM all'arco PA sia quella di a alla b, cioè la curva AMC sia la cicloide. Chiamate $AQ = x$, $QP = y$, $QM = z$, l'arco $AP = s$,

e condotta mq infinitamente proſſima ad MQ, MR parallella a Pp; MS, Po parallele ad AB, ſarà $mS = dz$, $RS = po = dy$, $Pp = ds$, ed mR differenza di MP ſarà $dz - dy$. Ma poichè, per la proprietà della curva, abbiamo MP all'arco PA, come a a b, nella ſteſſa ragione ſaranno ancora i differenziali loro mR, pP; e però ſarà $dz - dy$, $ds :: a$, b, cioè $\frac{ads}{b} = dz - dy$; ma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e per la proprietà del circolo $y = \sqrt{2rx - xx}$, dunque $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, e $dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2rxdx^2 + xxdx^2}{2rx - xx}$, quindi $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Surrogati per tanto queſti valori in luogo di ds, e dy nell' equazione $\frac{ads}{b} = dz - dy$, avremo $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$, equazione differenziale della cicloide.

Soſtituito adunque il valore di dz dato dall' equazione nella formola $\frac{zdx}{dz}$ della ſottotangente, averemo $QN = \frac{bz\sqrt{2rx - xx}}{ar + br - bx}$.

Che ſe la cicloide ſia l'ordinaria, ſarà $a = b$, e però

però $QN = \frac{z\sqrt{2rx - xx}}{2r - x}$, cioè $2r - x$, $\sqrt{2rx - xx}$ :: z, QN, o sia $2r - x$, y :: z, QN; ma per la proprietà del circolo è $2r - x$, y :: y, x, adunque sarà y, x :: z, QN, cioè QP, QA :: QM, QN, e però sarà MN parallela a PA.

ESEMPIO II.

48. Sia la curva APB una parabola, la di cui equazione $px = yy$, poste $AQ = x$, $QP = y$, e sia l'arco $AP = s$, $PM = u$, e la ragione di MP all'arco PA sia quella di a alla b, sarà pure mR, Pp :: a, b; cioè du, ds :: a, b, e però $\frac{ads}{b} = du$. Ma nella parabola $y = \sqrt{px}$, e $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, dunque $ds = \frac{dx\sqrt{4px + pp}}{2\sqrt{px}}$; quindi surrogato questo valore in luogo di ds nell'equazione $\frac{ads}{b} = du$, l'equazione alla curva AMC sarà $\frac{adx\sqrt{4px + pp}}{2b\sqrt{px}} = du$. Presa per tanto la formola della sottotangente $\frac{\overline{u + y} \times dx}{du + dy}$, che a questo

I 2 caso

caso conviene, e fatte le sostituzioni in luogo di du, e dy sarà $QN = \frac{\overline{u+y} \times 2b\sqrt{px}}{a\sqrt{4px+pp}+bp}$; ma $y = \sqrt{px}$, per la proprietà della curva APB, ed $\frac{as}{b} = u$, per la proprietà della curva AMC; dunque $QN = \frac{2as\sqrt{px}+2bpx}{a\sqrt{pp+4px}+bp}$.

49. Dal diverso modo, con cui molte curve si generano, nascono diverse dalle ritrovate le formole delle sottotangenti loro, benchè il metodo per ritrovarle sia simile. Basterà il ricercarle in alcune per fare idea della maniera, e dell'artifizio, che dee usarsi in qualunque incontro; e però date le due curve AQC, BCN (*Fig.* 36.) al comune diametro TF, alle quali si sappiano condurre le tangenti, sia un'altra curva MC tale, che la relazione delle ordinate PQ, PM, PN rispetto ad un qualunque punto M sia espressa da una qual si sia equazione, e si dimandi la tangente MT di un qualunque punto M. Si conduca pS infinitamente prossima a PN, e le NS, MR, QO parallele ad AB, e sia $PE = s$, $PF = t$, cognite per la supposizione, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$. Per la similitudine de' triangoli QPE, qOQ, sarà $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$, e per la similitudine de' triangoli mRM, MPT, sa-

rà

rà $PT = \frac{sydx}{xdy}$, formola della sottotangente; ma perchè differenziando l'equazione della curva MC, a fine di avere il valore della dx da sostituirsi in essa formola, sarà egli dato per dy, e dz, non si averà essa sottotangente in termini finiti. Si rifletta adunque, che i triangoli simili NSn, NPF ci danno $NP, PF :: nS, SN$, cioè $z, t :: \pm dz, SN = \pm \frac{tdz}{z}$ (cioè il segno positivo alla dz, se crescendo x, ed y, cresce la z; ed il segno negativo, se crescendo x, ed y, la z cala). Ma è anco $SN = \frac{sdx}{x}$, dunque $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$, e però $dz = \pm \frac{szdx}{tx}$. Posto adunque in luogo di dz questo valore nell'equazione differenziata della curva MC, si averà un valore di dx dato per dy, il quale sostituito nella formola della sottotangente $\frac{sydx}{xdy}$ farà svanire le differenze, e la sottotangente sarà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

50. Sia $xz = yy$ l'equazione della curva MC; differenziando sarà $zdx + xdz = 2ydy$, e sostituito in luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{tx}$, sarà $zdx \pm \frac{szdx}{t} = 2ydy$,

e però $dx = \frac{2tydy}{tz \pm sz}$; nella formola della sottotangente $\frac{sydx}{xdy}$ surrogato per tanto, in luogo di dx, questo valore, sarà $PT = \frac{2styy}{tzx \pm szx} = \frac{2st}{t \pm s}$, quando si ponga in vece di yy il valore xz. Sia ora la curva AQC una parabola del parametro $= b$; la curva BCN un circolo del diametro $AB = 2a$. Se adunque il punto N cade nella periferìa del primo quadrante principiando da A, in cui la dz è positiva, la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t + s}$, e la sottotangente del circolo sarà $\frac{2aq - qq}{a - q} = t$ (chiamata $AP = q$), e quella della parabola sarà $2q = s$; posti adunque questi valori in luogo di t, e di s nell' espressione $\frac{2st}{t + s}$, avremo $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$.

Che se il punto N cade nella periferìa dell' altro quadrante, sarà dz negativa, e la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t - s}$; ma in questo caso la sottotangente del circolo è $\frac{2aq - qq}{q - a} = t$, e della parabola

rimane

rimane $2q = s$, e però fatte le sostituzioni de' valori di t, e di s nell'espressione $\frac{2st}{t - s}$, avremo $PT = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$, come nel primo caso.

52. Ma quando siasi denominata AP, essendo AQ una parabola, sarà $PQ = x = \sqrt{bq}$; ed essendo BCN un circolo, sarà $PN = z = \sqrt{2aq - qq}$, adunque l'equazione $yy = zx$ della curva MC sarà $yy = q\sqrt{2ab - bq}$, e data così l'equazione per le due coordinate AP, PM, troverassi la sottotangente PT con le solite ordinarie formole $\frac{ydq}{dy}$. Differenziando adunque l'equazione $yy = q\sqrt{2ab - bq}$, sarà $ydy = \frac{4abdq - 3bqdq}{4\sqrt{2ab - bq}}$; quindi moltiplicando per y il numeratore, e denominatore della formola $\frac{ydq}{dy}$, onde sia $\frac{yydq}{ydy}$, e sostituendo in luogo di yy, e di ydy i rispettivi valori, sarà $\frac{yydq}{ydy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} = PT$, come prima.

53. Sia più generalmente $x^m z^n = y^{m+n}$ l'equazione della curva MC, differenziando sarà $mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy$, e ponendo in luogo

luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{tx}$, sarà

$$\frac{tmz^n x^{m-1} dx \pm snx^{m-1} z^n dx}{t} = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy,$$

e però $dx = \frac{\overline{mt+nt} \times y^{m+n-1} dy}{\overline{mt \pm ns} \times z^n x^{m-1}}$; adunque $PT = \frac{sydx}{xdy} = \frac{\overline{mst+nst} \times y^{m+n}}{\overline{mt \pm ns} \times z^n x^m} = \frac{mst+nst}{mt \pm ns}$, quando si ponga in luogo di y^{m+n} il valore $x^m z^n$.

54. Se le due curve AC, BCN diverranno linee rette, nel caso dell'equazione semplice $xz = yy$ della curva MC sarà essa una delle Sezioni Coniche d'Apollonio, come si è veduto al Lib. I. Cap. III. num. 135., cioè un Ellissi quando l'ordinata CD cade fra i punti A, B; un'Iperbola quando cade dall'una, o dall'altra parte; ed in fine una Parabola quando i punti A, B sono infinitamente lontani l'uno dall'altro, cioè quando l'una delle rette linee AC, BC è parallela al diametro. Da ciò manifestamente si vede, che nelle stesse circostanze saranno le medesime curve coniche, ma di grado superiore in infinito, quando l'equazione alla curva MC sia la generale $x^m z^n = y^{m+n}$.

55. Data la curva AP (*Fig.* 37.) con l'origine in A, di cui si sappia condurre la tangente, sia un' altra curva CMD tale, che condotta da un punto dato

P

F la retta FMP in qualunque modo, la relazione di FM alla porzione AP sia espressa da un' equazione qualunque, e debbasi ritrovare la tangente della curva CMD.

Sia PH tangente della curva APB nel punto P, e si conduca FH normale ad FP, ed Fp infinitamente prossima, e col centro F si descrivano gl'archetti infinitesimi MR, PO, e la ricercata tangente della curva CMD sia MT. Si chiamino $PH = t$, $FH = s$, $FM = y$, $FP = z$, e l'arco $AP = x$. Poichè per gl'archi infinitesimi possono assumersi i loro seni retti, sarà il triangolo MRm rettangolo in R, e perchè l'angolo MmR non è diverso dall' angolo TMF, se non per l'angolo infinitesimo MFm, si potranno considerare simili i due triangoli MRm, TFM, e per la stessa ragione simili i due triangoli POp, HFP; adunque sarà mR, $RM :: MF$, FT, cioè dy, $MR :: y$, FT, ed $FT = \frac{MR \times y}{dy}$, onde per avere il valore di FT conviene avere prima quello di MR, che si averebbe, se fosse nota PO; ma per i triangoli simili PFH, POp, sarà PH, $FH :: Pp$, PO, cioè t, $s :: dx$, $OP = \frac{sdx}{t}$, e per i settori simili FPO, FMR, sarà FP, $PO :: FM$, MR, cioè z, $\frac{sdx}{t} :: y$, $MR = \frac{sydx}{zt}$, quindi $FT = \frac{syydx}{tzdy}$, formola della sottotangente; la quale, se si sostituisca

in

luogo di dx il valore dato dall'equazione differenziata della curva CMD, sarà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

56. Sia il circolo $ABCD$ (*Fig.* 38.) del centro H, raggio HA, e mentre il raggio HA fisso nel centro si muove uniformemente, descrivendo il punto A la periferia $ABCD$, si muova il punto H uniformemente sul raggio HA in modo, che restituitosi il raggio nella prima situazione HA il punto H abbia percorso tutto il raggio, e sia in A; descriverà il punto H la curva $HEcA$, che dicesi la *Spirale d'Archimede*. Dalla generazione di questa curva è facile a vedere, che un qualunque arco AB del circolo sarà alla corrispondente porzione HE del raggio, come tutto il circolo a tutto il raggio. Chiamato adunque il raggio $= r$, la periferia del circolo $= c$, l'arco $AB = x$, e l'ordinata $HE = y$, sarà $x, y :: c, r$, e però $y = \frac{rx}{c}$, equazione della spirale, in cui le ordinate sono dal punto fisso H. Ciò premesso, si voglia la tangente ET della spirale: poichè in questo caso la FP della *Fig.* 37. è il raggio HB del circolo, sarà $z = r$, e le due, PH tangente, ed FH sottotangente, nella stessa *Fig.* 37. sono in questa ambedue perpendicolari al raggio HB (per la natura

natura del circolo), ed in conſeguenza tra loro parallele, e però eguali; onde ſarà $s = t$, adunque la formola generale $\frac{syydx}{tzdy}$ ſarà in queſto caſo $\frac{yydx}{rdy}$; quindi differenziando l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, ſarà $dy = \frac{rdx}{c}$, e ſoſtituito nella formola il valore di dx, ſarà eſſa $\frac{cyy}{rr} = HT$; o pure poſto in luogo di y il valore $\frac{rx}{c}$, ſarà $\frac{xy}{r} = HT$. Deſcritto adunque col centro H, raggio $HE = y$ l'arco EQ, e preſa HT eguale all'arco EQ, ſarà eſſa la ſottotangente, perchè per la ſimilitudine de' ſettori HEQ, HBA, ſarà $HA, AB :: HQ, QE$; cioè $r, x :: y, QE = \frac{xy}{r}$.

Se in luogo di eſſere l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, ſia $y^m = \frac{r^m x}{c}$, cioè la periferìa all'arco AB, come una qualunque poteſtà m intiera, o rotta del raggio ad egual poteſtà dell'ordinata, differenziata l'equazione, ci darà $dx = \frac{mcy^{m-1}dy}{r^m}$, ed $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$; e fatta la ſoſtituzione nella formola $\frac{yydx}{ray}$ della ſottotangente, ſarà eſſa $\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT$, ma $y^m = \frac{r^m x}{c}$, dunque $\frac{mxy}{r} = HT = m \times EQ$.

57. Più semplice si averà la formola della sottotangente, se l'equazione della curva APB (*Fig.* 37.) sia data dalla relazione di FM ad FP; poichè i triangoli simili pOP, PFH, ci danno $PO = \frac{sdz}{z}$, ed i settori simili FPO, FMR ci danno $MR = \frac{sydz}{zz}$, e finalmente i triangoli simili MRm, TFM ci daranno $FT = \frac{syydz}{zzdy}$.

ESEMPIO II.

58. Sia la curva CMD al di sopra di APB, il che non fa alcuna alterazione (*Fig.* 39.), ed APB sia una retta linea, ed FM, FP sieno sempre diverse fra loro per la stessa quantità, cioè PM costante $= a$, sarà $y - z = a$ l'equazione della curva, che è la Concoide di Nicomede, il di cui polo F, ed AB l'asintoto. Differenziando l'equazione, sarà $dy = dz$, quindi la sottotangente $FT = \frac{syy}{zz}$.

Condotta adunque ME parallela a PA, ed MT parallela a PE, sarà MT tangente della curva in M; imperciocchè sarà $FA = s$, $FE = \frac{sy}{z}$, ed $FT = \frac{syy}{zz}$.

59. Data all'asse EAT la curva qualunque AM, (*Fig.* 40.) di cui si sappia condurre la tangente MH ad un qualunque punto M, e dato fuori della curva il punto F, da cui sia condotta la retta FPM; se s'immagineremo, che

che aggirandoſi la retta FPM ſul punto F immobile, faccia muovere ſulla retta ET il piano PAM ſempre parallelo a ſe ſteſſo, rimanendo la intercetta PA ſempre la ſteſſa: il punto M, che è la comune interſecazione delle due linee FM, AM, deſcriverà con queſto moto una curva CMD, di cui ſi domanda la tangente. Si muova il piano PAM, e nel primo iſtante arrivi nella poſizione infinitamente proſſima pam; e ſi conduca SRm parallela ad ET. La ſimilitudine de' triangoli MRm, MHT ci darebbe la retta HT, che determina la tangente ricercata, ſe foſſero noti i lati MR, Rm. Per averli adunque, chiamata FP, o $Fp = x$; FM, o $Fm = y$, $Pp = dz$, e le note $PA = a$, $MH = t$, $PH = s$; egli è chiaro, che ſarà $Pp = Aa = Rm = dz$, e per i triangoli ſimili FPp, FSm ſarà $Fp, Pp :: Fm, Sm$, cioè $x, dz :: y, Sm = \frac{ydz}{x}$, dunque $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$; e per i triangoli ſimili MPH, MSR, ſarà $HP, HM :: RS, RM$, cioè $s, t :: \frac{ydz - xdz}{x}, MR = \frac{tydz - txdz}{sx}$; finalmente, per i triangoli ſimili MRm, MHT, ſarà $MR, Rm :: MH, HT$, cioè $\frac{tydz - txdz}{sx}, dz :: t, Ht = \frac{sx}{y - x}$.

Dal punto F ſi conduca FE parallela alla tangente MH, e ſi prenda $HT = PE$, tirata TM, ſarà eſſa tangente della curva nel punto M. Imperocchè per i triangoli ſimili PMH, PFE, ſarà $PM, PH :: PF, PE$, cioè $y - x, s :: x, \frac{sx}{y - x} = PE = HT$.

60. E' ſtato dimoſtrato al num. 136. Cap. III. Lib. I. che ſe la linea AM foſſe una retta, la curva CMD ſarebbe l'iperbola, che averebbe ET per uno de' due aſintoti. Se AM foſſe un circolo col centro P, la curva CMD ſarebbe la Concoide di Nicomede, il di cui polo F, e l'aſintoto ET. E ſe finalmente AM foſſe una parabola, la curva CMD ſarebbe *la Compagna della Paraboloide di Carteſio*, cioè una delle due *Concoidi Paraboliche*.

61. Al diametro AP (*Fig.* 41.) ſia una curva qualunque AN, a cui ſi ſappia condurre la tangente, ed un punto fiſſo F fuori di lei, e ſia un' altra curva CMD tale, che condotta, come ſi vuole, dal punto F la retta $FMPN$, la relazione tra FN, FP, ed FM ſia eſpreſſa da un' equazione qualunque; ſi dimanda la tangente MT di un qualunque dato punto M.

Per lo punto F ſi conduca HK perpendicolare ad FN, che incontra in K il diametro AP prodotto, ed in H la tangente data NH. Sia FQ infinitamente proſſima ad FN, e col centro F ſi deſcrivano gl'archi MR, Po, NQ. Chiamate $FK = s$, $FH = t$, $FP = x$, $FM = y$, $FN = z$, ſarà $mR = dy$, $po = dx$, $Qn = -dz$, e per la ſimilitudine de' triangoli NQn, NFH, ſarà $NQ = -\frac{tdz}{z}$; e per la ſimilitudine de' ſettori FNQ, FMR, ſarà $MR = -\frac{tydz}{zz}$; e finalmente, per la ſimi-

litu-

litudine de' triangoli MRm, MFT, farà $FT = -\frac{yytdz}{zzdy}$, formola ricercata della fottotangente. Ma quì pure fi rifletta, che differenziando l'equazione della curva, il valore di dy da foftituirfi nella formola farà dato per dx, e dz, quindi non fpariranno i differenziali; tuttavìa però la fimilitudine de' fettori FNQ, FPo ci darà $Po = -\frac{txdz}{zz}$, e la fimilitudine de' triangoli Pop, PFK l'analogìa dx, $-\frac{txdz}{zz} :: x$, s, quindi l'equazione $szzdx = -txxdz$, e però $-dz = \frac{szzdx}{txx}$; pofto adunque nella formola della fottotangente il valore di dy, cavato dall' equazione differenziata della curva, indi in luogo di dz quefto valore, fpariranno le differenze, e fi averà la fottotangente in termini finiti.

Se la linea AP in luogo di effer retta foffe una curva, condotta la tangente PK, col medefimo difcorfo fi troverebbe lo fteffo valore della fottotangente FT.

ESEMPIO.

62. La curva AN (*Fig.* 42.) fia un circolo, il quale paffi per lo punto F, ed in tal modo pofto, che conducendo dal puto F la FB normale ad AP prodotta, effa paffi per lo centro G di effo circolo, e fia fem-

sempre PN eguale a PM, la curva CMD della Figura antecedente, cioè FMA in questa sarà la Cissoide di Diocle, la di cui equazione sarà $z + y = 2x$. Differenziando adunque averemo $dz + dy = 2dx$, e però $dy = 2dx - dz$, e posto in luogo di dy questo valore nella formola $-\frac{yytdz}{zzdy}$ della sottotangente, sarà $-\frac{yytdz}{2zzdx - zzdz}$; e finalmente surrogato in luogo di $-dz$ il valore $\frac{szzdx}{txx}$, averemo $\frac{styy}{2txx + szz} = FT$, sottotangente ricercata.

Egli è chiaro, che se il punto M, di cui si vuole la tangente, cadesse nel punto A, essendo in questo caso KH normale ad FA, sarebbe $FN = FP = FM = FA = FK = FH$; e però $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}AF$.

63. Troverassi forse più speditamente la sottotangente della Cissoide per mezzo della solita formola del num. 30.; poichè, condotte le NE, ML perpendicolari ad FB, e chiamando $FB = 2a$, $FL = x$, $LM = y$, per la proprietà della curva FMA sarà $BE = FL = x$, e per la proprietà del circolo, sarà $EN = \sqrt{2ax - xx}$, ed i triangoli simili FLM, FEN daranno FL, $LM :: FE$, EN, e però FL, $LM :: EN$, EB, cioè x, $y :: \sqrt{2ax - xx}$, x; quindi $y = \frac{xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, o

sia

sia $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, equazione della curva FMA; differenziando adunque averemo $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{\overline{2a - x}^2}$, e presa la formola solita $\frac{ydx}{dy}$, e fatte tutte le sostituzioni, sarà $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy \times \overline{2a - x}^2}{3axx - x^3} = LO = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, se si ponga in luogo di yy il valore $\frac{x^3}{2a - x}$.

64. Sieno due curve ANB, CPD, (*Fig.* 43.) ed una retta FK, ed in esse tre punti fissi A, C, F; sia in oltre la curva EMG tale, che, condotta per un qualunque punto M di essa la retta FMN dal dato punto F, e dal punto M la retta MP parallela ad FK, la relazione dell'arco AN all'arco CP venga espressa da un'equazione qualunque. Si dimanda la tangente della curva EG nel punto M.

Sia MT la ricercata tangente, che incontri in T la retta FK prodotta, se fa bisogno, e dal punto T si tiri TH parallela ad FM, e per lo punto M si conducano MRK parallela alla tangente in P, ed MOH parallela alla tangente in N, e sia $FmOn$ infinitamente prossima ad FN. Chiamate $FM = s$, $FN = t$, $MK = u$, e gli archi $AN = y$, $CP = x$, e però $Nn = dy$, $Pp = dx$, sarà per i triangoli simili FNn, FMO, FN, $Nn :: FM$, MO,

MO, cioè t, dy :: s, $MO = \frac{sdy}{t}$, e per i triangoli simili MmR, MTK; ed MOm, MHT, sarà MR, Mm :: MK, MT; ed Mm, MO :: MT, MH; dunque sarà anche MR, MO :: MK, MH, cioè dx, $\frac{sdy}{t}$ :: u, $MH = \frac{usdy}{tdx}$. Quindi differenziando l'equazione data, averemo il valore di dy dato per dx, e fatta la sostituzione, sarà MH espressa in termini finiti. Presa adunque MH eguale al ritrovato valore, e parallela alla tangente in N della curva ANB, e condotta HT parallela ad MF, se dal punto M si tirerà al punto T la retta TM, sarà essa tangente nel punto M della curva EMG.

ESEMPIO.

65. La curva ANB (*Fig.* 44.) sia un quarto di circolo, il di cui centro F, e CPD della *Fig.* 43. sia il raggio APF della *Fig.* 44. perpendicolare alla retta $FKTB$, e si conduca la tangente AR. S'intenda aggirarsi equabilmente il raggio FA intorno al centro F, e nello stesso tempo muoversi equabilmente la tangente AR sempre parallela a se stessa verso FB in modo, che quando il raggio FA cade in FB, cada pure in FB la tangente AR. Con questo moto il punto M, che è la intersecazione del raggio, e della tangente, descriverà la curva AMG, che chiamasi la *Quadratrice di Dinostrate*.

Dalla

Dalla generazione di questa curva è chiaro, che sarà l'arco AN all'intercetta AP, come il quadrante AB al raggio AF; chiamando adunque $AN = y$, $AP = x$, $AB = a$, $AF = r$, sarà $ry = ax$, e $dy = \frac{adx}{r}$, dunque sostituendo questo valore di dy nella formola $\frac{usdy}{tdx}$, sarà $MH = \frac{asu}{rt}$; ma in questo caso FN è il raggio del circolo, ed $MK = AF - AP$, dunque $t = r$, $u = r - x$, quindi $MH = \frac{asr - asx}{rr} = \frac{as - sy}{r}$, posto in luogo di ax il valore ry dato dall'equazione. Dal punto M si alzi MH normale ad FM, ed eguale all'arco MQ descritto col centro F, raggio FM, e si tiri HT parallela ad FM, sarà MT tangente della quadratrice nel punto M; imperocchè, per i settori simili FNB, FMQ, sarà FN, $NB :: FM$, MQ, cioè r, $a - y :: s$, $MQ = \frac{as - sy}{r} = MH$.

66. Sieno due curve BN, FQ, (*Fig.* 45.) delle quali si sappiano condurre le tangenti, e che abbiano per asse comune la retta BA, in cui sieno due punti fissi A, E, e sia un'altra curva LM tale, che condotta per un qualunque punto M di essa la retta AMN; e descritto col centro A, raggio AM, l'arco MG; e dal punto G abbassata GQ normale ad AG, sia data la re-

 lazione

lazione de' ſpazj ANB, $EFQG$, e delle linee AM, AN, QG per mezzo di un' equazione qualunque. Si ricerca la tangente della curva LM nel punto M.

Condotta la retta ATH perpendicolare ad AMN, ſia un'altra Amn infinitamente proſſima ad AMN, e l'arco (mg), e la perpendicolare (gq), quindi col centro A deſcritto l'archetto NS, ſi chiamino le ſottotangenti date $HA = a$, $GK = b$, e ſia $AM = y$, $AN = z$, $GQ = u$, e gli ſpazj $EGQF = s$, $ANB = t$, ſarà $Rm = Gg = dy$, $Sn = dz$, ed a cagione de' triangoli ſimili KGQ, Qoq, ſarà $(oq) = -du = \frac{udy}{b}$, e per i triangoli ſimili HAN, NSn, ſarà $SN = \frac{adz}{z}$. Lo ſpazio $GQqg$ ſi può prendere per lo ſpazio $GQog$, perchè la differenza loro Qoq è quantità infiniteſima del ſecondo ordine, onde ſarà $GQqg = udy = -ds$; così pure ſarà $ANn = \frac{1}{2} AN \times NS = \frac{1}{2} adz = -dt$. Soſtituiti per tanto nella differenza dell'equazione propoſta, in luogo di du, ds, dt, queſti valori, averemo un' equazione, da cui ſi caverà il valore di dz dato per dy. Ora per i ſettori ſimili ARM, ANS, ſarà $MR = \frac{aydz}{zz}$, e per i triangoli ſimili mRM, MAT, ſarà $AT = \frac{ayydz}{zzdy}$, formola della ſottotangente, in cui ſe ſi ſoſtituirà, in luogo di dz, il valore dato per dy dall'equazione della

curva,

curva, spariranno le differenze, e la sottotangente sarà data in termini finiti.

ESEMPIO.

67. Lo spazio $EGQF$ sia doppio di ABN, cioè $s = 2t$, sarà $ds = 2dt$, ma $ds = -udy$, e $dt = -\frac{1}{2}adz$, dunque sarà $udy = adz$, e $dz = \frac{udy}{a}$, dunque la sottotangente $AT = \frac{uyy}{zz}$.

La curva BN sia un circolo del centro A, raggio $AN = c$, quindi $z = c$, e la curva FQ sia un' iperbola dell' equazione $uy = ff$, sarà la sottotangente $AT = \frac{ffy}{cc}$, cioè la ragione di AM ad AT costante. La curva LM (*Fig.* 46.) chiamasi in questo caso la *Logaritmica spirale*.

E' chiaro, che la curva LM farà infiniti giri prima di giungere nel punto A; imperocchè quando il punto G (*Fig.* 45.) arriva in A, lo spazio s sarà infinito, come vedrassi nel calcolo integrale, dunque dovrà essere infinito anche lo spazio t, che non può esserlo, se non dopo infiniti giri del raggio AM.

68. Rimane per ultimo da considerarsi un caso particolare delle tangenti. Si è veduto, che essendo le coordinate di una curva qualunque x, ed y, la formola generale della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, o $\frac{xdy}{dx}$, secondo

do che la y, o la x fa figura di ordinata; e però, differenziata l'equazione della curva, se da essa si ricavi il valore della dx, o della dy, questo valore surrogato nella formola generale ci somministra una frazione in termini tutti finiti, la quale è l'espressione, o valore della sottotangente per un qualunque punto della proposta curva. Che se si vuole la sottotangente per un determinato punto della curva, niente altro si deve fare, che sostituire nella frazione in luogo delle x, ed y i valori, che esse ânno nel dato punto. Ma accade alcuna volta, che sostituendo in luogo di x, o di y un determinato valore nella frazione, che esprime la sottotangente, o sia nel rapporto della dx alla dy cavato dall'equazione differenziata della curva, tutti i termini nel numeratore, e denominatore di esso svaniscano, e così ne provenga $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, e però anco la sottotangente $= \frac{0}{0}$, dal che però non si deve inferire, che essa sia nulla in quel punto.

Sia per un'esempio la curva
$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = 0$, e sia y l'assissa, x l'ordinata, e però $\frac{xdy}{dx}$ la formola della sottotangente. Differenziando adunque l'equazione, averemo $\frac{dy}{dx} = \frac{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3}{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax}$, e la sottotan-

totangente $\frac{xdy}{dx} = \frac{3axyy - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6ayy + 6axy + 8aay + 12aax}$;
ma se si vuole la sottotangente di quel punto di curva, a cui corrisponde l'assissa $y = 2a$, essendo in questo caso, per la data equazione, anche $x = 2a$, fatte le sostituzioni nella frazione, che esprime il rapporto della dx alla dy, si trova egli essere $\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$, cioè $\frac{0}{0}$, perchè tutti i termini si distruggono, e però anco la sottotangente in quel punto $= \frac{0}{0}$, il che nulla ci fa sapere, quantunque allo stesso punto corrisponda benissimo la sottotangente, anzi due.

69. Accaderà infallibilmente questo caso ogni qual volta la curva abbia più rami, che s'incontrino, e si voglia la tangente nel punto del concorso; ed in fatti la curva *NOPQR* (*Fig.* 47.) dell'equazione proposta â i due rami *OP*, *MQ*, che si tagliano nel punto *G*, a cui appunto corrisponde $y = 2a$, essendo *OT* l'asse delle y, ed il principio in *O*, ed $x = 2a$, prese le x nell' asse *OQ*.

Per rendere ragione di questo caso, basta avvertire due cose: la prima, che nel punto del concorso di diversi rami di curva diverse radici dell'equazione si fanno eguali tra loro; così rispetto alla proposta equazione ne nel punto G sono eguali i due valori della x, e due pure sono eguali de' quattro valori della y; la seconda, (come si è dimostrato nell' Algebra Cartesiana) che se un' equazione, la quale contenga delle radici eguali, si moltiplicherà termine per termine con una serie aritmetica qualunque, il prodotto sarà eguale al zero, e conterrà in se una meno delle radici eguali; se questo prodotto si moltiplicherà pure per una serie aritmetica, il nuovo prodotto sarà istessamente eguale al zero, e conterrà una meno delle radici eguali, che contiene il primo prodotto, cioè due radici meno delle eguali, che contiene la prima equazione, e così successivamente fino a quel prodotto, che una sola contenga delle radici eguali.

Se adunque un' equazione qualunque di curva, trattando x per variabile, ed y per costante, si moltiplicherà per una serie aritmetica, la quale termini nel zero; nel caso di radici eguali il prodotto sarà eguale al zero, e lo sarà ancora, se si divida esso prodotto per x, la qual divisione succede dal moltiplicarsi per zero l'ultimo termine. Lo stesso sarà, trattando y per variabile, ed x per costante, e moltiplicando l'equazione per tale serie aritmetica, che ponga il zero sotto l'ultimo termine.

Ciò posto, è facile a vedersi, che questa tale operazione si fa appunto differenziando, cioè si tratta la x,

come

come variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della x, e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dx; indi si tratta y per variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della y, e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dy; ma nel caso di radici eguali di x, e di radici eguali di y, tanto il prodotto, che moltiplica dx, quanto quello, che moltiplica dy, sono zero; dunque appunto deve nascere la ragione di $\frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$ in quel punto, nel quale due rami di curva s'incontrano.

Per vedere ciò chiaramente, ordino l'equazione della proposta curva per la lettera y, e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine sia zero.

$$\begin{array}{lllll} y^4 - 8ay^3 & - 12axyy & + 48aaxy & + 4aaxx & \\ & + 16aayy & & - 64a^3x & = 0, \\ 4, \quad 3, & \quad 2, & \quad 1, & \quad 0. & \end{array}$$

il prodotto sarà

$$4y^4 - 24ay^3 - 24axyy + 32aayy + 48aaxy = 0,$$

cioè dividendo per $4y$

$$y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax = 0.$$

Ordino la stessa equazione per la lettera x, e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine

sia

fia zero

$$\begin{array}{ccc} 4aaxx + 48aaxy + y^4 & & \\ \quad - 64a^3x - 8ay^3 & & = 0, \\ \quad - 12ayyx + 16aayy & & \\ 2, \qquad 1, \qquad 0 & & \end{array}$$

il prodotto farà

$$8aaxx + 48aaxy - 64a^3x - 12ayyx = 0,$$

cioè dividendo per $4x$

$$2aax + 12aay - 16a^3 - 3ayy = 0.$$

Ciò fatto, differenzio l'equazione propofta, ed il differenziale fi è $4y^3dy - 24ayydy - 24axydy - 12ayydx + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$, cioè dividendo per 4, e trafponendo i termini della dx

$$\overline{y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax} \times dy =$$
$$\overline{3ayy - 12aay - 2aax + 16a^3} \times dx.$$

Ma il moltiplicatore della dy è il primo prodotto nella ferie aritmetica, ed in confeguenza $= 0$ relativamente al punto G, in cui y â due valori eguali; ed il moltiplicatore della dx è il fecondo prodotto nella fua ferie aritmetica, mutati i fegni, il che però non fa, che non fia $= 0$ relativamente allo fteffo punto G, in cui x â due valori eguali, dunque farà $dy \times 0 = dx \times 0$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ nel punto G.

Ma fe il moltiplicare qualunque equazione per una ferie aritmetica, o fia il differenziarla (giacchè è lo fteffo) fa, fa, che nel supposto di radici eguali nasca il caso, di cui si tratta, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, fa ancora, che nell' equazione indi nata vi sia una meno delle radici eguali, e però se l'equazione proposta â due radici eguali, la differenziata ne avrà una sola di esse eguali; se la proposta ne averà tre, differenziando di nuovo la già differenziata, (assumendo per costanti le flussioni dx, dy) quella, che indi nasce, ne averà una sola, e così di mano in mano discorrendo. Si assumono poi per costanti le flussioni dx, dy, perchè distruggendosi vicendevolmente tanto i termini moltiplicati in dx, quanto quelli moltiplicati in dy, nella supposizione di quel tale determinato valore della x, e della y, si distruggeranno nulla meno sì i termini moltiplicati in ddx, come quelli moltiplicati in ddy. In questo modo operando si ridurranno le equazioni a non contenere, che una sola di quelle molte radici eguali, chè prima avevano; e però differenziando finalmente l'ultima, per ritrarne la ragione di dy alla dx, non potrà più nascere il caso di $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

Ripiglio adunque l'equazione di prima
$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 16aayy + 48aaxy + 4aaxx - 64a^3x = o$,
differenziata si trova essere
$y^3dy - 6ayydy - 6axydy - 3ayydx + 8aaydy + 12aaxdy + 12aaydx + 2aaxdx - 16a^3dx = o$.

Ma poichè sostituendo in luogo di y il valore $2a$, ed il corrispondente in luogo di x, che è pure $2a$, a fine di avere la tangente del punto G, ritrovo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, passo a differenziare la già differenziata, prendendo sempre per costanti le flussioni dx, dy, e ricavo $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axdy^2 + 8aady^2 - 12aydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$.

Sostituisco in luogo di y, e di x il valore $2a$ relativamente al punto G, e trovo $dx = \pm dy\sqrt{8}$, indi nella formola generale della sottotangente $\frac{xdy}{dx}$ posti i valori di $x = 2a$, e di $dx = \pm dy\sqrt{8}$, sarà finalmente $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ la sottotangente, o per meglio dire, le due sottotangenti, che corrispondono al punto G, una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva.

Se la curva averà tre radici eguali nel punto, di cui si vuole la tangente, cioè se la curva averà tre rami, che in quel punto s'incontrino; poichè dopo averla la prima volta differenziata averà ancora due radici eguali, differenziata di nuovo, a fine di avere la ragione di dy alla dx, ci darà ciò non ostante, per quanto è stato detto, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, e però sarà necessaria una terza differenziazione; generalmente tante volte

dovrà

dovrà differenziarsi l'equazione, quante sono le radici eguali, o sia i rami della curva, e dall'ultima differenza ricaverassi la ragione della dy alla dx, e tante saranno le tangenti, quanti sono i rami della curva stessa, i quali in quel punto si tagliano.

Sia la curva $QADHAbdAI$ (*Fig.* 48.) dell'equazione $x^4 - ayxx + by^3 = 0$, la quale â i tre rami QAD, IAd, bAH, che si tagliano in A; e sia AP l'asse delle x, ed AB normale ad AP l'asse delle y, ed A la comune loro origine. Differenziando l'equazione, sarà $4x^3dx - 2ayxdx - axxdy + 3byydy = 0$, cioè $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^3 - 2ayx}$. Ma se si voglia la tangente del punto A, poichè in esso è $x = 0$, $y = 0$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Si passi adunque alla seconda differenziazione, e sarà $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdxdy + 6bydy^2 = 0$, ma di qua pure si ricava $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, essendo ogni termine moltiplicato per $x = 0$, secondo la supposizione, ovvero per $y = 0$.

Differenziando finalmente per la terza volta, sarà $24xdx^3 - 6adydx^2 + 6bdy^3 = 0$, ma posta $x = 0$, svanisce il primo termine, e però è $adx^2dy = bdy^3$; dal che si ricavano tre valori della dy, cioè $dy = 0$, e $dy = \pm \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i quali ci danno tre rapporti della dx alla

dy,

dy, vale a dire tre tangenti per lo punto A; una infinita, che si confonde con l'asse AP, e serve per il ramo baH. L'altre, prendendo una qualunque AS, e tirando normalmente ST tale, che sia ST, $SA :: \surd a$, $\surd b$, le TA saranno tangenti nel punto A, l'una del ramo QAD, l'altra del ramo IAd.

70. La verità di questo metodo si può dimostrare anco in altra maniera, e come suol dirsi *A posteriori*. I differenziali dell'equazioni finite, che con le accennate regole del differenziare si trovano, non sono essi realmente i differenziali compiuti, dandoci le regole i soli termini, che contengono i differenziali primi, cioè di una sola dimensione, ed ommettendo in figura di compendio, e di maggior comodo i differenziali di altro grado, cioè di maggior dimensione, i quali per i principj del calcolo, già renderebbero relativamente nulli i termini, ne' quali si trovano.

Richiamata l'equazione

$$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx \atop + 16aayy \qquad\qquad - 64a^3x = 0,$$

e differenziata, sarà

$4y^3dy - 24ayydy - 12ayydx - 24axydy + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 8aaxdx - 64a^3dx = 0$; ma se la y si consideri accresciuta della sua differenza, e così la x, e che nella proposta equazione in luogo della y, e sue

sue potestà si ponga $y + dy$, e le corrispondenti potestà, e lo stesso si faccia ponendo $x + dx$, e le potestà corrispondenti in luogo di x, e sue potestà, averassi $y^4 + 4y^3dy + 6yydy^2 + 4ydy^3 + dy^4 - 8ay^3 - 24ayydy - 24aydy^2 - 8ady^3 - 12axyy - 24axydy - 12axdy^2 - 12ayydx - 24aydxdy - 12adxdy^2 + 16aayy + 32aaydy + 16aady^2 + 48aaxy + 48aaydx + 48aaxdy + 48aadxdy + 4aaxx + 8aaxdx + 4aadx^2 - 64a^3x - 64a^3dx = 0$, ed ordinando i termini in colonne secondo le dimensioni de' differenziali

I.	II.	III.	IV.	V.	
$+ y^4$	$+ 4y^3dy$	$+ 6yydy^2$	$+ 4ydy^3$	$+ dy^4$	
$- 8ay^3$	$- 24ayydy$	$- 24aydy^2$	$- 8ady^3$		
$- 12axyy$	$- 24axydy$	$- 12axdy^2$	$- 12adxdy^2$		
$+ 16aayy$	$- 12ayydx$	$- 24aydxdy$			$= 0.$
$+ 48aaxy$	$+ 32aaydy$	$+ 16aady^2$			
$+ 4aaxx$	$+ 48aaydx$	$+ 48aadxdy$			
$- 64a^3x$	$+ 48aaxdy$	$+ 4aadx^2$			
	$+ 8aaxdx$				
	$- 64a^3dx$				

La somma per tanto di tutte queste colonne, toltone la prima, che è l'equazione stessa proposta, sarà il compiuto, ed intero differenziale di lei. Ma perchè l'ultimo termine, cioè la colonna quinta è infinitamente piccola rispetto alla quarta, e la quarta rispetto alla

terza,

terza, e la terza rispetto alla seconda, si assume la sola seconda colonna per il differenziale della proposta equazione, il quale compendio ci vien dato dalla solita regola del differenziare; ma non è già, che le colonne dopo la seconda sieno assolutamente nulle. Se adunque nascerà il caso, che la seconda colonna sia assolutamente nulla, non sarà più nulla rispetto a lei la terza, e però non dovrà trascurarsi, anzi sarà essa il differenziale della prima. Istessamente si discorra della quarta, quando sia zero la seconda, e la terza, e così de l'altre. Ora questo caso appunto succede, quando si cerca la relazione di dx alla dy nella proposta equazione in quel punto, in cui sia $y = 2a$, ed $x = 2a$; poichè, fatte queste sostituzioni, si trova essa seconda colonna esser zero, e però si passa a far uso della terza, il che è affatto la stessa cosa, che differenziare due volte l'equazione, come è manifesto.

71. Per gli stessi principj, e nella stessa maniera si scioglie un simil caso, che nasce talora nella costruzione delle curve, se l'ordinata venga espressa da una frazione, il di cui denominatore, e numeratore divengano eguali al zero, quando si fissi per l'assissa un determinato valore.

A fine d'uscir d'imbarazzo basta considerare la frazione, come se esprimesse le ordinate di due curve, che in qualche punto del loro comune asse concorrano, e e perchè in quel punto la ragione loro non può in altro modo esser espressa, che per $\frac{o}{o}$, bisogna cercare, quale sia il loro rapporto nel punto infinitamente prossimo, cioè quando esse sieno cresciute d'un' infinitesimo, vale a dire, passare alla differenziazione del numeratore, poi del denominatore della frazione stessa, e ciò una, due, o più volte fin tanto, che finalmente, posto il valore determinato dell'assissa nella frazione, essa non sia più $\frac{o}{o}$, e ciò per quella stessa ragione detta di sopra intorno alle colonne de' differenziali.

Sia l'equazione $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Presa $x = a$, e fatta la sostituzione, sarà $y = \frac{o}{o}$, dal che non si può perciò inferire, che all' assissa $x = a$ corrisponda l'ordinata $y = o$. Differenziando adunque il numeratore, indi il denominatore della frazione, sarà $y =$

$$\frac{\overline{a^3dx - 2x^3dx} \times \overline{2a^3x - x^4}^{\,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}a^3dx \times a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}axxdx \times a^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{9}{4}}},$$

cioè dividendo sopra, e sotto per dx, e ponendo $x = a$, sarà $y = \frac{16a}{9}$.

Sia l'equazione $y = \frac{a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - aa}{\sqrt{2aa + 2xx} - x - a}$, se si faccia $x = a$, sarà $y = \frac{0}{0}$.

Differenziando per tanto il numeratore, poi il denominatore della frazione, sarà $y = \frac{4axx \times \overline{4a^3 + 4x^3}^{\,-\frac{2}{3}} - a}{2x \times \overline{2aa - 2xx}^{\,-\frac{1}{2}} - 1}$ ommettendo la dx, che è tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; ma se in questa frazione pure si ponga $x = a$, sarà ancora $y = \frac{0}{0}$, dunque passando a differenziare questa seconda frazione, avremo $y = \frac{32a^4 x \times \overline{4a^3 + 4x^3}^{\,-\frac{5}{3}}}{4aa \times \overline{2aa + 2xx}^{\,-\frac{3}{2}}}$, ommettendo la dx, e posta $x = a$, sarà $y = 2a$.

CAPO

CAPO III.

Del Metodo de' Massimi, e Minimi.

72. SE in una curva qualunque, le di cui ordinate sieno parallele, crescendo le assisse BC (*Fig.* 49. 50. 51., *e* 52.) continovamente, cresca altresì l'ordinata CG sino ad un certo punto E dopo di cui vada calando, o non vi sia più ordinata di sorta alcuna; o pure al contrario crescendo l'assissa, l'ordinata CG vada continovamente calando sino ad un certo punto E, dopo di cui, o cresca, o più non vi sia; l'ordinata EF si chiama la *Massima*, o la *Minima*.

Alla curva GHF sia EF la massima delle ordinate (*Fig.* 49.), o la minima (*Fig.* 50.); presa una qualunque assissa BC, e condotta l'ordinata CG, al punto G s'intenda essere tangente GA, e DH infinitamente prossima a CG; chiamata $BC = x$, $CG = y$, e fatta GI parallela a BC, sarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Poichè sono simili i triangoli ACG, GHI nella *Fig.* 49., sarà AC, $CG :: GI$, IH; e poichè sono simili i triangoli ATG, GHI nella *Fig.* 50., sarà AT, $TG :: GI$, IH. Ciò posto, si finga che l'ordinata GC s'accosti sempre parallela a se stessa alla massima, o minima ordinata EF; egli è chiaro, che accoſtandoſi CG ad EF, la ſottotangente AC, o AT ſi farà ſempre maggiore per modo, che quando CG cada ſopra la EF, la tangente ſi farà parallela a BC, e per conſeguenza la ſottotangente ſarà infinita. In queſto caſo adunque avrà AC a CG, o AT a TG ragione infinita, rimanendo CG quantità finita; ma poichè è ſempre $AC, CG, :: AT, TG :: GI, IH$, averà anco GI ad IH ragione infinita, e però ſarà dy nulla riſpetto alla dx, cioè $dy = 0$ nel punto della maſſima, o minima ordinata.

Sia la curva GHF, (*Fig.* 51., *e* 52.) EF la minima delle ordinate (*Fig.* 51.), o la maſſima (*Fig.* 52.); preſa pure una qualunque aſſiſſa BC, e condotta l'ordinata CG, la tangente GA, DH infinitamente proſſima a CG, e GI parallela a BC, e chiamate $BC = x$, $CG = y$, ſarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Per i triangoli ſimili ACG, GIH, ſarà (*Fig.* 51.) $AC, CG :: GI, IH$; e per i triangoli ſimili ATG, GIH, (*Fig.* 52.) ſarà $AT, TG :: GI, IH$. Accoſtandoſi adunque l'ordinata CG ſempre parallela a ſe ſteſſa alla maſſima, o minima ordinata, la ſottotangente AC, o AT ſi farà ſempre minore per modo, che quando CG cada ſopra la EF, la tangente ſi farà normale a BC, e per conſeguenza nulla la ſottotangente. In queſto caſo adunque averà AC a CG, o AT a TG la ragione del nulla

alla

alla quantità finita, e però essendo nella stessa ragione GI ad IH, sarà dx nulla rispetto alla dy, cioè $dy = \infty$ nel punto della massima, o minima ordinata. Adunque la formola generale per le massime, e minime ordinate sarà $dy = 0$, o pure $dy = \infty$.

73. Data adunque l'equazione della curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, si dovrà differenziare, per ritrarne il valore della frazione, o rapporto $\frac{dy}{dx}$, indi fatta la supposizione di $dy = 0$, o pure di $dx = 0$, cioè di $dy = \infty$, si averà il valore dell'assissa x, a cui compete la massima o minima y, e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima, o minima ordinata, che si cerca; solo avvertendo, che nel caso della supposizione di $dy = \infty$, cioè di $dx = 0$, la x farà figura di ordinata, se nell' altra supposizione la faceva la y. Che se nè la prima supposizione di $dy = 0$, nè la seconda di $dy = \infty$ ci fornirà valore alcuno reale della y, si dovrà concludere, che la proposta curva non â nè massimi, nè minimi.

74. Serve questo metodo per avere una compiuta, ed esatta idea delle curve; per ricavare, in quali punti le tangenti sieno parallele agl'assi conjugati ec. Ma oltre ciò si applica ad infinite questioni, che in tale proposito possono farsi sì geometriche, come fisiche; tale sarebbe il ricercare fra gl'infiniti parallelepipedi di una

data

data solidità, quale sia quello, che abbia la minima superficie; siccome il ricercare tra le infinite vie, che può tenere un mobile, per giugnere da un punto all'altro non posto nella medesima verticale, quale sia quella, che sarà trascorsa nel minimo tempo con una data legge di moto, ed altre simili. In tali questioni ritrovata l'espressione analitica di ciò, che si vuole essere un massimo, o un minimo, si ponga eguale ad y, e fatta la differenziazione, si proceda avanti con le date regole.

ESEMPIO I.

75. Sia la curva dell' equazione $2ax - xx = yy$, e si voglia sapere, a quale punto dell' asse dell' assisse x corrisponda la massima ordinata y, e cosa ella sia.

Differenziata l'equazione, sarà $2adx - 2xdx = 2ydy$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y}$. Facendo la supposizione di $dy = 0$, dovrà essere zero il numeratore della frazione, e però sarà $a - x = 0$, onde $x = a$; adunque la massima ordinata corrisponde a quell'assissa, che sia eguale ad a; sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, sarà $2aa - aa = yy$, cioè $y = \pm a$; la massima ordinata adunque positiva, e negativa è eguale ad a. Facendo la supposizione di $dy = \infty$, dovrà essere zero il denominatore della frazione, e però sarà $y = 0$,

fosti-

fostituito per tanto questo valore in luogo di y nella propofta equazione, averemo $x=0$, ed $x=2a$; vale a dire, che $x=0$ farà la minima, ed $x=2a$ la maffima; o più propriamente, che quando sia $x=0$, ed $x=2a$, essendo infinita la dy rispetto alla dx, la sottotangente farà nulla, cioè la tangente parallela alle ordinate y.

ESEMPIO II.

76. Sia la curva dell' equazione $xx - ax = yy$. Differenziando farà $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$. La suppofizione di $dy=0$ ci dà $x=\frac{a}{2}$, ma fostituito questo valore in luogo di x nella propofta equazione, la y si trova immaginaria, dunque la curva non â ordinata, che a tale affiffa corrifponda, e però molto meno averà maffima o minima. La suppofizione di $dy=\infty$, cioè di $dx=0$ ci dà $y=0$, vale a dire, che la tangente farà perpendicolare all'affe dell'affiffe x nel punto, in cui è $y=0$, il quale corrifponde alle due affiffe $x=0$, ed $x=a$, poichè foftituito in luogo di y il zero nella propofta equazione, farà $xx - ax = 0$, e però $x=0$, ed $x=a$.

ESEM-

ESEMPIO III.

77. Sia la curva dell' equazione $2axy = a^3 + axx - bxx$, in cui le x ſono le aſſiſſe, y le ordinate. Differenziando ſarà $2axdy + 2aydx = 2axdx - 2bxdx$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$. La ſuppoſizione di $dy = 0$ ci dà $x = \frac{ay}{a - b}$, e ſoſtituito queſto valore nell' equazione propoſta, ſarà $\frac{2aayy}{a - b} = a^3 + \frac{a^3yy - aabyy}{\overline{a - b}^2}$, cioè $yy = a \times \overline{a - b}$, ed $y = \pm \sqrt{aa - ab}$, maſſima, o minima ordinata. E poichè abbiamo $x = \frac{ay}{a - b}$, fatta la ſoſtituzione del valore della y, ſarà $x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a - b}}$, aſſiſſa, a cui corriſponde la ritrovata maſſima, o minima ordinata. La ſuppoſizione di $dy = \infty$, o ſia di $dx = 0$ ci dà $ax = 0$, cioè $x = 0$, e fatta la ſoſtituzione nella propoſta equazione, ſarà $a^3 = 0$, ma implica, che una quantità data finita ſia zero, adonque la curva non averà altri maſſimi, o minimi dai ritrovati nella prima ſuppoſizione, i quali per l'ambiguità de' ſegni ſono due, ed eguali; uno poſitivo, che corriſponde alla aſſiſſa poſitiva, l'altro negativo, che corriſponde alla aſſiſſa negativa.

78. Ci dà il metodo confusamente i massimi, e minimi, nè in forza di esso si possono distinguere gl'uni dagl'altri, si riconoscono però quando sia noto l'andamento della curva; ma senza tale notizia si può procedere così. Si assegni all' assissa nell'equazione data un valore per poco maggiore, o minore di quello, che corrisponde alla massima, o minima ordinata, di cui si tratta, ed il valore dell'ordinata, che indi nasce, scioglierà il quesito; poichè se sarà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione sarà de' minimi; ed all'opposto essendo, sarà de' massimi. La curva adunque di quest'esempio avrà due minimi.

ESEMPIO IV.

79. Sia la curva *MADEAN* (*Fig.* 53.) dell' equazione $x^3 + y^3 = axy$, $AB = x$, $BE = y$. Differenziando si averà $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3xx}{3yy - ax}$, e però facendo la supposizione di $dy = 0$, sarà $y = \frac{3xx}{a}$, e fatta la sostituzione di questo valore nella data equazione, si trova $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi poichè $y = \frac{3xx}{a}$, sarà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4} = BE$ la massima ordinata nella curva, la quale corrisponde all' assis-

sa $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2} = AB$. La suppofizione di $dx = 0$ ci darà $x = \frac{3yy}{a}$, e fatta la fostituzione nell'equazione data, sarà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$ la massima AC, cui corrisponde $y = CD = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, che è tangente nel punto D.

80. Ma prima di passare più avanti con gl'esempj, è necessario prevenire un caso, che suole alcuna volta succedere, ed è che tanto la suppofizione di $dy = 0$, quanto quella di $dy = \infty$ ci fornisca un medesimo valore dell'ordinata, o dell'assissa, ed in tale caso non si determina alcun massimo o minimo, ma bensì un punto di intersecazione, o d'incontro di due rami della curva. E la ragione è evidente, imperciocchè essendo $\frac{dy}{dx}$ eguale ad una frazione, se dal numeratore si ricava lo stesso valore della x, per esempio, che si ricava dal denominatore, questo valore, o radice fostituita renderà nullo l'uno e l'altro, e però in quel tal punto di curva sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ma si è veduto di sopra al num. 69., che $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ indica sempre incontro di due rami di curva, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO V.

81. Sia la curva GFM (*Fig.* 51.) la Parabola cubica dell'equazione $y-a=\sqrt[3]{a^3-2aax+axx}$, $BE=EF=a$, $BC=x$, $CG=y$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{2ax-2aa}{3\times\overline{a^3-2aax+axx}^{\frac{2}{3}}}$. La supposizione di $dy=0$ ci dà $x=a$; la supposizione di $dy=\infty$ ci dà parimenti $x=a$, adunque la curva à un punto d'incontro F, che corrisponde all'assissa $x=a$, ed alla minima ordinata $y=a$, che si cava dalla proposta equazione, sostituito in luogo di x il suo valore.

Sia la stessa equazione, ma libera da' radicali, cioè $y^3-3ayy+3aay-a^3=a^3-2aax+axx$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{2ax-2aa}{3yy-6ay+3aa}$. La supposizione di $dy=0$ ci dà $x=a$, e posto questo valore nella proposta equazione, si ricava $y=a$. La supposizione di $dy=\infty$ ci dà pure $y=a$, adunque $x=a$, ed $y=a$ ci danno il punto F, che è un punto d'incontro, o contatto de' due rami GF, FM, e nello stesso tempo la minima y.

Ma se opereremo sopra l'equazione $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$,

 che

che esprime il solo ramo GF ($y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{x-a}^{\frac{2}{3}}$ esprimerebbe l'altro ramo FM) averemo $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3 \times \overline{a-x}^{\frac{1}{3}}}$.

La supposizione di $dy = 0$ nulla ci fa sapere; la supposizione di $dy = \infty$ ci dà $x = a$, e però $y = a$, ed il punto F in questo caso ci fornisce un massimo rispetto alla x, ed un minimo rispetto alla y.

82. Dissi, che la supposizione di $dy = 0$, che ci dà $2a^{\frac{1}{3}} = 0$ nulla ci fa sapere, intendendo rispetto ai massimi finiti, perchè comprendendo anco gl'infiniti, ella ce ne somministra due. Se $2a^{\frac{1}{3}} = 0$, sarà dunque $a = 0$, e sostituito questo valore nella proposta equazione, sarà essa $\frac{y}{0} = \sqrt[3]{xx}$, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{y^3}{0}}$, e però x, ed y infinite. Due sono i massimi, servendo uno al ramo FG, l'altro al ramo FM, poichè posta $a = 0$, l'equazione ambedue gli esprime.

Nascerà generalmente questo caso ogni qual volta la supposizione di $dy = 0$, o di $dy = \infty$ ci dia un'espressione finita costante, o un divisore costante eguale al zero, il qual valore sostituito nell'equazione proposta non porti o immaginario, o contradizione; e la ragione ne si è, che una quantità finita non può essere presa per zero, se non rispetto a quantità infinita.

ESEMPIO VI.

83. Sia la curva (*Fig.* 54.) dell' equazione $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$, $AB = a$; AC, o $AP = x$; CM, o $PM = y$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aax}{4y^3}$. La supposizione di $dy = o$ ci dà tre valori di x, cioè $x = o$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$; il valore $x = o$ sostituito nella proposta equazione rende $y = o$, il valore $x = a$ rende $y = o$, il valore $x = \frac{1}{2}a$ rende $y = \pm \frac{a}{2}$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà $y = o$, adunque la y â il medesimo valore nell'una, e nell'altra supposizione, quando sia $x = o$, ed $x = a$, quindi i punti A, B saranno punti d'incontro de' rami della curva, ed $x = \frac{1}{2}a = AC$ darà la massima ordinata $y = \pm \frac{1}{2}a = CM$, o Cm. Il luogo del sopra posto esempio può chiamarsi luogo doppio, il quale nasce dall'essere alzata al quadrato l'una, o l'altra delle due semplici formole $ax - xx = yy$, al circolo, o pure $xx - ax = yy$, all' iperbola. Quindi non sarebbe bastato il ridurre l'equazione al semplice circolo, o alla semplice iperbola, ma era necessario aver mira alla complicazione delle dette curve fra loro.

ESEM-

ESEMPIO VII.

84. Sia la curva della *Fig.* 55., la di cui equazione $yy = \frac{aax - 2axx + x^3}{2a - x}$, $AP = x$, $PM = y$, $AD = 2a$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{y \times \overline{2a - x}^2}$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{\overline{a - x}\sqrt{x} \times \overline{2a - x}^{\frac{3}{2}}}$. Prima di andare più avanti osservo, che tanto il numeratore della frazione, quanto il denominatore è divisibile per $a - x$; adunque, e nella supposizione di $dy = 0$, e in quella di $dy = \infty$ si averà $a - x = 0$, cioè $x = a$, che sostituito ci dà $y = 0$, e però la curva avrà un nodo nell'asse al punto B, fatta $AB = a$. Fatta per tanto la divisione, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{\overline{2a - x}\sqrt{2ax - xx}}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà $x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$; il valore $x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$ non serve, perchè sostituito nell'equazione proposta rende immaginaria la ordinata, la quale è generalmente immaginaria, qualora si assuma x maggiore di $2a$, come manifestamente si vede. Sostituito perciò l'altro

valore

valore $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, ci dà $y = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

Fatta adunque $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, saranno PM, PM le massime ordinate, positiva l'una, e negativa l'altra, ed $= \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

La supposizione di $dy = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$; sostituiti questi valori nell'equazione proposta, si averà $y = 0$, ed $y = \infty$; vale a dire, che presa $x = 0$, cioè nel punto A, la tangente sarà parallela alle ordinate PM, e presa $x = 2a = AD$, la ordinata sarà infinita, cioè asintoto della curva rispetto ai rami BH, BI.

ESEMPIO VIII.

85. Sia la Concoide dell'equazione $yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - bx^3 - aabx - aabb}{\pm xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}}$.

Nel primo Libro al num. 239. sono stati da me considerati tre casi di questa curva; il primo quando sia $a = b$; il secondo quando sia b minore di a; ed il terzo quando b sia maggiore di a.

Rispetto al primo caso: la curva sarà quella della Fig.

Fig. 56., e l'equazione $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$, presa $GA = GP = a$, $GE = x$, $EM = y$; e differenziando, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx\sqrt{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}}$. La supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$ ci dà il numeratore eguale al zero, cioè $\overline{x + a} \times \overline{x^3 + a^3} = 0$; e però $x = -a$, il qual valore, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = 0$. La supposizione di $\frac{dy}{dx} = \infty$ ci dà il denominatore eguale al zero, cioè $xx\sqrt{\overline{x + a}^2 \times \overline{aa - xx}} = 0$, e però $x = 0$, $x = -a$, ed $x = a$; ma il valore $x = -a$ si è trovato anche nella supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$, adunque quando sia $x = -a$, cioè presa $GP = a$, la curva averà nel punto P un' incontro di due rami.

Il valore $x = a$ sostituito nell'equazione ci dà $y = 0$, adunque la medesima x sarà $= a = GA$, a cui corrisponde $y = 0$. Il valore $x = 0$ sostituito ci dà $y = \infty$; adunque per lo punto G, in cui $x = 0$, condotta una parallela alle ordinate, toccherà la curva in infinita distanza, vale a dire, sarà un'asintoto.

Rispetto agli altri due casi: (*Fig.* 57. 58.) sia $GA = GK = a$, $GP = b$, ed il resto come sopra. La supposizione di $\frac{dy}{dx} = 0$ ci darà $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$, cioè $\overline{x + b} \times \overline{-x^3 - aab} = 0$, e però $x = -b$, $x = \sqrt[3]{-aab}$.

La

La ſuppoſizione di $dy = \infty$ ci darà

$xx\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb} = 0$, cioè

$xx\sqrt{\overline{x+b}^2 \times \overline{aa - xx}} = 0$, e però $x = 0$, $x = -b$, $x = a$, $x = -a$.

Il valore $x = -b$, che nel ſecondo caſo ſoſtituito nell'equazione rende $y = 0$, ci viene ſomminiſtrato da ambedue le ſuppoſizioni, adunque (*Fig.* 57.) preſa GP dalla parte de' negativi, ed $= -b$, il punto P ſarà un' incontro, o ſia una interſecazione di due rami di curva. Lo ſteſſo valore $x = -b$, ſoſtituito nell' equazione della curva $\pm y = \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa - xx}}{x}$, ci dà nel terzo caſo negativo il radicale, per eſſere b maggiore di a, e però immaginaria la curva, quindi a nulla ſerve.

Il valore $x = \sqrt[3]{-aab}$, ſoſtituito nell'equazione della curva, ci dà $y = \pm\sqrt{\frac{\overline{aa - bb}\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$, cioè immaginaria pure, quando ſia b maggiore di a (*Fig.* 58.), e però ſimilmente a nulla ſerve in queſto terzo caſo; ma ci dà y reale quando ſia b minore di a, e però (*Fig.* 57.), fatta $GI = \sqrt[3]{-aab}$, ſarà IN la maſſima ordinata $y = \pm\sqrt{\frac{\overline{aa - bb}\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$.

Il valore $x = 0$ ci dà $y = \infty$, cioè asintoto; Il valore $x = \pm a$ ci dà $y = 0$, cioè la tangente ne' punti A, K parallela all'ordinate.

ESEMPIO IX.

86. Sia la mezza Cicloide abbreviata AMF (*Fig.* 59.), chiamata $AB = 2a$, $BF = b$, $AP = x$, $PM = z$, la semiperiferìa $ANB = c$, l'arco $AN = q$; sarà $PN = \sqrt{2ax - xx}$, $NM = z - \sqrt{2ax - xx}$, e per la proprietà della curva, è ANB, $BF :: AN$, NM; cioè c, $b :: q$, $NM = \frac{bq}{c}$; dunque $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{2ax - xx}$. Differenziando, $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ma condotta mp infinitamente prossima ad MP, sarà $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, quindi fatta la sostituzione nell'equazione, averemo $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{2ax - xx}}$. La supposizione di $dz = 0$ ci dà $x = \frac{ab}{c} + a$. Se adunque H sia il centro del circolo, presa HE eguale alla quarta proporzionale della semiperiferìa ANB, della retta BF, e del raggio, la corrispondente ordinata sarà la massima, che si cerca.

La

La ſuppoſizione di $dz = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$, vale a dire, che ne' punti A, F la tangente ſarà parallela alle ordinate.

PROBLEMA I.

87. *Dato il rettangolo* ADCB, (Fig. 60.) *ſi dimanda la minima retta* QH, *che ſi poſſa condurre per lo punto* C *nell' angolo* QAH.

Sia $AB = a$, $BC = b$, $BH = x$, ſarà $CH = \sqrt{bb + xx}$, e per i triangoli ſimili HBC, HAQ, averaſſi HB, $HC :: HA$, HQ; cioè x, $\sqrt{bb + xx} :: x + a$, $HQ = \frac{x + a}{x}\sqrt{bb + xx}$. Suppoſta per tanto la $HQ = y$, come ſe foſſe l'ordinata di una curva, onde ſi abbia $y = \frac{x + a}{x}\sqrt{bb + xx}$, e differenziando, ſarà $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - abb}{xx\sqrt{bb + xx}}$. La ſuppoſizione di $dy = 0$ ci darà $x = \sqrt[3]{abb}$, e però fatta $BH = \sqrt[3]{abb}$, e condotta HCQ, ſarà eſſa la minima, che ſi cerca. La ſuppoſizione di $dy = \infty$ ci darà $x = \sqrt{-bb}$ immaginaria, ed $x = 0$, che a nulla ſerve, quando non s'intenda, che la retta condotta per lo punto C, che in queſto caſo ſarebbe BC infinitamente prodotta, sia un massimo, appunto per esser infinita.

In queste tali questioni adunque basterà differenziare quell'espressione, che si vuole essere un massimo, o minimo, ed indi supporre eguale al zero il numeratore, poi il denominatore.

PROBLEMA II.

88. *Divisa la retta* AB (Fig. 61.) *in tre parti date* AC, CF, FB, *si dimanda il punto* E, *in cui devesi tagliare la porzione di mezzo* CF *per modo, che il rettangolo* AE × EB *abbia al rettangolo* CE × EF *la minima ragione possibile.*

Si chiami $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$, e $CE = x$; sarà $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e però sarà il rapporto $\frac{AE \times EB}{CE \times EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, che deve essere un minimo. Il differenziale adunque sarà $\frac{cxxdx - bxxdx - axxdx + 2acxdx - abcdx}{\overline{bx - xx}^2}$, e posto il numeratore eguale al zero, averemo $x = \frac{-ac \pm \sqrt{abcc - abbc - aabc + aacc}}{c - b - a}$. Un valore positivo, che ci dà il punto ricercato E da C verso B, l'altro l'altro negativo, che ci darebbe il punto E da C verso A. Posto il denominatore eguale al zero, averemo $x = 0$, ed $x = b$, ne' quali due casi il rapporto de' rettangoli sarà il massimo, perchè presa $x = 0$, il punto E cade in C; e presa $x = b$, il punto E cade in F, e però sì nell' uno, come nell' altro caso il rettangolo $CE \times EF$ è zero.

PROBLEMA III.

89. *La data retta* AB *si debba tagliare talmente nel punto* C, *che il prodotto* $\overline{AC}^2 \times CB$ *sia il massimo di tutti i prodotti simili.*

Chiamata $AB = a$, $AC = x$, sarà $CB = a - x$, e però $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$. Il differenziale sarà $2axdx - 3xxdx$, il quale paragonato al zero, darà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$. Presa per tanto $AC = x = \frac{2a}{3}$, il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sarà il massimo; e presa $x = 0$, il prodotto sarà in un certo modo il minimo, perchè sarà zero, cadendo il punto C in A. Non essendo la differenziale una frazione, non â luogo l'altra solita supposizione del denominatore eguale a zero, ma se si voglia considerare l'espressione del prodotto $axx - x^3$,

come

come un'ordinata di curva, converrà per la legge degl' omogenei dividere esso prodotto per un piano costante, e così il differenziale sarà una frazione del denominatore costante; ma essa costante non può mai esser zero, se non relativamente alla x assunta infinita, e certamente, che allora il prodotto sarà un massimo, quando sia $AC = x = \infty$.

'O detto, che il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ è un massimo, quando sia $AC = \frac{2a}{3}$, il che chiaramente si vede dal descrivere la curva dell' equazione $\frac{axx - x^3}{aa} = y$, poichè tutte le ordinate tra A, e B sono minori di quella, che corrisponde all'assissa $x = \frac{2a}{3}$. Sostituito nell' equazione l'altro valore $x = 0$, sarà $y = 0$, dal che si conchiude, che esso valore a nulla serve.

90. Nel Problema antecedente, ed in tutti quelli di simil natura si può fare uso di questo metodo per conoscere, se le questioni sono de' Massimi, o de' Minimi.

PROBLEMA IV.

91. *Fra tutti i parallelepipedi eguali ad' un dato cubo, e de' quali sia dato un lato, si dimanda quello, che abbia la minor superficie.*

Il

Il dato cubo ſia a^3, ed il lato cognito del parallelepipedo ſia $= b$, uno de' lati, che ſi cercano, ſia $= x$; il terzo ſarà $= \frac{a^3}{bx}$, poichè il prodotto de' tre, forma il parallelepipedo eguale al dato cubo a^3. I prodotti dei lati preſi a due a due, cioè bx, $\frac{a^3}{x}$, $\frac{a^3}{b}$ formano i tre piani, che ſono la metà della ſuperficie del parallelepipedo, e però la ſomma di queſti, cioè $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ deve eſſere il minimo, che ſi cerca. Differenziando adunque, avremo $bdx - \frac{a^3dx}{xx}$, o ſia $\frac{bxxdx - a^3dx}{xx}$. La ſuppoſizione del numeratore eguale al zero ci dà $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; ſaranno adunque i tre lati del parallelepipedo, che ſi cerca, b, $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, ed $\frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$, cioè $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e però eguali ſaranno i due lati, che ſi cercano. La ſuppoſizione del denominatore eguale al zero a nulla ſerve, perchè ci dà $x = 0$, il che diſtrugge il problema.

Se ſi voleſſe il parallelepipedo con le aſſegnate con-

condizioni, ma senza assumere lato alcuno per dato, chiamatone uno $= x$, sono gl'altri due eguali tra loro, ed $= \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e la somma de' tre piani, che deve essere un minimo, sarà $2x\sqrt{\frac{a^3}{x}} + \frac{a^3}{x}$, e differenziando,

$$\frac{a^3 dx}{x\sqrt{\frac{a^3}{x}}} - \frac{a^3 dx}{xx}, \text{ o sia } \frac{a^3 x dx - a^3 dx\sqrt{\frac{a^3}{x}}}{xx\sqrt{\frac{a^3}{x}}},$$

e fatto il numeratore eguale al zero, si averà $x = a$, e gl'altri due lati parimenti $= a$, ed il cubo stesso sarà il parallelepipedo, che si cerca.

PROBLEMA V.

92. *Fra gl'infiniti coni inscritti in una sfera, determinare quello, la di cui superficie convessa, cioè non compresa la base, sia la massima.*

Nel semicircolo ABD (*Fig. 62.*) sieno i triangoli ABC, AEH, e si giri il semicircolo attorno al diametro AD; nel mentre, che egli descrive la sfera, i triangoli descriveranno tanti coni, ma poichè da Archimede si dimostra, che le superficie de' coni inscritti sono tra loro, come i prodotti $AE \times EH$, $AB \times BC$,

la

la questione si riduce a determinare nel diametro AD il punto C tale, che il prodotto $AB \times BC$ sia il massimo.

Chiamo adunque $AC = x$, $AD = a$; sarà, per la proprietà del circolo, $CB = \sqrt{ax - xx}$, $AB = \sqrt{ax}$, ed $AB \times BC = \sqrt{ax}\sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$. Differenziando adunque, averemo $\frac{2aaxdx - 3axxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}}$, e fatto il numeratore $= 0$, sarà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$; fatto il denominatore $= 0$, sarà $x = a$, ed $x = 0$. Presa adunque $AC = \frac{2}{3} AD$, la superficie del cono descritto dal triangolo ABC sarà la massima, che si cerca. Gl'altri due valori $x = 0$, ed $x = a$ non servono, come è chiaro.

PROBLEMA VI.

93. *Dato l'angolo* FDG, (Fig. 63.) *e dato di posizione il punto* A, *ritrovare la minima retta, che nel dato angolo passi per lo punto* A.

Sia CB quella, che si cerca, e si tiri AQ normale ad FD, FAP normale a DG, e CK normale ad

FP. Poichè è dato l'angolo FDG, e l'angolo FPD è retto, sarà noto l'angolo AFQ, ma è in oltre dato di posizione il punto A, dunque saranno note le QA, QF, FA, QD. Sia per tanto $QF = a$, $QA = c$, $QD = b$, e la $QC = x$, sarà $FA = \sqrt{aa + cc}$, $CA = \sqrt{cc + xx}$, $FD = b + a$, $FC = a - x$. Ma per i triangoli simili FAQ, FDP, è FA, $FQ :: FD$, FP; adunque $FP = \frac{aa + ab}{\sqrt{aa + cc}}$, e però $AP = \frac{ab - cc}{\sqrt{aa + cc}}$; e per i triangoli simili FCK, FAQ, è AF, $FQ :: FC$, FK, adunque $FK = \frac{aa - ax}{\sqrt{aa + cc}}$, onde $AK = \frac{cc + ax}{\sqrt{aa + cc}}$; e finalmente per i triangoli simili ACK, ABP, sarà AK, $CA :: AP$, AB; adunque $AB = \frac{\overline{ab - cc}\sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, e però $CB = \sqrt{cc + xx} + \frac{\overline{ab - cc}\sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, che deve esser la minima. Differenziando sarà

$$\frac{xdx}{\sqrt{cc + xx}} + \frac{xdx \times \overline{ab - cc} \times \overline{cc + ax} - adx \times \overline{ab - cc} \times \overline{cc + xx}}{\overline{cc + ax}^{2} \times \overline{cc + xx}^{\frac{1}{2}}},$$

e posto il numeratore $= 0$, (riducendo prima al comun denominatore) sarà $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \underline{c^4} - bcc = 0$, equazione solida.

Per

Per costruirla prendo l'equazione alla parabola $xx = ay$; fatta la sostituzione, sarà
$xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{c^4}{aa} - \frac{bcc}{a} = 0$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Ciò posto, sulla retta QD si prenda $QM = \frac{2cc}{a}$, e condotta dal punto M parallella ad AQ la retta $MN = \frac{bcc}{aa}$, si tiri NS parallella a QD, e fra gl'asintoti NS, NT si descriva l'iperbola HOV del rettangolo costante $= \frac{2bc^4 + aabcc - ac^4}{a^3}$, e sieno sulla retta QF le x prese dal punto Q; e ad esse normali le y. Indi all'asse AQ, vertice Q, parametro $= a$ si descriva la parabola QO dell'equazione $xx = ay$; dal punto O, in cui la parabola taglia l'iperbola, condotta OC parallela ad AQ, e dal punto C condotta per lo punto A la retta CAB, sarà essa la minima, che si cerca.

Ed in fatti, per la costruzione, è $NS = x + \frac{2cc}{a}$, $SO = y + \frac{bcc}{aa}$, e per la proprietà dell'iperbola, deve essere $NS \times SO =$ al rettangolo costante, dunque
$xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^4}{a^3} = \frac{2bc^4 + aabcc - ac^4}{a^3}$, ma

$CO = y = \frac{xx}{a}$, per la proprietà della parabola, dunque sostituito in luogo di y questo valore, averemo $\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{aa} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^4}{aa}$, cioè

$x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^4}{a} - bcc = 0$, che è l'equazione, da cui si doveva ricavare il valore della x, adunque ec.

'O fatta la supposizione, che sia zero il numeratore della frazione, che esprime il minimo.

L'altra supposizione, che sia zero il denominatore, darà $\overline{cc + ax}^2 \sqrt{cc + xx} = 0$, cioè $\sqrt{cc + xx} = 0$, $cc + ax = 0$; ma $\sqrt{cc + xx} = 0$ ci dà $x = \sqrt{-cc}$ immaginaria, e però non serve; $cc + ax = 0$ ci dà $x = -\frac{cc}{a}$, ma presa $Qc = x = -\frac{cc}{a}$, e condotta Ac, sarà il triangolo QAc simile al triangolo QFA, o sia PFD, e però l'angolo QcA eguale all'angolo FDP; quindi cA sarà parallela alla DP, vale a dire la condotta dal punto c, e per lo punto A nel dato angolo FDG sarà infinita, che in certo modo è un massimo.

Più brevemente ancora si può vedere, che in questo caso la retta, che si cerca, sarà infinita; poichè

nell'

nell' espressione $\sqrt{cc + xx + \frac{ab - cc}{cc + ax}\sqrt{cc + xx}} = CB$, sostituito in luogo di x il valore $-\frac{cc}{a}$, il denominatore diviene zero, e però la linea infinita.

C A P O IV.

De' Flessi contrarj, e de' Regressi.

94. COsa sieno i Flessi contrarj, ed i Regressi, è stato abbastanza detto nel Lib. I. Cap. VI., poste le quali notizie: Sia la curva $ADEM$ (*Fig.* 64.) con le coordinate parallele, la quale abbia in E un flesso contrario, o regresso; presa una qualunque assissa $AB = x$, l'ordinata $BD = y$, e condotta CF parallela, ed infinitamente prossima a BD, egli è manifesto, che assunta $dx = BC$ costante, crescendo sempre più la assissa $AB = x$, la differenza GF dell'ordinata BD, cioè la dy si farà sempre minore fin'a tanto, che l'ordinata sia la HE, che corrisponde al punto del flesso contrario, o del regresso, dopo del qual punto nell'uno, e nell'altro caso la dy anderà sempre facendosi maggiore. Adunque nel punto del flesso contrario, e del regresso la dy sarà un minimo; onde, per lo metodo de' massimi, e minimi, $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$ sarà la formola de' flessi contrarj, e de' regressi.

Se la curva sarà (*Fig.* 65.) prima convessa, e poi concava all' asse AH: crescendo parimente la assissa, cresce la differenza dell' ordinata fino al punto E del

flesso

flesso contrario, o regresso, dopo di cui va calando; sarà adunque in quel punto la dy un massimo, e però isteſsamente si dovrà porre $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curve prima concave all' asse la differenza seconda dell' ordinata y, cioè la ddy è negativa fino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si fa positiva; e nelle curve prima convesse essa differenza seconda è positiva fino al punto E, di poi si fa negativa; ma una quantità qualunque non può da negativa farsi positiva, o da positiva farsi negativa, se non passando per lo zero, o per l'infinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Sia tangente della curva AEM prima concava all' asse (*Fig.* 64.) nel punto D la retta DT, e nel punto E la retta EP; crescendo l'assissa AB, crescerà sempre l'intercetta AT fra la tangente, e l'origine delle assisse fino a tanto, che il punto B cada in H, dopo di che nel caso del flesso contrario crescendo ancora l'assissa, calerà essa intercetta, adunque nel punto E di flesso contrario l'intercetta $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ dovrà essere un massimo, e però differenziando, presa dx costante, $\frac{dy^2 dx - ydxddy - dy^2 dx}{dy^2}$ eguale al zero, o all' infinito,

cioè

cioè riducendo, dividendo per $-ydx$, e moltiplicando per dy^2, sarà finalmente $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$. Nel caso, che il punto E sia di regresso, crescendo l'intercetta AT, crescerà pure l'assissa AB, fino a che il punto T cada in P, e l'assissa sarà AH, oltre il qual punto T l'assissa anderà calando; sarà adunque AH un massimo, e però la sua differenza eguale al zero, o all' infinito, adunque relativamente a tale differenza sarà infinita, o zero la differenza di AP, e però $ddy=\infty$, o pure $ddy=0$, come prima.

Se la curva (*Fig.* 65.) sia prima convessa all' asse, l'intercetta AT sarà $= x - \frac{ydx}{dy}$, e la differenza $\frac{dxdy^2 - dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$, o sia $\frac{ydxddy}{dy^2}$, e però dividendo per ydx, e moltiplicando per dy^2, si avrà nè più, nè meno $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$.

Nella curva DEM, (*Fig.* 66.) essendo A l'origine delle assisse x, ed E il punto del flesso contrario, l'intercetta AP sarà $=AH+HP$, ma in tale caso la sottotangente HP è negativa, vale a dire $-\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà $AP=x-\frac{ydx}{dy}$, onde si vede, che in nessun modo essa intercetta AP potrà essere $x+\frac{ydx}{dy}$.

95. Serve la ritrovata formola per le curve, che

ânno

ânno le ordinate parallele, cioè che sono riferite ad un' asse, o diametro; ma ella è diversa nelle curve riferite al fuoco.

Sia (*Fig.* 67. 68.) la curva ADE, il fuoco Q, da cui partono le ordinate QD, e sia Qd infinitamente prossima alla QD; condotta QT normale a QD, e Qt normale a Qd, si tiri DT tangente della curva nel punto D, e (dt) tangente nel punto d; la Qt prodotta, se fa bisogno, incontrerà DT nel punto o. Ora è chiaro, che crescendo le ordinate, se la curva è concava verso il fuoco Q, (*Fig.* 67.) sarà Qt maggiore di QT; ma se la curva è convessa verso il fuoco Q, (*Fig.* 68.) sarà Qt minore di QT; adunque nel passare la curva da concava ad esser convessa, o vicendevolmente, cioè nel punto del flesso contrario, e regresso, la quantità (ot) dovrà farsi da positiva negativa, o all' opposto, e però dovrà passare per lo zero, o per l'infinito.

Sia pertanto $QD = y$, $DM = dx$, e col centro Q si descrivano gli archi infinitesimi DM, TH; saranno simili i due triangoli dMD, dQT, siccome dQo, THo, e però sarà $dM, MD :: dQ$, o sia DQ, QT, cioè $dy, dx :: y$, $QT = \frac{ydx}{dy}$, ma sono simili pure i due settori DQM, TQH; quindi QD, $DM :: QT$, TH, cioè $y, dx :: \frac{ydx}{dy}$, $TH = \frac{dx^2}{dy}$, e per la similitudine de' triangoli dQo, THo, sarà dQ (o sia DQ), Qo (o sia QT) :: TH, Ho; cioè y, $\frac{ydx}{dy}$ :: $\frac{dx^2}{dy}$, $Ho = \frac{dx^3}{dy^2}$; ma Ht (*Fig.* 67.) è la differenza di QT, cioè $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$, (presa per costante dx) adunque $to = tH + Ho = \frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2}$, che deve essere eguale al zero, o all'infinito, e però anche moltiplicando per dy^2, e dividendo per dx, sarà $dy^2 - yddy + dx^2$ eguale al zero, o all'infinito.

Nella *Fig.* 68. la (ot) viene ad esser negativa, e però $= -\frac{dxdy^2 + ydxddy - dx^3}{dy^2}$, onde dividendo per $-dx$, e moltiplicando per dy^2, sarà $dx^2 + dy^2 - yddy$ eguale al zero, o all'infinito.

Se per tanto una curva qualunque riferita al fuoco Q, (*Fig.* 69.) le di cui ordinate $QB = y$, e gli archetti $BC = dx$, averà un flesso contrario, o regresso, la formola generale per determinarlo sarà $dy^2 + dx^2 - yddy = o$, o pure $dy^2 + dx^2 - yddy = \infty$.

Se si supponga y infinita, nella formola $dx^2 + dy^2 - yddy$ saranno nulli i primi due termini rispetto al terzo, e però sarà $-yddy$ eguale al zero, o all'infinito, e dividendo per $-y$, averemo $ddy = o$, o $ddy = \infty$,

cioè

cioè la formola del primo caso delle curve riferite al diametro, come appunto deve succedere; perchè, supposta y infinita, le ordinate sono tra loro parallele.

96. Data la natura della curva, per mezzo di un' equazione, e supposta dx costante, differenziando due volte, se l'equazione è algebraica; una sola, se è differenziale del primo grado, a fine di avere il valore della ddy dato per dx, questo paragonato al zero, indi all'infinito ci fornirà i valori dell'assissa x, ai quali corrisponde l'ordinata y, che incontra la curva ne' punti di flesso contrario o regresso, se però, posti tali valori in luogo di x nell'equazione della curva, si abbia la y reale, che se la y sarà immaginaria, o involverà contradizione, la curva non avrà tali punti.

97. Per distinguere i flessi contrarj dai regressi, giacchè il metodo ci dà confusamente gl'uni, e gl'altri, basterà vedere a un di presso l'andamento della curva, e questo ci darà il lume necessario per determinarli.

98. Un' altra sorta di regresso possono avere le curve diversa da quella, che ora si è considerata, ed è quando la curva ritorna indietro verso la sua origine rivoltando la sua concavità a quella stessa parte, a cui la rivolgeva prima del regresso. Dopo aver trattato de' Raggi Osculatori, darò alla fine del seguente Ca-

po la formola generale anche per i regressi di questa seconda sorta.

ESEMPIO I.

99. Sia (*Fig.* 51.) la parabola cubica dell' equazione $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, che si è veduto nell' Esempio V. del Capo antecedente num. 81. avere un punto d' incontro. Differenziando è adunque $dy = -\frac{2aadx + 2axdx}{3 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}}}$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, sarà

$$ddy = -\frac{2adx^2}{9 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}}}.$$

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $-2adx^2 = 0$, il che non serve; fatta adunque la supposizione di $ddy = \infty$, sarà $9 \times \overline{a^3 - 2aax + axx}^{\frac{2}{3}} = 0$, cioè $aa - 2ax + xx = 0$, e però $x = a$. Sostituito, in luogo di x, questo valore nella proposta equazione, sarà $y = a$, adunque la curva à un flesso contrario, o regresso, che corrisponde alla assissa $x = a$, alla quale compete l' ordinata $y = a$, e perchè si sa altronde, essere pure questo

un

un punto d'incontro, non potrà dunque essere un flesso contrario, ma bensì un regresso.

Sia la stessa parabola cubica, ma prese le assisse $AB = x$ dal vertice A, (*Fig.* 70.) e BC le y. L'equazione è $axx = y^3$, e differenziando $2axdx = 3yydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, $ddy = -\frac{6ydy^2 + 2adx^2}{3yy}$; ma per l'equazione, si â $3yy = 3x\sqrt[3]{aax}$, e per la prima differenziazione, $dy = \frac{2axdx}{3x\sqrt[3]{aax}}$, adunque fatte le sostituzioni, sarà $ddy = -\frac{2adx^2}{9x\sqrt[3]{aax}}$.

La supposizione di $ddy = 0$ non serve; la supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $9x\sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$, il qual valore sostituito nell'equazione rende $y = 0$, adunque la curva â un regresso nel vertice A.

ESEMPIO II.

100. Sia la versiera DFM, (*Fig.* 71.) la di cui equazione $y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.

Diffe-

Differenziando, $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = \frac{3a^3\,dx^2 - 4aaxdx^2}{4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$.

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $3a^3 - 4aax = 0$, cioè $x = \frac{3a}{4}$, il qual valore sostituito nell'equazione della curva rende $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, onde presa $AB = \frac{3}{4}a$, la ordinata $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ incontrerà la curva nel punto F, che sarà un flesso contrario. La supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = a$, il primo valore sostituito nell' equazione rende $y = \infty$, il secondo $y = 0$; ma nè l'uno, nè l'altro caso porta flesso contrario, e porta solo, che sì l'asintoto AQ, come la tangente nel punto D è parallela alle ordinate.

ESEMPIO III.

101. Sia (*Fig.* 72. 73., e 74.) la Cicloide dell' equazione $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx-xx}}$ num. 47. Differenziando

ziando, sarà $ddz = \frac{\overline{arx - arr - brr} \times dx^2}{b \times \overline{2rx - xx}^{\frac{3}{2}}}$.

La supposizione di $ddz = 0$ ci dà $arx - arr - brr = 0$, cioè $x = r + \frac{br}{a}$. Se a sia maggiore di b, la cicloide sarà l'allongata; onde, presa CE dal centro eguale alla quarta proporzionale di BF, del semicircolo, e del raggio, e condotta l'ordinata ED, (*Fig.* 73.) incontrerà essa la curva nel punto del flesso contrario D. Se sia a minore di b, (*Fig.* 74.) la cicloide sarà la raccorciata; ma quando $a < b$, la $x = r + \frac{br}{a}$ sarà maggiore di $2r$, cioè maggiore di AB, nel qual caso le ordinate sono immaginarie, perchè non vi è curva al di sotto del punto F, adunque la curva non â flessi contrarj, nè regressi. Se sia $a = b$, la cicloide sarà l'ordinaria, (*Fig.* 72.) e però $x = r + \frac{br}{a} = 2r = AB$, ed $y = BF$, il che non ci dà flesso contrario, o regresso; ma bensì ci fa sapere, che la tangente in F sarà parallela alle assisse, o sia al diametro AB.

La supposizione di $ddz = \infty$ ci dà $b\sqrt{\overline{2rx - xx}^{\frac{3}{2}}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = 2r$. Il valore $x = 0$ in tutti tre i casi ci dà la tangente nel punto A parallela alle ordinate. Il valore $x = 2r$ nel primo, e secondo caso ci dà dà la tangente nel punto F istessamente parallela alle ordinate; ma nel terzo caso ci dà una contradizione, poichè essendo l'equazione $dz = \frac{dx\sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$, sostituito in luogo di x il valore $2r$, sarà $dz = 0$, ma non può essere $dz = 0$, e assieme $ddz = \infty$, adunque tale valore a nulla serve in questo caso.

ESEMPIO IV.

102. Sia la Concoide di Nicomede di sopra considerata al num. 85., la di cui equazione è $yy = \frac{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb}{xx}$, o sia $y = \frac{\overline{b + x}\sqrt{aa - xx}}{x}$. Differenziando, sarà $dy = \frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = \frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx}{x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}} \times dx^2$.

A riguardo de' tre soliti casi, che può avere questa curva, comincio dal primo quando $a = b$. (*Fig.* 56.) Ciò posto, sarà $ddy = \frac{2a^5 - aax^3 - 3a^3xx}{x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}} \times dx^2$.

La

La supposizione di $ddy = o$ ci dà $2a^3 - aax^3 - 3a^3xx = o$, cioè $x^3 + 3axx - 2a^3 = o$, e risolvendo l'equazione, $x = \sqrt{3aa} - a$, $x = -\sqrt{3aa} - a$, $x = -a$; il primo valore ci dà l'assissa $GE = x = \sqrt{3aa} - a$, a cui compete l'ordinata $EM = y = \frac{\sqrt{3aa}\sqrt{2a\sqrt{3aa} - 3aa}}{\sqrt{3aa} - a}$, che incontra la curva nel punto M del flesso contrario; il secondo valore a nulla serve, perchè rende l'equazione della curva immaginaria; il terzo ci dà un regresso nel punto P.

Riguardo agli altri due casi, la supposizione di $ddy = o$ ci dà $2aab - x^3 - 3bxx = o$, o sia $x^3 + 3bxx - 2aab = o$. Per avere adunque le radici di quest' equazione, pongo $xx = bz$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $xz + 3bz - 2aa = o$, all' iperbola.

Fra gli asintoti AQ, AD, fatta $AC = 2a$, CN normale $= a$, $AD = 3b$, e prese sull' asintoto AD dal punto D le x, si descriva (*Fig.* 75.) l' iperbola GNF del rettangolo costante $= 2aa$, passerà essa per lo punto N; indi alzata DM normale alla DA, all' asse DM, vertice D, parametro $= b$, si descriva la parabola dell' equazione $xx = bz$.

Se adunque si assuma b maggiore di a, poichè $AD = 3b$, $AC = 2a$, sarà CD maggiore di b, ora presa nella parabola la assissa $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, ma se a è minore di b, sarà anco $\sqrt{ab}$ minore di b, e però anco minore di CD; adunque la parabola taglierà l'iperbola tra N, e D nel punto, per esempio, I.

Ciò posto, se si assuma $x = -a$, sarà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{-a+3b}$, ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di $\frac{2aa}{-a+3b}$, dunque la parabola taglia l'iperbola nel punto I tale, che sarà $HI = -x$ minore di a, e però questa assissa averà nella concoide (*Fig.* 58.) la ordinata reale, che ci determina il flesso contrario nel punto, per esempio N, del ramo inferiore KN. La GM condotta dal punto G, altra intersecazione della parabola, e dell'iperbola, sarà necessariamente maggiore di a, e però a tale assissa non corrisponde nella concoide ordinata alcuna reale, onde questo valore a nulla serve. Finalmente il terzo valore TF ci darà l'assissa, a cui compete l'ordinata nel ramo superiore, che incontra la curva nel flesso contrario M.

Sia b minore di a, sarà (*Fig.* 76.) CD minore di b, e presa nella parabola la $z = a = CN$, l'ordinata sarà $x = \sqrt{ab}$, cioè maggiore di b, e però maggiore di CD, adunque la parabola passerà tra N, e C, quindi o non taglierà essa l'iperbola, e i due valori negativi della x

nell'

nell' equazione $x^3 + 3bxx - 2aab = 0$ saranno immaginarj; o se la taglia, saranno essi sempre maggiori di a, ai quali nella concoide (*Fig.* 57.) corrispondono ordinate immaginarie, e però a nulla servono. Taglierà però la parabola certamente l'iperbola dalla parte de' positivi nel punto, per esempio F; quindi la TF, che è minore di a, sarà il valore della x, a cui corrisponde l'ordinata nel ramo AM della concoide, che l'incontra nel punto del flesso contrario M.

Dissi, che se la parabola taglia l'iperbola tra N, ed O, i due valori negativi della x saranno maggiori di a; imperciocchè, presa $x = -a$ nella parabola, sarà $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b - a}$, ma $\frac{aa}{b}$ è minore di $\frac{2aa}{3b - a}$; dunque fino a tanto, che x negativa non sia maggiore di a, la parabola non taglierà l'iperbola, dunque la taglierà in un punto, in cui essa x sarà maggiore di a. Presa x positiva $= a$, sarà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b + a}$; ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di $\frac{2aa}{3b + a}$, dunque la parabola taglierà l'iperbola in un punto F tale, che sarà TF minore di a.

La supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $x^3 \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = \pm a$; vale a dire, che l'asintoto, e la tangente in A sono parallele alle ordinate in tutti tre i casi, siccome la tangente in K nel secondo, e terzo caso; e nel primo, che in P vi è un punto d'incontro (come appunto portano i regressi) per esserci stato somministrato lo stesso valore $x = -a$ anche dalla supposizione di $ddy = 0$; il quale punto d'incontro si è trovato pure al num. 85.

103. In altro modo. Prendo la stessa Curva Concoide, ma con le ordinate tutte, che partano da un punto fisso, cioè dal polo P.

Sia adunque $PM = y$, (*Fig.* 56. 57., e 58.) e condotta PF infinitamente prossima a PM, e col centro P descritti gl' archetti MB, DH, sia $MB = dx$, $AG = a$, $GP = b$, e chiamata $PD = z$, $HO = dz$, per la proprietà della curva, sarà l'equazione $y = z \pm a$, cioè $y = z + a$ rispetto alla curva superiore al di sopra dell'asintoto GR, ed $y = z - a$ rispetto alla curva inferiore. Differenziando adunque nell'uno, e nell'altro caso, sarà $dy = dz$. Per la similitudine de' triangoli PGD, DHO (giacchè gl'angoli GDP, DOH non differiscono, se non per l'angolo infinitesimo DPH, e gl'angoli H, G sono retti) si averà $PG, GD :: DH, HO$; cioè $b, \sqrt{zz - bb} :: \frac{zdx}{y}, dz$, e però $dz = \frac{zdx\sqrt{zz-bb}}{by}$,

ma

ma $dz = dy$, dunque $dy = \frac{zdx\sqrt{zz-bb}}{by}$; e differenziando, presa dx costante,

$$ddy = \frac{2byzz - b^3y - bz^3 + b^3z \times dxdz}{bbyy\sqrt{zz-bb}},$$ mettendo dz

in luogo di dy, e posto il valore di dz, averemo

$$ddy = \frac{2yz^3 - bbyz - z^4 + bbzz \times dx^2}{bby^3},$$ e finalmente,

surrogato il valore di $y = z \pm a$, sarà

$$ddy = \frac{z^4 \pm 2az^3 \mp abbz \times dx^2}{bb \times \overline{z \pm a}^3}.$$

La formola delle curve riferite al fuoco si è veduto, essere $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, o pure $= \infty$; adunque, posti i valori di y, di dy, e di ddy, sarà

$$\frac{aabb \pm 3abbz \mp 2az^3 \times dx^2}{bb \times \overline{z \pm a}^2} = 0,$$ o pure $= \infty$. La supposizione della formola eguale al zero ci dà $abb \pm 3bbz \mp 2z^3 = 0$.

Sia in primo luogo $a = b$, e si voglia considerare il ramo superiore, sarà $z^3 - \frac{3aaz}{2} - \frac{a^3}{2} = 0$, ed i tre valori di z sono $z = -a$, $z = \frac{a - \sqrt{3aa}}{2}$, $z = \frac{a + \sqrt{3aa}}{2}$,

ma

ma è $y = z + a$, dunque sarà $y = 0$, $y = \frac{3a + \sqrt{3aa}}{2}$, $y = \frac{3a - \sqrt{3aa}}{2}$. Il terzo valore a nulla serve, perchè ci dà l'ordinata y minore di $2a$, dove non è curva; il secondo ci dà la ordinata y, che incontra la curva nel punto del flesso contrario, per esempio M; il primo ci viene somministrato anco considerando il ramo inferiore, e determina il punto P di regresso, ed infatti rispetto al ramo inferiore sarà $z^3 - \frac{3aaz}{2} + \frac{a^3}{2} = 0$, cioè i tre valori $z = a$, $z = -\frac{a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; ma in questo caso $y = z - a$, dunque averemo $y = 0$, $y = -\frac{3a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; i due ultimi valori a nulla servono, che ci danno y negativa, dove non è curva.

Riguardo agli altri due casi (*Fig.* 57. 58.) sarà $z^3 - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$. Per avere le radici di questa equazione, pongo $zz = \frac{bp}{2}$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo all'iperbola $pz - 3bz = \pm ab$, cioè positivo l'omogeneo di comparazione rispetto al ramo superiore, e negativo rispetto all'inferiore. Fra gli asintoti PQ, MN normali in A, si descrivano le opposte iperbole (*Fig.* 77.) negli

gli angoli PAN, MAQ, se l'omogeneo di comparazione è positivo, e negli angoli PAM, NAQ, se è negativo; e supposta b maggiore di a, sia $AB = b$, $BC = a$: passeranno l'iperbole per i punti C; e presa $AM = 3b$, dal punto M sull'asintoto MN sieno le p, indi al vertice M, asse MN, parametro $\frac{b}{2}$ si descriva la parabola EMD dell'equazione $zz = \frac{bp}{2}$. Poichè presa $p = Mb = 2b$, la ordinata nella parabola è $z = b$ maggiore di a, cioè di (bc), passerà essa parabola al di fuori de' punti C, e taglierà l'iperbole DC, CT ne' punti D, T, I, da' quali condotte parallele all'asintoto QP le rette DH, TV, IO, saranno esse le tre radici della z nell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, cioè rispetto al ramo superiore della concoide; ma $y = z + a$, dunque $DH + a$ sarà la ordinata y, che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio M. (*Fig.* 58.) L'altre due radici VT, OI a nulla servono, perchè essendo negative, ad VT aggiunta a, la differenza, cioè y sarà negativa, e ad OI aggiunta a, la differenza sarà positiva, ma minore di a; ed alla y negativa, o minore di a non corrisponde in questo caso curva. Rispetto al ramo inferiore della concoide, cioè nell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$ le tre radici saranno OG, VK, HE, ma se dalla prima, ma, e dalla terza si sottragga a per avere la y, la differenza sarà negativa, cioè y negativa, a cui non corrisponde curva, e però a nulla servono; se dalla seconda VK si sottragga a, la differenza LK sarà la ordinata y, che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio, N.

Supposta b minore di a, la parabola passerà tra i punti c, C dell'iperbole GcK, ICT, e però i due valori negativi di z dell'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, aggiungendo la a, daranno y minore di a, a cui non corrisponde curva; il terzo, aggiunta la a, darà la y, che incontrerà la curva nel flesso contrario, per esempio, M (*Fig.* 57.).

Rispetto al ramo inferiore, cioè all'equazione $z^3 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, dalle due radici positive, che sono minori di b, sottratta a, e sottratta pure dalla radice negativa, averemo sempre y negativa maggiore di PK, a cui non corrisponde curva, e però il ramo inferiore della concoide quando b è minore di a, non â nè flessi contrarj, nè regressi.

La supposizione della formola $= \infty$ ci dà in tutti tre i casi $z = \mp a$, e però $y = 0$; nella *Fig.* 58. a nulla serve il valore $y = 0$, perchè non è in curva; nelle *Fig.* 56. 57.

ci

ci dà la tangente in P, che è assieme punto di regresso nella *Fig.* 56., ma non già nella *Fig.* 57.

ESEMPIO V.

104. Sia il circolo AED descritto col centro B (*Fig.* 78.), e sia una curva AFK tale, che condotto un qualunque raggio BFE, sia sempre il quadrato FE eguale al rettangolo del corrispondente arco AE in una data retta b, e si voglia il flesso contrario della curva AFK.

Si chiami l'arco $AE = z$, $BA = BE = a$, $BF = y$, ed $FG = dx$, fatta Be infinitamente prossima a BE, e descritto col centro B, raggio BF l'archetto FG; per la natura della curva sarà $bz = aa - 2ay + yy$, e però differenziando, $bdz = -2ady + 2ydy$, onde $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b} = Ee$.

Ma per i settori simili BEe, BFG, sarà BE, BF :: Ee, FG, cioè a, y :: $\frac{2ydy - 2ady}{b}$, dx, dunque $dx = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$, e differenziando, presa dx costante, $4ydy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy = 0$, onde $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$.

Nella

Nella formola generale delle curve riferite al fuoco $dx^2 + dy^2 - yddy$ si sostituiscano i valori di dx^2, e di $yddy$ dati per dy, ed averemo

$$\frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb} - \frac{ady^2 + ydy^2}{y - a},$$

cioè, riducendo al comun denominatore,

$$\frac{4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb}{aabb \times \overline{y - a}}$$ eguale al zero, o all'infinito. Costruita per tanto l'equazione, una delle radici ci darà il valore dell'ordinata y, che incontra la curva nel punto del flesso contrario.

CAPO V.

Delle Evolute, e de' Raggi Oſculatori.

105. Sia la Curva *BDF* (*Fig.* 79.) inviluppata dal filo *ABDF*, cioè eſſendo il filo fiſſo nel punto immobile *F* per un' eſtremità, s'intenda diſteſo ſopra la curva *BDF*, e la porzione *AB* cada ſulla tangente *AR* della curva nel punto *B*. Si muova il filo per l'eſtremità *A* ſviluppando la curva, ma in maniera, che ſia ſempre teſo, ed incapace di diſtrazione: il punto *A* deſcriverà con queſto moto la curva *AHK*.

La curva *BDF* ſi chiama l'evoluta della curva *AHK*, come è ſtato detto anche di ſopra al num. 16., e la curva *AHK* diceſi la generata dallo ſviluppo della *BDF*, e le porzioni *AB*, *HD*, *KF* del filo ſi dicono raggi dell'evoluta, o raggi oſculatori.

106. Poichè la lunghezza del filo *ABDF* è ſempre la ſteſſa, ne viene, che la differenza de' raggi oſculatori *AB*, *HD* ſarà eguale alla porzione *BD* della curva; ſiccome l'altra porzione *DF* è eguale alla differenza de' raggi *HD*, *KF*, e la curva intiera *BDF* eguale alla differenza de' raggi *AB*, *KF*; e ſe il raggio *AB* foſſe nullo, cioè, ſe il punto *A* cadeſſe in *B*, ſarebbe il raggio *HD* eguale alla porzione *BD*, ed il raggio *FK* a tutta la curva *BDF*.

107. Dalla generazione della curva AHK per lo ſviluppo del filo chiaramente ſi vede, che ciaſcun raggio HD, KF nelle ſue eſtremità D, F tocca l'evoluta BDF.

108. L'arco HK della curva AHK ſia infiniteſimo, ſarà pure infiniteſimo l'arco DF dell'evoluta, e poichè ò dimoſtrato nel corollario 4. del primo Teor. num. 6., che un qualunque archetto infiniteſimo di curva à le ſteſſe proprietà dell'arco di circolo; e nel Teorema 4. num. 15., che prodotto il raggio HD, ſicchè incontri in S il raggio KF, ſono SH, SK diverſe tra loro ſolo per una quantità infiniteſima del terzo grado, ſi poſſono dunque prendere per eguali SH, SK; e però ſono eſſe perpendicolari alla curva AHK ne' punti H, K. Ma le due HD, HS differiſcono tra loro della DS infiniteſima del primo ordine, ed è HD finita, dunque ſi potranno aſſumere per eguali; quindi per determinare un qualunque punto D nella curva evoluta, vale a dire, per determinare la lunghezza di un qualunque raggio oſculatore HD, baſterà, che data di poſizione la perpendicolare HS della curva data AHK, (il che ſi à dal metodo delle tangenti) ſi determini il punto S, in cui eſſa ſi taglia con la perpendicolare infinitamente proſſima KS. Ciò faraſſi nel ſeguente modo.

109. Sia in primo luogo la curva $DABE$ (*Fig.*80.) riferita agli aſſi; i due archetti infiniteſimi AB, BE, la perpendicolare BQ, e l'altra EQ, che la incontri nel

ricer-

ricercato punto Q. Chiamate al solito $DH = x$, $HA = y$, e condotte AF, BG parallele a DM, e la corda $PABC$, che incontri ME prodotta in C, e condotta l'altra corda EBR; e col centro B, intervalli BE, BP, descritti gli archetti ES, PO, sarà $AF = dx$, $FB = dy$, $AB = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; ma per lo Corollario 2. del Teorema 5. num. 19. sono simili i settori QBE, BES; dunque averemo QB, $BE :: BE$, ES, cioè QB, $ds :: ds$, ES, (chiamando ds l'elemento della curva) e però $QB = \frac{ds^2}{ES}$. Ora poichè l'archetto PO si può prendere per il suo seno retto, (Corollario 1. del Teor. 3. num. 9.) saranno simili i triangoli RPO, BEG, e però BE, $EG :: RP$, PO, cioè ds, $dy :: RP$, $PO = \frac{RP\,dy}{ds}$; ma sono pure simili i settori BPO, BES, e però sarà BP, $PO :: BE$, ES, cioè $\frac{yds}{dy}$, $\frac{RP\,dy}{ds} :: ds$, $ES = \frac{RP \times dy^2}{yds}$, e finalmente $QB = \frac{yds^3}{RP \times dy^2}$, formola generale de' raggi osculatori, in cui nulla altro rimane da farsi, che sostituire il valore della RP, differenza della $DP = \frac{ydx}{dy} - x$, secondo la diversa ipotesi della flussione prima, che si prende per costante.

Se nessuna flussione prima si assuma per costante, sarà $RP = \frac{ydyddx - ydxddy}{dy^2}$, e però $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$

Se

Se si assuma costante dx, sarà $RP = -\frac{ydxddy}{dy^2}$, e però $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

Se si assuma costante dy, sarà $RP = \frac{yddx}{dy}$, e però $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$.

Se si assuma costante ds, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, sarà $dxddx + dyddy = 0$, e $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$, quindi $RP = \frac{yddx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy^3}$, e però $QB = \frac{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{ddx}$, o pure surrogato il valore di ddx, $QB = \frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-ddy}$. Adunque nell'espressione di $QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, in cui nessuna flussione è presa costante, basterà cancellare il termine ddx nella supposizione di dx costante; cancellare il termine ddy nella supposizione di dy costante; e porre in luogo di $-ddy$ il valore $\frac{dxddx}{dy}$ nella supposizione di ds costante.

110. Può la curva essere riferita ad un diametro, vale a dire con le coordinate tra loro in angolo obbli-

bliquo. Sia DV l'affiffa $= x$, $VK = dx$, VA l'ordinata $= y$, ed il rimanente, come fopra. Poichè è noto l'angolo DKB, farà noto l'angolo BNF, e nota la ragione de' lati tra loro nel triangolo BNF, quindi effendo $NB = dy$, farà data NF, ed FB, ed in confeguenza AB, o fia ds. Ma il triangolo RPO è fimile al triangolo ABF, poichè gli angoli in O, ed F fono retti, e l'angolo ORP non è diverfo dall'angolo FAB, che per l'angolo infinitefimo RBP; adunque faranno date RP, PO, ed indi ES, e finalmente QB.

111. Dall'eftremità del raggio ofculatore BQ fi tiri QT parallela all'affe DM, che incontra in T l'ordinata BI prodotta, la retta BT chiamafi *Sottofculatrice*, o *Co-raggio*. Dato il raggio BQ, è pure ifteffamente fempre dato il co-raggio BT, perchè dal metodo delle tangenti è data la normale Bm della curva, e però dalla fimilitudine de' triangoli BmI, BQT farà data BT.

Ma fe fi voglia l'efpreffione del co-raggio independentemente dal raggio, fi chiami $BT = z$. Il triangolo BTQ è fimile al triangolo BGC, o fia BAF, perchè effendo retti i due angoli TBG, QBC, tolto il comune QBG, rimarranno eguali TBQ, CBG, e fono retti T, e G; adunque farà $dx, ds :: z, BQ = \frac{z\,ds}{dx} = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Ma per lo Teorema 4. num. 15., BQ è eguale ad EQ, perchè non differifcono tra di loro, fe non per una

quan-

quantità infinitesima del terzo grado, adunque sarà nulla la differenza di QB, e però differenziando, senza assumere flussione costante,

$$\frac{dxdz \times \overline{dx^2 + dy^2} + zdx^2 ddx + zdxdyddy - zddx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$$

ma $dz = dy$, perchè è la stessa la differenza di TB, e di IB; dunque $z = \frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dyddx - dxddy} = BT$, formola del co-raggio, in cui nessuna flussione è stata assunta costante. Se sia dx costante, il termine $dyddx$ sarà nullo, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = BT$.

Se sia costante dy, sarà nullo il termine $-dxddy$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dyddx} = BT$.

Se sia costante l'elemento della curva, sarà $-ddy = \frac{dxddx}{dy}$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dxdy}{ddx} = BT$, surrogato il valore di ddy; o pure $\frac{dx^2}{-ddy} = BT$, surrogato il valore di ddx.

Dato il co-raggio, per la similitudine de' triangoli BmI, BQT, sarà similmente dato il raggio QB.

112. Se le coordinate saranno tra loro in angolo obbliquo, nell' analogia dx, $ds :: z$, BQ in luogo delle

delle dx, e ds, basterà porre i rispettivi valori, che in questo caso convengono alle AF, AB, e fare il rimanente, come sopra, e si averà la formola del coraggio BT nel caso, che le coordinate sieno in angolo obbliquo.

113. In diverse altre maniere si può avere la stessa formola del raggio osculatore. Col centro Q, intervallo Qm si descriva l'archetto (mn). Assumendo l'archetto infinitesimo (mn) per la tangente in n, saranno simili i due triangoli BCG, (mnq), e però BC, BG :: (mq), (mn); cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dx :: (mq), $(mn) = \frac{(mq) \times dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma (mq) è la differenza di Dm, cioè della sottonormale Im con l'assissa DI, o sia DH, cioè di $x + \frac{ydy}{dx}$; adunque differenziando nell'ipotesi di nessuna flussione costante, sarà

$(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, adunque

$(mn) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma per i settori simili Qmn, QBE, sarà $BE - (mn)$, BE :: Bm $\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right)$, QB, cioè sostituiti i valori analitici,

$QB = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, la qual formola modificata secondo la suppofizione di una flussione costante ci darà l' espressione del raggio QB, che a tale suppofizione corrisponde.

114. In altro modo ancora.

Si produca EM in t, BG in L. Poichè il triangolo EGL è simile al triangolo BIm, essendo gl' angoli GEL, IBm diversi fra loro del solo angolo infinitesimo BQE, sarà $GL = \frac{dy^2}{dx}$, e però $BL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$,

ma si è veduto, essere $(mq) = \frac{dx^3 + ydxddy + dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$,

ed i triangoli simili QBL, Qmq ci danno $BL - (mq)$, $BL :: Bm$, BQ; dunque sostituiti i valori analitici, averemo $BQ = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$.

115. Prendansi ora le curve riferite al fuoco: e però sia (*Fig.* 81.) la curva BEG, il fuoco A; e presi due archetti infinitesimi BE, EG, e condotte le ordinate AB, AE, AG, col centro A si descrivano gl' archetti BC, EF, ed alle corde GE, EB prodotte sieno perpendicolari AI, AD, e finalmente la corda DE prodotta incontri in L l' ordinata AG, e col centro E si descriva l' archetto GR. Sia $AB = y$, $CE = dy$, $BC = dx$, $AD = p$. Col centro A descritto l' archetto DH, sarà $HI = dp$, ma HM è quantità infinitesima

de l

del secondo grado; (Teor. 3. num. 8.) dunque si potranno prendere per eguali HI, IM, e però sarà $MI = dp$. La similitudine de' triangoli EBC, EAD ci dà $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$, per esser diversa solo per un' infinitesimo, ed assumendo l'archetto GR per la sua tangente, sono simili i triangoli EIM, EGR, quindi $GR = \frac{dpds^2}{ydy}$; ma condotte EQ, QG normali alla curva ne' punti E, G, sono simili i settori QEG, EGR, dunque $QE = \frac{ydy}{dp}$. I triangoli simili EBC, EAD ci danno $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; e però differenziando, senza prendere costante alcuna,

$$dp = \frac{\overline{y\,ddx + dxdy} \times \overline{dx^2 + dy^2} - \overline{dxddx - dyddy} \times ydx}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}},$$

cioè $dp = \frac{dx^3dy + ydy^2ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}$, onde sostituito questo valore in luogo di dp nell' espressione di QE, sarà $QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + ydyddx + dxdy^3 - ydxddy}$, formola generale del raggio osculatore per le curve riferite al fuoco, presa nessuna flussione costante.

Se si voglia costante dx, preso il valore di dp in questa ipotesi, e sostituito; o pure senz' altro cancellato nella formola generale il termine $ydyddx$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}.$$

Se si voglia costante dy, cancellato nella formola generale il termine $-ydxddy$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx}.$$

E finalmente presa per costante ds, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, averemo $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, e surrogato in luogo di ddx questo valore nella formola generale, sarà

$QE = \frac{ydx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}$, o pure surrogato il valore di ddy,

$$QE = \frac{ydy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy + yddx}.$$

116. Se in ciascheduna di queste formole si supporrà la y infinita, svaniranno tutti que' termini, ne' quali essa non si ritrova, e le formole saranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite agli assi, il che deve appunto succedere, poichè se la y è infinita, il punto A sarà infinitamente lontano, e però parallele le ordinate.

117.

117. In altra maniera. All' archetto EG infinitesimo sia tangente ER nel punto E, (*Fig.* 82.) e sieno QE, QG due raggi osculatori, e si produca QG in R. Dal fuoco A si tiri AN normale a QG, ed AK normale a QE, e sia $EK = t$, sarà $KM = dt$. Poichè il triangolo AKM è simile al triangolo QNM, e questo è simile al triangolo QER, sarà $QE, ER :: AK, KM$, cioè $QE, ER :: AK, dt$; ma per i triangoli ELC, o sia EGC, EAK simili, è $AK = \frac{ydy}{ds}$, ed ER si può assumere per EG, dunque sarà $QE, ds :: \frac{ydy}{ds}, dt$, e però $QE = \frac{ydy}{dt}$, ma $EK = t = \frac{ydx}{ds}$, dunque fatto il rimanente, come sopra, cioè preso differenziando il valore di dt, e sostituito nell' espressione di QE, si averanno le stesse formole.

118. Fatta QP normale ad EA prodotta in P, saranno simili i triangoli EAK, EQP, e però $EA, EK :: EQ, EP$; ma si è veduto, essere $EQ = \frac{ydy}{dt}$, dunque $y, t :: \frac{ydy}{dt}, EP = \frac{tdy}{dt}$, e surrogato in luogo di t il valore $\frac{ydx}{ds}$, ed in luogo di dt il differenziale

$$\frac{dx^2dy + ydy^2ddx + dxdy^3 - ydxdyddy}{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}$$, senza assumere

flus-

flussione costante, sarà $EP =$

$$\frac{ydxds^2}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy} = \frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy},$$

formola generale del co-raggio, in cui nessuna flussione è presa costante, dalla quale modificata si ricavano le altre, che alle supposizioni di differenziale costante corrispondono, e se in queste si supporrà la y infinita, cioè, se si cancelleranno que' termini, ne' quali essa non trovasi, si averanno le stesse formole, che si sono ritrovate per le curve riferite agl'assi.

119. Poichè, qualunque siasi la curva, si ritrova una sola espressione del raggio osculatore, e del co-raggio sì nelle curve riferite agl'assi, come in quelle riferite al fuoco, ne viene, che qualunque curva non potrà avere, che una sola evoluta.

120. Data adunque, per mezzo di un' equazione qualunque, la curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o co-raggio; converrà differenziare l'equazione a fine di avere i valori di dy, dy^2, e ddy dati per dx, o di dx ec. dati per dy, e sostituirli nelle ritrovate formole, con che si averà l'espressione in termini finiti, e affatto liberi dai differenziali, del raggio osculatore, o co-raggio della proposta curva.

121. Se il valore del raggio osculatore, o del co-raggio sarà positivo, dovranno essi prendersi dalla par-

te

te dell'asse DM, (*Fig.* 80.) o del fuoco A (*Fig.* 81.), come ô fin'ora supposto, e la curva sarà concava a quest'asse, o fuoco; ma se sarà negativo, dovranno essi prendersi dalla parte opposta, ed in questo caso la curva sarà convessa. Da ciò ne segue, che nel punto del flesso contrario, o regresso, se la curva ne â, il co-raggio dovrà farsi da positivo negativo, e due raggi osculatori infinitamente prossimi dall'essere convergenti passeranno ad essere divergenti. Ma ciò non può essere, se essi non divengano prima paralleli, vale a dire infinito il raggio dell'evoluta in quel punto, o pure se essi non cadano prima l'uno sopra dell'altro, e così si faccia nullo il raggio dell'evoluta. Egli è assai chiaro, che quando l'evoluta sia tale, che i raggi vadano sempre crescendo accostandosi al punto del flesso contrario, o regresso B, (*Fig.* 83., *e* 84.) per passare ad essere da convergenti divegenti, dovranno farsi prima paralleli, essendo AD, FE l'elvoluta della curva ABF. Ma se l'evoluta della curva ABF (*Fig.* 85., *e* 86) sarà DBE, sviluppandosi il filo dal punto B, e andando verso A rispetto alla porzione BA della curva, ed andando verso F rispetto alla porzione BF, poichè è sempre il raggio minore, quanto più è vicino al punto B; converrà, che si faccia nullo prima di passare dall'esser positivo ad esser negativo.

ESEM-

ESEMPIO I.

122. La curva AB (*Fig.* 87.) sia la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, di cui si voglia il raggio osculatore ad un qualunque punto B. Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, se così piace, $2dy^2 + 2yddy = 0$, ma $dy = \frac{adx}{2y}$, dunque $ddy = -\frac{aadx^2}{4y^3}$. Sostituiti pertanto questi valori nella formola del co-raggio $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, sarà $\frac{4y^3 + aay}{aa} = BE$, o pure, posto in luogo di y il valore dato dall' equazione della curva, $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Dal punto B si tiri la tangente BT, che incontra l'asse in T, e dal punto T si conduca TE parallela alla normale BM; incontrerà essa la BP prodotta nel ricercato punto E. Imperciocchè essendo l'angolo BTE retto, sarà BP, PT :: PT, PE, cioè per la proprietà della parabola, $\sqrt{ax}$, $2x$ :: $2x$, $PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; adunque $BP + PE$, cioè $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Determinata BE, si conduca EQ parallela all' asse AP, la normale BQ prodotta incontrerà EQ nel punto Q, che sarà all' evoluta.

O pure, a cagione de' triangoli simili BPM, BEQ, sarà $BP, PM :: BE, EQ$; ma per la proprietà della parabola è $PM = \frac{1}{2}a$, dunque $\sqrt{ax}, \frac{1}{2}a :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}, EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$; dunque $MK = 2x$. Presa per tanto MK doppia di AP, o sia $PK = TM$, e condotta KQ parallela a PB, incontrerà essa la normale BM prodotta nel punto Q, che sarà all' evoluta. E poichè $BP, BM :: BE, BQ$, e $BM = \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2}$, sarà $\sqrt{ax}, \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2} :: \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}, BQ = \frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, raggio osculatore.

Prendo la formola $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio osculatore, fatte le sostituzioni, sarà $QB = \frac{\overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa} = \frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, come prima.

Passando alle seconde differenze dell' equazione $ax = yy$, senza prendere alcuna flussione costante; poichè $adx = 2ydy$, sarà $addx = 2yddy + 2dy^2$, e $ddy = \frac{addx - 2dy^2}{2y}$. Quindi presa la formola del raggio osculatore $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, che a questo caso conviene, e fatta la sostituzione del valore di ddy, sarà $QB = \frac{2y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{2ydyddx - adxddx + 2dxdy^2}$, e finalmente posti i valori di y, e di dy, $QB = \frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, come sopra.

Si troverà la stessa cosa nell' altre supposizioni di dy, o di ds costanti, il che ommetto di fare per brevità.

Se si volesse il raggio osculatore ad un determinato punto della curva, basterà sostituire nell'espressione finita già ritrovata del raggio osculatore per un qualunque punto il valore della x, che a tale determinato punto conviene. Così se si voglia il raggio osculatore nel vertice A, o sia il punto N, in cui l'asse AN della parabola tocca l'evoluta NQ: poichè nel vertice A è $x = 0$, cancellato il termine $4ax$ nell' espressione $\frac{\overline{4ax + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$ del raggio osculatore, averemo $AN = \frac{a}{2}$, il che non

può

può essere altrimenti, essendo in questo caso il raggio AN lo stesso, che la sottonormale, la quale nella parabola si fa essere sempre la metà del parametro.

