

Agostini

ISTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.^{NA} MARIA GAETANA

AGNESI

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO I.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

A L L A
SACRA CESAREA REALE MAESTA'
DELL'
AUGUSTISSIMA IMPERATRICE
MARIA TERESA
D' A U S T R I A
REGINA D'ONGARIA E DI BOEMIA

ec. ec. ec.



*Ra quanti pensieri 6' io rav-
volto nell' animo per sollevar-
mi a sperare, che Voi poteste,
SACRA CESAREA
REAL MAESTA', con
estrema degnazione accoglie-
re quest' opera mia, che va superba del Vostro
Augustissimo Nome, e de' Vostri Fortunatiss-*

A J J A
simi Auspicj, un solo mi conforta, ed è questo la considerazione del Vostro Sesso, che da VOI illustrato per bella sorte è pur mio. Questo pensiero mi à sostenuta nella fatica, e non mi à lasciato sentire il rischio dell'impresa; e veramente se in qualche tempo poteva giustificarsi l'ardimento di una Donna, che tentasse seguire i rapidi voli di una Scienza, che spazia mai sempre negli Infiniti, in quel tempo essere ciò doveva, nel quale regna una DONNA, e regna con universale ammirazione. Parmi in fatti, che in questa età, che fra tutte le venture chiara, ed altera avrà da VOI il nome, debbano le Donne tutte servire alla gloria del loro sesso, e ciascuna, per quanto le può venir fatto, contribuire all'accrescimento dello Splendore, nel quale VOI lo avvolgete; VOI, che sparso avendo d'ogn'intorno alta maraviglia di Vostre Azioni, costringete gli Uomini a dir di VOI con più ragione, che non fu detto di alcuno degli antichi Cesari, che colla Giustizia, e
Cle-

Clemenza dell Imperio onorate l'umana natura, e rappresentate la divina. Lascio a quelle, che gelose delle glorie del nostro sesso conserveranno a Posterì le Vostre Gesta, l'esprimere, come all'esimia bellezza del corpo rimirinsi in VOI accoppiate ad una, ad una tutte le virtù, e sopra tutto lascio loro il celebrare la forza del vostro Ingegno, l'Incomparabile Vostro Valore, l'ampia Vostra Sufficienza, e quella invitta Costanza, che ristorata, dirò così, dalle stesse sventure, e da pericoli stessi, le cose Vostre nel principio del regno da nemico Fato travagliate, e quasi oppresse ritornò liete, e felici. Non si rimarranno esse pure di far conoscere la dolcezza de' Vostri costumi, l'Umanità Vostra, e la generosa Attenzione, colla quale fra lo strepito ancora, e il tumulto dell'armi proteggete, e ravvivate gli studj, e l'arti, onde si nutre il pubblico bene, e si accendono utilmente gli animi degli Uomini. Sin da primi anni occuparono le Scienze la Vostra

Men-

*Mente, e niſſuna fra queſte è a VOI ſtra-
niera. Vi á ora da quelle diſtolto la cura
de' Popoli, ed è ſembrato poco al Cielo, che
foſſe la più dotta del Voſtro Secolo. Ma non
è in VOI però men fervido l'amore del Vero,
e perciò chi lo ricerca ſommamente diſtingue-
te, e favorite. Degnatevi adunque, SACRA
CESAREA REAL MAESTA', clementiſ-
ſimamente riguardare queſta mia fatica, e
come opera, che in ſe raccoglie tutti i più
luminofi progreſſi dell'Intelletto umano, e
come quel tributo, che per me poteva offrir-
ſi maggiore alla gloria del Voſtro Regno,
che non per altro par, che richiami la memo-
ria delle Eroine, che altrove regnarono, che
per maggiormente al confronto eſaltare la
MAGNANIMITA', PRUDENZA, E FORTUNA
VOSTRA; e ſe il Muſico Volume, che la Sorella
mia á avuto l'onore di presentarvi, è ſtato tan-
to avventuroſo di ſciogliere al canto la Vo-
ſtra Voce, abbia queſto la ſoſpirata ſorte di
addoprarne alcuna volta la Voſtra Penetra-
zione,*

zione, e Sagacità. Altro non rimanendomi,
che d'implorarvi dal Cielo lunghissima Vita,
onde deriverà la stabile felicità di tante a
VOI soggette Nazioni, al Vostro Trono umi-
lissimamente mi prostro

DELLA S. C. R. MAESTA' VOSTRA

Umilissima, obbedientissima, fedelissima
Serva, e Suddita
Maria Gaetana Agnesi.

AL LETTORE.



On avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cose, non sappia altresì quanto, in oggi specialmente, sia necessario lo studio dell'Analisi, e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperarsi nell'avvenire; che però non voglio, nè debbo trattenermi qui in lodando quella scienza, che punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invogli di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà, che vi s'incontrano, sendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella nostra Italia, à persone, che sappiano, o vogliano insegnarla, e non tutti anno il modo di andar fuori della Patria a cercar-

ne i Maestri. Io lo so per prova, ed ingenuamente il confesso, mentre con tutto lo studio, ch'io mi sono sforzata di fare da me medesima sostenuto dalla più forte inclinazione per questa scienza, mi troverei tuttavia intricata nel gran labirinto d'insuperabili difficoltà, se tratta non me n'avesse la sicura guida, e saggia direzione del dottissimo Padre Don Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano ora Professore di Matematica nella Regia Università di Pavia, a cui mi riconosco altamente debitrice di tutti que' progressi (quali essi sieno) de' quali è stato capace il mio picciol talento, le di cui lodi io tralascio come superflue ad un Soggetto sì celebre, e specialmente per non offendere la nota, e forse troppo rigida di lui modestia. Al sopraccennato incomodo possono rimediare, non v'è dubbio, in parte i buoni libri, quando essi sieno con quella chiarezza, che basta scritti, e con quel metodo, che pur troppo è necessario; quindi è, che quantunque le cose Analitiche sieno tutte pubblicate con le stampe, pure perchè esse sono scollegate, senz'ordine, e sparse quà, e là nell'opere di molti Autori, e principalmente negli Atti di Lipsia, nelle Memorie dell'Accademia di Parigi, ed in altri Giornali, cosicchè non potrebbe certamente un Principiante ridurre a metodo le materie, quando anche egli fosse di tutti i libri fornito, pensò il rinomato Padre Renau al comune vantaggio, e diede

de alla luce l'utilissimo libro *de L'Analyse démontrée*, opera degna di tutte quelle lodi, che maggiori si possono. Dopo di che sembrerà forse affatto inutile, che compariscano queste mie Istituzioni, avendo altri già da molto tempo così largamente provveduto all'altrui bisogno. Ma su questo punto io prego il cortese Lettore a riflettere, che crescendo le scienze di giorno in giorno, dopo l'edizione del lodato libro moltissimi, ed importantissimi sono stati i nuovi ritrovamenti inseriti dai loro Autori in diverse opere, come era succeduto degli anteriori; quindi per iscemare agli Studiosi la fatica di andare fra tanti libri ripescando i metodi di recente invenzione, mi sembravano utilissime, e necessarie nuove Istituzioni di Analisi. Le nuove scoperte m'hanno obbligata ad un'altra disposizione di cose, e ben sa chi pon mano in sì fatte materie, quanto sia difficile il ritrovare quella, che sia dotata della dovuta chiarezza, e semplicità, omettendo tutto il superfluo, senza lasciare cosa alcuna, che esser possa utile o necessaria, e che proceda con quell'ordine naturale, in cui forse consiste la miglior istruzione, ed il maggior lume. Questo naturale ordine io ho certamente sempre avuto in vista, e l'ho sommamente procurato, ma non so poi se sarò stata bastantemente fortunata per conseguirlo.

Nell'atto poi di maneggiare varj metodi, mi si sono parate alla mente alcune estensioni, e parecchie diverse cose, le quali per avventura, non faranno prive di novità, e d'invenzione: a queste darà il benigno Lettore quel peso, che a lui sembrerà, non intendendo io di raccogliere lodi, contenta di essermi con fodo, e vero piacere divertita, e di aver procurato di giovare altrui.

Nel Tomo secondo per entro il Calcolo Integrale ritroverà il Lettore un Metodo affatto nuovo per li Polinomj, nè in luogo alcuno prodotto; questo è del celebre, e non mai abbastanza lodato Signor Conte Jacopo Riccati Cavaliere di singolarissimo merito nelle scienze tutte, e ben noto al mondo letterario. 'A egli voluto fare a me quella grazia nel comunicarmelo, che io non meritava, ed io rendo a lui, ed al Pubblico quella giustizia, che si conviene.

Finalmente, siccome non è stata mia mente da principio il publicar colle stampe la presente opera da me cominciata, e profeguita in Lingua Italiana, per mio particolar divertimento, o al più per istruzione d'alcuno de' miei minori fratelli, che inclinato fosse alle matematiche facoltà, nè essendomi determinata di darla al Pubblico, che dopo di esser già molto avanzata l'opera, e pervenuta a considerabile volu-

me;

me ; mi sono perciò dispensata dal tradurla in Latino Idioma (comechè da alcuni credasi più convenire a tal materia) sì per l'autorevole esempio di tanti celebri Matematici Oltramontani , ed Italiani ancora , le di cui opere nella loro natia favella vanno a comune vantaggio stampate , sì pel naturale mio rincrescimento alla materiale fatica di trascrivere in Latino ciò , che aveva di già scritto in Italiano . Nè intendo però farmi carico di quella purità di lingua , che lodevolmente viene praticata in materie da questa diverse , avendo io avuto in mira più , che ogni altra cosa , la necessaria possibile chiarezza .

INDICE DE CAPI

DI TUTTA L'OPERA

TOMO I.

LIBRO PRIMO

Dei Principi della Giustizia Civile.

Die 26. Novembris 1748.

I M P R I M A T U R .

Fr. H. Todeschini Inquisitor Generalis Mediolani .

F. Curionus Archipresbyter S. Eusebii pro Eminentiss.

& Reverendiss. D. D. Card. Archiepiscopo .

Vidit Julius Caesar Bersanus pro Excellentiss. Senatu .

TOMO

INDICE DE' CAPI

DI TUTTA L'OPERA

TOMO I.

LIBRO PRIMO

Dell'Analisi delle Quantità finite.

- CAPO I. *Delle primarie Notizie, ed Operazioni dell'Analisi delle Quantità finite.* p. 1
- CAPO II. *Delle Equazioni, e de' Problemi piani determinati.* p. 69
- CAPO III. *Della Costruzione de' Luoghi, e de' Problemi indeterminati, che non eccedono il secondo grado.* p. 151
- CAPO IV. *Delle Equazioni, e de' Problemi solidi.* p. 226
- CAPO V. *Della Costruzione de' Luoghi che superano il secondo grado.* p. 351
- CAPO VI. *Del Metodo de' Massimi, e Minimi, delle Tangenti delle Curve, de' Flessi contrari, e Regressi, facendo uso della sola Algebra Cartesiana.* 416

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

CAPO I. *Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini, e del Calcolo de' medesimi.* 412.

CAPO II. *Del Metodo delle Tangenti.* 421.

CAPO III. *Del Metodo de' Massimi, e Minimi.* 517.

CAPO IV. *De' Flessi Contrarj, e de' Regressi.* 554.

CAPO V. *Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori.* 575.

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

CAPO I. *Delle Regole dell'Integrazioni espresse da formole finite algebrache, o ridotte a quadrature supposte.* 614.

CAPO II. *Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.* 701.

CAPO III. Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve , Quadrature de' Spazj , Appianazioni delle Superficie , e Cubature de' Solidi . 709.

CAPO IV. Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche , ed Esponenziali . 818.

LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti . 847

CAPO I. Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado , senza alcuna precedente separazione delle indeterminate . 850.

CAPO II. Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente separazione delle Indeterminate . 864

CAPO III. Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate per mezzo di varie sostituzioni . 917.

CAPO IV. Della Riduzione delle Equazioni differenziali del secondo grado . 955.



INSTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO PRIMO

Dell'Analisi delle Quantità finite.



L'Analisi delle quantità finite, che comunemente chiamasi Algebra Cartesiana, è un metodo, con cui trattando quantità finite si sciolgono i Problemi; cioè da certe quantità, e condizioni date e cognite, si viene in cognizione d'altre incognite, e che si cercano, per mezzo di alcune operazioni, e metodi, che parte a parte mi propongo di spiegare ne' seguenti Capi.

C A P O I.

*Delle primarie Notizie, ed Operazioni dell'Analisi
delle Quantità finite.*

1. **L**E primarie operazioni di quest'Algebra sono le stesse dell'Aritmetica comune, cioè la Somma, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Divisione, e l'Estrazione delle Radici; ma con questa differenza, che nell'Aritmetica comune si adoprano i numeri, ed in questa le specie, o sia le lettere dell'Alfabeto, con le quali si denominano, e si calcolano le quantità in astratto, di qual sorta esse siano, geometriche, o fisiche, come Linee, Superficie, Corpi, Forze, Resistenze, Velocità ec.; e però questa tal sorta di Aritmetica chiamasi Algoritmo delle quantità, o Aritmetica speciosa; ed è ben questa molto più eccellente di quella, tutto che le operazioni sieno le stesse, sì perchè queste quantità non si confondono tra loro nelle operazioni, come le numeriche, sì ancora perchè con la stessa facilità si trattano nel calcolo le quantità note, e le incognite; e finalmente perchè le dimostrazioni analitiche sono generali, ed a qualunque caso applicabili, la dove le aritmetiche sono particolarissime, ed in ogni diverso caso è necessaria una nuova dimostrazione.

2. Ma delle Quantità altre sono positive, cioè maggiori del nulla, altre minori del nulla, e però negative.

Per

Per cagion d'esempio: I Beni, che si possiedono, sono positivi, ma quelli, che ad altri si debbono, sono negativi, perchè dai positivi s'hanno a sottrarre, e ne diminuiscono la somma, e però siccome sono quantità positive i Capitali, che uno abbia, così sono quantità negative i Debiti. Similmente se un Mobile diretto verso uno scopo, o meta del suo viaggio descriva uno spazio, sarà questo spazio positivo; ma se si porterà verso la opposta parte, descriverà uno spazio, che relativamente alla meta, verso cui doveva andare, sarà negativo. Quindi in Geometria se una linea condotta da una parte si assuma per positiva (il che è arbitrario) sarà negativa la linea condotta verso la parte opposta.

3. Le quantità positive si distinguono in algebra dalle negative per mezzo di certi segni a loro prefissi; alle positive si prefigge il segno $+$, che dicesi *più*, alle negative il segno $-$, che dicesi *meno*; e quando una quantità, che o sia posta sola, o in una serie di altre sia la prima, non abbia prefisso segno alcuno, s'intende sempre affetta dal segno positivo. Il segno $\pm$, a cui è contrario l'altro $\mp$, è segno ambiguo, e significa il più ed il meno, cioè il positivo ed il negativo, di modo che, per esempio, $\pm a$ vorrà dire, che la quantità a si può assumere e positiva, e negativa. Il segno $=$ significa eguaglianza, e però $a=b$ vorrà dire, che a sia eguale a b ; siccome $a > b$ significa, che a sia maggiore di b , ed $a < b$, che a sia minore di b . L'eguaglianza poi delle ragioni, cioè la

proporzione geometrica di tre, o quattro quantità si esprimerà così $a, b :: b, c$ se faranno tre, e vorrà dire, che la ragione di a alla b è eguale a quella di b alla c ; ed $a, b :: c, d$ vorrà dire, che a è alla b , come c a d . Finalmente il segno ∞ significa l'infinito, e però $a = \infty$ significherà, che a sia eguale all'infinito, cioè che sia quantità infinita.

4. Quantità semplice, incomplessa, o di un sol termine è quella, che è espressa da una, o più lettere, ma tra loro non distinte e separate da segno alcuno, come, a, ab, aac ec., così all'opposto è quantità composta e di più termini quella, che è espressa da più lettere tra loro separate da' segni, come $a + b, aa - ff + bb$, ec.; e però $a + b$ farà di due termini, $aa - ff + bb$ di tre, ec.

Della Somma delle Quantità semplici intiere.

5. Le quantità semplici si sommano tra loro con lo scrivere una dopo l'altra, lasciando a ciascuna di loro quel segno, che hanno. Abbiassi da sommare a con b con c , farà la somma $a + b + c$; abbiassi da sommare a con $-b$, farà la somma $a - b$; abbiassi da sommare a con a con b con b , farà la somma $a + a + b + b$; ma qui avvertasi, che $a + a$ è lo stesso che $2a$, e $b + b$ è lo stesso che $2b$; e però la somma farà $2a + 2b$. Quindi per sommare le quantità espresse dalle medesime lettere, basterà alla stessa lettera prefiggere tal numero, che contenga tante unità, quante volte essa è posta; e però la somma di ac con ac con ac , cioè

cioè $ac + ac + ac$ farà $3ac$, e questo numero si chiama coefficiente numerico. Che se le quantità da sommarfi dalle stesse lettere denominate averanno in oltre coefficienti numerici, si sommino essi coefficienti con la regola ordinaria dell'aritmetica; così la somma di $2a$ con $5a$ con b con $4b$ farà $7a + 5b$; così la somma di a con $3b$ con $-2c$ con $7c$ con $5a$ farà $a + 3b - 2c + 7c + 5a$, ma $a + 5a$ fanno $6a$, e $-2c + 7c$ fanno $5c$, dunque la somma sarà $6a + 3b + 5c$.

Della Sottrazione delle Quantità semplici intere.

6. Per sottrarre una quantità da un'altra si muta il segno a quella, che si deve sottrarre, e col segno mutato si scrive presso l'altra. Per sottrarre b da a si scriva $a - b$; dove avvertasi, che se a farà quantità maggiore di b , il residuo della sottrazione, cioè la differenza sarà positiva; e se b sarà maggiore di a , essa differenza sarà negativa. Per sottrarre aff da bbe , si faccia $bbe - aff$; per sottrarre $2a$ da $5a$, si faccia $5a - 2a$; ma cinque a meno due a fanno tre a , adunque il residuo sarà $3a$; per sottrarre $-b$ da a , si scriva $a + b$. Nè paja strano, che nel sottrarre $-b$ quantità negativa essa divenga positiva, onde il residuo sia $a + b$; imperciocchè il sottrarre una quantità da un'altra è lo stesso, che il cercare la differenza tra esse quantità; ora la differenza tra a , e $-b$ è appunto $a + b$ in quella guisa, che la differenza tra un capitale di cento scudi e un debito di cinquanta è cento cinquanta; perchè dall' avere.

cento

cento all' avere nulla v'è differenza di cento, e dall' avere nulla all' avere cinquanta di debito vi è cinquanta di differenza; adunque dal capitale di cento al debito di cinquanta vi sarà differenza di cento cinquanta. Così, per la stessa ragione, a sottrarre b da $-a$ si scrive $-a-b$; e per sottrarre $-b$ da $-a$ si scrive $-a+b$.

Della Moltiplicazione delle Quantità semplici intere.

7. Le quantità semplici si moltiplicano con lo scrivere l'una unitamente all'altra senza alcun segno frapposto, e ciò che risulta chiamasi il prodotto, siccome chiamansi i moltiplicatori le quantità, che tra loro si moltiplicano. Ma intorno al segno, che devesi prefiggere ad essi prodotti, è regola generale, che se le quantità moltiplicantesi sono ambe positive, o ambe negative, al prodotto si prefigge sempre il segno positivo; se una di esse, qualunque siasi, è positiva, l'altra negativa, al prodotto si prefigge sempre il segno negativo. La ragione di ciò è, che la moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, il di cui primo termine sia l'unità; il secondo, e terzo termine le due quantità, che devono moltiplicare; ed il quarto il prodotto, e per tanto posti in serie l'unità per primo termine, l'uno de' moltiplicatori per secondo, l'altro moltiplicatore per terzo; poichè il quarto, per la natura della proporzione geometrica, deve essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo; se il secondo, e terzo termine sono positivi, cioè se, per
esem-

esempio, è 1, $a :: b$, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia 1, $a :: b$, al quarto; dovendo il quarto essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo, ed essendo negativo il secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia 1, $a :: -b$, al quarto; dovendo il quarto essere multiplo del terzo, come il secondo è multiplo del primo, ed essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia 1, $-a :: -b$, al quarto; essendo il secondo multiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia multiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, dunque dovrà il quarto essere positivo. Adunque il prodotto di a in b farà ab ; quello di a in $-b$ farà $-ab$; di $-a$ in b farà pure $-ab$; di $-a$ in $-b$ farà ab ; di a in b in c farà abc ; di a in $-b$ in c farà $-abc$, perchè a in $-b$ darà $-ab$, e $-ab$ in c darà $-abc$; ed il prodotto di $-a$ in $-b$ in c farà abc .

Se le quantità da moltiplicarsi avessero dei coefficienti numerici, si moltiplicano essi coefficienti con la solita regola de' numeri, ed il prodotto si prefigge al prodotto delle lettere; onde il prodotto di $6a$ in $-8bc$ farà $-48abc$; il prodotto di $2a$ in $-2b$ in $-3c$ farà $12abc$, e così degli altri ec.

8. Ora poichè il prodotto di a in a è aa ; di a in a in a ,
o di

o di aa in a è aaa ; di a in a in a in a , o sia di aaa in a è $aaaa$, e così successivamente; per non replicare tante volte la medesima lettera si suole scrivere a^2 in luogo di aa , a^3 in luogo di aaa , a^4 in luogo di $aaaa$, e così degl'altri; cioè scrivendo sopra la lettera tal numero, che contenga tante unità, quante volte dovrebbe essere replicata essa lettera, e tale numero si chiama l'esponente; si suole però scrivere indifferentemente tanto aa , quanto a^2 ; non così di prodotto maggiore.

9. Comechè il prodotto di un numero moltiplicato in se stesso si chiama il quadrato di quel numero, o sia la seconda potestà, e se questo prodotto di nuovo si moltiplica nello stesso numero, il nuovo prodotto si chiama il cubo, o la terza potestà dello stesso numero, ed il prodotto del cubo nel numero si chiama il quadrato quadrato, o la quarta potestà, e così successivamente; così pure a moltiplicato in a , cioè aa si chiama il quadrato di a , o la seconda potestà di a , a^3 il cubo, o terza potestà, a^4 la quarta ec. Sarà dunque assai diverso $2a$ da a^2 , essendo il primo la somma di a con a , cioè $a + a$, ed il secondo il quadrato di a , e così si dica di $3a$ ed a^3 , di $4a$ ed a^4 ec. Ma poichè il prodotto di $+$ con $+$, e di $-$ con $-$ è sempre positivo, ne viene, che tanto il quadrato di a , quanto di $-a$ sarà sempre aa quantità positiva; all'opposto il cubo di a sarà bensì positivo, ma sarà negativo, cioè $-a^3$ il cubo di $-a$, perchè $-a$ in $-a$ fa aa , ed aa in $-a$ fa $-a^3$. Così sarà positiva la quarta potestà tanto di a , quanto di

$-a$; e generalmente quando l'esponente della potenza, a cui si vuole elevare la data quantità, sia numero pari, o sia positiva, o sia negativa la quantità, ciò che risulta sarà sempre positivo; e quando l'esponente sia dispari, se la quantità è positiva, ciò che risulta sarà positivo, e sarà negativo quando la quantità sia negativa.

Della Divisione delle Quantità semplici intere.

10. La divisione è un'operazione opposta alla moltiplicazione, e ciò, che questa compone, quella risolve; poichè ab è il prodotto di a in b , così dividendo ab per a si avrà b , e dividendo per b si avrà a ; dividendo abc per bc avrassi a , e dividendo per a avrassi bc , e dividendo per c avrassi ab ec. La quantità da dividersi si chiama il dividendo; quella, per cui si divide, si chiama il divisore; e ciò, che risulta dalla divisione, diceasi il quoziente. Adunque ogni qualvolta nel dividendo, e nel divisore vi sono le stesse quantità, si tolgano esse in quel modo, in cui sono nel divisore, dal dividendo cancellandole; e ciò, che rimane, sarà il quoziente, quindi se si divida aa per a , il quoziente sarà a ; se si divida a^2 per a , il quoziente sarà a ; se si divida $a^2 b^2$ per $aa bb$, il quoziente sarà ab ; che se in oltre il dividendo, e divisore avessero coefficienti numerici, si dividano essi con la regola ordinaria dell'aritmetica, ed il quoziente numerico si prefigga al quoziente letterale, e però dividendo $3a^2 b^2$ per $3b^2$, il quoziente sarà a^2 ; dividendo $56aab^2$ per $8ab$, il quoziente sarà $7abb$; e qui notisi,

che qualora la quantità da dividersi sia la stessa del divisore, come farebbe a dividere b per b , $7a$ per $7a$ ec., il quoziente è l'unità; e la ragione è chiara, perchè il dividere è il ricercare quante volte il divisore entri ovvero sia nel dividendo.

11. Quando poi il dividendo, e divisore non abbiano quantità o lettera comune, per cui possa farsi la divisione, nel modo suddetto, come farebbe a dividere a per b , a per bc , $5aabb$ per $2cc$ ec., si scrivono così $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{5aabb}{2cc}$ ec., cioè il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto d'una lineetta, e si intende, che a debbasi dividere per b , a^2 per bc ec., e queste chiamansi frazioni; la quantità poi sopra la lineetta diceasi il Numeratore, quella di sotto il Denominatore. Che se alcune delle lettere del divisore, ma non tutte, fossero comuni con la quantità da dividersi, si tolgano le comuni dall'uno, e dall'altra, e del rimanente se ne formi una frazione; così dividendo a^2bb per $5abcc$, farà il quoziente $\frac{a^2b}{5cc}$; dividendo $10ab^2$ per $15bcc$, farà il quoziente $\frac{2abb}{3cc}$ ec.

12. Ma perchè può essere positivo, o negativo ed il dividendo, ed il divisore, è necessario in ciascuna combinazione de' casi fissare la regola per lo segno da prefiggersi al quoziente. Questa è la stessa di quella, che serve per la moltiplicazione, vale a dire, che se il dividendo, ed il divisore averanno ambi il medesimo segno positivo, o negativo,

tivo, il quoziente sarà sempre positivo, e se averanno segni contrarj, il quoziente sarà negativo. La dimostrazione dipende da quella de' segni della moltiplicazione; imperciocchè siccome la moltiplicazione è una proporzione, il di cui primo termine sia l'unità; il secondo, ed il terzo i due moltiplicatori; ed il quarto il prodotto; così la divisione è la stessa proporzione, ma inversa, il di cui primo termine è il dividendo; il secondo il divisore; il terzo il quoziente; ed il quarto l'unità. Abbiasi da dividere $\pm ab$ per $\pm b$, sarà dunque la proporzione $\pm ab, \pm b :: *a, 1$ (pongo al terzo termine, cioè al quoziente il segno *, non sapendosi per ora se debba essere positivo, o negativo) ora considerata questa proporzione, come quella della moltiplicazione, ma inversamente posta, si fa che essendo positivo il secondo termine b , non potrà essere positivo il primo ab se non sia positivo il terzo a ; ed essendo negativo il secondo b , non potrà essere negativo il primo ab se non sia positivo il terzo a ; e però nella divisione quando sieno positivi, o negativi i due primi, cioè il dividendo, ed il divisore, bisognerà che sia positivo il terzo, cioè il quoziente. Istessamente pure non può nella stessa serie, o proporzione essere positivo il secondo b , e negativo il primo ab , o pure negativo il secondo b , e positivo il primo ab se non sia negativo il terzo a ; adunque nella divisione essendo positivo il dividendo, e negativo il divisore, o pure all'opposto, dovrà necessariamente essere negativo il quoziente.

13. Per questa ragione sarà dunque lo stesso scrivere per esempio, $\frac{a}{-b}$, come $\frac{-a}{b}$, imperciocchè se a positivo deve si dividere per b negativo, dunque il quoziente deve essere negativo; come pure è lo stesso scrivere $\frac{-a}{b}$, ed $\frac{a}{-b}$.

Della Estrazione delle Radici dalle Quantità semplici intere:

14. Come evvi nelle potestà il quadrato, il cubo, la quarta potestà, la quinta ec.; così tra le radici vi è la quadrata o sia seconda, la cubica o sia terza, la quarta, la quinta ec. La denominazione della radice si chiama il di lei indice, e però l'indice della radice quadrata, o sia seconda è il due; della cubica, o sia terza il tre; della quarta il quattro ec.; e per cavare la radice da una data quantità deve si ritrovare quell'altra quantità, la quale moltiplicata in se stessa tante volte una meno, quante sono le unità nell'indice della radice, abbia prodotta la quantità proposta; così a farà la radice quadrata di aa , la cubica di a^3 , la quarta di a^4 ec.; istessamente la radice quadrata di $aabb$ sarà ab ; di $16aabbcc$ farà la radice quadrata $4abc$; la cubica di $27a^3x^3$ farà $3ax$, e così dell'altre.

15. E poichè il prodotto del meno col meno è sempre positivo, come di sopra si è veduto, quindi è, che la radice quadrata di aa farà tanto a , quanto $-a$, cioè $\pm a$; non così della cubica, la quale farà positiva se sia positivo il cubo, e farà negativa se sia quello negativo, poichè il cubo di a farà a^3 , e $-a^3$ quello di $-a$; bensì la radice,
quarta

quarta sarà e positiva, e negativa; e generalmente parlando, la radice d'indice pari sarà sempre e positiva, e negativa; d'indice dispari sarà positiva se positiva la quantità proposta, e negativa se sia quella negativa. E perchè, per la stessa natura de' segni nella moltiplicazione, nessuna quantità positiva, o negativa può mai generare potestà negativa d'esponente pari; così è impossibile ritrovare radice d'indice pari di quantità negativa. Queste tali radici d'indice pari di quantità negativa si chiamano impossibili, o immaginarie; sarà dunque immaginaria la radice quadrata di $-aa$, la quarta di $-a^4$, la quadrata, e sesta di $-a^6$ ec.; e sarà vera, e reale la radice terza di $-a^3$, la quinta di $-a^5$ ec.

16. Ma il più delle volte la proposta quantità, di cui si vuole la radice, non sarà un quadrato, un cubo, o altra potestà nata dalla moltiplicazione di quantità razionale in se stessa, ma sarà un prodotto d'altra natura, come ab , abc ec.; in questi casi si fa uso di questo segno $\sqrt{}$, che chiamasi vincolo radicale, onde $\sqrt{ab}$, o semplicemente $\sqrt{ab}$ vorrà dire radice quadrata di ab , $\sqrt[3]{abc}$ vorrà dire radice cuba di abc , e così $\sqrt[4]{}$ radice quarta, $\sqrt[5]{}$ radice quinta ec., e queste tali quantità affette dal vincolo radicale si chiamano Irrazionali.

Della Somma delle Quantità composte intere.

17. Dalla somma, o sottrazione delle quantità semplici nascono le composte. Per sommare queste pure basta scriverle una dopo l'altra con que' segni, che hanno. Per sommare adunque $a + b$ con $c - d$, si scriva $a + b + c - d$; per sommare $2aa - xx$ con $3cc + 2yy$, si faccia $2aa - xx + 3cc + 2yy$; per sommare $aa - xx$ con $bb + xx + yy$, si faccia $aa - xx + bb + xx + yy$; ma qui osservisi, che $-xx$ e $+xx$ si elidono, e distruggono, adunque cancellati questi, la somma sarà $aa + bb + yy$; per sommare $2aa - 5bb$ con $aa + 2bb + yy$, si scriva $2aa - 5bb + aa + 2bb + yy$; ma $2aa + aa$ fanno $3aa$, e $-5bb + 2bb$ fanno $-3bb$, adunque la somma sarà $3aa - 3bb + yy$.

Della Sottrazione delle Quantità composte intere.

18. Si mutino i segni alla quantità, che si vuol sottrarre, indi con i segni così mutati si scriva presso quella, da cui si vuol fare la sottrazione. Per sottrarre $c - d$ da $a + b$ si scriva $a + b - c + d$, e la ragione è chiara, imperciocchè sottraendo la sola quantità c , e scrivendo $a + b - c$ già si avrebbe sottratto troppo, perchè devesi sottrarre $c - d$, cioè la sola differenza di c e di d , e però si avrebbe sottratto più del dovere, quanto è la quantità d , adunque per avere giusta la sottrazione bisognerà aggiungere essa quantità d , e scrivere $a + b - c + d$; lo stesso dicasi delle quan-

quantità più composte. Per sottrarre $a + 3b$ da $3a + 2b$, si scriva $3a + 2b - a - 3b$, e facendo la riduzione dei termini simili, poichè $3a - a$ è $2a$, e $2b - 3b$ è $-b$, sarà il residuo $2a - b$; per sottrarre $aa - 2ab$ da $2aa - ab$, si scriva $2aa - ab - aa + 2ab$, cioè $aa + ab$; per sottrarre, $3ab - 2bc + 2cd$ da $5ab - 4bc + 2cd$, si scriva $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, cioè facendo la riduzione, $2ab - 2bc$.

Della Moltiplicazione delle Quantità composte intere.

19. Intesa la regola del moltiplicare le quantità incomplete, è facilissima quella delle composte. Si scriva adunque l'uno de' moltiplicatori sotto l'altro, all'uso dell'aritmetica volgare, indi per ciascun termine dell'uno de' moltiplicatori si moltiplichino tutti i termini dell'altro con la data regola delle quantità semplici, in quello, che risulta, si faccia al solito la riduzione de' termini simili, ed avrassi il prodotto. Abbiasi da moltiplicare $a + b - c$ per x ;

si scriva $\frac{a + b - c}{ax + bx - cx}$, si moltiplichi per x ciascun termine

dell'altro moltiplicatore posto al disopra, e sarà il prodotto $ax + bx - cx$. Abbiasi da moltiplicare $2a + 3b - c$

per $3x - 2y$, si scriva $\frac{2a + 3b - c}{3x - 2y}$, per lo

termine $3x$ si moltiplichino tutti i termini della quantità posta al di sopra, indi si faccia lo stesso per lo termine $-2y$, e se altri termini vi fossero al di sotto si farebbe lo stesso;

stesso; e farà il prodotto $6ax + 9bx - 3cx - 4ay - 6by + 2cy$.
 Nè importa, che l'operazione si cominci a destra, o a sinistra rispetto all'uno, ed all'altro de' moltiplicatori, siccome nulla importa, che di essi piuttosto l'uno, che l'altro si scriva sopra o sotto, e che si ponga il tale o tal'altro termine per primo. Abbiasi da moltiplicare $aa + xx$ per $aa - xx$, adunque si scriva

$$\begin{array}{r} aa + xx \\ aa - xx \end{array}$$

ed il prodotto sarà $a^4 + aaxx - aaxx - x^4$ ma $aaxx - aaxx$ si elidono; adunque il prodotto sarà $a^4 - x^4$.

Nelle moltiplicazioni lunghe, per maggior facilità di ridurre i termini simili, torna assai comodo lo scrivere essi termini simili, che nella moltiplicazione si generano, uno sotto l'altro in questa guisa

si moltiplichino

per

$$\begin{array}{r} 4a^3 + 3aab - 2abb + b^3 \\ aa - 5ab + 6bb \\ \hline 4a^4 + 3a^3b - 2a^3bb + aab^2 - 5ab^4 + 6b^5 \\ - 2a^4b - 15a^3bb + 10aab^2 - 12ab^4 \\ + 24a^2bb + 18aab^3 \end{array}$$

dove presto si vede, che $3a^3b - 2a^4b$ fanno $-17a^4b$; che $-2a^3bb - 15a^3bb + 24a^2bb$ fanno $7a^3bb$; che $aab^2 + 10aab^2 + 18aab^2$ fanno $29aab^2$; che $-5ab^4 - 12ab^4$ fanno $-17ab^4$; e però il prodotto sarà finalmente $4a^4 - 17a^4b + 7a^3bb + 29aab^2 - 17ab^4 + 6b^5$.

20. Alle volte è superfluo il fare l'attual moltiplicazione nella guisa, che si è detta, bastando semplicemente l'indicarla, il che suole farli per mezzo di questo segno $\times$,
 e col

e col tirare una retta sopra ciascuno de' moltiplicatori, la quale si estenda sopra tutti que' termini, che entrano nella moltiplicazione; così $\overline{aa+xx} \times \overline{aa-xx}$ vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$; ma nella quantità $\overline{aa+xx} \times \overline{aa-xx} \pm a^4$ non essendo il termine $\pm a^4$ sotto la retta linea, non s'intende egli compreso nella moltiplicazione di modo, che così scrivendo vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$, al quale prodotto è in oltre aggiunto, o sottratto a^4 .

21. In quella guisa, che nelle quantità semplici il prodotto di a in a dicefi il quadrato di a , il prodotto di aa in a dicefi il cubo di a , il prodotto di a^3 in a la quarta potestà ec.; così nelle quantità composte il prodotto, per esempio, di $a+b$ in $a+b$, o sia $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$ dicefi il quadrato di $a+b$, il quale non volendosi formare attualmente colla moltiplicazione si scriverà così $\overline{a+b}^2$; istessamente $\overline{a+b}^2 \times \overline{a+b}$ farà il cubo, e si scriverà $\overline{a+b}^3$; $\overline{a+b}^3 \times \overline{a+b}$, o pure $\overline{a+b}^2 \times \overline{a+b}^2$ dicefi la quarta potestà, e si scrive $\overline{a+b}^4$; lo stesso intendasi delle quantità di più termini.

Per formare attualmente queste potestà devesi moltiplicare in se la quantità, ed il prodotto nella stessa quantità successivamente tante volte una meno, quante unità contiene il numero dell'esponente di essa potestà, che si desidera. Ma per la seconda potestà, cioè per lo quadra-

to, si può abbreviare l'operazione così: Se la quantità è un binomio, cioè di due termini, come $a \pm b$; si faccia il quadrato del primo termine, indi se gli scrivano appresso i due rettangoli, cioè due volte il prodotto del primo termine nel secondo con quel segno, che porta la regola della moltiplicazione, e finalmente si aggiunga il quadrato del secondo termine. Così $\overline{a+b}^2$ farà $aa + 2ab + bb$; $\overline{a-b}^2$ farà $aa - 2ab + bb$; $-\overline{a-b}$ farà $aa + 2ab + bb$. Se la quantità fosse un trinomio, cioè di tre termini, si scrivano in oltre i due rettangoli del primo termine nel terzo, e due altri rettangoli del secondo nel terzo (intendendo, che questi rettangoli abbiano que' segni, che porta la moltiplicazione) e finalmente il quadrato del terzo termine. Così $\overline{a+b-c}^2$ farà egli $aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc$. Se la quantità farà un quadrimomio, cioè di quattro termini, si scrivano in oltre due volte i rettangoli de' primi tre termini nel quarto con di più il quadrato di esso quarto termine ec.

22. Ma rispetto alle quantità binomie può servire il seguente Canone generale non solo per elevarle al quadrato, ma a qualunque potestà m , intendendo per m un qualunque numero. Sia dunque $p + q$ da elevarsi alla potestà m , farà essa

$$\overline{p+m}^m \overline{q+m}^{m-1} \times \overline{m-1}^1 \overline{p}^1 \overline{qq+m}^{m-2} \times \overline{m-1}^2 \times \overline{m-2}^1 \overline{p}^2 \overline{q}^2$$

$$+ m \times \overline{m-1}^1 \times \overline{m-2}^2 \times \overline{m-3}^1 \overline{p}^3 \overline{q}^3 \text{ ec. , e così proseguendo con la stessa legge.}$$

Deb-

Debbasi adunque fare il quadrato di $p+q$, in questo caso m farà 2, e però sostituito nel canone in luogo della m il 2, farà il primo termine pp ; il secondo $2p^{2-1}q$, cioè $2pq$; il terzo $2 \times \frac{2-1}{2} p^{2-2}qq$, cioè qq (non essendovi considerata la quantità p , perchè elevata alla potestà nulla si eguaglia all'unità, come si dimostrerà al numero 50.)

il quarto $2 \times \frac{2-1}{2} \times \frac{2-2}{1} \times p^{2-3}q^3$, ma $2-2$ è lo stesso che zero, adunque questo termine è moltiplicato per zero, e così pure ciascun de' susseguenti, onde saranno essi ancora zero, e però il canone terminerà col terzo termine, e sarà il quadrato ricercato $pp+2pq+qq$.

Si voglia la terza potestà di $p+q$; sarà $m=3$, quindi farà zero il quinto termine coi susseguenti, e la ricercata potestà (fatta la sostituzione di 3 in luogo di m) $p^3+3ppq+3pqq+q^3$. Se la quantità da elevarsi sarà $p-q$, basterà porre il segno meno a tutti que' termini, ne' quali la q è a potestà dispari.

Il suddetto canone serve non solo per lo binomio $p \pm q$, ma per qualunque altro ancora; e però si voglia la terza potestà di $2ax - xx$; si supponga $2ax=p$, e $-xx=q$, sarà $m=3$, indi nel canone in luogo di p , e delle potestà di p si sostituisca $2ax$, e le corrispondenti sue potestà, lo stesso si faccia di $-xx$ in luogo di q , e delle sue potestà, e si ponga 3 in luogo di m , e sarà $8a^3x^3 - 12aax^2 + 6ax^3 - x^6$.

Anzi potrà egli servire per qualunque polinomio,

cioè per qualunque quantità composta di più termini, che di due. Sia il trinomio $a+b-c$ da elevarsi alla terza potestà, sarà dunque $m=3$; si ponga $a=p$, e $b-c=q$, indi surrogato a , e le sue potestà in luogo di p , e delle sue potestà, siccome in luogo di q , e sue potestà sostituito $b-c$, e sue corrispondenti potestà, sarà $a^3 + 3aa \times \overline{b-c} + 3a \times \overline{b-c}^2 + \overline{b-c}^3$, cioè $a^3 + 3aab - 3aac + 3abb - 6abc + 3acc + b^3 - 3bbc + 3bcc - c^3$.

Della Divisione delle Quantità composte intere.

23. Tre combinazioni, o siano tre diversi casi possono darli intorno alla divisione delle quantità complesse; il primo quando sia complessa la quantità da dividersi, e semplice il divisore; il secondo quando sia semplice quella, e composto questo; il terzo quando siano composti e l'una, e l'altro. Quanto ai primi due casi basta far uso della regola delle quantità semplici. Nel primo caso si divida ciascun termine della quantità proposta per lo divisore, e nasceranno interi, o rotti, o in parte interi, ed in parte rotti, come porterà la natura della divisione nelle quantità semplici. Così dividendo $aa + ab - ac$ per a , avrassi $a + b - c$; dividendo $4ab - 6bc + xx$ per $2b$, avrassi $2a - 3c + \frac{xx}{2b}$; dividendo $4ab - cc + 3xx$ per $3c$, avrassi $\frac{4ab - cc + 3xx}{3c}$, o sia $\frac{4ab}{3c} - \frac{c}{3} + \frac{xx}{c}$. Nel secondo caso si scriva il divisore

sotto

sotto al dividendo, all'uso delle frazioni, e se in ciascun termine del numeratore, e del denominatore vi sarà qualche quantità comune, si cancelli questa; e ciò, che rimane, farà sempre una frazione. Dividendo però $3a^2b$ per $ax - ax + ab$, farà il quoziente $\frac{3a^2b}{a-x+b}$. Dividendo $6a^3$ per $2aa - 2ax + 2xx$, farà il quoziente $\frac{3a^3}{aa - ax + xx}$.

24. Nel terzo caso fa d'uopo in primo luogo ordinare il dividendo, ed il divisore relativamente ad una qualche lettera, che si crederà più a proposito, il che si fa scrivendo per primo termine e nel dividendo, e nel divisore quello, in cui questa lettera si trova alla maggior dimensione o potestà, per secondo termine quello, in cui questa stessa lettera è alla potestà più prossima; e così successivamente sino a que' termini, che affatto non contengano essa lettera, i quali saranno gli ultimi. Così sarebbe ordinata relativamente alla lettera a la quantità $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$, ed il divisore $a - b$. Che se si volesse ordinare relativamente alla lettera b , si scriverebbe la quantità così: $bbc - 3abc - aab + a^3 + 2aac$, ed il divisore così: $-b + a$.

Ciò posto, la divisione si fa in questa maniera: Si divide il primo termine del dividendo per lo primo termine del divisore, ed il quoziente si scrive a parte; per questo quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo; fatta la sottrazione, e ridotti i

ter-

termini, di nuovo si divide nella stessa maniera per lo primo termine del divisore il primo termine di ciò, che è rimasto nel dividendo, cioè del primo resto, e questo quoziente si scrive presso l'altro con quel segno, che deve avere; indi per questo secondo quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo, cioè dal primo resto, ed in questa guisa operando si ripete il calcolo fino a tanto, che dalla sottrazione nulla rimanga, e la somma di tutti i quozienti parziali farà il quoziente totale nato dalla divisione.

Sia da dividerli $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$.
 Si scriva la quantità da dividerli in (A), il divisore in (B);
 diviso a^3 per a , il quoziente sarà aa , che si scriva in (D),
 indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto (M). Si divida il primo termine $2aac$ di questo residuo (M) per lo stesso primo termine a del divisore, e scrivasi il quoziente $2ac$ presso l'altro in (D), si sottragga dal primo resto (M) il prodotto di $2ac$ nel divisore (B), ed averassi il secondo resto (N). Si divida il primo termine $-abc$ di questo secondo resto per lo stesso termine a del divisore, ed il quoziente $-bc$ si scriva in (D) vicino agl'altri, dal secondo resto (N) sottraggasi il prodotto di $-bc$ nel divisore, e nulla rimane; adunque il quoziente sarà $aa + 2ac - bc$
 (A) $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ (B) $a - b$
 (M) $2aac - 3abc + bbc$
 (N) $-abc + bbc$ (D) $aa + 2ac - bc$

Sia da dividersi $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ per $a - b$. Si scriva il dividendo in (A), il divisore in (B), dividasi il primo termine a^3 per a , ed il quoziente aa si scriva in (D); indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto (M); si divida il primo termine di questo resto (M), cioè $-2aab$ per lo stesso primo termine a del divisore, e scrivasi il quoziente $-2ab$ presso l'altro in (D), sottraggasi dal primo resto (M) il prodotto di $-2ab$ nel divisore, e si avrà il secondo resto (N), si divida il primo termine abb di questo secondo resto per lo stesso primo termine a del divisore, ed il quoziente bb si scriva in (D) accanto degl' altri, sottraggasi indi dal secondo resto (N) il prodotto di bb nel divisore (B), e nulla rimane; adunque il quoziente totale sarà $aa - 2ab + bb$

$$(A) \ a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \quad (B) \ a - b$$

$$(M) \ -2aab + 3abb - b^3 \quad (D) \ aa - 2ab + bb$$

$$(N) \ \quad \quad abb - b^3$$

Altro Esempio

Dividendo $2aa + 5ab + 2bb - ac - 2bc$, Divisore $a + 2b$

Primo resto $ab + 2bb - ac - 2bc$, Quoziente $2a + b - c$

Secondo resto $-ac - 2bc$

Altro Esempio

Divid. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4$, Divisore $3dd - ee$

Primo resto $12d^3e + 3ddee - 4de^3 - e^4$, Quoz. $3dd + 4de + ee$

Secondo resto $3ddee - e^4$

Altro

Altro Esempio

Dividendo	$4aa + 4ab - 2ac + bb - cc$	Divisore	$2a + b$
Primo resto	$2ab - 2ac + bb - cc$		
Secondo resto	$-2ac - cc$	Quoziente	$2a + b - c$
Terzo resto	$bc - cc$		

Ma quì offervifi, che l'ultimo resto $bc - cc$ non è divisibile per $2a$, ed in conseguenza non può andare avanti l'operazione, rimanendo la frazione $\frac{bc - cc}{2a + b}$, e que-

sto vuol dire, che la proposta quantità non è interamente divisibile per $2a + b$, ma solo in parte, e però sarà il quoziente in parte intero, ed in parte rotto, cioè $2a + b - c + \frac{bc - cc}{2a + b}$, o pure tutto rotto scrivendo $\frac{4aa + 4ab - 2ac + bb - cc}{2a + b}$

Dell' Estrazione delle Radici dalle Quantità composte intere.

25. Come nelle quantità semplici, così nelle composte la radice quadrata di una qualunque quantità è quella, che moltiplicata in se stessa à prodotta la quantità data; la cubica quella, che moltiplicata in se due volte, la quarta tre ec.

La maniera di cavare la radice quadrata nelle quantità complesse è la seguente, intendendo però, che prima sieno ordinati i termini relativamente ad una lettera secondo, che è stato detto al numero 24.

Sia la quantità $aa + 2ab + bb$, di cui si vuole la radice quadrata, che si scriva in (A); si cavi la radice quadrata dal

dal primo termine aa , e farà essa a , la quale si scriva in (B) , si sottragga dalla quantità proposta (A) il quadrato di essa, cioè aa , ed il residuo si scriva in (D) , indi si raddoppi la quantità a scritta in (B) , e si scriva in (M) , e farà essa $2a$; per $2a$ si divida il primo termine di (D) , ed il quoziente b si scriva in (B) , indi si moltiplichino il divisore $2a$ nel quoziente b , e si sottragga il prodotto dalla quantità (D) , e di più da essa si sottragga il quadrato di b , e perchè nulla rimane, farà $a+b$ la radice cercata

$$(A) \quad aa + 2ab + bb \qquad (B) \quad a + b$$

$$(D) \quad 2ab + bb \qquad (M) \quad 2a$$

Sia la quantità $a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$. Si scriva in (A) , e si estraiga la radice quadrata dal primo termine, che è aa , e si scriva in (B) , il quadrato di aa sottraggasi dalla quantità (A) , e rimane la quantità (D) , si raddoppi aa , e si scriva in (M) , e per esso raddoppiato, cioè per $2aa$, dividasi il primo termine del primo resto (D) , ed il quoziente $3ab$ si scriva in (B) , indi sottratto il prodotto di $3ab$ nel divisore $2aa$ con di più il quadrato di esso $3ab$ dal primo resto (D) , rimarrà il secondo resto (H) . Si raddoppi tutta la quantità (B) , e si scriva in (G) , per lo primo termine di essa si divida il primo termine di (H) , ed il quoziente $-2bb$ si scriva in (B) , e perchè sottratto il prodotto del quoziente nel divisore (G) con di più il quadrato dello stesso quoziente dalla quantità (H) , nulla rimane, farà la quantità scritta in (B) ,

D

cioè

cioè $aa + 3ab - 2bb$ la radice, che si cerca.

$$(A) a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4 \quad (B) aa + 3ab - 2bb$$

$$(D) 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4 \quad (M) 2aa$$

$$(H) -4aabb - 12ab^3 + 4b^4 \quad (G) 2aa + 6ab$$

Ecco l'Operazione per altri Esempj.

$$\text{Sia} \quad y^4 + 4ay^3 - 8a^2y + 4a^4 \quad \text{Rad. } yy + 2ay - 2aa$$

$$\text{Primo resto} \quad 4ay^3 - 8a^2y + 4a^4 \quad 2yy$$

$$\text{Secondo resto} \quad -4aayy - 8a^2y + 4a^4 \quad 2yy + 4ay$$

$$\text{Sarà adunque la radice quadrata} \quad yy + 2ay - 2aa$$

Sia la quantità

$$16a^4 - 24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4 \quad \text{Rad. } 4aa - 3xx - 2bb$$

$$\text{I. resto} -24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4 \quad 8aa$$

$$\text{II. resto} \quad -16aabb + 12bbxx \quad 8aa - 6xx$$

$$\text{III. resto} \quad -4b^4$$

Con questa operazione si arriva in fine all'ultimo resto $-4b^4$, il quale non è divisibile in alcun modo per $8aa$, come esigge il metodo, che in questo caso non à luogo. Ciò vuol dire, che dalla quantità proposta non si può attualmente estrarre la radice quadrata, e però conviene servirsì del segno radicale, come di sopra al numero 16.; lo stesso facciasi in simili casi per altre radici cube, quarte ec., e così $\sqrt{aa + bb}$ vorrà dire la radice quadrata di $aa + bb$; $\sqrt[3]{aab - abb}$ vorrà dire la radice cuba di $aab - abb$ ec.

26. Rispetto alle radici cube. Sia da estraersi la radice cuba dalla quantità $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, che si
scri-

scriva in (A) . Si cavi la radice cuba dal primo termine, a^3 della quantità proposta, e si scriva in (B) , si sottragga il cubo di questa, cioè a^3 , dalla quantità (A) , ed il residuo si scriva in (D) , si faccia indi il triplo del quadrato di a , cioè $3aa$, e si scriva in (M) , per esso si divida il primo termine del residuo (D) , ed il quoziente b si scriva in (B) , per esso si moltiplichi il divisore $3aa$, ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di b nella quantità a , ed il cubo di b si sottragga dal residuo (D) ; e perchè nulla rimane, farà $a + b$ la radice, che si cercava.

$$(A) \ a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \quad (B) \ a + b$$

$$(D) \quad 3aab + 3abb + b^3 \quad (M) \ 3aa$$

Debbasi estrarre la radice cuba dalla quantità

$$z^6 + 6bz^5 - 4ob^2z^3 + 96b^3z - 64b^6.$$

Si cavi la radice dal primo termine z^6 , che farà zz , e si scriva in (B) , sottraggasi il cubo di (B) dalla proposta quantità (A) , ed il residuo si scriva in (D) , si faccia il triplo del quadrato di (B) , e si scriva in (M) , indi per esso si divida il primo termine della quantità (D) , ed il quoziente $2bz$ si scriva in (B) , sottraggasi poscia il prodotto di $2bz$ nella quantità (M) , e di più il triplo del quadrato di $2bz$ moltiplicato in zz con il cubo di $2bz$ dal residuo (D) , e scrivasi il residuo in (H) , facciasi il triplo del quadrato di (B) , che scrivasi in (G) , e per lo primo termine di esso si divida il primo termine della quantità (H) , ed il quoziente $-4bb$ si scriva in (B) , si moltipli-

chi questo quoziente nella quantità (G), ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di $-4bb$ in $zz + 2bz$, ed il cubo di $-4bb$ sottraggasi dall'a quantità (H), e nulla rimane; onde farà la radice cuba della quantità proposta tutta la quantità (B), cioè $zz + 2bz - 4bb$.

$$(A) \quad z^3 + 6bz^2 - 40b^2z + 96b^3z - 64b^4 \quad (B) \quad \text{Radice cuba } zz + 2bz - 4bb$$

$$(D) \text{ I. resto } 6bz^2 - 40b^2z + 96b^3z - 64b^4 \quad (M) \quad 3z^2$$

$$(H) \text{ II. resto } -12bbz - 48b^2z + 96b^3z - 64b^4 \quad (G) \quad 3z^2 + 12bz^2 + 12bbz$$

Nello stesso modo si farà intor no alla quantità

$$(A) \quad 27y^6 - 54cy^5 + 144cy^4 - 152c^2y^3 + 192c^3yy - 96c^4y + 64c^6 \quad (B) \quad \text{Radice cuba } 3yy - 12cy + 4cc$$

$$(D) \text{ I. resto } -54cy^5 + 144cy^4 - 152c^2y^3 + 192c^3yy - 96c^4y + 64c^6 \quad (M) \quad 27y^4$$

$$(H) \text{ II. resto } 108c^2cy^4 - 144c^3y^3 + 192c^4yy - 96c^5y + 64c^6 \quad (G) \quad 27y^4 - 36cy^3 + 12ccyy$$

27. Per le radici quarte. Sia proposta la quantità $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$, di cui si voglia la radice quarta. Si scriva in (A), e si cavi la radice quarta dal primo termine, che sarà a , e si scriva in (B), sottraggasi la quarta potestà di (B) dalla quantità (A), ed il residuo si scriva in (D), indi facciasi il quadruplo del cubo di a , e si scriva in (M), per esso si divida il primo termine della quantità (D), ed il quoziente b si scriva in (B), dalla quantità (D) si sottragga il prodotto del quoziente b nel divisore $4a^3$, e di più il sestuplo del quadrato di b nel quadrato di a , ed il prodotto del quadruplo del cubo di b nella quantità a , e finalmente il quadrato-quadrato o la

quarta

quarta potestà di b ; e perchè nulla rimane, farà $a + b$ la radice cercata

$$(A) a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (B) a + b$$

$$(D) 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (M) 4a^3$$

28. Rispetto alla radice quinta. Per vedere in quale maniera crescano le operazioni da farsi, basta formare la quinta potestà del binomio, per esempio $a + b$, la quale ci darà regola, siccome la seconda, terza, e quarta potestà dello stesso binomio ci à data regola per le radici quadrata, cuba, e quarta. Similmente si discorra delle radici sesta, settima ec.

Del Calcolo delle Frazioni semplici, e composte.

29. Dalla divisione delle quantità s'è veduto come nascono le frazioni, o siano i rotti. Una frazione adunque indica una divisione da farsi del numeratore per lo denominatore, onde ne viene, che se il numeratore farà lo stesso del denominatore, come $\frac{a}{a}$, o pure $\frac{aa - bb}{aa - bb}$, ed altre simili, tali frazioni niente altro vorranno significare, che l'unità, perchè di fatto dividendo a per a , $aa - bb$ per $aa - bb$, il quoziente è l'unità. E perchè la moltiplicazione è un'operazione contraria alla divisione, è chiaro, che un qualunque intero si può ridurre ad essere una frazione di qualsivoglia denominatore, se per la quantità, che deve essere il denominatore, si moltiplicherà, e si dividerà l'intero;

così

così per ridurre l'intero a ad una frazione del denominatore b si scriverà $\frac{ab}{b}$; per ridurre $a-b$ ad una frazione del denominatore d si scriverà $\frac{ad-bd}{d}$; per ridurre $a+b$ ad una frazione del denominatore $c-d$ si scriverà $\frac{a+b \times c-d}{c-d}$, cioè $\frac{ac+bc-ad-bd}{c-d}$.

Della Riduzione delle Frazioni all'espressione più semplice.

30. Quando le frazioni hanno in ciascun termine del numeratore, e del denominatore la stessa, o le stesse lettere basta cancellare nell'uno, e nell'altro le lettere comuni, avendo riguardo alle potestà loro, come dissi nella divisione al numero 10.; così $\frac{a^3bb}{ac}$ farà $\frac{aabb}{c}$; $\frac{ab^3}{abc}$ farà $\frac{bb}{c}$; $\frac{a^3b-x^3b}{ab-bb}$ farà $\frac{a^3-x^3}{a-b}$. Ma quando anche nel numeratore, e denominatore non vi siano le stesse lettere, purchè l'uno, e l'altro sieno moltiplicati per la stessa quantità, saranno anco per essa divisibili, ed in conseguenza, si potrà ridurre la frazione. Adunque $\frac{aac-aad}{cd-dd}$, che è

appunto $\frac{aa \times c-d}{d \times c-d}$, ridotta farà $\frac{aa}{d}$; $\frac{aa+2ab}{aab+2abb}$, o sia

$\frac{aa+2ab \times aa+2ab}{aa+2ab \times b}$, farà ridotta $\frac{aa+2ab}{b}$; $\frac{aac-aad}{cd-dd}$

$\frac{-bbc+bbd}{cd-dd}$, o sia $\frac{aa-bb \times c-d}{d \times c-d}$, ridotta farà $\frac{aa-bb}{d}$;

aac

$\frac{aac - aad - acd + add}{cd - dd}$, o sia $\frac{aa - ad \times c - d}{d \times c - d}$, ridotta farà

$\frac{aa - ad}{d}$ ec.

Generalmente adunque ogni qual volta la frazione è tale, che il numeratore, e denominatore sieno ambi divisibili per una stessa quantità (che in questi casi si chiama il loro comun divisore) facendo attualmente le divisioni , i due quozienti daranno la frazione ridotta ; ma avvertasi, che se il comune divisore non è il massimo , la frazione farà bensì ridotta , ma non alla più semplice espressione ; così la frazione $\frac{a^2 - abb}{aac + abc}$, che è $\frac{a \times a + b \times a - b}{a \times c + a + b}$

può essere divisa nel numeratore, e nel denominatore per a , per $a + b$, e per $aa + ab$; il massimo di questi divisori è $aa + ab$; adunque perchè sia ridotta alla minima, bisognerà dividerla per $aa + ab$, e farà il quoziente $\frac{a - b}{c}$. Ma il più delle

volte è assai difficile il riconoscere se vi sia, e quale sia questo comun divisore, e però se ne darà la regola più abbasso al numero 36. per ora ommettendolo a fine di non confondere troppo la Gioventù non ancora avvezza, e passerò all'altre operazioni servendomi di frazioni ridotte all'espressione più semplice.

Del Ridurre le Frazioni al comun Denominatore.

31. Se le frazioni sono due : Si moltiplichi il numeratore della prima nel denominatore della seconda, indi il numeratore della seconda nel denominatore della prima, e ciascun prodotto si divida per lo prodotto de' due denominatori ; così $\frac{a}{b} + \frac{x}{y}$ farà $\frac{ay+xb}{by}$; $\frac{a}{b} - \frac{xx}{yy}$ farà $\frac{3a^2b-2xxyy}{3byy}$; $\frac{aa-xx}{m+n} - \frac{aa}{m}$ farà $\frac{aam-mxx-aam}{mm+mn}$, cioè $\frac{-mxx-aan}{mm+mn}$. Ma deveſi avvertire, che alle volte

i due denominatori delle frazioni poſſono avere un maſſimo comun diviſore , nel qual caſo è ſuperflua la moltiplicazione de' numeratori in eſſo maſſimo comun diviſore , e di eſſi comuni diviſori fra loro per formare un nuovo denominatore , perchè dovrebbeſi poi, ciò non oſtante , ridurre la frazione alla più ſemplice eſpreſſione ; quindi debbonſi moltiplicare i ſuddetti numeratori non per i denominatori, ma per i quozienti, che riſultano dal dividere eſſi denominatori per lo comune loro diviſore ; ed il denominatore farà il prodotto di eſſi quozienti, e del detto comun diviſore . Per eſempio ſia $\frac{a^2}{mn} + \frac{abb}{mx}$, riducendo al ſolito al comun denominatore, farebbe $\frac{a^2mx+abbn}{mmnx}$, cioè $\frac{a^2x+abbn}{mnx}$; adunque era ſuperfluo moltiplicare i nu-

mera-

meratori per m comun divisore de' denominatori, siccome era superfluo moltiplicare i denominatori fra loro, e bastava moltiplicare a^1 in x , ed abb in n per formare i numeratori, e moltiplicare m in n in x per formare il comune denominatore. Così per ridurre al comune denominatore $\frac{a^1 - b^1}{a + b} - \frac{aa}{a + b}$ basterà moltiplicare $-aa$ in $a + b$,

e sarà $\frac{a^1 - b^1 - aa}{a + b}$, cioè $\frac{-b^1 - a^1 b}{a + b}$. Similmente per

ridurre al comun denominatore $\frac{b^1}{acd - aad} + \frac{a^1 + b^1}{cd - dd}$, poichè

$c - d$ è comun divisore di ambi i denominatori, basterà moltiplicare b^1 per d , ed $a^1 + b^1$ per aa rispetto a' numeratori, e moltiplicare aa in d in $c - d$ rispetto al denominatore, e però sarà $\frac{b^1 d + a^1 + aab^1}{aad - aadd}$.

Se le frazioni da ridursi al comun denominatore fossero tre: Si riducano le prime due, indi si riduca la risultante da queste colla terza; e così successivamente se fossero più. Per ridurre al comun denominatore $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}$,

si riducano le prime due, e si avrà $\frac{ad + bc}{bd}$; e ridotta

questa con la terza sarà $\frac{adn + bcn - bdm}{bdn}$. Che se in

oltre vi fossero degli interi; poichè qualunque intero si può considerare, come una frazione, che abbia l'unità per denominatore, si procederà nello stesso mo-

E

do;

do ; così $2aa + \frac{3x^4 - 2y^4}{3xx - 2ax}$, cioè $\frac{2aa + 3x^4 - 2y^4}{3xx - 2ax}$ sarà

$$\frac{6aax - 16a^2x + 3x^4 - 2y^4}{3xx - 2ax}$$

Della Somma, e Sottrazione delle Frazioni.

32. Le frazioni si sommano con lo scriverle una presso dell'altra con que' segni, che hanno; ed all'opposto nella sottrazione si mutano i segni a quelle, che debbonfi sottrarre; e lo stesso facciasi se con le frazioni vi fossero degli' intieri. Per sommare $\frac{aa}{c}$ con $\frac{bb}{c}$, si scriva

$$\frac{aa + bb}{c}; \text{ per sommare } \frac{aa}{c} \text{ con } \frac{xx}{m} - y, \text{ si scriva } \frac{aa}{c} + \frac{xx}{m} - y,$$

che ridotta poi, se si vuole, al comun denominatore è $\frac{aam + cxx - cmy}{cm}$; per sommare $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$ con $\frac{aabb}{aa - bb}$,

si scriva $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4} + \frac{aabb}{aa - bb}$, che se in oltre si voglia ri-

durre al comun denominatore, si offervi, che il denominatore della prima è il quadrato di $aa - bb$; adunque i denominatori hanno il massimo comun divisore $aa - bb$; e per esso divisi, i quozienti sono $aa - bb$ del primo, e l'unità del secondo, e però basterà moltiplicare il numeratore della seconda frazione per $aa - bb$, e dividere il tutto per $a^4 - 2aabb + b^4$, e sarà $\frac{aab^4 + a^2bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$,

cicè

cioè $\frac{a^2bb}{a^2 - 2abb + b^2}$. Per sottrarre $\frac{bb}{c}$ da $\frac{aa}{c}$ si scriva $\frac{aa - bb}{c}$.

Per sottrarre $\frac{a - xx}{m}$ da $\frac{yy}{m - n}$ si scriva $\frac{yy - a + xx}{m - n}$, e riducendo, se si vuole, al comun denominatore $\frac{myy - amn}{mm - mn}$.

+ $\frac{amn + mxx - nxx}{mm - mn}$. Per sottrarre $\frac{b^2}{4ac - 4ad}$ da $\frac{a^2 + b^2}{2cd - 2dd}$ si scriva $\frac{a^2 + b^2 - b^2}{2cd - 2dd}$, e volendo ridurre al comune

denominatore si moltiplicherà $a^2 + b^2$ per $2aa$, e $-b^2$ per d , ed il tutto si dividerà per $4aacd - 4aad^2$, e farà $\frac{2a^3 + 2aab^2 - b^2d}{4aacd - 4aad^2}$.

Della Moltiplicazione delle Frazioni.

33. Si moltiplicano i numeratori fra loro, e lo stesso si fa de' denominatori, e la nuova frazione è il prodotto delle frazioni moltiplicate. Così per moltiplicare $\frac{ac}{b}$

in $\frac{be}{d}$ si scriva $\frac{abc^2}{bd}$, che si riduce ad $\frac{acc}{d}$; per moltiplicare

re $\frac{2ab}{b+c}$ in $\frac{3aa - bb}{sc}$ si scriva $\frac{6a^2b - 2ab^2}{5bc + 5cc}$. Lo stesso si faccia

se vi sieno interi considerando l'intero, come una frazione, il di cui denominatore sia l'unità; così per moltiplicare $2a$ in $\frac{xx - 3yy}{3x}$ si faccia $\frac{2axx - 6ayy}{3x}$.

Debbasi moltiplicare $\frac{aa+bb}{a-b}$ in $a-b$. In questi, e simili casi, giacchè la quantità, che deve moltiplicare, è la stessa del denominatore della frazione, basterà cancellare il denominatore, ed il prodotto sarà $aa+bb$; debbasi moltiplicare $aa-bb$ in $\frac{aa-ab}{a+b}$: si osservi, che $aa-bb$ è $a+b \times a-b$, e però si verrebbe a moltiplicare $aa-ab$ in $a+b$ in $a-b$ per indi dividere per $a+b$; adunque giacchè $a+b$ sarebbe un comun divisore del numeratore, e denominatore, che risulterebbe, si potrà omettere e la moltiplicazione, e la divisione per esso $a+b$, bastando che si moltiplichi il numeratore per $a-b$, ed il prodotto sarà $a^3 - 2aab + abb$. Così il prodotto di $\frac{a^3 - abb}{xx - yy}$ in $\frac{a^3}{aa - bb}$ sarà $\frac{a^4}{xx - yy}$.

Della Divisione delle Frazioni.

34. La divisione delle frazioni si farà moltiplicando in croce, cioè moltiplicando il numeratore del dividendo nel denominatore del divisore, e questo prodotto sarà il numeratore della frazione, che deve essere il quoziente; indi moltiplicando il denominatore del dividendo nel numeratore del divisore, ed il prodotto sarà il denominatore del quoziente. Questo quoziente poi, se farà bisogno, si ridurrà all'espressione più semplice. Debbasi dividere $\frac{ab}{c}$ per

per $\frac{m}{n}$, farà il quoziente $\frac{abn}{cm}$; debbasi dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{-m}{n}$, farà $\frac{abn}{-cm}$, o sia $-\frac{abn}{cm}$, che è lo stesso, numero 13.; debbasi dividere $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$ per $\frac{aa - ab + bb}{c}$, farà $\frac{a^3 c - b^3 c}{a^3 + b^3}$.

E' chiaro il vedere, che se le due frazioni, cioè dividendo, e divifore, avessero il medesimo denominatore, farebbe superflua la moltiplicazione in croce, come se si volesse dividere $\frac{aa}{m}$ per $\frac{c - d}{m}$, bastando in questo caso dividere aa per $c - d$; poichè moltiplicando in croce farebbe $\frac{aam}{cm - dm}$, ma riducendo alla minima espressione farà $\frac{aa}{c - d}$.

Così dividendo $\frac{a^3 - abb}{c - d}$ per $\frac{aa + 2ab + bb}{c - d}$, farà $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$; ma riducendola, poichè il numeratore è $a \times a + b \times a - b$, ed il denominatore è $a + b \times a + b$, farà $\frac{aa - ab}{a + b}$. Isteffa-

mente si operi dividendo intiero per frazione, o frazione per intiero, considerando l'intiero come una frazione, il di cui denominatore sia l'unità; così dividendo per $\frac{2yy - 3xy}{3a}$ la quantità $aa - xx$, farà $\frac{3a^3 - 3axx}{2yy - 3xy}$.

Dell' Estrazione delle Radici dalle Frazioni.

35. Si estraie la radice dalle frazioni con lo estraere la radice dal numeratore, ed indi dal denominatore; e' questa

questa nuova frazione sarà la radice della frazione proposta. La radice quadrata di $\frac{aabb}{ce}$ sarà adunque $\frac{ab}{c}$; la radice quadrata di $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + ab + bb}$ sarà $\frac{aa - bb}{a + b}$; la radice quadrata di $\frac{4aa^3 + 64xx^3 - 160aax}{25}$, cioè di $\frac{100aa^3 + 64xx^3 - 160aax}{25}$ sarà $\frac{10a - 8x}{5}$. Lo stesso dicasi delle radici cube, quarte, quinte ec.

Ma se non si potrà estrarre la radice dal numeratore, e denominatore, bensì da uno de' due; si estraiga da quello, da cui si può, ed all' altro si ponga il segno radicale. Così la radice cuba di $\frac{a^6}{a^3 - x^3}$ sarà $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3 - x^3}}$, la radice cuba di $\frac{aax - x^3}{a^3 b^3}$ sarà $\frac{\sqrt[3]{aax - x^3}}{ab}$. E se nè dal numeratore, nè dal denominatore si potrà estrarre essa radice, si porrà tutta la frazione sotto al vincolo radicale; così la radice quadrata di $\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}$ sarà $\sqrt{\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}}$.

Del massimo comun Divisore di due Quantità, o Formole.

36. Per formola s'intende una qualunque espressione analitica incomplessa, o complessa, le di cui lettere facendo figura d'indeterminate possono essere quelle, che più si vuole per modo, che tutto ciò, che di essa formola si dica, s'intenda

da detto di qualunque altra d'altre lettere composta, ma ad essa simile.

Per avere il massimo comun divisore di due quantità, o formole: In primo luogo si offervi, se ciascun termine d'ambedue fosse moltiplicato per una medesima quantità, o numero; nel qual caso per esso si faccia la divisione, indi si ordini l'una, e l'altra formola secondo una qualunque lettera a piacere; cioè si ponga per primo termine quello, in cui essa lettera è alla maggiore dimensione, ed indi gli altri per ordine. Sieno le due formole

$$18a^3bx - 8a^4b - 3abx^3 - 8a^3bxx + bx^4 \quad \text{le quali, poichè}$$

$$6a^3b + bx^3 - abxx - 8a^3bx$$

sono divisibili per la lettera b , divise ed ordinate, se così piace, per la lettera x sono $x^4 - 3ax^3 - 8a^2xx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8a^2x + 6a^3$. Ciò fatto, la prima, cioè quella in cui la lettera x , che ordina i termini, è alla maggior dimensione, si divida per la seconda dicendo x^4 diviso per x^3 dà di quoziente x , ed il prodotto di questo quoziente nel divisore si sottragga dal dividendo, e si avrà il primo resto $-2ax^3 + 12a^2x - 8a^4$, che si riduca all'espressione più semplice (come sempre deve farsi) dividendolo per $-2a$, e sarà $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. E perchè la dimensione della x in questo residuo è la stessa del divisore, con lo stesso divisore si divida esso residuo, da cui istessamente sottraggasi il prodotto del quoziente nel divisore, e si avrà il secondo residuo $axx + 2a^2x - 2a^3$, cioè, dividendolo per a , $xx + 2ax - 2a^2$. Ora poichè in questo resi-

duo

duo la dimensione della x è minore che nel divisore, s'inverta l'ordine, e si faccia servire questo residuo di divisore, ed il divisore primo di dividendo, e fatta la divisione, si sottragga il prodotto del quoziente nel secondo divisore dal secondo dividendo, cioè da $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e sarà il residuo $-3axx - 6aax + 6a^3$, cioè dividendo per $-3a$, $xx + 2ax - 2a$; e perchè quest'ultimo residuo è lo stesso del divisore, sarà esso il massimo comun divisore delle due formole $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e questo moltiplicato in b , cioè $bxx + 2abx - 2aab$ sarà il massimo comune divisore delle due formole da prima proposte $bx^4 - 3abx^3 - 8aabxx + 18a^3bx - 8a^4b$; $bx^3 - abxx - 8aabx + 6a^3b$, le quali furono divise per b .

Sieno le due formole $x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4$; $x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4$ ordinate, per la lettera x , la quale essendo alla stessa dimensione, nell'una, e nell'altra, è arbitrario di prendere quella, che si vuole, per divisore. Si divida adunque la prima per la seconda, e sottratto dal dividendo il prodotto del quoziente nel divisore, sarà il primo residuo $-ax^3 - aaxx - 4a^3x - 12a^4$, cioè dividendo per $-a$, $x^3 + aax + 4aax + 12a^3$. Qui invertendo l'ordine si prenda questo residuo per divisore, ed il primo divisore per dividendo; fatta la divisione, e sottrazione del prodotto del quoziente in questo secondo divisore dal secondo dividendo, sarà il secondo residuo $-4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4$; cioè

divi-

dividendo per $-4a$, $x^3 - 2axx + 7aax - 6a^3$. Con lo stesso secondo divisore si continovi la divisione di questo secondo residuo, e fatta la sottrazione al solito, si avrà il terzo residuo $-3axx + 3aax - 18a^3$, cioè dividendo per $-3a$, $xx - a x + 6aa$. Si inverta di nuovo l'ordine, e per questo terzo residuo si divida il secondo divisore, $x^3 + axx + 4aax + 12a^3$, e fatta la sottrazione al solito, si troverà il residuo $2axx - 2aax + 12a^3$, cioè dividendo per $2a$, $xx - ax + 6aa$, che è la stessa quantità di quella, che â servito di divisore; e però il massimo comune divisore delle due proposte formole.

Sieno le due formole $f^3 - aaff - bbf + aabb$; $f^3 - aff - 2abf + 2aab$ ordinate per la lettera f . Si divida la prima per la seconda, ed il prodotto del quoziente f nel divisore sottratto dal dividendo darà il residuo primo $af^3 - aaff + 2abff - bbf - 2aaf + aabb$, che si proseguisca a dividere per lo stesso divisore, e sottratto il prodotto del divisore nel quoziente a dal dividendo, si avrà il secondo residuo $2abff - bbf - 2a^3b + aabb$, cioè dividendo per b , $2aff - bff - 2a^3 + aab$; si inverta l'ordine, e per questo secondo residuo si divida il primo divisore $f^3 - aff - 2abf + 2aab$, e fatto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2a-b}$ nel detto

residuo, che â servito ora di divisore, ed indi fatta la sottrazione, si avrà il terzo residuo $-aff + aaf - 2abf + 2aab$, cioè dividendo per $-a$, $ff - af + 2bf - 2ab$. Con lo stesso ordine si continovi la divisione, e sottratto il prodotto del

quoziente $\frac{1}{2a-b}$ nel divisore $2aff - bff + aab - 2a^3$, si à il

quarto residuo $-af + 2bf - 2ab + aa$, per cui, invertendo pure l'ordine, si divida il terzo residuo, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2b-a}$ nel divisore, si avrà il quinto re-

siduo $2bf - 2ab$, cioè dividendolo per $2b, f - a$; esso si divida per il quarto residuo $-af + 2bf - 2ab + aa$, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{1}{2b-a}$ nel divisore, rimane

nulla; quindi se per lo denominatore dell'ultimo quoziente, essendo una frazione, si dividerà l'ultimo divisore, $-af + 2bf - 2ab + aa$, farà il quoziente $f - a$ il massimo divisore delle due formole proposte; ma perchè era arbitrario di eleggere per divisore quello, che si è eletto per dividendo, e vicendevolmente, cioè si poteva anche dividere $-af + 2bf - 2ab + aa$ per $f - a$, si faccia attualmente la divisione, ed il quoziente sarà $2b - a$ senza residuo, e però $f - a$ il massimo comune divisore, come si è già ritrovato per mezzo dell'altra divisione.

Possono però due formole avere un massimo comune divisore, quantunque essendo esse ordinate secondo una tal lettera, non possa in questo modo ritrovarsi, nel qual caso fa d'uopo ordinarle secondo altra lettera fino, che ci venga fatto di ritrovarlo; che se fatta la prova ordinandole secondo ciascuna lettera, non ci riesce l'intento, non averanno esse un massimo comune divisore; così non ritroverassi nelle due formole di quest'ultimo esempio ordinandole

mandole secondo la lettera *b*, che però si è ritrovato avendole ordinate secondo la lettera *f*.

Le tre frazioni adunque

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2xx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x + 6a^3}$$

$$\frac{x^4 - 4ax^3 + 11a^2xx - 20a^3x + 12a^4}{x^3 - 3ax^2 + 12a^2xx - 16a^3x + 24a^4}$$

$$\frac{f^3 - aff - bbf + abb}{f^3 - aff - 2abf + 2aab}$$

dividendo il numeratore, e denominatore della prima per $xx + 2ax - 2aa$; della seconda per $xx - ax + 6aa$; e della terza per $f - a$, verranno ad essere

La Prima
$$\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$$

La Seconda
$$\frac{xx - 3ax + 2aa}{xx - 2ax + 4aa}$$

La Terza
$$\frac{f^3 + aff - bbf - abb}{ff - 2ab}$$

Ridotte così all'espressione più semplice, come dissi di sopra al numero 30.

Della Riduzione delle Quantità irrazionali alla più semplice espressione.

37. Si è veduto, come nascano le quantità irrazionali, che forse ancora, o radicali si chiamano; cioè quando attualmente non si può estrarre la radice, che si cerca, e però si fa uso del vincolo radicale. Ma spesso volte accade, che la quantità sotto al vincolo sia il prodotto di due moltiplicatori, uno de' quali sia appunto una potenza dello stesso nome della radice, che si vuole; come sarebbe $\sqrt{aabc}$, o $\sqrt{aab - aax}$, la prima delle quali è la radice quadrata del prodotto di aa in bc , la seconda del prodotto di aa in $b - x$; così pure $\sqrt{a^3x - a^3y}$, che è la radice cuba del prodotto di a^3 in $x - y$. In questi casi si cava la radice da quel moltiplicatore, da cui si può, e si scrive fuori del segno radicale lasciando l'altro sotto il segno, e ciò diceasi cavare la radice in parte, o sia ridurre la radicale alla più semplice espressione. Adunque $\sqrt{aabc}$ sarà lo stesso, che $a\sqrt{bc}$; $\sqrt{aab - aax}$ lo stesso, che $a\sqrt{b - x}$; $\sqrt{a^3x - a^3y}$ lo stesso, che $a\sqrt{a^2x - a^2y}$; e così dell'altre. Similmente poichè $\sqrt{48aabc}$ è la radice del prodotto di $16aa$ in $3bc$, ridotta sarà $4a\sqrt{3bc}$; così poichè $\sqrt{a^3b - 4aab + 4ab^3}$ è la radice del prodotto di $a^3 -$

$-4ab+4bb$ in ab , e la radice di $aa-4ab+4bb$ è $a-2b$; farà la radice ridotta $\frac{a-2b}{c} \sqrt[3]{ab}$. Così $\sqrt[3]{\frac{aammxx+4aam^3p}{ppxz}}$ ridotta farà $\frac{am}{p^2} \sqrt[3]{xx+4mp}$. Così $\sqrt[3]{8a^3b+16a^2}$ ridotta farà $2a \sqrt[3]{b+2a}$. Così $\sqrt[3]{a^3-3aab+3abb-b^3}$, che è la radice del prodotto di $aa-2ab+bb$ in $a-b$, ridotta, farà $a-b \sqrt[3]{a-b}$. Ma molte volte non si può colla sola ispezione riconoscere, quali sieno que' moltiplicatori, dai quali è nata la proposta radicale; in questi casi bisogna servirsi del metodo di ritrovare tutti i divisori, che darò a suo luogo, e se fra questi ve ne farà uno, che sia appunto una potestà di tale esponente, quale è l'indice del radicale, si potrà ridurre nel modo, che è stato detto, la quantità proposta.

Del Ridurre i Radicali alla stessa Denominazione.

38. Si chiamano radicali di diversa denominazione quelli, che hanno l'indice diverso. Per ridurgli adunque a' radicali dello stesso indice si farà così: Se l'indice d'un radicale è parte aliquota dell'indice dell'altro, si divide l'indice maggiore per il minore, ed il quoziente è quella potestà, a cui si debbono elevare le quantità, che sono sotto il radicale d'indice minore, ed a queste prefiggere il radicale dell'indice maggiore. Sieno da ridursi allo stesso radicale le due quantità $\sqrt[3]{ax}$, o sia (che è lo stesso)

fo) $\sqrt[4]{ax}$, e $\sqrt{a}$; poichè il quattro diviso per due dà di quoziente due, elevata la quantità a del secondo radicale al quadrato, sarà $\sqrt{aa}$, e però ridotta alla stessa denominazione di $\sqrt[4]{ax}$. Così $\sqrt[4]{a^3b^3+ab^3}$, e $\sqrt{ab}$ faranno $\sqrt[4]{a^3b^3+ab^3}$, e $\sqrt[4]{a^3b^3}$. Ma se un indice non è parte aliquota dell' altro; si trovi il minimo numero, che sia divisibile senza frazione da ciascun indice de' radicali dati, e questo sarà l'indice del radicale comune; indi si elevino le quantità al grado prossimamente inferiore del numero, per cui sono cresciuti gl'indici dei loro rispettivi radicali, e ad esse così elevate si prefigga il radicale comune ritrovato. Siano da ridursi allo stesso comune radicale le due quantità $\sqrt{aq}$, e $\sqrt[3]{aaq}$; il minimo numero divisibile per 2, e per 3 sarà 6, adunque $\sqrt[6]{}$ sarà il comune radicale, e perchè l'indice della radice quadrata è cresciuto in questo caso di quattro, e quello della cubica di tre; adunque si farà rispetto alla prima $\sqrt[6]{a^4q^3}$, e per la seconda $\sqrt[6]{a^2qq}$. Se i radicali da ridursi fossero più di due; se ne riducano prima due, e poi il terzo, e così successivamente.

E' chiaro il modo di ridurre senza ajuto di regola, i razionali a qualunque radicale elevando il razionale alla potestà dello stesso nome, o indice del radicale, e prefiggendogli lo stesso radicale.

Della Somma, e Sottrazione delle Quantità radicali.

39. Per sommarle si scrivano le quantità radicali una dopo l'altra co' loro segni, e per sottrarle si mutino i segni a quelle, che si vogliono sottrarre, come si è fatto nell'altre quantità. Così per sommare $5a\sqrt{bc}$ con $2b\sqrt{bx}$ con $-c\sqrt{zy}$, si scriva $2b\sqrt{bx} + 5a\sqrt{bc} - c\sqrt{zy}$. Per sommare $5x\sqrt{ab}$ con $3x\sqrt{ab}$ con $y\sqrt{bx}$, si scriva $5x\sqrt{ab} + 3x\sqrt{ab} + y\sqrt{bx}$, e riducendo i termini simili, il che sempre si deve fare, sarà $8x\sqrt{ab} + y\sqrt{bx}$. Per sommare $a-b$ con $\sqrt{aa-xx}$, si scriva $a-b + \sqrt{aa-xx}$. Lo stesso, avuto riguardo ai segni, si faccia nelle sottrazioni.

Della Moltiplicazione delle Quantità radicali.

40. Per moltiplicare quantità razionale con sorda o radicale si scrive la razionale unitamente alla radicale, senza alcun segno frapposto, prefiggendo a questo prodotto quel segno positivo, o negativo, che porta la regola ordinaria dell'a moltiplicazione, la qual cosa intendasi sempre doverfi fare. Il prodotto adunque di a in $\sqrt{aa-xx}$ sarà $a\sqrt{aa-xx}$, ed il prodotto di ab in $-\sqrt{ab}$ sarà $-ab\sqrt{ab}$. E se le quantità razionali, e radicali fossero di più termini, cioè complesse, si moltiplichino ciascun termine dell'una in ciascun termine dell'altra, e però il pro-

prodotto di $aa - xx$ in $\sqrt{xx - yy}$ farà $aa\sqrt{xx - yy} - xx\sqrt{xx - yy}$, che si scrive anche così $aa - xx\sqrt{xx - yy}$ intendendo, che sieno moltiplicati nel radicale que' termini, che sono coperti al di sopra dalla retta linea.

41. Per moltiplicare i radicali fra loro (supposto, che sieno della medesima denominazione, e non lo essendo tali si riducano) si moltiplicano fra loro le quantità, che sono sotto i segni radicali, ed al prodotto si pone lo stesso vincolo radicale con quel segno positivo, o negativo, che esigge la solita regola. Quindi moltiplicando $\sqrt{bc}$ in $\sqrt{xy}$, il prodotto sarà $\sqrt{bcxy}$; moltiplicando $\sqrt{aa - xx}$ in $-\sqrt{aa + xx}$, il prodotto sarà $-\sqrt{a^2 - x^2}$.

42. Che se in oltre i radicali averanno coefficienti razionali numerici, o letterali, si moltiplichino i coefficienti fra loro, ed i radicali fra loro, ed il prodotto de' coefficienti si ponga senza segno frapposto avanti al radicale. Così $a\sqrt{bbc}$ in $a\sqrt{bxx}$ farà $aa\sqrt{b^2cxx}$, cioè ridotta, $aab\sqrt{cxx}$; così $2a - \sqrt{aa - xx}$ in $b\sqrt{aa + xx}$ farà $2b\sqrt{aa + xx} - b\sqrt{a^2 - x^2}$.

43. Con questa regola per moltiplicare $m\sqrt{ab}$ in $n\sqrt{ab}$ si dovrebbe fare $mn\sqrt{aabb}$; ma $aabb$ è un quadrato, e la radice è appunto ab , adunque per moltiplicare tra loro due radicali quadratici simili, basterà le-

vare

vare il vincolo radicale, e la quantità, che era sotto, moltiplicata nel prodotto de' coefficienti farà il prodotto totale, e però $\frac{2b}{a} \sqrt{ax-xx}$ in $-\frac{c}{3} \sqrt{ax-xx}$

farà $-\frac{2bc}{3a} \times \sqrt{ax-xx}$, cioè $-\frac{2bcx+2bcxx}{3a}$. Ma de-

vesti avere questa avvertenza, che se le radici, non avendo coefficienti, sono affette dallo stesso segno positivo, o negativo, levato il vincolo, si lasciano le quantità con que' segni, che hanno; e se le radici hanno segni contrarj, si mutano tutti i segni alla quantità; e però

$\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$, o pure $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$

farà $\frac{aa-xx}{x}$; e $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ farà $-\frac{aa+xx}{x}$,

o $\frac{aa-xx}{-x}$. La ragione si è, perchè $\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ (e

così di qualunque altra) s'intende avere sempre per coefficiente l'unità positiva, e $-\sqrt{\frac{aa-xx}{x}}$ l'unità nega-

tiva, adunque il prodotto dovrà essere $1 \times \frac{aa-xx}{x}$ nel primo caso, e $-1 \times \frac{aa-xx}{x}$ nel secondo.

Ecco però alcuni esempj di queste moltiplicazioni

Moltiplicare $\sqrt{ab} + \sqrt{aa-xx}$
in $\sqrt{ab} + \sqrt{aa-xx}$

G

Pro-

Prodotto $ab + \sqrt{a^3b - abxx + aa - xx}$

$$+ \sqrt{a^3b - abxx}$$

cioè $ab + 2\sqrt{a^3b - abxx + aa - xx}$

Moltiplicare $x - \sqrt{\sqrt{4a^2 + y^2} - yy}$

in $x + \sqrt{\sqrt{4a^2 + y^2} - yy}$

Prodotto $xx - x\sqrt{\sqrt{4a^2 + y^2} - yy} - \sqrt{4a^2 + y^2} + yy$

$$+ x\sqrt{\sqrt{4a^2 + y^2} - yy}$$

cioè $xx - \sqrt{4a^2 + y^2} + yy$

Moltiplicare $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}$

in $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}$

Prodotto $\sqrt[3]{\frac{1}{2}qq + q} \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} + \frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}$

cioè $\sqrt[3]{\frac{1}{2}qq + q} \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} - \frac{pp}{27}$

44. Poichè $a\sqrt{ax}$, $a-b\sqrt{ax-xx}$ ec. è il prodotto della quantità razionale nella radicale, e già si fa ridurre qualunque razionale a quel radicale, che più piace, ne viene che si potrà sempre, volendolo, far passare sotto la radice quel razionale, che la moltiplica, senza alterare la quantità, e però sarà $a\sqrt{a-xx}$ lo stesso, che $\sqrt{a^2-aax}$; $a-b\sqrt{xy}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{aaxy-2abxy+bbxy}$; $ax\sqrt{m-n}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{a^2x^2m-a^2x^2n}$, e così di qualunque altra.

45. Se i radicali da moltiplicarsi non fossero dello stesso nome, tali si riducano, e poi si faccia la moltiplicazione, come si è detto; ma molte volte torna comodo l'indicarla solamente senza attualmente farla, e ciò con lo scrivere un radicale presso l'altro senza alcun segno frapposto; quindi $\sqrt{aa-xx} \sqrt{xy}$ vorrà dire il prodotto di una nell'altra radice.

Della Divisione delle Quantità radicali.

46. Se in ciascun termine del dividendo, e del divisore vi fosse la stessa radicale, ommessa questa, si dividano colla solita regola le quantità razionali, e ciò che risulta sarà il quoziente. Così a dividere $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, il quoziente sarà $\frac{5}{3}$; a dividere $6\sqrt{a^2+abb}$

per $2\sqrt{aabb+b^2}$, cioè $6a\sqrt{aa+bb}$ per $2b\sqrt{aa+bb}$,
 il quoziente sarà $\frac{3a}{b}$; a dividere $aa\sqrt{aa+xx}-$
 $-2ax\sqrt{aa+xx}+xx\sqrt{aa+xx}$ per $a\sqrt{aa+xx}-$
 $-x\sqrt{aa+xx}$, ommesso il radicale, e diviso $aa-2ax+xx$
 per $a-x$, farà il quoziente $a-x$; a dividere $aa+bb$
 per $\sqrt{aa+bb}$, poichè il dividendo è $\sqrt{aa+bb}\sqrt{aa+bb}$,
 farà il quoziente $\sqrt{aa+bb}$.

47. Ma quando le radicali non sono le stesse, ef-
 sendo per altro lo stesso l'indice della radice, si divi-
 dono al solito delle quantità razionali le quantità sotto
 il vincolo, ed al quoziente si prefigge il comune vin-
 colo radicale; così a dividere $\sqrt[3]{a^3b-ab^3}$ per
 $\sqrt[3]{aa-bb}$, diviso a^3b-ab^3 per $aa-bb$, ne viene ab ;
 e però il quoziente sarà $\sqrt[3]{ab}$.

48. E se gl'indici delle radici faranno diversi, si
 riducano allo stesso, e si operi poi come ho detto,
 onde a dividere $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$ si
 faccia il quadrato di $a+b$, e si ponga sotto al vincolo,
 farà $\sqrt{aa+2ab+bb}$; indi per la quantità di questa ra-
 dice si divida la prima, e risulta $aa-bb$; adunque il
 quoziente sarà $\sqrt{aa-bb}$.

Con la combinazione di queste regole, e di quelle
 dell'ordinaria divisione si possono dividere le quantità
 più

più complesse. Sia da dividersi $a^2b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$, si faccia al solito delle divisioni

Dividendo $a^2b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ Divisore $a - \sqrt{bc}$
 Primo resto $-abbc + bbc\sqrt{bc}$ Quoziente $aab - bbc$

Così pure dividendo $a^2abc + aa\sqrt{bc} - bc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$ averassi per quoziente $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$. E se la divisione non potrà succedere, si scriverà in forma di frazione.

Dell' Estrazione della Radice quadrata dalle Quantità radicali .

49. Purchè la quantità in qualunque modo composta di razionali con radicali sia di radicali quadratici, la regola di estrarne la radice quadrata farà questa: Presa della quantità proposta una qualunque parte, che sia maggiore della rimanente, dal quadrato della parte maggiore si sottragga il quadrato della parte minore, e la radice quadrata di ciò, che resta, si aggiunga alla parte maggiore, indi da essa si sottragga; le radici quadrate della metà di questa somma, e della metà di questa differenza prese assieme, posto quel segno alla seconda che à la parte minore, saranno la radice quadrata della proposta quantità. Debbasi cavare la radice quadrata dalla quantità $3 + \sqrt{8}$, sottratto il

qua-

quadrato di $\sqrt{8}$ dal quadrato di 3, rimane 1, la di cui radice è pure 1; aggiungendola adunque alla parte maggiore, cioè a 3, farà 4, e dalla stessa sottraendola farà 2, adunque la radice quadrata della metà del 4 con la radice quadrata della metà del 2 faranno la radice cercata, cioè $\sqrt{2+1}$.

Vogliasi la radice quadrata di $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$. Dal quadrato di $6+\sqrt{8}$ sottratto il quadrato di $-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, rimane 8, la di cui radice $\sqrt{8}$ aggiunta a $6+\sqrt{8}$, parte maggiore, fa $6+2\sqrt{8}$, e da essa parte maggiore sottratta fa 6; e però la prima parte della radice cercata sarà $\sqrt{\frac{6+2\sqrt{8}}{2}}$, cioè $\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}$, e la seconda $-\sqrt{\frac{6}{2}}$, cioè $-\sqrt{3}$ (perchè la minor parte della quantità proposta era affetta dal segno negativo) onde $\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}-\sqrt{3}$ farà la radice. Ma nell' antecedente esempio si è veduto essere $\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}$ lo stesso, che $1+\sqrt{2}$; adunque la radice della proposta quantità farà finalmente $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Debbasi estrarre la radice quadrata da $aa+2x\sqrt{aa-xx}$. Sottratto dal quadrato di aa il quadrato di $2x\sqrt{aa-xx}$, farà $a^4-4aaxx+4x^4$, la di cui radice è $aa-2xx$, la quale aggiunta alla parte maggiore aa , e presa la metà, farà $aa-xx$, e da essa sottratta, e presa la metà della differenza, farà xx ; adunque la ricercata radice farà $\sqrt{aa-xx}+x$.

Deb-

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$. Dal quadrato di $aa + 5ax$, parte maggiore, sottratto il quadrato di $-2a\sqrt{ax + 4xx}$, rimane $a^4 + 6a^3x + 9a^2xx$, la di cui radice è $aa + 3ax$, la quale aggiunta alla parte maggiore, e presane la metà, fa $aa + 4ax$, e sottratta e presane la metà, fa ax ; e però la radice cercata sarà $\sqrt{aa + 3ax - \sqrt{ax}}$.

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc} + 2\sqrt{abcd}$. Dal quadrato di $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc}$ sottratto il quadrato di $2\sqrt{abcd}$, rimane $aabc - 2abcd + bcdd$, la di cui radice è $a\sqrt{bc} - d\sqrt{bc}$, la quale aggiunta alla parte maggiore, ed indi sottratta, e presa la metà della somma e della differenza, farà la metà di detta somma $a\sqrt{bc}$, e la metà di detta differenza $d\sqrt{bc}$; adunque la radice cercata sarà $\sqrt{a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc}}$, cioè $\sqrt[4]{aabc} + \sqrt[4]{bcdd}$, o sia $\sqrt[4]{aabc} + \sqrt[4]{bcdd}$. Che se non succederà di poter estrarre la radice, si porrà al solito il vincolo radicale.

Del Calcolo delle Potestà.

50. Nulla occorre notare intorno alla somma, e sottrazione delle Potestà, scrivendosi esse pure una dopo l'altra con que' segni che hanno, nel primo caso, e mutandosi i segni nel secondo. Ma rispetto all'altre,
ope-

operazioni, che riguardano gli esponenti: Si offervi primieramente, che presa l'unità per primo termine, ed una qualunque quantità, per esempio a , per secondo, indi successivamente le altre potestà per ordine della stessa quantità a , è chiaro che formerassi una progressione geometrica crescente $1, a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6$ ec., e che gli esponenti di essa progressione formeranno una progressione aritmetica crescente, che sarà $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ec., il di cui primo termine è il zero, perchè essendo l'unità il primo termine della geometrica, in esso la quantità a è elevata a potestà zero, cioè a nessuna potestà di modo, che $1 = a = a^0$. In fatti moltiplicando tanto $\frac{a}{a}$, quanto a^0 per $\frac{a}{a}$, onde non si turbi l'eguaglianza, sarà $a = a^{0+1}$, grandezze patentemente identiche. E se in oltre si continuerà la stessa progressione geometrica al di sotto dell'unità, sarà essa $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ ec.; e continuando parimenti la progressione aritmetica degli esponenti, essi doveranno essere $0, -1, -2, -3, -4$ ec.; e però negativi gli esponenti di tali potestà, adunque $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ ec. sarà lo stesso, che a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} ec., e generalmente $\frac{1}{a^n}$ sarà lo stesso, che a^{-n} ; vale a dire, che si potrà sempre far passare nel numeratore di una frazione la potestà, che è

è nel denominatore, mutando il segno all'esponente, e vicendevolmente.

51. Se di più si volessero introdurre nella progressione geometrica de' nuovi termini intermedj, gli esponenti di questi faranno nuovi termini intermedj simili nella progressione aritmetica; quindi poichè $\sqrt{a}$ è media geometrica fra l'unità ed a , l'esponente di essa dovrà essere medio aritmetico fra il zero e l'unità; e però farà $\frac{1}{2}$, adunque farà lo stesso $\sqrt{a}$ ed $a^{\frac{1}{2}}$. Se intendansi due medie proporzionali geometriche, che sono $\sqrt[3]{a}$ la prima, e $\sqrt[3]{aa}$ la seconda, dovranno essere medj aritmetici i loro esponenti fra il zero e l'unità, e però faranno $\frac{1}{3}$, e $\frac{2}{3}$; adunque farà lo stesso $\sqrt[3]{a}$ ed $a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{3}}$. Se introdurransi tre medie proporzionali geometriche, che sono $\sqrt[4]{a}$ la prima, $\sqrt[4]{aa}$ la seconda, $\sqrt[4]{a^3}$ la terza, dovranno essere i loro esponenti $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$. Adunque farà lo stesso $\sqrt[4]{a}$ ed $a^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{4}}$, $\sqrt[4]{a^3}$ ed $a^{\frac{3}{4}}$; e così discorrendo di quante altre medie si vogliano introdurre, onde farà lo stesso generalmente $\sqrt[m]{a^n}$ ed $a^{\frac{n}{m}}$.

Lo stesso discorso facendo rispetto alla progressione prodotta al di sotto dell'unità; siccome $\sqrt{a}$ è media tra l'unità ed $\frac{1}{a}$, o sia tra l'unità ed a^{-1} , così l'esponente

di essa dovrà essere medio tra il zero e l'unità negativa; farà egli adunque $-\frac{1}{2}$, e però farà lo stesso $\sqrt[1]{a}$, ed $a^{-\frac{1}{2}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; così pure farà lo stesso $\sqrt[1]{a}$ ed $a^{-\frac{1}{1}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{1}}}$; farà lo stesso $\sqrt[1]{aa}$ ed $a^{-\frac{1}{1}}$, ovvero $\frac{1}{a^{\frac{1}{1}}}$ ec.; e generalmente farà lo stesso $\sqrt[m]{a^n}$ ed $a^{-\frac{n}{m}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$.

Ciò, che ho detto delle potestà intiere, o rotte di quantità incomplete, s'intenda egualmente di quantità complete, di modo che, per esempio $\frac{1}{aa+bb}$

farà lo stesso, che $\frac{1}{aa+bb}^{-n}$; e così $\sqrt[m]{\frac{1}{aa+bb}^n}$ farà lo stesso, che $\frac{1}{aa+bb}^{\frac{n}{m}}$; e $\sqrt[m]{\frac{1}{aa+bb}^n}$ farà lo stesso, che $\frac{1}{aa+bb}^{\frac{n}{m}}$, o pure $\frac{1}{aa+bb}^{-\frac{n}{m}}$.

52. Dalla natura delle due soprapposte progressioni, geometrica, ed aritmetica, si ricava la maniera di moltiplicare tra loro, e dividere due potestà, quali si sieno, della medesima quantità, cioè sommando gli esponenti loro quando vogliono moltiplicarsi le potestà, e sottraendo l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo quando vogliono dividersi. Imperciocchè per ciò, che spetta alla moltiplicazione; comechè il pro-

dotto

dotto è il quarto proporzionale dell'unità , e de' due moltiplicatori , faranno questi quattro termini in una progressione geometrica , e gli esponenti loro in una progressione aritmetica ; adunque l'esponente del quarto , cioè del prodotto , deve essere maggiore dell'esponente del terzo di quanto l'esponente del secondo è maggiore dell'esponente del primo ; ma l'esponente del secondo è maggiore dell'esponente del primo , che è il zero , di tutto se stesso ; adunque l'esponente del quarto dovrà essere maggiore dell'esponente del terzo , quanto è l'esponente del secondo , cioè dovrà essere la somma dell'esponente del secondo , e del terzo . Per ciò , che riguarda la divisione ; ella è la stessa proporzione della moltiplicazione , ma inversa , il di cui primo termine è il dividendo ; il secondo il divisore ; il terzo il quoziente ; ed il quarto l'unità , onde quanto l'esponente del dividendo è maggiore dell'esponente del divisore , tanto dovrà essere maggiore del zero l'esponente del quoziente , e però dovrà essere appunto la differenza degl'esponenti del dividendo , e divisore . Adunque per moltiplicare aa con a si farà a^{2+1} , cioè a^3 ; per moltiplicare a^2 con aa si farà a^{2+2} , cioè a^4 ; per moltiplicare a^3 con a^{-1} si farà a^{3-1} , cioè a^2 ; per moltiplicare $a^{\frac{1}{2}}$ con $a^{\frac{1}{3}}$ si farà $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, cioè $a^{\frac{5}{6}}$; per moltiplicare $a^{-\frac{1}{2}}$ con $a^{\frac{1}{3}}$ si farà $a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, cioè $a^{-\frac{1}{6}}$; per moltiplicare $a^{\frac{\pm n}{m}}$ con $a^{\frac{\pm r}{t}}$ si farà $a^{\frac{\pm n}{m}+\frac{\pm r}{t}}$, cioè

$$a^{\frac{\pm nt \pm mr}{mt}} .$$

E così per dividere a^1 per a si farà a^{1-1} , cioè a^0 ; per dividere a^1 per a^{-1} si farà a^{1+1} , cioè a^2 ; per dividere a^2 per $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{2-\frac{1}{2}}$, cioè $a^{\frac{3}{2}}$; per dividere $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{-\frac{1}{3}}$ si farà $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$, cioè a^1 ; per dividere $a^{\pm \frac{n}{m}}$ per $a^{\pm \frac{r}{s}}$ si farà $a^{\pm \frac{n}{m} \mp \frac{r}{s}}$, cioè $a^{\pm \frac{ns \mp mr}{ms}}$.

53. E poichè nella progressione di sopra considerata, preso un qualunque termine, il termine dell'esponente doppio è il quadrato del termine preso; il termine dell'esponente triplo è il cubo; dell'esponente, quadruplo la quarta potestà ec.; ed il termine dell'esponente, che sia la metà, è la radice quadrata del termine preso, il termine dell'esponente, che sia la terza parte, la quarta ec., è la radice cuba, quarta ec. del termine preso; ne viene per conseguenza, che per ridurre una potestà ad un'altra, basterà moltiplicare l'esponente della potestà data per l'esponente di quella potestà, a cui si vuole elevare; e per cavarne una qualunque radice, basterà dividere l'esponente della potestà per l'indice della radice.

Così per elevare aa al cubo si farà $a^2 \times 3$, cioè a^6 ; per elevare $a^{\frac{2}{3}}$ al cubo si farà $a^{\frac{2}{3}} \times 3$, cioè a^2 ; per elevare $a^{\frac{1}{4}}$ alla quinta potestà si farà $a^{\frac{1}{4}} \times 5$; per elevare $a^{\pm \frac{n}{m}}$ alla potestà $\pm \frac{r}{s}$ si farà $a^{\pm \frac{nr}{ms}}$. Così per cava-

re la radice quadrata da $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{\frac{1}{2}}$; per cavare la radice cuba di $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}$, cioè $a^{\frac{1}{6}}$; per cavare la radice r da $a^{\frac{1}{n}}$ si farà $a^{\frac{1}{nr}}$ ec.

54. Ciò, che ho detto delle potestà di una medesima quantità incomplessa, s'intenda egualmente detto delle potestà di una medesima quantità complessa, come da se è chiaro; e con questo metodo si viene a facilitare molto il calcolo delle frazioni; e de' radicali.

De' Divisori lineari d'una qualunque Formola.

55. Una qualunque quantità o formola incomplessa, o complessa si dice prima e semplice quando ella non è divisibile esattamente da quantità alcuna, fuorchè da se stessa, e dall'unità; e chiamasi composta quando è divisibile esattamente per alcun'altra quantità. Prime o semplici sarebbero, per esempio, $a + b$, $aa + xx$, $xx - aax + aab$ ec.; composte ab , che è divisibile per a , e per b ; $aa - xx$, che è divisibile per $a + x$, e per $a - x$ ec.

Due, o più formole sono prime rispettivamente tra loro quando non hanno alcuno comune divisore, e che la minore non è un divisore della maggiore; tali farebbero tra loro bb ed aa ; $aa + 2ab + bb$ ed $aa + bb$ ec.; ed all'opposto sono assolutamente, e relativamente tra loro composte quando hanno qualche comun divisore,

visore , o che una divide l'altra , come a dire aa , ed ab , che sono ambe divisibili per a ; $aa - xx$, ed $a + x$, che sono divisibili per $a + x$ ec.

Per avere tutti i divisori incomplessi di una quantità numerica , o letterale , o mista ; si divida essa per lo minimo di lei divisore , ed il quoziente di nuovo per lo minimo di lui divisore , e così successivamente fino a tanto , che si trovi un quoziente , che più non possa dividersi , che per se stesso ; queste quantità , per le quali è stata divisa la proposta formola , compresa l'unità , saranno tutti i divisori semplici ; e presi a due a due , a tre a tre , a quattro a quattro ec. , cioè secondo tutte le combinazioni , daranno tutti i divisori composti .

Si vogliano i divisori del numero 300

Si scriva il numero dato 300 in (A) , ed accanto in (B) il minimo divisore , che è il 2 ; fatta la divisione per 2 , si scriva in (A) il quoziente 150 sotto il 300 , e questo 150 di nuovo si divida per 2 , e gli si scriva di contro in (B) il divisore 2 , ed il quoziente 75 si scriva in (A) sotto al primo quoziente 150 . Poiché il 75 non è divisibile per 2 , si divida per 3 , e di contro gli si scriva in (B) il divisore 3 , e sotto in (A) il quoziente 25 ; il minimo divisore del 25 è il 5 , che gli si scriva dirimpetto in (B) , e sotto in (A) il quoziente 5 ; il quoziente ultimo 5 non è divisibile , che per se stesso , adunque si scriva pure accanto in

(B)

(B) esso divisore 5, e si avranno tutti i divisori primi, ai quali si aggiunga l'unità, perchè essa è sempre un divisore di qualunque quantità. Per avere tutti i divisori composti secondo tutte le combinazioni, per il secondo divisore si moltiplichi il primo, ed il prodotto 4 si scriva in (B) accanto al secondo divisore; per il terzo divisore si moltiplichino tutti i superiori, e gli si scrivano a canto i prodotti 6, 12 (ponendo una sol volta quelli, che potessero essere replicati), per il quarto si moltiplichino parimenti tutti i superiori, e gli si scrivano accanto i prodotti, e così successivamente fino all'ultimo. I numeri scritti in (B) saranno tutti i divisori del proposto numero 300.

(A)	(B)
	1
300	2
150	2 4
75	3 6 12
25	5 10 15 20 30 60
5	5 25 50 75 100 150 300
1	

Sia la formola $21abb$, di cui debbanfi ritrovare tutti i divisori. Poichè non è divisibile per 2; si divida per 3, che gli si scriva di contro in (B), ed il quoziente $7abb$ di sotto in (A), si divida $7abb$ per 7, che gli si scriva di contro, ed il quoziente abb di sotto; dividasi abb per a , che gli si scriva di contro, ed il quoziente bb di sotto; indi si divida bb per b , che si scriva di contro,

contro, e di sotto il quoziente b , che si divida per b , e gli si scriva di contro, e si avranno tutti i divisori primi $1, 3, 7, a, b, b$ della proposta quantità. Per avere i composti: si moltiplichi il 3 in 7 , e nasce 21 ; si moltiplichino il 3 , il 7 , ed il 21 in a , e nascono $3a, 7a, 21a$; si moltiplichino in b i divisori $3, 7, 21, a, 3a, 7a, 21a$, e nascono $3b, 7b, 21b, ab, 3ab, 7ab, 21ab$; si moltiplichino finalmente $3, 7$ ec.; cioè tutti i superiori in b , e nascono (omessi i superflui, che nascono replicati) $bb, 3bb, 7bb, 21bb, abb, 3abb, 7abb, 21abb$, e la colonna (B) contiene tutti i divisori della quantità proposta.

(A)	(B)
	I
$21abb$	3
$7abb$	$7, 21$
abb	$a, 3a, 7a, 21a$
bb	$b, 3b, 7b, 21b, ab, 3ab, 7ab, 21ab$
b	$b, bb, 3bb, 7bb, 21bb, abb, 3abb, 7abb, 21abb$
	I

Similmente sia $2abb - 6aac$. Si divida prima per 2 , ed il quoziente $abb - 3aac$ per a , ed il nuovo quoziente $bb - 3ac$ per se medesimo, giacchè per nessuna quantità è divisibile, e però tutti i divisori sono, come nella colonna (B)

(A)	(B)
	I
$2abb - 6aac$	2
$abb - 3aac$	$a, 2a$
$bb - 3ac$	$bb - 3ac, 2bb - 6ac, abb - 3aac, 2abb - 6aac$
	I

56. Ma se l'ultimo quoziente, o pure la formola stessa da prima proposta, fosse bensì composta, non però divisibile nel modo suddetto per alcuna quantità incomplessa, di modo che fossero complessi tutti i suoi divisori, la maniera per averli è diversa, ed è questa. Si ordini la quantità relativamente ad una lettera, come è stato detto al numero 24.; si riducano i termini alla medesima denominazione, se vi sono frazioni, indi si trovino tutti i divisori dell'ultimo termine composti dai divisori numerici, se vi sono, e dalla lettera di una dimensione, e se il massimo termine à coefficiente numerico, si dividano per ciascheduno di que' numeri, per i quali è divisibile esso coefficiente del massimo termine; per ognuno di questi divisori aggiunto, ed indi sottratto dalla lettera, per cui è ordinata la formola, si tenti la divisione; e tutti quelli, per i quali riesce, faranno tanti divisori della quantità proposta.

Sia la formola $y^3 - 4xyy + 5aay - 2a^3 = 0$. I divisori di una dimensione dell'ultimo termine sono a , $2a$. Devesi adunque provare la divisione per ciascun di questi aggiunto alla lettera y , indi sottratto (giacchè il coefficiente del massimo termine y^3 è l'unità) cioè per $y \pm a$, per $y \pm 2a$. Si divida primieramente per $y - 2a$, ed il quoziente è $yy - 2ay + aa$, che pure è divisibile per $y - a$ dando di quoziente $y - a$, quindi i divisori della proposta formola sono $y - a$, $y - a$, $y - 2a$, dal prodotto de' quali è nata.

Sia la formola $6y^4 - ay^3 - 21aayy + 3a^3y + 20a^4$.
 I divisori d'una dimentione dell'ultimo termine sono a ,
 $2a$, $4a$, $5a$, $10a$, $20a$; e perchè il primo termine $6y^4$
 è divisibile per 2, e per 3, si dovrà tentare la divisio-
 ne per $y \pm \frac{a}{2}$, $y \pm a$, $y \pm 2a$, $y \pm \frac{5a}{2}$, $y \pm 5a$, $y \pm 10a$,
 $y \pm \frac{a}{3}$, $y \pm \frac{2a}{3}$, $y \pm \frac{4a}{3}$, $y \pm \frac{5a}{3}$, $y \pm \frac{10a}{3}$, $y \pm \frac{20a}{3}$. Ma per-
 perchè troppo noiosa fatica sarebbe il provare con tutti
 i divisori, per vedere fra i molti, quali debbanfi sce-
 gliere, si faccia $y = z + a$, e si sostituisca in luogo di y ,
 e sue potestà questo valore, e nascerà un'altra formola,
 cioè

$$\begin{aligned} 6z^4 + 24az^3 + 36aazz + 24a^3z + 6a^4 \\ - az^3 - 3aazz - 3a^3z - a^4 \\ - 21aazz - 42a^3z - 21a^4 \\ + 3a^3z + 3a^4 \\ + 20a^4 \end{aligned}$$

ovvero, ciò che è lo stesso,

$$6z^4 + 23az^3 + 12aazz - 18a^3z + 7a^4$$

Dell'ultimo termine $7a^4$ di questa formola si tro-
 vino tutti i divisori, cioè a , e $7a$, che divisi per 2, e
 per 3 fanno $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{7a}{2}$, $\frac{7a}{3}$, e perchè si è fatto $y = z + a$,
 se questi divisori possono servire per la seconda formo-
 la data per z , serviranno anche per la prima data per
 y quando si accrescano della quantità a , cioè facendo
 $\frac{3a}{2}$, $\frac{4a}{3}$, $\frac{9a}{2}$, $\frac{10a}{3}$. Questi divisori adunque si paragonino

coi

coi divisori per la prima formola, e scelti quelli soli, che tra loro convengono, cioè $\frac{4a}{3}$, e $\frac{10a}{3}$, per questi

aggiunti, e sottratti dalla y si tenti la divisione, che succede per $y + \frac{4a}{3}$. Ma se, ciò non ostante, rimangono

ancora molti di numero i divisori scelti da questo paragone, si faccia $y = z - a$, e nascerà un'altra formola. Dai divisori ritrovati per questa si sottragga la quantità a , indi si paragonino con quelli, che si sono scelti per mezzo della seconda, e per quelli che convengono, che saranno in minor numero, si tenti la divisione. In questo modo operando successivamente con altre sostituzioni di $y = z + 2a$, $y = z - 2a$ ec. si potranno ridurre a quel minor numero, che sembrerà bastare.

57. Quando la proposta formola à il massimo termine moltiplicato per qualche numero, in luogo di usare della regola accennata per questo caso, può tornare più comodo il mutare la formola in un'altra, il di cui primo termine non sia moltiplicato, che per l'unità, ed indi ritrovare di questa i divisori, dai quali passare poi a quelli della proposta formola.

Sia per esempio la formola $3y^3 + 9ayy - 12aay - 12aab + 3byy + 9aby$.

Si faccia $3y = z$ (e g neralmente $ny = z$, posto il coefficiente numerico dell' incognita eguale ad n) e però $y = \frac{z}{3}$, e sostitu in luogo di y , e sue potestà i valori dati

per z , sarà la formola :

$$\frac{z^3 + 9az^2 + 3bzz - 36aaz + 27abz - 108aab}{9}.$$

Si trovino i
divisori di questa (ommesso per ora il denominatore 9)
che saranno $z + 12a$, $z - 3a$, $z + 3b$, e mettendo in con-
to il denominatore 9, se ne divida uno per 9, ovvero due
per 3, e saranno, per esempio, $z + 12a$, $\frac{z - 3a}{3}$, $\frac{z + 3b}{3}$;

ma si è fatto $3y = z$, adunque si sostituisca nei divisori in luo-
go di z questo valore, ed averansi $3y + 12a$, $y - a$, $y + b$,
che sono i tre divisori della formola proposta:

$$3y^3 + 9aay - 12aay - 12aab .$$

$$+ 3byy + 9aby$$



CAPO

C A P O I I.

Delle Equazioni, e de' Problemi piani determinati.

58. **E**quazione è un rapporto di uguaglianza, che due, o più quantità, sieno esse numeriche, geometriche, o fisiche, hanno tra loro assieme paragonate, o che hanno col zero se ad esso si paragonano. Il complesso di tutti que' termini, che avanti al segno d'egualità si scrivono, chiamasi il primo membro dell'equazione, ed il complesso di tutti quelli, che si scrivono dopo, chiamasi il secondo membro, ovvero l'omogeneo di comparazione. I termini dell'equazione sono omogenei quando ciascun di loro è della stessa dimensione, e però si dice essersi nell'equazione osservata la legge degl'omogenei, come nell'equazione $axx - bbx = a^3$, e così all'opposto dicesi non essersi osservata la legge degl'omogenei quando i termini tali non sono, come nell'equazione $x^4 - axx = a$.

59. Problema è una proposizione, in cui si domanda di fare, o di sapere alcune cose per mezzo di altre cose, note, e di alcune condizioni, che si chiamano i dati del problema; siccome quelle, che si cercano, i quesiti o questioni si appellano.

60. I Problemi altri sono determinati, altri indeterminati; determinati sono quelli, che hanno soluzioni di numero finito, e determinato, cioè quelli, che o con una

folia

sola determinazione si possono sciorre, o se con più, di numero però finito, e determinato. Tale sarebbe il ricercare (*Fig. 1.*) dove debbasi tagliare la data retta AB in modo, che tutta abbia al maggior segmento quella ragione, che $\hat{a}$ il maggior segmento al minore; imperciocchè un solo punto in essa può darli, per esempio C , onde nasca la proprietà, che si cerca. Lo stesso (*Fig. 2.*) sarebbe il ricercare nel diametro di un dato semicircolo AED quel punto, per esempio C , da cui alzando una perpendicolare CE terminata alla periferia, sia essa eguale alla terza parte del diametro, mentre due soli di quelli punti egualmente lontani dal centro soddisfanno alla questione.

Che se verrà proposto di cercare fuori della data AD un punto E tale, che da esso condotte all'estremità della data AD le rette EA , ED , sia l'angolo AED retto; si troverà, che infiniti sono i punti E , che sciolgono il problema, cioè tutta la periferia AED , come è noto dall'Euclide; medesimamente se si cerchi nel diametro AD un punto C , da cui alzata la perpendicolare CE nel circolo, essa sia media proporzionale tra i segmenti AC , CD , si troverà, che ogni punto del diametro scioglie la questione, e perchè tali punti sono infiniti, infinite sono le soluzioni del problema, che però dicesi indeterminato.

I problemi determinati di una sola incognita hanno bisogno, gl'indeterminati di due; la maniera però di arrivare all'equazione è la stessa in quelli, ed in questi; ma

de'

de' secondi tratterò particolarmente al Capo terzo.

61. Le quantità cognite, e date soglionfi denominare, come altrove si è detto, con le prime lettere dell'alfabeto; le incognite, e che si cercano, con una delle ultime avvertendo, che se la quantità, che si cerca, è una linea, debba essa avere sempre origine e principio da un punto fisso, e determinato. E comecchè ciò, che si cerca, si suppone già per fatto, e noto col chiamarlo, per esempio, x ; quindi è, che da questa quantità supposta cognita vengono cognite e date, come si suol dire, *per l'Ipotefi*, altre che da questa dipendono. Così essendo (*Fig. 2.*) data $AD=a$, e supposto C il punto cercato, e però chiamata $AC=x$, sarà $CD=a-x$, e così si discorra di molte altre. In oltre sebbene molte quantità non sono espressamente date, qual'è la linea AD , lo sono però implicitamente, e come si dice, *per la costruzione*. Così nel triangolo rettangolo AED (*Fig. 2.*) quando sia data l'ipotenusa $AD=a$, il lato $ED=b$, sarà, per la 47. del primo di Euclide, dato pure il lato $AE=\sqrt{aa-bb}$. Così nel semicircolo AED ; dato il diametro $AD=a$, il segmento $AC=b$, sarà $CD=a-b$, e per la 8. del 6. di Euclide sarà $CE=\sqrt{ab-bb}$; o pure chiamata $AC=x$, sarà $CE=\sqrt{ax-xx}$ data per l'ipotesi, e per la costruzione. Così nel triangolo rettangolo (*Fig. 3.*) ACB ; abbassata dall'angolo retto B la perpendicolare BD , se sieno, per esempio, date le due $AC=a$, $AB=b$, saranno

pari-

parimente date tutte l'altre BC , BD , AD , DC ; cioè $CB = \sqrt{aa - bb}$ per la 47. del primo d'Euclide, come si è veduto, e per l'8. del 6. farà CD terza proporzionale di AC , e di CB ; quindi farà $\frac{aa - bb}{a}$, per la 17. dallo stesso lib. AD farà terza proporzionale di AC , e di AB ; e però $\frac{bb}{a}$; DB farà media tra AD , e DC , o pure quarta proporzionale di AC , CB , AB ; e però, per la 16. dello stesso libro, $\frac{b\sqrt{aa - bb}}{a}$. Così (Fig. 4.) nel triangolo rettangolo ABC ; se sia DH parallela a BC , e siano date $AB = a$, $BC = b$, $AD = x$, per la 4. del sesto saranno date $DH = \frac{bx}{a}$, $AH = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a}$, e così dicasi d'infinite altre.