123. Sarà ora facile il ritrovare l'equazione alla Cartesiana dell'evoluta NQ, o sia la relazione delle ordinate NK, KQ nel seguente modo.

Si chiami $NK = u$, $KQ = t$. Poichè $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, averemo l'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, ma $AK = AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$, ed $AN = \frac{1}{2}a$; dunque $NK = 3x = u$, ed $x = \frac{u}{3}$, e però posto in luogo di x questo valore nell'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, averemo $t = \frac{4u\sqrt{\frac{au}{3}}}{3a}$, e quadrando, $27att = 16u^3$, equazione alla seconda parabola cubica del parametro $= \frac{27a}{16}$, la quale esprime la relazione delle coordinate NK, KQ, ed è l'evoluta della proposta parabola apolloniana.

Egli è manifesto, che la seconda parabola cubica intiera sarà l'evoluta dell'intiera parabola apolloniana, cioè che (*Fig.* 88.) il ramo NQ sarà l'evoluta della parte superiore AB, ed il ramo Nq della inferiore Ab; e che i due rami Nq, NQ si voltano le convessità, ed ànno un regresso in N.

124. E' pure manifesto, che se le curve proposte

ſono algebraiche, ſaranno pure algebraiche le loro evolute, e ſi potrà ſempre avere l'equazione in termini finiti eſprimenti la relazione delle coordinate, e che inoltre eſſe evolute ſaranno rettificabili, cioè ſi potranno ritrovare delle rette linee eguali ad una qualunque porzione delle medeſime, per eſempio NQ. Imperciocchè, ſe la propoſta curva AB è algebraica, ſi avranno ſempre in termini finiti i raggi oſculatori BQ, AN, e da BQ ſottratto AN, il reſiduo ſarà l'arco NQ.

ESEMPIO II.

125. Sia la curva MBM (*Fig.* 89.) l'iperbola fra gli aſintoti dell' equazione $aa = xy$. Differenziando, $xdy + ydx = 0$, e di nuovo differenziando, preſa dx coſtante, $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$. Soſtituiti i valori di dy, e ddy nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, averemo $BE = \frac{xx + yy}{-2y}$, valore negativo. Se adunque ſia $AP = x$, $PB = y$, nella prodotta AB preſa $BN = \frac{1}{2} BA = \frac{\sqrt{xx + yy}}{2}$, ed alzata normale NE, che incontri la ordinata BP prodotta in E, ſarà BE il co-raggio, che ſi cerca; imperciocchè, per la ſimilitudine de' triangoli BPA, BNE,

ſarà

sarà $BP, BA :: BN, BE$, cioè $y, \sqrt{xx+yy} :: \frac{\sqrt{xx+yy}}{2}$, $BE = \frac{xx+yy}{2y}$, e perchè si prende dalla parte de' negativi, $BE = \frac{xx+yy}{-2y}$. Quindi condotta EQ parallela ad AP, e prodotta in Q la normale FB alla curva nel punto B, sarà BQ il raggio osculatore, ed il punto Q nell' evoluta.

Per determinare il raggio osculatore nel vertice D dell' iperbola, si ponga $x = AH = a$, e però $y = HD = a$, adunque il co-raggio $\frac{xx+yy}{-2y}$ nel vertice D sarà $= -a$, ed il raggio $= -\sqrt{2aa}$.

Per poco, che si rifletta alla figura della curva MBM, si vede, che l'evoluta averà due rami con un punto di regresso in L, in cui il raggio DL converrà, che sia il minimo di tutti i raggi BQ; e però differenziando la formola de' raggi osculatori $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, la differenza dovrà essere nulla, o infinita; cioè, supposta dx costante,

$$\frac{-3dxdyddy^2\sqrt{dx^2+dy^2} + dxdddy \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2} = 0,$$

o pure $=$ all'infinito, e dividendo per $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e mol-

moltiplicando per $dxddy^2$, sarà $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$, o pure $= \infty$. Ma per l'equazione della curva, si à $dy = -\frac{aadx}{xx}$, $ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy = -\frac{6aadx^3}{x^4}$; dunque fatte le sostituzioni, e supposta la detta quantità eguale a zero, averemo $x = a = AH$; vale a dire, che il regresso sarà nel raggio osculatore al vertice D della curva; ma si è veduto, essere esso raggio $= -\sqrt{2aa}$, sarà dunque $DL = -\sqrt{2aa} = DA$.

Nella formola de' raggi osculatori, surrogati i valori di dy, e di ddy, averemo $BQ = \frac{\overline{xx+yy}^{\frac{3}{2}}}{-2xy} = \frac{\overline{xx+yy}^{\frac{3}{2}}}{-2aa}$, e però differenziando, a fine di avere il minimo raggio, cioè il punto di regresso L, sarà $\overline{3xdx + 3ydy}\sqrt{xx+yy} = 0$, e posto in luogo di dy il suo valore, sarà $\overline{3xxdx - 3yydx}\sqrt{xx+yy} = 0$, cioè $x = y = a$, e sostituito questo valore nell' espressione del raggio osculatore, sarà esso $= -\sqrt{2aa} = DL$, come sopra.

In altro modo ancora si può costruire il raggio BQ. Poichè $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$, sostituiti in luogo di x, e di dx i valori dati per y, sarà $ddy = \frac{2dy^2}{y}$, e però il co-rag-

gio

gio $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$, e per i triangoli simili BPF, BEQ, averemo $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Si conduca ora al punto B la tangente BT, e dal punto T la TS normale a BT, o sia parallela a BQ, e si prenda $BE = \frac{1}{2} BS$, o $PK = \frac{1}{2} FT$; se si farà EQ parallela alla AT, o KQ perpendicolare, esse incontreranno la normale BQ nel punto Q dell' evoluta, poichè sarà $BS = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, dunque $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$; sarà ancora $FP + PT = FT = -\frac{ydy}{dx} - \frac{ydx}{dy}$, dunque $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$.

Se l'equazione sarà $y^m = x$, la quale esprime tutte le parabole all' infinito, quando sia m numero positivo, ed in conseguenza anche la parabola dell' esempio primo; ed esprime tutte le iperbole fra gli asintoti all' infinito, quando sia m negativo, e però anche quella di questo esempio: differenziando averemo $my^{m-1}dy = dx$, e di nuovo differenziando, supposta dx costante, $\overline{mm - m} \times y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$, e dividendo per my^{m-1}, sarà $-ddy = \overline{m - 1} \times \frac{dy^2}{y}$. Presa pertanto

la

la formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, e fatta la sostituzione del valore di ddy, si averà $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{\overline{m-1} \times dy^2}$, e però EQ, o $PK = \frac{ydx}{\overline{m-1} \times dy} + \frac{ydy}{\overline{m-1} \times dx}$.

Dal punto T, in cui (*Fig.* 87., e 89.) la tangente BT incontra l'asse AP, si tiri istessamente TS parallela alla normale BQ alla curva, che incontra in S la ordinata BP prodotta, indi si prenda $BE = \frac{BS}{m-1}$ dalla parte dei negativi, se m sia numero negativo, come nelle iperbole le quali sono all'asse AP, cioè all'asintoto convesse (*Fig.* 89.); si prenda BE dalla parte dei positivi, se m sia numero positivo, e maggiore dell'unità, come nelle parabole (*Fig.* 87.) concave all'asse AP, e dalla parte dei negativi, se m positivo sia minore dell'unità, nel qual caso le parabole sono convesse all'asse AP.

Per determinare il punto, in cui l'asse della parabola tocca l'evoluta, prendo la formola de' raggi osculatori $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, da cui, sostituiti i valori di $dx = my^{m-1}dy$, e di $-ddy = \frac{\overline{m-1} \times dy^2}{y}$, averemo mo $BQ = \dfrac{\overline{mmy^{2m-2}+1}^{\frac{3}{2}}}{m \times \overline{m-1} \times y^{m-2}}$, intendendo, che l'unità supplisca per la legge degl' omogenei; quindi supposta m maggiore dell'unità, acciò sieno concave le parabole all'asse AP, se sarà m minore di 2, la y del denominatore passerà ad essere un moltiplicatore del numeratore, e però fatta $y = 0$, come richiede il caso, che si cerca, sarà $BQ = 0$, cioè l'asse toccherà l'evoluta nel vertice A della parabola, come sarebbe per esempio la seconda parabola cubica $aax = y^3$ (*Fig.* 70.).

Che se m è maggiore di 2, la y del denominatore sarà elevata a potestà positiva, e però fatta $y = 0$, sarà BQ infinita, vale a dire che l'asse della parabola sarà asintoto dell'evoluta; come la prima parabola cubica AB, (*Fig.* 90.) il di cui asse AP è asintoto dell' evoluta LQ.

L'evoluta CLQ della semi-parabola cubica ABM dell'equazione $aax = y^3$ â un punto di regresso L, e però due rami LQ, LC; sviluppando il ramo LQ, si genera la porzione BA; sviluppando il ramo LC, la porzione infinita BM.

Per determinare il flesso contrario L, prendo il valore del raggio osculatore, che in questa curva è $= \dfrac{\overline{9y^4 + a^4}^{\frac{3}{2}}}{6a^4 y}$, il quale deve essere un minimo, e però differenziando

$$\frac{3 \times 18a^4y^4dy \times \overline{9y^4 + a^4}^{\frac{1}{2}} - a^4dy \times \overline{9y^4 + a^4}^{\frac{3}{2}}}{6a^3yy} = 0 ,$$

cioè $45y^4 - a^4 = 0$, quindi $y = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, e surrogato questo valore in luogo di y nell'equazione $aax = y^3$, averemo $x = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$. Presa adunque $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$, e condotta l'ordinata PB, il punto di regresso L sarà nella normale al punto B della curva; e nell'espressione del raggio osculatore posto $\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$ in luogo di y, averemo il valore di BL.

In altro modo. Differenziando l'equazione $aax = y^3$, o sia $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, sarà $dy = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$, $ddy = -\frac{2}{9} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$, $dddy = \frac{10}{27} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$, posta dx costante; quindi, presa la formola
$dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, e sostituiti i valori, si averà $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{91125}}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

126. Sia la curva ABD (*Fig.* 91.) un' elliſſi, o un' iperbola, il di cui aſſe $AH = a$, ed il parametro $AF = b$, $AP = x$, $PB = y$, e l'equazione $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}$. Differenziando, ſarà $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, e $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{4 \times \overline{aabx \mp abxx}^{\frac{3}{2}}}$, preſa dx per coſtante. Fatte le ſoſtituzioni nella formola $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio oſculatore, ſarà $BGQ = \frac{\overline{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}^{\frac{3}{2}}}{2a^3bb}$. Ma la normale BG ſi troverà eſſere $= \frac{\overline{4aabx \mp 4abxx + aabb \mp 4abbx + 4bbxx}^{\frac{1}{2}}}{2a}$, dunque ſarà il raggio $BGQ = \frac{4\overline{BG}^3}{bb}$; adunque preſo il parametro b per primo termine, la normale BG per ſecondo, e continovata la ſerie geometrica, il quadruplo

del quarto termine sarà il raggio osculatore BQ. Fatta $x = o$ nella espressione del raggio osculatore, sarà $BGQ = AM = \frac{b}{2}$, e fatta $x = AO = \frac{1}{2}a$, si avrà nell' ellissi $BGQ = DOQ = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, cioè eguale alla metà del parametro dell' asse conjugato, ed in Q vi sarà un regresso, e l' evoluta della porzione $AD = DH$ sarà MQ; della porzione DH sarà RQ; ma nell' iperbola il raggio si estende all' infinito.

Se nell' ellissi si faccia $a = b$, il raggio osculatore BGQ sarà $= \frac{a}{2}$, qualunque siasi il punto B; dunque i raggi tutti eguali tra loro, e l'evoluta un punto, cioè a dire l'ellissi, che in questo caso diviene un circolo, à per evoluta il suo centro.

ESEMPIO IV.

127. Sia la curva ABD (*Fig.* 92.) la logaritmica ordinaria, la di cui equazione è $\frac{ady}{y} = dx$.

Differenziando, presa dx costante, sarà $ddy = \frac{dxdy}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$, posto il valore di dy. Fatte le sostituzioni ni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, averemo $BE = \frac{-aa - yy}{y}$, e perchè nella logaritmica si trova, essere la sottonormale $PH = \frac{yy}{a}$, sarà $EQ = -a - \frac{yy}{a}$. Presa adunque $PK = TH$, ed alzata in angolo retto KQ, incontrerà essa la normale HBQ nel ricercato punto Q dell'evoluta.

Se si voglia determinare il punto della massima curvatura nella logaritmica, cioè il punto del minimo raggio osculatore, fatte le sostituzioni nella formola $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del raggio osculatore, sarà $\frac{\overline{aa + yy}^{\frac{3}{2}}}{-ay}$, e differenziando sarà

$$\frac{-3ayydy \times \overline{aa + yy}^{\frac{1}{2}} + ady \times \overline{aa + yy}^{\frac{3}{2}}}{aayy} = 0 \text{, e però}$$

$PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

O pure, presa la formola del num. 125. $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, e fatte le sostituzioni di $dy = \frac{ydx}{a}$, di $ddy = \frac{ydx^2}{aa}$, di $dddy = \frac{ydx^3}{a^3}$, troveremo istessamente $PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

128. Sia ABD (*Fig.* 93.) la logaritmica spirale, la di cui proprietà è, che condotta ad un qualunque punto B la tangente BT, e dal polo A la ordinata AB, l'angolo ABT sia sempre lo stesso, e però fatta AM infinitamente prossima ad AB, sarà costante la ragione di MR ad RB, quindi posta $AB = y$, l'archetto $BR = dx$, l'equazione sarà $adx = bdy$, e differenziando, fatta dx costante, $ddy = 0$. Presa pertanto la formola del co-raggio num. 118.

$$\frac{ydx^3 + ydxdy^2}{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}$$

, per le curve riferite al fuoco, la quale regolata nell'ipotesi di dx costante è $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$, e cancellato in questa il termine $yddy$, perchè la curva ci dà $ddy = 0$, e fatta la sostituzione del valore di dx, o di dy, ovvero diviso il numeratore, e denominatore per $dx^2 + dy^2$, sarà il co-raggio $BA = y$.

Adunque, condotta AC normale ad AB, incontrerà essa la perpendicolare BC nel ricercato punto C

dell'

dell'evoluta, e perchè la sottonormale $AC = \frac{ay}{b}$, sarà

$BC = \frac{y\sqrt{aa+bb}}{b}$.

Condotta la tangente BT alla curva nel punto B, saranno simili i triangoli TCB, CBA, e però eguali gl'angoli TBA, ACB; ma l'angolo TBA è sempre costante, dunque lo sarà ancora l'angolo ACB; e però l'evoluta AC sarà la stessa logaritmica spirale ABD, ma inversamente posta.

ESEMPIO VI.

129. Sia ABD (*Fig.* 93.) la spirale iperbolica, la di cui proprietà è, che la sottotangente sia costante.

Fatte dunque le stesse cose dell'Esempio antecedente, l'equazione della curva sarà $\frac{ydx}{dy} = a$, o sia $ydx = ady$; quindi differenziando, posta dx costante, $ddy = \frac{dxdy}{a}$. Presa per tanto la formola del co-raggio, che all'ipotesi di dx costante corrisponde, cioè $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$, indi sostituito in luogo di ddy il valo-

re

re $\frac{dxdy}{a}$, ed in luogo di dy il valore $\frac{ydx}{a}$ dato dall' equazione, sarà il co-raggio $= \frac{y \times \overline{aa+yy}}{aa}$.

Ma poichè la sottotangente AT è $= a$, e la sottonormale $AC = \frac{yy}{a}$, sarà $TC = \frac{aa+yy}{a}$; dunque la quarta proporzionale della sottangente TA, e della TC, e dell'ordinata AB ci determina il co-raggio. Quindi dal punto C condotta parallella alla tangente BT la CQ, che taglia in Q la ordinata BA prodotta, sarà BQ il ricercato co-raggio.

Poichè per i triangoli simili BAT, CAQ, si averà CA, $AQ :: TA$, AB, e permutando CA, $TA :: AQ$, AB, e componendo TC, $AT :: QB$, AB, ed invertendo TA, $TC :: BA$, BQ; il che ec.

ESEMPIO VI.

130. Sia il settore di circolo ADN, (*Fig. 94.*) e condotto dal centro A un raggio qualunque ABP, si faccia ND, $NP :: \overline{AP}^m$, $\overline{AB}^m$, il punto B sarà nella curva ABD, che è una delle spirali all'infinito, la di cui equazione, fatto $NPD = b$, $NP = z$, il raggio

gio $AP = a$, $AB = y$, ſarà $y^m = \frac{a^m z}{b}$, e differenziando, $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Ma condotto il raggio Ap infinitamente proſſimo ad AP, e chiamata $BR = dx$, per i ſettori ſimili APp, ABR, ſarà $dz = \frac{adx}{y}$, quindi poſto queſto valore in luogo di dz nell' equazione differenziale, ſarà $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$, e però di nuovo differenziando, preſa dx coſtante, $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$, cioè $yddy = -mdy^2$. Fatta pertanto la ſoſtituzione di queſto valore, e del valore di dx nella formola del co-raggio, ſarà $BE = \frac{y \times \overline{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}}{mmbby^{2m} + \overline{1+m} \times a^{2m+2}}$. Si faccia TAC perpendicolare ad AB, e ſi tiri la tangente BT della curva in B, e BC normale, ſarà $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$, $AC = \frac{a^{m+1}}{mby^{m-1}}$, e però $TC = \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1}y^{m-1}}$, quindi la quarta proporzionale di $TA + \overline{m+1} \times AC$, di TC, e di AB ſarà $\frac{y \times \overline{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}}{mmbby^{2m} + \overline{1+m} \times a^{2m+2}} = BE$, e però

con-

condotta EQ parallela alla TC, incontrerà la normale BC nel punto Q, che sarà all'evoluta.

ESEMPIO VII.

131. Sia la curva ABD (*Fig.* 95.) la metà della cicloide ordinaria, la di cui equazione $dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, essendo $AC = 2a$, $AP = x$, $PB = y$.

Differenziando, presa dx costante, sarà $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax-xx}}$, e posti questi valori nella formola del raggio osculatore $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, sarà $BQ = 2\sqrt{4aa-2ax}$; ma la normale $BG = \sqrt{4aa-2ax} =$ alla corda EC, dunque il raggio osculatore $BQ = 2BG = 2EC$.

Fatta $x = 0$, per avere il raggio osculatore nel punto A, sarà $BQ = AN = 4a$, e però $CN = CA = 2a$.

Fatta $x = 2a$, il raggio osculatore nel punto D sarà $= 0$, e però l'evoluta principia in D, e termina in N.

Poichè

Poichè la tangente in B della cicloide è parallela alla corda EA, (num. 47.) sarà la normale BQ parallela alla corda EC. Ciò posto, si compisca il rettangolo $DCNS$, ed al diametro $DS = CN = AC$ si descriva il semicircolo DIS, e si tiri la corda DI parallela alla BQ, o sia alla EC. Saranno gl' angoli CDI, DCE eguali, e per conseguenza gl' archi DI, CE, e le corde; dunque DI, GQ eguali, e parallele, e condotta IQ, sarà essa eguale, e parallela a DG; ma per la proprietà della cicloide, la DG è eguale all' arco EC, e però all' arco DI, dunque l' arco $DI = IQ$, ed il semicircolo $DIS = SN$, quindi l' evoluta DQN è la stessa cicloide DBA inversamente posta.

132. Avuta sufficiente notizia, e ritrovate le formole de' raggi osculatori, non è difficile il ritrovare la formola de' regressi della seconda specie di sopra promessa al num. 98.

Sia la curva BAC (*Fig.* 96.) con un flesso contrario in A, e si sviluppi dal filo principiando in un qualunque punto D diverso dal flesso contrario A. Lo sviluppo della porzione DC genera la curva DG; quello della porzione DA la curva DE; e quello della porzione AB la curva EF di modo, che lo sviluppo di tutta la BAC formerà la intera curva $FEDG$;

la quale â due regreſſi, uno in D della ſolita forma, poichè i due rami DE, DG ſi voltano le conveſſità, l'altro in E della ſeconda ſorta, per eſſere i due rami ED, EF concavi verſo la ſteſſa parte. Sieno NM, Nnm due qualunque raggi infinitamente proſſimi dell' evoluta DA, ed NH, nH due normali alla ſteſſa, ſaranno ſimili i due ſettori infiniteſimi NmM, HNn, quindi HN, NM :: Nn, Mm; ma nel punto del fleſſo contrario A, il raggio HN (num. 121.) deve eſſere o infinito, o eguale al zero, ed il raggio NM, che diventa AE, rimane finito, adunque nel caſo del fleſſo contrario A, cioè nel punto del regreſſo E della ſeconda ſorta, la ragione di Nn, Mm, vale a dire la ragione della differenziale del raggio MN all' elemento della curva, deve eſſere infinitamente grande, o infinitamente piccola. Ma la formola del raggio MN è $\dfrac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, preſa dx coſtante, il di cui differenziale è $-\dfrac{3dxdyddy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$, ed $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, dunque $\dfrac{Nn}{Mm} = \dfrac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2}{dxddy^2} =$ al zero, o all' infinito, formola per i regreſſi della ſeconda ſorta.

Queſta

Queſta formola è la ſteſſa della ritrovata al num. 125., ma in quel luogo eſſa ſerve per i regreſſi della prima ſorta delle evolute, e queſta per i regreſſi della ſeconda ſorta delle curve genite dell'evolute, eſſendo x, ed y le coordinate nell'uno, e nell'altro caſo delle curve genite.

FINE DEL SECONDO LIBRO.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO TERZO
Del Calcolo Integrale.

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

IL Calcolo Integrale, che suole dirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni, o sia delle differenze. Per cagion d'esempio il differenziale di x è dx, e per conseguenza x è l'integrale di dx. Quindi sarà segno sicuro, che sia giusto quell'integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi. In due diverse maniere si ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebraiche, o ridotte a quadrature supposte; nell'altra facendo uso delle serie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel secondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uso di esse regole per le retificazioni di curve, quadrature di spazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Esponenziale.

CAPO I.

Delle regole dell' integrazioni espresse da formole finite algebraiche, o ridotte a quadrature supposte.

1. COme nelle quantità incomplesse elevate a qualunque potestà il differenziale loro è il prodotto dell' esponente della variabile nella variabile stessa elevata alla medesima potestà diminuita dell'unità, e moltiplicata nella sua differenza; così l'integrale del prodotto d'una variabile elevata a qualunque potestà nella differenza della stessa variabile è la variabile elevata alla potestà, il di cui esponente sia accresciuto dell'unità, divisa per lo stesso esponente così accresciuto, e ciò qualunque siasi l'esponente della potestà della variabile nella formola differenziale, cioè positivo, o negativo, intiero, o rotto. Per esempio l'integrale di $mx^{m-1}dx$ sarà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m. L'integrale di $x^{\pm\frac{m}{n}}dx$ sarà egli $\frac{x^{\pm\frac{m}{n}+1}}{\pm\frac{m}{n}+1}$, cioè $\frac{nx^{\frac{\pm m+n}{n}}}{\pm m+n}$.

2. Nè punto alterano la regola le quantità costanti incomplesse, o complesse, per le quali sia moltiplicata, o divisa la formola differenziale, rimanendo esse nell'

nell' integrale, quali erano nella formola differenziale, e però l'integrale di $\frac{aax^n dx}{mb - cc}$ sarà $\frac{aax^{n+1}}{n+1 \times mb - cc}$.

3. Che se la formola differenziale sarà una frazione, il di cui denominatore sia pure una qualunque potestà della variabile moltiplicata ancora, se si vuole, per qualunque costante, come a dire la formola $\frac{x^m dx}{aax^n - bbx^n}$, cioè $\frac{x^m dx}{aa - bb \times x^n}$, come che essa è la medesima di questa $\frac{x^{m-n} dx}{aa - bb}$, sarà perciò soggetta alla data regola.

4. Ma quì fa d'uopo avvertire, che acciò gl' integrali sieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere, la quale ne' casi particolari si determina poi, come si vedrà a suo luogo.

Quindi l'integrale compito, per esempio, di dx sarà $x \pm a$, (intendendo per a una costante qualunque) di $xxdx$ sarà $\frac{x^3}{3} \pm a^3$, e così degl'altri. La ragione di ciò è, che non avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x, quanto di $x + a$, quanto di $x - b$ ec., e però tanto x, quanto $x + a$, quanto $x - b$ ec. possono essere gl' integrali di dx; lo stesso vale di qualunque altra formola.

5. La stessa regola d'integrare serve per le formole differenziali complesse, cioè composte di molti termini, purchè, se ànno denominatore, sia egli o tutto costante, o se contiene la variabile, sia incomplesso, cioè d'un solo termine, o riducibile ad esser tale.

Imperocchè in questi casi la formola differenziale complessa si risolve in altrettante incomplesse, quanti sono i termini della complessa, e però ciascheduna è soggetta alla mentovata regola. Sia la formola $\frac{bx^m dx + aax^{m-1} dx}{aa - bb}$; questa equivale alle due $\frac{bx^m dx}{aa - bb} + \frac{aax^{m-1} dx}{aa - bb}$, e però gl'integrali di queste due formole saranno l'integrale della prima, cioè $\frac{bx^{m+1}}{\overline{m+1} \times \overline{aa-bb}} + \frac{aax^m}{m \times \overline{aa-bb}} \pm f$.

Sia $\frac{bx^3 dx - a^4 dx}{axx - cxx}$; questa equivale alle due $\frac{bx^3 dx}{\overline{a-c} \times xx} - \frac{a^4 dx}{\overline{a-c} \times xx}$, cioè $\frac{bx dx}{a-c} - \frac{a^4 x^{-2} dx}{a-c}$, e però l'integrale sarà $\frac{bxx}{2 \times \overline{a-c}} - \frac{a^4 x^{-1}}{-1 \times \overline{a-c}} \pm f$, cioè $\frac{bxx}{2a - 2c} + \frac{a^4}{\overline{a-c} \times x} \pm f$.

Sia $\frac{bx^m dx - aax^{m-1} dx}{xx}$; questa equivale alle due $bx^{m-2} dx - aax^{m-3} dx$, e però l'integrale sarà $\frac{bx^{m-1}}{m-1} - \frac{aax^{m-2}}{m-2} \pm f$.

6.

6. Se in oltre la formola differenziale compleſſa ſarà elevata a qualche poteſtà, il di cui eſponente ſia poſitivo, ed intiero, ridotta eſſa attualmente alla data poteſtà, ciaſcun termine s'integrerà colla ſteſſa regola.

7. Tutto ciò, che fin'ora ò detto, procede quando nella formola differenziale neſſun termine vi ſia, in cui l'eſponente della variabile ſia l'unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o ſia $ax^{-1}dx$, imperocchè ſecondo la regola l'integrale ſarebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o ſia $\frac{ax^0}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa ſapere.

8. In queſti caſi adunque biſogna ricorrere ad altri metodi. Due ſono quelli, che ſervono: uno per mezzo d'una curva, che ſi chiama *Logaritmica*, ed anco *Logiſtica*, l'altro per mezzo di ſerie infinite. Delle ſerie infinite, delle quali in moltiſſimi altri caſi ſi può fare uſo, come ſi vedrà, ne parlerò nel ſecondo Capo.

9. Per ora, quanto alla Logaritmica, ella è una curva di tale proprietà, che preſe nell'aſſe le aſſiſſe in proporzione aritmetica, le corriſpondenti ordinate ſono in proporzione geometrica. E però l'aſſe AD (*Fig.* 1.) ſi divida in parti eguali AB, BC, CD ec., ſu i punti A, B, C, D ec. ſi eriggano le perpendicolari AE, BF, CG, DH ec. tali, che ſieno tra di loro in geometrica proporzione; i punti E, F, G, H ec. ſaranno nella

nella curva, e di nuovo dividendo in parti eguali le AB, BC ec., e sopra le divisioni alzando le perpendicolari nella stessa geometrica proporzione, si averanno altri punti intermedj, e finalmente moltiplicando in infinito le divisioni, avremo infiniti punti, cioè la curva stessa.

Diviso adunque l'asse in parti infinitissime, ed eguali, sia una di queste $CM = dx$, l'ordinata $CG = y$, e ad essa infinitamente prossima MO, sarà adunque $NO = dy$. Sia un'altra ordinata $DH = z$, ed altre, quante si vuole, corrispondenti ad assisse aritmeticamente proporzionali. Averanno adunque esse ordinate tra loro la medesima proporzione, ma per conseguenza saranno pure nella stessa proporzione le loro differenziali, adunque sarà $dy, dz :: y, z$, o sia $dy, y :: dz, z$; onde sarà costante la ragione di dy alla y, e però assumendosi costante la dx, sarà $dy, y :: dx, a$, cioè $\frac{ady}{y} = dx$, equazione della curva.

E' facile il vedere, che la sottangente di questa curva sarà sempre costante, imperocchè nella formola generale della sottangente $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sostituito in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avrassi $\frac{ydx}{dy} = \frac{adydx}{dxdy} = a$. Ma comecchè la progressione geometrica crescente delle ordinate si può produrre in infini-

to

to, crescendo pure in infinito aritmeticamente le assisse, anderà in infinito la curva, e sempre allontanandosi dall'asse. E perchè la stessa progressione si può produrre ancora in infinito, ma decrescente, crescendo sempre le assisse, anderà da quest'altra parte in infinito la curva, ma sempre accostandosi all'asse senza toccarlo mai, e però sarà egli asintoto di essa curva.

10. In quest'altra maniera ancora, fra le molte, si può intendere descritta la Logaritmica.

Sia la retta indefinita *MH* (*Fig.* 2.) divisa in parti eguali *MN*, *NB*, *BK* ec., e presa *NI* a piacere, sul punto *I* si alzi la normale *IO* di quella grandezza, che si vuole, indi si conduca *NO*, e sul punto *A* si alzi la normale *AC* fin che incontri *NO* prodotta in *C*; dal punto *B* si tiri *BC*, e sul punto *E* si alzi la normale *ED*, che incontri *BC* prodotta in *D*; dal punto *K* si tiri *KD*, e sul punto *F* si alzi la normale *FP*, che incontri *KD* prodotta nel punto *P*; e nello stesso modo si continovi in infinito l'operazione, ed i punti *O*, *C*, *D*, *P* ec. saranno nella curva logaritmica. Per avere i punti intermedj fra *O*, *C*, *D*, *P* ec. si dividano per metà le porzioni *MN*, *NB*, e ripetuta la stessa operazione, si avranno altri punti, e finalmente col moltiplicare in infinito le divisioni eguali nella retta *MH*, cioè col supporre infinitesime, ed eguali le porzioni *MN*, *NB* ec. averemo infiniti punti, i quali ci segneranno la

curva

curva logaritmica, la di cui sottangente, come apparisce dalla costruzione, sarà sempre costante. Chiamata adunque $NI = a$, e poste $= dx$ le infinitesime costanti porzioni dell'asse, sia l'ordinata $GR = y$, $GH = dx$, $TS = dy$; per la similitudine de' triangoli STR, RGA, sarà dy, $dx :: y$, a, cioè $\frac{ady}{y} = dx$, equazione della curva.

Da questa costruzione si deduce pure quello, che la prima suppone, vale a dire la primaria proprietà della logaritmica, che sieno in geometrica proporzione le ordinate, che corrispondono alle assisse in proporzione aritmetica. Imperocchè, supposte infinitesime le eguali porzioni dell'asse, l'archetto OC sarà la tangente NO prodotta, l'archetto CD sarà la tangente BC prodotta, l'archetto PD la tangente KD prodotta, e così di tutti gl'altri; saranno adunque simili i triangoli OIN, CAN, e però sarà OI, $CA :: NI$, NA; così pure per la similitudine de' triangoli CAB, DEB sarà CA, $DE :: BA$, BE; ma $NI = BA$, $NA = BE$, adunque sarà OI, $CA :: CA$, DE, e così successivamente; e però le ordinate saranno in continua proporzione geometrica. Quindi anche considerando l'asse non diviso in parti infinitesime, ma finite, ed eguali, perchè le intermedie ordinate proporzionali fra IO, per esempio, e CA sono nè più, nè meno di numero delle intermedie fra CA, e DE, e così dell'altre; saranno pure le IO,

CA,

CA, *DE* in proporzione geometrica corrispondenti ad assisse in proporzione aritmetica. Anzi prese due ordinate a piacere, e prese due altre, dovunque si vuole, purchè la distanza fra la prima, e la seconda sia la stessa della distanza fra la terza, e la quarta, come sarebbero *IO*, *CA*, *RG*, *SH*; sarà la prima alla seconda, come la terza alla quarta.

La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva mecanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola.

Nella logaritmica adunque le porzioni dell'asse, o sia le assisse prese da un punto fisso corrispondono alle ordinate in quella guisa appunto, che nelle tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie naturale de' numeri.

11. Ciò posto sia (*Fig.* 3.) la logaritmica *DC*, la di cui sottotangente eguale all'unità, o pure, se si vuole, eguale alla costante a, e sia l'ordinata *AD* eguale alla sottangente, cioè eguale all'unità, o sia alla costante a, che fa figura d'unità. Presa una qualunque assissa $AB=x$, sia $BC=y$, ma l'equazione della

curva è $\frac{ady}{y} = dx$, adunque l'integrale di $\frac{ady}{y}$ farà x, ma $x = AB$, ed AB è il logaritmo di BC, cioè di y, adunque fervendosi del fegno $\int$ per fignificare integrale o fomma, che vuol dire lo fteffo, e del fegno l, che vuol dire logaritmo, farà $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmica, la di cui fottangente fia $= a$. Ifteffamente farà $\int \frac{dy}{y} = ly$ nella logaritmica della fottangente $= 1$; $\int \frac{bdy}{y} = ly$ nella logaritmica della fottangente $= b$; $\int \frac{ady}{b+y} = l\overline{b+y}$ nella logaritmica della fottangente $= a$, cioè prefa nella logaritmica la ordinata $BC = AH = y$, fe ad effa fi aggiungerà $HK = b$, e fi condurrà KG parallela all' afintoto, e fi abbafferà GE parallela ad AD, farà $GE = y + b$, e però $AE = l\overline{b+y}$.

12. Dalla natura della logaritmica chiaramente fi vede, che qualunque volta la quantità, di cui fi vuole il logaritmo, è quantità infinita, facendo effa figura di ordinata infinita nella logaritmica, farà pure infinita l'intercetta nell'affe fra effa, ed il punto A, e però infinito il logaritmo; e fe effa farà eguale alla prima AD, cioè alla fottangente, il logaritmo farà eguale al zero;

e

e se sarà minore di AD, come sarebbe ΩA, il logaritmo sarà ΩA, e negativo; e finalmente se sarà $=0$, il logaritmo sarà infinito. Se la formola differenziale fosse $-\frac{dy}{y}$, l'integrale sarebbe $-ly$, e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$, l'integrale sarebbe $-l\overline{a+y}$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $l\overline{a-y}$, e se sarà $\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $-l\overline{a-y}$, intendendo questi logaritmi nella logaritmica della sottangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è ly, così il differenziale di ly è $\frac{dy}{y}$, e generalmente parlando, il differenziale di una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa, adunque il differenziale di $-l\overline{a+y}$ sarà $-\frac{dy}{a+y}$; il differenziale di $l\overline{a-y}$ sarà $-\frac{dy}{a-y}$; il differenziale di $-l\overline{a-y}$ sarà $\frac{dy}{a-y}$, supposta la sottangente della logaritmica $=1$, e quando non sia tale, si moltiplicheranno i numeratori dei differenziali nella data sottangente.

13. Ma poichè la logaritmica non â ordinate nega-

 tive,

tive, pare, che non si saprebbe ritrovare la quantità, che corrisponda all'espressione $l\overline{a-y}$, cioè quale sia il logaritmo di $a-y$, qualora $a-y$ sia quantità negativa, cioè y maggiore di a; ma in questo caso avvertasi, che è la stessa cosa $l\overline{a-y}$, e $l\overline{y-a}$, e che in tale supposto essendo $y-a$ positiva essa può essere ordinata nella logaritmica, ed in fatti differenziando il primo logaritmo si â $\frac{-dy}{a-y}$, differenziando il secondo si â $\frac{dy}{y-a}$, e mutando i segni al numeratore, e denominatore, si â $\frac{-dy}{a-y}$, che è lo stesso del primo.

14. Dalla proprietà della logaritmica altre se ne deducono intorno alle quantità logaritmiche, ed in primo luogo, che il multiplo, o submultiplo di un logaritmo sarà il logaritmo della quantità elevata alla potestà del dato numero, così $2lx=lxx$; $3lx=lx^3$; $\frac{1}{2}lx=l\sqrt{x}$; $\frac{1}{3}lx=l\sqrt[3]{x}$; $nlx=lx^n$; $\frac{1}{n}lx=lx^{\frac{1}{n}}$, e la ragione si è, perchè, presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP=y$, il di cui logaritmo è AO (*Fig.* 3.), se si faranno AO, OS, SV ec. eguali tra loro, saranno AO, AS, AV aritmeticamente proporzionali, e le ordinate AD, OP, ST, VI ec. saranno geometricamente proporzionali, onde posta AD eguale all'unità, $OP=y$, sarà $ST=yy$, $VI=y^3$ ec., ma AS doppia di AO è lo-

garitmo

garitmo di yy, cioè lyy, ed AV tripla di AO è ly^3; adunque $2ly = lyy$, $3ly = ly^3$. Così pure, posta $AO = ly$, e divisa per metà in M, sarà $MN = \sqrt{y}$, e però $AM = \frac{1}{2}AO$, cioè $\frac{1}{2}ly$, sarà $ly^{\frac{1}{2}}$. Istessamente posta $QR = y$, e divisa AQ in tre parti eguali in M, ed O, sarà $MN = \sqrt[3]{y}$, cioè $y^{\frac{1}{3}}$, ma $AM = \frac{1}{3}ly$, adunque $\frac{1}{3}ly = ly^{\frac{1}{3}}$, e così degl'altri.

Nè devesi ommettere di avvertire, che l'integrale di $\frac{-dy}{y}$ non è solo $-ly$, come si è veduto al num. 12., ma che può esprimersi anco per $l\frac{1}{y}$, o sia ly^{-1}; conciosiacchè presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP = y$, e fatta $A\Omega = AO$, sarà per la natura della curva OP, $AD :: AD$, $\Omega\Lambda$, cioè y, $1 :: 1$, $\Omega\Lambda = \frac{1}{y}$; ma $A\Omega$ è il logaritmo negativo di OP, cioè di y, ed è assieme il logaritmo di $\Omega\Lambda$, dunque sarà $-ly = l\frac{1}{y} = ly^{-1}$, vale a dire, che il logaritmo negativo di una qualunque quantità sarà lo stesso del logaritmo positivo della frazione, di cui essa quantità formi il denominatore, o sia della quantità stessa con l'esponente negativo; così sarà $-mly = l\frac{1}{y^m} = ly^{-m}$.

15. In oltre la somma di due, di tre ec. logaritmi sarà

farà eguale al logaritmo del prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi, e la differenza di due, di tre ec. logaritmi farà eguale al logaritmo della frazione, il di cui numeratore sia il prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi positivi, ed il denominatore sia il prodotto delle quantità, delle quali sono i logaritmi negativi. Imperocchè sia $OP = y$, $QR = z$, farà $AO = ly$, $AQ = lz$; si prenda $QB = AO$, farà $AB = ly + lz$; ma AB è pure il logaritmo di BC, e per la proprietà della logaritmica, BC è la quarta proporzionale di AD, OP, QR, cioè $= yz$, adunque farà $AB = ly + lz = lzy$. Sia un' altra ordinata $MN = p$, si prenda $BV = AM$, farà $AV = AM + AB = lp + lyz$; ma AV è il logaritmo di VI, ed $VI = pyz$, adunque $lp + ly + lz = lpyz$.

Sia di nuovo $QR = z$, $OP = y$, e si prenda $QM = AO$, farà $AM = AQ - AO = lz - ly$; ma AM è il logaritmo di MN, e per la stessa proprietà della logaritmica, $MN = \frac{z}{y}$, adunque $AM = lz - ly = l\frac{z}{y}$. Sia un' altra ordinata $BC = p$, e si prenda $\Sigma A = BM$, farà $\Sigma A = -AB + AM = -lp + l\frac{z}{y}$; ma ΣA è il logaritmo di $\Sigma\Pi$, ed $\Sigma\Pi$ è $= \frac{z}{py}$ (per essere la quarta pro-

por-

porzionale di BC, MN, AD), adunque $lz - ly - lp = l\frac{z}{py}$ ec.

16. Siccome negl' altri casi, così ancora in questi delle integrazioni per via di logaritmi, si deve sempre aggiungere la costante, cioè il logaritmo di quantità costante arbitraria, da determinarsi poi ne' casi particolari.

17. Ma quando le formole differenziali proposte da integrarsi sieno frazioni col denominatore complesso, si possono dare alcuni casi, ne' quali è facile avere il loro integrale col mezzo della logaritmica, e sarà ogni qual volta il numeratore della frazione sia il differenziale preciso del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo di esso differenziale, anzi ogni qual volta gli sia proporzionale, ed in questi casi l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo, o proporzionale di esso logaritmo.

Così l'integrale di $\frac{2xdx}{aa+xx}$ sarà $l\overline{aa+xx}$; l'integrale di $-\frac{2xdx}{aa-xx}$ sarà $l\overline{aa-xx}$; l'integrale di $\frac{3xxdx}{a^3+x^3}$ sarà $l\overline{a^3+x^3}$; l'integrale di $\frac{4xdx}{aa+xx}$ sarà $2l\overline{aa+xx}$, cioè $l\overline{aa+xx}^2$; l'integrale di $\frac{xdx}{aa+xx}$ sarà $\frac{1}{2}l\overline{aa+xx}$,

cioè

cioè $l\overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}}$; l'integrale di $\frac{xxdx}{a^3+x^3}$ sarà $\frac{1}{3}l\overline{a^3+x^3}$, cioè $l\sqrt[3]{a^3+x^3}$; e generalmente l'integrale di $\frac{mx^{n-1}dx}{a^n\pm x^n}$ sarà $\pm\frac{m}{n}l\overline{a^n\pm x^n}$, cioè $\pm m\,l\overline{a^n\pm x^n}^{\frac{1}{n}}$, o sia $\pm l\overline{a^n\pm x^n}^{\frac{m}{n}}$. Così l'integrale di $\frac{adx-2xdx}{ax-xx}$ sarà $l\overline{ax-xx}$; l'integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{ax-xx}$ sarà $l\sqrt{ax-xx}$, e così degl'altri a piacere, presi questi logaritmi nella logaritmica della sottangente $=1$.

18. Ma se il numeratore della frazione non è della forma, che abbiamo considerata, quando però il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, cioè quando tutte le radici, dal prodotto delle quali egli è nato, sieno reali, allora si proceda nella seguente maniera.

19. Ed in primo luogo le radici del denominatore, o saranno tutte eguali tra loro, o no; se sono tutte eguali, come le avrebbe la formola $\frac{x^m dx}{\overline{x\pm a}^n}$, si ponga $x\pm a=z$, e però $dx=dz$, $x^m=\overline{z\mp a}^m$, $\overline{x\pm a}^n=z^n$;

e

e sostituendo nella formola questi valori, sarà $\frac{\overline{z \mp a}^m dz}{z^n}$.

Fatta pertanto attualmente la potestà m, ciascun termine si saprà integrare, o algebraicamente, o transcendentemente per mezzo della logaritmica; quindi restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale della proposta formola $\frac{x^m dx}{\overline{x \pm a}^n}$.

Sia per esempio $\frac{x^3 dx}{\overline{x - a}^3}$. Pongo $x - a = z$, e però $dx = dz$, $x^3 = z^3 + 3azz + 3aaz + a^3$, $\overline{x - a}^3 = z^3$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^3 dz + 3azzdz + 3aazdz + a^3 dz}{z^3}$, ed integrando, $z + 3lz - \frac{3aa}{z} - \frac{a^3}{2zz}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, averemo finalmente $\int \frac{x^3 dx}{\overline{x - a}^3} = x - a + l\overline{x - a}^3 - \frac{3aa}{x - a} - \frac{a^3}{2 \times \overline{x - a}^2}$, il qual integrale differenziato restituirà la formola proposta da integrarsi.

20. Che se le radici del denominatore non saranno tutte eguali, ma o tutte disuguali, o miste d'uguali, e d'ineguali, allora conviene prima preparare la formola col rendere positivo il termine della massima

potestà della variabile nel denominatore, se fosse negativo, indi liberarlo da' coefficienti, se ne â, di poi se la variabile nel numeratore, quando vi sia, fosse elevata a potestà maggiore, o eguale alla massima, che â nel denominatore, debbesi dividere il numeratore per lo denominatore fin' a tanto, che l'esponente della variabile in quello sia minore, che in questo; in fine si trovino algebraicamente le radici del denominatore. Sia per cagion d'esempio la formola $\frac{-aadx}{aa-4xx}$. Mutando i segni, e dividendo per 4, sarà $\frac{\frac{1}{4}aadx}{xx-\frac{1}{4}aa}$, cioè $\frac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x-\frac{1}{2}a}\times\overline{x+\frac{1}{2}a}}$. Sia $\frac{aadx}{2xx+4ax+2bx+2ab}$, dividendo per 2, sarà $\frac{\frac{1}{2}aadx}{xx+2ax+bx+2ab}$, cioè $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}}$.

Se nel numeratore vi fosse stata la variabile, ed elevata a maggiore potestà, che nel denominatore, si avrebbe fatta l'attual divisione, per cui avremmo avuti degl' intieri, e de' rotti: gl' intieri si tratterebbero nelle maniere fin'ora spiegate; i rotti nella seguente.

21. Sia la frazione $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}}$, dico: che questa sarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali

quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori sieno: della prima il prodotto d'una delle radici nella differenza della quantità costante dell'altra radice, e della quantità costante della radice posta; della seconda sia il prodotto dell'altra radice nella differenza della costante della prima radice, e della costante di questa seconda, cioè $\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{b-2a}} + \frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+b}\times\overline{2a-b}}$, e se le radici fossero tre, quattro ec. si proceda sempre collo stesso metodo; ed in fatti riducendo al comune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, restituiranno esse la frazione prima onde sono nate.

Gl'integrali adunque di tali frazioni così spezzate, i quali saranno sempre in nostra mano, supposta la logaritmica, saranno gl'integrali della proposta formola, e però sarà

$$\int\frac{\frac{1}{2}aadx}{\overline{x+2a}\times\overline{x+b}} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\overline{x+b} - \frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\overline{x+2a},\ \text{cioè}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a}{2a-b}\, l\frac{x+b}{x+2a},\ \text{o sia}\ \frac{a}{2a-b}\, l\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+2a}}\ \text{nella logaritmica}$$

della sottangente $= a$.

Sia $\frac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{x-\frac{1}{2}a}}$: essa si spezzerà nelle

 due

due $\dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a}} + \dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x-\frac{1}{2}a}\times\overline{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a}}$,

cioè $\dfrac{\frac{1}{4}adx}{x-\frac{1}{2}a} - \dfrac{\frac{1}{4}adx}{x+\frac{1}{2}a}$, e però sarà

$\displaystyle\int \dfrac{\frac{1}{4}aadx}{\overline{x+\frac{1}{2}a}\times\overline{x-\frac{1}{2}a}} = \frac{1}{4}\,l\,\overline{\dfrac{x-\frac{1}{2}a}{x+\frac{1}{2}a}}$; o sia $=$

$l\dfrac{\sqrt[4]{x-\frac{1}{2}a}}{\sqrt[4]{x+\frac{1}{2}a}}$, nella logaritmica della sottangente $=a$.

Sia $\dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-b}\times\overline{x+c}}$, essa si spezzerà nelle tre

$\dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{-b-a}\times\overline{c-a}} + \dfrac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{a+b}\times\overline{c+b}} + \dfrac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{a-c}\times\overline{-b-c}}$,

e però sarà $\displaystyle\int \dfrac{a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-b}\times\overline{x+c}} = \dfrac{aa}{\overline{a+b}\times\overline{a-c}}\,l\,\overline{x+a} +$

$\dfrac{aa}{\overline{a+b}\times\overline{c+b}}\,l\,\overline{x-b} - \dfrac{aa}{\overline{a-c}\times\overline{b+c}}\,l\,\overline{x+c}$ nella logaritmica della sottangente $=a$.

Sia $\dfrac{-a^3dx}{x^3-aax}$, cioè $\dfrac{-a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{x-a}\times\overline{x+o}}$; essa

si

si spezzerà nelle tre

$$\frac{-a^3dx}{\overline{x+a}\times\overline{-2a}\times\overline{0-a}}\quad\frac{-a^3dx}{\overline{x-a}\times\overline{2a}\times\overline{0+a}}\quad\frac{-a^3dx}{\overline{x+0}\times\overline{a-0}\times\overline{-a-0}},$$

cioè $-\frac{adx}{2\times\overline{x+a}}-\frac{adx}{2\times\overline{x-a}}+\frac{adx}{x}$; e però sarà

$$\int\frac{-a^3dx}{x^3-aax}=lx-\tfrac{1}{2}l\overline{xx-aa}\text{, cioè }=l\frac{x}{\sqrt{xx-aa}}$$

nella logaritmica della sottangente $=a$.

22. Se il denominatore della formola sarà misto di radici eguali, ed ineguali, come per esempio $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}$, allora si consideri la formola, come se fosse $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{x+c}}$, e spezzata questa al solito, sarà

$$\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{x+c}}=\frac{a^3dx}{\overline{x-b}\times\overline{c+b}}+\frac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{-b-c}},$$

adunque, moltiplicando i denominatori per $x-b$, altra radice della proposta formola, sarà anco

$$\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}=\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{c+b}}+\frac{a^3dx}{\overline{x+c}\times\overline{x-b}\times\overline{-b-c}},$$

ma il primo termine dell'omogeneo di comparazione à il denominatore di radici tutte eguali, ed il secondo di radici tutte disuguali; adunque l'uno, e l'altro maneggiato, come si è detto, potremo avere l'integrale di $\frac{a^3dx}{\overline{x-b}^2\times\overline{x+c}}$, il quale sarà in parte algebraico, ed in in parte logaritmico, cioè $\frac{aa}{\overline{b+c}^2} l \frac{x+c}{x-b} \frac{-a^3}{\overline{x-b} \times \overline{b+c}}$, preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Se le radici eguali saranno in maggior numero, si dovrà nello stesso modo ripetere l'operazione fin che sia necessario.

23. Rimane ora da considerarsi il caso, in cui le frazioni abbiano in oltre nel numeratore la variabile a qualunque potestà, intendendo però sempre, come è stato avvertito di sopra, che la potestà di essa variabile nel numeratore sia minore della massima, che è nel denominatore, e non lo essendo, si riduca tale con l'attual divisione.

In questi casi si tratti la formola nello stesso modo, come se nel numeratore non vi fosse potestà alcuna della variabile, spezzandola nel modo spiegato in altrettante, quante sono le radici del denominatore, indi, se l'esponente della variabile nel numeratore della data formola è di numero dispari, si mutino i segni a' numeratori delle ritrovate frazioni, e se è di numero pari, si lascino ai numeratori quei segni che ànno; di poi ciascun numeratore si moltiplichi per tanta potestà della costante di quella radice, che è nel denominatore, quanta è la potestà della variabile nel numeratore della proposta formola, prefiggendo ad essa costante

stante elevata a tale potestà quel segno, che porta il segno naturale, che â nel denominatore.

Sia $\frac{bbxdx}{\overline{x+a} \times \overline{x-a}}$. Considerata questa, come se nel numeratore la variabile non vi fosse, si spezzerà nelle due $\frac{bbdx}{\overline{x+a} \times \overline{-2a}} + \frac{bbdx}{\overline{x-a} \times \overline{2a}}$; ma perchè nel numeratore vi è la variabile elevata alla potestà dell'unità, si mutino i segni a' numeratori, e si moltiplichino relativamente per la costante di quella radice, che è nel suo denominatore, cioè la prima per a, la seconda per $-a$, ed averemo

$$\frac{bbxdx}{\overline{x+a} \times \overline{x-a}} = \frac{-bbdx \times a}{\overline{x+a} \times \overline{-2a}} - \frac{bbdx \times -a}{\overline{x-a} \times \overline{2a}},$$

cioè $= \frac{bbdx}{2 \times \overline{x+a}} + \frac{bbdx}{2 \times \overline{x-a}}$, e però sarà

$$\int \frac{bbxdx}{\overline{x+a} \times \overline{x-a}} = b\, l \sqrt{x+a} + b\, l \sqrt{x-a}, \text{ o sia}$$

$= b\, l \sqrt{xx-aa}$, nella logaritmica della sottangente $= b$; o pure, se si vuole, sarà $= bb\, l \sqrt{xx-aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Ma era superfluo il ridurre questa formola alle due frazioni, poichè essendo essa $\frac{bbxdx}{xx-aa}$, il numeratore è appunto la metà del differenziale del denominatore, e

però

però senz' altra operazione l'integrale sarà, come al num. 17. si è detto, $bb\, l \sqrt{xx - aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Sia $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$, cioè $\frac{x^4 dx}{x^3 + bxx - aax - aab}$, e diviso il numeratore per lo denominatore, avremo $xdx - \frac{bx^3 dx + aaxxdx + aabxdx}{x^3 + bxx - aax - aab}$, e diviso di nuovo il termine $-bx^3 dx$ per lo denominatore, avremo $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} = xdx - bdx + \frac{aaxxdx + bbxxdx - aabbdx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$.

Ma i due primi termini sono intieri, e l'ultimo non à la variabile nel numeratore, e però si sa maneggiare; adunque rimane da ridursi solamente l'altro termine, cioè $\frac{\overline{aa + bb} \times xxdx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}}$.

Considerato questo, come se non avesse la variabile nel numeratore, sarebbe $\frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} =$ $\frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x + b} \times \overline{-aa + bb}} + \frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x + a} \times \overline{-2ab + 2aa}} + \frac{\overline{aa + bb} \times dx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$, e per tanto sarà $\frac{\overline{aa + bb} \times xxdx}{\overline{x + b} \times \overline{xx - aa}} = \frac{\overline{aa + bb} \times bbdx}{\overline{x + b} \times \overline{-aa + bb}} +$ $\frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x + a} \times \overline{-2ab + 2aa}} + \frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$, onde finalmen-
te

te poi $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} = xdx - bdx + \frac{- aabbdx}{\overline{x + b} \times \overline{xx - aa}} +$

$\frac{\overline{aa + bb} \times bbdx}{\overline{x + b} \times \overline{- aa + bb}} + \frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x + a} \times \overline{- 2ab + 2aa}} + \frac{\overline{aa + bb} \times aadx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$;

e ſe vogliamo ſpezzare anche il termine $\frac{- aabbdx}{\overline{x + b} \times \overline{xx - aa}}$,

per avere in fine l'integrale della propoſta formola, ſarà $\frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} = xdx - bdx + \frac{b^4 dx}{\overline{x + b} \times \overline{- aa + bb}} +$

$\frac{a^4 dx}{\overline{x + a} \times \overline{2aa - 2ab}} + \frac{a^4 dx}{\overline{x - a} \times \overline{2ab + 2aa}}$. Adunque integrando avremo $\int \frac{x^4 dx}{\overline{xx - aa} \times \overline{x + b}} = \frac{xx}{2} - bx -$

$\frac{b^4}{aa - bb} \, l \, \overline{x + b} + \frac{a^4}{2aa - 2ab} \, l \, \overline{x + a} + \frac{a^4}{2aa + 2ab} \, l \, \overline{x - a}$,

preſi tali logaritmi nella logaritmica della ſottangente $= 1$.

Così in queſte, come in tutte l'altre integrazioni, che ſi faranno, s'intenda doverſi aggiungere la coſtante, qualora ſarà da me per brevità ommeſſa, il che baſterà d'avere quì avvertito.

24. Ma le formole differenziali poſſono avere, e ſpeſſo ànno denominatori tali, de' quali non ſi poſſono ritrovare algebraicamente le radici, ciò non oſtante però ſerve egualmente bene la regola delle frazioni anche

che in queſti caſi; imperciocchè ſi tratti il denominatore, come ſe foſſe un' equazione, e col mezzo delle interſecazioni delle curve ſi trovino geometricamente in linee i valori della variabile in quella guiſa appunto, che ſi coſtruiſcono i problemi ſolidi, e tali valori o linee ſi chiamino A, B, C, ec. coi ſegni poſitivi, o negativi ſecondo, che ſono quantità poſitive, o negative; ciaſcuno di queſti ſottratto dalla variabile formerà le radici del denominatore di modo, che la propoſta formola differenziale ſi convertirà in una di queſta forma $\dfrac{x^n\,dx}{\overline{x-A}\times\overline{x+B}\times\overline{x-C}\ \text{ec.}}$, e ſopra di queſta nello ſteſſo modo ſi operi, come ſi è operato nel caſo delle radici algebraiche.

25. E' facile a vederſi, che l'addotta regola ſerve ſolamente nel caſo, che le radici del denominatore ſieno tutte reali, perchè altrimenti eſſendo, ſpezzata la formola in altre frazioni, tante di queſte ſarebbero immaginarie, ed in conſeguenza immaginarj gl' integrali, quante ſono le radici immaginarie nel denominatore della propoſta formola differenziale.

26. Quando adunque il denominatore delle propoſte formole differenziali ſia compoſto di radici immaginarie o in tutto, o in parte, fa d'uopo ricorrere ad altre maniere; ed in primo luogo abbiano le date for-

mole

mole il denominatore di due sole dimensioni, cioè di due radici immaginarie, e sia per esempio $\frac{bbdx}{xx+aa}$.

L'integrale di questa formola, e di tutte l'altre simili dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo: dissi rettificazione, o quadratura, poichè data l'una, è vicendevolmente data l'altra.

Sia pertanto (*Fig.* 4.) il quadrante di circolo ACG, il raggio $AC=a$, CD tangente $=x$, sarà $AB=\frac{aa}{\sqrt{aa+xx}}$,

$CB=a\frac{-aa}{\sqrt{aa+xx}}$, ed $EB=\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$.

Condotta AK infinitamente prossima ad AD, sarà EO la flussione, o differenza dell'arco CE; e tirata dal punto O la retta OM parallela ad EB, ed EH parallela ad AC, sarà HE la differenziale di CB, HO la differenziale di EB, e però $EH=\frac{aaxdx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}}$, ed

$HO=\frac{a^3dx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}}$; adunque l'archetto $EO=\sqrt{\overline{HE}^2+\overline{HO}^2}$

sarà $=\sqrt{\frac{a^6dx^2+a^4xxdx^2}{\overline{aa+xx}^3}}=\frac{aadx}{aa+xx}$; adunque l'integrale della formola $\frac{aadx}{aa+xx}$ sarà l'arco CE della tangente $CD=x$, e del raggio $CA=a$.

Ripiglio ora la formola $\frac{bbdx}{aa+xx}$: moltiplicando il numeratore, e denominatore per aa, sarà essa $\frac{bb}{aa} \times \frac{aadx}{aa+xx}$; ma l'integrale di $\frac{aadx}{aa+xx}$ è l'arco di circolo, che abbia per tangente la x, ed il raggio $= a$, sarà adunque $\int \frac{bbdx}{aa+xx} =$ al quarto proporzionale di aa, di bb, e dell'arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= x$.

Sia la formola $\frac{aamdx}{nxx+nab}$: come che moltiplicando il numeratore, e denominatore per b, equivale a quest' altra $\frac{am}{nb} \times \frac{abdx}{xx+ab}$, sarà $\int \frac{aamdx}{nxx+nab} =$ al quarto proporzionale di nb, di am, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{ab}$, e tangente $= x$; e lo stesso si dica di tutte l'altre simili.

27. Per l'opposto sarà adunque il differenziale di un'arco qualunque di circolo il prodotto del quadrato del raggio nella differenza della tangente diviso per la somma del quadrato dello stesso raggio, e del quadrato della tangente.

E come agl'altri integrali, o sommatorie devesi aggiungere sempre la costante, così a questi ancora di rettificazioni di circolo, per avere le sommatorie compite, devesi aggiungere un'arco costante dello stesso circolo,

circolo, imperciocchè la differenza per cui può crescere, o calare l'arco così composto del fluente, e del costante, non sarà mai altro che il differenziale dell'arco fluente; adunque ad esso differenziale può competere per integrale la somma dell'arco fluente con qualunque arco costante del medesimo circolo. Supponiamo, che sia $= x$ la tangente d'un'arco del raggio $= a$, e sia b la tangente di un'altro arco costante del medesimo circolo; si sa, che la tangente della somma di questi due archi (num. 108. Lib. I.) sarà $= \frac{aab + aax}{aa - bx}$, ma il differenziale di questa moltiplicato nel quadrato del raggio, ed il prodotto diviso per lo quadrato del raggio più il quadrato della stessa tangente si trova essere $\frac{aadx}{aa + xx}$, che è il differenziale dell'arco fluente; adunque ec.

Se fosse la formola $\frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb}$, essendo $xx - 2bx + bb$ un quadrato, si faccia $x - b = z$, e sostituendo avremo $\frac{aadz}{aa + zz}$, e però $\int \frac{aadz}{aa + zz}$ = all'arco di circolo del raggio $= a$, tangente $= z$, ma $z = x - b$; adunque $\int \frac{aadx}{aa + xx - 2bx + bb}$ = all'arco di circolo del raggio $= a$, tangente $= x - b$, qualora però sia x maggiore di b; ma presa x minore di b, l'integrale sarà $-$ arco di circolo col medesimo raggio, e tangente;

ed

ed in fatti differenziando, averemo $\frac{aadx}{aa + bb - 2bx + xx}$, la stessa formola di prima.

Sia proposta la formola $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$. Si faccia sparire il secondo termine nel denominatore col porre $x = y + 2a$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{4abdy + 3bydy + 6abdy}{yy + 2aa}$, cioè $\frac{10abdy}{yy + 2aa} + \frac{3bydy}{yy + 2aa}$.

L'integrale del primo termine sarà adunque il terzo proporzionale di a, di $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{2aa}$, tangente $= y$; del secondo sarà $l\,\overline{yy + 2aa}^{\frac{3}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $= b$. Adunque restituendo in luogo della y il suo valore $x - 2a$, l'integrale della formola $\frac{4abdx + 3bxdx}{xx - 4ax + 6aa}$ sarà il quarto proporzionale di a, $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{2aa}$, tangente $= x - 2a$, con di più $l\,\overline{xx - 4ax + 6aa}^{\frac{3}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $= b$.

28. Passando ora a quelle formole differenziali, che contengono segni radicali, cioè quantità elevate a potestà di esponente rotto, se la formola sarà, o si potrà

ridurre

ridurre ad esser tale, che l'incognita sotto il segno non ecceda la prima dimensione, e fuori del segno sia potestà positiva, allora saranno esse sempre algebraicamente integrabili, e si avranno le integrazioni col servirsi d'una semplicissima sostituzione, cioè col porre la quantità sotto il segno eguale ad una nuova variabile.

Sia per tanto $adx\sqrt{ax-aa}$. Si ponga $\sqrt{ax-aa}=z$, e però $x=\frac{zz+aa}{a}$, $dx=\frac{2zdz}{a}$, e fatte le sostituzioni, avremo $2zzdz$, ed integrando $\frac{2z^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{2}{3}\times\overline{ax-aa}^{\frac{3}{2}}$ l'integrale della proposta formola.

Se la formola fosse stata $\frac{adx}{\sqrt{ax-aa}}$, procedendo nello stesso modo averemmo per integrale $2\times\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}}$.

Sia $xdx\sqrt[4]{a-x}$; posta $\sqrt[4]{a-x}=z$, e però $x=a-z^4$, $dx=-4z^3dz$, e fatte le sostituzioni, avrassi $-4az^4dz+4z^8dz$, ed integrando $-\frac{4az^5}{5}+\frac{4z^9}{9}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $-\frac{4a}{5}\times\overline{a-x}^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{9}\times\overline{a-x}^{\frac{9}{4}}$.

Se la formola fosse stata $\frac{xdx}{\sqrt{a-x}}$, procedendo nello stesso modo avrebbesi per integrale $-\frac{4a}{3}\times\overline{a-x}^{\frac{3}{4}}+\frac{4}{7}\times\overline{a-x}^{\frac{7}{4}}$.

Sia $xxdx\sqrt{a+x}$; posta $\sqrt{a+x}=z$, e però $x=zz-a$, $dx=2zdz$, $xx=\overline{zz-a}^2$, e fatte le sostituzioni, avremo $\overline{zz-a}^2\times 2zzdz$, cioè $2z^6dz-4az^4dz+2aazzdz$, ed integrando, $\frac{2z^7}{7}-\frac{4az^5}{5}+\frac{2aaz^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà finalmente $\frac{2}{7}\times\overline{a+x}^{\frac{7}{2}}-\frac{4a}{5}\times\overline{a+x}^{\frac{5}{2}}+\frac{2aa}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$ l'integrale cercato.

Se la formola fosse $\frac{xxdx}{\sqrt{a+x}}$, sarebbe l'integrale $\frac{2}{5}\times\overline{a+x}^{\frac{5}{2}}-\frac{4a}{3}\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}+2aa\times\overline{a+x}^{\frac{1}{2}}$.

Sia $xdx\sqrt{\overline{a+x}^3}$, cioè $xdx\times\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$: posta al solito $\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}=z$, e però $x=z^{\frac{2}{3}}-a$, $dx=\frac{2}{3}z^{\frac{2}{3}-1}dz$,

e fatte

e fatte le sostituzioni, sarà $z^{\frac{2}{3}} - a \times \frac{2z^{\frac{2}{3}}dz}{3}$, cioè $\frac{2z^{\frac{4}{3}}dz}{3} - \frac{2az^{\frac{2}{3}}dz}{3}$, ed integrando, $\frac{2z^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{2az^{\frac{5}{3}}}{5}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{2}{7} \times \overline{a+x}^{\frac{7}{2}} - \frac{2a}{5} \times \overline{a+x}^{\frac{5}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{xdx}{\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}}$, averemmo per integrale $2\sqrt{a+x} + \frac{2a}{\sqrt{a+x}}$.

29. Generalmente: sia $ax^t dx \times \overline{a+x}^{\frac{m}{n}}$, e sieno gli esponenti t, m, n numeri intieri positivi; posta al solito $\overline{a+x}^{\frac{m}{n}} = z$, e però $a+x = z^{\frac{n}{m}}$, $dx = \frac{n}{m} z^{\frac{n-1}{m}} dz$, $x^t = \overline{z^{\frac{n}{m}} - a}^{\,t}$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà $\overline{z^{\frac{n}{m}} - a}^{\,t} \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}} dz$, e fatta attualmente la potestà t, ciascun termine, come è chiaro, sarà algebraicamente integrabile, ne' quali termini integrati restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale algebraico della proposta formola.

e 30.

30. Se l'eſponente m foſſe negativo di modo, che la quantità ſotto il ſegno paſſaſſe nel denominatore, nel qual caſo l'eſponente m viene ad eſſere poſitivo; cioè la formola foſſe $\frac{ax^t dx}{\overline{a+x}^{\frac{m}{n}}}$, fatte le ſteſſe ſoſtituzioni, averemmo $\overline{z^{\frac{n}{m}}-a}^{\,t} \times \frac{an}{m} z^{\frac{n-z}{m}} dz$, e fatta attualmente la poteſtà t, ſarebbe pure ogni termine algebraicamente integrabile, ſalvi que' caſi, ne' quali s'inſinui la poteſtà $z^{-1}dz$, che obbliga a' logaritmi.

Ma ſe l'eſponente t ſarà negativo, non ſaranno algebraicamente integrabili le due ſuddette formole, ſaranno bensì libere da' radicali, e ridotte alle quadrature del circolo, e dell'iperbola, come ſi vedrà a ſuo luogo.

31. Ma quand'anche la variabile ſotto il ſegno ſia elevata a qualunque poteſtà maggiore dell'unità, purchè la quantità fuori del ſegno ſia la preciſa differenziale, o una proporzionale qualunque alla differenziale della quantità ſotto il ſegno, per mezzo della ſteſſa ſempliciſſima ſoſtituzione ſi avranno gl' integrali delle formole differenziali, i quali integrali ſaranno ſempre algebraici, e però

Sia $2xdx\sqrt{xx+aa}$. Pongo $\sqrt{xx+aa}=z$, onde $xx+aa=zz$, $2xdx=2zdz$, e fatte le ſoſtituzioni,

avremo

avremo $2zzdz$, ed integrando $\frac{2z^3}{3}$, e restituendo il valore di z dato per x, sarà $\frac{2}{3} \times \overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2xdx}{\sqrt{xx+aa}}$, averemmo per integrale $2\sqrt{xx+aa}$.

Sia $\overline{2adx - 4xdx}\sqrt{ax - xx + bb}$, cioè $2 \times \overline{adx - 2xdx}\sqrt{ax - xx + bb}$. Pongo $\sqrt{ax - xx + bb} = z$, e però $ax - xx + bb = zz$, ed $adx - 2xdx = 2zdz$, e fatte le sostituzioni, averemo $4zzdz$, ed integrando $\frac{4z^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{4}{3} \times \overline{ax - xx + bb}^{\frac{3}{2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2adx - 4xdx}{\sqrt{ax - xx + bb}}$, averemmo per integrale $4 \times \overline{ax - xx + bb}^{\frac{1}{2}}$.

Sia $\overline{xxdx - \frac{2}{3}axdx}\sqrt[4]{x^3 - axx}$, cioè $\frac{\overline{3xxdx - 2axdx}}{3}\sqrt[4]{x^3 - axx}$. Pongo $\sqrt[4]{x^3 - axx} = z$, e però $z^4 = x^3 - axx$, e $3xxdx - 2axdx = 4z^3dz$, e

 fatte

fatte le sostituzioni, averemo $\frac{4z^4dz}{3}$, ed integrando, $\frac{4z^5}{15}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\frac{4}{15} \times \overline{x^3 - axx}^{\frac{5}{4}}$.

Se la formola fosse stata $\frac{3xxdx - 2axdx}{3\sqrt[4]{x^3 - axx}}$, averemmo per integrale $\frac{4}{9} \times \overline{x^3 - axx}^{\frac{3}{4}}$.

Sia $2xdx \sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}$, cioè $2xdx \times \overline{xx + aa}^{\frac{2}{3}}$; pongo $\overline{xx + aa}^{\frac{2}{3}} = z$, e però $xx + aa = z^{\frac{3}{2}}$, e $2xdx = \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2} - 1} dz$, e fatte le sostituzioni, averemo $\frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}} dz$, ed integrando $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, $\frac{3}{5} \times \overline{xx + aa} \sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}$.

Se la formola fosse $\frac{2xdx}{\sqrt[3]{\overline{xx + aa}^2}}$, averemmo per integrale $3\sqrt[3]{xx + aa}$.

Sia

Sia generalmente la formola $px^{m-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, in cui p, ed m possono anche essere numeri rotti; pongo $\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}} = z$, e però $z^{\frac{u}{n}} = x^m + a^m$, ed $mx^{m-1}dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo $\frac{pu}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$, ed integrando, $\frac{pu}{mu + mn} \times z^{\frac{u+n}{n}}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, averemo per integrale $\frac{pu}{mu + mn} \times \overline{x^m + a^m} \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse $\frac{px^{m-1}dx}{\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}$, in cui n è positivo, averemmo per integrale $\frac{pu}{mu - mn} \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{u-n}{u}}$.

Quindi formeremo la regola generale, che l'integrale di tali formole sarà la quantità sotto al segno, accrescendo dell'unità l'esponente, e dividendola per esso esponente così accresciuto, o pure l'integrale sarà un proporzionale di questo, secondo la proporzione, che averà la quantità differenziale fuori del segno al differenziale preciso.

32.

32. Ma più generalmente ancora: sia la formola $px^{rm-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, supposto però r numero intiero, e positivo. Essa equivale a quest'altra $px^{rm-m} \times x^{m-1}dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$; pongo al solito $z = \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$, e però $x^m + a^m = z^{\frac{u}{n}}$, ed $mx^{m-1}dx = \frac{u}{n} z^{\frac{u}{n}-1} dz$; e perchè $x^m = z^{\frac{u}{n}} - a^m$, sarà pure $x^{rm-m} = \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{r-1}$. Fatte adunque le sostituzioni, averemo $p \times \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{r-1} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u}{n}} dz$. Ma posto r numero intiero, e positivo, sarà pure $r-1$ intiero, e positivo, adunque fatta attualmente la potestà $r-1$, ciascun termine sarà algebraicamente integrabile, nel qual integrale restituito in luogo di z il valore dato per x, averemo l'integrale della proposta formola.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse $\frac{px^{rm-1}dx}{\overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}$, in cui n è positivo, fatte le sostituzioni,

sarebbe

farebbe $p \times \overline{z^{\frac{u}{n}} - a^m}^{\,r-1} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{u-2}{n}} dz$ parimente integrabile, e però ec.

Se in tutti questi casi la quantità sotto il vincolo in luogo di essere $x^m + a^m$ fosse $x^m - a^m$, o pure $a^m - x^m$, si proceda nello stesso modo, che ciò nulla turba l'operazione.

Con questo metodo troveremo per tanto, che sarà

$$\int ax^{m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = \frac{2a}{3mf} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{2a}{mf} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{2m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = \frac{-4e+6fx^m}{15mff} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{2m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{-4e+2fx^m}{3mff} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{3m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = a \times \frac{16ee - 24efx^m + 30ffx^{2m}}{105f^3m} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{3m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{16ee - 8efx^m + 6ffx^{2m}}{15mf^3} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}},$$

e così

e così di mano in mano quanti altri ſi vuole.

33. Ancora nel caſo, che la variabile fuori del ſegno ſia nel denominatore, la formola sarà algebraicamente integrabile col mezzo di due ſoſtituzioni, purchè l'eſponente di eſſa variabile fuori del ſegno abbia una condizione, cioè la formola ſia $\dfrac{dx \times \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}}{x^{rm + \frac{mn}{u} + 1}}$. Si faccia

$$x = \frac{aa}{y}, \quad dx = -\frac{aady}{yy}, \quad x^m = \frac{a^{2m}}{y^m}, \quad \overline{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}} = \frac{\overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{y^{\frac{mn}{u}}}$$

. Fatte le ſoſtituzioni, sarà la formola

$$\frac{-aady \times \overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{yy \times y^{\frac{mn}{u}} \times \dfrac{a^{2rm + \frac{2mn}{u} + 2}}{y^{rm + \frac{mn}{u} + 1}}}$$

cioè $\dfrac{\overline{a^{2m} + a^m y^m}^{\frac{n}{u}}}{a^{2rm + \frac{2mn}{u}}} \times -y^{rm-1} dy$,

formola, che â le condizioni quì ſopra ricercate, e che per mezzo della ſoſtituzione notata (num. 32.) s'integrerà algebraicamente.

Se

Se fosse proposta la formola $\frac{a^3 dx}{x^4 \sqrt{ax + xx}}$, cioè $\frac{a^3 dx}{x^{\frac{9}{2}} \sqrt{a + x}}$, avendo questa le condizioni ricercate, sarà algebraicamente integrabile, e ciò si osservi d'altre ancora.

34. Ma quì avvertasi, che nella formola generale la u può anche essere eguale all'unità, nel qual caso la potestà di $x^m + a^m$ sarà razionale, cioè intera.

Anche in questo caso, supposta la n quantità negativa, (giacchè quando è positiva non involve difficoltà alcuna) si può fare uso della stessa sostituzione, e del medesimo metodo, con cui troveransi gl'integrali delle formole, i quali integrali però non saranno sempre algebraici, anzi per lo più dipenderanno in parte dalla quadratura dell'iperbola, cioè dalla logaritmica.

Col noto metodo adunque troveremo, che

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = -\frac{1}{m} \times \overline{x^m + a^m}^{\,-1}$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = \frac{1}{m}\, l\, \overline{a^m + x^m} + \frac{a^m}{m \times \overline{a^m + x^m}}$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{\overline{x^m + a^m}^{\,2}} = \frac{a^m + x^m}{m} - \frac{2a^m\, l\, \overline{a^m + x^m}}{m} - \frac{a^{2m}}{m \times \overline{a^m + x^m}}$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^3} = \frac{-1}{2m \times \overline{a^m + x^m}^2}$$

$$\int \frac{x^{2m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^3} = \frac{-1}{m \times \overline{a^m + x^m}} + \frac{a^m}{2m \times \overline{a^m + x^m}^2}$$

$$\int \frac{x^{3m-1}dx}{\overline{a^m + x^m}^3} = \frac{1}{m} l\, \overline{a^m + x^m} + \frac{2a^m}{m \times \overline{a^m + x^m}} - \frac{a^{2m}}{2m \times \overline{a^m + x^m}^2},$$

e quant' altri ſi vuole.

35. Ma è bene molto diverſa la facenda allora quando le propoſte formole differenziali, che contengono radicali, non ſono tali, che la quantità fuori del ſegno abbia quelle condizioni da me quì ſopra accennate. Queſte formole potranno ſempre liberarſi dai radicali, purchè un ſolo ne contengano, il quale ſia di radice quadrata, e la incognita ſotto di eſſo non ecceda la ſeconda dimenſione; ma per queſte fa d'uopo di qualche rifleſſione nella ſcelta delle ſoſtituzioni da farſi, acciò ſi liberino da' ſegni radicali; il che fatto, ſi paſſa alle integrazioni, o algebraiche, o dipendenti dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola nelle maniere ſpiegate, ſe alle date regole ſaranno ſottopoſte; ſe no, ſi rapporteranno ad altri canoni, che ſono per dare in breve.

Se adunque la radicale della propoſta formola foſſe $\sqrt{ax \pm xx}$, o pure $\sqrt{xx \pm ax}$, eſſa radicale ſi ponga ga $= \frac{xz}{b}$, intendendo per z una nuova variabile, e per b una costante qualunque.

Se la radicale fosse $\sqrt{xx \pm aa}$, si ponga la radicale $= x + z$, ovvero, se si vuole, $= x - z$.

Se la radicale fosse $\sqrt{aa - xx}$, o sia $\sqrt{fp - xx}$ si ponga la radicale $= \sqrt{fp} + \frac{xz}{b}$, o pure $= \sqrt{fp} - \frac{xz}{b}$. Da queste così fatte equazioni si ricavi il valore di x, e di dx, che si averanno dati per z, e le costanti; questi valori si sostituiscano nelle date formole, e si averanno libere dai segni radicali altre formole date per z, nelle sommatorie delle quali, se si potranno avere, restituito il valore di z dato per x, si averanno le sommatorie delle formole proposte.

36. Se la quantità avesse tre termini, cioè il quadrato della variabile col rettangolo di essa nella costante, e di più il termine tutto costante, allora o si levi il secondo termine nella solita maniera dell'algebra cartesiana, o pure, se il termine costante è positivo, come se fosse $\sqrt{xx + ax + aa}$, comunque sieno positivi, o negativi gl'altri, purchè non sia immaginaria la quantità, si faccia $\sqrt{xx + ax + aa} = a + \frac{xz}{b}$; e se il ter-

mine costante è negativo, come a dire $\sqrt{xx + ax - aa}$, si faccia $\sqrt{xx + ax - aa} = x + z$.

Da ciò si vede, che tutto l'artifizio consiste in paragonare la quantità radicale ad una tale quantità composta della data variabile, e di una nuova colle costanti, sicchè ne risulti un'equazione, da cui si possa avere il valore di x, e di dx libero da' segni radicali.

Sia proposta da sommarsi la formola differenziale $x^3 dx \sqrt{ax - xx}$. Pongo $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però $a - x = \frac{xzz}{bb}$, cioè $x = \frac{abb}{zz + bb}$, e $dx = -\frac{2abbzdz}{\overline{zz + bb}^2}$, $x^3 = \frac{a^3 b^6}{\overline{zz + bb}^3}$, e $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà essa $-\frac{2a^5 b^9 zzdz}{\overline{zz + bb}^6}$, formola bensì libera da' segni radicali, ma che però, ciò non ostante, non si sa coi dati metodi maneggiare rispetto alle sommazioni.

Sia $\frac{aadx}{x\sqrt{ax + xx}}$. Pongo $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b}$, e però sarà $x = \frac{abb}{zz - bb}$, $dx = -\frac{2abbzdz}{\overline{zz - bb}^2}$, $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz - bb}$.

Fatte

Fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà essa $-\frac{2adz}{b}$, ed integrando, $-\frac{2az}{b}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\int\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}}$. Pongo $\sqrt{ax+xx} = \frac{xz}{b}$, e fatte le necessarie sostituzioni, come qui sopra, la formola sarà $-\frac{2ab^3 dz}{\overline{zz-bb}^2}$, cioè $-\frac{2ab^3 dz}{\overline{z+b}^2 \times \overline{z-b}^2}$, ma questa già si fa maneggiare con la regola delle frazioni, ed avrà per sommatoria $\frac{abz}{zz-bb} + \frac{1}{2}a\, l\,\frac{z-b}{z+b}$ nella logaritmica della sottangente eguale all'unità; e restituendo in luogo di z il valore dato per x, sarà $\int\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}} = \sqrt{ax+xx} + \frac{a}{2}\, l\,\frac{\sqrt{ax+xx}-x}{\sqrt{ax+xx}+x}$ nella logaritmica della stessa sottangente $= 1$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}}$. Pongo $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z$, e però sarà $x = \frac{zz+aa}{a-2z}$, $dx = \frac{2azdz - 2zzdz + 2aadz}{\overline{a-2z}^2}$, e $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z = \frac{aa+az-zz}{a-2z}$. Fatte le so-

stitu-

ſtituzioni, ſarà la propoſta formola $\frac{\overline{zz+aa}\times 2dz}{\overline{a-2z}^2}$, cioè $\frac{2zzdz+2aadz}{\overline{a-2z}^2}$, ed integrando, il che per le date regole ſi può fare, $\frac{5aa}{4\times\overline{a-2z}} - \frac{a+2z}{4} + \frac{a}{2}\, l\,\overline{a-2z}$ nella logaritmica della ſottangente $=1$, e reſtituendo in luogo di z il valore dato per x, ſarà finalmente

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}} = \frac{5aa}{4\times\overline{a+2x-2\sqrt{xx+ax-aa}}} - \frac{a-2x+2\sqrt{xx+ax-aa}}{4} + \frac{2a}{4}\, l\,\overline{a+2x-2\sqrt{xx+ax-aa}}$$

nella logaritmica della ſteſſa ſottangente eguale all'unità.

37. Affatto ſuperflua intorno ad alcune formole differenziali radicali ſarà la fatica di traſmutarle per mezzo dell'accennate ſoſtituzioni in altre libere da' ſegni radicali, e così prepararle per le integrazioni, e ciò per tutte quelle, che di natura ſua involvono quadratura, o rettificazione di circolo; perchè ſebbene ſi convertiranno in altre eſenti da' radicali, queſte però ci porteranno allo ſteſſo circolo. E però ſia (*Fig.* 5.) il ſemicircolo GMD, AD raggio $=a$, $AB=x$, onde $BF=\sqrt{aa-xx}$, e fatta CH infinitamente proſſima a BF,

BF, sarà $BC = dx$, $EF = \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. Adunque l'espressione del rettangolo infinitesimo $BCHE$ sarà $dx\sqrt{aa - xx}$, e però $\int dx\sqrt{aa - xx} =$ allo spazio $ABFM$. Sarà pure $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ l'espressione dell'archetto infinitesimo FH, e però $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} =$ all'arco MF. E se l'archetto FH si moltiplicherà per la metà del raggio, sarà $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ espressione del settore infinitesimo AFH, e però $\int \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} =$ al settore AFM.

Sia ora, nel medesimo circolo, $DC = x$, e $CB = dx$, sarà $CH = \sqrt{2ax - xx}$, $EF = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Pertanto $\int dx\sqrt{2ax - xx}$ sarà $=$ allo spazio HCD. Così $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} =$ all'arco HD, e $\int \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} =$ al settore AHD. In queste adunque sarà superflua la fatica; imperciocchè nel primo caso pongo $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{b}$, e pe-

rò

rò $x = \frac{2abz}{zz + bb}$, $dx = \frac{2ab^3dz - 2abzzdz}{\overline{zz + bb}^2}$; $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{b} = \frac{abb - azz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = \frac{2abdz}{zz + bb}$, formola di rettificazione di circolo, la di cui tangente $= z$, come già si è veduto al num. 26.

Sarà pure $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{aabdz}{zz + bb}$, formola, che involve la stessa rettificazione.

Istessamente sarà $dx\sqrt{aa - xx} = \frac{2aabdz \times \overline{bb - zz}^2}{\overline{zz + bb}^3}$, formola, che sebbene non si sa per ora maneggiare, si vedrà però in appresso dipendere dallo stesso circolo.

Nel secondo caso pongo $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però $x = \frac{2abb}{zz + bb}$, $dx = -\frac{4abbzdz}{\overline{zz + bb}^2}$, e $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz + bb}$. Fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{2abdx}{zz + bb}$, rettificazione di circolo.

Sarà pure $\frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{aabdz}{zz + bb}$, rettificazione di circolo come sopra.

Istessa-

Isteſſamente ſarà $dx\sqrt{2ax-xx}=-\frac{8aab^3zzdz}{\overline{zz+bb}^3}$,

che involve lo ſteſſo circolo.

38. Se le noſtre formole differenziali ſaranno compoſte di due quantità radicali, l'operazione ſarà in queſto caſo raddoppiata, ma ſuccederà egualmente bene, purchè nelle quantità radicali manchi, o ſia tolto il ſecondo termine, e la formola ſia moltiplicata per una potestà diſpari dell'incognita; e ciò col porre una delle quantità radicali eguale ad una nuova variabile, e così la propoſta formola ſarà ridotta ad un'altra, che conterrà una ſola radicale, e che per conſeguenza ſi maneggierà nella ſolita maniera.

Sia per eſempio $\frac{x^3dx\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{bb+xx}}$. Pongo $\sqrt{aa+xx}=y$, e però $xx=yy-aa$, $xdx=ydy$. Fatte le ſoſtituzioni, ſarà $\frac{yydy\times\overline{yy-aa}}{\sqrt{yy-aa+bb}}$, cioè $\frac{y^4dy}{\sqrt{yy-aa+bb}}-\frac{aayydy}{\sqrt{yy-aa+bb}}$, ciaſcheduna delle quali ſi ſa maneggiare.

39. Per poco, che ſi rifletta a queſta maniera di operare, è facile a conoſcere, che in queſte formole radicali non ſuccederà di poterle generalmente liberare dal vincolo radicale, ſe non quando ſia radice quadrata, e la incognita ſotto il vincolo non ecceda la ſeconda dimenſione. Diſſi generalmente, perchè

perchè in parecchj casi succede la facenda, qualunque siasi il segno radicale, e qualunque la potestà dell'incognita sotto il segno, e certamente in tutti i casi compresi dalle due seguenti formole, la prima delle quali sarà $\frac{dy \times \overline{y^m + b^m}^{\pm \frac{t}{n}}}{y^{tm+1}}$, in cui m, n, t sono numeri intieri, e positivi, e possono anche essere zero, e ciò s'ottiene facendo $\overline{y^m + b^m}^{\frac{1}{n}} = z$, e però $y^m = z^n - b^m$, $dy = \frac{nz^{n-1}dz}{my^{m-1}}$, onde fatte le sostituzioni, sarà $\frac{nz^{n-1}dz \times z^{\pm t}}{my^{tm+m}}$, cioè $\frac{nz^{n-1}dz \times z^{\pm t}}{my^{\overline{t+1} \times m}}$, ma $y^{\overline{t+1}\times m} = \overline{z^n - b^m}^{t+1}$, e quando t sia numero intiero, sarà intiera la potestà $t+1$; adunque la proposta formola sarà libera da' radicali.

Se t fosse negativo, la formola sarebbe il caso di sopra considerato al numero 32., che â integrale algebraico.

Negl' altri casi l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo, e dell' iperbola, come si vedrà a suo luogo.

La seconda formola è $y^n dy \times \overline{y^m + b^m}^{\pm \frac{t}{p}}$, la quale,

quale, quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, si potrà sempre liberare da' segni radicali, o in tutto, o almeno da' radicali di quantità complesse, il che basta. Si faccia per tanto $\overline{y^m+b^m}^{\frac{t}{p}}=z$, e però sarà $y^m=z^{\frac{p}{t}}-b^m$, $y=\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{1}{m}}$, $dy=\frac{\frac{p}{t}z^{\frac{p}{t}-1}dz\times\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{1}{m}-1}}{m}$, ed $y^n=\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{n}{m}}$, e fatte le sostituzioni, averemo la formola $\frac{pz^{\frac{p}{t}-1}dz}{tm}\times z^{\pm 1}\times\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{1}{m}+\frac{n}{m}-1}$, ma quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero, sarà sempre intiera la potestà $\frac{1+n}{m}-1$, adunque la formola non avrà mai segni radicali di quantità complesse. E però quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero, e positivo, l'integrale al più dipenderà dalla quadratura dell'iperbola, o sia dalla logaritmica, e si potrà avere per le regole date; e quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero negativo, l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola, e si averà per le regole da darsi a suo luogo.

40. Passando ora a quelle formole, che essendo frazioni

frazioni libere da' radicali, nel denominatore di esse (che suppongo composto di radici immaginarie, poichè in queste sole stà la difficoltà) la incognita sia elevata a qualunque potestà, dico: che ogni qual volta il denominatore sia riducibile in componenti reali, ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione, si potrà sempre spezzare la formola in tante frazioni, quanti sono i suddetti componenti reali, ciascuna delle quali sarà integrabile, supposte le quadrature del circolo, e dell' iperbola, ed in conseguenza la proposta formola sarà sempre riducibile alle stesse quadrature. Per lo che fare: sia proposta la formola

$$\frac{aadx}{\overline{xx+ax+bb} \times \overline{xx+cx+cb}}$$, si finga un' equazione, cioè, che sia

$$\frac{aadx}{\overline{xx+ax+bb} \times \overline{xx+cx+cb}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+cx+cb}$$, nella quale formola le majuscole A, B, C, D sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso.

Così se fosse la formola

$$\frac{abdx}{\overline{xx+ax+bb} \times \overline{xx \pm aa} \times \overline{x \pm c}}$$, si faccia

abdx

$$\frac{abdx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx\pm aa} + \frac{Hdx}{x\pm c}$$; e coll'istesso ordine si proceda, se i componenti del denominatore fossero in maggior numero. Il che fatto, si riducano allo stesso denominatore i termini di queste equazioni, e finalmente con la trasposizione si riduca l'equazione al zero, indi col paragone de' primi termini al zero si ritroverà il valore dalla assunta A; col paragone de' secondi, terzi, quarti ec. si troveranno i valori delle assunte B, C, D, ec. dati per le costanti della proposta formola, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole A, B, C, D ec. nella equazione, ci somministreranno tante frazioni, le quali equivagliono alla proposta, ed in fatti, ridotte al comune denominatore, appunto restituiranno la formola da prima proposta.

Prendiamone un' esempio. Sia proposta da integrarsi la formola $\frac{aadx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}}$.

Fingo adunque, che sia

$$\frac{aadx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+2ax-aa} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+aa}.$$

Riduco adunque al comune denominatore l'equazione, indi col trasportare il termine $aadx$, la riduco al al zero, e si trova essere

$$\begin{array}{l} Ax^3dx + Bxxdx + Aaaxdx + Baadx \\ Cx^3dx + Dxxdx + 2Daxdx - Daadx = 0. \\ \qquad + 2Caxxdx - Caaxdx - aadx \end{array}$$

Per tanto dal paragone de' primi termini al zero si averà $A + C = 0$, cioè $A = -C$; de' secondi $B + D + 2Ca = 0$, cioè ponendo $-A$ in luogo di C, $B = 2Aa - D$; de' terzi $Aaa + 2Da - Caa = 0$, cioè $C = A + \frac{2D}{a}$; degl' ultimi $Baa - Daa - aa = 0$, cioè ponendo in luogo di B il valore dato per D, e per A, sarà $D = Aa - \frac{1}{2}$; adunque sarà $C = \frac{3Aa - 1}{a}$, ma $C = -A$, e però $A = \frac{1}{4a}$, $D = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = -\frac{1}{4a}$, onde avremo finalmente

$$\frac{aadx}{xx + 2ax - aa \times \overline{xx + aa}} = \frac{xdx + 3adx}{4a \times \overline{xx + 2ax - aa}} - \frac{xdx - adx}{4a \times \overline{xx + aa}}.$$

Ma l'omogeneo di comparazione, facendo sparire ove fa d'uopo il secondo termine dal denominatore, è integrabile con le quadrature del circolo, e dell' iperbola, il di cui integrale con le date regole si troverà essere $\frac{1}{4a} l\sqrt{xx + 2ax - aa} + \frac{1}{2\sqrt{2aa}} l\sqrt{x + a - \sqrt{2aa}} - \frac{1}{2\sqrt{2aa}} l\sqrt{x + a + \sqrt{2aa}} - \frac{1}{4a} l\sqrt{xx + aa}$, sottraendo

in

in oltre da questi logaritmi il quarto proporzionale di $4aa$, dell' unità, e dell'arco di circolo, che abbia il raggio $= a$, e la tangente $= x$. Adunque l'integrale di questa formola non dipende da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

41. Se in oltre la frazione sarà moltiplicata in una qualunque potestà dell'incognita, la quale potestà sia positiva, come se fosse l'equazione

$\frac{aax^n\,dx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}}$, si faccia

$$\frac{aax^n\,dx}{\overline{xx+2ax-aa}\times\overline{xx+aa}} = \frac{Ax^{n+1}dx + Bx^n\,dx}{xx+2ax-aa} + \frac{Cx^{n+1}dx + Dx^n\,dx}{xx+aa}$$

, e si trovino nello stesso modo, come sopra, i valori delle majuscole A, B, C ec., o pure si operi, come se la detta potestà non vi fosse, e le risultanti frazioni si moltiplichino per la stessa potestà, ed avremo parimenti altrettante frazioni, che non esiggeranno quadrature superiori a quelle del circolo, e dell'iperbola, e che si sapranno maneggiare colle date regole.

42. E se la potestà della variabile sarà negativa, cioè, se sarà positiva nel denominatore, per questa potestà si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni risultanti, e saranno della seguente forma.

Sia

Sia per esempio $\dfrac{x^{-n}dx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}}$, risoluta questa, come se non vi fosse la x^{-n}, ed indi moltiplicando ogni termine per x^{-n}, sarà

$$\frac{x^{-n}\,dx}{\overline{xx+ax+bb}\times\overline{xx\pm aa}\times\overline{x\pm c}} = \frac{Axdx+Bdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}} + \frac{Cxdx+D\,dx}{\overline{xx\pm aa}\times x^{n}} + \frac{Hdx}{\overline{x\pm c}\times x^{n}}$$

, intendendo già per le majuscole que' tali valori ritrovati con la data maniera, che rendano la somma di queste frazioni eguale alla proposta.

L'ultima frazione non avrà bisogno d'altro artifizio, perchè si saprà integrare colle date regole.

Quanto alla prima: sia per chiarezza d'esempio $A = aa$, $B = abb$, onde si esprima così $\dfrac{aaxdx+abbdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}}$, si faccia

$$\frac{aaxdx+abbdx}{\overline{xx+ax+bb}\times x^{n}} = \frac{Mxdx+N\,dx}{xx+ax+bb} + \frac{Px^{n-1}dx+Hx^{n-2}dx+Ex^{n-3}dx \text{ ec.}}{x^{n}}$$

così proseguendo sino, che l'ultimo termine sia costante, cioè zero la potestà dell'incognita x. Ridotte queste frazioni al comune denominatore, e ridotta al zero l'equazione,

zione, averemo, come s'è fatto di ſopra, i valori delle majuſcole. Lo ſteſſo ſi faccia riſpetto all'altra frazione $\frac{Cxdx + Ddx}{\overline{xx \pm aa} \times x^n}$, e troveraſſi finalmente l'integrale de la propoſta formola.

E però generalmente, ſuppoſte le ſole quadrature del circolo, e dell' iperbola, ſi potrà ſempre avere l'integrale della formola $\frac{x^{\pm n} dx}{\overline{xx + ax + bb} \times \overline{xx \pm aa} \times \overline{x \pm c} \text{ ec.}}$, comunque ſieno i componenti reali del denominatore, purchè in eſſi la incognita non ecceda la ſeconda dimenſione.

43. Ma ſe il denominatore della propoſta formola, o frazione non ſarà riſoluto ne' ſuoi componenti reali, ne' quali l'incognita non ecceda la ſeconda dimenſione, nè tale ſi potrà ridurre colle regole ordinarie dell' algebra, ſi potrà ſempre però con un poco d'artifizio ridurlo tale, ogni qual volta egli ſia una formola convertibile, o pure il prodotto di più formole convertibili. Formole convertibili chiamerò quelle, nelle quali la variabile abbia il maſſimo numero delle ſue dimenſioni pari affermativo, quale ſia per eſempio n, l'ultimo termine ſia a^n, indi i termini equidiſtanti da quello di mezzo abbiano il medeſimo coefficiente, ed affetto dal medeſimo ſegno, ſupplite le dimenſioni colla coſtante,

da cui è formato l'ultimo termine; tale sarebbe la formola $x^6 + a^6$, o pure l'altra $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4$, o l'altra $x^6 - bx^5 + b^3 x^3 - a^4 bx + a^6$. Che se fosse $x^5 + bx^4 + a^4 x + a^4 b$, si scriva essa nell'equivalente forma $\overline{x^4 + a^4} \times \overline{x + b}$, in cui $x^4 + a^4$ è formola convertibile, ed $x + b$ è lineare, che non apporta difficoltà alcuna. Lo stesso s'intenda d'infinite altre.

44. Abbiasi ora adunque $x^m - a^m$ da risolvere in componenti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, e che non abbia esponenti rotti, e sia in primo luogo m numero intiero affermativo pari. In tal caso sarà egli divisibile in $x^{\frac{1}{2}m} + a^{\frac{1}{2}m}$, ed $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$ senza frazione negl'esponenti, per essere m numero intiero pari. Il primo divisore si risolverà per le regole, che si daranno fra poco per il binomio $x^m + a^m$. Il secondo $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$, se $\frac{1}{2}m$ sarà numero pari, si risolverà nuovamente in $x^{\frac{1}{4}m} + a^{\frac{1}{4}m}$, ed $x^{\frac{1}{4}m} - a^{\frac{1}{4}m}$ senza frazione negl' esponenti. Ma se $\frac{1}{2}m$ sarà numero dispari, si risolverà per le regole da prescriversi per il binomio $x^m - a^m$ quando m è numero dispari.

Sia in secondo luogo $x^m + a^m$, e sia m numero intiero affermativo pari, nel qual caso la formola è con-

convertibile. Si supponga $x^m + a^m = 0$, indi si formi una formola convertibile, in cui il massimo esponente di x sia $m - 2$, e che abbia tutti i termini, e l'ultimo termine sia a^{m-2}, ed il coefficiente del secondo termine sia per esempio b, quello del terzo sia cc, quello del quarto d^3 ec., e questa si paragoni al zero, onde ne risulti un'equazione. Tale equazione si moltiplichi per $xx + fx + aa$; il prodotto sarà un'altra equazione convertibile, in cui l'esponente massimo di x sarà $= m$. Questa equazione si paragoni termine per termine coll'equazione fittizia $x^m + a^m = 0$, in cui i coefficienti de' termini intermedj sono $= 0$, e cavando dal paragone de' secondi termini il valore dell'assunta b, dal paragone de' terzi il valore dell'assunta cc, da quello de' quarti il valore dell'assunta d^3, e così fino al termine di mezzo, compreso anche questo (giacchè di là dal medio l'altre equazioni tornerebbero le medesime, per essere le equazioni, che si paragonano, convertibili) da quest'ultimo si caverà il valore di f espresso con una equazione, che avrà numero $\frac{m}{2}$ dimensioni, di cui tutte le radici saranno reali, e ci daranno i valori di f, che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$ daranno altrettanti trinomj, il prodotto de' quali restituirà il proposto binomio $x^m + a^m$.

Sia $x^4 + a^4$. Prendo un' equazione convertibile del secondo grado $xx + bx + aa = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne ricavo un' altra equazione convertibile $\begin{array}{l} x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 \\ \quad + fx^3 + bfxx + aabx \end{array} = 0$. Paragono questa con la fittizia $x^4 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$, cioè $b = -f$; dal paragone de' termini di mezzo trovo $2aa + bf = 0$, e sostituito in luogo di b il suo valore $-f$, trovo $ff - 2aa = 0$, onde $f = \pm\sqrt{2aa}$.

Sia $x^6 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne risulta l'equazione

$$\begin{array}{l} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabx^3 + a^4xx + a^4fx + a^6 \\ \quad + fx^5 + bfx^4 + fccx^3 + aabfxx + a^4bx \\ \qquad + aax^4 \qquad\qquad + aaccxx \end{array} = 0.$$

Paragono questa con la fittizia $x^6 + a^6 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, cioè sostituendo il valore di b, $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + fcc = 0$, cioè sostituendo in luogo di b, e di cc i suoi valori, $f^3 - 3aaf = 0$.

Facendo attualmente queste operazioni si troverà adunque, che

Se $m = 4$, sarà $ff - 2aa = 0$.
Se $m = 6$, sarà $f^3 - 3aaf = 0$.
Se $m = 8$, sarà $f^4 - 4aaff + 2a^4 = 0$.

Se

Se $m = 10$, sarà $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4 f = 0$.

Se $m = 12$, sarà $f^6 - 6aaf^4 + 9a^4 ff - 2a^6 = 0$.

Se $m = 14$, sarà $f^7 - 7aaf^5 + 14a^4 f^3 - 7a^6 f = 0$,

e così si può procedere per gli altri valori pari di m.

In luogo di $x^4 + a^4$, sia $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$, formola pure convertibile. Moltiplico l'equazione convertibile $xx + bx + aa = 0$ per $xx + fx + aa = 0$, ed averò, come sopra,

$$\begin{array}{l} x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 = 0. \\ \quad\;\; + fx^3 + bfxx + aabx \end{array}$$

Paragono questa con l'equazione fittizia $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 2b$, cioè $b = 2b - f$; dal paragone de' medj trovo $2aa + bf = 0$, e sostituendo in luogo di b il suo valore, si à $2aa + 2bf - ff = 0$, cioè $ff - 2bf - 2aa = 0$.

Sia $x^6 + a^3 x^3 + a^6$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$; la moltiplico per $xx + fx + aa$, ed avrò

$$\begin{array}{l} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2aabx^3 + a^4 xx + a^4 fx + a^6 \\ \quad\;\; + fx^5 + bfx^4 + ccfx^3 + aabfxx + a^4 bx \qquad = 0. \\ \qquad\qquad + aax^4 \qquad\qquad + aaccxx \end{array}$$

Paragonata questa con l'equazione $x^6 + a^3 x^3 + a^6 = 0$, trovo dal paragone de' secondi termini $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, e posto in luogo di b il suo valore, sarà $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + ccf = a^3$, e posti in luogo

luogo di b, e di cc i suoi valori, sarà $f^3 - 3aaf - a^3 = 0$, e così di quant' altri si vuole.

Abbiasi adunque $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$ da risolvere in componenti reali, ne' quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f, è adunque $ff - 2bf = 2aa$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = b + \sqrt{2aa + bb}$, $f = b - \sqrt{2aa + bb}$. Sostituito pertanto ciascuno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, troveremo, che $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4$ è il prodotto de' due componenti reali $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa$; $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa$. Così se sia $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6 = 0$. Essendo l'equazione, che dà i valori di f, $f^3 - 2aaf = 0$, dalla quale si ânno i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = \sqrt{2aa}$, $f = -\sqrt{2aa}$, sarà $x^6 + aax^4 + a^4xx + a^6$ il prodotto de' trè efficienti reali $xx + aa$, $xx + x\sqrt{2aa} + aa$, $xx - x\sqrt{2aa} + aa$.

Abbiasi $x^{10} + a^{10}$. L'equazione, che deve dare i valori di f, è $f^5 - 5aaf^3 + 5a^4f = 0$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$,

$f = -a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$, $f = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$, $f = -a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

Sosti-

Sostituito per tanto ogn'uno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, si troverà, che $x^{10} + a^{10}$ è il prodotto de' cinque efficienti reali $xx + aa$,

$$xx + ax\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + aa\,,\quad xx - ax\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + aa\,,$$

$$xx + ax\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + aa\,,\quad xx - ax\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + aa\,;$$

onde si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx moltiplicato in qualunque costante, ed il denominatore di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell' iperbola, e potrassi avere con le date regole.

45. Sia poi $x^m \pm a^m$ da risolvere, come sopra, e sia m numero intiero affermativo, ma dispari.

La formola si divida per $x \pm a$, ed il quoziente, (che nel primo caso sarà $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$; e nel secondo caso sarà $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^3x^{m-4}$ ec. fino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$) si supponga $= 0$, e questa finta equazione, che è convertibile, si paragoni termine per termine col prodotto di una equazione convertibile, in cui il numero delle dimensioni dell'incognita x sia $m-3$, nel trinomio $xx + fx + aa$, e dal paragone de' secondi termini si caverà

verà il valore dell'assunta, per esempio b, da quello de' terzi il valore di cc, da quello de' quarti il valore di d^5; e finalmente dal paragone de' termini di mezzo si caveranno i valori di f espressi con una equazione di numero $\frac{m-1}{2}$ dimensioni, della quale tutte le radici saranno reali, e determineranno i valori di f tutti reali, che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, verranno a somministrarci altrettanti trinomj, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x \pm a$ restituiranno la proposta formola $x^m \pm a^m$.

Con questo metodo si trovano le infrascritte equazioni, che servono per la risoluzione del binomio $x^m + a^m$ quando m è numero intiero affirmativo dispari.

Se $m = 3$, sarà $f + a = 0$.

Se $m = 5$, sarà $ff + af - aa = 0$.

Se $m = 7$, sarà $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$.

Se $m = 9$, sarà $f^4 + af^3 - 3aaff - 2a^3f + a^4 = 0$.

Se $m = 11$, sarà $f^5 + af^4 - 4aaf^3 - 3a^3ff + 3a^4f + a^5 = 0$.

Se $m = 13$, sarà $f^6 + af^5 - 5aaf^4 - 4a^3f^3 + 6a^4ff + 3a^5f - a^6 = 0$.

E così si può procedere per gli altri valori dispari di m.

Se la formola proposta fosse stata $x^m - a^m$, essendo m numero intiero affermativo dispari, fatta, come si è detto, la divisione per $x - a$, le medesime equazioni ni avrebbero luogo, mutati i segni nel secondo, quarto, sesto termine, ed in tutti gl'altri posti ne' luoghi pari.

46. Se in luogo di $x^m \pm a^m$, posto m numero intiero affermativo dispari, la formola fosse qualunque altra, ma tale, che divisa per $x \pm$ una costante, ciò che ne risulta fosse una formola convertibile, come sarebbe $x^5 + bx^4 - aax^3 - aabxx + a^4x + a^4b$, la quale divisa per $x + b$ dà $x^4 - aaxx + a^4$, trattata quest' ultima al solito, e trovati i valori di f, e sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo altrettanti trinomj, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x + b$, restituiranno la proposta formola.

Debba, per esempio, risolversi $x^5 + a^5$ in efficienti reali, ne' quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f (secondo le cose dette) sarà $ff + af - aa = 0$, dalla quale cavati essi valori di f, che sono $f = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$, e sostituiti in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo due trinomj reali $xx - \frac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa$, ed $xx - \frac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa$, il prodotto de' quali con $x + a$ restituisce la formola proposta $x^5 + a^5$.

Debba dividersi in efficienti reali la formo-

i la

la $x^5 + bx^4 - aax^3 - aabxx + a^4 x + a^4 b$, che divisa per $x + b$ ci dà $x^4 - aaxx + a^4$.

L'equazione di f per questa sarà $ff = 3aa$, ed i valori di f saranno $f = \pm \sqrt{3aa}$. Sostituiti questi in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo due trinomj reali $xx + x\sqrt{3aa} + aa$, $xx - x\sqrt{3aa} + aa$, il prodotto de' quali con $x + b$ restituisce la proposta formola.

47. Da ciò si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx in qualunque costante, ed il denominatore sia di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell' iperbola, e potrassi avere con le date regole.

48. Ma perchè nelle dimensioni più alte il valore di f dalle equazioni di sopra riferite non può coll'attuale separazione ricavarsi, in questi casi basterà rivolgersi alla costruzione geometrica delle medesime equazioni. Così per ritrovare i componenti di $x^7 + a^7$, ed indi l'integrale della formola $\frac{dx}{x^7 + a^7}$, diviso il denominatore per $x + a$, il quoziente sarà $x^6 - ax^5 + aax^4 - a^3x^3 + a^4xx - a^5x + a^6$. I valori di f per risolvere questa formola sono somministrati dall'equazione $f^3 + aff - 2aaf - a^3 = 0$. Ritrovati per tanto coi metodi

todi soliti dell' algebra, per mezzo dell' intersecazione di due curve, o in altro modo i valori veri, e falsi di f, che saranno tutti reali, per esempio, uno A, l'altro $-B$, l'altro $-C$, la quantità x^7+a^7 sarà il prodotto di $x+a$ in $xx+Ax+aa$ in $xx-Bx+aa$ in $xx-Cx+aa$, e le quantità A, B, C saranno reali, e date; onde si potrà procedere alla integrazione della formola $\frac{dx}{x^7+a^7}$ per le sole quadrature del circolo, e dell' iperbola.

49. Col medesimo artifizio, con cui si trovano le equazioni per risolvere il binomio $x^m \pm a^m$, si possono ritrovare per risolvere il trinomio $x^{2m} \pm 2aax^m + aa$, essendo $2m$ numero intiero affermativo pari; anzi generalmente ogni qual volta si proponga da risolvere una formola, che sia convertibile, o il prodotto di convertibili in lineari, e che non abbia frazioni negl' esponenti, sempre potrà ridursi col metodo di sopra esposto.

Il caso del prodotto di formola convertibile in una lineare l'abbiamo quando m è dispari, ed altrove. Esempio dell' altre sia $x^8+b^4x^4-a^4x^4-a^4b^4$, cioè $\overline{x^4+b^4}\times\overline{x^4-a^4}$, o sia $\overline{x^4+b^4}\times\overline{xx+aa}\times\overline{xx-aa}$. Risoluto per tanto ne' suoi efficienti reali di due dimensioni il divisore x^4+b^4, che sieno per esempio $xx + Ax + bb$, $xx + Bx + bb$, farà

$$\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 - a^4} = \overline{xx + Ax + bb} \times \overline{xx + Bx + bb} \times \overline{xx + aa} \times \overline{xx - aa}:$$

E se fosse stato $\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 + a^4}$, risoluto in oltre $x^4 + a^4$ in $xx + Cx + aa$, ed $xx + Dx + aa$, farebbe $\overline{x^4 + b^4} \times \overline{x^4 + a^4} =$
$$\overline{xx + Ax + bb} \times \overline{xx + Bx + bb} \times \overline{xx + Cx + aa} \times \overline{xx + Dx + aa}.$$

50. Per avere l'integrale della formola $\dfrac{ma^m\,dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m esprime un qualunque numero intiero affermativo, si chiamino A, B, C, ec. i valori di f coi loro segni, che servono per la risoluzione del denominatore $x^m \pm a^m$, e si avverta, che di questi valori uno può alle volte essere $= 0$, il che seguirà qualunque volta, essendovi $x^m + a^m$ nella detta formola, sia m un numero della serie 2, 6, 10, 14, 18 ec., e qualunque volta, essendovi $x^m - a^m$ nella data formola, sia m un numero della serie 4, 8, 12, 16 ec.; ciò posto, l'integrale cercato sarà $\pm \frac{A}{a} l \sqrt{xx + Ax + aa} \pm \frac{B}{a} l \sqrt{xx + Bx + aa} \pm \frac{C}{a} l \sqrt{xx + Cx + aa}$ ec., presi tali logaritmi nella logaritmica, di cui la sottangente sia $= a$, aggiungendo, o sottraendo da questo complesso di termini logaritmici (secondo che il segno del termine a^m nel denominatore sarà quello del più, o quello del meno) il doppio della somma di tanti archi di circolo,

colo, quanti sono i valori A, B, C ec., de' quali archi i raggi sieno per ordine $\sqrt{aa - \frac{1}{4}AA}$, $\sqrt{aa - \frac{1}{4}BB}$, $\sqrt{aa - \frac{1}{4}CC}$ ec., le tangenti sieno col medesimo ordine $x + \frac{1}{2}A$, $x + \frac{1}{2}B$, $x + \frac{1}{2}C$ ec. Tale sarà l'integrale della formola $\frac{ma^m dx}{x^m + a^m}$, se m sarà numero pari affermativo; ma se nella medesima formola m sarà numero dispari affermativo, converrà aggiungere al tutto il logaritmo di $x + a$, perchè il denominatore â anche la radice reale $x + a$. E se la formola sarà $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, essendo m numero dispari affermativo, converrà in luogo del logaritmo di $x + a$, aggiungere quello di $x - a$. E se finalmente, essendo la formola $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, sarà m numero pari affermativo, converrà aggiungere il logaritmo di $x - a$, e sottrarre quello di $x + a$, prendendo sempre anche questi logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

51. Ma se nella proposta formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ il numero m fosse intiero negativo, cioè se fosse $\frac{dx}{x^{-m} \pm a^{-m}}$,

essa

essa si esprima così $\frac{dx}{\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{a^m}}$, la quale ridotta al comune denominatore equivale a questa $\frac{a^m x^m dx}{a^m \pm x^m}$, e dividendo il numeratore per lo denominatore, acciò la massima potestà dell' incognita sia minore in quello, che in questo, si averà finalmente $\pm a^m dx \pm \frac{a^{2m} dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m sarà numero positivo, ed averanno luogo le cose dette di sopra anche quando nella formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ sia m numero negativo intiero.

52. Se in oltre la frazione $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ s' intenderà moltiplicata per x^n, essendo n intiero affermativo, o negativo, risoluto il denominatore ne' suoi efficienti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, sarà essa il caso da me sopra considerato ai num. 41., e 42., e però riducibile alle quadrature del circolo, e dell' iperbola.

53. Ma quando n sia negativo, si potrà più speditamente ridurre così. Sia in primo luogo n minore di m: la formola $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times x^n}$ si esprima coll' equi-

valen-

valente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{x^{m-n}dx}{a^m \times \overline{x^m + a^m}}$; e $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times x^n}$ con la $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n}dx}{a^m \times \overline{x^m - a^m}}$. Sia in ſecondo luogo n maggiore di m, la formola $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times x^n}$ ſi eſprima con l'equivalente $\frac{dx}{a^m x^n} - \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} - \frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}}$ ec. fino a quel termine, in cui l'eſponente di x ſia proſſimamente maggiore di m, $\pm$ (ſecondo, che porterà l'alternativa de' ſegni) $\frac{dx}{\overline{x^m + a^m} \times a^r x^t}$, dove r è lo ſteſſo eſponente della quantità a nel termine antecedente, e la t è il reſiduo della diviſione fatta del numero n per lo numero m quante volte ſi può.

E ſe foſſe $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times x^n}$, ſuppoſto pure n maggiore di m, tutti i termini della ſerie dovranno eſſere affetti dal ſegno negativo, ed il termine fuori della ſerie, cioè il termine $\frac{dx}{\overline{x^m - a^m} \times a^r x^t}$ dovrà avere ſempre prefiſſo il ſegno affermativo. Data adunque la formo-

la

la $\frac{dx}{\overline{x^3+a^3}\times x^3}$, sarà essa $= \frac{dx}{a^3x^3} - \frac{dx}{\overline{x^3+a^3}\times a^3xx}$,

ma sappiamo, che $\frac{-dx}{\overline{x^3+a^3}\times a^3xx} = \frac{-dx}{a^6xx} + \frac{xdx}{a^6\times\overline{x^3+a^3}}$,

adunque sarà $\frac{dx}{\overline{x^3+a^3}\times x^3} = \frac{dx}{a^3x^3} - \frac{dx}{a^6xx} + \frac{xdx}{a^6\times\overline{x^3+a^3}}$,

quantità tutte, che si sanno maneggiare con le date regole.

54. Ma se m sarà numero rotto affermativo, o negativo, chiamisi t il numeratore della frazione, che è eguale ad m, ridotta che questa sia ai termini semplicissimi, e p il denominatore della medesima; talchè la formola data sia espressa per $\frac{dx}{x^{\frac{t}{p}} \pm a^{\frac{t}{p}}}$; pongasi $x = y^p$, ed $a = b^p$, e la formola si convertirà in $\frac{py^{p-1}dy}{y^t \pm b^t}$, che non à esponenti rotti, onde si può risolvere per le date regole.

Sia adunque, per esempio, la formola $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} \pm a^{\frac{3}{2}}}$; pongo $x = yy$, $a = bb$, sarà $dx = 2ydy$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà mutata in $\frac{2ydy}{y^3 \pm b^3}$, che non à esponenti rotti.

55. Se poi fosse data la formola $\frac{x^n\, dx}{x^m \pm a^m}$, in cui m, ed n fossero numeri rotti, chiamando r il numeratore della frazione n, e p il denominatore di quella, e così chiamando t il numeratore della frazione m, e q il denominatore della medesima (intendendo, che tali frazioni sieno ridotte a' termini semplicissimi) la formola sarà $\frac{x^{\frac{r}{p}}\, dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$, in cui r, p, q, t saranno numeri intieri positivi, o negativi.

Pongasi ora $x = y^{pq}$, ed $a = b^{pq}$, la formola si convertirà in $\frac{pqy^{qr+pq-1}\, dy}{y^{pt} \pm b^{pt}}$, che non â frazioni negli esponenti. Sia per esempio la formola $\frac{x^{\frac{3}{2}}\, dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$; pongo $x = y^{10}$, $a = b^{10}$, sarà $dx = 10y^9 dy$, $x^{\frac{3}{2}} = y^{15}$, $x^{\frac{4}{5}} = y^8$, e fatte le sostituzioni, sarà mutata la formola in $\frac{10y^{24}dy}{y^8 \pm b^8}$, che non â esponenti rotti.

56. Finalmente se sarà $\frac{x^n\, dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}}$, essendo n, m,

ed u numeri intieri positivi, si potrà sempre averne l'integrale, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e l'integrale sarà composto di quantità algebraiche, e di una quantità sommatoria, il che si farà nel seguente modo.

Si supponga la formola $\int \frac{x^n dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}} =$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.}}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u-1}}$$

fino al termine costante, cioè fino a quello in cui l'esponente di x sia zero, e sia questo K, indi si aggiunga $A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, cioè si faccia $\int \frac{x^n dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}} =$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.} + K}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u-1}} +$$

$$A\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}.$$

Si differenzj l'equazione, e si riduca al zero, e si ordinino i termini; dal paragone de' primi al zero troverassi il valore dell'assunta B; dal paragone de' secondi al zero troverassi il valore dell'assunta C; e così di mano in mano il valore dell'altre, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole, comecchè la somma-

toria

toria $\int \frac{x^n\, dx}{x^m \pm a^m}$ dipende dalle ſole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e gl'altri termini nell'omogeneo di comparazione ſono algebraici, così la propoſta formola non eſiggerà quadrature ſuperiori.

57. Alle volte potrà occorrere, che alcuno de' coefficienti B, C, D ec. ſi trovi arbitrario, ma ſolo allora quando ſia n maggiore di $m-1$. E ſi noti pure, che ogni qual volta ſia $m=n+1$, il coefficiente A ſi troverà eguale al zero, ed in conſeguenza algebraico l'integrale della propoſta formola.

58. Ma ſe nella propoſta formola differenziale l'eſponente n foſſe intiero negativo, di modo, che eſſa foſſe $\frac{dx}{x^n \times \overline{x^m \pm a^m}^{\,u}}$, in cui ora è poſitivo, l'integrale ſarebbe $\frac{Bx^{um-2m} + Cx^{um-2m-1} + Dx^{um-2m-2} \text{ ec.} + K}{x^{n-1} \times \overline{x^m \pm a^m}^{\,u-1}} +$

$A \int \frac{dx}{x^n \times \overline{x^m \pm a^m}}$ i quali coefficienti B, C, D ec. ſi determineranno nello ſteſſo modo, come ſopra.

Sia adunque per eſempio $\frac{xdx}{\overline{x^3 + a^3}^{\,2}}$; in queſto caso si à $n=1$, $m=3$, $u=2$. Sarà pertanto

$$\int\frac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2}=\frac{Bxx+Cx+K}{x^3+a^3}+A\int\frac{xdx}{x^3+a^3},$$ e differenziando, $\dfrac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2}=$

$$\frac{\overline{2Bxdx+Cdx}\times\overline{x^3+a^3}-3xxdx\times\overline{Bxx+Cx+K}}{\overline{x^3+a^3}^2}+\frac{Axdx}{x^3+a^3},$$

e riducendo al comun denominatore, ordinando l'equazione, e paragonandola al zero, sarà

$$\begin{array}{llll} 2Bx^4dx & +Cx^3dx-3Kxxdx & +2Ba^3xdx+Ca^3dx & \\ -3Bx^4dx & -3Cx^3dx & +Aa^3xdx & =0, \\ +Ax^4dx & & -xdx & \end{array}$$

e però dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini, troveremo $A-B=0$, cioè $B=A$, $C=0$, $K=0$, $2Ba^3+Aa^3-1=0$, cioè $Aa^3=1-2Ba^3$, e ponendo A in luogo di B, sarà $A=\dfrac{1}{3a^3}=B$, onde finalmente

$$\int\frac{xdx}{\overline{x^3+a^3}^2}=\frac{xx}{3a^3\times\overline{x^3+a^3}}+\frac{1}{3a^3}\int\frac{xdx}{x^3+a^3}.$$

Ma $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3+a^3}=\frac{1}{3aa}\times l\sqrt{xx-ax+aa}-l\overline{x+a}$

con di più $\dfrac{2}{3aa}$ moltiplicato nell'arco di circolo del rag-

gio

gio $\sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$; adunque sarà

$$\int \frac{x\,dx}{\overline{x^3 + a^3}^{\,2}} = \frac{xx}{3a^3 \times \overline{x^3 + a^3}} + \frac{1}{9a^5}\, l \sqrt{xx - ax + aa} -$$

$$\frac{1}{9a^5}\, l\, \overline{x + a} + \frac{2}{9a^5} \times$$ arco di circolo del raggio $= \sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$, presi i logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

59. Ma se l'esponente m fosse negativo, si trasmuti la formola in altra equivalente, in cui l'esponente sia positivo nel modo indicato al num. 51.