62. Col supporre adunque già fatto, o noto ciò, che deve farsi, o saperfi, e maneggiando indifferentemente le quantità date, e quesite, si adempiano tutte le condizioni, che nella proposizione del problema si dimandano, e si arriverà alla equazione. Sia, come sopra, la retta AB (Fig. 1.) che debbasi tagliare *extrema & media ratione*. Sia $AB = a$, e sia C il punto, che si cerca; farà $AC = x$, e però $CB = a - x$. La condizione impostaci è, che debba essere $AB, AC :: AC, CB$, cioè $a, x :: x, a - x$; ma per la natura della proporzione geometrica il prodotto degl'estremi è uguale al prodotto dei mezzi; adunque farà $aa - ax = xx$, ed eccoci all'equazione. Sieno dati tre numeri,

inferi, il primo sia 4., il secondo 5., il terzo 10., e si cerchi un quarto numero tale, che se dal prodotto di questo nel terzo si sottragga il primo, ed il resto per esso primo si divida; il quoziente sia eguale al secondo numero dato. Sia x il numero cercato; adunque il prodotto di questo nel terzo sarà $10x$, e sottraendo il primo, $10x - 4$, e dividendo per esso primo, $\frac{10x - 4}{4}$, ma per la prescrizione del problema deve essere $\frac{10x - 4}{4}$ eguale al secondo numero dato 5; ecco adunque l'equazione $\frac{10x - 4}{4} = 5$.

Dati nel triangolo ABC (Fig. 4.) i lati $AC = a$, $BC = b$, e la base $AB = c$; si ricerca in essa il punto D tale, chealzata DH parallela a BC , sia il quadrato di DH eguale al rettangolo di $AD \times DB$. Si chiami $AD = x$, adunque sarà $DB = c - x$, e per i triangoli simili ABC , ADH sarà $DH = \frac{bx}{c}$, e però adempiendo ciò, che il problema richiede, sarà l'equazione $\frac{b^2 x^2}{c^2} = cx - xx$.

63. Se il dato triangolo ABC sarà rettangolo in B non s'avrà a denominare $AC = a$, ma bensì $= \sqrt{bb + cc}$ per esprimere con ciò la condizione data dell'angolo retto. Così se nel semicircolo AED (Fig. 2.) sarà dato il diametro $AD = 2a$, il segmento $AC = b$, non però, perchè sia data in conseguenza la CE , si potrà esprimere con una qualunque lettera, ma dovrà denominarsi per la

proprietà del circolo col farla $= \sqrt{2ab - bb}$ appunto per indicare, che essa sia ordinata del circolo al punto C ; e ciò generalmente s'intenda doverfi fare in tutti i casi di simil natura.

64. Ma ciò, che può fare qualche difficoltà si è, che il più delle volte le linee date nella figura, con cui viene proposto il problema, non bastano per avere quelle quantità, o sia denominazioni, che sono necessarie per giungere alla equazione. Un tale caso farebbe, se date di posizione (Fig. 5.) due rette indefinite AE , AF , ed il punto C , venisse proposto di condurre dal punto dato C la retta CF talmente, che formasse il triangolo AEF eguale a un dato piano. La espressione del triangolo AEF farebbe la metà del prodotto di AF in EG , abbassata EG perpendicolare ad AF ; sia adunque $AF = x$, ma non perciò sarà mai possibile inferire dalle sole descritte linee il valore di essa EG . In simili incontri fa d'uopo di comporre la figura conducendo parallele, alzando perpendicolari, formando triangoli simili, descrivendo circoli, o usando altri simili artifizj della Geometria comune, de' quali non è possibile assegnare regola alcuna, dipendendo essi dalle circostanze del problema, dall'industria, dalla pratica, e spesso dal caso; ordinariamente però sogliono servire le proposizioni 5. 13. 15. 27. 29. 32. 47. del primo libro di Euclide; alcune del secondo; le 20. 21. 22. 27. 31. 35. 36. del terzo; le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. del sesto; ed alcune dell'undecimo, e duodecimo per i solidi. Nel

pro-

proposto problema adunque dal punto dato C si conduca CD parallela ad EA , ed EG , CB perpendicolari ad FA prodotta. Poichè sono date di posizione le rette AE , AF , ed il punto C , faranno date di grandezza le AD , CB . Sia adunque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, ed il dato piano $= cc$. Poichè i triangoli FDC , FAE sono simili, come pure simili tra loro i triangoli DCB , AEG , faranno le analogie $DF, AF :: DC, AE :: BC, EG$; e però $DF, AF :: BC, EG$, cioè $a + x, x :: b, EG$, onde sarà $EG = \frac{bx}{a+x}$, e perchè il triangolo AEF , cioè la metà del prodotto di AF in EG deve essere eguale al dato piano cc ; farà finalmente l'equazione $\frac{bxx}{2a+x} = cc$.

65. La sola proposizione de' problemi, che fin qui ho presi per esempio, mi à immediatamente portata all'equazione appunto, perchè mi à comandato di fare, che due quantità fossero uguali; ma non così succede quando da alcune quantità date viene proposto di ritrovarne dell'altre senza qualche condizione, che espressamente all'equazione ci porti. Allora conviene con un pó d'arte procacciarsela, e ciò col ritrovare (componendo la figura, se è necessario) per mezzo di diverse proprietà, due differenti espressioni della medesima quantità, ed istituire fra esse l'equazione. Ho detto per mezzo di diverse proprietà, perchè la stessa proprietà comunque si vuole maneggiata darà sempre la medesima espressione. Addurrò tre

esempi, che per ora possono bastare.

Dato il triangolo CDB isoscele; (Fig. 6.) si dimanda il diametro del circolo $CADB$, a cui egli sia inscritto. Si faccia $CD = a$, $CB = BD = b$, $BA = x$, diametro ricercato, e si tiri la CA . Saranno simili i due triangoli ABC , BCE , per esser retti gl'angoli BCA , CEB , e però sarà $AB : BC :: BC : BE$; cioè $x, b :: b, BE$; onde $BE = \frac{bb}{x}$, ed è pure CE la metà di CD , onde $= \frac{1}{2}a$, e per l'angolo retto CEB sarà $\overline{CB}^2 = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$; ma il qua-

drato di CB è anche $= bb$, e però sarà l'equazione, $bb = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$.

Dati nel triangolo ABC (Fig. 7.) i tre lati, ed abbassata la perpendicolare AE sopra BC dall'angolo A , si domandano i due segmenti BE , EC . Sia $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $BE = x$, sarà $EC = c - x$. Per la 47. del primò d'Euclide sarà il quadrato di AE uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BE , cioè $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$; ma per la stessa sarà pure $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$, adunque $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$, e poste l'espressioni algebriche, sarà $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

In altro modo ancora. Si conduca EF perpendicolare ad AB . Per l'8. del 6. d'Euclide sarà $AB, BE :: BE, BF$, cioè $a, x :: x, BF$, e però $BF = \frac{xx}{a}$; adunque

$$AF =$$

$AF = a - xx$; ma per la stessa proposizione 8. sarà pure $AF, AE :: AE, AB$, e però sarà $AE = a - xx$. Condotta dal punto E la retta EM perpendicolare ad AC , con lo stesso raziocinio si troverà $AE = bb - cc + 2cx - xx$, e paragonati fra loro questi due valori, avrassi l'equazione, come prima, $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

Dato il quadrante AHM (Fig. 8.) e le tangenti AI, HK dei due archi AH, HD ; si dimanda la tangente AB della somma de' due archi dati. Sia il raggio $CA = a, AI = b, HK = c, AB = x$. Per avere una equazione si tiri normale sopra AC dal punto D la DE ; quindi per i triangoli simili CBA, CDE si troveranno i valori di CE , e di DE ; si procuri adunque di vedere, se ci venga fatto di denominare in un'altra maniera la stessa DE ; e perciò si tiri DF perpendicolare a CH ; e per mezzo de' triangoli simili CAI, CEO si averanno le EO, CO ; similmente per mezzo de' triangoli CHK, CFD simili averassi la FD ; e dai triangoli simili CEO, FOD si caverà OD ; e però sarà $ED = EO + OD$, che ci darà l'equazione analitica.

O riferito il solo ordine, che potrebbe tenersi per giugnere all'equazione, ommettendo le attuali operazioni, perchè in altro luogo si scioglierà il problema compiutamente.

66. Convien pure usare qualche sorta d'industria per giugnere all'equazione in que' Problemi, ne quali si tratta

tratta di angoli, e ciò con l'artifizio di passare dalle proprietà degl'angoli a quelle delle linee, che entrano, o possono entrare nel problema. Ne prendo un' esempio dalla proposizione 10. del lib. 4. d'Euclide. Debbaſi (Fig. 9.) sopra la retta AB costruire il triangolo ABC , il di cui angolo A ſia la metà tanto dell'angolo ABC , quanto dell'angolo ACB . Il triangolo ABC ſia il ricercato, adunque faranno tra loro eguali i due angoli ACB , ABC , quindi eguali i lati AC , AB , e ſe ſ'intenda condotta la retta CD tale, che divida in due egualmente l'angolo ACB , faranno ſimili i due triangoli ACB , CDB , e ſi avrà l'analogia $AB, BC :: BC, BD$, ma ſi à $BC = CD = AD$, adunque ſarà $AB, AD :: AD, DB$, ed ecco ridotto il problema propoſto all'altro di dividere la data AB *extrema & media ratione*. Sciolto pertanto queſto ſecondo problema, cioè ritrovato il punto D , ſarà ſciolto il propoſto ancora, perchè diviſa DB per metà in E , ſe ſi alzerà la perpendicolare EC , che incontri in C l'arco BC del raggio AB , e ſi conducano dal punto C le rette CA , CB , il triangolo ACB ſarà il ricercato.

67. Ritrovata adunque l'equazione del problema, fa d'uopo da eſſa ricavare i valori della incognita, cioè ridurre eſſa incognita ad eſſere eguale a ſole quantità date, nel che conſiſte la ſoluzione del problema, e ciò diceſi riſolvere l'equazione.

Ma prima è bene richiamare alla memoria alcuni aſſiomi; cioè

1. Se a due cose eguali si aggiungeranno, o da esse si sottrarranno cose eguali, le somme, o differenze saranno parimente eguali.

2. Se cose eguali si moltiplicheranno, o si divideranno per cose eguali, i prodotti, o i quozienti saranno eguali.

3. Se da cose eguali si caverà radice di indice eguale, i risultanti saranno eguali.

4. Se cose eguali si eleveranno a potestà di esponente eguale, i risultanti saranno eguali.

Dal primo di questi assiomi si ricava, che se si vorrà, che un qualunque termine dell'equazione, il quale sia da una parte del segno d'egualità, passi dall'altra, si potrà sempre farlo senza punto togliere l'eguaglianza. Sia l'equazione $ax + bb = -xx + cc$; si aggiunga xx all'uno, ed all'altro membro dell'equazione, farà $ax + bb + xx = -xx + cc + xx$, ma $-xx + xx$ si elidono, e rimane $ax + bb + xx = cc$; ed ecco il termine xx passato nel primo membro dell'equazione, da cui se in oltre si sottrarrà bb , farà $ax + bb + xx - bb = cc - bb$; ma $bb - bb$ si elidono, e rimane $ax + xx = cc - bb$, ed ecco il termine bb passato nel secondo membro dell'equazione. Adunque, generalmente quando vogliasi, che un qualunque termine passi da una parte all'altra del segno d'egualità, basterà scriverlo nell'altra con mutargli il segno. In conseguenza di ciò si potrà adunque rendere a nostro talento positivo un qualunque termine, che nell'equazione sia negativo, e vicendevolmente; e ciò con lo scriverlo col segno mutato dalla

dalla opposta parte del segno d'egualità a quella, in cui si trova; e però $aa - xx = bb$ farà lo stesso, che $aa - bb = xx$, o sia $xx = aa - bb$. Quindi se nell'uno, e nell'altro membro dell'equazione vi sarà lo stesso termine, ed affetto dal medesimo segno, potrà esso da ambi i membri cancellarsi, senza togliere l'eguaglianza, come se fosse $ax - xx = bb - xx$, si scriverà $ax = bb$; imperciocchè trasportando dalla opposta parte il termine $-xx$, farebbe $ax - xx + xx = bb$, o pure $ax = bb - xx + xx$, ma $-xx$ e $+xx$ si elidono; adunque sarà $ax = bb$. Lo stesso segue se in luogo di trasportare il termine ad ambi i membri comune, esso ad ambi si aggiunga, se nell'equazione è negativo, o si sottragga, se è positivo; così se è $ax - xx = bb - xx$, farà anche $ax - xx + xx = bb - xx + xx$, cioè $ax = bb$.

68. Dal secondo assioma si ricava, che se un'equazione averà delle frazioni si potrà sempre, senza togliere l'egualità, da esse liberare con ridurre ciascun termine al comun denominatore, ed indi omettere esso denominatore, appunto perchè quantità eguali per eguali moltiplicate fanno prodotti eguali. Sia $a - \frac{xx}{b} = b$; riducendo al

comune denominatore sarà $\frac{ab - xx}{b} = \frac{bb}{b}$, e moltiplican-

do ambi i membri dell'equazione per b , cioè ommettendo esso denominatore b , sarà $ab - xx = bb$. E se in oltre, si voglia, che il termine $-xx$ sia positivo, si farà $ab = bb + xx$, o sia (che è lo stesso) $xx + bb = ab$, o pu-

re $xx = ab - bb$. Sia $\frac{ax}{2} - \frac{bxx}{a} = ab$, riducendo al comune denominatore sarà $\frac{aax - 2bxx}{2a} = \frac{2aab}{2a}$, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $2a$; averassi $aax - 2bxx = 2aab$. E se si voglia di più, che il termine $2bxx$ sia positivo, e in oltre che tutti i termini, i quali contengono la lettera x , sieno da una parte del segno d'egualità, si faccia $2bxx - aax = -2aab$, o riducendo l'equazione al zero, $2bxx - aax + 2aab = 0$.

69. Per lo stesso assioma si potrà liberare qualunque lettera, a piacere, nell'equazione, o sua potenza dal coefficiente, cioè da quella quantità, in cui essa sia per avventura moltiplicata, e ciò dividendo ciascun termine per esso coefficiente: Sia pertanto $2bxx - aax = -2aab$, e debbasi liberare xx dal coefficiente $2b$; adunque dividendo l'uno, e l'altro membro dell'equazione per la stessa quantità $2b$, i quozienti saranno eguali, cioè $\frac{2bxx - aax}{2b} =$

$$\frac{-2aab}{2b}, \text{ e però } \frac{2bxx}{2b} - \frac{aax}{2b} = \frac{-2aab}{2b}. \text{ Sia } \frac{ax}{b} - \frac{a^2}{b} = \frac{bb}{b} - \frac{3bxx}{2a} - bx,$$

e si voglia, che la xx sia positiva, libera dalle frazioni, e da coefficienti, e che tutti i termini, che in qualunque modo contengono la lettera x , sieno da una parte del segno d'egualità, e gli altri dall'altra. Si scriva adunque, $\frac{3bxx}{2a} + bx + ax = bb + \frac{a^2}{b}$; si moltiplichi per $2a$ ciascun ter-

mine,

mine, e viene l'equazione $3bxx + 2abx + 2aax = 2abb + \frac{2a^3}{b}$,

si divida finalmente ciascun termine per $3b$, e sarà l'equazione $xx + \frac{2abx}{3b} + \frac{2aax}{3b} = \frac{2a^3}{3b} + \frac{2ab}{3}$, che à tutte le condizioni ricercate.

70. Dal quarto assioma si ricava, che se una equazione conterrà radicali, o fordi, si potrà da essi liberare, scrivendo il termine, o i termini fordi da una parte del segno d'egualità, ed i razionali dall'altra, indi facendo il quadrato dell'uno, e dell'altro membro dell'equazione, se la radice è quadrata; il cubo se è radice cuba ec. Così essendo $\sqrt{aa - xx} + a = x$ si scriva, posto il termine a dall'altra parte del segno d'egualità, $\sqrt{aa - xx} = x - a$, e però quadrando, $aa - xx = xx - 2ax + aa$; cioè $2xx - 2ax = 0$, o sia $x - a = 0$, dividendo per $2x$ comune ad ambi i membri; Così essendo $\sqrt{aax - x^3} - a + x = 0$; si scriva $\sqrt{aax - x^3} = a - x$, e fatti i cubi, sarà $aax - x^3 = a^3 - 3aax + 3aax - x^3$, cioè $3aax - 4aax + a^3 = 0$, o sia $3xx - 4ax + aa = 0$, dividendo per a .

Che se i termini radicali fossero due o più, onde in una operazione sola non sparissero, essa si ripeta fino che bisogna. Così $\sqrt{bx} = a + \sqrt{ax}$ si scriva $\sqrt{bx} - \sqrt{ax} = a$, e quadrando, $bx + ax - 2\sqrt{abxx} = aa$, cioè $bx + ax - aa = 2\sqrt{abxx}$, e di nuovo quadrando, $bbxx + aaxx + a^2 - 2abxx - 2aabx - 2a^2x = 4bxx$, cioè $bbxx - 2abxx +$

$aaxx -$

$aaax - 2aabx - 2a^1x + a^4 = 0$. Così $y = \sqrt{ay + yy - a\sqrt{ay - yy}}$, quadrando, sarà $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$; cioè $ay = a\sqrt{ay - yy}$, e di nuovo quadrando, $aayy = a^1y - aayy$, vale a dire $2aayy = a^1y$, o sia $2y = a$.

71. Premesse queste cose, è facile la maniera di risolvere le equazioni per avere in quantità date il valore della incognita, che serve alla soluzione del problema. Ma prima si suppongano le equazioni liberate dalla asimetria, cioè da' radicali nel caso, che l'incognita fosse sotto al vincolo, ed indi ridotte all'espressione più semplice cancellando que' termini, che si elidono, se tali ne avesse; se l'uno e l'altro membro fossero per la stessa quantità moltiplicati, dividendoli; o se fossero divisi, per essa moltiplicandoli; come, per esempio, se fosse $\frac{axx - aax + aab}{b} = \frac{a^1 + aab}{b}$ si ridurrebbe ad essere $xx -$

$ax = aa$. In oltre per primo termine dell'equazione si intenda il complesso di tutti i termini, che contengono l'incognita alla massima potestà; per secondo termine il complesso di tutti i termini, che contengono la incognita alla potestà di un grado inferiore, e così di mano in mano; e per termine cognito il complesso di tutti i termini, che in nessun modo essa incognita contengono. Quindi nell'equazione $axx - bxx - bbx - aax = a^1 - b^1$, o sia $axx - bxx - bbx - aax + b^1 - a^1 = 0$, sarà $axx - bxx$, cioè $xx \times a - b$ il primo termine; $-bbx - aax$, cioè

$x \times \overline{aa - bb}$ il secondo ; $-a^2 + b^2$ il cognito. Nell'equazione $aaxx - abxx + a^2 - b^2 - a^2b = 0$ sarà $\overline{aa - ab} \times xx$ il primo termine ; il secondo manca ; ed $a^2 - b^2 - a^2b$ il cognito. Nell'equazione $ax^2 + bx^2 - aaxx - a^2 = 0$ sarà $\overline{a + b} \times x^2$ il primo ; $-aaxx$ il secondo ; il terzo manca ; e $-a^2$ l'ultimo, o il cognito ; e così dicasi dell'altre equazioni . E qui deveſi notare, che il termine , per eſempio, $aaxx - bbxx$ (il che ſ'intenda di qualunque altro composto di ſegni contrarj) può eſſere quantità poſitiva , o negativa , e farà poſitiva ſe aa ſia maggiore di bb , negativa ſe all'oppoſto ; e però ſe ſi dirà in appreſſo di rendere poſitivo un ſimil termine nell'equazione , biſognerà a ciò avere riguardo .

72. Ciò poſto ; per riſolvere le equazioni , in primo luogo ſe l'equazione à frazione , nel di cui denominatore ſia l'incognita , ſi riduca al comun denominatore ; in ſecondo luogo ſi renda poſitivo il termine della maſſima poſteſtà dell' incognita , e ſcritti da una parte del ſegno d'egualità tutti i termini nell' ordine loro , che contengono eſſa incognita , ſi ſcrivano dall'altra i cognitivi ; in terzo luogo ſe il primo termine , cioè quello della maſſima poſteſtà dell'incognita, aveſſe un denominatore , ſi liberi dalla frazione nel modo detto al num. 68., e finalmente ſe aveſſe coefficiente , cioè ſe foſſe moltiplicato in qualche quantità data , da eſſo coefficiente ſi liberi (n. 69.)

E' facile il vedere , che in queſta guiſa operando , ſe l'equa-

l'equazione avrà l'incognita a una sola dimensione, farà ella anco interamente risolta, e ridotta la stessa incognita eguale a sole quantità date, che è quanto si pretende di fare. Sia l'equazione $aa - ff = \frac{bbx - aax}{2m}$, e sia aa mag-

giore di bb . Per rendere positivo adunque il termine dell'incognita si scriva $\frac{aax - bbx}{2m} = ff - aa$, e liberando dal de-

nominatore, e coefficiente, farà $x = \frac{2m \times \overline{ff - aa}}{aa - bb}$, valore

interamente cognito. Se fosse aa minore di bb , in questo caso il termine dell'incognita $\frac{bbx - aax}{2a}$ farebbe positivo,

nè occorrerebbe trasportarlo, e si avrebbe $x = \frac{2m \times \overline{aa - ff}}{bb - aa}$.

73. Anzi quando anche l'incognita sia elevata a qualunque potestà, purchè alla stessa in tutti i termini ne quali si trova, cioè (che vuol dire lo stesso) purchè l'incognita formi un sol termine, per l'assioma 3. si risolverà l'equazione, e si avrà essa incognita eguale a sole quantità date col estrarre dall'uno, e dall'altro membro dell'equazione la radice di quell'indice, di cui è la potestà. Sia l'equazione $bb = aa - \frac{axx - bxx}{2c}$. Per rendere positivo il

termine dell'incognita si scriva $\frac{axx + bxx}{2c} = aa - bb$, e li-

berando dalla frazione, e dal coefficiente, $xx = \frac{2c \times \overline{aa - bb}}{a + b}$,

cioè

cioè $xx = 2ac - 2bc$, facendo l'attual divisione per $a + b$, giacchè si può, e finalmente cavando la radice quadrata, sarà $x = \pm \sqrt{2ac - 2bc}$. Ho posto alla radice il segno ambiguo per ciò, che si è detto al num. 15. Per la stessa ragione se fosse $x' = a' + b'$, si averebbe $x = \sqrt{a' + b'}$, e così dell'altre generalmente.

74. Ma se l'equazione contiene l'incognita al quadrato elevata, e in oltre il rettangolo, o sia il prodotto della stessa incognita nelle quantità note, cioè il secondo termine, (e dicesi equazione di quadratica affetta, siccome quando manca il secondo termine di quadratica semplice si appella) preparata essa come si è detto, all'uno, ed all'altro membro della equazione si aggiunga il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, (vale a dire il quadrato della metà di quella quantità cognita intera, o rotta, che moltiplica la incognita) ed il primo membro, come è manifesto, sarà sempre un quadrato, la di cui radice sarà il complesso dell'incognita, e della metà di esso coefficiente con il suo segno naturale; e però estraendo la radice, questo complesso sarà eguale alla radice quadrata del secondo membro, e trasportando la metà del coefficiente, come quantità cognita, sarà finalmente la incognita eguale alla somma, o differenza, (secondo la natura de' segni) della radicale, e di essa metà del coefficiente. Sia l'equazione $xx + 2ax = bb$; si aggiunga all'uno, ed all'altro membro il quadrato della

metà

metà del coefficiente del secondo termine, cioè aa , e farà $xx + 2ax + aa = aa + bb$, e cavando la radice, $x + a = \pm \sqrt{aa + bb}$, e trasponendo, $x = \pm \sqrt{aa + bb} - a$.

Sia l'equazione $bbx - aax - mxx + \frac{aabb}{m} = 0$. Rendendo positivo il massimo termine, ed ordinando l'equazione, farà $mxx + aax - bbx = \frac{aabb}{m}$, e dividendo per m ,

$xx + \frac{aax}{m} - \frac{bbx}{m} = \frac{aabb}{m^2}$; adunque aggiungendo ad ambi i

membri il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $a^4 - 2aabb + b^4$, si avrà $xx + \frac{aax}{m} - \frac{bbx}{m} +$

$\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4m^2} = \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4m^2} + \frac{aabb}{m^2}$, e cavando la ra-

dice, $x + \frac{aa - bb}{2m} = \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4m^2} + \frac{aabb}{m^2}}$, e riducendo

al comune denominatore il radicale, e trasponendo il termine cognito $\frac{aa - bb}{2m}$, farà $x = -\frac{aa + bb}{2m} \pm \sqrt{\frac{a^4 + 2aabb + b^4}{4m^2}}$;

ma la radice si può attualmente estrarre, ed è tanto $\frac{aa + bb}{2m}$, quanto $-\frac{aa - bb}{2m}$, per ragione del segno ambi-

guo $\pm$, e però saranno due i valori della x , uno $x = -\frac{aa + bb + aa + bb}{2m}$, o sia $x = \frac{bb}{m}$, e l'altro $x = -\frac{aa + bb - aa - bb}{2m}$, o sia $x = -\frac{aa}{m}$.

75. L'ambiguità adunque del segno, che seco porta
la

la estrazione della radice quadrata, somministra due valori dell'incognita, i quali possono essere ambi positivi, ambi negativi, un positivo, e negativo l'altro, e talora ambi immaginarj, secondo le quantità note onde sono composti. Nell'equazione finale, per esempio, $x = \pm \sqrt{aa+bb} - a$ un valore, cioè $\sqrt{aa+bb} - a$ sarà positivo, perchè essendo $\sqrt{aa+bb}$ maggiore di a , la differenza è positiva; l'altro valore, cioè $-\sqrt{aa+bb} - a$ sarà negativo, come è manifesto. Nell'equazione $x = a \pm \sqrt{aa-bb}$ (supposto b minore di a) ambi i valori saranno positivi, perchè $\sqrt{aa-bb}$ è minore di a ; e per la stessa ragione, nell'equazione $x = \pm \sqrt{aa-bb} - a$ ambi i valori saranno negativi; che se fosse b maggiore di a , ambi farebbero immaginarj, come è notato al n. 15., perchè $\sqrt{aa-bb}$ farebbe radice di quantità negativa. Nell'equazione $x^2 = a^2 - b^2$, che esige due volte la estrazione della radice quadrata, cioè $xx = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, ed indi $x = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^2 - b^2}}$, quattro sono i valori, due reali positivo l'uno, e negativo l'altro, cioè $\pm \sqrt{+\sqrt{a^2 - b^2}}$, supposta b minore di a , gl'altri due immaginarj, cioè $x = \pm \sqrt{-\sqrt{a^2 - b^2}}$, e quando b sia maggiore di a tutti quattro saranno immaginarj; in proporzione si discorra dell'altre equazioni. I valori negativi, che diconsi ancora falsi, sono niente meno reali de' positivi, e questa sola diversità hanno, che

fe

se nella soluzione del problema i positivi si prendono dal punto fisso principio dell'incognita verso una parte, i negativi si prendono dallo stesso punto verso la parte opposta. Sia (*Fig. 10.*) A il principio dell'incognita x di un problema, e l'equazione finale sia, per esempio $x = \pm a$; si prenda $AB = a$, fissato adunque, che da A verso B sieno i positivi, sarà $AB = a$ il valore positivo di x , ed in conseguenza, presa $AC = AB$, ma dalla parte contraria del punto A ; sarà $AC = -a$ il valore negativo di x , ed il problema avrà due soluzioni, una nel punto B , l'altra nel punto C . Ma di tutto ciò si vedrà meglio la pratica ne' problemi, che scioglierò in appresso.

76. Qualora pertanto l'equazione, a cui le condizioni de' problemi ci hanno condotti, ci somministra soli valori immaginarj, ciò vuol dire, che il problema non ha soluzione alcuna, e che è impossibile. Lo stesso si concluda quando la equazione finale ci porta all'assurdo, come se ci desse quantità finita eguale al zero, o il tutto eguale alla parte, o cose simili. Tale la ritroverebbe, chi nella retta $AB = a$ (*Fig. 1.*) ricercasse il punto C , onde fosse il quadrato di tutta eguale alla somma de' quadrati delle parti; imperciocchè fatta $AC = x$, sarebbe $aa = xx + ax - 2ax + xx$, cioè $2xx - 2ax = 0$, e però $x = a$, vale a dire la parte eguale al tutto. Assurda pure l'avrebbe chi, alzata sulla retta AB (*Fig. 11.*) la perpendicolare indefinita BH , cercasse in essa un punto C , da cui conducendo al dato punto A la retta CA , fossero parallele le due CB ,

109

M

CA;

CA ; imperciocchè fatta $BA = a$, $BC = x$, e presa $BD = \frac{1}{2}x$, e condotta DM parallela a BA , farebbe, per i triangoli CBA , CDM simili, $DM = \frac{1}{2}a$; ma se CA, CB sono parallele, deve essere DM eguale a BA , e però $\frac{a}{2} = a$, equazione impossibile.

Se taluno però pretendesse, che la prima delle due, superiori equazioni, cioè $2xx - 2ax = 0$ non sia altrimenti assurda, ma che ci somministri due valori benchè inutili, però reali, fondato sulla ragione, che dividendo l'equazione per $2x - 2a$, risulta $x = 0$ valore reale, che scioglie il problema; imperocchè presa $x = 0$, cioè divisa la linea AB nel punto A , una parte di essa sarà zero, e l'altra sarà a ; e però il quadrato di tutta eguale al quadrato delle parti, cioè $aa = 0 + aa$, o sia $aa = aa$; e dividendo per $2x$ l'equazione, risulta $x = a$ valore reale, che scioglie il problema, dividendo la linea nel punto B ; a chi, come dissi, così pretendesse non mi opporrei per avventura; ma qualunque siasi la giusta idea di questa, e simili equazioni, egli è certo però, che nulla di più ci fa sapere, se non che il quadrato della linea AB è eguale al quadrato della linea AB , e la linea eguale a se stessa.

Ho preso per esempio d'equazione, che porta all'assurdo, quella che mi dà una quantità finita eguale a zero, o il tutto eguale alla parte; ciò però s'intenda quando la incognita non possa esser grandezza infinita, ed il problema non sia più, che determinato, perchè in quelli casi

pos-

possono esser verissime tali equazioni, come si vedrà altrove.

77. S'incontrano pure alle volte altre equazioni, le quali dall'una, e dall'altra parte del segno d'egualità contengono le stesse quantità, e che per conseguenza ridotte vengono alla fine a concludere $0=0$. Queste tali equazioni, che si chiamano identiche, ci fanno sapere più di quello, che nella proposizione da noi si ricercava, mentre che sparendo da esse affatto l'incognita, e portandoci a conclusione vera (perchè è sempre vero, che il zero è eguale al zero) ci fanno conoscere, che il valore dell'incognita è quello, che si vuole, e che però la proposizione non è un problema, ma un teorema. Eccone un'esempio. Nel dato rettangolo $ACDE$ (Fig. 12.) condotta la parallela BF ad AE dal dato punto B , si dimanda in essa un punto tale H , che tirate agli opposti angoli le rette HA, HC, HD, HE , sia la somma de' quadrati di HA, HD eguale alla somma de' quadrati di HE, HC . Sia $AB=a, BC=b, CD=c$, e supposto, che H sia il punto cercato, sarà $BH=x$, e però $HF=c-x$. Il quadrato adunque di HA sarà $aa+xx$, di HC sarà $bb+xx$, di HD sarà $bb+cc-2cx+xx$, di HE sarà $aa+cc-2cx+xx$, e però l'equazione $aa+xx+bb+cc-2cx+xx=bb+xx+aa+cc-2cx+xx$, cioè $0=0$, vale a dire, che dovunque si prenda nella retta BF il punto H , si verificherà sempre la ricercata proprietà.

78. Le equazioni, che ridotte contengono la inco-

gnita ad una sola dimensione, diconsi equazioni semplici, e del primo grado; quelle, che la contengono elevata al quadrato, sieno esse quadratiche semplici o affette, si dicono del secondo grado; quelle, che la contengono elevata al cubo, comunque siasi degli altri termini, si dicono del terzo grado, e così del quarto, del quinto ec. le altre in proporzione. Quindi i problemi, che da equazioni semplici, o del secondo grado vengono espressi, si dicono problemi piani, perchè si costruiscono colla sola geometria comune dell'Euclide, cioè *circino & regala*; gli altri tutti si dicono solidi, perchè per la costruzione loro, si richiede la descrizione di certe curve, che luoghi solidi pure si chiamano. Della risoluzione, e costruzione de' problemi solidi nulla qui dirò, riserbandomi a trattarne espressamente nel Capo IV.

79. Vi sono molte equazioni, che sembrano a prima vista di quel grado, che dall'esponente massimo dell'incognita viene indicato, ma che però, debitamente trattandole, s'abbassano a grado inferiore. Di questo genere sono tutte quelle, le quali oltre il primo termine, cioè quello della massima potenza dell'incognita, ed il termine affatto cognito, un'altro solo ne contengono, in cui la incognita abbia la potenza, che sia la radice quadrata della potenza del primo termine; come sarebbe $x^4 - 2axx = b^4$, la quale maneggiata colla regola delle quadratiche affette si riduce ad essere $xx = aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}$, e però $x = \pm \sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}}$. Istessamente $x^6 + a^3x^3 - b^6 = 0$,
che

che ridotta nello stesso modo si trova essere $x^3 =$

$$-a^3 \pm \sqrt[3]{a^6 + 4b^3}, \text{ e però } x = \sqrt[3]{-a^3 \pm \sqrt[3]{a^6 + 4b^3}},$$

ed infinite altre di simil natura. Sono pure dello stesso genere quelle, che per mezzo dell'estrazione delle radici possono abbassarsi a grado inferiore; così $x^4 - 2ax^3 + a^2xx - 2bbxx + b^4 = aabb + b^4$, essendo il primo membro dell'equazione un quadrato, la di cui radice è $xx - ax - bb$, farà l'equazione abbassata $xx - ax - bb = \pm b\sqrt{aa + bb}$. Così nell'equazione $x^3 + 3axx + 3aax = b^3$ se si aggiunga a^3 all' uno, ed all' altro membro, farà $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = a^3 + b^3$, ma il primo membro è un cubo, la di cui radice è $x + a$, adunque l'equazione abbassata farà $x + a = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Ma non è sempre così facile il riconoscere, quale quantità debba aggiungersi, o sottrarsi dal primo membro dell'equazione, acciocchè egli divenga una potestà perfetta, nè si può assegnarne metodo alcuno, onde in questi casi potrà solo aver uso la pratica, e l'industria dell' Analista.

80. Ma se il proposto problema fosse di tale natura, che o difficilmente, o in nessun modo una sola incognita assunta bastasse per avere tutte quelle denominazioni, che all'invenzione della equazione sono necessarie, in questo caso si prende una, due, tre, e quante abbisognano incognite di più, mentre che essendo il problema determinato di natura sua, ci somministrerà sempre materia di

al-

altrettante equazioni , quante sono le incognite affunte ; col mezzo di ciascuna di queste equazioni si elimina una delle incognite , cioè se ne trova il valore dato per le rimanenti , e per le cognitive , fino a che si giunga finalmente all' ultima equazione , la quale conterrà un' incognita sola . Cogli esempj s'intenderà meglio il modo di queste operazioni .

Sieno in primo luogo due equazioni semplici , cioè del primo grado, per esempio , $a + x = b + y$, e $2x + y = 3b$, e si voglia eliminare la y ritenendo la x ; per mezzo di quella , che si vuole , delle due equazioni, per esempio della prima , si trovi il valore della y colla debita trasposizione de' termini , e sarà $y = a + x - b$; questo valore si sostituisce nella seconda in luogo della y , e si avrà la nuova equazione $2x + a + x - b = 3b$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, e sostituì-

to questo valore in una delle due equazioni proposte in luogo della x , si avrà il valore della $y = \frac{2a + b}{3}$. Ciò po-

tevasi anche ottenere col ricavare da ambe le equazioni i due valori della y , ed assieme paragonali , imperciocchè dalla prima equazione si ricava $y = a + x - b$, dalla seconda $y = 3b - 2x$, e però sarà $a + x - b = 3b - 2x$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, come prima .

³ 81. Nello stesso modo si opererà quando le equazioni contengano la incognita , che si vuol' eliminare , elevata alla seconda dimensione , mentre per mezzo di una delle

delle due date equazioni , o con la sola trasposizione de' termini , o colle regole delle quadratiche semplici , o affette, se ne potrà sempre avere il valore da sostituirsi nell'altra equazione . Sieno le due equazioni $xx + 5ax = 3yy$, e $2xy - 3xx = 4aa$, e si voglia eliminare la y , la seconda darà $y = \frac{4aa + 3xx}{2x}$, e però $yy = \frac{16a^4 + 24aaxx + 9x^4}{4xx}$,

e sostituito questo valore nella prima, sarà essa $xx + 5ax = \frac{48a^4 + 72aaxx + 27x^4}{4xx}$, cioè $23x^4 - 20ax^3 + 72aaxx + 48a^4 = 0$.

Che se si voglia eliminare la x , ritrovato il di lei valore per quella, che si vuole, delle due equazioni, per esempio per la seconda, cioè $x = \frac{y \pm \sqrt{yy - 12aa}}{3}$, e sostituito nella prima, sarà essa $\frac{2yy - 12aa \pm 2y\sqrt{yy - 12aa}}{9} + 5ay \pm 5a\sqrt{yy - 12aa} = 3yy$, e liberando dai radicali , ed

ordinando l'equazione , sarà dopo un lungo calcolo $621y^4 - 810ay^3 + 648a^2yy + 360a^3y + 2844a^4 = 0$, e dividendo per 9 sarà finalmente $69y^4 - 90ay^3 + 72a^2yy + 40a^3y + 316a^4 = 0$.

82. Generalmente per le equazioni, nelle quali l'incognita, che si vuole eliminare, sia a qualunque grado elevata in ambe le equazioni; si trovi per mezzo di ciascuna di esse il valore della massima potestà della stessa incognita, cioè posta essa massima potestà sola da una parte,

del

del segno d'egualità, si pongano dall'altra parte tutti gli altri termini, e questi due valori tra loro paragonati ci daranno un'equazione di grado inferiore; si ripeta la stessa operazione fino a tanto, che si abbia un'equazione affatto semplice rispetto ad essa incognita, ed in conseguenza il suo valore espresso per l'altra incognita, e per le cognite, il qual valore si sostituisca in una delle date equazioni in luogo dell'incognita, e sue potestà, e si avrà un'equazione espressa con l'altra sola incognita, e con le cognite.

Sieno le due equazioni $y^3 + aay = bxx$, e $y^3 - bxx = aax$, e si voglia eliminare la y ; farà dunque per la prima $y^3 = bxx - aay$, per la seconda $y^3 = aax + bxx$, e però $bxx - aay = aax + bxx$, cioè $-x = y$, e fatte le debite sostituzioni in quella, che si vuole, delle due equazioni, si avrà $-x^3 - aax = bxx$. Sieno le due equazioni del numero antecedente $xx + 5ax = 3yy$, $2xy - 3xx = 4aa$, e si voglia eliminare la x . Sarà adunque, per la prima, $xx = 3yy - 5ax$, per la seconda, $xx = \frac{2xy - 4aa}{3}$, e però farà l'equazione

$$3yy - 5ax = \frac{2xy - 4aa}{3}, \text{ da cui averassi } x = \frac{9yy + 4aa}{2y + 15a}, \text{ e}$$

questo valore sostituito in una delle due proposte equazioni, per esempio nella prima, farà

$$\frac{81y^4 + 72aayy + 16a^4}{4yy + 60ay + 225aa} + \frac{45aayy + 20a^3}{2y + 15a} = 3yy;$$

e finalmente riducendo al comune denominatore, sarà $69y^4 - 90ay^3 + 72aayy + 40a^3y + 316a^4 = 0$, come sopra.

Ma

Ma se le due equazioni non avessero il massimo termine dell'incognita, che si vuole eliminare, alla stessa potestà, si moltiplichi l'equazione di grado inferiore per tale potestà di essa incognita, onde sia dello stesso grado dell'altra, indi si proceda nel detto modo. Così se sia $y' = xyy + 3aax$, ed $yy = xx - xy - 3aa$, e debbasi togliere la y ; si moltiplichi la seconda equazione in y , onde sia $y' = xxy - xyy - 3aay$, e però $xxy + 3aax = xxy - xyy - 3aay$. Da questa si cavi il valore di yy , cioè $yy = \frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x}$, il quale paragonato col valore di yy dato dalla seconda equazione proposta $yy = xx - xy - 3aa$, darà $\frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x} = xx - xy - 3aa$, cioè $3xxy - 3aay + 3aax = 2x^2$, e però $y = \frac{2x^2 - 3aax}{3xx - 3aa}$, e sostituito questo valore in una delle due proposte equazioni, come nella seconda, sarà $\frac{4x^4 - 12aax^3 + 9a^4xx}{9x^4 - 18aaxx + 9a^4} = \frac{xx - 2x^4 + 3aaxx - 3aa}{3xx - 3aa}$; cioè riducendo allo stesso denominatore, $x^6 + 18aax^4 - 45a^4xx + 27a^4 = 0$.

Ne' casi particolari possono esservi de' ripieghi, e delle più spedite maniere per ottenere l'intento, ma non cadono sotto regola alcuna. Si potrà vederne un' esempio nelle due equazioni $x + y + \frac{yy}{x} = 20b$, ed $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140bb$. Volendo eliminare la x ; si trasporti il termine y

della prima dall'altra parte, onde sia $x + \frac{yy}{x} = 2ob - y$, e quadrando ambi i membri, $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 4oobb - 4oby + yy$, cioè $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 4oobb - 4oby$; ma il primo membro di questa equazione è lo stesso del primo membro della seconda equazione proposta, farà adunque $4oobb - 4oby = 14obb$, cioè $y = \frac{12b}{2}$.

83. Con calcolo bensì più laborioso, e lungo, ma nello stesso modo, se tre, quattro ec. sono le equazioni, ed altrettante le incognite, si riducono ad una sola, imperciocchè per mezzo di un' equazione si elimina un' incognita, il di cui valore dato per l'altre, e per le cognite si sostituisce in ciascuna delle equazioni rimanenti; indi per mezzo di un'altra equazione si elimina un'altra incognita, ed il di lei valore si sostituisce in quelle, che rimangono, e così di mano in mano fino al fine. Sieno le tre equazioni $x + y = c + z$; $z + x = a + y$; $z + y = b + x$, e si voglia un' equazione sola data per z . Dalla prima equazione si cavi il valore della y , cioè $y = c + z - x$, si sostituisca questo valore nell'altre due, e sono $z + x = a + c + z - x$, cioè $2x = a + c$ in luogo della seconda, e $z + c + z - x = b + x$, cioè $2z = b - c + 2x$ in luogo della terza; in quest'ultima si sostituisca in luogo della x il valore, che si cava dalla seconda trasformata, cioè $x = \frac{a+c}{2}$,

e si

e si avrà finalmente $2z = b - c + a + c$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$.

In quest' altra maniera pure si può operare . Da ciascuna delle tre equazioni date si cavi il valore , per esempio della y , vale a dire $y = c + z - x$, $y = z + x - a$, $y = b + x - z$; Dal paragone di due a due di questi valori , a piacere , si formino due equazioni , che non averanno la y ; da una di queste equazioni si cavi il valore dell' altra incognita x , che si sostituisca nell' altra equazione, vale a dire si facciano le due equazioni $c + z - x = z + x - a$, e $c + z - x = b + x - z$; dalla prima, se così piace, si cavi il valore della x , cioè $x = \frac{a+c}{2}$, che si sostituisca nella seconda, e viene l'equazione $c + z - \frac{a+c}{2} = b + \frac{a+c}{2} - z$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$, come sopra, data per la sola incognita z . Nel-

lo stesso modo si operi quando le equazioni sono più composte, ed in maggior numero . Nella soluzione de' problemi si vedrà l'uso delle regole insegnate .

84. Qualunque volta le condizioni , o sia i dati del problema non ci somministrino tante equazioni , quante sono le incognite assunte , onde due per necessità rimangano , il problema sarà sempre indeterminato , nè potrassi mai trovare il valore di una delle incognite , se non supposto , e determinato il valore dell' altra , nel qual caso ogni problema indeterminato si fa determinato . Per formare , quantunque anticipatamente , qualche idea di que-

sti problemi indeterminati, cerco due numeri, la somma de' quali sia eguale a 30. Chiamo il primo numero x , se chiamerò il secondo $= 30 - x$, per la condizione del problema, non avrò poi il modo di arrivare all'equazione; adunque chiamo il secondo y , farà per la condizione del problema $x + y = 30$. E poichè non è possibile il ritrovare materia d'altra equazione, con cui eliminare una delle due incognite, il problema è di natura sua indeterminato, ma se assegnerò un valore determinato ad una delle incognite, e supporrò, per esempio $y = 8$, farà $x = 30 - y = 22$. Ma perchè si possono assegnare successivamente infiniti valori alla y , così infiniti sono i valori della x , ed in conseguenza d'infinita soluzioni è capace il problema. Ne prendo un' altro esempio dalla Geometria. Si debba ritrovare un rettangolo eguale ad un dato quadrato; si chiami y la base del rettangolo, l'altezza x , ed aa il dato quadrato; adunque farà l'equazione $aa = xy$, e non avendo materia d'altra equazione, rimane il problema indeterminato, come di fatto infiniti sono i rettangoli al dato quadrato eguali, potendosi in infiniti modi variare la base, e relativamente l'altezza di quelli. Ma se si aggiungerà la condizione, che la base del rettangolo debba essere, per esempio, eguale ad $\frac{x}{2}$, farà $y = \frac{x}{2}$, e l'equazione $\frac{xx}{2} = aa$, e così potendosi in infiniti modi variare una delle due incognite, in infiniti si varierà l'altra, ed infinite saranno le soluzioni del problema.

85. All' opposto : Se le condizioni del problema, che devonfi adempire, daranno più equazioni , che incognite, il problema sarà più che determinato , e per lo più impossibile ; e se avrà ad esser possibile , converrà , che i valori delle date si restringano a certa legge , la quale talvolta ci può far vedere innumerabili casi , ne' quali è possibile il problema . Nel sopra notato esempio di ritrovare due numeri , la somma de' quali sia eguale a 30 , che quando nulla di più si eligga , è problema indeterminato ; se si aggiunga la condizione , che in oltre la differenza de' quadrati di essi numeri sia data , per esempio , eguale a 60 , il problema è determinato , avendo noi in questo caso due equazioni , cioè $x + y = 30$, e $xx - yy = 60$, e cavando dalla prima il valore della y , e sostituendone il quadrato nella seconda , sarà $x = \frac{960}{60}$, cioè $x = 16$, ed in conse-

guenza $y = 14$. Ma se di più si aggiungesse la terza condizione , che la somma de' quadrati di essi numeri sia eguale ad un dato numero , il problema è più che determinato , e però possibile nel solo caso , in cui il numero dato , a cui si vuole eguale la somma de' quadrati , sia appunto la somma di essi quadrati , cioè il 452 . Così nell' altro esempio del rettangolo eguale al dato quadrato ; se si vorrà , che il rettangolo sia sopra una data base , il problema sarà determinato , ma più che determinato se si pretenda in oltre , che i lati abbiano una data ragione tra loro , e possibile nel solo caso , che quella ragione sia ap-

pun-

punto quella , che nasce dall' altre condizioni della base data , e dell' eguaglianza al dato quadrato .

86. Risolte le equazioni, e ritrovati i valori dell' incognita ne' problemi geometrici , rimane che si costruiscano questi valori , cioè dalle date linee del problema si trovi quella , che appunto sia la incognita quantità , che si cercava . Sia in primo luogo il valore dell' incognita una frazione incompleta razionale , come sarebbe $x = \frac{ab}{c}$,

se si farà l'analogia $c, b :: a$, al quarto, sarà esso $\frac{ab}{c}$, adun-

que sulla indefinita AC (Fig. 13.) presa $AB = c$, ed alzata in qualunque angolo $BD = b$, e condotta per i punti A, D la indefinita AE , se si farà $AC = a$, e si condurrà CE parallela a BD , farà $CE = \frac{ab}{c} = x$. O pure condotte

in qualunque angolo EAC le indefinite AE, AC , se si prenda $AB = c$, $AD = b$, $AC = a$, e condotta dal punto B al punto D la retta BD , dal punto C si tiri CE parallela a BD , farà $AE = \frac{ab}{c}$. Con questi adunque , o altri teore-

mi di geometria si trovi la quarta proporzionale delle tre quantità date, o la terza, se sono due, ed averassi in linea il valore dell' incognita. Se sia $x = \frac{abc}{mn}$, si instituisca una

prima analogia , prendendo una qualunque lettera del denominatore, e due del numeratore, per esempio $m, b :: a$, al quarto , che è $\frac{ab}{m}$, si ritrovi la linea , che sia $= \frac{ab}{m}$, e si

chia-

chiami f , adunque sarà $x = \frac{fc}{n}$; si instituisca la seconda

analogia $n, f :: c$, al quarto, e sarà esso $\frac{fc}{n}$, cioè $\frac{abc}{mn}$.

Adunque presa (Fig. 13.) $AB = m, AC = a, BD = b$,
sarà $CE = ab = f$; indi prodotta indefinitamente CE , si

prenda $CH = n, CK = c$, e condotta HE , si tiri dal punto K la retta KI parallela ad HE , sarà $CH, CE :: CK, CI$, cioè $n, \frac{ab}{m} :: c, \frac{abc}{mn} = CI = x$.

Se le dimensioni del numeratore, e denominatore faranno maggiori, in maggior numero cresceranno le analogie da instituirsi, ma sempre con lo stesso ordine.

87. Quindi se il valore dell'incognita sarà composto di più frazioni incomplete, o di interi, e frazioni, ritrovate le linee, che a ciascun termine sono eguali, e sommate esse, o sottratte, secondo i segni, daranno la linea espressa dal valore dell'incognita.

88. Da questa regola si ricava il modo di trasformare un piano in un'altro di un dato lato, un solido in un'altro di uno, o di due lati dati ec. cioè un qualunque termine di due, tre ec. dimensioni in un'altro, il quale contenga una data lettera, se è di due dimensioni; una o due date, se è di tre dimensioni; ne contenga una, due, o tre date, se è di quattro ec.; imperciocchè sia il termine bb , che si voglia trasformare in un'altro, che contenga la let-

tera a , per essa lettera a si divida il termine bb , sarà $\frac{bb}{a}$;

con la data regola si trovi nella (*Fig. 13.*) una linea eguale a $\frac{bb}{a}$, e si chiami m ; adunque sarà $\frac{bb}{a} = m$, e però $bb = am$.

Sia ffc da trasformarsi in modo, che contenga ab ; si trovi la linea eguale ad $\frac{ffc}{ab}$, che si chiami n , adunque sarà $\frac{ffc}{ab} = n$, e però $ffc = abn$; se si avesse voluto, che contenesse solamente la lettera a , si avrebbe fatto $\frac{ffc}{a} = n$, e però $ffc = an$.

La cosa è chiara, nè occorre darne altri esempi.

89. Ciò posto; sia in secondo luogo il valore dell'incognita una frazione, o più frazioni complesse, cioè sia il denominatore di più termini, come $x = \frac{a'}{bb + cc}$, si tras-

formi il termine, per esempio, cc in un' altro, che contenga la lettera b , e sia bm ; adunque avrassi $\frac{a'}{bb + bm}$,

quindi si risolva in due analogie, cioè $b, a :: a', a$, al quarto $\frac{aa'}{b}$; $b + m, a :: a', a$, al quarto $\frac{aa'}{b + m}$, e fatte al

solito le costruzioni per mezzo de' triangoli simili, si avrà la linea, che è il valore dell'incognita. S'avrebbe potuto egualmente lasciare il termine cc nel denominatore, e trasformare bb in un' altro, che avesse contenuta la lettera c , per esempio cn ; e farebbe stata la frazione $\frac{a'}{cc + cn}$,

che

che si risolve nelle due analogie $c, a :: a, \frac{aa}{c}$, e $c+n,$

$\frac{aa}{c} :: a, \frac{a^1}{cc+cn}$. Sia $x = \frac{b^1 c}{a^1 + b^1}$; si trasformi nel denominatore

il termine b^1 in aan , e farà $\frac{b^1 c}{a^1 + aan}$, che si risolve in tre

analogie $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^1}{aa}$; $a+n, c :: \frac{b^1}{aa}$,

$\frac{b^1 c}{aan + a^1}$. Se il denominatore fosse di tre termini, se ne

dovrebbero trasformare due; se di quattro, se ne trasformerebbero tre ec., così se fosse stato $x = \frac{b^1 c}{a^1 + b^1 - bcc}$, si

avrebbe fatto $b^1 = aan$, e $bcc = aap$, e però farebbe $x = \frac{b^1 c}{a^1 + aan - aap}$, che istessamente si risolverà in tre ana-

logie; cioè $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^1}{aa}$; $a+n-p, c :: \frac{b^1}{aa}$, $\frac{b^1 c}{a^1 + aan - aap}$.

Non può fare difficoltà alcuna, che il numeratore della frazione sia complesso, cioè di più termini, poichè la frazione equivale ad altrettante, quanti sono i termini del numeratore, di modo che $\frac{aa \pm bb}{a^1 - c^1}$ è lo stesso, che

$\frac{aa}{a^1 - c^1} \pm \frac{bb}{a^1 - c^1}$, e però risolvendo nel modo spiegato ciascu-

na di queste, la somma, o differenza (secondo i segni) delle linee da esse espresse ci darà la linea, che è il valore dell'incognita.

90. Ma senza moltiplicare le operazioni col ridurre la frazione di numeratore complesso a più frazioni, basterà usare opportunamente della trasformazione de' termini nel numeratore, e nel denominatore in quella guisa, che si è veduto doverfi fare fin' ora nel denominatore; e però sia $x = \frac{aa+bc}{a+b}$, si trasformi il termine bc nel termine am , e sarà la frazione $\frac{aa+am}{a+b}$, quindi $a+b, a+m :: a, aa+am$. Sia $aacc - abcf$, si faccia $bf = am$, e la frazione $\frac{aa+am}{a+b} = \frac{aacc - abcf}{acf + bff}$, sarà $\frac{aacc - aacm}{acf + amf}$, cioè $\frac{acc - acm}{cf + mf}$, e però $f, a :: c, \frac{ac}{f}$, e $c+m, c-m :: \frac{ac}{f}, \frac{acc - acm}{fc + mf}$.

Se però il numeratore, e denominatore della frazione sono tali, che senza trasformare termine alcuno si possono risolvere ne' suoi componenti lineari, non si dovrà far uso della trasformazione, che in questi casi moltiplicherebbe le operazioni inutilmente. Tali sarebbero le frazioni $\frac{aab}{aa-cc}, \frac{a^3-abb}{ac+cc}$, e simili; la prima delle quali senz' altro si risolve nelle due analogie $a+c, a :: a, \frac{aa}{a+c}$, ed $a-c, b :: \frac{aa}{a+c}, \frac{aab}{aa-cc}$; la seconda nelle due $c, a :: a+b,$

$\frac{aa+ab}{c}$, ed $a+c$, $a-b :: \frac{aa+ab}{c}$, $\frac{a^3-abb}{ac+cc}$. Anzi mol-

te volte, senza trasformare i termini, tornerà affai più comodo servirsi dell'etrazione delle radici per risolvere nelle analogie la frazione; così la frazione $\frac{aa+bc}{a}$ si risolve

nella analogia $a, \sqrt{aa+bc} :: \sqrt{aa+bc}, \frac{aa+bc}{a}$; la frazio-

ne $\frac{a^3+abb}{aa+cc}$ si risolve nelle due analogie $\sqrt{aa+cc},$

$\sqrt{aa+bb} :: \sqrt{aa+bb}, \frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$, e $\sqrt{aa+cc}, a :: \frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$,

$\frac{a^3+abb}{aa+cc}$. Talora però è necessario trasformare ancora,

qualche termine, come nella frazione $\frac{a^3+bbe}{aa-cc}$, la quale

non potrà risolversi nè meno coi radicali, se non trasformando uno dei termini del numeratore, per esempio, bbe in acm , onde sia $\frac{a^3+acm}{aa-cc}$, e però $a+c$, $a :: \sqrt{aa+cm},$

$\frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}$, ed $a-c, \sqrt{aa+cm} :: \frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}, \frac{a^3+acm}{aa-cc}$.

Si dica lo stesso di frazioni più composte.

Tra le diverse assegnate maniere, quale poi debba eleggersi ne' casi particolari, non si può definire; si dovrà forse provarne più d'una, ed appigliarsi a quella, che ci fornisca una più semplice costruzione del proposto problema.

91. Per ciò che riguarda poi il ritrovare quelle linee,

che vengono espresse dai radicali; sia in terzo luogo il valore dell'incognita un intiero radicale quadratico, per esempio $x = \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale fra la a , e la b ; presa (Fig. 14.) $AB = a$, ed in diretto $BC = b$, e divisa per metà in H la composta AC , si descriva col raggio HC il semicircolo ADC , e dal punto B si alzi la perpendicolare BD terminata alla periferia, farà il rettangolo di AB in BC eguale al quadrato di BD ; cioè $ab = BD^2$, e però $\sqrt{ab} = BD = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, presa $AB = 2a$, $BC = a$, farà $BD = \sqrt{2aa}$ ec.

E se la radicale fosse di quantità complessa, come, $x = \sqrt{4aa \pm ab}$, o pure $x = \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac}$; fatta AB nel primo caso eguale a $4a \pm b$, cioè alla somma di $4a$, e di b , se il segno è positivo, ed alla differenza se è negativo; e nel secondo caso fatta $AB = 3a \pm b \pm 2c$, e presa $BC = a$, si descriva il semicircolo ADC al diametro AC , ed alzata la perpendicolare BD , farà essa perpendicolare nel primo caso eguale alla $\sqrt{4aa \pm ab} = x$, e nel secondo $= \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac} = x$.

Generalmente sieno quanti si vogliono i termini sotto il vincolo, ed in qualunque modo combinati coi segni, si costruirà sempre il valore per mezzo del semicircolo, quando ciascun termine sia moltiplicato nella stessa lettera, facendo l'uno de' segmenti, per esempio, CB eguale a quella lettera, e l'altro segmento BA eguale alla somma, o differenza di tutti i termini per essa lettera divisi, ed al-

zan-

zando la perpendicolare BD . E' facile il vedere, che se la combinazione de' segni rendesse quantità negativa il segmento BA , farebbe negativa la quantità sotto il vincolo, e però immaginario il valore dell'incognita; tale sarebbe $x = \sqrt{ab - ac}$, supposta c maggiore di b .

92. Che se ciascun termine non sarà per la stessa lettera moltiplicato, tali si possono essi rendere trasformando quelli, che non lo sono; e però se sia $x = \sqrt{aa \pm bb}$, facciassi $bb = am$, e sarà $x = \sqrt{aa \pm am}$, e presa $AB = a \pm m$, cioè $= a \pm \frac{bb}{a}$, e $BC = a$, e descritto il semicircolo, sarà

$BD = \sqrt{aa \pm bb} = x$. Illessamente, data $x = \sqrt{aa + bb - cc}$, si faccia $bb = am$, e $cc = an$, e sarà $x = \sqrt{aa + am - an}$, e presa $AB = a + m - n$, e $BC = a$, sarà $BD = \sqrt{aa + bb - cc} = x$.

93. Ma comunque sieno i termini, senza fare mutazione alcuna, si costruiranno sempre i radicali quadratici, o col solo triangolo rettangolo, o con esso, e col circolo assieme. Sia $x = \sqrt{aa + bb}$, si prenda (Fig. 15.) $AB = a$, $BC = b$ perpendicolare ad AB , sarà $AC = \sqrt{aa + bb} = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, fatta $AB = a$, e $BC = a$, sarà $AC = \sqrt{2aa}$; sia $x = \sqrt{3aa}$, fatte come prima le AB , BC eguali ad a , ed alzata sulla retta AC la normale $CD = a$, sarà $AD = \sqrt{3aa}$. Sia $x = \sqrt{5aa}$, fatta $AB = 2a$, $BC = a$, sarà $AC = \sqrt{5aa}$. Sia $x = \sqrt{aa + bb + cc}$, fatta $AB = a$, $BC = b$, e normale ad AB , sulla AC si alzi la perpendicolare $CD = c$,
e

e sarà l'ipotenusa $AD = \sqrt{aa + bb + cc} = x$, istessamente si proceda se la quantità fosse più composta. Sia $x = \sqrt{aa + bc}$; quando non si trasformi il termine bc nel modo detto di sopra, presa (Fig. 16.) $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, sul diametro CD si descriva il semicircolo CED , la ordinata BE sarà $= \sqrt{bc}$, e tirando la ipotenusà AE , sarà essa eguale alla $\sqrt{aa + bc} = x$. Sia $x = \sqrt{aa + bc + cc}$, sulla AE si tiri la normale $EM = e$, e sarà $AM = \sqrt{aa + bc + cc} = x$. Sia $x = \sqrt{aa + bc + cc}$, presa $BC = b + c$, $BD = c$, sarà $BE = \sqrt{bc + cc}$, ed $AE = \sqrt{aa + bc + cc}$. Se più faranno i termini, cresceranno le operazioni, ma non le difficoltà. Sia $x = \sqrt{aa - bb}$; al diametro $AB = a$ (Fig. 17.) si descriva il semicircolo ACB , a cui si inscriva la corda $AC = b$, sarà, per l'angolo retto ACB , $BC = \sqrt{aa - bb}$. Sia $x = \sqrt{aa - bb + bb}$, si produca AC in M in modo, che sia $CM = b$, e condotta BM , sarà essa $= \sqrt{aa - bb + bb} = x$. Sia $x = \sqrt{aa - bb - bb}$, nel semicircolo ACB si inscriva la corda $AC = \sqrt{bb + bb}$, sarà $BC = \sqrt{aa - bb - bb}$. Sia $x = \sqrt{aa - bc}$, o pure $x = \sqrt{aa - bc - cc}$; presa (Fig. 18.) $AB = b$ nel primo caso, ed $= b + e$ nel secondo, e AD in diretto $= c$, $AH = a$, si descrivano coi diametri BD , AH i due semicircoli BCD , AEH , la ordinata AC sarà $= \sqrt{bc}$ nel primo caso, ed $= \sqrt{bc + cc}$ nel secondo, e però presa

presa $AE = AC$, e condotta la corda EH , sarà essa $= \sqrt{aa - bc}$ nel primo caso, ed $= \sqrt{aa - bc - ce}$ nel secondo.