60. E se ambi m, ed n fossero rotti, si facciano le sostituzioni del numero 55.

61. Se poi l'esponente u non fosse numero intiero, ma rotto affermativo o negativo, basterà, che la formola sia uno de' casi considerati al numero 39. acciocchè si trasmuti in un' altra capace d'essere maneggiata colle date regole.

Anzi la formola $\frac{x^n\,dx}{\overline{x^m \pm a^m}^{\,u}}$, essendo gl'esponenti n, m, u numeri intieri positivi, o negativi, ed anco in qualunque modo rotti razionali, co' segni del più, o del meno a piacere, sarà integrabile, o almeno riduciducibile alle note quadrature, ogni qualvolta i detti esponenti abbiano tra loro tal proporzione, che una delle due quantità da essi composte, cioè $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$, o pure $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ sia eguale ad un numero qualunque intiero. Se questo numero intiero sarà positivo, la formola s'integrerà algebraicamente, salvi que' casi, ne' quali s'insinui la potestà $x^{-1} dx$, che obbliga a' logaritmi. Se questo numero intiero sarà negativo, la formola si ridurrà alle quadrature del circolo, o dell' iperbola.

Per conseguire l'intento rispetto al primo caso di $u - \frac{1}{m} - \frac{n}{m} - 1$ eguale a numero intiero, si faccia $x^m + a^m = zx^m$; dunque $x^m = \frac{a^m}{z-1}$, $x = \frac{a}{\overline{z-1}^{\frac{1}{m}}}$, $x^n = \frac{a^n}{\overline{z-1}^{\frac{n}{m}}}$, $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{\overline{z-1}^{\frac{1+n}{m}}}$, e però $x^n dx = -\frac{a^{n+1} dz}{m} \times \overline{z-1}^{\frac{-n-1}{m}-1}$; ma $x^m + a^m = zx^m = \frac{a^m z}{z-1}$, ed $\overline{x^m + a^m}^u = \frac{a^{mu} z^u}{\overline{z-1}^u}$, dunque fatte le dovute

dovute fostituzioni nella proposta formola, sarà essa $-\frac{a^{n+1-mu}z^{-u}dz}{m}\times\overline{z-1}^{\frac{-n-1}{m}-1+u}$, la quale manifestamente si vede, essere integrabile algebraicamente (salva l'eccezione fatta) quando sia $\frac{-n-1}{m}-1+u$ eguale a numero positivo intero. Che se sia $\frac{-n-1}{m}-1+u$ numero intero, ma negativo, per le cose dette ne' superiori paragrafi, la sommatoria della formola non dipenderà da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

Vengo al secondo caso, cioè di $\frac{1}{m}-1+\frac{n}{m}$ eguale a numero intiero; si faccia $x^m+a^m=z$, sarà dunque $x^m=z-a^m$, $x=\overline{z-a^m}^{\frac{1}{m}}$, $x^n=\overline{z-a^m}^{\frac{n}{m}}$, $x^{n+1}=\overline{z-a^m}^{\frac{1+n}{m}}$, $x^n dx=\frac{dz}{m}\times\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}$, ma $x^m+a^m=z$, ed $\overline{x^m+a^m}^u=z^u$, dunque fatte le fostituzioni nella proposta formola, sarà essa $\frac{dz}{m}\times\frac{\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}}{z^u}$, o sia $\frac{z^{-u}dz}{m}\times\overline{z-a^m}^{\frac{n+1}{m}-1}$, la quale è integrabile algebraicamente (salva la suddet-

ta

ta eccezione) quando sia $\frac{n+1}{m} - 1$ eguale a numero positivo intiero, e quando sia eguale a numero negativo intiero, la sommatoria dipenderà dalle note quadrature del circolo, e dell' iperbola, per i superiori paragrafi.

62. Che se il denominatore della proposta frazione elevato a qualunque potestà intiera non fosse un binomio, come si è fin' ora considerato, ma fosse un qualunque altro, purchè egli sia riducibile ne' suoi componenti reali, ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione, o per mezzo delle equazioni convertibili, o in altro modo, si potrà sempre ridurre la formola alle note quadrature.

Imperciocchè sia per esempio $\frac{dx}{\overline{xx+bx+aa}^{2} \times \overline{x+c}^{3}}$; fatta attualmente la potestà del denominatore, si finga un' equazione così, $\frac{dx}{\overline{xx+bx+aa}^{2} \times \overline{x+c}^{3}} = \frac{Ax^3dx + Bxxdx + Cxdx + Ddx}{x^4 + 2bx^3 + 2aaxx + bbxx + 2aabx + a^4} + \frac{Fxxdx + Gxdx + Hdx}{x^3 + 3cxx + 3ccx + c^3}$, ponendo generalmente tanti termini, quanti sono i componenti del denominatore, ed in essi termini tante majuscole, quanta è la massima potestà

potestà dell' incognita nel denominatore respettivo, moltiplicando in oltre in ogni termine la prima majuscola per la massima potestà meno uno della incognita del suo denominatore, la seconda majuscola per essa potestà meno due, e così di mano in mano sino all' ultima costante. Con la solita maniera si devono determinare esse costanti assunte, ed il primo termine somministrerà tante frazioni divise per $\overline{xx+bx+aa}^{2}$, nel qual denominatore fatto sparire il termine di mezzo, le frazioni saranno un caso particolare del Canone generale $\frac{x^m dx}{\overline{x^n \pm a^n}^{u}}$, ed il secondo termine ci darà tante frazioni divise per $\overline{x+c}^{3}$, che si riducono alla regola ordinaria dei denominatori composti di radici eguali.

63. Se in oltre il numeratore della proposta formola sarà moltiplicato per una potestà positiva, o negativa dell' incognita, ritrovati i valori delle majuscole, operando come se la frazione non fosse moltiplicata per essa potestà, i termini risultanti si moltiplichino per la stessa potestà, ed il rimanente si faccia al solito ec.

64. Finisco questo primo Capo con soddisfare alla promessa fatta al Lettore intorno al *Metodo de' Polinomj* del Sig. Conte Jacopo Riccati, che è il seguente.

Col nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che ànno per numeratore la flussione dx, e per denominatore un aggregato di potestà, gl'esponenti delle quali costituiscano una progressione aritmetica, che va a terminarsi nel nulla. E mentre questa condizione non si adempia, bisognerà suplire qualche termine affetto dal coefficiente $= 0$. Abbiasi la espressione $\dfrac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a}$, sembra a prima vista un trinomio, ma realmente è un quadrinomio, e va esposta così $\dfrac{dx}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + 0x^{\frac{1}{6}} + a}$.

In qualunque Polinomio esposto per una frazione, il di cui denominatore sia alzato alla potestà p, numero intiero e positivo, âssi un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che tal volta opportunamente ci soccorrono.

Do principio dal trinomio $\dfrac{dx}{\overline{x^{2m} + ax^m + b}^{\,p}} = dy$, conciosiacchè a cotale espressione ogni trinomio facilmente si riduce. Facciasi $x^m = z + A$. (E' z una nuova variabile assunta, ed A una costante da determinarsi) Istituiti i necessarj computi per giungere alla sostituzione, abbiamo come segue

$$\begin{aligned} x^{2m} &= zz + 2Az + AA \\ ax^m &= \, az + aA \\ b &= \, b \end{aligned},$$

e per conseguenza

$$\overline{x^{2m} + ax^m + b}^{\,p} = \overline{zz + \overline{2A + a} \times z + AA + aA + b}^{\,p}.$$

Dee

Dee farsi in maniera, che spariscano le quantità $AA+aA+b$, ponendole $=o$, e ne' casi, in cui A non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione. E giacchè $x^m=z+A$, e prese le differenze, $mx^{m-1}dx=dz$,

ed $x=\overline{z+A}^{\frac{1}{m}}$, dunque $dx=\frac{dz}{mx^{m-1}}=\frac{dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$.

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di x, e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta z colle sue funzioni, troveremo $\frac{dx}{\overline{x^{2m}+ax^m+b}^p}=\frac{dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{zz+2A+a\times z}^p}$,

e liberando la quantità z, che moltiplica il binomio $z+2A+a$ sotto il segno, sarà

$$\frac{dx}{\overline{x^{2m}+ax^m+b}^p}=\frac{z^{-p}dz}{m\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+2A+a}^p}.$$

Il caso più semplice vuole l'esponente p eguale all' unità, essendo l'altro m qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $2A+a=g$, l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1}dz}{g\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+z\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}=mdy.$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo

 quo-

quoziente sarà $\dfrac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e fatta la moltiplicazione, e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo sarà $-\dfrac{dz}{g}$, da esser partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + z \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{z^{-1}dz}{g \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} - \frac{dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z+A=u$, e fatte le debite sostituzioni, avremo $\dfrac{-dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = \dfrac{u^{\frac{-m+1}{m}}du}{gg - gA + gu}$.

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intiero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formola generale

$$\frac{dx}{\overline{x^{2m} + ax^m + b}^{\,p}} = \frac{z^{-p}dz}{m \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{z+g}^{\,p}} = dy,$$

e posto, per esempio, $p =$ al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-2}dz}{gg \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + 2gz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} + zz \times \overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Di-

Divido, come sopra, il numeratore di queste frazioni per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà $\frac{z^{-2}dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, e dopo le necessarie operazioni avremo il residuo $-\frac{2z^{-1}dz}{g}-\frac{dz}{gg}$ da essere nuovamente per l'intero denominatore diviso. Istituisco una seconda divisione nella frazione

$$\frac{-2z^{-1}dz}{g^3\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+2ggz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}+gzz\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}},$$

e dopo le debite operazioni si averà il residuo $\frac{4dz}{g}+\frac{2zdz}{gg}$ da partirsi per l'intiero denominatore. Nascerà pertanto la seguente equazione

$$\frac{z^{-2}dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+g}^{2}}=\frac{z^{-2}dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}-\frac{2z^{-1}dz}{g^3\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}+\frac{\overline{4g-1}\times dz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+g}^{2}}+\frac{2zdz}{gg\times\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}\times\overline{z+g}^{2}}.$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione sono due binomj, e gli altri due possono facilmente ridursi alla forma del binomio, facendo $z+A=u$, ovvero $z+g=u$. Ne' casi più composti, in cui si mette $p=3$, 4,

5 ec.

5 ec. cresce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Esso metodo si estende a tutti i polinomj in infinito, mentre p sia numero intiero, e positivo, perchè se fosse negativo, ed intiero, la cosa riesce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo altro non si richiede, che replicare la sostituzione $x = z + A$, $z = u + B$, facendo sempre svanire que' termini, ne' quali le sole quantità costanti si ritrovano; laonde, per cagion d'esempio, si riduca il quadrinomio al trinomio, e questo al binomio. In oltre è d'uopo di valersi di tempo in tempo d'una dimezzata divisione, perchè non abbiano a turbarci gli esponenti negativi, che bene spesso ci si presentano nel numeratore della frazione. Fra tanto il modo d'operare si mostra più speditamente cogli esempj, che coi precetti.

Sia il quadrinomio $\dfrac{dx}{\overline{x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c}^{\,p}} = dy$. Le costanti a, b possono essere $= 0$. Pongo $x^m = z + A$, ed avrassi

$$\begin{aligned} x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 &+ 3Azz + 3AAz + A^3 \\ &+ azz + 2aAz + aAA \\ &+ bz + Ab + c. \end{aligned}$$

Faccio $A^3 + aAA + Ab + c = 0$, e così determino il valore della costante assunta A. Quinci ripetute le operazioni, come nel trinomio, trovo $\dfrac{z^{-p}\,dz}{\overline{z + A}^{\,\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz + gz + h}^{\,p}}$.

Le spezie g, h sono costanti surrogate in luogo d'altre più composte; e stante, che p è un numero positivo, ed intiero, alzo il trinomio $zz + gz + h$ alla potestà p. Dopo

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti, per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra quantità, che il binomio $\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}$, e metto da parte sì fatte frazioni, che, trascurati i coefficienti, saranno analoghe alla seguente $\frac{z^{-n}\,dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}}}$, posto n qualsivoglia numero positivo, ed intiero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale $\frac{z^{n}\,dz}{\overline{z+A}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{zz+gz+b}^{p}}$.

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z=u+B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, ed alzato il binomio $u+B$ alla potestà qualunque $n+1$, e surrogati in cambio di z, e delle sue funzioni, i valori esposti per la nuova indeterminata u, tutti i membri compariranno sotto l'aspetto espresso dalla seguente formola $\frac{u^{n-p}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+k}^{p}}$.

Quando sia p maggiore di n, onde l'esponente $n-p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà $\frac{u^{-n}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}}}$; essendo poi $n-p$ positivo, avremo $\frac{u^{n}\,du}{\overline{u+A+B}^{\frac{m-1}{m}} \times \overline{u+k}^{p}}$; e finalmente po-

ponendo $u+k=\omega$, ed essendo tanto n, quanto p numeri intieri, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Abbiasi per esempio il trinomio $\dfrac{dx}{\overline{x+2\sqrt{x}+2}^{\,p}}$.

Faccio $x^{\frac{1}{2}}=z+A$, dunque $x+2\sqrt{x}+2=zz+2Az+2z+AA+2A+2$. Mettendo $AA+2A+2=0$, trovo $A=\sqrt{-1}-1$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo avremo $\dfrac{z^{-p}dz}{\overline{z+A}^{\,-1}\times\overline{z+2A+2}^{\,p}}=\dfrac{z^{1-p}dz}{\overline{z+2\sqrt{-1}}^{\,p}}+\dfrac{Az^{-p}dz}{\overline{z+2\sqrt{-1}}^{\,p}}$.

Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera, e nella grandezza $zz+\overline{2A+2}\times z+AA+2A+2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az+2z$, ponendolo $=0$, onde sia $A=-1$, e di più $AA+2A+2=1$, e la formola sarà, come segue

$\dfrac{dz}{\overline{z-1}^{\,-1}\times\overline{zz+1}^{\,p}}=\dfrac{zdz}{\overline{zz+1}^{\,p}}-\dfrac{dz}{\overline{zz+1}^{\,p}}$; e ne' due binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl' altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

CAPO

CAPO II.

Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.

65. FAcendo ora passaggio all' altra maniera d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle serie, è necessario di premettere le seguenti Regole.

Regola I. Ridurre una frazione a serie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della divisione, ed il rimanente di nuovo si divida, e così di mano in mano in infinito, e si avrà una serie d'infiniti termini eguale alla proposta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione proposta per primo termine quello, che sarà il maggiore. Con questo modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} - \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mm} + \frac{fnn}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} + \frac{fn^4}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{af}{mm \pm nn} = \frac{af}{mm} \mp \frac{afnn}{m^4} + \frac{afn^4}{m^6} \mp \frac{afn^6}{m^8} + \frac{afn^8}{m^{10}} \text{ ec.}$$

cioè coi segni alternativi, quando il secondo termine del denominatore sia positivo; e tutti positivi, quando sia col segno negativo.

Similmente sarà

$$\frac{f}{mm \pm mn} = \frac{f}{mm} \mp \frac{fn}{m^3} + \frac{fnn}{m^4} \mp \frac{fn^3}{m^5} + \frac{fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 \text{ ec.}$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{\overline{m \mp n}^2} = \frac{f}{mm} \pm \frac{2fn}{m^3} + \frac{3fnn}{m^4} \pm \frac{4fn^3}{m^5} + \frac{5fn^4}{m^6} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{\overline{m \mp n}^3} = \frac{f}{m^3} \pm \frac{3fn}{m^4} + \frac{6fnn}{m^5} \pm \frac{10fn^3}{m^6} + \frac{15fn^4}{m^7} \text{ ec.}$$

Sia una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sieno due serie infinite, e sia per esempio

$$\frac{1 + \frac{1}{2}axx - \frac{1}{8}aax^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8 \text{ ec.}}{1 - \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{8}bbx^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8 \text{ ec.}},$$

sarà essa

$$\begin{aligned} = 1 &+ \tfrac{1}{2}bxx + \tfrac{3}{8}bbx^4 + \tfrac{5}{16}b^3x^6 + \tfrac{35}{128}b^4x^8 \text{ ec.} \\ &+ \tfrac{1}{2}axx + \tfrac{1}{4}abx^4 + \tfrac{3}{16}abbx^6 + \tfrac{5}{32}ab^3x^8 \text{ ec.} \\ &- \tfrac{1}{8}aax^4 - \tfrac{1}{16}aabx^6 - \tfrac{3}{64}aabbx^8 \text{ ec.} \\ &+ \tfrac{1}{16}a^3x^6 + \tfrac{1}{32}a^3bx^8 \text{ ec.} \\ &- \tfrac{5}{128}a^4x^8 \text{ ec.} \end{aligned}$$

66. *Regola* II. Ridurre una quantità complessa radicale in serie infinita.

Sia per esempio $\sqrt{aa \pm xx}$. Si estragga la radice quadrata dal primo termine, indi si proseguisca in infinito l'operazione nella solita maniera dell'estrazione delle radici, e si avrà

$$\sqrt{aa \pm xx} = a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

$$\sqrt{ax \pm xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec.}$$

Si noti, che nell' una, e nell' altra di queste due serie, se si moltiplicherà per 3 il numeratore, e denominatore di ciascun termine, principiando dal quarto, i coefficienti numerici saranno nel numeratore per ordine, principiando dal quarto, $3, 3 \times 5, 3 \times 5 \times 7$ ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri dispari.

Nel denominatore poi, principiando dal secondo, saranno $2, 2 \times 4, 2 \times 4 \times 6, 2 \times 4 \times 6 \times 8$ ec. nati dalla vicendevole moltiplicazione de' numeri pari.

67. *Regola* III. Tutto ciò si può fare più generalmente per mezzo del seguente Canone

$$\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ \text{ ec.}$$

in cui $P+PQ$ è la quantità data, $\frac{m}{n}$ è l'esponente numerico, P rappresenta il primo termine, Q il rimanente di tutti gl'altri termini divisi per il primo, e ciascuna delle lettere A, B, C, D ec. significano rispettivamente il termine anteriore di modo, che per A s'intenda $P^{\frac{m}{n}}$, per B s'intenda $\frac{m}{n}AQ$, per C s'intenda $\frac{m-n}{2n}BQ$ ec.

Sia da ridursi in serie la formola $\sqrt{aa+xx}$, adunque sarà $P=aa$, $Q=\frac{xx}{aa}$, $m=1$, $n=2$, e però

$$\sqrt{aa+xx}=a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

Sia $\sqrt[5]{a^5+a^4x-x^5}$, cioè $\overline{a^5+a^4x-x^5}^{\frac{1}{5}}$, sarà $P=a^5$, $Q=\frac{a^4x-x^5}{a^5}$, $m=1$, $n=5$, e però

$$\overline{a^5+a^4x-x^5}^{\frac{1}{5}}=a+\frac{a^4x-x^5}{5a^4}-\frac{2a^8xx+4a^4x^6-2x^{10}}{25a^9} \text{ ec.}$$

Sia $\frac{b}{\sqrt[3]{y^3-aay}}$, cioè $b\times\overline{y^3-aay}^{-\frac{1}{3}}$, sarà $P=y^3$, $Q=-\frac{aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$, e però

LIBRO III. Pag. 705.

Abbiasi da elevare una serie infinita ad una data potestà. E sia per esempio $y + ayy + by^3 + cy^4 + fy^5$ ec. da elevarsi alla potestà m; sarà dunque $P = y$, $Q = ay + byy + cy^3 + fy^4$ ec., $n = 1$, $m = m$, onde averemo

$$\overline{y + ayy + by^3 + cy^4 + fy^5}^{\,m} \text{ ec.} =$$

$$y^m + \frac{may^{m+1}}{1} + \frac{m \times \overline{m-1}\, aay^{m+2}}{1 \times 2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times a^3 y^{m+3}}{1 \times 2 \times 3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}\, a^4 y^{m+4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m \times by^{m+2}}{1} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1}\, aby^{m+3}}{1 \times 2} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times aaby^{m+4}}{1 \times 2 \times 3} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mcy^{m+3}}{1} \qquad + \frac{m \times \overline{m-1} \times acy^{m+4}}{1 \times 2} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1}\, bby^{m+4}}{1 \times 2} \text{ ec.}$$

$$+ \frac{mfy^{m+4}}{1} \text{ ec.}$$

rò $b \times \overline{y^3 - aay}^{\,-\frac{1}{3}} = \frac{b}{y} + \frac{aab}{3y^3} + \frac{2a^4 b}{9y^5} + \frac{14a^6 b}{81y^7}$ ec.

Se fosse $\frac{b}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^{\,3}}}$, si esprimerebbe così $b \times \overline{a+x}^{\,-\frac{3}{5}}$, ed il rimanente si farebbe, come sopra.

Sia $\frac{b}{\overline{a+x}^{\,3}}$, cioè $b \times \overline{a+x}^{\,-3}$, sarà $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = -3$, $n = 1$, e però $b \times \overline{a+x}^{\,-3} = \frac{b}{a^3} - \frac{3bx}{a^4} + \frac{6bxx}{a^5} - \frac{10bx^3}{a^6}$ ec.

68. Abbiasi, da elevare una quantità complessa ad una data potestà, e sia per esempio $a + x$ da elevarsi alla potestà m, cioè $\overline{a+x}^{\,m}$. Sarà $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = m$, $n = 1$, onde $\overline{a+x}^{\,m} = a^m + \frac{ma^{m-1}x}{1} + \frac{m \times \overline{m-1} \times a^{m-2}xx}{1 \times 2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times a^{m-3}x^3}{1 \times 2 \times 3}$ ec.

Abbiasi ec.

69.

69. Ciò posto: Sia da integrarsi la formola differenziale $\frac{bdx}{a+x}$. Ridotta in serie la frazione $\frac{b}{a+x}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dx, avremo

$$\frac{bdx}{a+x} = \frac{bdx}{a} - \frac{bxdx}{aa} + \frac{bxxdx}{a^3} - \frac{bx^3dx}{a^4} + \frac{bx^4dx}{a^5} \text{ ec.},$$

ed integrando

$$\int \frac{bdx}{a+x} = \frac{bx}{a} - \frac{bxx}{2aa} + \frac{bx^3}{3a^3} - \frac{bx^4}{4a^4} + \frac{bx^5}{5a^5} \text{ ec.}$$

70. Sia la formola $\frac{adx}{x}$. Fatta $x = b + z$, intendendo per la b una qualunque costante a piacere, e per z una nuova incognita, sarà $\frac{adx}{x} = \frac{adz}{b+z}$.

Ridotta in serie la frazione $\frac{a}{b+z}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dz, sarà

$$\frac{adz}{b+z} = \frac{adz}{b} - \frac{azdz}{bb} + \frac{azzdz}{b^3} - \frac{az^3dz}{b^4} + \frac{az^4dz}{b^5} \text{ ec.},$$

ed integrando $\int \frac{adz}{b+z} = \frac{az}{b} - \frac{azz}{2bb} + \frac{az^3}{3b^3} - \frac{az^4}{4b^4} + \frac{az^5}{5b^5}$ ec., cioè $\int \frac{adx}{x} = \frac{a \times \overline{x-b}}{b} - \frac{a \times \overline{x-b}^2}{2bb} + \frac{a \times \overline{x-b}^3}{3b^3} - \frac{a \times \overline{x-b}^4}{4b^4}$ ec.

71. Sia la formola $\frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{x+a}^{3}}}$; ridotta in ſerie ſarà

$$\frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^{3}}} = \frac{bdx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bxxdx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^{3}dx}{125a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.},$$

e però integrando ſarà

$$\int \frac{bdx}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^{3}}} = \frac{bx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3bxx}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^{3}}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^{4}}{500a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.}$$

E così ſi faccia di qualunque altra propoſta formola.

72. Se le ſerie così ritrovate, che eſprimono l'integrale delle propoſte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, ſaranno di valore infinito, ſarà infinito l'integrale delle propoſte formole differenziali. E ſe eſſe ſerie ſaranno di valore finito, e di più ſommabili, cioè a dire, che ſi ſappia ritrovare il valore di eſſe ſerie, quantunque compoſte di termini infiniti di numero, il che molte volte ſuccede, ſi avrà in quantità finite, e però algebraiche l'integrale delle propoſte formole differenziali. Ma ſe le ſerie eſſendo di valore finito non ſaranno ſommabili, quanti più termini nella ſerie ſi prenderanno, tanto più ſi accoſterà al giuſto l'integrale della propoſta formola differenziale, ma l'eſatto però verrà eſpreſſo da tutta la ſerie.

73. Per riconoſcere, quali ſieno le ſerie di valore infinito, quali di valore finito, e quali ſommabli, ſi veda

veda il trattato *De Seriebus Infinitis* del Sig. Giacomo Bernulli, ed altri Autori, che di eſſe trattano.

74. Ma qualunque volta la formola differenziale ſia compoſta di due ſoli termini, ſi può generalmente, e più ſpeditamente far uſo del ſeguente Canone, in cui gl'eſponenti m, n, t poſſono eſſere intieri, rotti, poſitivi, e negativi, ed il quale ſi può produrre a quanti termini ſi vuole, giacchè da' quattro poſti, abbaſtanza ſi manifeſta la legge, con cui ſi forma.

$$\int ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{\frac{ay^t}{tb} - \frac{ac}{tbb} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times y^{t+n} + \frac{acc}{tb^3} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times \frac{\overline{t+mn+2n}}{t+2n} \times y^{t+2n} - \frac{ac^3}{tb^4} \times \frac{\overline{t+mn+n}}{t+n} \times \frac{\overline{t+mn+2n}}{t+2n} \times \frac{\overline{t+mn+3n}}{t+3n} \times y^{t+3n} \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1}.$$

La maniera di ritrovare eſſo canone è queſta. Si finga che ſia l'equazione

$\int ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} + Dy^{t+3n} + Ey^{t+4n} \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1}$, in cui le aſſunte A, B, C, D, E ec. ſono coſtanti arbitrarie da determinarſi. Adunque differenziando la finta equazione, averemo pure

$ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} = \overline{tAy^{t-1}dy + \overline{t+n} \times By^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times Cy^{t+2n-1}dy + \overline{t+3n} \times Dy^{t+3n-1}dy \text{ ec.}} \times \overline{b+cy^n}^{\,m+1} + \overline{m+1} \times ncy^{n-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m} \times \overline{Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.}}$,

cioè dividendo per $\overline{b+cy^n}^{\,m}$, ed ordinando i termini,

$$\begin{aligned} ay^{t-1}dy = tbAy^{t-1}dy &+ \overline{t+n} \times bBy^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times bCy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ tcAy^{t+n-1}dy + \overline{t+n} \times cBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ \overline{m+1} \times ncAy^{t+n-1}dy + \overline{m+1} \times ncBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.}, \end{aligned}$$

e traſportando il termine $ay^{t-1}dy$ dall'altra parte, ſarà

$$\left.\begin{aligned} tbAy^{t-1}dy &+ \overline{t+n} \times bBy^{t+n-1}dy + \overline{t+2n} \times bCy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ -ay^{t-1}dy &+ tAcy^{t+n-1}dy + \overline{t+n} \times cBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \\ &+ \overline{m+1} \times ncAy^{t+n-1}dy + \overline{m+1} \times ncBy^{t+2n-1}dy \text{ ec.} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Ridotta adunque al zero l'equazione, ſaranno pure eguali al zero i coefficienti di ciaſcun termine, per lo che avremo tante equazioni, quante ſono le arbitrarie aſſunte A, B, C, D ec., con le quali equazioni eſſe arbitrarie ſi determineranno. Pertanto ſarà $tbA - a = 0$, cioè $A = \frac{a}{tb}$; $\overline{t+n} \times bB + tAc + \overline{m+1} \times ncA = 0$, e ſoſtituendo il valore di A, $tbB + nbB + \frac{ac}{b} + \frac{mnac}{tb} + \frac{nac}{tb} = 0$, cioè $B = \frac{\overline{t+mn+n} \times -ac}{tbb \times \overline{t+n}}$, $\overline{t+2n} \times bC + \overline{t+n} \times cB + \overline{m+1} \times ncB = 0$, cioè $C = \frac{\overline{t+n} \times -cB + \overline{m+1} \times -ncB}{b \times \overline{t+2n}}$, e ſoſtituendo il valore di B, ſarà $C = \frac{\overline{t+mn+n} \times \overline{t+mn+2n} \times acc}{tb^3 \times \overline{t+n} \times \overline{t+2n}}$, e così di mano in mano ſi averanno i valori quanti ſi vogliono per altrettante aſſunte coſtanti, e queſti valori poſti nella finta equazione ci ſomminiſtreranno appunto il canone aſſegnato.

Se gl'eſponenti m, n, t della propoſta formola ſaranno tali, che il canone, o ſia la ſerie infinita s'interrompa, cioè che qualche termine diventi $= 0$ (nel qual caſo ſarebbero $= 0$ tutti gl'altri, che vengono dopo) la ſerie ſarà finita, e terminata, vale a dire algebraico l'integrale della propoſta formola differenziale, ma è neceſſario, che la ſerie prima s'interrompa nel numeratore, cioè che prima diventi il numeratore $= 0$ del denominatore, perchè ſe prima ſarà $= 0$ il denominatore, quel termine, ed indi gl'altri dopo ſaranno eguali all'infinito. Acciò che la ſerie s'interrompa nel numeratore, fa d'uopo che ſia $-\frac{t}{n} - m$ eguale ad un numero intiero poſitivo.

Che ſe gl'eſponenti t, m, n della propoſta formola ſaranno tali, che la ſerie non s'interrompa mai, allora ſi muti l'eſpreſſione della propoſta formola in un'altra equivalente, cioè la formola per eſempio $ay^{t-1}dy \times \overline{b+cy^n}^{\,m}$ ſi muti in queſt'altra $ay^{t-1+mn}dy \times \overline{by^{-n}+c}^{\,m}$, che equivale alla prima, e ſi provi ſe così ſi à l'intento, e ſe no, la formola non ſarà algebraicamente integrabile con queſto canone. Se la formola foſſe $ay^{t-1}dy \times \overline{b-cy^n}^{\,m}$, allora i termini tutti del canone ſarebbero poſitivi.

Sia $\frac{a^5 dx \sqrt{bx+xx}}{x^5}$, cioè $a^5 x^{-\frac{9}{2}} dx \times \overline{b+x}^{\,\frac{1}{2}}$. Sarà $t - 1 = -\frac{9}{2}$, $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $c = 1$, onde ſarà eguale a zero la quantità $t + mn + 3n$, ed in conſeguenza ſarà zero il quarto termine, e gl'altri appreſſo della ſerie, e però avremo

$$\int \frac{a^5 dx \sqrt{bx+xx}}{x^5} = \int a^5 x^{-\frac{9}{2}} dx \times \overline{b+x}^{\,\frac{1}{2}} = \overline{-\frac{2a^5 x^{-\frac{7}{2}}}{7b} + \frac{2a^5}{7bb} \times \frac{4}{5} x^{-\frac{5}{2}} - \frac{2a^5}{7b^3} \times \frac{8}{15} x^{-\frac{3}{2}}} \times \overline{b+x}^{\,\frac{3}{2}} = -\frac{\overline{30a^5bb + 24a^5bx - 16a^5xx}}{105b^3x^{\frac{7}{2}}} \times \overline{b+x}^{\,\frac{3}{2}}.$$

Sia $\frac{ady}{yy\sqrt{aa+yy}}$, ſarà $t = -1$, $n = 2$, $m = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, $b = aa$, e però ſarà zero il ſecondo termine della ſerie, quindi

$$\int \frac{ady}{yy\sqrt{aa+yy}} = \frac{ay^{-1}}{-aa} \times \overline{aa+yy}^{\,\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{aa+yy}}{ay} \text{ ec.}$$

CAPO III.

Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve, Quadrature de' Spazj, Appianazioni delle Superficie, e Cubature de' Solidi.

75. Per fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale, applicandole alle quadrature de' spazj, rettificazioni di curve, appianazioni, o sia quadrature di superficie, e cubature de' solidi, sia una qualunque curva ADH (*Fig.* 6.) riferita all' asse AB con le ordinate parallele fra loro, ed in angolo retto sopra l' asse stesso. Alla ordinata BD condotta CH parallela, ed infinitamente prossima, e tirata DE parallela a BC, il mistilineo $BDHC$ sarà la flussione, o il differenziale, o sia l' elemento dello spazio ABD, e perchè lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$, si potrà prendere esso rettangolo per l' elemento del suddetto spazio ABD. Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi $BDEC$ sarà lo spazio compreso dalla curva AD, e dalle coordinate AB, BD. Quindi chiamata $AB=x$, $BD=y$, sarà $BC=dx$, $EH=dy$, ed il rettangolo $BDEC=ydx$ sarà la formola per gli spazj. Se adunque in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x, e per le co-

n stanti

ſtanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx, il valore dato per y, dy, e le coſtanti, ed indi integreremo, ſarà l'integrale il ricercato ſpazio ABD.

Altre eſpreſſioni, o formole poſſono averſi degl' elementi de' ſpazj per mezzo di Settori, o di Trapezj, le quali in certi incontri ſogliono eſſere più comode della riferita; ſe ne vedrà la maniera, e l'uſo in alcuni eſempj.

76. Che ſe la curva ſarà riferita al fuoco, o ſia ad un punto fiſſo, per eſempio M, da cui partano tutte le ordinate; condotta all'ordinata MD la infinitamente proſſima MH, lo ſpazio infiniteſimo MHD ſarà l'elemento dello ſpazio AMD; onde, perchè deſcritto col centro M, raggio MD, l'archetto infiniteſimo DK, lo ſpazietto DKH è nullo riſpetto allo ſpazio MDK, e perchè altresì l'archetto DK ſi può aſſumere per la tangente in D, o in K, ne viene, che lo ſpazio MDK ſarà l'elemento dello ſpazio AMD.

Chiamata per tanto $MD=y$, $KD=dz$, ſarà $\frac{ydz}{2}$ la formola generale degli ſpazj per le curve riferite al fuoco. E ſe in queſta formola ſi ſoſtituirà in luogo di y, o di dz il riſpettivo valore dato dall'equazione della curva, l'integrale ſarà lo ſpazio ricercato, cioè lo ſpazio AMD.

77.

77. Ma se la curva sarà riferita ad un diametro, cioè se le coordinate non saranno tra loro in angolo retto, condotta (*Fig.* 7.) HG perpendicolare ad AG, il prodotto di HG, o sia di FG in BC sarà il piccolo parallelogrammo $BCED$, ed in conseguenza l'elemento dell'area ABD. E perchè essendo dato l'angolo DBG, è data la ragione del seno tutto al seno retto, che sia per esempio quella di m ad n, fatta al solito $AB = x$, $BD = y$, sarà HG, o sia $FG = \frac{ny}{m}$, ed il parallelogrammo $BCED$ sarà $\frac{nydx}{m}$, formola generale dello spazio.

78. Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime DH della curva formano la curva stessa, e però, che DH ne sarà l'elemento, adunque chiamata (*Fig.* 6.) $AB = x$, $BD = y$, e però $BC = dx$, $EH = dy$, nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, sarà $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formola generale per la rettificazione di esse curve.

79. Rispetto alle curve riferite al fuoco, fatta pure $MD = y$, $KD = dz$, sarà istessamente la formola generale $\sqrt{dy^2 + dz^2}$.

80. Ma intorno alle curve con le coordinate in angolo obbliquo, (*Fig.* 7.) essendo dato l'angolo HCG, è data la ragione del seno tutto al seno del complemento

mento, che sia quella di m, ad e, onde sarà $CG = \frac{ey}{m}$, ed $EF = \frac{edy}{m}$, e però $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

81. Sostituito in ciascuna di queste formole, in luogo di dy, o di dx, o di dz, il rispettivo valore dato per l'altra variabile, e suoi differenziali dalla equazione della curva, ed indi fatte le integrazioni, averemo la ricercata lunghezza della curva AD.

82. S'intenda moversi il piano AHC (*Fig.* 6.) attorno alla retta AC, la curva AH descriverà una superficie nel mentre, che il piano AHC descriverà un solido; ma la porzione infinitesima DH descriverà una zona infinitesima, che sarà l'elemento della superficie descritta dalla curva AH, ed il piano infinitesimo $DBCH$ descriverà un solido pure infinitesimo, che sarà l'elemento del solido descritto dal piano AHC. Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate in angolo retto; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c, la circonferenza descritta col raggio $BD = y$ sarà $\frac{cy}{r}$, e però $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'espressione della zona infinitesima, ed in conseguenza la formola generale per le superficie.

83. Sarà pure $\frac{cyy}{2r}$ l'area del circolo col rag-

gio

gio $BD = y$, e però $\frac{cyydx}{2r}$ farà l'espressione del cilindretto infinitesimo descritto dal rettangolo $BCED$, ma esso non differisce, se non per quantità infinitesima del secondo ordine, dal solido generato dal piano $BCHD$; adunque farà $\frac{cyydx}{2r}$ la formola generale per i solidi.

84. Ma rispetto al caso della *Fig.* 7., cioè quando le coordinate sono tra loro nel dato angolo obbliquo, il raggio del circolo, sopra cui insiste la piccola zona, ed il piccol cilindro, non è $CH = y$, ma bensì $GH = \frac{ny}{m}$, siccome l'elemento DH, che forma la zona, non è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ma $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, e l'altezza del picciol cilindro non è $BC = dx$, ma $FD = dx + \frac{edy}{m}$; adunque la formola della superficie in questo caso farà $\frac{cny}{rm}\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

85. Il prodotto del circolo col raggio GH nell' altezza FD, cioè $\frac{cnnyy}{2rmm} \times \overline{dx + \frac{edy}{m}}$, è l'elemento del solido generato dal piano AGH; adunque da questo sottraendo l'elemento del solido generato dal triangolo HCG, cioè $\frac{cnnyy}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$, il rimanente farà l'elemento

del

del solido generato dal piano ABD, e però sarà $\frac{cnnyydx}{2rmm}$ la formola generale per essi solidi.

86. Per le curve riferite al fuoco, come che è variabile l'angolo DMB (*Fig.* 6.), e per conseguenza non si può avere il valore della BD, o CH, raggio del circolo, che necessariamente entra nella formola delle quadrature della superficie, e cubature del solido, fa d'uopo dall'equazione riferita al fuoco cavare l'equazione della stessa curva riferita all'asse, ed indi procedere colla solita maniera già spiegata; avvertendo, che nelle cubature bisognerà dagl'integrali sottrarre il cono generato dal triangolo MHC, per avere il solido generato dal piano AMD.

87. La maniera di cavare dall'equazione differenziale di una curva al fuoco l'equazione della stessa curva all'asse è la seguente.

La curva ADH (*Fig.* 6.) si consideri nel tempo stesso relativamente al fuoco M, ed all'asse AMB, egli è certo, che il quadrato HD dell'elemento della curva è eguale tanto ai due quadrati DK, KH, quanto agl'altri due DE, EH, e che di più il quadrato di MD è eguale ai due quadrati MB, BD. Chiamando $MB = x$, $BD = y$, $MD = z$, e l'arco minimo $DK = du$, avremo $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, ed $xx + yy = zz$.

Ora l'equazione della curva al fuoco venga espressa

general-

generalmente dalla formola $pdz = du$, in cui p è una data funzione di z, e sarà $dz^2 + p^2dz^2 = dx^2 + dy^2$, e collocando in vece di dy il suo valore nascente dall'equazione $xx + yy = zz$, vale a dire $\frac{zdz - xdx}{\sqrt{zz - xx}}$, troveremo $dz^2 + ppdz^2 = dx^2 + \frac{\overline{zdz - xdx}^2}{zz - xx}$, la quale si riduce alla seguente $ppdz^2 \times \overline{zz - xx} = zzdx^2 - 2xzdxdz + xxdz^2$, ed estratta la radice quadrata, $pdz = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{zz - xx}}$.

E' d'uopo espurgare nuovamente la premessa equazione liberandola dalla mistura delle incognite, col porre $x = \frac{zq}{b}$, e però $dx = zdq + qdz$. Fatta svanire, col mezzo dell'equazione sussidiaria assunta, la x, e le sue funzioni, avremo $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Nell'equazione $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ se tale sarà il valore di p dato per z, che la quantità $\frac{pdz}{z}$ con le debite sostituzioni possa ridursi alla differenziale d'un'arco di circolo, e che fatte le necessarie sommatorie, i due archi circolari si rispondano, come numero a numero, allora la curva sarà algebraica, e troveremo la sua equazione

all'

all' asse con una formola alla Cartesiana. In ogn' altro caso la curva sarà trascendente.

ESEMPIO.

Sia l'equazione di una curva al fuoco $\frac{zdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = du$.

Avremo in tal caso $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$, e nell' equazione $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$, sostituito il valore di p, sarà essa $\frac{dz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$. Pongo $b + z = t$, dunque $bb + 2bz + zz = tt$, e $bb - tt = - 2bz - zz$, onde fatta la sostituzione, sarà $\frac{dt}{\sqrt{cc + bb - tt}} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Sia per un caso $cc + bb = bb$, in tale supposto sarà $t = q$, cioè $b + z = q = \frac{bx}{z}$, dunque $bz + zz = bx$, e ponendo in luogo di z il suo valore, sarà l'equazione della curva $b\sqrt{xx + yy} + xx + yy = bx$, il che ec.

88. Il Canone assegnato c' insegna la maniera ancora di passare dall' equazione differenziale di una curva all' asse a quella del fuoco nel modo, che segue.

ESEM-

ESEMPIO I.

Si cerchi l'equazione al fuoco in un circolo, preso il fuoco in un punto della sua circonferenza A.

Sia (*Fig.* 8.) $AH = b$, $AG = x$, $AC = z = \sqrt{bx}$. Richiamisi a memoria la formola $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$, ove si è preso $q = \frac{bx}{z}$; poichè per l'equazione locale del circolo è $bx = zz$, sarà $q = z$, sicchè fatta svanire la q, sostituendo il suo valore z, sarà $\frac{pdz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{bb - zz}}$, o sia $p = \frac{z}{\sqrt{bb - zz}}$; nella formola adunque $pdz = du$ se in cambio di p sostituirassi il valore ritrovato, sarà $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, equazione del circolo al fuoco preso nel punto A.

ESEMPIO II.

89. Si cerchi l'equazione delle sezioni coniche riferite al loro umbilico M. (*Fig.* 6.)

Chiamata $MB = x$, $BD = y$, l'equazione generale, che abbraccia tutte le sezioni del cono, sarà $a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx+yy}$, cioè: alla parabola col parametro $2a$, quando $c = b$; all'ellissi coll'asse trasverso $= \frac{2abb}{bb-cc}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb-cc}}$, distanza del fuoco dal vertice $= \frac{ab}{b+c}$, se b sia maggiore di c; all'iperbola coll'asse trasverso $= \frac{2abb}{cc-bb}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{cc-bb}}$, distanza del vertice dall'umbilico $= \frac{ab}{b+c}$, se b sia minore di c; se $c = 0$, sarà al circolo col diametro $= 2a$. Ma $\sqrt{xx+yy} = z$, dunque $a \pm \frac{cx}{b} = z$, ed in oltre $bx = zq$, dunque $a \pm \frac{czq}{bb} = z$, ovvero $\pm \frac{bb}{c} \mp \frac{abb}{cz} = q$, e differenziando $\pm \frac{abcbdz}{cczz} = dq$, e $qq = \frac{bbbb}{cc} - \frac{2abbbb}{ccz} + \frac{aabbbb}{cczz}$, ed $bb - qq = bb - \frac{bbbb}{cc} + \frac{2abbbb}{ccz} - \frac{aabbbb}{cczz}$, avremo dunque

$$\frac{dq}{\sqrt{bb-qq}} = \frac{\pm\, cbabdz}{cz\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - a^2bbbb}} = \frac{pdz}{z},$$

dunque $p = \frac{\pm\, abb}{\sqrt{bbcczz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - aabbbb}}$, ed

essendo

essendo $pdz = du$, avremo l'equazione cercata $\frac{\pm abbdz}{\sqrt{bbcczz - bbbbzz + 2abbbbz - aabbbb}} = du$. Il segno negativo serve, quando le assisse si prendono dal fuoco verso il vertice, il positivo al contrario ec.

90. Dissi doversi ridurre l'equazione della curva al fuoco ad un altra riferita all'asse, non perchè ciò sia necessario assolutamente per le compianazioni delle superficie, e per le cubature de' solidi, mentre tutto questo si può ottenere per mezzo del noto Teorema, cioè, che *La periferìa della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa periferìa è eguale alla superficie del solido, che dalla rotazione viene generato; e l'area della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa area è eguale al solido accennato*; ma qui non si suppone il Lettore informato di essi centri di gravità.

Ora per avere una sufficiente idea delle curve riferite al fuoco, mi faccio ad indagare la loro costruzione. Sia una di queste BCD, (*Fig. 9.*) le coordinate infinitamente prossime AC, AE, che partono dal punto A, si chiamino z, la loro differenza $FE = dz$, e l'archetto minimo CF descritto col centro A sia $= du$. La natura della curva venga generalmente espressa dall'equazione differenziale $pdz = du$, in cui la p è data in qualsivoglia modo per z. Si noti pertanto, che il

 primo

primo membro pdz, avendo le variabili z, che tutte prendono origine dal polo A, è integrabile o algebraicamente, o trascendentemente; ma l'altro membro du, senza incorrere in paralogismo, non può sommarsi, non essendo egli già la flussione dell'arco u, perchè esso elemento du cresce, o cala in doppio senso, cioè ed in se stesso, e coll'aumentarsi o diminuirsi dell'ordinate AC, AE. Per procedere adunque aggiustatamente, col raggio arbitrario $AI = r$ si descriva il circolo IGH, e sia nella periferìa determinato un punto qualunque I, da cui si prendano come da punto fisso gl'archi crescenti IG, IH; e prorogate, se occorre, le variabili AC, AE fino in G, ed H, saranno simili i settori ACF, AGH, e però z, $du :: r$, GH, che si chiami dq, dunque $\frac{zdq}{r} = du$; ma per l'equazione generale della curva è $pdz = du$, dunque $\frac{zdq}{r} = pdz$, e però $\frac{rpdz}{z} = dq$; quindi sommando, sarà $\int \frac{rpdz}{z} = q = IG$. Le costanti aggiunte, o levate nell'integrare altro non sarebbero, che diversificare il sito del punto I.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia da costruirsi la spirale logaritmica, la di cui equazione è $\frac{adz}{b} = du$; ma $du = \frac{zdq}{r}$, dunque $\frac{adz}{b} = \frac{zdq}{r}$; o pure, perchè il raggio AI è assunto ad arbitrio, fatta $b = r$, e presa a come unità, $\frac{dz}{z} = dq$, ed integrando, $lz = q$, la di cui effezione geometrica è trascendente, ma semplicissima.

ESEMPIO II.

Sia la spirale iperbolica della sottangente costante $= a$, e però l'equazione $\frac{adz}{z} = du$; ma $du = \frac{zdq}{r}$, dunque $\frac{ardz}{zz} = dq$, e sommando sarà $b - \frac{ar}{z} = q$ ec.

In tali costruzioni si à sempre l'arco IG di circolo, che forma l'omogeneo di comparazione, l'altro membro $\int \frac{rpdz}{z}$ può essere integrabile analiticamente, come nel secondo esempio, o trascendentemente per via della quadratura dell'iperbola, come nel primo, o per qualunque altra più composta. Quindi in un solo caso le nostre curve possono esser algebraiche, cioè quando la quantità $\int \frac{rpdz}{z}$ possa ridursi alla rettificazione d'un arco di cerchio, che al corrispondente IG stia, come numero a numero. Se la proporzione fosse per avventura sorda, allora la curva $BCED$ sarà bensì meccanica, ma non già dipendente dal tetragonismo del cerchio, riducendosi ad un problema diverso consistente nel dividere gl'archi circolari in qualunque data ragione, il che può ottenersi per mezzo dell' Elice o sia Spirale d'Archimede, o della Quadratice di Dinostrato.

Le soprascritte cose ci somministrano un' altro modo di far passaggio dalle espressioni delle curve al fuoco a quelle, che si riferiscono all'asse, o al contrario. Giacchè $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$, chiamata la tangente $IK = t$ (num. 26.), sarà essa tangente t data analiticamente, o trascendentemente per z, ma $AI = r$, $AK = \sqrt{rr+tt}$, $AM = x$, $MC = y$, dunque $\frac{rz}{x} = \sqrt{rr+tt}$, e dopo le debite riduzioni, $\frac{r\sqrt{zz-xx}}{x} = t = \frac{ry}{x}$, ma t è dato per z, e $z = \sqrt{xx+yy}$, dunque siamo arrivati alla curva locale all'asse, che tosto si riduce alle solite coordinate x, y. Tornando indietro per la stessa strada si passa dalle equazioni all'asse a quelle al fuoco.

Ripi-

Ripiglio l'esempio del num. 87., cioè la curva $\frac{zdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = du$ riferita al fuoco, per riferirla all' asse. Poichè si è presa $pdz = du$ per equazione generale delle curve riferite al fuoco, sarà in questo caso particolare $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$, onde surrogato questo valore in luogo di p nell'equazione $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr + tt}$, sarà $\frac{rdz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{rrdt}{rr + tt}$. Faccio $b + z = s$, $dz = ds$, $bb + 2bz + zz = ss$, onde $- 2bz - zz = bb - ss$, e sostituiti questi valori, sarà $\frac{rds}{\sqrt{cc + bb - ss}} = \frac{rrdt}{rr + tt}$, cioè fatta $cc + bb = hh$, $\frac{rds}{\sqrt{hh - ss}}$, o sia $\frac{rhds}{h\sqrt{hh - ss}} = \frac{rrdt}{rr + tt}$; ma l'integrale del primo membro è un'arco di cerchio, di cui sia h il raggio, ed s il seno del complemento, (num. 37.) moltiplicato nella frazione costante $\frac{r}{h}$, e l'integrale del secondo è un'arco di cerchio del raggio r, tangente t; dunque il primo arco sarà al secondo, come h ad r, cioè saranno tra loro, come i raggi, dunque sono simili, dunque nella stessa ragione de' raggi sono pure le tangenti; e perchè la tangente del

del primo arco è $\frac{b}{s}\sqrt{bb-ss}$, sarà $\frac{b}{s}\sqrt{bb-ss}, t :: b, r$, cioè $t = \frac{r}{s}\sqrt{bb-ss}$, quindi restituito il valore di s, e posto $\frac{ry}{x}$ in luogo di t, si averà

$\frac{ry}{x} = \frac{r\sqrt{bb-bb-2bz-zz}}{b+z}$, equazione ridotta all'asse, la quale si esprimerà con le sole coordinate x, y, ponendo in luogo di zz il valore $xx+yy$, e sarà $by + y\sqrt{xx+yy} = x\sqrt{bb-bb-2b\sqrt{xx+yy}-xx-yy}$, che è la stessa della ritrovata al citato num. 87.

Per passare dall'equazioni all'asse a quelle del fuoco, prendo l'Esempio I. del num. 88. la di cui equazione al circolo è $z = \sqrt{bx}$ (*Fig.* 8.).

La tangente data per z dell'arco OQ descritto col centro A, raggio r, si trova essere $\frac{r\sqrt{bb-zz}}{z} = t$; dunque nell'equazione canonica $dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$ sostituiti in luogo di t, e di dt i rispettivi valori, averemo $-dq = -\frac{rdz}{\sqrt{bb-zz}}$; pongo $-dq$, perchè crescendo AC, (z) cala l'arco OQ (q); ma $dq = \frac{rdu}{z}$, quindi di $\frac{rdu}{z} = \frac{rdz}{\sqrt{bb - zz}}$, cioè $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, che è la stessa equazione della ritrovata al num. 88.

91. Nè meno sono necessarie le particolari formole, che si sono ritrovate nel caso delle curve con le coordinate in angolo obbliquo tra loro, perchè tali equazioni possono sempre mutarsi in altre, che abbiano le coordinate in angolo retto, ed indi poi si potrà servirsi delle solite formole.

Ed in fatti si chiami (*Fig.* 7.) $HG = p$, $AG = q$; è adunque $p = \frac{ny}{m}$, $q = x + \frac{ey}{m}$, denominando, come sopra, $AB = x$, $BD = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto quella di m ad n, al seno del complemento quella di m ad e; adunque sarà $y = \frac{mp}{n}$, $x = q - \frac{ey}{m} = q - \frac{ep}{n}$. Sostituiti per tanto nella proposta equazione in luogo di x, ed y questi valori dati per p, e q, avrassi l'equazione della curva con le coordinate in angolo retto fra loro. Ma succederà bene spesso, che l'equazione primitiva sia semplice, e trasformandola si faccia assai composta; anzi, che essendo separate le incognite nella proposta, non lo sieno nella trasformata, il che è di maggiore difficoltà, nè possano separarsi con le solite regole di divisioni, estrazioni di radici ec.

P Tut-

Tuttavia però in molti casi particolari non sarà forse mal fatto il mettere a prova, e l'una, e l'altra maniera per appigliarsi a quella, che nel dato caso sarà più comoda.

Ma sarà opportuno venire agl' Esempj, ne' quali, quando non si avvisi in contrario, intenderassi sempre, che le coordinate siano fra loro in angolo retto.

Delle Quadrature de' Spazj.

ESEMPIO I.

92. Sia ABC (*Fig.*10.) una parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, una qualunque assissa $AD = x$, $DB = y$, e debbasi quadrare lo spazio ADB. Sarà dunque $y = \sqrt{ax}$, e posto questo valore nella formola generale de' spazj (ydx) in luogo di y, sarà essa $dx\sqrt{ax}$, ed integrando $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$. La quantità b è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto A, cioè quando $x = 0$, lo spazio è zero, adunque l'integrale $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta $x = 0$, e però sarà $\frac{2}{3}0\sqrt{a0} + b = 0$, cioè $b = 0$; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna.

Adun-

Adunque sarà lo spazio $ABD = \frac{2}{3} x\sqrt{ax}$, ma $\sqrt{ax} = y$, onde $ABD = \frac{2}{3} xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'assissa nell' ordinata.

Quindi se si volesse lo spazio chiuso da una fissa, e determinata assissa, ed ordinata, per esempio quando sia $x = 2a$; comecchè, per l'equazione della curva, è in questo caso $y = \sqrt{2aa}$, sarà lo spazio $= \frac{4}{3} aa\sqrt{2}$. Se le assisse della parabola non principiassero dal vertice A, ma da un dato punto D; posta, per esempio $AD = a$, una qualunque $DE = x$, il parametro $= f$, sarà l'equazione $af + fx = yy$, ed $y = \sqrt{af + fx}$. Sostituito questo valore nella formola ydx, sarà essa $dx\sqrt{af + fx}$, ed integrando $\frac{2}{3} \times \overline{a + x}\sqrt{af + fx} + b$ eguale allo spazio $DCEB$. Ma per determinare la costante b si rifletta, che nel punto D, cioè quando $x = 0$, lo spazio è eguale a zero, adunque nell' integrale fatta $x = 0$, dovrà essere $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però la costante $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$; adunque per avere l'integrale compito, in luogo di aggiungere la b, bisognerà sottrarre $\frac{2}{3} a\sqrt{af}$, e però lo spazio ricercato $DCEB$ sarà $= \frac{2}{3} \times \overline{a + x}\sqrt{af + fx} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$.

Sia $AE = a$, ed in E principj la x verso A, e sia una qualunque $ED = x$, sarà l'equazione $af - fx = yy$, ed $y = \sqrt{af - fx}$, onde $ydx = dx\sqrt{af - fx}$, ed integrando, sarà $-\frac{2}{3}\overline{a - x} \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}} + b$. Ma quando $x = 0$, lo spazio pure è $= 0$, adunque fatta nell' integrale $x = 0$, dovrà essere $-\frac{2}{3}a\sqrt{af} + b = 0$, e però $b = \frac{2}{3}a\sqrt{af}$; adunque lo spazio $EDBC = \frac{2}{3}a\sqrt{af} - \frac{2}{3} \times \overline{a - x}\sqrt{af - fx}$.

Si è veduto, che generalmente lo spazio AEC nella parabola è $= \frac{2}{3}\, AE \times EC$, così lo spazio $ADB = \frac{2}{3}\, AD \times DB$; adunque lo spazio $DECB$ sarà $= \frac{2}{3}\, AE \times EC - \frac{2}{3}\, AD \times DB$, il che appunto confrontata col calcolo dell' uno, e dell' altro caso dell' origine della x dal punto D verso E, e dal punto E verso D.

Prendo l'equazione generale a tutte le parabole di qualunque grado $a^m x^n = y^r$, onde sarà $y = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, e però la formola $ydx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$, ed integrando, sarà lo spazio $= \dfrac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$, ma presa $x = 0$, si trova essere $b = 0$, adunque non va aggiunta costante alcuna, e l' integrale ritrovato $\dfrac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$ è compito, e po-

ponendo y in luogo di $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, ſarà $\frac{rxy}{n+r}$ = allo ſpazio ricercato.

ESEMPIO II.

93. Sia la curva $y = \sqrt[m]{x+a}$, ſarà adunque $ydx = dx \sqrt[m]{x+a}$, ed integrando, ſarà lo ſpazio $\frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}} + b$.

Ma poſta $x = 0$, dovrà eſſere $b = -\frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$, adunque l'integrale compito, cioè lo ſpazio ricercato ſarà $= \frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$.

ESEMPIO III.

94. Sia l'iperbola fra gl'aſintoti FED, (*Fig.* 11.) e ſia $AB = x$, $BE = y$, e l'equazione $xy = aa$; ſarà $y = \frac{aa}{x}$, e però $ydx = \frac{aadx}{x}$, ed integrando, ſarà lo ſpazio $= a\,l\,x + b$, preſo il logaritmo nella logaritmi-

ca

ca della sottangente $= a$. Ma posta $x = 0$, il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, per la natura della logaritmica, adunque la quantità b da aggiungersi all'integrale deve essere quantità infinita, e positiva, e però infinito lo spazio compreso della curva EF prodotta in infinito, dall'asintoto, e dalle due coordinate AB, BE.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xyy$, sarà $y = \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e però $ydx = dx\sqrt{\frac{a^3}{x}}$, ed integrando, sarà lo spazio $= 2\sqrt{a^3 x} + b$, ma posta $x = 0$, è $b = 0$, adunque non fa d'uopo aggiungere costante alcuna, e l'integrale compito, cioè lo spazio $ABEF$ infinitamente prodotto all'insù, sarà $2\sqrt{a^3 x}$, quantità finita, o sia, per l'equazione della curva, $= 2xy$.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xxy$; sarà $y = \frac{a^3}{xx}$, ed $ydx = \frac{a^3 dx}{xx}$, ed integrando sarà lo spazio $= -\frac{a^3}{x} + b$, ma posta $x = 0$, sarà $\frac{a^3}{0}$ quantità infinita, adunque b è eguale all'infinito, onde per avere l'integrale compito bisognerà aggiungere quantità infinita, e però sarà infinito lo spazio.

Sia generalmente l'equazione a tutte le iperboloi-

di

di $a^{m+n} = x^n y^m$, sarà $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$, e però $\int ydx =$ $\frac{ma^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}}{m-n} + b$. Se $m = 1$, $n = 1$, cioè $xy = aa$, avremo $\int ydx = \frac{aa}{0} + b$, quantità infinita, onde lo spazio infinito, come si è veduto di sopra.

Se $n = 1$, $m = 2$, cioè $a^3 = xyy$, sarà $\int ydx = 2\sqrt{a^3x} + b$; ma posta $x = 0$, sarà pure $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio cercato $= 2\sqrt{a^3x} = 2xy$, per l'equazione della curva, e però finito, quantunque infinitamente prodotto all' insù dalla parte di F.

Se $n = 2$, $m = 1$, cioè $a^3 = xxy$, sarà $\int ydx = -\frac{a^3}{x} + b$, ma posta $x = 0$, sarà $-\frac{a^3}{0}$ infinito, e però $b =$ all'infinito, adunque si deve aggiungere all' integrale quantità infinita, e però lo spazio sarà infinito.

Se $n = 1$, $m = 3$; cioè $a^4 = xy^3$, sarà $\int ydx = \frac{3}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$; ma posta $x = 0$, sarà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, sarà $= \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4xx} = \frac{3}{2}xy$, quantità finita, quantunque infinitamente prodotta all'insù.

Se

Se $n = 3$, $m = 1$; cioè $a^4 = x^3 y$, sarà $\int y dx = -\frac{a^4}{2xx} + b$; ma posta $x = 0$, è $b = \infty$, adunque lo spazio infinito.

Se $n = 1$, $m = 4$; cioè $a^5 = xy^4$, sarà $\int y dx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{a^5 x^3} + b$; ma posta $x = 0$, sarà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, sarà $= \frac{4}{3}\sqrt[4]{a^5 x^3} = \frac{4}{3} xy$, quantità finita.

Se $n = 4$, $m = 1$; cioè $a^5 = x^4 y$, sarà $\int y dx = -\frac{a^5}{3x^3} + b$; ma posta $x = 0$, sarà b eguale all'infinito, adunque infinito lo spazio. Con la stessa maniera si potrà procedere quanto si vuole.

Prendansi ora le assisse dal punto B, e si cerchi lo spazio $BCDE$. Sia dunque $AB = b$, $BC = x$, $CD = y$, e sia la stessa iperbola apolloniana, la di cui equazione $by + xy = aa$; adunque sarà $y = \frac{aa}{b + x}$, e però $y dx = \frac{aadx}{b + x}$, ed integrando $\int y dx = a\, l\, \overline{b + x} + f$, preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Ma

Ma per determinare la costante f, posta $x=0$, dovrà essere $f=-a\,lb$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $BCDE$ sarà $a\,l\overline{b+x}-a\,lb$.

Se si prenda $BC=x$ infinita, sarà infinito $l\overline{b+x}$; adunque lo spazio $EBCD$ infinitamente prodotto dalla parte di C è infinito.

Si prenda x negativa $=BA=-b$, sarà $a\,l\overline{b+x}$ eguale ad a moltiplicato nel logaritmo del zero; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, adunque in questo caso lo spazio è negativo, cioè dalla parte di M, ed è infinito, come si è veduto anche di sopra, e però lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti è infinito dall' una, e dall' altra parte infinitamente prodotto.

Sia l'iperboloide cubico dell'equazione $byy+xyy=a^3$, sarà $y=\sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, onde $ydx=dx\sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, ed integrando $\int ydx=2\sqrt{a^3b+a^3x}+f$, ma posta $x=0$, sarà $f=-2\sqrt{a^3b}$, adunque l'integrale compito, o sia lo spazio $EBCD$, sarà $=2\sqrt{a^3b+a^3x}-2\sqrt{a^3b}$, quantità algebraica. Presa x infinita, sarà infinito lo spazio $EBCD$ infinitamente prodotto dalla parte di C.

Presa x negativa $=BA=-b$, l'integrale sarà $-2\sqrt{a^3b}$, adunque lo spazio sarà negativo, cioè sarà *FEBAM*, e sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *M*, come si è pure veduto di sopra.

Sia l'iperboloide dell'equazione $\overline{b+x}^2 \times y = a^3$, sarà $y = \frac{a^3}{\overline{b+x}^2}$, onde $ydx = \frac{a^3dx}{\overline{b+x}^2}$. Ed integrando $\int ydx = -\frac{a^3}{b+x} + f$, ma posta $x = o$, sarà $f = \frac{a^3}{b}$; adunque l'integrale compito, cioè lo spazio *EBCD* sarà $= \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{b+x}$. Presa x infinita, il termine $-\frac{a^3}{b+x}$ sarà zero, adunque lo spazio sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *C*. Sia x negativa $= BA = -b$, l'integrale sarà $\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{o}$, ma $-\frac{a^3}{o}$ è quantità infinita, e negativa, adunque lo spazio sarà dalla parte di *M* infinito ec.

Con questo metodo operando troverassi, che lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti infinitamente prodotto sarà infinito dall'una, e dall'altra parte; tra l'iperboloide primo cubico, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide secondo cubico, e gli asintoti sarà infinito dalla parte di *M*, e finito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide primo del quarto grado, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iperl'iperboloide secondo, e gli asintoti sarà finito dalla parte di C, ed infinito dalla parte di M ec.

Per porre in opera le serie. Prendo l'espressione dello spazio $BCDE$ della suddetta iperbola apolloniana, cioè $\frac{aadx}{b+x}$.

Ridotta questa in serie, sarà essa $= \frac{aadx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} - \frac{aax^3dx}{b^4}$ ec., ed integrando $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$ ec., la qual serie infinitamente prodotta equivale appunto allo spazio $BCDE$, e se fosse sommabile, ci darebbe in termini finiti, cioè algebraicamente lo spazio cercato, vale a dire la quadratura dell'iperbola, ma non essendo sommabile, quanti più termini di essa si prenderanno, principiando dal primo, tanto più ci avvicineremo al giusto valore dello spazio.

Prendo l'assissa BT dalla parte de' negativi, sarà l'equazione della curva $by - xy = aa$, e però $ydx = \frac{aadx}{b-x}$, e riducendo in serie, sarà

$ydx = \frac{aadx}{b} + \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxxdx}{b^3} + \frac{aax^3dx}{b^4} + \frac{aax^4dx}{b^5}$ ec., ed integrando, $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} + \frac{aax^4}{4b^4} + \frac{aax^5}{5b^5}$ ec.

 eguale

eguale allo ſpazio $BTPE$. Preſa $BT = BA$, lo ſpazio $FEBAM$ infinitamente prodotto dalla parte di M ſarà $= aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \frac{aa}{5}$ ec., ſerie di valore infinito; adunque lo ſpazio infinito.

ESEMPIO IV.

95. Fra gl'aſintoti AS, AB (*Fig.* 12.) ſia l'iperbola equilatera OC, e ſia $AB = BC = a$, $BI = -x$. S'intenda deſcritta la curva mecanica BEF tale, che il rettangolo di AB in qualunque ordinata IE ſia eguale al corriſpondente ſpazio iperbolico $BCOI$. Si ricerca lo ſpazio indeterminato $SABEF$. Sia l'ordinata $IE = z$. Si è veduto, eſſere lo ſpazio $BCOI$ eguale alla ſerie $ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$ ec., poſta come ſuppongo, $a = b$, adunque per la proprietà della curva, ſarà $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{3aa} + \frac{x^4}{4a^3}$ ec., e però $zdx = xdx + \frac{xxdx}{2a} + \frac{x^3dx}{3aa} + \frac{x^4dx}{4a^3}$ ec.; ed integrando, ſarà finalmente lo ſpazio $BIE = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4}$ ec., e preſa $x = a = BA$ riſpetto a tutto lo ſpazio $SABEF$ infi-

nitamente prodotto, ſarà eſſo $= \frac{aa}{2} + \frac{aa}{6} + \frac{aa}{12} + \frac{aa}{20} + \frac{aa}{30}$ ec., la qual ſerie è ſommabile, ed è $= aa$, adunque è algebraicamente quadrabile, ed eguale al quadrato di BA lo ſpazio infinitamente prodotto $SABEF$.

ESEMPIO V.

96. Sia l'iperbola ATC, (*Fig.* 13.) l'aſſe traſverſo $DA = 2a$, il parametro $= p$, $EB = x$, $BC = y$, e però l'equazione $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$, e ſi cerchi lo ſpazio ABC; ſarà dunque $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$, e però la formola $ydx = dx \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$. Fatto ſparire il ſegno radicale, e paſſando all'integrazione, troveraſſi con le ſolite maniere l'integrale in parte algebraico, ed in parte logaritmico, adunque lo ſpazio ABC dell'iperbola dipende dalla deſcrizione della logaritmica.

Se ſi voglia lo ſpazio $ACHE$, lo ſpazietto infiniteſimo $ITCH$, fatta MT infinitamente proſſima a BC, ne ſarà l'elemento, e però la formola ſarà xdy, in cui ſoſtituendo in luogo di x il valore dato per y dall'equazione, ſarà $xdy = dy \sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$, il di cui inte-

grale

grale istessamente dipende dalla logaritmica.

E se tanto nella formola ydx del primo spazio, quanto nella xdy del secondo si avesse sostituito in luogo di dx in quella, ed in luogo di dy in questa i rispettivi valori dati dall'equazione, si sarebbero parimente ritrovati gl'integrali della stessa natura.

Per far uso delle serie. Prendo la formola dello spazio $ACHEA$, cioè xdy; adunque $xdy = dy\sqrt{\frac{2ayy + aap}{p}}$, e facendo per maggiore facilità $2a = p$, (giacchè le costanti non alterano il metodo) cioè supposta l'iperbola equilatera, sarà $xdy = dy\sqrt{yy + aa}$, e riducendo in serie il radicale, sarà

$$xdy = ady + \frac{yydy}{2a} - \frac{y^4 dy}{8a^3} + \frac{y^6 dy}{16a^5} - \frac{5y^8 dy}{128a^7} \text{ ec.},$$ ed integrando $\int xdy$, cioè lo spazio $ACHEA = ay + \frac{y^3}{6a} - \frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7 \times 16a^5} - \frac{5y^9}{9 \times 128a^7}$ ec., serie che non si sa sommare. E sottraendo questa serie dal rettangolo xy, avrassi lo spazio ABC.

Si conducano dal centro E le infinitamente prossime ET, EC, e sia AKP tangente nel vertice. Col centro E si descrivano gli archetti di circolo KQ, TR;

sarà

sarà $AK = \frac{ay}{x}$, e $KP = \frac{axdy - aydx}{xx}$, $ET = \sqrt{xx + yy}$,

$EK = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$, e per la similitudine de' triangoli

PKQ, KEA, o sia TEM, sarà $KQ = \frac{axdy - aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$,

e per la similitudine de' settori EKQ, ETR, sarà

$TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però sarà $\frac{1}{2} ET \times TR$, cioè $\frac{xdy - ydx}{2}$

l'elemento del settore ETA, e sostituendo in luogo di y, e dy il valore dato dall'equazione della curva $y = \sqrt{xx - aa}$, (supposta equilatera l'iperbola) sarà $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, ed integrando $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, cioè il settore $ETA =$

$-\frac{1}{2} a\, l\, \overline{x + \sqrt{xx - aa}}$ nella logaritmica della sottangente $= a$, il quale spazio è espresso da quantità negativa appunto, perchè si assume nel senso de' negativi.

Riducendo la formola in serie, troveremo $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} =$

$\frac{aadx}{2x} + \frac{a^4 dx}{4x^3} + \frac{3a^6 dx}{16x^5} + \frac{5a^8 dx}{32x^7} + \frac{35a^{10} dx}{256x^9}$ ec.

Ma per integrare il primo termine della serie sarebbe

rebbe d'uopo ridurre prima quello ancora ad una serie infinita; adunque sarà meglio fare più speditamente nel seguente modo. Sia $EM = x$, $MT = y$, $AK = z$, sarà $KP = dz$, e sia $KE = p$, $AE = a$, semiasse trasverso, il semiasse conjugato $= b$. Sarà adunque $KQ = \frac{adz}{p}$, $ET = \frac{px}{a}$, $TR = \frac{xdz}{p}$, e però $\frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{2a}$; ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$, e per i triangoli simili EAK, EMT, sarà $y = \frac{xz}{a}$, adunque $zx = b \sqrt{xx - aa}$, ed $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$; e però la formola sarà $\frac{abbdz}{2 \times \overline{bb - zz}}$, cioè ridotta in serie, $\frac{adz}{2} + \frac{azzdz}{2bb} + \frac{az^4 dz}{2b^4} + \frac{az^6 dz}{2b^6} + \frac{az^8 dz}{2b^8}$ ec., ed integrando, $\int \frac{abbdz}{2 \times \overline{bb - zz}}$, cioè lo spazio $ETA = \frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb} + \frac{az^5}{10b^4} + \frac{az^7}{14b^6} + \frac{az^9}{18b^8}$ ec.

ESEM-

ESEMPIO VI.

97. Sia il circolo ABD (*Fig.* 14.) col diametro $AD = a$, e si cerchi l'area d'un qualunque mezzo segmento AHE. Fatta $AE = x$, $EH = y$, sarà l'equazione $y = \sqrt{ax - xx}$, e però $ydx = dx\sqrt{ax - xx}$. Qui non occorre liberare la formola dalla radicale, o tentare altri modi, a fine di mutarla in un'altra capace d'essere integrata algebraicamente, o per mezzo de' logaritmi, perchè sarà fatica superflua, mentre ci ridurremo sempre ad una formola di quadratura, o rettificazione di circolo, come si è notato al num. 37., e però senz'altro potrassi procedere con le serie.

Risoluta adunque in serie la formola, sarà

$$dx\sqrt{ax - xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.},$$

ed integrando $\int ydx$, cioè lo spazio $AEH =$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

Sia ora il raggio $CA = a$, e sia $CE = x$, $EH = y$, e l'equazione $y = \sqrt{aa - xx}$; adunque $ydx = dx\sqrt{aa - xx}$, e riducendo in ferie, $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7}$ ec., ed integrando, $\int ydx$, cioè lo spazio $CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ ec., e fatta $x = a$ rispetto a tutto il quadrante, $aa - \frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$ ec., ed il quadruplo di questa serie sarà l'area di tutto il circolo.

Per mezzo d'un settore. Sia $CA = a$, $AQ = x$, e condotta CK infinitamente prossima alla CQ, sarà $QK = dx$, $CQ = \sqrt{aa + xx}$, e descritto col centro C l'archetto infinitesimo QS, per la similitudine de' triangoli KSQ, QAC, sarà $QS = \frac{adx}{\sqrt{aa + xx}}$, e però $MN = \frac{aadx}{aa + xx}$; adunque il picciolo settore CMN, elemento del settore CAM, sarà $= \frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}}$. Ridotto esso per tanto in serie, sarà $\frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}} = \frac{a^3 dx}{2aa} - \frac{a^3 xxdx}{2a^4} + \frac{a^3 x^4 dx}{2a^6} - \frac{a^3 x^6 dx}{2a^8} + \frac{a^3 x^8 dx}{2a^{10}}$ ec., ed integrando,

grando, ſarà $\int \frac{a^3 dx}{2 \times \overline{aa + xx}}$, cioè il ſettore $CMA =$

$\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{10a^3} - \frac{x^7}{14a^5} + \frac{x^9}{18a^7}$ ec., e poſto, che l'arco

AM ſia la metà del quadrante, cioè preſa $x = a$, la ſerie ſarà $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14}$ ec.; ed il doppio, cioè

$aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7}$ ec. ſarà il quadrante ABC.

Se in vece di prendere il raggio $CA = a$, l'aveſſi preſo $= \sqrt{\frac{aa}{8}}$, ſarebbe il quadrante $ABC =$

$\frac{aa}{8} - \frac{aa}{3 \times 8} + \frac{aa}{5 \times 8} - \frac{aa}{7 \times 8}$ ec., e ſottraendo attualmente ciaſcun termine negativo dall'antecedente poſitivo, ſarà $\frac{aa}{3} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{99} + \frac{aa}{195}$ ec., che è la ſteſſa ſerie inſerita dal Sig. Leibnizio negl'atti di Lipſia dell'anno 1682.

ESEMPIO VII.

98. Sia l'elliſſi BCD, (*Fig.* 15.) il ſemiaſſe traſverſo $AB = a$, il ſemiaſſe conjugato $AC = b$, $AE = x$, $EH = y$, onde l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \overline{aa - xx} = yy$, e pe-

rò $ydx = \frac{bdx}{a}\sqrt{aa - xx}$, elemento dell'area $AEHC$.

Ma $dx\sqrt{aa - xx}$ è formola di quadratura del circolo BOD, il di cui diametro sia l'asse trasverso dell'ellissi, adunque dalla quadratura del circolo dipenderà la quadratura dell'ellissi. E perchè $\int \frac{bdx}{a}\sqrt{aa - xx} = EHCA$, e $\int dx\sqrt{aa - xx} = EMOA$; sarà un qualunque spazio dell'ellissi al corrispondente spazio del circolo sul diametro DB, come b ad a, cioè come il semiasse conjugato al semiasse trasverso, ed in conseguenza lo spazio intero dell'ellissi a tutto lo spazio del circolo nella stessa ragione. Ma poichè i circoli sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o sia de' raggi, se faremo un circolo, il di cui raggio sia $= \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale tra i due semiassi dell'ellissi BCD, sarà questo circolo al circolo BOD, come ab, $aa :: b$, a, ma in questa medesima ragione è l'area dell'ellissi BCD allo stesso circolo BOD; adunque l'area dell'ellissi sarà eguale all'area del circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale fra i semiassi dell'ellissi.

Per mezzo della serie. Ridotta in serie la formola $\frac{bdx}{a}\sqrt{aa - xx}$, sarà essa $= \frac{bdx}{a} \times \overline{a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}}$ ec.,

ed

ed integrando $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, cioè l'area $ACHE =$

$bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ ec., e fatta $x = a$,

sarà l'area ACB, quarta parte dell'ellissi, eguale ad $ab -$

$\frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152}$ ec.

Nella stessa ellissi, preso un qualunque arco DS; sia DP tangente in D, $AI = x$, $IS = y$, e per lo punto S condotta AP, le sia infinitamente prossima AK, che taglierà l'ellissi in T. Col centro A si descrivano gl'archetti di circolo KQ, TR; sarà dunque $AS = \sqrt{xx + yy} = AT$, $DP = \frac{ay}{x}$, $AK = AP = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$,

$KP = -\frac{axdy + aydx}{xx}$, essendo PK differenza negativa;

e per la similitudine de' triangoli PQK, PAD, sarà $KQ = -\frac{axdy + aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$, e per la similitudine de' settori

ATR, AKQ, sarà $TS = -\frac{xdy + ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però

$TR \times \frac{AT}{2}$, cioè $-\frac{xdy + ydx}{2}$ sarà la formola per lo

spazio ACT, la quale, sostituito in luogo di y, e di dy il valore dato dall'equazione della curva, sarà finalmente $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}}$.

Ma

Ma $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ è la rettificazione del circolo, come si è veduto al num. 37., e come si vedrà in breve, adunque la quadratura de' settori ellittici dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo. Nè occorre affaticarsi per liberare la formola dal radicale, perchè, ciò non ostante, urteremo in un'altra dallo stesso circolo dipendente.

Per mezzo poi delle serie troveremo, essere $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{bdx}{2} + \frac{bxxdx}{4aa} + \frac{3bx^4dx}{16a^4} + \frac{5bx^6dx}{32a^6} + \frac{35bx^8dx}{256a^8}$ ec., ed integrando, avremo lo spazio $ATC = \frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80a^4} + \frac{5bx^7}{224a^6} + \frac{35bx^9}{2304a^8}$ ec., e fatta $x = a$ rispetto a tutto lo spazio ADC, quarta parte dello spazio intero dell' ellissi, sarà esso $= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} + \frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304}$ ec.

Che se avessi voluto liberare la formola dal segno radicale, facendo la sostituzione $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{a}$, si sarebbe mutata in quest' altra $\frac{aabdz}{aa + zz}$, la quale ridotta in

serie

serie si trova essere $bdz - \frac{bzzdz}{aa} + \frac{bz^4 dz}{a^4} - \frac{bz^6 dz}{a^6} + \frac{bz^8 dz}{a^8}$ ec., ed integrando, $bz - \frac{bz^3}{3aa} + \frac{bz^5}{5a^4} - \frac{bz^7}{7a^6} + \frac{bz^9}{9a^8}$ ec., e posta $x = a$, nel qual caso è pure $z = a$, sarà $ab - \frac{ab}{3} + \frac{ab}{5} - \frac{ab}{7} + \frac{ab}{9}$ ec. rispetto al quadrante dell'ellissi.

E se si supponga $a = b$, l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$, e la serie sarà $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} + \frac{aa}{9}$ ec. come al num. 97., che esprimerà il quadrante; e però da qui ancora si vede, che l'area dell'ellissi è all'area del circolo, il di cui diametro sia eguale all'asse trasverso dell'ellissi, come l'asse conjugato all'asse trasverso della stessa ellissi.

ESEMPIO VIII.

99. Sia la cicloide NAM, (*Fig.* 16.) il circolo generatore ARH, e sia $AH = a$, $AB = x$, $BC = dx$, $BE = y$, $DF = dy$, sarà l'equazione $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{dx \sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$. Ma lo spazietto $QEFP$ è l'elemento dello spazio

ſpazio AEQ, adunque $FP \times PQ$, cioè $\frac{xdx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} =$ $dx\sqrt{ax-xx}$ ne ſarà la formola; ma $\int dx\sqrt{ax-xx}$ è il ſegmento circolare ASB, adunque lo ſpazio cicloidale AEQ ſarà eguale al corriſpondente ſpazio circolare ASB, e tutto lo ſpazio AMK al ſemicircolo. Ma il rettangolo $AHMK$ è quadruplo del ſemicircolo, poichè è il prodotto della ſemiperiferìa nel diametro; adunque lo ſpazio AMH ſarà triplo del ſemicircolo, e però tutto lo ſpazio della cicloide triplo del circolo generatore.

Se ſi voleſſe immediatamente lo ſpazio AFC; come che il piccolo ſpazio $FCBE$, cioè ydx ne è l'elemento, e dall'equazione della curva abbiamo $dy = \frac{dx\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, ſi riduca in ſerie l'omogeneo di comparazione; moltiplicando prima per $\sqrt{x}$ il numeratore, e denominatore, onde ſia $\frac{dx\sqrt{ax-xx}}{x} = \frac{a^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e però integrando, do, $\int \frac{dx \sqrt{ax - xx}}{x}$, cioè $y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., onde $ydx = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e finalmente integrando,

$$\int ydx = ABE = \frac{4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

ESEMPIO IX.

100. Sia la concoide ADR, $CB = BA = a$, $CM = x$, $MD = y$, (*Fig.* 17.) e si voglia lo spazio $ADGB$. Chiamo $CG = z$, la quale sarà sempre data per le x, ed y della proposta curva, come è assai chiaro. Sia CE infinitamente prossima a CD, e col centro C, cogl' intervalli CG, CD si descrivano i due archetti GI, DF, sarà $HI = dz$, ed il trapezio $FDGI$ l'elemento del ricercato spazio. Per la similitudine de'

f triaritriangoli HIG, BGC, sarà $GI = \frac{adz}{\sqrt{zz - aa}}$, e per la similitudine de' settori CGI, CDF, sarà $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{zz - aa}}$. Ma il trapezio $FDGI$ è $= \overline{DF + GI} \times \frac{1}{2} GD = \frac{2aazdz + a^3 dz}{2z\sqrt{zz - aa}}$, dunque $\int \frac{2aazdz + a^3 dz}{2z\sqrt{zz - aa}}$, cioè $-\overline{a\,l\sqrt{zz - aa} - z} + a \times$ arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= \sqrt{zz - aa} - z$, (preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$) sarà eguale allo spazio, che si cercava.

Si può niente meno avere lo spazio totale, ed i parziali della stessa concoide considerando la curva in relazione al suo asse. Sia nella stessa Figura $AB = DG = a = BC$, $BM = x$, $MD = y$, e dal punto G si tiri all'ordinata MD la perpendicolare GO, sarà $DO = \sqrt{aa - xx}$, per l'angolo retto GOD, e per la similitudine de' triangoli CBG, GOD sarà $BG = \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = MO$; dunque $MD = \sqrt{aa - xx} + \frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = y$, quindi ydx, cioè l'elemento dello spazio, sarà $dx\sqrt{aa - xx} + \frac{adx\sqrt{aa - xx}}{x}$. Il primo termine inte-

grato

grato dipende della quadratura del circolo, il secondo da quella dell' iperbola.

ESEMPIO X.

101. Sia AMI (*Fig.* 18.) la Cissoide di Diocle, la di cui equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà dunque la formola, sostituito il valore di y dato dall'equazione, $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\overline{a-x}^{\frac{1}{2}}}$, il di cui integrale dipende dalla quadratura del circolo. Per avere il rapporto dello spazio totale della cissoide a quello del circolo generatore, si rifletta, che essendo l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$, sarà anco $yy \times \overline{ax - xx} = x^4$, e però $y \sqrt{ax - xx} = xx$. Ciò posto, differenziando la proposta equazione $ayy - xyy = x^3$, viene $2aydy - 2xydy - yydx = 3xxdx$, cioè $2dy \times \overline{a-x} - ydx = \frac{3xxdx}{y}$, e perchè $xx = y \sqrt{ax - xx}$, dunque $2dy \times \overline{a-x} - ydx = 3dx \sqrt{ax - xx}$. Ma $dy \times \overline{a-x}$ è l'elemento dello spazio $AMQB$, ydx è l'elemento dello spazio

 AMP,

AMP, ed integrando rispetto allo spazio totale, è $\int dy \times \overline{a-x} = \int ydx$, dunque in tale circostanza sarà $2\int dy \times \overline{a-x} - \int ydx = \int dy \times \overline{a-x}$, e però $\int dy \times \overline{a-x} = 3\int dx \sqrt{ax-xx}$, e perchè nel caso dello spazio totale della Cissoide $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è l'area del semicircolo ABN; quindi lo spazio della Cissoide infinitamente prodotto è triplo del semicircolo generatore.

ESEMPIO XI.

102. Sia la Logaritmica HBD (*Fig.* 19.) all'asintoto MQ, e sia $AB =$ alla sottangente $= a$, $KH = y$, $AK = x$, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Sarà adunque la formola $ydx = ady$, ed integrando $\int ydx = ay + bb$; ma posta $y = a$, sarà $bb = -aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $AKHB = ay - aa$. Presa una qualunque altra ordinata $MN = z$, sarà pure $AMNB = az - aa$; adunque $MKHN = ay - az$. Sia l'ordinata EF minore di AB, ed eguale ad y, $AE = -x$, sarà

nello

nello ſteſſo modo l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$, perchè eſſendo negativa la x, deve eſſere pure negativa la ſua differenza, ma creſcendo l'aſſiſſa x, cala l'ordinata y, adunque dovrà eſſere negativa la dy; per lo che ſarà pure negativo l'elemento dello ſpazio, ſarà adunque eſſo elemento $-ydx$, cioè $-ady$, ed integrando, $-ay + bb$, ma quando y ſia $= a$, ſarà $bb = aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo ſpazio $AEFB$ ſarà $= aa - ay$; e poſta $y = 0$, cioè quando egli ſia infinitamente prodotto dalla parte di Q, ſarà egli $= aa$; ed in conſeguenza lo ſteſſo ſpazio infinitamente prodotto dalla parte di Q, ma che principj da una qualunque ordinata $EF = y$, ſarà $= ay$.

ESEMPIO XII.

103. La curva ABF ſia la Trattoria, (*Fig.* 20.) la di cui proprietà primaria è, che la tangente BP di un qualunque punto B, ſia ſempre coſtante eguale ad una data retta. Si faccia una qualunque aſſiſſa $ED = x$, l'ordinata $DB = y$, l'arco della curva $AB = u$, e la data retta $= a$. Perchè creſcendo l'aſſiſſa ED, cala l'ordinata DB, ſarà negativo il di lei elemento, cioè $-dy$; quindi per la proprietà della curva avremo l'e-

quazione

quazione $-\frac{ydu}{dy}=a$, e posto in luogo di du il valore $\sqrt{dx^2+dy^2}$, sarà $dx=-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$. Ciò fatto, nella formola ydx degli spazj posto in luogo di dx il valore dato dall'equazione della curva, avremo $-dy\sqrt{aa-yy}$, elemento di un qualunque spazio $ABDE$. Ma posta AE la prima delle ordinate $=a$, e col raggio EA descritto il quadrante AQM, e condotta BQ parallela ad MH, poichè $DB=EC=y$, e per la proprietà del circolo, $CQ=\sqrt{aa-yy}$, anco l'elemento dello spazio circolare CQA sarà $-dy\sqrt{aa-yy}$; quindi lo spazio CQA eguale allo spazio $ABDE$, e così degl'altri, e per conseguenza lo spazio infinitamente prodotto compreso dalla trattoria ABF, dall'asintoto EH, e dalla retta AE sarà eguale al quadrante AME.

ESEMPIO XIII.

104. Sia la spirale ACB, (*Fig.* 21.) ed $AB=a$ il raggio del circolo BMD, la di cui periferìa $=b$, un qualunque arco $BD=x$, $AC=y$; sarà l'equazione $by=ax$. Condotta AE infinitamente prossima ad AD, sia $ED=dx$, e col centro A si descriva l'archetto infinitesimo CH; per la similitudine de' settori ACH, ADE

ADE, sarà $CH = \frac{ydx}{a}$, e però il settore *ACH*, elemento dello spazio *ANCA*, sarà $= \frac{yydx}{2a}$; ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{ax}{b}$, dunque esso elemento sarà $= \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando, $\frac{ax^3}{6bb}$ (ommessa la costante, che è superflua) sarà lo spazio *ACN*, e fatta $x = b$ rispetto a tutto lo spazio *ANB*, sarà esso $= \frac{ab}{6}$.

Sia l'equazione generale alle infinite spirali $a^m x^n = b^n y^m$, adunque sarà $yy = \frac{aax^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$, e la formola dello spazio sarà $\frac{ax^{\frac{2n}{m}}dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$, ed integrando, $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{4n+2m \times b^{\frac{2n}{m}}}$, e fatta $x = b$, sarà lo spazio intero $= \frac{mab}{4n+2m}$.

E' facile a vedere, che lo spazio *ABMDCNA* terminato dal raggio *AB*, dall'arco di circolo *BMD*, e dalla porzione *ANC* della spirale sarà $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$, perchè egli è eguale al settore *ABMDA* meno lo spazio *ACN*; ma se lo volessimo per mezzo di formola diffe-

differenziale, baſta oſſervare, che l'elemento di eſſo ſarà il trapezio infiniteſimo $ECHD$, il quale ſi fa eſſere $= \overline{DE + CH} \times \frac{CD}{2}$, cioè $\overline{dx + \frac{ydx}{a}} \times \frac{\overline{a - y}}{2} = \frac{aadx - yydx}{2a}$, e ponendo in luogo di yy il valore $\frac{aaxx}{bb}$ dato dall'equazione, ſarà $\frac{adx}{2} - \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando (ommeſſa la coſtante ſuperflua) $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$.

ESEMPIO XIV.

105. Sia la parabola ABM (*Fig.* 22.) dell'equazione $ax = yy$, e ſia $AC = x$, $CB = y$, e la ragione del ſeno tutto al ſeno retto dell'angolo BCD ſia quella di a alla b; al ſeno del complemento, quella di a alla f, ſarà $BD = \frac{by}{a}$, $CD = \frac{fy}{a}$. Sia $CH = dx$, adunque $CH \times DB = CHMB$, elemento dello ſpazio ACB, e però la formola ſarà $\frac{bydx}{a}$, e poſto in luogo di y il valore dato dall'equazione, cioè $\sqrt{ax}$, ſarà $\frac{bdx\sqrt{ax}}{a}$, ed integrando, $\frac{2bx\sqrt{ax}}{3a}$, o ſia $\frac{2bxy}{3a} = \frac{2}{3} AC \times BD$, ommeſſa la coſtante ſuperflua.

ESEM-

ESEMPIO XV.

106. Sia la parabola *ACM* (*Fig.* 23.) riferita al fuoco *B*, la di cui equazione sarà $\frac{adz}{\sqrt{2az-aa}} = du$, essendo $BC = z$, $CD = du$, archetto infinitesimo di circolo, parametro $= 2a$. Sarà dunque il settore infinitesimo *BMC*, o sia *BDC* l'elemento dello spazio *ABC*, e però $\frac{zdu}{2}$, cioè $\frac{azdz}{2\sqrt{2az-aa}}$ la formola, il di cui integrale si trova essere $\frac{\overline{z+a}}{6}\sqrt{2az-aa} + mm$. Ma presa $z = BA = \frac{1}{2}a$, nel qual caso deve essere nullo lo spazio, sarà $mm = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio *ABC*, sarà $= \frac{\overline{z+a}}{6}\sqrt{2az-aa}$.

Ed in fatti dal punto *C* abbassata la perpendicolare *CQ* ad *AQ*, lo spazio *BCA* è eguale allo spazio *QCA* meno il triangolo *BQC*, ma fatta $BQ = x$, $QC = y$, sarà $QCA - QCB = \frac{2}{3}\times\overline{\frac{1}{2}a+x}\times y - \frac{xy}{2} = \frac{\overline{2a+x}\times y}{6}$, adunque $BCA = \frac{\overline{2a+x}\times y}{6}$, ma per la proprietà della

t pa-

parabola, $BC = AQ + AB = x + a$, cioè $z = x + a$, ed $y = \sqrt{aa + 2ax} = \sqrt{2az - aa}$; sostituiti adunque in luogo di x, ed y questi valori, troveremo $BCA = \frac{\overline{2a + x}}{6} \times y = \frac{\overline{a + z}}{6}\sqrt{2az - aa}$, come sopra.

ESEMPIO XVI.

107. Se la quarta parte AC (*Fig.* 24.) della periferia di circolo s'intenderà distesa nella retta (ac), e presa una qualunque porzione (ae) eguale all'arco AE, si alzi normale (ed) eguale al seno retto DE, la curva (at), che passerà per tutti i punti (d) così determinati, si chiama la linea de' seni retti. Prodotta (ae) onde sia eguale alla semicirconferenza del circolo, la curva averà un'altro ramo al di là di (ct) simile, ed eguale al primo.

Sia il raggio $= r$, un qualunque arco $AE = x = (ae)$, il corrispondente seno $DE = y = (ed)$; poichè il differenziale, o sia la flussione dell'arco espressa per mezzo del seno si trova essere $\frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$, avremo $dx = \frac{rdy}{\sqrt{rr - yy}}$, equazione della nostra curva. La formola adunque ydx, sostituito il valore di dx, sarà $\frac{rydy}{\sqrt{rr - yy}}$, ed integrando, do, $-r\sqrt{rr-yy}+n$; ma posta $y=0$, viene $n=rr$, dunque l'integrale compito è $rr-r\sqrt{rr-yy}=$ allo spazio (ade), e fatta $y=r$, sarà $rr=$ allo spazio totale (atc). Quindi fatto il quadrato TH del raggio, e prodotto il seno DE in M, lo spazio (ade) sarà eguale al rettangolo DH, e lo spazio totale (atc) eguale al quadrato TH.

108. Gli addotti esempj possono bastare per fare uso del metodo, rimane solamente d'avvertirsi, che molte volte le equazioni delle curve, gli spazj delle quali si vogliono quadrare (e ciò s'intenda pure rispetto alle rettificazioni, quadrature di superficie, e cubature) possono essere tali, che non abbiano le incognite separate, nè si possano separare colla sola divisione, ed in conseguenza non siano addattabili alle formole. Tale sarebbe la curva $x^3+y^3=axy$.

In questi casi bisogna valersi di qualche congrua sostituzione, per mezzo di cui l'equazione si trasformi in un'altra, in cui sieno separate, o separabili le incognite. Ma non si può generalmente definire, quale sostituzione debba farsi; bisognerà avere pratica, e provarne molte per ottenere, quando si possa, l'intento.

Rispetto alla proposta $x^3+y^3=axy$. Si ponga $y=\frac{axx}{zz}$, e fatta la sostituzione, sarà l'equazione $x^3 + \frac{a^3x^5}{z^6} = \frac{aax^3}{zz}$, cioè $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$. Differenziando adunque, $xxdx = \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$; quindi presa la formola degli spazj, cioè ydx, poichè per la sostituzione è $y = \frac{axx}{zz}$, sarà essa formola $\frac{axxdx}{zz}$, e sostituendo in luogo di $xxdx$ il valore ritrovato $\frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$, sarà $ydx = \frac{4aazdz - 6z^3dz}{3a^2}$, ed integrando $\int ydx = \frac{2}{3}zz - \frac{z^4}{2aa}$; e restituendo in luogo di zz il valore $\frac{axx}{y}$, sarà finalmente $\int ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$.

ESEMPIO XVII.

109. Sia la curva $a^5xxyy - x^9 = a^6y^3$, di cui si voglia lo spazio. Pongo $y = \frac{xx}{z}$, e l'equazione si trasformerà in quest'altra $a^5z - x^3z^3 = a^6$, da cui si ricava $x = \frac{a\sqrt[3]{aaz - a^3}}{z}$, e però $dx = \frac{a^3dz}{3z \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{2}{3}}} -$

adz

$\frac{adz \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{1}{3}}}{zz}$, ed $y = \frac{aa \times \overline{aaz - a^3}^{\frac{2}{3}}}{z^3}$; quindi avremo l'elemento dello ſpazio, cioè $ydx = \frac{a^5 dz}{3z^4} - \frac{a^3 dz \times \overline{aaz - a^3}}{z^5} = \frac{a^6 dz}{z^5} - \frac{2a^5 dz}{3z^4}$, e però integrando $\int ydx = -\frac{a^6}{4z^4} + \frac{2a^5}{9z^3}$, e reſtituendo in luogo di z il ſuo valore $\frac{xx}{y}$, ſarà $-\frac{a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6}$ lo ſpazio ricercato. A queſto propoſito ſi potrà vedere il metodo del Signor Craigio nel ſuo libro: *De Calculo fluentium*.

Della rettificazione delle Curve.

ESEMPIO XVIII.

110. Sia da rettificarſi la parabola apolloniana, cioè da ritrovarſi una retta linea eguale ad un' arco qualunque della ſteſſa parabola, la di cui equazione ſia $ax = yy$. Differenziando ſarà $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$. Ma la formola per la rettificazione è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

adun-

adunque sostituendo in questa, in luogo di dx^2, il valore dato dall' equazione differenziata, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}}{a} = \frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa}$, elemento per la parabola apolloniana $ax = yy$. Passando alle integrazioni, fatta la sostituzione di $\sqrt{4yy + aa} = 2y + z$, a fine di levare il radicale, troveremo essere $\frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa} = -\frac{a^3dz}{8z^3} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a}$, il di cui integrale si vede essere in parte algebraico, ed in parte logaritmico, e però la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola, la qual verità in quest'altro modo pure si scorge. Sia l'iperbola equilatera ADE (*Fig.* 25.) coi semiassi $= a$, $BC = x$ dal centro, $CD = 2y$, la di cui equazione sarà $xx - aa = 4yy$. Condotta GE infinitamente prossima ad HD, sarà $HGED$ l'elemento dello spazio $ADHB$, ma $HGED$ si sa essere $2dy\sqrt{4yy + aa}$, che è la stessa formola della rettificazione della parabola, a riserva del denominatore costante $\frac{a}{2}$, dunque ec.

Per mezzo della serie. Prendo la sopra scritta formola per la rettificazione della parabola, cioè $\frac{dy}{a}\sqrt{4yy + aa}$,

la

la quale ridotta in serie sarà $= dy + \frac{2yydy}{aa} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8 dy}{a^8}$ ec., ed integrando, $\int \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$, cioè l'arco qualunque $= y + \frac{2y^3}{3aa} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ ec.

Se nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di sostituire in luogo di dx il valore dato per y dall'equazione della curva, sostituiremo in luogo di dy il valore dato per x, sarà essa $\frac{dx \sqrt{4ax + aa}}{\sqrt{4ax}}$, o sia $\frac{dx \sqrt{4xx + ax}}{2x}$, la quale non è punto più trattabile dell'altra.

Se la parabola non fosse l'apolloniana, ma la seconda cubica, la di cui equazione è $axx = y^3$, differenziando sarebbe $dx^2 = \frac{9ydy^2}{4a}$, e però la formola $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}}$, il di cui integrale sarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} + m$; ma posta $y = 0$, sarà $m = -\frac{8a}{27}$; adunque l'integrale compito, cioè la lunghezza dell'arco sarà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} - \frac{8a}{27}$.

Se nella parabola apolloniana ADM (*Fig.* 26.) sarà farà $AC = \frac{4a}{9}$, e si prenda una qualunque $CK = y$, il parametro $= \frac{9a}{4}$, farà $AK = \frac{4a}{9} + y$, $KM = \sqrt{\frac{4aa + 9ay}{4}}$, onde l'elemento dell'area $MKCD$ farà $dy\sqrt{\frac{4aa + 9ay}{4}}$, che è lo stesso dell'elemento della lunghezza della seconda parabola cubica, a riserva della costante a, e però la rettificazione di questa, e la quadratura di quella è la stessa cosa, onde perchè quella è algebraicamente quadrabile, questa è algebraicamente rettificabile. Quindi generalmente, se l'espressione dell'elemento di una qualunque data curva diviso per la differenza dell' incognita si porrà per ordinata, e la incognita per l'assissa, onde nasca una nuova curva, la quadratura di questa ci darà la rettificazione della curva data.

ESEMPIO XIX.

111. Sia il circolo AEM, (*Fig.* 27.) AM diametro $= a$, $AB = x$, farà $BF = y = \sqrt{ax - xx}$; adunque $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + xxdx^2}{ax - xx}$,

e

e però FH elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$, e riducendo in ferie, farà

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2 \times 2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8a^{\frac{7}{2}}}$$

ec., ed integrando, farà $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} +$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^{\frac{7}{2}}}$$

ec.; o pure effendo $dx^2 = \frac{dy^2 \times \overline{ax - xx}}{\frac{1}{4}aa - ax + xx}$, cioè (foftituendo yy in luogo di $ax - xx$) $dx^2 = \frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa - yy}$; pofto quefto valore in luogo di dx^2 nella formola generale, farà effa $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{2\sqrt{\frac{aa}{4} - yy}}$, che ridotta in ferie fi trova effere

$$= dy + \frac{2yydy}{aa} + \frac{6y^4 dy}{a^4} + \frac{20y^6 dy}{a^6} + \frac{70y^8 dy}{a^8}$$

ec., ed integrando,

grando, farà finalmente l'arco $AF =$

$$y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8} \text{ ec.}$$

Che se il raggio fosse stato $= a$, farebbe la serie

$$y + \frac{y^3}{2 \times 3aa} + \frac{3y^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15y^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105y^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

E se finalmente farà $DB = x$, DA raggio $= a$, farà $y = \sqrt{aa - xx}$, e $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}}$, adunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e riducendo in serie, farà

$$\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = dx + \frac{xxdx}{2aa} + \frac{3x^4dx}{2 \times 4a^4} + \frac{15x^6dx}{2 \times 4 \times 6a^6} + \frac{105x^8dx}{2 \times 4 \times 6 \times 8a^8} \text{ ec.}$$

, ed integrando, farà l'arco $EF =$

$$x + \frac{x^3}{2 \times 3aa} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

ESEM-

ESEMPIO XX.

112. Sia l'ellissi ADC, (*Fig.* 28.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $BD = b$, $BE = x$, $EO = y$, sarà l'equazione $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$, e però $ydy = -\frac{bbxdx}{aa}$, e $dy^2 = \frac{bbxxdx^2}{aa \times \overline{aa - xx}}$, e la formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{bbxxdx^2}{a^4 - aaxx}} = \frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$.

Se in luogo di sostituire il valore di dy dato per x dall' equazione, sostituiremo il valore di dx, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aayy - bbyy + b^4}}{b\sqrt{bb - yy}}$. Ma e l'una, e l'altra delle due ritrovate espressioni manca di una delle condizioni del num. 38., senza di cui si è veduto, che queste formole non si possono liberare dai segni radicali, e preparare per l'integrazioni. Adunque per passare alle serie, prendo una delle due formole, per esempio $\frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$, la quale si esprime con l'equivalente $dx\sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}}$, e questa ridotta in serie

sarà $= dx + \frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa \times \sqrt{aa - xx}} - \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4 \times \overline{aa - xx}^2} + \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6 \times \overline{aa - xx}^3} - \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8 \times \overline{aa - xx}^4}$ ec., e riducendo in oltre in serie ciascun termine di questa, cominciando dal secondo, sarà

$$dx\sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}} = \begin{array}{l} dx \\ + \frac{\frac{1}{2}bbxxdx}{aa} \times \overline{\frac{1}{aa} + \frac{xx}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \text{ ec.}} \\ - \frac{\frac{1}{8}b^4x^4dx}{a^4} \times \overline{\frac{1}{a^4} + \frac{2xx}{a^6} + \frac{3x^4}{a^8} + \frac{4x^6}{a^{10}} \text{ ec.}} \\ + \frac{\frac{1}{16}b^6x^6dx}{a^6} \times \overline{\frac{1}{a^6} + \frac{3xx}{a^8} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} \text{ ec.}} \\ - \frac{\frac{5}{128}b^8x^8dx}{a^8} \times \overline{\frac{1}{a^8} + \frac{4xx}{a^{10}} + \frac{10x^4}{a^{12}} + \frac{20x^6}{a^{14}} \text{ ec.,}} \end{array}$$

ed

ed integrando, sarà l'arco DO, cioè

$$\int dx\sqrt{\frac{1+bbxx}{a^4-aaxx}} = x + \frac{1}{2}\frac{bb}{aa}\times\overline{\frac{x^3}{3aa}+\frac{x^5}{5a^4}+\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8}\text{ ec.}}$$

$$-\frac{1}{8}\frac{b^4}{a^4}\times\overline{\frac{x^5}{5a^4}+\frac{2x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8}+\frac{4x^{11}}{11a^{10}}\text{ ec.}}$$

$$+\frac{1}{16}\frac{b^6}{a^6}\times\overline{\frac{x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8}+\frac{6x^{11}}{11a^{10}}\text{ ec.}}$$

$$-\frac{5}{128}\frac{b^8}{a^8}\times\overline{\frac{x^9}{9a^8}+\frac{4x^{11}}{11a^{10}}\text{ ec.}},$$

e finalmente riducendo alla stessa denominazione i termini omogenei, troveremo $DO =$

$$x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{4aabb-b^4}{40a^8}\times x^5 + \frac{8a^4bb-4aab^4+b^6}{112a^{12}}\times x^7 + \frac{64a^6bb-48a^4b^4+24aab^6-5b^8}{9\times 128a^{16}}\times x^9 \text{ ec.}$$

Che se vogliasi supporre $a = b$, nel qual caso l'ellissi diviene un circolo, sarà l'arco $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{9\times 128a^8}$ ec. appunto come sopra al num. 111.

In

In altra maniera ancora. Nella formola $\frac{dx\sqrt{a^4 - aaxx + bbxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$ si faccia $bb - aa = -cc$, onde sia $\frac{dx\sqrt{a^4 - ccxx}}{a\sqrt{aa - xx}}$; risoluti in serie i due radicali, sarà

$$\frac{dx\sqrt{a^4 - ccxx}}{a\sqrt{aa - xx}} = \frac{dx}{a} \times \frac{aa - \frac{ccxx}{2aa} - \frac{c^4x^4}{8a^6} - \frac{c^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{14}} \text{ ec.}}{a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}}$$

e facendo attualmente la divisione del numeratore per lo denominatore, dopo un lunghissimo calcolo troveremo un'altra serie, la quale integrata, e restituito in luogo di cc il suo valore, ci darà la medesima serie di sopra, che esprime il valore dell'arco DO.

ESEMPIO XXI.

113. Sia l'iperbola BD, (*Fig.* 29.) semiasse trasverso $AB = a$, semiasse conjugato $AE = b$, $CD = y$, $AC = x$, sarà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; adunque differenziando sarà $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{bb + yy}}$, onde

de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{aayy}{b^4 + bbyy}} = \frac{dy}{b} \frac{\sqrt{bbyy + aayy + b^4}}{\sqrt{bb + yy}}$,

e però ridotta questa in serie o nell'una, o nell'altra maniera usata intorno all'ellissi, troveremo essere il suo integrale, cioè l'arco $BD = y + \frac{aay^3}{6b^4} - \frac{4aabb - a^4 \times y^5}{40b^8} + \frac{8aab^4 + 4a^4bb + a^6 \times y^7}{112b^{12}} - \frac{64aab^6 - 48a^4b^4 - 24a^6bb - 5a^8 \times y^9}{9 \times 128b^{16}}$ ec., che è la stessa serie dell'ellissi, a riserva de' segni, e della mutazione delle veci delle costanti a, b.

ESEMPIO XXII.

114. Sia la cicloide dell'Esempio VIII. delle quadrature, (*Fig.* 16.) la di cui equazione sapiamo essere $dy = \frac{dx\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$; adunque sarà la formola $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, e però integrando, sarà l'arco $FA = 2\sqrt{ax} =$ al doppio della corda AS del corrispondente arco di circolo AS, e posta $x = a$, sarà AM doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla.

ESEM-

ESEMPIO XXIII.

115. Sia la trattoria ABF, (*Fig.* 20.) la di cui equazione (num. 103.) è $-\frac{ydu}{dy}=a$; dunque $du=-\frac{ady}{y}$, ed integrando, un qualunque arco $AB=u=-ly\pm n$ nella logaritmica della sottotangente $=a$; ma fatta $u=0$, è $y=a$, e $ly=0$, dunque $n=0$, e l'integrale compito sarà $u=-ly$. Se pertanto con la sottotangente AE, per lo punto A, all'asintoto MH si descriva la logaritmica AKS, preso un qualunque punto B nella trattoria, e condotta alla logaritmica la BK parallela all'asintoto, ed abbassata la normale KN, l'intercetta NE sarà eguale all'arco AB.

ESEMPIO XXIV.

116. Sia la spirale d'Archimede ACB del num. 104., (*Fig.* 21.) il raggio del circolo $=a$, la circonferenza $=b$, l'arco $BMD=x$, $AC=y$. Sia AE infinitamente prossima ad AD, e però $DE=dx$. Col centro A sia descritto l'arco CH, sarà $CH=\frac{ydx}{a}$,

ed

ed $OH = dy$; adunque sarà CO l'elemento della curva $= \frac{\sqrt{yydx^2 + aady^2}}{a}$, ma l'equazione della curva è $ax = by$, e però $dx^2 = \frac{bbdy^2}{aa}$, onde, fatta la sostituzione, sarà $CO = \frac{dy}{aa} \sqrt{a^4 + bbyy}$, il di cui integrale, dopo un lungo calcolo, che ommetto per brevità, troveremo dipendere da' logaritmi, o sia dalla quadratura dell'iperbola.

Per mezzo delle serie. Faccio in primo luogo $a^4 = bbmm$, onde la formola sia questa $\frac{bdy}{aa} \sqrt{mm + yy}$, che ridotta in serie è $=$

$\frac{bdy}{aa} \times \overline{m + \frac{yy}{2m} - \frac{y^4}{8m^3} + \frac{y^6}{16m^5} - \frac{5y^8}{128m^7}}$ ec., e però integrando, cioè l'arco AC sarà $= \frac{bmy}{aa} + \frac{by^3}{6aam} - \frac{by^5}{40aam^3} + \frac{by^7}{112aam^5} - \frac{5by^9}{9 \times 128aam^7}$ ec., e fatta $y = a$, sarà tutta la curva $ACB = \frac{bm}{a} + \frac{ab}{6m} - \frac{a^3b}{40m^3} + \frac{a^5b}{112m^5} - \frac{5a^7b}{9 \times 128m^7}$ ec., cioè restituendo in luogo di m il valore $\frac{aa}{b}$, $ACB =$

$a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^4}{40a^3} + \frac{b^6}{112a^5} - \frac{5b^8}{9 \times 128a^7}$ ec.

Se la curva foſſe la logaritmica ſpirale ABC, (*Fig.* 30.) la di cui equazione $ady = bdx$, chiamando $RB = y$, e l'archetto infiniteſimo $BD = dx$, poſto nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ il valore di dx dato dall' equazione, ſarà eſſa $\frac{dy\sqrt{aa + bb}}{b}$, ed integrando, la curva $AB = \frac{y}{b}\sqrt{aa + bb}$.

Sia la curva ABC la ſpirale iperbolica, in cui la ſottangente deve ſempre eſſere coſtante, e però l'equazione, denominando come ſopra, $ydx = ady$, ſarà dunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{y}\sqrt{aa + yy}$; l'integrale della qual formola, liberata che ſia dal ſegno radicale, troveremo dipendere dalla logaritmica.

Per mezzo della ſerie troveremo $\frac{dy}{y}\sqrt{aa + yy} = \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3dy}{8a^3} + \frac{y^5dy}{16a^5} - \frac{5y^7dy}{128a^7}$ ec.; ma volendo paſſare all' integrazioni, il primo termine non è integrabile, ſe non per mezzo d'un'altra ſerie infinita; adunque la ſomma della ſopraſcritta ſerie integrata, eccetto il primo termine, con l'integrale della ſerie, che eſprime eſſo primo termine, formerà una ſerie, che ſarà il valore della propoſta curva.

ESEM-

ESEMPIO XXV.

117. Sia la logaritmica *HBD*, (*Fig.* 19.) *AB* sottangente $= a$, $AK = x$, $KH = y$, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Posto nella formola generale il valore di dx, sarà $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$, il di cui integrale dipende dalla stessa logaritmica. Ommetto l'uso delle serie, che abbastanza s'è veduto ne' superiori Esempj.

ESEMPIO XXVI.

118. Sia la parabola apolloniana con le coordinate in angolo obbliquo dell'equazione $ax = yy$. Differenziata questa, e sostituito nella formola generale delle rettificazioni, quando le coordinate sono in angolo obbliquo, cioè nella formola $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, in luogo di dx, e di dx^2 il loro valore dato per y, si avrà $\frac{2dy}{a} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale è in parte algebraico, ed in parte dipende dalla quadratura dell' iperbola.

ESEMPIO XXVII.

119. Sia l'equazione $\frac{x^t}{t} = y$ alle infinite parabole, ed alle infinite iperbole fra gl'asintoti. Differenziando sarà $x^{t-1}dx = dy$, ed $x^{2t-2}dx^2 = dy^2$, onde $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, elemento della curva, $= dx\sqrt{x^{2t-2}+1}$. Passando all'integrazioni, per valermi del metodo del num. 61. espongo la formola nel seguente modo $\frac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$.

La formola canonica $\frac{x^n dx}{\overline{x^m + a^m}^{m}}$ del suddetto numero è integrabile algebraicamente quando sia $\frac{1-m+n}{m}$ numero intiero affermativo; e se sia intiero negativo, si ridurrà alle note semplici quadrature. Paragonando questa formola $\frac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$ con la canonica, si â $n=0$, $2t-2=m$, $a=$ all'unità; per lo che converrà, che sia $\frac{1-2t+2}{2t-2}$ numero intiero, che chiamo b, dunque $\frac{1-2t+2}{2t-2}$, cioè $\frac{3-2t}{2t-2} = b$, e conseguentemente te $\frac{3+2b}{2+2b}=t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero positivo intiero, principiando dal nulla. Se $b=0$, sarà $t=\frac{3}{2}$; se $b=1$, sarà $t=\frac{5}{4}$; sia b qualunque numero della serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., saranno espressi gl' innumerabili valori dell' esponente t dalla seguente progressione $t=\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}$ ec. L'andamento della serie è manifesto, ed in tutti questi casi le curve paraboliche sono algebraicamente rettificabili, e la prima di esse è la seconda parabola cubica.

Sia b eguale ad un numero intero negativo, ed in primo luogo sia $b=-0$, torna in campo la seconda parabola cubica, equivalendo -0 al $+0$; sia $b=-1$, l'esponente t diventa eguale ad $\frac{1}{0}$, e di conseguenza infinito; sia $n=-2$, sarà $t=\frac{1}{2}$; sia $b=-3$, sarà $t=\frac{3}{4}$, e così di mano in mano, e gl' infiniti valori dell' esponente t saranno espressi dalla progressione $t=\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ ec., e le curve parabolice indi nascenti rettificabili per via delle note quadrature.

La

La prima curva, che ci si affaccia, è la parabola conica, la di cui rettificazione richiede (num. 110.) la quadratura dell' iperbola.

L'altro caso, in cui la formola generale del num. 61., o è integrabile algebraicamente, o per mezzo delle note quadrature, è che $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ sia numero intero, cioè, sostituendo le spezie particolari di questo esempio, $-\frac{3t+2}{2t-2} = b$, e però $\frac{2+2b}{3+2b} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero intiero positivo, principiando dal zero, averemo la seguente progressione

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \text{ ec.}$$

Sia b intiero negativo, ed in primo luogo sia $b = -0$, torna in campo lo stesso esponente $t = \frac{2}{3}$, equivalendo -0 al $+0$; sia $b = -1$, l'esponente t diventa eguale alla frazione $\frac{0}{1}$, e di conseguenza nullo; sia $b = -2$, $b = -3$ ec., averemo la seguente progressione $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ ec.

La frazione, che dà il valore dell'esponente determinatore t, è la stessa nell'uno, e nell'altro caso, solo che nel secondo è inversa del primo, dal che doveva-no no nascere, come di fatto sono nate inverse le progressioni; le curve adunque scoperte per mezzo dell' una, e dell' altra formola sono le medesime, ma cogl' esponenti inversi, vale a dire riferite a due assi differenti; a cagion d' esempio i due esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ appartengono alla parabola apolloniana, che in due maniere ci si presenta $x^{\frac{1}{2}} = y$, vale a dire $x = yy$; ed in oltre $xx = y$, equazione locale al trilineo parabolico.

Quelle curve pertanto, che sono inchiuse nelle premesse progressioni, o sono integrabili algebraicamente, o non esiggono quadrature oltre il circolo, e l' iperbola; ma le altre infinite richieggono tetragonismi più alti.

Dalle nostre progressioni appare, che il valore dell' esponente t non è mai negativo, onde nessuna iperbola non ammette rettificazione nè algebraica, nè dipendente dalle mentovate più semplici quadrature.

Delle Cubature.

ESEMPIO XXIII.

120. Sia il cono retto $ACGKA$; (*Fig.* 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione AD dell' asse AB sia $= x$,

sarà

farà y, cioè $DE = \frac{bx}{a}$, e però nella formola generale $\frac{cyydx}{ar}$ sostituito questo valore in luogo di y, farà essa $\frac{cbbxxdx}{aar}$, ed integrando $\frac{cbbx^3}{6aar}$, rispetto ad una qualunque porzione presa dal vertice (ommessa la costante superflua), e fatta $x = a$, farà tutto il cono $ACGKA = \frac{cbba}{6r} = \frac{cbb}{2r} \times \frac{a}{3}$, cioè eguale al prodotto della base nella terza parte dell'altezza.

E perchè la solidità de' cilindri è il prodotto della base nell'altezza, farà il cilindro al cono inscritto, come 3 ad 1.

Il cono $ACGKA$ è adunque $= \frac{cbba}{6r}$, ed il cono $AIEMP = \frac{cbbx^3}{6aar}$, adunque il frusto di cono $IMCK$ farà $\frac{cbb}{6r} \times \overline{a - \frac{x^3}{aa}}$, e però farà a tutto il cono nella ragione di $a^3 - x^3$ ad a^3; onde se per esempio faremo $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, farà il frusto a tutto il cono, come $a^3 - \frac{a^3}{8}$, a^3; cioè come 7, 8, ed al cono $AEMPI$, come 7, 1.

Ogni qual volta però si pensa a misurare qualche solido, fa di mestieri considerare, di quali elementi intentendiamo, ch'egli sia composto giusta le differenti sezioni, che possono adoprarsi, tornando in acconcio ora l'una, ora l'altra secondo le circostanze; indi fra i suddetti elementi scegliere quelli, che con maggiore facilità possono maneggiarsi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s'adatta. Nel cono retto, per esempio, di cui si tratta, vi sono tanti circoli paralleli alla base; ed oltre ciò tanti triangoli, che ânno comune il vertice con quello del cono, e per base le ordinate parallele del circolo CGK; si può ancora tagliare il cono con tante parabole fra loro equidistanti, e cogl'assi paralleli al lato AK, ed altre molte sezioni possono farsi.

Egli è bensì vero, che per ritrovare la solidità del cono sì fatti mezzi devono riputarsi fuor di proposito, e troppo composti per lo proposto caso; ma si potrebbe proporre di tagliare il cono, o altro solido con un piano qualunque, ed indi misurare i due pezzi, in cui egli è diviso, ed in questo caso conviene far uso di quelli elementi, che a tale sezione corrispondono, come si vedrà negl'esempj 37., e 38.

ESEMPIO XXIX.

121. Sia il semicircolo CDK, (*Fig.* 32.) che s'aggiri attorno al raggio immobile DB, onde produca un'emisfero, e sia $DB = a$, $DA = x$, sarà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$. Sostituito adunque questo valore nella formola generale, sarà essa $\frac{cdx}{2r} \times \overline{2ax - xx}$, ed integrando, sarà la solidità del segmento indefinito $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, e fatta $x = a$, sarà la solidità dell'emisfero $= \frac{ca^3}{3r}$, ed il doppio $\frac{2ca^3}{3r}$ tutta la sfera.

E perchè il cilindro, la di cui altezza eguale al diametro della base sia $= 2a$, è $= \frac{ca^3}{r}$, sarà il cilindro circoscritto alla sfera inscritta, come $\frac{ca^3}{r}$ a $\frac{2ca^3}{3r}$ :: 3, 2, ed in conseguenza nella stessa ragione la metà del cilindro all'emisfero. Ma il cono pure, la di cui altezza eguale al raggio della base sia $= a$, raggio della sfera, è $= \frac{ca^3}{6r}$, adunque sarà l'emisfero al cono inscritto, come 2, 1.

In

In oltre essendo, come è noto, $= \frac{\sqrt{3aa}}{2}$ il raggio della base del cono equilatero inscritto nella sfera, il di cui raggio sia $= a$, ed essendo l'altezza di esso $= \frac{3a}{2}$, sarà il cono $= \frac{9ca^3}{48r}$, e la sfera sarà $= \frac{2ca^3}{3r}$, e però la sfera al cono come $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{48}$, cioè, come 32 al 9. In simil modo si possono dimostrare quanti teoremi si vogliono d'Archimede in questo proposito.

E' chiara la maniera di avere un qualunque settore di sfera generato per esempio dal settore $BEDM$ del circolo; imperciocchè al segmento di sfera generato dalla figura AED, che si sa essere $= \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, s'aggiunga il cono generato dal triangolo EBA, e che si troverà essere $= \frac{c}{6r} \times \overline{2ax - xx} \times \overline{a - x}$, e la somma, cioè $\frac{caax}{3r}$ sarà il settore cercato.

ESEMPIO XXX.

122. Sia (*Fig.* 33.) la parabola di qualunque ordine, la di cui equazione $y^m = a^{m-1}x$, la quale ruotandosi attorno all'asse AM generi il conoide parabolico. Sarà

dunque $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, ed $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$, e però la formola generale, sostituito questo valore, sarà $\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}$, ed integrando, $\frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r \times \overline{m+2}}$ la solidità del conoide indefinito; o pure, perchè $x^{\frac{2}{m}} = \frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}$, e però $x^{\frac{2+m}{m}} = \frac{xyy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}$, sostituendo questo valore nell' integrale ritrovato, sarà esso $\frac{mcxyy}{2r \times \overline{m+2}}$.

Sia $m = 2$, cioè la parabola apolloniana, sarà il conoide $= \frac{cxyy}{4r}$, cioè il prodotto della base nella metà dell' altezza, ed in conseguenza il detto conoide sarà la metà del cilindro nella medesima altezza, e nella medesima base.

Se si volesse la solidità della scodella, o sia il solido generato dalla figura *ACD* mossa attorno all' asse *AB*, dal cilindro descritto dal rettangolo *ABCD*, che sapiamo essere $= \frac{cxyy}{2r}$, si sottragga il conoide parabolico $\frac{mcxyy}{2r \times \overline{m+2}}$, il residuo $\frac{cxyy}{r \times \overline{m+2}}$ sarà la scodella. E fat-

ta

ta $m=2$ rispetto alla parabola apolloniana, farà la scodella $\frac{cxyy}{4r}$ metà del cilindro, appunto come deve essere, il conoide essendo pure la metà d'esso cilindro.

Si muova la figura attorno all'ordinata MO; e sia $AM=b$, $MO=f$, $AB=x$, $BC=y$, $CK=b-x$, $KO=f-y$. Sarà il circolo del raggio $CK=\frac{c}{2r}\times\overline{b-x}^2$, adunque il prodotto di questo circolo in dy, differenziale di KM, cioè $\frac{c}{2r}\times\overline{bbdy-2bxdy+xxdy}$ farà l'elemento del solido generato dalla figura $MACK$, e però integrando, posto in luogo di x il valore dato per y, farà $\frac{c}{2r}\times\overline{bby-\frac{2by^{m+1}}{\overline{m+1}\times a^{m-1}}+\frac{y^{2m+1}}{\overline{2m+1}\times a^{2m-2}}}=$ al solido indefinito, o pure, ponendo x in luogo di $\frac{y^m}{a^{m-1}}$, $\frac{c}{2r}\times\overline{bby-\frac{2bxy}{m+1}+\frac{xxy}{2m+1}}$. E posta $x=b$, $y=f$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura $ACOM$, farà $\frac{c}{2r}\times\overline{bbf-\frac{2bbf}{m+1}+\frac{bbf}{2m+1}}$, cioè $\frac{2mmbbf}{\overline{2m+1}\times\overline{m+1}}\times\frac{c}{2r}$. E se si vuole, che la parabola sia apolloniana, cioè che sia $m=2$, farà il solido $=\frac{4cbbf}{15r}$.

E'

E' facile il vedere, che nella parabola apolloniana il cilindro sulla medesima base, ed altezza del detto solido sarà al solido, come 15, 8; e che il solido generato dalla figura OAP sarà $= \frac{7cbbf}{30r}$.

Si muova la figura attorno alla retta AP; e sia, come sopra, $AB = x$, $BC = y$, sarà $\frac{cxx}{2r}$ il circolo del raggio DC; adunque $\frac{cxxdy}{2r}$ l'elemento del solido generato dalla figura ACD, e ponendo in luogo di x il valore dato per y, ed integrando, sarà $\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m-2}}$, cioè $\frac{c}{2r} \times \frac{xxy}{2m+1}$ eguale al solido indefinito, e fatta $x = b$, $y = f$, sarà $\frac{cbbf}{2r \times 2m+1}$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura AOP.

Ma il cilindro nella medesima base, ed altezza è $= \frac{cbbf}{2r}$, sarà adunque il solido generato dalla figura $AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}$.

Ma in altra maniera ancora si può avere il solido generato dalla figura AOM ruotata attorno all' asse AB. Sia $AM = b$, $MO = f$. Il circolo del raggio DC sarà $= \frac{cxx}{2r}$, ed il circolo del raggio DK sarà $\frac{cbb}{2r}$;

adun-

adunque sarà $\frac{c}{2r} \times \sqrt{bb - xx}$ l'anello descritto dalla linea CK, adunque $\frac{c}{2r} \times \sqrt{bb - xx} \times dy$ sarà l'elemento del solido generato dalla figura $CKMA$, e posto in luogo di x il valore dato per y, sarà $\frac{c}{2r} \times \sqrt{bbdy - \frac{y^{2m}dy}{a^{2m-2}}}$, ed integrando, $\frac{c}{2r} \times \sqrt{bby - \frac{y^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}}$, e finalmente fatta $y = f$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura $AMOA$, sarà egli $\frac{c}{2r} \times \sqrt{bbf - \frac{f^{2m+1}}{\overline{2m+1} \times a^{2m-2}}}$; ma quando $y = f$, sarà, per la parabola, x cioè $b = \frac{f^m}{a^{m-1}}$, e $bb = \frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$, adunque posto nell'integrale questo valore dato per b, sarà il solido =

$\frac{c}{2r} \times \sqrt{bbf - \frac{bbf}{2m+1}} = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}$, come sopra.

ESEM-

ESEMPIO XXXI.

123. Sia l'ellissi ADC, (*Fig.* 28.) $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e però l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \sqrt{2ax - xx} = yy$. Sostituito adunque nella formola generale il valore di y dato dall'equazione, sarà essa $\frac{cbb}{2aar} \times \overline{2axdx - xxdx}$, ed integrando, sarà $\frac{cbb}{2aar} \times \overline{axx - \frac{x^3}{3}}$ eguale al solido indefinito generato dalla figura AEO mossa attorno all'asse AC. Posta $x = a$, sarà $\frac{cbba}{3r}$ metà dello sferoide; e posta $x = 2a$, sarà $\frac{2cbba}{3r}$ tutto lo sferoide.

E perchè il cono nella medesima altezza AC, e nella base, il di cui raggio sia il semiasse conjugato BD, è $= \frac{cbba}{3r}$, ed il cilindro è $= \frac{cbba}{3}$, sarà lo sferoide due terzi del cilindro, e doppio del cono.

ESEM-

ESEMPIO XXXII.

124. Sia l'iperbola AD, (*Fig.* 25.) che s'aggiri attorno a BC, e sia il semiasse trasverso $BA = \frac{a}{2}$, il centro B, ed il parametro $= b$, $AC = x$, $CD = y$, e l'equazione $\overline{ax + xx} \times \frac{b}{a} = yy$. Sostituito il valore di y nella formola generale, sarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \overline{ax + xx}$, ed integrando, sarà $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{axx}{2} + \frac{x^3}{3}}$ eguale al conoide iperbolico indefinito generato dalla figura ADC.

Sia $BC = x$, il resto come sopra. Sarà l'equazione $\frac{b}{a} \times \overline{xx - \frac{aa}{4}} = yy$, e però la formola sarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \overline{xx - \frac{aa}{4}}$, ed integrando, $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4}} + f$.

Aggiungo la costante, che in questo caso non è zero. Per determinarla si avverta, che nel punto A, quando $x = \frac{1}{2} a$, il solido deve essere nullo, onde posto nell'integrale $\frac{1}{2} a$ in luogo di x, dovrà essere $f + \frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{8}} = 0$, adunque $f = \frac{caab}{24r}$; e però l'integrale compito sarà $\frac{cb}{2ar} \times \overline{\frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4} + \frac{a^3}{12}}$.

S' aggiri l' iperbola attorno al semiasse conjugato HB, e sia BA semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= b$, $BC = x$, $CD = y$. Il circolo del raggio HD sarà $= \frac{cxx}{2r}$, adunque $\frac{cxxdy}{2r}$ sarà l' elemento del solido generato dal piano, o sia figura $BHDA$, e posto in luogo di xx il valore dato dall' equazione della curva, avremo $\frac{cdy}{2r} \times \overline{\frac{aayy + aabb}{bb}}$, ed integrando, $\frac{c}{2r} \times \overline{\frac{aay^3}{3bb} + aay}$, e fatta $y = b$, sarà il solido $= \frac{2caab}{3r}$.

ESEMPIO XXXIII.

125. Sia l' iperbola KHF (*Fig.* 34.) fra gl' asintoti, $AD = a$, $DE = b$, $AP = x$, $PH = y$, e l' equazione $xy = ab$. Si muova la curva attorno all' asintoto AB. Adunque il circolo del raggio QH sarà $= \frac{cxx}{2r}$, e però $\frac{cxxdy}{2r}$ sarà l' elemento del solido generato dalla figura $AQHFMA$ infinitamemte prodotta della parte di M, e posto in luogo di x il valore dato dall' equazione,

ne, sarà $\frac{caabbdy}{2ryy}$, ed integrando, $f - \frac{caabb}{2ry}$; ma per determinare la f, si osservi che quando sia $y = 0$, il solido deve essere $= 0$, adunque $f = \frac{caabb}{2r \times 0}$, quantità infinita, e però l'integrale compito sarà $- \frac{caabb}{2ry} + \infty$, adunque il solido di valore infinito.

Se in vece di sostituire nella formola in luogo di xx il valore dato per y dall'equazione, sostituiremo il valore di dy, sarà essa $- \frac{abcdx}{2r}$, ed integrando, $- \frac{abcx}{2r} + f$; ma il solido non può essere zero se non quando sia x infinita, adunque la costante f da aggiungersi deve essere infinita, e però infinito il solido.

Per avere il solido generato dal piano, o figura $BAPHK$ infinitamente prodotta verso B, basta riflettere, che essendo $\frac{cx}{r}$ la periferia del circolo, il di cui raggio è $QH = x$, sarà $\frac{cxy}{r}$ la superficie del cilindro generato dal piano $AQHP$, ed in conseguenza sarà $\frac{cxydx}{r}$ la solidità del cilindro vuoto generato dal rettangolo infinitesimo $IPHO$; adunque la somma di tutti questi, cioè $\int \frac{cxydx}{r}$ sarà il solido, che si cerca.

Posto adunque in luogo di y il suo valore $\frac{ab}{x}$, sarà l'integrale $\frac{cabx}{r}$ quantità finita, quantunque il solido sia infinitamente alto.

Nell'espressione $\frac{cabx}{r}$ del solido posto in luogo di ab il valore xy dato dall'equazione, sarà $\frac{cxxy}{r}$, ma $\frac{cxxy}{2r}$ è il cilindro generato dal rettangolo $APHQ$; adunque il solido iperbolico sarà doppio di esso cilindro, e però il solido generato dalla figura $BQHK$ infinitamente prodotta sarà eguale al cilindro, che gli serve di base. Presa adunque $x = a$, ed in conseguenza $y = b$, sarà il cilindro $= \frac{caab}{2r} =$ al solido sopra di esso.

ESEMPIO XXXIV.

126. Sia la logaritmica HCD, (*Fig.* 35.) la sottangente $CA = a$, $AB = x$, $BD = y$, e l'equazione $dx = \frac{ady}{y}$. S'aggiri attorno all'asintoto EB. Posto nella formola generale in luogo di dx il valore dato dall'equazione, sarà $\frac{caydy}{2r}$, ed integrando, $\frac{cayy}{4r} + f$. Ma quando sia $y = AC = a$, il solido è zero; adunque deve

deve essere $f = -\frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito, cioè il solido generato dal piano indefinito *ABDC*, sarà $= \frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$.

Sia l'assissa *AE* negativa, e però $= -x$, sarà pure negativa la differenza cioè $-dx$, e perchè crescendo l'assissa cala l'ordinata, sarà pure negativa la differenza di *EH*, cioè $-dy$, e l'equazione della curva sarà nello stesso modo $dx = \frac{ady}{y}$. Ma per essere negativa dx, sarà negativa la formola generale, vale a dire $-\frac{cyydx}{2r}$. Sostituito adunque il valore di dx, sarà $-\frac{caydy}{2r}$, ed integrando $-\frac{cayy}{4r} + f$; ma quando il solido è zero, sarà $y = a$; adunque $f = \frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito sarà $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$ eguale al solido generato dal piano *ACHE*. Posto $y = 0$, cioè supposto il solido infinitamente prodotto dalla parte di *M*, l'integrale sarà $= \frac{ca^3}{4r}$, adunque esso solido infinitamente prodotto sarà eguale a $\frac{ca^3}{4r}$, ma il solido generato dal piano *ACHE* abbiamo veduto essere $\frac{ca^3 - cayy}{4r}$, adunque il solido

infi-

infinitamente prodotto generato dal piano $LEHM$ sarà $\frac{cayy}{4r}$.

Poichè il cilindro, il di cui raggio della base sia $AC = a$, e l'altezza pure $= a$, è $= \frac{ca^3}{2r}$, sarà il solido della logaritmica infinitamente prodotto dalla parte di M nella base del raggio $AC = a$ al detto cilindro, come $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} :: 1, 2$.

ESEMPIO XXXV.

127. Sia la curva AMI (*Fig.* 18.) la Cissoide di Diocle, la quale aggirandosi attorno alla retta AB descriva un solido. Sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, e l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà adunque la formola generale de' solidi, sostituito il valore di yy, $\frac{cx^3dx}{2r \times \overline{a-x}}$, ed integrando, $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} l\,\overline{a-x} + f$; ma fatta $x = 0$, il solido deve essere zero, adunque $f = \frac{caa}{2r} l\,a$, e l'integrale compito $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} l\,\overline{a-x} + \frac{caa}{2r} l\,a$ eguale al solido generato

dalla

dalla figura APM, e fatta $x = a$, sarà il solido intiero $= -\frac{11ca^3}{12r} - \frac{caa}{2r} l\,0 + \frac{caa}{2r} l\,a$. Ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, che moltiplicata in $-\frac{caa}{2r}$ fa quantità positiva, adunque il solido intiero sarà infinito. Si avverta, che i suddetti logaritmi si prendono nella logaritmica della sottangente $= a$.

Per mezzo della serie sarà $\frac{cx^3 dx}{2r \times \overline{a - x}} = \frac{cx^3 dx}{2ar} + \frac{cx^4 dx}{2raa} + \frac{cx^5 dx}{2ra^3} + \frac{cx^6 dx}{2ra^4}$ ec., ed integrando, il solido generato dal piano APM sarà $= \frac{cx^4}{8ar} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^3} + \frac{cx^7}{14ra^4}$ ec., e fatta $x = a$ rispetto al solido intiero, sarà $\frac{a^3}{2r} \times \overline{\frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7}}$ ec., serie di valore infinito.

ESEMPIO XXXVI.

128. S'aggiri la trattoria ABF (*Fig.* 20.) attorno l'asintoto EH. Nella formola generale $\frac{cyydx}{2r}$ sostituito il valore della dx dato dall'equazione $dx = -\frac{dy \sqrt{aa - yy}}{y}$ num. 103., avremo $-\frac{cydy \sqrt{aa - yy}}{2r}$, ed

ed integrando, $\frac{c}{6r} \times \overline{aa - yy}^{\frac{3}{2}}$ = al ſolido generato dalla figura $AEDB$, ommeſſa l'aggiunta della coſtante ſuperflua. Fatta pertanto $y = 0$, ſarà il ſolido infinitamente prodotto $= \frac{ca^3}{6r}$; ma la ſolidità della sfera, il di cui raggio ſia $AE = a$ (num. 121.) è $= \frac{2ca^3}{3r}$, dunque il ſolido infinitamente prodotto ſarà la quarta parte di eſſa sfera.

ESEMPIO XXXVII.

129. Sia il cilindro $QBMCPT$, (*Fig.* 36.) da cui con un piano per BC diametro, e nella direzione AP ſi tagli la porzione, o ſia l'unghia $BMCPB$, ſi cerca la ſolidità di queſta.

Sia $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, e ſarà DH condotta ordinata nel circolo $= \sqrt{aa - xx}$. Si tiri dal punto H parallelamente ad MP, o ſia QT la retta HO, che ſarà nella ſuperficie del cilindro, indi dal punto D al punto O ſi conduca la retta DO, che ſarà nel piano $BOPC$, avremo formato nella ſolidità dell'unghia il triangolo DHO ſimile al triangolo lo AMP, e però sarà $HO = \frac{b\sqrt{aa - xx}}{a}$. Ma la somma di tutti questi triangoli DHO è appunto la ricercata solidità della metà dell'unghia, adunque sarà essa $= \int \frac{bdx}{2a} \times \overline{aa - xx}$, ed integrando, $\frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$, e fatta $x = a$, sarà finalmente la suddetta metà dell' unghia $= \frac{1}{3}aab$, e tutta $= \frac{2}{3}aab$.

In altra maniera, e più generalmente sia (*Fig.* 37.) il mezzo cilindro $DACHEG$, il quale per lo diametro CD sia tagliato da un piano nella direzione DE, onde nasca l'unghia $DBCEAD$, di cui si vuole la solidità. Sia $BA = a$, $AE = b$, $BQ = x$, $QM = y$, sarà $QK = \frac{bx}{a}$, e però il rettangolo $PONM = \frac{2bxy}{a}$, e questo moltiplicato in dx sarà l'elemento della solidità dell'unghia, cioè $\frac{2byxdx}{a}$.

Sia la curva DAC un semicircolo, adunque $y = \sqrt{aa - xx}$, e la formola sarà $\frac{2bxdx}{a}\sqrt{aa - xx}$, ed integrando $-\frac{2b}{3a} \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}} + m$, ma la costante m, posta $x = 0$, si trova essere $= \frac{2}{3}baa$, adunque l'inte-

 grale

grale compito del solido sarà $\frac{2baa}{3} - \frac{2b}{3a} \times \overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}$, e fatta $x = a$ rispetto a tutta l'unghia, sarà essa $\frac{2baa}{3}$.

Sia la curva DAC una delle infinite parabole, e l'equazione $y^m = a - x$; sarà la formola, sostituito il valore di y, $\frac{2bxdx}{a} \times \overline{a - x}^{\frac{1}{m}}$, la quale integrata conforme al num. 29., ed aggiunta la debita costante, e fatta $x = a$, darà per la solidità di tutta l'unghia $\frac{2bmma^{\frac{m+1}{m}}}{\overline{2m+1} \times \overline{m+1}}$, e posta $m = 2$, cioè che la parabola sia l'apolloniana, $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$. E supposto, che quando $x = 0$, sia $BC = y = c$, sarà $a^{\frac{1}{2}} = c$, e però l'unghia $= \frac{8abc}{15}$. Nello stesso modo troverassi l'unghia del cilindro ellittico essere $= \frac{2abc}{3}$, supposto il semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= c$ ec.

ESEM-

ESEMPIO XXXVIII.

130. Tagliato il conoide parabolico BAC (*Fig.* 38.) col piano qualunque IEH perpendicolare alla base circolare $BICH$, si dimanda la misura del pezzo compreso dalla sezione IEH, e dal piano a lei parallelo per l'asse AD.

Sia $= a$ il parametro della parabola generatrice BAC, l'assissa data $AD = b$, sarà l'ordinata $DB = \sqrt{ab}$. Sieno le coordinate $DF = x$, $FE = y$, e però l'equazione alla predetta curva BAC $ab - xx = ay$. Per la natura del circolo $BICH$ sarà il rettangolo $CFB = ab - xx$, eguale al quadrato $FH = zz$; ma $ab - xx = ay$, dunque $ay = zz$, e conseguentemente la sezione IEH sarà una parabola con lo stesso parametro della principale. Resta pertanto fissato il rettangolo $EFH = yz = y\sqrt{ay}$; e perchè questo sta all'area IEH, come 3 a 4, sarà essa area $= \frac{4}{3} y\sqrt{ay}$, ed il prodotto di essa area IEH nell'altezza infinitesima dx, flussione di $DF = x$, sarà l'elemento del solido in questione, cioè $\frac{4}{3} ydx\sqrt{ay}$; ma $y = \frac{ab - xx}{a}$, dunque esso elemento

sarà

sarà $\frac{4}{3}dx \times \frac{\overline{ab - xx}}{a} \sqrt{ab - xx}$, o sia $\frac{4}{3}bdx \sqrt{ab - xx} - \frac{4}{3a}xxdx \sqrt{ab - xx}$.

L'integrale del primo termine dipende dalla quadratura del cerchio BHC; il secondo si ridurrà alle quadrature note per via della prima formola del num. 61.

131. Ommetto gli esempj de' solidi generati da curve con le coordinate tra loro in angolo obbliquo, perchè essendo la formola per questi casi diversa dalla solita, ed ordinaria per le sole costanti, non si potranno incontrare difficoltà di natura diversa dalle già spiegate. Così pure ommetto gl'esempj de' solidi generati da curve riferite al fuoco, perchè non volendomi servire della teorìa de' centri di gravità, come ô detto di sopra, bisognerà ridurre le date curve ad altre riferite agl'assi, intorno alle quali già abbastanza si è parlato.

Delle Quadrature, o sia Compianazioni delle superficie de' Corpi.

ESEMPIO XXXIX.

132. Sia il cono retto $ACGK$, (*Fig.* 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione dell'asse AB, come

me AD, ſia $=x$, ſarà $DE=y=\frac{bx}{a}$, e $dy=\frac{bdx}{a}$, $dy^2=\frac{bbdx^2}{aa}$. Soſtituito adunque queſto valore di dy^2 nella formola generale $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, ſarà $\frac{cy}{r}\sqrt{\frac{aadx^2+bbdx^2}{aa}}=\frac{cydx\sqrt{aa+bb}}{ar}$, e ſoſtituito il valore di y, cioè $\frac{bx}{a}$, ſarà $\frac{cbxdx\sqrt{aa+bb}}{aar}$, ed integrando, $\frac{cbxx\sqrt{aa+bb}}{2aar}$ riſpetto alla ſuperficie del cono $AEMPI$; e fatta $x=a$, ſarà $\frac{cb\sqrt{aa+bb}}{2r}$ riſpetto alla ſuperficie di tutto il cono, e però eguale al rettangolo della metà della circonferenza della baſe nel lato AC.

La ſteſſa determinazione avrebbeſi avuta, ſe in luogo di ſoſtituire nella formola generale il valore di dy^2, ſi foſſe ſoſtituito il valore di dx^2.

Sarà per tanto la ſuperficie del fruſto conico $IMKCG=\frac{cb}{2r}\sqrt{aa+bb}-\frac{cbxx}{2aar}\sqrt{aa+bb}$, cioè $\frac{cb\sqrt{aa+bb}}{2raa}\times\overline{aa-xx}$; e però ſarà alla ſuperficie di tutto il cono, come $aa-xx$ ad aa.

133. Ma ſe il cono ſarà ſcaleno, biſognerà procedere

cedere in altra maniera. Onde sia il cono scaleno $PAFBM$, (*Fig.* 39.) la base sia il circolo $AFBM$, e nel diametro prodotto, se fa bisogno, s'abbassi la PD normale al piano del circolo, o sia base. Si prendano nella periferìa del circolo due punti F, f infinitamente prossimi, e si tirino i due lati FP, fP del cono. Egli è chiaro, che il triangolo infinitesimo PFf sarà la differenza, o sia l'elemento della superficie del cono. Adunque al punto F si conduca la tangente TFQ, a cui sia normale DQ, e si congiungano i punti P, Q con la retta PQ.

Poichè il piano del triangolo PDQ passa per la retta PD normale al piano della base del cono, il piano PQD sarà anch'egli normale allo stesso piano della base, ma la tangente TQ, che è nel piano pure della base, fa angolo retto con QD comune sezione de' due piani, dunque sarà normale al piano PQD, ed in conseguenza alla retta QP, e però sarà il triangolo $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$.

Si chiami il raggio $CA = r$, $CD = b$, $CE = x$, sarà $FE = \sqrt{rr - xx}$, e perchè l'angolo CFT è retto, essendo tangente del circolo la TF, sono simili i triangoli CFE, TCF; onde sarà $CT = \frac{rr}{x}$, ma CT è alla

CF,

CF, o sia CF, $CE :: TD$, DQ, adunque $DQ = \frac{rr + bx}{r}$. Sia la data $PD = p$, sarà dunque la $PQ = \sqrt{pp + \overline{\frac{rr+bx}{rr}}^2}$; ma l'elemento del cerchio Ff si fa essere $- \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$; adunque $\frac{Ff \times PQ}{2}$, elemento della superficie, sarà $= \frac{-rdx\sqrt{pp + \overline{\frac{rr+bx}{rr}}^2}}{2\sqrt{rr - xx}}$, formola che fin' ora non si sa ridurre alle note quadrature di circolo, o dell'iperbola, perchè non si può liberare da' segni radicali, come si è veduto al num. 38., e come ci è pure occorso nel volere rettificare l'ellissi.

Ricorrendo alla serie: si riduca in serie infinita il numeratore, e lo stesso si faccia del denominatore, indi si proceda nello stesso modo, come si è fatto nella seconda maniera intorno all' ellissi nell' Esempio 20. num. 112.

ESEMPIO XL.

134. Sia l'emisfero, il di cui semicircolo generatore CDK, (*Fig.* 32.) che s'aggiri attorno al raggio DB, e sia $DB = a$, una qualunque $DA = x$, sarà

rà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$, e però $dy^2 = \frac{\overline{a - x}^2 \times dx^2}{2ax - xx}$;
e fatte le ſoſtituzioni nella formola generale, ſarà eſſa $= \frac{cadx}{r}$, ed integrando $\frac{cax}{r} =$ alla ſuperficie del ſegmento di sfera generato dall'arco EDM; e fatta $x = a$, ſarà $\frac{caa}{r}$ la ſuperficie dell'emisfero, e però $\frac{2caa}{r}$ la ſuperficie di tutta la sfera. Sarà adunque la ſuperficie d'un qualunque ſegmento eguale al prodotto della periferìa del circolo generatore della sfera nell'altezza di eſſo ſegmento; dell'emisfero, eguale al rettangolo della ſteſſa periferìa nel raggio; e della sfera, eguale al rettangolo della periferìa nel diametro, e però eſſe ſuperficie tra loro nella ragione, che ânno l'altezza, il raggio, ed il diametro.

E perchè l'area del circolo generatore della sfera è $\frac{caa}{2r}$, ſarà la ſuperficie della sfera ad eſſa area :: 4, 1, cioè quadrupla del maſſimo circolo.

Ma poichè è pure la ſuperficie del cilindro (non compreſe le baſi) circoſcritto all'emisfero, eguale al prodotto della periferìa della baſe nell'altezza, ſarà dunque $= \frac{caa}{r}$, ed in conſeguenza eſſa ſuperficie eguale alla ſuperficie dell'emisfero. Ma il cono inſcritto nell'

emis-

emisfero â pure la ſuperficie $= \frac{ca\sqrt{2aa}}{2r}$, dunque ſarà la ſuperficie del cilindro, o dell'emisfero alla ſuperficie del cono inſcritto, come $2a$, $\sqrt{2aa}$, cioè a dire, come il diametro al lato del cono ec.

ESEMPIO XLI.

135. Si muova la parabola ACO dell'equazione $ax = yy$ attorno all'aſſe AM (*Fig.* 33.). Sarà dunque $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; e però la formola, fatta la ſoſtituzione, $\frac{cydy}{ar}\sqrt{4yy + aa}$, ed integrando, $\frac{c}{12ra} \times \overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}} =$ alla ſuperficie del conoide parabolico indefinito, eguale alla quarta proporzionale di $6a$, $\sqrt{4yy + aa}$, e dell' area del circolo del raggio $= \sqrt{4yy + aa}$.

136. Sia più generalmente $\frac{x^t}{t} = y$ l'equazione della parabola ACO (*Fig.* 33.) con l'aſſiſſa $AB = x$, e coll'applicata $BC = y$, la qual'equazione per lo trilineo

ACD sarà $x^{\frac{1}{t}} = y$, se si prenda $AD = x$ siccome assissa, e $DC = y$ siccome ordinata. Al num. 119. Esempio 27. si è veduto, essere l'elemento della curva, il quale chiamo $du = \frac{dx}{\overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$, e la formola differenziale per le superficie è $\frac{cydu}{r}$, dunque sarà $\frac{cydu}{r} = \frac{cydx}{r \times \overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$; ma è, per l'equazione locale, $\frac{x^t}{t} = y$, dunque sarà $\frac{cydu}{r} = \frac{cx^t dx}{rt \times \overline{x^{2t-2}+1}^{-\frac{1}{2}}}$.

Per procedere alle integrazioni, o quadrature mi servirò del metodo spiegato al num. 61., e posto in uso nel suddetto Esempio 27., ma prima si osservi, che essendo c la periferìa del circolo, il di cui raggio r, l'integrale $\int \frac{cydu}{r}$ ci dà la superficie del conoide; ma se c sarà una qualunque data retta, si averà la misura della superficie dell'ugna, quando cioè eretta sulla base CAB una cilindroide, questa viene tagliata da un piano, che passa per l'asse AB, e forma con la base sottoposta CAB un'angolo, il di cui seno retto a quello del complemento sia, come la c alla r. Le superficie

cie ungulari adunque ſtanno a quelle del ſolido rotondo, come una data retta alla circonſerenza c.

Operando adunque, come nel citato num. 61. è ſtato ſpiegato, affinchè la noſtra formola ſia algebraicamente integrabile, o riducibile alle note quadrature, troveremo dover eſſere $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, o pure $t = \frac{b+1}{b+2}$, intendendo per b un qualunque numero intiero poſitivo, o negativo.

La prima condizione, cioè $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, poſto b numero intiero prima poſitivo, e poi negativo, ci dà le due progreſſioni

$$\text{I.} \quad t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9} \text{ ec.}$$

$$\text{II.} \quad t = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11} \text{ ec.}$$

La ſeconda condizione, cioè $t = \frac{b+1}{b+2}$, poſto b numero intiero prima poſitivo, poi negativo, ci dà le due altre progreſſioni

$$\text{III.} \quad t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ ec.}$$

$$\text{IV.} \quad t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ ec.}$$

Soggiungo alcune brevi osservazioni.

I. Siccome le due progressioni prima, e terza abbracciano gli esponenti di tutte quelle parabole, che aggirandosi intorno all'asse generano conoidi, la superficie de' quali è analiticamente quadrabile, supposta soltanto la rettificazione della periferìa circolare, e conseguentemente tutte le unghie sopra descritte di data altezza ammettono una quadratura algebraica; così ne' casi della serie seconda, e quarta ci vuole qualche cosa di più, e c'entra il tetragonismo dell'iperbola.

II. E' notabile, che paragonando insieme la serie prima con la seconda, e la terza con la quarta, gli esponenti sono inversi, ed appartengono alla medesima curva. Ciò significa, che potendosi girare l'area parabolica o intorno l'asse AB, o intorno l'asse AD, e producendosi nell'uno, e nell'altro caso superficie affatto diverse, se nel primo si genera una superficie assolutamente quadrabile, almeno considerata nell'unghie; nel secondo tutto all'opposto, essendo reciprochi i valori, nascono le superficie suddette ipoteticamente quadrabili. Per esempio il conoide formato dalla prima parabola cubica arruotata intorno AD ci somministra quadrabile algebraicamente la superficie dell'ugne, ed anche quella del solido rotondo, mentre si abbia una linea retta eguale alla circonferenza. Ma se s'aggiri intorno all'asse AB, si richieggono le quadrature. Nella para-

parabola ſeconda cubica ſuccede lo ſteſſo; e tutto all' oppoſto nella apolloniana.

III. Confrontando queſte ſerie con quelle del num. 119. ſi ſcorge, che fra queſte neſſuna parabola della prima, o ſeconda ſerie è rettificabile nè analiticamente, nè per via delle note quadrature; quelle all'oppoſto della ſeconda, e quarta ſono tutte rettificabili, ed abbracciano tutte le contenute nelle progreſſioni compreſe nel citato num. 119.

IV. Fra le iperbole la ſola comune tra gli aſintoti ammette la ſuperficie riducibile alla quadratura della ſteſſa iperbola, perchè altro eſponente negativo non ci ſi affaccia nelle citate progreſſioni, ſalvo che -1.

V. Gli eſponenti, che non ſi trovano nelle dette ſerie, come $r = 4, 5, 6$ ec. $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{7}$ ec. vogliono quadrature più alte per miſurare le ſuperficie conoidali indi naſcenti.

ESEMPIO XLII.

137. Sia l'elliſſi ADC, (*Fig.* 28.) che ſi muova attorno all'aſſe AC, e ſia $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e l'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$.

Sarà

Sarà dunque, differenziando, $dx = \frac{aaydy}{bb \times \overline{a-x}}$, e però $dx^2 = \frac{a^4 yydy^2}{b^4 \times \overline{a-x}^2}$, e ponendo in luogo di $-2ax+xx$ il valore $-\frac{aayy}{bb}$ dato dall' equazione, sarà $dx^2 = \frac{aayydy^2}{bb \times bb - yy}$. Adunque sostituito questo valore nella formola generale, la troveremo essere $\frac{cydy \sqrt{b^4 + aayy - bbyy}}{rb \sqrt{bb - yy}}$, e fatta per brevità $aa - bb = ff$, supposta a maggiore di b, cioè che l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, sia il maggiore, (se fosse a minore di b si farebbe $aa - bb = -ff$) sarà $\frac{cydy \sqrt{b^4 + ffyy}}{rb \sqrt{bb - yy}}$ formola, che per le cose dette a suo luogo si potrà liberare dai radicali, ed il di cui integrale per mezzo del canone del num. 56. troveremo dipendere dalla quadratura del circolo. Ma se sarà a minore di b, cioè l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, il minore, la superficie dello sferoide dipenderà d'ambe le quadrature, cioè dalla circolare, e dall'iperbolica. La superficie poi dell'ugna nel primo caso è eguale ad una porzione di spazio ellittico, che si determina facilmente per via

delle

delle normali alla curva; ma nel secondo caso appunto queste normali ci danno uno spazio iperbolico eguale alla stessa superficie dell'ugna. Per vedere ciò chiaramente: sia la curva ACF, (*Fig.* 40.) su cui s'intenda eretta una cilindroide, che venga tagliata da un piano, il quale passi per l'asse AB, e formi col sottoposto piano CAB un'angolo semiretto, egli è manifesto, che chiamato du l'elemento della curva, sarà $\int ydu$ la superficie dell'ugna inferiore, e $\int \frac{cydu}{r}$ la superficie del conoide nascente dal girarsi la figura CAB intorno l'asse AB, e però sarà la superficie dell'ugna a quella del conoide, come il raggio alla circonferenza del circolo.

Ora sieno le due ordinate BC, DF infinitamente prossime, e condotta al punto F la normale FG, si metta essa in DH, e faccia figura di applicata della nuova curva MIH delineata col metodo prescritto: dico, che l'area $MABI$ è eguale alla superficie dell'ugna, che à per base l'arco AC.

I due triangoli FCE, GFD sono simili, dunque sarà FC, $CE :: GF$, FD, e però $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$. Ma $FD \times FC$ (ydu) è l'elemento della superficie dell'ugna; ed $HD \times DB$ è l'elemento dell'area $IMAB$, dunque essendo eguali questi elementi, lo saranno ancora i loro integrali,

cioè

cioè le predette aree. Ciò premesso, sia la Figura ACB un quarto d'ellissi dell'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, sarà la normale $FG = \frac{b}{aa} \sqrt{2a^3 x - aaxx + bbxx - 2abbx + aabb}$, dunque chiamata z l'ordinata BI, sarà $z = \frac{b}{aa} \sqrt{\overline{xx - 2ax} \times \overline{bb - aa} + aabb}$, equazione alla curva MIH, che appunto è un'altra ellissi quando sia a maggiore di b, cioè se AB sia l'asse maggiore dell'ellissi ACB; ed all'incontro un' iperbola quando sia a minore di b, cioè AB l'asse minore.

Finalmente nel caso di mezzo, cioè quando l'ellissi degenera in circolo, già si sa, che la detta superficie dell' ugna è quadrabile, eguagliandosi ad un rettangolo.

ESEMPIO XLIII.

138. Sia l'iperbola BD, (*Fig.* 29.) che s'aggiri attorno all'asse trasverso BA. Sia A il centro, $BA = a$, AE semiasse conjugato $= b$, $AC = x$, $CD = y$; sarà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, e però $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$, $dy = \frac{bxdx}{a\sqrt{xx - aa}}$, adunque la formola generale, fatte

le

le sostituzioni, sarà

$\frac{cb}{ar}\sqrt{xx-aa}\sqrt{\frac{aaxxdx^2+bbxxdx^2-a^4dx^2}{aa\times\overline{xx-aa}}}$, cioè

$\frac{cbdx}{aar}\sqrt{aaxx+bbxx-a^4}$, o sia, fatta $aa+bb=ff$,

$\frac{cbfdx}{aar}\sqrt{xx-\frac{a^4}{ff}}$, il di cui integrale, quando si sia liberata dal segno radicale, troveremo dipendere medesimamente dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XLIV.

139. Sia l'iperbola MD, (*Fig.* 41.) equilatera fra gl'asintoti, e si muova attorno all'asintoto AC, di cui l'equazione sia $ay+xy=aa$, essendo $AB=a$, $BC=x$, $CD=y$. Sarà dunque $x=\frac{aa}{y}-a$, e $dx^2=\frac{a^4dy^2}{y^4}$; e però la formola generale sarà, fatta la sostituzione, $\frac{cdy}{ry}\sqrt{y^4+a^4}$. Si faccia $\sqrt{y^4+a^4}=z$, e però $y^4=zz-a^4$, $dy=\frac{zdz}{2y^3}$. Fatte queste sostituzioni, avremo trasformata la formola in quest'altra $\frac{czzdz}{2r\times\overline{zz-a^4}}$

libera da' segni radicali, il di cui integrale dipende in parte da' logaritmi, come è facile a vedere. Adunque la ricercata superficie della nostra iperbola descritta dipenderà dalla quadratura pure dell'iperbola.

ESEMPIO XLV.

140. Sia il solido generato dalla trattoria (*Fig.* 20.) ABF, come nel Esempio 36. num. 128., di cui si voglia la superficie. Nella formola generale $\frac{cydu}{r}$ (intendendo per du l'elemento della curva) sostituito in luogo di du il valore $-\frac{ady}{y}$ dato dall'equazione della curva, avremo $-\frac{acdy}{r}$, ed integrando $-\frac{acy}{r}+n$. Ma quando la superficie sia nulla, si â $y=a$; dunque la costante $n=\frac{aac}{r}$, e però l'integrale compito $\frac{aac}{r}-\frac{acy}{r}$ eguale alla superficie del solido generato dalla figura $AEDB$; e fatta $y=0$, sarà $\frac{aac}{r}$ eguale alla superficie del solido infinitamente prodotto. Ma l'area del circolo, il di cui raggio $=\sqrt{2aa}$, si trova $=\frac{caa}{r}$, dunque la superficie del solido infinitamente prodotto è eguale all'

all'area del circolo, il di cui raggio ſia la diagonale del quadrato di AE.

ESEMPIO XLVI.

141. Sia l'unghia $CNEODAC$, (*Fig.* 37.) di cui ſi cerchi la ſuperficie. Denominando, come al num. 129, ſarà $QK = \frac{bx}{a} = MN$, ma Mi elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, adunque ſarà $\frac{bx}{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eguale al quadrilineo infiniteſimo $MimN$, elemento della ſuperficie della metà dell'unghia.

Sia la curva DAC un ſemicircolo, ſarà in queſto caſo $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e però la formola $\frac{bxdx}{\sqrt{aa - xx}}$, ed integrando (per lo num. 31.) ſarà $-b\sqrt{aa - xx} + f$, ma fatta $x = 0$, ſarà $f = ab$, adunque l'integrale compito ſi trova eſſere $ab - b\sqrt{aa - xx}$, e poſta $x = a$, riſpetto a tutta la ſuperficie della metà dell'unghia, ſarà eſſa ſuperficie $= ab$.

 Sia

Sia la curva *DAC* la parabola dell'equazione $yy = a - x$, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, e però la formola $\frac{bxdx}{2a} \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, il di cui integrale dipende dalla quadratura dell'iperbola, adunque dalla stessa quadratura dipenderà la superficie dell'unghia.

ESEMPIO XLVII.

142. Sia il conoide parabolico generato dalla rotazione della parabola *ADH* con le coordinate in angolo obbliquo (*Fig.* 7.) attorno all'asse *AC*, la di cui equazione è $ax = yy$. Si sostituisca nella formola delle superficie, che a questo caso compete, cioè nella formola $\frac{cay}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$ il valore di dx dato per dy dall'equazione differenziata della curva, e si trasformerà in quest'altra $\frac{2cnydy}{arm} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale si trova essere in parte algebraico, ed in parte logaritmico.

143. Coerentemente al metodo esposto delle quadrature, rettificazioni ec. sarebbe questo luogo opportuno

tuno per dare altresì le formole de' centri di gravità, di oſcillazione, e di percuſſione, ma ſtimo meglio di ommetterle, includendo eſſe neceſſariamente alcuni principj di Statica, dei quali non ſuppongo informati i miei Leggitori.

CAPO

CAPO IV.

Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche, ed Esponenziali.

144. QUantità esponenziali (giacchè altrove abbastanza è stato detto, cosa sieno le logaritmiche) si chiamano quelle, che sono elevate a qualunque potestà indeterminata; tali sarebbero a^x, y^z ec., gli esponenti delle quali x, z sono quantità indeterminate, e però il calcolo, che versa sopra queste tali quantità, chiamasi calcolo esponenziale.

145. Ma di più gradi sono le quantità esponenziali; si dicono del primo grado quelle, i di cui esponenti sono indeterminate ordinarie, come sono appunto le quantità a^x, y^z. Del secondo grado sono quelle, gli esponenti delle quali sono essi pure quantità esponenziali, come sarebbe a^{x^t}, y^{z^p}, intendendo la x elevata alla potestà t, e la z alla potestà p. Del terzo grado sono quelle, che ânno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado, e così di mano in mano coll' istesso ordine.

146. Ma qui fa d'uopo richiamare a memoria ciò,

ciò, che è stato detto al num. 11., cioè, che $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= a$; adunque il differenziale di ly sarà $\frac{dy}{y}$ moltiplicato nella sottangente della logaritmica, in cui si prende il logaritmo; così il differenziale di $l\sqrt{aa - xx}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ sarà $-\frac{xdx}{aa - xx}$, e generalmente il differenziale d'una qualunque quantità logaritmica sarà una formola composta del differenziale della quantità moltiplicata nella sottangente, e divisa per la quantità stessa.

147. Ciò posto: abbiasi da differenziare la quantità logaritmica $l^m x$ (la m è esponente del logaritmo). Si ponga $l^m x = y^m$, adunque sarà $lx = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m x$ sarà $my^{m-1}dy$, ed è $y^{m-1} = l^{m-1}x$; adunque sostituito il valore in luogo di y, e dy dato per x, sarà il differenziale di $l^m x = ml^{m-1}x \times \frac{adx}{x}$, supposta $= a$ la sottangente della logaritmica; o pure $ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x}$, supposta essa sottangente $= 1$.

148. Che se fosse da differenziarsi $l^m x^n$; fat-

ta

ta $x^n = z$, sarà $l^m z$, ed il differenziale sarà $m l^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$; ma $dz = nx^{n-1}dx$, adunque sostituendo, il differenziale della proposta formola $l^m x^n$ sarà $nm l^{m-1} x^n \times \frac{dx}{x}$.

149. Abbiasi da differenziare la formola llx. Si ponga $lx = y$, e però $llx = ly$; adunque sarà $\frac{dx}{x} = dy$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ (il che s'intenda ogni qual volta esse sottangenti non siano espresse); ma poichè $llx = ly$, il differenziale di llx sarà $\frac{dy}{y}$, adunque posti in luogo di y, e di dy i valori dati per x, sarà $\frac{dx}{xlx}$ il differenziale della proposta formola.

Ma più generalmente sia $l^m lx$ da differenziarsi. Pongo $lx = y$, e però $l^m lx = l^m y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m y$ è $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$; adunque sostituiti i valori in luogo di y, e di dy dati per x, sarà $m l^{m-1} lx \times \frac{dx}{xlx}$ il differenziale cercato.

Più generalmente ancora. Sia da differenziarsi $l^n l^m x$. Pongo $l^m x = y^m$, e però $lx = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$;

adun-

adunque farà $l^n l^m x = l^n y^m$. Ma il differenziale di $l^n y^m$ è $mn l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$, adunque fatte le fostituzioni, farà $mn l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l x}$ il differenziale cercato.

150. Quanto al modo di differenziare le quantità esponenziali. Sia la quantità z^x da differenziarsi. Pongo $z^x = t$, farà in conseguenza $l z^x = l t$, ma per lo num. 14. $l z^x = x l z$; adunque farà $x l z = l t$, e però differenziando $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^x$, onde $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{z^x}$, e finalmente $dt = z^x dx l z + x z^{x-1} dz$, differenziale cercato.

151. Sia da differenziarsi la quantità esponenziale del fecondo grado z^{x^p}. Pongo $z^{x^p} = t$, adunque farà $x^p l z = l t$, e differenziando, il differenziale di $x^p \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma per lo num. antecedente, il differenziale di x^p fapiamo effere $x^p dp l x + p x^{p-1} dx$, adunque farà $\overline{x^p dp l x + p x^{p-1} dx} \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^{x^p}$, adunque farà $dt = z^{x^p} x^p dp l x l z + z^{x^p} p x^{p-1} dx l z + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$, differenziale cercato.

Nello fteffo modo fi proceda intorno alle quantità efponenziali di qualunque altro grado.

152. Istessamente si averanno i differenziali delle quantità, che sono il prodotto di quantità esponenziali, per esempio di $x^p y^u$, imperocchè il differenziale di questa sarà il prodotto di x^p nel differenziale di y^u, con di più il differenziale di x^p in y^u; ma i differenziali di x^p, ed y^u si sanno trovare, adunque ec.

153. Dall'ordine, con cui procedono i differenziali logaritmici, si possono cavare alcune regole per la integrazione delle formole differenziali logaritmiche; ed in primo luogo que' canoni, che servono per la integrazione delle quantità differenziali ordinarie, serviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche a loro simili, purchè queste sieno in oltre divise per la variabile, e l'integrale di queste sarà lo stesso dell'integrale di quelle, ponendo solo in queste in luogo della incognita, o sua potestà, il logaritmo, o potestà del logaritmo dell'incognita stessa, ed il tutto dividendo per la sottangente della logaritmica.

Così poichè l'integrale di $mx^{m-1}dx$ è x^m, sarà pure $\frac{l^m x}{a}$ l'integrale di $ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x}$.

Istessamente poichè $\int x^{-1}dx = lx$, sarà pure $\int l^{-1}x \times \frac{dx}{x}$, o sia $\int \frac{dx}{x.lx} = llx$, supposta la sottangente $= 1$.

E poichè $\int ydy\sqrt{aa+yy} = \frac{\overline{aa+yy}^{\frac{3}{2}}}{3}$, sarà pure

$\int ly\sqrt{aa+l^2y} \times \frac{dy}{y} = \frac{\overline{aa+l^2y}^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Sia da integrarsi $ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$, adunque $\frac{dx}{x} = dy$, e fatta la sostituzione, sarà $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$; ma l'integrale di $my^{m-1}dy$ si sa essere y^m, adunque l'integrale di $ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$ sarà l^my; ma $y = lx$, e però $ly = llx$, e $l^my = l^mlx$; adunque $\int ml^{m-1}lx \times \frac{dx}{xlx} = l^mlx$.

Sia $nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x}$. Pongo $x^m = y$, e però $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$; fatte le sostituzioni, sarà $nml^{n-1}y \times \frac{dy}{mx^{m-1} \times x}$, cioè $\frac{nml^{n-1}y}{m} \times \frac{dy}{y}$, o sia $nl^{n-1}y \times \frac{dy}{y}$, il di cui integrale è l^ny, adunque restituito il valore di y, sarà $\int nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x} = l^nx^m$.

Sia $nml^{n-1}l^mx \times \frac{dx}{xlx}$. Pongo $lx = y$, dunque $\frac{dx}{x} = dy$, e $l^m x = y^m$; fatta la sostituzione, sarà $nml^{n-1}y^m \times \frac{dy}{y}$, ma l'integrale di questa è $l^n y^m$, adunque restituito il valore, sarà

$$\int nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{xlx} = l^n l^m x.$$

154. A ciò aggiungo una regola generale per la integrazione della formola $y^m l^n y dy$, e dico, che sarà generalmente $\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1}l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1}al^{n-1}y}{\overline{m+1}^2} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1}aal^{n-2}y}{\overline{m+1}^3} - \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times y^{m+1}a^3 l^{n-3}y}{\overline{m+1}^4}$ ec., e così continuando in infinito con la stessa legge, che da se è manifesta.

Quindi se l'esponente n sarà un numero intiero, e positivo, è facile il vedere, che la serie s'interromperà, ed in conseguenza sarà dato in termini finiti l'integrale della proposta formola.

Sia per cagione d'esempio $n = 2$; sarà dunque $n - 2 = 0$, e però sarà zero il coefficiente del quarto termine, e de' susseguenti, per essere ciascuno moltiplicato

plicato per $n-2$. Così se sarà $n=3$, s' interromperà la serie nel quinto termine; e così degl' altri ec.

Sia $n=2$, $m=1$, onde la formola d'integrarsi sia yl^2ydy; sarà adunque zero il quarto termine, ed ognuno de' susseguenti, e però l'integrale sarà $\frac{yyl^2y}{2} - \frac{2yyaly}{4} + \frac{2yyaa}{8}$, cioè $\frac{2yyl^2y - 2ayyly + aayy}{4}$.

Che se fosse $m=-1$, sarebbe inutile la serie, perchè sarebbe $m+1=0$, il che rende infinito ciascun termine, ma in questo caso non v'è bisogno della serie, giacchè si sanno integrare queste formole per le cose dette di sopra.

Rimane, che di tale regola se ne dia la dimostrazione; per lo che fare si ponga $ly=z$, e però $\frac{ady}{y}=dz$; sarà adunque, fatta la sostituzione, $y^m l^n ydy = y^m z^n dy$; ma $y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz - \frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n \times \overline{n-1}}{\overline{m+1}^2} \times y^{m+1} z^{n-2} adz + \frac{n \times \overline{n-1}}{\overline{m+1}^2} \times y^m z^{n-2} aady$ ec., e così in infinito, perchè in questa guisa ciascun termine, toltone il primo, si distrugge dall'immediatamente susseguente, appunto per

per essere $dz = \frac{ady}{y}$. Ora poichè questa tal serie infinita è integrabile, prendendo i termini a due a due, imperciocchè l'integrale del primo, e secondo termine è $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$; del terzo, e quarto è $-\frac{any^{m+1}z^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$; del quinto, e sesto è $\frac{aan\times\overline{n-1}\times y^{m+1}z^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$, e così di mano in mano; restituito in questi integrali ly in luogo di z, troveremo finalmente essere

$$\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1}l^n y}{m+1} - \frac{any^{m+1}l^{n-1}y}{\overline{m+1}^2} + \frac{aan\times\overline{n-1}\times y^{m+1}l^{n-2}y}{\overline{m+1}^3} - \frac{a^3n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\,y^{m+1}l^{n-3}y}{\overline{m+1}^4}.$$

155. L'artifizio, con cui si ritrova la suddetta serie, può essere il seguente.

M'immagino, che l'integrale di $y^m l^n y dy$ sia $\frac{y^{m+1}l^n y}{m+1}$, quale appunto sarebbe, se $l^n y$ non fosse quantità variabile, ma posta la sottangente $= a$, il differenziale di esso integrale è $y^m l^n y dy + \frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$, il quale si trova maggiore della proposta formola, quanto to è $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$; adunque l'integrale assunto è maggiore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{nya l^{n-1} y dy}{m+1}$, e però l'integrale di questo si dovrà sottrarre dall'integrale supposto.

E qui di nuovo m'immagino, che l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ sia $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, onde l'integrale della proposta formola venga ad essere $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$. Ma differenziando $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, si à $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^m a^2 l^{n-2} y dy}{\overline{m+1}^2}$; adunque l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ non è $\frac{ny^m a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2}$, ma è maggiore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{n \times \overline{n-1} \times y^m aa l^{n-2} y dy}{\overline{m+1}^2}$, adunque si è sottratto troppo, e però bisognerà aggiungere questo integrale, il quale nuovamente m'immamagino, che sia $\dfrac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} aa l^{n-2} y}{\overline{m+1}^{3}}$, adunque sarebbe l'integrale della proposta formola

$$\frac{y^{m+1} l^{n} y}{m+1} - \frac{n y^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^{2}} + \frac{n \times \overline{n-1} \times y^{m+1} aa l^{n-2} y}{\overline{m+1}^{3}} \text{ ec.,}$$

e così con lo stesso ordine procedendo si continoverà la serie in infinito.

156. Si possono anco avere gl'integrali delle formole differenziali logaritmiche per via di serie, che non contengano quantità logaritmiche, ma sole ordinarie, le quali serie però non s'interrompono mai, e sono sempre infinite.

Sia adunque da integrarsi $xlx \times dx$. Pongo $x = z + a$, sostituendo sarà $\overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dx$, ma per lo num. 70. $l\overline{z+a} = \dfrac{z}{a} - \dfrac{zz}{2aa} + \dfrac{z^3}{3a^3} - \dfrac{z^4}{4a^4}$ ec., supposta la sottangente $= 1$, facendo adunque l'attuale moltiplica, averemo $\overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dz =$

$$zdz + \frac{zzdz}{a} - \frac{z^3 dz}{2aa} + \frac{z^4 dz}{3a^3} - \frac{z^5 dz}{4a^4} \text{ ec.}$$

$$- \frac{zzdz}{2a} + \frac{z^3 dz}{3aa} - \frac{z^4 dz}{4a^3} + \frac{z^5 dz}{5a^4},$$

cioè

cioè $zdz + \frac{zzdz}{2a} - \frac{z^3dz}{6aa} + \frac{z^4dz}{12a^3} - \frac{z^5dz}{20a^4}$ ec., ed integrando ſarà $\frac{zz}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24aa} + \frac{z^5}{60a^3} - \frac{z^6}{120a^4}$ ec. $=$
$\int \overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dz$.

Che ſe la formola foſſe $x^m lxdx$, cioè $\overline{z+a}^m\, l\, \overline{z+a} \times dz$, ſi dovrebbe moltiplicare la ſerie eſprimente il logaritmo nella poteſtà $\overline{z+a}^m$. E ſe di più foſſe anco il logaritmo elevato a poteſtà, come a dire $x^m l^n xdx$, cioè $\overline{z+a}^m\, l^n\, \overline{z+a} \times dz$, biſognerebbe in oltre elevare alla poteſtà n la ſerie infinita, che eſprime eſſo logaritmo, e fare il rimanente come ſopra.

157. Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene ſpeſſo ammettono integrazioni, che ſono geometriche, e dipendono da quadrature di ſpazj curvilinei, che facilmente ſi deſcrivono, ſuppoſta la logiſtica. Eccone alcuni eſempj ſcelti fra i più ſemplici.

Sia l'equazione $dy\, l\, y = dx$, e nella logaritmica deſcritta (*Fig.* 42.) pongaſi $CD = y$, e preſa la ſottangente per unità, avremo AC, o $HD = l\, y$; onde il rettangolo infiniteſimo DG, la di cui baſe $GH = FE = dy$, ſarà $= dy\, l\, y$, ma queſto rettangolo ſi è l'elemento dell'area crescente BDH, dunque la somma $\int dy\, l\, y$ è eguale alla detta area BDH.

Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo AD meno lo spazio logaritmico $ABDC$; ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo $AB \times CD = y$, dunque l'area $BDH = \int dy\, l\, y = y\, l\, y - y$, siccome pure può trovarsi per via d'analisi.

Considero un'altra formola $dy\, l^2\, y = dx$. Il primo membro altro non è, che il solido generato dalla flussione HG moltiplicata nel quadrato dell'ordinata GF, il qual solido è analogo all'elemento del conoide generato dall'area BDH girata attorno l'asse BG, dunque l'integrale $\int dy\, l^2\, y = y\, l^2\, y - 2y\, l\, y + 2y$ sta al detto conoide in data ragione.

Più generalmente abbiasi $dy\, l^m y$. Alzata l'applicata HD alla potestà m (essendo l'indice m un numero affermativo, o negativo, intiero, o rotto) basterà, che l'ordinata HM facciasi eguale alla dignità $\overline{HD}^m$, e che per lo punto M, ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva BMN, per conseguire, che l'area $BMH = \int MH \times dy$ sia eguale, o analoga all'integrale $\int dy\, l^m y$.

Mag-

Maggiore difficoltà non si incontra quando anche nella espressione ci si parano avanti i logaritmi dei logaritmi. Propongasi $dy\,lly = dx$; giacchè AC è il logaritmo di CD, se si adatterà nella logistica la nuova applicata IL eguale all'assissa AC, sarà AI il logaritmo di IL, e conseguentemente il logaritmo del logaritmo della CD. Si proroghi la retta IL sin a tanto, che tagli la HD parallela, ed eguale ad AC nel punto K, per cui, ed altri infiniti similmente determinati passi una nuova curva delineata relativamente alla logistica: dico, che la quadratura dello spazio spettante ad essa curva ci dà l'integrale della formola $dy\,lly = dx$.

In altro modo: piglio la differenza della quantità $y\,lly$, cioè $dy\,lly + \frac{dy}{ly}$, ed aggiunto nella nostra espressione da ambo le parti il termine $\frac{dy}{ly}$, si â $dy\,lly + \frac{dy}{ly} = dx + \frac{dy}{ly}$, ed integrando, $y\,lly = x + \int \frac{dy}{ly}$. Posta dunque all'assissa AH l'ordinata corrispondente in ragion reciproca di $HD = ly$, nascerà una curva, il di cui tetragonismo esprimerà l'integrale $\int \frac{dy}{ly}$. E ciò basterà, onde si vegga l'andamento del metodo.

158. Passerò ora alle integrazioni delle formole

differenziali, che contengono quantità esponenziali; e sia da integrarsi $x^x dx$. Pongo $x = 1 + y$, (prendo l'unità per una qualunque costante) sarà dunque $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$; ciò posto, faccio in oltre $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$, adunque sarà $\overline{1+y}\, l\, \overline{1+y} = l\, \overline{1+u}$, e però convertiti in serie pel num. 70. i due logaritmi, e fatta l'attual moltiplica per $1+y$ della prima serie, averassi $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec. $=$

$u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. Indi faccio una equazione fittizia, e suppongo, che sia

$$u = y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.},$$

(A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi) e però

$$\begin{aligned} uu = yy + 2Ay^3 &+ AAy^4 + 2ABy^5 + BBy^6 \text{ ec.} \\ &+ 2By^4 + 2Cy^5 + Dy^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3 = y^3 + 3Ay^4 &+ 3AAy^5 \text{ ec.} \\ &+ 3By^5 \end{aligned}$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \text{ ec.}$$

$$u^5 = y^5 \text{ ec.},$$

adun-

adunque sarà $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. =

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
- \frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} \\
\qquad + \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad\qquad + By^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad - \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}
\end{array}
$$

Ma poichè $u - \frac{1}{2}uu + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$ ec. $= y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec., sarà

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
- \frac{1}{2}yy - Ay^3 + \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} = y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20} \text{ ec.} \\
\quad + \frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + By^5 \text{ ec.} \\
\qquad - \frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
\qquad\qquad + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}
\end{array}
$$

E

E riducendo l'equazione al zero, sarà

$$
\begin{array}{l}
y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{2}yy - Ay^3 - \frac{1}{2}AAy^4 - ABy^5 \text{ ec.} \\
\qquad - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} \\
+\frac{1}{3}y^3 + Ay^4 + AAy^5 \text{ ec.} = 0. \\
\qquad + By^5 \text{ ec.} \\
-\frac{1}{4}y^4 - Ay^5 \text{ ec.} \\
\qquad + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.} \\
-y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} + \frac{y^5}{20} \text{ ec.}
\end{array}
$$

Quindi dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C ec., che saranno $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$. Adunque, posti questi valori in luogo delle majuscole, averemo $1 + u = \overline{1+y}^{1+y} = 1 + y + yy + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ ec., onde

$$\overline{1+y}^{1+y}dy = dy + ydy + yydy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy \text{ ec.},$$

ed integrando, sarà finalmente

$$\int \overline{1+y}^{1+y}dy = y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} \text{ ec.}$$

159. In altra maniera ancora si troverà l'integrale

le della formola $x^x dx$. Pongo $x^x = 1 + y$, adunque $x\,l\,x = l\,\overline{1+y}$; riduco in serie $l\,\overline{1+y}$, e sarà
$$l\,\overline{1+y} = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} \text{ ec.}$$

Ciò posto, fingo $y = l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y}\,D\,l^5\,\overline{1+y}$ ec., (A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi) adunque sarà

$$y = l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y}\,D\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$\begin{aligned} yy = {} & l^2\,\overline{1+y} + 2a\,l^3\,\overline{1+y} + AA\,l^4\,\overline{1+y} + 2AB\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & + 2B\,l^4\,\overline{1+y} + 2C\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3 = {} & l^3\,\overline{1+y} + 3A\,l^4\,\overline{1+y} + 3AA\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & + 3B\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \end{aligned}$$

$$y^4 = l^4\,\overline{1+y} + 4A\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.}$$

$$y^5 = l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.},$$

e però $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ ec., cioè

$$\begin{aligned} l\,\overline{1+y} = {} & l\,\overline{1+y} + A\,l^2\,\overline{1+y} + B\,l^3\,\overline{1+y} + C\,l^4\,\overline{1+y} + D\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & - \tfrac{1}{2}\,l^2\,\overline{1+y} - A\,l^3\,\overline{1+y} - \tfrac{1}{2}AA\,l^4\,\overline{1+y} - AB\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & - B\,l^4\,\overline{1+y} - C\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & + \tfrac{1}{3}\,l^3\,\overline{1+y} + A\,l^4\,\overline{1+y} + AA\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & + B\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & - \tfrac{1}{4}\,l^4\,\overline{1+y} - A\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \\ & + \tfrac{1}{5}\,l^5\,\overline{1+y} \text{ ec.} \end{aligned}$$

Quindi

Quindi riducendo l'equazione al zero, dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C, D, ec., cioè $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{24}$, $D = \frac{1}{120}$ ec., onde sarà

$$1+y = 1 + l\overline{1+y} + \tfrac{1}{2} l^2 \overline{1+y} + \tfrac{1}{6} l^3 \overline{1+y} + \tfrac{1}{24} l^4 \overline{1+y} + \tfrac{1}{120} l^5 \overline{1+y} \text{ ec.};$$

ma $l\overline{1+y} = xlx$, ed $1+y = x^x$; adunque fatte le sostituzioni, e moltiplicando per dx, sarà $x^x dx = dx + xdx\, lx + \frac{1}{2} xxdx\, l^2 x + \frac{1}{6} x^3 dx\, l^3 x + \frac{1}{24} x^4 dx\, l^4 x + \frac{1}{120} x^5 dx\, l^5 x$ ec., ed integrando con le note regole di sopra spiegate, sarà finalmente $\int x^x dx = x + \frac{xxlx}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3 l^2 x}{6} - \frac{x^3 lx}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 l^3 x}{24} - \frac{x^4 l^2 x}{32} + \frac{x^4 lx}{64} - \frac{x^4}{256}$ ec.

160. Ma per dire in oltre alcuna cosa intorno alla costruzione delle curve espresse da equazioni logaritmiche, ed esponenziali. Debbasi in primo luogo descrivere la curva dell'equazione $x = \frac{l^{\frac{3}{2}} y}{a^{\frac{1}{2}}}$: sia BD (*Fig.* 43.) la logritmica, in cui si prendano i logaritmi della proposta equazione, la di cui sottangente sia, per esempio, $= a = AB$; ciò posto, presa $y = a = AB$, il logaritmo di y sarà $= 0$, e però $x = 0$; adunque fatta (*Fig.* 44.)

$MN =$

$MN = y = a$, sarà N un punto nella curva. Presa y minore di AB, sarà ly quantità negativa, e però $l^{\frac{1}{2}}y$ quantità immaginaria, per essere il 2 indice pari di radice di quantità negativa, onde x sarà immaginaria ogni qual volta sia y minore di a. Presa y maggiore di AB per esempio $= CD$, sarà $AC = ly$; ma per l'equazione data, è $a^{\frac{1}{2}}, l^{\frac{1}{2}}y :: ly, x$, cioè $a, \sqrt{aly} :: ly, x$; adunque fatta $MP = CD$, se prenderassi PH eguale alla quarta proporzionale di AB, della media tra AB, ed AC, e della stessa AC, sarà essa $= x$, ed il punto H nella curva. In questo modo si troveranno quanti punti si vogliono, e descriverassi la curva, la quale anderà in infinito, come è facile a conoscere.

Per avere la sottangente della data curva, prendo la formola differenziale $\frac{ydx}{dy}$ delle sottangenti; differenzio l'equazione della data curva, e trovo $dx = \frac{3}{2} l^{\frac{3-2}{2}} y \times \frac{a^{\frac{1}{2}} dy}{y}$; fatta la sostituzione in luogo di dx, averassi essa sottangente $= \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2ly} = \frac{3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{2}$

Averà pure la nostra curva un flesso contrario, per ritrovare il quale prendo le seconde differenze della data equazione, supposta dx costante, e ritrovo

$$\frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y \times ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y}{yy} = 0,$$

e però $ddy = \frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y}{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y}$; ma per lo metodo de' flessi contrarj, deve essere $ddy = 0$; adunque sarà $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{3}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $ly = \frac{1}{2} a$, sarà adunque il flesso contrario allora quando sia $ly = \frac{a}{2}$.

Se la proposta curva da descriversi sarà $xlx = y$, risoluta l'equazione in analogìa, sarà $1, lx :: x, y$, e si costruirà in simil modo.

E se fosse $xxlx = y$, o pure $x^3 lx = y$, o $x^{\frac{1}{3}} lx = y$, o più generalmente $x^n lx = y$, essendo n una qualunque potestà intiera o rotta di x; risoluta istessamente l'equazione nell' analogìa $1, lx :: x^n, y$, e presa nella logaritmica una qualunque $CD = x$, onde sia $AC =$

$AC = lx$; il moltiplo di AC secondo il numero n, se è intiero; il submultiplo, se è rotto, ci darà la corrispondente ordinata nella logaritmica stessa, che sarà x^n, per la proprietà della logaritmica.

Che se la curva contenesse quantità, che fossero il lologaritmo di logaritmo, come se fosse $x^n llx = y$, facilmente si averebbe nella logaritmica la linea espressa per llx prendendo una qualunque $CD = x$ (*Fig.* 43.), onde sia $AC = lx$, ed indi posta AC per ordinata in (ac); imperocchè sarà Aa il logaritmo di (ac), cioè llx, come ancora è stato avvertito al num. 157.

161. Debbasi costruire la curva esponenziale dell' equazione $x^x = y$. Adunque prendendo i logaritmi, sarà $xlx = ly$. Però descritta (*Fig.* 45.) la logaritmica PAB con la sottangente $AD = 1$, e presa una qualunque $CB = DE = x$, sarà $DC = lx$; adunque poichè l'equazione si risolve nell'analogìa $1, x :: lx, ly$, il quarto proporzionale di AD, BC, e DC, che sia per esempio DM, sarà ly; adunque $MN = y$, e però se farassi $EF = MN$, sarà $DE = x$, $EF = y$, ed F un punto della curva da descriversi.

La curva taglierà l'asintoto HM in H, fatta $DH = DA$; imperocchè posta $x = 0$, sarà $ly = 0$, cioè y eguale alla sottangente DA. Similmente posta $x = 1 = DA$, sarà $lx = 0$, e però $ly = 0$, cioè $y = DA$; fatta adunque $AG = DH$, sarà G un punto in curva.

Dal punto H alzando l'applicata HP alla logaritmica, e conducendo POR parallela ad HD, sarà OR la minima ordinata y alla curva. Imperciocchè differenziando l'equazione, sarà $dx + dx\,lx = \frac{dy}{y}$, cioè $ydx + ydx\,lx = dy$, ma per lo metodo de' massimi, e minimi, deve essere $dy = 0$, adunque $ydx + ydx\,lx = 0$, e però $-lx = 1 = HD = DA$.

Essendo $\frac{ydx}{dy}$ la formola generale della sottangente, e dall'equazione data della curva avendosi $dx = \frac{dy}{y \times 1 + lx}$, sostituito questo valore nella formola, sarà la sottangente per un qualunque punto della curva $= \frac{1}{1 + lx}$, e per lo punto G, rispetto a cui è $x = AD$, ed in conseguenza $lx = 0$, sarà la sottangente $= 1 = AD$, sottangente della logaritmica.

Rispetto allo spazio: prendo la formola generale ydx; ma $y = x^x$, equazione della curva, sostituito adunque nella formola il valore di y, sarà $x^x dx$, e però $\int x^x dx$ lo spazio indefinito $HOFEADH$, il quale, integrando per lo num. 159., sarà $=$

$$x + \frac{xx\,lx}{2} - \frac{xx}{4} + \frac{x^3 l^2 x}{6} - \frac{x^3\,lx}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 l^3 x}{24} - \frac{x^4 l^2 x}{32} + \frac{x^4\,lx}{64} \text{ ec.}$$

E

E presa $x = AD = 1$, sarà $lx = 0$, e però lo spazio $HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$ ec.,

cioè $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ ec.

162. Sia la curva dell' equazione $x^y = a$, sarà $ylx = la$, e però si potrà costruire per mezzo della logaritmica. Differenziando l'equazione $ylx = la$, averemo $\frac{ydx}{x} + dylx = 0$ (presa la sottangente della logaritmica $= 1$), e però sarà $dx = - \frac{xlxdy}{y}$, adunque la sottangente $= - xlx$.

163. Sia $x^x = a^y$; adunque $xlx = yla$, che si potrà costruire al solito. Prese le differenze, sarà $dx + dxlx = dyla$, e però la sottangente $= \frac{xlx}{1 + lx}$.

Ma poichè $y = \frac{xlx}{la}$, sarà ydx, cioè l'elemento dello spazio $= \frac{xlx \times dx}{la}$, ed integrando per lo num. 154, $\frac{2xxlx - xx}{4la}$.

164. Altre questioni ancora possono proporsi appartenenti ad equazioni esponenziali; come, per esempio, nelle equazioni esponenziali composte di sole quantità

tità cognite, ma con gl'esponenti incogniti, trovare effi esponenti.

Sia adunque $c^x = ab^{x-1}$, si dimanda il valore dell'esponente incognito x, essendo date le a, b, c; scrivo $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$, adunque sarà $xlc - la = \overline{x-1}\,lb$, e però $xlc - xlb = la - lb$, quindi $x = \frac{la - lb}{lc - lb}$.

165. Altra questione sarebbe questa. Trovare un numero x tale, che sia $x^x = a$, e $x^{x+p} = b$. Adunque per la prima condizione averemo $xlx = la$, e però $x = \frac{la}{lx}$, o pure $lx = \frac{la}{x}$.

Per la seconda condizione averemo $\overline{x+p}\,lx = lb$, e però sarà $x = \frac{lb - plx}{lx}$, o pure $lx = \frac{lb}{x+p}$. Adunque sarà $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$, cioè $xla + pla = xlb$, cioè $x = \frac{pla}{lb - la}$, o pure $\frac{la}{lx} = \frac{lb - plx}{lx}$, cioè $lx = \frac{lb - la}{p}$. Ciò posto, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

166. Dato un vaso di nota capacità pieno di un qualunque liquore, che sia per esempio vino, se ne estragga in un sorso una data quantità, poi si riempia d'acqua il vaso, indi del liquore ora misto d'acqua, e di

di vino, ſe ne eſtragga un'altro ſorſo eguale al primo, e di poi ſi riempia d'acqua il vaſo, e nuovamente ſi eſtragga del miſto liquore un ſorſo pure eguale al primo, e così di mano in mano ſi vada con la ſteſſa legge ripetendo l'operazione: ſi dimanda, quanti ſorſi biſognerà prendere, cioè quante volte biſognerà ripetere l'operazione, acciò ſia nel vaſo una data quantità di vino.

Sia $= a$ la capacità del vaſo, e ſia $= b$ la quantità di ciaſchedun ſorſo. Nel primo ſorſo adunque s'eſtraerà dal vaſo tanta quantità di vino, che ſarà $= b$, ed altrettanto s'infonderà d'acqua, onde dopo il primo ſorſo ſarà nel vaſo quantità di vino $= a - b$.

Nel ſecondo ſorſo s'eſtraerà b di liquore miſto, onde per avere la quantità del puro vino, che in eſſo ſorſo s'eſtrae, ſi faccia l'analogìa: come la capacità del vaſo (a) ſta alla quantità d'un ſorſo (b), così il vino, che è nel vaſo, ($a - b$) al quarto $\frac{ab - bb}{a}$, ſarà eſſo la quantità del puro vino, che ſi â eſtratto nel ſecondo ſorſo, rimarrà adunque nel vaſo quantità di puro vino $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$, cioè $\frac{\overline{a-b}^2}{a}$. Pel terzo ſorſo facendo pure l'analogìa: come la capacità del vaſo (a) ſta alla quantità d'un ſorſo (b), così il vino, che è nel vaſo, $\frac{(\overline{a-b}^2)}{a}$ al quarto $\frac{\overline{a-b}^2}{a} \times \frac{b}{a}$, ſarà eſſo la

quan-

quantità del puro vino, che si â estratto nel terzo sorso, rimarrà pertanto nel vaso quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^2}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{\overline{a-b}^2}{a}$, cioè $\frac{\overline{a-b}^3}{aa}$, e così dopo il quarto sorso sarà nel vaso quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^4}{a^3}$, e generalmente dopo un numero n di sorsi sarà nel vaso quantità di puro vino $\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}}$. Se adunque si voglia sapere, quanti sorsi debbansi prendere, acciò nel vaso rimanga una data quantità, che sia per esempio $\frac{a}{m}$ di puro vino, faremo l'equazione $\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{m}$, la quale, per essere n incogoita, sarà appunto esponenziale. Ridotta per tanto l'equazione ai logaritmi, sarà $l\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}} = l\frac{a}{m}$, cioè $nl\overline{a-b} = la - lm + \overline{n-1}\,la$, o sia $nl\overline{a-b} = -lm + nla$, e però $n = \frac{lm}{la - l\overline{a-b}}$, con che sarà facile avere il numero n col mezzo delle tavole logaritmiche.

FINE DEL TERZO LIBRO.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO QUARTO
Del Metodo Inverso delle Tangenti.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
LIBRO QUARTO
Del Metodo Inverso delle Tangenti.

INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

1\. Poichè, data una qualunque curva, il modo di ritrovare la di lei tangente, sottotangente, normale, o qualunque analoga linea si chiama *Il Metodo diretto delle Tangenti*; così, data la tangente, sottotangente, normale, o qualunque analoga linea; siccome pure data la rettificazione, o lo spazio, il modo di ritrovare quella curva, a cui compete la data proprietà della tangente, dello spazio ec., si chiama *Il Metodo inverso delle Tangenti*.

Nel secondo, e terzo libro si sono ritrovate le espressioni generali differenziali della tangente, e delle linee analoghe, come pure delle rettificazioni, e degli spazj; adunque paragonando la proprietà data della tangente, della rettificazione ec. alla rispettiva espressione, o formola generale differenziale, nascerà una equazione differenziale del primo grado, o di grado superiore, la quale integrata, o algebraicamente, o supposte le quadrature, ci darà la curva, che si ricerca, ed a cui compete la data proprietà. Si cerchi, per esempio, la curva la di cui sottotangente debba essere eguale alla doppia assissa. Chiamate le assisse x, le ordinate y, la formola della sottotangente è $\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$. Si cerchi la curva, il di cui spazio debba essere eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate. L'elemento dello spazio è ydx; adunque dovrà essere $\int ydx = \frac{2xy}{3}$, e però $ydx = \frac{2xdy + 2ydx}{3}$. Si cerchi la curva, la di cui proprietà sia, che un qualunque arco preso dal vertice sia eguale alla rispettiva sottonormale. L'espressione dell'arco è $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$; quella della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; dunque averemo

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydy}{dx}, \text{ e però } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ydxddy + dxdy^2}{dx^2},$$

(presa per costante dx) equazione differenziale del secondo grado.

2. Le equazioni, che in questo modo risultano, averanno sempre, come è facile a vedere, le indeterminate con le differenziali tra loro miste, e confuse, quindi non si fanno per ora maneggiare a fine di passare alle integrazioni, e così avere le curve, che si cer-

cercano, e molto meno ſe contengono differenziali ſecondi, terzi ec.; poichè nell'antecedente terzo libro ſi ſono ſempre ſuppoſte le formole differenziali eſſere compoſte di una ſola indeterminata con la ſua differenza. Sono adunque neceſſarj altri ripieghi per tentare di ridurre alle integrazioni, o quadrature tali equazioni, il che ſi chiama *Coſtruire le equazioni differenziali del primo, ſecondo ec. grado*. E quanto a quelle del primo in due maniere ſi procede; l'una è di paſſare alle integrazioni, o quadrature ſenza alcuna previa ſeparazione delle indeterminate, e loro differenziali; l'altra di ſeparare prima le indeterminate, e così render le equazioni atte all'integrazioni, o quadrature.

Anderò ſpiegando varj metodi particolari per ambedue le maniere, co' quali in molte equazioni ſi ottiene l'intento; ma moltiſſime altre ſe ne incontrano, che ſi trovano affatto contumaci, almeno coi metodi fin' ora ſcoperti, i quali non ânno quell' univerſalità, che ſarebbe neceſſaria.

CAPO

CAPO I.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, senza alcuna previa separazione dell' indeterminate.

3 Le più semplici formole, che abbiano le due variabili assieme confuse, sono le due $xdy + ydx$, ed $\frac{ydx - xdy}{yy}$; l'integrale della prima è xy, della seconda è $\frac{x}{y}$, come è chiaro. A queste adunque devesi procurare di ridurre le più composte, e ciò con i soliti ajuti della semplice Analisi, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che fanno al proposito, le quali varie saranno, secondo i varj casi. Se ne vegga ora la pratica.

Sia $ydx = xdx - xdy$, trasportato all'altra parte il termine ultimo, sarà $ydx + xdy = xdx$, e però $xy = \frac{xx}{2} \pm bb$. Sia l'equazione $x^4 dy^2 + 2x^3 ydxdy = a^4 dx^2 - xxyydx^2$, cioè $x^4 dy^2 + 2x^3 ydxdy + xxyydx^2 = a^4 dx^2$, e dividendo per xx, $xxdy^2 + 2xydxdy + yydx^2 = \frac{a^4 dx^2}{xx}$, e cavando la radice quadrata, $xdy + ydx = \frac{aadx}{x}$, ed in-

tegran-

tegrando, $xy = alx \pm b$ nella logaritmica della sottangente $= a$. Sia l'equazione $ydx = y^3dy + yydy + xdy$, cioè $ydx - xdy = y^3dy + yydy$. Il primo membro sarebbe integrabile, se fosse diviso per yy, divido adunque l'equazione, onde sia $\frac{ydx - xdy}{yy} = ydy + dy$, ed integrando, $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$.

4. Sia l'equazione $y^r dy = mydx + xdy$. Se non vi fosse il coefficiente m, la cosa sarebbe facile, poichè l'integrale del secondo membro sarebbe xy. Non riuscirà l'operazione nè meno trasportando il membro xdy nella parte opposta dell'equazione, cioè scrivendo $y^r dy - xdy = mydx$; osservo pertanto, che il differenziale di $mxy^{\frac{1}{m}}$ si è $my^{\frac{1}{m}}dx + xy^{\frac{1}{m}-1}dy$, diverso dal proposto $mydx + xdy$ in questo solo, che è moltiplicato per $y^{\frac{1}{m}-1}$; per rendere adunque integrabile la quantità $mydx + xdy$, basta moltiplicarla per $y^{\frac{1}{m}-1}$, ed a fine di conservare l'egualità, moltiplicare altresì il corrispondente membro $y^r dy$ dell'equazione, e però sarà $y^{r+\frac{1}{m}-1}dy = my^{\frac{1}{m}}dx + xy^{\frac{1}{m}-1}dy$, ed integrando, $\int y^{r+\frac{1}{m}-1}dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b$.

Sia

Sia la medesima equazione, ma con coefficiente diverso a ciascuno degl'ultimi due termini, cioè $y^r dy = mydx + nxdy$. Il secondo membro non è integrabile; osservo però, che il differenziale di $mxy^{\frac{n}{m}}$ si è $my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n}{m} - 1} dy$, adunque l'omogeneo di comparazione sarebbe integrabile, se fosse moltiplicato per $y^{\frac{n}{m} - 1}$; moltiplico per tanto tutta l'equazione, e sarà $y^{r + \frac{n}{m} - 1} dy = my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n}{m} - 1} dy$, e l'integrale sarà $\int y^{r + \frac{n}{m} - 1} dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b$.

5. Il differenziale di $x^n y$ è $x^n dy + nyx^{n-1} dx$. Ciò posto, sia l'equazione $y^r dy = x^n dy + yx^{n-1} dx$; se l'ultimo termine avesse il coefficiente n, l'integrale del secondo membro dell'equazione sarebbe $x^n y$. Osservo però, che il differenziale di $x^n y^n$ si è $nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1}, onde sia $ny^{r+n-1} dy = nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$, si trova integrabile, e l'integrale è $\int ny^{r+n-1} dy = x^n y^n \pm b$.

Ma se l'ultimo termine in vece del coefficiente n ne avesse un'altro, anzi generalmente, se ambedue i termini ultimi fossero affetti da coefficienti diversi; come me se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$; osservo, che il differenziale di $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$ si è $cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per $y^{\frac{cn}{e}-1}$, onde sia $y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + ey^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = \frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$. Facciasi $r = 1$, $c = 3$, $n = 1$, $e = 1$, cioè l'equazione $ydy = 3xdy + ydx$; l'integrale sarà $\frac{y^4}{4} = xy^3$. Facciasi $e = 2$, $c = 3$, $n = 1$, $r = 1$, cioè l'equazione $ydy = 2xdy + 3ydx$, l'integrale sarà $\frac{y^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$, cioè $\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$. Facciasi $c = 2$, $e = 2$, $n = 3$, $r = 3$, cioè l'equazione $y^3 dy = 2x^3 dy + 2yxxdx$, l'integrale sarà $\frac{y^6}{6} = \frac{2}{3} x^3 y^3$.

Se l'equazione fosse espressa così $y^{r-\frac{cn}{e}} x^r dx = cx^n dy + eyx^{n-1} dx$, è chiaro a vedere, che sarebbe in-

hh tegra-

tegrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{cn-1}{e}}$ sarebbe $x^r dx = cx^n y^{\frac{cn-1}{e}} dy + e y^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, ma l'integrale del secondo membro si è veduto, essere $\frac{e}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$, adunque ec.

6. Sia ora l'equazione $y^r dy = \frac{2x dy - y dx}{xx}$. Se non vi fosse il coefficiente 2, l'integrale del secondo membro sarebbe $\frac{y}{x}$. Ma non perciò servirà trasportare alla opposta parte il termine xdy, e scrivere $y^r dy - \frac{xdy}{xx} = \frac{xdy - ydy}{xx}$; osservo però, che il differenziale di $\frac{yy}{x}$ si è $\frac{2xydy - yydx}{xx}$, dunque se si moltiplicherà l'equazione proposta per y, onde sia $y^{r+1} dy = \frac{2xydy - yydx}{xx}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int y^{r+1} dy = \frac{yy}{x} \pm b$. Ma più generalmente sia un qualunque coefficiente n, e però l'equazione $y^r dy = \frac{nxdy - ydx}{xx}$. Osservo, che il differenziale di $\frac{y^n}{x}$ è $\frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, adunque se si moltiplicherà l'equazione per y^{n-1}, onde sia $y^{r+n-1} dy = \frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, sarà integrabile, e l'in-

l'integrale sarà $\int y^{r+n-1} dy = \frac{y^n}{x} \pm b$.

Anzi abbiano ambi gli ultimi due termini coefficiente diverso, e sia l'equazione $y^r dy = \frac{nxdy - mydx}{xx}$.

Osservo, che il differenziale di $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ si è

$\frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n-1}{m}}$, onde sia $y^{r+\frac{n-1}{m}} dy =$
$\frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$\int y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b$.

Se l'equazione fosse $y^{1-\frac{n}{m}} x^r dx = \frac{nxdy - mydx}{xx}$,

sarebbe pure integrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{n-1}{m}}$

sarà $x^r dx = \frac{nxy^{\frac{n-1}{m}} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; ma l'integrale del

secondo membro si sa, essere $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$, dunque ec.

 Alle

Alle suddette equazioni manchi il denominatore xx, e sia l'equazione $y^r dy = nxdy - ydx$. Per sommare la seconda parte dell'equazione, bisognerebbe moltiplicarla per y^{n-1}, e dividerla per xx; ma ciò dovendosi fare anche rispetto alla prima parte, sarebbe essa $\frac{y^{r+n-1}dy}{xx}$, che in nessuna maniera si può sommare; adunque si mutino i segni all'equazione, e sarà $-y^r dy = ydx - nxdy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x}{y^n}$ si è $\frac{y^n dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per y^{n-1}, ed indi se si dividerà per y^{2n}, onde sia $\frac{-y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{y^n dx - nxy^{n-1}dy}{y^{2n}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int \frac{-y^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x}{y^n} \pm b.$$

Abbia l'equazione ambi gli ultimi due termini con il coefficiente, e sia $y^r dy = nxdy - mydx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = mydx - nxdy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$ è $\frac{my^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n}{m}-1}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; adunque se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n}{m}-1}$, e si dividerà

per

per $mmy^{\frac{2n}{m}}$, onde sia $-\dfrac{y^{r+\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} =$

$\dfrac{my^{\frac{n}{m}}dx - nxy^{\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int -\frac{y^{r+\frac{n-1}{m}}dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}} = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$$

7. Sia l'equazione $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1}dx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = nyx^{n-1}dx - x^n dy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y}$ è $\frac{nyx^{n-1}dx - x^n dy}{yy}$, dunque dividendo l'equazione per yy, onde sia $-y^{r-2}dy = \frac{nyx^{n-1}dx - x^n dy}{yy}$, sarà integrabile, e sarà l'integrale $\int -y^{r-2}dy = \frac{x^n}{y} \pm b$.

Ma se mancasse il coefficiente n, e l'equazione fosse $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1}dx$; si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = yx^{n-1}dx - x^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y^n}$ è $\frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$; dunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1}, e dividendola per

per y^{2n}, onde sia $\frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int \frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{x^n}{y^n} \pm b$.

Che se in luogo del coefficiente n ve ne fosse un'altro di natura diversa; anzi se ambi gl'ultimi termini fossero affetti da coefficiente diverso, come se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1}dx$, si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = eyx^{n-1}dx - cx^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}}$ è $\frac{ney^{\frac{nc}{e}}x^{n-1}dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$; dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc}{e}-1}$, e dividendola per $eey^{\frac{2nc}{e}}$, onde sia $\frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{ney^{\frac{nc}{e}}x^{n-1}dx - ncx^n y^{\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà $\int \frac{-ny^{r+\frac{nc}{e}-1}dy}{eey^{\frac{2nc}{e}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{e}}} \pm b$.

Ma

Ma se l'equazione fosse espressa così $y^{1-\frac{nc}{e}} x^r dx = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$; senza mutare i segni osservo, che il differenziale di $\frac{ey^{\frac{nc}{e}}}{x^n}$ si è $\frac{ncx^n y^{\frac{nc-1}{e}} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$;

dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc-1}{e}}$, e dividendola per x^{2n}, onde sia $\frac{nx^r dx}{x^{2n}} =$

$\frac{ncx^n y^{\frac{nc-1}{e}} dy - ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1} dx}{x^{2n}}$, sarà integrabile, e sarà

l'integrale $\int \frac{nx^r dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{nc}{e}} \pm b$.

8. E' stato detto da me al num. 17. dell'antecedente libro, che ogni qual volta il numeratore d'una frazione composta di una sola indeterminata, e delle costanti, sia il differenziale preciso del denominatore, o pure un proporzionale di esso differenziale, l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o il proporzionale di esso logaritmo. Ciò vale per tanto anche quando la formola contenga due indeterminate fra se miste coi loro differenziali. L'integrale adunque di $\frac{dx + dy}{x + y} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x, o

per

per y) sarà $l\overline{x+y} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{dx + dy}{2x + 2y} = dz$ sarà $l\sqrt{x+y} = z + b$. L'integrale di $\frac{4xdx - 4ydy}{xx - yy} = dz$ sarà $2\,l\,\overline{xx - yy} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{xdy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy} = dz$ sarà $l\sqrt{xy - yy} = z \pm b$. E generalmente l'integrale di

$$\frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - \overline{m-n} \times y^{m+n-1} dy}{r \times \overline{x^m y^n - y^{m+n}}} = dz$$

sarà $l\sqrt[r]{x^m y^n - y^{m+n}} = z \pm b$; e così di qualunque altra equazione, che abbia la assegnata condizione.

9. Molte equazioni però, sebbene non ânno la necessaria condizione, possono facilmente con gli ajuti dell' algebra ridursi ad averla. Così l'equazione $\frac{xdy + ydx}{x} = -dy$ non â nel primo membro la condizione, che si ricerca; l'avrà però, se si divida per y, onde sia $\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}$, e però integrando, $l\,xy = ly^{-1} \pm lb$.

Sia l'equazione $axdy + 2aydx = xydy$; la divido per axy, e sarà $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{a}$, la quale sarebbe integrabile, se nel secondo termine del primo membro non

vi

vi foſſe il coefficiente 2, ſottraggo adunque la quantità $\frac{ydx}{xy}$ dall'uno, e dall'altro membro, e ſarà $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{ydx}{xy}$, cioè $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{a} - \frac{dx}{x}$, e però integrando, $lxy = \frac{y}{a} - lx \pm lb$.

Sia l'equazione $yxdx = \sqrt{xxydy + y^3dy}\sqrt{y} - yydy$, la divido per y, e ſarà $xdx = \sqrt{xxdy + yydy}\sqrt{y} - ydy$, cioè $xdx + ydy = \sqrt{xxdy + yydy}\sqrt{y}$, e di nuovo dividendo per $xx + yy$, $\frac{xdx + ydy}{xx + yy} = dy\sqrt{y}$, ed integrando,

$$l\sqrt{xx + yy} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \pm b.$$

10. Dalli numeri 31., e 32. dello ſteſſo ſopra citato libro terzo ſi ricava, che una qualunque formola compoſta di una ſola variabile, ſe ſarà il prodotto di qual ſi ſia quantità compleſſa elevata a poteſtà poſitiva, o negativa, intiera, o rotta nel differenziale preciſo, o nel proporzionale del differenziale de' termini della quantità, ſarà ſempre integrabile, e l'integrale ſarà la ſteſſa quantità, il di cui eſponente ſia quello di prima, ma accreſciuto dell'unità, e moltiplicato nello ſteſſo eſponente così accreſciuto, ma inverſamente preſo; cioè, che è lo ſteſſo, per eſſo diviſa; o pure eſſo integrale ſarà un proporzionale di queſto. Nulla meno vale la

regola, quando le formole differenziali sieno ancora composte di due variabili, e loro differenziali promiscuamente, purchè abbiano la notata condizione.

L'integrale adunque di $\overline{dx+dy}\sqrt{\overline{x+y}}=dz$ (dz è in qualunque modo data per x, o per y) sarà

$\frac{2}{3}\times\overline{x+y}^{\frac{3}{2}}=z\pm b$. L'integrale di

$\overline{\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy}\sqrt{\overline{x+y}}=dz$ sarà $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\overline{x+y}^{\frac{3}{2}}=z\pm b$,

cioè $\frac{1}{3}\times\overline{x+y}^{\frac{3}{2}}=z\pm b$. L'integrale di $\frac{2adx+2bdy}{\sqrt{\overline{ax+by}}}=dz$

sarà $4\sqrt{\overline{ax+by}}=z\pm b$. L'integrale di

$\frac{p^3dq+3qppdp+3pqqdq+q^3dp}{2\sqrt{\overline{p^3q+q^3p}}}=dz$ sarà $\sqrt{\overline{p^3q+q^3p}}=$

$z\pm b$. L'integrale di $\overline{xdy+ydx+2ydy}\times b\times\overline{xy+yy}^{\frac{n}{m}}=dz$

sarà $\frac{mb}{m+n}\times\overline{xy+yy}^{\frac{m+n}{m}}=z\pm b$. L'integrale di

$\frac{xdy+ydx+2ydy}{b\times\overline{xy+yy}^{\frac{n}{m}}}=dz$ sarà $\frac{m\times\overline{xy+yy}^{\frac{m-n}{m}}}{\overline{m-n}\times b}=z\pm b$.

E così di mille altre di simil sorta.

Tal

Tal ora però avranno le equazioni bisogno prima di qualche preparazione. Sia l'equazione $xxdx + xydy + yydx = dz$, (dz è data in qualunque modo per x) la moltiplico per x, e sarà $x^3dx + xxydy + yyxdx = xdz$, cioè $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times xx = xdz$, che non â la condizione necessaria; l'avrebbe però, se ydy fosse altresì moltiplicata in yy, aggiungo adunque all'uno, ed all'altro membro il termine y^3dy, e sarà $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times xx + y^3dy = xdz + y^3dy$, cioè $\overline{xdx + ydy} \times \overline{xx + yy} = xdz + y^3dy$, capace d'integrazione, e però integrando, $\frac{\overline{xx + yy}^2}{4} = \frac{y^4}{4} \pm b + \int xdz$.

Ma non è così facile a riconoscere, quale quantità debba aggiungersi, o sottrarsi, o quale altra alterazione possa farsi alle equazioni, a fine di renderle capaci del suddetto metodo, così che quando le equazioni sieno alquanto composte, l'arrivare in questo modo al fine si potrà dire una fortuna, un caso; quindi in tali incontri bisognerà ricorrere ai metodi della separazione delle indeterminate, e però sia

CAPO II.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente separazione delle Indeterminate.

11. DI alcune equazioni, quantunque pochissime, succede la separazione delle indeterminate con le sole operazioni prime dell'algebra ordinaria. Tale sarebbe l'equazione $xxdx^2 + xydxdy = aady^2$, in cui osservo, che il primo membro è una formola di quadratica affetta dal lato, che sarebbe un quadrato, se vi fosse di più la quantità $\frac{yydy^2}{4}$. Aggiungo per tanto all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{yydy^2}{4}$, e l'equazione sarà $xxdx^2 + xydxdy + \frac{yydy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$, ed estraendo la radice, $xdx + \frac{ydy}{2} = dy\sqrt{\frac{yy}{4} + aa}$, in cui sono separate le variabili, e però integrando, $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy\sqrt{aa + \frac{yy}{4}} \pm b$. L'integrale del secondo membro dipende dalla quadratura dell'iperbola.

12.

12. Il più delle volte adunque conviene servirsi delle sostituzioni. Sia l'equazione $aadx = xxdy + 2xydy + yydy$. Si ponga $x + y = z$, (la z è una nuova indeterminata) e però $dx + dy = dz$, ed $xx + 2xy + yy = zz$. Fatte adunque le sostituzioni, sarà $aadz - aady = zzdy$, cioè $\frac{aadz}{aa + zz} = dy$, equazione, in cui sono separate le variabili.

L'integrale del primo membro dipende dalla rettificazione del circolo.

Sia l'equazione $\overline{xdy + ydx} \sqrt{a^4 - xxyy} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt[4]{xx + yy} \sqrt{xx + yy}}$. Osservo nel primo membro, che l'integrale di $xdy + ydx$ si è xy, e che il quadrato di questo integrale si trova precisamente nella quantità $\sqrt{a^4 - xxyy}$; adunque se porrò $xy = z$, nel primo membro saranno separate le variabili, e sarà esso $dz \sqrt{a^4 - zz}$. Osservo in oltre, che nel secondo membro l'integrale di $xdx + ydy$ è $\frac{xx + yy}{2}$, e che simili a questo integrale sono le quantità nel denominatore; adunque con la sostituzione di $xx + yy = 2p$ si separeranno le indeterminate anche nel secondo membro, e l'equazione sarà

$$dz \sqrt{a^4 - zz} = \frac{dp}{\sqrt[4]{2p} \sqrt{2p}}.$$

Sia

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^2} = dz$ (la dz è data in qualsivoglia modo per x, o per y). L'integrale di $xdy - ydx$ si averà quando si divida per xx, e sarà $\frac{y}{x}$. Suppongasi adunque $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, e però $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dp}{a}$, e $2xdy - 2ydx = \frac{2xxdp}{a}$. Fatta per tanto la sostituzione, sarà $\frac{2xxdp}{a \times \overline{xx - 2xy + yy}} = dz$, e dividendo il numeratore, e denominatore del primo membro per xx, sarà $\frac{2dp}{a \times \overline{1 - \frac{2y}{x} + \frac{yy}{xx}}} = dz$; ma si è posto $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, ed $\frac{yy}{xx} = \frac{pp}{aa}$, adunque sarà $\frac{2adp}{aa - 2ap + pp} = dz$; e giacchè l'integrale di questa equazione è algebraico, anderò avanti per l'integrazione; e però sia $a - p = q$, adunque $-\frac{2adq}{qq} = dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q} \pm b = z$. Ma $q = a - p$, e $p = \frac{ay}{x}$, e però $q = \frac{ax - ay}{x}$; restituito per tanto questo valore, sarà $\frac{2x}{x-y} \pm b = z$, che è la curva dell'equazione differenziale proposta. Se in luogo di fare $a - p = q$, si avesse

fatto

fatto $p-a=q$, averebbesi trovato altro integrale, ma diverso solo ne' segni.

13. La sopra scritta equazione mi porge occasione di fare una importante avvertenza; ed è, che le curve non solo mutano tal ora natura nel prendere le sommatorie, o semplicemente, o coll'addizione della costante, il che è stato notato fino dalla prima origine delle quantità infinitesime, ma alle volte ci si presentano pure formole tali, che ammettono integrazioni affatto diverse, e ci somministrano curve di vario genere anche senza aggiungere costante alcuna, il che merita qualche riflesso.

Per mezzo della supposizione $\frac{y}{x}=\frac{p}{a}$ è stata integrata l'equazione $\frac{2xdy-2ydx}{\overline{x-y}^{2}}=dz$, e l'integrale si è trovato, essere $\frac{2x}{x-y}=z$, ommessa la costante. Faccio ora la supposizione di $\frac{x}{y}=\frac{p}{a}$, e tento l'integrazione; sarà dunque $\frac{ydx-xdy}{yy}=\frac{dp}{a}$, e però $2xdy-2ydx=-\frac{2yydp}{a}$, e sostituendo, sarà l'equazione $\frac{-2dp}{a\sqrt{\frac{xx}{yy}-\frac{2x}{y}+1}}=dz$;

ma

ma $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, dunque $\frac{-2adp}{pp - 2ap + aa} = dz$; e fatta $p - a = q$, $-\frac{2adq}{qq} = dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q} = z$; quindi restituiti i valori, $\frac{2y}{x - y} = z$, integrale della proposta equazione differenziale, e diverso dal primo.

Altro integrale della proposta formola diverso dai primi due si è $\frac{x + y}{x - y} = z$; ed in fatti differenziando, sarà $\frac{xdx - ydx + xdy - ydy - xdx - ydx + xdy + ydy}{\overline{x - y}^2} = dz$, e cancellati i termini, che si elidono, $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x - y}^2} = dz$, che è l'equazione da prima proposta.

Sia $dz = dy$, e la proposta equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x - y}^2} = dy$. Se mi servo del secondo integrale ritrovato, nasce l'equazione $\frac{2y}{x - y} = y$, e perciò $2 + y = x$, luogo al triangolo. Se poi mi servo del primo, e del terzo integrale ponendo $\frac{2x}{x - y} = y$, ovvero $\frac{x + y}{x - y} = y$, la curva è del secondo grado.

Ge-

Generalmente sia $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^{2}} = y^{m}dy$. Adoperata la prima, e la terza integrazione, la curva indi nascente monterà al grado $m+2$, mentre sia m numero positivo; fatto uso della seconda, la curva resterà un passo addietro.

14. Ma oltre che nè meno il metodo delle sostituzioni è universale, la maggiore difficoltà si è, che per lo più è molto difficile il sapere, quale sostituzione debba farsi, per non operare a caso, e gittare molta fatica inutilmente. Tuttavia però si procederà con la totale sicurezza in tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti dell' incognite sia la stessa per ciascun termine, e succederà sempre la separazione delle indeterminate; nè importa che sieno esse equazioni affette di radicali, o di frazioni, o di serie, e che i coefficienti, e segni sieno in qualunque maniera. La sostituzione da farsi in tutte queste equazioni sarà col porre una delle variabili eguale al prodotto dell'altra in una nuova variabile di modo, che se l'equazione è data per x, ed y, si faccia $x = \frac{yz}{a}$, o pure $y = \frac{xz}{a}$; (per lo denominatore a si intenda una qualunque costante a piacere) e però $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, si arriverà ad un'altra equazione, la quale

kk sarà

sarà sempre divisibile per tanta potestà dell' indeterminata x, quanta era la somma degl' esponenti di x, ed y in ogni termine dell' equazione proposta, quindi fatta la divisione, la lettera x non oltrepasserà la prima potestà, e sarà sempre moltiplicata in dz, onde si ridurrà l' equazione in modo, che da una parte vi sia $\frac{dx}{x}$, e dell' altra dz con le sole funzioni di z, e così saranno separate le variabili. Imperciocchè chiamando A tutti que' termini, che sono moltiplicati nella dy, e B quelli, che sono moltiplicati nella dx, l' equazione sarà $A\,dy = B\,dx$, e le A, B sono date promiscuamente per x, ed y. Ora poichè le dimensioni della lettera y assieme con le dimensioni della lettera x in ogni termine fanno lo stesso numero, se in luogo di y si porrà $\frac{xz}{a}$, ne verrà, che in ciascun termine delle quantità A, B la lettera x abbia la stessa dimensione, che prima avevano x, ed y assieme; per lo che, se questa dimensione si chiamerà n, l' equazione sarà divisibile per x^n, rimanendo solo z, a, dy, dx. Suppongasi, che dopo la sostituzione di $\frac{xz}{a}$, e dopo la divisione per x^n ciò, che rimane nella quantità A, sia C; e ciò, che rimane nella quantità B, sia D; sarà l' equazione $C\,dy = D\,dx$, e le C, D sono date per z, e per le costanti, ma

$dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; adunque sarà l'equazione $\frac{Cxdz + Czdx}{a} = Ddx$, cioè $Dadx - Czdx = Cxdz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{Cdz}{Da - Cz}$, e così le indeterminate coi loro differenziali saranno separate, e l'equazione costruibile, almeno per le quadrature.

E' indifferente il porre $y = \frac{zx}{a}$, o pure $x = \frac{yz}{a}$, poichè sì nell'una, come nell'altra maniera si separano sempre le indeterminate; ma alle volte una sostituzione piuttosto, che l'altra ci darà l'equazione più semplice, e di minori termini, o la costruzione più facile, e più elegante; quindi non sarà mal fatto il provarle tutte due, ed in fine appigliarsi a quella, che riuscirà la migliore.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xydx$. Pongo $y = \frac{xz}{a}$, e però $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; fatte le sostituzioni, sarà $\frac{x^3dz + zxxdx}{a} = \frac{xxzzdx}{aa} + \frac{zxxdx}{a}$, e riducendo al comun denominatore, e dividendo per xx, sarà $axdz + azdx = zzdx + azdx$, cioè $axdz = zzdx$, e $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{zz}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xxdx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$, $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{x^3dz + zxxdx}{a} = \frac{zzxxdx}{aa} + xxdx$, e riducendo al comun denominatore, e dividendo per xx, sarà $axdz + azdx = zzdx + aadx$, cioè $zzdx - azdx + aadx = axdz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{zz - az + aa}$. Facendo poi l'altra sostituzione $x = \frac{yp}{a}$, e $dx = \frac{ydp + pdy}{a}$, sarà $\frac{ppyydy}{aa} = \frac{y^3dp + pyydy}{a} + \frac{y^3ppdp + p^3yydy}{a^3}$, e dividendo per yy, $appdy = aaydp + aapdy + yppdp + p^3dy$, cioè $appdy - aapdy - p^3dy = aaydp + yppdp$, e però $\frac{dy}{y} = \frac{aadp + ppdp}{app - aap - p^3}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy\sqrt{xx+yy}=ydx$. Posta $y=\frac{xz}{a}$, e $dy=\frac{xdz+zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà
$\frac{xdz+zdx}{a}\sqrt{\frac{xxzz+aaxx}{a}}=\frac{zxdx}{a}$, cioè
$\overline{xxdz+zxdx}\sqrt{aa+zz}=azxdx$, e dividendo per x,
$xdz\sqrt{aa+zz}+zdx\sqrt{aa+zz}=azdx$, o sia
$xdz\sqrt{aa+zz}=azdx-zdx\sqrt{aa+zz}$, e però
$\frac{dz\sqrt{aa+zz}}{az-z\sqrt{aa+zz}}=\frac{dx}{x}$. Se avessi posto $x=\frac{yp}{a}$, avrei avuta l'equazione $\frac{dy}{y}=\frac{-dp}{\sqrt{aa+pp}-p}$.

15. Ma alle volte i differenziali medesimi dx, e dy ascendono a dimensioni più alte, essendovi per altro nelle equazioni la condizione espressa di sopra. In questi casi la sostituzione, come prima, fatta di $\frac{xz}{a}$ in luogo della y (lasciando per ora intatta la dy) renderà ogni termine dell'equazione divisibile per la stessa potestà di x, e vi resteranno solo nell'equazione z, dx,

e dy con le coſtanti date, ed aſſunte, ma non più la x. Ora perchè in luogo pure di dy ſi deve porre $\frac{zdx + xdz}{a}$, con che di nuovo ſi introduce la lettera x, ſi faccia $\frac{xdz}{a} = dt$, ed in luogo di dy ſi ſcriva $\frac{zdx + adt}{a}$, e l'equazione averà ſolamente z, dt, dx con le coſtanti date, ed aſſunte, ma non più x. Si faccia $a \,.\, u :: dx \,.\, dt$, ed in luogo di dt ſi ponga da pertutto $\frac{udx}{a}$, ne verrà un'equazione libera dalle quantità differenziali, in cui ſi avranno le ſole u, z, e le coſtanti per una curva algebraica. Per mezzo di queſta curva ſi troveranno i valori reali della u; ſieno adunque queſti A, B, C ec. in modo, che ſia $u = A$, $u = B$, $u = C$ ec., ſaranno A, B ec. date ſolamente per z, e per le coſtanti, e ſarà $dx = \frac{adt}{A}$, $dx = \frac{adt}{B}$ ec., e perchè $dt = \frac{xdz}{a}$, ſarà $dx = \frac{xdz}{A}$, $dx = \frac{xdz}{B}$ ec.; onde finalmente $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec., ed i logaritmi della x ſaranno direttamente proporzionali agli ſpazj compreſi dalle curve, delle quali le aſſiſſe eſſendo z, le ordinate ſieno reciprocamente proporzionali ai valori di ſopra ritrovati della quantità u, e tante ſaranno le curve, che ſoddisfaranno, quanti ſaranno i valori reali fra ſe diverſi

della

della lettera u, avvertendo però, che l'aggiungere la costante nelle integrazioni delle equazioni $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec. può nuovamente diversificare le curve, che soddisfanno al quesito, e raddoppiare spesse volte il numero loro. Sarà dunque $lx =$ allo spazio di quella curva, che abbia per assissa z, e per ordinata $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ ec., cioè eguale all'integrale di $\frac{dz}{A}$, $\frac{dz}{B}$ ec.; quindi prendendo z arbitraria, il logaritmo della x sarà dato, e per conseguenza anche data la corrispondente x ordinata nella logaritmica. Data adunque la x, per mezzo dell' equazione $y = \frac{xz}{a}$, sarà anche data la y, cioè ambe le coordinate dell'equazione differenziale proposta, o sia della curva, che si cerca. A misura de' diversi valori, che si daranno alla z, saranno anche diversi i punti della stessa curva cercata.

ESEMPIO.

Applicherò la regola ad un'esempio: sia l'equazione $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$. Si faccia adunque $y = \frac{xz}{a}$, e collocato questo valore nell'equazione in luogo di y, ave-

averemo $axxdy^2 + xxzdxdy = axxdx^2$, e fatta la divisione per xx, sarà $ady^2 + zdxdy = adx^2$, onde si vede, che x, e le sue funzioni interamente spariscono, restandovi solo z, dx, dy con le loro funzioni. Ma perchè collocando in luogo di dy il suo valore $\frac{zdx + xdz}{a}$ s'introdurrebbe di nuovo nell'equazione la x, si faccia $\frac{xdz}{a} = dt$, e però $dy = \frac{zdx + adt}{a}$, e l'equazione sarà $\frac{zzdx^2 + 2azdxdt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdxdt}{a} = adx^2$, cioè $2zzdx^2 + 3azdxdt + aadt^2 = aadx^2$, in cui entrano le sole z, dx, dt con le loro funzioni. Di nuovo supposta $dt = \frac{udx}{a}$, e fatta la sostituzione, si arriva alla espressione puramente algebraica $2zz + 3zu + uu = aa$, adunque averemo il valore di u dato algebraicamente per z, e le costanti. Ma $dt = \frac{udx}{a} = \frac{xdz}{a}$, quindi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$, nella quale equazione essendo u data per z, sono separate le variabili. Descritte adunque le curve, delle quali le assisse essendo z, le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di u, averemo la x, ed indi la y, per la sostituzione fatta di $y = \frac{xz}{a}$.

16. Di questa equazione però, che ò presa per esempio, siccome d'altre ancora succede, che senza servirsi di questo metodo, si possano ridurre facilmente

al

al metodo del num. 14. Ed in fatti, se all'uno, ed all'altro membro della suddetta equazione $xxdy^2 + xydxdy = xxdx^2$ aggiungasi il quadrato $\frac{1}{4}yydx^2$, essa sarà $xxdy^2 + xydxdy + \frac{yydx^2}{4} = xxdx^2 + \frac{yydx^2}{4}$, e cavando la radice, $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx\sqrt{xx + \frac{yy}{4}}$, ed eccola ridotta al suddetto metodo generale del num. 14. O pure trasponendo il termine $xydxdy$, ed aggiungendo il quadrato $\frac{1}{4}yydy^2$, onde sia $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 = xxdx^2 - xydxdy + \frac{1}{4}yydy^2$, ed estraendo la radice, $dy\sqrt{xx + \frac{1}{4}yy} = xdx - \frac{ydy}{2}$, ridotta allo stesso metodo.

17. Le equazioni, che contengono differenziali fra loro misti, ed elevati a potestà qualunque, non solo possono costruirsi nel caso considerato al num. 15., che suppone eguale la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine; ma generalmente in qualunque modo sieno esse equazioni, purchè l'una delle due indeterminate x, o y manchi. Ciò si farà ponendo $dx = \frac{zdy}{a}$, se manca la x; o $dy = \frac{zdx}{a}$, se manca la y, essendo la z una nuova indeterminata, ed a una costante qualun-

 que

que. Imperciocchè con tale sostituzione, per esempio, di $\frac{zdy}{a}$ in luogo di dx nella proposta equazione, è manifesto, che ne nascerà un' altra, la quale sarà divisibile per la potestà della dy per modo, che si troverà composta di sole quantità finite, e però si averà la z data per la sola y, e le costanti, e la relazione della y alla z sarà espressa da un' equazione, o sia curva algebraica. Nella equazione adunque $dx = \frac{zdy}{a}$ posto in luogo di dy il valore, che si ricaverà da tale equazione algebraica, si averanno separate le variabili.

ESEMPIO I.

Sia l' equazione $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$. Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le sostituzioni in luogo di dx, e sue potestà, averemo l' equazione $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4dy^4}{a^3} + \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, e dividendo per dy^4, sarà $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$, e però $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, e $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$, adunque $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^3dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$.

Si faccia paſſaggio all'integrazioni, ſarà dunque $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - lz$, preſo il logaritmo nella logaritmica della ſottangente a. Quindi ſi ânno i valori delle due coordinate x, y della equazione differenziale propoſta per mezzo di due curve, che ânno la comune indeterminata z. Per avere la coſtruzione ſi proceda così.

Nell'aſſe QE (*Fig.* 1.) preſe le aſſiſſe, ſi deſcriva la curva DAH dell'equazione $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, e la curva RIK dell'equazione $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - lz$, ſaranno le $EH = y$, $EK = x$ le coordinate della propoſta curva differenziale, per la coſtruzione della quale, fatta CM parallela ad EK, ſi produca KM in N, onde ſia ſempre $MN = EH$; e la curva NBN ſarà la ricercata.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 dx^5 + aaydydx^4 = a^8 dy^5$. Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le ſoſtituzioni, averemo $\frac{z^5 y^3 dy^5}{a^5} + \frac{aaz^4 ydy^5}{a^4} = a^8 dy^5$, e dividendo per dy^5, $z^5 y^3 + a^3 z^4 y = a^8$; ſarà adunque la z data per la ſola y, e le coſtanti, e però nell'equazione $dx = \frac{zdy}{a}$ faranno feparate le variabili.

Per avere la curva della propofta equazione differenziale. All'affe CE, (*Fig.* 2.) fi defcriva la curva IK dell'equazione $z^5y^3 + a^3z^4y = a^8$, effendo le $CM = y$, $MK = z$; in KM prodotta fi prenda MN eguale allo fpazio $CMKI$ divifo per a, farà $MN = \int \frac{zdy}{a} = x$, ed il punto N in curva.

18. Si può rendere più generale il metodo del num. 14. col trasformare le equazioni, che non ânno la condizione delle fomme eguali degl' efponenti, in altre, che abbiano effe fomme eguali, e fiano in confeguenza foggette al canone di effo numero. Ciò in due maniere fi può fare. L' una farà di fervirfi di congrue foftituzioni, delle quali però non v' è regola alcuna, ed i foli efempj poffono farcene acquiftare l' induftria; L' altra alterando gli efponenti della propofta formola, o equazione a fine di determinare almeno, in quali cafi, e con quale foftituzione poffa riufcire di trasformarla in una equivalente, in cui fi verifichi la condizione prefcritta; così fe non fi potranno generalmente feparare le variabili, fi determineranno infiniti cafi, ne' quali la feparazione fuccede.

ESEM-

ESEMPIO I.

E quanto alla prima maniera: sia l' equazione $dx\sqrt{aaxx+az^3}=zzdz$, che non à la necessaria condizione. Faccio $z^3=ayy$, e differenziando $zzdz=\frac{2aydy}{3}$; e però, fatte le sostituzioni, $dx\sqrt{aaxx+aayy}=\frac{2aydy}{3}$, espressione, che può trattarsi col metodo del num. 14. Si può avere l' intento anche ponendo $\sqrt{aaxx+az^3}=au$, e però $aaxx+az^3=aauu$, e differenziando, $2aaxdx+3azzdz=2aaudu$, cioè $zzdz=\frac{2audu-2axdx}{3}$, e fatte le sostituzioni, $udx=\frac{2udu-2xdx}{3}$.

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $x^3dx+\frac{xxdy}{\sqrt{a+y}}=dy$. Faccio $\sqrt{a+y}=z$, e però $a+y=zz$, e $dy=2zdz$, e sostituendo, $x^3dx+2xxdz=2zdz$. Ma questa ricerca in oltre un' altra piccola riduzione; pongo per tanto $xx=u$, e però $x^4=uu$,

e

e $4x^3 dx = 2udu$, quindi surrogati i valori, sarà finalmente $\frac{udu}{z} + 2udz = 2zdz$, il che ec.

19. Passo alla seconda maniera con alterare gli esponenti, e però prendo l' equazione generale di tre termini $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, in cui i segni possono essere, comunque si vuole, positivi, o negativi. Se fosse $n + m = q + p = r + s$, sarebbe il caso del num. 14.; ma supposto, che fra le somme degli esponenti non vi sia questa eguaglianza, si ponga $y = z^t$, onde $dy = tz^{t-1} dz$, $y^s = z^{st}$, $y^q = z^{tq}$, $y^n = z^{nt}$, e fatte le debite sostituzioni nella proposta equazione, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz = 0$. Ma per la condizione del suddetto num. 14. fa di mestieri, che sia $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$; dalla prima equazione adunque $nt + m = qt + p$ caverassi il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p - m}{n - q}$, il quale sostituito nella seconda $qt + p = r + st + t - 1$, o sia $\overline{s - q + 1} \times t = p - r + 1$, ci darà $\overline{s - q + 1} \times \overline{p - m} = \overline{p - r + 1} \times \overline{n - q}$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti della proposta equazione, verificandosi la quale, sarà sempre riducibile al canone del num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p - m}{n - q}}$.

Se

Se in luogo di porre $y = z^t$ avessi posto $x = z^t$, averei trovata la medesima condizione da verificarsi negli esponenti, ma sarebbe $t = \frac{n-q}{p-m}$, e però la sostituzione da farsi $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

Può darsi, che la sostituzione $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ divenga impossibile, cioè quando sia $p = m$, o $n = q$; ma si avverta, che in questi casi le indeterminate sono separabili senza bisogno di riduzione.

Nella equazione canonica $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, se oltre la supposizione di $y = z^t$, si porrà ancora $x = u^i$, fatte tutte le sostituzioni, si troverà l'equazione $aiz^{nt} u^{im + i - 1} du + biz^{qt} u^{ip + i - 1} du + ctu^{ir} z^{st + t - 1} dz = 0$; dal paragone degli esponenti del primo, e secondo termine caverassi $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$, cioè $t = i \times \frac{\overline{p-m}}{n-q}$; dal paragone di quelli del secondo, e terzo si troverà $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$, o sia $t \times \overline{s - q + 1} = i \times \overline{p - r + 1}$, e posto in luogo di t il suo valore, $i \times \overline{p - m} \times \overline{s - q + 1} = i \times \overline{n - q} \times \overline{p - r + 1}$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti dell'equazione proposta; ma la lettera i sparisce dalla condizione, dunque è stata affatto superflua la seconda sostituzione di $x = u^i$, dal che

che s'inferisce, che tutte le formole al canone del num. 14. non possono ridursi generalmente, ma solo quelle, in cui si verifichi la condizione $\overline{p-m} \times \overline{s-q+1} = \overline{n-q} \times \overline{p-r+1}$. Istessamente si discorra dell'altre, che quanto prima maneggierò, composte di maggior numero di termini.

20. Crescendo il numero de' termini oltre il tre, cresce istessamente il numero delle condizioni, che devono avere gli esponenti delle equazioni, acciò sieno riducibili al metodo del num. 14. Prendo l'equazione canonica di quattro termini $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx + cx^r y^s dy + fx^e y^u dy$. Posta $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$, e fatte le sostituzioni, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{st+t-1} dz + ftx^e z^{tu+t-1} dz$. Deve adunque essere $nt + m = qt + p$, onde si caverà il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p-m}{n-q}$. Deve essere pure $r + st + t - 1 = qt + p$, o sia $st - qt + t = p - r + 1$, e posto il valore di t, sarà $\overline{s-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-r+1} \times \overline{n-q}$, prima condizione. Ma in oltre deve essere $e + tu + t - 1 = qt + p$, o sia $tu - qt + t = p - e + 1$, e posto il valore di t, $\overline{u-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-e+1} \times \overline{n-q}$, seconda condizione. Se adunque gli esponenti d'una proposta equazione saranno tali, che ambe le ritrovate condizioni si verifichino, sarà essa riducibile al caso del

num.

num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se le equazioni avranno cinque termini, le condizioni da verificarsi saranno tre, e così si vada discorrendo.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $ay^3xdx + byyx^{\frac{1}{2}}dx = cxdy$. Paragonata questa con la canonica, sarà $n = 3$, $m = 1$, $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $s = 0$; e perchè nel presente caso si verifica la condizione $\overline{s - q + 1} \times \overline{p - m} = \overline{p - r + 1} \times \overline{n - q}$, dandoci $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, che è una verità, sarà riducibile al metodo del num. 14. l'equazione, e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo adunque $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$, $y^3 = z^{-\frac{3}{2}}$, $yy = z^{-1}$, e fatte le sostituzioni, trovo $az^{-\frac{3}{2}}xdx + bz^{-1}x^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}cxz^{-\frac{3}{2}}dz$, ed eccola ridotta al caso del suddetto numero.

21. Ma senza rapportare le particolari equazioni alle canoniche, tornerà forse più comodo il maneggiarle sole collo stesso metodo.

ESEMPIO I.

Sia adunque l'equazione $ay^{\frac{1}{3}}x^{\frac{11}{6}}dx - \frac{bx^3dy}{y} = cxxydy$. Pongo $x = z^t$, $dx = tz^{t-1}dz$; fatte le sostituzioni, sarà $tay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{11t}{6}+t-1}dz - bz^{3t}y^{-1}dy = cz^{2t}ydy$, ma deve essere $\frac{1}{3} + \frac{11t}{6} + t - 1 = 3t - 1$, quindi ricavo $t = 2$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $2ay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{14}{3}}dz - bz^6y^{-1}dy = cz^4ydy$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $x = zz$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^{\frac{1}{2}}dx + y^{\frac{4}{3}}dx + x^{\frac{3}{4}}ydy = y^3dy$. Pongo $y = z^t$, e $dy = tz^{t-1}dz$, fatte le sostituzioni, sarà $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{4t}{3}}dx + tx^{\frac{3}{4}}z^{t+t-1}dz = tz^{3t+t-1}dz$. Ma deve essere $\frac{1}{2} = \frac{4t}{3}$, quindi ricavo $t = \frac{3}{8}$, il qual

valo-

valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{8}x^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}-1}dz = \frac{3}{8}z^{\frac{1}{2}}dz$, che appunto è il caso del numero 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = z^{\frac{3}{8}}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$. Pongo $y = z^t$, $dy = tz^{t-1}dz$; fatte le sostituzioni, sarà $az^{2t}xxdx + bdx + cz^t xdx + tfx^4z^{2t+t-1}dz = 0$. Ma deve essere $2t + 2 = t + 1$, quindi ricavo $t = -1$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $\frac{axxdx}{zz} + bdx + \frac{cxdx}{z} - \frac{fx^4dz}{z^4} = 0$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = \frac{1}{z}$.

22. Reso più generale il metodo del num. 14., passo ad un'altro, che è pure generale nel suo genere. Comprende questo tutte quelle equazioni, nelle quali nè le indeterminate, nè i loro differenziali oltrepassano la prima dimensione.