Che se fosse $x = \sqrt{aa - bc - ce}$, fatta $AB = b$, $AD = c$, e presa in oltre $CF = e$ normale ad AC , sarà $AF = \sqrt{bc + ce}$, quindi fatta $AI = AF$, sarà $IH = \sqrt{aa - bc - ce}$.

Sia $x = \sqrt{a^* + b^*}$, cioè $x = \sqrt{a^* + b^*}$, si trasformi

il secondo termine b^* in $aamm$, e sarà $x = \sqrt{a^* + aamm}$, e levando dal secondo radicale il quadrato aa , sarà $x = \sqrt{a \sqrt{aa + mm}}$; si faccia (Fig. 19.) $AB = a$, BC normale eguale ad m , sarà $AC = \sqrt{aa + mm}$. Prodotta CA in H di modo, che sia $AH = AB = a$, sul diametro HC si descriva il semicircolo HDC , e condotta dal punto A la perpendicolare AD al diametro, sarà essa $AD = \sqrt{a \sqrt{aa + mm}} = x$.

I casi più composti si ridurranno senza fatica allì già spiegati. Nulla aggiungo intorno alle frazioni composte di quantità razionali, e di radicali, poichè niente altro esiggon, se non la combinazione delle date regole per quelle, e per queste.

94. Per la costruzione delle equazioni di quadratica affetta, che sono le più alte, che da me si trattino in questo Capo, ò supposta necessaria la risoluzione loro, ed ò assegnate le regole, affinchè si abbiano i valori dell'incognita da costruirsi nelle maniere poco fa insegnate. Non è però necessaria questa previa risoluzione, e senza di essa si possono costruire nel seguente modo.

Tutte

Tutte le infinite equazioni di quadratica affetta vengono espresse dalla formola $xx \pm ax \pm bb = 0$, cioè dalle quattro, che nascono dalle quattro diverse combinazioni de' segni,

$$1. \quad xx + ax - bb = 0$$

$$2. \quad xx - ax - bb = 0$$

$$3. \quad xx + ax + bb = 0$$

$$4. \quad xx - ax + bb = 0$$

intendendo che la lettera a esprima tutte le quantità, che formano il coefficiente del secondo termine, e b la radice quadrata del complesso di tutti i termini cogniti. Adunque per costruire le due, prima, e seconda: si prenda (Fig. 20.) $CA = \frac{1}{2}a$, AB in angolo retto, ed eguale a b , col raggio CA si descriva il circolo AED , e dal punto B si tiri la retta BD terminata alla periferia in D , la quale passi per lo centro C ; farà BE il valore positivo dell'incognita, cioè la radice vera, o sia positiva dell'equazione $xx + ax - bb = 0$, e BD farà la falsa o negativa; siccome all'opposto farà BD la vera, e BE la falsa dell'equazione $xx - ax - bb = 0$. Ed in fatti risolvendo le due equazioni, sono esse $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, ed $x = \frac{a}{2} \pm$

$\sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e per la costruzione essendo $CA = CE = CD = \frac{a}{2}$, $AB = b$, farà $CB = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e però $BE = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb} - a$, valore positivo della incognita nella prima equazione, e

BD

BD

BD presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$, valore negativo.

Così farà BD presa positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$, valore posi-

tivo dell'incognita nella seconda equazione, e per essere

CB maggiore di CE , farà EB negativa $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$, valore negativo.

La terza, e quarta formola si costruirà così. Presa (Fig. 21.) $CA = \frac{1}{2}a$, ed AB in angolo retto $= b$, come nelle costruzioni superiori, e descritto col raggio CA il semicircolo ADH , si conduca BD parallela ad AC , le due rette BE , BD faranno i due valori, cioè le due radici negative dell'equazione $xx + ax + bb = 0$, e le due positive dell'equazione $xx - ax + bb = 0$. Imperciocchè, risolvendo le equazioni, ci darà la terza $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$, e la

quarta $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$; ora condotte le rette CD , CE , e

CI perpendicolare a BD , farà $ID = IE = \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$, e però

BE negativa $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$, valore negativo dell'in-

cognita nella terza equazione, per esser BI maggiore di IE ;

e farà BD presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$, altro valore

negativo della stessa terza equazione. All'opposto farà BD po-

sitiva

positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e BE positiva $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$,
 ambi i valori positivi dell' incognita nella quarta equa-
 zione.

Adunque per costruire una qualunque equazione di
 quadratica affetta, basterà assumere il raggio CA eguale
 alla metà del coefficiente del secondo termine, e la tan-
 gente AB eguale alla radice quadrata dell'ultimo termine,
 ed il rimanente, come nell'una, o nell'altra delle due
 figure, secondo che sarà positivo, o negativo l'ultimo
 termine; quindi per costruire, per esempio, l'equazione
 $xx + ax - bx - aa + cc = 0$, si faccia $AC = \frac{a}{2} - b$, ed $AB =$
 $\sqrt{aa - cc}$ nella prima delle due figure, se a è maggiore
 di c ; ed $AB = \sqrt{cc - aa}$ nella seconda, se a è minore
 di c . Da questo esempio si vede, come debbasi operare in
 tutti gl'altri.

Può darsi il caso, che nella costruzione della Fig. 21.
 la retta BD non tagli, ma tocchi il circolo ADH ; o che
 nè lo tagli, nè lo tocchi; lo toccherà quando sia $AC = AB$,
 cioè $\frac{1}{2}a = b$, ed i due valori dell'incognita dell'equazione
 BE, BD saranno eguali, l'uno positivo, e l'altro ne-
 gativo; non lo toccherà, nè lo taglierà quando sia B
 maggiore di AC , cioè b maggiore di $\frac{1}{2}a$, e l'incognita
 non avrà valori, cioè saranno immaginari; e ciò confron-
 ta pure colla risoluzione analitica, imperciocchè quan-
 do

do sia $\frac{1}{2}a = b$, sarà $\frac{aa-bb}{4} = 0$, e però i due valori

$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$, $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$ faranno $x = -\frac{a}{2}$,

$x = \frac{a}{2}$, e quando sia $\frac{a}{2}$ minore di b , sarà $\sqrt{\frac{aa-bb}{4}}$ quan-

tità immaginaria, e però immaginarj i due valori dell'incognita.

95. In queste costruzioni è stato necessario ritrovare la radice quadrata dell'ultimo termine dell'equazione, la quale ci fornisce la tangente AB del circolo. Se però esso ultimo termine sia, o voglia renderfi (il chè è in nostra mano) eguale ad un rettangolo, potranno costruirsi anche in quest'altra maniera le quattro formole:

$$1. \quad xx + ax - bc = 0$$

$$2. \quad xx - ax - bc = 0$$

$$3. \quad xx + ax + bc = 0$$

$$4. \quad xx - ax + bc = 0$$

Si descriva il circolo BAD (Fig. 22.) di un qualunque diametro, purchè esso non sia minore nè di a , nè di $b-c$, (suppongo b maggiore di c , cioè per b intendo il lato maggiore, e per c il lato minore del rettangolo dato) da un qualunque punto A nella periferia si inscrivano nel circolo le due corde $AB=a$, $AD=b-c$, e si produca questa in F , onde sia $DF=c$; col centro C del primo circolo, e col raggio CF si descriva il secondo FGH , che taglierà in F, E, G, H le corde AD, AB prolungate;

ciò fatto, farà AG la radice vera, o sia positiva, cioè il valore positivo, ed AH il negativo per l'equazione $xx + ax - bc = 0$; ed all'opposto AG farà il negativo, ed AH il positivo per l'equazione $xx - ax - bc = 0$.

Per vedere questa verità bisogna supporre due proprietà del circolo, che da' Geometri si dimostrano, cioè che le rette EA , DF sono eguali tra loro, siccome tra loro le due GA , BH , e che sono eguali i rettangoli $EA \times AF$, e $GA \times AH$. Supposti questi due Teoremi, si divida BA per metà in M , per la sesta del secondo d'Euclide, farà il quadrato di MG eguale al quadrato di MA con il rettangolo di $BG \times GA$, cioè di $HA \times AG$, cioè di $FA \times AE$; ma il quadrato di MA , per la costruzione, è $= \frac{aa}{4}$, ed il rettangolo di $FA \times AE$ è $= bc$, adunque sarà

$$MG = \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}, \text{ e però } AG = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}, \text{ valore posi-}$$

$$\text{tivo, ma } AH = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}, \text{ quindi } AH \text{ negativa} = -\frac{a}{2} -$$

$$\sqrt{\frac{aa}{4} + bc}, \text{ altro valore che è negativo; l'uno e l'altro ap-}$$

punto, come nascono dalla risoluzione della prima equazione. Per la stessa ragione AG negativa sarà $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$,

$$\text{ed } AH \text{ positiva} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}, \text{ che sono i valori della}$$

incognita nella seconda equazione.

Rif.

Rispetto alla terza, e quarta equazione; descritto un circolo qualunque RAD , (*Fig. 23.*) col diametro non minore di a , nè di $b+c$, s'incrivano in esso due corde da un qualunque punto A della periferia, cioè $AR = a$, $AD = b+c$, e fatta $DF = c$, col centro C del primo circolo, e col raggio CF si descriva l'altro circolo GHE , che taglierà le due corde AR , AD nei punti G , H , F , E ; ciò fatto, faranno AG , AH i due valori negativi della terza equazione, ed i due positivi della quarta; imperciocchè divisa RA per metà in M , farà, per la sesta del secondo libro d'Euclide, MA quadrato eguale al rettangolo di $HA \times AG$, cioè di $RG \times GA$, cioè di $DE \times EA$, con di più il quadrato di MG ; adunque sarà $\frac{aa}{4} = bc + \overline{MG}^2$, cioè

$MG = \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e però $-MA + MG$, cioè GA negativa

farà $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e $-MG - MR$, cioè GR negativa

farà $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, ambi valori negativi dell'incognita nella terza equazione. Similmente $MG + MR$, cioè

$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ farà GR positiva, ed $MA - MG$, cioè

$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ farà AG positiva, ambi valori positivi dell'incognita nella quarta equazione.

E' chiaro, e per la costruzione della Figura vigesima

terza,

terza, e per la risoluzione della terza, e quarta equazione, che quando sia $bc = \frac{aa}{4}$, il circolo $HGEF$ toccherà la retta RA , e faranno eguali i due valori; e se bc sarà maggiore di $\frac{aa}{4}$, nè la toccherà, nè la taglierà, e faranno i due valori immaginari.

Vedute quanto può bastare le regole principali, passerò a farne uso nella soluzione de' Problemi, e però sia

PROBLEMA I.

96. Sia una certa somma di soldi da distribuirsi a certi poveri, ed il numero de' soldi sia tale, che per darne tre a ciascun povero ne manchino otto, e dandone due, ne avanzino tre; si cerca il numero de' poveri, e de' soldi.

Si chiami il numero de' poveri $= x$, adunque poichè il numero de' soldi è tale, che per darne tre a ciascheduno ne mancano otto, sarà il numero de' soldi $3x - 8$; ma dandone due, ne avanzano tre, sarà adunque pure $= 2x + 3$, e però sarà l'equazione $3x - 8 = 2x + 3$, cioè $x = 11$. Pertanto undeci faranno i poveri, e perchè $3x - 8$, o pure $2x + 3$ è il numero de' soldi, sostituito l'undeci in luogo della x , sarà esso numero de' soldi $= 25$.

PRO-

PROBLEMA II.

97. *Date le velocità di due mobili, la distanza loro, e la differenza del tempo, in cui principiano a muoversi sopra una retta linea, si dimanda il punto nella linea, ed il tempo, in cui si raggiungeranno.*

Sia (Fig. 24.) in A il primo mobile, la di cui velocità sia tale, che descriva uno spazio c nel tempo f ; sia B il secondo mobile con una velocità tale, per cui descriva lo spazio d nel tempo g , la differenza del tempo, in cui principiano a muoversi sia b , e la distanza AB sia e . Si muovano essi in primo luogo verso la stessa parte, e si raggiungano in D , chiamata adunque $AD = x$, sarà $BD = x - e$. Per avere l'equazione si consideri, che essendo data la differenza del tempo dal principio del moto del mobile A , e del mobile B , se ritroverassi il tempo, che impiega il mobile A , ed il tempo, che impiega il mobile B , e che al tempo minore, cioè a quello del mobile, che per secondo si muove, si aggiunga la data differenza, dovranno indi questi tempi esser eguali; e però con la regola delle proporzioni si dica: se il mobile A fa lo spazio c nel tempo f , in che tempo dovrà descrivere lo spazio x ? cioè $c, f :: x$, al quarto, e sarà esso $= \frac{fx}{c}$; similmente: se il mobile B descrive lo spazio d nel tempo g , lo spazio $x - e$ in che tempo lo descriverà? cioè $d, g ::$

$x - e$, al quarto $\frac{gx - ge}{d}$, è adunque il tempo del mobile

$A = \frac{fx}{c}$, ed il tempo del mobile $B = \frac{gx - ge}{d}$, e la loro

differenza b , e però se il mobile A principia a muoversi dopo il mobile B , farà $\frac{fx}{c} + b = \frac{gx - ge}{d}$, e riducendo al

comun denominatore, $fdx + cbd = cgx - cge$, cioè $cgx - fdx = cbd + ceg$, e dividendo per $cg - fd$, $x = \frac{cbd + ceg}{cg - fd}$.

Se il mobile A si muova prima del mobile B , farà $\frac{fx}{c} =$

$b + \frac{gx - ge}{d}$, e riducendo al comune denominatore, $fdx =$

$cdb + cgx - ceg$, cioè $cgx - fdx = ceg - cdb$, e dividendo per $cg - fd$, $x = \frac{ceg - cdb}{cg - fd}$. Sostituendo nell'espressione,

del tempo totale, $\frac{fx}{c} + b$ nel primo caso, ed $\frac{fx}{c}$ nel secon-

do, in luogo della x il rispettivo valore ritrovato, averassi esso tempo, che si cerca.

Applicherò le formole a qualche esempio. Abbia il mobile A la velocità di fare 9 miglia in un'ora, il mobile B di farne 15 in due ore, e sieno lontani l'uno dall'altro 18 miglia, e B cominci a muoversi un'ora prima di A ; farà adunque $b = 1$, $f = 1$, $c = 9$, $g = 2$, $d = 15$, $e = 18$, e però $x = \frac{324 + 135}{18 - 15} = 153$. Sostituito questo valore in luogo di x , e gli altri nell'espressione $\frac{fx}{c} + b$ del tempo,

farà

farà esso = 18. Adunque si raggiungeranno i due mobili in distanza dal punto A di 153 miglia, dopo 18 ore dal principio del moto.

Abbia il mobile A la velocità di fare quattro miglia in un' ora, il mobile B di farne cinque pure in un' ora, e sieno lontani uno dall' altro 6 miglia, ed A cominci a muoversi due ore prima di B , sarà dunque $b=2$, $f=1$, $c=4$, $g=1$, $d=5$, $e=6$. Presa la formola del secondo caso, sarà $x = \frac{24-40}{4-5}$, cioè $x = 16$; e sostituendo questo valore della x cogli altri nella espressione del tempo $\frac{fx}{c}$,

farà esso = 4. Adunque si raggiungeranno i due mobili A , B in distanza dal punto A di sedici miglia dopo quattro ore dal principio del moto.

Ma se i due mobili si vengano incontro; si uniscano, per esempio, nel punto M ; adunque chiamata $AM=x$, e ritenute le denominazioni, come sopra, si varierà la sola BM , che sarà $= e-x$, ed in conseguenza il tempo del mobile B per correre lo spazio BM , che sarà $\frac{ge-gx}{d}$.

Quindi se A principia il moto dopo del mobile B , sarà $\frac{fx}{c} + b = \frac{ge-gx}{d}$, e se comincia il moto prima, sarà $\frac{fx}{c} = b + \frac{ge-gx}{d}$, le quali equazioni sono, la prima $fdx + cdb = cge - cgx$, cioè $x = \frac{cge - cdb}{cg + fd}$, la seconda $fdx = cdb + cge - cgx$, cioè $x = \frac{cge + cdb}{fd + cg}$.

Q

Abbia

Abbia il mobile A la velocità capace di fare sette miglia in due ore, il mobile B di farne otto in tre ore, e sieno lontani l'uno dall'altro cinquanta nove miglia, ed A si muova un' ora prima di B , farà adunque $b=1$, $f=2$, $c=7$, $g=3$, $d=8$, $e=59$, e però presa la seconda formula $x = \frac{cge + cdb}{cg + fd}$, e sostituiti i valori, farà $x = \frac{1239 + 56}{21 + 16}$, cioè $x = 35$. S'incontreranno adunque i due mobili in distanza dal punto A di 35 miglia dopo dieci ore dal principio del moto, come si vedrà sostituendo nell'espressione del tempo totale, $\frac{fx}{e}$, il valore ritrovato della x , ed i valori di f , e di e .

PROBLEMA III.

98. *Data la massa della Corona del Re Jerone mista d'oro, e d'argento, e data la gravità specifica dell'oro, dell'argento, e della Corona, si dimanda la quantità dell'uno, e dell'altro metallo.*

Sia la massa della corona $= m$, la gravità specifica dell'oro a quella dell'argento, come 19 a 10 $\frac{1}{1}$; ed alla specifica della corona, come 19 a 17. Si chiami x la quantità dell'oro, ch'è nella corona, e però $m - x$ farà quella dell'argento. La massa divisa per la densità, o gravità specifica s'eguaglia al volume di un Corpo, dunque il volume della corona farà $\frac{m}{17}$, quello dell'oro $\frac{x}{19}$, quello dell'

dell'argento $m - x$; ma il volume della corona è egua-

$$10 \frac{1}{1}$$

le ai due volumi dell'oro, e dell'argento, che la compongono; dunque si avrà l'equazione $\frac{m}{17} = \frac{x}{19} + \frac{m-x}{10 \frac{1}{1}}$,

cioè, ordinandola, $\frac{19 - 10 \frac{1}{1} \times x}{19 \times 10 \frac{1}{1}} = \frac{17 - 10 \frac{1}{1} \times m}{17 \times 10 \frac{1}{1}}$, e

però $x = \frac{6 \frac{1}{1} \times 19m}{8 \frac{1}{1} \times 17}$, o sia $x = \frac{190m}{221}$. Quindi posta,

$$8 \frac{1}{1} \times 17$$

$$221$$

per esempio, la massa della corona di cinque libbre, sarà la quantità dell'oro libbre $4 \text{ e } 66$, quella dell'argento libbre

115 .

$$221$$

PROBLEMA IV.

99. Se due pesi sieno tali, che levando dal primo una libbra, il resto sia eguale al secondo accresciuto di questa libbra; ed aggiunta una libbra al primo, e tolta dal secondo, sia la somma doppia del secondo diminuito di questa libbra, si ricercano i pesi.

Si chiami il primo peso $= x$, il secondo $= y$, sarà adunque $x - 1 = y + 1$, per la prima condizione, e $\frac{x + 1}{2} = y - 1$, per la seconda. Dalla prima si ricavi il va-

lore $y = x - 2$, il quale sostituito nella seconda da-

rà $\frac{x+1}{2} = x-3$, e però $x+1 = 2x-6$, cioè $x=7$,
ed in conseguenza $y=5$.

PROBLEMA V.

100. Nel dato circolo DCM (Fig. 25.) data la intercetta AB fra il centro, e la MB condotta dall'estremità del diametro DM perpendicolare ad AC, si cerca nella tangente MO il punto O, onde sia il rettangolo di OM in MB eguale al rettangolo di DM in AB.

Si chiami $AB=b$, $AM=a$, $MO=x$, farà $MB = \sqrt{aa-bb}$, e per la condizione del problema, $x\sqrt{aa-bb} = 2ab$, cioè $x = \frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}}$.

Dal punto D si tiri DO parallela a BM, faranno simili i triangoli MBA, DMO, e però $MB, BA :: DM, MO$; cioè $\sqrt{aa-bb}, b :: 2a, MO = \frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}} = x$.

PROBLEMA VI.

101. Dato un rettangolo, (Fig. 26.) si cerca un parallelo-grammo, i di cui lati sieno multipli in data ragione dei lati del dato rettangolo, e l'area submultipla.

Sia ABCD il dato rettangolo, $AB=a$, $BC=b$, e però l'area $=ab$. Il parallelo-grammo, che si cerca, sia BFHG, il di cui lato BF debba essere ad AB, come

me n ad e , e però $BF = \frac{an}{e}$; il lato BG debba essere
a BC , come m ad e , e però $BG = \frac{bm}{e}$; e finalmente l'area

$BFHG$ debba essere al dato rettangolo ab , come e ad r .
Chiamisi $BL = x$, e però condotta FL normale a BG , sarà
 $FL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, adunque il parallelo-grammo $BFHG$,

cioè $FL \times BG$ sarà $= \frac{bm}{e} \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, il quale, poichè

deve essere al rettangolo $ABCD$, come e ad r , ci darà
l'analogia $\frac{bm}{e} \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, $ab :: e, r$; e l'equazione.

$\frac{bm}{e} \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx} = ab$. Liberando dal radicale, sarà $\frac{aann}{ee} -$
 $\frac{xx}{ee} = \frac{aae^4}{mmrr}$, cioè $xx = \frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}$, e cavando la radice,
 $x = \pm \sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}}$.

Nel lato BA si prenda $BI = \frac{aee}{mr}$, ed $IM = \frac{an}{e}$, e col
centro I , e raggio IM si descriva il semicircolo MLP ; sarà
l'ordinata $BL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}} = x$, e dal punto L alzando
la perpendicolare $LF = BI$, e condotta BF , si prenda $BG =$
 $\frac{bm}{e}$, e compiuto il parallelo-grammo $BHFG$, sarà esso
 $= BG \times FL = \frac{abe}{r}$, cioè al rettangolo $BADC = ab$, co-

me e ad r ; ed il lato BF sarà $= \sqrt{BL + LF} = an$, le quali cose appunto si dovevano fare.

L'estrazione della radice à portata l'ambiguità de' segni, e però due valori dell'incognita, ed in conseguenza due soluzioni del problema; ma è facile il vedere, che questi due valori sono gli stessi, nè richiedesi altro per il valore negativo, se non che si faccia la stessa costruzione dalla parte di B verso C .

PROBLEMA VII.

102. *Inscrivere un Cubo in una data Sfera.*

Sia $KQEP$ (Fig. 27.) il circolo massimo della sfera, A il centro, AT il raggio $= a$, AR la metà dell'altezza, o sia del lato del cubo inscritto, e però facciasi $AR = x$. Per lo punto R s'intenda passare un piano normale ad AT , la di cui comune sezione colla sfera sarà il circolo $QNSKFO$, ed il quadrato in questo circolo inscritto sarà una faccia, o sia un piano del parallelepipedo inscritto alla sfera; ma perchè il parallelepipedo deve essere un cubo, converrà adunque, che sia $GR = SN = NO$, o sia $AR = RI = IO$, e che in oltre i piani, da' quali è chiuso, sieno tra loro in angolo retto. Nel circolo $KPEQ$ farà l'ordinata $KR = RQ = \sqrt{aa - xx}$, e presa $RI = RA = x$, farà $KI = \sqrt{aa - xx} + x$, ed $IQ = \sqrt{aa - xx} - x$, e nel circolo $NKOQ$ l'ordinata $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt{aa - 2xx}$; adunque farà l'equazione $\sqrt{aa - 2xx} = x$, e però $aa = 3xx$, ed $x = \pm \sqrt{\frac{aa}{3}}$. Presa AV eguale alla terza parte del raggio AB , sul dia-

me.

metro CV si descriva il semicircolo CRV ; il punto R , in cui egli taglia il raggio AT , farà il punto ricercato, e farà $AR = \sqrt[3]{aa}$ metà del lato del cubo, dalla parte di T

preso il valore positivo, e dalla parte di Z preso il negativo; quindi presa $AG = AR$, e per i punti R, G tagliata la sfera con due piani normali ad RG , e presa $RH = RI = RA$, e per i punti I, H tagliata la sfera con due altri piani normali ad HI , e con altri due per SN, FO normali ad NO , farà inscritto il cubo. Imperciocchè per la costruzione, come è chiaro, i piani sono tra loro normali, ed essendo $AR = RI = \sqrt[3]{aa}$, farà, per la proprietà del circolo $KQEP$, l'ordinata $RQ = \sqrt[3]{\frac{2aa}{3}}$, e però $IQ = \sqrt[3]{\frac{2aa}{3}} - \sqrt[3]{\frac{aa}{3}}$, ed $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt[3]{\frac{aa}{3}}$, ed in conseguenza tutti i lati eguali; il che ec.

Dalla costruzione di questo problema ne nasce una assai semplice dimostrazione sintetica. Poichè AV è la terza parte del raggio AC , farà il rettangolo CAV , cioè il quadrato di AR , la terza parte del quadrato del raggio, e perchè $AR = RI$, se dal centro A della sfera si tirerà una retta AI al punto I , farà il quadrato di AI doppio del quadrato di AR , cioè due terze parti del quadrato del raggio, e se dallo stesso centro A intenderassi condotto un raggio AO , farà il quadrato IO eguale al quadrato AO meno il quadrato AI , cioè eguale al quadrato del raggio meno

meno due terze parti di esso quadrato, e però eguale ad una terza parte del quadrato del raggio, ed in conseguenza IO eguale ad AR ec.

PROBLEMA VIII.

103. *Dati i due circoli concentrici ACO , BDH , (Fig. 28.) condurre dal punto O una corda tale, che sia $OM = DC$.*

Sia OC la corda cercata, e sia F il centro, $FH = a$, $FO = b$, ed abbassata la perpendicolare ME ad AO , sia $FE = x$, adunque $EM = \sqrt{aa - xx}$, $EO = b - x$, e però $OM = \sqrt{aa - 2bx + bb}$. Dal punto C si conduca CA all'estremità del raggio FA ; faranno simili i due triangoli OEM , OCA , e sarà $OM, OE :: OA, OC$, cioè $\sqrt{aa - 2bx + bb}$, $b - x :: 2b$, $OC = \frac{2bb - 2bx}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ma per la trentesima sesta

del terzo d'Euclide è $DO \times OM = BO \times OH$, e però $DO, BO :: OH, OM$, cioè $DO = \frac{a + b \times b - a}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ed in conseguenza

$$CD = CO - DO = \frac{bb - 2bx + aa - \sqrt{bb - 2bx + aa}}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$$

ma per la condizione del problema deve essere $OM = CD$, dunque sarà $\sqrt{bb - 2bx + aa} = \frac{bb - 2bx + aa}{\sqrt{bb - 2bx + aa}}$, equazione identica, onde si ricava, che dovunque si tiri dal punto O la corda OC , farà sempre $OM = CD$; il che si conosce

vero

verò anche conducendo dal centro F la perpendicolare FL ad una qualunque corda OC ; imperciocchè essendo F il centro dell'uno e dell'altro circolo, la retta FL taglierà per metà tanto DM , quanto CO , e però se dalle eguali LC , LO si leveranno le eguali LD , LM , rimangono eguali le CD , MO .

PROBLEMA IX.

104. *Data la retta indefinita NZ (Fig. 29.), e dati in essa tre punti N, A, K, si ricerca il quarto M tale, che sia NM terza proporzionale di NK, AM.*

Poichè sono dati i tre punti N, A, K , sia $NA=a$, $NK=b$, e chiamata $AM=x$, sarà $NM=a+x$, adunque per la condizione del problema avremo $b, x :: x, a+x$, e ridotta l'analogia in equazione, $xx=ab+bx$, o sia $xx-bx=ab$, che è una quadratica affetta. Si aggiunga, perciò all'uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè bb , e sarà $xx-$

$$bx+bb=ab+bb, \text{ e cavando la radice, } x-\frac{b}{2}=\pm\sqrt{ab+\frac{bb}{4}},$$

$$\text{o sia } x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{ab+\frac{bb}{4}}.$$

Sulla retta NZ indefinitamente prodotta d' ambe le parti si prendano le AR, AQ eguali tra loro; ed eguali ciascuna ad $NK=b$, ed RF quadrupla di NA , cioè $=4a$,

R

sarà

farà $AF = 4a + b$; al diametro FQ si descriva il semicircolo FHQ , farà l'ordinata nel punto A , cioè $AH = \sqrt{4ab + bb}$, quindi aggiunta in diretto $AO = NK = b$, e divisa OH per metà in S , farà $OS = b + \sqrt{4ab + bb} = x$;

adunque presa $AM = OS$, farà M il punto cercato, rispetto alla radice positiva. Ed in fatti, descritti i rettangoli SN , AV , MO , e condotte le diagonali AI , AE , poichè $OS = b + \sqrt{4ab + bb}$, farà $AS = \sqrt{4ab + bb} - b$, ed il rettangolo

di $OS \times SA$ farà eguale ad ab , cioè eguale al rettangolo di $OA \times AN$; adunque i lati di questi rettangoli saranno in ragione reciproca, cioè farà $OA, OS :: SA, AN$, vale a dire $EM, MA :: IN, NA$; adunque saranno in diretto le due IA, AE , ed in conseguenza simili i triangoli IVE , AOE , e però farà $AO, OE :: IV, VE$; ma $AO = NK$, $OE = AM$, $IV = OS = AM$, $VE = NM$, dunque $NK, AM :: AM, NM$; il che cc.

La sopra posta costruzione riguarda il solo valore positivo dell'incognita, essendosi presa la radicale affetta dal segno positivo; in simil maniera però si costruisce anche il valore negativo. E però descritto l'altro semicircolo FbQ , e condotta l'ordinata Ab , farà $Ob = b - \sqrt{4ab + bb}$, quantità negativa, e divisa Ob per metà in s , farà $Os = b - \sqrt{4ab + bb} = x$. Adunque la x è quantità negativa,

e però, presa da A verso F la $Am = Os$, farà m l'altro punto, che scioglie il problema. Imperciocchè farà $As = Ab - sb = -b - \sqrt{4ab + bb}$, e però $Os \times sA = ab = OA \times AN$,

adunque fatto il rettangolo Ns , e condotta la diagonale As , poichè $As \times sO = OA \times AN$, ed $AN = si$, farà $As, si :: AO, Os$, e però $Os = Oe$, ma $Os = Am$, dunque $Ve = Nm$, ma per i triangoli simili AOe, iVe abbiamo $AO, Oe :: iV, Ve$, ed è $AO = NK, iV = Os = Oe = Am$, adunque farà $NK, Am :: Am, mN$, il che ec.

Senza risolvere l'equazione $xx - bx - ab = 0$ del problema, si poteva da principio costruire per mezzo del numero 94. nella seguente maniera. Si prenda (Fig. 30.) $RO = NK = b$, ed in diretto $OD = NA = a$, e sul diametro RD si descriva il semicircolo RMD , farà l'ordinata $OM = \sqrt{ab}$; Col diametro OR si descriva l'altro circolo $ARPO$, e dal punto M condotta per lo centro H la retta MN , e presa $AN = a, NK = b$, farà AM il valore positivo dell'incognita; e presa dalla parte di A verso N la porzione $Am = PM$, farà Am il valore negativo. Ometto la costruzione della stessa equazione per mezzo del num. 95., perchè da sè è troppo chiara.

PROBLEMA X.

105. Dato il diametro AE del semicircolo AFE (Fig. 31.), e date le due porzioni CB , CD dal centro C , ed alzate le perpendicolari DF , BH ; nella BH prodotta si dimanda il punto G tale, che condotta al punto F la retta GF , sia il rettangolo di $GF \times FD$ eguale al rettangolo di $AC \times BD$.

Si conduca FH parallela ad AE , e si chiami il raggio $CA=r$, $CB=a$, $CD=b$, sarà $DF=\sqrt{rr-bb}=BH$, e sia $HG=x$. Poichè $HF=CB+CD=a+b$, sarà $GF=\sqrt{aa+2ab+bb+xx}$, quindi per la condizione del problema avremo $\sqrt{aa+2ab+bb+xx}\sqrt{rr-bb}=ar+br$, adunque levando l'asimmetria, sarà $aarr+2abrr+bbrr=aarr+2abrr+bbrr+rrxx-aabb-2ab^2-b^4-bbxx$, e riducendo, $rrxx-bbxx-aabb-2ab^2-b^4=0$, cioè $xx=\frac{aabb+2ab^2+b^4}{rr-bb}$, e però estraendo la radice, $x=\pm$

$$\sqrt{\frac{aabb+2ab^2+b^4}{rr-bb}}, \text{ cioè } x=ab+bb, \text{ ed } x=\frac{-ab-bb}{\sqrt{rr-bb}}$$

Deve adunque essere la x , che si cerca, eguale alla quarta proporzionale di FD , DC , ed FH ; quindi poichè gli angoli in D , ed H sono retti, se si faranno gli angoli GFH , gFH eguali ciascuno all'angolo CFD , faranno simili i triangoli GFH , gFH , CFD , ed i punti G , g (cioè G rispetto al valore positivo, e g rispetto al negativo) soddisfaranno alla questione; imperciocchè sarà FG ,

(Fg)

(Fg) ad $FH :: FC, FD$, ma $FH=BD$, $FC=AC$, adunque sarà Gf (gF) a $BD :: AC, FD$, e però Gf (gF) in $FD=BD \times AC$ ec.

E' facile il vedere, che rispetto al valore positivo basterà condurre FG tangente nel punto F , poichè essendo retti gli angoli GFC, HFD , tolto il comune HFC , faranno eguali gli angoli GFH, CFD .

PROBLEMA XI.

106. Dalle estremità della data AB (Fig. 32.) condurre due rette AC, BC in modo, che facciano l'angolo ACB eguale al dato GDP , e che la somma de' quadrati di AC , e di BC sia al triangolo ABC nella data ragione di $4d$ ad a .

Si divida AB per metà in E , e si faccia $EH=x$, $HC=y$; adunque, poichè il problema è determinato, e si sono prese due incognite, converrà ritrovare due equazioni; sia $EA=a$, farà $AH=a-x$, $HB=a+x$, e però il quadrato di AC farà $=aa-2ax+xx+yy$, il quadrato di CB farà $=aa+2ax+xx+yy$, ed il triangolo $ACB=ay$; ma per la seconda condizione del problema la somma di questi quadrati deve essere al triangolo ABC nella data ragione di $4d$ ad a ; adunque averemo $2aa+2xx+2yy, ay :: 4d, a$, e però l'equazione $aa+xx+yy=2dy$. Deve in oltre essere l'angolo ACB eguale all'angolo dato GDP , e però prodotta PD , se l'angolo GDP è

ottu-

ottuso, e presa DG ad arbitrio, si tiri GF normale a PF , farà noto l'angolo GDF , essendo dato l'angolo GDP ; e perchè di più è nota DG , che è stata presa ad arbitrio, saranno date le due, DF che si ponga $= b$, e GF , che pongasi $= c$; adunque condotta dal punto A normalmente a BC prodotta la AI , dovranno essere simili i due triangoli GDF , ACI . Ora per la similitudine de' triangoli BCH , BAI , si avrà $AI = \frac{2ay}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}$,

$$BI = \frac{2aa+2ax}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}, \text{ e però } CI = \frac{aa-xx-yy}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}; \text{ adunque}$$

dovendo essere CI , $AI :: DF$, FG , avremo
 $\frac{aa-xx-yy}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}}, \frac{2ay}{\sqrt{aa+2ax+xx+yy}} :: b, c$; e però la seconda equazione $2aby = aac - cxx - cyy$.

Per eliminare una delle due incognite, dalla prima, e dalla seconda delle due equazioni si cavi (per il num. 82.) il valore del quadrato xx , cioè dalla prima, $xx = 2dy - yy - aa$, dalla seconda, $xx = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, e quindi l'equazione $2dy - yy - aa = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, cioè

$$dy = aa - \frac{aby}{c}, \text{ o sia (fatta } \frac{ab}{c} = f) y = \frac{aa}{d+f}, \text{ valore della}$$

y dato per le sole cognite, e sostituito questo valore in luogo della y nell'equazione $xx = 2dy - yy - aa$, avrassi finalmente $xx = \frac{2aad}{d+f} - \frac{a^2}{d+f} - aa$, cioè $xx = \frac{aadd - aaff - a^2}{d+f}$,

e però $x = \pm \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d + f}$, valore dato per le sole quantità cognite.

Si conduca AK indefinita, che faccia l'angolo KAB eguale al dato GDP , e dal punto E si abbassi la perpendicolare indefinita EM , e dal punto A la retta AL perpendicolare ad AK . Poichè fatta DR perpendicolare a PD , l'angolo RDG è eguale all'angolo DGF , farà similmente l'angolo LAE eguale allo stesso DGF , ed in oltre sono retti gl'angoli E, F ; adunque saranno simili i triangoli LAE, GDF , e però $EL = \frac{ab}{e} = f$,

$AL = \sqrt{aa + ff}$. In EL prodotta si prenda $LM = d$, e col centro L , raggio LM si descriva un circolo, che taglierà AK in K ; poichè l'angolo KAL è retto, farà l'ordinata $AK = \sqrt{dd - ff - aa}$, quindi fatta $EN = AK$, e condotta MA , e ad essa parallela la NH dal punto N , farà $ME, EA :: NE, EH$; cioè $d + f, a :: \sqrt{dd - ff - aa}, EH = \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d + f} = x$. Ciò fatto, col centro L , e col

raggio LA si descriva il circolo OCQ , e sul punto H alzata la normale CH , si conducano CA, CB , il triangolo ACB farà il ricercato. Imperocchè, per la 32. del terzo libro d'Euclide, l'angolo ACB è eguale all'angolo KAE , cioè, per la costruzione, eguale all'angolo GDP , e per la proprietà del circolo, $PC = \sqrt{OP \times PQ} = \frac{df + ff + aa}{d + f}$, e però $HC = \frac{aa}{d + f}$, e facendo il calcolo tro-

ve-

veremo, che la somma de' quadrati di AC , e CB è appunto al triangolo ACB nella data ragione di $4d$ ad a ; il che ec.

Il segno ambiguo dell' equazione finale ci dà due valori eguali della x , uno positivo, e l'altro negativo; se adunque EH preso verso A si considera positivo, farà Eb preso verso B ed eguale ad EH il valore negativo, che ci somministrerà la stessa costruzione.

E' chiaro, che il problema sarà impossibile ogni qualvolta non sia dd maggiore di $ff+aa$, cioè LM maggiore di LA , perchè allora il radicale sarà immaginario.

PROBLEMA XII.

107. Dato (Fig. 33.) il semicircolo BED , e nel diametro prodotto dato un punto A , da esso condurre una secante AE tale, che la intercetta GE sia eguale al raggio CB .

Sia $CB=c$, $AB=b$, $AD=a$, ed $AG=x$; farà dunque, per la condizione del problema, $AE=c+x$; ma per la trentesima sesta del terzo d'Euclide il rettangolo EAG è eguale al rettangolo DAB , e però avremo l'analogia $AE, AD :: AB, AG$, cioè $c+x, a :: b, x$, adunque sarà l'equazione $xx+cx=ab$, che è una quadratica affetta, ed al solito risolta ci darà $x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}cc+ab}-\frac{c}{2}$.

Sulla

Sulla retta DA prodotta presa $AR = AB = b$, si descriva al diametro RD il semicircolo ROD , e condotta l'ordinata AO , che sarà $= \sqrt{ab}$, normale ad AO si tiri $OM = \frac{1}{2}c$, sarà $AM = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$; quindi col centro M , col raggio MO si descriva il semicircolo QOP , sarà $AQ = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - c$, valore positivo della x , ed AP sarà $= \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + c$, e però AP presa negativa sarà il valore negativo. Adunque se col centro A , e col raggio AQ si descriverà un' arco, taglierà esso il semicircolo BED nel punto ricercato G ; e se nella parte inferiore si descriverà sul diametro $RH = BD$ il semicircolo RGH , l'arco dal medesimo centro A col raggio AP descritto lo taglierà nel punto ricercato G , che spetta al valore negativo. Imperciocchè essendo $EA \times AG = DA \times AB$, cioè

$$EA \times \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - c = ab, \text{ sarà } EA = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - c},$$

$$\text{e però } EG = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - c} - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + c, \text{ cioè, ridu-}$$

$$\text{cendo al comun denominatore, } EG = \frac{cc + c\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - c},$$

e facendo attualmente la divisione, sarà finalmente $EG = c$, come deve essere.

Lo stesso calcolo procede rispetto alla costruzione del valore negativo, servendosi del rettangolo HAR in luogo di DAB .

Anche sinteticamente si può dimostrare la soluzione del problema così.

Essendo $AO = RAD$, ed $EAG = DAB$, e per la costruzione, $AR = AB$, $AQ = AG$, $QP = BC$, $MO = MQ$; sarà $AO + OM$, cioè $AM = EAG + QM$, cioè, per la quarta del secondo d'Euclide, $AQ + 2AQM + QM = EAG + QM$, e levato il comune QM , sarà $AQ + 2AQM = EAG$, e per la terza dello stesso libro, $AQ + 2AQM = EGA + GA$; ma $AQ = AG$, dunque sarà $2AQM = EGA$, cioè $AQ, AG :: EG, 2QM$, e però $EG = 2QM = BC$; il che ec.

PROBLEMA XIII.

108. *Dati due archi di circolo, e le tangenti loro; ritrovare cosa sia la tangente della somma dei due dati archi.*

Sieno (Fig. 8.) i due archi dati AH, HD , e le tangenti $AI = a, HK = b$, il raggio $CA = r$, la tangente della somma de' due archi dati sia $AB = x$, sarà $CB = \sqrt{rr + xx}$, $CI = \sqrt{rr + aa}$, $CK = \sqrt{rr + bb}$, ed abbassata la DE perpen-

pendicolare a CA , e DF perpendicolare a CH , per la similitudine de' triangoli CBA , CDE farà $CE = \frac{rr}{\sqrt{rr+xx}}$,

$ED = \frac{rx}{\sqrt{rr+xx}}$, e per la similitudine de' triangoli CKH ,

CDF , farà $DF = \frac{br}{\sqrt{rr+bb}}$, e perchè simili pure sono i

triangoli CAI , CEO , DFO , averassi $EO = \frac{ar}{\sqrt{rr+xx}}$,

$CO = r\sqrt{rr+aa}$, $DO = \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}}$, e però averassi

l'equazione $ED = EO + OD$, cioè $\frac{ar}{\sqrt{rr+xx}} + \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}} =$

$\frac{rx}{\sqrt{rr+xx}}$, o sia $rx - ar = \frac{b\sqrt{rr+aa}}{\sqrt{rr+bb}}$, e quadrando, per

liberarla dai radicali, farà $rrxx - 2arx + aar =$

$\frac{bbrr + aabb}{rr + bb}$, e riducendo al comun denominatore, e to-

gliendo i termini, che si elidono, farà $r^4xx - 2ar^4x - 2abbrrx + aar^4 = aabbxx + bbr^4$, cioè $xx - \frac{2ar^4x - 2abbrrx}{r^4 - aabb} =$

$\frac{bbr^4 - aar^4}{r^4 - aabb}$, quadratica affetta; adunque aggiunto all'

uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè il quadrato

di $-\frac{ar^4 - abrr}{r^4 - aabb}$, farà $xx = \frac{2ar^4 x - 2abrrx}{r^4 - aabb} +$

$$\frac{aar^4 + 2aabbr^2 + aab^4 r^4}{r^4 - aabb^2} = \frac{bbr^4 - aar^4 + aar^4 + 2aabbr^2 + aab^4 r^4}{r^4 - aabb^2},$$

e però cavando la radice, e riducendo al comune denominatore l'omogeneo di comparazione, $x = \frac{ar^4 - abrr}{r^4 - aabb}$

$$\pm \sqrt{\frac{bbr^4 + 2aabbr^2 + a^4 bbr^4}{r^4 - aabb^2}}; \text{ ma la quantità sotto il vin-$$

colo è un quadrato, e la radice è $\frac{br^4 + aabrr}{r^4 - aabb}$, o pure

$$-\frac{br^4 - aabrr}{r^4 - aabb}, \text{ adunque prendendo in primo luogo la ra-$$

dice positiva, farà $x = \frac{ar^4 + abrr + aabrr + br^4}{r^4 - aabb}$, e presa

la negativa, farà $x = \frac{ar^4 + abrr - aabrr - br^4}{r^4 - aabb}$; ma nel

primo caso tanto il numeratore, quanto il denominatore sono divisibili per $rr + ab$, ed il quoziente è $\frac{arr + brr}{rr - ab}$,

e nel secondo caso tanto il numeratore, quanto il denominatore sono divisibili per $rr - ab$, ed il quoziente è $\frac{arr - brr}{rr + ab}$; adunque i due valori dell'incognita sono

$$x = rr \times \frac{a+b}{rr-ab}; \quad x = rr \times \frac{a-b}{rr+ab}, \text{ il primo de' quali servirà per}$$

per la tangente della somma degl'archi dati , il secondo per la tangente della differenza (come appunto si trova sciogliendo il problema in questo caso) il quale valore sarà positivo , o negativo , secondo che l'arco , o sia la tangente a sarà maggiore , o minore della tangente b .

Ciò posto , non è difficile passare alla soluzione generale del problema , cioè dai quanti si vogliano archi con le loro tangenti , ritrovare la tangente della somma di tutti questi archi , il che si potrà fare nella seguente maniera .

Sieno in primo luogo tre gli archi dati , e le tangenti loro sieno a, b, c . Per l'antecedente soluzione sarà $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr-ab}$

la tangente della somma di due archi , de' quali le tangenti sieno a, b ; si chiami questa tangente z , e però sarà $z = \frac{rr \times \overline{a+b}}{rr-ab}$, ma per la stessa soluzione sarà $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr-zc}$ la

tangente della somma di due archi , de' quali le tangenti sieno z, c , e z è la tangente della somma di due archi delle tangenti a, b ; adunque $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr-zc}$ farà la tangente

della somma di tre archi delle tangenti a, b, c , e sostituendo in questa espressione in luogo di z il suo valore $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr-ab}$, avremo la tangente della somma di tre archi

espres-

espressa con le sole tangenti date a, b, c , la quale sarà

$$\frac{rr \times a + b + c - abc}{rr - ab - ac - bc}$$

tangente della somma di quattro archi, essendo le tangenti date a, b, c, f , e sarà

$$\frac{rr \times arr + brr + crr + frr - abc - abf - acf - bcf}{rr \times rr - ab - ac - af - bc - bf - cf + abcf}$$

$$rr \times rr - ab - ac - af - bc - bf - cf + abcf$$

La tangente della somma di cinque, essendo le tangenti date a, b, c, f, g , sarà

$$r^4 \times a + b + c + f + g - rr \times abc + abf + acf + abg + bcf + acg + bfg + ffg + afg + cfg + abcfg$$

$$rr \times rr - ab - ac - af - ag - bc - bf - bg - cf - cg - fg + abcf + abfg + abfg + acfg + bcfg$$

e così di quant' altri archi si vuole; dalle quali cose si cavava una regola generale per formare la frazione, che esprime la tangente della somma di quanti si voglia archi dati, e sarà questa:

Per formare il numeratore della frazione si prendano le somme di tutti i possibili prodotti di numero dispari, che si possono fare colle tangenti date, per esempio, se le tangenti sono sette, si prenda la somma di tutte queste tangenti, indi la somma di tutti i terni, che fare si possono, poi la somma di tutte le cinquine, e finalmente il prodotto di tutte sette; queste somme si moltiplichino per tanta potestà del raggio, quanta a ciascuna fa bisogno, perchè sieno di dimensione maggiore d'un'unità del numero delle tangenti date, ed a queste somme si prefigga alter-

alternativamente il segno + e — , cioè alla somma di tutte il segno + , alla somma di tutti i terni il segno — , e così di mano in mano , e farà fatto il numeratore .

Per formare il denominatore si prenda il quadrato del raggio , indi la somma di tutti i prodotti di numero pari , che si possono fare colle tangenti date , cioè tutti gli ambi , tutti i quaderni ec. , questo quadrato del raggio , e la somma di tutti gli ambi , di tutti i quaderni , di tutte le sestine ec. si moltiplichino in tanta potestà del raggio , quanta a ciascuna fa bisogno , perchè sieno di dimensione eguale al numero delle tangenti date . Al quadrato del raggio si prefigga il segno + , a tutti gli ambi il segno — , a' quaderni il segno + , e così alternativamente , e farà fatto il denominatore .

La regola per sapere quanti sieno tutti gli ambi , e terni ec. possibili di un numero di quantità date sarà questa :

Si scriva il numero delle quantità date , indi si prosegue la serie decrescente de' numeri naturali ; sotto essi numeri per ordine si scriva la serie crescente de' numeri naturali cominciando dall'unità ; poscia si faccia il prodotto di tanti termini della serie di sopra , quanto è l'indice della combinazione , che si vuol fare ; si faccia pure il prodotto d'altrettanti termini della serie di sotto , e si divida un prodotto per l'altro , il quoziente sarà il numero cercato . Così per sapere quanti ambi , terni ec. si possono

fare ,

fare, per esempio, di cinque quantità, si scriva 5, 4, 3, 2, 1.
1, 2, 3, 4, 5.

Il prodotto de' due primi numeri della serie di sopra è 20, che diviso per il prodotto de' due primi numeri della serie di sotto dà di quoziente 10; e però 10 faranno gli ambi. Il prodotto de' primi tre termini è 60, che diviso per il prodotto de' primi tre termini di sotto, cioè per 6, dà di quoziente 10, e però faranno 10 i terni ec.

Dalla soluzione di questo Problema si cava, come corollario, la soluzione di un'altro più semplice, cioè data la tangente di un' arco, ritrovare la tangente di un' arco multiplo secondo un qualunque dato numero; imperocchè in questo caso basta fare tutte le tangenti date eguali tra loro, ed eguali alla tangente dell' arco dato. Sia per esempio la tangente dell' arco dato $= a$, e si cerchi la tangente dell' arco doppio, triplo ec. Nella formola, che abbiamo ritrovata per la tangente della somma di due archi dati, in vece della lettera b si ponga sempre a , ed avremo la formola o espressione dell' arco doppio $\frac{2ar}{rr - aa}$.

Nella formola per la tangente della somma di tre archi dati in vece di b , e di c si ponga per tutto a , ed avremo l'espressione dell' arco triplo $\frac{3ar - a^3}{rr - 3aa}$. Similmente,

dell' arco quadruplo farà $\frac{4ar^4 - 4a^3rr}{r^4 - 6aar + a^4}$,

dell'

dell'arco quintuplo sarà $\frac{5ar^4 - 10a^2rr + a^5}{r^4 - 10aar + 5a^4}$, e così successivamente.

Quindi si può formare la seguente progressione, o sia canone generale per la tangente d'un'arco multiplo secondo un qualunque numero intero n

$$\frac{nr^{n-1}a - n(n-1)n-2 \dots n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{n-3} a^1 + \frac{n(n-1)n-2 \dots n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{n-5} a^5 - \frac{n(n-1)n-2 \dots n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} r^{n-7} a^7 \text{ ec.}$$

$$\frac{r^{n-1} - n(n-1) \dots n-3}{1 \cdot 2} r^{n-3} a^2 + \frac{n(n-1)n-2 \dots n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^{n-5} a^4 - \frac{n(n-1)n-2 \dots n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{n-7} a^6 \text{ ec.}$$

Ritrovata la tangente di un'arco multiplo secondo un qualunque numero intero, facilmente si scioglie il problema inverso; cioè, data la tangente di un'arco, ritrovare la tangente d'un'arco submultiplo secondo un qualunque numero intero, vale a dire dividere un qualunque arco, o angolo in quante parti si vuole eguali. Imperocchè sia la tangente dell'arco dato b , ed n il numero, secondo cui si vuole l'arco submultiplo, si prenda la tangente ritrovata per l'arco multiplo per lo numero n , in luogo di a si ponga x , e così x farà figura di tangente dell'arco submultiplo. Questa tangente dell'arco multiplo è adunque eguale alla data b , onde si avrà l'equazione, che si cercava per la incognita x .

Essendo adunque data la tangente b , il raggio r , farà l'equazione della tangente per l'arco subtriplo $x^3 - 3bxx - 3rrx + brr = 0$; per l'arco subquintuplo sarà $x^5 - 5bxx^3 - 10rrx^3 + 10brvxx + 5r^4x - br^4 = 0$ ec.

PROBLEMA XIV.

109. Ritrovare un triangolo ALO (Fig. 34.), i di cui lati AO, LO, AL, ed il perpendicolo LI sieno in geometrica continua proporzione.

Si prenda ad arbitrio un lato, per esempio, $AL = a$, e sia $OL = x$, farà per la condizione del problema $AO = \frac{xx}{a}$,

ed $LI = \frac{aa}{x}$, e però $AI = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, ed $IO = \sqrt{\frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx}}$;

adunque $AI + IO = AO$, cioè $\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{\frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx}} = \frac{xx}{a}$,

o sia $\frac{xx}{a} - \sqrt{\frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, e quadrando;

$\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a} \sqrt{\frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx}} + \frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx} = aa - \frac{a^4}{xx}$, cioè

$\frac{x^4}{aa} + \frac{xx}{xx} - aa = \frac{2xx}{a} \sqrt{\frac{xx}{xx} - \frac{a^4}{xx}}$, e di nuovo quadrando;

$\frac{x^8}{aa} + \frac{2x^6}{aa} + \frac{x^4}{aa} - 2x^4 - 2aa\frac{xx}{a} + a^4 = \frac{4x^6}{aa} - 4aa\frac{xx}{a}$, e final-

mente riducendo al comun denominatore, ed ordinando l'equazione, farà $x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 + 2a^4xx + a^4 = 0$, la quale sembra essere dell'ottavo grado, ma se si osserverà, ch'ella è un quadrato, fatta l'estrazione della radice, si troverà $x^4 - aa\frac{xx}{a} - a^4 = 0$, che è una quadratica affetta, e però trasportato all'altra parte il termine a^4 , ed aggiunto ad ambi i membri dell'equazio-

ne

ne a^4 , ed estratta la radice colla solita regola delle quadratiche affette, sarà $xx - aa = \pm \sqrt{5a^4}$, cioè $xx = aa \pm \sqrt{5a^4}$, e finalmente $x = \pm \sqrt{aa \pm \sqrt{5a^4}}$.

Quattro adunque saranno i valori della nostra incognita, ma si avverta, che la quantità $\sqrt{5a^4}$ è maggiore di aa , e però se si prenda la radicale $\sqrt{5a^4}$ negativa, cioè $-\sqrt{5a^4}$, la quantità sotto il vincolo radicale comune sarà negativa, quindi il valore della x immaginario, e però due valori saranno immaginari, cioè $x = \pm \sqrt{aa - \sqrt{5a^4}}$; e due reali, cioè $x = \pm \sqrt{aa + \sqrt{5a^4}}$, ambi eguali, ma positivo l'uno, e negativo l'altro.

Sull'indefinita AQ si prenda $AL = a$, $LC = a\sqrt{5}$, e $GB = a$, e descritto sul diametro AB il semicircolo AFB , si erigga la perpendicolare CF , sarà, per la proprietà del circolo, $CF = \sqrt{aa + aa\sqrt{5}} = x$. Divisa per metà AC in H , col centro A , raggio $AH = a + \sqrt{5aa} = xx$ si descriva l'arco HO , dal punto L si tiri $LO = CF$, e terminata all'arco HO , e si conduca AO , e la perpendicolare LI , sarà ALO il triangolo ricercato. Imperocchè essendo $AL = a$, $LO = x = \sqrt{aa + aa\sqrt{5}}$, $AO = AH = xx = a + \sqrt{5aa}$, sarà

$AO, LO :: LO, LA$. Ma i due quadrati di AL , e di LO presi assieme, cioè $aa + aa + aa \sqrt{5}$, sono eguali al quadrato di AO , cioè $6aa + 2a \sqrt{5aa}$, adunque l'angolo ALO

è retto, e però sarà $AO, LO :: AL, LI$; ma perchè è pure $AO, LO :: LO, LA$, sarà anche $LO, LA :: LA, LI$, il che ec. L'altro valore negativo, che è eguale al positivo, servirebbe per la costruzione al di sotto della linea AB .

PROBLEMA XV. —

110. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo.*

Tre casi comprende il proposto Problema; l'uno quando l'angolo dato sia retto; l'altro quando sia ottuso; ed il terzo quando sia acuto.

In primo luogo sia (Fig. 35.) l'angolo retto MAB , che si supponga diviso in tre parti eguali dalle rette AC , AD , e sia $AB = a$, edalzata in B la perpendicolare BC , prodotta incontri in D la AD , e dal punto D si conduca DM parallela ad AB , e si chiami $BC = x$, sarà $AC = \sqrt{aa + xx}$, ma poichè l'angolo CAD deve essere eguale all'angolo DAM , e per le parallele AM , BD l'angolo DAM è eguale all'angolo ADC , faranno eguali gli angoli CDA , CAD ; e però $CD = CA = \sqrt{aa + xx}$, quindi $BD = x + \sqrt{aa + xx}$. Ma devono essere in oltre eguali

i due

i due angoli BAC , CAD , o sia CDA , e però ne' due triangoli BDA , CAB sarà l'angolo CAB eguale all'angolo BDA , e l'angolo B retto è comune, adunque anche il terzo $BCA = BAD$, e però simili i triangoli; quindi avremo $AB, BC :: BD, AB$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa + xx}, a$, e però l'equazione $aa = xx + x\sqrt{aa + xx}$, e trasportando il termine xx , e quadrando, sarà $aa^2 + x^2 = a^4 - 2a^2xx + x^2$, cioè $3a^2xx = a^4$, e finalmente $x = \pm \sqrt{\frac{aa}{3}}$.

Si produca AB in S , onde sia $BS = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$; sul diametro AS si descriva il semicircolo ACS , l'ordinata BC farà $= \sqrt{\frac{aa}{3}} = x$. Condotta adunque AC al punto C , e prefa $CD = AC$, e condotta AD , farà il dato angolo diviso in tre parti eguali. Imperocchè essendo $BC = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, farà $AC = \sqrt{\frac{4aa}{3}} = CD$, ed $AD = \sqrt{\frac{AB^2 + BD^2}{3}} = \sqrt{\frac{aa + \frac{5aa}{3} + 2a\sqrt{\frac{4aa}{3}}}{9}} = 2a$, e però $AD, AB :: 2a, a :: 2, 1$; e $DC, CB :: \sqrt{\frac{4aa}{3}}, \sqrt{\frac{aa}{3}} :: 2, 1$, cioè nella medesima ragione di AD, AB ; adunque, per la terza del sesto d'Euclide, l'angolo $BAC = CAD$, e per essere $CD = CA$, farà pure l'angolo $CAD = CDA = DAM$, il che ec.

Il valore negativo, che al positivo è eguale, servirebbe per la divisione dell'angolo mAB .

Sia l'angolo BAM ottuso (*Fig. 36.*), condotta parallela ad AM la BD , e fatto il resto come sopra, si tiri AR normale a BD . Poichè l'angolo ABD è noto, per essere il supplemento del dato MAB , e l'angolo R è retto, ed è data la AB , sarà pure nota ancora la BR , che si chiami $= b$, e però $AR = \sqrt{aa - bb}$, $CR = x - b$, $AC = \sqrt{aa - 2bx + xx} = CD$; $BD = x + \sqrt{aa - 2bx + xx}$, quindi per i triangoli simili ABC , ABD sarà $AB, BC :: BD, BA$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa - 2bx + xx}, a$, vale a dire, $aa = xx + x\sqrt{aa - 2bx + xx}$, e levando l'asimmetria, $2bx^2 - 3aaxx + a^4 = 0$, equazione solida del terzo grado, che per ora si lascerà da me intatta.

Sia finalmente l'angolo BAM acuto (*Fig. 37.*), la perpendicolare dal punto A a DB prodotta caderà al di sotto del punto B in R , e però sarà $RC = b + x$, $AC = \sqrt{aa + 2bx + xx}$, quindi ripetuto lo stesso discorso del caso antecedente, averassi l'equazione $2bx^2 + 3aaxx - a^4 = 0$, diversa dall'antecedente solo ne' segni ec.

C A P O I I I.

*Della costruzione de' luoghi , e de' Problemi indeterminati ,
che non eccedono il secondo grado .*

III. Cosa sieno i problemi indeterminati, e come esigano le due incognite si è veduto al num. 84. Dal variarsi adunque in infiniti modi il valore di una delle due incognite , in altrettanti infiniti modi pure si variano i valori dell'altra , quindi chiamansi esse le variabili dell' equazione o del problema , e la relazione loro o sia la legge , che osservano , viene espressa dall' equazione . Per tanto l'equazione $bx = ay$ ci fa sapere , che variandosi la x , si varia altresì la y , ma con tal legge , che la stessa x abbia sempre però alla y la costante ragione della a alla b ; Così l'equazione $ab = xy$ esprime la legge , che il prodotto delle due incognite sia sempre costante , ed eguale al prodotto di a in b ; L'equazione $ax = yy$ esprime , che il quadrato della y debba sempre essere eguale al rettangolo della x nella costante a , e così di tutte l'altre si discorra .

II2. Una delle due incognite , per esempio x , deve avere origine da un punto fisso , e si prenda sopra una retta indefinita , indi se fissato per questa un determinato valore , dall' estremità si alzi un'altra retta nell' angolo dato del problema , e si prenda di tale grandezza , di quanta deve essere l'altra incognita y per la natura dell' equa-

equazione relativamente al valore fissato per la x , e ciò si vada replicando per ogni vario valore, che si assegni alla x ; la linea, che passerà per le estremità di tutte le y , si chiama il luogo dell'equazione. La incognita, che dal punto fisso si prende sulla retta indefinita, si dice l'Assissa, e l'altra in angolo l'Ordinata; ed ambe assieme diconsi le Coordinate dell'equazione.