Sia per tanto l'equazione differenziale generale, che abbraccia tutti i casi possibili, ne' quali le variabili, e loro differenziali non ascendono oltre la prima dimensione $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + hdy = 0$. I coefficienti a, b ec. possono essere affermativi, o negativi, ed anche zero, conforme portano le circostanze dell'equazione particolare, che si vuole costruire. Intorno a questa equazione osservo in primo luogo, che se sarà $c = g$, essendo c, e g ambe positive, o ambe negative, l'equazione potrà integrarsi; imperciocchè sarà $\pm c \times \overline{ydx + xdy} = -axdx - bydy - fdx - hdy$, ed integrando, $\pm cxy = -\frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - hy$. Ma non essendo $c = g$, faccio $x = p + A$, $y = q + B$; le p, e q sono due nuove indeterminate, e le A, B due costanti arbitrarie da fissarsi nel progresso. Sarà dunque $dx = dp$, $dy = dq$, $xdx = pdp + Adp$, $ydy = qdq + Bdq$. Collocati questi valori nella equazione principale proposta, nascerà la seguente

$$\begin{array}{llll} apdp & + aAdp + bqdq & + bBdq + cqdp + gpdq & \\ & + cBdp & + gAdq & = 0. \\ & + fdp & + hdq & \end{array}$$

Se in questa equazione svanissero i termini secondo, e quarto, sarebbe essa il caso del num. 14., e si saprebbero separare le indeterminate, ma svanirà il secondo termine se sia $aA + CB + f = 0$, ed il quarto se sia $bB + gA + h = 0$; quindi da queste due equazioni si determinano i valori dell'assunte A, B, talchè la nuova

equa-

equazione ſia il caſo del ſuddetto num. 14. Sarà per tanto $A = -\frac{cB - f}{a}$, $B = -\frac{gA - h}{b}$, cioè $A = \frac{bf - ch}{cg - ab}$, e $B = \frac{ah - fg}{cg - ab}$. Se adunque ſi faranno le ſoſtituzioni $x = p + \frac{bf - ch}{cg - ab}$, $y = q + \frac{ah - fg}{cg - ab}$, naſcerà un' equazione da maneggiarſi col metodo del num. 14.

Se in una particolar equazione ſuccedeſſe, che foſſe $bf = ch$, ovvero $ah = fg$ di modo, che o l' una, o l'altra delle coſtanti aſſunte foſſe zero, ſarebbe indizio, poterſi ottenere l' intento con una ſola ſoſtituzione. Sia per cagion d' eſempio $\frac{bf - ch}{cg - ab} = A = 0$; in tal caſo, laſciata la quantità x colle ſue differenze, baſterà in luogo di y ſoſtituire $q + B$, e proſeguire a norma di quanto è ſtato detto di ſopra.

Che ſe foſſero nulle ambe le grandezze A, B, in sì fatta ipoteſi averebbeſi $bf = ch$, $ah = fg$, ed in conſeguenza $\frac{ch}{b} = \frac{ah}{g} = f$; dunque $cg = ab$, con che non ânno più luogo le ſoſtituzioni praticate. Ogni qual volta adunque ſia $cg = ab$, ſi faccia la ſoſtituzione $ax + cy = z$, e ſi tolga dall' equazione la y, e dy. Sarà adunque $y = \frac{z - ax}{c}$, $dy = \frac{dz - adx}{c}$; fatte le ſoſtituzioni nella

equa-

equazione principale, si avrà $axdx +$
$\frac{bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx}{cc} + zdx - axdx +$

$\frac{gxdz - agxdx}{c} + fdx + \frac{bdz - abdx}{c} = 0$, cioè elidendo

il primo termine col settimo, e riducendo al comun denominatore, $bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx + cczdx + cgxdz - acgxdx + ccfdx + cbdz - acbdx = 0$; ma poichè $cg = ab$, il secondo termine elide il sesto, ed il quarto il settimo, onde rimane $bzdz - abzdx + cczdx + ccfdx + cbdz = acbdx$, cioè $\frac{bzdz + cbdz}{abz - ccz - ccf + acb} = dx$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $axdx + 2aydx + bxdy - abdy = 0$. Faccio $x = p + A$, $y = q + B$, $dx = dp$, $dy = dq$; fatte le sostituzioni, l'equazione sarà

$$\begin{matrix} apdp + aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq = 0, \\ + 2aBdp \qquad\qquad - abdq \end{matrix}$$

L'ultimo termine svanirà, se sia $bA - ab = 0$, cioè $A = a$; svanirà il secondo, se sia $2AB + aA = 0$, cioè $B = -\frac{a}{2}$, le sostituzioni sono adunque $x = p + a$, $y = q - \frac{1}{2}a$, e l'equazione si riduce al caso del num. 14.

Sva-

Svaniti i ſuddetti termini nell' equazione, ſi può eſſa integrare per mezzo del num. 4. ſenza ſervirſi del num. 14.

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $2axdx - 2bydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$. In queſta il coefficiente $2a$ corriſponde ad a della canonica, $-2b$ alla b, $-4a$ alla c, b alla g, e ſi dà il caſo, che ſia $cg = ab$ riſpetto alle coſtanti della canonica; faccio adunque la ſoſtituzione $2ax - 4ay = z$, e però $y = \frac{2ax - z}{4a}$, $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$; quindi eliminate le y, e dy, averemo $2axdx - \frac{8aabxdx + 4abzdx + 4abxdz - 2bzdz}{16aa} - 2axdx + zdx + \frac{2abxdx - bxdz}{4a} - aadx = 0$, cioè $4abzdx - 2bzdz + 16aazdx - 16a^4dx = 0$, e però $dx = \frac{2bzdz}{4abz + 16aaz - 16a^4}$.

23. Sì le notate equazioni, come quelle ancora di grado ſuperiore, poſſono maneggiarſi per mezzo di una ſola, ma più compoſta ſoſtituzione. Ripiglio l' equazione canonica di ſopra $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$, perchè quelle di grado ſuperiore portano a calcoli troppo longhi, e ciò, che dirò intorno a queſta, ba-

basterà per far vedere, come debbano quelle trattarsi. Pongo adunque $x = Ay + p + B$, nella quale equazione sussidiaria la p è una nuova indeterminata, a cui non si prefigge costante alcuna, perchè sarebbe superflua, come si può conoscere, facendo l'operazione; le A, B sono due costanti da fissarsi nel progresso. Posta adunque $x = Ay + p + B$, sarà $dx = Ady + dp$, $xdx = AAydy + Apdy + ABdy + Aydp + pdp + Bdp$, quindi surrogati questi valori nell' equazione canonica, sarà essa trasformata nella seguente

$$\begin{array}{llllll} aAAydy & + aApdy & + aAydp & + apdp & + aABdy & + aBdp \\ \;\; bydy & + gpdy & + cydp & & + gBdy & + fdp = 0. \\ cAydy & & & & + fAdy & \\ gAydy & & & & + \;\; hdy & \end{array}$$

Conviene adunque procurare di fare svanire alcuni termini di questa equazione, fissando opportunamente le arbitrarie assunte A, B, e con ciò renderla capace del fine, che si pretende; quando però si verifichino alcune condizioni, che nascono da' valori delle A, B. Se adunque mancassero i due termini secondo, e terzo, sarebbero separate le variabili, ed integrabile l' equazione. Ma acciò sieno nulli essi due termini, bisogna, che sia $aA + g = 0$ rispetto al secondo, ed $aA + c = 0$ rispetto al terzo, ed in conseguenza $g = c$; ma posto ciò, l' equazione principale era già integrabile senza l' ajuto d' alcuna operazione.

Se

Se foſſero nulli i due ultimi termini, l'equazione ſarebbe ridotta al canone del num. 14., ma acciò eſſi ſpariſcano, convien, che ſia $aB + f = o$ riſpetto all' ultimo, cioè $B = -\frac{f}{a}$, ed $aAB + gB + fA + b = o$ riſpetto al quinto, ma ſurrogato il valore di B, ſarà $-Af - \frac{gf}{a} + Af + b = o$, cioè $ab = gf$. Non poſſono adunque ſparire gli ultimi due termini, e così per eſſi ridurſi l'equazione, ſe non nel caſo particolare, che ſi verifichi la condizione $ab = gf$.

Si procuri adunque di togliere il primo, e quinto termine, con che l' equazione ſarà ridotta al caſo de' numeri 4., e 6. Adunque ſarà riſpetto al primo termine $aAA + b + cA + gA = o$, cioè $AA + \frac{cA + gA}{a} = -\frac{b}{a}$, da cui ſi ricaverà il valore dell' aſſunta A; trovato queſto, ſcopriraſſi quello di B dal quinto termine, e ſarà $B = \frac{-fA - b}{aA + g}$, e la nuova equazione verrà ad eſſere $\overline{aA + g} \times pdy + \overline{aA + c} \times ydp = -apdp - aBdp - fdp$, che ſi coſtruirà per mezzo del num. 4., ſe i coefficienti de' due primi termini ſaranno ambi poſitivi, o negativi; e per mezzo del num. 6., ſe uno ſia poſitivo, negativo l' altro.

Ma per ottenere la bramata separazione, basterà far svanire il primo termine dall' equazione sussidiaria, ponendo $aAA + cA + gA + b = 0$, mentre posta $= 0$ la costante assunta B, che in questo caso riesce superflua, resterà l' equazione $- apdp - fdp = \overline{aA + g} \times pdy + \overline{fA + b} \times dy + \overline{aA + c} \times ydp$, nella quale si separano le variabili col metodo, che prenderò a spiegare nel numero, che siegue; o pure con l' antecedente per mezzo di una facile preparazione, cioè facendo $\overline{Aa + g} \times p + fA + b = q$, e differenziando $\overline{Aa + g} \times dp = dq$; dunque sostituendo, $- apdp - fdp = qdy + \frac{\overline{Aa + c} \times ydq}{Aa + g}$. Si dee però riflettere, che nel fare uso di queste formole bene spesso s' insinuano le quantità immaginarie nascenti dalla equazione quadratica affetta dal lato $aAA + cA + gA + b = 0$; ed esse non solo si rinvengono nelle grandezze coefficienti, ma passano talvolta negli esponenti; e perchè fin ora non si sanno maneggiare, fa d' uopo evitarle, e fra varj metodi valersi di quello, che più cade in acconcio.

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $abxxdx + bbyxdx + a^3ydx + aabydy + a^3xdy = 0$. Pongo $y = Ax + p + B$ (sostituisco in luogo della y piuttosto, che della x, perchè preveggo il calcolo più breve) adunque $dy = Adx + dp$. Fatte pertanto le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\begin{array}{llllllll} abxxdx & + bbpxdx & + bbBxdx & + a^3pdx & + a^3Bdx & + aabAxdp & + aabpdp & + aabBdp \\ bbAxxdx & & + 2a^3Axdx & + aabApdx & + 2abABdx & + a^3xdp & & = 0. \\ & & + aabAAxdx & & & & & \end{array}$$

Osservo, che se in questa equazione sparissero i termini 1, 3, 5, e 6., avrebbonsi le indeterminate separabili, perchè sarebbe

$$\begin{array}{l} bbpxdx + a^3pdx + aabpdp + aabBdp = 0, \\ \quad + aabApdx \end{array}$$

e dividendo per p,

$bbxdx + a^3dx + aabAdx = - aabdp - \frac{aabBdp}{p}$. Acciò adunque sparisca il primo, bisogna, che sia $a + bA = 0$, cioè $A = -\frac{a}{b}$, e con ciò spariscono pure il quinto, e sesto senza, che nasca condizione alcuna. Acciò sparisca il terzo, conviene, che sia $bbB + 2a^3A + aabAA = 0$, e surrogato il valore di A, $bbB - \frac{2a^4}{b} + \frac{a^4b}{bb} = 0$, cioè

$B =$

$B = \frac{a^4}{b^3}$. La fostituzione adunque farà $y = -\frac{ax}{b} + p + \frac{a^4}{b^3}$, e l'equazione, che indi nafce, $bbxdx = -aabdp - \frac{a^6 dp}{bbp}$.

24. Confifte il metodo di quefto nnmero nel difporre primieramente l'equazione propofta in maniera, che le quantità differenziali reftino accompagnate rifpettivamente dalle loro indeterminate, e fi faccia, per così dire, una dimezzata feparazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divifori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi prefa la fommatoria della differenziale così preparata compofta di due incognite, fi deve porre eguale ad una variabile affunta, e col mezzo d'una equazione aufiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta offervazione a ciò, che fuccede, deve rinnovarfi l'operazione fino a tanto, che fi confeguifca la bramata feparazione, o fi vegga effere la formola fuperiore alla noftra induftria.

A di vantaggio quefto metodo fopra degli altri, che valendofi noi delle fostituzioni, nel tempo fteffo ci infegna, quali fieno le legitime, e quali le inutili. Si offervi però, effervi delle equazioni, che non ammettono l'artificio del prefente metodo, fe prima non vengano con qualche induftria preparate. Il tutto s'intenderà meglio dagli efempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione

$$\frac{x^3 dy + y^3 dx}{\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy-xxyy}} = dz,$$

nella quale la dz è una funzione qualunque di x, ovvero di y. Metto da parte la quantità $\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy-xxyy}$, che è una affezione cumune a due termini, che compongono la prima parte dell'equazione, resterà la differenziale nuda $x^3 dy + y^3 dx$. Divido dx per x^3, dy per y^3, e però sarà $x^3 dy + y^3 dx = x^3 y^3 \times \frac{dy}{y^3} + \frac{dx}{x^3}$, onde la proposta equazione prenderà il nuovo aspetto

$$\frac{x^3 y^3}{\overline{xx+yy}\sqrt{xx+yy-xxyy}} \times \overline{\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}} = dz.$$

Ottenuta questa dimezzata separazione, in cui le flussioni dx, dy vengono combinate semplicemente colle funzioni delle loro fluenti, o sia variabili x^3, y^3, e gli altri termini costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di moltiplicatore; pongo $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = -\frac{dp}{a^3}$, e però integrando $\frac{a^3}{2xx} + \frac{a^3}{2yy} = p$, quindi ritrovato il valore, per esempio di $x = \frac{y}{\sqrt{2yyp - a^3}}$,

e

e sostituito questo in luogo di x, e $-\frac{dp}{a^3}$ in luogo di $\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}$ nell'equazione, sarà essa $-\frac{dp \times a\sqrt{a}}{2p\sqrt{2p-a^3}} = dz$, il che ec.

Raccolgasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p, come $p = \frac{a}{2qq}$, sarà $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, cioè $q = \frac{xy}{\sqrt{xx+yy}}$, con che in un batter d'occhio si scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima confuse.

Si noti di più, che colle spiegate sostituzioni spesse volte accade, che in un membro dell'equazione ci resti qualche funzione dell'una, o dell'altra variabile x, o pure y; nel qual caso se la dz fosse data per la variabile, di cui resta la funzione, una semplice divisione supplirebbe al bisogno.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a + x + y} = dz$, in cui la dz sia data in qualsivoglia modo per y. Per ridurre al metodo

todo questa equazione, prendo l' integrale del numeratore della frazione, cioè $yy + xy$, e lo pongo $= p$, quindi fatta svanire dall' equazione la x, e dx, collocandovi il suo valore, ô la nuova equazione $\frac{dp}{a + \frac{p}{y}} = dz$, che si riduce alla seguente $ydp - pdz = aydz$; e questa preparata secondo il metodo, si trova essere $p \times \overline{\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}} = adz$.

Faccio $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$, e però $lp - \int \frac{dz}{y} = lq$; pongo in oltre $\int \frac{dz}{y} = ulm$, (lm è un logaritmo costante) sarà $lp - lq = ulm$, e passando dalle quantità logaritmiche alle esponenziali, $\frac{p}{q} = m^u$. Fatte adunque nell' equazione ridotta le sostituzioni di $\frac{dq}{q}$ in luogo di $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$, e di $m^u q$ in luogo di p, sarà $m^u dq = adz$, cioè $dq = \frac{adz}{m^u}$, in cui sono separate le variabili, per essere tanto dz, quanto m^u date per y, il che ec.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l' equazione $\frac{2xxdx + xydy + yydx}{x^4 + xxyy + a^4} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$.

Prima di tentare questa formola sarà bene ridurla. Osservo, che il secondo membro è integrabile, e la sua sommatoria è $\sqrt{xx + yy}$. (num. 10.) Pongo per tanto $\sqrt{xx + yy} = z$, e fatta svanire la y, atteso che le sue funzioni montano al quadrato, collocando $zz - xx$ in luogo di yy, e $zdz - xdx$ in luogo di ydy, averemo l' equazione $\frac{2xxdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{xxzz + a^4} = dz$, cioè $\frac{xzdz + zzdx}{xxzz + a^4} = dz$, la quale preparata al solito sarà $\frac{z}{xxzz + a^4} \times xdz + zdx = dz$. Faccio $xdz + zdx = dp$, ed integrando $xz = p$, e fatta svanire la x, averemo $\frac{zdp}{pp + aa} = dz$, e finalmente $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$, il che ec.

ESEMPIO IV.

Sia l' equazione ultima dell' antecedente numero $-apdp - fdp = \overline{aA+g} \times pdy + \overline{fA+b} \times dy + \overline{aA+c} \times ydp$, che ô promesso di costruire. Preparata questa secondo il metodo, e fatto per brevità $aA+g=e$, $fA+b=m$, $aA+c=n$, si riduce ad essere

$-\frac{apdp - fdp}{ep+m} = y \times \overline{\frac{dy}{y} + \frac{ndp}{ep+m}}$. Pongo adunque $\frac{dy}{y} + \frac{ndp}{ep+m} = \frac{dq}{q}$, ed integrando $ly + \frac{n}{e}\, l\overline{p+\frac{m}{e}} = lq$, e però

$y = \frac{q}{\overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}}}$, e fatta svanire la y, averassi

$-\frac{apdy - fdp}{ep+m} = \frac{dq}{\overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}}}$, cioè $-\frac{apdp - fdp}{ep+m} \times \overline{p+\frac{m}{e}}^{\frac{n}{e}} = dq$,

il che ec.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione già preparata
$y^m \times \overline{xdx + ydy} = x^n \times \overline{ydx - xdy}$, che scrivo così $\frac{y^{m-2}}{x^n} \times \overline{xdx + ydy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, a fine di rendere integrabile il secondo membro. In questa farò uso d'una doppia sostituzione, e però pongo $xdx + ydy = pdp$, ed integrando, $xx + yy = pp$; pongo in oltre $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$, ed integrando $\frac{x}{y} = q$. Fatte le sostituzioni, averassi $\frac{y^{m-2}}{x^n} \times pdp = dq$; ma $yy = pp - xx$, ed $xx = qqyy$, adunque sarà $yy = pp - qqyy$, cioè $yy = \frac{pp}{aa + qq}$, ed $y^{m-2} = \frac{p^{m-2}}{\overline{aa+qq}^{\frac{m-2}{2}}}$, $x^n = \frac{q^n p^n}{\overline{aa+qq}^{\frac{n}{2}}}$; sostituiti per tanto questi valori di y^{m-2}, e di x^n, averassi $p^{m-n-1} dp = q^n dq \times \overline{aa+qq}^{\frac{m-n-2}{2}}$, il che ec.

ESEM-

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{\overline{x-y}^{\,2}} = dz$, in cui dz è data in qualſivoglia modo per x, o per y. Oſſervo, che il numeratore del primo membro $2xdy - 2ydx$ è integrabile quando ſi divida per xx, ed il ſuo integrale è $\frac{2y}{x}$, e però diſpongo l'equazione così

$\frac{1}{\overline{x-y}^{\,2}} \times \overline{\frac{2xdy - 2ydx}{xx}} = \frac{dz}{xx}$; pongo $\frac{2y}{x} = p$, onde ſarà $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$, e l'equazione ſi muterà nella ſeguente $\frac{dp}{\overline{x-y}^{\,2}} = \frac{dz}{xx}$; ma $2y = px$, ed $yy = \frac{ppxx}{4}$, dunque fatte le ſoſtituzioni, $\frac{dp}{xx - pxx + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx}$, e moltiplicando per xx, $\frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz$, in cui ſono ſeparate le variabili. Paſſo avanti all'integrazione, e però sarà $\frac{2}{1-\frac{p}{2}}+c=\int dz$; e posto il valore di p,

$\frac{2}{1-\frac{y}{x}}+c=\int dz$, e riducendo al comun denominatore, $\frac{2x+cx-cy}{x-y}=\int dz$. Posta la costante $c=0$, avremo $\frac{2x}{x-y}=\int dz$; posta $c=-2$, sarà $\frac{2y}{x-y}=\int dz$, altro integrale della proposta formola diverso dal primo; posta finalmente $c=-1$, nascerà il terzo integrale $\frac{x+y}{x-y}=\int dz$.

25. Il metodo, che ora prendo a spiegare, quantunque molto limitato, è però di grande uso ne' casi particolari. Con questo si separano le variabili nell'equazione canonica $ady=ypdx+by^n qdx$, in cui le quantità p, q s'intendono date in qualunque modo per x; le a, b sono costanti, i segni possono essere positivi, e negativi a piacere, e l' esponente n può essere intiero, rotto, positivo, negativo, ed anco zero. Sia adunque l' equazione $ady=ypdx+by^n qdx$. Si faccia $y=zu$, (z, ed u sono due nuove variabili) e differenziando, $dy=zdu+udz$, e sostituendo in luogo di dy, di y, e di y^n i valori $zdu+udz$, uz, $u^n z^n$, averassi l' equazione $azdu+audz=uzpdx+bz^n u^n qdx$, nella quale se due termini sparissero,

si

si separerebbero le indeterminate. Per far ciò si finga un' equazione tra due termini $audz = uzpdx$, dunque $\frac{adz}{z} = pdx$, ed integrando, $alz = \int pdx$, e passando da' logaritmi alle quantità esponenziali, $z^a = m^{\int pdx}$, o sia $z = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, supposta l'unità $= lm$. Quest' ultima equazione mi mostra il valore di z, e m' insegna, che per ridurre l' equazione proposta a due soli termini, e fare, che gl' altri due si distruggano, si doveva in vece di $y = zu$ porre $y = um^{\frac{\int pdx}{a}}$, cioè $\frac{ly}{u} = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, o sia $ly - lu = \int \frac{pdx}{a}$, e differenziando, $\frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} = pdx$, e però $ady = ypdx + \frac{aydu}{u}$. Sostituisco adunque nell' equazione canonica $ady = ypdx + by^n qdx$ in luogo di dy il valore ritrovato, e sarà $ypdx + \frac{aydu}{u} = ypdx + by^n qdx$, cioè $\frac{aydu}{u} = by^n qdx$, e però $\frac{adu}{u} = by^{n-1} qdx$; ma $y = zu$, ed $y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1}$, onde finalmente $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$, equazione in cui sono separate le variabili, per essersi trovata la z data per x. Quando siasi giunto all' equazione $alz = \int pdx$, egli è certo, che se p data per

x

x farà tale, che l'integrale $\int pdx$ dipenda dalla quadratura dell'iperbola, o sia da' logaritmi, e la quantità a sia un numero qualunque, farà algebraica la relazione di z ad x, ed in ogni altro caso trascendente.

E qui si osservi, acciò una data equazione sia il caso della formola canonica, essere necessario, che si adempiano le seguenti condizioni, cioè che la differenza dy possa restar da se sola, o al più moltiplicata per una costante in una parte dell'equazione; che nell'altra parte dell'equazione il primo termine contenga la differenza dx moltiplicata per qual si sia funzione di x espressa per p, e per l'indeterminata y, che nell'altro termine la quantità qdx data per x venga moltiplicata per una dignità di y; in una parola, fatta la divisione per y, si richiede, che da una parte dell'equazione resti la flussione logaritmica $\frac{ady}{y}$, e nell'altra il primo termine sia libero dall'indeterminata y, ed il secondo moltiplicato per la dignità y^{n-1}. Mancando l'uno de' premessi requisiti, non â più luogo questo metodo, come non lo avrebbe nelle seguenti equazioni $ady = yypdx + by^n qdx$, $ady = ypdx + \overline{ayy + y^3} \times qdx$.

Alcune formole però si riducono con tutta facilità al canone col solo prepararle. Per esempio sia l'equazione $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$; fatta riflessione, che la la quantità $pdx + bqdx$ viene moltiplicata per y, e che il binomio $p + bq$ è dato per x di maniera, che si può in sua vece surrogare la quantità r data ugualmente per x, l'espressione si muterà nella seguente $ady = yrdx + yyqdx$, in cui trova luogo il metodo spiegato, e ciò basterà per indicare il modo d'operare in simili casi.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$. Pongo $y = zu$, e però $ady = azdu + audz$; e fatte le debite sostituzioni, averemo $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$. Sia $audz = \frac{fuzdx}{x}$, cioè $\frac{adz}{z} = \frac{fdx}{x}$, integrando sarà $a\,l\,z = f\,l\,x$, e però $z^a = x^f$.

Se le costanti a, f saranno numeri razionali interi, rotti, affermativi, o negativi, la z sarà data algebraicamente per x. Sia per esempio $a = 1$, $f = 2$, così che sia $z = xx$. Dunque dileguandosi i termini $audz$, $\frac{fuzdx}{x}$, resteranno i due $azdu = zzuudx$, ma $z = xx$, dunque sarà $\frac{adu}{uu} = xxdx$, equazione, in cui sono separate le variabili.

Passan-

Passando all'integrazione, sarà $-\frac{a}{u}+c=\frac{x^3}{3}$, ma $u=\frac{y}{z}=\frac{y}{xx}$, adunque $-\frac{axx}{y}+c=\frac{x^3}{3}$, cioè $3cy-3axx=x^3y$, che è l'equazione algebraica nascosta sotto la differenziale proposta.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $dy=\frac{aydx}{xx-aa}+\frac{y^3dx}{x^3}$. Faccio, come sopra, $y=zu$, e $dy=zdu+udz$, e però fatte le sostituzioni, averassi l'equazione $zdu+udz=\frac{azudx}{xx-aa}+\frac{z^3u^3dx}{x^3}$, e supposto $udz=\frac{azudx}{xx-aa}$, cioè $\frac{dz}{z}=\frac{adx}{xx-aa}$, cioè $z=m^{\int\frac{adx}{xx-aa}}$, averassi l'equazione $zdu=\frac{z^3u^3dx}{x^3}$, o sia $\frac{du}{u^3}=\frac{zzdx}{x^3}$, in cui sono separate le variabili, essendo z data per x. Ma si osservi, che la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ si può ridurre ad una flussione logaritmica ponendo $x=\frac{\overline{a+n}\times a}{a-n}$, poichè fatte le sostituzioni debite, sarà

adx

$\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{2n}$, quindi $\frac{dz}{z} = \frac{dn}{2n}$, e però $zz = n = a \times \frac{\overline{x-a}}{x+a}$, e posto questo valore in luogo di zz nell' equazione finale, averassi $\frac{du}{u^3} = \frac{axdx - aadx}{x^4 + ax^3}$, il che ec.

Senza fare la sostituzione di $x = \frac{\overline{a+n} \times a}{a-n}$, si può ridurre la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ ad una flussione logaritmica per mezzo del num. 21. del Libro III., ed averassi $\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2 \times \overline{x+a}} + \frac{dx}{2 \times \overline{x-a}} = \frac{dz}{z}$, ed in conseguenza $zz = \frac{x-a}{x+a}$.

ESEMPIO III.

Sia l' equazione $dy = -\frac{ydx}{x} + y^m dx$. Faccio $y = zu$, $dy = zdu + udz$; adunque sostituendo, $zdu + udz = -\frac{uzdx}{x} + u^m z^m dx$. Suppongasi $udz = -\frac{uzdx}{x}$, o sia $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, ed integrando, $z = \frac{a}{x}$; avrassi l' equazione

 $zdu =$

$zdu = z^m u^m dx$, cioè $\frac{du}{u^m} = z^{m-1}dx$, o sia $\frac{du}{u^m} = \frac{a^{m-1}dx}{x^{m-1}}$.

ESEMPIO IV.

Qualche volta è necessaria una doppia operazione, come in certe equazioni, che ânno più di tre termini. Sia pertanto l'equazione $xdy + ydx = adu + xdu$, e s'intenda u data in qualunque modo per la y. Dispongo l'equazione nella seguente maniera $adu + xdu - xdy = ydx$, o pure $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$; pongo $x = pq$, e $dx = pdq + qdp$, onde fatte le sostituzioni, sarà $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$. Chi volesse ridurre con una sola operazione la formola, bisognerebbe porre $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$, cioè $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, con che si scopre la q data per y; ma più elegantemente si opererà nel seguente modo. Facciasi $-\frac{pqdy}{y} = pdq$, dunque $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, ed integrando, $\frac{a}{y} = q$; presi pertanto gli altri termini dell'equazione, $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$, ed in vece di q posto il valore $\frac{a}{y}$,

sarà

farà $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$, cioè $du + \frac{pdu}{y} = dp$. Sia $p = mn$, dunque $dp = mdn + ndm$, e fatta la fostituzione, $du + \frac{mndu}{y} = mdn + ndm$; si supponga $\frac{mndu}{y} = mdn$, cioè $\frac{du}{y} = \frac{dn}{n}$, farà dunque n data per y, e nell'equazione restante, dopo essere svaniti i termini $\frac{mndu}{y}$, mdn, cioè nell'equazione $du = ndm$ faranno separate le variabili, e farà $\frac{du}{n} = dm$.

26. In altra maniera ancora si possono separare le variabili nell'equazione canonica $dy = pydx + qy^n dx$. Si faccia $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$, $dx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times pz}$; fatte le fostituzioni, farà $dy = \frac{ydz}{\overline{1-n} \times z} + \frac{qy^n dz}{\overline{1-n} \times pz}$, cioè $dy = \frac{pydz + qy^n dz}{\overline{1-n} \times pz}$, o sia $\overline{1-n} \times pzdy = pydz + qy^n dz$, e però $\frac{\overline{1-n} \times zdy - ydz}{y^n} = \frac{qdz}{p}$, dividendo per py^n, e finalmente dividendo per zz, farà

$$\frac{\overline{1-n} \times zy^{-n}dy - y^{1-n}dz}{zz} = \frac{qdz}{pzz}$$, ed integrando,

$\frac{y^{1-n}}{z} = \int \frac{qdz}{pzz}$, cioè $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$; e poichè le p, e q si suppongono date per x, e la z pure, per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$, è data per x, almeno trascendentemente, saranno separate le variabili.

Ripresa adunque l'equazione dell' esempio primo $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$, vale a dire $dy = \frac{fydx}{ax} + \frac{yydx}{a}$, sarà $p = \frac{f}{ax}$, $q = \frac{1}{a}$, $n = 2$; quindi surrogati questi valori nell'equazione finale $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$, sarà essa $\frac{1}{y} = z \int \frac{xdz}{fzz}$, e la sostituzione $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$ sarà $\frac{fdx}{ax} = -\frac{dz}{z}$, e posta $f = 2$, $a = 1$, avremo $\frac{2dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, cioè $z = \frac{1}{xx}$, e però $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \int - xxdx$; ed integrando, $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \times -\frac{1}{3} x^3 + c$, cioè $3cy - 3xx = x^3 y$, come prima. Isteßamente si discorra degli altri esempj.

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $ax^4ydy - bx^4ydy = ayyx^3dx - byyx^3dx + a^6dx - x^6dx$, la quale divisa per $ax^4y - bx^4y$, si trova essere $dy = \frac{ydx}{x} + \frac{a^6dx - x^6dx}{ax^4y - bx^4y}$, che è il caso dell'equazione canonica. Sarà adunque $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{a^6 - x^6}{ax^4 - bx^4}$, $n = -1$, e per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{\overline{1-n} \times z}$, sarà $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z}$, quindi $z = xx$; onde posti questi valori nell'equazione finale canonica $y^{1-n} = z\int\frac{qdz}{pzz}$, averemo $yy = xx\int\frac{\overline{a^6 - x^6} \times 2xdx}{\overline{ax^4 - bx^4} \times x^3}$, in cui sono separate le variabili.

27. Se l'equazione canonica fosse $y^{n-1}dy = pdx + qy^ndx$, essendo parimente le p, e q date in qualunque modo per x, si separano le indeterminate, ponendo $qdx = \frac{dz}{nz}$, e $dx = \frac{dz}{nqz}$; imperciocchè fatte le sostituzioni,

sarà

ſarà $y^{n-1}\,dy = \frac{pdz}{nqz} + \frac{y^n dz}{nz}$, cioè $\frac{nzy^{n-1}\,dy - y^n dz}{z} = \frac{pdz}{qz}$, e dividendo per z, $\frac{nzy^{n-1}\,dy - y^n dz}{zz} = \frac{pdz}{qzz}$, ed integrando, $\frac{y^n}{z} = \int \frac{pdz}{qzz}$, cioè $y^n = z \int \frac{pdz}{qzz}$, equazione, in cui ſono ſeparate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2aaxydy = aayydx + 2bx^3dx$, cioè $ydy = \frac{bxxdx}{aa} + \frac{yydx}{2x}$. Sarà $n = 2$, $p = \frac{bxx}{aa}$, $q = \frac{1}{2x}$, e però averemo $\frac{yy}{z} = \int \frac{2bx^3\,dz}{aazz}$; ma $qdx = \frac{dx}{2x} = \frac{dz}{2z}$, ed $x = z$, adunque ſarà $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bxdx}{aa}$, ed integrando, $\frac{yy}{x} = \frac{bxx}{aa} \pm c$, curva algebraica.

Potevaſi anche coſtruire la formola generale $y^{n-1}\,dy = pdx + qy^n dx$, ed in conſeguenza la particolare dell'eſempio per mezzo del metodo del num. 24.

28. Aggiungo una rifleſſione prima di finire queſto Capo, cioè che tal volta ſi ſviluppano le indeterminate miſte, e confuſe colle quantità differenziali, quando

do ci venga permesso di modificare le grandezze coefficienti, e ciò spezialmente succede quando gli esponenti si formano dalli coefficienti, così portando il giro della riduzione. 'A principalmente luogo questo artifizio ne' Problemi Fisico-Matematici, ne' quali accoppiandosi grandezze di genere affatto diverso, siamo in maggior libertà di servirsi di quelle quantità costanti, che meglio vengono al proposito.

Per un esempio mi propongo l'equazione $x^m dx + \overline{by + yy} \times \frac{cdx}{x} = ydy$, la quale preparata giusta il metodo del num. 24. sarà $x^m dx + \frac{bcydx}{x} = yy \times \overline{\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x}}$. Faccio adunque $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed ô il valore di $y = px^c$, ed $yy = ppx^{2c}$. Questi valori opportunamente sostituiti mi danno l'equazione $x^m dx + bcpx^{c-1} dx = x^{2c} pdp$, e dividendo per x^{2c}, sarà $x^{m-2c} dx + bcpx^{-c-1} dx = pdp$. Egli è evidente, che data l'eguaglianza fra gli esponenti della indeterminata x, cioè fra $m - 2c$, e $-c-1$, le incognite sono separate, avendosi solamente a dividere l'omogeneo di comparazione pdp per il binomio $1 + bcp$. Ora posto $m - 2c = -c - 1$, ne segue, che sia $m + 1 = c$, quindi esposta la costante c per $m + 1$, abbiamo l'intento. Se la c fa figura di unità, il che non ci è vietato di supporre, sarà $m = 0$; e se $c = 2$, sarà farà $m = 1$, e così vadasi discorrendo.

L'artifizio spiegato si applichi a tutte le altre equazioni di simil genere, per esempio alla seguente $x^m dx + \frac{cby^n dx}{x} + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy$, posto però $t = r - 1$, ovvero $= n - 1$, onde si possa abbreviare la formola usando i logaritmi.

CAPO

C A P O III.

Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate per mezzo di varie sostituzioni.

29. Si separeranno sempre le indeterminate nell' equazione $\overline{x^n dx \pm ay^n dy} \times p = \overline{xdy - ydx} \times q$, nella quale le p, e q sono date promiscuamente per x, ed y in qualunque modo, purchè algebraicamente, quando però in ogni termine della quantità p la somma degli esponenti di x, ed y sia la stessa, e così la stessa sia in ogni termine della quantità q; non richiedendosi però, che sia la medesima in p, ed in q. Le sostituzioni da farsi sono $y = tz^{\frac{2}{n+1}}$, $x = t \times \overline{a^3 \mp azz}^{\frac{1}{n+1}}$. Surrogati i rispettivi valori in luogo di x, dx, y, dy, e fatte le debite operazioni, arriverassi dopo lunghissimo calcolo alla seguente equazione

$$t^{n-2} dt = \frac{\frac{2}{n+1} z^{\frac{1-n}{n+1}} dz}{\overline{a^3 \mp azz}^{\frac{n}{n+1}}} \times \frac{q}{p}.$$

Ma poichè si sa, che in ciascun termine di p la somma degli esponenti di x, ed y è eguale, siccome pure in ciascun termine di q, fatte in essi ancora le sostituzioni de' valori dati per t, e per z, in ciascun termine di p, averà t la medesima potestà, siccome pure in ciascun termine di q una medesima potestà, vale a dire, che sarà l'omogeneo di comparazione moltiplicato per una potestà positiva, o negativa di t, cioè sarà per essa potestà diviso, o moltiplicato il primo membro, e però separate le variabili.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\overline{xdx + aydy}\sqrt{y} = \overline{xdy - ydx}\sqrt{a}$; sarà $n = 1$, $p = \sqrt{y}$; $q = \sqrt{a}$, e però $\frac{dt}{t} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3} - azz\sqrt{y}}$,

ma $y = tz^{\frac{2}{n+1}} = tz$; adunque sarà $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$.

Nella stessa equazione si separano le indeterminate, quando anche sia negativo l'esponente n, cioè quando sia l'equazione $\overline{x^{-n} dx \pm ay^{-n} dy} \times p = \overline{xdy - ydx} \times q$, e le sostituzioni sono $y = tz^{\frac{2}{1-n}}$, $x = t \times \overline{a^3 \mp azz}^{\frac{1}{1-n}}$;

le

le quali ci danno l'equazione

$$t^{-n-2}\,dt = \frac{\frac{2}{1-n}\, z^{\frac{1+n}{1-n}}\, dz}{\overline{a^2 \mp azz}^{\frac{-n}{1-n}}} \times \frac{q}{p}\,,$$ la stessa di quella di

sopra, mutati i segni alla n.

E poichè l'equazione è anche esprimibile così: $\overline{y^n dx \pm a x^n dy} \times \frac{p}{x^n y^n} = \overline{xdy - ydx} \times q$, ne viene, che questa pure per la stessa sostituzione è costruibile.

30. Sia più generalmente l'equazione

$$\overline{x^n dx \pm a y^{\frac{-n-1-c}{c}}\, dy} \times p = \overline{xdy + cydx} \times q.$$ Si separano sempre le variabili, fatte le sostituzioni di $y = t^s z^{\frac{r}{n+1}}$,

$x = t^{\frac{-s}{c}} \times \overline{a \pm acz}^{\frac{-r}{c}\,\frac{1}{n+1}}$, (s, ed r sono numeri a piacere) supposta però la condizione, che le quantità p, q sieno date algebraicamente, e in modo tale, che in ciascun termine della quantità p l'esponente della y preso tante volte, quanto è il numero c, superi, o sia superato dall'esponente della x col medesimo eccesso, e così in ciascun termine della quantità q, non importando poi, che l'eccesso in p sia lo stesso, che in q.

Così, per esempio, essendo $c = 3$, sia $p = byyx^4 + fy^9 x^{25}$ ec., e q sia $= gy^{\frac{1}{2}} x^3 - by^{10} x^{\frac{63}{2}}$ ec. E' facile a vedere, che la c non può essere zero.

Fatte le debite sostituzioni in luogo della x, e della y nell'equazione proposta, averemo la seguente equazione

$$-\frac{s}{c}\, t^{\frac{-sn-c-cs}{c}}\, dt = \frac{\frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-n-1}{n+1}}\, dz \times \frac{q}{p}}{\overline{a \pm acz^{-\frac{r}{c}}}^{\,\frac{n}{n+1}}}.$$

ESEMPIO.

Sia $\overline{xdx + ay^{-3} dy} \times \frac{1}{y} = \overline{xdy + ydx} \times x$. E sia $s = 1$, $r = 2$, sarà $n = 1$, $c = 1$, $p = \frac{1}{y}$, $q = x$, e fatte le sostituzioni nell'ultima equazione di sopra ritrovata, averemo $-t^{-3} dt = \frac{dz \times xy}{\overline{a + az^{-2}}^{\frac{3}{2}}}$. Ma per le sostituzioni fatte, $x = t^{-1} \times \overline{a + az^{-2}}^{\frac{1}{2}}$, ed $y = tz$, dunque $xy = z \times \overline{a + az^{-2}}^{\frac{1}{2}}$, onde averemo $-\frac{dt}{t^3} = zdz$, il che ec.

31.

31. Ma più generalmente ancora sia l'equazione $x^n dx \pm ay^{\frac{-nf-c-f}{c}} dy \times p = \overline{fxdy + cydx} \times q$, la quale comprende come casi particolari le due canoniche dei numeri antecedenti, cioè quella del num. 30., quando sia $f=1$; e quella del num. 29., quando sia $f=1$, $c=-1$.

Si separano le indeterminate per mezzo della sostituzione $y = t^{\frac{s}{f}} z^{\frac{r}{f \times \overline{n+1}}}$, ed $x = t^{-\frac{s}{c}} \times \overline{a \pm \frac{acz}{f}}^{\,-\frac{r}{c} \cdot \frac{1}{n+1}}$, essendovi però la condizione circa le quantità p, e q, che in esse l'esponente della y moltiplicato per c superi, o sia superato dall'esponente della x moltiplicato per f col medesimo eccesso in ciascun termine. Le stesse quantità p, q possono anche essere frazioni, o miste di frazioni, ed interi razionali, o irrazionali, comunque siansi; e saranno sempre nelle equazioni separabili le indeterminate, purchè le p, e q sieno in tal modo date per x, ed y, che fatte le sostituzioni assegnate, nascano in luogo loro quantità tali, che sieno il prodotto di due, una delle quali contenga la z, e non la t; l'altra la t, e non la z.

Fatte le dette sostituzioni, averemo la formola

$$-\frac{s}{c}\, t^{\frac{-fc-fsn-sc}{cf}} dt = \frac{\frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-fn-f}{fn+f}} dz \times \frac{q}{p}}{\overline{a \pm \frac{acz}{f}}^{\,-\frac{r}{c} \cdot \frac{n}{n+1}}}.$$

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia $\overline{xxdx + ay^2 dy} \times y = - \overline{3xdy + ydx} \times ax$. E sia, come sopra, $s = 1$, $r = 2$, sarà $f = -3$, $c = 1$, $n = 2$, $q = ax$, $p = y$, e fatte le sostituzioni nell'ultima formola ritrovata di sopra, avremo

$$-t^{-\frac{8}{3}} dt = \frac{\frac{2}{3} z^{-\frac{11}{9}} dz \times \frac{ax}{y}}{\overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{2}{3}}}.\ \text{Ma}\ y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{9}},$$

$x = t^{-1} \times \overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{1}{3}}$, dunque sarà $-\frac{dt}{tt} = \frac{2adz}{3z \times \overline{a - \frac{az^{-2}}{3}}^{\frac{1}{3}}}$, il che ec.

ESEMPIO II.

Sia $\overline{x^{\frac{1}{2}} dx + ay^{-2} dy} \times \overline{ay^{2}x + yyx^{\frac{13}{4}}} = \overline{2xdy + 3ydx} \times \overline{y^{\frac{1}{3}}x - yxx}$; e sia $s = 1$, $r = 1$, sarà $c = 3$,

$c = 3$, $f = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $p = ay^{\frac{1}{2}}x + yyx^{\frac{13}{4}}$, $q = y^{\frac{1}{3}}x - yxx$, e fatte le sostituzioni, sarà

$$-\frac{\frac{1}{3}dt}{t^{\frac{19}{12}}} = \frac{\frac{2}{3}z^{-\frac{5}{9}}dz \times \left(\left(a+\frac{3az}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}dz \times \left(a+\frac{3az}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}}{az^{\frac{1}{6}} \times \left(\left(a+\frac{3az}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \times \left(\left(a+\frac{3az}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{13}{6}}},$$

in cui sono separate le variabili, il che ec.

32. Nelle equazioni 1. $pxy^{n-1}dy = py^n dx + qdx$

2. $pxy^{n-1}dy = -py^n dx + qdx$

3. $apxy^{n-1}dy = bpy^n dx + qdx$

4. $apxy^{n-1}dy = -bpy^n dx + qdx$

essendo le p, e q date in qualunque maniera per x, si separano le indeterminate, ponendo rispetto alla prima $y = xz$; rispetto alla seconda $y = \frac{z}{x}$; rispetto alla terza $y = x^{\frac{b}{a}}z$; rispetto alla quarta $y = x^{-\frac{b}{a}}z$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2bbxyydy - 2x^3yydy = bx^4dx - 3bby^3dx + 3xxy^3dx$, che scrivo così: $\overline{bb - xx} \times 2xyydy = bx^4dx + \overline{bb - xx} \times -3y^3dx$. Riferita questa all'ultima delle

delle quattro canoniche, sarà $p = bb - xx$, $a = 2$, $n = 3$, $b = 3$, $q = bx^4$. Adunque si dovrà porre $y = \frac{z}{x^{\frac{3}{2}}}$, $dy =$

$\frac{x^{\frac{3}{2}} dz - \frac{3}{2} z x^{\frac{1}{2}} dx}{x^3}$, $yy = \frac{zz}{x^3}$, $y^3 = \frac{z^3}{x^{\frac{9}{2}}}$, e fatte le sostituzioni, averemo $\overline{2bbx - 2x^3} \times \frac{\overline{x^{\frac{3}{2}} zzdz - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} z^3 dx}}{x^6} =$

$bx^4 dx + \overline{3bb - 3xx} \times - \frac{z^3 dx}{x^{\frac{9}{2}}}$, cioè

$\overline{2bb - 2xx} \times \overline{xzzdz - \frac{3}{2} z^3 dx} = bx^{\frac{17}{2}} dx + \overline{3bb - 3xx} \times$ $- z^3 dx$, e facendo le attuali moltipliche, sarà

$2bbxzzdz - 2x^3 zzdz = bx^{\frac{17}{2}} dx$, cioè

$$zzdz = \frac{bx^{\frac{17}{2}} dx}{2bbx - 2x^3}.$$

33. Sia l'equazione $axdy + bydx + cy^n x^{m-1} dx + fx^m y^{n-1} dy = 0$. In questa generalmente si separano le indeterminate, ponendo $x = u^{n-1} z^{n-1}$, ed $y = z^{1-m}$, poichè fatte le dovute operazioni, si arriva all'equazione

ne $\overline{1-m} \times \overline{adz+fu^{mn-m-n+1}dz} + \overline{n-1} \times \overline{bdz+cu^{mn-m-n+1}dz} =$
$\overline{n-1} \times \overline{-bzu^{-1}du - czu^{mn-m-n}du}$, cioè $\frac{dz}{z} =$

$$\frac{\overline{n-1} \times \overline{-bu^{-1}du - cu^{mn-m-n}du}}{\overline{1-m} \times \overline{a+fu^{mn-m-n+1}} + \overline{n-1} \times \overline{b+cu^{mn-m-n+1}}}.$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione $a^3xdy - b^3ydx = cyyxdx - fxxydy$. Sarà dunque $n = 2$, $m = 2$, quindi pongo $x = \frac{uz}{a}$, ed $y = \frac{aa}{z}$, cioè $x = \frac{au}{y}$, e però $dx = \frac{aydu - audy}{yy}$, onde fatte le dovute sostituzioni, averemo
$\frac{a^4udy}{y} - b^3 \times \overline{\frac{aydu - audy}{y}} = \frac{caayudu - caauudy}{y} - \frac{faauudy}{y}$,
cioè $a^4udy + ab^3udy + aacuudy + faauudy = ab^3ydu + aacyudu$,
e però $\frac{dy}{y} = \frac{ab^3du + aacudu}{a^4u + ab^3u + aacuu + aafuu}$.

34. Sia l'equazione $\frac{ydx}{\overline{bx^{\frac{1}{m}} + ay^nx^r}^m} = dy$; e più generalmente $\frac{x^{mt-1}ydx}{\overline{bx^t + ay^nx^r}^m} = dy$. Si separano le indetermi-

nate ponendo $\overline{bx^{t} + ay^{n}x^{r}}^{\,m} = zx^{mt}$, quindi

$$y = \frac{\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$$, e però $dy =$

$$\frac{\frac{1}{n}\times\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1-n}{n}}\times\overline{\frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + \overline{t-r}\times z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx + \overline{t-r}\times -bx^{t-r-1}dx}}{a^{\frac{1}{n}}} =$$

$$\frac{x^{-1}dx\times\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}z}$$, posto nell'equazione generale proposta il valore di y, ed y^{n}, quindi dividendo per $\frac{\overline{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$, sarà

$$\frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{m}x^{t-r}z^{\frac{1}{m}-1}dz + \overline{t-r}\times z^{\frac{1}{m}}x^{t-r-1}dx + \overline{t-r}\times -bx^{t-r-1}dx}{z^{\frac{1}{m}}x^{t-r} - bx^{t-r}} = \frac{x^{-1}dx}{z}$$,

cioè

cioè $\frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} dz + \overline{t-r} \times z^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx + \overline{t-r} \times -bzx^{-1} dx =$

$nz^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx - nbx^{-1} dx$, e però

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} dz}{mnz^{\frac{2}{m}} + \overline{mr-mt} \times z^{\frac{1}{m}+1} + \overline{mr-mt} \times -bz - mnb} = \frac{dx}{x}.$$

Se vi foſſero termini con ſegni negativi, ſi proceda nello ſteſſo modo, e nell'equazione finale non vi ſarà altra differenza, che ne' ſegni ſteſſi.

35. Anche preſa l'equazione più univerſale così $\frac{y^n dx}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^m} = c x^{\frac{nt - mnt - t + r + n - nr}{n}} dy$ ſi ſeparano le indeterminate colla ſteſſa ſoſtituzione.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $\frac{aaydx}{\sqrt{bbxx - a^3 y}} = bdy$. Pongo $\sqrt{bbxx - a^3 y} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - zzxx}{a^3}$, e $dy = \frac{2bbxdx - 2zzxdx - 2xxzdz}{a^3}$, e fatte le ſoſtituzio-

ni,

ni, $\frac{aadx}{xz} \times \frac{bbxx - zzxx}{a^3} = \frac{2b^3xdx - 2bzzxdx - 2bxxzdz}{a^3}$,

cioè $aabbxdx - aazzxdx = 2b^3zxdx - 2bz^3xdx - 2bxxzzdz$, o sia $2bxxzzdz = 2b^3zxdx - 2bz^3xdx + aazzxdx - aabbxdx$, e però

$$\frac{2bzzdz}{2b^3z - 2bz^3 + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}.$$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{xydx}{\sqrt{-bbx^4 + a^3xyy}} = \frac{dy}{b}$. Pongo $\sqrt{-bbx^4 + a^3xyy} = zxx$, e però $y = \sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}$, e $dy =$

$$\frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}}.$$ Fatte pertanto le sostituzioni, averassi $\frac{xdx}{zxx}\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}} =$

$$\frac{x^3zdz + \frac{3}{2}zzxxdx + \frac{3}{2}bbxxdx}{a^3b\sqrt{\frac{zzx^3 + bbx^3}{a^3}}},$$

cioè

cioè $bzzxxdx + b^3 xxdz = x^3 zzdz + \frac{3}{2} z^3 xxdx + \frac{3}{2} bbzxxdx$,

o sia $bzzxxdx + b^3 xxdx - \frac{3}{2} z^3 xxdx - \frac{3}{2} bbzxxdx = x^3 zzdz$,

e però $\frac{dx}{x} = \frac{zzdz}{bzz - \frac{3}{2} z^3 - \frac{3}{2} bbz + b^3}$.

36. Con la stessa sostituzione usata di sopra si separano le indeterminate anche nell' equazione

$$\frac{y^n dy}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m}} = cx^{\frac{tn - n - tmn - rn + t - r}{n}} dx.$$

Pongo adunque $\overline{bx^t + ay^n x^r}^{\,m} = x^{mt} z$, sarà $y = \overline{\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}}^{\,\frac{1}{n}}$, e $dy =$

$$\frac{\overline{\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}}}{mn} dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{r-t}{n} \times bx^{t-r-1} dx} \times \overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\,\frac{1-n}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}},$$

e fatte le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\frac{\overline{\frac{x^{t-r} z^{\frac{1-m}{m}}}{mn} dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}} x^{t-r-1} dx + \frac{r-t}{n} \times bx^{t-r-1} dx} \times \overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\,\frac{u-n-1}{n}}}{a^{\frac{n+1}{n}} x^{tm} z} =$$

$cx^{\frac{tn - n - tmn - rn + t - r}{n}} dx$. Dividendo pertanto il nume-

rato-

ratore, e denominatore del primo membro dell'equazione per x^{tm}, e moltiplicandola tutta per $a^{\frac{u+1}{n}} z$, ed in luogo di $\overline{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}^{\frac{u+1-n}{n}}$ scrivendo $x^{\frac{tu-tn+t-ru+nr-r}{n}} \times \overline{z^{\frac{1}{m}}-b}^{\frac{u+1-n}{n}}$, che è lo stesso, ed unendo le dimensioni della lettera x, troveremo essere l'equazione divisibile per $x^{\frac{ut-n-tmn-ru+t-r}{n}}$, e divisa sarà

$$\overline{\frac{xz^{\frac{1-m}{m}}dz}{mn} + \frac{\overline{t-r}}{n} \times z^{\frac{1}{m}}dx + \frac{\overline{r-t}}{n} \times bdx} \times \overline{z^{\frac{1}{m}}-b}^{\frac{u+1-n}{n}} =$$

$ca^{\frac{u+1}{n}} zdx$, e finalmente di nuovo dividendo per $\overline{z^{\frac{1}{m}}-b}^{\frac{u+1-n}{n}}$, sarà

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{m}}dz}{mn} = \frac{\overline{r-t}}{n} \times z^{\frac{1}{m}}dx + \frac{\overline{t-r}}{n} \times bdx + ca^{\frac{u+1}{n}} zdx \times \overline{z^{\frac{1}{m}}-b}^{\frac{n-u-1}{n}},$$

cioè $$\frac{dx}{x} = \frac{z^{\frac{1-m}{m}}dz}{mnca^{\frac{u+1}{n}} z \times \overline{z^{\frac{1}{m}}-b}^{\frac{n-u-1}{n}} + \overline{mr-mt} \times z^{\frac{1}{m}} + \overline{mt-mr} \times b}.$$

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $\frac{y^3 dy}{\sqrt{bbxx - aaxy - abxy}} = \frac{xxdx}{c}$. Pongo $\sqrt{bbxx - aaxy - abxy} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - zzxx}{aax + abx} = \frac{bbx - zzx}{aa + ab}$, e $dy = \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{aa + ab}$. Fatte dunque le sostituzioni, sarà $\frac{\overline{bbx - zzx}^3}{\overline{aa + bb}^3} \times \frac{bbdx - zzdx - 2xzdz}{\overline{aa + ab} \times xz} = \frac{xxdx}{c}$, ed in luogo di $\overline{bbx - zzx}^3$ scrivendo $x^3 \times \overline{bb - zz}^3$, e moltiplicando tutta l'equazione per $\overline{aa + ab}^4 \times zx$, averemo

$$x^3 \times \overline{bb - zz}^3 \times \overline{bbdx - zzdx - 2xzdz} = \overline{aa + ab}^4 \times \frac{zx^3 dx}{c},$$

e dividendo per $x^3 \times \overline{bb - zz}^3$, sarà $bbdx - zzdx - 2xzdz = \overline{aa + ab}^4 \times \overline{bb - zz}^{-3} \times \frac{zdx}{c}$, cioè

$$bbdx - zzdx + \overline{aa + ab}^4 \times \overline{bb - zz}^{-3} \times - \frac{zdx}{c} = 2xzdz,$$

e

e però $\frac{dx}{x} = \dfrac{2zdz}{bb - zz - \frac{z}{c} \times \overline{bb - zz}^{-3} \times \overline{aa + ab}^{4}}$.

37. Servirà la medeſima ſoſtituzione ſimilmente per l'equazione più generale $\dfrac{\overline{bx^{t} + fy^{n}x^{r}}^{i} \times y^{n}dy}{\overline{bx^{t} + ay^{n}x^{r}}^{m}} = cx^{\frac{nt - n - tmn - ru + t - r + mi}{n}} dx$. Anzi ſervirà pure anco per l'equazione $\dfrac{y^{n-1}dy}{\overline{bx^{t} + cx^{r} + ay^{n}x^{r}}^{m}} = fx^{t - r - 1 - mt}dx$, ponendo $\overline{bx^{t} + cx^{r} + ay^{n}x^{r}}^{m} = x^{mt}z$; la quale, ſe ſia $m = 1$, ſarà un caſo particolare del num. 27., e ſe ſia $c = 0$, ſarà un caſo particolare del num. 36. Di più ſi potrà coſtruire anche l'equazione

$$\frac{\overline{gx^{t} + hx^{r} + ky^{n}x^{r}}^{e} \times y^{n-1}dy}{\overline{ax^{t} + bx^{r} + cy^{n}x^{r}}^{m}} = fx^{t - r - 1 + et - mt}dx;$$

quando però ſia $ch = bk$, uſando della ſteſſa ſoſtituzione $\overline{ax^{t} + bx^{r} + cy^{n}x^{r}}^{m} = x^{mt}z$.

Che ſe ſaranno in oltre $b = 0$, $h = 0$, l'equazione ſarà un caſo particolare della prima di queſto numero.

38.

38. Si costruiranno le equazioni

$$\frac{ady}{b+\overline{cy^n+fx}^{\,u}}=gy^{1-n}dx\,,$$

$$\frac{ay^{n-1}dy}{b+\overline{cy^n+fx^m}^{\,u}}=gy^{m-1}dx\,,$$

ponendo per la prima $\overline{cy^n+fx}^{\,u}=z$, e per la seconda $\overline{cy^n+fx^m}^{\,u}=z$. E quanto alla prima, sarà dunque

$$y=\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\,,\ \text{e}\ dy=\tfrac{1}{n}\times\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\times\overline{\tfrac{1}{u}z^{\frac{1-u}{u}}dz-fdx}\,,$$

e però fatte le sostituzioni, averemo $az^{\frac{1-u}{u}}dz=nubcgdx+nucgzdx+aufdx$, cioè

$$\frac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{nubcg+nucgz+auf}=dx.$$ Rispetto alla seconda averemo

$$y=\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx^m}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\,,\ \text{e però}\ dy=$$

$$\tfrac{1}{n}\times\frac{\overline{z^{\frac{1}{u}}-fx^m}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}\times\overline{\tfrac{1}{n}z^{\frac{1-u}{u}}dz-mfx^{m-1}dx}\,,$$ e fatte

le sostituzioni, $x^{m-1}dx = \dfrac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{bcgnu + cgnuz + mafu}$.

Ma anche se l'equazione più generalmente presa sia $\dfrac{ay^{n-1}dy}{b + \overline{cy^n + p}^{\,u}} = gqdx$, essendo in qualunque modo le p, e q date per x, e le costanti, purchè sia $q = \dfrac{dp}{dx}$, si separeranno le indeterminate ponendo similmente $\overline{cy^n + p}^{\,u} = z$. Imperciocchè sarà $y = \dfrac{\overline{z^{\frac{1}{u}} - p}^{\,\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}}$, e però $dy = \dfrac{\frac{1}{n} \times \overline{z^{\frac{1}{u}} - p}^{\,\frac{1-n}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} \times \overline{\frac{1}{u} z^{\frac{1-u}{u}} dz - dp}$, e fatte le sostituzioni, sarà l'equazione $az^{\frac{1-u}{u}}dz = nbcguqdx + ncguzqdx + audp$; ma si suppone $dp = qdx$, adunque sarà

$$\frac{az^{\frac{1-u}{u}}dz}{nbcgu + ncguz + au} = qdx.$$

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $a^3 dy = 6b^3 dx - 3bbdx \sqrt{cy + bx}$, cioè $\dfrac{a^3 dy}{2b - \sqrt{cy + bx}} = 3bbdx$. Posta $\sqrt{cy + bx} = z$, sarà $y = \dfrac{zz - bx}{c}$, $dy = \dfrac{2zdz - bdx}{c}$, e fatte le sostituzioni, $\dfrac{2a^3 zdz - a^3 bdx}{2bc - cz} = 3bbdx$, o sia $2a^3 zdz = 6b^3 cdx - 3bbczdx + a^3 bdx$, e però $\dfrac{2a^3 zdz}{6b^3 c - 3bbcz + a^3 b} = dx$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\dfrac{ayydy}{b + \sqrt[3]{y^3 + aax - bxx}} = aadx - 2bxdx$. Pongo $\overline{y^3 + aax - bxx}^{\frac{1}{3}} = z$, sarà $y = \overline{z^3 - aax + bxx}^{\frac{1}{3}}$, e però $dy = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3zzdz - aadx + 2bxdx}{\overline{z^3 - aax + bxx}^{\frac{2}{3}}}$, quindi fatte le sostituzioni,

 sarà

farà l'equazione $\frac{a}{3} \times \frac{\overline{3zzdz - aadx + 2bxdx}}{b+z} = aadx -$ $2bxdx$, cioè $3azzdz = a^3dx - 2abxdx + 3aabdx - 6bbxdx + 3aazdx - 6bzxdx$, e dividendo per $a + 3b + 3z$, farà $\frac{3azzdz}{a+3b+3z} = aadx - 2bxdx$.

39. L'equazione, o formola canonica $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$ non â generalmente feparabili le indeterminate, qualunque fiafi l'efponente m; le â però feparabili in infiniti cafi, cioè infiniti fono i valori dell' efponente m, pofti i quali, fuccede la bramata feparazione.

Per determinarli mi fervo di un metodo fimile a quello del num. 23. Si ponga $y = Ax^p + x^r t$; (la quantità A, e gli efponenti p, r fono coftanti arbitrarie da determinarfi nel progreffo, e la t è una nuova variabile) farà adunque $dy = pAx^{p-1}dx + rtx^{r-1}dx + x^r dt$, ed $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + ttx^{2r}$, quindi foftituiti quefti valori nella propofta formola, daranno la feguente $ax^m dx + cAAx^{2p+n}dx + 2cAtx^{p+r+n}dx + cttx^{2r+n}dx = pAx^{p-1}dx + rtx^{r-1}dx + x^r dt$. Si fupponga $cAA = pA$, $2p+n = p-1$, $r = 2cA$, cioè $p = -n-1$, $A = \frac{-n-1}{c}$, $r = -2n-2$, con che in queft'ultima formola fpariranno il fecondo, terzo, quinto, e fefto termine, e fi ridurrà ad effe-

re

re $ax^m dx + cttx^{-3n-4} dx = x^{-2n-2} dt$, cioè dividendo per x^{-2n-2}, $ax^{m+2n+2} dx + cttx^{-n-2} dx = dt$, o ſia ($D$) $ax^K dx + cttx^X dx = dt$, fatto $K = m + 2n + 2$, $X = -n - 2$.

Ripiglio la propoſta equazione $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, la quale ponendo $y = \frac{1}{z}$, ſi trasformi in queſt'altra $azzx^m dx + cx^n dx = -dz$, in cui ſi ponga, come ſopra, $z = Bx^q + x^i u$ (B, q, i ſono ſimilmente coſtanti da determinarſi, ed u una nuova incognita) ſarà dunque $dz = qBx^{q-1} dx + iux^{i-1} dx + x^i du$, $zz = BBx^{2q} + 2Bx^{q+i}u + uux^{2i}$, e ſoſtituiti queſti valori, averemo $aBBx^{2q+m} dx + 2aBux^{q+i+m} dx + auux^{2i+m} dx + cx^n dx = -qBx^{q-1} dx - iux^{i-1} dx - x^i du$. Si ſupponga $aBB = -Bq$, $2q + m = q - 1$, $-i = 2aB$, cioè $q + m = -1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $i = -2m - 2$, con che in queſt' ultima formola ſpariranno il primo, ſecondo, quinto, e ſeſto termine, e ſi ridurrà ad eſſere $auux^{-3m-4} dx + cx^n dx = -x^{-2m-1} du$, cioè dividendo per x^{-2m-2}, $cx^{2m+n+2} dx + auux^{-m-2} dx = -du$, o ſia ($G$) $cx^\delta dx + auux^\omega dx = -du$, fatto $\delta = 2m + n + 2$, $\omega = -m - 2$.

Ora nella propoſta equazione ſono ſeparabili le indeterminate, quando ſia $m = n$; adunque anche nelle formole D, G ſaranno ſeparabili le indeterminate, quando ſia $m + 2n + 2 = -n - 2$, $2m + n + 2 = -m - 2$,

dal

dal che si ricavano due valori di m, cioè $m = -3n - 4$; $m = -\frac{n-4}{3}$, posti i quali, succede la separazione delle indeterminate. Poichè adunque nella proposta equazione si separano le indeterminate quando sia $m = -\frac{n-4}{3}$, si separeranno anche nelle formole D, G quando sia $K = -\frac{X-4}{3}$, $r = -\frac{s-4}{3}$, dal che si ricavano altri due valori di m, cioè $m = -\frac{5n-8}{3}$; $m = -\frac{3n-8}{5}$.

Ripetendo lo stesso discorso, si averanno infiniti altri valori della m; come a dire $m = -\frac{7n-12}{5}$, $m = -\frac{5n-12}{7}$, $m = -\frac{9n-16}{7}$, $m = -\frac{7n-16}{9}$ ec., vale a dire generalmente $m = \frac{\overline{2b \pm 1} \times -n - 4b}{2b \mp 1}$, preso per b un qualunque numero intiero positivo principiando dall'unità; posti i quali valori nella proposta equazione, ci daranno separabili le indeterminate.

Si aggiunga, essere in oltre separabili le indeterminate nella equazione proposta, quando l'esponente m sia tale, che col metodo del num. 19. possa essa ridursi ad essere il caso del num. 14.

Sa-

Sarebbe questo il luogo di fare uso di due dissertazioni del dottissimo Signor Eulero inserite negli Atti dell' Accademia di S. Pietro-Burgo Tomo 6., ma perchè la sottile maniera, con cui procede l'Autore, mi sembra oltrepassare i limiti, che io mi sono prefissa di una semplice Instituzione, lascerò, che a suo talento la veggano i Lettori nel citato libro.

PROBLEMA I.

40. *Ritrovare la curva, la di cui sottangente sia eguale al quadrato dell' ordinata diviso per una costante.*

Poste le assisse $= x$, le ordinate $= y$, la sottangente è sempre $\frac{ydx}{dy}$, dunque deve essere eguale ad $\frac{yy}{a}$, e però avremo l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, onde $adx = ydy$, ed integrando $ax = \frac{yy}{2}$, o sia $2ax = yy$, Parabola apolloniana.

Se la sottotangente dovesse essere eguale alla doppia assissa, averebbesi l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$, e però $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $\frac{1}{2} lx + \frac{1}{2} la = ly$ (aggiungo la costante $\frac{1}{2} la$ per adempire la legge degli omogenei), cioè

cioè $l\sqrt{ax} = ly$, e togliendo i logaritmi, $\sqrt{ax} = y$, cioè $ax = yy$, parabola pure apolloniana.

Debba essere costante la sottonormale, sarà $\frac{ydy}{dx} = a$, cioè $ydy = adx$, ed integrando $\frac{yy}{2} = ax$, o sia $yy = 2ax$, parabola pure apolloniana.

Debba essere la sottangente tripla dell'assissa, sarà $\frac{ydx}{dy} = 3x$, cioè $\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[3]{aax} = ly$, o sia $aax = y^3$, parabola prima cubica.

Debba essere la sottangente moltipla dell'assissa secondo un qualunque numero m, sarà $\frac{ydx}{dy} = mx$, cioè $\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[m]{a^{m-1}x} = ly$, o sia $a^{m-1}x = y^m$, curva del genere delle parabole.

Debba essere la sottotangente $= \frac{2ax + xx}{a + x}$, sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$, cioè $aydx + yxdx = 2axdy + xxdy$, o sia $\frac{adx + xdx}{2ax + xx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $ly = \frac{1}{2}l\overline{2ax + xx}$, e però $xx + 2ax = yy$, equazione all'iperbola.

Deb-

Debba essere la sottangente $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, sarà l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, cioè $ayydx + 3yxxdx = 2axydy - 3x^3dy$. Secondo ciò, che è stato detto al num. 18. procuro di ridurre questa equazione al caso del num. 14.; pongo adunque $y = \frac{zz}{a}$, $dy = \frac{2zdz}{a}$, fatte le sostituzioni, sarà $z^4dx + 3zzxxdx = 4xz^3dz - 6x^3zdz$, ed eccola ridotta al suddetto caso; quindi si separeranno le indeterminate, se si porrà $z = \frac{xp}{a}$, $dz = \frac{xdp + pdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà

$$\frac{p^4x^4dx}{a^4} + \frac{3ppx^4dx}{aa} = \frac{4x^4p^3}{a^3} \times \overline{\frac{xdp + pdx}{a}} - \frac{6x^4p}{a} \times \overline{\frac{xdp + pdx}{a}},$$

cioè $9aapdx - 3p^3dx = 4xppdp - 6aaxdp$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{4ppdp - 6aadp}{9aap - 3p^3}$, ed integrando, $lx = \frac{lm}{l\sqrt[3]{p^4 - 3aapp}}$, e restituito il valore di p, cioè $a\sqrt{\frac{ay}{x}}$, sarà $x = \frac{m}{\sqrt[3]{\frac{a^6yy - 3a^5yxx}{x^4}}}$, cioè finalmente $a^6yy - 3a^5yxx = mx$.

 Le

Le due sostituzioni fatte di $y = \frac{zz}{a}$, e di $z = \frac{xp}{a}$, per separare le indeterminate, ci fanno vedere, che sul bel principio bastava farne una sola, cioè $y = \frac{xxpp}{a^3}$,

Ma assai più speditamente si otterrà l'intento scrivendo l'equazione così: $3yxxdx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$, la quale divisa per xx sarà $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, ed integrando, $3xy = \frac{ayy}{x}$, cioè $\frac{ay}{3} = xx$, parabola apolloniana, quando si ommetta la costante m.

Debba esser la sottangente $= \frac{4x^3 - axy}{3xx - ay}$, sarà l'equazione $\frac{4x^3 - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $4x^3dy - axydy = 3xxydx - ayydx$, che scrivo in quest'altra maniera: $4x^3dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$. Osservo, che il secondo membro sarebbe integrabile se fosse diviso per xxy; divido adunque tutta l'equazione, onde sia $\frac{4xdy - 3ydx}{y} = \frac{axdy - aydx}{xx}$, pongo l'integrale di esso secondo membro $\frac{ay}{x} = z$, e fatta svanire dall'equazione la y, sarà essa $4x \times \frac{\overline{xdz + zdx} - 3zxdx}{zx} = dz$,

cioè

cioè $\frac{4xdz + zdx}{z} = dz$, la quale si potrà costruire col metodo del num. 14., o pure preparata giusta il metodo del num. 24., sarà $x \times \overline{\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x}} = dz$. Faccio adunque $\frac{4dz}{z} + \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed integrando $lz^4x = la^4p$, o sia $z^4x = a^4p$, e però fatta svanire dall'equazione finale la x, averemo finalmente $\frac{a^4p}{z^4} \times \frac{dp}{p} = dz$, cioè $a^4dp = z^4dz$, ed integrando, $a^4p = \frac{z^5}{5}$, in cui restituito il valore di p, indi quello di z, sarà $xx = \frac{ay}{5}$, parabola apolloniana.

Debba esser la sottangente $= \frac{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}{a + l\, \overline{a+x}}$, sarà l'equazione $\frac{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}{a + l\, \overline{a+x}} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $\frac{dy}{y} = \frac{adx + dx\, l\, \overline{a+x}}{\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}}$. Per passare all'integrazioni, pongo $\overline{a+x}\, l\, \overline{a+x} = z$, e però $dz = dx\, l\, \overline{a+x} + adx$; (supposta la logaritmica della sottangente $= a$) sostituiti i valori nell'equazione, sarà $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, ed integrando $y = z$, cioè $y = \overline{a+x}\, l\, \overline{a+x}$, curva trascendente, ma che facilmente si descrive, supposta la logaritmica.

PROBLEMA II.

41. *Ritrovare la curva, il di cui ſpazio ſia eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate.*

La formola dello ſpazio è ydx, e però averaſſi $\int ydx = \frac{2}{3}xy$, quindi $ydx = \frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx$, cioè $ydx = 2xdy$, o ſia $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando come ſopra, $l\sqrt{ax} = ly$, ed $ax = yy$, la ſteſſa parabola.

Debba lo ſpazio eſſer eguale alla quarta poteſtà dell' ordinata diviſa per un quadrato coſtante; ſarà $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$, cioè $ydx = \frac{4y^3dy}{aa}$, o ſia $aadx = 4yydy$, ed integrando, $\frac{3aax}{4} = y^3$, parabola prima cubica.

Debba lo ſpazio eſſer eguale alla poteſtà m dell' ordinata diviſa per una coſtante, ſarà $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-2}}$, cioè $ydx = \frac{my^{m-1}dy}{a^{m-2}}$, o ſia $a^{m-2}dx = my^{m-2}dy$, ed integrando $\overline{m-1} \times a^{m-2}x = my^{m-1}$, curva del ge-

nere

nere delle parabole, o dell' iperbole, secondo che sarà $m-1$ positivo, o negativo.

PROBLEMA III.

42. *Date infinite parabole del medesimo genere qualunque; ritrovare, quale sia quella curva, che tutte le taglia ad angolo retto.*

Sia l'equazione $p^{m-n}x^n = y^m$, la quale (considerando, come arbitraria la p, e suscettibile d' infiniti valori) esprime infinite parabole, e similmente considerando le m, ed n, esprime qualunque genere. E sieno esse in primo luogo tutte al medesimo asse AB, (*Fig.* 3.) vertice A, diverse solo nel parametro. Una di queste infinite parabole sia AC, in cui $AB = x$, $BC = y$.

Da un qualunque punto C si conduca la tangente CT, e la normale CP; già si sa, che sarà $BT = \frac{mx}{n}$. La curva, che si cerca, sia DC; e poichè questa deve normalmente tagliare la parabola nel punto C, per una porzione infinitesima dovrà confondersi con la normale CP nel punto C; adunque CT tangente della parabola AC sarà assieme normale alla curva DC nel punto C, ed in conseguenza BT sarà nello stesso tempo e sottotangente della parabola, e sottonormale della ricercata curva DC. Ciò, che dicesi della parabola AC, conviene a qualunque

que altra del medesimo genere. Il problema adunque consiste a ritrovare, quale sia la curva DC, la di cui sottonormale sia $= \frac{mx}{n}$. L'espressione generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$, che in questo caso deve prendersi negativa, perchè nella curva DC crescendo $AB\ (x)$, cala $BC\ (y)$, e però sarà l'equazione differenziale $\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, e separando le variabili, $\frac{mxdx}{n} = -ydy$, ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$, o sia $\frac{nyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$, equazione all'ellissi. E perchè in nessun modo ci entra il parametro p, la soluzione sarà generale per le infinite parabole così descritte.

Se l'esponente n della equazione $p^{m-n}x^n = y^m$ si supporrà negativo, onde l'equazione sia $x^n y^m = p^{m+n}$, in cui ora è positivo, sarà essa all'infinite iperbole del medesimo genere fra gli asintoti, le di cui sottotangenti sono $-\frac{mx}{n}$, e deve pure essere a queste eguale la sottonormale della curva DC; adunque sarà $-\frac{mx}{n} = -\frac{ydy}{dx}$, cioè $\frac{mxdx}{n} = ydy$, ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$, o sia $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{nyy}{m}$, equazione all'iperbola.

Se

Se le infinite parabole AC, QC ec. dell' equazione $p^{m-n}z^n = y^m$ averanno tutte lo stesso parametro, ma ciascuna diverso il vertice sul medesimo asse, vale a dire, se una si muova sempre sull'asse parallela a se medesima; chiamando da un punto fisso A (*Fig.* 4.) una qualunque $AB = x$, e presa una qual si sia QC, la di cui assissa $QB = z$, ordinata $BC = y$, sarà pure $-\frac{ydy}{dx}$ la sottonormale della ricercata curva DC, e però eguale alla sottotangente BT della parabola QC; quindi l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$; ma per l'equazione della parabola si â $z = \frac{y^{\frac{m}{n}}}{p^{\frac{m-n}{n}}}$, adunque $-\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n}}}{np^{\frac{m-n}{n}}}$, cioè $dx = -\frac{n}{m}p^{\frac{m-n}{n}}y^{\frac{1-m}{n}}dy$, ed integrando, $x = \frac{-nnp^{\frac{m-n}{n}}y^{\frac{2n-m}{n}}}{m \times \overline{2n-m}}$, equazione della ricercata curva DC.

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$; l'equazione integrata non servirà in questo caso, perchè fatte le sostituzioni de' valori di m, ed x, averassi $x = -\frac{p}{0}$; ma presa la differenziale, sarà essa $dx = -\frac{1}{2}p \times \frac{dy}{y}$, equazione alla logaritmica. La

curva

curva adunque, che taglia le infinite parabole apolloniane ad angolo retto, sarà la logaritmica MCN, la di cui sottangente è eguale alla metà del parametro delle parabole.

Le parabole sieno prime cubiche, cioè $m = 3$, $n = 1$, sarà $x = -\frac{ppy^{-1}}{-3}$, o sia $xy = \frac{pp}{3}$, e la curva DC sarà l'iperbola fra gli asintoti.

Le parabole sieno le seconde cubiche; cioè $m = 3$, $n = 2$, sarà $x = \frac{-4}{3}\sqrt{py}$, o sia $xx = \frac{16}{9}py$, e la curva DC la parabola ordinaria. Presi altri valori per le m, ed n, altre curve si averanno.

Se le parabole AC, QC ec. oltre l'avere sul medesimo asse diverso il vertice, averanno variabile il parametro, cioè uguale in ciascuna alla rispettiva distanza del vertice dal punto fisso E, presa una qualunque QC, sia $EB = x$, assissa della ricercata curva DC, BC ordinata $= y$, $EQ = p =$ al parametro, sarà $QB = x - p$, e l'equazione delle infinite parabole $p^{m-n}\overline{x-p}^{\,n} = y^m$, e la sottangente $BT = \frac{m}{n} \times \overline{x-p}$, e però l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x-p}$.

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m = 2$, $n = 1$, sarà $p = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, quindi fatte le sostituzioni

nell'

nell' equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \overline{x - p}$, sarà essa $-\frac{ydy}{dx} = x \mp 2\sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, che si potrà ridurre col metodo del numero 14. alla separazione, per indi passare all' integrale, che sarà algebraico.

Se le infinite parabole AC, QC ec. dell' equazione $p^{m-n} z^n = y^m$ averanno lo stesso parametro costante, gli assi paralleli, ed i vertici variabili nella perpendicolare agli assi, vale a dire, se una si muova in maniera, che ciascun punto di essa descriva delle perpendicolari agli assi. Presane una qualunque EC (*Fig.* 5.), e chiamata $AM = EB = z$, $BC = y$, $MC = x$, e condotta alla parabola EC la tangente CT prodotta in V, sarà MV la sottonormale della ricercata curva DC; ma poichè $BT = \frac{mz}{n}$, sarà $MV = \frac{mzx}{ny}$, quindi averassi l' equazione $\frac{mzx}{ny} = -\frac{xdx}{dz}$, e sostituito in luogo di y il valore $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$ dato dall' equazione $p^{m-n} z^n = y^m$, sarà finalmente $\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = -\frac{xdx}{dz}$, cioè $-\frac{mzdz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx$, ed integrando, $x = -\dfrac{mmz^{\frac{2m-n}{m}}}{n \times \overline{2m-n} \times p^{\frac{m-n}{m}}}$, equazione della curva ricercata DC.

Le parabole fieno apolloniane, cioè $m=2$, $n=1$, farà $x = -\dfrac{4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}$, o fia $\dfrac{9pxx}{16} = z^3$, e però la curva DC la feconda parabola cubica, il di cui lato retto farà a quello della parabola AC, come il 9. al 16.

Avvertafi, che in quefto cafo la pofizione della curva DC non farà la fegnata nella figura 5., ma averà il vertice in A, tagliando ad angolo retto la parte inferiore delle parabole apolloniane, cioè incontrando il conveffo, come nella figura 6.

Fiffato altro genere per le parabole AC, farà pure una parabola d'altro genere la curva DC.

PRO-

PROBLEMA IV.

43. *Sulla retta* AD (Fig. 7.) *insista la retta* AC *in angolo semiretto, si ricerca l'equazione della curva* AB, *la di cui proprietà sia, che l'applicata* BD *abbia alla sottotangente* DF *la ragione d'una costante* a *alla* BC.

Chiamate $AD = x$, $DB = y$, sarà $CB = y - x$, quindi per la condizione del Problema si averà y, $\frac{ydx}{dy} :: a, y - x$, e però l'equazione $adx = ydy - xdy$. Per separare le indeterminate mi servo del metodo del num. 23., pongo pertanto $x = Ay + p + B$, e $dx = Ady + dp$; fatte le sostituzioni, sarà $aAdy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$, ma in questa equazione si separano le indeterminate, se spariscano il primo, e secondo termine dell'omogeneo di comparazione, cioè se sia $A = 1$, e B rimane arbitraria, che porrò per brevità $= 0$; adunque la sostituzione da farsi è $x = y + p$, $dx = dy + dp$, e l'equazione sarà $adp = -ady - pdy$, cioè $\frac{adp}{a + p} = -dy$, curva trascendente, e che dipende dalla logaritmica.

PROBLEMA V.

44. *Ritrovare la curva, la di cui area sia* $axy + bx^c y^e$, *chiamando al solito le assisse* x, *le ordinate* y.

Deve adunque essere $\int ydx = axy + bx^c y^e$; e però $ydx = axdy + aydx + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy$; o sia, fatto $a - 1 = m$, $mydx + axdy + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy = 0$. Per separare le indeterminate in questa equazione si potrebbe servirsi del metodo del num. 33. ponendo $x = u^{e-1} z^{e-1}$, ed $y = z^{1-c}$, onde $dx = \overline{e-1} \times z^{e-1} u^{e-2} du + \overline{e-1} \times u^{e-1} z^{e-2} dz$, e $dy = \overline{1-c} \times z^{-c} dz$; ma fatte le sostituzioni, ci si presenterebbe un'equazione molto composta, la quale richiederebbe un lunghissimo calcolo.

Per venirne a capo con brevità: ripresa l'equazione $\int ydx = bx^c y^e + axy$, pongo $x^c y^e = q$, onde l'equazione sia $\int ydx = bq + axy$, e però $ydx = bdq + axdy + aydx$. Ciò posto, mi servo del metodo del num. 24., a norma di cui scrivo l'equazione così:

$$axy \times \overline{\frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}} = bdq; \text{ indi pongo}$$

$\overline{\frac{1-a}{a}} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$; e però integrando, $\overline{\frac{1-a}{a}} \int \frac{x}{y} = lp$,

o

o sia $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{y} = p$. Fatte per tanto le dovute sostituzioni, averassi l' equazione $\frac{ax^{\frac{1}{a}}dp}{pp} = bdq$.

Ora per esprimere la $x^{\frac{1}{a}}$ per le assunte p, q, si rifletta, che $x^c y^e = q$, cioè $y^e = \frac{q}{x^c}$, cioè $y = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$;

ma si â pure $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = y$, dunque $\frac{x^{\frac{1-a}{a}}}{p} = \frac{q^{\frac{1}{e}}}{x^{\frac{c}{e}}}$, o sia

$x^{\frac{e-ae+ac}{ae}} = q^{\frac{1}{e}}p$, e finalmente $x^{\frac{1}{a}} =$
$q^{\frac{1}{e-ae+ac}}p^{\frac{e}{e-ae+ac}}$. Fatta adunque questa sostituzione in luogo di $x^{\frac{1}{a}}$, averemo l'equazione

$ap^{\frac{e}{e-ae+ac}-2}dp = \frac{bdq}{q^{\frac{1}{e-ae+ac}}}$, cioè $ap^{\frac{2ae-2ac-e}{e-ae+ac}}dp =$
$bq^{\frac{-1}{e-ae+ac}}dq$, ed integrando,

$$\frac{\overline{ae-aae+aac}}{ae-ac} \times p^{\frac{ae-ac}{e-ae+ac}} = \frac{\overline{be-bae+bac}}{e-ae+ac-1} \times q^{\frac{e-ae+ac-1}{e-ae+ac}} + g,$$

equazione della curva, che si cerca.

E'

E' manifeſto, che queſta curva ſarà per lo più algebraica quando le quantità a, c, e ſaranno razionali, ed all'oppoſto traſcendente quando una di eſſe ſarà irrazionale. Diſſi per lo più, perchè anche poſte razionali le a, c, e, ſarà però traſcendente la curva, ſe ſia $e = c$; o pure $a = \frac{1 - e}{c - e}$; o $c = 1$, ed aſſieme $a = 1$; o $a = 0$, ed aſſieme $e = 1$, ed in diverſi altri caſi, che non ſerve tutti accennare.

CAPO IV.

Della riduzione delle Equazioni differenziali del secondo grado.

45. QUando le equazioni differenziali del secondo grado sono tali, che possano loro adattarsi le Regole spiegate dell'integrazioni sì ne' casi delle variabili separate, come in quelle, che sono miste, nulla occorre di più, che servirsi delle dette regole, e così per mezzo dell'integrazioni ridurle a' primi differenziali; e però intorno a ciò nient'altro fa d'uopo aggiungere. Che se poi le formole così ridotte al primo grado non averanno bene spesso separabili le indeterminate, nè saranno costruibili in verun modo, la colpa non sarà della maniera, con cui si sviluppano le seconde differenze, ma piuttosto di quella, con cui si maneggiano le prime.

Dovrà adunque versare la nostra industria circa il ridurre le equazioni *differenzio-differenziali* ad essere atte per le assegnate regole dell'integrazioni, il che si può tentare in più modi.

46. Una maniera potrà essere di servirsi de' soliti ripieghi dell'Algebra volgare trasponendo i termini, dividendoli, o moltiplicandoli per qualche quantità, ed altri simili. Ma prima d'ogn'altra cosa è necessario ricordarsi,

cordarsi, o sapere, se nel passare dalle prime alle seconde differenze siasi presa qualche flussione per costante, e quale sia stata; ed in oltre, che siccome nell'integrazioni dalle prime differenze alle quantità finite si aggiunge sempre la costante, così nulla meno devesi aggiungere nelle integrazioni dalle seconde alle prime differenze. Ciò posto, sia

ESEMPIO I.

Sia proposta l'equazione $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui la $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è l'elemento della curva, e si suppone costante; la scrivo così $\frac{by^m dydu}{c^m} = 2ayddx + adxdy$.

Il primo membro, essendo costante du, è integrabile, quando anche si multiplichi, o si divida per qualunque funzione di y; ed osservo, che lo sarebbe pure il secondo, se si dividesse per $2\sqrt{y}$. Divido adunque tutta l'equazione per $2\sqrt{y}$, e sarà $\frac{by^m dydu}{2c^m\sqrt{y}} = \frac{2ayddx + adxdy}{2\sqrt{y}}$, ed integrando sarà $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Nell'integrare ô aggiunta la du appunto, perchè è costante, e l'ô moltiplicata in $a\sqrt{a}$ per gli omogenei.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia l' equazione $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui si è presa ydx per costante; la moltiplico per $2dy$, e sarà $2fdy = \frac{2dx^2 dy - 2ydyddy}{y^3 dx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2dy}{y^3} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$, ed integrando, per esser costante ydx, sarà $\int 2fdy =$

$$- \frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + nyydx^2.$$

ESEMPIO III.

Sia l' equazione $f = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in cui dx sia costante, e du l' elemento della curva, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2} = du$. Poichè dunque è costante dx, sarà $dyddy = duddu$, e però sostituendo il valore di ddy nell' equazione, sarà $f = \frac{dydu^2 - yduddu}{y^3 dydx^2}$, e moltiplicando per $2y$, $2fy =$
$\frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^3 dydx^2}$, cioè $2fdy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4 dx^2}$,

 ed

ed integrando $2\int fdy = -\frac{du^2}{yydx^2} + ndx^2$.

In quest'altra maniera ancora: posto nell'equazione in luogo di du il suo valore, sarà essa $f = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3 dx^2}$,

e moltiplicando per $2ydy$, $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^3 dx^2}$,

cioè $2fdy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^4 dx^2}$, ed integrando,

$2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} \pm ndx^2$.

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $adx = \frac{xyddy + xdy^2}{dx}$, in cui dx sia costante; moltiplicata per dx, e divisa per x sarà $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$, ed integrando, giacchè dx è costante, $adx\,lx + Adx = ydy$. Che se farassi la costante aggiunta $A = a$, averassi $adx\,lx + adx = ydy$, e passando avanti con l'integrazione, $axlx = \frac{yy}{2}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $f = \frac{dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu}{ydxdydt^2}$, in cui du è l'archetto della curva, dt è data per x, e per y, e nessuna flussione prima è stata presa per costante; la divido per y^3dx^3, e la moltiplico per 2, e sarà $\frac{2f}{y^3dx^3} = \frac{2dxdydu^2 + 2ydu^2ddx - 2ydxduddu}{y^4dx^4dydt^2}$, o sia

$$\frac{2fdydt^2}{yydx^2} = \frac{2ydx^2dydu^2 + 2yydu^2dxddx - 2yydx^2duddu}{y^4dx^4},$$

ed integrando, $2\int\frac{fdydt^2}{yydx^2} = -\frac{du^2}{yydx^2} \pm n$.

Ma si può ben dire, essere cosa impossibile, il fare uso di questo metodo nell'equazioni, le quali sieno alquanto composte, quando a un di presso già non si sappiano le integrazioni, che devono farsi, onde passerò ad altri metodi.

47. Nella soluzione de' Problemi passando dalle prime alle seconde differenze può tornare molto comodo il non assumere, qualora sia libero, flussione alcuna per costante, per potere quindi con la formola sotto l'occhio determinare quella tale costante, per cui l'espressione venga in tale modo ad abbreviarsi, che sia

XX 2 facil-

facilmente integrabile. Gli esempj faranno meglio intendere il metodo.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$, la quale siasi avuta senza assumere alcuna flussione costante. Per abbreviare questa formola: considero, quale possa essere quella flussione, che presa per costante mi distrugga nell'omogeneo di comparazione due termini, due soli lasciandone, e trovo che due possono essere, cioè xdy, e $\frac{dx}{x}$.

Sia dunque $xdy = c$, e prese le differenze, $xddy + dxdy = 0$, e però anco moltiplicando per dx, $xdxddy + dx^2 dy = 0$, con che spariscono nell'omogeneo di comparazione dall'equazione principale il secondo, e quarto termine così, che si avrà $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$; ma essendo $xddy + dxdy = 0$, sarà $dy = -\frac{xddy}{dx}$, quindi sostituendo, sarà $f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^3 dxdy^3} - \frac{xdyddx}{2x^3 dy^3}$, cioè $f = -\frac{xdy^2 ddy - xdxdyddx}{2x^3 dxdy^4}$, o sia $f = -\frac{dyddy - dxddx}{2xxdxdy^2}$,

ma

ma $xdy = c$, adunque $f = -\frac{dyddy - dxddx}{2ccdx}$, e finalmente $fdx = -\frac{dyddy - dxddx}{2cc}$, ed integrando,

$\int fdx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4cc} \pm n$, o sia $\int fdx = -\frac{dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n$.

Quando siasi giunto all'equazione $f = \frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3 dy^3}$, si può più brevemente passare all'integrazione moltiplicandola per dx, e disponendola così: $fdx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dxddx}{2xxdy^2}$, mentre essendo xdy costante, sarà $\int fdx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$, come sopra.

Facciasi ora costante la quantità $\frac{dx}{x}$. Una tale supposizione dando $\frac{xddx - dx^2}{xx} = 0$, e però anco $-xdyddx + dx^2 dy = 0$, toglie il secondo, e terzo termine dall'equazione principale, e la muta in questa $f = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3 dy^3}$, e moltiplicando per dx, $fdx = \frac{dxdy^3 + xdx^2 ddy}{2x^3 dy^3}$, il di cui integrale, a cagione di $\frac{dx}{x}$,

o

o $\frac{dx^2}{xx}$ costante, si trova essere $\int f dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n$, come sopra.

48. Ma per sapere a un di presso, quale flussione possa prendersi per costante, si osservi, se nell'equazione proposta vi sieno due, tre, o più termini, i quali moltiplicati, o divisi per una quantità a loro comune, possano ridursi ad essere integrabili; indi fatta l'integrazione, la loro integrale si prenda per costante, e si proceda nel modo spiegato. Se non sempre, qualche volta almeno avremo l'intento.

Ripiglio l'equazione $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3 dy^3}$; osservo, che i due termini $dx^2 dy + xdxddy$ divisi per dx rimangono $dxdy + xddy$, quantità integrabile, e che il suo integrale è xdy; ecco adunque, per qual cagione dovevasi prendere questa quantità per costante. Similmente osservo, che i due termini $dx^2 dy - xdyddx$, se si dividono per $-xxdy$, ci danno $-\frac{dx^2 + xddx}{xx}$, quantità integrabile, il di cui integrale è $\frac{dx}{x}$; potevasi adunque prendere per costante anche la flussione $\frac{dx}{x}$.

ESEM-

ESEMPIO.

Venga proposta la formola $xy \times dxddy - dyddx = ydydx^2 - yydzdy^2 - xdx^2dy^2$, in cui la variabile z è in qualunque modo data per y.

La dispongo così: $xydxddy + yydzdy^2 = yxdyddx + ydydx^2 - xdxdy^2$, ed osservo, che se si divida per $yydy$ l'omogeneo di comparazione, sarà egli $\frac{yxddx + ydx^2 - xdxdy}{yy}$, il di cui integrale $\frac{xdx}{y}$. Prendo adunque per costante $\frac{xdx}{y}$, e però $\frac{xdx}{y} = c$, ed $\frac{xyddx + ydx^2 - xdxdy}{yy} = 0$, quindi la proposta equazione verrà ad essere $xydxddy + yydzdy^2 = 0$, cioè $dz = -\frac{xdxddy}{ydy^2}$, ed integrando, per essere $\frac{xdx}{y}$ costante, $z = \frac{xdx}{ydy} \pm n$.

49. Quando in una equazione del secondo grado manca l'una, o l'altra delle due indeterminate con tutte le sue funzioni, e non entrano nella formola se non le sue differenze prime, o seconde in qual si sia modo com-

poste

poste, ed a qualunque dignità elevate, l'integrazione, o riduzione alle prime differenze sarà sempre in nostra mano per mezzo di una sostituzione. Questa sarà di porre la prima differenza, che fluisce, eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella flussione assunta costante, o che si assuma ad arbitrio in caso, che nessuna fosse stata fissata costante. Per esempio: in una data equazione sia stata supposta dx variabile, e dy costante; si faccia $dx = pdy$, e prendendo le differenze nell'ipotesi di dy costante, $ddx = dpdy$. Fatta questa sostituzione in luogo di ddx, e maneggiata l'equazione, col sostituire i valori presi dall'equazione $dx = pdy$, si ridurrà sempre alle prime differenze.

O pure se tornasse più comodo, si ponga la prima flussione della variabile, che manca dall'equazione, eguale ad una nuova indeterminata moltiplicata nella prima flussione dell'altra. Fatte le debite sostituzioni, avendo riguardo alla flussione, che sarà stata presa costante, averemo l'equazione proposta ridotta alle prime differenze.

ESEMPIO I.

Sia di nuovo l'equazione dell'esempio primo del num. 46. $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui è supposta costante la du.

Fac-

Faccio pertanto $dx = pdu$, e differenziando, $ddx = dpdu$, quindi surrogato questo valore, averemo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydpdu + apdudy}{dudy}$, cioè $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydp + apdy}{dy}$, e però $\frac{by^m dy}{c^m} = 2aydp + apdy$, la qual equazione divisa per $2\sqrt{y}$ è integrabile, e l'integrale si è $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g$; ma $p = \frac{dx}{du}$, dunque $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2c^m} = adx\sqrt{y} \pm gdu$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $fyydydx^2 = -duddu$. La f è data per y, du è l'elemento della curva, ed ydx è la flussione presa costante. Faccio adunque $du = pydx$, e differenziando, $ddu = ydpdx$, e però fatte le sostituzioni, sarà $fyydydx^2 = -yypdpdx^2$, cioè $fdy = -pdp$; onde integrando, $2\int fdy = -pp + 2m$, ma $pp = \frac{du^2}{yydx^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}$; fatte pertanto le sostituzioni, e la riduzione, averassi $dx = \dfrac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$:

Riduco ora la stessa equazione per mezzo dell' altra sostituzione indicata. Pongo adunque $dx = pdu$, e $ddx = dpdu + pddu$, e però $ddu = \dfrac{ddx - dpdu}{p}$. Fatte le sostituzioni, sarà l'equazione $fyyppdydu^2 = \dfrac{-duddx + dpdu^2}{p}$, ma è stata assunta costante la flussione ydx, quindi averemo $yddx + dydx = 0$, cioè $ddx = -\dfrac{dxdy}{y}$, o sia $ddx = -\dfrac{pdudy}{y}$, e surrogato questo valore ancora nell'equazione, sarà $fppyydy = \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dp}{p}$. Ciò posto: passo avanti, e faccio $\dfrac{dy}{y} + \dfrac{dp}{p} = \dfrac{dq}{q}$, onde $py = q$, e però $fqqdy = \dfrac{dq}{q}$, o sia $fdy = \dfrac{dq}{q^3}$, ed integrando, $\int f dy = -\dfrac{1}{2qq} + m$; ma $qq = ppyy = \dfrac{yydx^2}{du^2} = \dfrac{yydx^2}{dx^2 + dy^2}$, dunque sarà $2\int f dy = -\dfrac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, da cui si ricava, come sopra, $dx = \dfrac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$:

ESEM-

ESEMPIO III.

Ripiglio l'equazione dell'esempio 3. del num. 46. $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$, in cui è costante dx, e pongo $dy = pdx$, e però $ddy = dpdx$, fatta la sostituzione, sarà $fy^3 dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydpdx$, e fatta sparire la dx col valore $\frac{dy}{p}$, averemo $\frac{fy^3 dy^2}{pp} = \frac{dy^2}{pp} + dy^2 - \frac{ydydp}{p}$, cioè $fy^3 dy^2 = dy^2 + ppdy^2 - ypdydp$, e dividendo per $y^3 dy$, sarà $fdy = \frac{dy}{y^3} + \frac{ppdy - ypdp}{y^3}$, ed integrando, $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$, e fatta la sostituzione in luogo di p del valore $\frac{dy}{dx}$, $\int fdy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yydx^2} + m$, cioè $2\int fdy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, e però $dx =$

$$\frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy\int fdy}}.$$

50. Che se nella proposta equazione nessuna flussione sia stata presa per costante, una se ne prenda a piacere, e si operi come s'è fatto nel num. 48.

ESEMPIO.

Data l'equazione dell'esempio 5. num. 46., in cui nessuna flussione è assunta costante, cioè $fy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx - ydxduddu$ (posta ydx in luogo di dt), se si prenda costante dx, sparirà il termine ydu^2ddx, e l'equazione sarà $fy^3dydx^2 = dydu^2 - yduddu$, onde per ridurla dovrà porsi $du = pdx$, quindi $ddu = dpdx$. Surrogati questi valori, averemo $fy^3dydx^2 = ppdydx^2 - ypdpdx^2$, cioè $fy^3dy = ppdy - ypdp$, la quale equazione, per passare alle integrazioni, scrivo così: $fy^3dy = ppy \times \overline{\frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}}$, quindi integrando col metodo del num. 24. dell'antecedente capo, $\int f dy = -\frac{pp}{2yy} + m$; e restituito il valore di p, $\int f dy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

Se si prenda costante du, sparirà il termine $ydxduddu$, e l'equazione sarà $fy^3dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2ddx$, e però dovrà porsi $dx = pdu$, $ddx = dpdu$. Sostituiti questi valori, averemo $fy^3dy \times p^3du^3 = pdydu^3 + ydpdu^3$, cioè $fy^3dy = \frac{pdy + ydp}{p^3}$, e però integrando, sarà $\int fdy = -\frac{1}{2ppyy} + m$,

e

e restituito il valore di p, $\int f dy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + m$.

51. Il potersi assumere una flussione a piacere per costante nelle equazioni, in cui nessuna sia già stata presa, può rendere capaci del metodo del num. 49. alcune equazioni, le quali, per avere ambedue le indeterminate finite, non lo sieno; e ciò assumendo tale flussione per costante, che faccia sparire tutti que' termini, ne' quali si trova l'una delle indeterminate finite, rimanendo quelli soli, che l'altra contengono.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $dx^3 - dxdy^2 = ydxddx + 2xdyddy$, in cui nessuna flussione è presa costante.

Se faremo costante dx, sparirà il primo termine dell'omogeneo di comparazione, e se faremo costante dy, sparirà l'ultimo; e sì nell'uno, che nell'altro caso una sola delle indeterminate rimane. Fisso adunque costante dx; sarà l'equazione $dx^3 - dxdy^2 = 2xdyddy$. Pongo $dy = \frac{pdx}{a}$, $ddy = \frac{dpdx}{a}$; fatte le sostituzioni, sarà $dx^3 - \frac{ppdx^3}{aa} = \frac{2xpdpdx^2}{aa}$, cioè $aadx - ppdx = 2xpdp$, o ſia $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa-pp}$; integrando adunque, ſarà $lx = -l\overline{aa-pp} + lm$, e però $x = \frac{m}{aa-pp}$; e reſtituito in luogo di p il ſuo valore $\frac{ady}{dx}$, ſarà $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$; cioè $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, o ſia $mdx^2 = aaxdx^2 - aaxdy^2$.

52. Ma quando il prendere una fluſſione a piacere per coſtante non ſerva per eliminare una delle due indeterminate finite, o la fluſſione coſtante ſia già ſtata fiſſata, ſicchè nell'equazione rimangano ambedue le indeterminate, fin'ora non è ſtato ſcoperto alcun metodo generale per procedere avanti.

I metodi ſpiegati poſſono avere tal volta il loro uſo, ſiccome pure i ſoliti artifizj dell'Algebra comune con le moltiplicazioni, diviſioni ec., come per eſempio nell'equazione $xxydy^2 = xddx - dx^2$, la quale diviſa per xx ſarà $ydy^2 = \frac{xddx - dx^2}{xx}$, e però integrabile (ſuppoſta dy coſtante) e l'integrale è $\frac{yydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$.

Tal'ora una ſoſtituzione può rendere la propoſta equazione ſoggetta al metodo del num. 49. Ed in fatti l'equazione $x^m ddx = yddy + dy^2 + yydy^2$, che non è

ſog-

soggetta al canone del suddetto numero, lo sarà però se si faccia $ydy = dz$, onde sia $x^m ddx = ddz + dz^2$.

53. In caso poi, che nelle equazioni sia già stata assunta la flussione costante, può essere di molto uso il mutare l'equazione proposta in un'altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante. Per far ciò: sia l'equazione generale $dy = pdx$ (la p è una quantità data in qualunque modo per x, e per y) e sia dx costante, differenziando sarà $ddy = dpdx$; ma è $p = \frac{dy}{dx}$, dunque differenziando senza alcuna flussione costante, sarà $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, quindi surrogato questo valore in luogo di dp nell'equazione $ddy = dpdx$, averemo $ddy = \frac{dxddy - dyddx}{dx}$. Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante dx, si ponga in luogo di ddy il valore $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$, sarà essa mutata in un'altra equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Ma perchè frequentemente altre più composte flussioni si assumono, o sono state assunte per costanti, sarà bene rendere più universale questo metodo.

Sia adunque l'equazione generale $dy = mpdx$; (la p è similmente data in qualunque modo per x, e per y, ed m è una funzione qualunque di x, o di y, o di ambe be insieme) Sia costante mdx, differenziando sarà $ddy = mdxdp$; ma $p = \frac{dy}{mdx}$, e differenziando senza assumere costante, $dp = \frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mmdx^2}$, quindi surrogato questo valore in luogo di dp nell'equazione $ddy = mdxdp$, averemo $ddy = \frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$. Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante mdx, si ponga in luogo di ddy il valore ritrovato $\frac{mdxddy - dmdxdy - mdyddx}{mdx}$, sarà essa mutata in altra equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Rese in questa guisa compite le equazioni, cioè tali, che non abbiano flussione costante, per passare alla riduzione sarà in nostro arbitrio di prendere per costante quella, mediante la quale ci verrà fatto di ottenere l'intento.

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione da ridurre $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, in cui è costante dx. Posto adunque in luogo di ddy il valore $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$,

(poi-

(poichè in queſto caſo $m = 1$, e $dm = 0$) ſarà $dx^2dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$, in cui neſſuna fluſſione è coſtante, quindi fatta coſtante la dy, ſi trova eſſere $dx^2 + xddx + addx = dy^2$, ed integrando, $xdx + adx = ydy$, equazione all'iperbola.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $-\frac{xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$, in cui ſia ſtata preſa coſtante la fluſſione ydx. Per trasformarla in un'altra, in cui neſſuna fluſſione ſia coſtante, poichè in queſto caſo $m = y$, il valore della ddy da ſoſtituirſi ſarà $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, e però l'equazione

$$-\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdxdy^2 + xydyddx}{ydxdy} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx}.$$

Per ridurla, fiſſo per coſtante la fluſſione xdy, in conſeguenza di che ſarà $xddy + dxdy = 0$, cioè $-ddy = \frac{dxdy}{x}$, e però fatta la ſoſtituzione,

$$-\frac{xdy}{y} - dx + dx + \frac{xdy}{y} + \frac{xddx}{dx} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx},$$

cioè

cioè $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x^3}$, ed integrando, $-ldx = l\frac{aa + xx}{x} - lxdy$ (sottraggo $lxdy$, per essere quantità costante), e togliendo i logaritmi, $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{xxdy}$, cioè $xxdy = aadx + xxdx$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $-\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, e costante la flussione ydx. Pongo adunque in luogo di ddy il corrispondente valore $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx}$, sarà $-\frac{dxddy}{dy} + \frac{dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, in cui nessuna flussione è costante, quindi presa costante dy, sarà $xddx = dx^2 + dy^2$, la quale equazione è il caso del num. 49., e però si sa ridurre.

54. Il metodo spiegato nell' antecedente capo al num. 24. può avere uso anche nelle equazioni differenzio-differenziali, procedendo a un di presso nella maniera ivi adoperata. Eccone la pratica in alcuni esempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Ripiglio la formola dell'esempio primo di questo capo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in cui $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è assunta costante, sarà $\frac{by^m dydu}{ac^m} = 2yddx + dxdy$; la preparo nella seguente maniera: $\overline{\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}} \times dx = \frac{by^m dydu}{ac^m \times 2y}$, osservo, che le due quantità sotto la linea sono integrabili per via de' logaritmi; faccio adunque $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y} = \frac{dp}{p}$, e però $l\,dx + l\sqrt{y} = lp + l\,du$ (aggiungo il logaritmo di du, per essere du costante) cioè $dx\sqrt{y} = pdu$. Quindi sostituendo nella proposta equazione in luogo di $\frac{ddx}{dx} + \frac{dy}{2y}$ il valore $\frac{dp}{p}$, ed in luogo di dx il valore $\frac{pdu}{\sqrt{y}}$, sarà

$\frac{dpdu}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-1} dydu}{2ac^m}$, o sia $dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy}{2ac^m}$, ed integrando,

$b + p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2ac^m}$, ma $p = \frac{dx\sqrt{y}}{du}$; e però finalmen-

 te

te $bdu + dx\sqrt{y} = \frac{bv^{m+\frac{1}{2}}du}{\overline{m+\frac{1}{2}} \times 2ac^m}$, come nel citato esempio.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $-\frac{ddx\sqrt{xx+yy}}{x} = \overline{\frac{ydx - xdy}{xx+yy}}^2$, in cui è costante $ydx - xdy$.

La seconda differenza ddx divisa per la costante $ydx - xdy$ ci dà quantità integrabile, e però scrivo l'equazione così: $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{x \times \overline{ydx - xdy}}{xx+yy\sqrt{xx+yy}}$. Ma osservo, che nel secondo membro la quantità $ydx - xdy$ è sommabile, quando si divida per yy, adunque preparo l'equazione secondo il metodo, e sarà $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyy}{xx+yy\sqrt{xx+yy}} \times \frac{ydx - xdy}{yy}$. Pongo $\frac{ydx - xdy}{yy} = dp$, ed integrando, $\frac{x}{y} = p$, quindi fatta la sostituzione, avremo $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyydp}{xx+yy\sqrt{xx+yy}}$, da cui si farà svanire la x, o la y per mezzo dell'equa-

zione

zione $\frac{x}{y} = p$. Facciasi sparire dal secondo membro la x, collocando il suo valore py, averassi $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{pdp}{aa + pp \sqrt{aa + pp}}$, e passando all'integrazione, sarà $\frac{dx}{ydx - xdy} = -\frac{1}{\sqrt{aa + pp}}$, cioè $-\frac{dx}{ydx - xdy} = -\frac{y}{\sqrt{aayy + xx}}$, restituendo in luogo di p il suo valore $\frac{x}{y}$.

In questa integrazione potevasi aggiungere la costante $ydx - xdy$, ma o si aggiunga, o si ommetta, la integrazione dalle prime differenze alle quantità finite nell'uno, e nell'altro caso ci dà sempre le sezioni coniche.

55. Dissi al num. 52., che quando le equazioni differenzio-differenziali contengano ambedue le variabili, non vi è metodo generale per ridurle; uno però se ne può assegnare, il quale sebbene non serve per tutte, è molto universale nel genere suo, ed abbraccia tutte le infinite equazioni, che a tre canoni si rapportano. Mediante questo metodo le date equazioni si trasmutano in altre, nelle quali manca l'una delle due variabili, e che

per

per conseguenza si sanno maneggiare col metodo del num. 49.

Il primo canone comprende quelle, che sono di due soli termini, e vengono espresse dalla formola generale $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, in cui sia presa dx costante. Per ridurre questa equazione, pongo $x = c^{bu}$, ed $y = c^u t$; la c è un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, b è un arbitraria da fissarsi nel progresso, ed u, t sono due nuove variabili. Poichè $x = c^{bu}$, ed $y = c^u t$, per le regole del calcolo esponenziale sarà $dx = bc^{bu} du$, $ddx = bc^{bu} \times \overline{ddu + bdu^2}$, $dy = c^u dt + c^u t du$, $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu}$. Ma posta costante dx, si â $ddx = 0$, e però $bc^{bu} \times \overline{ddu + bdu^2} = 0$, cioè $ddu = - bdu^2$, il che sostituito in luogo di ddu nel valore di ddy, sarà $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2}$. Sostituiti nella proposta equazione, in luogo di x, ed y, e suoi differenziali, i respettivi valori, si muterà essa in quest'altra $ac^{bmu} \times b^p \times c^{bpu} du^p =$

$$c^{nu} t^n \times \overline{c^u dt + c^u t du}^{\,p-2} \times c^u \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2},$$

cioè $ac^{bu \times \overline{m+p}} b^p du^p = c^{\overline{n+p-1} \times u} t^n \times \overline{dt + tdu}^{\,p-2} \times \overline{ddt + 2dtdu + \overline{1-b} \times tdu^2}$

Ma per liberare questa equazione dalle quantità esponenziali, cioè per togliere da essa la c, converrà che

sia

sia $n+p-1 = bm + bp$, con che si determina il valore dell'assunta b, cioè $b = \frac{n+p-1}{m+p}$, quindi l'equazione

sarà $a \times \frac{\overline{n+p-1}^{\,p}}{\overline{m+p}^{\,p}} du^p =$

$t^n \times \overline{dt + tdu}^{\,p-2} \times \overline{ddt + 2dtdu + \frac{m-n+1}{m+p} \times tdu^2}$, la quale, perchè contiene una sola delle variabili finite, cioè la t, viene ad esser soggetta alla regola del sopracitato num. 49.

Poichè adunque si trova il valore di $b = \frac{n+p-1}{m+p}$, tosto apparisce, quali sostituzioni dovevano farsi da principio, cioè $x = c^{\overline{\frac{n+p-1}{m+p}} \times u}$, ed $y = c^u t$ per ottenere l'intento.

Passando avanti con l'operazione, giusta il metodo del num. 49., pongo $du = zdt$, e però $ddu = zddt + dzdt$, ma la supposizione di dx costante ci â dato $ddu = -bdu^2$, cioè $ddu = \overline{\frac{1-n-p}{m+p}} \times zzdt^2$; adunque averemo $\frac{1-n-p}{m+p} \times zzdt^2 = zddt + dtdz$, quindi $ddt = \frac{1-n-p}{m+p} \times zdt^2 - \frac{dtdz}{z}$; sostituiti pertanto nell'equazione,

zione, in luogo di du, e ddt, i rispettivi valori, sarà

$$a \times \frac{\overline{n+p-1}^{\,p}}{\overline{m+p}^{\,p}} \times z^p dt^p =$$

$$t^n \times \overline{dt+ztdt}^{\,p-2} \times \overline{\frac{1-n-p}{p+m} \times zdt^2 - \frac{dtdz}{z} + 2zdt^2 + \frac{m-n+1}{m+p} \times zztdt^2},$$

o sia dividendo per dt^{p-1}, e moltiplicando per z,

$$a \times \frac{\overline{n+p-1}^{\,p}}{\overline{m+p}^{\,p}} \times z^{p-1} dt =$$

$$t^n \times \overline{1+tz}^{\,p-2} \times \overline{\frac{1+2m-n+p}{m+p} \times zzdt + \frac{m-n+1}{m+p} \times tz^3 dt - dz},$$

la quale equazione è ridotta alle prime differenze. E' facile a vedere, che per ridurre sul bel principio l'equazione, bastava porre $x = c^{\frac{n+p-1}{m+p} \times \int zdt}$, ed $y = c^{\int zdt}\, t$.

In questa generale equazione, che ô ridotta, ô supposta costante la flussione dx; ciò non ostante però non farà difficoltà alcuna al metodo, che in una qualunque proposta equazione altra flussione diversa da dx sia presa costante, poichè col metodo del num. 53. si potrà mutare la proposta equazione in altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante, per indi poi fissare costante la suddetta dx.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xdxdy = yddy$, in cui è costante dx; la scrivo così: $xdx = ydy^{-1}ddy$. Paragonata questa con la canonica, sarà $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 1$, quindi surrogati questi valori nell'equazione generale differenziale del primo grado di sopra ritrovata, averemo

$$\frac{1}{2}zzdt = \frac{t}{1+tz} \times \frac{3}{2}zzdt + \frac{1}{2}tz^3dt - dz.$$

ESEMPIO II.

Sia $p = 1$, $n = -1$, $m = -1$, cioè l'equazione $ax^{-1}dx = y^{-1}dy^{-1}ddy$, o sia $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, in cui è costante la flussione dx. Rispetto a questa sarà inutile il metodo, poichè si avrà $p + m = 0$, ed in conseguenza infinito ciascuno de' termini dell'equazione generale differenziale del primo grado, a riserva dell'ultimo.

Ma in questo caso, senz'altro artifizio, è facile la riduzione. Scrivo adunque l'equazione così: $xddy = aydydx$, ma l'integrale del primo membro è $xdy - ydx$, quello del secondo è $\frac{ayydx}{2}$; dunque $xdy - ydx = \frac{ayydx}{2} \pm bdx$.

56. Il secondo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti delle indeterminate, e dei loro differenziali sia in ciascun termine la stessa. Supposte x, ed y le due indeterminate, e dx costante, si riducono queste al caso del num. 49. col porre $x = c^u$, ed $y = c^u t$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, e le u, t due nuove indeterminate. Per far vedere il metodo, prendo l'equazione $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, la quale, sebbene è di una sola dimensione, e di tre soli termini, ciò non ostante il metodo è generale, e serve, quanti si sieno i termini, e qualunque la dimensione, purchè vi sia la condizione notata.

Pongo adunque $x = c^u$, $y = c^u t$, sarà $dx = c^u du$, e perchè dx è costante, averemo $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$; sarà pure $dy = c^u dt + c^u t du$, $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu}$, ma $ddu = -du^2$, adunque $ddy = c^u \times \overline{ddt + 2dudt}$. Sostituiti pertanto questi valori nella proposta equazione, sarà essa

$$at^{-m-1} du^p \times \overline{dt + tdu}^{\,2-p} + bt^{-n-1} du^q \times \overline{dt + tdu}^{\,2-q} =$$

$ddt + 2dudt$. Perchè adunque manca in questa la indeterminata u, si potrà procedere avanti col metodo del suddetto num. 49.

Faccio

Faccio $du = zdt$, ſarà $ddu = dzdt + zddt$, ma $ddu = -du^2 = -zzdt^2$, adunque $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$, quindi ſurrogati queſti valori, averemo

$at^{-m-1} z^p dt^p \times \overline{dt + ztdt}^{\,2-p} + bt^{-n-1} z^q dt^q \times \overline{dt+ztdt}^{\,2-q} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2$, o ſia $at^{-m-1} z^p dt \times \overline{1 + zt}^{\,2-p} + bt^{-n-1} z^q dt \times \overline{1+zt}^{\,2-q} = -\frac{dz}{z} + zdt$, equazione differenziale del primo grado. Da ciò ſi vede, che da principio potevaſi ridurre la propoſta equazione ponendo $x = c^{\int zdt}$, ed $y = c^{\int zdt}\, t$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $xdxdy - ydx^2 = yyddy$.

Per rapportarla alla canonica, la ſcrivo così: $xy^{-2} dxdy - y^{-1} dx^2 = ddy$, ſarà dunque $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 0$, $b = -1$, $q = 2$; quindi ſurrogati queſti valori nell'equazione canonica differenziale qui ſopra ritrovata, averemo l'equazione ridotta $t^{-2} zdt \times \overline{1 + zt} - t^{-1} zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, o ſia $\frac{zdt + zztdt}{tt} - \frac{zzdt}{t} = -\frac{dz}{z} + zzdt$, cioè $zzdt - zzttdt = -ttdz$.

Passando avanti per l'integrazione, sarà $\frac{ttdt + dt}{tt} = \frac{dz}{zz}$, e però integrando, $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$, (la f è la costante aggiunta per l'integrazione) cioè $ttz + z = -t + ftz$, ma per le sostituzioni $z = \frac{du}{dt}$, $x = c^u$, $y = c^u t$, sarà $du = \frac{dx}{x}$, $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$, e però $z = \frac{xdx}{xdy - ydx}$, quindi surrogati i valori di t, e di z, averemo $\frac{xdx + ydy}{ydx} = f$.

57. Il terzo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali l'una delle due variabili, qualunque siasi, assieme con i suoi differenziali forma in ogni termine perpetuamente un medesimo numero di dimensioni. Ma bisogna distinguere due casi; l'uno quando sia costante il differenziale di essa variabile, che forma il medesimo numero di dimensioni; l'altro quando sia costante il differenziale dell'altra.

E quanto al primo caso: sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, in cui la somma degli esponenti di x, e di dx in ogni termine è la stessa; P, Q sieno funzioni qualunque della y, e dx sia costante. Per ridurre questa equazione, si

fac-

cia $x = c^u$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, ed u una nuova variabile. Sarà adunque $dx = c^u du$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$. Sostituiti questi valori nell'equazione, averemo
$Pdy^{m+2} + Qdu^n dy^{m+2-n} = du^m ddy$, la quale, perchè non contiene la u, sarà soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, sarà $ddu = dzdy + zddy$, ma $ddu = -du^2$, e $du^2 = zzdy^2$, adunque averemo $zddy + dzdy = -zzdy^2$, e però $ddy = \dfrac{-zzdy^2 - dzdy}{z}$.

Sostituiti pertanto nella ritrovata equazione questi valori di du, e ddy, sarà
$Pdy^{m+2} + Qz^n dy^{m+2} = -z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m+1} dy^{m+1} dz$,
e dividendo per dy^{m+1},
$Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$, equazione del primo grado. Potevasi adunque sul bel principio porre $x = c^{\int zdy}$, e così in un sol colpo ridurre l'equazione.

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2adx^2dy + axdxddy = 2xdxdy^2 + 2xxdyddy$, in cui sia costante dx. Pongo adunque $x = c^{\int zdy}$, e però $dx = zdyc^{\int zdy}$; $ddx = c^{\int zdy} \times \overline{zzdy^2 + zddy + dydz}$, ma dx è costante, dunque $zzdy^2 + zddy + dzdy = 0$, e però $ddy = -\frac{zzdy^2 - dzdy}{z}$. Sostituiti adunque nell'equazione i valori di x, e di dx, averemo $2azzdy^3 + azdyddy = 2zdy^3 + 2dyddy$, e posto il valore di ddy, $2azzdy^3 + azdy \times \overline{-zzdy^2 - dzdy} = 2zdy^3 + 2dy \times \overline{-\frac{zzdy^2 - dzdy}{z}}$, cioè dividendo per dy^2, $az^3dy - azdz = -2dz$, o sia $ady = \frac{azdz - 2dz}{z^3}$, ed integrando, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{zz}$, e finalmente restituendo il valore di z dato dalla supposizione fatta di $x = c^{\int zdy}$, cioè $z = \frac{dx}{xdy}$, averemo l'equazione ridotta

$$aydx^2 = xxdy^2 - axdxdy.$$

58. Rispetto al secondo caso, sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, in cui sia costante dy, e P, Q sieno funzioni qualunque di y.

Pongo, come sopra, $x = c^u$, e però $dx = c^u du$, $ddx = c^u ddu + c^u du^2$. Fatte le sostituzioni nell'equazione canonica, averemo $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$, la quale, per non contenere la u, è soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, quindi essendo costante dy, sarà $ddu = dzdy$, e però fatte le sostituzioni, avremo $Pdy^{m+1} + Qz^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, e dividendo per dy^m, $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, equazione del primo grado, la quale potevasi in un sol colpo ridurre ponendo, come sopra, $x = c^{\int zdy}$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $2dxdy = addx - yddx$, in cui sia costante dy. Pongo adunque $x = c^{\int zdy}$, quindi $dx = zdy \times c^{\int zdy}$, $ddx = c^{\int zdy} \times \overline{zzdy^2 + zddy + dydz}$; ma si si suppone costante dy, dunque $ddy = 0$, e però $ddx = c^{\int zdy} \times \overline{zzdy^2 + dzdy}$. Fatte pertanto nella proposta equazione le sostituzioni, avremo $2zdy^2 = azzdy^2 + adzdy - zzydy^2 - ydydz$, e dividendo per dy, $2zdy = azzdy + adz - zzydy - ydz$, equazione differenziale del primo grado.

Per passare alla integrazione, divido l'equazione per $az - yz$, onde sia $\frac{2dy}{a-y} = zdy + \frac{dz}{z}$, o pure $\frac{2dy}{a-y} - \frac{dz}{z} = zdy$, quindi facendo uso del metodo del num. 24., se così piace, ed integrando, averemo $-\frac{1}{\overline{a-y}^2 \times z} = -\frac{1}{a-y} + m$, e finalmente restituendo il valore di $z = \frac{dx}{xdy}$, averemo l'equazione ridotta $ydx + xdy = adx$, trascurando la costante m aggiunta nell' integrazione.

'A servito quest' esempio per l'applicazione del metodo, per altro erano superflue tante operazioni, mentre l'equazione $2dxdy = addx - yddx$ si riduce in un batter d'occhio, trasportando il termine $yddx$, e scrivendo $2dxdy + yddx = addx$, poichè essendo costan-

te

te dy, l'integrale del primo membro è $ydx + xdy$, come è chiaro.

59. Oltre a ciò, che è ſtato detto intorno alle equazioni differenzio-differenziali, nelle quali neſſuna prima fluſſione ſia ſtata preſa coſtante, ſi può aggiungere un' altro metodo più univerſale, il quale ſerve per tutte quelle, che ſono compreſe ſotto la formola canonica $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} = dy^m ddy$, in cui la z è in qualunque modo data per le funzioni di x, e di y.

Per ridurre queſta, ſi determini per coſtante la fluſſione $\frac{dx}{q}$, e ſia pure la q in qualunque modo data per le funzioni di x, e di y; indi ſi ponga $\frac{dx}{q} = dp$. Poichè $\frac{dx}{q}$ è coſtante, ſarà differenziando, $qddx - dxdq = 0$, cioè $ddx = \frac{dxdq}{q}$, o ſia, poſto in luogo di $\frac{dx}{q}$ il valore dp, $ddx = dqdp$. In oltre ſi ponga $dy = udp$, e preſe le ſeconde differenze nell' ipoteſi di dp coſtante, per eſſer eguale alla coſtante $\frac{dx}{q}$, ſarà $ddy = dudp$. Surrogati adunque nell'equazione canonica i valori così determinati in luogo di dx, ddx, dy, e ddy, averemo l'equazione $z^{m+1}q^m dq dp^{m+1} + \frac{u^{m+1}dz dp^{m+1}}{z} = u^m du dp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1}, sarà $z^{m+1}q^m dq + \frac{u^{m+1}dz}{z} = u^m du$, o sia $q^m dq = \frac{zu^m du - u^{m+1}dz}{z^{m+2}}$, ed integrando, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{\overline{m+1} \times z^{m+1}}$, e però $u = z \times \overline{q^{m+1} + \overline{m+1} \times g}^{\frac{1}{m+1}}$.

Ma $u = \frac{dy}{dp} = \frac{qdy}{dx}$, adunque $\frac{qdy}{dx} = z \times \overline{q^{m+1} + \overline{m+1} \times g}^{\frac{1}{m+1}}$, equazione ridotta alle prime differenze.

60. Intorno a quest'ultima equazione è da osservarsi, che se la quantità z sarà in tal modo data per x, e per y, che possa assegnarsi alla quantità q un valor tale, dato pure per x, e per y, onde in essa equazione sieno separabili le indeterminate, e però costruibile, o algebraicamente, o almeno per le quadrature, averemo la curva, da cui dipende l'equazione differenzio-differenziale. E perchè molti possono essere i valori da assegnarsi alla q, molte potranno essere le curve, e ciascun valore della q ci somministrerà una diversa curva o trascendente, o algebraica, la quale soddisfa alla questione.

Sia

Sia l'equazione

$$\frac{x^4yydxddx}{a^4} + \frac{2aaydxdy^2 + aaxdy^3}{xy} = aadyddy.$$

Riferendo questa alla canonica, sarà $m = 1$, $z = \frac{xxy}{aa}$,

e però la ridotta $\frac{qdy}{dx} = \frac{xxy}{aa} \times \overline{qq + 2gg}^{\frac{1}{2}}$.

Prendo la $q = x$; sarà $\frac{xdy}{dx} = \frac{xxy}{aa} \sqrt{xx + 2gg}$, cioè

$\frac{aady}{y} = xdx \sqrt{xx + 2gg}$, il di cui integrale dipende in parte dalla quadratura dell'iperbola, e la curva sarà trascendente.

61. Nel fare passaggio dalle prime alle seconde differenze, o non si assume flussione alcuna per costante, o si assume quella, che più si vuole, come è stato detto; quindi nel ricercare le sommatorie delle formole del secondo grado, poichè si sa qual partito sia stato preso, si sa altresì come governarsi, e ne sono state spiegate le regole.

Ma vi sono infiniti Problemi, che portano alle seconde differenze senza, che si sappia quali costanti involvano le formole indi nascenti. Accade tal volta, che all'espressione analitica arrivare non si possa senza valersi delle costanti, e succede altresì talora, che l'equazione si sviluppi senza ricorrere alle costanti. Questi due casi adunque devono essere esaminati, e devesi procurare qualche criterio per distinguere l'uno dall'altro. E perchè meglio di ogni altra cosa possono servire gli Esempj, prendo il seguente.

Si dimanda una curva tale, che la di lei assissa elevata a qual si sia dignità sia direttamente, come la seconda differenza dell'ordinata, e reciprocamente come la seconda differenza dell'assissa medesima. Averemo dunque l'analogìa x^m, $\frac{ddy}{ddx}$ :: a, b; e per conseguenza l'equazione $bx^m\, ddx = addy$. In questa equazione osservo ambe le differenze seconde dell'assissa, e dell'ordinata; ma non so, quale costante sia stata assunta, o se non siasi assunta costante alcuna, e perciò non so la strada, per cui incamminarmi.

Nel caso della premessa equazione dico, che nessuna curva fra le possibili soddisfa al Problema, mentre si faccia passaggio dalle prime alle seconde differenze senza valersi delle costanti. All'opposto, determinate le costanti, si ritroveranno le curve, che adempiono le condizioni del Problema, ma infinite di numero, e differenti di natura, siccome quelle, che variano al mutarsi della costante arbitraria, che si assume.

Per distinguere l'una dall'altra spezie di queste equazioni

zioni si può far uso della maniera, o canone, che nascerà da' seguenti esempj, e servirà in tutti que' casi, nei quali il calcolo integrale non ci abbandona.

ESEMPIO I.

Venga proposta l'equazione
$z^{m+1}dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} = dy^m ddy$; dico essere questa una di quelle tali formole, alle quali si può giugnere senza pigliare quantità alcuna in figura di costante. La variabile z sia data in qualunque modo per x, ed y.

La dimostrazione si renderà generale, per quanto si può, pigliando come costante la flussione $\frac{dx}{q}$, in cui q è una funzione di x, ed y in qualunque modo combinate. Pongo per tanto $\frac{dx}{q} = dp$, e giacchè il primo membro di questa equazione è costante, sarà tale anche il secondo dp; per lo che essendo $dx = qdp$, se si passi alle seconde differenze, sarà $ddx = dqdp$.

Appresso facciasi $dy = udp$, e prese le seconde differenze nell'ipotesi di dp costante, averassi $ddy = dudp$. Quindi surrogati nella equazione principale i valori così

de-

determinati, nascerà l'equazione $z^{m+1}q^m dq dp^{m+1} + \frac{u^{m+1}dz dp^{m+1}}{z} = u^m du dp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1}, nascerà l'equazione libera dall'incognita p, e dalle sue funzioni, cioè $z^{m+1}q^m dq + \frac{u^{m+1}dz}{z} = u^m du$. Sommando adunque, per le spiegate regole, non ommessa l'addizione della costante g, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{\overline{m+1} \times z^{m+1}}$, la quale equazione ci dà $u = z \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$. E poichè $dy = udp = \frac{udx}{q}$, fatte le opportune sostituzioni, ci si presenta l'equazione al più semplice stato ridotta, cioè

$$dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$$, il che ec.

Dalla premessa maniera d'operare si deducono i seguenti Corollarj.

I. Se determinata la grandezza z, l'ultima equazione si costruirà, almeno per le quadrature, mentre ciò possa eseguirsi è manifesto, che infinite curve rispondono alla nostra formola, le quali cangiano natura alla mutazione della flussione costante assunta $\frac{dx}{q}$, ed ogni valore della

quan-

quantità q ci somministra una nuova equazione locale o algebraica, o trascendente.

II. Benchè alterato il valore della spezie q, nascano curve diverse, certo è però, che se pongasi la costante aggiunta $g = o$, averassi sempre l'equazione $dy = zdx$. In questo caso nulla rileva, quale differenza $\frac{dx}{q}$ siasi presa per costante; conciosiacchè collo sparire della data g, anche la variabile q si dilegua.

III. Ed ecco il segno, onde si conosce, che alla nostra equazione primaria si perviene senza assumere costante flussione alcuna, e che in tale supposizione la sua sommatoria si è $zdx = dy$. Di fatto richiamata sotto gli occhj la nostra espressione $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} - dy^m ddy = o$, e di bel nuovo differenziando l'integrale $zdx = dy$, senza assumere alcuna costante, onde si abbia $zddx + dzdx = ddy$, se con il mezzo di queste due ultime equazioni farassi svanire nella formola principale, prima la dy, poscia la dx con le loro funzioni, si scoprirà

$$z^{m+1} dx^m ddx + z^m dzdx^{m+1} - z^{m+1} dx^m ddx - z^m dzdx^{m+1} = o,$$

$$dy^m ddy - \frac{dz}{z} dy^{m+1} + \frac{dz}{z} dy^{m+1} - dy^m ddy = o.$$

IV. Maneggiata la formola primaria, come sopra, ed essendosi ritrovata l'equazione ridotta al primo grado, cioè

cioè $dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$, si dovrebbe fare transito alle integrazioni, le quali alle volte sono superiori alla nostra industria, secondo i varj valori dell'esponente m della frazione z data per x, e per y, e della quantità $\frac{dx}{q}$, che si piglia per costante. Comunque vada la faccenda, determinati in infiniti casi particolari i predetti valori, e scoperta l'equazione locale della curva in termini finiti, quando si passi alle prime, indi alle seconde differenze, tenuta ferma la costante $\frac{dx}{q}$, ci si presenterà la nostra formola principale. Ma mutata costante, altre, ed altre formole si troveranno. Non mi fermo di più, perchè ciò è manifesto tornando indietro per le vestigia dell'Analisi.

V. Interviene lo stesso, tolta per costante la prima flussione $\frac{dy}{q}$; conciosiacchè fatta l'operazione a norma del metodo, la quale io tralascio per brevità, arriverassi all'equazione ridotta $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \overline{mg + g}^{\frac{1}{m+1}}$, in cui parimente si noti, che fatta $g = 0$, torna a restituirsi l'equazione $dx = \frac{dy}{z}$ espressa per le prime differenze.

VI.

VI. Adoperate alcune limitazioni più ſemplici, cioè $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, ſe ſi farà uſo della costante $\frac{dx}{q}$, come nel Corollario IV., la formola $dy = \frac{zdx}{q} \times \overline{q^{m+1} + gm + g}^{\frac{1}{m+1}}$ ſi muta nella ſeguente $dy = xdx \sqrt{xx + 2g}$, la quale ammette integrazione analitica. Fatto poi uſo della eſpreſſione contenuta nel Corollario V. $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \overline{mg + g}^{\frac{1}{m+1}}$ naſcente dalla coſtante aſſunta $\frac{dy}{q}$, tenute ferme le medeſime limitazioni di $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, riſulta l'eſpreſſione $\frac{xxdx}{1 - x\sqrt{2g}} = dy$, che ſenza l'ajuto de' logaritmi non è ſommabile, ed in conſeguenza ci dà curve traſcendenti.

Egli è adunque manifeſto, che alla formola differenziale del ſecondo ordine $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} = dy^m ddy$ ſi poteva arrivare ſenza prendere alcuna coſtante, nel qual caſo â luogo l'integrale $zdx = dy$; ovvero fiſſando per coſtanti, a cagion d'eſempio, le fluſſioni $\frac{dx}{q}$, $\frac{dy}{q}$, ed allora ci ſi fanno avanti le ſommatorie, che in tali suppoſizioni ſi ſono ritrovate.

ESEMPIO II.

Abbiaſi l'equazione $x^m ddx = ddy + dy^2$. Dico, che ad eſſa non ſi può arrivare, ſenza prendere una qualche coſtante, ſalvo l'unico caſo, in cui ſia $m = -1$. Per vederlo chiaramente; maneggio la formola nel ſeguente modo.

Primieramente prendo per coſtante dx, e però $ddx = 0$, dunque $-\frac{ddy}{dy} = dy$, ed integrando $l\frac{dx}{dy} = y$, ovvero $\frac{dx}{dy} = c^y$. Pongaſi $c^y = z$, ſarà $ylc = lz$, e però $dy = \frac{dz}{z}$, e ſoſtituendo in luogo di dy queſto valore, avraſſi $\frac{zdx}{dz} = c^y$, ma $c^y = z$, dunque $dx = dz$, ed $x = z = c^y$; e però $\frac{dx}{x} = dy$, equazione alla logaritmica.

Secondariamente mi faccio ad inveſtigare, coſa succeda nell' ipoteſi di un' altra coſtante, per eſempio dy, e però $ddy = 0$. Pongo $dx = sdy + cdy$; la s è una nuova variabile, e la c una quantità data. M'inoltro

alle

alle seconde differenze, sarà $ddx = dsdy$, e fatta la sostituzione, $x^m dsdy = dy^2$, o sia $x^m ds = dy$; ma $dy = \frac{dx}{s+c}$, dunque $sds + cds = x^{-m} dx$, e sommando, ommessa l'aggiunta della costante, $\frac{ss}{2} + cs = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, ovvero $s + c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}$. Ma $dx = \overline{s+c} \times dy = dy \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}$, dunque $\frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}} = dy$.

Proseguisco, e cerco, se stia per avventura nascosta sotto l'ultima formola la logaritmica, che essendosi di sopra ritrovata nell'ipotesi della costante dx, può essere, che abbia luogo anche nell'altra supposizione della costante dy. Fatta $c = 0$, è d'uopo, che si verifichi l'uguaglianza $\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}} = x$, o pure $2x^{-m+1} = \overline{-m+1} \times xx$. E perchè stia salda l'egualità, la stessa quantità $-m+1$ deve essere, tanto nel coefficiente, quanto nell'esponente, $= 2$; onde ne segue, che ciò s'ottiene, determinato l'indice $m = -1$.

Nella formola adunque $x^m ddx = ddy + dy^2$, limitando il valore dell'esponente $m = -1$, si perviene all'equazione differenziale del secondo grado senza assumere costante, la di cui sommatoria è l'espressione logaritmica $\frac{dx}{x} = dy$. In ogni altro caso non si può ottenere la premessa espressione, se non fissando qualche grandezza infinitesima del primo ordine, siccome costante.

ESEMPIO III.

Rimane, che si proponga per ultimo una equazione differenziale dell'altra classe, a cui non si possa mai giungere senza assumere una costante.

Ripiglio il Problema: Costruire una curva, in cui qualsivoglia dignità dell'assissa stia in ragione diretta della seconda flussione dell'ordinata, ed inversa della seconda flussione dell'assissa.

L'equazione è $bx^m ddx = addy$. Facciasi $dx = qdp$, $dy = udp$; e praticate le operazioni, come nell'Esempio primo, averemo, prese le seconde differenze, $ddx = dpdq$, $ddy = dudp$, e surrogati i valori, $bx^m dq = adu$,

e

e ſommando, $\int bx^m dq = au \pm g$. Ma $dy = udp = \frac{udx}{q}$,

dunque $dy = \frac{dx}{q} \int x^m dq \pm \frac{gdx}{q}$. In queſto caſo, fatta

$g = 0$, qual ſi ſia valore della ſpezie q ci dà una curva differente, ſe pure non ſi poneſſe l'eſponente $m = 0$, con che ſi diſtrugge l'ipoteſi, e ſi cangia problema. Lo ſteſſo dicaſi, fatta coſtante la frazione $\frac{dy}{q}$, e da ciò

ſi conchiuda, non eſſer poſſibile un'equazione differenziale del primo grado, che ſenza il benefizio della coſtante reſtituiſca la noſtra formola, quando di bel nuovo venga differenziata; concioſiacchè, ſe vi foſſe, avrebbe a manifeſtarſi in qualunque aſſunzione di coſtante, e pure l'analiſi ci dimoſtra il contrario.

PROBLEMA I.

62. *Dato il raggio oſculatore in qual ſi ſia modo per l'ordinata dalla curva, ritrovare la curva.*

Siccome, data la curva, il ritrovare il di lei raggio oſculatore ſi chiama il problema, o metodo diretto de' raggi oſculatori, di cui ſi è trattato al Capo V.

del

del Libro secondo; così, dato il raggio osculatore, ritrovare, quale sia la curva, a cui egli appartiene, si chiama il problema inverso de' raggi osculatori. Sia pertanto il raggio osculatore $= r$ dato in qualsivoglia modo per la ordinata y della curva; presa quella, che si vuole, delle formole de' raggi osculatori per le curve in primo luogo riferite al fuoco, per esempio

$\frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, in cui dx è costante, e la ds è l'elemento della curva, averemo l'equazione

$r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, o pure essendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, e $dsdds = dyddy$, perchè dx è costante, $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds - ydxdds}$.

Per ridurre questa equazione mi servo del metodo del num. 49., e però pongo $ds = pdx$, onde $dds = dpdx$, quindi fatte le sostituzioni nell'equazione, sarà $r = \frac{ppydy}{pdy - ydp}$, o sia $\frac{pdy - ydp}{pp} = \frac{ydy}{r}$, e però integrando, giacchè r è data per y, $\frac{y}{p} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$, ma $p = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, dunque la curva sa-

rà

rà $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$; equazione ridotta alle prime differenze, perchè eſſendo r data per y, l'integrale $\int \frac{ydy}{r}$ ſi potrà ſempre avere, almeno traſcendentemente.

In altro modo:

Scrivo l'equazione $r = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$ così:

$\frac{yds^3}{r} = dxds^2 - ydxddy$, indi dal punto B, (*Fig.* 8.) da cui partono le ordinate BE della ricercata curva AEC, conduco normale ad EB la BF terminata al raggio oſculatore EQ, e chiamate $BF = p$, $EF = q$, per le note formole della normale, e ſottonormale, ſarà $q = \frac{yds}{dx}$, $p = \frac{ydy}{dx}$, o ſia $dy = \frac{pdx}{y}$, e differenziando nell'ipoteſi di dx coſtante, $ddy = \frac{ydpdx - pdxdy}{yy}$, e fatta la ſoſtituzione nell'equazione principale, ſarà

$\frac{yds^3}{r} = dxds^2 - dpdx^2 + \frac{pdx^2dy}{y}$, ma $ds = \frac{qdx}{y}$, dunque

$\frac{q^3dx}{r} = qqdx - yydp + pydy$, ed eſſendo $dx = \frac{ydy}{p}$,

ſarà

farà $\frac{q^3 dy}{r} = qqdy + ppdy - ypdp$. Ma, per l'angolo retto EBF, è $pp = qq - yy$, e $pdp = qdq - ydy$, quindi fatta la sostituzione, si averà $\frac{qqdy}{r} = 2qdy - ydq$, e moltiplicando per y, indi dividendo per qq, sarà $\frac{ydy}{r} = \frac{2qydy - yydq}{qq}$, ed integrando, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{yy}{q}$, ma $q = \frac{yds}{dx}$, dunque $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Più semplicemente ancora, sfuggendo le seconde differenze, si potrà fare così:

Preso l'archetto infinitesimo EC, sia CED la corda prodotta, a cui sia normale BD, se ora si chiami $BD = p$, per le cose dette al numero 115. del Capo V. del secondo Libro, QE, cioè $r = \frac{ydy}{dp}$, e però $\frac{ydy}{r} = dp$, ed integrando, per essere r data per y, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = p$; ma nello stesso citato luogo $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dunque

que $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{y}{b}\sqrt{aa + bb}$, adunque sarà

$\int \frac{bdy}{\sqrt{aa + bb}} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommessa per maggiore semplicità la costante b, $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e però $bbdx^2 + bbdy^2 = aadx^2 + bbdx^2$, cioè $bdy = adx$, logaritmica spirale dell' Esempio V. num. 128. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio QE, ci venga dato in qualunque modo per l'ordinata y il co-raggio HE, che chiamo $= z$. Per la similitudine de' triangoli EBD, QEH, sarà EB, $BD :: QE$, EH, cioè y, $p :: \frac{ydy}{dp}$, z, e però $z = \frac{pdy}{dp}$, o sia $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{z} \pm b = lp$. Sia $z = y$, sarà $\int \frac{dy}{y} \pm b = \frac{dp}{p}$, ed integrando, $ly = lp + l\frac{m}{b}$, cioè $y = \frac{pm}{b}$; ma $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dunque $b\sqrt{dx^2 + dy^2} = mdx$, e però $bdy = dx\sqrt{mm - bb}$, logaritmica ſpirale, e la ſteſſa della citata di ſopra, quando ſia $b = b$, $m = \sqrt{aa + bb}$.

63. Per le curve riferite all' aſſe la formola del raggio oſculatore è $\frac{ds^3}{-dxddy}$, poſta dx coſtante, e però l'equazione $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$.

Pongo $dy = qdx$, e però $ddy = dqdx$, onde fatte le ſoſtituzioni, $r = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$, e poſto il valore $\frac{dy}{q}$ in luogo di dx, $r = \frac{dy \times \overline{1 + qq}^{\frac{3}{2}}}{-qdq}$, cioè $\frac{dy}{r} = \frac{-qdq}{\overline{1 + qq}^{\frac{3}{2}}}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, ma $q = \frac{dy}{dx}$, dunque $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{\overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, adunque ſarà $\int \frac{2aady}{\overline{4yy + aa}^{\frac{3}{2}}} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante b, $\frac{2y}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, cioè $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$, parabola dell' Esempio primo num. 122. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio, che chiamo $= z$, la di cui formola, supposta dx costante, è $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Dunque $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = z$, e posta $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, e fatte le sostituzioni de' valori di ddy, e di dx, sarà $\frac{dy \times \overline{1 + qq}}{-qdq} = z$, cioè $\frac{dy}{z} = \frac{-qdq}{1 + qq}$, ed integrando, $\int \frac{dy}{z} \pm b = -l\sqrt{1 + qq}$, quindi se la z, cioè il co-raggio sarà in tal modo dato per y, che $\int \frac{dy}{z}$ sia logaritmico, avremo l'equazione differenziale del primo grado espressa nella solita ordinaria maniera, in altro caso sarà espressa con quantità logaritmiche.

Sia $z = \frac{4y^3 + aay}{aa}$, averemo l'equazione $\int \frac{aady}{4y^3 + aay} \pm b = -l\sqrt{1 + qq}$, ed integrando attual-

 mente,

mente, ommessa la costante b, $l\frac{y}{\sqrt{yy+\frac{aa}{4}}} =$

$l\frac{1}{\sqrt{1+qq}}$, e però $\frac{yy}{yy+\frac{aa}{4}} = \frac{1}{1+qq}$, e posto il

valore di q, $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$, la parabola sopra citata.

64. Il raggio osculatore, o co-raggio sia in secondo luogo dato in qualsivoglia modo per l'assissa x, egli è chiaro, che in questo caso non possono servire le riduzioni avute nel primo, poichè le sommatorie $\int\frac{dy}{r}$, $\int\frac{dy}{z}$ non si averanno mai, se r, e z sieno date per x.

Presa adunque la formola del raggio osculatore in cui è costante dx, cioè $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ per le curve riferite all'asse (giacchè in quelle riferite al fuoco il raggio, o co-raggio non può esser dato per l'assissa) sarà $r = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$; e però istessamente, come sopra, pongo $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le

sosti-

ſoſtituzioni, $r = \frac{\overline{dx^2 + qqdx^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx^2 dq}$, cioè $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{\overline{1+qq}^{\frac{3}{2}}}$,

ed integrando, $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-q}{\overline{1+qq}^{\frac{1}{2}}}$, equazione ridotta alle prime differenze, perchè eſſendo r data per x, la ſommatoria $\int \frac{dx}{r}$ ſi potrà ſempre avere, almeno traſcendentemente. E poſto il valore di q, $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = 2\sqrt{4aa - 2ax}$; adunque ſarà $\int \frac{dx}{2\sqrt{4aa - 2ax}} \pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommeſſa la coſtante b, $\frac{-\sqrt{4aa - 2ax}}{2a} = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e quadrando, e riducendo al comune denominatore, $4aadx^2 - 2axdx^2 - 2axdy^2 = 0$, cioè $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazione alla cicloide del num. 131. Capo V. Libro II.

In

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio. Dunque $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, e posta istessamente $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le sostituzioni in luogo di ddy, e di dy^2, sarà $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$, cioè $\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1 + qq}$, ed integrando, $\int \frac{dx}{z} \pm b = \int \frac{-dq}{1 + qq}$; ma l'integrale dell'omogeneo di comparazione è arco di circolo; dunque se il co-raggio sarà in tal modo dato, che anche $\int \frac{dx}{z}$ sia arco circolare, e questi archi si corrispondano come numero a numero, avremo l'equazione ridotta alle prime differenze, ed espressa in quantità ordinarie.

Sia $z = 2\sqrt{2ax - xx}$, adunque sarà $\int \frac{dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{-dq}{1 + qq}$; ma l'integrale del primo membro è l'arco di circolo, la di cui tangente sia $\frac{\sqrt{2ax - xx}}{x}$, e del secondo è l'arco di circolo, la di cui tangente sia q, dunque sarà $\frac{\sqrt{2ax - xx}}{x} = q = \frac{dy}{dx}$, e però $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazione alla stessa cicloide.

PRO-

PROBLEMA II.

65. *Dato il raggio osculatore in qualunque modo per la curva riferita all' asse, ritrovare la curva stessa.*

La formola del raggio osculatore, posto costante ds (elemento della curva) si è $\frac{dxds}{ddy}$, e però sarà l'equazione $r = \frac{dxds}{ddy}$. Chiamo t la tangente della curva, e p la sottotangente; sarà $\frac{yds}{dy} = t$, e differenziando nell' ipotesi di ds costante, $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$, cioè $ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds}$, onde fatta la sostituzione, sarà $r = \frac{ydxds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$. Ma poichè si â $p = \frac{ydx}{dy}$, e $t = \frac{yds}{dy}$, sarà $dx = \frac{pdy}{y}$, $ds = \frac{tdy}{y}$; onde sostituiti questi valori nella equazione superiore, si averà $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$;

ma

ma $p = \sqrt{tt - yy}$, dunque $r = \frac{tds\sqrt{tt - yy}}{tdy - ydt}$, cioè

$$\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}.$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è in nostra mano, almeno trascendentemente, poichè r è una funzione di s; nel secondo poi facilmente si separano le indeterminate, se si faccia $q = \frac{y}{t}$, con che

averassi la semplicissima equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$.

Se nella formola $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$ in luogo di t si

avesse preso il valore $\sqrt{pp + yy}$, averebbesi ritrovato $r = \frac{\sqrt{pp + yy} \times ds}{pdy - ydp}$, e fatta $\frac{y}{p} = z$, l'equazione pure sem-

plicissima $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}$.

Le due quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$, $\frac{dz}{1 + zz}$ so-

no l'espressione dell'elemento d'arco di circolo; quindi se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ sarà algebraico, o pure dipenderà

da'

da' logaritmi, o da quadrature più alte, la rettificazione delle ricercate curve, ed il valore del raggio osculatore supporrà la quadratura del circolo; ma all'opposto potrà l'uno, e l'altro esser algebraico, se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ convenga con una formola d'arco circolare.

Ritenuta una delle due equazioni, per esempio, la seconda $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}$; poichè $ds = \frac{tdy}{y} = \frac{dy\sqrt{pp + yy}}{y}$, e $p = \frac{y}{z}$, sarà $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{1 + zz}$, onde posto questo valore nell' equazione, averassi $dy = \frac{rzdz}{\overline{1 + zz}\sqrt{1 + zz}}$.

Essendo $ds = \frac{dy}{z}\sqrt{1 + zz}$, sarà anche ds^2, cioè $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2 + zzdy^2}{zz}$, e però $dx = \frac{dy}{z}$.

Il dato raggio osculatore r sia $= 1 + ss$; l'equazione $\frac{dz}{1 + zz} = \frac{ds}{r}$ si muterà in questa $\frac{dz}{1 + zz} = \frac{ds}{1 + ss}$, da cui si ricava $z = s$, e però $r = 1 + zz$. Pongo questo valore nella equazione $dy = \frac{rzdz}{\overline{1 + zz}\sqrt{1 + zz}}$, e sarà $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1 + zz}}$; ed integrando, ommessa la coſtante, $y = \sqrt{1 + zz}$, quindi $z = \sqrt{yy - 1}$. Adunque perchè ô ritenuto $dx = \frac{dy}{z}$, ſarà finalmente $dx = \frac{dy}{\sqrt{yy - 1}}$, equazione della ricercata curva nella ſuppoſizione aſſunta del raggio oſculatore. La coſtruzione dipende dalla quadratura dell'iperbola.

Prendo la formola del raggio oſculatore $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$, in cui neſſuna fluſſione prima è coſtante. Diſpongo l'equazione così: $\frac{dy}{dx} \times \overline{\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}} = \frac{ds}{r}$.

L'integrale di $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ ſi è $ldy - lds$, che pongo $= lp$; dunque ſarà $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$, e però ſarà l'equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$; ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{pp} = ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque $dx = \frac{dy\sqrt{1 - pp}}{p}$; e ſoſtituendo queſto valore, ſarà $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1 - pp}}$, equazione in cui ſono ſeparate le variabili, e che per conſeguenza può trattarſi con la maniera di ſopra uſata.

Sia

Sia la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dsdx}$, in cui è costante dy. Pongo $ds = qdy$, e però $dds = dqdy$, dunque $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2 dq}{dsdx}$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2 = qqdy^2$, onde ricavasi $dx = dy\sqrt{qq-1}$, e $dxds = qdy^2\sqrt{qq-1}$. Fatta pertanto questa sostituzione, sarà $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$.

Sia finalmente la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = \frac{-dxddy}{ds^2}$, in cui è costante dx. Pongo $z = \frac{dx}{dy}$, e però $dz = \frac{-dxddy}{dy^2}$; dunque $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2 dz}{ds^2}$, ma $dx = zdy$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zzdy^2 + dy^2$, quindi $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$.

In qualunque modo adunque si operi, l' integrale $\int\frac{ds}{r}$ sarà sempre riferito alla rettificazione, o quadratura del circolo.

Sia dato in qualunque maniera per la curva il co-raggio, che chiamo $= u$. Prendo una delle tre formole superiori, per esempio quella, in cui è stata presa costante dy, cioè $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$, dove è stato posto $ds = qdy$. Sarà il raggio $r = \frac{uds}{dx}$, e posto questo valore nella formola, averemo $\frac{ds}{u} = \frac{-dsdq}{qdx\sqrt{qq-1}}$; ma $ds = qdy$, e $dx = dy\sqrt{qq-1}$, quindi fatte le sostituzioni, sarà $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$; ma u è data per s, adunque ec.

Qui si osservi, che siccome la sommatoria $\int\frac{ds}{r}$ è eguale all'espressione d'arco circolare, così l'altra sommatoria $\int\frac{ds}{u}$ viene riferita alla quadratura dell' iperbola, o sia a' logaritmi.

66. Con simili, o poco diversi artifizj e maniere si potranno ridurre a' secondi differenziali molte equazioni, o formole espresse con differenziali terzi, quarti ec. Ed in primo luogo il metodo del num. 49. si può estendere (dentro certe limitazioni però) alle equazioni differenziali del terzo ordine, del quarto, del quinto ec., vale a dire si ridurranno sempre al primo ordine le equazioni del terzo, purchè l'una, e

l'altra

l'altra delle variabili finite x, y in esse manchi; si ridurranno quelle del quarto, purchè oltre l'una, e l'altra delle due variabili finite x, y, in esse manchi l'una, o l'altra delle prime flussioni dx, dy con le rispettive funzioni; si ridurranno quelle del quinto, purchè in esse manchino ambe le variabili finite, ed ambe le prime loro flussioni; quelle del sesto, purchè oltre tutto ciò, manchi l'una, o l'altra delle flussioni seconde, e così vadasi discorrendo.

Sia l'equazione $dxdddy + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$, in cui è stata presa costante dx. Faccio al solito $pdx = dy$, e però $dpdx = ddy$, $ddpdx = dddy$; fatte pertanto le sostituzioni, si averà $dx^2 ddp + dx^3 dp = dx^4 + dy^4$; ma $dy^4 = p^4 dx^4$, dunque sarà $ddp + dxdp = dx^2 + p^4 dx^2$, equazione ridotta al secondo ordine. Pongo in oltre $qdx = dp$, ritenendo per costante dx, e però $dqdx = ddp$, onde sostituendo, sarà $dqdx + dpdx = dx^2 + p^4 dx^2$, cioè $dq + dp = dx + p^4 dx$; ma $dx = \frac{dp}{q}$, dunque $dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^4 dp}{q}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Sia l'equazione differenziale del quarto ordine $d^4 y + dxdddy - dx^2 ddy = 0$, in cui sia costante dx. Faccio adunque $pdx = dy$, e però $dpdx = ddy$, e $ddpdx = dddy$, e $dddpdx = d^4 y$; fatte però le sostituzioni, ni, si averà $dddp + dxddp - dx^2 dp = 0$, equazione, che è il caso del sopra posto esempio, onde si fa maneggiare, e facilmente si ridurrà alle prime flussioni.

Il metodo del num. 49. ritrovato già tempo fa dal Sig. Conte Jacopo Riccati prima d'ora mi era noto; ma la qui sopra posta estensione, siccome il problema secondo inverso de' raggi osculatori ora solamente gli ô appresi, che mi è venuto alle mani il secondo Tomo de' commentarj dello Instituto di Bologna; e certamente troppo tardi per me, perchè ritrovandomi già al termine dell'impressione di questa mia fatica, non sono più in tempo di prevalermi d'altre dottissime Dissertazioni, e del P. Vincenzo Riccati figlio del suddetto Sig. Conte Jacopo, e del Sig. Gabriello Manfredi ivi inserite. Basterà adunque averle indicate al Lettore, acciò voglia trarne profitto.

67. Veduta la suddetta estensione del metodo del num. 49., passo ad altre equazioni, e ad altri ripieghi; e però sia l'equazione $pdyddy^2 = pdx^2 dddy - 2pdxddxddy - dpdx^2 ddy$, in cui la p è in qualunque modo data per x, ed y, ed è stato preso per costante l'elemento ds della curva. Poichè ds è costante, sarà $dxddx = -dyddy$, onde sostituito questo valore in luogo di $dxddx$, sarà $pdyddy^2 = pdx^2 dddy + 2pdyddy^2 - dpdx^2 ddy$, cioè cancellato ciò, che si elide, $dpdx^2 ddy = pdyddy^2 + pdx^2 dddy$,

o

o sia $\frac{dp}{p} = \frac{dyddy}{dx^2} + \frac{dddy}{ddy}$, e posto in luogo di $dyddy$ il valore $-dxddx$, sarà $\frac{dp}{p} = -\frac{ddx}{dx} + \frac{dddy}{ddy}$, e finalmente integrando con i logaritmi, $lp = lddy - ldx - lds$, essendo ds costante, e però $p = \frac{ddy}{dxds}$, equazione ridotta alle seconde differenze.

Sia l'equazione $bdzdddx - 3bddzddx - dbdzddx = 0$, in cui la b è in qualunque modo data per x, e z. Si finga la seguente equazione $b^m dz^n ddx^r =$ ad una costante (le m, n, r sono potestà incognite da determinarsi nel progresso), dunque differenziando, sarà $rb^m dz^n ddx^{r-1} dddx + nb^m ddx^r dz^{n-1} ddz + mb^{m-1} dbdz^n ddx^r = 0$, la quale divisa per $b^{m-1} dz^{n-1} ddx^{r-1}$ si riduce ad essere $rbdzdddx + nbddxddz + mdbdzddx = 0$. Paragonata questa equazione termine per termine con la principale proposta, si â $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$, adunque in vece dell' equazione finta $b^m dz^n ddx^r =$ ad una costante, averemo la vera $\frac{ddx}{bdz^3} =$ ad una costante, che è l'integrale della proposta.

Per via di logaritmi ancora si può ottenere la stessa integrazione. Ripiglio l'equazione $bdzdddx - 3bddzddx - dbdzddx = 0$: divido per $bdzddx$, sarà rà $\frac{dddx}{ddx} - \frac{3ddz}{dz} - \frac{db}{b} = 0$, ed integrando, $lddx - ldz^3 - lb =$ ad un logaritmo costante, dunque $\frac{ddx}{bdz^3} =$ ad una costante.

Finirò queste Instituzioni con una avvertenza, ed è, che deve l'accorto Analista procurare con tutta l'industria di scansare nella soluzione de' Problemi le seconde, e molto più le ulteriori flussioni per mezzo di certi ripieghi, che nascono opportunamente sul fatto. Tali artificj si vedono adoperati da illustri Matematici ne' Problemi delle *Curve Elastiche*, *Catenarie*, *Velarie*, in quello degl' *Isoperimetri*, ed in altri, le soluzioni de' quali pubblicate sì negli Atti di Lipsia, come in altre opere, si potranno leggere, a fine di acquistare quella avvedutezza e destrezza, che è necessaria.

F I N E.

TOMO SECONDO.

ERRORI		CORREZIONI
Pag. 432 lin. 11	giungne	giunge
Pag. 435 lin. 22	lineeta	lineetta
Pag. 511 lin. 9	equaaione	equazione
Pag. 515 lin. 14	*NOPQR*	*NOPQMR*
Pag. 587 lin. 17	divegenti	divergenti
Pag. 697 lin. 1	queste frazioni	questa frazione
Pag. 727 lin. 13) lin. 20)	*DCEB*	*DECB*
Pag. 745 lin. 14	*TS*	*TR*
Pag. 790 lin. 17	della	dalla
Pag. 795 lin. ult.	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{9}$	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$
Pag. 844 lin. 10	incogoita	incognita
Pag. 901 lin. 10	$-\frac{apdy-fdp}{ep+m}$	$-\frac{apdp-fdp}{ep+m}$
Pag. 924 lin. 5	$\times -\frac{z^3 dx}{x\,\frac{9}{2}}$	$\times -\frac{z^3 dx}{x^{\frac{9}{2}}}$
Pag. 929 lin. 1	$+\ b^3 xxdz$	$+\ b^3 xxdx$
Pag. 939 lin. 2	dottiffimo	dottiffimo

Fig. 1

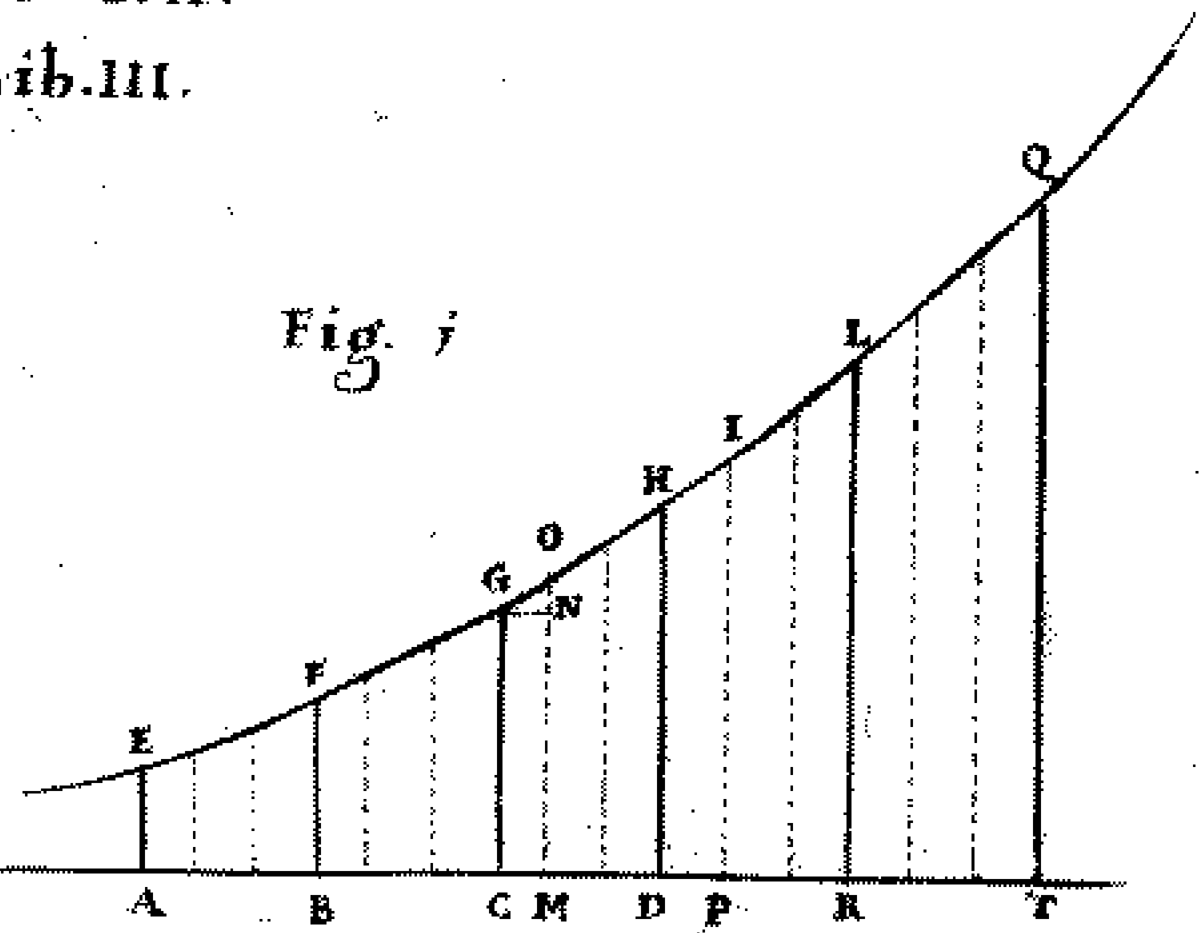


Fig. 2.

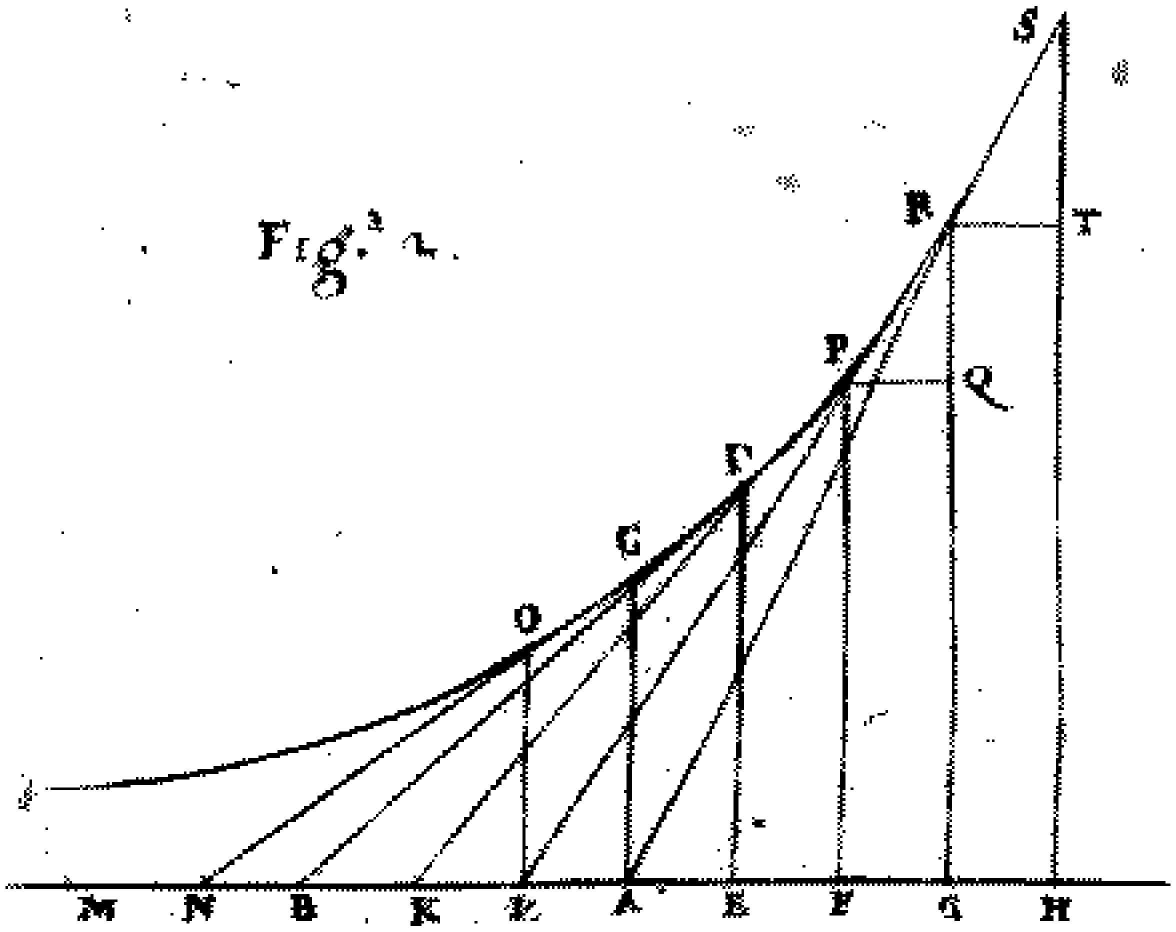


Fig. 3.

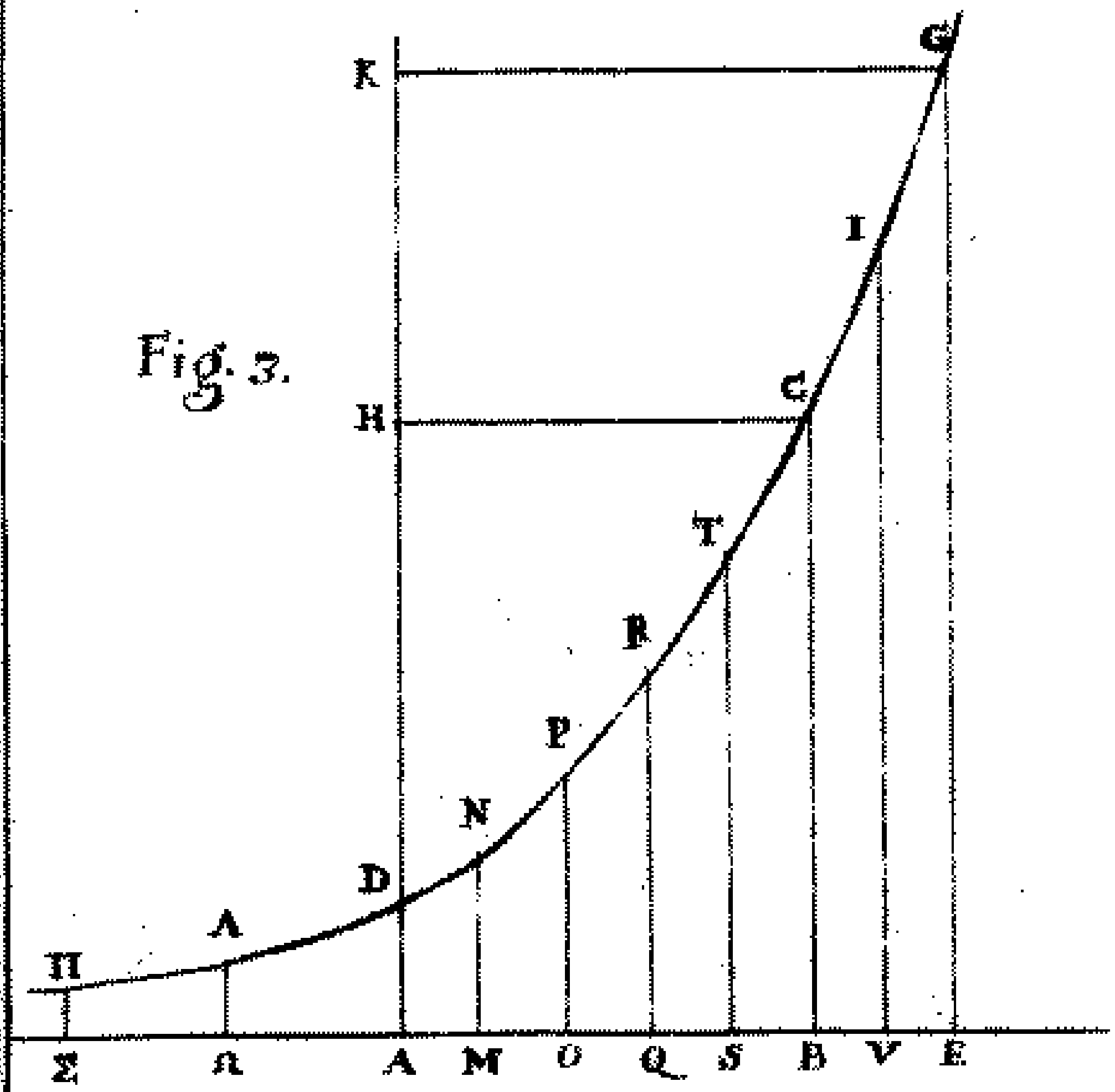


Fig. 4.

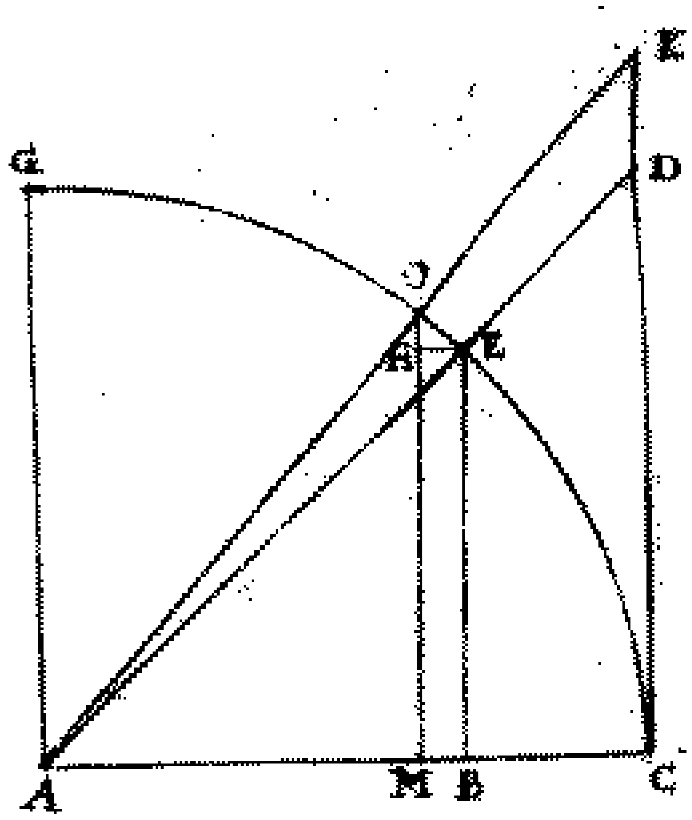


Fig. 5.

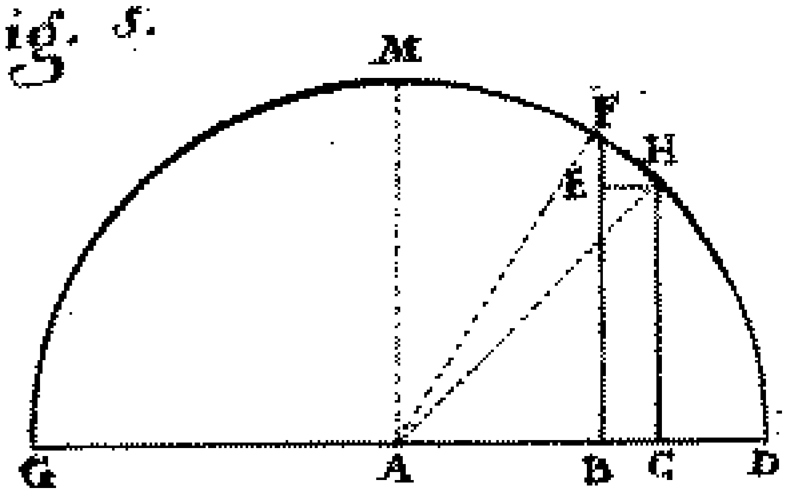


Fig. 6.

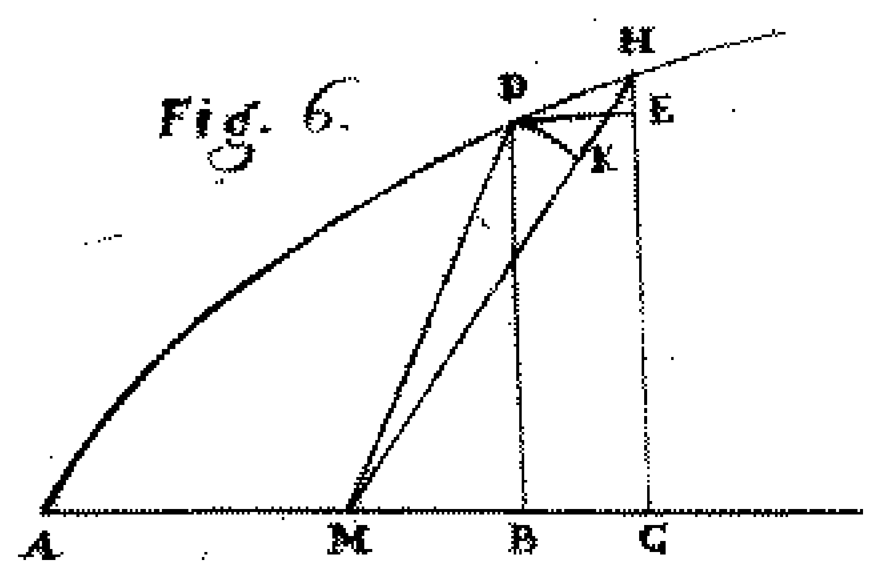


Fig. 1.

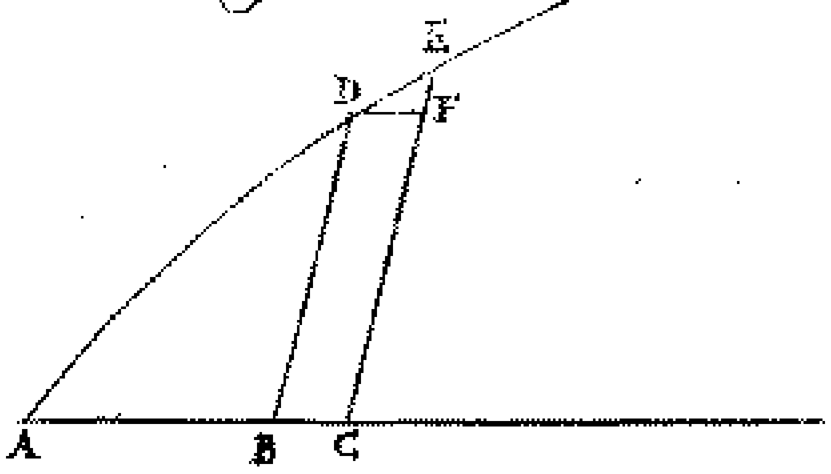


Fig. 2.

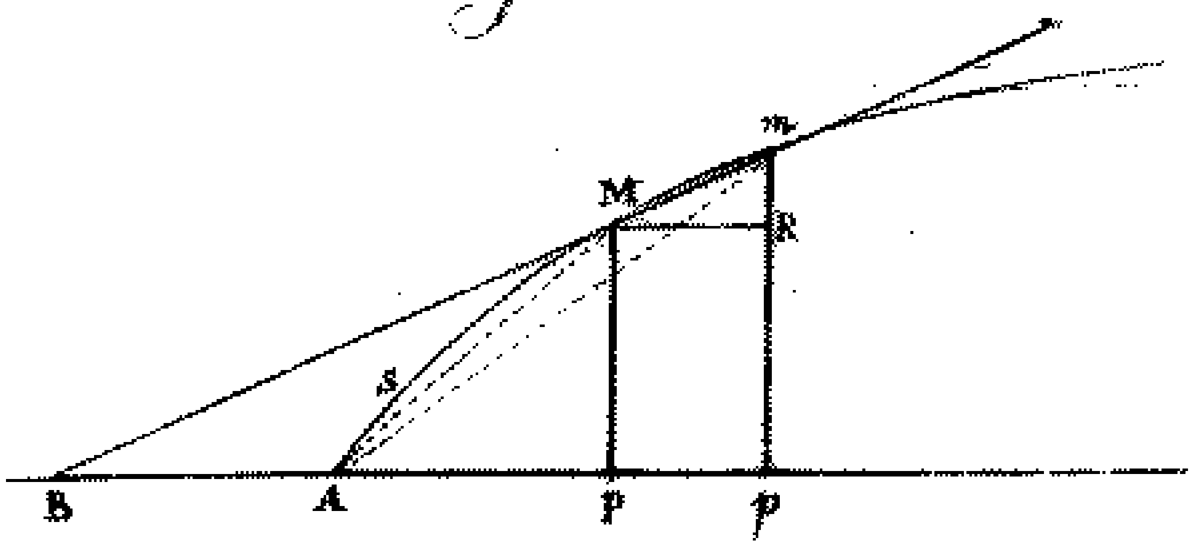


Fig. 3

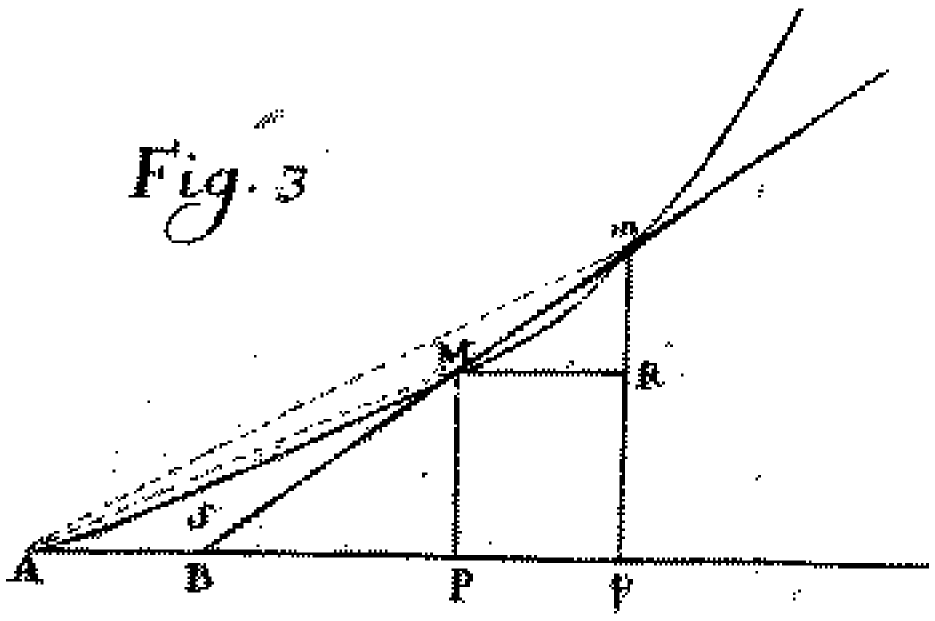


Fig. 4

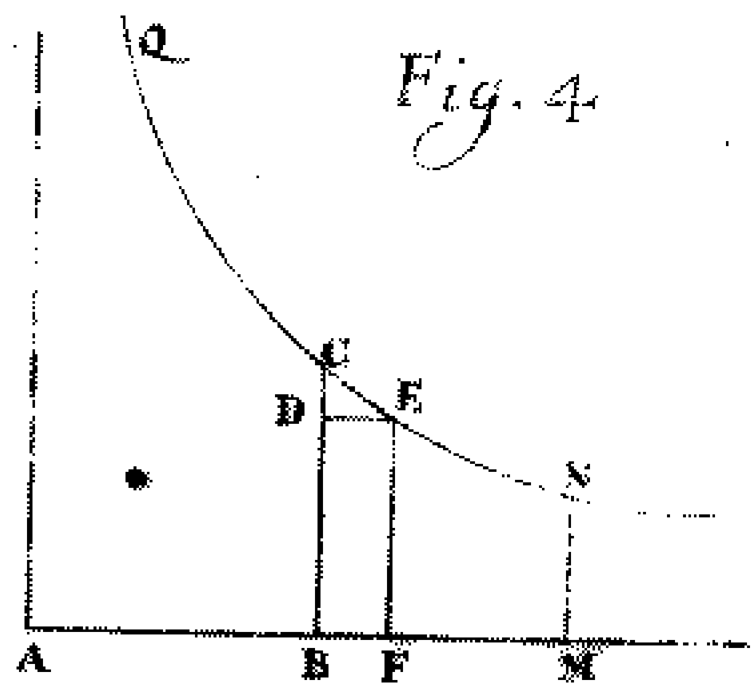


Fig. 5.

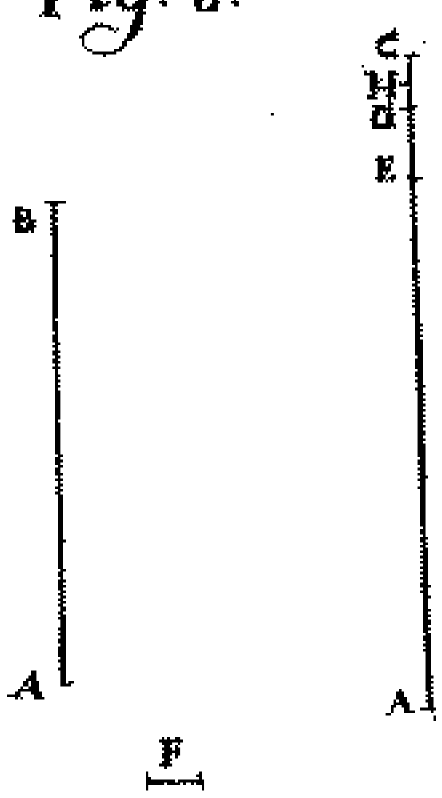


Fig. 6.

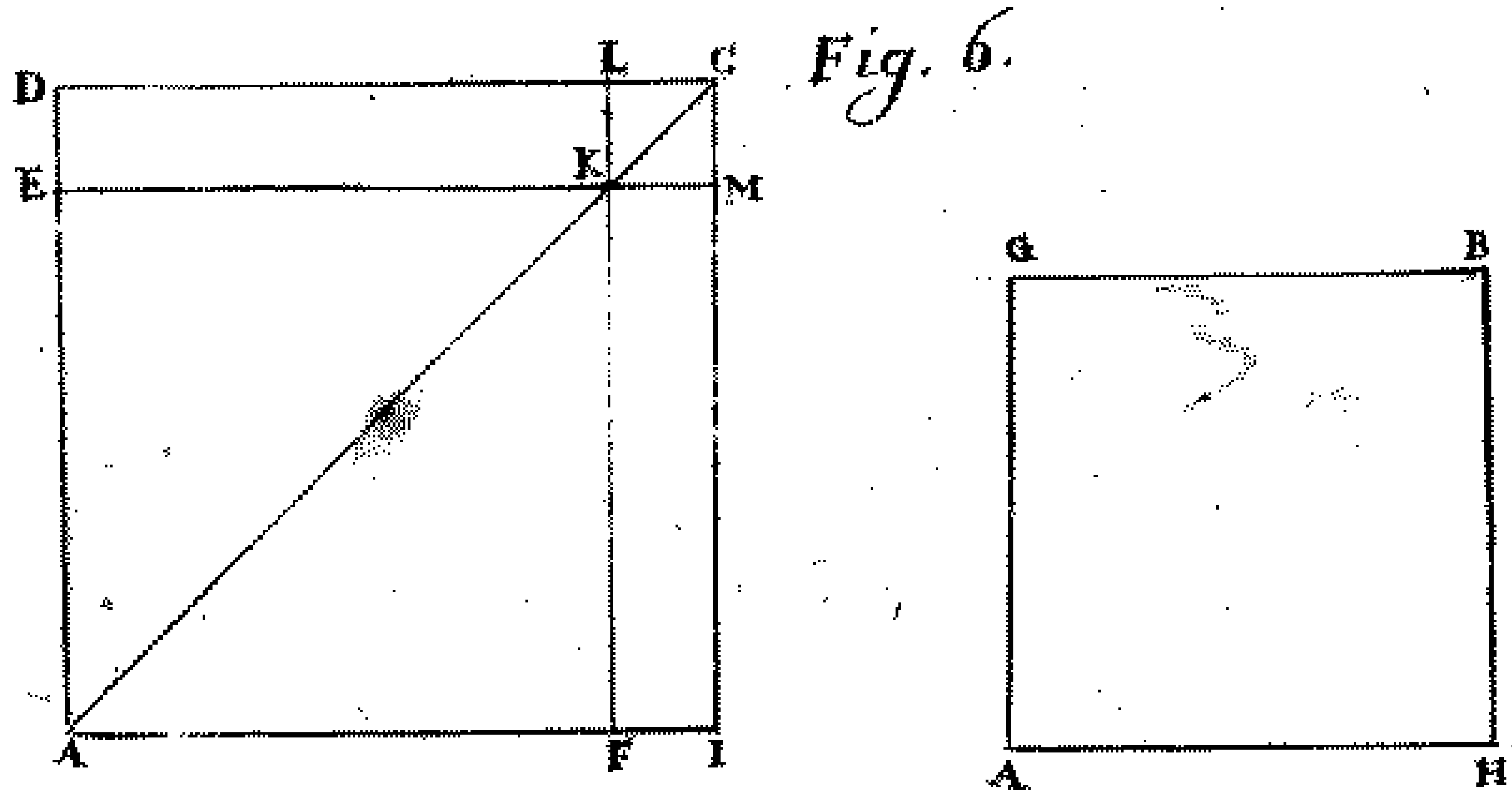


Fig.a 7.

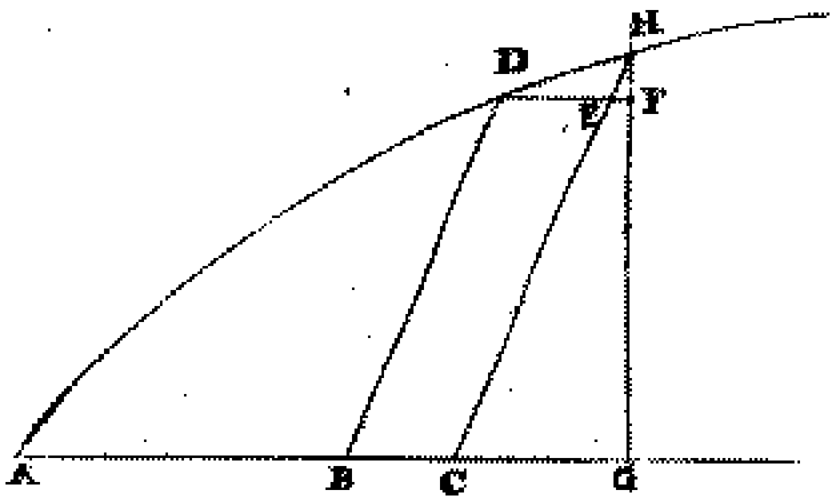


Fig.a 8.

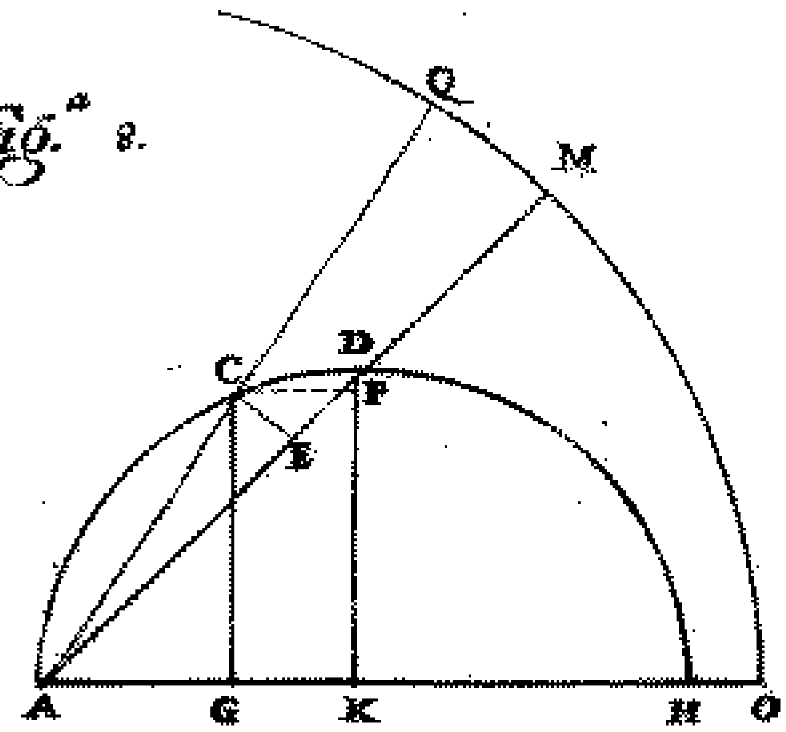


Fig.a 9.

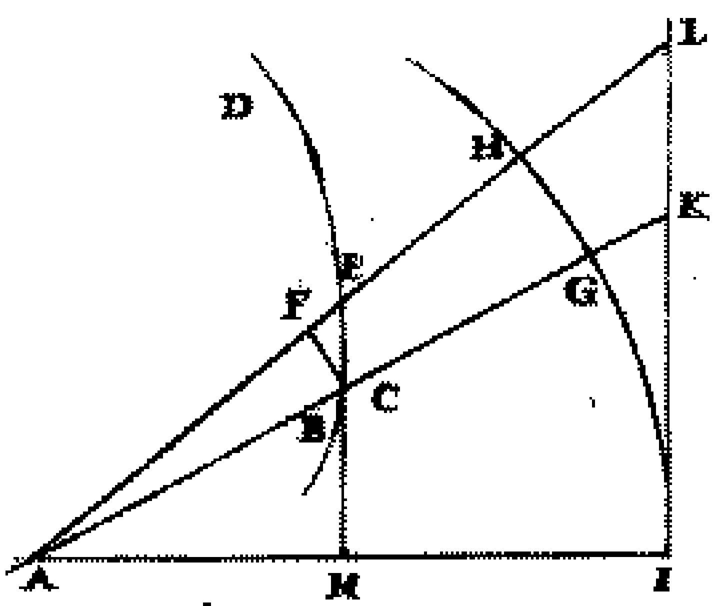


Fig.a 10.

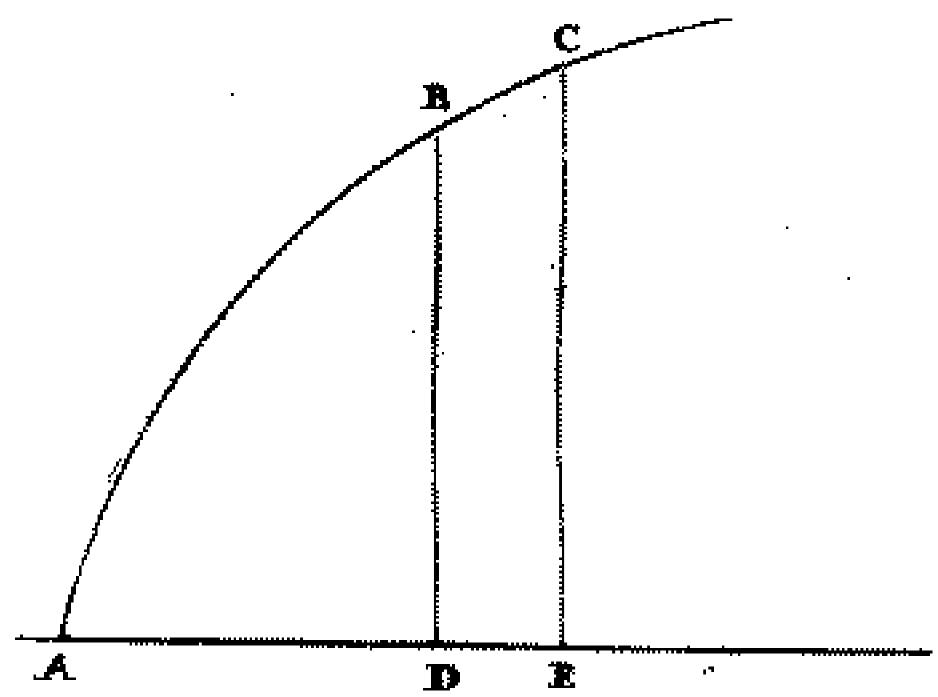


Fig.a 11

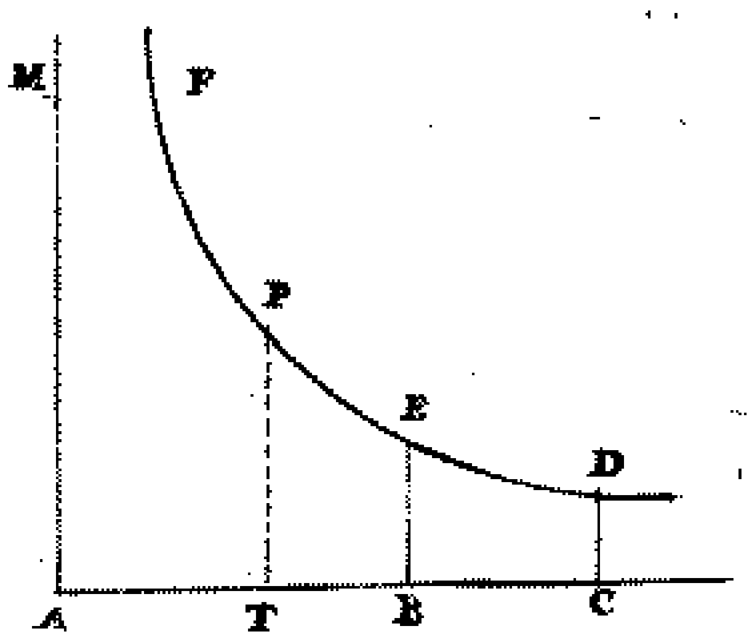


Fig.a 12.

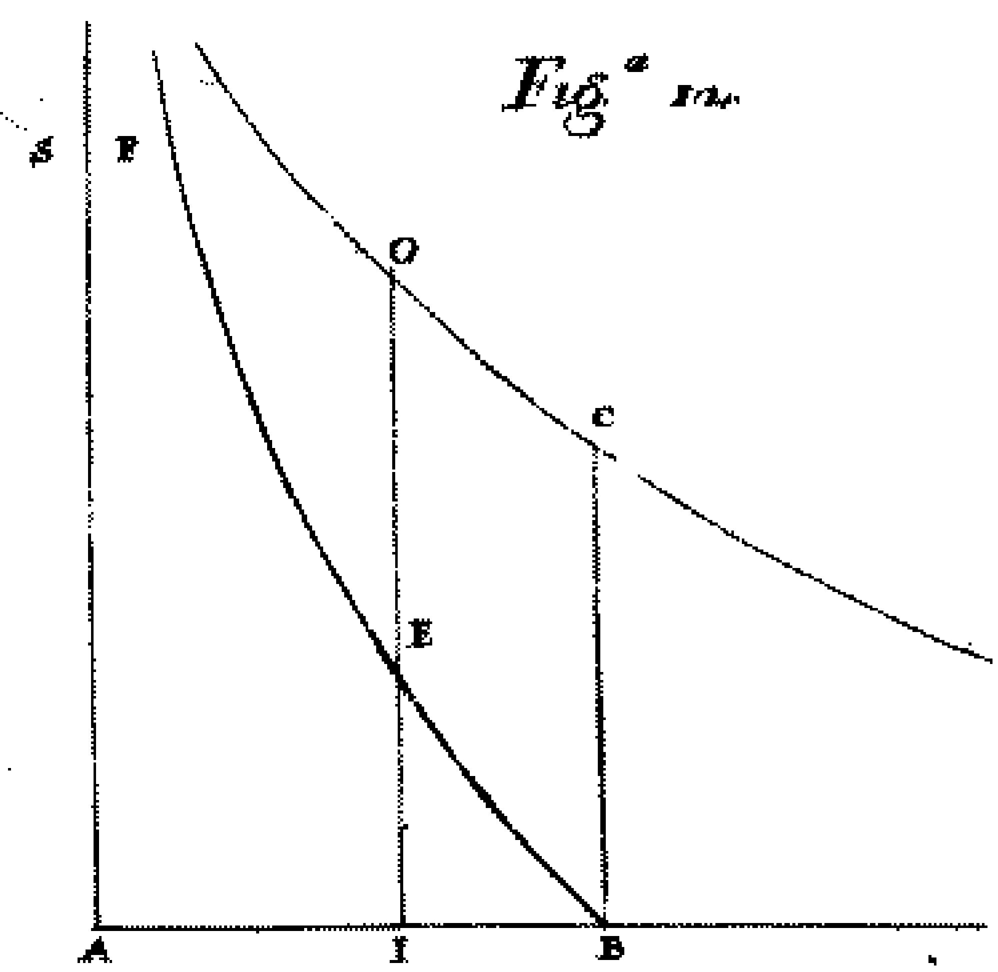


Fig. 7

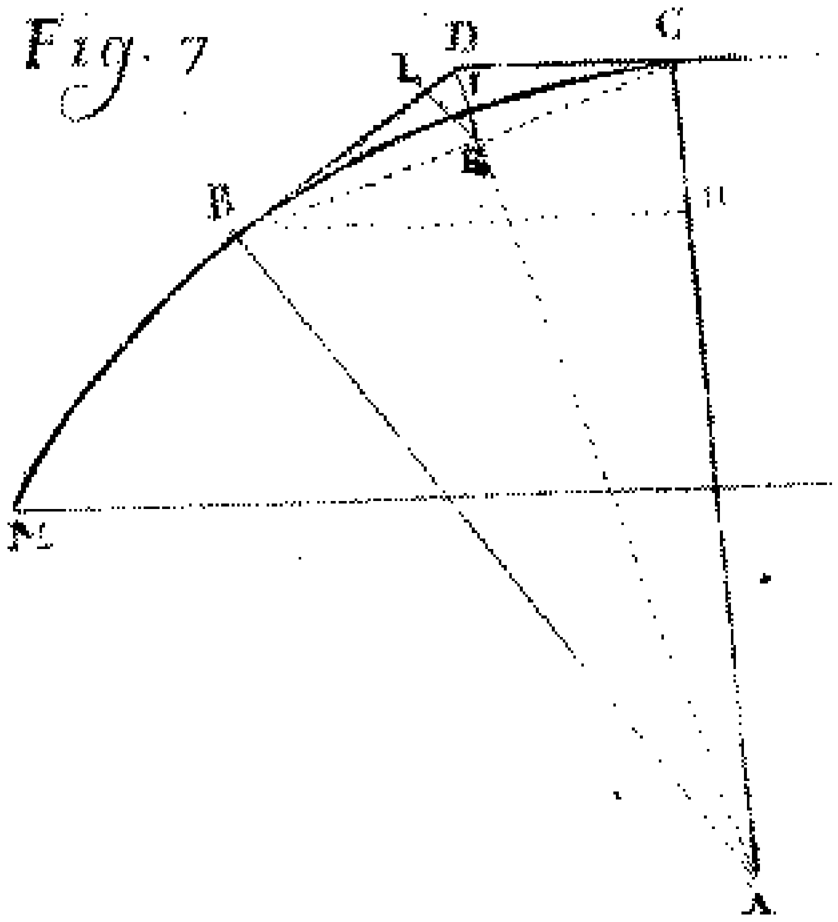


Fig. 8

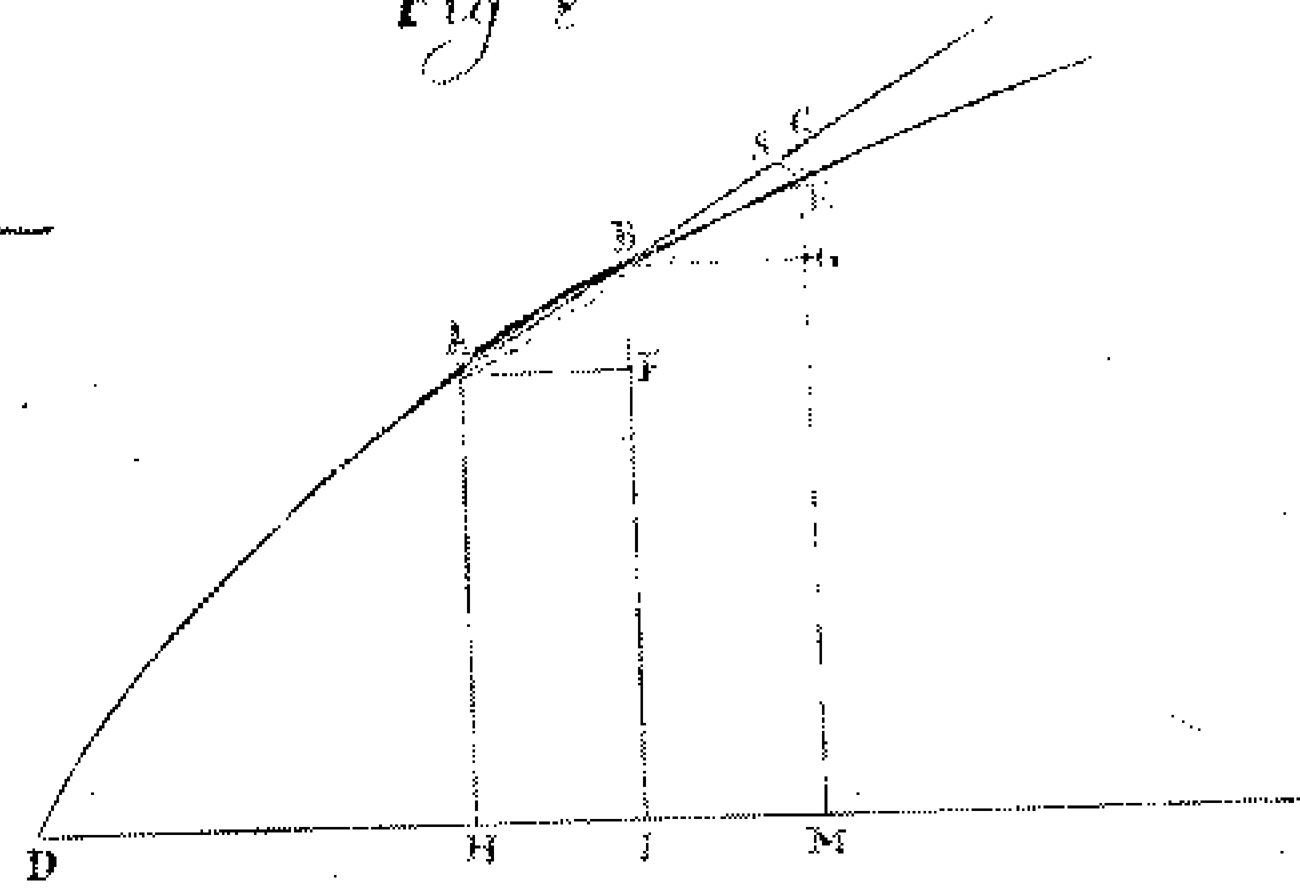


Fig. 9

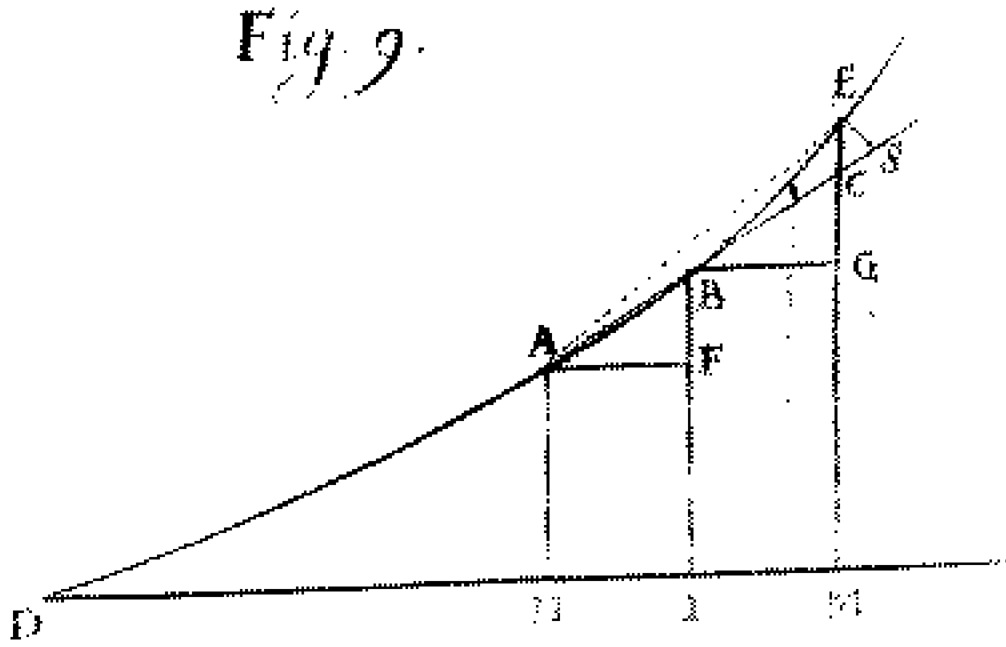


Fig. 10.

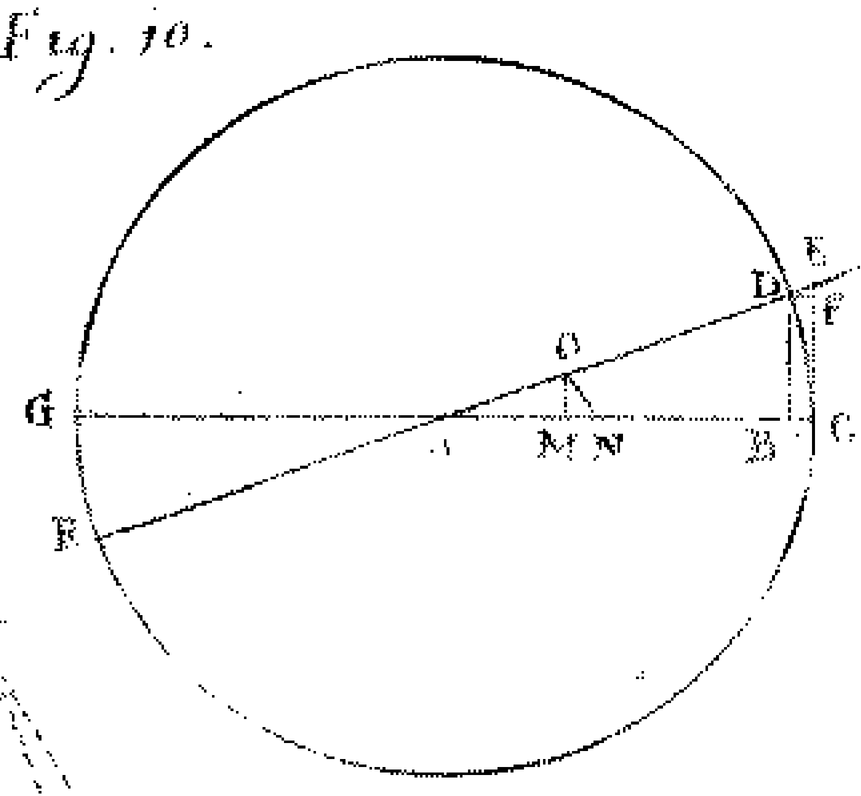


Fig. 11

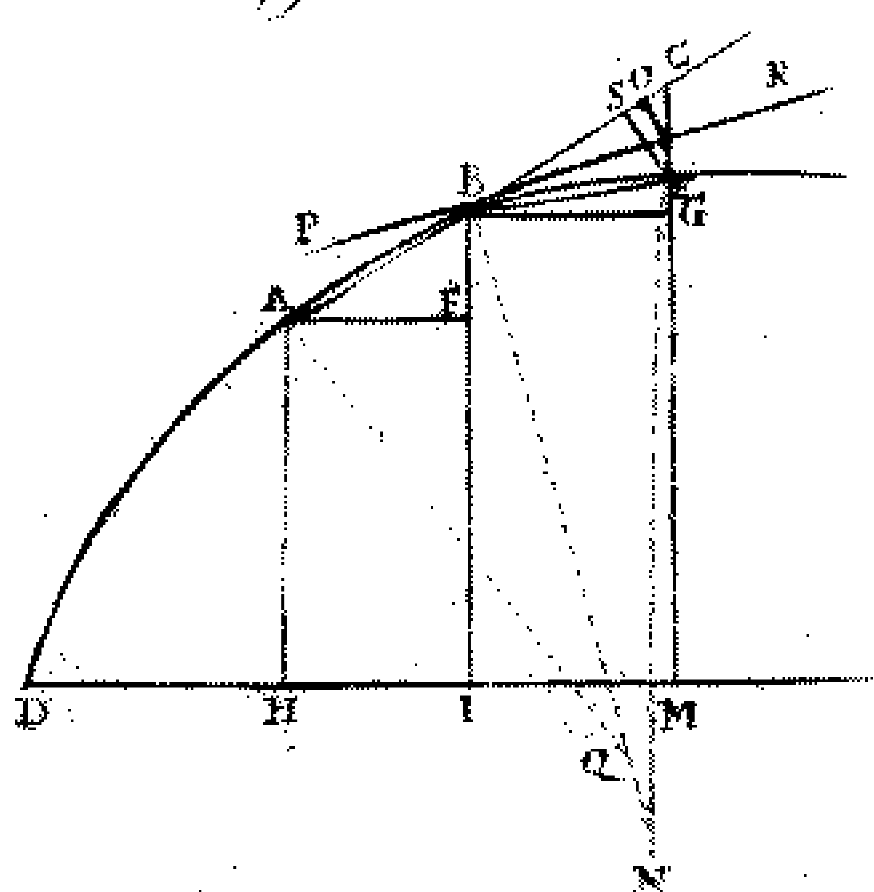


Fig. 12.

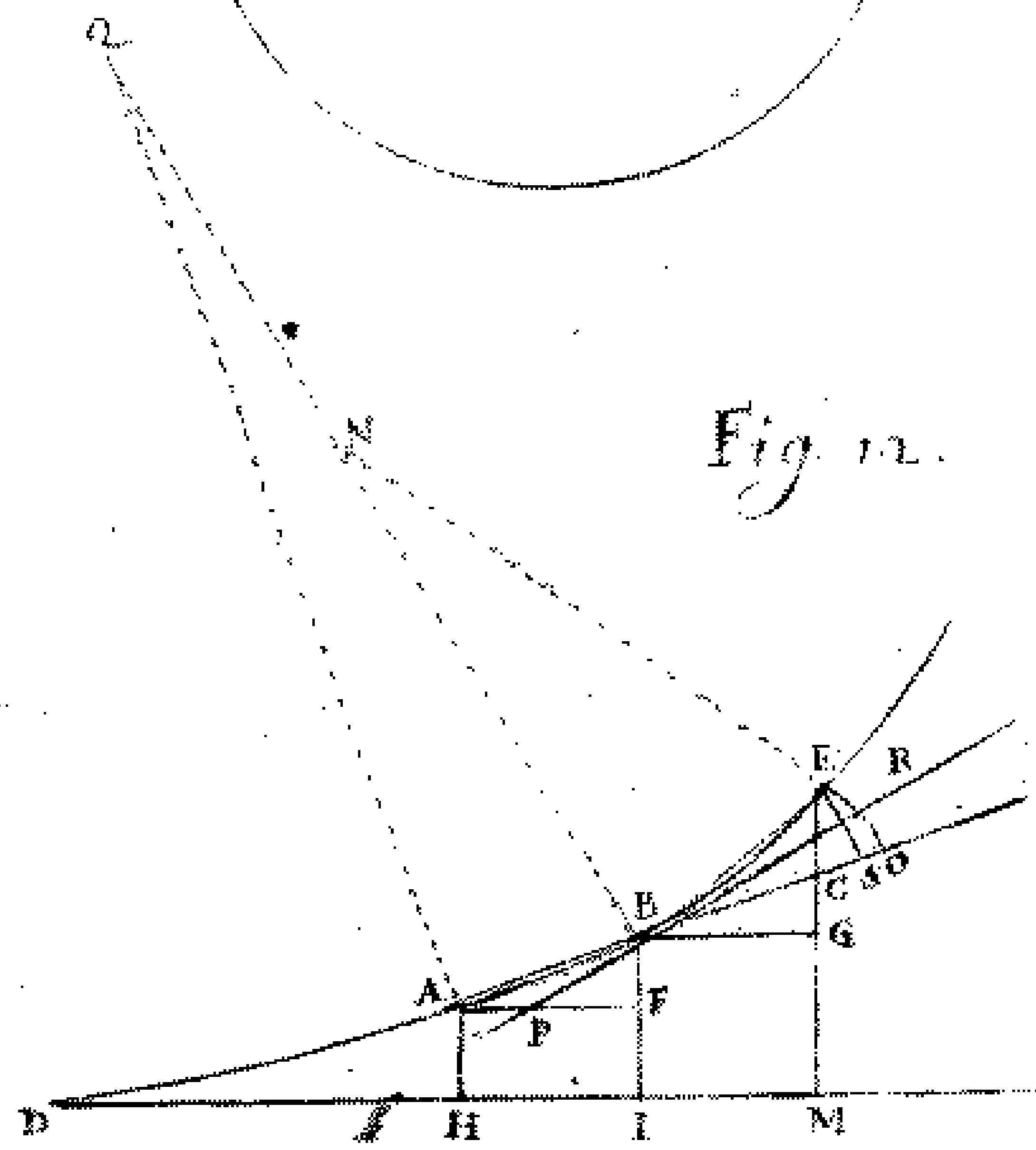


Fig.a 13.

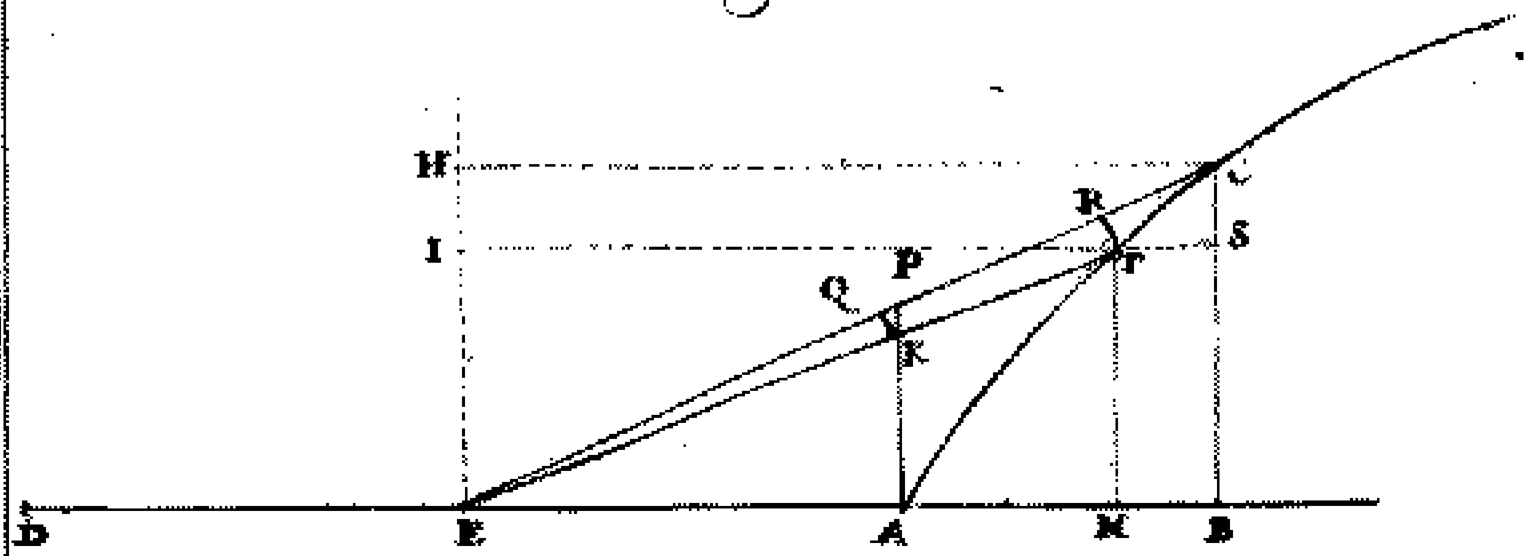


Fig.a 14.

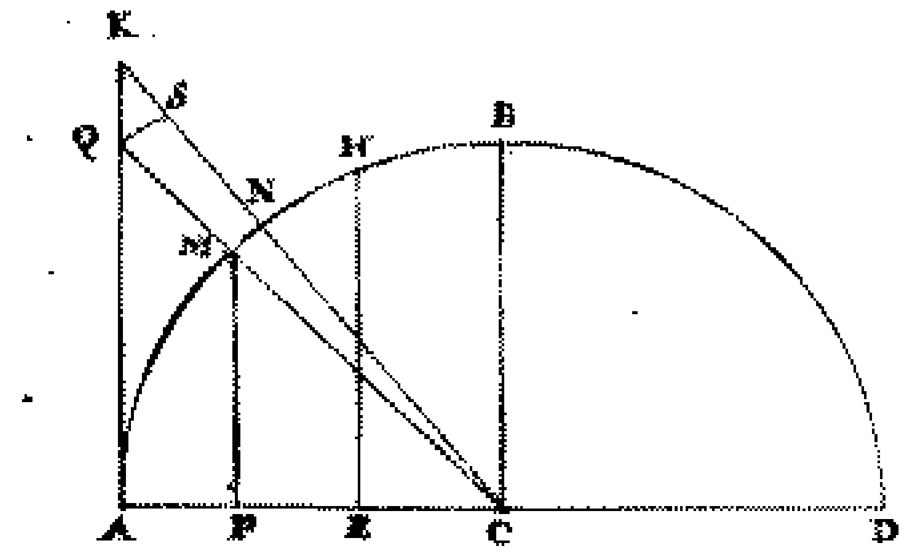


Fig. 15

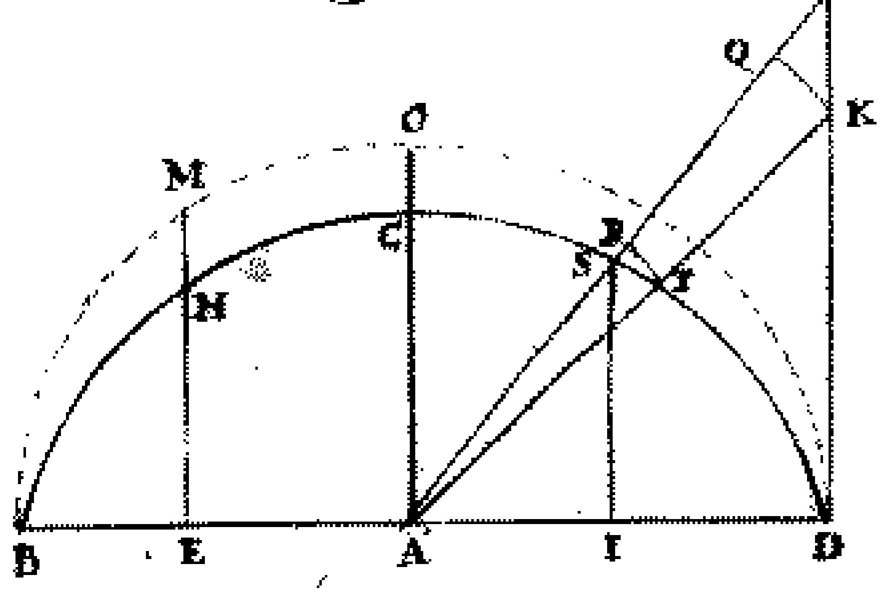


Fig.a 16.

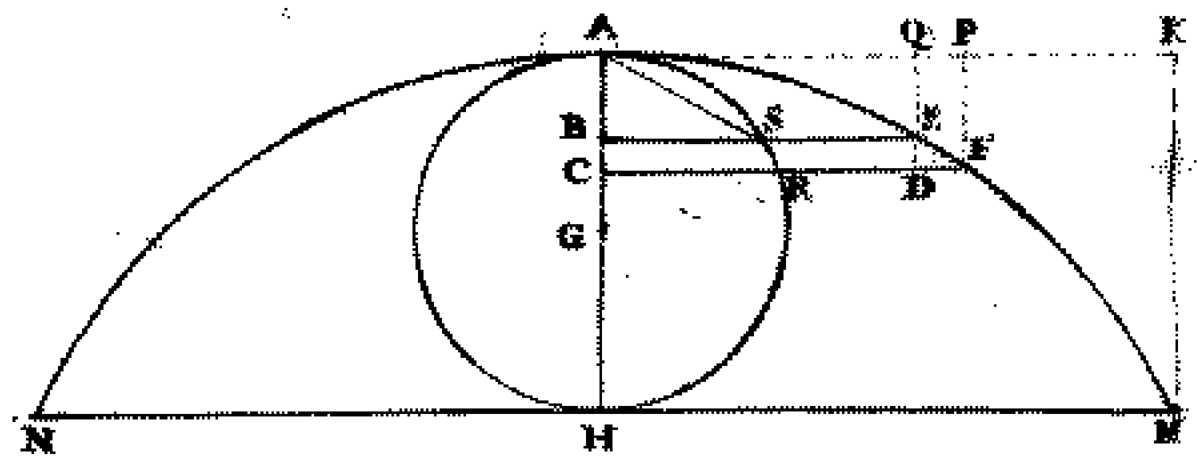


Fig.a 17.

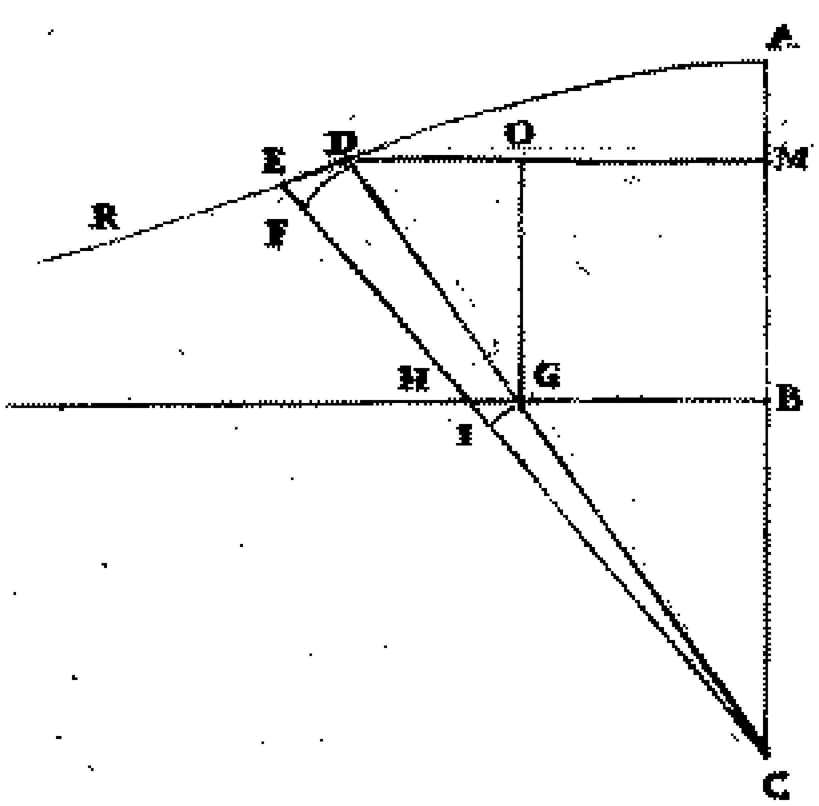


Fig.a 18.

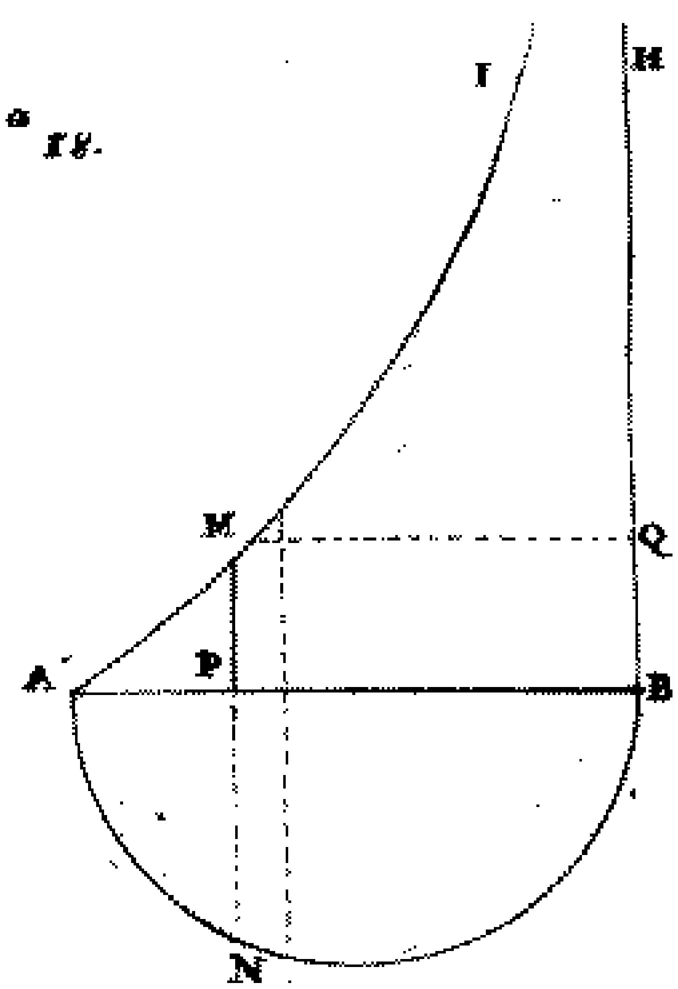


Fig. 13.

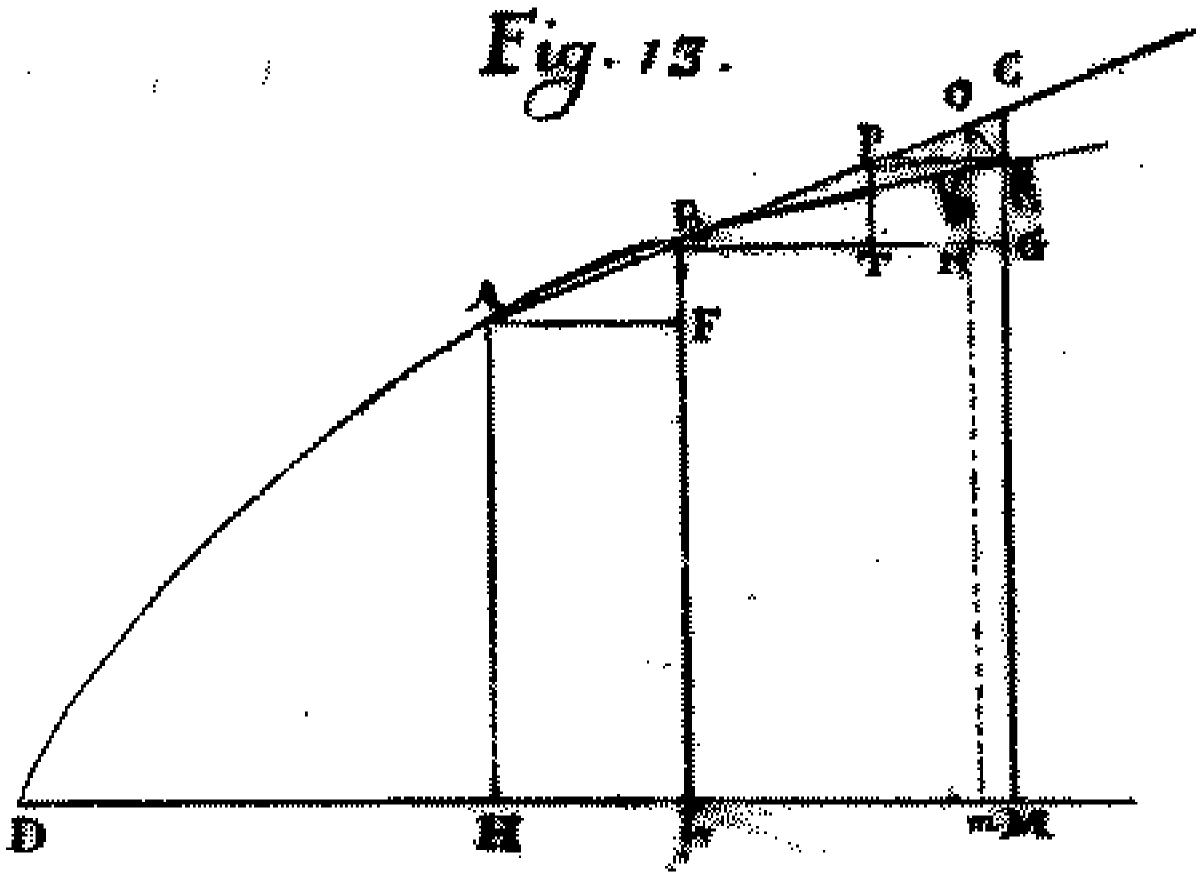


Fig. 14.

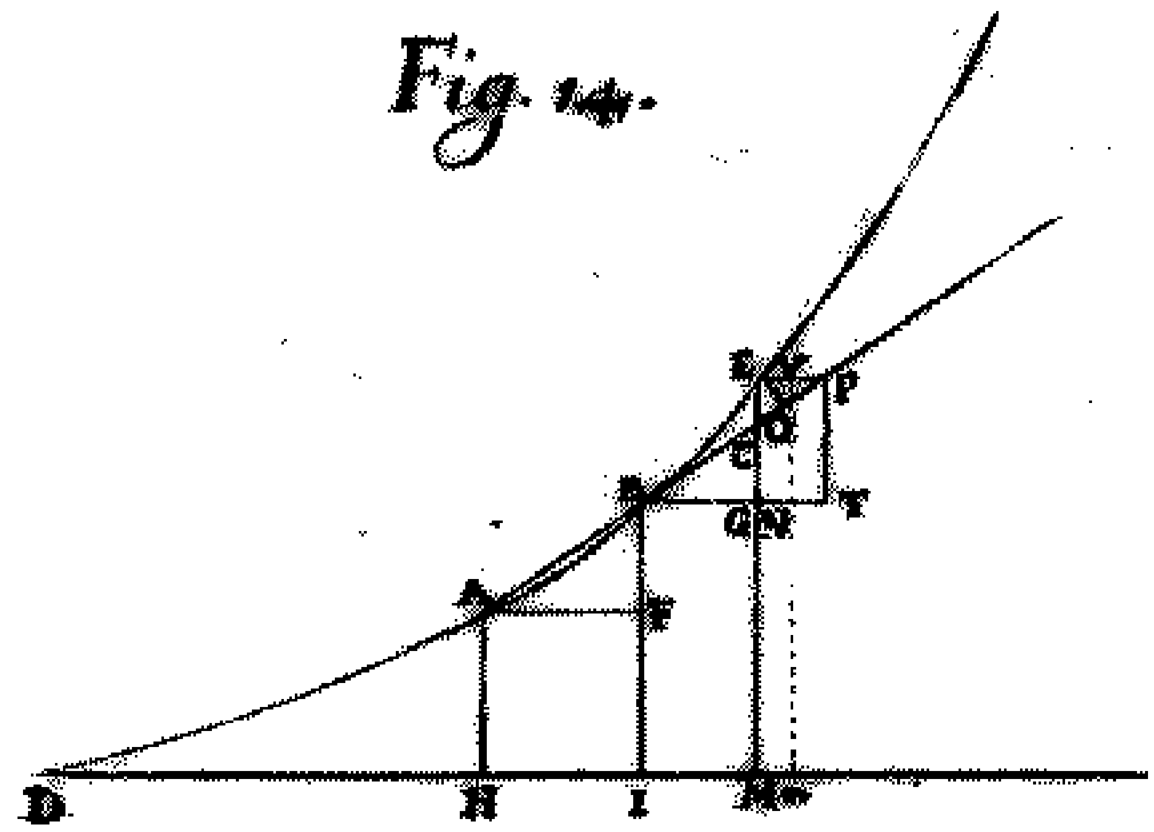


Fig. 15.

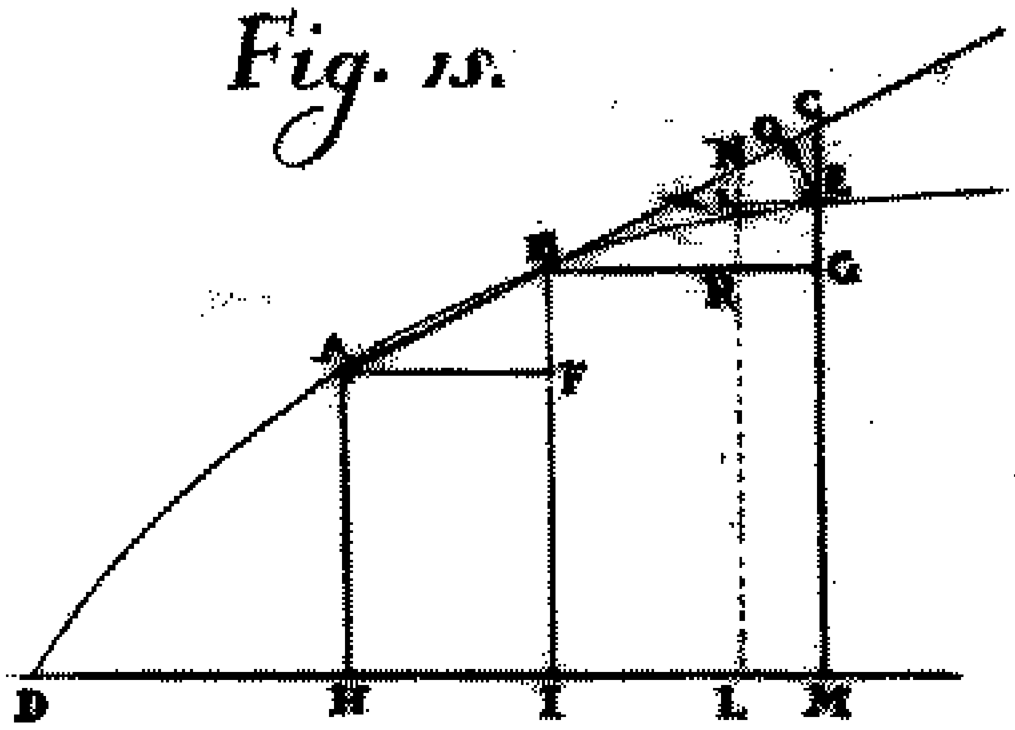


Fig. 16.

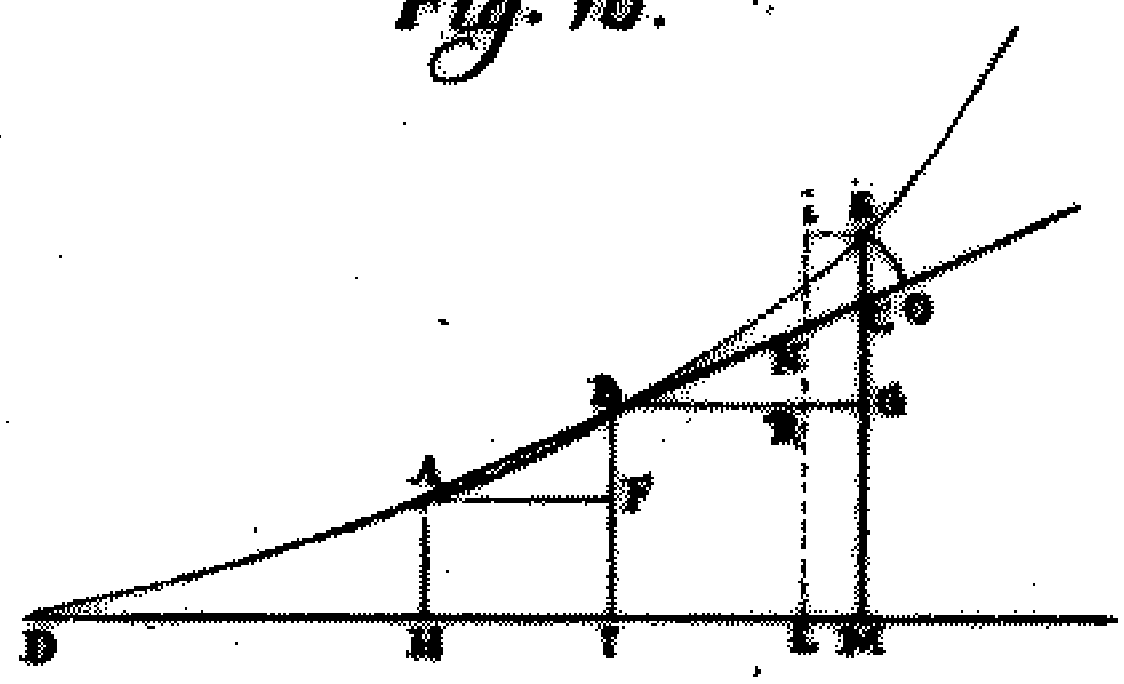


Fig. 17.

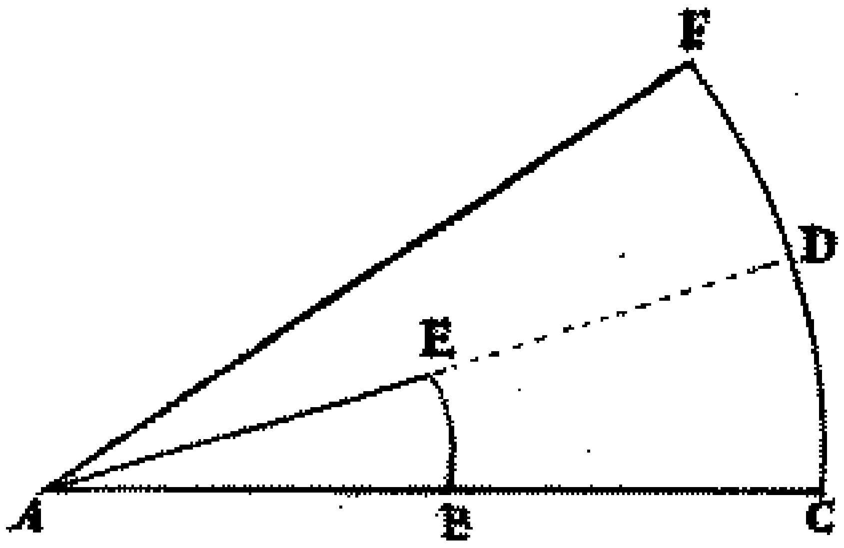


Fig. 18.

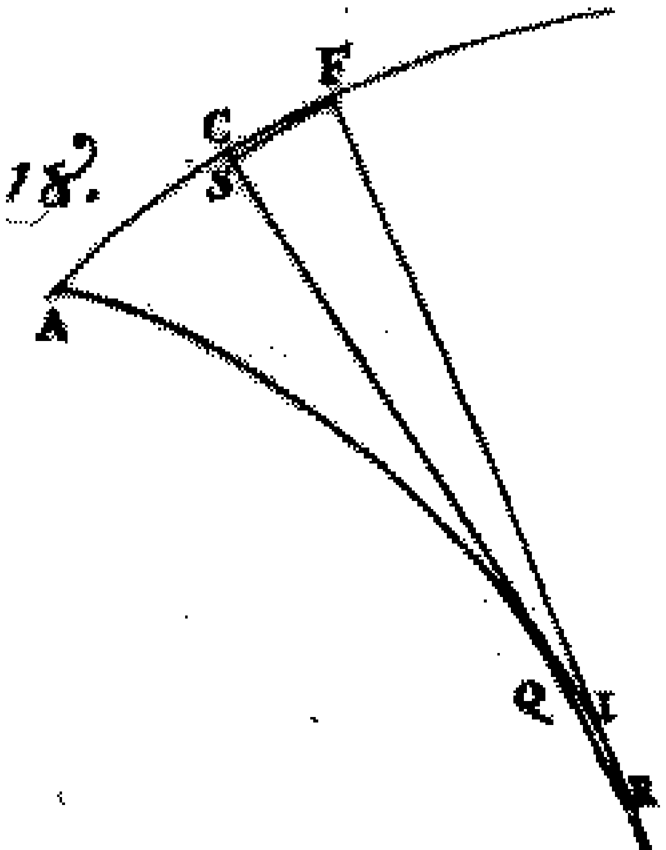


Fig.[a] 19.

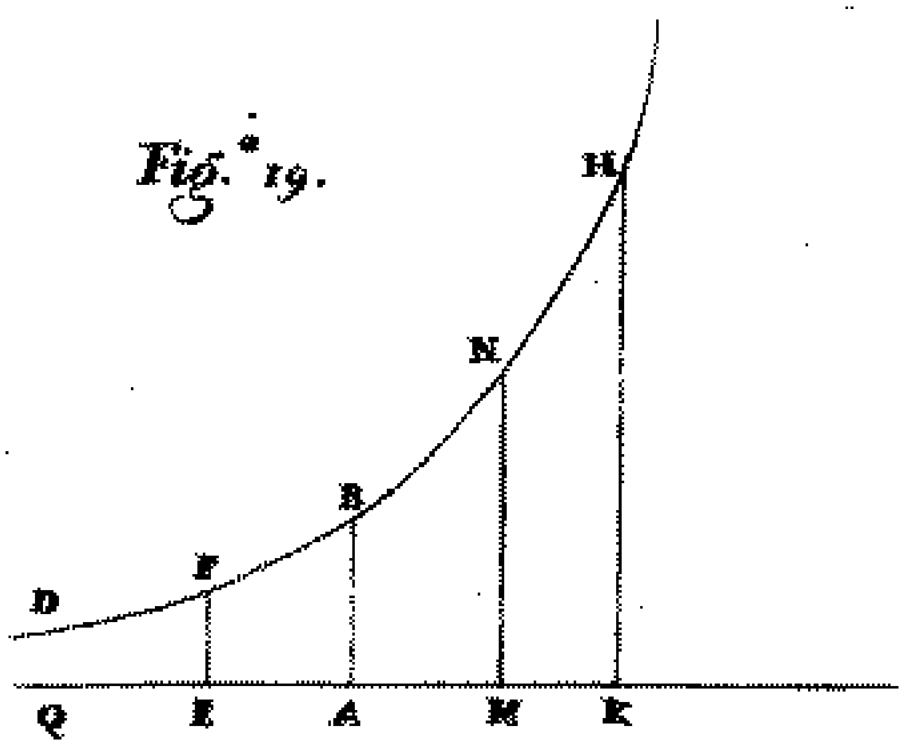


Fig.[a] 20.