Fatta adunque, rispetto all'equazione $bx = ay$, sull'indefinita AM (Fig. 38.) la $AB = a$, ed alzata in qualunque angolo la $BC = b$, se si prenda $x = AD$, sarà la quarta proporzionale parallela a BC , cioè $DE = y$; e presa $x = AF$, sarà $FG = y$; presa $x = AK$, sarà $KH = y$, e così d'infinite altre, e la linea, in cui trovansi tutti gl' infiniti punti C, E, G, H ec. in questo modo determinati, sarà il luogo dell'equazione $bx = ay$.

Nello stesso modo rispetto all'equazione $ax = yy$ (Fig. 39.) se si prenda $x = AB$, e BC eguale alla $\sqrt{ax}$, cioè media proporzionale fra AB , e la data a , sarà $BC = y$; e presa $x = AD$, e DE media proporzionale fra AD , ed a , sarà $DE = y$; presa $x = AG$, e GF media proporzionale tra AG ed a , sarà $GF = y$ ec.; ed i punti C, E, F , ed altri infiniti in simil modo determinati formano la linea $ACEF$, che è il luogo dell'equazione $ax = yy$, e medesimamente s'intenda d'ogni altra equazione.

113. Dalla diversa legge, che esprime l'equazione, cioè dalla diversa relazione, che tra se hanno le due incognite, diverse nascono le linee e di genere, e di grado,

o sia

o sia i luoghi di modo, che è facile a vedere, che il luogo dell'equazione $bx = ay$ farà una linea retta; imperciocchè avendo la y alla x una costante ragione, per essere $y = \frac{bx}{a}$, una qualunque ED (Fig. 38.) sarà ad AD , come

una qualunque altra FG ad AF , e però simili saranno i triangoli AED , AGF ; il che verificandosi di qualunque altro punto H ec. bisognerà, che per necessità essi punti sieno in una retta linea. Ma l'equazione $ax = yy$ esige, non già, che (Fig. 39.) le BC , DE ec., ma bensì i loro quadrati abbiano una costante ragione alle corrispondenti AB , AD ec., onde è, che non saranno in una retta, ma in una curva i punti C , E , F , ec. Così una curva di genere da questa diverso sarebbe il luogo dell'equazione $xy = ab$; ed una curva di genere, e di grado diverso il luogo di quest'altra $a' - x' = y'$, ed altre infinite.

114. Qualunque volta l'equazione non contenga in alcun termine nè il quadrato, o potestà maggiore dell'una o dell'altra incognita, nè il prodotto di esse, il luogo sarà sempre una linea retta.

115. E quando nell'equazione vi sia il quadrato dell'una o dell'altra, o d'ambe le incognite, o il rettangolo loro, o pure e quelli, e questo, comunque siasi, ma però nessun termine contenga potestà maggiore del quadrato di esse incognite, o prodotto maggiore del rettangolo; vale a dire, in nessun termine le incognite o sole, o assieme moltiplicate eccedano la seconda dimensione,

il luogo sarà sempre una delle Sezioni Coniche d'Apollo-
nio. Nè meglio si potranno dimostrare queste verità,
quanto col costruire attualmente tutte le varie equazioni
di tal natura.

116. Le equazioni, che contengono le incognite ad
una sola dimensione, cioè i luoghi alla linea retta, si chia-
mano luoghi, o linee del primo ordine, quelle che o
sole, o assieme moltiplicate le contengono a due dimen-
sioni, cioè i luoghi alle sezioni coniche, si chiamano luo-
ghi o linee del secondo ordine, e però curve del primo
genere; si dicono linee o luoghi del terzo ordine, e però
curve del secondo genere quelle equazioni, nelle quali le
incognite ascendono alla terza dimensione, e così succes-
sivamente.

117. E quanto ai luoghi alla linea retta; si compren-
dono essi tutti sotto queste equazioni.

$$y = \frac{ax}{b}$$

$$y = -\frac{ax}{b}$$

$$y = \frac{ax + c}{b}$$

$$y = -\frac{ax - c}{b}$$

$$y = \frac{ax - c}{b}$$

$$y = -\frac{ax + c}{b}$$

giac-

giacchè con la moltiplicazione, e divisione si può sempre ridurre la y ad essere libera da frazioni, e coefficienti. Per $\frac{a}{b}$ s'intenda l'aggregato di tutte le quantità note, che moltiplicano la x , e per c l'aggregato di tutte le quantità, che formano il termine costante.

Per costruire le prime due; sulla AD indefinitamente prodotta d'ambe le parti si prenda $AB=b$, e si alzi $BC=a$, (Fig. 40.) che faccia l'angolo ABC , che devono fare le due variabili del problema; per i punti A, C si conduca una retta indefinita HE , sarà essa il luogo delle due equazioni $y=\frac{ax}{b}$, $y=-\frac{ax}{b}$; imperciocchè presa una qualunque $AD=x$, e condotta DE parallela a BC , sarà $DE=\frac{ax}{b}=y$; e presa $AF=-x$, e condotta FH parallela a BC , sarà $FH=-\frac{ax}{b}=y$.

La terza, e quarta si costruiranno così: Parallela-mente a BC si prenda $AN=AM=c$, e si conducano NK , MG indefinite, e parallele ad HE , sarà NK il luogo dell'equazione $y=\frac{ax}{b}+c$, ed MG il luogo dell'equazione $y=-\frac{ax}{b}-c$; poichè, presa $AD=x$, sarà $DE=\frac{ax}{b}$, ma è $EK=AN=c$ (fatta DK parallela a BC) dunque, $DK=\frac{ax}{b}+c=y$; e presa $AF=-x$, e fatta FG parallela a BC , sarà $FG=-\frac{ax}{b}-c=y$.

Rispetto alla quinta; fatto lo stesso triangolo ABC , (Fig. 41.) e prodotte indefinitamente le AE , AD , si abbassi $AM=c$, e parallela a BC ; indi dal punto M si conduca MK indefinita parallela ad AE , che incontrerà in Q la retta AD , farà QK il luogo dell'equazione $y = \frac{ax}{b} - c$; imperocchè, presa una qualunque $AD=x$, e

fatta DE parallela a BC , farà $DE = \frac{ax}{b}$; ma $KE = AM = c$;

dunque $DK = \frac{ax}{b} - c = y$. La porzione QM servirà quan-

do $\frac{ax}{b}$ sia minore di c , cioè quando x si prenda mino-

re di AQ , o sia minore di $\frac{bc}{a}$, poichè in questo caso

la y farà negativa, e però dovrà prenderfi al di sotto di AD , cioè in senso contrario della DK .

Finalmente per l'ultima; fatta $AB=b$, $BC=a$, (Fig. 42.) e l'angolo ABC eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le due variabili del problema, sia $AM=c$ e parallela a BC , e si tiri MQR parallela ad AC , che taglierà AB prodotta in Q , farà MQR il luogo dell'equazione $y = c - \frac{ax}{b}$; poichè, presa una qua-

lunque $AD=x$, e fatta DE parallela a BC , farà $DE = \frac{ax}{b}$, ma prodotta ED in K , farà $EK = AM = c$,

adunque $DK = c - \frac{ax}{b} = y$. Che se si prenda x maggio-

re di AQ , per esempio $=AI$, farà $IT=\frac{ax}{b}$, e però $c-\frac{ax}{b}$ quantità negativa $=y=IP$ presa appunto in senso contrario della DK , e la indefinita MR il luogo dell'equazione proposta nell'uno, e nell'altro caso.

118. Occorre alle volte, che nella soluzione di un qualche problema, il di cui luogo sia alla linea retta, o l'una, o l'altra sparisce delle due variabili, e non entra nell'equazione, in questi casi il luogo sarà alla perpendicolare, o alla parallela alla data retta, sopra di cui si prendono le assisse, secondo che o l'ordinata sparisce, o l'assissa.

Eccone due Esempj:

Data la retta AB , (Fig. 43.) si ricerca il luogo de' punti M fuori di essa tali, che condotte le rette MA , MB alle estremità di AB , sia sempre $MA=MB$. Presa una qualunque $AH=x$, si alzi $HM=y$, e fatta $AB=a$, sarà $HB=a-x$, $AM=\sqrt{xx+yy}$, $BM=\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$, e però l'equazione $\sqrt{xx+yy}=\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$, e quadrandò, $xx+yy=aa-2ax+xx+yy$, cioè $\frac{a}{2}=x$,

in cui la y è sparuta, e la x è rimasta determinata; e ciò vuol dire, che presa x eguale alla AH metà di AB , e dal punto H alzata la perpendicolare indefinita, ogni punto di essa soddisfarà alla questione, e però essa sarà il luogo ricercato.

Sieno

Sieno date di posizione le parallele CG , AP , (Fig. 44.) e tra esse si cerchi il luogo di tutti i punti M tali, che condotta MP perpendicolare ad AP , ed MG , che faccia l'angolo MGC eguale a un dato AEC , sia sempre MP ad MG nella costante ragione di a alla b . Chiamata la distanza $AC=c$, $AP=x$, $PM=y$, e prodotta PM in F , sarà $FM=c-y$, ma poichè è dato l'angolo AEC , e l'angolo ACE è retto, ed è dato il lato AC , sarà anche noto il lato AE , che si chiami $=f$. Ora, per la similitudine de' triangoli ACE , FMG , sarà $AC, AE :: MF, MG$, cioè $c, f :: c-y, \frac{cf-fy}{e}=MG$; ma deve in oltre essere $PM, MG :: a, b$, dunque sarà $y, \frac{cf-fy}{e} :: a, b$; e però $bcy = acf - afy$, o sia $y = \frac{acf}{bc+af}$; ed ecco l'equazione senza, che v'entri l'incognita x . Adunque presa comunque si voglia la x , sarà sempre costante la y , ed eguale ad $\frac{acf}{bc+af}$, e però condotta la indefinita BM parallela ad AP , e distante da essa AP quant'è $\frac{acf}{bc+af}$, sarà essa il luogo cercato.

119. Spiegate le costruzioni dei luoghi alla linea retta, vengono le costruzioni delle equazioni del secondo grado, cioè de' luoghi alle Sezioni Coniche. E qui suppongo prima informati abbastanza i Lettori delle principali proprietà geometriche di esse sezioni del co-

no,

no, per indi formare le prime e più semplici equazioni di esse curve, alle quali semplici equazioni si possano poi ridurre e rapportare, coi metodi da spiegarfi, le equazioni più complicate.

Ed in primo luogo si fa, che nel circolo una qualunque ordinata è media proporzionale tra i segmenti del diametro; cioè, che il quadrato di essa è eguale al rettangolo degli stessi segmenti. Se adunque nel circolo $MKCN$ (Fig. 45.) si farà il raggio $AC=a$, e dal centro A una qualunque assissa $AB=x$, e l'ordinata BD perpendicolare $=y$, sarà $MB=a+x$, $BC=a-x$, e però $MB \times BC = aa - xx$; adunque sarà $yy = aa - xx$, equazione al circolo rispetto al quadrante KC . Ma poichè la stessa proprietà si verifica anche, presa per ordinata BE , cioè l'ordinata negativa $-y$, e tanto il quadrato di y , quanto di $-y$ è yy , adunque la stessa equazione compete ancora al quadrante CN . Che se si prendano le assisse negative, come $AH=-x$, e le ordinate $HF=y$, $HG=-y$, il quadrato loro, cioè yy sarà in ambi i casi eguale al rettangolo $MH \times HC$, ma quando sia $AH=-x$, sarà $CH=CA+AH=a-x$, ed $MH=AM-AH=a+x$, per le regole della somma, e sottrazione; e però il rettangolo $MH \times HC$ sarà $aa - xx$, adunque $yy = aa - xx$ è l'equazione semplicissima, che compete a tutto il circolo del raggio a , prendendo le assisse dal centro.

Se si prenderanno le assisse non dal centro A ,
ma

ma dall'estremità M del diametro, fatta una qualunque MH , o MB eguale ad x , sarà HC , o $BC = 2a - x$, ed il rettangolo de' segmenti eguale a $2ax - xx$; ma il quadrato dell'ordinata sì positiva, come negativa è yy , adunque sarà $yy = 2ax - xx$, equazione semplicissima del medesimo circolo, prendendo le assisse non dal centro, ma dall'estremità del diametro.

Per la quantità a , che esprime il raggio, s'intenda una qualunque quantità data semplice, o complessa, intera, o rotta, razionale, o sorda di modo, che

$yy = aa - bb - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{aa - bb}$;

$yy = \frac{aab}{m} - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{\frac{aab}{m}}$;

$yy = a\sqrt{ab} - xx$ sarà il circolo del raggio $\sqrt{a\sqrt{ab}}$;

così $yy = 2ax - bx - xx$ sarà il circolo del diametro $2a - b$, o sia del raggio $\frac{2a - b}{2}$; $yy = \frac{aax + abx}{b} - xx$ sa-

rà il circolo del diametro $= \frac{aa + ab}{b}$; $yy = x\sqrt{ab} - xx$

sarà il circolo del diametro $= \sqrt{ab}$ ec.

E' manifesto, che se nell'equazione $yy = aa - bb - xx$, ed in tutte le altre simili, la quantità b fosse maggiore di a , essendo allora $aa - bb$ quantità negativa, il circolo sarebbe immaginario, poichè se $yy = aa - bb - xx$, è anche $y = \sqrt{aa - bb - xx}$; ma quando $aa - bb$ sia quantità negativa, y è eguale a radice quadrata di quantità negativa, e però immaginaria.

Per

Per la stessa ragione degl'immaginarj non può nell'equazione $yy = 2ax - xx$ la assissa x prenderfi negativa, imperciocchè, presa x negativa, sarebbe negativo il termine $2ax$, e però l'equazione $yy = -2ax - xx$, cioè $y = \sqrt{-2ax - xx}$ quantità immaginaria.

120. La primaria proprietà della Parabola Apolloniana è, che il quadrato di una qualunque ordinata sia eguale al rettangolo del parametro nell'assissa sull'asse, se l'angolo delle coordinate è retto, o sul diametro, se esso angolo è obbliquo. Adunque chiamato il parametro $= a$, una qualunque assissa $AB = x$, (Fig. 46.) la corrispondente ordinata positiva $BC = y$, e la negativa $BD = -y$, farà yy il quadrato tanto di BC , quanto di BD , ed ax farà il rettangolo del parametro in AB , adunque $yy = ax$ è l'equazione semplicissima, che compete alla parabola del parametro $= a$, in cui è chiaro, non poterfi prendere le assisse x negative per cagione degl'immaginarj. E quì pure per la quantità a , che esprime il parametro, s'intenda una qualunque quantità data, in cui sia moltiplicata l'assissa x di modo, che, $\frac{aax \pm bbx}{c} = yy$ farà la parabola del parametro $= \frac{aa \pm bb}{c}$;

$x\sqrt{ab} = yy$ farà la parabola del parametro $= \sqrt{ab}$ ec.

Se la parabola fosse diversamente posta, (come nella Fig. 47.) e sulla stessa AB dal dato punto A si volessero le x , sarebbe l'equazione $xx = ay$, in cui si possono prendere le x positive e negative, ma solo positive le y .

121. Sieno le opposte Iperbole riferite agl'assi, o diametri, secondo che è retto, o obbliquo l'angolo delle coordinate, e sia CB (Fig. 48.) l'asse, o il diametro trasverso, HE il conjugato. Per la nota proprietà dell'iperbola, preso un qualunque punto D , ed alzata DM parallela ad HE , deve essere il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di DM , come il quadrato di CB al quadrato di HE . Adunque chiamata $CB = 2a$, $HE = 2b$, e dal centro A presa una qualunque $AD = x$, DM positiva $= y$, DM negativa $= -y$, sarà $CD = a + x$, $BD = x - a$, e però, per la detta proprietà, $xx - aa$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. E presa Ad negati-

va $= -x$, e le ordinate come sopra, sarà $Bd = -x + a$, $Cd = -x - a$, ed il rettangolo di $Bd \times dC = xx - aa$; onde nella stessa maniera avrassi $\frac{aayy}{bb} = xx - aa$, equazio-

ne semplicissima, che esprime le due intere opposte, iperbole riferite agl'assi o diametri, prendendo le assisse dal centro. E se si prenderanno le assisse dal vertice C , avrassi l'analogia (per la stessa proprietà) $x \times \overline{x - 2a}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè l'equazione $-2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$. E

prese finalmente le assisse dal vertice B , avrassi $x \times \overline{2a + x}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; e però l'equazione $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$.

E' anche proprietà primaria delle opposte iperbole,
che

che lo stesso rettangolo di $CD \times DB$, prendendo le asisse positive, e di $Bd \times dC$, prendendo le asisse negative, sia al quadrato dell'ordinata sì positiva, che negativa, come l'asse, o diametro trasverso al parametro; adunque chiamato esso parametro $= p$, ed il resto come sopra, sarà $xx - aa, yy :: 2a, p$; cioè $\frac{2a yy}{p} = xx - aa$,

equazione semplicissima, che esprime intere le due opposte iperbole riferite al parametro, prese le asisse dal centro; e prese le asisse dal vertice C , sarà l'equazione $\frac{2a yy}{p} = xx - 2ax$; e prese finalmente le asisse dal vertice B , sarà $2ax + xx = \frac{2a yy}{p}$.

Se le iperbole sono equilatera, poichè in questo caso i due assi, o diametri sono eguali tra loro, ed eguali al parametro, l'una e l'altra equazione sarà $yy = xx - aa$, prese le asisse dal centro; $yy = 2ax + xx$, prese le asisse dal vertice B ; ed $yy = -2ax + xx$, prese le asisse dal vertice C . Per la quantità aa s'intenda un qualunque piano in qualsivoglia modo complesso, come pure per la quantità bb ; e per $2a$, siccome pure per p s'intenda una qualunque linea, di modo che nell'equazione $aa + ff \times yy = xx - aa - ff$ sarà $\sqrt{aa + ff}$ il semiasse, o semidiametro trasverso, e $2\sqrt{aa + ff}$ tutto l'asse, o diametro trasverso, siccome $\sqrt{b\sqrt{ab}}$ il semiasse, o semidia-

metro conjugato, e $2\sqrt{b\sqrt{ab}}$ tutto l'asse, o diametro conjugato; nell'equazione $\frac{a^2yy}{b^2c} = xx - \frac{a^2}{c}$ farà $\sqrt{\frac{a^2}{c}}$ il semiasse, o semidiametro trasverso, e b il conjugato; nell'equazione $xx - bx = \frac{byy}{c+m}$ farà b il semiasse, o semidiametro trasverso, e $c+m$ il parametro; nell'equazione $\frac{2yy\sqrt{aa-bb}}{a-b} = xx - aa + bb$ farà $2\sqrt{aa-bb}$ l'asse, o diametro trasverso, $a-b$ il parametro ec.

Se le opposte iperbole fossero diversamente poste, come nella Fig. 49., e sullo stesso diametro CB , eguale a $2a$, prodotto si volessero le x positive, e negative dal centro A (essendo $HE = 2b$), farebbe l'equazione $yy - bb = \frac{bbxx}{aa}$.

122. Nell'iperbola frà gl'asintoti (Fig. 50.) il rettangolo di una qualunque AB presa sull'asintoto bB nella BC ordinata parallela all'asintoto MN , o di $Ab \times bc$, è sempre costante, cioè eguale ad un rettangolo noto; e però fatta $AB = x$, $BC = y$, ed il noto rettangolo $= ab$, farà $xy = ab$, e presa Ab negativa $= -x$, e bc negativa $= -y$, il rettangolo di $Ab \times bc$ farà pure xy , e però $xy = ab$ l'equazione semplicissima delle opposte iperbole frà gl'asintoti. E' chiaro, che l'equazione $-xy = ab$, o $xy = -ab$ servirà per le iperbole opposte negl'angoli BAM , bAN , essendo sempre

una delle coordinate positiva, e l'altra negativa, e però il loro prodotto negativo.

123. Nell'Ellissi $CEBH$ (Fig. 51.) presa dal centro A una qualunque AD sull'asse o diametro trasverso CB , e condotta DM parallela all'asse o diametro conjugato EH , deve essere, per la nota proprietà, il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di DM , come il quadrato dell'asse o diametro trasverso CB al quadrato del conjugato HE . Adunque chiamata $CB=2a$, $HE=2b$, e dal centro A presa una qualunque $AD=x$, e fatta DM positiva $=y$, DM negativa $=-y$, sarà $CD=a+x$, $DB=a-x$, e però $aa-xx$, $yy::4aa$, $4bb$; cioè $\frac{aayy}{bb}=aa-xx$. E presa Ad negativa $=-x$, e le ordinate, come sopra, sarà $Bd=BA+Ad=a-x$, $dC=AC-Ad=a+x$, e però il rettangolo di $Bd \times dC$ sarà pure $aa-xx$, onde medesimamente avrassi $aa-xx=\frac{aayy}{bb}$, equazione semplicissima dell'ellissi, prese le assisse dal centro; e se si prenderanno le assisse dal vertice C , avrassi l'analogia $2ax-xx$, $yy::4aa$, $4bb$; e però l'equazione $\frac{aayy}{bb}=2ax-xx$.

E' anche proprietà nota dell'Ellissi, che gli stessi rettangoli sieno ai quadrati delle corrispondenti ordinate, come l'asse o diametro trasverso al parametro; adunque chiamato esso parametro $=p$, ed il rimanente come sopra,

pra, farà $aa - xx$, $yy :: za$, p ; e però $\frac{zayy}{p} = aa - xx$, equazione semplicissima dell'ellissi riferita al parametro, prese le assisse dal centro; e prese le assisse dal vertice C , farà l'equazione dell'ellissi riferita al parametro $\frac{zayy}{p} = 2ax - xx$.

Se i due assi fossero eguali tra loro, nel qual caso sono anche eguali al parametro, l'una, e l'altra equazione farebbe $yy = aa - xx$, prese le assisse dal centro, e $2ax - xx = yy$, prese le assisse dal punto C . Ma parlando di asse, e non di diametro, gl'angoli delle coordinate, sono retti, quindi l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$.

La osservazione fatta nelle iperbole intorno alle quantità date aa , bb , za , e p , rispetto a' diametri, e parametro, si faccia egualmente nell'ellissi, senza altro ripetere le cose da se troppo chiare.

124. Nelle equazioni adunque dell'iperbole, e dell'ellissi riferite agl'assi, o diametri, prese le assisse dal centro, come

$$\frac{aayy}{bb} = xx - aa,$$

$$\frac{aayy}{bb} = aa - xx,$$

la radice quadrata del termine costante, cioè di aa , farà sempre il semiasse, o semidiametro trasverso; e se il coefficiente del quadrato dell'ordinata è lo stesso termine costante

stante diviso per una qualunque quantità data, la radice di questo divisore è sempre il semiasse, o semidiametro conjugato, cioè la radice di bb ; ma se esso coefficiente non è tale, vale a dire non contiene nel detto modo il termine costante, il semiasse o semidiametro conjugato è diverso. Così nell'equazione, per esempio, $\frac{ffy}{bb} = xx - aa$ il semiasse, o semidiametro trasverso è sem-

pre bensì a , ma non è b il conjugato. Per ritrovarlo si faccia l'analogia: Come il numeratore del coefficiente del quadrato dell'ordinata al denominatore, così il termine costante al quarto, la di cui radice sarà il semiasse, o semidiametro ricercato; nelle equazioni poi dell'ellissi, e dell'iperbole riferite agl'assi, o diametri, prese le assise dal vertice, come $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, $\frac{aayy}{bb} = xx - 2ax$,

$\frac{aayy}{bb} = xx + 2ax$, sarà il semiasse, o semidiametro trasverso

la metà della quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimensione, ed il conjugato, come sopra; avvertendo, che quando il coefficiente del quadrato dell'ordinata non sia il quadrato dell'asse, o diametro trasverso così ritrovato; l'analogia per il semiasse, o semidiametro conjugato sarà: come il numeratore del coefficiente del quadrato dell'ordinata al denominatore, così il quadrato della metà della quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimensione, al quarto; e la radice di esso quarto propor-

zio-

zionale farà il semiafse, o semidiametro conjugato.

Nell'equazione adunque dell'iperbola $\frac{ffy}{bb} = xx - aa$ farà il semiafse, o semidiametro trasverso $= a$, ed il conjugato $= \frac{ab}{f}$. Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprie-

tà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiafse, o semidiametro trasverso, e dell' assisa al quadrato dell'ordinata, come il quadrato del afse, o diametro trasverso al quadrato del conjugato, sarà $xx - aa$, $yy :: 4aa$, $\frac{4aabb}{ff}$, o sia $\frac{4aayy}{4aabb} \times ff = xx - aa$, cioè $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$, equazione proposta.

Così nell'equazione $\frac{abyy}{cc} = aa - xx$ farà il semiafse, o semidiametro trasverso $= a$, il conjugato $= \sqrt{\frac{acc}{b}}$. Nell'equazione $xx - 2ax = \frac{bbyy}{cm}$ farà il semiafse, o semidiametro

trasverso $= a$, il conjugato $= a\sqrt{\frac{cm}{b}}$. Nell'equazione $\frac{aa - bb}{cc} \times yy = xx - bb$ farà il semiafse, o semidiametro trasverso $= b$, il conjugato $= \sqrt{\frac{bbcc}{aa - bb}}$ ec.

125. Se le equazioni sono riferite ai parametri, come

$$\frac{2ayy}{p} = aa - xx, \quad \frac{2ayy}{p} = xx - aa, \text{ prese le assiisse,}$$

dal

dal centro, o

$$\frac{2ayy}{p} = 2ax - xx, \frac{2ayy}{p} = 2ax + xx, \frac{2ayy}{p} = xx' - 2ax,$$

prese le assisse dal vertice; sarà sempre nelle prime il semiasse, o semidiametro trasverso la radice del termine costante, e nelle seconde la metà del coefficiente dell'incognita alla prima dimensione, ed il parametro sarà sempre la quantità del denominatore del coefficiente del quadrato dell'ordinata, quando il numeratore del detto coefficiente nelle prime sia il doppio della radice del termine costante, e nelle seconde sia eguale alla quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimensione; ma quando il detto numeratore non abbia le accennate condizioni, sarà il parametro la quarta proporzionale del numeratore, del denominatore, e dell'asse, o diametro trasverso.

Nell'equazione adunque all'ellissi $aa - xx = \frac{byy}{c}$ sarà l'asse, o diametro trasverso $= 2a$, il parametro $= \frac{2ac}{b}$.

Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprietà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiasse, o semidiametro trasverso, e dell'assisa al quadrato dell'ordinata, come l'asse, o diametro trasverso al parametro, sarà $aa - xx, yy :: 2a, \frac{2ac}{b}$; cioè $\frac{byy}{c} = aa - xx$,

l'equazione proposta. Nell'equazione $xx - aa = \frac{3yy}{4}$, all'

iperbola, farà l'asse, o diametro trasverso $= 2a$, il parametro $= \frac{8a}{3}$. Nell'equazione all'iperbola $2ax + xx =$

$= \frac{b-c}{10} \times yy$ farà $2a$ l'asse, o diametro trasverso, e $\frac{2am}{b-c}$

il parametro. Nell'equazione all'ellissi $aa - bb - xx = \frac{byy}{c}$

farà l'asse, o diametro trasverso $= 2\sqrt{aa - bb}$, il parametro $= \frac{2c\sqrt{aa - bb}}{b}$, supposta a maggiore di b , perchè altri-

menti la curva sarebbe immaginaria.

126. Supposte, e bene intese queste tali cose, è facile la costruzione delle equazioni più complicate de' luoghi alle sezioni coniche, e ciò col ridurre l'equazione complicata ad una semplice e primaria delle spiegate, quindi, dalla sezione del cono supposta la descrizione di questa, passare alla costruzione della proposta.

E per procedere con chiarezza distinguerò in tre classi tutte le equazioni alle sezioni coniche, intendendo delle composte; dirò della prima classe tutte quelle, che contengono il quadrato di una sola delle incognite, ed il rettangolo delle costanti nell'altra incognita, come per esempio $ax \pm ab = yy$; ed altresì dirò della prima specie tutte quelle, che contengono i rettangoli delle incognite fra loro, e nelle costanti, ma non hanno il quadrato nè dell'una, nè dell'altra incognita; come $xy + ax = aa - ay$, essendo i segni comunque si vuole, il che s'intenda dell'altre due specie ancora rispetto ai segni.

Della

Della seconda specie chiamerò quelle, nelle quali essendo il quadrato di una, o di ambe le incognite, ed i rettangoli di una, o di ambe esse incognite nelle costanti, non vi sia il rettangolo delle incognite fra loro, come $xx + 2ax = ay + by$, o pure $xx - 2bx = yy + ay - ax$.

Della terza specie sono quelle, nelle quali vi è il rettangolo delle due incognite tra loro, e gli altri termini in qualunque modo, come $xx + 2xy + yy = aa - xx + bx$.

127. Per riconoscere, e costruire le equazioni della prima specie, fa d'uopo mettere in uso una sostituzione, la quale è di porre l'incognita, che non à il quadrato, più o meno (secondo i segni) una costante, eguale ad una nuova incognita, e così ridurre l'equazione (replacando, se bisogna, la detta sostituzione) all'espressione, più semplice, acciò possa facilmente conoscersi, e costruirsi il luogo della detta equazione, come si vedrà nei seguenti Esempj.

ESEMPIO I.

Sia $ax + ab = yy$, e sia dato l'angolo, che fra loro devono fare le coordinate. Poichè $ax + ab$ è $a \times x + b$, si faccia $x + b = z$, dunque sostituendo sarà $az = yy$, Parabola Apolloniana.

Alla indefinita AB , come diametro, col parametro $= a$ si descriva la parabola apolloniana CAC , (Fig. 52.) le di cui coordinate AB , BC comprendano il dato angolo, indi

sia $AD=b$; presa una qualunque $AB=z$, farà $BC=y$, ma perchè abbiamo, per la sostituzione, $x=z-b$, farà DB la x . L'origine adunque delle assisse x farà il punto D , prese verso M le positive, verso A le negative, e le corrispondenti ordinate positive, e negative faranno le y .

Se l'equazione proposta fosse stata $ax-ab=yy$, s'avrebbe fatta la sostituzione $x-b=z$, e però $x=z+b$. In questo caso, presa nel diametro prodotto $AE=b$, e fatto il rimanente come sopra, il punto E sarebbe l'origine delle x .

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xy+ax=aa-ay$; si faccia $y+a=z$, e sostituendo in luogo di y il valore $z-a$, avrassi $zx+az=2aa$, e facendo un'altra sostituzione di $x+a=p$, farà $pz=2aa$, Iperbola Apolloniana fra gli Asintoti.

Comprendano le indefinite MM , FF l'angolo dato delle coordinate; (*Fig. 53.*) e fra gli asintoti MM , FF si descrivano le due opposte iperbole del rettangolo costante $=2aa$. Presa una qualunque $AC=p$, ed ordinata la CE parallela ad AM , farà essa $=z$, ma per la sostituzione si à $x=p-a$, dunque fatta $AB=a$, farà $BC=x$; e perchè si à pure per l'altra sostituzione $y=z-a$, fatta $AN=a$, e condotta NH parallela ad FF , farà $DE=y$. Tirata adunque BQ parallela ad AN , farà Q il principio delle x , cosicchè ad una qualunque assissa $QD=x$, corrisponderà l'ordinata $DE=y$ positiva tra il punto Q , ed il punto P , e negativa

di là dal punto P , come la HI . Ma quando si prenda p minore di a , cioè AC minore di AB , allora comechè $x = p - a$, sarà x negativa, cioè verso N , e ad essa corrisponderanno le ordinate y positive. Che se si prenda p negativa eguale, per esempio, ad AV , sarà x negativa, ed eguale a QO , e la y negativa $= OE$. Se l'equazione fosse $xy + ax = aa + ay$, o pure $xy + ax = -aa - ay$, o questa $xy - ax = aa - ay$, o l'altra $xy - ax = -aa + ay$, le due prime sarebbero divisibili per $y + a$, e si avrebbe $x = \pm a$; le due altre sarebbero divisibili per $y - a$, e si avrebbe $x = \mp a$, e però non sarebbero esse luoghi, ma equazioni di problemi determinati. Ma se fosse $xy - ax = aa + ay$, la prima sostituzione sarebbe $y - a = z$, quindi l'equazione $zx - az = 2aa$, ed in conseguenza la seconda sostituzione farebbe $x - a = p$, onde finalmente l'equazione $zp = 2aa$, e però in questo caso alle coordinate p, z dovrebbeasi aggiungere la quantità $= a$ per avere le x ed y ; adunque presa da A verso V la $AR = a$, e fatta RG parallela ad MN , ed $= a$, indi per lo punto G condotta GT parallela ad FF , farebbe G l'origine delle x , e le corrispondenti ordinate le y .

Se fosse l'equazione $xy + ax = -aa + ay$, le sostituzioni farebbero $y + a = z$, $x - a = p$, che ci darebbero l'equazione $pz = -2aa$.

Si descrivano le stesse iperbole, ma negli altri due angoli, per essere negativo il rettangolo costante $2aa$, e sieno le ie, ie ; prodotta GR in L , farà L l'origine delle x positive e negative, e sulla retta LQ prodotta d'ambe

le

le parti insisteranno le ordinate y , cioè negative da N verso H , positive da N al punto i , e di nuovo negative oltre il punto i .

Che se fosse $xy - ax = -aa - ay$, le sostituzioni farebbero $y - a = z$, ed $x + a = p$. Descritte adunque le medesime iperbole ie , e prodotta QB in q , farà q l'origine delle x , e sopra TT insisteranno le ordinate y .

Se nelle equazioni fosse negativo il termine xy , si renda positivo colla trasposizione de' termini.

La diversità delle sostituzioni, e della posizione delle coordinate, che nasce dalla diversa combinazione de' segni nelle proposte equazioni, e che quì si è considerata, s'intenda di doverli considerare anche in appresso, il che ometterò per brevità.

Sin quì ô supposto, che le costanti dell' equazione sieno tali, che diano luogo alle accennate sostituzioni, che se tali non fossero, come per esempio, se fosse l'equazione $aa - bx = yy$, si faccia $aa = bc$, e si avrà $bc - bx = yy$, e la sostituzione da farsi farà $c - x$ eguale ad una nuova incognita. Così se fosse $\frac{abb + cx}{m} = yy$, si faccia $bb = cf$,

onde sia l'equazione $\frac{acf + cx}{m} = yy$, e si ponga indi $\frac{af + x}{m}$ eguale ad una nuova incognita.

Se fosse $\frac{aax - bbx + m^2}{a + b} = yy$, si faccia $aa - bb = cc$, ed $m^2 = cef$, e farà $\frac{ccx + cf}{a + b} = yy$; e così dell'altre simili.

128. Per ridurre , e costruire le equazioni della seconda specie ; posti da una parte del segno d'egualità col loro ordine tutti i termini , che contengono una stessa incognita , e dall' altra parte tutti gli altri parimente col loro ordine , e fatto in modo , che nel primo membro dell' equazione il quadrato dell' incognita sia positivo , e libero da' coefficienti , e frazioni , bisogna allo stesso primo membro (ed al secondo ancora , per non alterare l'eguaglianza) aggiungere il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine , se fa d'uopo , onde esso primo membro sia un quadrato ; quindi porre la radice di esso quadrato eguale ad una nuova incognita , la quale operazione ripetuta nel secondo membro ancora , se lo richiede , ci darà l'equazione ridotta alla forma semplicissima , o ridotta alla prima specie .

ESEMPIO III.

Sia $xx + zax = ay + by$. Aggiunto al primo , e secondo membro il quadrato aa , sarà essa $xx + zax + aa = aa + ay + by$, e però ponendo $x + a = z$, averassi $zz = aa + ay + by$, che è ridotta alla prima specie ; adunque fatta $a + b = c$, ed $aa = cf$, sarà $cf + cy = zz$, e posta $f + y = p$, sarà $zz = cp$, equazione alla Parabola Apolloniana .

Col paramentro $= c = a + b$, al diametro AB , e con le coordinate nel dato angolo si descriva la parabola CAC . (Fig. 54.) Presa una qualunque afflitta $AB = p$, la z positiva e nega-

tiva farà BC ; ma perchè $y = p - f$, cioè $= p - \frac{aa}{a+b}$, presa

$AD = \frac{aa}{a+b}$, farà $DB = y$, ed a cagione della sostituzione,

$x + a = z$, dal punto D alzata parallela a BC la $DH = a$; che farà terminata dalla parabola in H , (come si vedrà facilmente sostituendo in luogo della p nell'equazione ridotta $zz = cp$ il valore di $AD = \frac{aa}{a+b} = \frac{aa}{c}$, imperocchè farà

$zz = aa$, e però $DH = z = a$) e condotta per lo punto H la parallela OE al diametro, farà $HE = DB = p - \frac{a^2}{a+b} = y$,

ed in conseguenza $EC = z - a = x$ positiva, e negativa quando sieno positive le assisse; ed alle assisse negative, cioè prese da H verso O , corrisponderanno ambe le ordinate negative.

E S E M P I O I V.

Sia $xx + 2bx = yy - ay$. Aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè bb , farà $xx + 2bx + bb = yy - ay + bb$, e fatta $x + b = z$, averassi $zz = yy - ay + bb$, cioè $zz - bb = yy - ay$, ed aggiunto il quadrato della metà di a , farà $zz - bb + \frac{aa}{4} = yy - ay + \frac{aa}{4}$;

posta dunque $y - \frac{a}{2} = p$, farà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$, e suppo-

sto bb maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$, farà $zz - mm = pp$,

Iper-

Iperbola equilatera con i semidiametri $=m$, prendendo le assisse dal centro .

Nella indefinita BD si prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$,

e divisa egualmente in A ; col centro A , col semidiametro trasverso $=AG$ eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo si descrivano le due opposte iperbole equilatera (*Fig. 55.*); presa una qualunque assissa AD positiva e negativa $=z$, le corrispondenti ordinate DH saranno le p positive, e negative, e perchè per la sostituzione si à $x = z - b$; presa $AE = b$, sarà $ED = x$, ma essendo per l'altra sostituzione $y = p + \frac{a}{2}$, dal punto E condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata, che terminerà alla curva nel punto O , e per lo punto O la indefinita KK parallela al diametro BG , sarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto O l'origine delle x assisse sulla retta KK , alle quali prese positive corrispondono due ordinate y , una positiva, e l'altra negativa; e prese negative, ma non maggiori di EG , corrisponderanno due ordinate positive; prese negative, e maggiori di EG , ma minori di EB , le ordinate y saranno immaginarie, e prese negative maggiori di EB , e minori di EI , fatta $BI = GE$, saranno due ordinate positive, e finalmente un'ordinata positiva, e negativa l'altra, quando l'assisse negative sieno maggiori di EI .

Qui deve si avvertire, che la radice del quadrato $yy - ay + \frac{aa}{4}$ non è solo $y - \frac{a}{2}$, ma è pure $\frac{a}{2} - y$, e però le

sostituzioni dovrebbero esser due , cioè tanto di $y - \frac{a}{2} = p$,
 quanto di $\frac{a}{2} - y = p$, ciò non ostante però , e nel presente
 esempio, ed in altri in appresso della prima sola mi servo,
 perchè considerandosi nelle costruzioni la nuova incognita
 p in senso e positivo, e negativo , vi sono comprese quelle
 determinazioni ancora , che ci darebbe l'altra sostituzione ,
 che però rimane superflua .

Se la quantità bb , che ò supposta maggiore di $\frac{aa}{4}$,
 fosse all'opposto minore , il luogo sarebbe alle stesse oppo-
 ste iperbole , mutandosi solo le veci delle coordinate , e
 delle costanti; cioè sarebbe l'equazione finale $zz = pp - mm$,
 la di cui costruzione quì si ommette , per non esser diver-
 sa dalla precedente , se non che i semidiametri sono in
 questo caso eguali ciascheduno alla $\sqrt{\frac{aa}{4} - bb} = m$. Se fosse
 poi $bb = \frac{aa}{4}$, il luogo sarebbe alla linea retta , come è
 chiaro .

129. Per riconoscere , e costruire le equazioni della
 terza specie ; fa d'uopo , posto da una parte del segno
 d'egualità il quadrato di una delle incognite reso positivo,
 e libero da frazioni , e coefficienti con il rettangolo delle
 stesse , e dall'altra parte il rimanente de' termini , aggiun-
 gere al primo membro (e per conseguenza al secondo an-
 cora) tale funzione dell'altra incognita , onde esso primo
 mem-

membro sia un quadrato, indi porre la radice di esso eguale ad una nuova incognita, e fare la sostituzione, con che averassi l'equazione ridotta all'espressione più semplice, o ad una delle due specie di sopra.

Così nell'equazione, per esempio, $zz - \frac{2bzy}{a} = ay$ aggiungendo $\frac{bbyy}{aa}$ ad ambi i membri, farà il primo membro un quadrato, la di cui radice $z - \frac{by}{a}$ si ponga eguale

ad una nuova incognita p , e fatta la sostituzione, farà l'equazione $pp = \frac{bbyy}{aa} + ay$, che è della seconda specie.

130. Ma devesi avvertire, che alle volte questa nuova incognita, che si vuole introdurre, deve essere affetta da qualche coefficiente costante, altrimenti sarebbero molto imbrogliate le costruzioni, e però nell'equazione, per esempio, $xx \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = \pm fy \pm bx$, il di cui primo membro senz'altro aggiungere è già un quadrato, che à per radice $x \pm \frac{by}{a}$, se non vi fosse il termine bx , o essen-

dovi, si volesse eliminare essa x dall'equazione, col porre in luogo della x il suo valore cavato dalla sostituzione fatta, di modo che fosse espressa per la nuova incognita, e per la y con le costanti; si faccia pure la sostituzione $x \pm \frac{by}{a} = z$.

Ma non essendovi il termine fy , o se essendovi si volesse eliminare la y , si deve fare la sostituzione $x \pm \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$. E così rispettivamente se l'equazione fosse

$$yy \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \pm fy \pm bx; \text{ non essendovi, o volendosi}$$

eliminare il termine fy , si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = z$;

ma non essendovi, o volendosi eliminare il termine bx , si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = \frac{bz}{a}$.

Generalmente non essendovi nell'equazione il rettangolo delle costanti nell'incognita, per cui è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia essa incognita eliminare, si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita. Ma non essendovi il rettangolo delle costanti nell'altra incognita, per cui non è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia eliminare essa incognita; si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella metà del coefficiente costante del secondo termine del primo membro.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cx$. Si faccia $y + \frac{bx}{a} = z$, e farà l'equazione $zz = cx$ alla parabola apolloniana. Se l'angolo delle coordinate x , y della proposta equa-

equazione non fosse dato, ma fosse arbitrario, farebbe chiara la costruzione del luogo; imperciocchè sulla retta indefinita AB descritto il triangolo isoscele ACD (*Fig. 56.*) colla base $CD=b$, ed i lati $AC=a=AD$; ed al diametro AB , col parametro $=c$, con le ordinate parallele a DC descritta la parabola apolloniana dell'equazione ridotta $zz=cx$; prendendo una qualunque assissa $AB=x$, farebbe $BM=z$; ma per i triangoli simili ADC , ABE si à $EB=\frac{bx}{a}$, ed è, per la sostituzione fatta, $y=z-\frac{bx}{a}=EM$, e di più

$AE=AB=x$; dunque sulla indefinita AE presa una qualunque assissa $AE=x$, la corrispondente ordinata EM positiva, e negativa sarà la y dell'equazione proposta.

Ma perchè si suppone dato l'angolo delle coordinate x, y , a nulla serve la suddetta costruzione, e però si proceda così: Sulla indefinita AB si descriva il triangolo ACP con l'angolo ACP eguale al supplemento del dato angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e sia $AC=a$, $CP=b$. Prodotta AC indefinitamente, e presa una qualunque $AE=x$, sarà (fatta KK parallela a PC) $EH=\frac{bx}{a}$, quindi se HK fosse $=z$, fareb-

be $EK=y$, ed AE, EK le coordinate x, y dell'equazione proposta, e nel dato angolo; ma le HK non possono essere le z dell'equazione ridotta $cx=zz$, quando non siano ancora le assisse AH eguali alla x , e non già le AE . Si avverta però che AH sarà $=\frac{AP \times x}{a}$, cioè $=\frac{fx}{a}$ (chia-

ma-

mata $AP = f$, giacchè nel triangolo ACP essendo dati il lato AC , il lato CP , e l'angolo ACP ; è data pure la AP onde la curva così descritta, chiamando $AE = x$, ed $HK = z$, ci darebbe l'equazione $\frac{cfx}{a} = zz$, la quale sarebbe appunto la nostra ridotta, se in luogo del parametro c si avesse descritta la curva col parametro $\frac{ac}{f}$. Adunque

per costruire il luogo proposto; sulla indefinita AB si descriva il triangolo ACP coi lati $AC = a$, $CP = b$, e l'angolo ACP eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta; indi al diametro AB , col parametro $= \frac{ac}{f}$, cioè eguale alla quarta pro-

porzionale di AP , di AC , e del parametro dell'equazione ridotta, (il che è generale qualunque volta il luogo è alla parabola) e con le ordinate parallele a PC si descriva la parabola apolloniana; presa sulla indefinita AE una qualunque $AE = x$, farà EK positiva e negativa $= y$, e la curva il luogo dell'equazione proposta. Ed in fatti sarà

$$\overline{HK}^2 \text{ eguale al prodotto del parametro in } AH, \text{ cioè } yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{acfx}{af} = cx.$$

Si usi lo stesso artificio nell'altre equazioni all'iperbola, ed all'ellissi rispetto ai loro diametri, e parametri; con la sola differenza, che in queste il diametro trasverso, o conjugato, secondo che quello, o questo si deve varia-

re

re (e farà sempre quello , a cui appartiene il triangolo ACP) farà la quarta proporzionale di AC , di AP , e del diametro trasverso, o conjugato dell'equazione ridotta; ma rispetto poi al parametro, quando per esso sia data l'equazione, variato il diametro trasverso nel modo detto, farà esso la quarta proporzionale di AP , di AC , e del parametro dell'equazione ridotta; che se non al diametro trasverso, ma al conjugato appartenga il triangolo ACP (essendo data l'equazione per il parametro) farà esso la terza proporzionale del parametro dell'equazione ridotta, e di AP , come facilmente si conoscerà dagli Esempj .

ESEMPIO VI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{a^2} = bx - cc - zcy$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, farà $zz = bx - cc -zcz + \frac{2bcx}{a}$, cioè $zz + cz + cc = \frac{abx + 2bcx}{a}$, e fatta di nuovo l'altra sostituzione $z + c = q$, farà finalmente $qq = \frac{ab + 2bc}{a} \times x$, equa-

zione alla parabola apolloniana. Ma per costruirla relativamente alle nostre coordinate x, y : sulla indefinita BH (Fig. 57.) si costruisca il triangolo BDC coi lati $BD = a$, $DC = b$, e con l'angolo BDC eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate x, y dell'equazione proposta; si producano BD, BC indefinitamente, dal
punto

punto B si abbassi BA parallela a DC , ed eguale a c , indi col vertice A , al diametro AE parallelo a BC , e con le ordinate EP parallele a CD si descriva la parabola apolloniana PAP col parametro $= \frac{ab + 2bc}{f}$ (intendendo per f

la nota BC), e sulla indefinita BF presa una qualunque affissa $BF = x$, sarà $BH = AE = \frac{fx}{a}$, ed $EP = q$, e però

$HP = q - c = z$, ed $FH = \frac{bx}{a}$; adunque $FP = z - \frac{bx}{a} = y$

positiva, e negativa quando sia x maggiore di BO , ed ambe le ordinate negative quando sia x minore di BO .

Se nell'equazione proposta il rettangolo zcy fosse stato affetto dal segno positivo, allora la seconda sostituzione farebbe stata $z - c = q$, ed il parametro della parabola eguale ad $\frac{ab - 2bc}{a}$, e però fatte le stesse cose, come sopra,

in vece di condurre BH al di sopra della AE , diametro, s'averebbe dovuto condurla al di sotto, e sopra di essa fare il triangolo BDC , come mostra la Fig. 58. Che se in oltre fosse stato negativo il termine $\frac{2bxy}{a}$, la prima sostituzione farebbe stata $y - \frac{bx}{a} = z$, e però $y = z + \frac{bx}{a}$.

Adunque in questo supposto si rispetto alla Fig. 57., come alla 58. il triangolo BDC dovrà farsi al di sotto della BH , com'è BdC , quindi presa sopra Bd prodotta una qualunque $Bf = x$, sarà $fP = y$, avvertendo però, che in questo

questo caso l'angolo BdC non dovrà farsi eguale al supplemento, ma allo stesso angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione.

ESEMPIO VII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bby}{aa} = cx + cb$. Fatta la sostituzione

$x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, sarà $\frac{bbzz}{aa} = cx + cb$, e facendo $x + b = p$, sarà

$zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola apolloniana. Sulla inde-

finita AC si descriva il triangolo APQ coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo APQ eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (Fig. 59.), e si chiami al solito la nota $AQ = f$. Si producano AP , AQ indefinitamente, e si prenda $AH = b$, e si conduca HB parallela a PQ . Dal punto B si tiri BD indefinita e parallela ad AP , e col vertice A , al diametro AC , col parametro $= \frac{aac}{bf}$, e con le ordinate CM pa-

rallele a PQ si descriva la parabola MAM . Presa una qualunque $AE = p$, sarà $CM = z$, dunque HE , o sia BD , sarà $= x$, e $DC = \frac{ax}{b}$ (per i triangoli simili APQ , BDC)

dunque $DM = z - \frac{ax}{b} = y$ positiva, e negativa, e le BD ,

DM le coordinate dell'equazione proposta.

Se l'equazione fosse stata $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cx - cb$, fatta la stessa prima sostituzione dell'equazione antecedente, si averebbe $\frac{bbzz}{aa} = cx - cb$, e ponendo $x - b = p$, $zz = \frac{aacp}{bb}$, che è la stessa di prima, nè vi è altra differenza, se non che nel primo caso si à $x = p - b$, ed in questo $x = p + b$; vale a dire, che in questo caso il vertice della parabola deve essere in *B*, e l'origine delle x nel punto *A* prese full' indefinita *AE*.

ESEMPIO VIII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cb - cx$. Fatta la sostituzione $x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, farà l'equazione $\frac{bbzz}{aa} = cb - cx$, e posta $b - x = p$, farà $zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola.

Sulla indefinita *AH* si descriva verso *H* il triangolo *APQ* coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo *APQ* eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (*Fig. 60.*), e si chiami la nota $AQ = f$. Si produca *AP*, e si prenda $AE = b$, e s'abbassi *EH* parallela a *PQ*; col vertice *H* al diametro *HA*, con le ordinate *CD* parallele a *PQ*, e col parametro $= \frac{aac}{bf}$ si

de-

descriva la parabola apolloniana. Presa una qualunque $EB=p$, sarà $AB=b-p=x$, $BC=\frac{ax}{b}$, $CD=z$, dunque

$BD=z-\frac{ax}{b}=y$ positiva, e negativa, prendendo x tra i

punti A ed O , ed ambe le ordinate y negative, prendendo x oltre il punto O . Prodotta indefinitamente nella parte opposta al punto E la retta AE , e presa una qualunque $Eb=p$ positiva maggiore di AE , sarà $Ab=b-p=x$, quantità negativa, onde in questo caso le x negative saranno da A verso e , e le positive di A verso E , ed alla medesima x negativa corrisponderanno due ordinate bD , bD eguali ad y , positiva l'una, e negativa l'altra.

Se in questi due ultimi Esempj, siccome negl'altri, che verranno in appresso, il rettangolo delle due coordinate fosse affetto dal segno meno, vi si faccia sopra la considerazione, che si è fatta al fine dell'Esempio 6., il che basti d'avere una volta avvertito.

ESEMPIO IX.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = xx - aa$. Fatta la sostituzione di $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà l'equazione $zz = xx - aa$ all'iperbola.

Sulla indefinita EE si descriva il triangolo ACH , e sia $AC=a$, $CH=b$, e l'angolo ACH eguale al dato angolo delle coordinate dell'equazione proposta. Si produca in-

definitamente AC d'ambe le parti del punto A . Col centro A , col semidiametro trasverso $AH=f$, col conjugato $=a$ si descrivano le opposte iperbole con le ordinate parallele a CH (Fig. 61.). Presa una qualunque $AB=x$ positiva, farà $BE=\frac{bx}{a}$, ma $ED=z$, dunque $BD=z+\frac{bx}{a}$

$=y$ positiva. Presa poi nell'iperbola l'ordinata z negativa, cioè $=EM$, farà allora y eguale alla differenza tra EB , ed EM , cioè eguale a BM ; e però negativa quando x sia maggiore di AO . Adunque ad una qualunque assissa positiva maggiore di AO corrisponderanno due ordinate, una positiva, negativa l'altra; ed ambe le ordinate saranno positive quando sia x minore di AO . Ma quando si prenda la x negativa, cioè dalla parte del punto Q ; allora avvertasi, che farà QE negativa, imperciocchè sarà l'analogia $AC(a), CH(b)::AQ(-x), QE=-\frac{bx}{a}$,

adunque se $QE=-\frac{bx}{a}$, presa z positiva $=ED$, farà $z+\frac{bx}{a}=QD=y$ positiva, e presa z negativa, farà $-z-\frac{bx}{a}=QM=y$ negativa.

ESEMPIO X.

Sia $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{gxx}{a}=bb$; aggiungendo $\frac{bbxx}{aa}$, farà
 $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{bbxx}{aa}=bb-\frac{gxx}{a}+\frac{bbxx}{aa}$, e fatta la sostituzione

ne

ne $y - \frac{bx}{a} = z$, farà $zz = \frac{bbxx}{aa} - \frac{gxx}{a} + bb$, e ponendo $bb - ag = mm$, farà $zz = \frac{mmxx}{aa} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{mmxx}{aa}$, equazione all' iperbola.

Sulla indefinita DD si descriva il triangolo ABC coi lati $AB=a$, $BC=b$, e l'angolo ABC eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (Fig. 62.), e sia $=f$ la nota AC . Per lo punto A si conduca l'indefinita PP parallela a BC ; e col centro A , col diametro trasverso $QQ=2b$, col conjugato $=\frac{2bf}{m}$ preso nella retta EE , ai vertici Q , Q si descrivano le due opposte iperbole HQH ; presa una qualunque $AD=x$, e condotta DH parallela a BC , farà $EH=z=AP$, e $DE=\frac{bx}{a}$; dunque $DH=z+\frac{bx}{a}=y$, e le AD , DH faranno le coordinate dell'equazione proposta.

ESEMPIO XI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{2bxx}{a} + bb$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, farà l'equazione $zz = \frac{2bxx}{a} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{2bxx}{a}$, all' iperbola.

Sull'indefinita AD si descriva il triangolo AEP , (Fig. 63.) e sia $AE=a$, $EP=b$, e l'angolo AEP il
sup-

supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta. Prodotta d' ambe le parti indefinitamente la retta AE , e chiamata al solito la nota $AP=f$, si descrivano col centro A , col semidiametro trasverso $AI=b$ parallelo a PE , e col parametro $=\frac{ff}{a}$ le

opposte iperbole IC , ic ; presa una qualunque $AB=x$, sarà $BD=\frac{bx}{a}$, ma $CD=FA=z$; dunque $BC=z-\frac{bx}{a}=y$.

Presa z negativa $=DG$ sarà $BG=-z+\frac{bx}{a}=-y$, e però alla stessa x positiva corrisponderanno due ordinate y , una positiva, l'altra negativa, presa la x fra il punto A , ed il punto H ; presa poi la x fra i punti H , ed L , faranno ambe le ordinate y negative, e di nuovo una positiva, e negativa l'altra, presa la x maggiore di AL .

Presa poi la $Ab=-x$, sarà $(bd)=-\frac{bx}{a}$, e però essendo $(dg)=z$, sarà $(bg)=z-\frac{bx}{a}=y$, e presa z negativa $=(dc)$, sarà $(bc)=-z+\frac{bx}{a}=-y$; adunque alla stessa

$Ab=x$ negativa corrisponderanno due ordinate y , una positiva, l'altra negativa, presa la x minore di Ab ; ambe faranno le ordinate positive fra i punti b , ed l ; e di nuovo un'ordinata sarà positiva, e l'altra negativa, presa la x maggiore di Al ; e però le iperbole così descritte faranno il luogo della proposta equazione.

ESEMPIO XII.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cc - xx + 2bx - bb$. Fatta la

sostituzione $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = cc - xx + 2bx - bb$, e

fatta l'altra sostituzione $x - b = p$, sarà finalmente $zz = cc - pp$, equazione all'ellissi, e non al circolo, quantunque ne abbia l'apparenza, e la ragione si è, perchè non solo le coordinate p, z non formano angolo retto, ma nè meno sono in angolo tra loro, dovendo l'una essere AC , l'altra BT , come si vede nella costruzione, che segue; e però sulla indefinita EB si descriva il triangolo EDF (Fig. 64.) coi lati $ED = a$, $DF = b$, e l'angolo EDF eguale all'angolo, che devono fare le coordinate, dell'equazione proposta, e si chiami $= f$ la nota EF . Si producano indefinitamente ED , EF , e presa $EP = b$, si conduca PA indefinita, e parallela a DF , e dal punto A la AG parallela ad EP . Col centro A , col diametro trasverso $MN = \frac{2cf}{a}$, col diametro conjugato RR parallelo

a DF , ed $= 2c$ si descriva l'ellissi $MRNR$, presa qualunque $AC = p$, sarà $EQ = x$, e però $BQ = \frac{bx}{a}$, ma

$BT = z$, dunque $QT = z + \frac{bx}{a} = y$, e le EQ, QT le coordinate dell'equazione proposta.

ESEMPIO XIII.

Sia l'equazione $yy + \frac{bxy}{a} + xx + cy + lx - ag = 0$. Aggiunto all'uno, ed all'altro membro il quadrato $\frac{bbxx}{4aa}$, farà $yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} = \frac{bbxx}{4aa} - xx - lx - cy + ag$, e fatta la sostituzione $y + \frac{bx}{2a} = z$, farà $zz = \frac{bbxx}{4aa} - \frac{4aaxx}{4aa} + \frac{bcx}{2a} - \frac{2alx}{2a} - cz + ag$.

Sia per esempio $4aa$ maggiore di bb , e si ponga $\frac{bb}{4aa} - \frac{4aa}{n} = -\frac{m}{n}$, e $\frac{bc}{2a} - \frac{2al}{2a} = b$, farà, aggiunto ad ambi i membri $\frac{cc}{4}$, $zz + \frac{cz}{4} + \frac{cc}{4} = -\frac{mxx}{n} + bx + ag + \frac{cc}{4}$, e fatta la sostituzione $z + \frac{c}{2} = p$, farà $pp = -\frac{mxx}{n} + bx + ag + \frac{cc}{4}$, cioè $-\frac{npp}{m} + \frac{cc}{4} + ag \times \frac{n}{m} = xx - \frac{nbx}{m}$, ed aggiunto all'uno ed all'altro membro $\frac{mnb}{4mm}$, farà $-\frac{npp}{m} + \frac{cc}{4} + ag \times \frac{n}{m} + \frac{mnb}{4mm} = xx - \frac{nbx}{m} + \frac{mnb}{4mm}$, e fatte finalmente le sostituzioni di $x - \frac{nb}{2m} = q$, e di $\frac{cc}{4} + ag \times \frac{n}{m} + \frac{mnb}{4mm} = ee$, si avrà $\frac{npp}{m} = ee - qq$, equazione all'ellissi.

Sulla indefinita AC si descriva il triangolo ASF ,
(Fig.

(Fig. 65.) e sia $AS = 2a$, $SF = b$, e l'angolo ASF eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e si chiami f la nota AF . Sulla AS indefinitamente prodotta presa $AR = \frac{bm}{2a}$, si tiri

RQ indefinita, e parallela ad SF , e dal punto Q si tiri l'indefinita QO , e parallela ad AS , e si faccia $QM = \frac{1}{2}c$, e per lo punto M condotta HV parallela ad AQ , col centro M , col diametro trasverso $HV = \frac{ef}{a}$, col parametro

$= \frac{4aem}{f^2}$ si descriva l'ellissi $HNVK$; presa una qualunque

$RD = q$, sarà $PN = p$, e però $AD = x$, $DC = \frac{bx}{2a}$, $CN = z$,

dunque $DN = z - \frac{bx}{2a} = y$.

Qui si noti, che se l'angolo delle coordinate fosse tale, che l'angolo AFS divenisse retto, ed in conseguenza l'angolo MPN ancora, allora sarebbe $4aa - bb = ff$, onde $\frac{m}{n} = \frac{4aa - bb}{4aa} = \frac{ff}{4aa}$, e però sarebbe il parametro $\frac{4aem}{f^2} = \frac{ef}{a}$, cioè eguale al diametro trasverso; adunque essendo di più retto l'angolo MPN , l'ellissi passerebbe ad essere un circolo del diametro $\frac{ef}{a}$.

131. Rispetto alle equazioni dell'iperbole, che si vogliano, o si debbano costruire fra gli asintoti, si considerino tutte comprese nelle quattro seguenti:

B b

gxx

$$\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny.$$

ESEMPIO XIV.