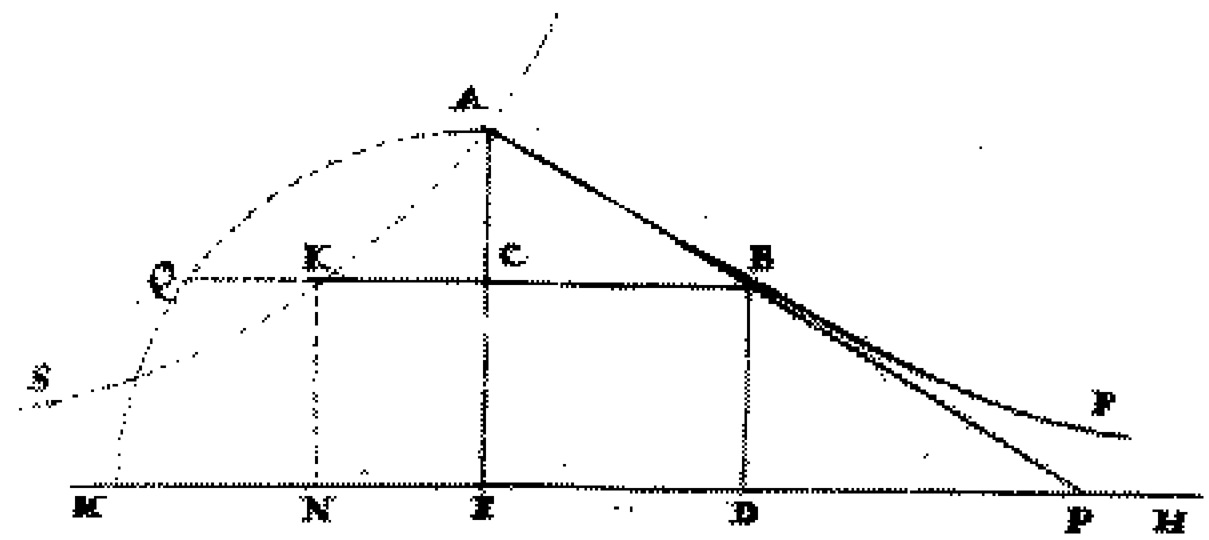


Fig.[a] 21.

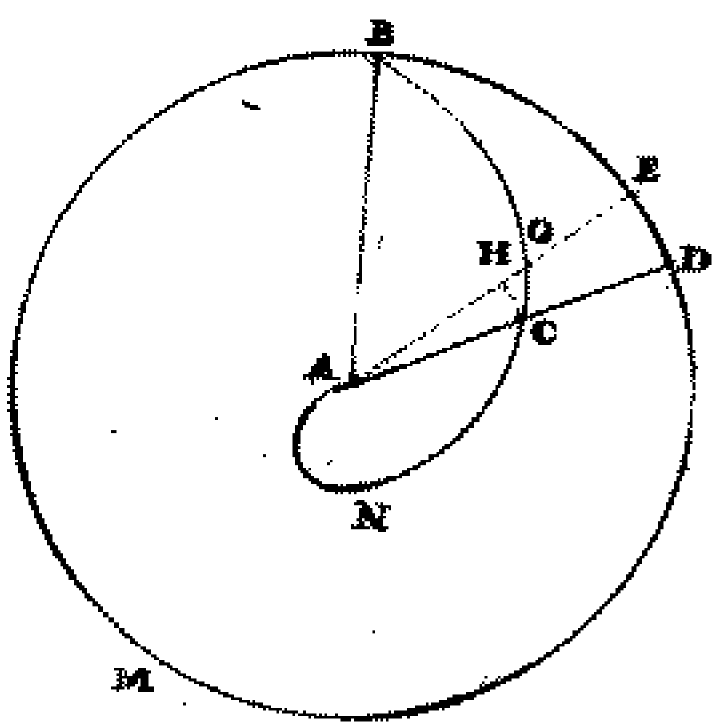


Fig.[a] 22.

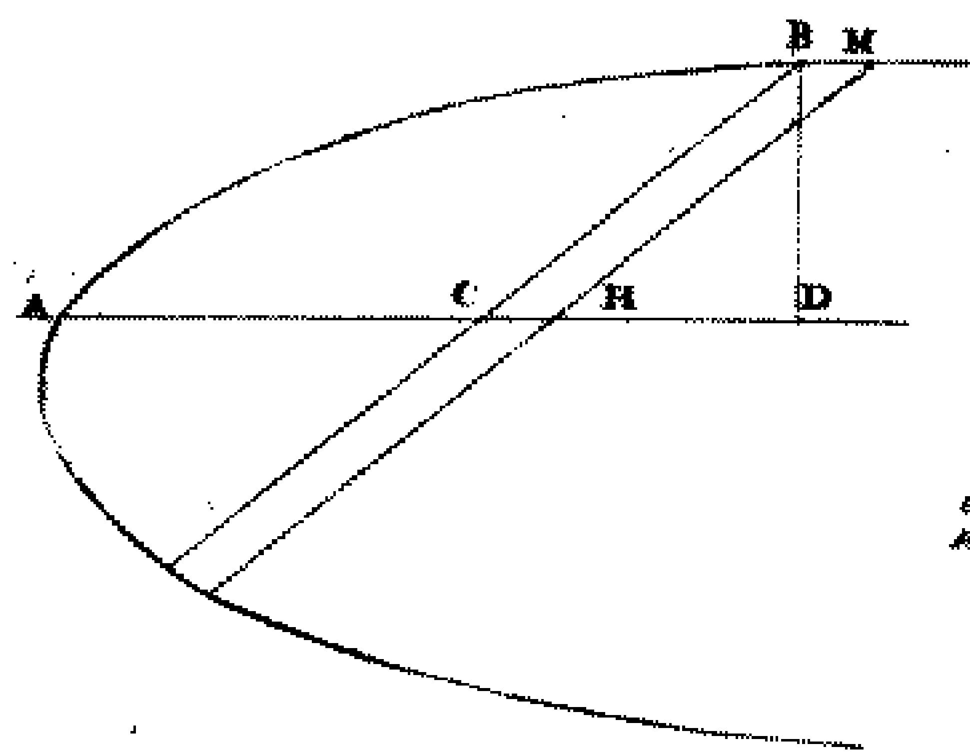
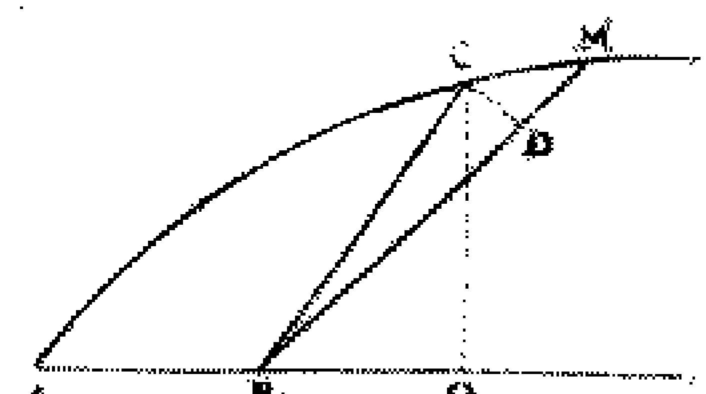


Fig.[a] 23.



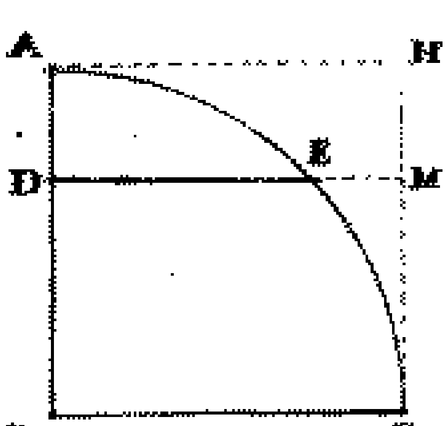


Fig.[a] 24.

Fig.[a] 25.

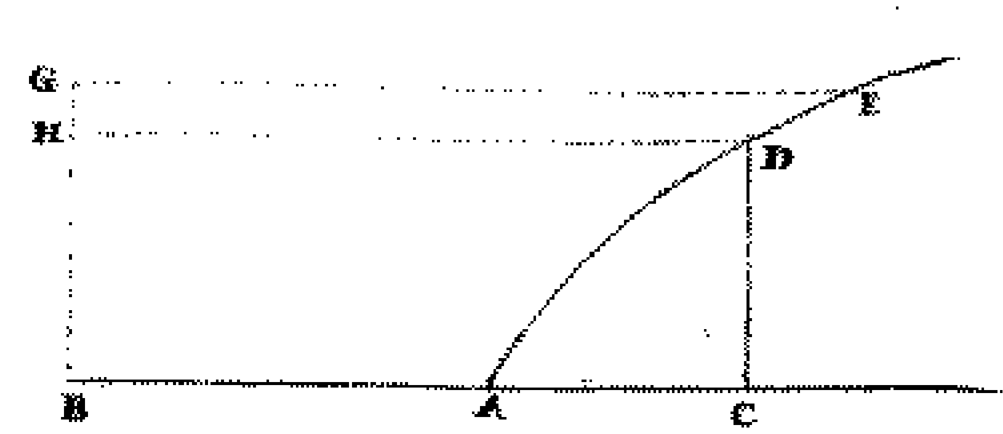


Fig. 19.

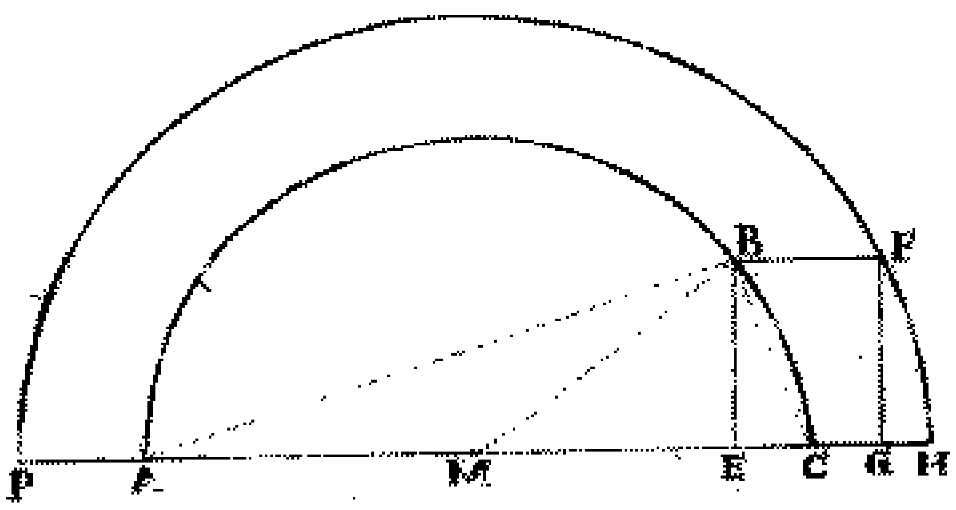


Fig. 20

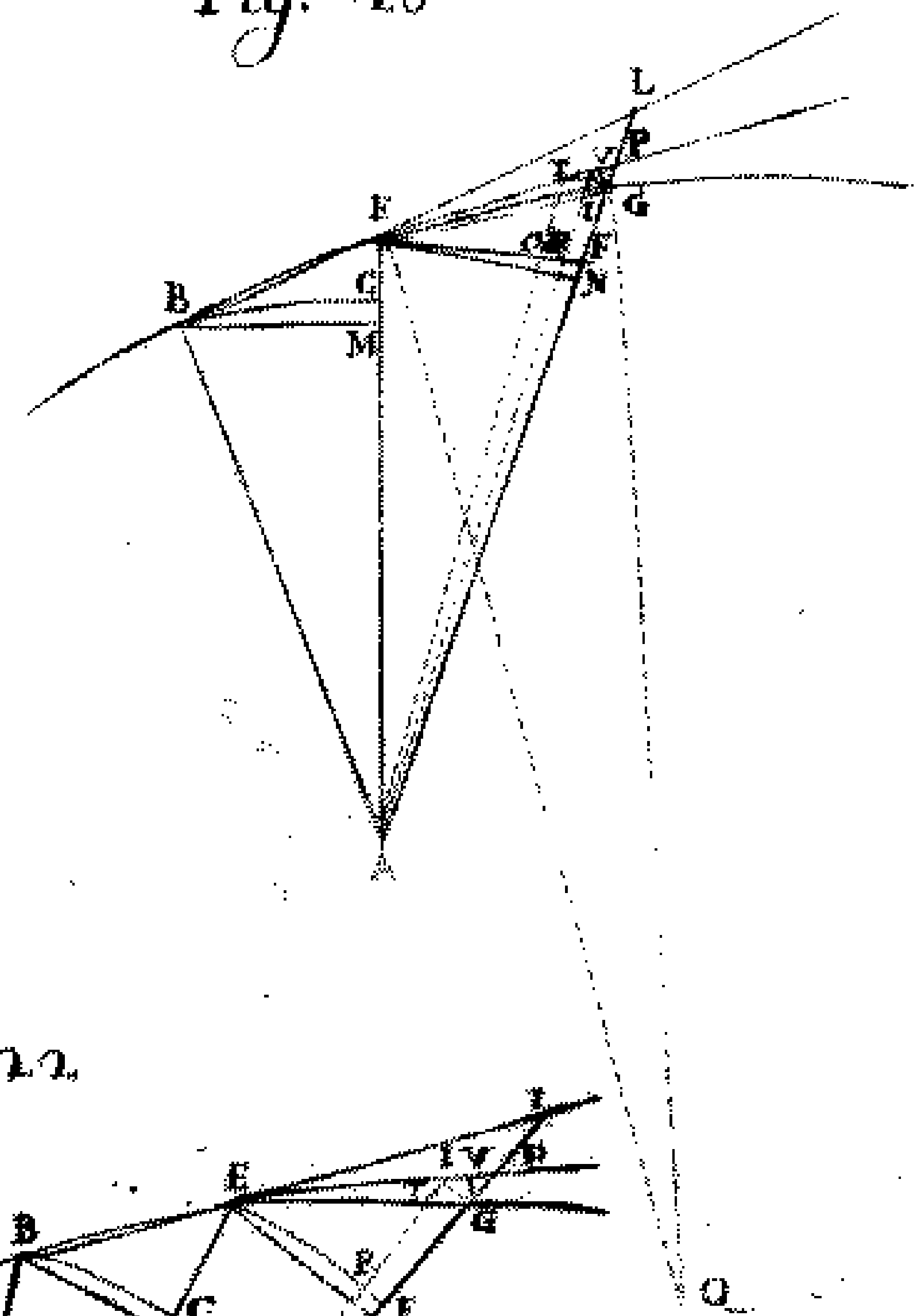


Fig. 21.

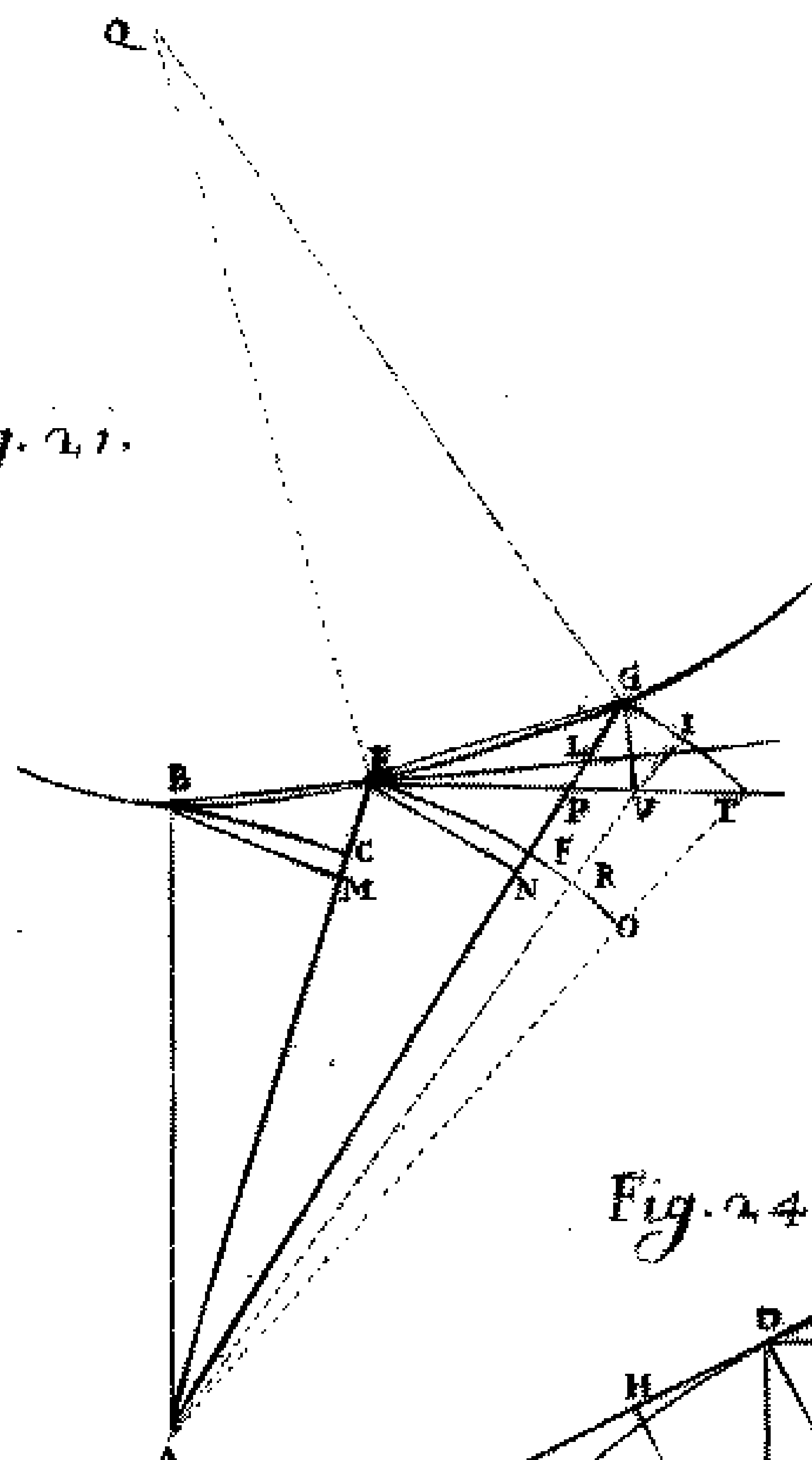


Fig. 22.

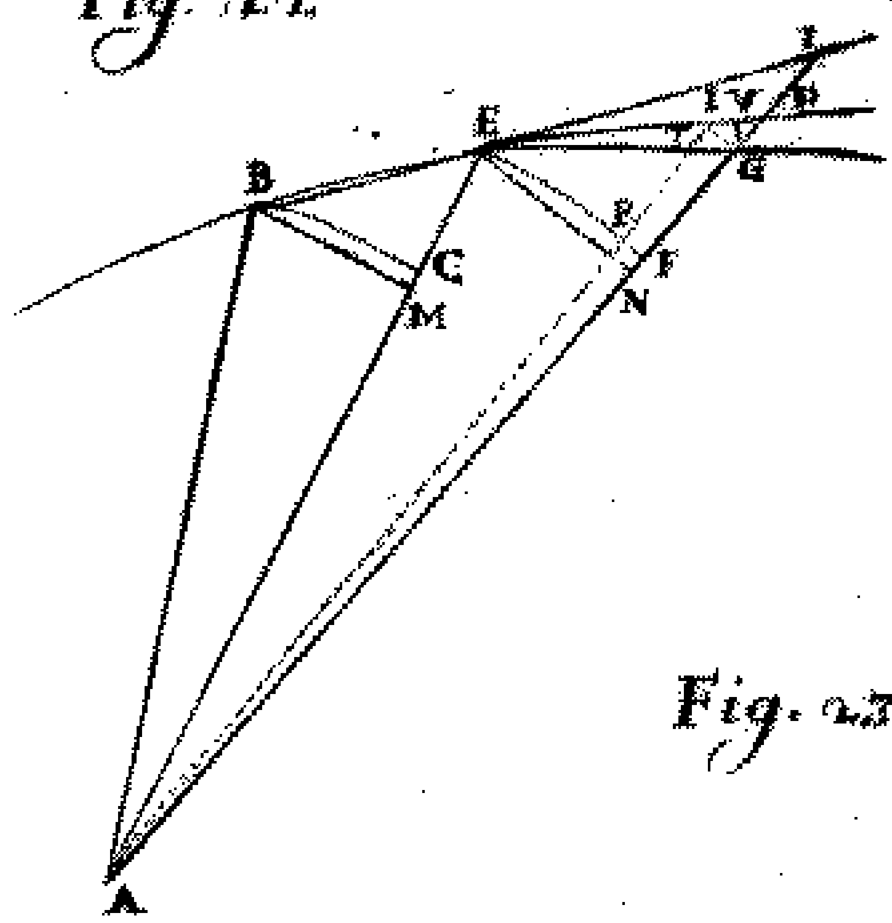


Fig. 23.

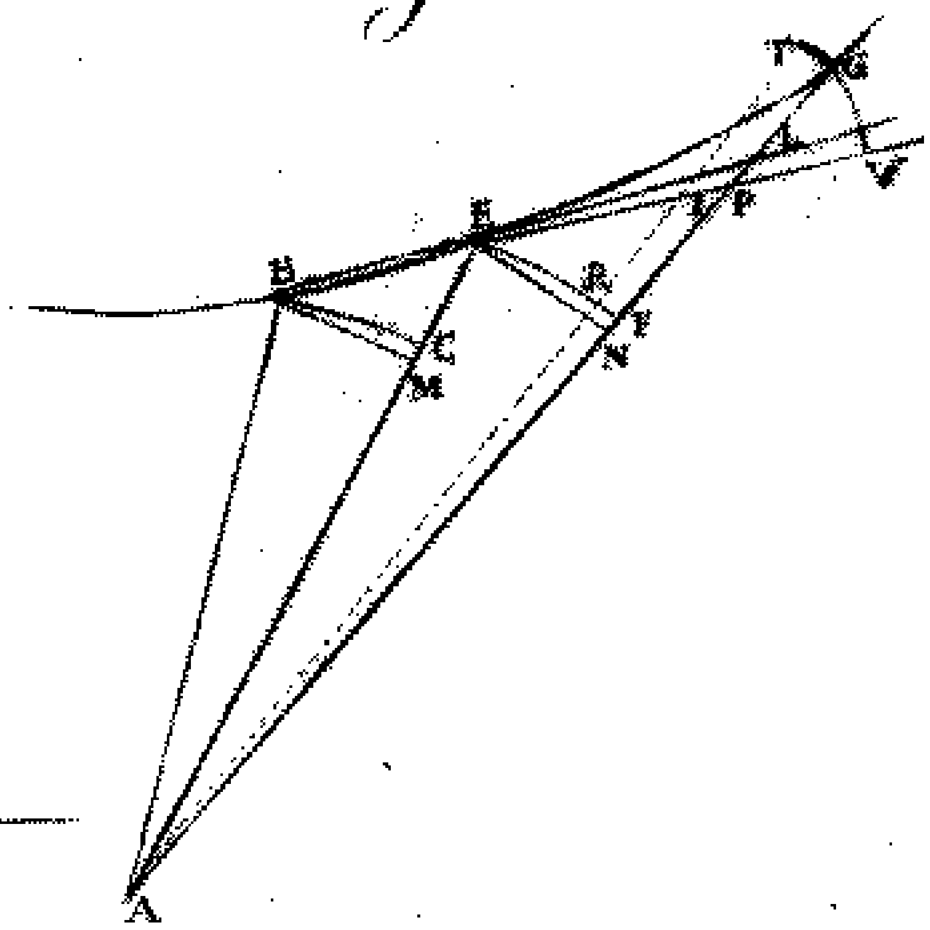


Fig. 24.

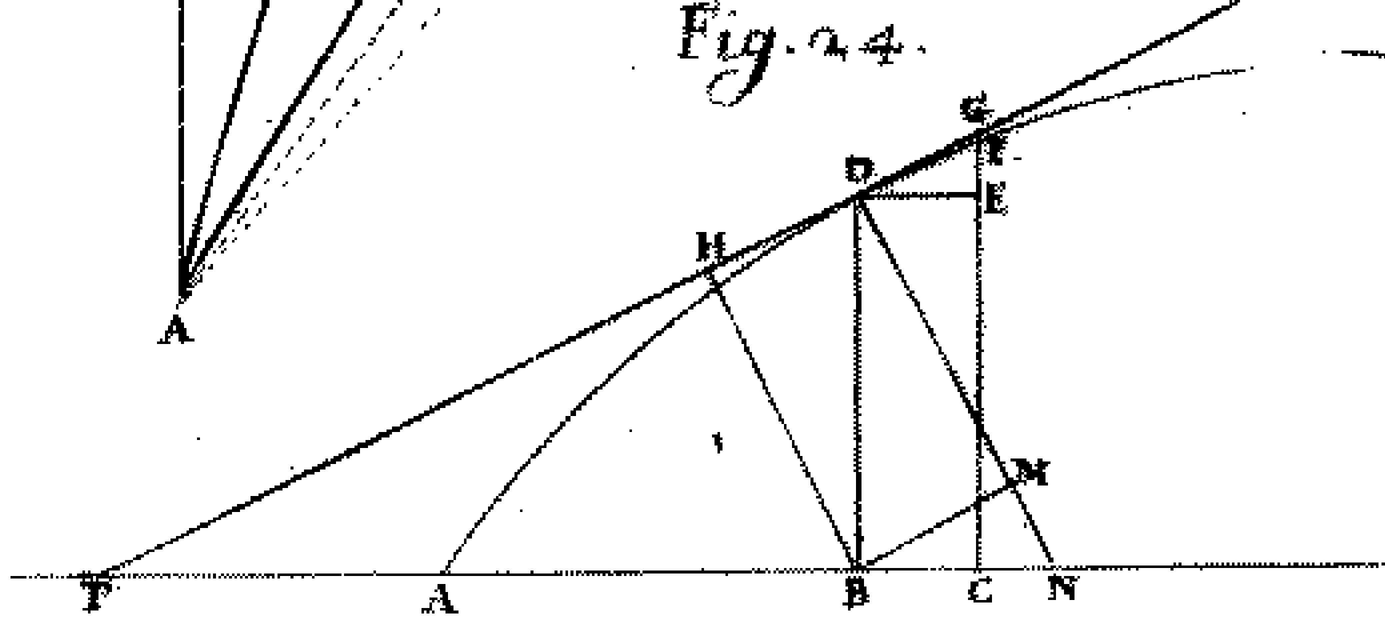


Fig.ª 26

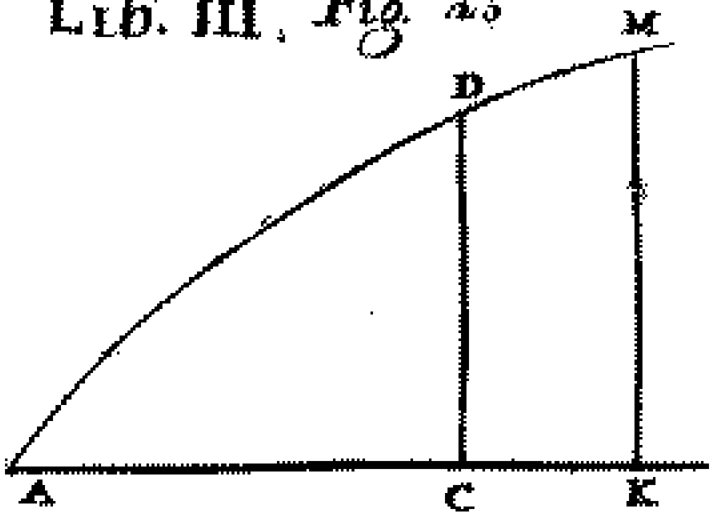


Fig.ª 27

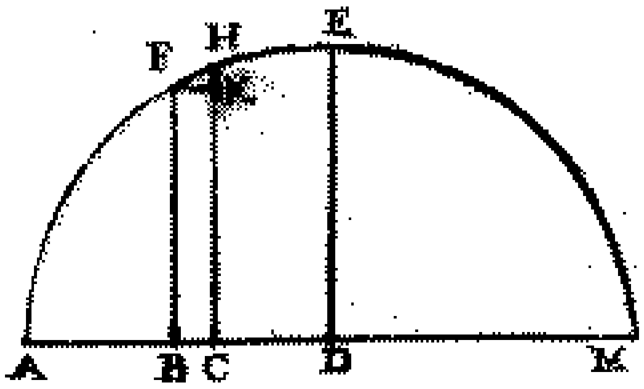


Fig.ª 28

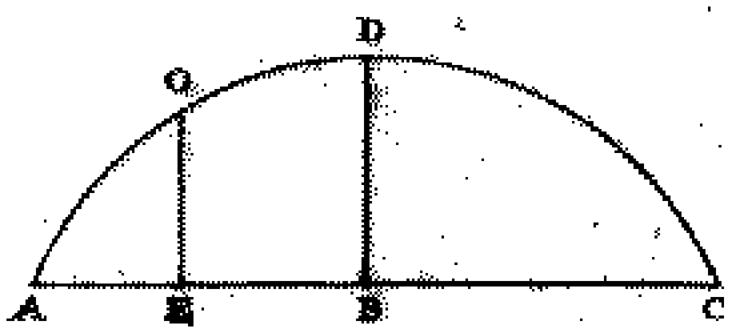


Fig.ª 29

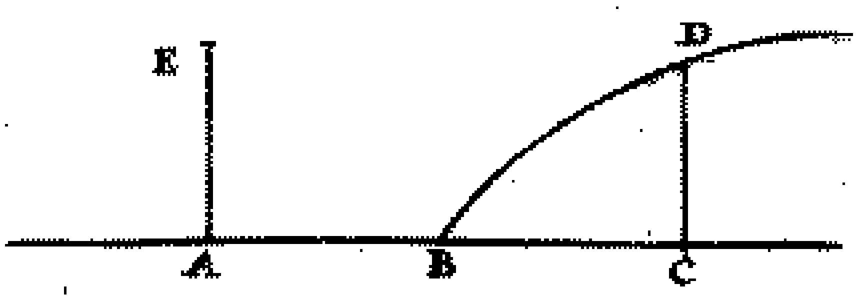


Fig.ª 30

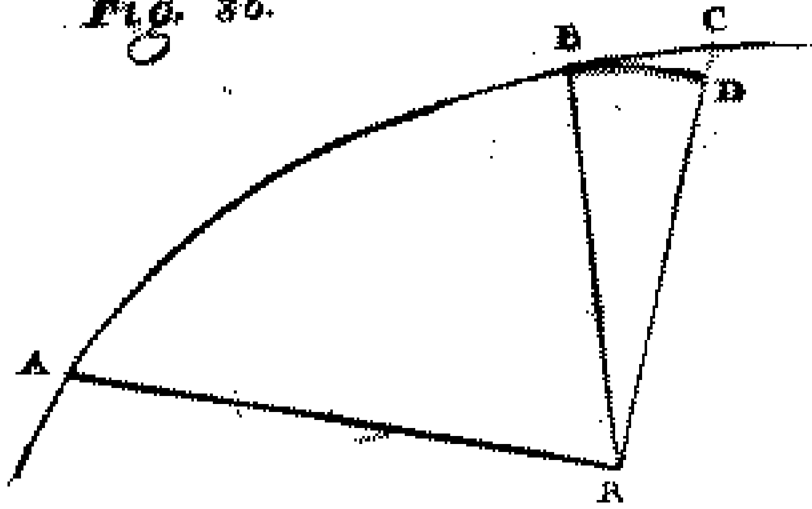


Fig.ª 31

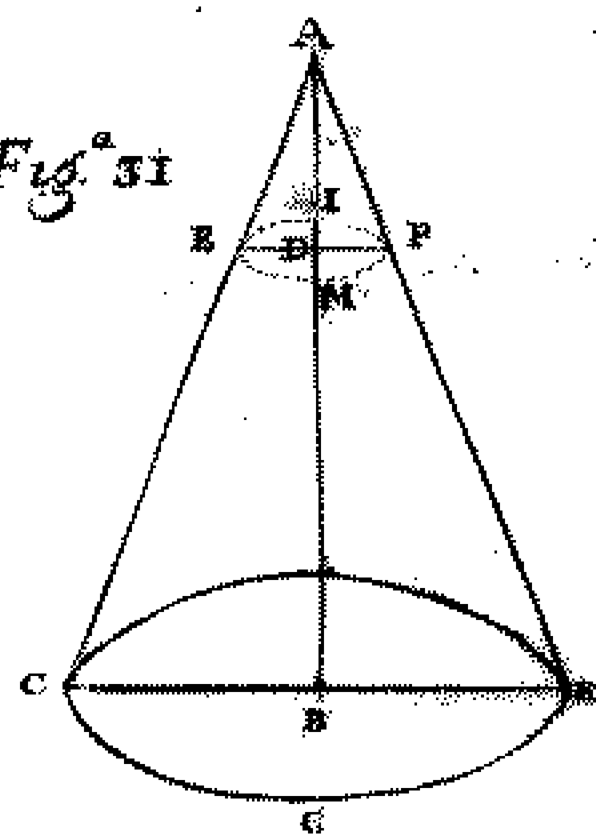


Fig.ª 32

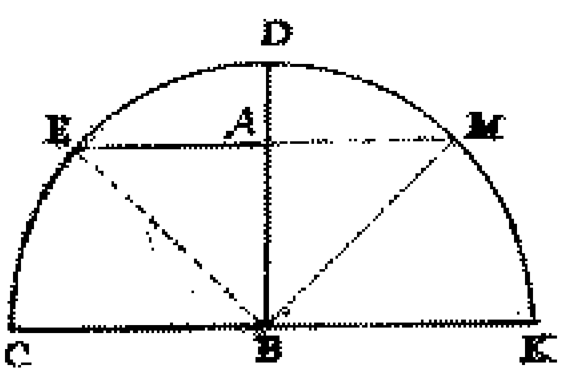


Fig.ª 33

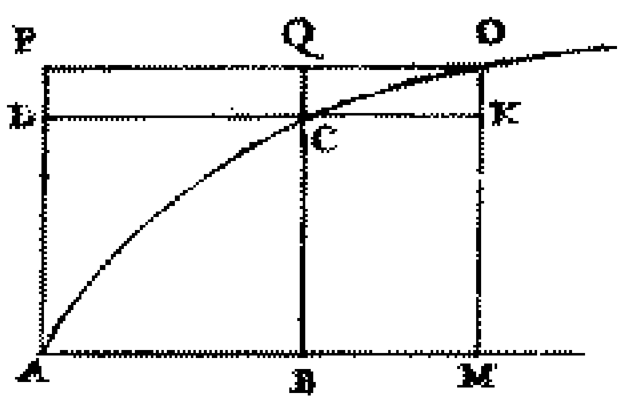


Fig.ª 34

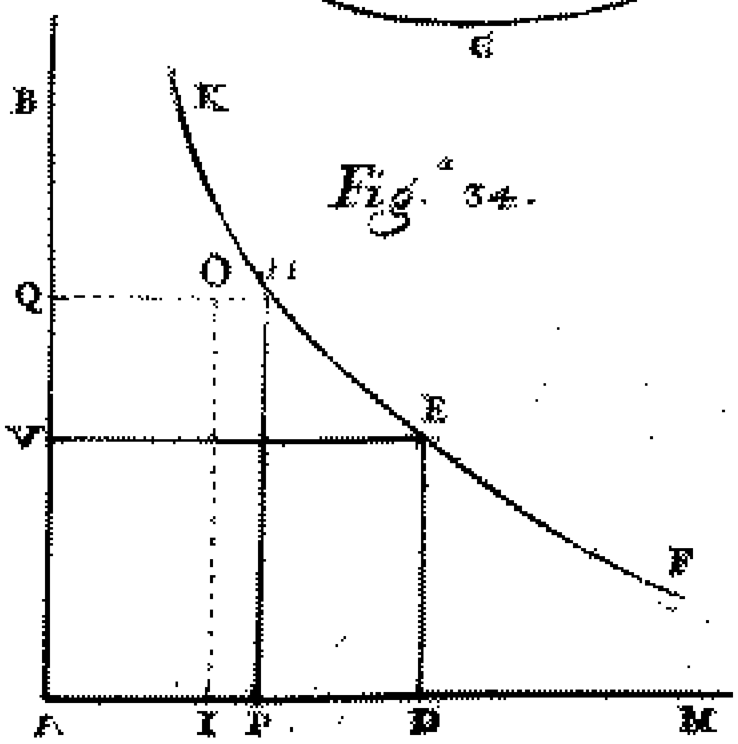


Fig.ª 35

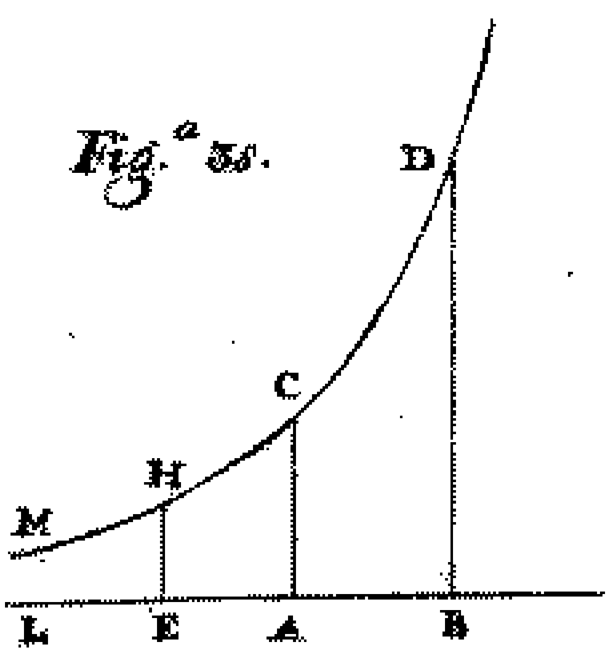
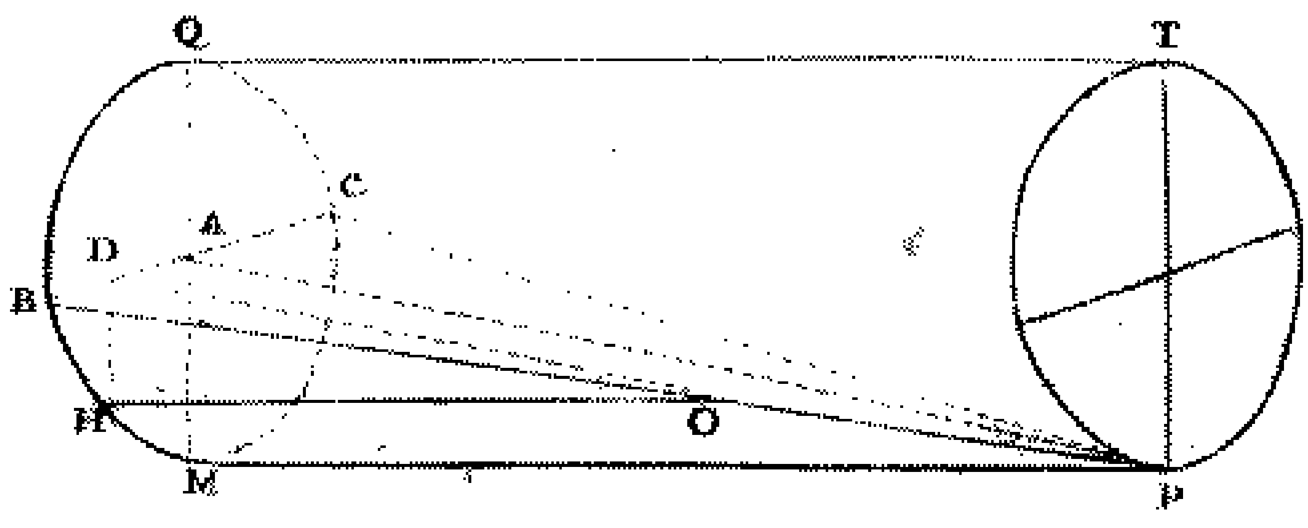


Fig.ª 36



TOM. II
Lib. II.

T. V.

Fig. 26.

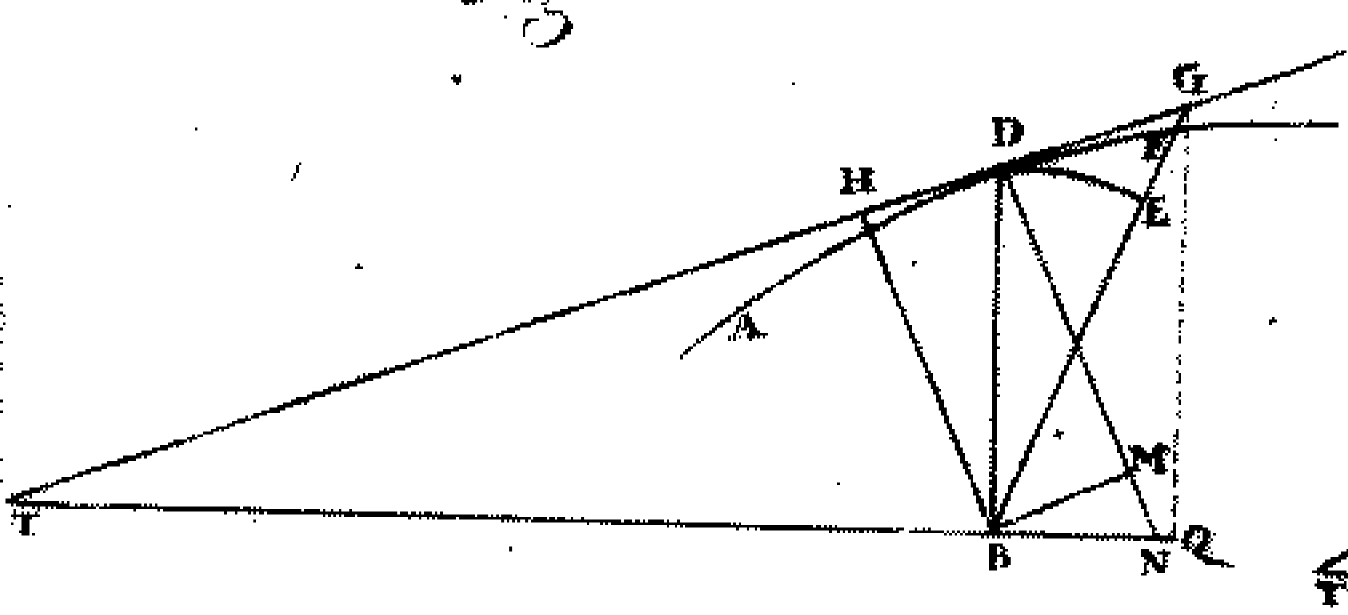


Fig. 27

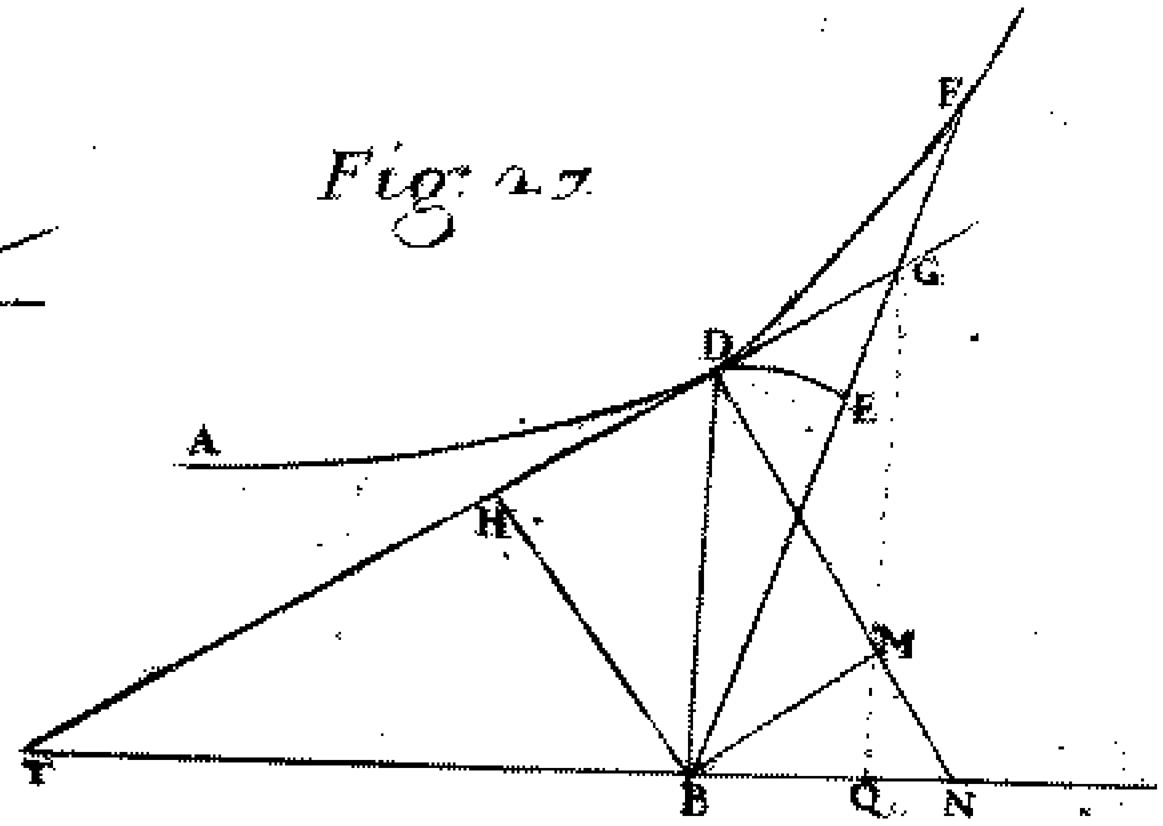


Fig. 28

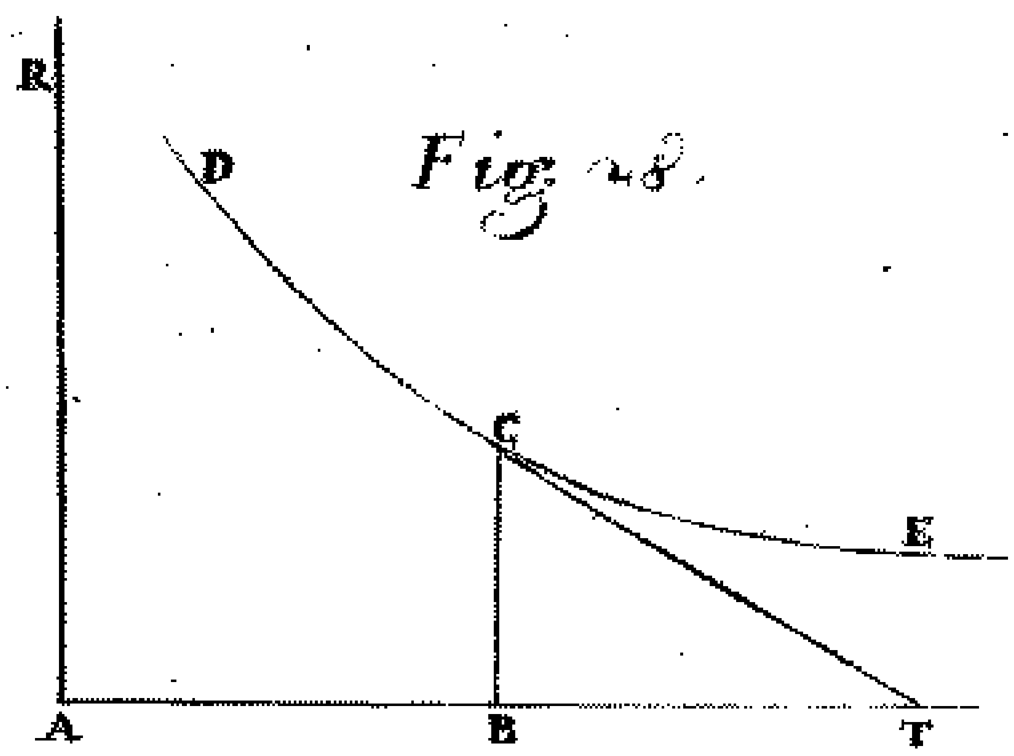


Fig. 28.

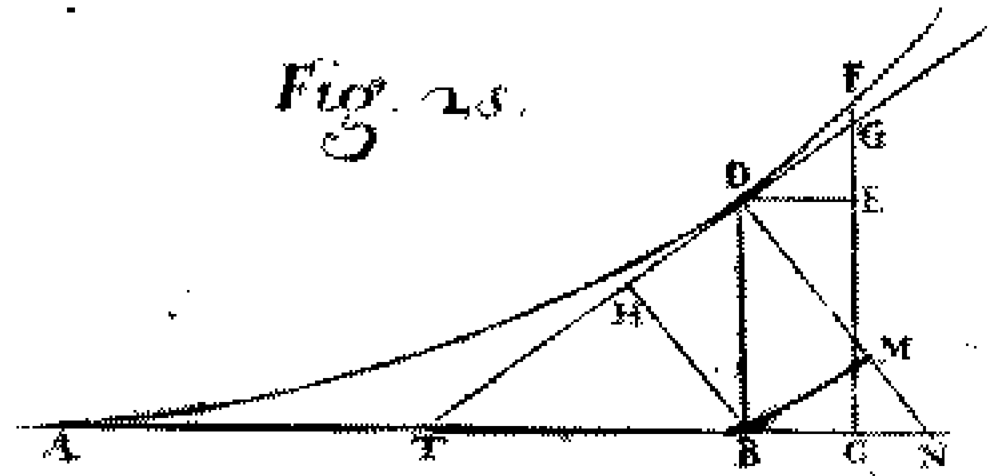


Fig. 29.

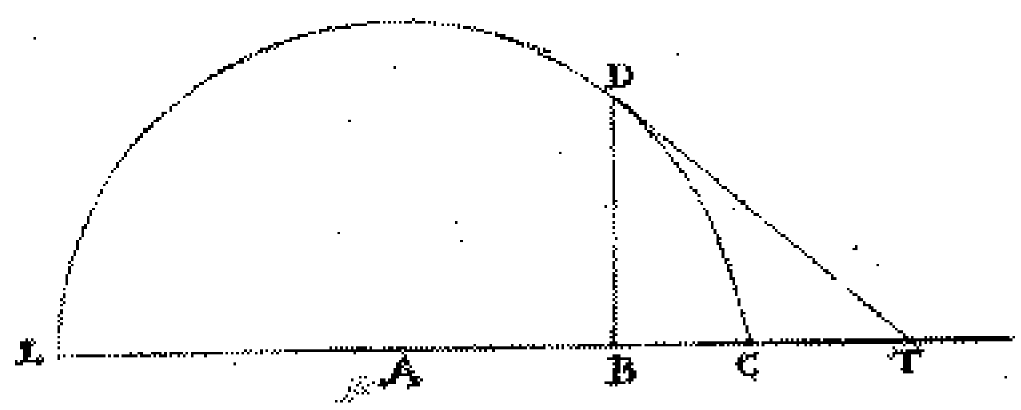


Fig. 30

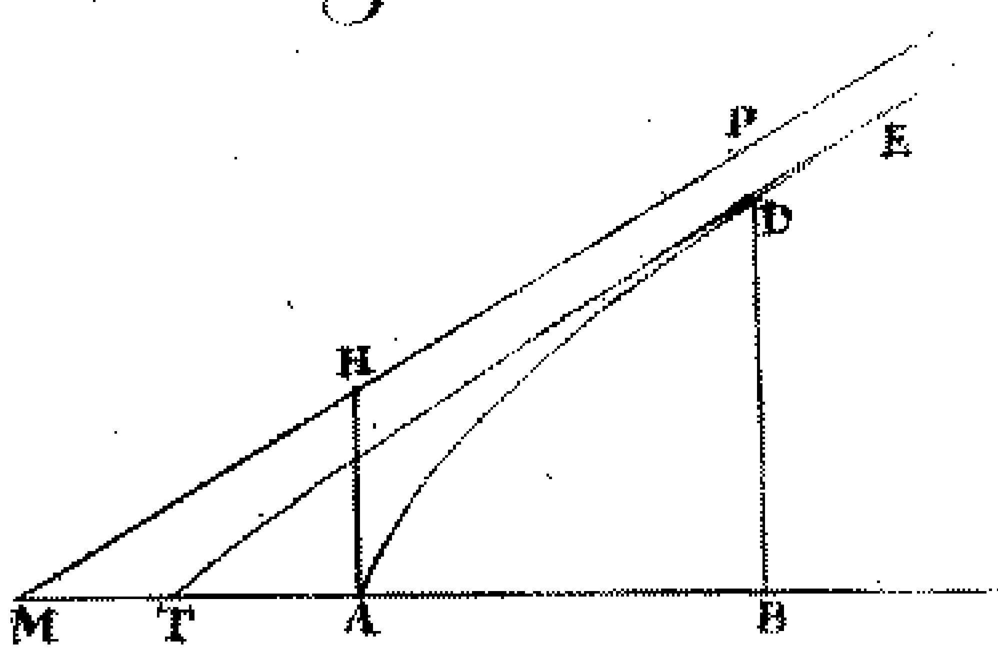


Fig. 31.

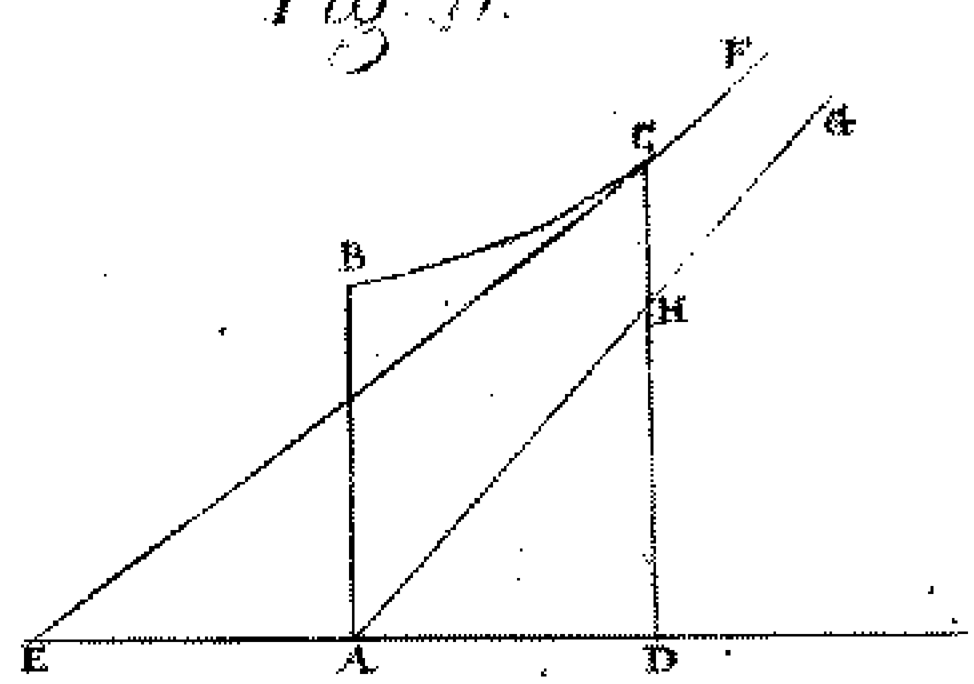


Fig.ª 37.

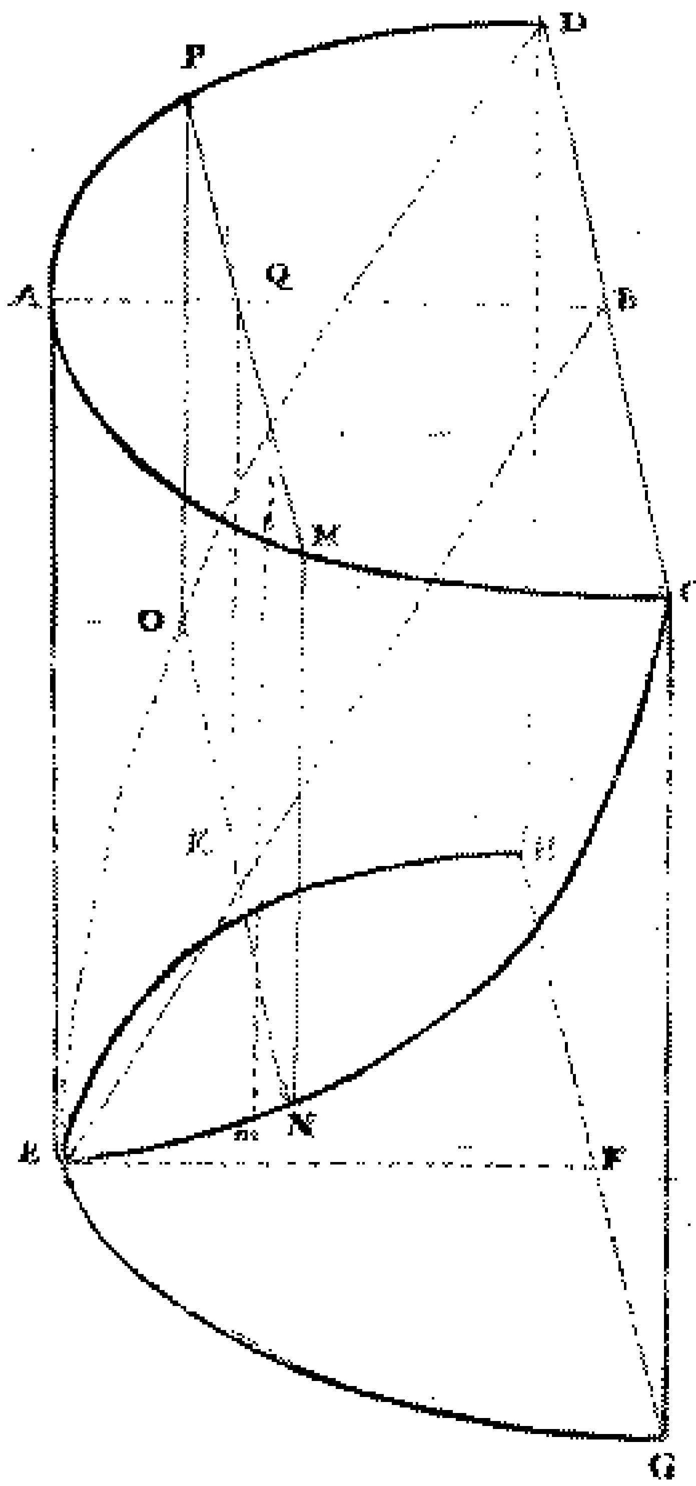


Fig. 38.

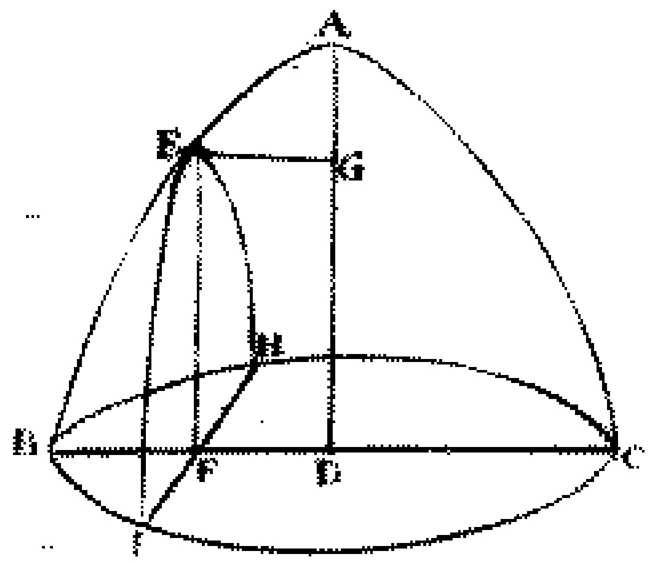


Fig. 40.

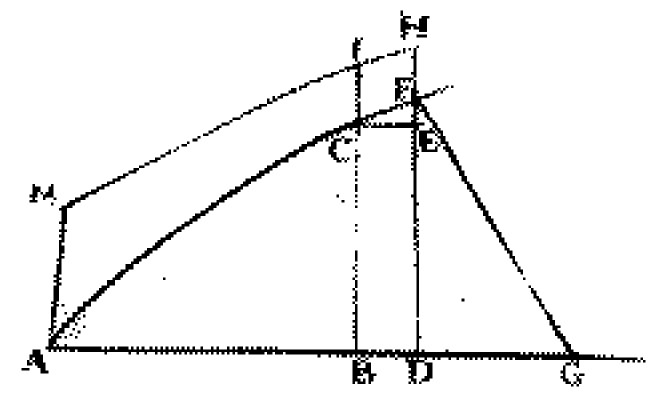


Fig. 42

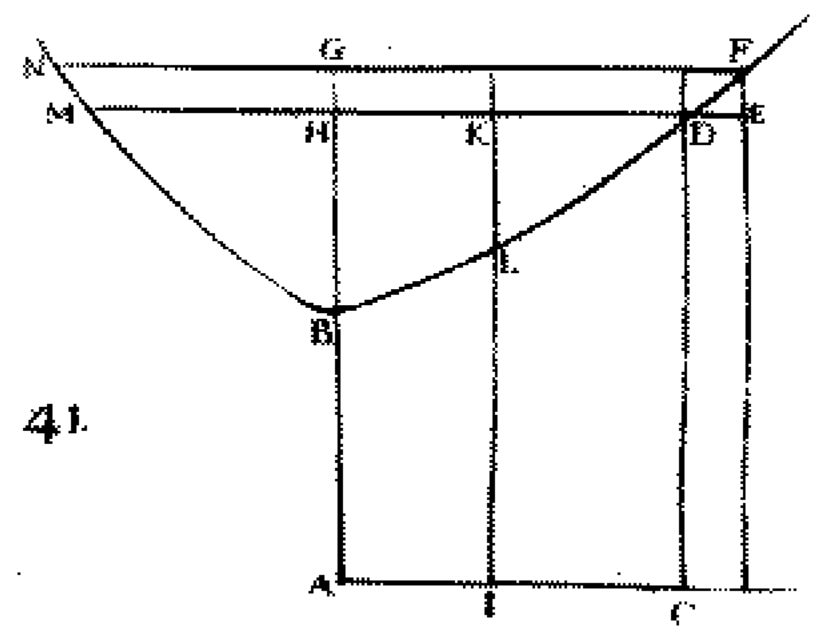


Fig. 41.

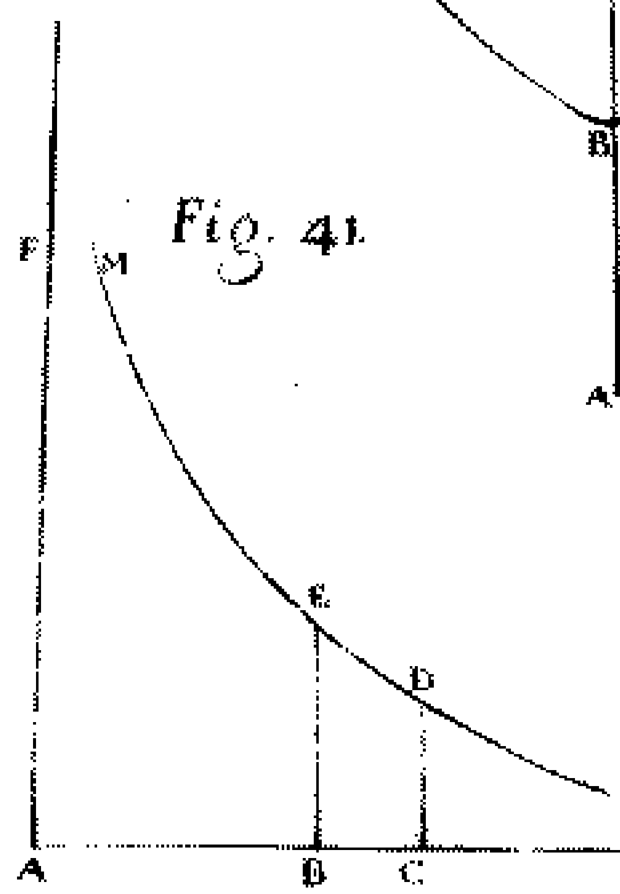


Fig. 43.

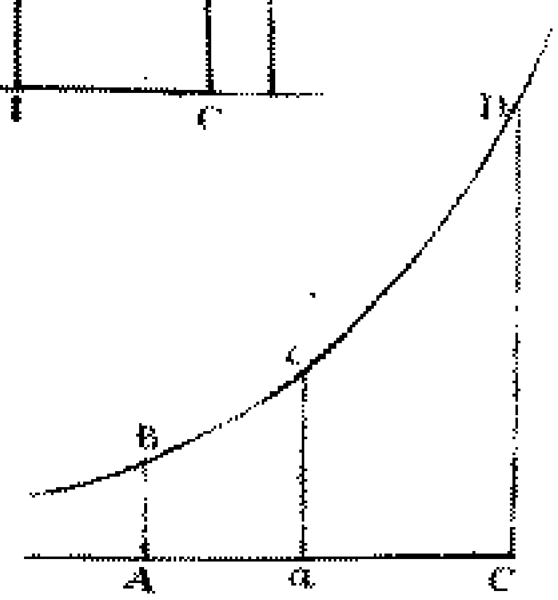


Fig.ª 39.

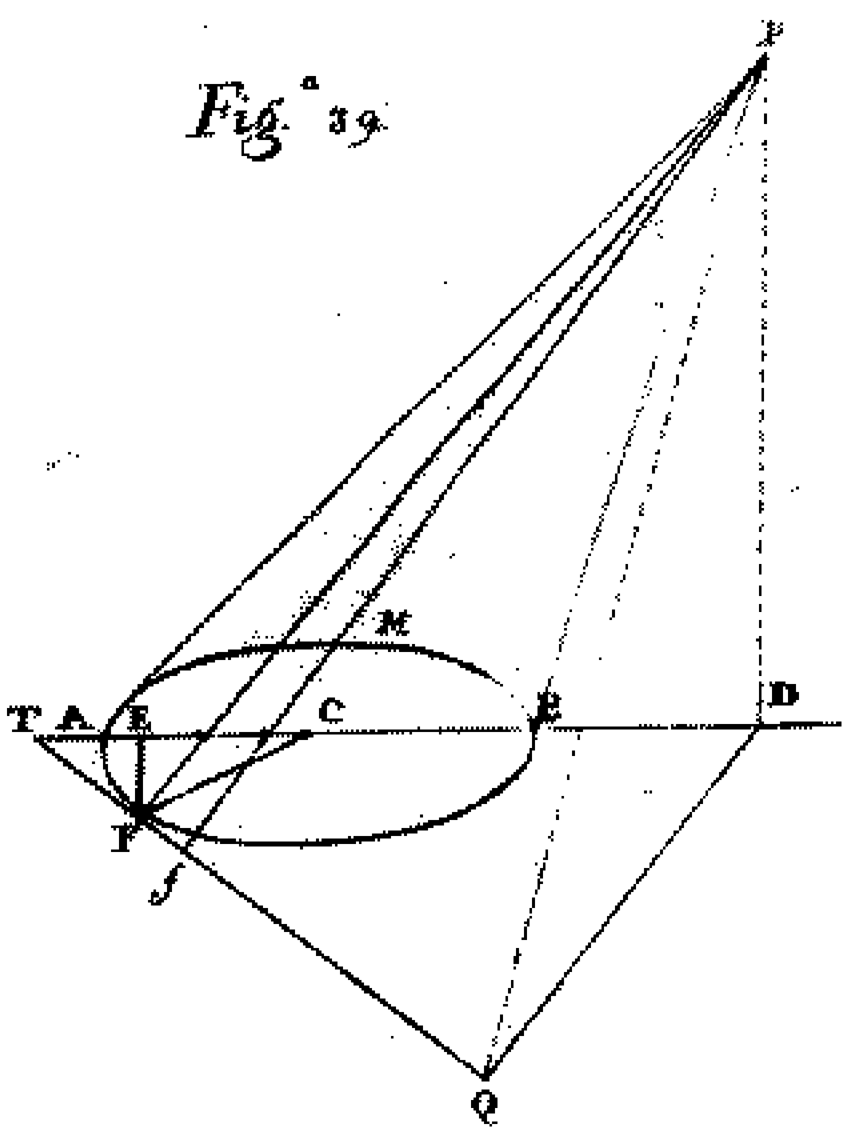


Fig.ª 44

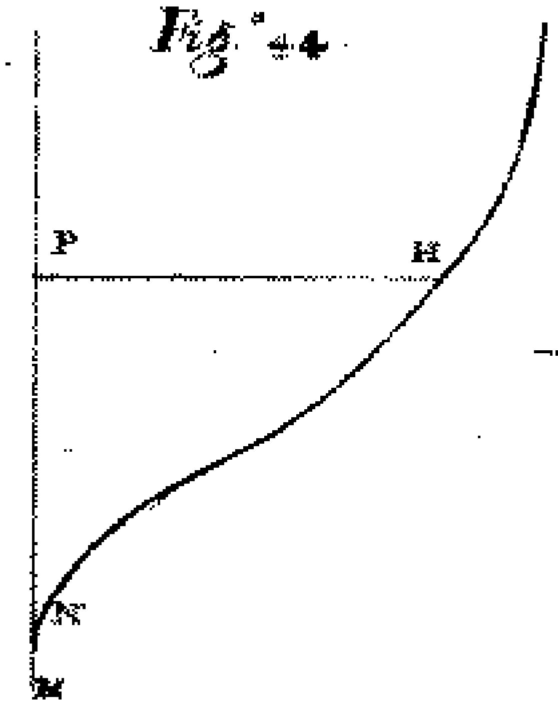


Fig.ª 45.

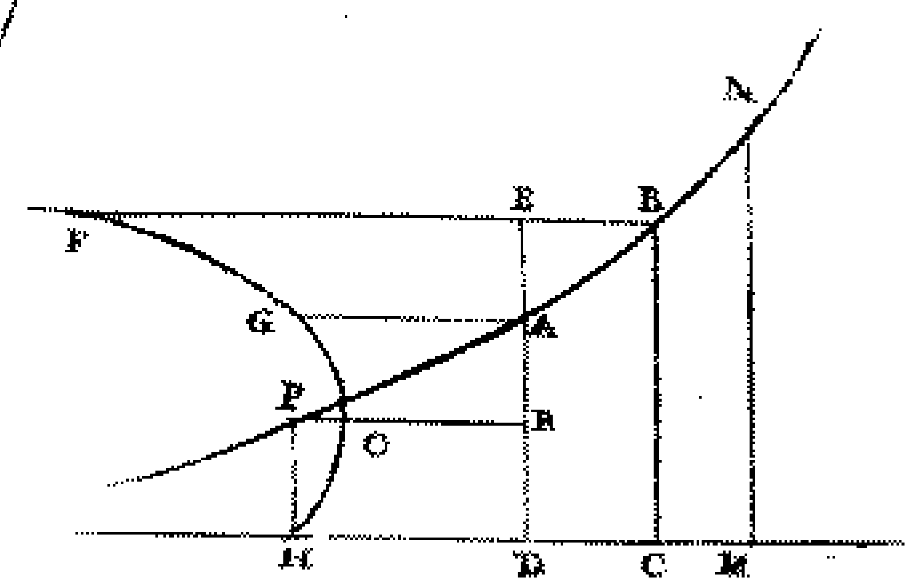


Fig. 32.

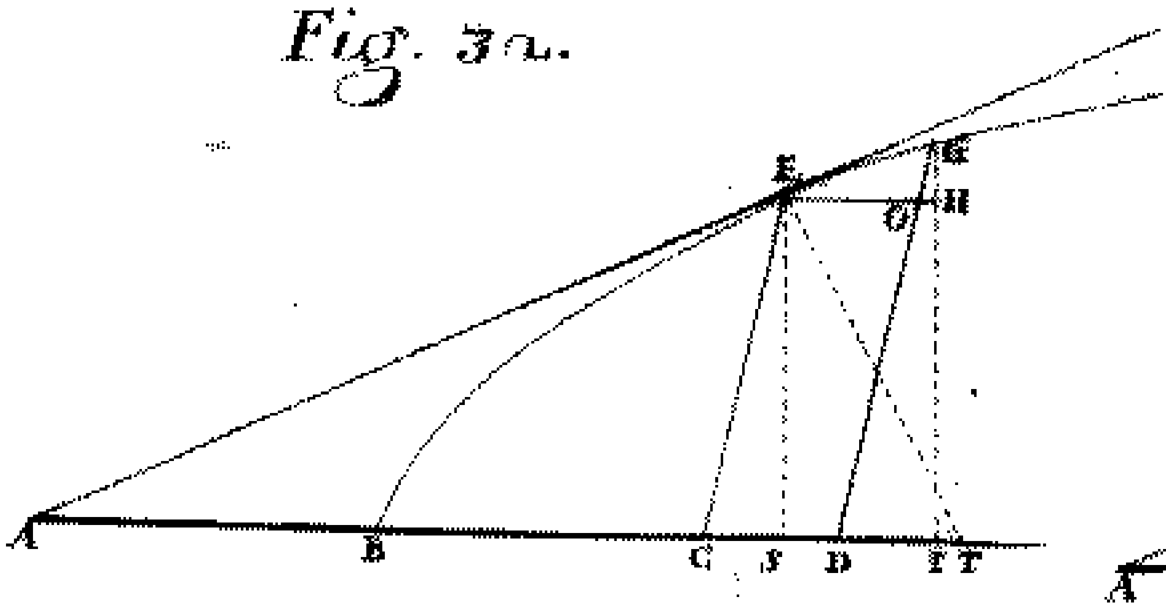


Fig. 33.

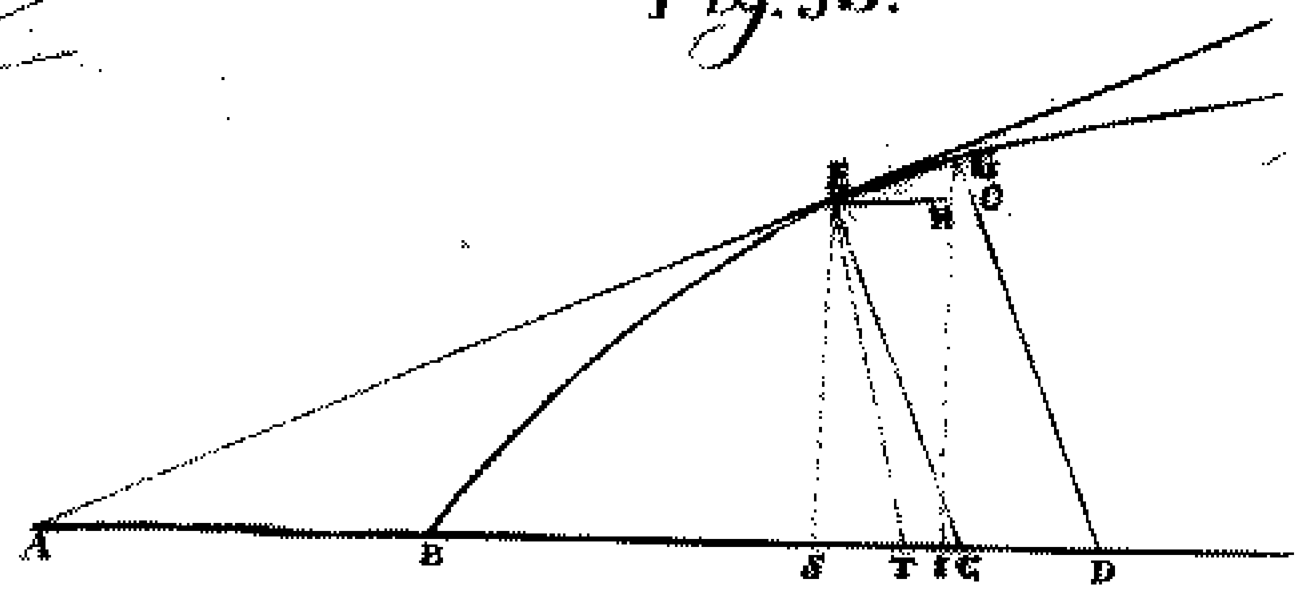


Fig. 34.

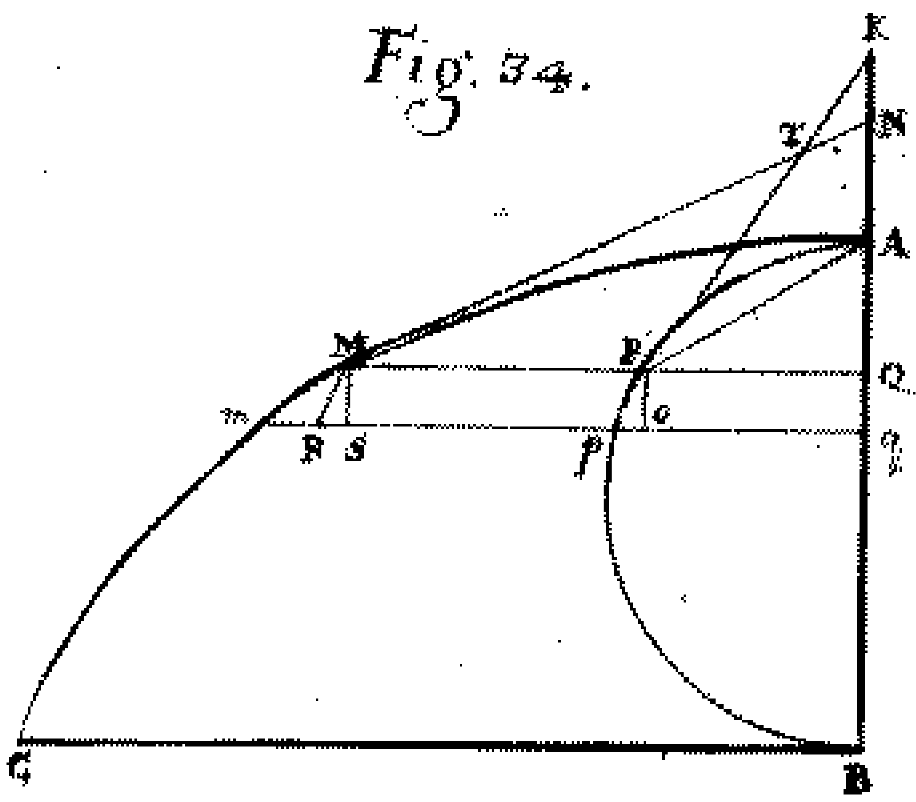


Fig. 37.

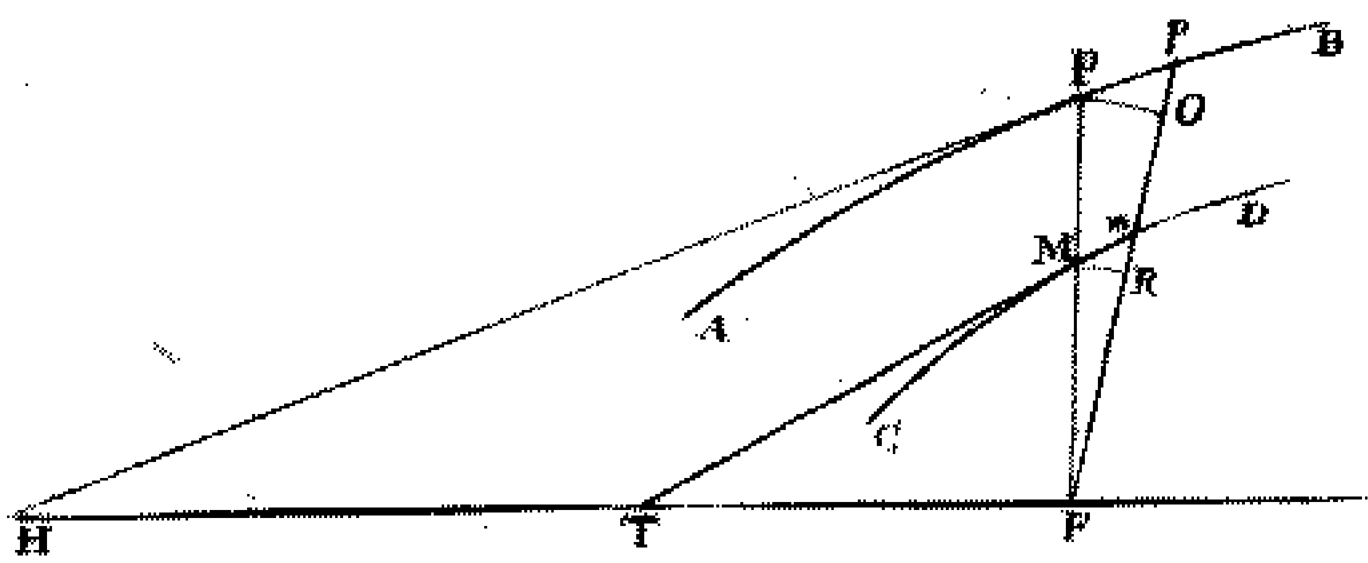


Fig. 35.

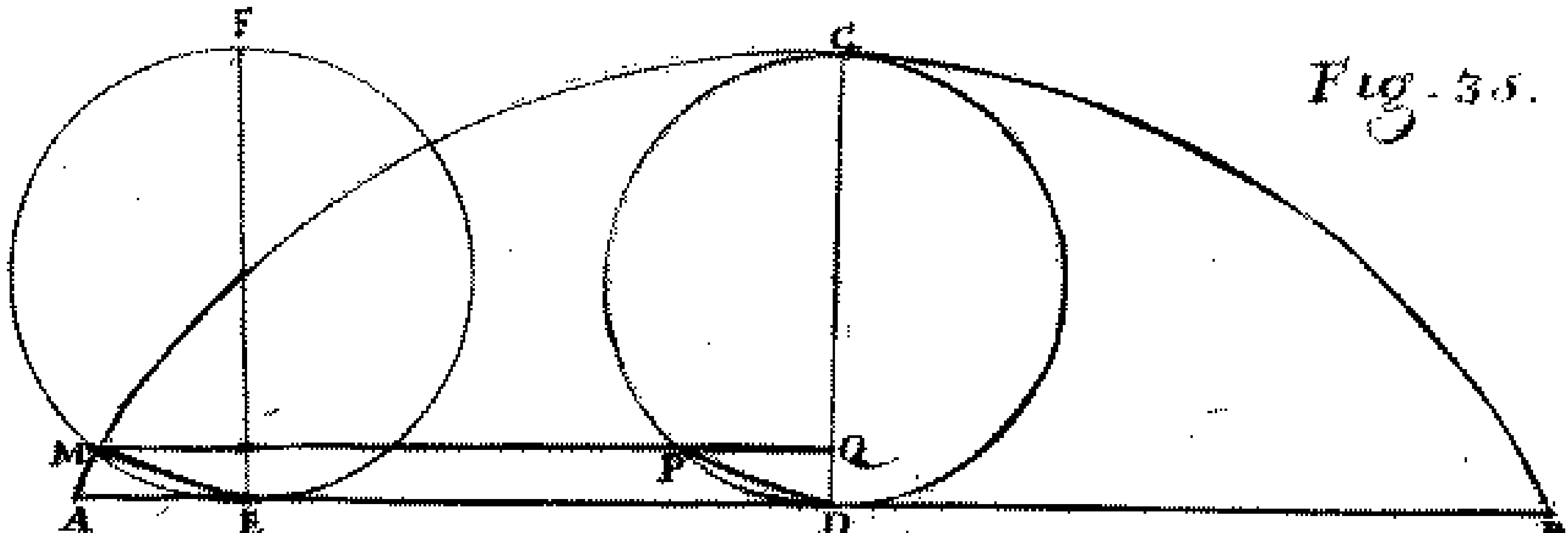


Fig. 36.

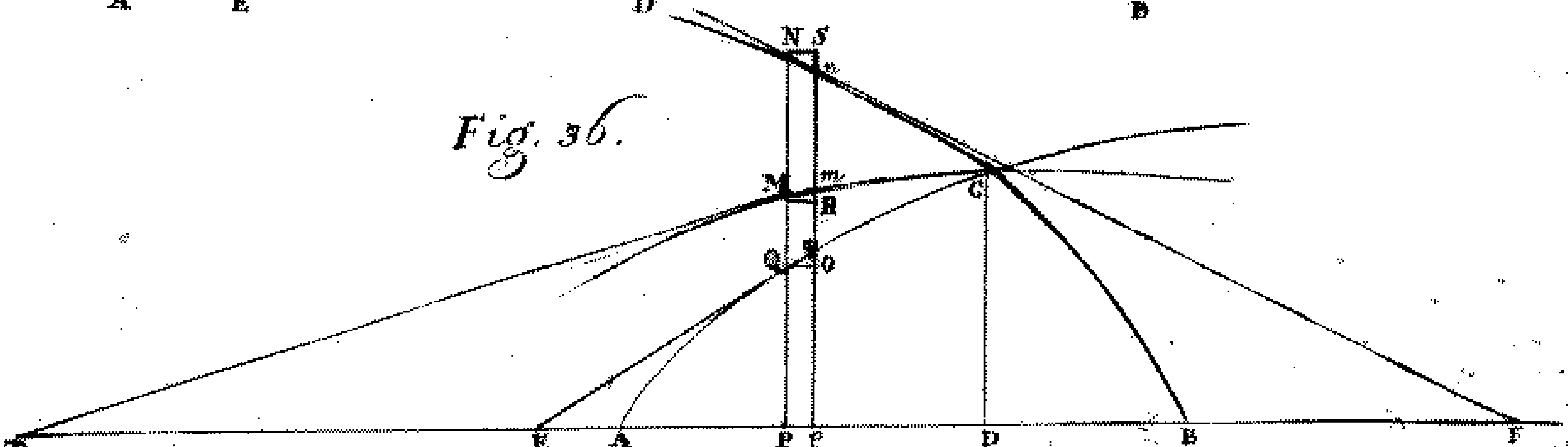


Fig. 38.

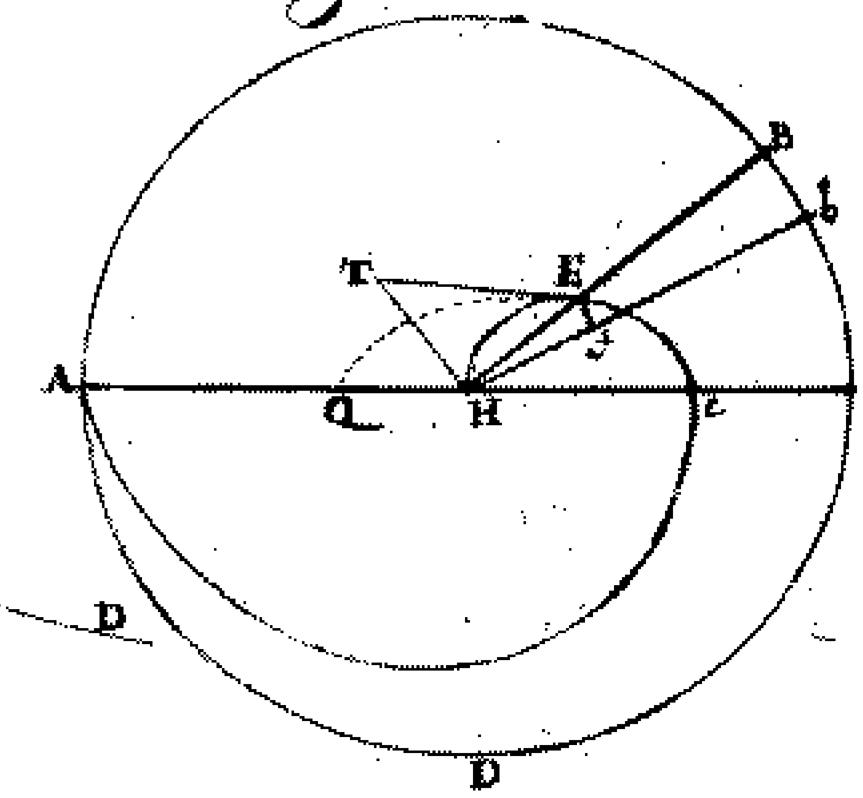


Fig. 39.

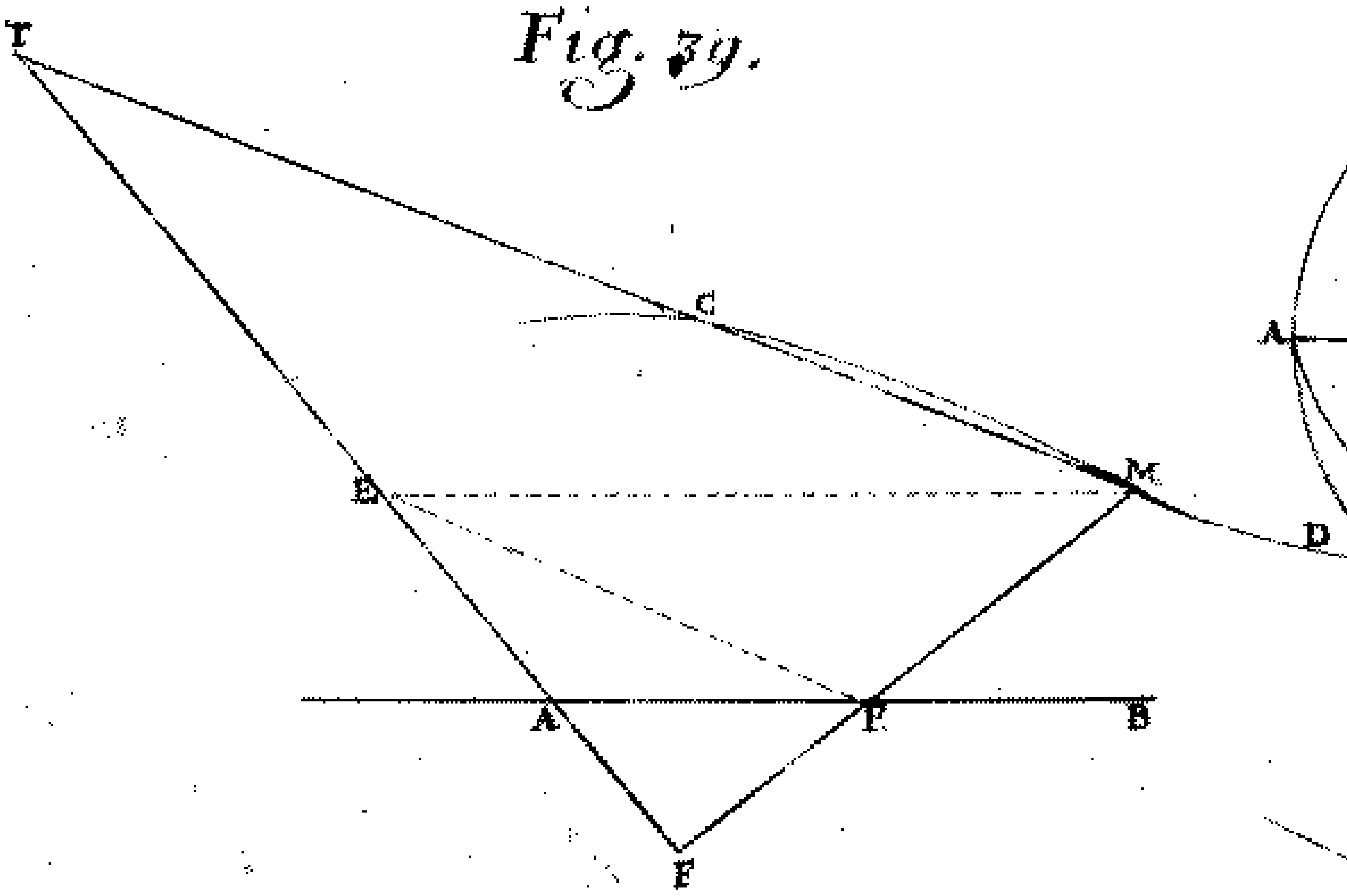


Fig. 41.

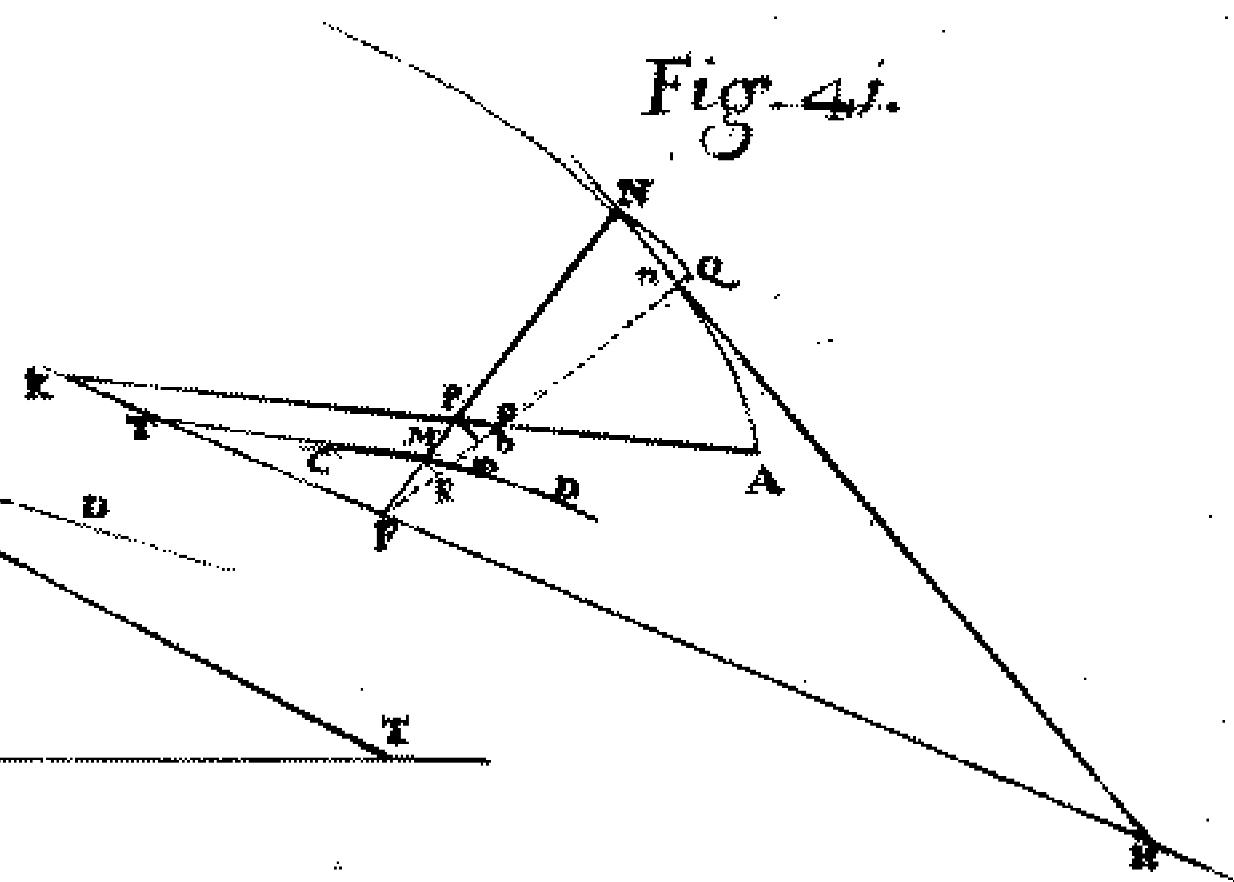


Fig. 40.

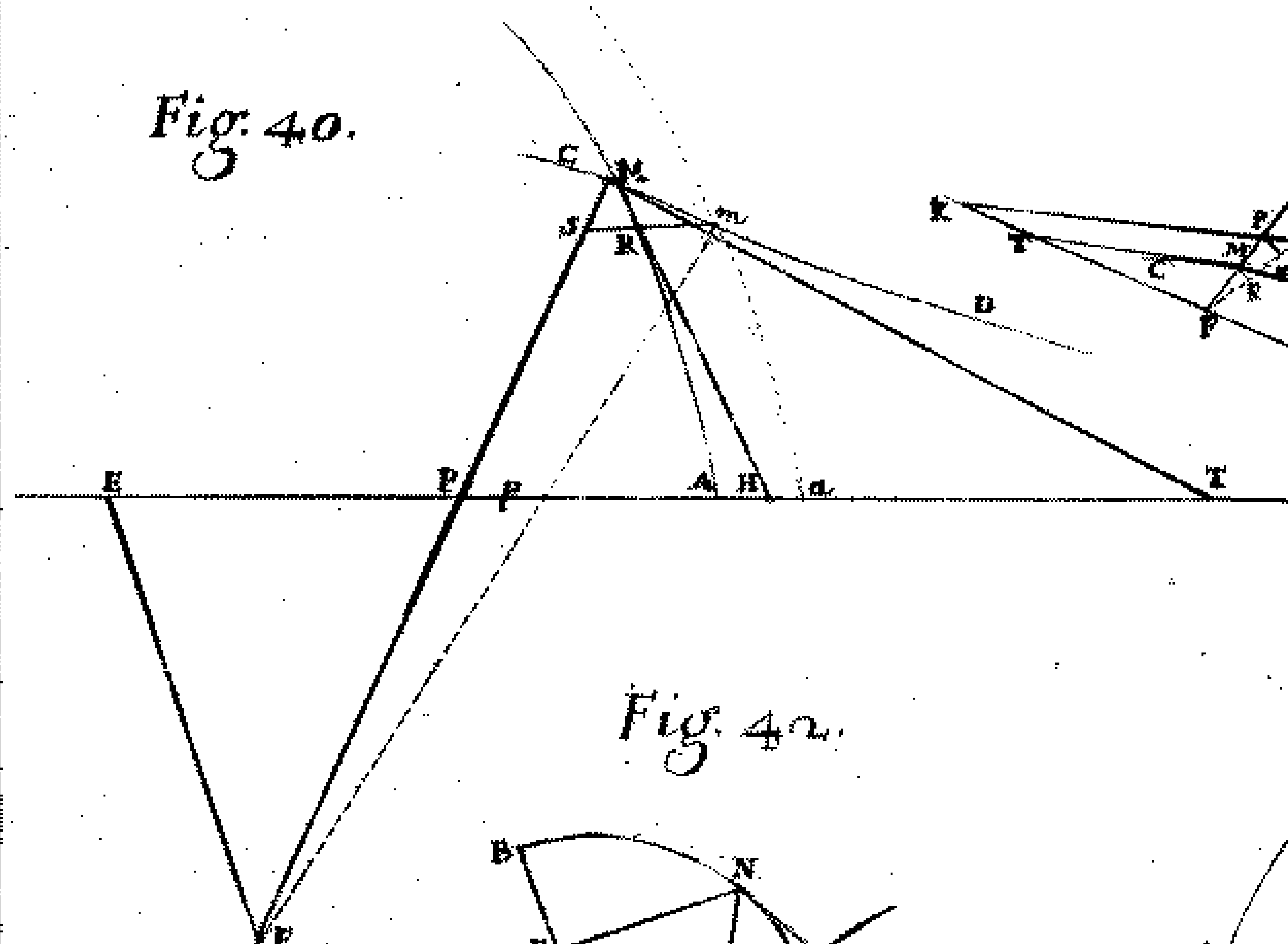


Fig. 43.

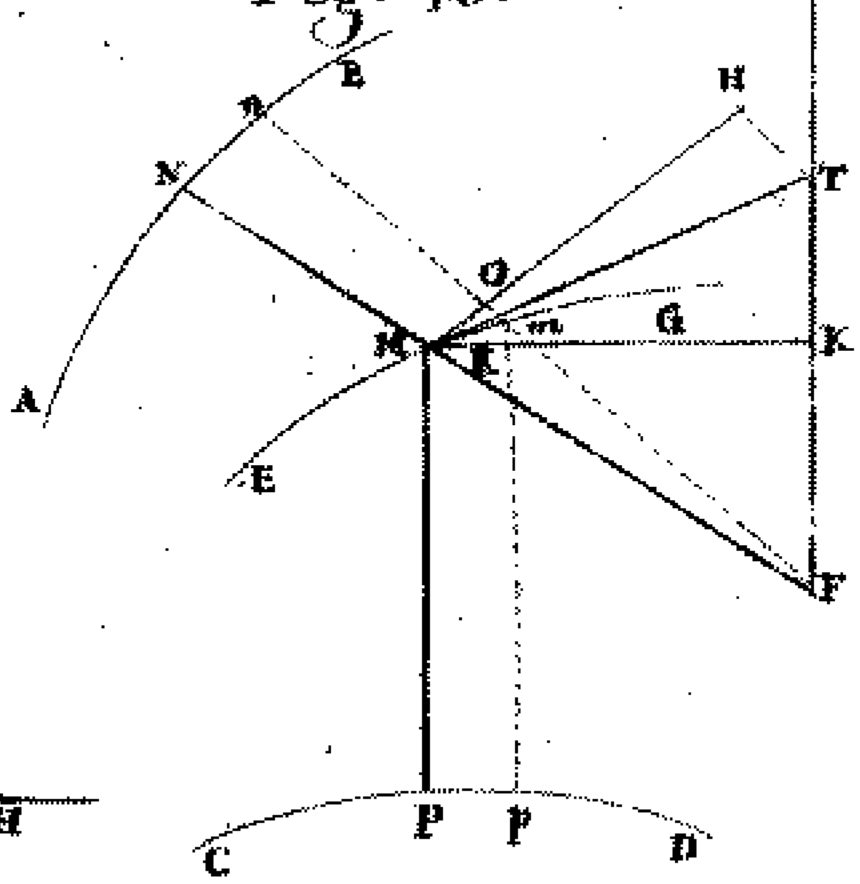


Fig. 42.

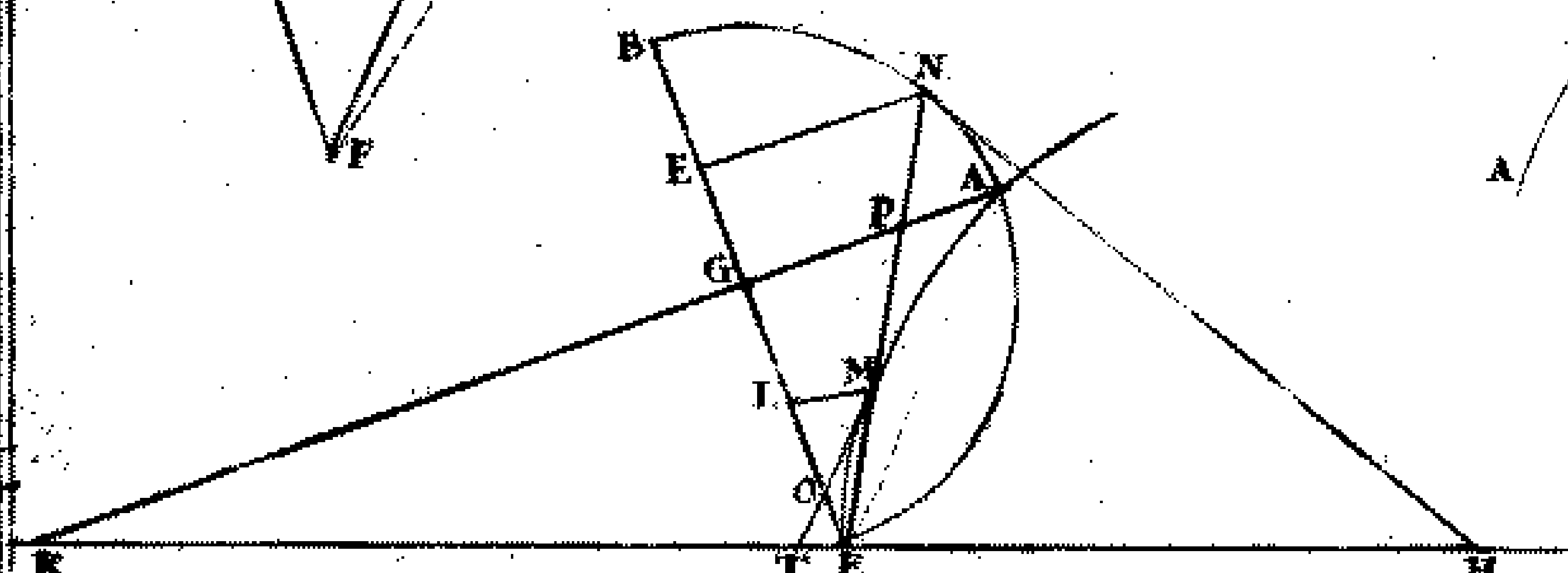


Fig. 45.

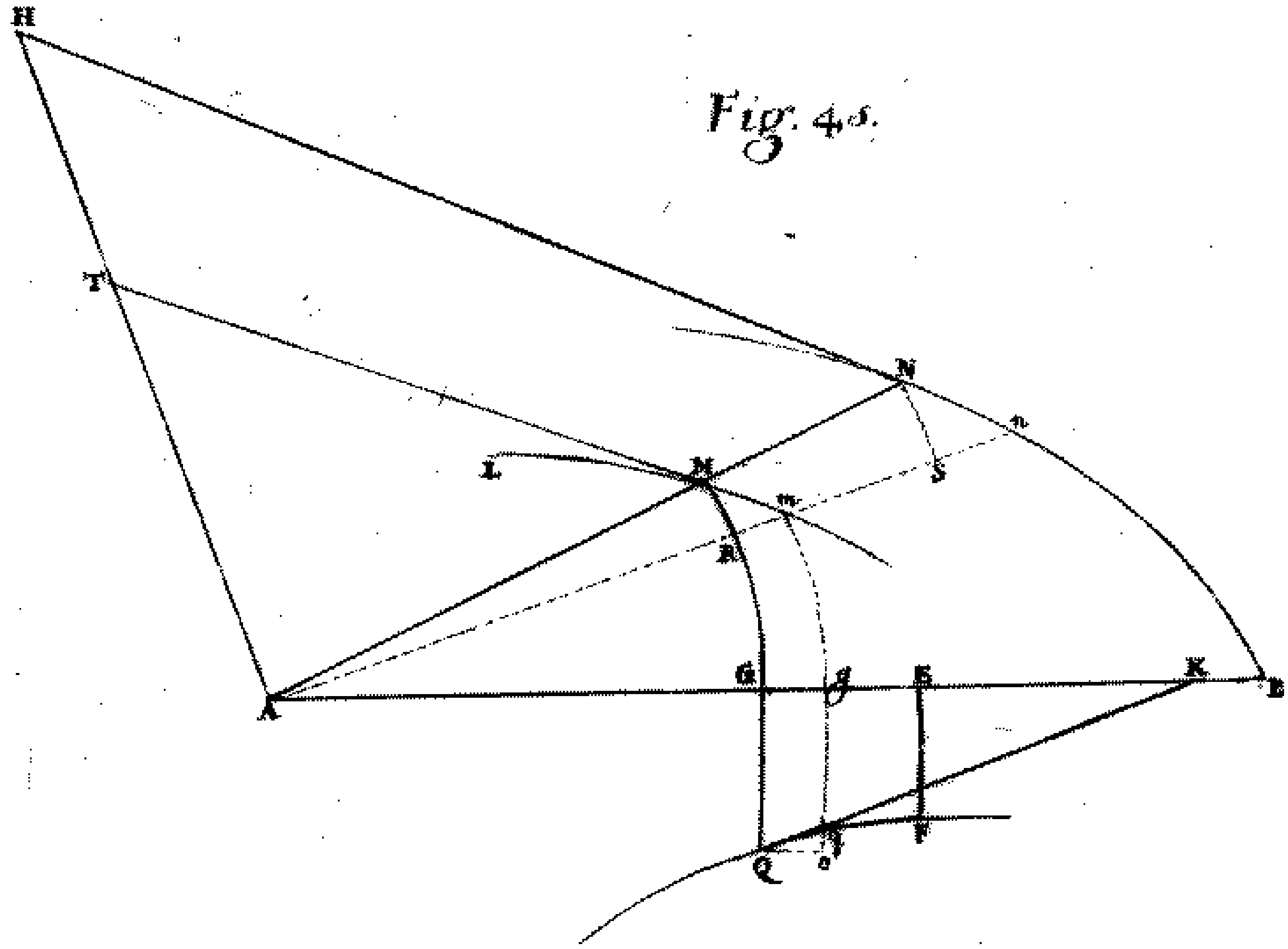


Fig. 44.

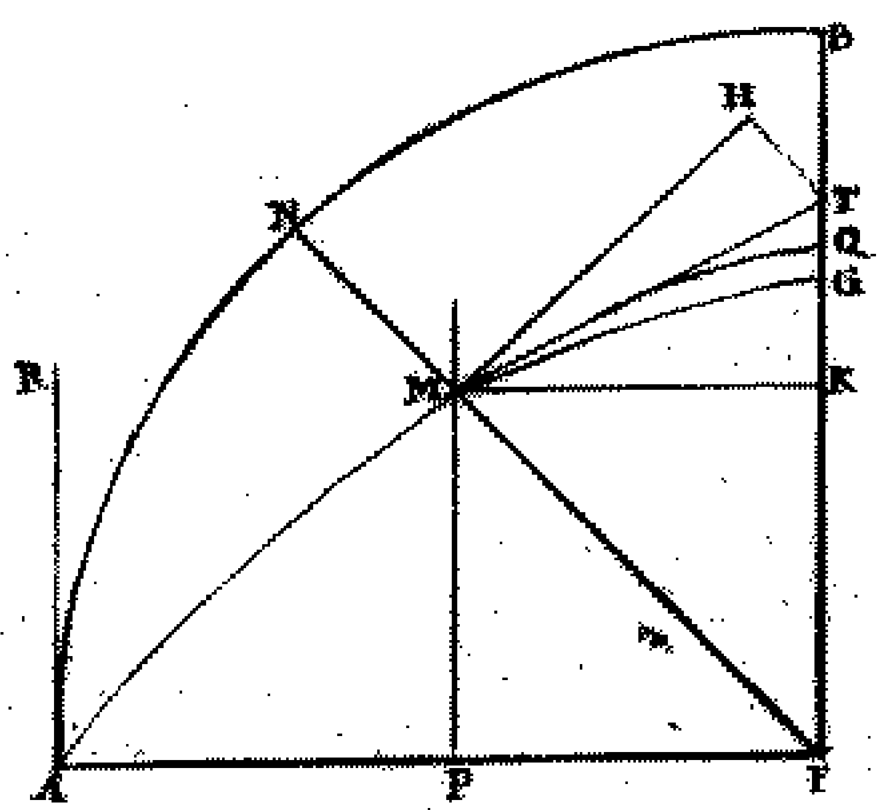


Fig. 46.

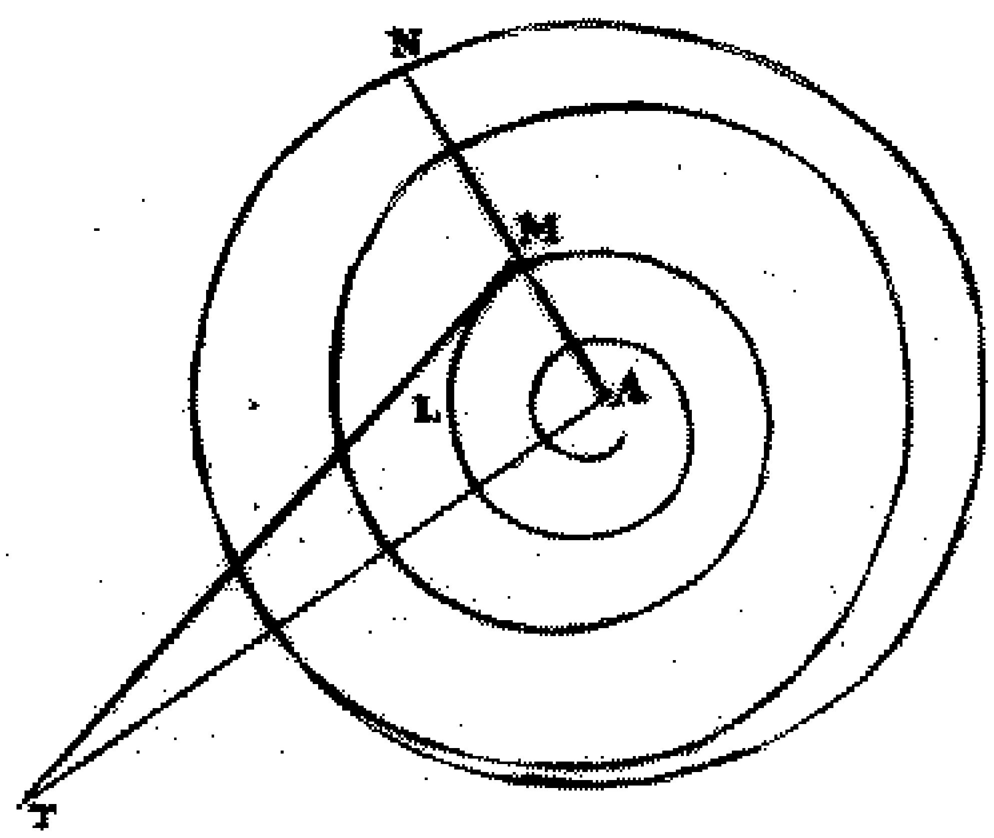


Fig. 47

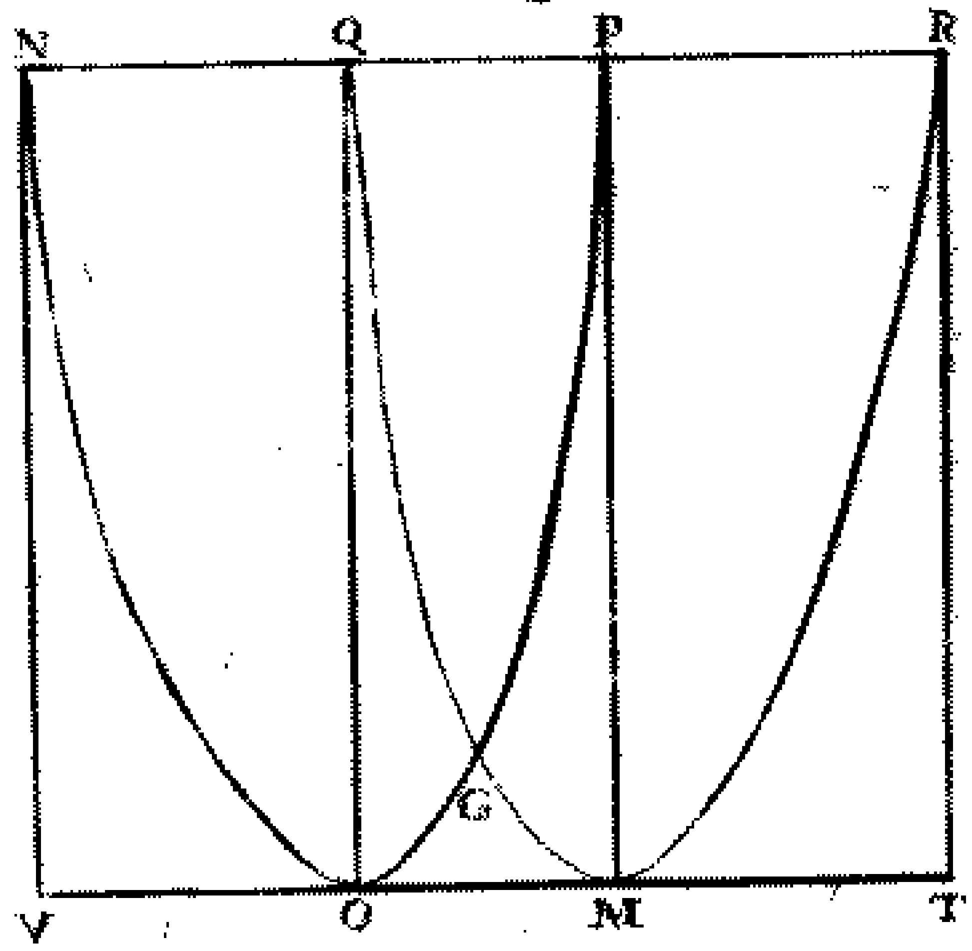


Fig. 48

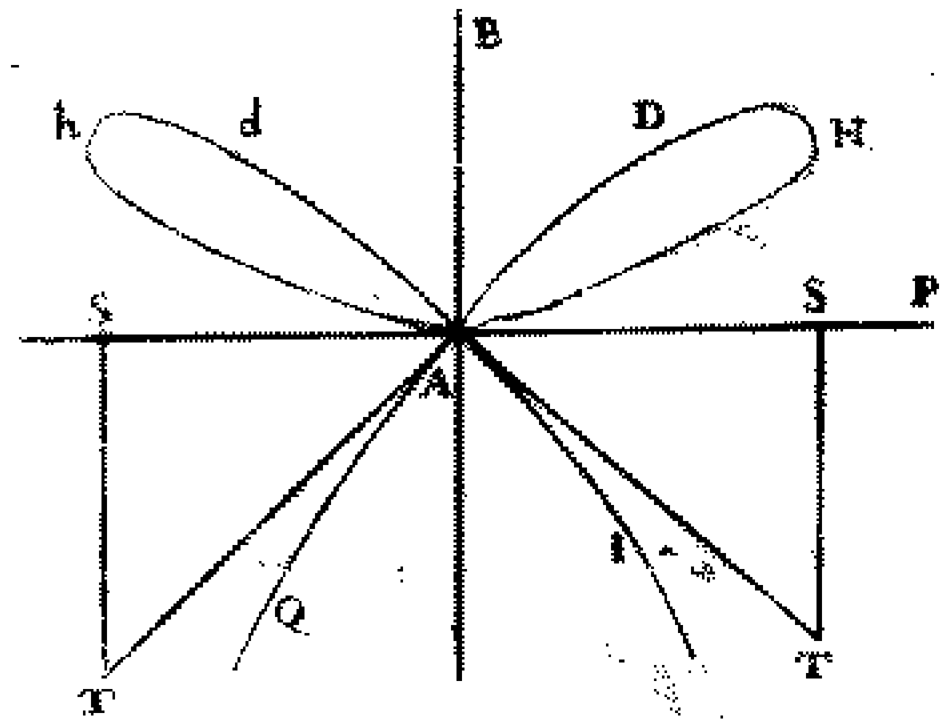


Fig. 49

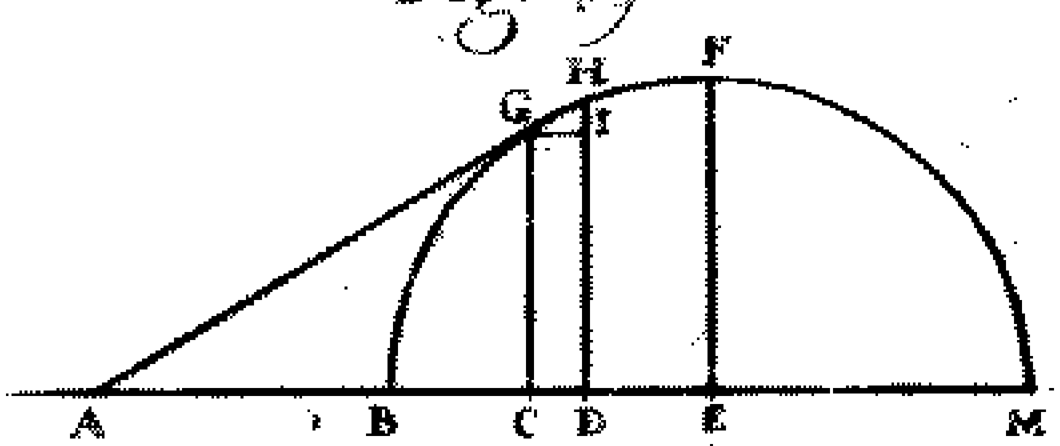


Fig. 50

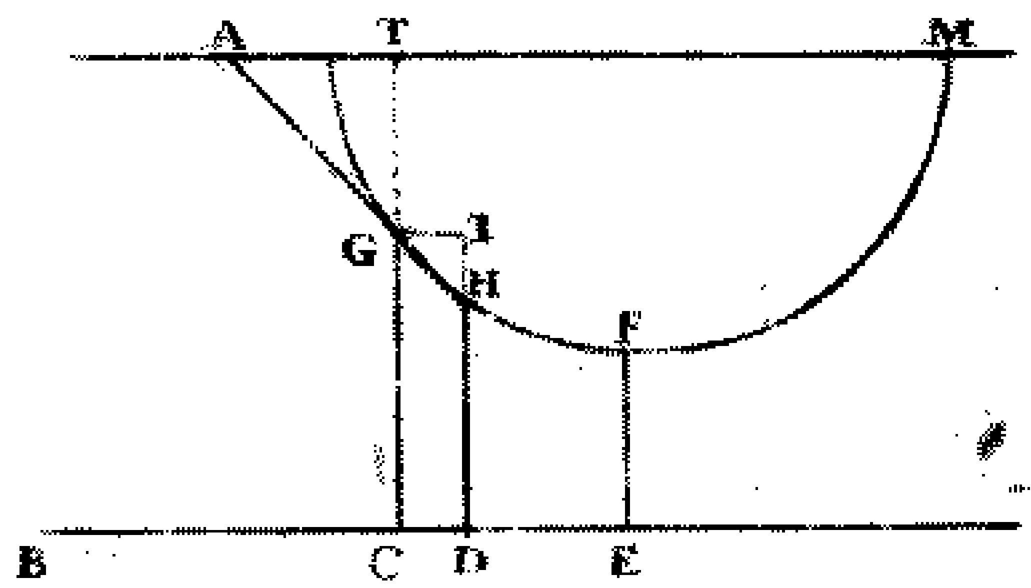


Fig. 51

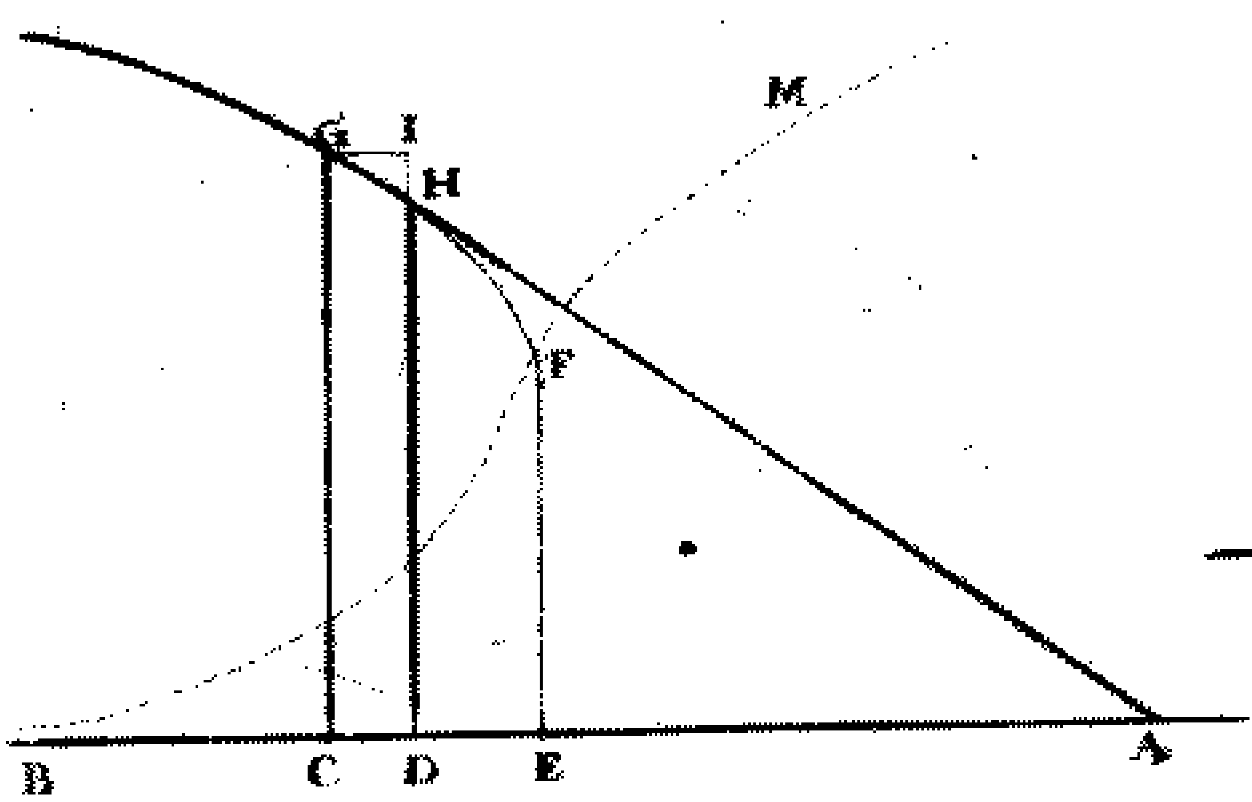


Fig. 52

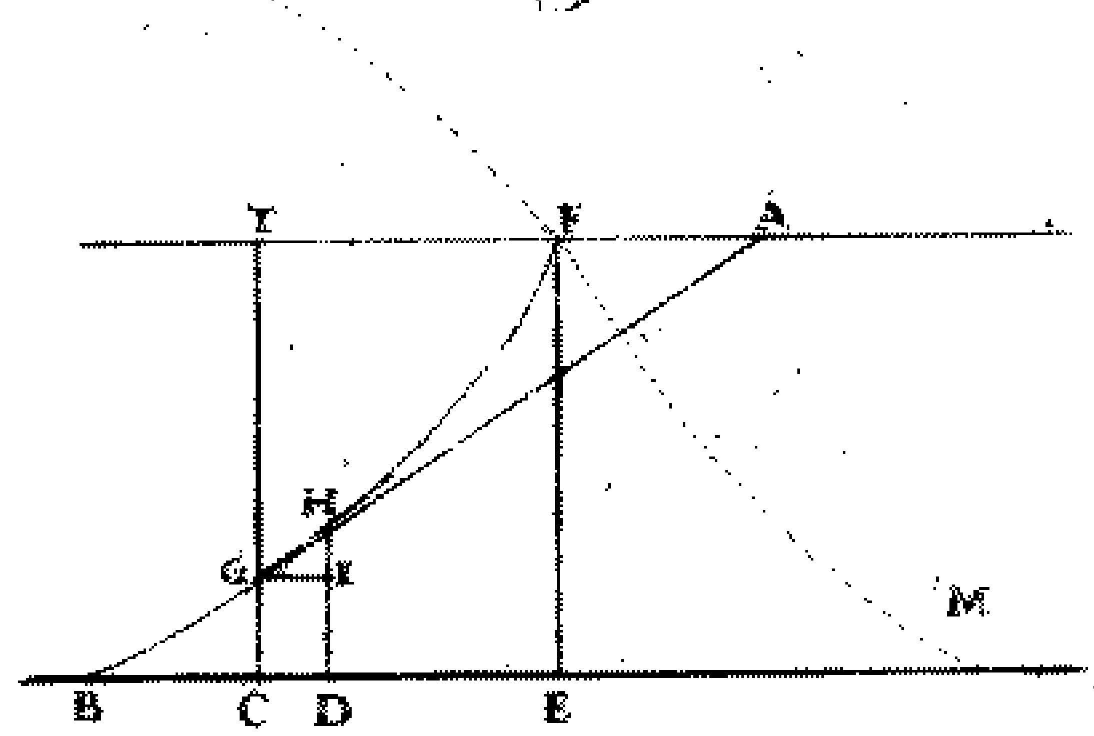


Fig. 53.

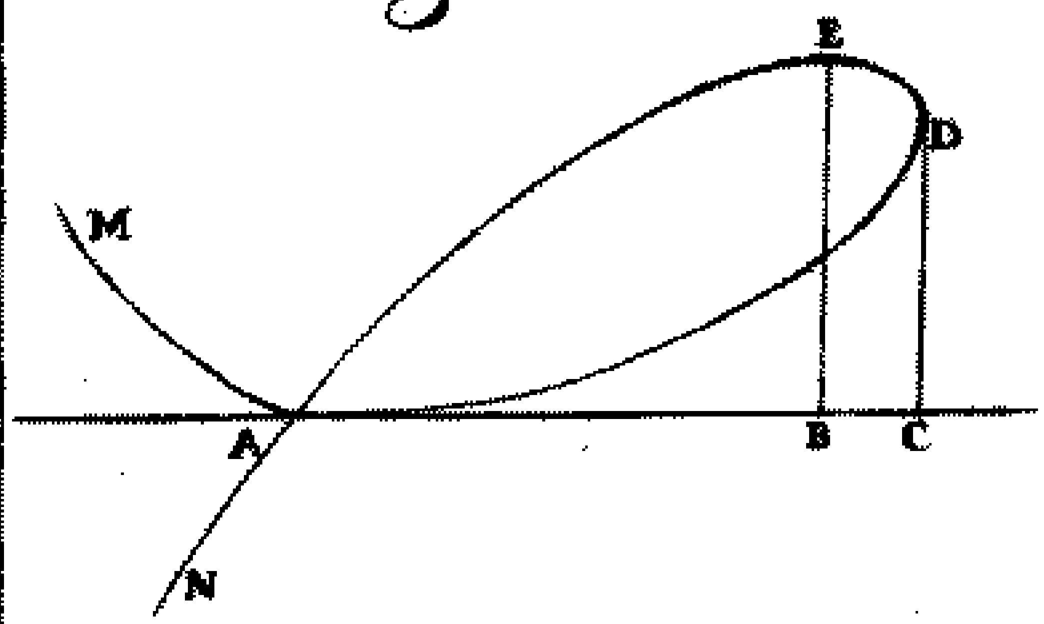


Fig. 54.

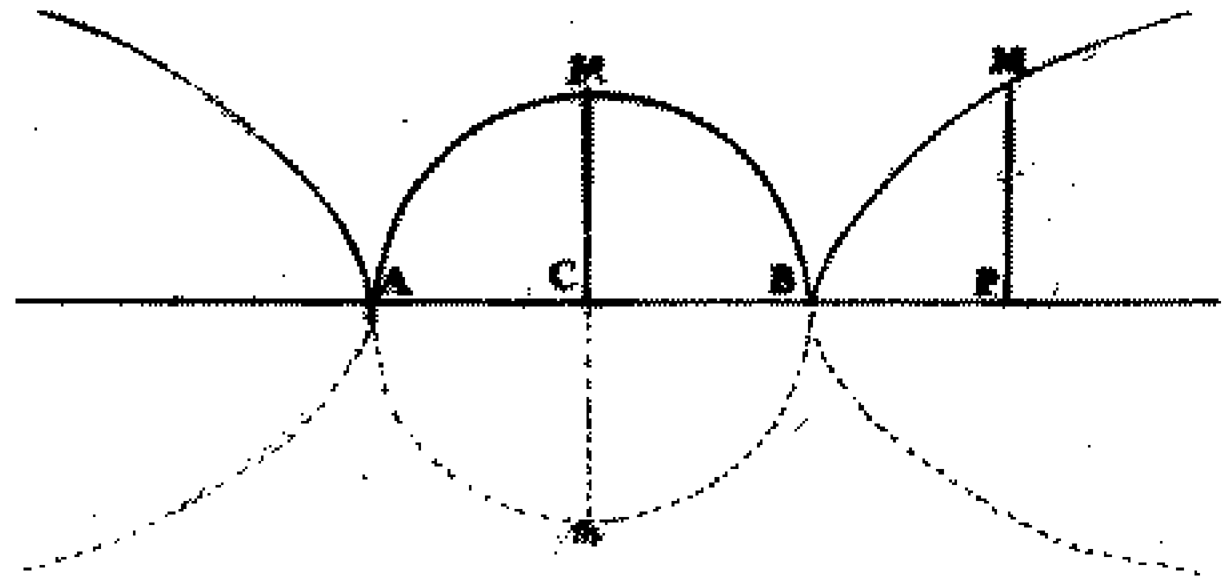


Fig. 55.

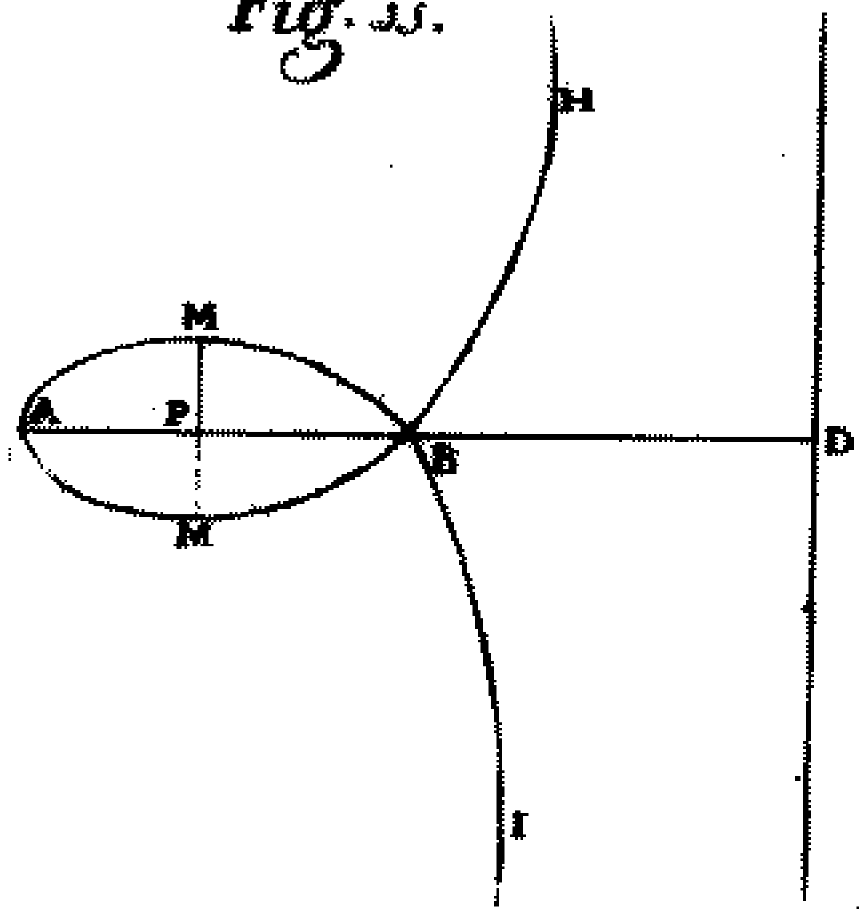


Fig. 56.

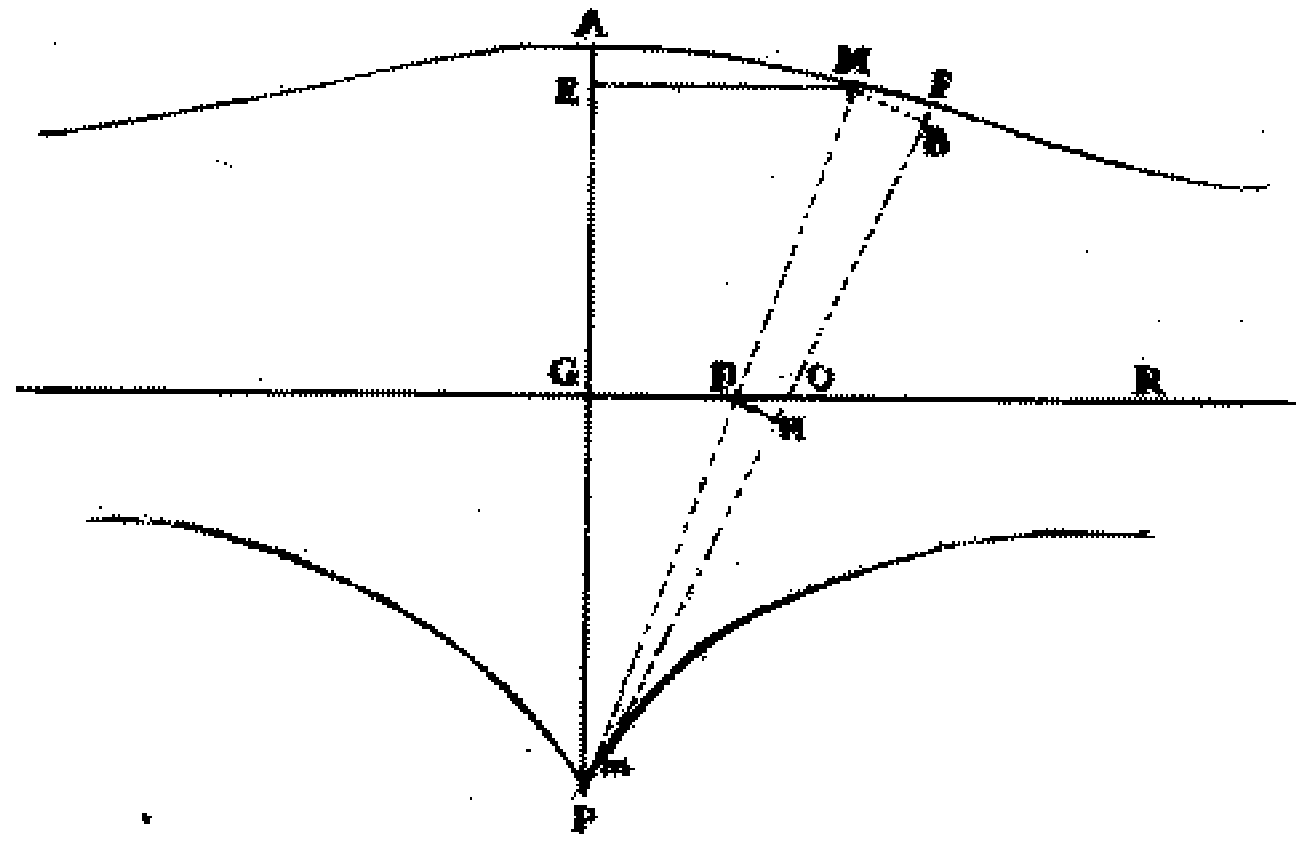


Fig. 57.

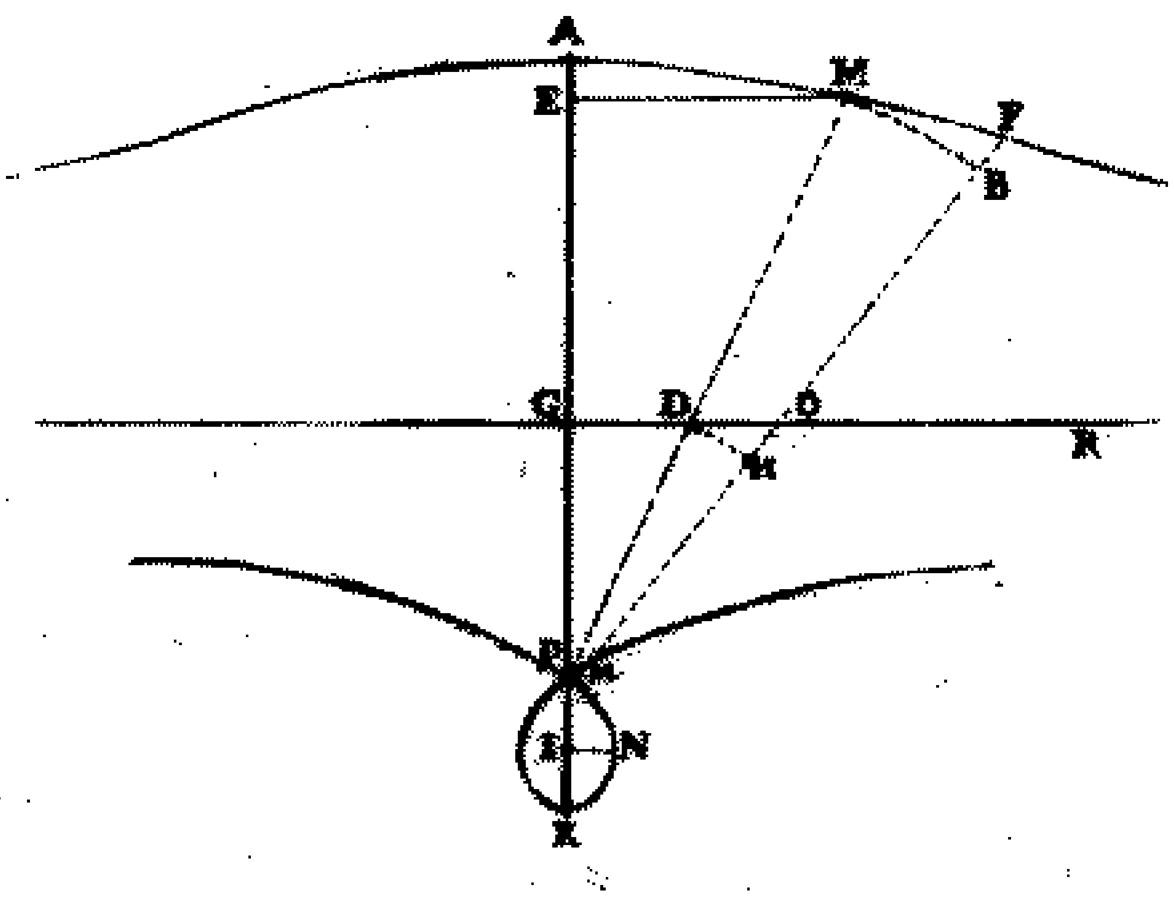


Fig. 58.

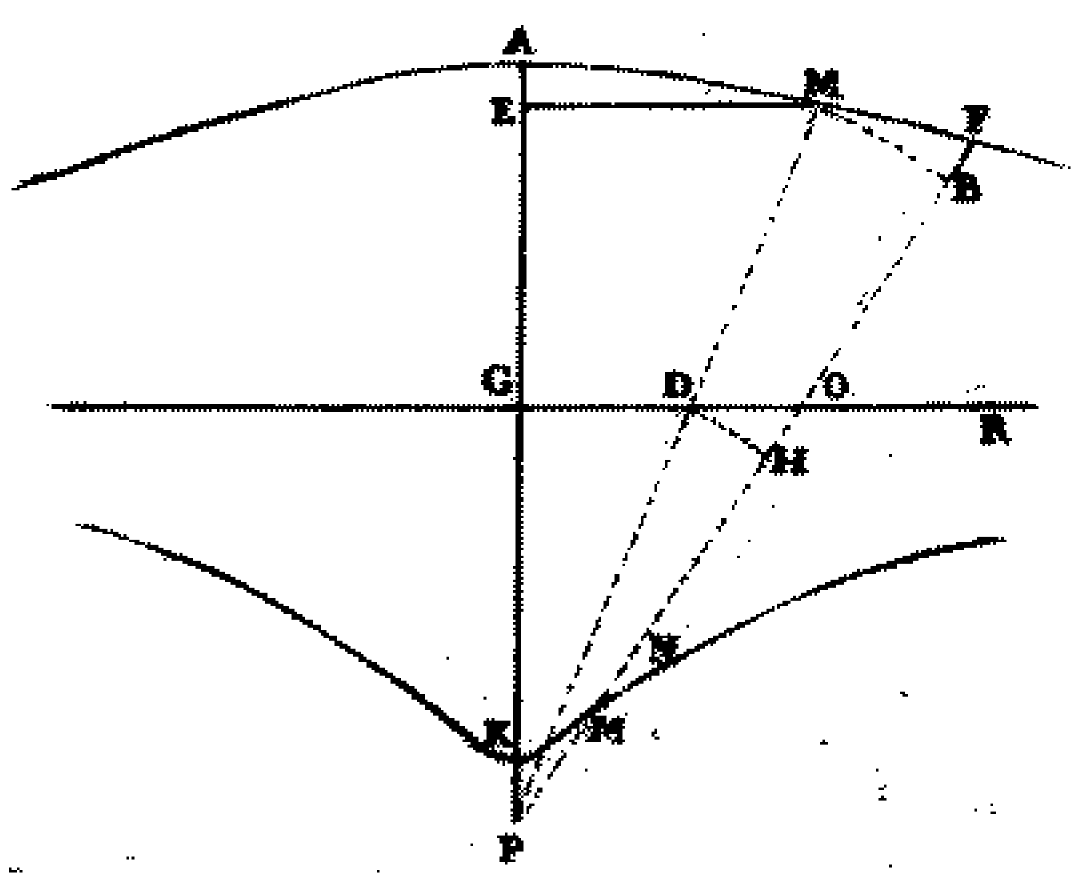


Fig. 59.

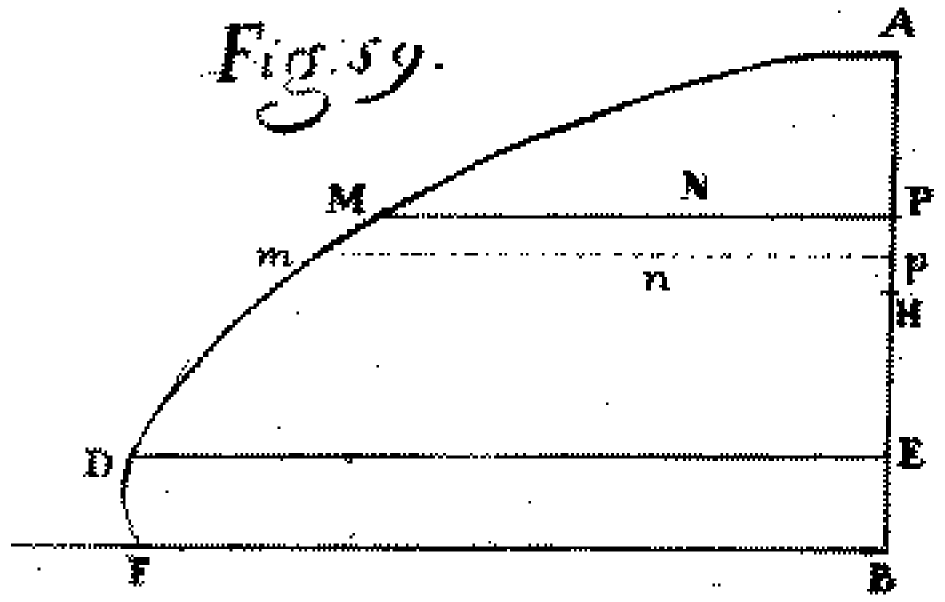


Fig. 60.

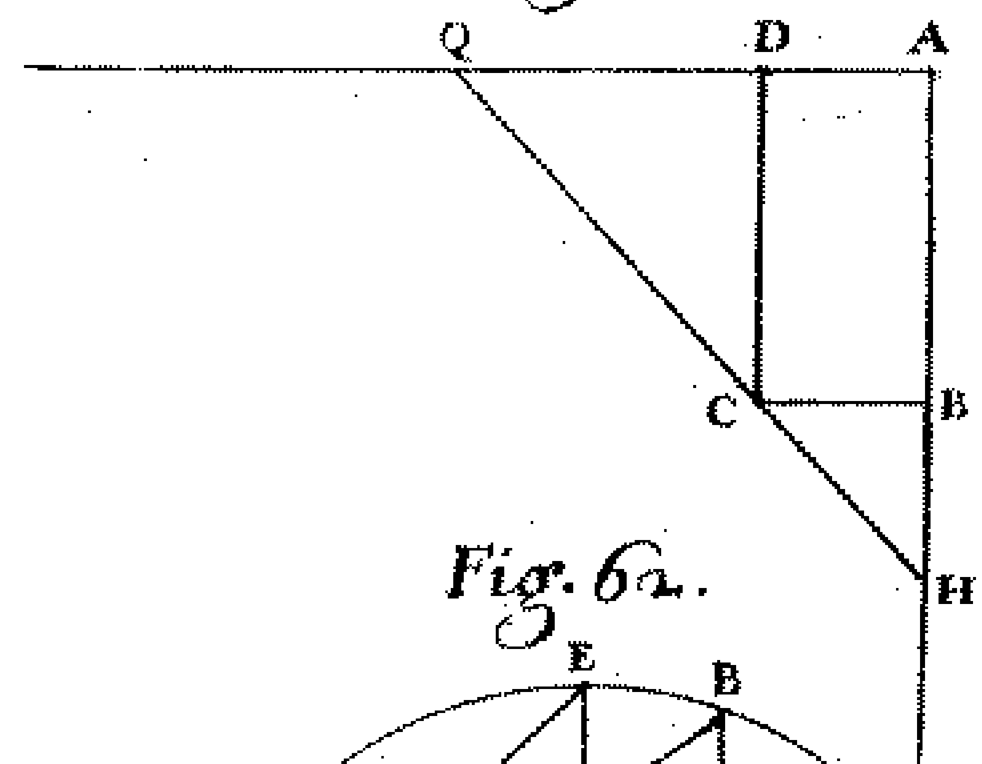


Fig. 61.

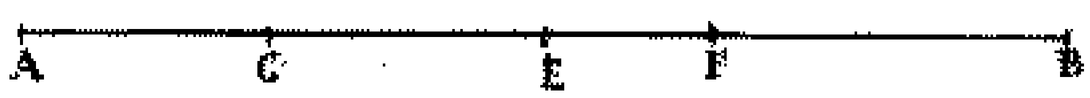


Fig. 62.

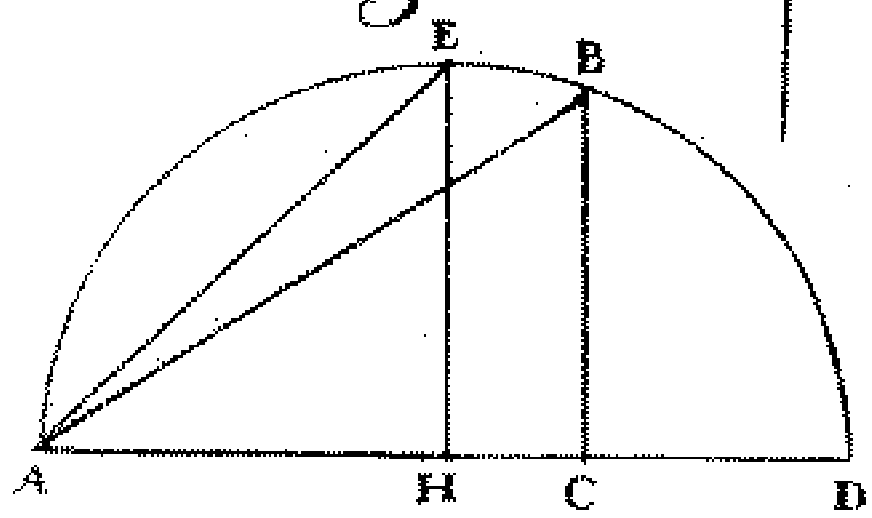


Fig. 63.

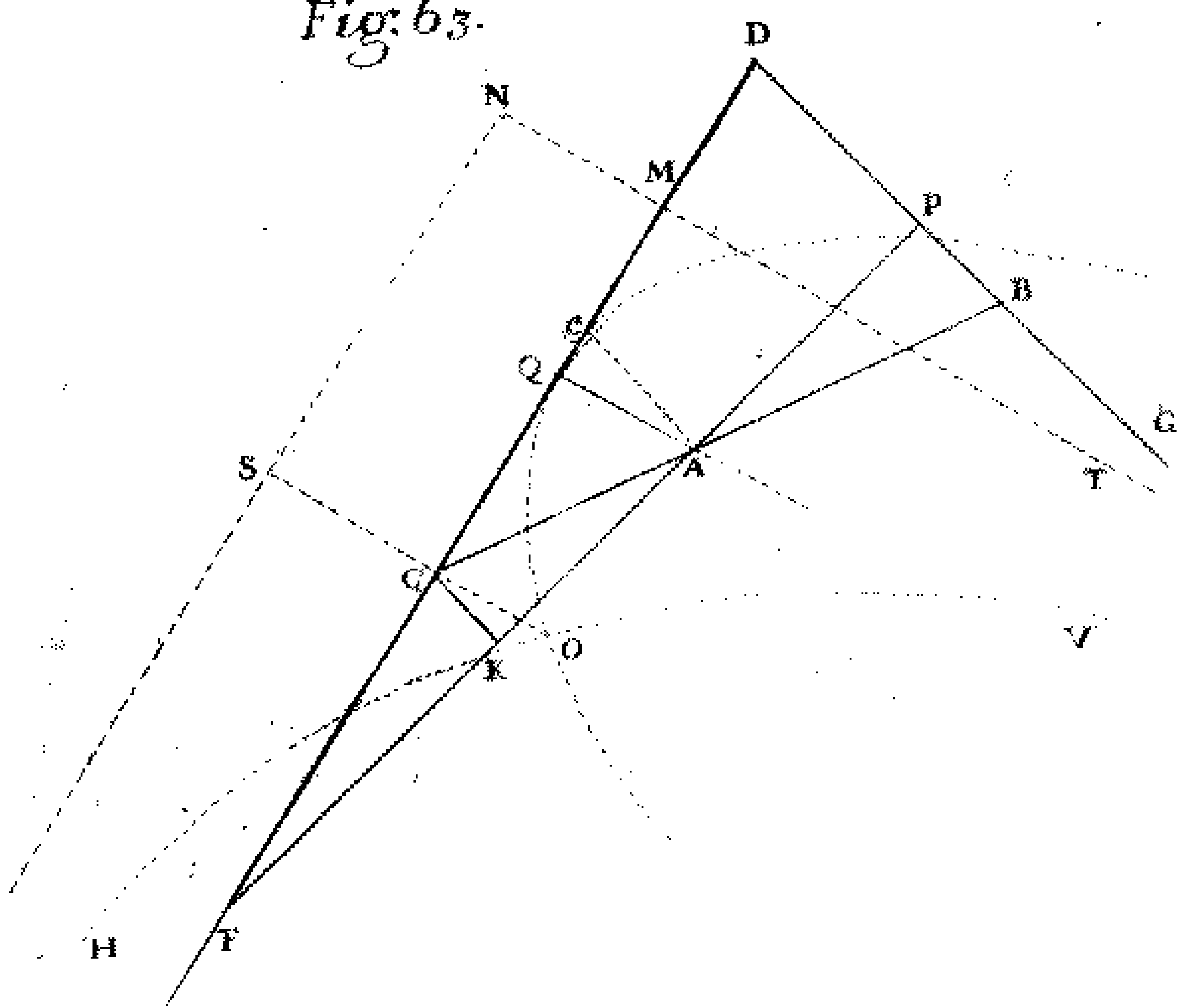


Fig. 64.

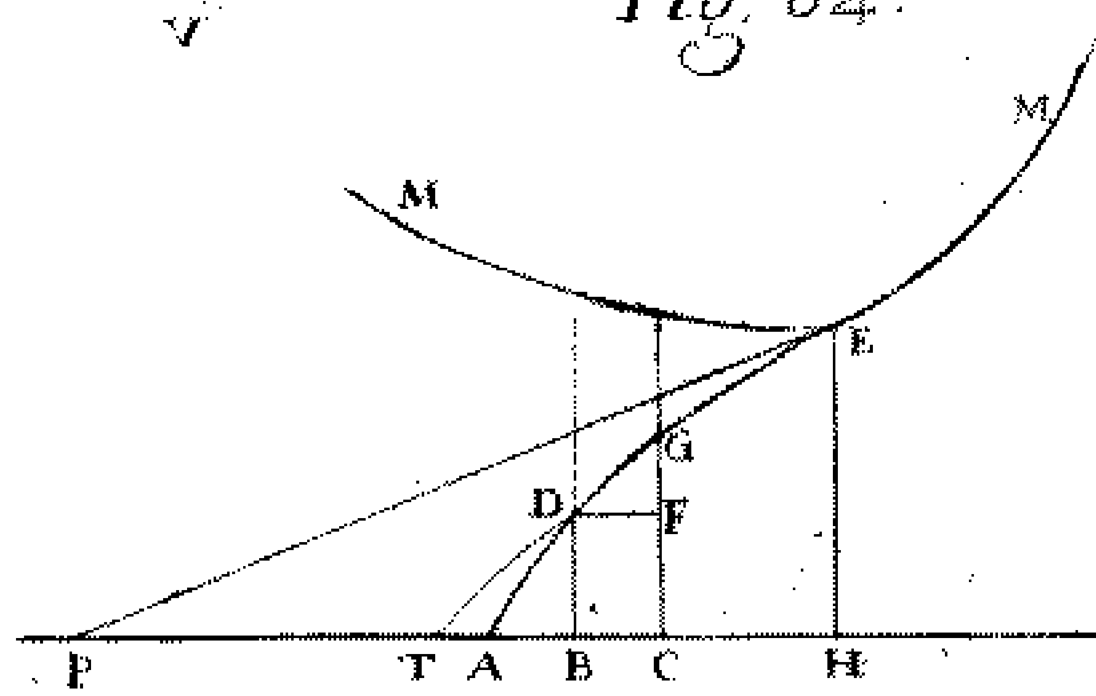


Fig. 65.

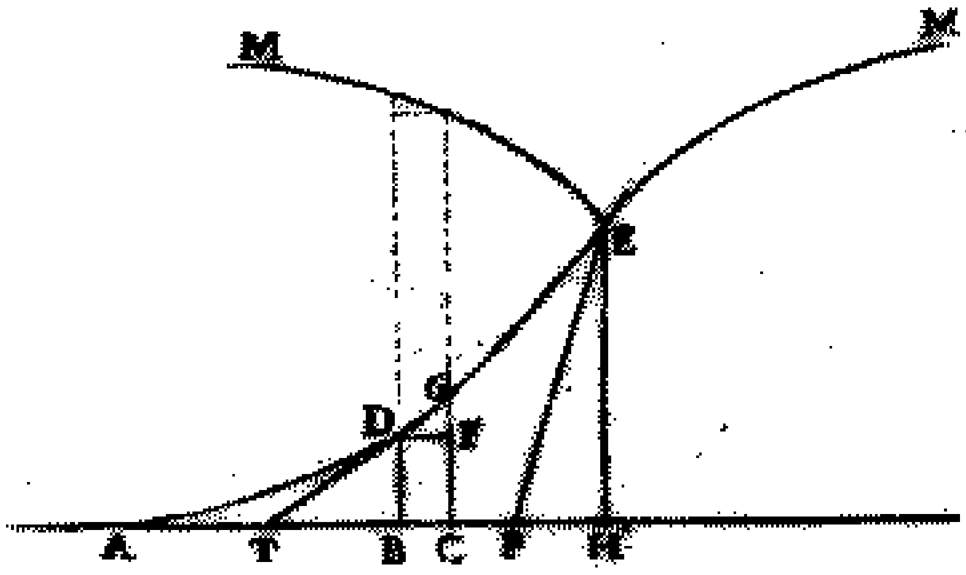


Fig. 66.

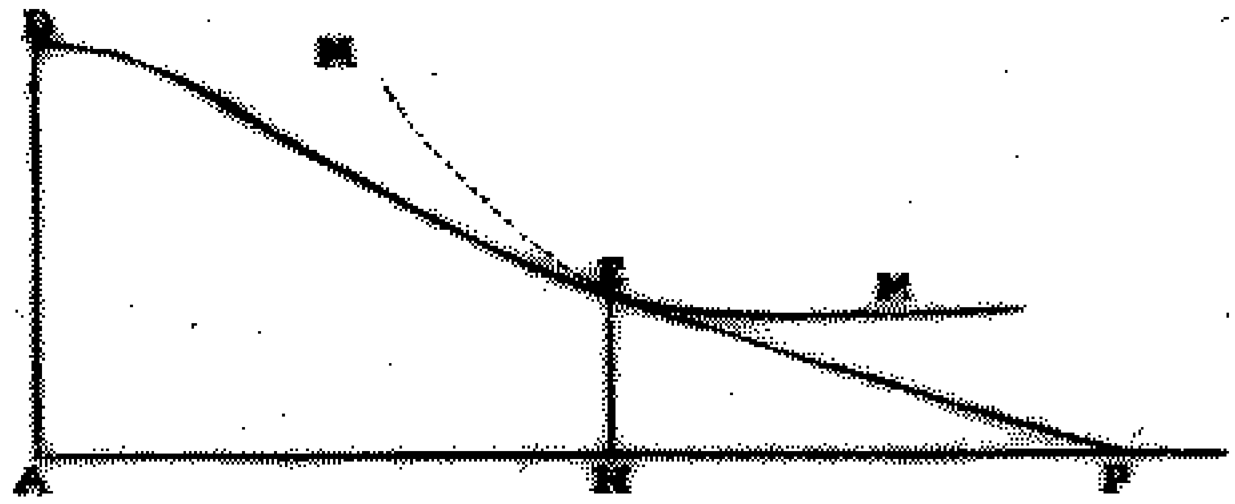


Fig. 67.

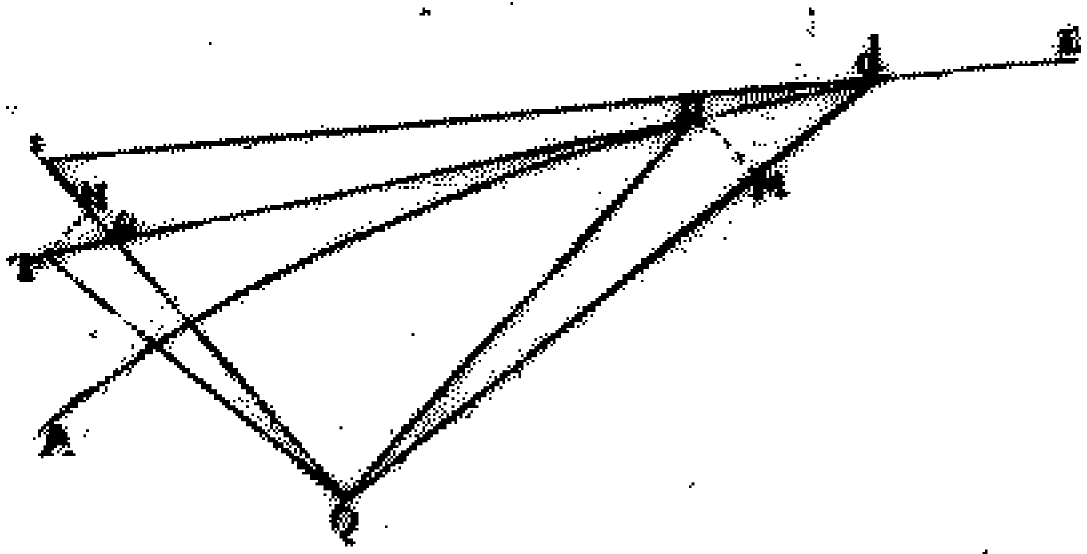


Fig. 68.

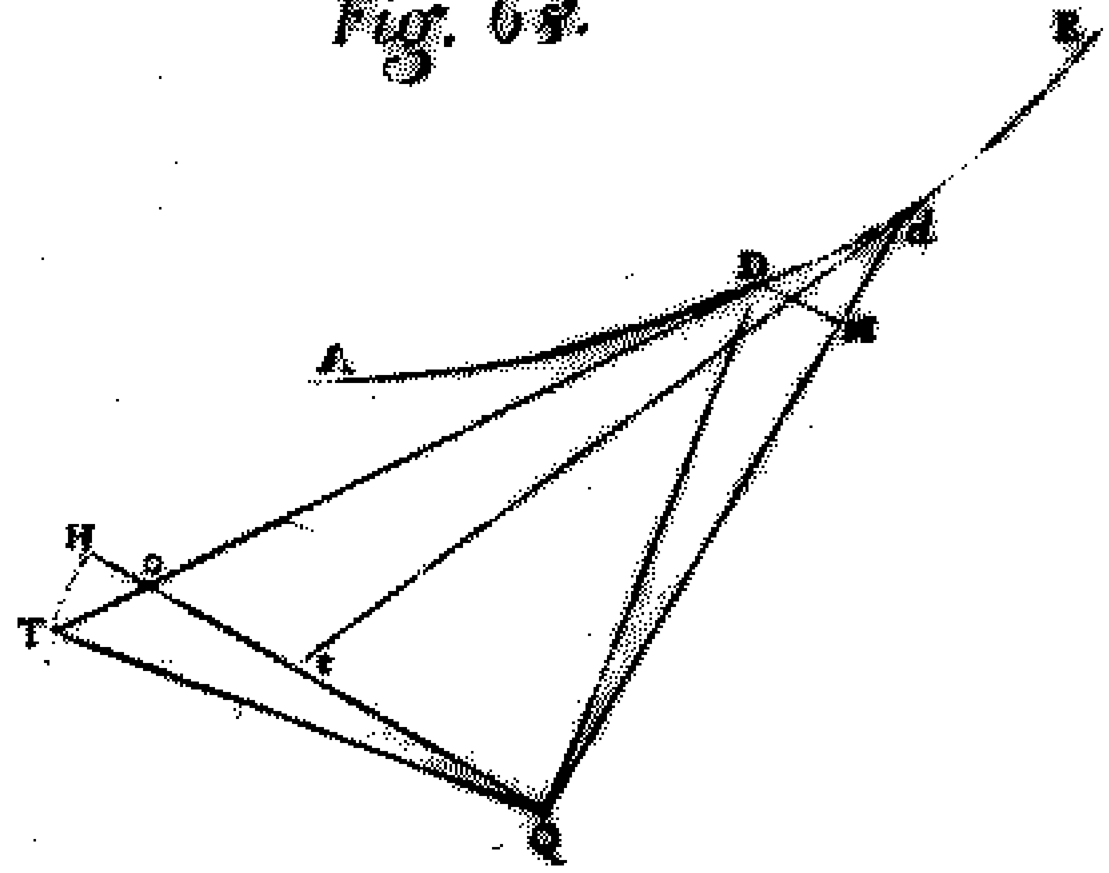


Fig. 69.

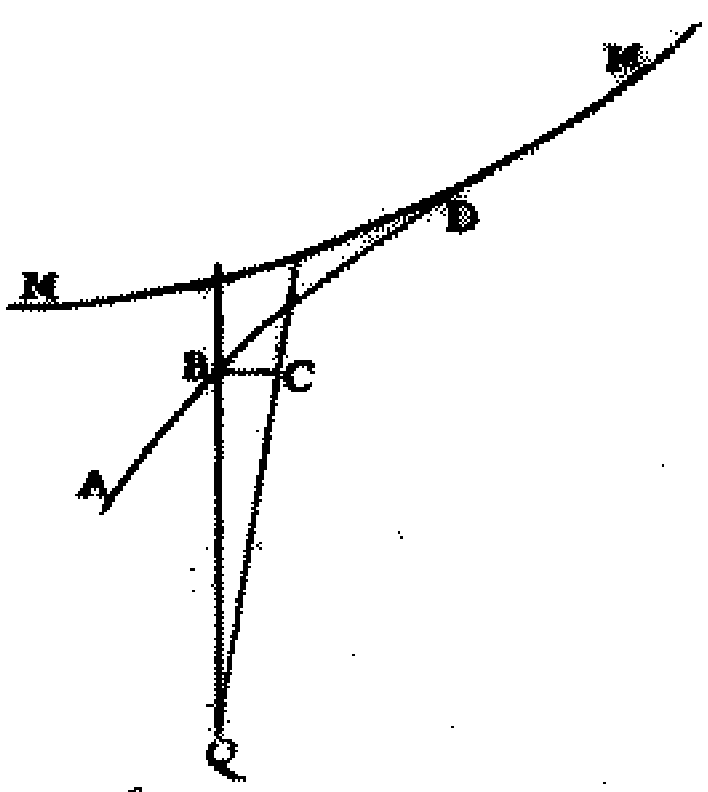


Fig. 70.

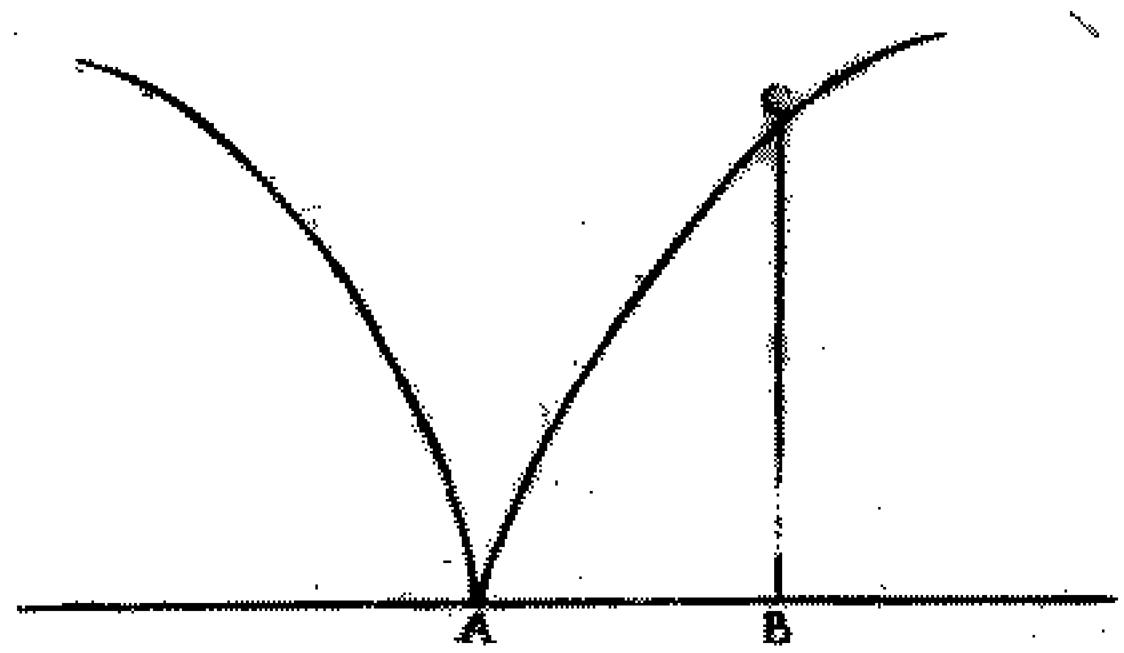


Fig. 71.

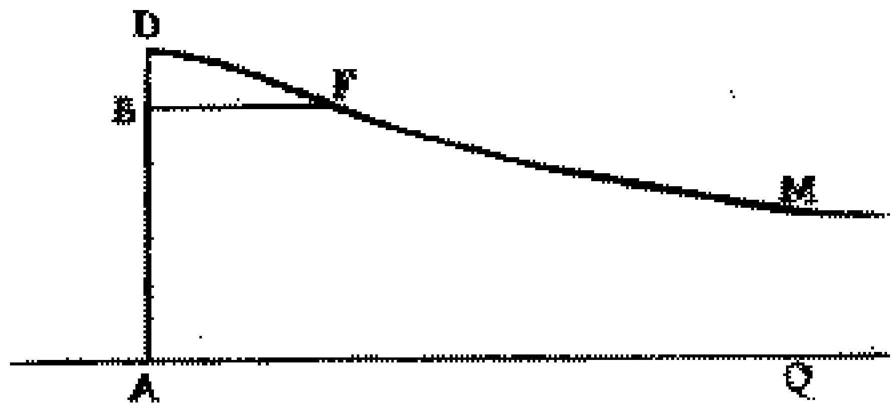


Fig. 72.

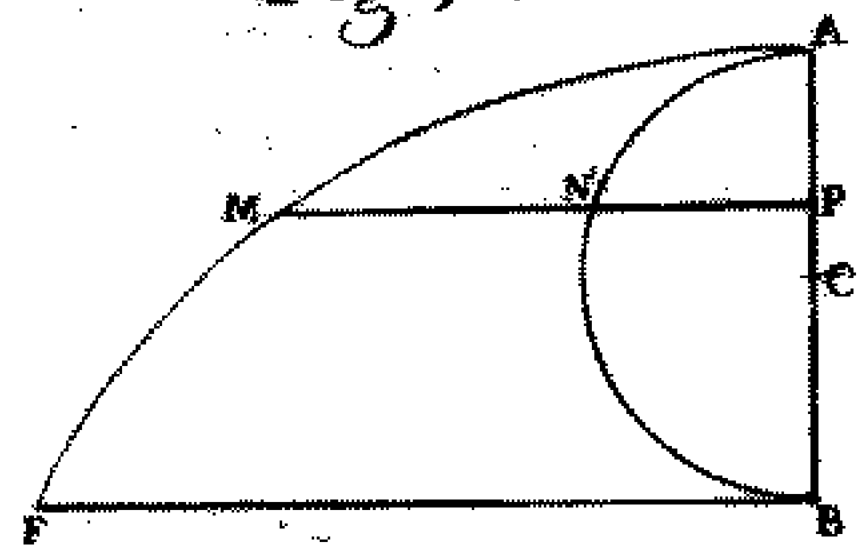


Fig. 73.

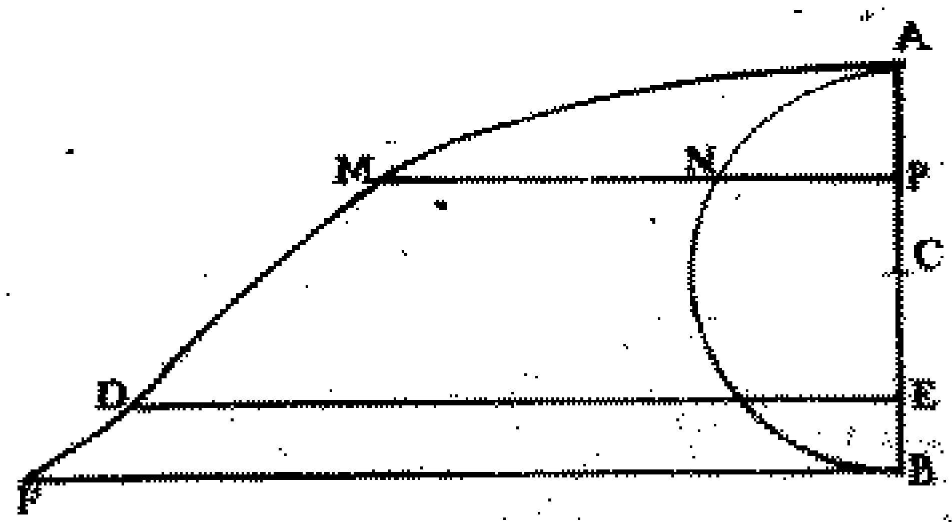


Fig. 74.

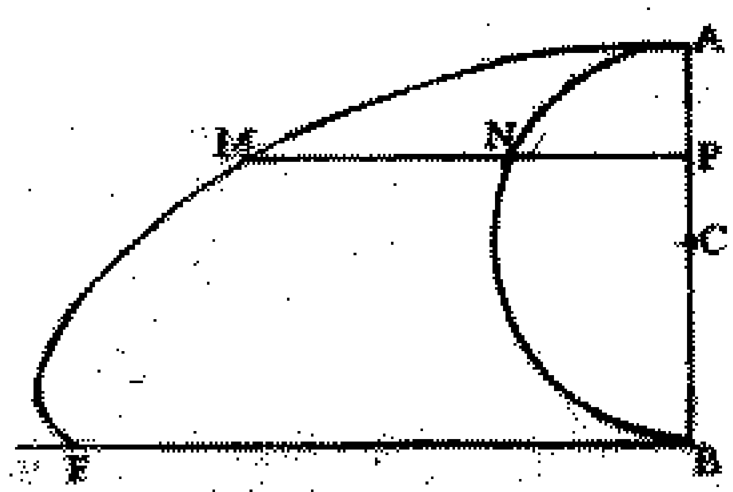


Fig. 76.

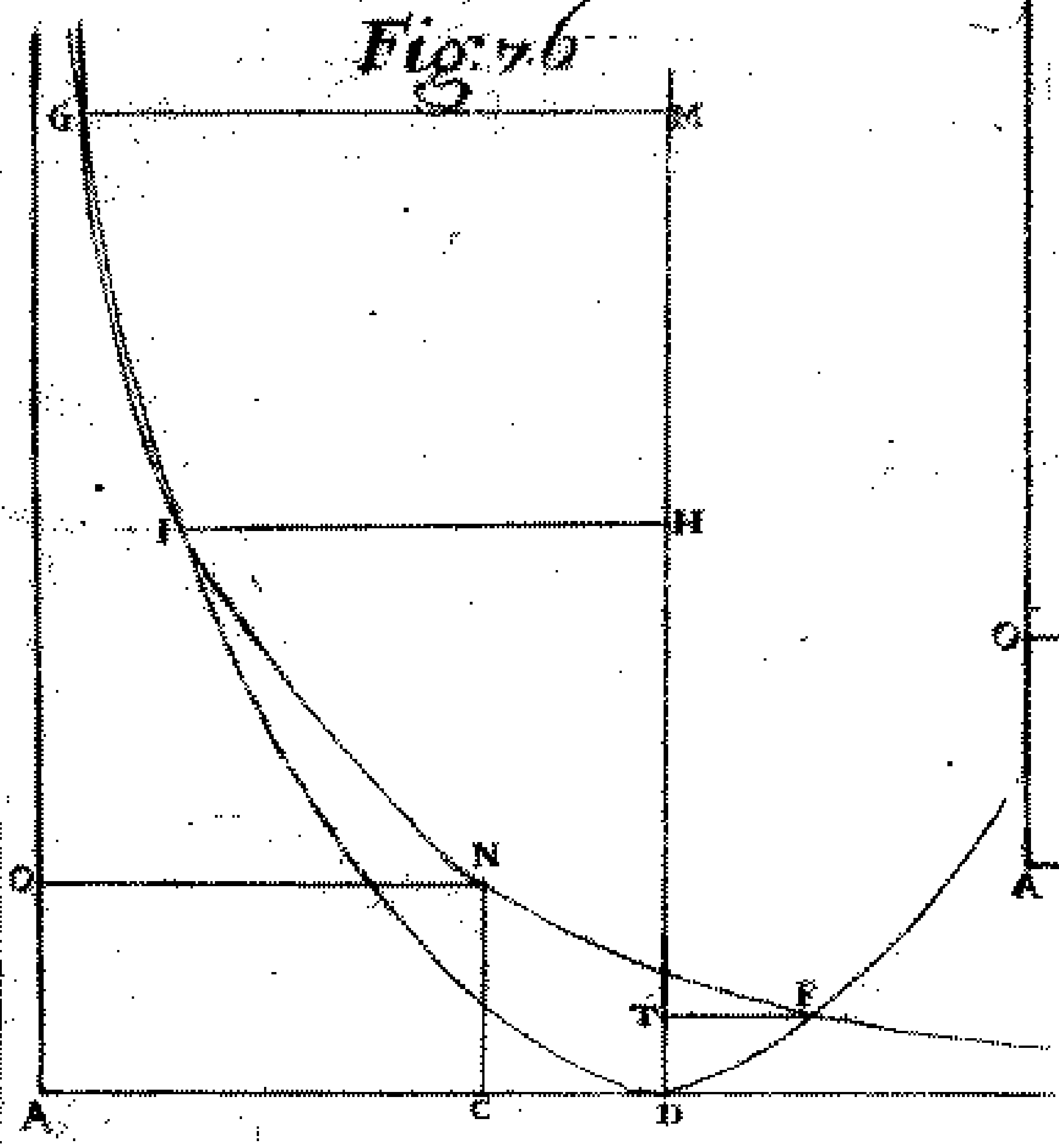


Fig. 75.

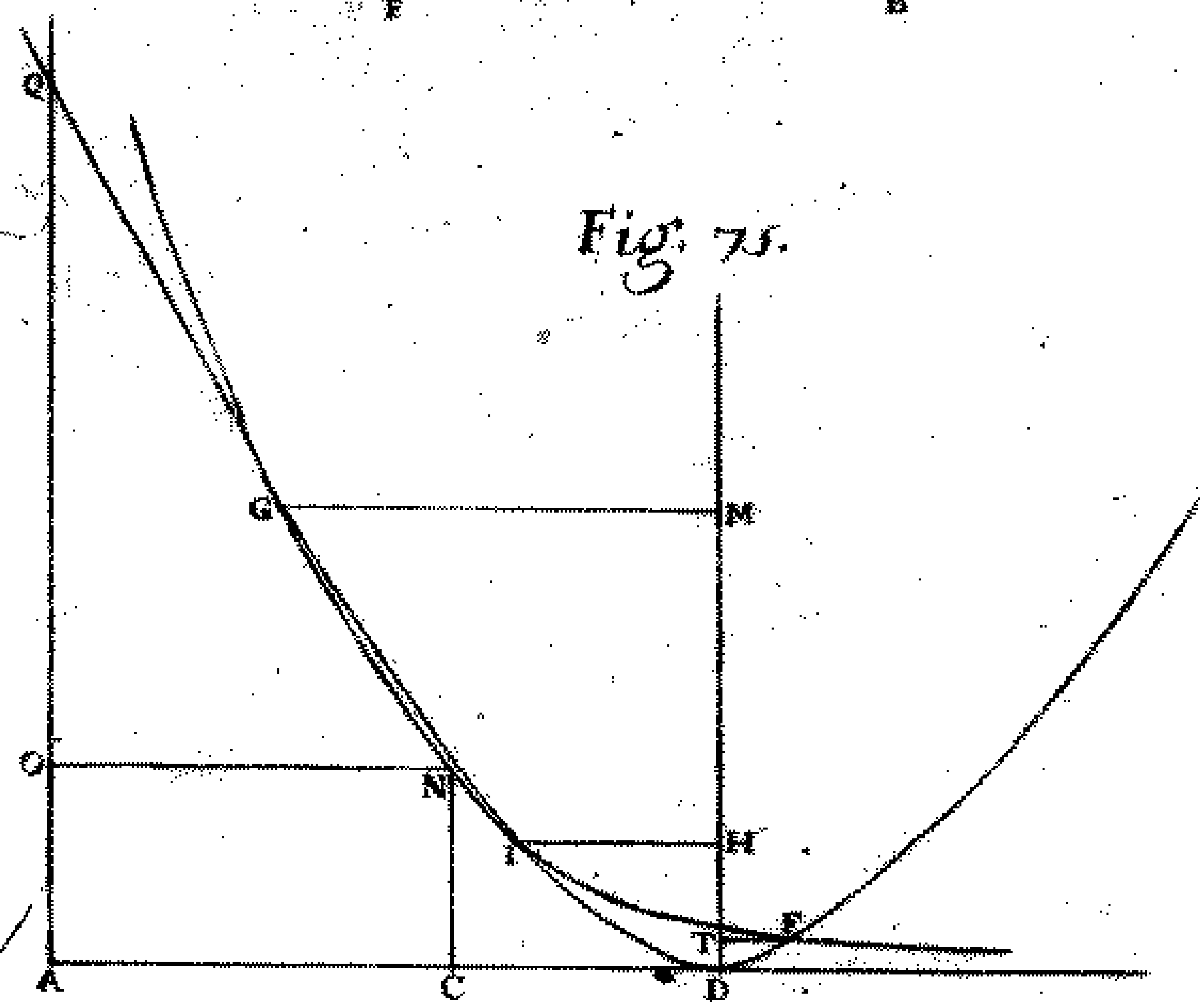


Fig. 77.

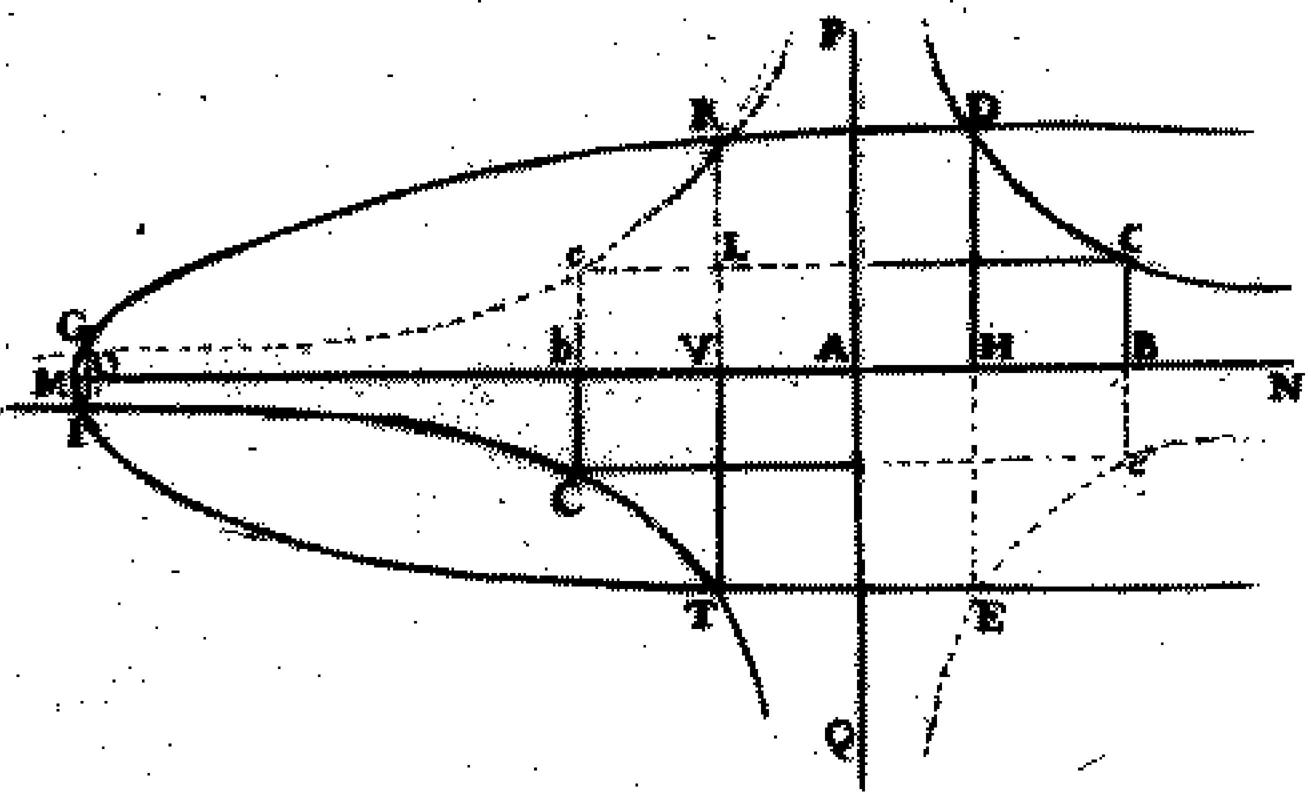


Fig. 78

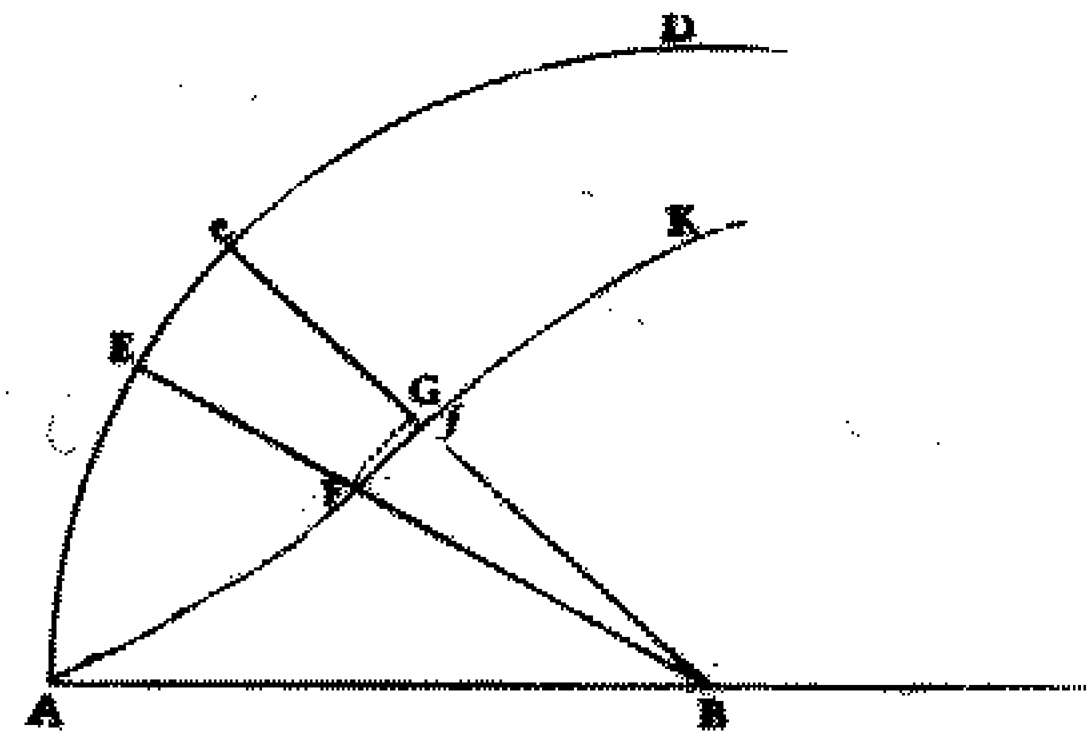


Fig. 79.

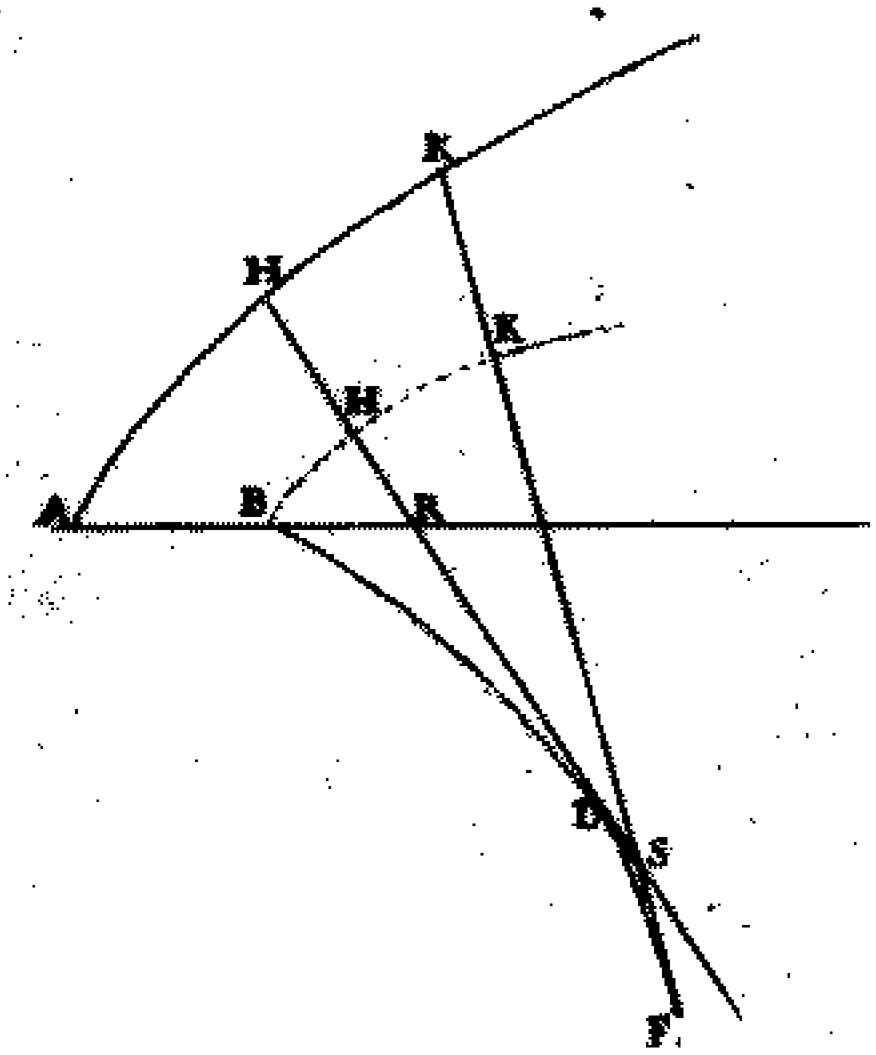
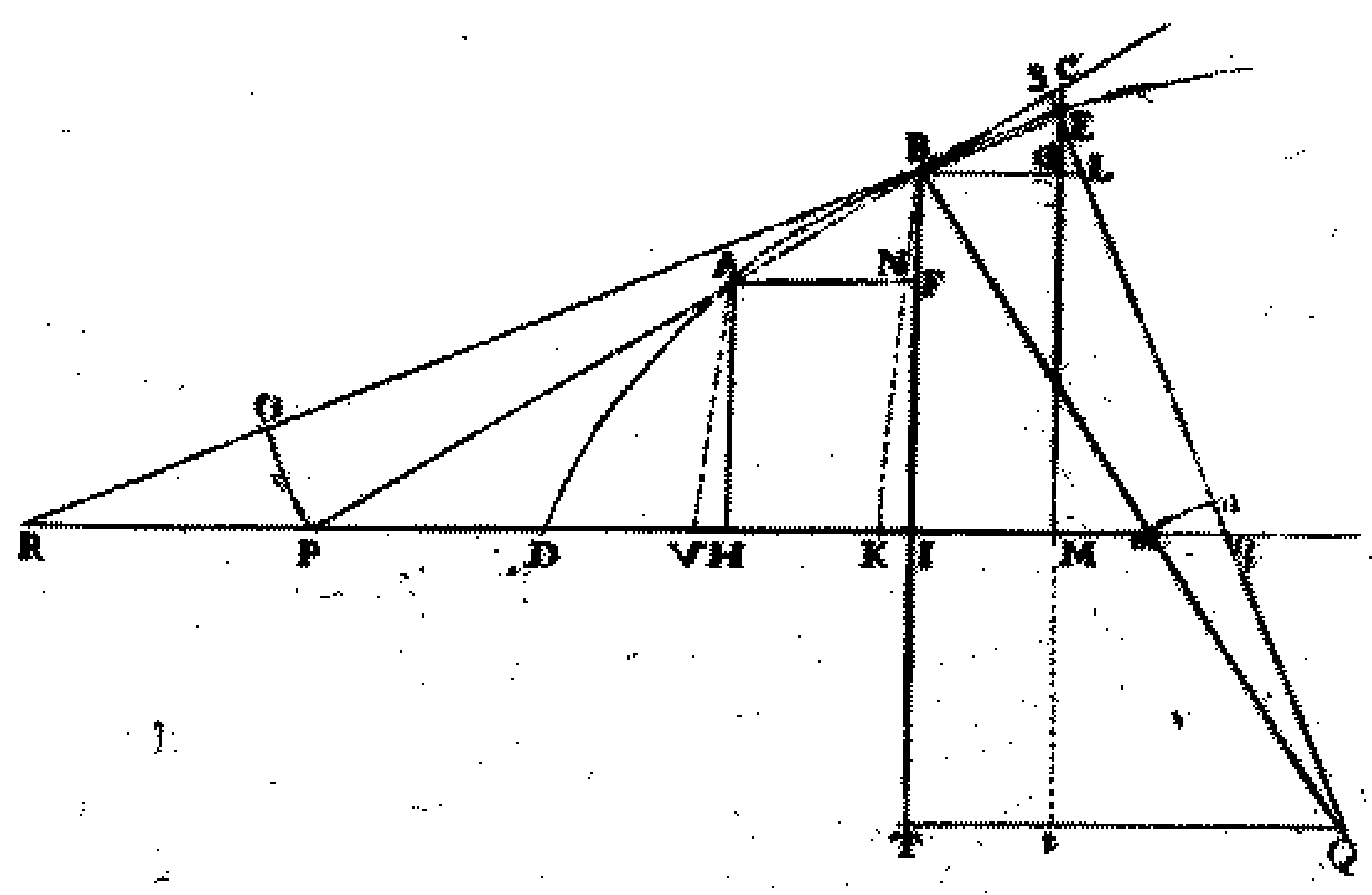


Fig. 80.



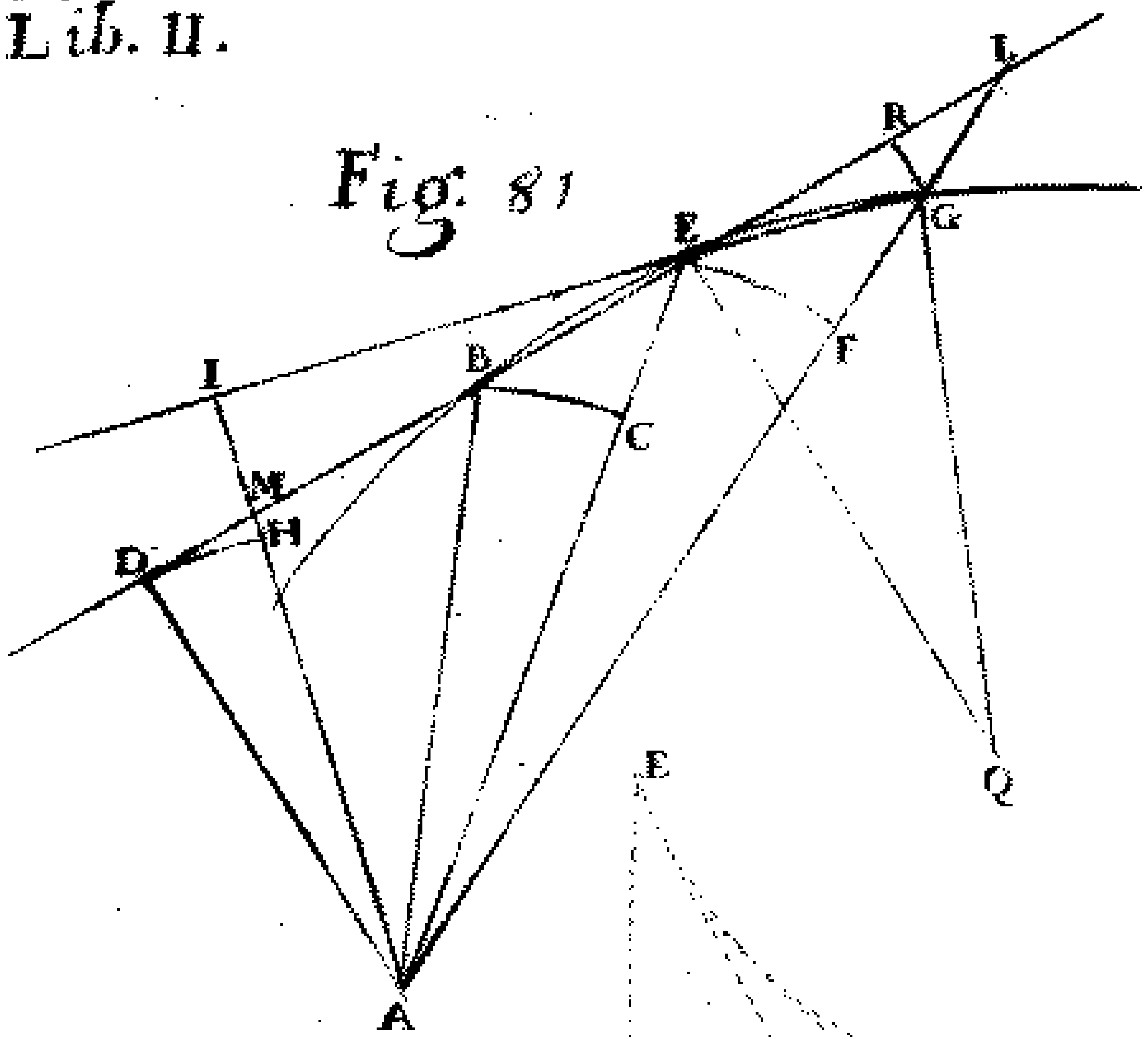


Fig. 81

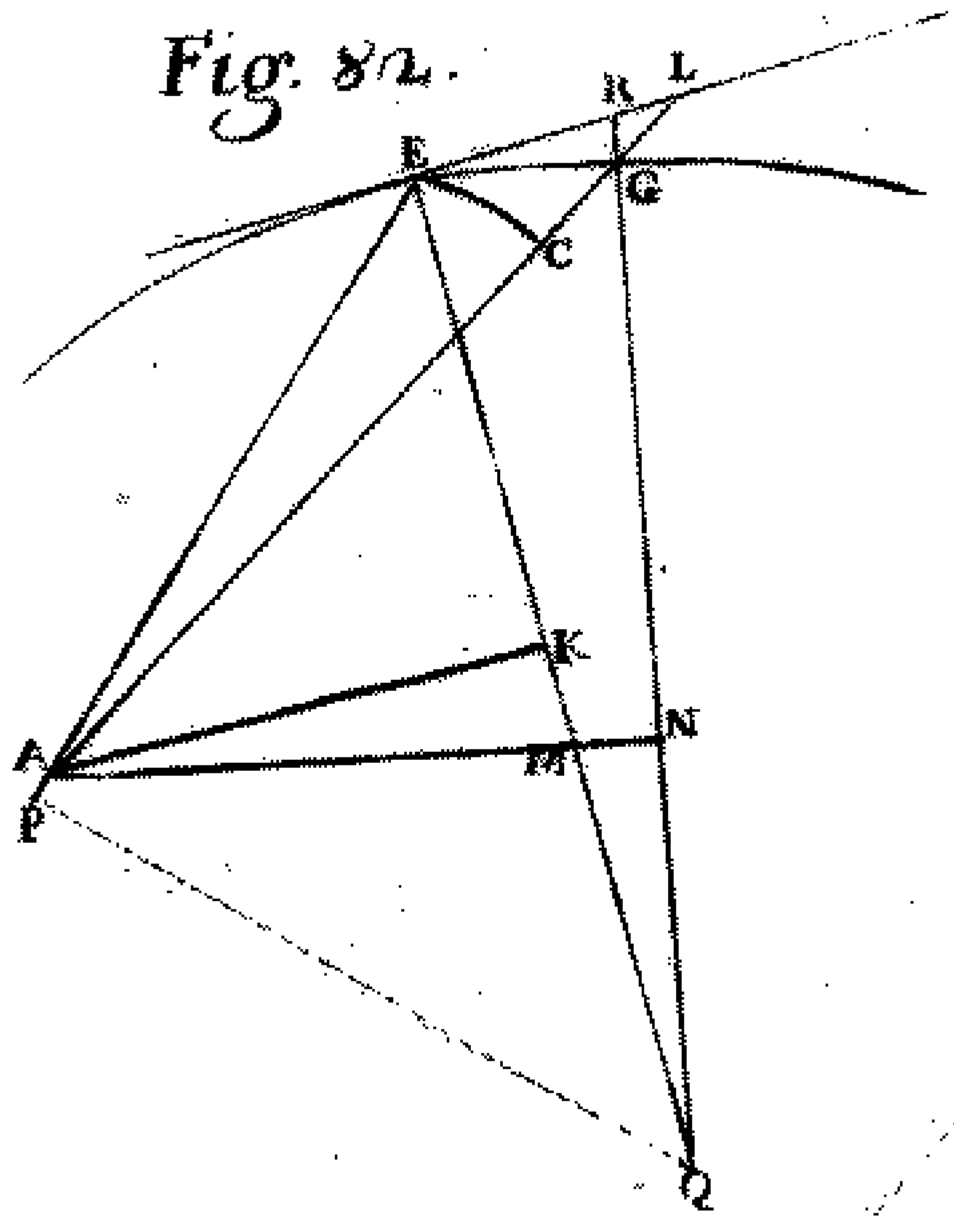


Fig. 82.

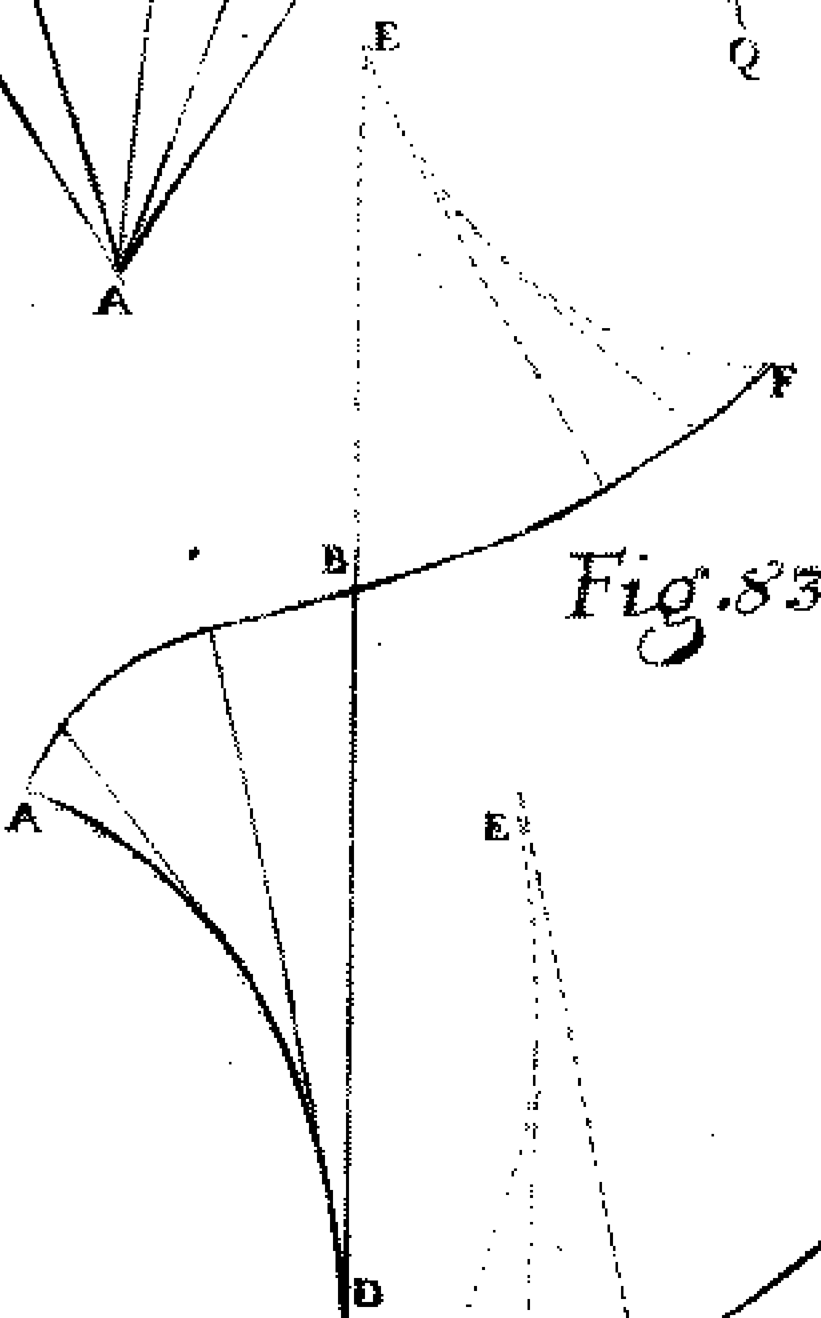


Fig. 83.

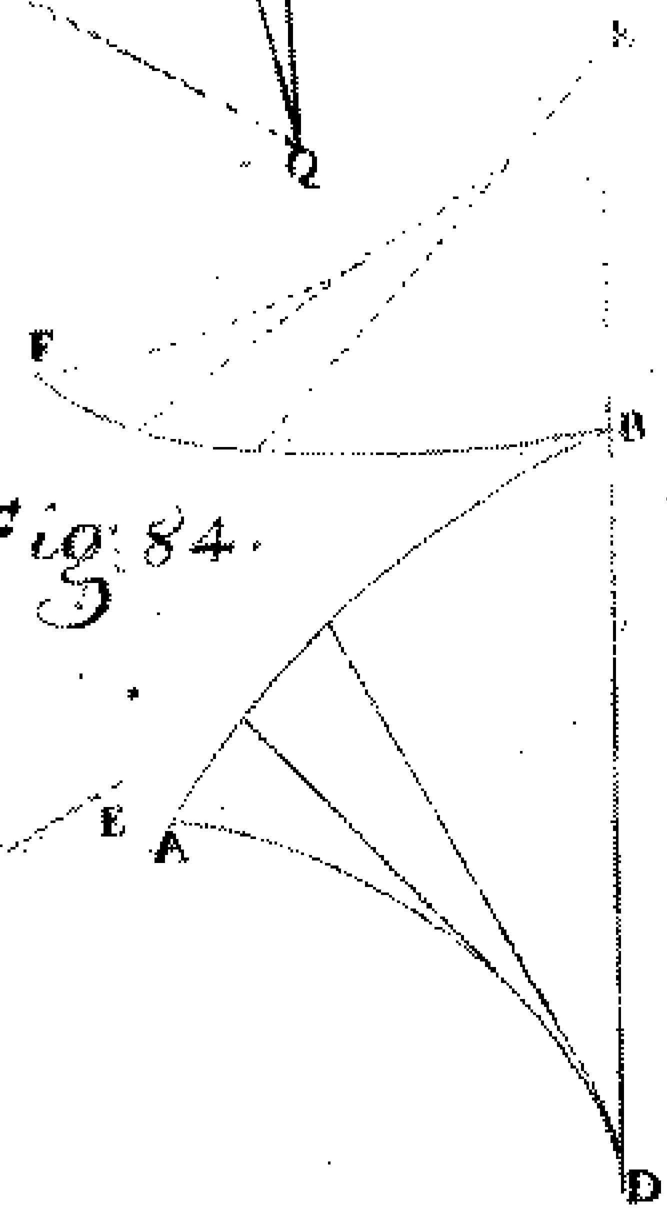


Fig. 84.

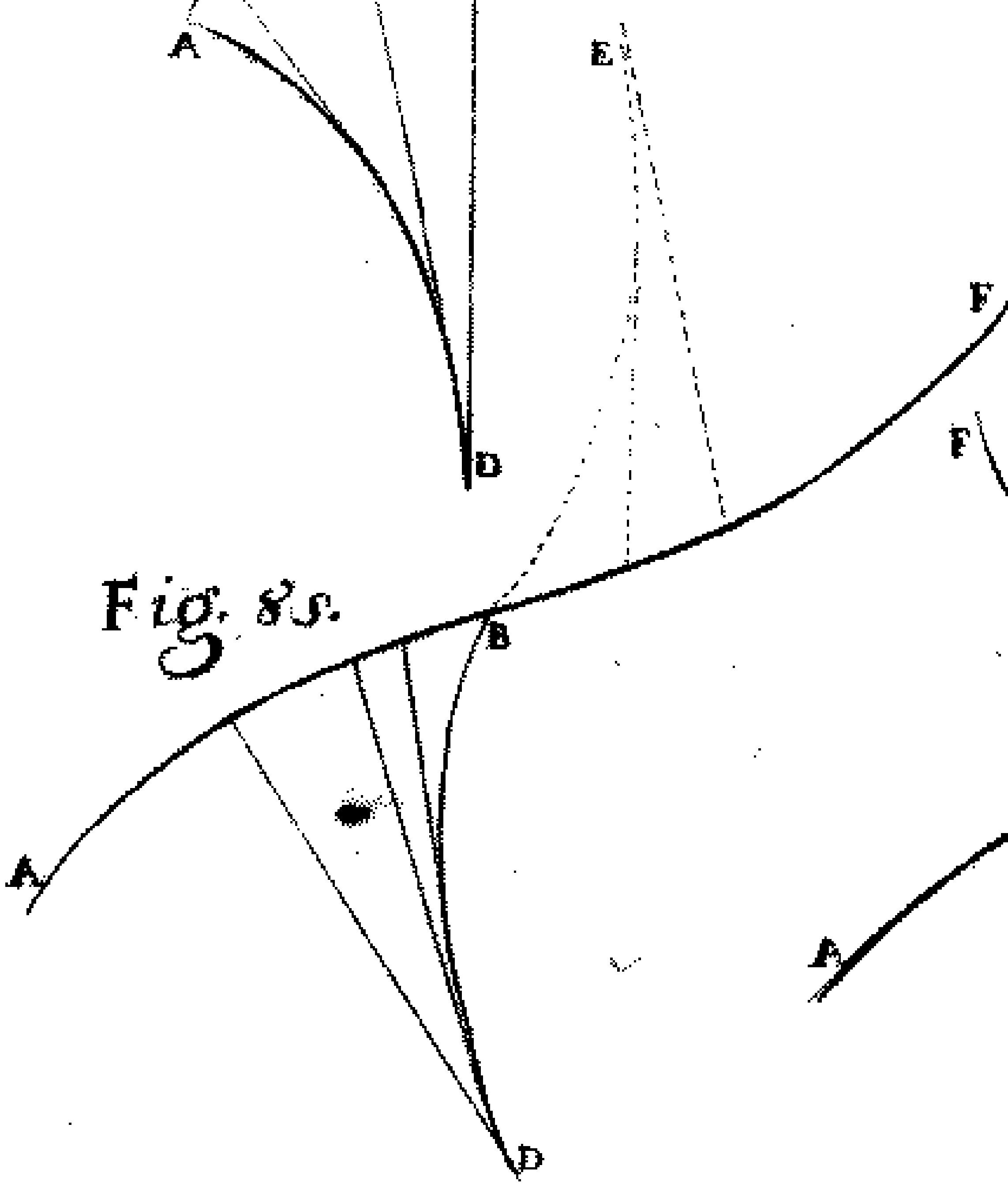


Fig. 85.

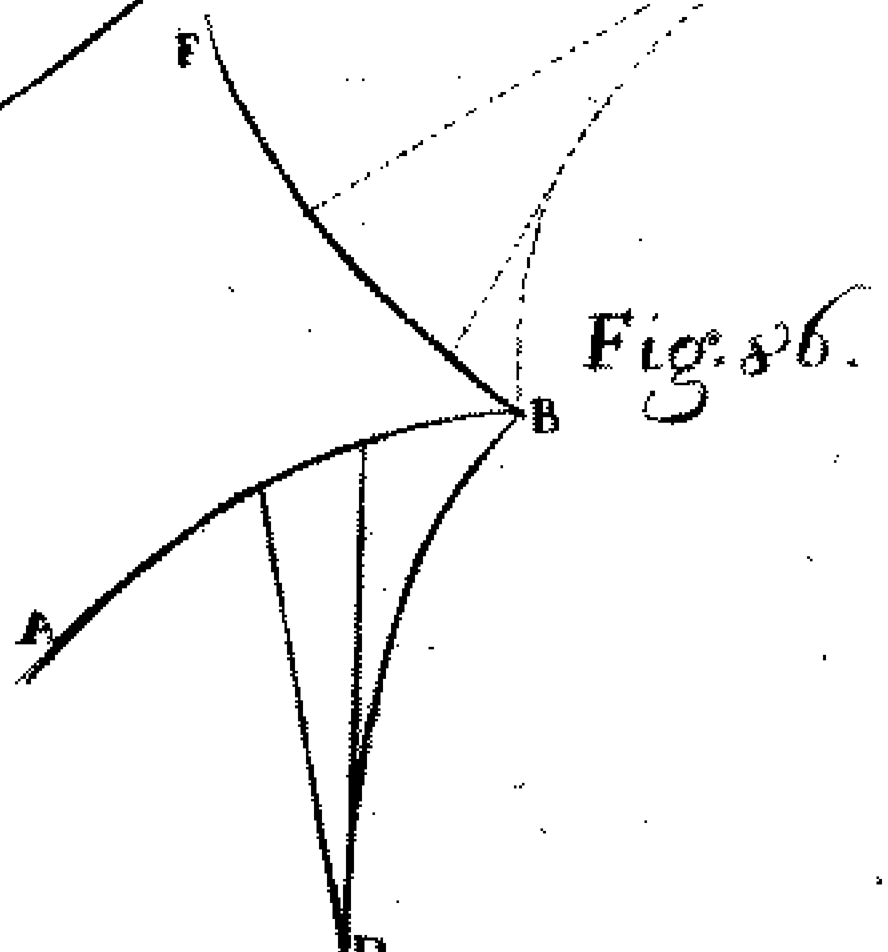


Fig. 86.

Fig. 87.

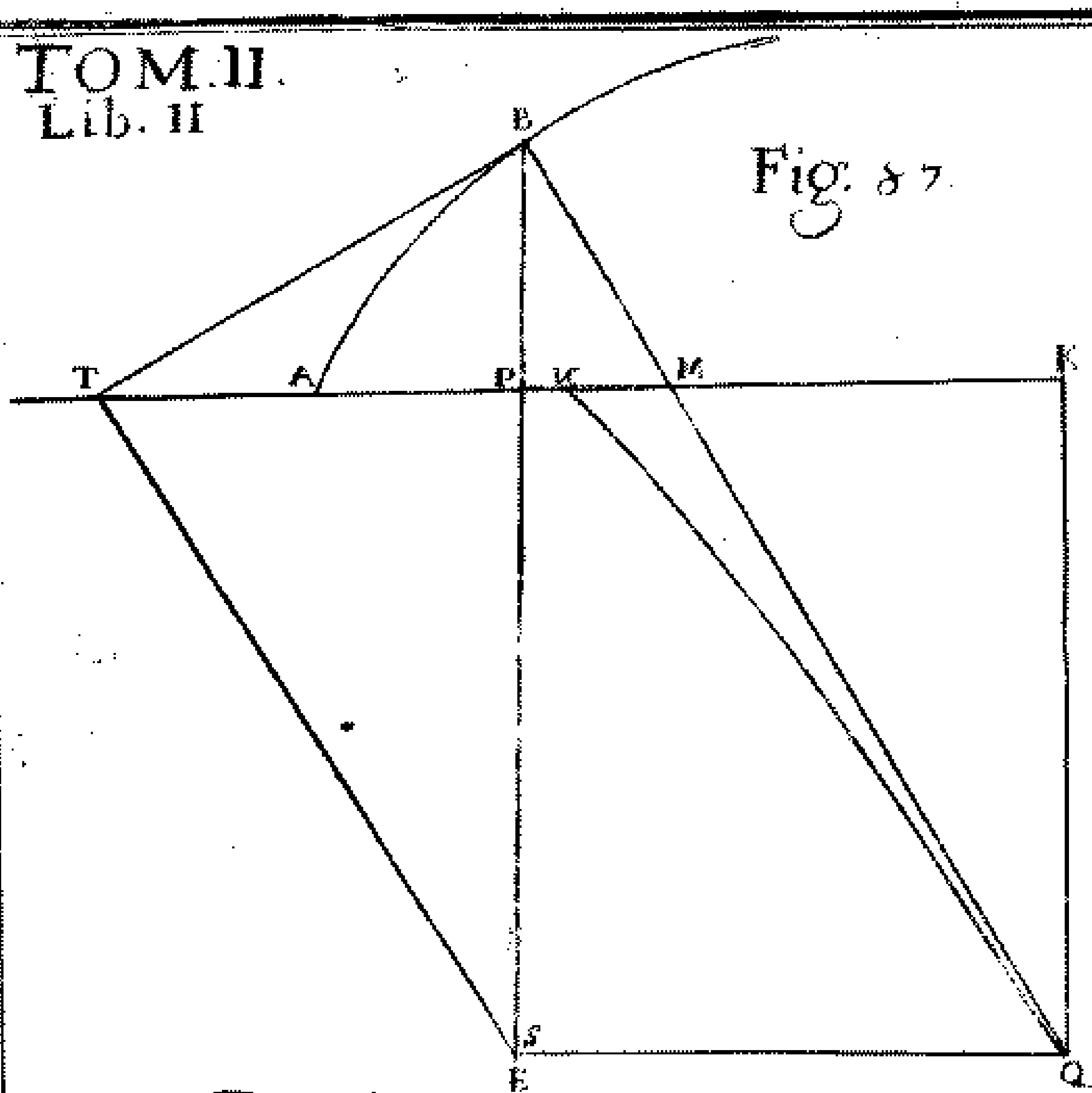


Fig. 88.

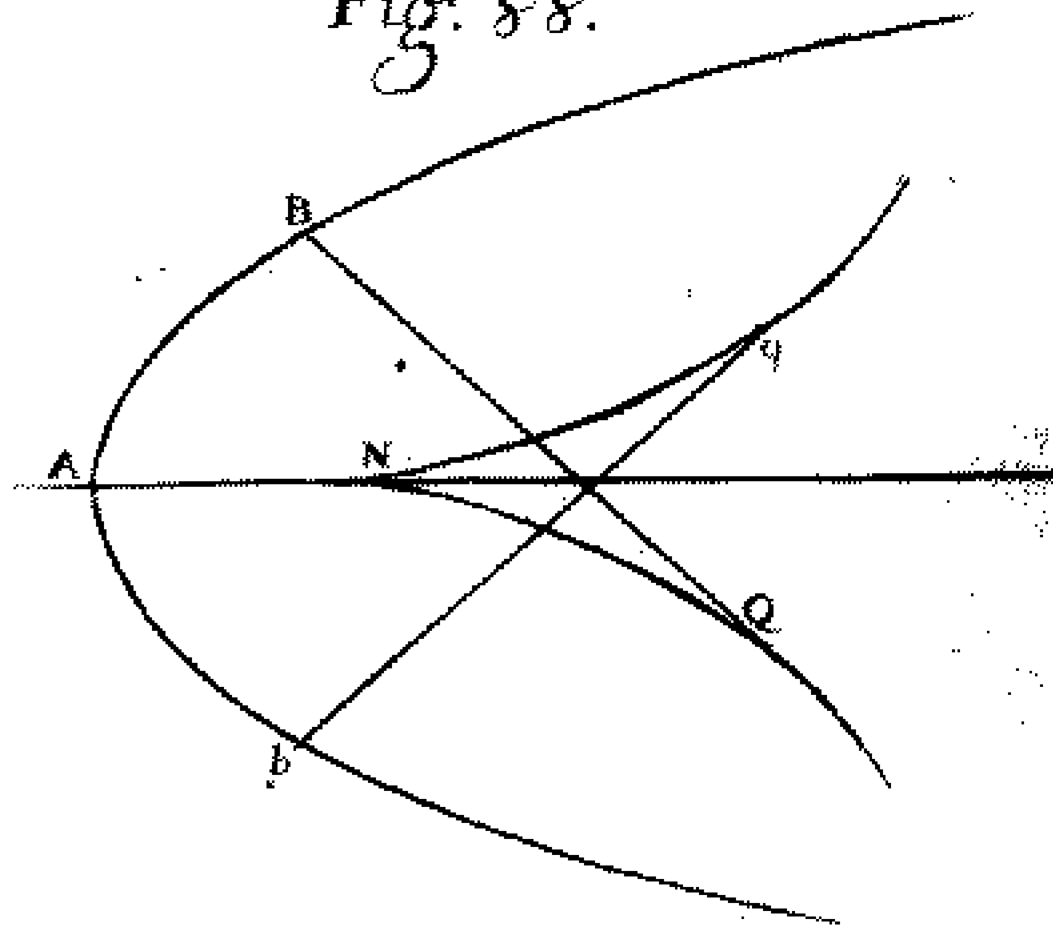


Fig. 89.

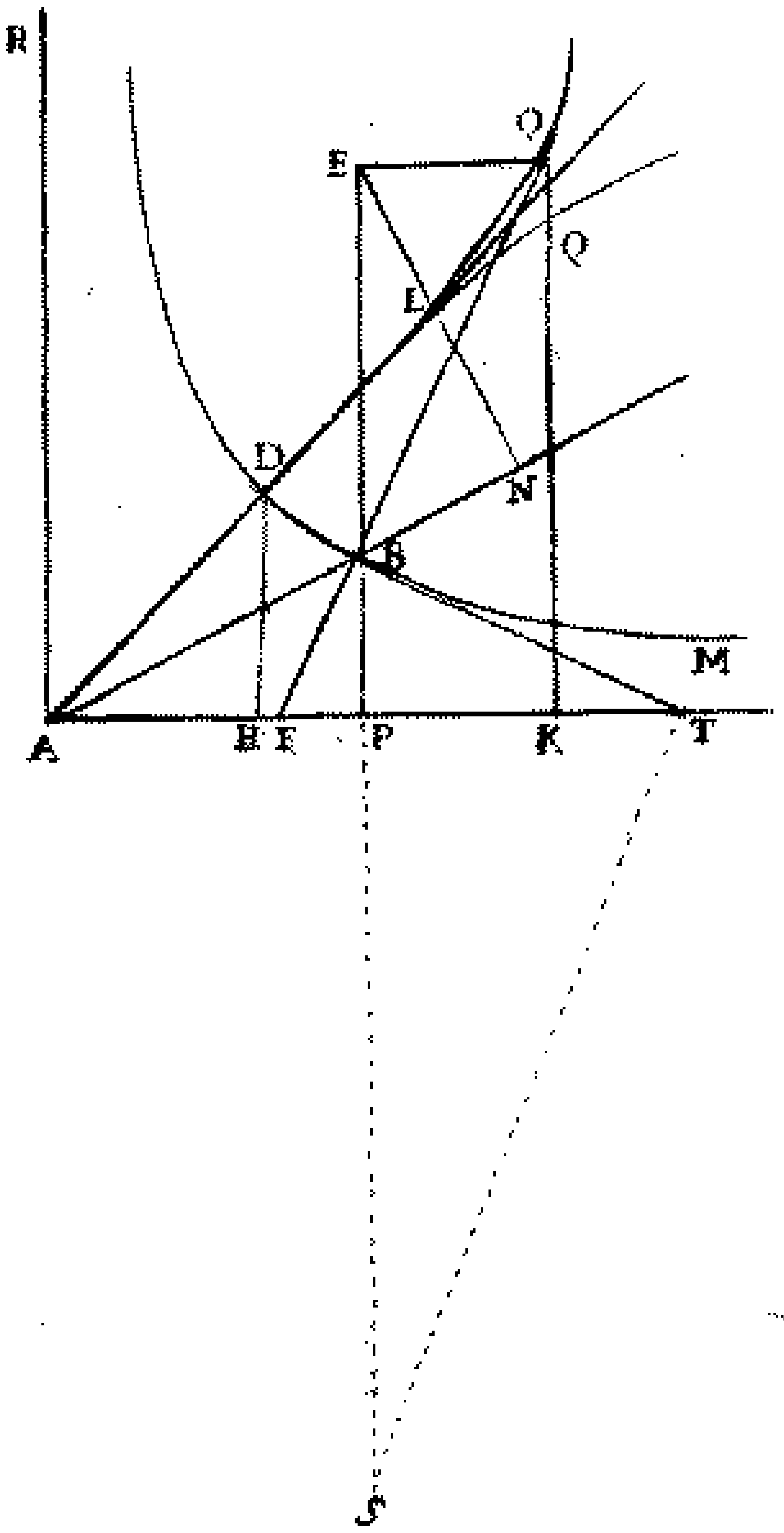


Fig. 90.

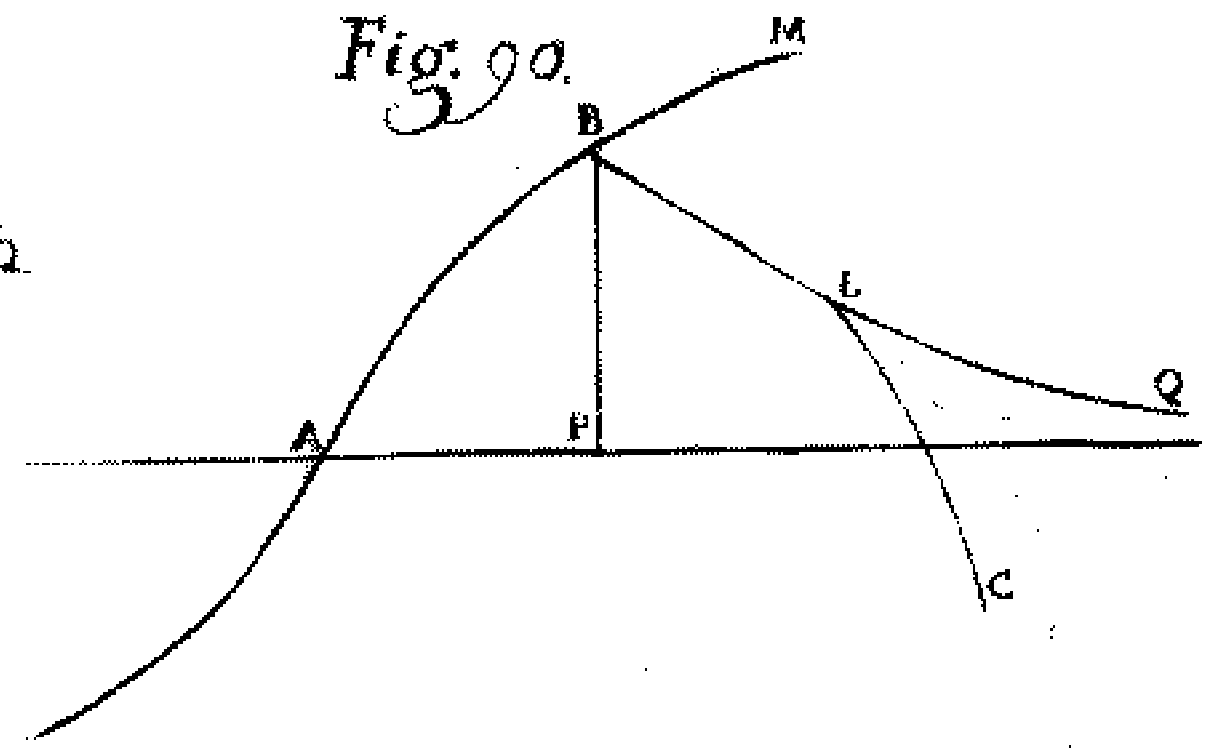


Fig. 91.

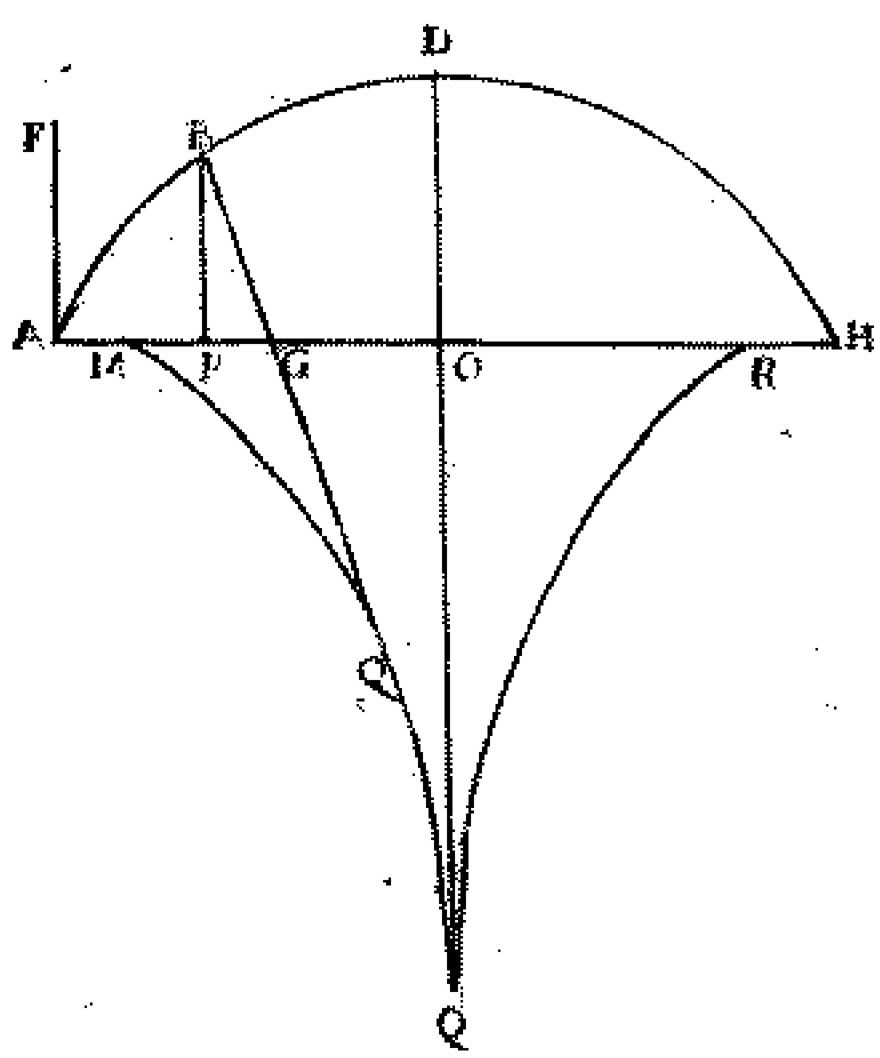


Fig. 92.

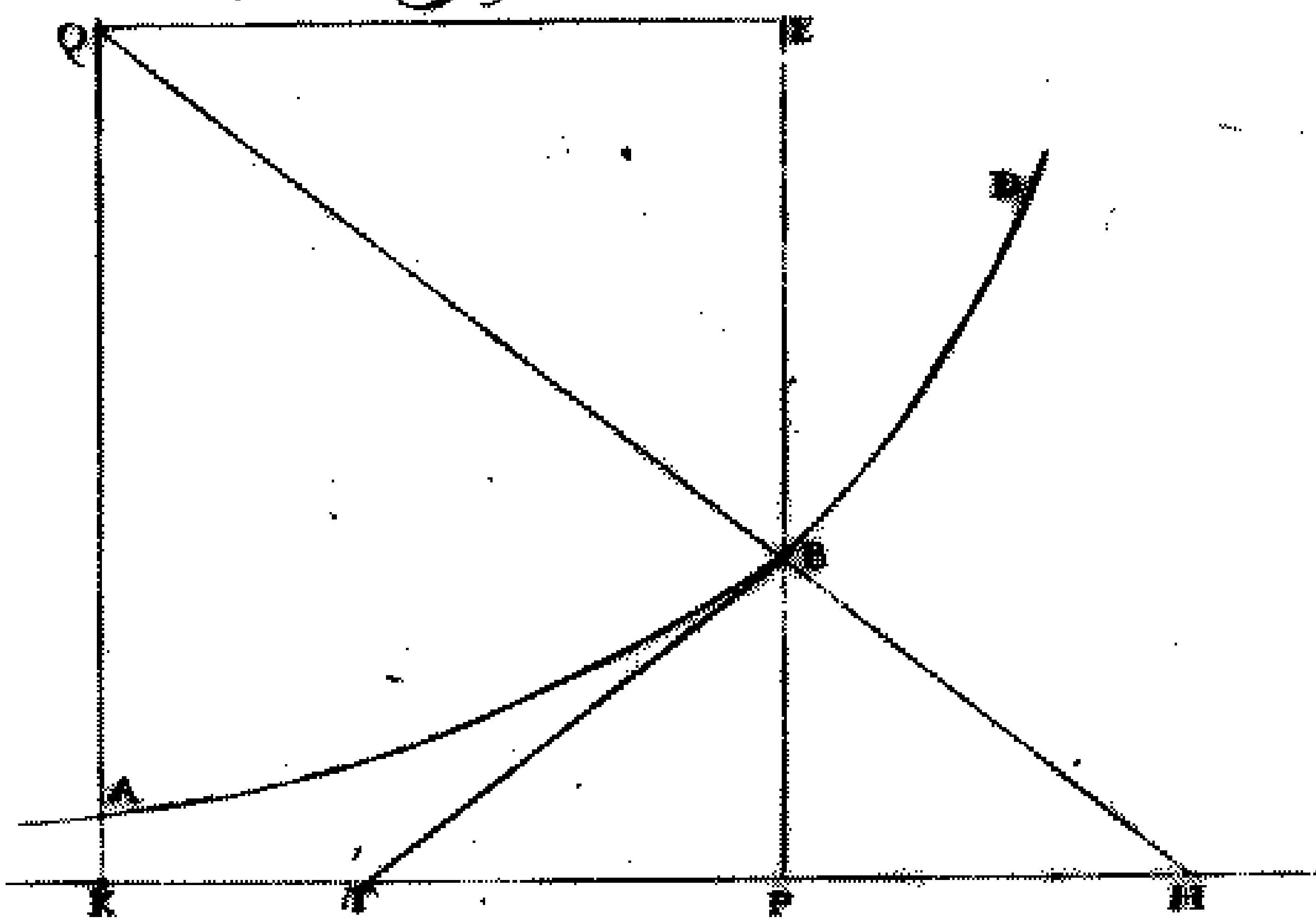


Fig. 93.

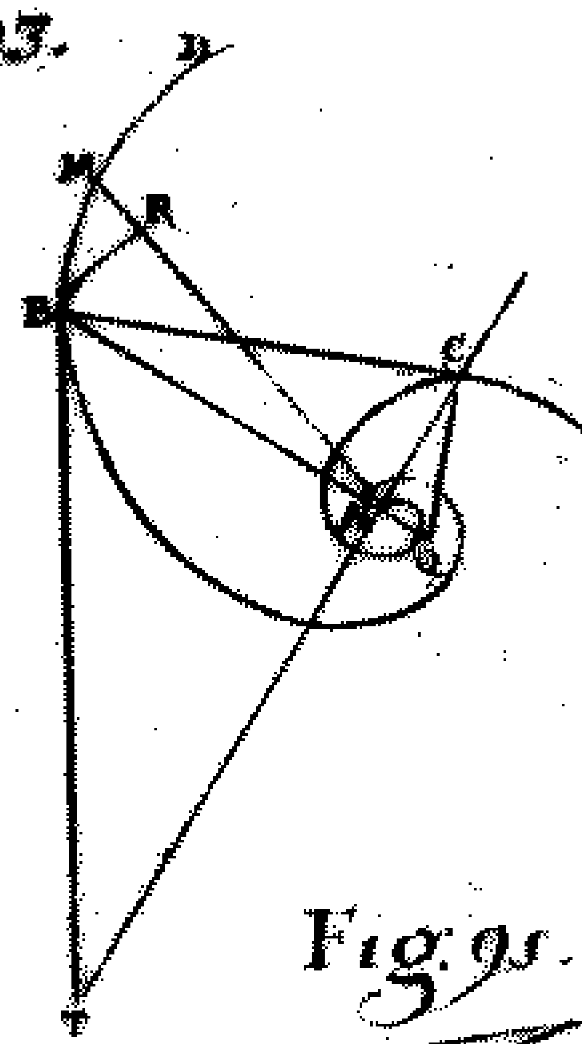


Fig. 94.

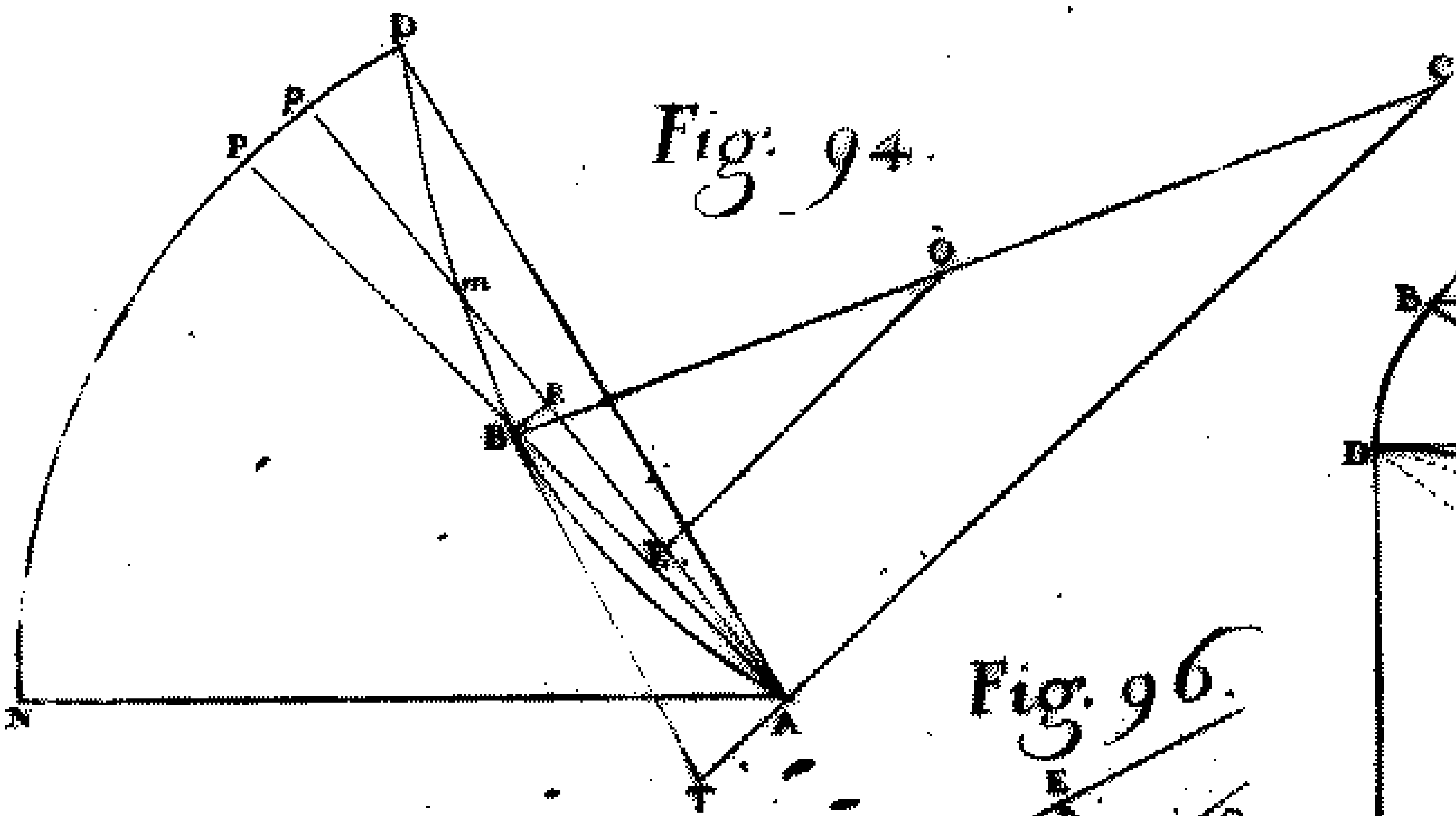


Fig. 95.

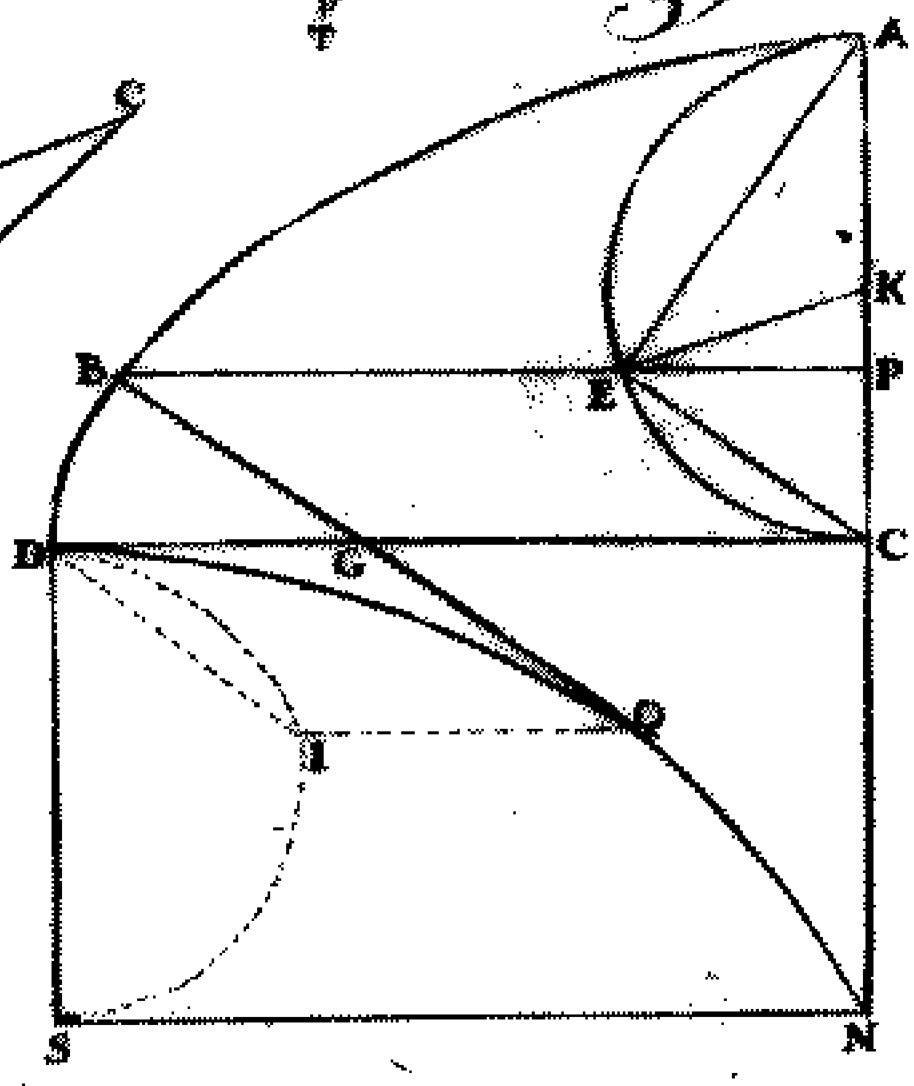


Fig. 96.