Sia in primo luogo $\frac{gxx}{b} + xy = ab + mx + ny$, in cui prendo pure positivi tutti i termini dell'omogeneo di comparazione. Fatta la sostituzione $\frac{gx}{b} + y = z$, averassi $zx = mx + nz - \frac{ngx}{b} + ab$, e fatta l'altra sostituzione $z - m + \frac{ng}{b} = p$, sarà $px = np + mn + ab - \frac{nug}{b}$, e di nuovo fatta la terza sostituzione $x - n = q$, sarà finalmente $pq = ab + mn - \frac{mng}{b}$. Suppongo, che sia $ab + mn - \frac{mng}{b}$ quantità positiva. Sulla indefinita NN , al punto A preso ad arbitrio si descriva il triangolo ABC coi lati $AB=b$, $BC=g$, e l'angolo ABC eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta; e si chiami la nota $AC=f$. Al punto A si alzi AD parallela a BC , ed $=m - \frac{ng}{b}$, come nella Fig. 66. quando sia $m - \frac{ng}{b}$ quan-

tità

tità positiva; e si abbassi AD , come nella *Fig. 67.* quando sia $m - \frac{ng}{b}$ quantità negativa, a cagione della sostituzione

fatta di $z - m + \frac{ng}{b} = p$. Per D si conduca PP indefinita,

e parallela ad AC , e sulla AB prodotta si prenda $AE = n$, e per E si conduca TT parallela a BC . Fra gli asintoti PP , TT si descrivano le due opposte iperbole RR del rettangolo costante $= ab + mn - \frac{ng}{b} \times \frac{f}{b}$, cioè il quarto pro-

porzionale di AB , di AC , e del rettangolo costante dell'equazione ridotta; presa una qualunque $EQ = q$, sarà $PM = \frac{fq}{b}$, e $PR = p$, e però $AQ = q + n = x$; ma $PN =$

$AD = m - \frac{ng}{b}$, dunque $NR = p + m - \frac{ng}{b} = z$, e perchè

$QN = \frac{gx}{b}$, farà finalmente $QR = z - \frac{gx}{b} = y$, e le due AQ ,

QR le coordinate dell'equazione proposta. Presa x positiva, quando sia minore di AE , farà y negativa; quando sia maggiore di AE , e minore di AO , farà y positiva; e quando sia maggiore di AO , farà y negativa. Presa x negativa, allora sarà $QN = -\frac{gx}{b}$ quantità negativa, adun-

que $y = z - \frac{gx}{b}$ farà $= NR + NQ$; e però quando x nega-

tiva sia minore di AO , farà y negativa; e quando essa sia maggiore di AO , farà la y positiva.

Ma se il secondo termine dell'omogeneo di compara-

zione fosse negativo, cioè se l'equazione fosse $\frac{gxx}{b} + xy =$

$= ab - mx + ny$, allora la seconda sostituzione farebbe

$z = p - m - \frac{ng}{b}$, e l'equazione ridotta $pq = ab - mn - \frac{nng}{b}$.

Supposto adunque, che $ab - mn - \frac{nng}{b}$ sia quantità positi-

va, descritte come nella Fig. 67. le iperbole RR , ma del rettangolo costante $\frac{ab - mn - nng}{b} \times \frac{f}{b}$, e presa $AD = m + \frac{ng}{b}$,

faranno esse nello stesso modo il luogo dell'equazione proposta.

Se l'equazione proposta avesse l'ultimo termine affetto dal segno negativo; cioè se fosse $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx - ny$,

la terza sostituzione da farsi sarebbe $x + n = q$, dove che prima era $x - n = q$, e però muterassi la posizione del punto A , origine delle x . Adunque nella Fig. 68., se il valore di AD è positivo, e nella Fig. 69., se è negativo, prodotto in E il lato BA del solito triangolo, onde sia $AE = n$, si descrivano fra gli asintoti TT , PP le iperbole del loro competente rettangolo costante, cioè quando nell'equazione il termine mx è affetto dal segno positivo, del rettangolo costante $= ab - mn - \frac{nng}{b} \times \frac{f}{b}$, e quando per l'op-

posto è affetto dal segno negativo, del rettangolo costante $= ab + mn - \frac{nng}{b} \times \frac{f}{b}$, e presa nel primo caso $AD = m + \frac{ng}{b}$,

e nel secondo $AD = \frac{ng}{b} - m$, faranno nello stesso modo il luogo dell' equazione proposta.

Fino ad ora è supposto, che il rettangolo costante, dell' equazione ridotta sia quantità positiva; ma quando fosse quantità negativa, non sarebbe dissimile la costruzione, avvertendo solo di descrivere le iperbole negli altri due angoli relativamente al rettangolo costante, che darà l' equazione ridotta, prendendo la linea AD positiva, o negativa secondo il valore, che darà la stessa equazione, ed il punto A alla sinistra, o alla destra dell' asintoto TT conforme sarà positivo, o negativo l' ultimo termine ny dell' omogeneo di comparazione, come mostrano le Figure 66. 67. 68. e 69.

Il termine costante ab è stato preso fin' ora sempre positivo; ma quando anche si prenda negativo, nessuna alterazione può egli fare, se non rendere negativo il rettangolo costante delle equazioni ridotte, il qual caso già è stato costruito. Resta adunque generalmente costruita la prima delle quattro equazioni proposte, cioè $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny$.

Quanto alla seconda equazione di sopra riferita, $-\frac{gxx}{a} + xy = ab \pm mx \pm ny$; la prima sostituzione, che deve farfi, sarà $y - \frac{gx}{b} = z$, cioè $y = z + \frac{gx}{b}$, e tutto il rimanente si faccia, come si è fatto fin' ora.

Adun-

Adunque per avere l'ordinata y bisognerà alle z aggiungere la $\frac{gxx}{b}$, onde in ciascun caso delle *Figure* 66. 67.

68. e 69. si dovrà descrivere il triangolo ABC al di sotto della NN , come si vede in AbC , coi lati $Ab=b$, $bC=g$, e con l'angolo AbC eguale all'angolo , che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, quindi prodotta dall'una, e dall'altra parte Ab , e presa una qualunque $Aq=x$, sarà la corrispondente qR la y .

Le due ultime equazioni delle quattro sono

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

ma mutando i segni faranno esse

$$-\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny,$$

$$\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny; \text{ ma questa è stata}$$

costruita nel costruire la prima, e l'altra è stata costruita nel costruire la seconda, e però generalmente sono state costruite le quattro equazioni da prima proposte; il che era da farsi.

PROBLEMA I.

132. *Data di posizione la retta indefinita AB, (Fig. 70.) è dato fuori di essa il punto F; si ricerca il luogo di tutti i punti M tali, che condotte da ciascuno di essi due rette linee, l'una perpendicolare alla AB, l'altra al dato punto F, sieno queste sempre eguali fra loro.*

Sia *M* uno dei punti, che si cercano, e si tirino le rette, *MN* perpendicolare a *BA*, ed *MF* al dato punto *F*; dovranno essere queste eguali fra loro, per la condizione del problema, e però condotta *FG* normale ad *AB*, e chiamata $= a$, si tiri ad essa perpendicolare *MP*, e si chiami $GP = x$, $PM = y$, farà $PF = a - x$, e però $FM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, ma $FM = MN$; dunque $x = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, cioè $xx = xx - 2ax + aa + yy$, o sia $2ax - aa = yy$, e fatta la sostituzione $x - \frac{a}{2} = z$, farà $2az = yy$, equazione alla parabola apolloniana.

Si prenda *GL* eguale alla metà di *GF*, e col vertice *L*, col parametro $= 2a$ si descriva la parabola *LM*, farà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $LP = z$, farà $PM = y$; ma $GL = \frac{1}{2}a$, dunque $GP = z + \frac{a}{2} = x$, e però le *GP*, *PM* le coordinate dell'equazione proposta.

Già si fa, per la proprietà della parabola, che *AB* è la direttrice, ed *F* il fuoco.

PRO-

ISTITUZIONI

PROBLEMA II.

133. *Data di posizione una retta linea indefinita PAP, e dati due punti fissi A, D, l'uno sulla stessa linea, e l'altro fuori di essa (Fig. 71.), si domanda il luogo di tutti i punti M tali, che condotte le linee MA al dato punto A, e DME dal dato punto D per lo punto M, sia sempre AM eguale alla porzione ME compresa fra il punto M, ed il punto E, in cui essa linea DME incontra la data linea PAP.*

Dal dato punto D, e dal punto M, che si suppone, essere uno di quelli, che si cercano, si tirino le linee DB, MP perpendicolari alla data PAP; faranno note le rette AB, BD, e però sia $AB = 2a$, $BD = 2b$, $AP = x$, $PM = y$. Si tirino le rette AM, DME; poichè per la condizione del problema $AM = ME$, farà ancora $PE = AP = x$; ora per i triangoli simili EBD, EPM farà $EB, BD :: EP, PM$, e sostituendo i valori analitici, $2x - 2a, 2b :: x, y$; e però l'equazione $2xy - 2ay = 2bx$, cioè $xy - ay = bx$. Si faccia la sostituzione $x - a = z$, farà $zy = bz + ba$, e trasportando il termine bz , $zy - bz = ab$, e fatta l'altra sostituzione $y - b = p$, farà finalmente $pz = ab$, equazione all'iperbola fra gli asintoti.

Sulla data linea di posizione PAP dal dato punto A si prenda $AL = a$, e si erigga ad essa perpendicolare la $LC = b$; indi condotta per lo punto C la retta RF parallela

lela a PP ; si descrivano fra gli asintoti RF , HG le due opposte iperbole DM , AM del rettangolo ab , le quali passeranno per i punti D , A ; presa una qualunque $CK=z$, sarà $KM=p$, ma $AL=a$, $LC=b$; dunque $AP=a+z=x$, e $PM=p+b=y$ saranno le coordinate del problema, e le iperbole il luogo, che si cercava; il che ec.

PROBLEMA III.

134. *Dati due circoli EGF, BNO, e dati i loro centri C, A; (Fig. 72.) se da un qualunque punto G della periferia del circolo EGF si tirerà una tangente GNO, che incontri ne' punti N, O l'altro circolo BNO, e da questi due punti si condurranno due tangenti NM, OM, si ricerca il luogo di tutti i punti M, ne' quali le dette tangenti s'incontrano.*

Dal punto M , che è uno di quelli, che si cercano, si tiri la perpendicolare MP alla CA , e dal centro A si tiri la retta AM ; poichè i triangoli ANM , AOM sono eguali, per essere retti gli angoli N , O , ed i lati AN , NM eguali ai lati AO , OM ; sarà anche l'angolo $NMA=OMA$, onde nei triangoli NMQ , OMQ , poichè è comune il lato MQ , ed $MO=MN$, sarà $NQ=QO$, ed AM perpendicolare alla NO . Si tiri dal centro C al punto del contatto la retta CG , la quale sarà parallela ad AM , essendo anch'essa perpendicolare alla NO ; e si chiami $AB=a$, $CE=b$, $CA=c$, ed $AP=x$, $PM=y$,

Cc e

e però $AM = \sqrt{xx + yy}$. Nei triangoli simili AOM , AQO farà $AM, AO :: AO, AQ$, e sostituiti i valori analitici, si troverà $AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$. Si conduca CH per-

pendicolare ad MA prodotta, se farà bisogno, farà $HQ = CG$, e però $HA = b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$; ma faranno si-

mili i triangoli CAH , AMP , dunque $PA, AM :: AH, AC$, cioè $x, \sqrt{xx + yy} :: b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$, e, e multipli-

cati gli estremi, ed i mezzi, $cx = b\sqrt{xx + yy} - aa$, ovvero $cx + aa = b\sqrt{xx + yy}$, e quadrando, $ccxx + 2aacx + a^4 = bbxx + bbyy$, cioè $yy + \frac{bb - cc}{bb} \times \frac{xx}{bb} - \frac{2aacx}{bb} - \frac{a^4}{bb} = 0$.

Tre casi in quest'equazione debbono distinguersi, cioè quando $b = c$; quando b è maggiore di c ; e quando c è maggiore di b .

Sia primieramente $b = c$, farà l'equazione $yy - \frac{2aax}{b} - \frac{a^4}{bb} = 0$. Si lasci solo da una parte il termine yy , e farà $yy = \frac{2aax}{b} + \frac{a^4}{bb}$, e ritrovato un rettangolo $zbf = aa$, si ponga in luogo di aa nell'ultimo termine del secondo membro, farà $yy = \frac{2aax + 2aaf}{b}$, e fatta la sostituzione $x + f = z$, farà finalmente $yy = \frac{2aaz}{b}$, equa-

zio-

zione alla parabola apolloniana. Sulla retta CA (Fig. 73.) verso C si prenda $AI = \frac{aa}{b} = f$, e col vertice I , all'asse IL , parametro $= \frac{2aa}{b}$ si descriva la parabola IM ; farà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $IP = z$, farà $PM = y$, ma $AI = f$, dunque $AP = z - f = x$, e le AP , PM le coordinate del Problema.

Sia in secondo luogo b maggiore di c , farà positivo il termine $\frac{bb - cc}{bb} \times xx$; si scriva l'equazione così

$$\frac{bb - cc}{bb} \times xx - \frac{2aacx}{bb} = a^+ - yy, \text{ ovvero } xx - \frac{2aacx}{bb - cc} = \frac{a^+}{bb - cc} -$$

$$\frac{bbyy}{bb - cc}, \text{ ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato } \frac{a^+cc}{bb - cc},$$

$$\text{farà } xx - \frac{2aacx}{bb - cc} + \frac{a^+cc}{bb - cc} = \frac{a^+bb}{bb - cc} - \frac{bbyy}{bb - cc}, \text{ e fatta la sostituzione}$$

$$\text{ne } x - \frac{aac}{bb - cc} = z, \text{ farà finalmente } \frac{bbyy}{bb - cc} = \frac{a^+bb}{bb - cc} - \frac{zz}{bb - cc}, \text{ equazio-}$$

ne all'ellissi.

Si prenda (Fig. 74.) dal punto A verso E la porzione $AI = \frac{aac}{bb - cc}$, e col centro I , coll'asse trasverso $ZY = \frac{2aab}{bb - cc}$, col conjugato $RT = \frac{2aa}{\sqrt{bb - cc}}$ si descriva l'ellissi $RZTY$,

farà essa il luogo cercato, in cui presa una qualun-

que $IP = -z$ (perchè dalla parte de' negativi), farà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{bb - cc}$, dunque $AP = z + \frac{aac}{bb - cc} = x$, e

però le AP , PM le coordinate del Problema, il che cc.

Sia finalmente c maggiore di b , farà negativa la quantità $\frac{bb - cc}{bb} \times xx$, e però l'equazione $\frac{ccxx - bbxx}{bb} +$

$\frac{2aacx}{bb} = yy - \frac{a^2}{bb}$, ovvero $xx + \frac{2aacx}{cc - bb} = bbyy - \frac{a^2}{cc - bb}$. Si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{a^2 cc}{cc - bb}$, e farà

$xx + \frac{2aacx}{cc - bb} + \frac{a^2 cc}{cc - bb} = bbyy + \frac{a^2 bb}{cc - bb}$, e fatta la sostituzione,

$z = x + \frac{aac}{cc - bb}$, farà finalmente $zz - \frac{a^2 bb}{cc - bb} = bbyy$, equazione all'iperbola riferita agl' assi.

Sulla retta CA (Fig. 75.) si prenda dalla parte del punto C la porzione $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, e col centro I , coll'asse

trasverso $ZY = \frac{2aab}{cc - bb}$, col conjugato $= \frac{2aa}{\sqrt{cc - bb}}$ si descriva-

no le iperbole opposte YM , ZK ; faranno esse il luogo cercato, in cui presa una qualunque $IP = z$, farà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, dunque $AP = z - \frac{aac}{cc - bb} = x$, e però

le AP , PM le coordinate del problema proposto, il che cc.

In

In questo Problema si è sempre supposto il circolo EFG maggiore del circolo BNO , cioè b maggiore di a , ma quando anche fosse $b=a$, ovvero a maggiore di b , il luogo dei punti cercati sarebbe sempre nel primo caso la parabola, nel secondo l'ellissi, e nel terzo le due opposte iperbole, e perciò era inutile il distinguere questi casi, i quali non fanno variare i luoghi.

PROBLEMA IV.

135. *Date due linee AC, CB di posizione sulla retta AB, che si taglino in C (Fig. 76. 77.), si ricerca il luogo di tutti i punti M tali, che condotta per essi una perpendicolare FMN ad AB, che tagli nel punto Q la AC, e nel punto N la BC, sia sempre il quadrato di PM eguale al rettangolo di PQ $\times$ PN.*

Si tiri la retta CD ; questa o caderà fra i punti A , B , come nella Figura 76., o caderà da una parte di essi, come nella Figura 77.

Cada in primo luogo fra i punti A , B , e si chiami $AB=a$, $AP=u$, $PQ=x$, $PM=y$, $PN=z$, farà, per la condizione del problema, $zx=yy$. Ma è data la ragione di AP a PQ , che sia, per esempio, quella di m ad n , ed è data la ragione di BP , a PN , che sia, per esempio, come b , c ; dunque farà $PQ=x=\frac{un}{m}$, e $PN=z=\frac{ac-cu}{b}$, e però sostituiti questi valori nell'equazione $zx=yy$, farà

$$yy=$$

$yy = \frac{ac - cu}{b} \times \frac{un}{m}$, cioè $\frac{bmyy}{cn} = au - uu$, equazione all'ellissi.

Coll' asse trasverso $AB = a$, col conjugato $= a \sqrt{\frac{cn}{bm}}$ si descriva l'ellissi AMB , sarà la metà superiore $AMCB$ il luogo, che si cerca.

Cada ora (*Fig. 77.*) il punto D da una parte dei punti A, B , e chiamata, come sopra, $AB = a$, $AP = u$, $PM = y$, $PQ = x$, $PN = z$, sarà $BP = u - a$, e però $PN = \frac{uc - ac}{b}$; ma, per la condizione del problema, $zy = yy$,

e la $x = \frac{un}{m}$, come sopra, dunque fatta la sostituzione dei valori di z , ed x , sarà $yy = \frac{uc - ac}{b} \times \frac{un}{m}$, o sia $\frac{bmyy}{cn} = uu - au$, equazione all' iperbola.

Al vertice B , asse trasverso $= a$, asse conjugato $= a \sqrt{\frac{cn}{bm}}$ si descriva l'iperbola BCM , sarà essa il luogo, che si cercava.

Se la retta AC non cadesse sopra la AB , ma fosse a lei parallela, come sarebbe nella posizione aC , AB , (*Fig. 78.*) farebbe data la retta PQ , e però chiamata, $PQ = m$, $AB = a$, $BP = u$, $PN = z$, $PM = y$, e fatta la ragione di $BP, PN :: m, n$, l'equazione $xz = yy$ farebbe $yy = un$; onde descritta al vertice B , asse BA , col parametro $= n$ la parabola apolloniana BMC , sarà essa in questo caso il luogo, che si cerca.

PRO-

PROBLEMA V.

136. Sia una curva AM (Fig. 79.), di cui sia data l'equazione, ed abbia per asse la retta AT , e sia fuori di essa un punto fisso F , da cui sia condotta la retta FM , che tagli la curva nel punto M , e l'asse nel punto P . Movendosi la retta FM intorno al punto F faccia muovere tutto il piano AMP parallelo a se stesso sulla linea ET , essendo fisso il punto P rispetto al punto A , ma mobile sull'asse TA , cioè essendo data AP ; descriverà nello stesso tempo il punto M una curva CMD : si cerca, quale sia questa curva.

Sia giunta la curva sul punto a della retta ET , farà per la condizione del problema $Pp = Aa$, e però $AP = (ap)$. Si chiami adunque $AP = a$, $FT = b$, ed abbassata dal punto M la perpendicolare MQ ad ET ; sia $TQ = x$, $QM = y$, $AQ = t$. Poichè per i triangoli simili FOM , PMQ ti à FO , $OM :: QM$, PQ , cioè $b + y$, $x :: y$, $\frac{xy}{b+y}$, farà $\frac{xy}{b+y} = PQ$, ma $PQ = a - t$, dunque $\frac{xy}{b+y} = a - t$, cioè $xy = ab - bt + ay - ty$.

Si sostituisca in quest'equazione canonica il valore di t dato per la y , e per le cognite dell'equazione della curva AM , e si avrà l'equazione, che si cerca della curva CMD .

Sia

Sia primieramente AM una retta linea (Fig. 80.); farà data la ragione di t ad y , che sia, per esempio, come m ad n , farà $t = \frac{my}{n}$, e sostituito questo valore in luogo di t nell'equazione canonica, farà essa $\frac{myy}{n} = ab - xy - \frac{bmy}{n} + ay$, luogo all'iperbola fra gli asintoti.

Per costruirla nella data *Figura* si prenda sulla FO una qualunque porzione TH , e condotta in angolo retto la HG tale, che sia $TH, HG :: n, m$; si tiri la TG , e presa sulla TA la porzione $TV = \frac{an - bm}{n}$, dal punto V si tiri VS parallela a TG , e fra gli asintoti VS, VE si descriva l'iperbola CMD del rettangolo costante $= \frac{abg}{n}$; (fatta $= g$ la nota TG) presa una qualunque affissa $TQ = x$, farà la corrispondente $QM = y$, e l'iperbola il luogo dell'equazione $\frac{myy}{n}$, il che cc.

Sia in secondo luogo AM un circolo (Fig. 81.) descritto col centro P , raggio $AP = a$, farà per la proprietà del circolo $AQ = t = a - \sqrt{aa - yy}$, e sostituito nell'equazione generale in luogo di t questo valore, farà essa $xy = b + y\sqrt{aa - yy}$, equazione alla Concoide di Nicomede, e farà la curva CMD , che si descrive dall'intersezione M della retta FM coll'arco superiore AM del circolo, la concoide superiore, ET ne farà l'asintoto, F il polo;

polo ; e la curva , che si genera dall' intersezione N della retta FM col circolo al di sotto di ET , sarà la concoide inferiore . Il che manifestamente si vede dalla natura della concoide , e dalla condizione del problema ; imperciocchè saranno sempre le due intercette PM , PN fra l'asintoto , e la curva eguali al raggio del circolo AP .

Sia in terzo luogo la curva AM una parabola apolloniana del parametro $AP=a$; (Fig. 82.) sarà in quest'ipotesi $t = \frac{yy}{m}$, e sostituito nell' equazione canonica questo valore di t , sarà essa

$$xy - ay + \frac{y^3}{m} = ab - \frac{byy}{m},$$

cioè

$$y^3 + mxy + byy - amy - abm = 0.$$

Che è l'equazione alle due Concoide Paraboliche , una delle quali si descrive per l'intersezione della linea FM colla parte superiore della parabola ; l'altra per l'intersezione colla parte inferiore , e la retta ET sarà anche in questo caso l'asintoto della curva .

PROBLEMA VI.

137. *Dati due circoli eguali , che si taglino in due punti A , N ; (Fig. 83.) e dati i loro centri D , B , si ricerca il luogo di tutti i punti M tali , che le loro distanze dai detti circoli sieno sempre eguali fra loro .*

D d

Sia

Sia M uno dei punti, che si cercano; condotte dai centri D, B per questo punto le rette DM, BO , faranno MS, MO le distanze dai circoli dati, le quali per la condizione del problema devono essere fra loro eguali. Si chiami adunque $DS = BO = a$, $DB = b$, ed abbassata la perpendicolare MP alla retta DB prodotta, sia $DP = x$, $PM = y$, sarà $DM = \sqrt{xx + yy}$, ed $SM = \sqrt{xx + yy} - a$, ma $BP = x - b$, dunque $BM = \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, e però $OM = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, ma deve essere $SM = MO$, dunque si avrà l'equazione $\sqrt{xx + yy} - a = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, la quale si riduce ad essere (coi metodi insegnati) $xx - bx + \frac{bb}{4} = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, si faccia la sostituzione $x - \frac{b}{2} = z$, e sarà $zz = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, o sia $\frac{4aayy}{4aa - bb} = aa - zz$, equazione all'ellissi.

Si divida per metà nel punto C la retta DB , e col centro C , coll'asse trasverso $FE = 2a$, col conjugato $AN = \sqrt{4aa - bb}$ si descriva l'ellissi $FAEN$, sarà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $CP = z$, sarà $PM = y$, ma $CD = \frac{1}{2}b$, dunque $DP = z + \frac{1}{2}b = x$, e però le DP, PM le coordinate del problema proposto.

E' inutile il distinguere i casi, ne quali a è maggiore, minore, o eguale a b , perchè il problema non muta natura, essendo sempre necessariamente b minore di $2a$, come è chiaro.

Dalla

Dalla costruzione si ricava, che i punti D, B saranno i fuochi dell'ellissi, e che il di lei asse conjugato sarà terminato dai punti, ne' quali si tagliano i due circoli. E primieramente, perchè DS è eguale a BO , ed $SM = MO$, farà $DS + SM + MB$, cioè $DM + MB = 2DS$, ma $2DS = FE$, dunque per la nota proprietà dell'ellissi faranno i punti B, D i di lei fuochi. Ciò supposto, per un'altra proprietà dell'ellissi riguardo ai fuochi, intendendo condotte le BA, BN , farà $BN = BA = CE$, ma questo si verifica nei punti, nei quali si tagliano i due circoli dati, perchè D, B sono i loro centri, e CE per la costruzione è eguale al semidiametro degli stessi circoli, dunque l'ellissi passerà per i detti punti d'intersezione dei circoli dati, il che ec.

PROBLEMA VII.

138. *Data la retta linea AB (Fig. 84.), ritrovare il luogo de' punti D tali, che nella prodotta DA presa AC metà di AD , e condotta al punto B la retta CB , sia $CB = CD$.*

Si abbassi dal punto D , che si suppone essere uno di quelli, che si cercano, la normale DP alla AB . E si chiami $AB = a$, $AP = x$, $PD = y$, farà $AD = \sqrt{xx + yy}$, ed AC per la condizione del problema $= \frac{1}{2}\sqrt{xx + yy}$, e però $CD = CB = \frac{1}{2}\sqrt{xx + yy}$; si tiri dal punto C la per-

Dd 2

pen-

pendicolare CQ alla BA prodotta; poichè ne' triangoli simili AQC , APD è $AD = 2AC$, farà $AP = 2AQ$, e $PD = 2QC$, onde $CQ = \frac{1}{2}y$, ed $AQ = \frac{1}{2}x$, e però $BQ = a + \frac{1}{2}x$; ora $\overline{CB}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{BQ}^2 = aa + ax + \frac{xx}{4} + \frac{yy}{4}$, ma $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 = \frac{9}{4} \times \overline{xx + yy}$, dunque farà l'equazione $\frac{9xx}{4} + \frac{9yy}{4} = aa + ax + \frac{xx}{4} + \frac{yy}{4}$, che si riduce ad essere $xx - \frac{ax}{2} = \frac{aa}{2} - yy$, ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{2}$, e fatta la sostituzione $x - \frac{a}{4} = z$, farà finalmente $zz = \frac{9aa}{16} - yy$, equazione al circolo.

Si prenda adunque $BM = \frac{3a}{4}$, e col centro M , col raggio BM si descriva il circolo NDB , farà esso il luogo, che si cercava, in cui presa una qualunque $MP = z$, farà $PD = y$, ma $AM = \frac{1}{4}a$, dunque $AP = z + \frac{1}{4}a = x$, e le AP , PD le coordinate del problema proposto.

Se si volesse anche il luogo de' punti C , questo farebbe un'altro problema di simile natura, che si scioglierebbe nella seguente maniera.

Si chiami $AQ = p$, $QC = q$ normale a BN , farà $AP = 2p$, $PD = 2q$, ma $AM = \frac{a}{4}$, ed $MB = \frac{3a}{4}$, dunque $NA = a$, e però $NP \times PB = \frac{aa}{2} + ap - 4pp$, ma per la

pro-

proprietà del circolo $NP \times PB = P\bar{D} = 4qq$, dunque sarà $4qq = \frac{aa}{2} + ap - 4pp$, quindi $\frac{aa}{8} - qq = pp - \frac{ap}{4}$, si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{64}$, e fatta la sostituzione,

$p - \frac{a}{8} = t$, sarà $qq = \frac{9aa}{64} - tt$, onde descritto col diametro

$MN = 3a$ il semicircolo NCM , sarà esso il luogo di tutti

i punti C , in cui presa dal centro S una qualunque $SQ = t$, sarà $QC = q$, ma $AS = \frac{a}{8}$, per la costruzione, dunque,

$AQ = t + \frac{a}{8} = p$, e le AQ , QC le coordinate del problema.

Questi due Problemi si potranno dimostrare unitamente in forma di Teorema nel seguente modo.

Se nella data AB si prenderà MB eguale a tre quarti di AB , e col centro M , col raggio MB si descriverà il circolo NDB , ed in oltre col diametro MN il circolo NCM , condotta per lo punto A , comunque si voglia, la retta linea CD terminata alla periferia dell' uno, e dell' altro circolo, e dal punto C la retta CB all'estremità del diametro, sarà sempre DA doppia di AC , e CD eguale a CB .

Sia S il centro del circolo NCM , e si conducano le rette SC , DL per i centri S , M . Poichè SM è la metà di MB , sarà SM tre ottavi di AB ; ma AM ne è un

quar-

quarto, dunque SA farà un'ottavo di AB , e però la metà di AM ; ma è pure SC la metà di DM , e l'angolo SAC eguale all'angolo DAM , dunque è facile da vederfi, che farà il triangolo SAC simile al triangolo DAM , e farà però anche AC la metà di AD , che era il primo.

Ma se sono simili i triangoli SAC , ADM , farà anche l'angolo SCA eguale all'angolo ADM , onde faranno parallele le rette linee SC , DL , ed in conseguenza simili i triangoli BLM , BCS , e però farà ML la quarta proporzionale di BS , SC , ed MB ; ma $BS = \frac{2}{8} AB$,

$$SC = \frac{3}{8} AB, MB = \frac{6}{8} AB, \text{ dunque } ML = \frac{2}{8} AB = AM,$$

ma $MD = MB$, e l'angolo $AMD = LMB$, dunque sono eguali i triangoli AMD , BML , e l'angolo $ADM = MBL$; ma è anche l'angolo MDB eguale all'angolo MBD , dunque l'angolo CDB è eguale all'angolo CBD , e però il lato CB eguale al lato CD , che era il secondo.

PROBLEMA VIII.

139. *Dati i due lati AC , CB della norma ACB , (Fig. 85.) si ricerca il luogo di tutti i punti, per i quali passa l'estremità B del lato CB mentre la norma si move talmente, che il punto A sia sempre sulla linea DM , ed il punto C sulla linea DP , che si suppone perpendicolare alla DM .*

Dal

Dal punto B si abbassi BP normale a DP , e sia,
 $DP=x$, $PB=y$, $AC=a$, $CB=b$; sarà $CP=\sqrt{bb-yy}$,
 $DC=x-\sqrt{bb-yy}$. Ma gli angoli DCA , BCP presi
 assieme sono eguali ad un retto, siccome gli angoli BCP ,
 CBP , e però eguali fra loro gli angoli DCA , CBP ;
 dunque saranno simili i triangoli ADC , BCP , e sarà
 $AC, CD::BC, BP$, cioè $a, x-\sqrt{bb-yy}::b, y$; e però
 $ay=bx-b\sqrt{bb-yy}$, e quadrando, ed ordinando i ter-
 mini, sarà l'equazione $xx-\frac{2axy}{b}+\frac{a^2yy}{bb}=bb-yy$. Si
 faccia la sostituzione $x-\frac{ay}{b}=z$, ed averassi l'equazione,
 $zz=bb-yy$ all'ellissi.

Sull'indefinita DM si descriva il triangolo DEH coi
 lati $DE=b$, $EH=a$, e l'angolo DEH retto, giacchè
 è retto l'angolo delle coordinate del Problema, e sia $=f$
 la nota DH . Col semidiametro trasverso $DH=f$, col
 semidiametro conjugato $DQ=b$, e parallelo ad EH si
 descriva l'ellissi HBQ , essa farà il luogo ricercato, in cui
 presa una qualunque $DF=PB=y$, sarà $GB=z$, $FG=\frac{ay}{b}$,
 dunque $FB=z+\frac{ay}{b}=x=DP$; e però le DP , PB le
 coordinate del Problema.

PROBLEMA IX.

140. Dato l'angolo BAP , e dato il punto P ; (Fig. 86.) si ricerca il luogo di tutti i punti D tali, che condotte le due rette, BD parallela ad AP , e DP al dato punto P , sia sempre BD a DP nella data ragione di d ad e .

Condotta DC parallela ad AB , si chiami $AP = a$, $AC = x$, $CD = y$, $CP = a - x$. Poichè l'angolo BAP , o sia DCE è dato, condotta DE normale ad AP ; farà data la ragione di CD alla CE , e però sia $CD, CE :: d, b$. Sarà adunque $CE = \frac{by}{d}$, $AE = x + \frac{by}{d}$, $EP = a - x - \frac{by}{d}$,

o pure $= x + \frac{by}{d} - a$, $PD = \frac{ex}{d}$. Adunque farà $\overline{CD} - \overline{CE} =$

$$\overline{DP} - \overline{PE}, \text{ cioè } yy = \frac{exxx}{da} - \frac{aa - xx + 2ax + \frac{2aby}{d} - \frac{2bxy}{d}}{da},$$

$$\text{o sia } yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{ee + bb - dd}{dd} \times xx + \frac{2ax - aa + \frac{2aby}{d}}{d},$$

(aggiungendo all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{bbxx}{dd}$). Ma qui si offervi, che la quantità $ee + bb - dd$

può essere eguale, maggiore, o minore del zero; e però sia in primo luogo eguale al zero, adunque farà l'equazione $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{2aby}{d} + \frac{2ax}{d} - \frac{aa}{d}$, e facendo

la sostituzione $y + \frac{bx}{d} = z$, farà $zz - \frac{2abz}{d} = 2ax - \frac{2abbx}{dd} - aa$, ed aggiunto ad ambe le parti $\frac{aabb}{dd}$, $zz - \frac{2abz}{d} + \frac{aabb}{dd} = 2ax - \frac{2abbx}{dd} + \frac{aabb}{dd} - \frac{aadd}{dd}$, e facendo la sostituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, farà $pp = \frac{2addx - 2abbx + aabb - aadd}{dd}$, cioè $pp = x - \frac{a}{2} \times \frac{2add - 2abb}{dd}$, e fatto $x - \frac{a}{2} = q$, farà $pp = q \times \frac{2add - 2abb}{dd}$. Parabola Apolloniana.

Sia (Fig. 87.) BAP il dato angolo, AP la data $= a$. Sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN con l'angolo $AMN = BAP$; e sia $AM, MN :: d, b$. Si produca AN indefinitamente, e nella AB sia $AH = \frac{ab}{d}$, e si conduca HE indefinita, e

parallela ad AN . Si divida AP per metà in O , e condotta OQ parallela ad AB , col vertice Q , al diametro QE , col parametro $= \frac{2add - 2abb}{dd}$, (fatta $f = AN$) e con le ordinate parallele ad AB si descriva la parabola QD ; presa una qualunque $AV = x$, farà $VD = y$, ed essa parabola il luogo cercato.

Sia in secondo luogo $cc + bb - dd$ maggiore del zero, cioè quantità positiva. Ripresa adunque l'equazio-

E c

ne,

ne, e fatta $ee + bb - dd = bb$, sarà $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{bbxx}{dd} - aa + 2ax + \frac{2aby}{d}$, e fatta la stessa sostituzione di $y + \frac{bx}{d} = z$, sarà $zz - \frac{2abz}{d} = \frac{bbxx}{dd} - aa + 2ax - \frac{2abbx}{dd}$, ed aggiunto $\frac{aabb}{dd}$, e fatta la sostituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, $ddpp = bbxx + 2addx - 2abbx - aadd + aabb$, cioè $xx + \frac{2addx - 2abbx}{bb} = \frac{ddpp}{bb} + \frac{aadd - aabb}{bb}$. Si faccia $\frac{aadd - aabb}{bb} = m$, sarà $xx + 2mx = \frac{ddpp}{bb} + am$, ed aggiungendo all'uno ed all'altro membro mm , $xx + 2mx + mm = \frac{ddpp}{bb} + am + mm$, e fatto $x + m = q$, sarà finalmente $qq = \frac{ddpp}{bb} + am + mm$, cioè $qq - am - mm = \frac{ddpp}{bb}$, equazione all'iperbola.

Sia BAP (Fig. 88.) il dato angolo, AP la data $= a$, sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN coll'angolo $AMN = BAP$; e sia AM ad $MN :: d, b$. Si produca indefinitamente AN , e nella AB si prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto H si tiri l'indefinita OE parallela ad AN ; indi si faccia $AK = m$, e si tiri KO parallela ad AH ; ed al centro O , col semidiametro trasverso $OQ = \frac{f \sqrt{am + mm}}{d}$, col semidiametro con-

juga-

jugato $= b \sqrt{\frac{am + mm}{d}}$, e parallelo ad AB (intendendo

per f la nota AN) si descriva l'iperbola QD ; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa iperbola il luogo ricercato.

Sia finalmente $ee + bb - dd$ minore del zero, cioè negativa; si faccia adunque $ee + bb - dd = -bb$, e fatto $y + \frac{bx}{d} = z$, l'equazione sarà $zz - \frac{2abz}{d} = -\frac{bbxx}{dd} - aa + \frac{2ax}{d} -$

$\frac{2abbx}{dd}$, ed aggiungendo $\frac{aabb}{dd}$, $zz - \frac{2abz}{d} + \frac{aabb}{dd} = -\frac{bbxx}{dd} + \frac{2addx}{dd} - \frac{2abbx}{dd} + \frac{aabb}{dd} - aadd$, e fatta la sostituzione

$z - \frac{ab}{d} = p$, $ddpp = -bbxx + 2addx - 2abbx + aabb - aadd$,

cioè $xx - \frac{2addx}{bb} + \frac{2abbx}{bb} = \frac{aabb}{bb} - \frac{aadd}{bb} - \frac{ddpp}{bb}$. Si faccia

$\frac{add - abb}{bb} = m$, avremo $xx - 2mx = -am - \frac{ddpp}{bb}$, ed ag-

giunto mm , $xx - 2mx + mm = mm - am - \frac{ddpp}{bb}$; e fatta

finalmente la sostituzione $x - m = q$, sarà $\frac{ddpp}{bb} = mm - am - qq$, equazione all'ellissi.

Sia (Fig. 89.) BAP il dato angolo, ed AP la data $= a$. Sulla AP indefinitamente prodotta si descriva il triangolo AMN coll'angolo $AMN = BAP$, e sia AM ad $MN :: d, b$; si produca AN indefinitamente, e nella

AB si prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto H si tiri la HE

Indefinita, e parallela alla AN . Sulla AP prodotta si prenda $AK = m$, che in questo caso è sempre maggiore di $AP = a$, e si tiri KO parallela ad AB . Al centro O , col semidiametro trasverso $OQ = \frac{f\sqrt{mm - am}}{d}$ (fatta $AN = f$)

col semidiametro conjugato $= \frac{b\sqrt{mm - am}}{d}$, e parallelo

ad AH si descriva l'ellissi QD ; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa il luogo ricercato.

141. Ho detto, che $AK (m)$ è maggiore di $AP (a)$; intorno a ciò cade in proposito lo spiegare, come di due quantità complesse possa conoscersi, quale sia la maggiore. Si instituisca adunque fra loro un rapporto di maggioranza, o di minorità, come più piace, indi si proceda, come nelle equazioni, trasportando, dividendo ec., e facendo altre operazioni fin a tanto, che si arrivi ad una conseguenza nota, la quale se è vera o assolutamente, o ipoteticamente, sarà assolutamente, o ipoteticamente vero il rapporto instituito, e se è falsa, questo pure sarà falso. Vogliasi adunque sapere se m , cioè $\frac{add - abb}{dd - bb - ee}$ sia

maggiore di a . Si faccia il rapporto $\frac{add - abb}{dd - bb - ee} > a$, e ri-

ducendo al comune denominatore, $add - abb > add - abb - ace$, e cancellando i termini, che si elidono, sarà $0 > - ace$;

ma

ma è verissimo, che il zero è maggiore di quantità negativa, dunque è vero, che $\frac{add - abb}{dd - bb - ee}$ è maggiore di a .

Così volendo sapere se $aa + 2ab$ sia maggiore di bb , si faccia $aa + 2ab > bb$, ed aggiungendo all'uno ed all'altro membro il quadrato bb , sarà $aa + 2ab + bb > 2bb$, e cavando la radice, $a + b > \sqrt{2bb}$, o sia $a > \sqrt{2bb} - b$, ma poichè sono date le quantità a, b , potrássi sempre sapere, se a sia, o non sia maggiore di $\sqrt{2bb} - b$, ed in caso che lo sia, sarà anche $aa + 2ab$ maggiore di bb . La maniera è la stessa ne' casi più composti, e però non occorre parlarne più lungamente.

P R O B L E M A X.

142. Date di posizione due rette VB, VE (Fig. 90.) e dato il punto P, sopra cui, come polo, s'aggiri la retta PE, ritrovare il luogo de' punti D tali, che sia sempre CD alla DE in ragione data.

Si conduca VP, e parallele ad essa le rette AD, BE, e sia la ragione di CD a DE, o pure di CD ad EC, come d ad e , ed essendo dati gli angoli EPB, EBV, sia EB a BV, come e ad b .

Si chiami VP = a , VA = x , AD = y , sarà EB = $\frac{ey}{d}$,

e però $VB = \frac{by}{d}$. Per la similitudine de' triangoli CVP ,

CDA sarà $DA, PV :: CA, CV$, e componendo, $DA + PV, PV :: AV, CV$, cioè $a + y, a :: x, CV$, e però $CV = \frac{ax}{a+y}$, e per la similitudine de' triangoli PVC, EBC

sarà $PV, VC :: EB, BC$, cioè $a, \frac{ax}{a+y} :: ey, BC$, onde

$BC = \frac{exy}{ad+dy}$, e però l'equazione $BC + CV = BV$, cioè

$$\frac{exy}{ad+dy} + \frac{adx}{b} = \frac{by}{d}, \text{ o sia } yy - \frac{exy}{b} = \frac{adx}{b} - ay.$$

Per costruirla si ponga $y - \frac{ex}{b} = \frac{ez}{b}$, sostituendo sarà

$$\frac{ezy}{b} = -ay - \frac{adz}{b} + \frac{ady}{e}, \text{ cioè } zy + \frac{aby}{e} - \frac{adb}{ee} = -\frac{adz}{e}.$$

Si ponga in oltre $z + \frac{ab}{e} - \frac{adb}{ee} = p$, farà adunque

$$py = \frac{aadb}{ee} - \frac{aaddb}{e^2} - \frac{adp}{e}, \text{ e fatta la terza sostituzione}$$

$$y + \frac{ad}{e} = q, \text{ farà finalmente } pq = \frac{aadb - aaddb}{e^2}, \text{ iperbola}$$

fra gli asintoti, il di cui rettangolo costante è positivo, perchè la e sarà sempre maggiore della d .

Si produca PV indefinitamente, e si prenda $VQ = \frac{ad}{e}$

dal punto Q si tiri l'indefinita QS parallela ad VB , e prefo un qualunque punto M nella retta PH , e condotta MN parallela ad VB , per la similitudine de' triangoli $VMN,$

VMN , EBV , farà VM , $MN :: e, b$. Si faccia $VI = \frac{aeb - adb}{e^2}$, e per lo punto I condotta indefinita la retta.

RIK parallela ad VE , fra gli asintoti RS , RK si descriva l'iperbola $OV D$ del rettangolo costante = $\frac{aaedb - aaddb}{e^3} \times f$ (chiamata f la nota VN) la quale ne-

cessariamente passerà per lo punto V . Presa una qualunque $VH = y$, farà $HD = x$, cioè $VA = x$, $AD = y$, e la curva così descritta il luogo de' punti D ; il che ec.

143. Ricavando l'equazione dalla proprietà delle curve descritte sì negli addotti esempj, come ne' problemi, deve essa essere la stessa dell'equazione proposta da costruirsi quando le operazioni sieno giuste, e ciò può servire per dimostrazione del metodo, il che a bello studio ô tralasciato di fare, per non recare troppo di noja. Tuttavia però, per darne brevemente un picciol saggio, prendo le costruzioni dell'Esempio 13., e del Problema 8.

E quanto all'Esempio. Posta (Fig. 65.) $AD = x$, ed essendo $AS = 2a$, $AF = f$, farà $AC = \frac{fx}{2a}$, e poichè $AR = \frac{bn}{2a}$, farà $AQ = \frac{bfn}{4am}$, e però $QC = \frac{fx}{2a} - \frac{bfn}{4am} = MP$; adunque essendo il semidiametro $HM = \frac{ef}{2a}$, averassi $HP = \frac{ef + fx}{2a} - \frac{bfn}{4am}$, e $PV = \frac{ef}{2a} - \frac{fx}{2a} + \frac{bfn}{4am}$. Così poichè $DN = y$, $CD = \frac{bx}{2a}$,

CP

$CP = QM = \frac{1}{2}c$, farà $PN = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Ma, per la pro-

prietà dell' ellissi, deve essere $HP \times PV, PN :: HV$ al parametro, che è $\frac{4acm}{f^n}$, dunque si avrà l'equazione,

$$\frac{ecff - ffx}{4aa} + \frac{ffbnx}{4aam} - \frac{ffbbnm}{16aamm} \times \frac{4aam}{ff^n} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} +$$

$$cy + \frac{bxy}{a} + yy, \text{ cioè } \frac{mee - mxx}{n} + bx - \frac{bbn}{4m} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} +$$

$$\frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy, \text{ e restituito in luogo di } ee \text{ il suo va-}$$

$$\text{lore } \frac{ccmn + 4agmn + nnbb}{4amm}, \text{ farà } cc + ag - \frac{mxx}{n} + bx = \frac{cc}{4} +$$

$$\frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy, \text{ e finalmente restituendo i va-}$$

$$\text{lori di } -\frac{m}{n} = \frac{bb - 4aa}{4aa}, \text{ e di } b = \frac{bc - 2al}{2a}, \text{ si avrà } ag - xx -$$

$$lx = cy + \frac{bxy}{a} + yy, \text{ che è appunto l'equazione proposta da-}$$

costruirsi.

Nella costruzione dell' ultimo Problema (Fig. 90.),
essendo $\frac{aaedb - aaddb}{e^3} \times \frac{f}{e}$ il rettangolo costante dell' iper-
bola, ed $VI = \frac{aeb - adb}{e^2}$, e parallela all' asintoto RS , farà
 $RI = \frac{adf}{e^2}$; ma per la similitudine de' triangoli VMN ,
 VHG , è $VM, VN :: VH, VG$, e però $VG = \frac{fy}{e} = IK$,
adun-

adunque $RK = \frac{adf}{a} + \frac{fy}{b}$; ma $HG = \frac{by}{a}$, $GK = VI = \frac{aeb}{a} - \frac{adb}{a}$,

quindi $HK = \frac{bey}{a} + \frac{aeb}{a} - \frac{adb}{a}$; ma $HD = VA = x$, dun-

que sarà $KD = \frac{bey}{a} + \frac{aeb}{a} - \frac{adb}{a} - ex$, e perchè, per la

proprietà della curva, deve essere il rettangolo di $RK \times KD$ eguale al rettangolo costante, dunque

$$\frac{adf + efy}{a} \times \frac{bey + aeb - adb - ex}{a} = aadb - aaddb \times f,$$

cioè $yy - \frac{exy}{b} + ay - \frac{adx}{b} = 0$, come doveva essere.

Fatta la stessa diligenza ad ogni Esempio, e Problema, si troverà essere giusto il metodo.



CAPO IV.

Delle Equazioni, e de' Problemi solidi.

144. **R**Adice di una qualunque equazione si chiama ciascuna di quelle quantità, che sostituite nell'equazione in luogo di quella lettera, secondo cui l'equazione stessa è ordinata, cioè in luogo di quella, che fa figura d'incognita, fanno svanire tutti i termini; ovvero (ciò che è lo stesso) radice d'un'equazione è ciascuno de' valori dell'incognita, o della lettera, che fa figura d'incognita nell'equazione.

Le radici adunque dell'equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ faranno due, una a , l'altra $-b$, perchè ciascuna di queste sostituita in luogo di x fa svanire i termini dell'equazione; o perchè sì a , come $-b$ sono i valori della lettera x nell'equazione proposta. Le radici dell'equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ faranno 1, 2, 3, -5; perchè appunto ciascuno di questi numeri sostituito in luogo della x fa svanire tutti i termini, o perchè ciascuno di questi numeri è un valore della incognita x . Le radici dell'equazione $x^4 - bbxx - a^4 = 0$ faranno $+\sqrt{-as}$, $-aabb$, $-\sqrt{-as}$, $+\sqrt{aa+bb}$, $-\sqrt{aa+bb}$, e così dell'altre tutte.

145. In altro senso ancora sogliono prendersi le radici d' un' equazione, cioè sottraendo dall' incognita ad uno ad uno i valori positivi, ed aggiungendoli i negativi, e paragonandoli al zero, onde in questo senso le radici dell' equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ faranno $x - a = 0$, $x + b = 0$. Dell' equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ faranno $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 5 = 0$, e così dell' altre, ed in questo senso dicesi, che ogni equazione è il prodotto delle sue radici, perchè tra loro moltiplicate formano appunto l' equazione, di cui sono esse le radici; quindi è, che tante faranno le radici delle equazioni, comprese le immaginarie, quanto è il grado loro, e però due faranno le radici dell' equazione quadratica, tre della cubica, quattro di quella del quarto grado ec.

Si moltiplichì $x + a = 0$ in $x + b = 0$, nascerà l' equazione quadratica (I.) $xx + ax + ab = 0$, questa di nuovo si moltiplichì in $x + c = 0$, e nascerà l' equazione del terzo grado (II.) $x^3 + axx + abx + abc + bxx - acx - cxx - bcx = 0$, e questa di nuo-

vo si moltiplichì in $x + d = 0$, e sarà l' equazione del quarto grado (III.) $x^4 + ax^3 + abxx - abcx - abcd + bxx^3 - acxx + abdx - cxx^3 - bcxx - acdx + dxx^3 + adxx - bc dx + bdxx - cdxx = 0$

Si moltiplichì $x + \sqrt{ab} = 0$ in $x - \sqrt{ab} = 0$, sarà $xx - ab = 0$,

e questa si moltiplichi in $x + c = 0$, sarà $x^4 + cx^3 - abx - abc = 0$, e di nuovo si moltiplichi in $x + c = 0$, sarà $x^5 + 2cx^4 - abxx - 2abcx - abcc = 0$.
 Si moltiplichi $x + \sqrt{-ab} = 0$ in $x - \sqrt{-ab} = 0$ in $x + a = 0$, sarà $x^4 + ax^3 + abx + aab = 0$.

146. Se adunque si averà modo di sapere, quali sieno i valori o tutti, o alcuni dell'incognita dell'equazione, si potrà sempre essa dividere per tante equazioni semplici, quanti sono i valori noti, aggiungendo all'incognita i valori negativi, e sottraendone i positivi. Quindi l'equazione prima è divisibile per $x + a$, e per $x + b$; la seconda per $x + a$, $x + b$, $x - c$; la terza per $x + a$, $x + b$, $x - c$, $x + d$ ec.; con che si riducono le equazioni composte in tante semplici, quante sono le radici, se tutte sono note, e si abbassano di tanto grado, quanto è il numero delle note, se non lo sono tutte; e però l'equazione, per esempio, del quinto grado si ridurrà al quarto, se si sappia una delle sue radici; al terzo quando se ne sappia due ec.

147. Dal modo, con cui nascono le equazioni (che s'intenderanno sempre ridotte al zero, e nelle quali il massimo termine rispetto all'incognita, o rispetto a quella lettera, secondo cui sono ordinate, sia positivo, e libero da coefficienti) è facile il riconoscere, che il coefficiente dell'incognita, o sia della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione, nel secondo termine è la somma di tutte le

radici dell'equazione affette dal segno contrario; il coefficiente del terzo termine è la somma di tutti gli ambj, che si possono fare da esse radici; il coefficiente del quarto la somma di tutti i terni, e così di mano in mano fino all'ultimo termine costante, che è il prodotto di tutte le radici fra loro.

148. Da ciò s'inferisce, che la somma delle radici positive dovrà necessariamente essere eguale alla somma delle negative in tutte quelle equazioni, nelle quali manca il secondo termine; e che la somma delle positive sarà maggiore della somma delle negative, quando il secondo termine sia affetto dal segno negativo; ed all'opposto, quando esso sia affetto dal segno positivo.

149. Mancando nell'equazione un qualche termine, si suole nel luogo del termine mancante scrivere un asterisco, come $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se manca il secondo termine; $x^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se manca il terzo, e così degli altri.

150. Se l'equazione non avrà termine alcuno affetto da quantità immaginaria, le radici sue saranno o tutte reali, o avendone delle immaginarie, saranno esse in numero pari, ed eguali a due a due, con la sola diversità, che una sarà positiva, e l'altra negativa; imperciocchè essendo il secondo termine la somma di tutte le radici, se l'equazione à il secondo termine, quando le radici immaginarie non si distruggano a due a due coi segni contrarj, in esso coefficiente vi sarà necessariamente qualche imma-

gi-

ginario contro il supposto ; se poi manca il secondo termine , appunto egli non può mancare , se non quando la somma delle radici positive sia eguale alla somma delle negative , e per conseguenza ancora la somma delle immaginarie positive eguale alla somma delle immaginarie negative , cioè se non quando esse si distruggano nel modo suddetto . Le equazioni adunque di grado dispari avranno necessariamente una radice per lo meno reale , e quelle di grado pari potranno averle tutte immaginarie . Medesimamente si discorra , per la stessa ragione , delle radici sorde ; vale a dire , che se l'equazione non avrà termini sordi , o irrazionali , le di lei radici o saranno tutte razionali , o le irrazionali saranno di numero pari a due a due eguali , ma con segno contrario .

151. Vi sono delle equazioni , che hanno tutte le radici positive , dell'altre , che le hanno tutte negative , e dell'altre , che ne hanno e delle positive , e delle negative , siccome ve ne sono di quelle , che le hanno tutte immaginarie , altre tutte reali , altre finalmente , che ne hanno e delle reali , e delle immaginarie . Diverse regole si danno dagli Scrittori d'Algebra , per conoscere in una qualunque data equazione il numero delle radici positive e negative , delle reali , e delle immaginarie ; ma perchè queste regole , e le loro dimostrazioni sono assai composte e prolisse , e di pochissimo uso , da me si tralasciano , bastando il sapere ; primo , che se tutte le radici sono negative , saranno positivi tutti i termini dell'equazione , imperciocchè ef-

fen-

sendo positivi in questo caso tutti i termini delle equazioni semplici, cioè delle radici prese nel secondo significato (num. 145.), dalle quali s'intende generata la proposta, saranno altresì positivi tutti i prodotti; secondo, che se tutte le radici sono positive, i termini dell'equazione saranno alternativamente positivi, e negativi, poichè il primo termine, come si suppone, già sarà sempre positivo; il secondo termine, poichè contiene la somma di tutte le radici (le quali essendo positive, saranno negative nelle equazioni semplici) sarà negativo; il terzo termine contenendo gli ambj, cioè prodotto di numero pari, sarà positivo; il quarto contenendo i terni, cioè prodotto di numero dispari, sarà negativo, e così di mano in mano, e però un'equazione composta alternativamente di segni positivi, e negativi avrà tutte le radici positive.

Quindi se i termini di un'equazione non averanno tutti il segno positivo, o non averanno alternativamente il positivo, e negativo, vi saranno radici positive, e negative. Altro argomento sicuro, che l'equazione contenga radici positive, e negative, sarà quando in essa manchi qualche termine, perchè non può un termine mancare, se non distruggendosi con i segni contrarj i prodotti, da quali è formato, cioè se non essendovi delle radici positive, e negative. Questa notizia potrà servire per scegliere a suo luogo fra i molti divisori dell'ultimo termine di una formola, o equazione quelli per i quali devesi tentare la divisione; perchè se l'equazione avrà sole radici positive,

tive, sarà superfluo il tentare la divisione per i divisori positivi, e se avrà sole radici negative, sarà superfluo il tentarla per i divisori negativi; e si dovrà tentare per gli uni, e per gli altri, quando le radici sieno positive, e negative.

Tutto ciò però s'intenda detto di quelle equazioni, le di cui radici sono tutte reali, perchè nel caso delle immaginarie la regola non à luogo. Ed in fatti sia l'equazione $x^3 + bxx + aax + aab = 0$, in cui ciascun termine è affetto dal segno positivo, e pure le radici sono una positiva, e due negative, cioè $x = -b$ reale, ed $x = \pm \sqrt{-aa}$ immaginarie.

152. Le equazioni del terzo, e quarto grado, nelle quali manchi il secondo termine, se il terzo sarà affetto dal segno positivo, averanno infallibilmente delle radici immaginarie, perchè, essendo le radici tutte reali, il terzo termine non può non essere affetto dal segno negativo; e la ragione si è, che, parlando in primo luogo delle cubiche, quando in esse manchi il secondo termine, la somma delle radici positive è eguale alla somma delle negative, e però o una positiva sarà eguale a due negative, o due positive eguali alla negativa; quindi le radici sieno, per esempio, $a, b, e - c$, o pure $-a, -b, +c$, il coefficiente del terzo termine sarà $ab - ac - bc$, ma deve essere $a + b = c$ nella supposizione, che manchi il secondo termine, adunque sarà ac maggiore di ab , e perciò $ab - ac - bc$ quantità negativa.

Nelle

Nelle equazioni poi del quarto grado possono essere tre le radici positive, ed una negativa, cioè $a, +b, +c, -d$; possono essere tre negative, ed una positiva, cioè $-a, -b, -c, +d$; possono essere due negative, e due positive, cioè $-a, -b, +c, +d$; nel primo, e secondo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab + ac + bc - ad - bd - cd$; ma per la supposizione deve essere $a + b + c = d$, adunque sarà ad maggiore di ab , cd maggiore di ac , bd maggiore di bc , e però $ad + bd + cd$ maggiore di $ab + ac + bc$, ed in conseguenza il terzo termine negativo. Nel terzo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab - ac - bc - ad - bd + cd$, e deve essere $a + b = c + d$.

Si faccia $m = a + b = c + d$, farà

$$mm = a + b \times c + d = ac + ad + bc + bd,$$

$$mm = a + b = aa + 2ab + bb,$$

$$mm = c + d = cc + 2cd + dd, \quad \text{e però}$$

$$ab = \frac{mm - aa - bb}{2},$$

$$cd = \frac{mm - cc - dd}{2},$$

$$e \quad ab + cd = \frac{mm - aa - bb - cc - dd}{2}, \quad \text{dunque}$$

mm è maggiore di $ab + cd$, dunque $ac + ad + bc + bd$ è maggiore di $ab + cd$, e però il coefficiente del terzo termine negativo.

153. Egli è sempre in nostra mano il fare, che in una qualunque equazione tutte le radici vere o positive divengano false o negative, e le negative divengano positive. Nulla di più per ciò fare si richiede, che cambiare i segni a tutti i termini, che sono in ordine pari, cioè al secondo, al quarto, al sesto ec., la ragione si è, che essendo il secondo termine la somma di tutte le radici, in cui però sono le negative con segno positivo, e le positive con segno negativo, come chiaramente si è veduto al num. 145. nel formare le equazioni composte dal prodotto delle semplici, mutando i segni si muteranno esse pure; gl'altri termini in ordine pari sono formati da prodotti di numero dispari di radici, cioè il quarto da terni, il sesto da cinque ec., quindi se anno essi il segno positivo saranno formati dal prodotto di radici tutte negative, o da numero pari di radici positive, e numero dispari di radici negative; e se anno il segno negativo saranno formati dal prodotto di radici tutte positive, o da numero pari di radici negative, e numero dispari di radici positive; dunque mutando il segno ai termini pari, le radici positive diverranno negative, ed all'opposto.

Rispetto ai termini dispari in ordine, essendo essi formati da prodotti pari di radici, se anno il segno positivo, saranno formati o da numero pari di sole radici negative, o da numero pari di sole radici positive, o da numero

mero

mero pari di positive, e pari di negative, quindi mutandosi reciprocamente queste, non si muterà il segno ad essi termini; se poi hanno il segno negativo, saranno formati da prodotto di numero dispari di radici positive in numero dispari di negative, quindi mutandosi pure queste reciprocamente, non si muterà il segno ad essi termini, e però si devono lasciare intatti.

L'equazione $x^3 + axx + abx - abc$
 $+ bxx - acx$
 $- cxx - bcx$
 due sono negative, cioè $-a$, $-b$, o sia $x + a = 0$,
 $x + b = 0$, ed una positiva, cioè c , o sia $x - c = 0$. Mutando i segni a' termini in ordine pari dell'equazione, sarà $x^3 - axx + abx + abc$
 $- bxx - acx$
 $+ cxx - bcx$
 $= 0$, e le radici positive sa-

ranno $x - a = 0$, $x - b = 0$; ed $x + c = 0$ la negativa. Nè importa, che alcun termine manchi, nel qual caso si pone la stelletta in luogo de' termini mancanti, e procede la stessa regola. Così nell'equazione $x^3 * - 28x + 48 = 0$, le di cui radici vere sono $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, e la falsa $x + 6 = 0$, mutando i segni ai termini pari in ordine, sarà $x^3 * - 28x - 48 = 0$, le di cui radici false sono $x + 2 = 0$, $x + 4 = 0$, e la vera $x - 6 = 0$.

154. Data una qualunque equazione, è facile per mezzo di congrue sostituzioni accrescere, o diminuire

ciascuna delle di lei radici, anco non cognite, d'una data quantità, cioè trasformarla in un'altra equazione, le radici della quale sieno quelle della proposta accresciute, o diminuite della data quantità. Si ponga eguale ad una nuova incognita la incognita dell'equazione, aggiunta o sottratta da essa la data quantità, cioè aggiunta se per essa si vogliono accresciute, e sottratta se si vogliono diminuite. In luogo dell'incognita, e sue potestà nell'equazione proposta si sostituisca il suo valore dato per l'altra incognita, e per la costante data; e nascerà un'altra equazione, le di cui radici saranno come si cercano. Sia l'equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici si vogliano accresciute del numero 3. Si faccia $x + 3 = y$, e però $x = y - 3$, $xx = yy - 6y + 9$, $x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$, $x^4 = y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$; adunque facendo le sostituzioni in luogo della x , e sue potestà nella proposta, si trasformerà essa in quest'altra

$$\begin{aligned} & y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ & + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ & - 19yy + 114y - 171 = 0 \\ & - 106y + 318 - 120 = 0 \end{aligned}$$

cioè $y^4 - 8y^3 - yy + 8y = 0$, e dividendo per y , $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, in cui è manifesto, che le radici faranno maggiori delle radici della proposta, quanto

è il numero 3, perchè se si è fatto $y = x + 3$, adunque sarà y uguale a ciascun valore di x accresciuto del 3. E quì si rifletta, che nell'accrescere in questo modo le radici, si accrescono di quella tale quantità le positive, ma le negative si diminuiscono della stessa quantità, perchè aggiungendo positivo a negativo, se il negativo è maggiore del positivo, si fa minore nel genere suo di prima, se è eguale si fa zero, se è minore si rende positivo; quindi nella proposta equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici (le quali però non si fanno per ora ritrovare coi metodi insegnati) sono $+5, -2, -4, -3$, cioè $x - 5 = 0, x + 2 = 0, x + 4 = 0, x + 3 = 0$ una vera e tre false, avendo io voluto accrescerle del numero 3, nella trasformata $y^4 - 8yy - y + 8 = 0$ dovranno essere $+8, +1, -1$, cioè $y - 8 = 0, y - 1 = 0, y + 1 = 0$, che tali appunto sono, ed è zero quella che corrisponderebbe alla quarta, perchè $-3 + 3 = 0$, e per questa ragione è di sole tre dimensioni l'equazione ridotta, sebbene di quattro la proposta.

All'opposto quando si diminuiscono d'una data quantità le radici di un'equazione, per la stessa ragione le negative crescono nel genere suo di quella quantità, ma le positive possono divenire nulle, se la data quantità è a loro uguale, e negative s'è di loro maggiore. Nella stessa equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$ volendo diminuire del numero 3 le radici, si fac-

cia $x-3=y$, e però $x=y+3$, $xx=yy+6y+9$, $x'=y'+3$, $y^3+9yy+27y+27$, $x^4=y^4+12y^3+54yy+108y+81$, e però fatte le sostituzioni, farà l'equazione

$$\begin{aligned} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 \\ - 19yy - 114y - 171 \\ - 106y - 318 \\ - 120 \end{aligned} = 0$$

cioè $y^4+16y^3+71yy-4y-420=0$, e perchè le radici della proposta sono 5, -2, -3, -4, cioè $x-5=0$, $x+2=0$, $x+3=0$, $x+4=0$, dovranno essere quelle della trasformata 2, -5, -6, -7, cioè $y-2=0$, $y+5=0$, $y+6=0$, $y+7=0$, che tali appunto sono.

Sia l'equazione $x^4+cx^3-bbx-bbc=0$, e si vogliano accrescere della data quantità a le di lei radici. Si faccia $x+a=y$, e però $x=y-a$, $xx=yy-2ay+aa$, $x'=y'-3ay+3aay-a^3$; quindi fatte le sostituzioni, farà l'equazione $y^4-3ayy+3aay-a^3$

$$\begin{aligned} + cyy - 2acy + aac \\ - bby + abb \\ - bbc \end{aligned} = 0,$$

le di cui radici sono maggiori di quelle della proposta, quanto è la quantità a , ed in fatti le radici di quella sono $x-b=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, e di questa sono $y-b+a=0$, $y+b-a=0$, $y+c-a=0$.

155. In simil modo si potrà, data un'equazione, trasformarla in un'altra, le di cui radici sieno le medesime della proposta, ma moltiplicate, o divise per una data quantità, per esempio f , facendo la sostituzione di $fx=y$ (essendo x l'incognita della data equazione) se si vogliano moltiplicate, e facendo $x=y$ se si vogliano

divise. Così pure si farà $x = \frac{gy}{f}$ se si voglia, che le radici della trasformata abbiano a quelle della proposta la ragione di f alla g ; e farassi $\sqrt{fx}=y$ se si voglia, che sieno medie proporzionali tra la quantità f , e le radici della proposta. Similmente farassi $x = \frac{1}{y}$ se si voglia, che sieno reciproche ec.

156. La ragione di queste regole è chiara; imperocchè, preso il primo caso, cioè quello delle radici accresciute, facendosi la sostituzione di $x+a=y$, i valori di y cavati dall'equazione trasformata saranno eguali ad $x+a$, cioè eguali ai valori della proposta accresciuti della quantità a ; e similmente si discorra in proporzione negl'altri casi.

157. Molti sono gli usi, che si possono fare delle dette sostituzioni; uno può essere, che se, non avendo noi il modo di riconoscere, quali sieno le radici d'una proposta equazione, trasformandola in alcuna delle accen-

cennate maniere si potessero ritrovare le radici della trasformata, queste accresciute, o diminuite, moltiplicate, o divise ec., per la quantità costante, secondo la sostituzione fatta, sarebbero anche le radici della proposta.

158. Altro uso sarà di liberare qualora si vuole dalle frazioni, e molte volte da' sordi le equazioni. E quanto alle frazioni, si faccia l'incognita dell'equazione eguale ad una nuova incognita divisa per la minima quantità, che per ciascuno de' denominatori de' termini dell'equazione sia divisibile, la quale nel caso, che essi denominatori fossero primi tra loro, sarà il prodotto de' medesimi; indi fatte le sostituzioni, e ridotti i termini al comune denominatore, si avrà un'altra equazione libera dalle frazioni, le di cui radici saranno quelle della proposta moltiplicate nella quantità, per cui è stata divisa la nuova incognita. Sia l'equazione $y' + \frac{yyy}{6} -$

$\frac{aby}{3} + aab = 0$; si faccia $y = \frac{z}{6}$, $yy = \frac{zz}{36}$, $y' = \frac{z'}{216}$, onde sarà

l'equazione $\frac{z'}{216} + \frac{azz}{6 \times 36} - \frac{abz}{3 \times 6} + aab = 0$, e riducendo al

comune denominatore, sarà $z' + azz - 12abz + 216aab = 0$, le di cui radici divise per 6 saranno le radici della proposta. Sia $x' = \frac{axx}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{bcd}$

fatte

fatte le sostituzioni, sarà la trasformata $\frac{z^3 - azz}{b^3 c^3 d^3} + \frac{azz}{b^3 ccd}$

$\frac{aaz}{b^3 ccd} + \frac{a^3}{d} = 0$, e riducendo al comune denominatore,

farà $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3 b^3 c^3 dd = 0$; quindi se si sappia il valore di z , si saprà quello di x ancora. Medesimamente per liberare le equazioni da' fordi, il che succede talora, si ponga la incognita eguale ad una nuova incognita divisa per la radicale, e si facciano le sostituzioni. Sia l'equazione $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26x}{27} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$. Si

faccia $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$; e però $xx = \frac{zz}{3}$, $x^3 = \frac{z^3}{3\sqrt{3}}$, e fatte le

sostituzioni, sarà $\frac{z^3}{3\sqrt{3}} - \frac{zz\sqrt{3}}{3} + \frac{26z}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, e

moltiplicando per $3\sqrt{3}$, sarà $z^3 - 3zz + \frac{26z}{9} - \frac{8}{9} = 0$,

e finalmente liberando dalle frazioni nella suddetta maniera col fare $z = \frac{y}{9}$, ovvero $z = \frac{y}{3}$, che in questo caso

riesce più brevemente, sarà l'equazione $y^3 - 9yy + 26y - 24 = 0$. E perchè per la prima sostituzione è $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$,

e per la seconda $z = \frac{y}{3}$, sarà $x = \frac{y}{3\sqrt{3}}$, cioè il valore della

x sarà eguale al valore della y diviso per $3\sqrt{3}$.

H h

Sia

Sia $x' - x' \sqrt[n]{n} + pxx' \sqrt[n]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[n]{n}} = 0$; si fac-

cia $x = \frac{y}{\sqrt[n]{n}}$, e però $xx = \frac{yy}{\sqrt[n]{nn}}$, $x' = \frac{y'}{n}$, $x' = \frac{y'}{n \sqrt[n]{n}}$, e

fatte le sostituzioni, farà $y' - y' \sqrt[n]{n} + pyy' \sqrt[n]{n} - qy + \frac{r}{n \sqrt[n]{n}} = 0$, e moltiplicando per $n \sqrt[n]{n}$, farà $y' - ny' +$

$np yy' - nqy + rn = 0$. Se si voglia osservare la legge degl'

omogenei, si libereranno dai radicali le equazioni, ma nasceranno delle frazioni, che dovranno ridursi, come si è detto.

159. Poichè levando i radicali per mezzo dell'accennata sostituzione null'altro si fa, che moltiplicare le radici dell'equazione per esso radicale, è facile il conoscere, che se il radicale sarà quadratico, per esempio $\sqrt{n}$, bisognerà, acciò possa toglierli dall'equazione, che il secondo termine dell'equazione proposta contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso di tutte le radici dell'equazione, si verrà a moltiplicare per $\sqrt{n}$; converrà, che il terzo non contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso degl'ambj de' valori o radici dell'equazione, si verrà a moltiplicare per il quadrato di $\sqrt{n}$; così converrà, che il quarto contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo

il complesso di tutti i terni verrà in conseguenza a moltiplicarsi per $n\sqrt{n}$; Converrà, che il quinto non contenga esso radicale, e così alternativamente. Per la stessa ragione, se il radicale da togliersi fosse $\sqrt[n]{n}$, bisognerà, che nel secondo termine dell' equazione proposta si trovi $\sqrt[n]{nm}$, nel terzo $\sqrt[n]{n}$, in nessun modo nel quarto, $\sqrt[n]{nm}$ nel quinto, $\sqrt[n]{n}$ nel sesto, in nessun modo nel settimo ec.

In proporzione si discorra de' radicali di altro indice.

160. Per mezzo di queste sostituzioni si potrà pure, levare il secondo termine da qualunque equazione, e ciò ponendo la incognita eguale ad una nuova incognita, aggiunto, o sottratto il coefficiente del secondo termine diviso per il grado dell' equazione data, cioè aggiunto, se esso secondo termine à il segno negativo, e sottratto, se à il segno positivo. Sia l' equazione $xx + ax - bb = 0$, si faccia $x = z - \frac{a}{2}$, e fatte le sostituzioni, sarà

$$\begin{aligned} zz - az + \frac{aa}{4} \\ + az - \frac{aa}{4} - bb = 0, \end{aligned}$$

cioè $zz - \frac{aa}{4} = 0$, o sia $zz = \frac{aa}{4} + bb$, onde si vede,

come tutte le equazioni di quadratica affetta si possono in

Hh 2

que-

questo modo più speditamente risolvere di quello, che si è usato al num. 74.; sottratto pertanto $\frac{1}{2}a$ dal valore di z , averassi il valore della x .

$$\text{Sia } x' + bxx - abx - a' = 0. \text{ Si ponga } x = z - \frac{b}{3},$$

$$\text{e però fatte le sostituzioni, farà } z' = -\frac{bbz + 2b^3}{3} - \frac{abz + abb}{3} = 0;$$

$$-\frac{3}{a^3}$$

quindi levato $\frac{b}{3}$ dal valore di z , averassi il valore della x .

$$\text{Sia l'equazione } x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^2x + a^4 = 0.$$

$$-ccxx$$

Fatta $x = z + \frac{2a}{4}$, cioè $x = z + \frac{a}{2}$, e fatte le sostituzioni,

$$\text{farà l'equazione } z^4 + \frac{1}{2}aazz - a^2z + \frac{5a^4}{16} = 0.$$

$$-cczz - accz - \frac{aacc}{4}$$

E però aggiunto $\frac{1}{4}a$ al valore di z , averassi il valore di x .

161. Similmente si potrà levare il terzo termine dalle equazioni nel seguente modo. Sia l'equazione $x^4 - 3ax^3 + 3aaxx - 5a^2x - 2a^4 = 0$, si faccia $x = y - b$ (la b è un' indeterminata da fissarsi) e fatte le sostituzioni,

farà

$$\begin{aligned}
 \text{farà} \quad & y^4 - 4by^3 + 6bbyy - 4b^3y + b^4 \\
 & - 3ay^3 + 9akyy - 9abby + 3ab^3 \\
 & + 3a^2yy - 6aaby + 3aabb = 0. \\
 & - 5a^3y + 5a^3b \\
 & - 2a^4
 \end{aligned}$$

Ma acciò che in questa equazione fosse nullo il terzo termine bilognerebbe, che fosse $6bb + 9ab + 3aa = 0$, cioè $bb + \frac{3ab}{2} + \frac{aa}{2} = 0$, e però $b = -\frac{3a \pm a}{4}$, dal che s'impa-

ra a conoscere, che la sostituzione da farsi in luogo di $y - b$ doveva essere $y + \frac{a}{2}$, o pure $y + a$, come di fatto si

l'una, come l'altra ci toglie il terzo termine, dandoci la prima $y^4 - ay^3 - \frac{15a^3y}{4} - \frac{65a^4}{16} = 0$, e la seconda

$$y^4 + ay^3 - 4a^3y - 6a^4 = 0.$$

Con tale artificio si conosce, che per togliere il secondo termine si devono fare le sostituzioni, che si sono praticate al num. 160.

162. Che se un'equazione, in cui manchi il secondo termine, si vorrà trasformare in un'altra, in cui manchi il penultimo, basterà fare la sostituzione di una qualunque costante divisa per una nuova incognita in luogo dell'incognita della data equazione. Sia pertanto $x^4 + axx - a^3x + a^4 = 0$. Si faccia $x = \frac{ay}{y}$, farà $\frac{a^3}{y} + \frac{a^4}{yy} - \frac{a^3}{y} + a^4 = 0$,

e ri-

e riducendo al comune denominatore, e dividendo per a^* , farà $y^* - ay^* + ayy^* + a^* = 0$. Se nella sostituzione $x = \frac{aa}{y}$ in luogo della costante a avessi presa un'altra

qualunque, avrei ottenuto il medesimo intento, ma l'equazione trasformata avrebbe avuto delle frazioni.

163. Che se nella proposta equazione non manca il secondo termine, ma bensì il terzo, o quarto ec., si potrà col medesimo metodo fare sparire quello, che dall'ultimo è egualmente distante, come quello, che manca, lo è dal primo.

164. Ed all'opposto mancando nell'equazione uno, o più termini, si potrà sempre renderla compita, facendo una nuova incognita più, o meno una qualunque costante eguale all'incognita dell'equazione, e la trasformata avrà tutti i termini. Se di più si volesse, che la trasformata fosse di grado superiore, si moltiplicherà ciascun termine della proposta per tanta potestà dell'incognita, per quanta si vuole, che cresca il grado, indi si faccia la stessa sostituzione. Così se, data l'equazione $x^* - a^* = 0$, si volesse mutata in un'altra compita, e del sesto grado, farebbesi $x^* - a^* xx = 0$, indi la sostituzione indicata, cioè $x = z \pm a$ (intendendo per a qualunque si voglia costante) ed avrebbesi l'equazione, che si cerca, ommettendosi ora il calcolo per brevità.

165. Ridotte le equazioni in maniera, che abbiano il massimo termine positivo, e senza coefficienti, che sieno libere da frazioni, e sordi, e paragonate al zero; prima di giudicare, che il problema sia di quel grado, di cui è l'equazione, bisogna vedere, se ella abbia divisori di una, di due, o di più dimensioni, per i quali divisa si riduca a grado inferiore; imperciocchè del grado della ridotta è propriamente il problema, e non della prima. Un'equazione cubica, se abbia un divisore di una dimensione, per esso divisa si riduce a due dimensioni, e le due radici di questa, che si averanno per le regole de' numeri 73., e 74., ed il divisore faranno le tre radici della proposta, quindi il problema, che a tale equazione ci à portati non è cubico, ma piano, e si potrà costruire *colla sola Regola, e Compasso*, cioè con rette linee, e circoli. Un'equazione del quarto grado se abbia due divisori di una dimensione, per essi divisa si ridurrà a due dimensioni, le radici della quale con i due divisori faranno le quattro radici della proposta, e però il problema sarà piano; nello stesso modo, se abbia un divisore di due dimensioni, un'altro di due dimensioni farà il quoziente, le di cui radici con le radici del divisore faranno le quattro della proposta, e però piano il problema. Se poi avrà un solo divisore di una dimensione, la ridotta, farà di tre, ed il problema sarà bensì solido, ma del

terzo

terzo grado, e non del quarto, come appariva. Un' equazione del quinto grado, se avrà tre divisori di una dimensione, o uno di una, ed uno di due (che è lo stesso caso come se ne avesse due di due dimensioni, perchè necessariamente ne averebbe anche uno di una) si ridurrà a due dimensioni, e però si potranno avere le cinque radici, ed il problema sarà piano; se ne abbia un solo di una dimensione si ridurrà al quarto grado, e del quarto grado sarà il problema; se ne avrà due di una, o uno di due, si ridurrà al terzo grado, ed il problema sarà del terzo grado: in simil modo si discorra dell'altre. La maniera di ritrovare i divisori di una dimensione è stata insegnata al num. 56.

166. Ma oltre a questi, siccome possono avere le equazioni dei divisori di due, e più dimensioni, sì razionali, come irrazionali, con essi in simil modo operando, e nella stessa maniera discorrendo, devesi tentare la divisione dell'equazione proposta, quando però siasi provata prima la divisione per i divisori di una dimensione, il che generalmente devesi sempre premettere, qualunque siasi l'equazione.

167. La maniera di ritrovare questi divisori per le equazioni del quarto grado può essere la seguente; giacchè quelle del terzo, o sono irriducibili, o si possono ridurre per un divisore lineare razionale, per essere esse (come si suppone) libere da' radicali.

Supposto, che l'equazione del quarto grado sia per i divisori d'una sola dimensione irriducibile, si tolga da essa il secondo termine, (num. 160.) e nasca, per esempio, l'equazione $x^4 - 17axx - 20a^2x - 6a^4 = 0$. Si supponga questa eguale al prodotto di due del secondo grado, cioè di $xx + xy + z = 0$, e di $xx - xy + u = 0$, nelle quali le y, z, u sono indeterminate da fissarsi nel progresso, e le u, z possono avere qualunque segno; il prodotto sarà

$$\begin{aligned} x^4 + zxx & - yyxx - yzx + uz & = 0, \\ & + uxx + uyx \end{aligned}$$

quindi si paragoni termine per termine questa equazione colla proposta; e dal paragone de' terzi termini si ricava $z = -17aa + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = -\frac{20a^2}{y} + z$, e ponendo in luogo di z il valore già ri-

trovato a fine d' avere la u data solo per la y , e per le note, sarà $u = -\frac{20a^2}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, e ponendo questo

valore di u nell' equazione $z = -17aa + yy - u$, averassi $z = -\frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2} + \frac{20a^2}{2y}$; dal paragone degl' ultimi termi

si ricava $uz = -6a^4$, e ponendo in luogo di z , e di u i suoi valori dati per la sola y , e per le note, sarà $\frac{289a^4}{4} - \frac{34aayy}{4} - \frac{400a^4}{4} + \frac{y^4}{4} = -6a^4$, cioè riducendo al comune denominatore, $y^4 - 34aay^2 + 289a^2yy - 400a^4 = 0$,

I i

equa-

equazione trasformata, che si può considerare come del terzo grado, per non esservi nè y' , nè y'' , nè y . In quest'equazione si ritrovino i divisori dell'ultimo termine; e perchè, sebbene ella è del sesto grado, pure si considera, come del terzo, si tenti se sia divisibile per $yy \pm$ questi divisori, tra quali si sceglieranno quelli soli di due dimensioni, come è chiaro; e si ritroverà, che è divisibile per $yy - 16aa = 0$, adunque sarà $yy = 16aa$, ed $y = \pm 4a$. Nelle equazioni $u = -\frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa + yy}{2}$, e $z = 20a^3 - 17aa + yy$, sostituito il valore di $y = 4a$, avrassi $u = -3aa$, $z = 2aa$; adunque le due equazioni sussidiarie $xx + xy + z = 0$, $xx - xy + u = 0$ dovranno essere $xx + 4ax + 2aa = 0$, e $xx - 4ax - 3aa = 0$, nelle quali si risolve l'equazione $x^4 - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$, se per una di esse si divide.

Ma le radici di quelle sono (nu. 74.) $x = -2a \pm \sqrt{2aa}$ per la prima, ed $x = 2a \pm \sqrt{7aa}$ per la seconda; dunque sono anche le radici dell'equazione $x^4 - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$, e tutte quattro reali, una positiva, e tre negative.

Se l'equazione trasformata non avesse divisore alcuno, non occorrerebbe cercare altro in questo caso, perchè nè meno ne averebbe la proposta.

Quantunque nel valore della y si abbia $y = \pm 4a$, pure è fatto uso del solo segno positivo, perchè è affatto in-

in-

indifferente il servirsi del positivo, o del negativo, essendo l'esito dell'operazione lo stesso nell'uno, e nell'altro caso. In fatti si ponga $y = -4x$, sarà $u = 2aa$, $z = -3aa$, e le due equazioni le stesse di prima, cioè $xx - 4ax - 3aa = 0$, $xx + 4ax + 2aa = 0$.

Sia l'equazione $x^2 - 2ax + 2aax - 2a^2x + a^2 = 0$; togliendo il secondo termine colla sostituzione $x = z + \frac{a}{2}$, si muterà in $z^2 + \frac{aaz}{2} - a^2z + \frac{5a^2}{4} = 0$.

Facendo per tanto il paragone di questa con l'equazione $z^2 + uzz - pyz + pu = 0$, che è il prodotto delle due

$$\frac{-yyzz + yz}{+ pzz}$$

$zz + yz + p = 0$, $zz - yz + u = 0$; al solito dal paragone de' terzi termini averemo $p = yy - u + \frac{aa}{2} - cc$; dal paragone de'

quarti $u = p - \frac{a^2}{2} - cc$, cioè, posto in luogo di p il suo valo-

re, $u = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} - \frac{a^2}{2} - cc$, e però $p = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} +$

$\frac{a^2}{2} + cc$, e finalmente dal paragone degl'ultimi termini ave-

remo $pu = \frac{5a^2}{16} - \frac{aacc}{4}$, cioè, posti i valori di p , e di u ,

$$y^2 + aay^2 - a^2yy - a^2 - 2acy^2 + c^2yy - 2a^2cc - aac^2 = 0.$$

Ora i divisori dell'ultimo termine, intendendo di due dimensioni, sono aa , ed $aa+cc$, e la divisione succede per $yy - aa - cc = 0$, adunque sarà $yy = aa + cc$, ed

$$y = \pm \sqrt{aa + cc}, \text{ e però } u = \frac{3aa - a^2 - acc}{4}, p = \frac{3aa + a^2 + acc}{4},$$

e le due equazioni $zz + yz + p = 0$, e $zz - yz + u = 0$

$$\text{faranno } zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa + a^2 + acc}{4} = 0,$$

$$zz - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa - a^2 - acc}{4} = 0,$$

$$\text{cioè } zz + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa + a^2 + acc}{4} = 0,$$

$$zz - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3aa - a^2 - acc}{4} = 0,$$

le quali due equazioni risolte ci danno i quattro valori,

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa + cc}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

rispetto alla prima;

$$\text{e } z = \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa + cc}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

rispetto alla seconda;

e per-

le perchè esse sono i divisori dell'equazione

$$x^4 + a^2 z^2 - a^2 z + 5a^4 - \frac{cczz - accz - aacc}{4} = 0,$$

le suddette radici saranno pure quelle della stessa equazione; ed essendo stata fatta la sostituzione di $x = a + z$,

$$\text{faranno } x = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-aa + cc - \frac{1}{2} a \sqrt{aa + cc}},$$

$$x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-aa + cc + \frac{1}{2} a \sqrt{aa + cc}},$$

che sono i quattro valori dell'equazione proposta

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2xx - 2a^3x + a^4 = 0.$$

168. Ma si può formare un canone, o sia formola generale sì per l'equazione trasformata, come per le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, che si assumono a fine di avere i divisori, alle quali formole rapportarsi universalmente, qualunque siasi l'equazione del quarto grado, a cui manchi, o sia tolto il secondo termine. Sia adunque l'equazione generale $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Prese le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e fattone il prodotto $x^4 + zxx - y^2xx - yzx + uz = 0$;

$$+ uxx + uyx$$

si paragoni termine per termine colla proposta, e dal paragone de' terzi termini troverassi $z = \pm p + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = z \pm \frac{q}{y}$, e sostituito in luogo di

z il suo valore, sarà $u = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y}$; cioè $+p$ se

nella proposta il terzo termine è positivo, e $-p$ se è negativo; e così nello stesso modo $+q$ se è positivo il quarto, e $-q$ se è negativo; e questo posto in luogo di u nel primo paragone, averassi $z = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y}$; cioè $+p$

se è positivo il terzo termine della proposta, e $-p$ se è negativo; e per l'opposto $-q$ se è positivo il quarto, e $+q$ se è negativo; dal paragone degl' ultimi troverassi

$zu = \pm r$, cioè $\pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y} \times \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y} = \pm r$, e

facendo l'attuale moltiplicazione, e riducendo al comune denominatore, $y^4 \pm 2py^2 + ppyy - qq = 0$, equazione,

trasformata, che può dirsi cubica, nella quale sarà $+2p$ se il terzo termine della proposta sia positivo, e $-2p$ se sia negativo; e sarà $-4r$ se l'ultimo della proposta sia positivo, e $+4r$ se sia negativo. Se nelle due equazioni sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$ in luogo di z , ed u si portanno i valori di sopra ritrovati, sa-

ran-

ranno esse $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2} = 0$, ed $xx - yx \pm$

$\frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2} = 0$, quindi se l'equazione trasformata sarà

divisibile per $yy \pm$ un divisore di due dimensioni dell'ultimo termine, avrassi il valore della y , che sostituito

nelle due $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2} = 0$, $xx - yx \pm \frac{p}{2} +$

$\frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2} = 0$, ci somministrerà i divisori della proposta.

$x^4 \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, e se la trasformata non sarà divisibile, nè meno lo sarà la proposta.

Sia l'equazione $x^4 - 4axx - 8a^2x + 35a^3 = 0$;

referendo questa alla canonica $x^4 \pm pxx \pm qx \pm r = 0$,

sarà $p = 4aa$, $q = 8a^2$, $r = 35a^3$, e però la trasformata sarà

$y^4 - 8aay^2 - 16a^2yy - 64a^3 = 0$,

cioè $y^4 - 8aay^2 - 16a^2yy - 64a^3 = 0$, e le due sussidia-

rie saranno $xx + yx - 2aa + \frac{yy}{2} + \frac{4a^2}{y} = 0$, $xx - yx -$

$2aa + \frac{yy}{2} - \frac{4a^2}{y} = 0$; ma poichè la trasformata (ritrovati

i divisori dell'ultimo termine) è divisibile per $yy - 16a^2$,

avremo $yy = 16a^2$, ed $y = 4a$, i quali valori sostituiti

nelle due sussidiarie daranno $xx + 4ax + 7aa = 0$,

$xx - 4ax + 5aa = 0$, che sono i divisori della proposta.

$x^4 - 4axx - 8a^2x + 35a^3 = 0$, le di cui quattro ra-

dici $x = -2a \pm \sqrt{-3aa}$, $x = 2a \pm \sqrt{-aa}$ tutte immaginarie.

169. Alle volte il solo togliere dall'equazione il secondo termine basta per ridurla ad essere piana, e così risparmiare tutte l'altre operazioni. Tale sarebbe, per esempio, l'equazione $x^4 + 2cx^3 - 2acxx - 2aacx - aacc = 0$,
 $+ ccxx$

la quale, giacchè non è riducibile per alcun divisore dell'ultimo termine, togliendo il secondo termine col fare

$$x = y - \frac{c}{2}, \text{ si muta in questa}$$

$$y^4 - 2aayy + \frac{c^4}{16} - \frac{ccyy}{2} - \frac{aacc}{2} = 0,$$

quadratica affetta, le di cui radici diminuite della quantità $\frac{c}{2}$, per la sostituzione $x = y - \frac{c}{2}$, faranno quelle della proposta.

170. Esigge questo metodo, che si tolga dall'equazione il secondo termine, nè si estende oltre le equazioni del quarto grado; eccone adunque un'altro, che non obbliga a levare termine alcuno, e può applicarsi tanto alle equazioni del quarto grado, come a quelle del quinto, e sesto, e talora a quelle di grado superiore ancora. Sia l'equazione $x^4 + ax^3 + aaxx - aabx - a^2b = 0$,
 $- abxx$

fi

si prendano due equazioni sussidiarie del secondo grado
 $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$, nelle quali le y, u, f, z
 sono indeterminate da fissarsi nel progresso, e se ne
 faccia il prodotto $x^2 + yx + uxx + ufx + zu$
 $+ fx^2 + fyx + zyx + zxx$
 che si paragoni termine per termine con l'equazione
 proposta: Dal paragone de' secondi termini troverassi
 $f = a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = -\frac{a'b}{a}$; e
 dal paragone de' quarti $yz + fu = -aab$, e sostituendo
 in luogo di f , e di z i suoi valori $a - y$, $-\frac{a'b}{a}$
 fine di avere un'equazione espressa con le sole y, u ,
 e le cognite, sarà $y = \frac{auu + aab}{u + a'b}$. E perchè si è trovato

$u + a'b$
 dal paragone degl'ultimi termini $zu = -\frac{a'b}{a}$, dovrà es-
 sere u un divisore di $-\frac{a'b}{a}$; adunque si trovino i divi-
 sor di due dimensioni di $-\frac{a'b}{a}$ (giacchè quelli di una,
 e di tre non servono, per essere le equazioni sussidiarie
 del secondo grado) che sono $\pm ab$, $\pm aa$. Si cominci a
 prendere in luogo di u uno dei divisori, per esempio
 ab , che sostituito nell'equazione $y = \frac{auu + aab}{u + a'b}$, ci dà
 $y = \frac{2ab}{a + b}$, quindi posti questi valori di y , e di u nell'equazio-
 ne sussidiaria $xx + yx + u = 0$, sarà essa $xx + \frac{2abx}{a + b} + ab = 0$,

e per essa si tenti la divisione dell'equazione proposta, e se questa succeda, sarà $xx + 2abx + ab = 0$ un divisore, ed il quoziente l'altro; ma poichè non succede la divisione, si tenti, prendendo in luogo di u l'altro divisore $-ab$ dell'ultimo termine, e sarà $y = 0$, e però l'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$ sarà $xx - ab = 0$, per cui divisa la proposta, succede esatta la divisione dandoci di quoziente $xx + ax + aa = 0$; adunque i divisori dell'equazione proposta $x^2 + ax^2 + aax - abxx - a^2b = 0$ sono $xx - ab = 0$, $xx + ax + aa = 0$.

Anche prendendo in luogo di u il divisore aa dell'ultimo termine, per cui si trova $y = a$, e l'equazione sussidiaria $xx + ax + aa = 0$, succede la divisione dandoci di quoziente $xx - ab = 0$, cioè gli stessi divisori di prima.

Che se provati tutti i divisori dell'ultimo termine in luogo di u , per nessuno succede l'operazione, l'equazione proposta non può, almeno con questo metodo, abbassarsi, ed il problema rimane di quel grado, che mostra l'equazione.

Ma senza tentare la divisione, si potrebbe anche, preso in luogo di u ciascuno de' divisori di due dimensioni dell'ultimo termine, ed i corrispondenti valori di f, f, z , sostituirli in luogo loro nelle formole sussidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$; e se il prodotto di quelle ci dà l'equazione proposta, faranno esse i divi-

fori

fori cercati. Così preso in luogo di u il divisore $-ab$, si à $y=0$, e però $f=a$, $z=aa$, e le due equazioni sussidiarie faranno $xx-ab=0$, $xx+ax+aa=0$, il prodotto delle quali forma l'equazione proposta.

Sia l'equazione $x^4-2ax^3+2aaxx-2a^2x+a^4=0$.

Si paragoni questa col prodotto

$$\begin{array}{r} x^4 + yx^3 + uxx + fux + zu \\ + fx^3 + fyxx + zyx \\ + zxx \end{array} = 0$$

delle due solite equazioni sussidiarie $xx+yx+u=0$, $xx+fx+z=0$. Dal paragone de' secondi termini caverassi $f=-2a-y$; dal paragone degl' ultimi $z=\frac{a^4}{u}$. Si

prenda il paragone de' terzi, e non de' quarti per avere il valore della y dato anche per la c (la quale lettera deve essere necessariamente ne' divisori, il che non potráss aver dal paragone de' quarti) sarà adunque $u+fy+z=2aa-cc$, e posti i valori di f , e di z , sarà $yy+2ay=\frac{a^4}{u}-2aa+cc+u$, in cui sostituito in luogo

di u uno de' divisori $\pm aa$ dell' ultimo termine, per esempio $+aa$, e risolta l'equazione, sarà $y=-a \pm \sqrt{aa+cc}$, e posti nell'equazione $xx+yx+u=0$ i valori della u , e della y (preso per la quantità radicale il segno o positivo, o negativo, come più si vuole, perchè in fine

torna lo stesso, come si può vedere calcolando nell'uno, e nell'altro modo, averassi $xx - ax + x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$, per cui succede la divisione della proposta equazione, dando di quoziente $xx - ax - x\sqrt{aa + cc} + aa = 0$, ed in conseguenza le quattro radici dell'equazione proposta saranno

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa + cc}{4} - \frac{1}{4}a\sqrt{aa + cc}}$$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa + cc}{4} + \frac{1}{4}a\sqrt{aa + cc}}$$

Sia l'equazione $x^4 + 2bx^3 + b^2xx - a^3b = 0$; si paragoni col prodotto $x^4 + yx^3 + uxx + fx + z = 0$
 $+fx^3 + fyxx + zyx = 0$
 $+ zxx$

delle due solite formole sussidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$. Dal paragone de' secondi termini avremo $f = 2b - y$; dal paragone degl'ultimi, $z = -\frac{a^3b}{u}$; dal paragone de' quarti caveremo $zy + fu = 0$, e posti i valori di f , e di z , sarà $-\frac{a^3by}{u} + 2bu - uy = 0$, cioè

$y = 2buu$. Ma preso ciascuno de' divisori razionali $\pm aa$, $\pm ab$ dell'ultimo termine, e posto in luogo di u , e fatto il rimanente al solito, non succede l'operazione; adunque si tenti per mezzo de' divisori irrazionali $\pm a\sqrt{ab}$ dell'

dell'ultimo termine, e però posto in luogo di u il divisore irrazionale $a\sqrt{ab}$, sarà $y=b$, quindi l'equazione sussidiaria $xx+yx+u=0$ verrà ad essere $xx+bx+a\sqrt{ab}=0$, per cui divisa la proposta darà di quoziente $xx+bx-a\sqrt{ab}=0$.

171. Intorno alle equazioni del quinto grado è chiaro, che se elle non sono divisibili per un divisore lineare, come già suppongo, non potranno esserlo se non per uno del secondo grado, ed uno del terzo. Per tali equazioni adunque si prendano due equazioni sussidiarie, del terzo grado l'una, e l'altra del secondo, ed il prodotto di queste si paragoni termine per termine colla proposta equazione in simil modo, come sopra.

Sia adunque l'equazione

$$x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 8a^2xx + 5a^3x - a^5 = 0;$$

si prendano le due sussidiarie $xx+yx+u=0$, $x^3+txx+fx+z=0$, e se ne faccia il prodotto

$$\begin{aligned} x^5 + yx^4 + ux^3 + tuxx + fux + zu \\ + tx^4 + tyx^3 + fyx^2 + zyx \\ + fx^3 + zxx \end{aligned} = 0,$$

che si paragoni colla proposta equazione, e dal paragone de' secondi termini si avrà $t = -4a - y$, dal paragone degl'ultimi $z = -\frac{a^5}{u}$, dal paragone de' quinti $f = \frac{5a^4}{u} - zy$, e sostituito il valore di z , $f = \frac{5a^4}{u} + \frac{a^5}{u}y$; dal paragone

de' terzi finalmente avraffi $u + ty + f = 6aa$, e posti in luogo di t , e di f i loro valori, per avere un'equazione con le sole y , ed u , e le cognite, sarà $yy + 4ay - \frac{a^3 y}{u} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. E perchè dal paragone degli ultimi ter-

mini abbiamo $z = -\frac{a^3}{u}$, farà u un divisore di $-a^3$,

onde ritrovati tutti i divisori di due dimensioni di $-a^3$, si sostituiscano ad uno ad uno nell'equazione $yy + 4ay - \frac{a^3 y}{u} =$

$-6aa + u + \frac{5a^4}{u}$ a fine di avere il valore della y , e questo si ponga in luogo della y nell'equazione sussidiaria.

$xx + yx + u = 0$, siccome il valore di u ; e se per questa succede la divisione dell'equazione proposta, avremo l'intento. Sono adunque i divisori di due dimensioni dell'ultimo termine $\pm aa$. Si prenda $+aa$, e si sostituisca in luogo di u nell'equazione $yy + 4ay - \frac{a^3 y}{u} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$,

da cui si ricava $yy + 3ay = 0$, cioè $y = 0$, ed

$y = -3a$. Se nell'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$, posto in luogo di u il divisore $+aa$, in oltre si ponga in luogo della y il zero, che è uno de' valori ritrovati, sarà $xx + aa = 0$, ma per questa non succede la divisione della proposta equazione, adunque si ponga in luogo

di

di y l'altro valore $-3a$, ed avremo $xx - 3ax + aa = 0$, per cui succede la divisione, dandoci di quoziente $x' + axx + 2aax - a' = 0$. Se l'operazione non fosse succeduta per mezzo del divisore $+aa$, averebbesi provato il divisore $-aa$; che se nè meno per questo si avesse avuto l'intento, l'equazione sarebbe, almeno con questo metodo, irriducibile.

Sia l'equazione $x' + ax' + a'xx - aabbx - a'b = 0$,
 $-aabbx$

che si paragoni termine per termine col prodotto delle due solite sussidiarie, e dal paragone de' secondi termini troveremo $t = a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = -\frac{a'b}{a}$; dal paragone de' quinti $fu + zy = -aabb$, e

sostituito in luogo di z il suo valore, sarà $f = -\frac{aabb}{a} +$

$\frac{a'by}{a}$; dal paragone de' terzi avremo $u + ty + f = 0$, in cui posti in luogo di t , e di f i loro valori, sarà $yy -$

$ay - \frac{a'by}{a} = \frac{uu}{a} - aabb$. I divisori di due dimensioni di

$a'b$ sono $\pm aa$, $\pm ab$. Si tenti l'operazione per mezzo del divisore $-ab$, e però posto in luogo di u il valore

$-ab$ nell'ultima equazione $yy - ay - \frac{a'by}{a} = \frac{uu}{a} - aabb$,

sarà $yy - ay - \frac{aay}{b} = 0$, e però $y = 0$, ed $y = \frac{ab + aa}{b}$.

Si

Si sostituiscia nell'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$ il valore $\frac{aa+ab}{b}$ in luogo di y , e $-ab$ in luogo di u , e farà $xx + \frac{abx+axx}{b} - ab = 0$, per cui non succede la divisione; si prenda adunque l'altro valore della y , cioè il zero, ed è l'equazione sussidiaria $xx - ab = 0$, per cui succede la divisione dell'equazione proposta, dando di quoziente $x^3 + axx + abx + a^2 = 0$.

Era arbitrario istituire il paragone de' quarti termini, ma per maggiore semplicità ó presi i terzi.

172. Le equazioni del sesto grado, supposte non riducibili per alcun divisore lineare, non lo potranno altresì essere, se non o per tre divisori di due dimensioni, o per uno di due, ed uno di quattro, o per due di tre, ma basterà cercare i due casi, ne quali sono riducibili per due di tre, o per uno di due, ed uno di quattro; giacchè riducendole per uno di due, la ridotta sarà di quattro dimensioni, che si potrà poi ridurre per due divisori di due dimensioni, se la proposta è riducibile per tre di due dimensioni.

Sia l'equazione $x^6 - 13ax^4 + 45aax^3 - 71a^2x^2 + 57a^3xx - 16a^4x + 2a^5 = 0$, che si cerchi di ridurre per una di due dimensioni, ed una di quattro. Si prendano adunque le due sussidiarie $xx + yx + u = 0$, ed $x^4 + px^3 + txx + fx + z = 0$, e se ne faccia il prodotto

$$\begin{aligned}
 & x^6 + px^5 + tx^4 + fx^3 + zxx + zyx + zu \\
 & yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + fyx^2 + fux \\
 & + ux^4 + pux^3 + tux^2
 \end{aligned} = 0;$$

dal paragone de' secondi termini caveremo $p = -13a - y$;
dal paragone degl'ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' terzi

$t + py + u = 45aa$, e sostituendo il valore di p , farà $t = 45aa + 13ay + yy - u$; dal paragone de' sesti $zy + fu = -16a^5$,
e posto il valore di z , farà $f = -\frac{2a^6 y}{u} - \frac{16a^5}{u}$; dal para-

gone de' quinti $z + fy + tu = 57a^4$, e sostituendo i valori
di z , f , e t a fine di avere un equazione data per le
sole u , y , e per le cognite dell'equazione proposta,
sarà finalmente $\frac{2a^6}{u} - \frac{2a^6 yy}{uu} - \frac{16a^5 y}{u} + 45aa u + 13ay u +$

$$\begin{aligned}
 & uyy - uu = 57a^4, \text{ cioè} \\
 & yy - \frac{16a^5 uy + 13au^2 y + 2a^6 u - 57a^4 uu + 45aa u^2 - u^3}{u^2} = 0;
 \end{aligned}$$

e poichè i divisori di due dimensioni dell'ultimo termine
 $2a^6$ sono $\pm aa$, $\pm 2aa$; si provi ponendo in quest'ultima
equazione in luogo di u il divisore $+aa$, e farà $yy +$
 $3ay + 11aa = 0$, che risolta ci dà $y = -\frac{3a \pm \sqrt{-35aa}}{2}$,

quindi la formola sussidiaria $xx + yx + u = 0$ farà $xx -$
 $\frac{3ax + x\sqrt{-34aa} + aa}{2} = 0$; ma per questa, comunque

prendasi l'alternativa de' segni nel radicale, non è divi-

fibile la equazione proposta, siccome nè pure riesce prendendo il divisore $-aa$; adunque si prenda $+2aa$, ed avremo $yy + 12ay + 20aa = 0$, cioè $y = -6a \pm 4a$, vale a dire $y = -10a$, ed $y = -2a$. Si prenda $y = -10a$, e si ponga nella formola sussidiaria $xx + yx + u = 0$ in luogo della y il valore $-10a$, e $+2aa$ in luogo di u , sarà $xx - 10ax + 2aa = 0$, ma per essa non succede la divisione della proposta; onde si prenda l'altro valore della y , cioè $-2a$, e la formola è $xx - 2ax + 2aa = 0$, per cui succede la divisione dandoci di quoziente

$$x^2 - 11ax^2 + 21aax - 74^2x + a^4 = 0.$$

Qui è il luogo di avvertire, che se in vece del paragone de' quinti termini, avessi preso il paragone de' quarti, mi sarei incontrata nell'equazione cubica $2y^2 + 26ayy + 81aay + 74a^2 = 0$, ed il paragone de' quinti mi à portata ad equazione quadratica, dal che si vede, che la scelta del paragone di tali termini piuttosto, che d'altri, può recare molto vantaggio. Non è però, che non potesse servire anche l'equazione cubica $2y^2 + 26ayy + 81aay + 74a^2 = 0$, poichè ritrovando di questa le radici, che sono $y + 2a = 0$, $y + \frac{11a}{2} \pm \sqrt{\frac{4744}{4}} = 0$, una di queste, cioè $y = -2a$ mi dà

la medesima equazione $xx - 2ax + 2aa = 0$, per cui si divide la proposta. Sia l'equazione del sesto grado

$$x^6 + 3ax^5 + 4aax^4 + 6a^2x^3 + 6a^3xx + 3a^4x + 2a^6 = 0$$

non riducibile per divisore di due dimensioni; si tenti

adun-

adunque la riduzione per due di tre, e si prendano le due

$$\begin{aligned} x^3 + yxx + px + u &= 0, \\ x^3 + txx + fx + z &= 0, \end{aligned}$$

e se ne faccia il prodotto

$$\begin{aligned} x^6 + yx^4 + px^4 + ux^3 + tuxx + fux + zu \\ + tx^4 + tyx^3 + ptx^3 + pfx + pz \\ + fx^4 + fyx^3 + zyx^3 \\ + zx^3 \end{aligned} = 0.$$

Dal paragone de' secondi termini caverassi $t = 3a - y$;
dal paragone degl'ultimi $z = 2a^2$; dal paragone de' terzi

$fu + pz = 3a^3$, e ponendo il valore di z , sarà $f = 3a^3 - 2a^2p$;

dal paragone de' terzi $p + ty + f = 4aa$, e sostituiti i valori
di t , e di f , sarà $p = 4aauu - 3a^2u + uuyy - 3auuy$; dal

paragone de' quarti $u + pt + fy + z = 6a^3$, e sostituendo
in luogo di t , f , z i loro valori a fine di avere un'altro
valore di p dato per le y , u , e le note dell'equazione pro-
posta, sarà $p = 6a^2uu - u^3 - 3a^2uy - 2a^2u$.

Tra questi due valori di p s'instituisca un'equazione
per ricavarne il valore della y dato per le sole u , e
le cognite, ed è

$$\frac{4aauu - 3a^2u - 3auuy + uuyy}{uu - 2a^2} = \frac{6a^2uu - u^3 - 3a^2uy - 2a^2u}{3auu - uuy - 2a^2y}$$

e riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'e-

quazione per la y , sarà

$$\begin{array}{r}
 y^4 - 6a^2uyy + 8a^2uy - 6a^2u^2 \\
 - 6au^2yy - 6a^2uyy + 9a^2uu \\
 + 13aau^2y - 12a^2u \\
 + 4a^{12} \\
 - u^4 \\
 \hline
 u^4 + 2a^2u
 \end{array} = 0$$

E perchè si à $uz = 2a^2$, sarà u un divisore di $2a^2$; ma i divisori di tre dimensioni di $2a^2$ sono $\pm a^2$, $\pm 2a^2$; quindi preso uno di essi, cioè $+a^2$ in luogo di u , si ponga nell'ultima equazione, ed averassi $y^4 - 4ayy + 5aay - 2a^2 = 0$. Da questa si cavino i valori della y , cioè uno $y = 2a$, e gl'altri due, che sono eguali, $y = a$. Si faccia uso del primo valore $y = 2a$, che sostituito in una delle equazioni di p in luogo di y , e posto in luogo di u il divisore a^2 , sarà $p = aa$, quindi posti questi valori di y , p , ed u nella formola sussidiaria $x^4 + yxx + px + u = 0$, sarà essa $x^4 + 2axx + aax + a^2 = 0$, per cui divisa l'equazione proposta ci dà il quoziente $x^4 + axx + aax + 2a^2 = 0$. Se la divisione non fosse succeduta prendendo $y = 2a$, avrei preso $y = a$. Che se nè meno per questo avessi avuto l'intento, avrei tentato per mezzo di ciascuno degl'altri divisori, ripetendo le medesime operazioni; e se per nessuno fosse riuscita la faccenda, la proposta equazione non avrebbe potuto abbassarsi, almeno con questo metodo, e sarebbe rimasta del sesto grado.

Sia

Sia l'equazione $x^6 + ax^5 + aax^4 + 3a^2x^3 + a^3xx + a^4x + 2a^5 = 0$, che si paragoni col prodotto delle due sussidiarie, come nell'esempio antecedente. Dal paragone de' secondi termini avremo $t = a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = 2a^6$; dal paragone de' sesti $fu + pz = a^6$, e posto in

luogo di z il suo valore, sarà $f = \frac{a^6}{2a^6} - 2a^6p$; dal paragone de' terzi $p + ty + f = aa$, e posti i valori di t , e di f , $p = \frac{auu - auuy + uuyy - a^6u}{uu - 2a^6}$; dal paragone de' quarti

$u + pt + sy + z = 3a^3$, e sostituiti i valori di z , f , t per avere un'altra equazione di p data per le sole u , y , e le note, sarà $p = \frac{3a^3uu - a^3uy - 2a^6u - u^3}{auu - uuy - 2a^6y}$, ed istituendo

fra questi valori di p un'equazione per avere il valore della y dato per la sola u , e le cognite, fatte le debite operazioni, sarà

$$\begin{aligned} & y^3 - 2au^2yy + 2aa^2y + 2a^3u^3 \\ & - 2a^2u^2y - 2a^3u^2y + a^6uu \\ & + 2a^2uy - 6a^3u = 0. \\ & \quad \quad \quad + 4a^{12} \\ & \quad \quad \quad u^3 + 2a^6u \end{aligned}$$

I divisori di tre dimensioni di $2a^6$ sono $\pm a^3$, $\pm 2a^3$. Si prenda in luogo di u il divisore $+a^3$, che si ponga in quest'ultima equazione, e si riduce ad esse-

re $y' - 4a''yy + 2a''y = 0$, e dividendo per y , sarà
 $y=0$, ed $yy - 4ay + 2aa = 0$, cioè $y = 2a \pm \sqrt{-2aa}$.

Di questi tre valori della y si prenda il primo, cioè $y=0$, e si sostituisca in luogo di y in una delle due equazioni di p , ed a' in luogo di u , e sarà $p=0$; adunque l'equazione sussidiaria $x' + yxx + px + u = 0$ sarà $x' + a' = 0$, per cui divisa l'equazione proposta ci dà di quoziente $x' + axx + aax + 2a' = 0$.

In queste tali equazioni se prima si sapesse, che sono divisibili per un divisore, in cui manchi qualche termine, si potrebbe risparmiare molta fatica col prendere una delle due equazioni sussidiarie mancante pure dello stesso termine, ma poichè ciò non si fa, si suole provare l'operazione primieramente con una di esse equazioni sussidiarie mancante o d'uno, o di un'altro, o di più termini; tuttavia però, perchè l'opera è gettata se la proposta equazione non è in questo modo riducibile, e bisogna in fine, ciò non ostante, ricorrere alle equazioni sussidiarie compite, è meglio servirsi di queste sul bel principio, giacchè ci danno i divisori per l'uno, e l'altro caso.

Senza ripetere le operazioni ad ogni esempio avrei potuto formare il canone generale, a cui rapportare ogni particolare equazione in simil guisa a quello del num.

num. 168. , ma oltre che ciò suole cagionare della confusione, pare, che le attuali operazioni fatte in proposito diano maggior lume, e facciano migliore effetto, quindi ad esse piuttosto mi sono attenuta.

173. Lo stesso metodo si può proporzionalmente applicare alle equazioni di grado superiore, ma il calcolo cresce a dismisura, perchè se si debba ridurre un'equazione, per esempio, dell'ottavo grado per mezzo di due del quarto, nelle quali non manca alcun termine, ciascuna delle due equazioni sussidiarie avrà quattro indeterminate, onde considerata una di queste equazioni, come farebbe $x^4 + yx^3 + px^2 + qx + u = 0$, e preso per la u uno de' divisori dell'ultimo termine della proposta, rimangono tre indeterminate y, p, q da fissarsi coi soliti paragoni, nel che s'incontrano equazioni solide, delle quali però avendosi le radici, l'operazione può procedere.

PROBLEMA I.

174. Ritrovare quattro numeri, i quali si superino dell'unità, ed il prodotto loro sia 100.

Sia il primo numero $= x$, il secondo sarà $= x + 1$, il terzo $= x + 2$, il quarto $= x + 3$; adunque dovrà essere il prodotto loro $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = 100$, cioè $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 100 = 0$; e perchè quella equazione

zione non è divisibile per alcun divisore dell'ultimo termine, si faccia sparire il secondo con la sostituzione di $x = z - \frac{3}{2}$, e nasce l'equazione $z^4 - 5zz - \frac{1591}{16} = 0$,

che è quadratica affetta, le di cui radici sono $zz = \frac{5}{2} \pm \sqrt{101}$,

e però $z = \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$, quindi averassi $x = -\frac{3}{2} \pm$

$\sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$; e però de' quattro valori della x due so-

no reali, cioè $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, gli altri due

immaginarj. Se ne prenda uno reale $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$

per il primo numero de' quattro cercati; farà $-\frac{1}{2} +$

$\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il secondo; $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo;

$\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il quarto; il prodotto de' quali è $= 100$.

Si prenda l'altro valore reale di x cioè $-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$

per il primo numero; farà $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il se-

condo; $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo; $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il

quar-

quarto, il prodotto de' quali dà parimente il numero 100.

PROBLEMA II.

175. Nel triangolo rettangolo ABC dato il lato minore AB, (Fig. 91.) ed abbassato il perpendicolo BD alla base AC, e data la differenza de' segmenti AD, DC della stessa base AC; ritrovare la differenza FC de' lati BA, BC.

Col centro B, intervallo BA, si descriva il circolo AEFG, e sia BA=a, EC=b, differenza data de' segmenti AD, DC, e sia FC differenza cercata = x; farà GC=2a+x, e per la proprietà del circolo, $GC \times CF = AC \times CE$, cioè $2ax + xx = AC \times b$, e però $AC = \frac{2ax + xx}{b}$; ma essendo retto l'angolo ABC, avrassi

l'equazione $\frac{4axx + 4ax^2 + x^4}{bb} = 2aa + 2ax + xx$, o sia

$x^4 + 4ax^2 + 4aaxx - 2abbx - 2aabb = 0$, la quale non è divisibile per alcun divisore dell'ultimo termine, e però si levi il secondo termine, facendo $x = z - a$, ed avrassi la quadratica affetta $z^4 - 2aaz + a^4 - bbzz - aabb = 0$, quin-

di

di $zz = \frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}$, $cz = \pm \frac{\sqrt{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}}{2}$

onde $x = -a \pm \frac{\sqrt{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}}{2}$, o sia

$x = -a \pm \frac{\sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{2}}}}{2}$; quattro radici tutte reali, quando sia a maggiore di b . La radice $x = -a + \frac{\sqrt{aa + \frac{bb}{2} + b\sqrt{2aa + \frac{bb}{2}}}}{2}$, che è positiva,

serve per il problema proposto; la radice $x = -a + \frac{\sqrt{aa + \frac{bb}{2} - b\sqrt{2aa + \frac{bb}{2}}}}{2}$, che è negativa, serve quando il lato BC sia minore del lato AB ; le altre due servono per l'angolo ABG .

PROBLEMA III.

176. Dato il quadrato AD , (Fig. 92.) ritrovare nel lato prodotto AC il punto E tale, che condotta all'angolo B la retta EB , sia l'intercetta EF eguale ad una data retta linea c .

Chiamata $BD = a$, $DF = x$, sarà $CF = a - x$, e condotta BFE , sia $FE = c$; per la similitudine de' trian-

goli ECF , BDF , farà $CF (a-x)$; $FE (a) ::$
 $FD (x)$, $FB (\frac{cx}{a-x})$; ma per l'angolo retto D farà
 anche $FB = \sqrt{aa + xx}$, adunque averassi l'equazione
 $\sqrt{aa + xx} = \frac{cx}{a-x}$, e quadrando, $\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx$, e

riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'equazione, farà $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^2x + a^4 = 0$, le di
 cui radici si è veduto ai numeri 167., e 170., essere

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Le due ultime radici sono sempre reali, e positive, l'una

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, che è
 minore di a , ci determina il punto F , per cui condotta la linea BE , farà EF eguale alla data c , e
 sciolto il problema proposto. L'altra radice

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, che è maggiore di a , determina il punto f ; a cui condotta la
 retta Bf , ci dà pure ef eguale alla data, e serve se il
 problema fosse stato proposto per l'angolo ACf .

Le due prime radici sono immaginarie, qualunque volta sia cc minore di $8aa$, ed il problema impossibile. Posta adunque cc non minore di $8aa$, le due radici sono reali, e negative, quindi presa $DG = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} +$

$$\sqrt{\frac{cc-aa}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \text{ e } Dg = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} -$$

$\sqrt{\frac{cc-aa}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$ e condotte per lo punto B le rette GM, gm , faranno esse ambe eguali alla data c ; e servirebbero, se il problema fosse stato proposto per l'angolo ACD .

177. Molte volte quando il problema non è di natura sua solido, ma piano, se ci comparisce sotto un'equazione solida ponendo per incognita una tal linea, ci può comparire sotto equazione piana prendendo altra linea, per incognita. Ne prendo un'esempio nel problema antecedente, in cui denominando $DF = x$, si è ritrovata un'equazione del quarto grado, per cui si è dovuto fare la fatica di ridurla. Ma se supponendo E il punto cercato, (Fig. 93.) si condurrà ER normale a BE , che incontri in R la BD prodotta, ed EL normale a BR , e chiamerassi $DR = x$, e come sopra $BD = a$, $FE = c$, e $BF = y$, altra incognita da eliminarsi in appresso, sarà $BR = a + x$, $BE = c + y$. Ora per i triangoli simili BDF , ELR , sarà $ER = y$, perchè è $EL = CD = BD$; e per i trian-

triangoli simili BRE , ERL , farà BR , $BE::ER$, EL ,
adunque farà $a+x$, $c+y::y$, a ; quindi $cy+yy=aa+ax$.
Ma per l'angolo retto BER , il quadrato di BR è eguale
alla somma de' quadrati di BE , e di ER , cioè $aa+2ax+$
 $xx=2yy+2cy+cc$, dunque ponendo in luogo di $cy+yy$
il valore $aa+ax$, farà l'equazione $aa+2ax+xx=2aa+$
 $2ax+cc$, cioè $x=\pm\sqrt{aa+cc}$.

In un' altro modo ancora. Divisa per metà la FE
in H , e chiamata $CD=a$, sia $2c$ la data linea, a cui
deve essere eguale la FE , e si chiami $BH=x$, farà
 $BF=x-c$, e $BE=x+c$; ma $\overline{BE}-\overline{AB}=\overline{AE}$, dun-
que farà $AE=\sqrt{xx+2cx+cc}-aa$. Ora per i triangoli
simili BDF , BEA , farà $BF(x-c)$, $BD(a)::$
 $BE(x+c)$, $AE(\sqrt{xx+2cx+cc}-aa)$, quindi $ax+ac=$
 $x-c\sqrt{xx+2cx+cc}-aa$, e quadrando, ed ordinando
l'equazione, farà finalmente

$$x^4 - 2aaxx - 2aacc \\ - 2ccxx + c^4 = 0,$$

quadratica affetta, le di cui quattro radici sono

$$x = \pm \sqrt{aa+cc} \pm a\sqrt{aa+4cc}.$$

Istessamente se nel problema II. num. 175. in luogo
di fare $FC=x$, (*Fig. 91.*) avessi denominata $BC=x$, ri-
petendo lo stesso discorso, avrei ritrovata l'equazione

$$x^4 - 2aaxx + a^4 \\ - bbx - aabb = 0,$$

qua-

quadratica affetta, le di cui radici sono

$$x = \pm \sqrt{aa + \frac{bb}{2}} \pm b \sqrt{\frac{2aa + bb}{4}}, \text{ che convengono con}$$

le prime.

Anco più semplicemente, ponendo $AE = x$, e ripetendo lo stesso discorso, avrebbesi avuta l'equazione,

$$xx + bx = 2aa, \text{ e però } x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{2aa + bb}{4}}, \text{ e perchè}$$

avrebbesi trovata l'espressione $-a + \sqrt{bb + 2bx + xx - aa}$ per la FC ; ponendo in luogo di x il valore ritrovato, farebbesi avuta la ricercata

$$FC = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b \sqrt{\frac{2aa + bb}{4}}}, \text{ come prima.}$$

178. Un' altro artificio si può tentare per simili problemi, quando ci portano a equazione solida, e che però tali non sono di natura sua; ed è, ritenuta la stessa linea, per incognita, per cui si è ritrovata la prima equazione, per mezzo d'altre proprietà ritrovare una seconda equazione, ed eguagliare l'una all'altra; dal paragone delle quali nascerà una terza di grado inferiore. Eccone un' esempio nel seguente problema.

PRO-

PROBLEMA.

179. Inscrivere in un dato circolo un settangolo.

Sia (Fig. 94.) il dato circolo $ABFGCDE$, il di cui centro H , raggio $HA=r$, ed il lato del settangolo sia $AB=BF=FG$ ec. $=x$. Divisa per metà AB in I , sarà $AI=\frac{1}{2}x=IB$, e condotta IC , che passerà necessariamente per lo centro H , sarà $HI=\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}$, $CI=r+$

$\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}$, $CB=\sqrt{2rr+2r\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}}$. Si tirino CE ,

ed HD , faranno simili i triangoli CDK , HAI , a cagione dei due angoli retti CKD , HIA , e degl'angoli DCK , AHI , il primo de' quali, perchè insiste all'arco DE , sarà doppio dell'angolo ACI , che insiste alla metà di DE , e però eguale all'angolo AHI doppio dello stesso ACI ; e però avremo per la similitudine di essi triangoli,

$$CK=x\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}=\sqrt{4rrxx-x^4}, CE=\sqrt{4rrxx-x^4},$$

ed $HK=\sqrt{rr-\frac{4rrxx+x^4}{4}}=\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}$; ma sono simili

i triangoli CEN , CHK , essendo retti i due angoli K , N , ed eguali i due angoli KCH , CEN , perchè insistenti a due
seg-

fegmenti eguali, dunque farà $CN = \frac{2rr - xx \sqrt{4rrxx - x^4}}{2r^3}$,

e $CB = \frac{2rr - xx \sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}$, e però l'equazione.

$$\sqrt{2rr + r \sqrt{4rr - xx}} = \frac{2rr - xx \sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}.$$

Quadrando adunque, farà $2rr + r \sqrt{4rr - xx} = \frac{4r^4 - 4rrxx + x^4}{r^6} \times 4rrxx - x^4$, e di nuovo quadrando,

ed ordinando, avrassi $x^{14} - 16rrx^{12} + 104r^4x^{10} - 352r^6x^8 + 660r^8x^6 - 672r^{10}x^4 + 336r^{12}xx - 63r^{14} = 0$; ma quest'equazione è divisibile per $xx - 3rr = 0$. Fatta pertanto la divisione, avremo $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$, la quale non è divisibile per alcun divisore di due dimensioni, quindi pare che il problema sia del duodecimo grado. Sciolgo adunque il problema in altro modo, ritenendo la medesima incognita $x = AB = BF$ ec. Poichè nei triangoli HCD , CDL l'angolo CDH è comune, e l'angolo alla circonferenza DCL , che insiste all'arco DA , è eguale all'angolo al centro DHC , che insiste all'arco CD metà di DA , saranno simili essi triangoli, e però avremo $DL = xx$, $LH = r - xx$. Ma l'angolo $DLC = DCH = EDH$, dunque l'angolo HLM , che è eguale all'angolo

lo al vertice DLC , sarà eguale all'angolo EDH , onde faranno parallele le due rette LM , DE , e simili i triangoli HLM , HDE , e però sarà $LM = \frac{rrx - x^2}{rr}$, ma

$CL = CD = x$, (essendo il triangolo LDC simile al triangolo isoscele HDC) e $CL = MA$, per essere eguali gl'angoli HLC , HMA , e però simili, ed eguali i triangoli HLC , HMA ; dunque $CA = 2x + \frac{rrx - x^2}{rr}$, e

perchè $CA = CB$, sarà l'equazione $\frac{3rrx - x^2}{rr} =$

$\sqrt{2rr + r\sqrt{4rr - xx}}$, e quadrando, $9r^2xx - 6rrx^2 + x^4 = 2r^6 + r^2\sqrt{4rr - xx}$; e di nuovo quadrando, ed ordinando l'equazione,

$$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0.$$

Ed eccomi giunta ad un'altra equazione, la quale, perchè di grado inferiore alla prima, si dovrà moltiplicare per tanta potestà dell'incognita, quanta è necessaria, acciò divenga dello stesso grado, e con essa si possa paragonare; moltiplicandola adunque per xx , sarà

$$x^{12} - 12rrx^{10} + 54r^4x^8 - 112r^6x^6 + 105r^8xx - 35r^{10}xx = x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8xx - 105r^{10}xx + 21r^{12},$$

e sottratta la prima dalla seconda, sarà

$$x^{10} - 11rrx^8 + 45r^4x^6 - 84r^6x^4 + 70r^8xx - 21r^{10} = 0,$$

la quale, perchè è del decimo grado, paragonata colla seconda equazione di sopra ritrovata,

$$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0,$$

e da essa sottratta, sarà

$$x^8 - 9rrx^6 + 28r^4x^4 - 35r^6xx + 14r^8 = 0, \text{ che è di-}$$

visibile per $xx - 2rr$, e fatta la divisione, avremo final-

$$x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0.$$

Ho tenuta questa strada, per far vedere l'uso del metodo; per altro sarei giunta più presto alla stessa equazione, se avessi paragonati fra loro i due valori del quadrato di CA ritrovati nelle due diverse soluzioni del problema, cioè $16r^6xx - 20r^4x^4 + 8rrx^6 - x^8$ della prima, e

$$\frac{9r^4xx - 6rrx^4 + x^6}{r^6} \text{ della seconda; imperciocchè fatta}$$

l'equazione fra questi due valori, e tolti i termini, che si elidono; sarà $x^8 - 7rrx^6 + 14r^4x^4 - 5r^6xx = 0$, e dividendo per xx , $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$, come sopra. Si poteva anche più brevemente dividere l'equazione da prima ritrovata $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$ per $x^6 - 6rrx^4 + 9r^4xx - 5r^6 = 0$, o la seconda $x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0$, per $x^4 - 5rrxx + 5r^4 = 0$, e nell'uno, e nell'altro caso avremmo ritrovato $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$.

Non

Non è però del sesto grado il proposto problema, sebbene tale apparisce, non ostante la usata industria; per vederlo, ritenuta la stessa composizione di figura, si denomini $HI=x$, sarà $AI=\sqrt{rr-xx}=IB$, $CI=r+x$, $CB=\sqrt{rr+2rx+xx+rr-xx}=\sqrt{2rr+2rx}$. Indi ripetendo lo stesso discorso di sopra, si avrà $CK=\frac{2x\sqrt{rr-xx}}{r}$;

$$HK=\sqrt{\frac{r^4-4rrxx+4x^4}{r^2}}=\frac{rr-2xx}{r}; CE=2CK=\frac{4x\sqrt{rr-xx}}{r};$$

$$CN=\frac{4rx-8x^2}{r^2}\sqrt{rr-xx}; CB=2CN=\frac{8rx-16x^2}{r^2}\sqrt{rr-xx}.$$

Ma si è anco trovato $CB=\sqrt{2rr+2rx}$; dunque sarà l'equazione

$$\sqrt{2rr+2rx}=\frac{8rx-16x^2}{r^2}\sqrt{rr-xx}.$$

Cerco altra equazione in maniera diversa, ma ritenendo la stessa $HI=x$ per incognita; per lo stesso discorso di sopra, sarà $DL=\frac{4rx-4xx}{r}$; $LH=r-\frac{4rx+4xx}{r}$;

$$\frac{4xx-3rr}{r}; LM=2\sqrt{\frac{rr-xx}{r}}\times\frac{4xx-3rr}{r}; CA=$$

$$4\sqrt{\frac{rr-xx}{r}}+2\sqrt{\frac{rr-xx}{r}}\times\frac{4xx-3rr}{r}, \text{ cioè riducen-}$$

do, $CA = \frac{8xx - 2rr}{rr} \sqrt{rr - xx} = CB$; e però

$\sqrt{2rr + 2rx} = \frac{8xx - 2rr}{rr} \sqrt{rr - xx}$, e finalmente, egua-

gliando gl' omogenei di comparazione dell'una, e dell'altra equazione, farà

$\frac{8rx - 16x^3}{r^3} \sqrt{rr - xx} = \frac{8xx - 2rr}{rr} \sqrt{rr - xx}$, la quale

equazione ridotta viene ad essere $8x^3 + 4rxx - 4rx - r^3 = 0$, del terzo grado.

180. Messi in opra i soprafcritti metodi, se le equazioni non possono abbassarfi, e rimangono di grado superiore al secondo, in due maniere si può procedere per la soluzione de' problemi, che riescono solidi, o più che solidi. Una maniera, che è di pochissimo uso, riguarda le sole equazioni del terzo, e quarto grado, e consiste nel risolverle, sviluppando i valori analitici dell' incognita, che ci si presenteranno però sotto radici cube, e chiamasi *la Regola di Cardano*. La seconda generalissima, e di moltissimo uso consiste nel ritrovare i valori geometrici dell' incognita col mezzo delle intersezioni di certe curve opportunamente introdotte nell'equazione, e così costruire il problema proposto.

181. E per cominciare dalla risoluzione analitica, suppongo, che le equazioni manchino del secondo termine, tali potendosi sempre ridurre, se non lo sono. Tutte
le

le equazioni del terzo grado mancanti del secondo termine sono comprese sotto queste quattro canoniche.

$$\text{I. } x^3 - px - q = 0. \quad \text{II. } x^3 + px - q = 0.$$

$$\text{III. } x^3 - px + q = 0. \quad \text{IV. } x^3 + px + q = 0.$$

Si faccia $x = y + z$, e però $px = py + pz$, ed $x^3 = y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3$, e sostituiti questi valori rispetto alla prima equazione, sarà essa $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz - q = 0$; di questa se ne formino due, cioè $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = q$, dalla prima si ricava, dividendo per $y + z$, $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che sostituito

nella seconda darà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$, o sia $z^3 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$,

e per le regole delle quadratiche affette, $z^3 - qz^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$; e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$.

Nella estrazione della radice quadrata è preso il solo segno positivo, perchè il negativo nulla varia, e dà in fine la stessa quantità del positivo per il valore della x , come si potrà vedere facendone il calcolo; il che s'intenda similmente riguardo all'altre tre equazioni canoniche. Ma $y^3 + z^3 = q$, sarà adunque $y^3 = q - \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$, e però $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$;

ma in oltre si è fatta $x = y + z$, sarà adunque $x =$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}, \text{ giacchè}$$

l'alternativa de' segni ommessa nulla varia.

182. La seconda equazione $x^3 + px - q = 0$, fatte le stesse sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz - q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = q$; dalla prima si ricava $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$,

$$\text{o sia } z^3 - qz^3 = \frac{p^3}{27}, \text{ e però } z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}, \text{ e } z =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}, \text{ ma } y^3 + z^3 = q, \text{ adunque } y =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}, \text{ ed } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} +$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}.$$

183. La terza equazione $x^3 - px + q = 0$, fatte le stesse sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz + q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima si ricaverà $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$,

o sia

o sia $z^6 + qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$,

e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$; ma $y^3 + z^3 = -q$, adun-

que $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x =$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}.$$

184. La quarta equazione $x^3 + px + q = 0$, fatte le sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz + q = 0$. Formo le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima si avrà $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$,

o sia $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}$,

e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ma $y^3 + z^3 = -q$, adun-

que $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x =$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}.$$

185. Le stesse radici, o formole si avranno ponen-

do

do $x = z \pm \frac{p}{3z}$, cioè $+$ $\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $-px$, e $-\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $+px$; quindi $x^3 = z^3 \pm pz + \frac{pp}{3z} \pm \frac{p^3}{27z^3}$. Fatte adunque le sostituzioni nella prima equazione canonica $x^3 - px - q = 0$, farà essa $z^3 + \frac{p^3}{27z^3}$

$q = 0$, cioè $z^6 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$,

e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$; adunque, poichè

si è posto $x = z + \frac{p}{3z}$, farà

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}.$$

Per ridurre questa alla stessa espressione ritrovata nella prima maniera, basta moltiplicare il numeratore, e denominatore del secondo termine dell'omogeneo di comparazione per $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e farà esso

$$p \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}, \text{ cioè } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}, \text{ e}$$

$$3 \sqrt[3]{\frac{p^3}{27}}$$

però

però $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$,
come prima.

La radice per la seconda equazione $x^3 + px - q = 0$
farebbe $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell'omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, farà
 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

La radice per la terza equazione $x^3 - px + q = 0$

farebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell'omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, farà
 $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

O o

La

La radice per la quarta equazione $x^3 + px + q = 0$

sarebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}, \text{ farà}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}},$$

come prima.

186. E' chiaro a vedersi, che i valori ritrovati dell' incognita x colla prima sostituzione $x = y + z$ esiggon l'estrazione di due diverse radici cube, la dove i secondi avuti con la sostituzione $x = z \pm \frac{p}{z}$ richieggono l'estrazione d'una sola; e che il valore per la seconda, e quarta equazione canonica ci comparirà sempre sotto forma reale, perchè la quantità sotto il vincolo radicale quadratico è tutta positiva; ma quello della prima, e terza sarà sotto forma reale, se sia $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$, e sotto forma immaginaria, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, (e questo chiamasi il caso irriducibile) ma ciò nulla ostante non è però,

però, ch'egli non sia reale; anzi tutti e tre i valori della prima, e terza equazione, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, sono reali; siccome essendo $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$ nella prima, e terza equazione, e generalmente nella seconda, e quarta, le sole radici o valori così ritrovati sono reali, gli altri due sono immaginari.

E quanto alla seconda, e quarta equazione, ciò è già stato dimostrato al num. 152. avendo esse il terzo termine positivo. Rispetto poi alla prima, e terza, cioè quando il terzo termine è negativo, abbia ciascuna di esse le tre radici reali, che sieno $a, -b, -c$, o pure $-a, +b, +c$, e poichè manca il secondo termine, come si suppone, sarà $a=b+c$, e l'equazione per tanto, che nasce da tali radici, sarà di questa forma $x^3 - bbx \pm bc \times \overline{b+c} - \frac{bcx}{ccx} = 0$.

Essendo b, c quantità reali, sarà $b-c$ quantità positiva, e perciò, se si ponga $bb - 2bc + cc = D$, sarà anco $bb + bc + cc = D + 3bc$, e $\frac{bb+bc+cc}{27} = \frac{D^3 + DDbc + Dbbcc + b^3c^3}{27}$; ma sarà in oltre $bb + 2bc + cc$, cioè $b+c = D + 4bc$, e però $\frac{bbcc \times \overline{b+c}}{4} = \frac{Dbbcc + b^3c^3}{4}$; e $\frac{D^3 + DDbc + Dbbcc + b^3c^3}{27}$.

è maggiore di $\frac{Dbbc + b^2c}{4}$; adunque sarà anche mag-

giore di $\frac{bbcc \times \frac{4}{b+c}}{4}$, e però $\frac{bb + bc + cc}{27}$ maggiore di

$\frac{bbcc \times b + c}{4}$, cioè il cubo preso positivo della terza parte

del coefficiente del terzo termine maggiore del quadrato della metà dell'ultimo, cioè $\frac{p^2}{27}$ maggiore di $\frac{1}{4}qq$.

Adunque se essendo le radici tutte reali, il terzo termine è sempre negativo, ed in oltre $\frac{p^2}{27}$ è maggiore di $\frac{1}{4}qq$; quando altrimenti si trovi vi saranno due radici immaginarie, il che ec.

Ritrovato nella suddetta maniera un valore per ciascuna equazione, si avranno gli altri due col dividere per questo valore l'equazione proposta, poichè il quoziente sarà un'equazione del secondo grado, che si potrà sempre risolvere.

187. Potrebbe si però anche, se più torna comodo, risparmiare il tedio della divisione riflettendo, che siccome tre sono le radici cube dell'unità, cioè $1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, così intendendosi qualunque

quan-

quantità, per esempio $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, moltiplicata nell'unità, le tre di lei radici cube faranno

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$$- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}};$$

quindi le tre radici cube della prima equazione $x^3 - px - q = 0$ saranno, ordinandole però debitamente, le seguenti

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

ed in fatti facendo il prodotto delle radici tra loro, e ponendo per brevità $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = m$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = n$,

$$\text{il prodotto dell'ultima } x + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times n$$

$$\text{nella seconda } x + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times n \text{ fa-}$$

rà

rà $xx + mx + nx + mm - mn + nm$, che moltiplicato nella prima $x - m - n$ darà $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3$, e restituendo i valori di m , e di n , sarà finalmente $x^3 - px - q = 0$, equazione proposta. Nè differentemente si proceda per l'altre equazioni.

188. Ritrovate le accennate formole generali, per applicarle all'uso particolare di equazioni date, basterà paragonare la proposta equazione con la corrispondente, delle quattro canoniche, per avere indi il valore della q , e della p , i quali sostituiti nella formola ci daranno le ricercate radici.

Sia l'equazione $x^3 + 2aax - 9a^3 = 0$; la corrispondente delle quattro canoniche sarà la seconda $x^3 + px - q = 0$, adunque sarà $p = 2aa$, $q = 9a^3$, onde facendo la sostituzione di questi valori in luogo di p , e di q nella espressione generale della radice di essa seconda equazione, cioè in

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\text{farà } x = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^3}{27}}},$$

$$\text{o sia } x = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}},$$

e l'al-

e l'altre due faranno

$$x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}},$$

$$x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{2219a^6}{108}}},$$

il prodotto delle quali restituisce la proposta equazione.

189. Ma anche senza rapportare le particolari equazioni alle formole generali, si possono esse indipendentemente risolvere, facendo uso della data regola. Così per l'equazione $x^3 + 2aax - 9a^3 = 0$, fatta $x = y + z$, sarà $2aax = 2aay + 2aaz$, ed $x^3 = y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3$, e sostituiti questi valori nella proposta equazione, sarà mutata in quest'altra $y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 + 2aay + 2aaz - 9a^3 = 0$, di questa se ne formino due, cioè $3zyy + 3zzy = -2aay - 2aaz$, ed $y^3 + z^3 = 9a^3$; dalla prima, dividendo per $y + z$, caverassi $3zy = -2aa$, cioè $y = -\frac{2aa}{3z}$, che sostituito nella

seconda dà $-\frac{8a^6}{27z^3} + z^3 = 9a^3$, o sia $z^6 - 9a^3z^3 = \frac{8a^6}{27}$, e

però $z^3 = \frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$;

ma $y^3 + z^3 = 9a^3$, adunque $y^3 = \frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$,

e però $y = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$; ma $y + z = x$,

adun-

adunque $x = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{81^6}{27}} + \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{81^6}{27}}$,
la stessa come sopra.

Sia l'equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$. Si levi il secondo termine, facendo $z = x - a$, e viene $x^3 - 8aax + 9a^3 = 0$. Riferita questa alla terza canonica, avremo $p = 8aa$, $q = 9a^3$, quindi sostituiti questi valori nella formola generale per la radice, sarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}},$$

$$\text{cioè } x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}},$$

e l'altre due

$$x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}},$$

$$x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2}} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}},$$

e perchè si è fatta $z = x - a$, sottraendo la quantità a da ciascuna delle tre ritrovate radici, si avranno le radici della proposta equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$.

Sia l'equazione $x^3 - 9aax + 2a^3 = 0$. La corrispondente delle quattro canoniche sarà la terza $x^3 - px + q = 0$; adunque sarà $p = 9aa$, $q = 2a^3$, onde facendo la sostituzione di questi valori in luogo di p , e di q nell'espressione

fione

sione generale della radice di essa terza equazione, sarà

$$x = \sqrt[3]{-a' + \sqrt{-702a'^2}} + \sqrt[3]{-a' - \sqrt{-702a'^2}}, \text{ e l'espre-}$$

sione immaginaria, quantunque tutte tre le radici sieno reali, come appunto porta il caso irriducibile.

190. Nelle equazioni del quarto grado si procederà in questa maniera. Sia l'equazione canonica $x^4 + px^2 + qx - r = 0$, in cui manca il secondo termine, e se non mancasse, da essa s'avrebbe a togliere; si trasformi questa in una cubica nella maniera spiegata al num. 167. per mezzo delle due formole sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e farà la trasformata $p^2 + 2py^2 + ppyy - qq = 0$, e le due sussidiarie, posti in

luogo di u , e di z i valori ritrovati dal paragone de' termini, faranno $xx + yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y} = 0$,

$$xx - yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y} = 0, \text{ e perchè}$$

si suppone, che questa non abbia divisore alcuno di due dimensioni, da essa si tolga il secondo termine colla sostituzione $yy = t - \frac{2}{3}p$, ed averemo la nuova equazione

$$t^3 - \frac{1}{3}ppt - \frac{2p^2}{3} + 4rt - \frac{8}{3}pr = 0.$$

Pp

Si

Si paragoni questa alla prima, o seconda delle quattro canoniche del num. 181., secondo che $4r$ è minore, o maggiore di $\frac{1}{3}pp$, per averne la radice cuba, che per brevità chiamisi b ; onde sia $r=b$, e perchè si è fatto $yy=r-\frac{2}{3}p$, farà $yy=b-\frac{2}{3}p$, e però $y=\sqrt{b-\frac{2}{3}p}$, che si ponga per brevità $=g$. Nelle due formole sussidiarie si ponga g in luogo di y , e gg in luogo di yy , e faranno

$$xx+gx+\frac{gg}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2g}=0, \quad xx-gx+\frac{gg}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2g}=0,$$

le radici delle quali sono $x=-\frac{g}{2} \pm \sqrt{\frac{q-p-gg}{2g}}$, della

prima, ed $x=\frac{g}{2} \pm \sqrt{-\frac{q-p-gg}{2g}}$, della seconda;

e ponendo il valore di $g=\sqrt{b-\frac{2}{3}p}$, faranno finalmente

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{b-\frac{2}{3}p} \pm \sqrt{\frac{q}{2\sqrt{b-\frac{2}{3}p}}-\frac{1}{3}p-\frac{1}{4}b},$$

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{b-\frac{2}{3}p} \pm \sqrt{-\frac{q}{2\sqrt{b-\frac{2}{3}p}}-\frac{1}{3}p-\frac{1}{4}b}$$

le quattro radici della proposta equazione

$$x^4 + pxx + qx - r = 0.$$

Sia l'equazione $x^4 - 86axx + 600a^2x - 851a^3 = 0$.
Riferita questa all'antecedente canonica, farà $p = -86aa$,

$q =$

$q=600a^3$, $r=851a^4$, e però la trasformata cubica sarà $y^3 - 172aay^2 + 10800a^2yy - 360000a^3 = 0$; ma poichè questa è divisibile per $yy - 100aa$, senza risolverla con le regole delle equazioni cubiche, già se ne è la radice, cioè $yy = 100aa$, ed $y = 10a$. Sostituiti questi valori in luogo di y , e di yy , come pure i valori di p , e di q nelle due sussidiarie, saranno esse $xx + 10ax - 23aa = 0$, $xx - 10ax + 37aa = 0$, e le loro radici $x = -5a \pm \sqrt{48aa}$, $x = 5a \pm \sqrt{-12aa}$, che sono pure le quattro radici della proposta. Si è posto questo esempio per far vedere unicamente l'uso del metodo, mentre la data equazione si può ridurre a due di due dimensioni, colle maniere di sopra a suo luogo spiegate.

191. Nelle sole questioni aritmetiche può avere uso questo metodo di risolvere le equazioni, e non nelle geometriche, poichè avendosi in questo modo il valore dell'incognita espresso da radice cuba, (che si suppone non poterfi attualmente cavare, poichè in questo caso l'equazione avrebbe un divisore, e non sarebbe del grado, che mostra) il ritrovare essa radice cuba geometricamente non può farsi altrimenti, che con l'intersecazione delle curve, che è la seconda maniera, e la generale data me di sopra indicata al num. 180.

Consiste questo metodo nell'introdurre una nuova incognita nell'equazione, per indi avere due equazioni,

Pp 2

ciascu-

ciascuna delle quali contenga ambe le incognite, e tutte due assieme le cognite tutte dell'equazione proposta; queste due equazioni sono due luoghi geometrici da costruirsi, le intersezioni de' quali ci determinano i valori geometrici, o sia le radici dell'equazione proposta; e la ragione è chiara, poichè siccome dalla combinazione di due luoghi, o sia di due equazioni indeterminate, ponendo in una di queste in luogo di una delle due incognite il valore dato per l'altra equazione, nasce un'equazione determinata, così la determinata può risolversi in due indeterminate.

Sieno adunque le due equazioni $ax = zz$, $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$; se dalla prima, per esempio, si cavi il valore di x , che è zz , e si sostituisca nella seconda, nascerà l'equazione determinata del quarto grado $z^4 - 5azzz + 2a^2z + 3a^2 = 0$. Adunque se preso il luogo alla parabola $ax = zz$, sarassi la sostituzione del valore di zz nell'equazione z^4 ec., nascerà il secondo luogo $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$. Per costruire questo secondo luogo, al centro A , coll'asse trasverso $CB = \frac{8a}{5}$, e col parametro $= 8a$ si descrivano (Fig. 95.) le due opposte iperbole BN , CP , le quali, prese le assisse z dal punto D lontano dal centro A la quantità a verso il vertice C , saranno il luogo dell'equazione $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$.

Per

Per combinare rettamente questo col primo luogo $ax=zz$, è necessario, che l'origine, e l'asse dell'incognita x sia comune ad ambi i luoghi, e però al vertice D , col parametro $=a$, sull'asse DO , parallelo all'asse conjugato delle opposte iperbole, si descriva la parabola della prima equazione $ax=zz$, incontrerà essa le due iperbole nei quattro punti M, N, R, P , dai quali condotte all'asse DO le perpendicolari MI, NO, RP, PS , faranno esse i quattro valori di z , cioè le quattro radici dell'equazione $z^4 - 5aazz + 2a^1z + 3a^1 = 0$; positive le due IM, ON , e negative le altre RP, SP ; imperciocchè, se la z dell'equazione determinata (vale a dire ciascuna delle radici di essa) deve essere comune ad ambedue i luoghi, non può esserlo, se non ne' punti M, N, R, P , ne quali si tagliano questi due luoghi; adunque le rette MI, NO, RP, SP , esprimenti le z , sono le quattro radici dell'equazione determinata proposta

$$z^4 - 5aazz + 2a^1z + 3a^1 = 0.$$

292. E' manifestò, che quanto più si accostano i punti M, N , tanto minore è la differenza delle ordinate IM, ON per modo, che quando un punto cade nell'altro, (nel qual caso le curve si toccano, e non si tagliano) le due ordinate sono eguali, cioè due eguali radici avrà l'equazione; che se poi si tagliano le curve nel vertice, in cui è nulla l'ordinata, avrà l'equazione una radice eguale al zero; e se finalmente nè si tagliano, nè si toc-

cano

cano in alcun punto le due curve, le radici della proposta equazione sono immaginarie.

193. Nell'introdurre la nuova incognita fa d'uopo però l'avvertire di farlo in modo, che i due luoghi sieno i più semplici relativamente al grado della proposta equazione; cioè a dire, che se l'equazione è del terzo o quarto grado, i due luoghi sieno del secondo, vale a dire sezioni coniche, e sarà opportuno, a parere di alcuni, che uno sia sempre al circolo, come curva più semplice; ma si rifletta, che determinando un luogo al circolo, l'equazione all'altro luogo può riuscire in moltissimi casi assai imbarazzata, e però in tali casi preferirei al circolo quell'altro qualunque luogo, che mi desse maggiore semplicità. Se l'equazione è del quinto o del sesto, i due luoghi sieno uno del secondo e l'altro del terzo; se è del settimo, o ottavo, siano uno del secondo, ed uno del quarto, o due del terzo, riducendo però prima quelle dell'ottavo al nono, e così di mano in mano proporzionalmente.

Presa adunque l'equazione del quarto grado

$$x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^2f = 0.$$

Si faccia la equazione

I. $xx + bx = ay$, e quadrando sarà $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$, e però $x^4 + 2bx^3 = aayy - bbxx$. Nella proposta si sostituisca questo valore in luogo di $x^4 + 2bx^3$, e nascerà quest'altra equazione

II. $yy - \frac{bbxx}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0$, e mettendo nel secondo

condo termine di questa, lasciando intatto il terzo, il valore di xx dato dalla prima equazione, cioè $ay - bx$, nascerà la

$$\text{III. } yy - \frac{bby}{a} + \frac{b'x}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0, \text{ e sostituendo}$$

il valore di xx nel terzo termine della stessa seconda equazione, lasciando intatto il secondo, nascerà la

$$\text{IV. } yy - \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} - dx - af = 0, \text{ e posto in questa}$$

il valore di xx , nascerà la

$$\text{V. } yy + cy - \frac{bby}{a} - \frac{bcx}{a} + \frac{b'x}{aa} - dx - af = 0, \text{ da cui fi-$$

nalmente se si sottragga la prima ridotta al zero, cioè $xx + bx - ay = 0$, ed indi ad essa si aggiunga, nascerà nel primo caso la

$$\text{VI. } yy + cy - \frac{bby}{a} + ay - xx - bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b'x}{aa} - dx -$$

$af = 0$, e nel secondo la

$$\text{VII. } yy + cy - \frac{bby}{a} - ay + xx + bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b'x}{aa} - dx -$$

$af = 0$.

194. Egli è chiaro, che la prima equazione è un luogo alla Parabola apolloniana; per riconoscere l'altre si d'uopo servirsi delle riduzioni spiegate ai numeri 127., e 128. Con le quali troverassi, che la seconda sarà luogo alla Parabola quando sia $ac = bb$; all'Ellissi quando sia ac maggiore di bb ; ed all'Iperbola finalmente quando sia ac

mi-

inipore di bb . Che la terza sarà all'ellissi, che passa ad essere un circolo quando sia $c=a$, e retto l'angolo delle coordinate. Che la quarta sarà all'iperbola, la quale in oltre sarà equilatera, se sia $b=a$. Che la quinta sarà alla parabola. Che la sesta sarà all'iperbola equilatera. Che la settima sarà al circolo, quando sia retto l'angolo delle coordinate.

Quindi si potrà scegliere per la costruzione del problema la combinazione di que' due luoghi, che più ci torneranno a proposito.

195. Se il secondo termine della proposta equazione fosse stato negativo, averebbesi fatto $xx - bx = ay$, e le equazioni nascenti sarebbero le stesse di prima, mutando solo il segno a que' termini, ne quali la b è di potestà dispari; e se la proposta equazione fosse stata mancante del secondo termine, averebbesi preso $xx = ay$, e però, cancellando i termini dove si trova la b nell'altre equazioni, faranno esse quelle, che a questo caso competono.

196. Essendovi nelle equazioni proposte il secondo termine $\pm bx$, si prende il luogo alla parabola $xx \pm bx = ay$ piuttosto, che $xx = ay$, perchè così gli altri luoghi, che nascono, non hanno il rettangolo xy , e però sono più facili da costruirsi.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - axx + 2a' = 0$. Si moltiplichì per $x = 0$, per ridurla del quarto, onde sia $x^4 - aaxx + 2a'x = 0$; e debbasi costruire per mezzo d'una parabola, e d'un circolo.

Giacchè manca il secondo termine, si faccia $xx = ay$, luogo alla parabola; adunque sostituendo in luogo di x^4 , e di xx i valori $aayy$, ed ay , sarà $yy - ay + 2ax = 0$, a cui aggiunta la prima equazione $xx - ay = 0$, si avrà finalmente l'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo.

Col diametro $BD = \sqrt{2aa}$ si descriva il circolo $ADME$, (Fig. 96.) e si faccia $BC = a$, sarà anche l'ordinata $CA = CB = a$. Dal punto A condotta la indefinita AP parallela ad ED , e prese sopra di essa le assisse, $AP = y$, e chiamate le ordinate $PM = x$, sarà questo il luogo dell'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$. Sull'asse, AP , in cui si sono prese le y , col vertice A si descriva la parabola appolloniana $MA M$ dell'equazione $xx = ay$, taglierà essa il circolo ne' due punti A , M , dai quali condotte le ordinate, faranno esse le radici reali dell'equazione $x^4 - aaxx + 2a'x = 0$, e due immaginarie.

Ma la ordinata nel punto A è nulla, adunque una radice sarà $= 0$, come appunto deve essere, essendo

Q q

essa

essa stata introdotta con moltiplicare la equazione proposta per $x=0$, adunque sarà PM la radice reale, e negativa dell'equazione $x^4 - aax + 2a' = 0$, e le altre due immaginarie. Se avessi moltiplicata la proposta equazione non per $x=0$, ma per x eguale ad una qualunque quantità, in due punti fuori del vertice il circolo taglierebbe la parabola, uno de' quali mi darebbe la radice introdotta, l'altro quella della equazione proposta.

Ora per dimostrare, che PM è una radice dell'equazione $x^4 - aaxx + 2a'x = 0$, si consideri, che per la natura del circolo è $EO \times OD = OM^2$, ma $OM = -x - a$, $EO = y + \sqrt{2aa} - a$, ed $OD = a - y + \sqrt{2aa}$, dunque $xx + 2ax + aa = aa + 2ay - yy$; ma per l'equazione della parabola AM , è $xx = ay$, e però $\frac{x^4}{aa} = yy$, adunque sostituiti i valori di y , e di yy , e ridotta l'equazione al zero, sarà $x^4 - aaxx + 2a'x = 0$, che è appunto quella del quarto grado, di cui si volevano le radici, il che ec.

197. Se si volesse costruire l'equazione $x^4 - aaxx + 2a'x = 0$ per mezzo di due parabole, converrebbe servirsi dell'equazione ritrovata di sopra $yy - ay + 2ax = 0$, ed il luogo di questa colla parabola dell'equazione $xx = ay$ determinerebbero le radici, che si cercano.

Si descriva adunque (Fig. 97.) col parametro $= 2a$ la parabola MCA , in cui fatta $CD = \frac{1}{2}a$, ed abbassa-

ta

ta $DA = \frac{1}{2}a$, che incontrerà la parabola nel punto A , e condotta per lo punto A l'indefinita AP parallela all'asse CD , prese le assisse x dal punto A positive verso B , e negative verso P , e le ordinate $PM = y$, farà essa il luogo dell'equazione $yy - ay + 2ax = 0$, quindi col vertice A , all'asse AQ si descriva l'altra parabola MAS dell'equazione $xx = ay$; taglierà questa la prima nei punti A , ed M , ed abbassata la perpendicolare MP , darà essa la radice AP negativa dell'equazione proposta, e perchè nel punto A la perpendicolare è nulla, è pure nulla l'altra radice, come deve esserlo, essendo stata moltiplicata l'equazione proposta per $x = 0$.

Imperciocchè essendo nella parabola MCA la $CN = -x + \frac{a}{2}$, ed $NM = y - \frac{a}{2}$, farà per la proprietà di essa parabola, $\frac{aa}{4} - 2ax = yy - ay + \frac{aa}{4}$, e sostituiti i

valori di y , e di yy , dati per la prima equazione alla parabola MAS , cioè $xx = ay$, ed ordinata l'equazione, avremo finalmente $x^4 - aaxx + 2a^2x = 0$, che è l'equazione del quarto grado, di cui si volevano le radici.

198. Che se avessi voluto servirmi della parabola, e dell'iperbola equilatera, bastava sottrarre dalla detta equazione $yy - ay + 2ax = 0$ la prima equazione, $xx - ay = 0$, e sarebbe nata l'equazione $yy + 2ax - xx = 0$, che è un luogo all'iperbola equilatera, la quale

costruita mi avrebbe date, per mezzo della intersecazione colla parabola dell'equazione $xx = ay$, le radici cercate.

199. E se finalmente avessi voluto sciogliere il problema per mezzo del circolo, e dell'iperbola, avrei costruita la terza equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo, e la quarta equazione $yy + 2ax - xx = 0$, luogo all'iperbola, come si è veduto; l'intersecazione dei quali luoghi mi avrebbe date le radici cercate.

200. Ma senza moltiplicare per x l'equazione proposta $x' - aax + 2a' = 0$, si avrebbe potuto costruirla nella seguente maniera, quando però non preme d'introdurre piuttosto un luogo, che un'altro. Si faccia adunque $xx = ay$, ed in luogo di xx si ponga nell'equazione il suo valore ay , nascerà l'equazione $xy - ax + 2aa = 0$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Si taglino adunque ad angoli retti le due indefinite SR , QT , (Fig. 98.) e sieno esse gli asintoti delle due iperbole MM , mm del rettangolo costante $-2aa$, prendendo le assisse dal punto A lontano dal punto B la quantità a . Al vertice A , all'asse AR , col parametro $= a$ si descriva la parabola della prima equazione, $xx = ay$, taglierà essa l'iperbola MM nel punto M ; ed abbassata l'ordinata PM , sarà essa la radice reale, e negativa dell'equazione proposta.

In

In fatti, per la proprietà dell' iperbola MM , farà $BP \times PM = -2aa$, cioè $xy - ax = -2aa$, ma per la proprietà della parabola AM , si à $y = \frac{x^2}{a}$, adunque sostituito in vece di y il suo valore, ed ordinata l'equazione, farà $x^3 - aax + 2a^2 = 0$, che è la proposta, il che ec.

Generalmente tutte le equazioni del terzo grado si possono sempre in questo modo costruire semplicemente, senza ridurle al quarto, con una Parabola, e con una Iperbola fra gl'Asintoti.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione del quarto grado $z^4 - 5aaz + 2a^2z + 3a^3 = 0$, la quale debbasi costruire per mezzo della parabola, e del circolo. Si prenda l'equazione $ax = zz$, e fattone il quadrato, si sostituisca nell'equazione proposta in luogo di z^2 , e di zz il suo valore, e nascerà la seconda equazione $xx - 5ax + 2az + 3aa$, dalla quale sottratta primieramente, ed indi aggiunta la prima equazione $zz - ax = 0$, si avrà nel primo caso la terza equazione $xx - 4ax + 2az + 3aa - zz = 0$, e nel secondo caso la quarta $xx - 6ax + 2az + 3aa + zz = 0$, che è un luogo al circolo, e però di essa mi servo per costruire la proposta equazione del quarto grado.

Si

Si descriva adunque col raggio $=\sqrt{7aa}$ il circolo BMF , e presa dal centro C verso B (Fig. 99.) la $CL=3a$, indi dal punto L eretta al diametro la perpendicolare $LA=a$, si tiri dal punto A la retta indefinita AP parallela al diametro BF , faranno le $AP=x$, e le corrispondenti ordinate nel circolo $PM=z$; e però sarà A il vertice, ed AP l'asse della parabola dell'equazione $ax=zz$, onde descritta al vertice A , coll'asse AP , col parametro $=a$ la parabola AM , incontrerà essa il circolo in quattro punti M , dai quali condotte all'asse AP le perpendicolari PM , faranno esse le radici, due positive, e due negative dell'equazione proposta

$$z^4 - 5aazz + 2a^2z + 3a^4 = 0.$$

Ed in fatti, si prolunghi la PM in D , se fa bisogno, e sarà per la natura del circolo BMF , $BD \times DF = DM$, ma $DM = z + a$, $BD = x - 3a + \sqrt{7aa}$, e $DF = -x + 3a + \sqrt{7aa}$, adunque $zz + zaz + aa = -xx + 6ax - 2aa$; ma, per la natura della parabola AM , $ax = zz$, ed $xx = z^2$; adunque fatta la sostituzione di questi valori, ed ordinata l'equazione col paragonarla al zero, sarà $z^4 - 5aazz + 2a^2z + 3a^4 = 0$, che è la proposta; il che cc.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - 3axx + 5a^2 = 0$, che si moltiplichi per $x + 2a$, a fine di ridurla del quarto, e sarà $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^2x + 10a^2 = 0$.

Si prenda l'equazione alla parabola $xx + ax = ay$, e fatto il quadrato, sarà $x^2 + 2ax + aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione il valore dei due primi termini $x^2 + 2ax$, cioè $aayy - aaxx$, e nascerà la

II. $yy - 4xx - ax + 10aa = 0$, ed in questa sostituito in luogo di xx il suo valore $ay - ax$, nascerà la

III. $yy - 4ay + 3ax + 10aa = 0$, da cui sottratta la prima $xx + ax - ay = 0$, ed indi aggiunta, nasceranno le due equazioni, cioè la

IV. $yy - 3ay + 2ax + 10aa - xx = 0$ nel primo caso, e la

V. $yy - 5ay + 4ax + 10aa + xx = 0$ nel secondo caso: prendo il primo, e l'ultimo luogo.

Per costruire l'ultimo, si descriva il circolo OSN (Fig. 100.) del raggio $OP = \frac{1}{2}a$, e prodotto in F , onde sia $OF = 2a$, ed eretta dal punto F la perpendicolare $FC = FO = 2a$, si tiri la indefinita CQ parallela ad FP . Presa una qualunque $CQ = y$, faranno le corrispondenti ordinate negative QS, QN le x , ed il circolo il luogo della quinta equazione. Si prenda ora in FC

la $CB = \frac{1}{2}a$, e dal punto B si tiri la perpendicolare $BA = \frac{1}{4}a$, indi al vertice A , col parametro $= a$ si descriva la parabola NAM , che sarà il luogo della prima equazione, prese le affisse y sulla retta CQ . Da' punti O, N , ne' quali la parabola taglia il circolo, alzate le perpendicolari OH, NQ , faranno esse le due radici reali negative dell'equazione del quarto grado $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^2x + 10a^4 = 0$.

E perchè OH presa negativa è eguale a $2a$, che è la radice introdotta colla moltiplicazione della proposta equazione in $x + 2a$, sarà NQ la radice reale negativa dell'equazione proposta $x^4 - 3aaxx + 5a^4 = 0$, l'altre due radici immaginarie.

Imperocchè, per la natura del circolo OSL , sarà $OG \times GL = GN^2$, ma $OG = y - 2a$, $GL = 3a - y$, e $GN^2 = -2a - x$, dunque fatte le sostituzioni, sarà $xx + 4ax + 10aa + yy - 5ay = 0$; ma per l'equazione alla parabola NAM , $y = \frac{xx + ax}{a}$, ed $yy = \frac{x^4 + 2ax^3 + aaxx}{aa}$,

dunque sostituiti nell'equazione al circolo questi valori di y , ed yy , sarà finalmente

$$x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^2x + 10a^4 = 0; \text{ il che ec.}$$

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $x^4 - 4axx' - 8a^2x' + 8a^2xx + 32a^4 = 0$, e perchè è divisibile per $xx - 4ax + 4a^2$, ed il quoziente è l'equazione del quarto grado $x^4 + 4ax' + 8aaxx + 8a^2x + 8a^4 = 0$, si costruisca questa.

Presa adunque l'equazione $xx + 2ax = ay$, e fatto il quadrato $x^4 + 4ax' + 4aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione in luogo di $x^4 + 4ax'$ il valore $aayy - 4aaxx$, e viene la

II. $yy + 4xx + 8ax + 8aa = 0$, in questa si ponga il valore di xx , cioè $ay - 2ax$, e viene la

III. $yy + 4ay + 8aa = 0$, da cui sottraggasi la prima, e nasce la

IV. $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$, ed aggiunta finalmente la prima alla terza, sarà la

V. $yy + 3ay + 8aa + xx + 2ax = 0$.

Il secondo luogo è immaginario; il terzo è equazione determinata, ma le sue radici sono immaginarie; il quinto luogo è pure immaginario; il quarto luogo poi è reale, ed è un'iperbola equilatera.

All'asse $DC = \sqrt{11aa}$ si descrivano col centro A l'iperbole CR , DG ; (*Fig. 101.*) si prenda $AB = a$, e si erigga la perpendicolare indefinita BM , in cui si pren-

da $BM = 5a$, e dal punto M conducafì la MQ parallela all'affe DC ; prefe dal punto M fopra MQ le x , faranno le corrifpondenti QR , o fia MT le y , e la curva il luogo dell'equazione quarta $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$. Prodotta QM in N , e fatta $MN = a$, e condotta NA al centro dell'iperbola, fi prenda $NO = a$, ed al vertice O , col parametro $= a$, all'affe OS fi defcriua la parabola OM , che pafferà per lo punto M , indi prefe fulla MT le y , e le corrifpondenti ordinate $TL = x$, farà effa il luogo della prima equazione $xx + 2ax = ay$; ma poichè quefti due luoghi non fi poffono mai incontrare, come è chiaro, faranno immaginarie tutte quattro le radici dell'equazione

$$x^4 + 4ax^3 + 8a^2xx + 8a^3x + 8a^4 = 0,$$

quindi la propofita

$$x^6 - 4aax^4 - 8a^2x^3 + 8a^3xx + 32a^4 = 0$$

fi trova avere due fole radici reali tra loro eguali, cioè ciafcheduna $= 2a$.

201. Ma fe in oltre fi voleffero coftituire le equazioni del terzo, e quarto grado per mezzo non folo di luoghi conici, ma di luoghi conici già dati, o fimili ai dati, il che può avere ufo, quando una delle fezioni coniche fia data nel problema, fi potrà farlo nel fequente modo, intendendo però, che le equazioni del

terzo

terzo grado si riducano al quarto, e queste si liberino dal secondo termine, se lo avessero.

Devo però avvertire, che quantunque per lo più sia bene il determinarsi a quel dato luogo conico, che già entra nel problema; tuttavia si deve avere la mira, che l'uso di esso luogo dato non si opponga alla maggiore semplicità della costruzione, nel qual caso, non curato il luogo già dato, tornerà meglio introdurne due nuovi.

Volendosi adunque servire di luoghi dati, o simili a' dati, l'artificio consiste nell'introdurre nelle equazioni due indeterminate, da fissarsi poi nel fine a misura del bisogno. Sia adunque l'equazione

$$z^2 + abzz - aacz + a^2 d = 0.$$

Si ponga $z = \frac{ax}{f}$, per introdurre la prima indetermina-

ta f ; fatte le sostituzioni, sarà

$$x^2 + \frac{bfx}{a} - \frac{f^2 cx}{a} + \frac{f^2 d}{a} = 0.$$

Si prenda il primo luogo

I. $xx - fy = 0$, e posti i valori di xx , e di x^2 , nascerà il secondo luogo

II. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{fd}{a} = 0$, a questo si aggiunga il primo, ed avremo il

III. $xx - fy + yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{fd}{a} = 0$. Per introdurre

la seconda indeterminata g , si moltiplichi il primo luogo per $\underline{g}$, ed avremo $\underline{gxx} - \underline{gfy} = 0$, che aggiunto al secondo ci dà il

$$\text{IV. } yy + \frac{b}{a}fy - \frac{f}{a}cx + \frac{ff}{a}d + \underline{gxx} - \underline{gfy} = 0, \text{ e sottratto}$$

$$\text{V. } yy + \frac{b}{a}fy - \frac{f}{a}cx + \frac{ff}{a}d + \underline{gfy} - \underline{gxx} = 0.$$

Il primo, e secondo luogo sono alla Parabola, il terzo al Circolo, quando le coordinate facciano angolo retto, il quarto all'Ellissi, ed il quinto all'Iperbola.

Debbasi ora, per esempio, costruire l'equazione per mezzo d'un circolo dato, e d'un'iperbola data. Si prenda adunque il terzo, e quinto luogo; e quanto al terzo luogo, col raggio $CG = \frac{f}{2a} \sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}$

si descriva il circolo EMG , (Fig. 102.) e presa $CD = \frac{f}{2a}$, si abbassi dal punto D la perpendicolare

$$DA = \frac{af - bf}{2a}, \text{ (supposta } a \text{ maggiore di } b, \text{ e si alzi}$$

dalla parte opposta, quando sia b maggiore di a) indi dal punto A sulla retta AP parallela a DG prese le assisse $AP = x$, faranno le corrispondenti PM le y , ed il circolo EMG il luogo dell'equazione

$$xx - fy + yy + \frac{b}{a}fy - \frac{f}{a}cx + \frac{ff}{a}d = 0.$$

Rispet-

Rispetto al quinto luogo; per costruirlo, e combinarlo col circolo, prodotta per lo punto A , origine delle x , la retta DA in H in modo, che sia $AH = \frac{gf+bf}{2a}$, e condotte per i punti A, H le paral-

lele AP, HK alla DG ; si prenda sulla HK verso il punto L la porzione $HL = \frac{fc}{2g}$, e col centro I , coll'

asse trasverso $LK = \frac{f}{g^2} \sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^2 - 2abgg}$

(supposto però $cc + 4gd$ maggiore di $bbg + g^2 + 2bgg$) si descriva l'iperbola KM del parametro

$KO = \frac{f}{aa} \sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^2 - 2abgg}$, in cui es-

sendo $AP = x$, $PM = y$, farà essa il luogo della quinta equazione. Dai punti M , nei quali essa taglia il circolo, condotte le perpendicolari MP, MP alla AP ; saranno le AP, AP le radici dell'equazione

$$x^4 + \frac{bff}{a}x^2 - \frac{cf^2}{a}x + \frac{df^2}{a} = 0.$$

E poichè si è fatta $z = \frac{ax}{f}$, data la x , è pure data la z , vale a dire le radici dell'equazione da prima proposta z^4 ec.

Ma se avessi supposto $cc + 4dg$ minore di $bbg + 2bgg + g^2$,

il luogo della quinta equazione sarebbe l'iperbola MM ,
(Fig. 103.) il di cui semiasse trasverso

$$= \frac{f}{2a} \sqrt{\frac{bbg + 2bfg + g^2 - acc - 4agd}{g}}, \text{ il semiasse conju-}$$

$$\text{gato } IK = \frac{f}{2g} \sqrt{\frac{bbg + 2bfg + g^2 - acc - 4agd}{a}}, \text{ ed il}$$

parametro KO dell'asse conjugato

$$= \frac{f}{a} \sqrt{\frac{bbg + 2bfg + g^2 - acc - 4agd}{a}}.$$

Ciò posto, per soddisfare alla prima condizione, che il circolo sia dato; si ponga, che sia il raggio di esso $= r$, adunque dovrà essere

$$r = \frac{f}{2a} \sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}, \text{ dalla quale equazione}$$

si cavi il valore della indeterminata assunta

$$f = \frac{2ar}{\sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}}; \text{ ed il descritto circolo}$$

EGM sarà quello del raggio $= r$.

Per soddisfare alla seconda condizione, che l'iperbola sia data: sia $2t$ il dato asse trasverso, e p il parametro, sarà adunque $2t = \frac{f}{g} \sqrt{cc + 4gd - \frac{bbg - g^2 - 2bfg}{a}}$,

$$\text{e però } f = \frac{2gt}{\sqrt{cc + 4gd - \frac{bbg - g^2 - 2bfg}{a}}}; \text{ ma è pu-}$$

re $p = \frac{f}{a} \sqrt{cc + 4dg - bbg - g^2 - 2bgg}$, adunque posto

in luogo di f il valore ritrovato, sarà $p = \frac{2gr}{a}$, da cui si

ricava il valore di $g = \frac{ap}{2r}$, e posto questo in luogo di

g nel valore di f , sarà

$$f = \frac{2ap^2}{\sqrt{4tcc + 8apd - 2bbp - \frac{aa^2p^2}{2r^2} - 2abpp}}; \text{ quindi il}$$

diametro trasverso, ed il parametro della descritta iper-
bola (Fig. 102.) saranno appunto le date linee $2r$, e p ,
e ciò riguardo al primo caso.

Rispetto poi al secondo, cioè quando $cc + 4dg$ è
minore di $bbg + g^2 + 2bgg$, si chiami l'asse conjugato

della iperbola data $LK = 2u$, ed il suo parametro $= q$,

$$\text{sarà } 2u = \frac{f}{g} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^2 - cc - 4dg}{a}},$$

$$\text{e } q = \frac{f}{a} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^2 - cc - 4dg}{a}}; \text{ quindi si ritro-}$$

verà, operando come sopra, $g = \frac{aq}{2u}$,

$$\text{ed } f = \frac{2aqu}{\sqrt{2bbuq + 2baqq + \frac{aaq^2}{2u} - 4ccu - 8aduq}};$$

e l'iperbola avrà per asse conjugato $LK=2u$, e per parametro dello stesso asse, $KO=q$. Ed il problema sarà costruito così per mezzo d'un circolo dato, e d'una data iperbola.

Che se non sarà data l'iperbola, ma dovrà essere simile ad una data, vale a dire, che l'asse sia al suo parametro in data ragione, per esempio di m ad n , poichè si è veduto di sopra, che la ragione dell'asse al parametro è quella di a alla g ; basterà fare l'analogia $a, g :: m, n$ per indi avere il valore di $g = \frac{an}{m}$.

Usando dello stesso metodo si potrà costruire l'equazione col mezzo di altri dati luoghi, o simili ai dati; come, per esempio, col mezzo del suddetto dato circolo, e di una data ellissi, o simile ad una data, prendendo in vece della quinta, la quarta equazione ec.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione $x^4 - ax^3 - aaxx - a^2x - 2a^4 = 0$, e si voglia costruire per mezzo d'una parabola del parametro $=a$, e con una ellissi simile ad una data, il di cui asse trasverso sia al parametro nella data ragione di b a d .

Tolgasi da essa il secondo termine colla sostituzione
di

di $x = z + \frac{a}{z}$, e sarà la trasformata

$$z^4 - \frac{11a^2zz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0.$$

Pongo $z = \frac{ay}{f}$, per introdurre la prima indeterminata

$$f, \text{ e sarà } y^4 - \frac{11ffyy}{8} - \frac{13f^3y}{8} - \frac{595f^4}{256} = 0. \text{ Preso per}$$

primo il luogo $yy = fq$ alla parabola, e fatta la sostituzione de' valori di y^4 , e di yy , avremo il secondo luogo pure alla parabola $qq - \frac{11fq}{8} - \frac{13fy}{8} - \frac{595ff}{256} = 0$;

ma poichè la parabola data è del parametro $= a$, potremo servirci del primo luogo prendendo $f = a$, e però sarà esso $yy = aq$, e sostituendo il valore di f nel secondo (giacchè non essendo data la ellissi, la prima indeterminata f riguardo alla medesima è arbitraria), sarà esso $qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} = 0$.

Si moltiplichi ora il primo luogo per $\frac{g}{a}$ a fine d'introdurre la seconda indeterminata g , e sarà $\frac{yyy}{a} - \frac{agq}{a} = 0$,

il quale aggiunto al secondo darà il terzo luogo

$$qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} + \frac{yyy}{a} - \frac{agq}{a} = 0, \text{ all'ellissi.}$$

Per costruire questo terzo luogo, s'avrebbe a descri-

vere

vere l'ellissi MSQ (Fig. 104.) coll'asse trasverso

$$SQ = 2 \sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}, \text{ e col para-}$$

$$\text{metro} = \frac{2a}{g} \sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}; \text{ ma}$$

poichè in essa la ragione dell'asse al parametro è quella di g ad a , e deve essere, per la condizione data, quella di b a d , sarà $g = \frac{ab}{a}$; e però sostituito in luogo di g

$$\text{il suo valore, si descriverà l'ellissi } MSQ \text{ coll'asse tras-}$$

$$\text{verso} = \frac{1}{8d} \sqrt{\frac{716aabbdd + 176aabbdd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}, \text{ e}$$

$$\text{col parametro} = \frac{1}{8b} \sqrt{\frac{716aabbdd + 176aabbdd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}.$$

Ora dal centro C presa $CA = \frac{11ad + 8ab}{16b}$,
ed abbassata dal punto A la perpendicolare $AB = \frac{13d}{16b}$,

se dal punto B si tirerà la BR parallela all'asse SQ , presa una qualunque $BR = q$, farà $RM = y$, e l'ellissi il luogo della terza equazione

$$qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa + gyy - agq}{256} = 0.$$

Al vertice B , all'asse BR , col parametro $= a$ si descriva la parabola MBM dell'equazione $yy = aq$, taglierà essa l'ellissi ne' due punti M, M ; dai quali condotte

le perpendicolari RM , RM alla retta BR , saranno esse le due radici reali della proposta equazione.

Imperciocchè, per la proprietà dell'ellissi, sarà

$SP \times PQ$ a PM^2 , come l'asse trasverso al parametro, ma $CP = q - \frac{11ad - 8ab}{16d}$, e però

$$SP = \sqrt[16d]{716aabd + 176aadb + 64aab^3 + 169aad^3} + q - \frac{11ad - 8ab}{16d}, \text{ e}$$

$$PQ = \sqrt[16d]{716aabd + 176aadb + 64aab^3 + 169aad^3} - q + \frac{11ad + 8ab}{16d}, \text{ ed inoltre } PM = y - \frac{13ad}{16b}, \text{ adunque avremo}$$

$$\text{l'analogia } \frac{716aabd + 176aadb + 64aab^3 + 169aad^3}{156b^2d} = \frac{qq + \frac{11adq + 8abq}{8d} - \frac{121aadd - 176aabd - 64aabb}{156dd} - \frac{13ady}{8b}}{yy - \frac{13ady}{8b}}$$

$$\frac{169aadd}{256bb} :: 1, \frac{1}{d} :: b, d; \text{ e però l'equazione}$$

$$\frac{595aabd}{256bd} - dq + \frac{11adq + 8abq}{8} = byy - \frac{13ady}{8}, \text{ ma per}$$

l'equazione alla parabola, è $yy = aq$; sostituiti adunque in luogo di q , e di qq i loro valori $\frac{yy}{a}$, $\frac{y^2}{a^2}$, ed ordinata l'equazione, e dividendo per d , e moltiplicando i termini per aa , farà $y^4 - \frac{11a^2yy}{8} - \frac{13a^2y}{8} - \frac{595a^2}{256} = 0$.

Ma per la sostituzione fatta di $z = ay$ abbiamo $z = y$ (essendo $f = a$), dunque sarà $z^4 - \frac{11aaz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0$, che è l'equazione ridotta, alle radici della quale aggiunto $\frac{a}{4}$, faranno esse le radici della proposta

$$x^4 - ax^3 - aaxx - a^3x - 2a^4 = 0, \text{ il che ec.}$$

Era superfluo il fare tutta questa fatica sopra un esempio, che di natura sua è piano, e non solido, essendo la proposta equazione divisibile per $x + a$, e per $x - 2a$; ma servirà per fare vedere l'uso del metodo.

202. Le equazioni del quinto, e sesto grado si costruiranno per mezzo di due luoghi, cioè uno del terzo grado, e l'altro conico.

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $x^4 + ax^3 - a^4 = 0$. Prendo la parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $xyy + axy - a^4 = 0$. Nulla fin'ora si è parlato della costruzione de' luoghi superiori alle sezioni coniche, essendomi riservata a trattarne nel seguente Capo, perchè così necessariamente esige l'ordine; per

ora

ora adunque si suppongano, e però descritta la curva de' tre rami MCH , FE , PNO (Fig. 105.) dell'equazione $xyy + xxy - a^2 = 0$, in cui le AB sono le x , e le BC le y ; al vertice A , asse AL , parametro $= a$ si descriva la parabola apolloniana RAC , incontrerà essa il ramo MCH nel punto C , e però abbassata da perpendicolare CB , sarà $AB = x$ la radice positiva, e reale dell'equazione proposta, e l'altre quattro immaginarie. Volendosi costruire la medesima equazione per mezzo d'un'iperbola fra gl'asintoti, e partimenti per un luogo del terzo grado, si faccia $xy = aa$, sostituendo sarà $x^3 + aax - ayy = 0$ (Fig. 106.)

All'asse AB , con le assisse $AB = x$, e le ordinate $BC = y$ (Fig. 106.) si descriva la curva CAN , che è il luogo dell'equazione $x^3 + aax - ayy = 0$, e fra gl'asintoti AB , AG si descriva l'iperbola MCH dell'equazione $xy = aa$, prese le x sul medesimo asse AB ; taglierà essa la prima curva nel punto C , da cui abbassata la perpendicolare CB , sarà $AB = x$ la radice dell'equazione proposta, il che cc.

Moltiplico ora la medesima equazione per $x = 0$, a fine di ridurla del sesto grado, ed è $x^6 + aax^4 - a^2x^2 = 0$. Prendo il medesimo luogo alla parabola $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $y^3 + ayy - aax = 0$, che è la curva $NBAM$ (Fig. 107.), prese le assisse $AP = y$, e le $PM = x$.

Col

Col vertice A , all'asse AP , col parametro $=a$ descritta la parabola apolloniana AM dell'equazione $xx = ay$, taglierà essa la detta curva nel vertice A , il quale ci dà una radice $x = 0$, che è appunto la introdotta nell'equazione, la taglierà in oltre nel punto M , ed abbassata la perpendicolare MP , sarà essa l'altra radice dell'equazione $x^4 - ax^2 = 0$.

Volendosi servire della parabola prima cubica $x^3 = aay$, si faccia la sostituzione nell'equazione $x^6 + aax^4 - a^2x = 0$, e nasce il secondo luogo $yy + xy - ax = 0$ all'iperbola apolloniana.

Sulla indefinita AP (Fig. 108.) si descriva il triangolo ACP rettangolo in C , (supposto, che l'angolo delle coordinate dell'equazione $yy + xy - ax = 0$ si voglia retto) e sia $AC, CP :: 2, 1$; al centro A , col semidiametro trasverso $AF = a\sqrt{5}$, col parametro $= 2a$ si descriva l'iperbola apolloniana FM , la quale, condotta dal punto F l'indefinita FQ parallela ad AC , e presa una qualunque $FQ = x$, è QM parallela a CP eguale ad y , sarà il luogo dell'equazione $yy + xy - ax = 0$. All'asse FL parallelo a PC si descriva la parabola cubica NFM dell'equazione $x^3 = aay$; taglierà essa l'iperbola nel vertice F , che ci dà la radice $x = 0$, e nel punto M , dal quale abbassata la perpendicolare MQ sopra FQ , determinerà essa l'altra radice FQ dell'equazione $x^6 + aax^4 - a^2x = 0$.

Se

Se la nostra equazione avesse avuto il secondo termine, volendosi servire della parabola cubica ci sarebbe nato un secondo luogo del terzo grado, quindi o s'avrebbe dovuto fare sparire esso secondo termine, o servirsi d'altro luogo.

ESEMPIO VII.

Sia l'equazione del sesto grado $x^6 + ax^4 + a^2x^2 - a^3 = 0$. Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx = ay$. Fatte le sostituzioni, sarà il secondo luogo $y^3 + xyy + aax + a^2 = 0$, che è la curva CBM (Fig. 109.), prese le assisse $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice A , col parametro $= a$, all'asse AP si descriva la parabola MAM dell'equazione $xx = ay$, taglierà essa la detta curva ne' due punti M, M , dai quali condotte all'asse le perpendicolari MP, MP , faranno esse le due radici, una positiva, e l'altra negativa dell'equazione proposta $x^6 + ax^4 + a^2x^2 - a^3 = 0$, e le altre quattro immaginarie.

203. Le equazioni del settimo grado si costruiranno per mezzo di due luoghi del terzo, o pure con uno del secondo, ed uno del quarto, ma poichè moltiplicandole per l'incognita si riducono all'ottavo, e quelle dell'ottavo similmente si costruiscono con un luogo

luogo del secondo, e l'altro del quarto, mi accontenterò di dare un' esempio di quelle dell'ottavo.

ESEMPIO VIII.

Sia l'equazione dell'ottavo grado $x^8 + ax^7 + a^2x^6 - a^3 = 0$. Presa l'equazione alla parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $y^4 + xy^3 + axyy - a^4 = 0$, che è la curva $GBF CMN$, (Fig. 110.) prese le assisse $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice A , parametro $= a$, asse AP si descriva la parabola apolloniana MAN dell'equazione $xx = ay$, incontrerà essa la detta curva ne' punti M, N dai quali condotte le perpendicolari MP, NQ all'asse, saranno esse le due radici reali, l'una positiva, e l'altra negativa della proposta equazione, e le altre sei immaginarie.

204. Qui si deve avvertire, che le equazioni del nono grado, siccome quelle dell'ottavo ridotte al nono, col moltiplicarle per l'incognita, si potranno sempre costruire per mezzo di due luoghi del terzo grado, facendo però sparire il secondo termine, quando lo avessero.

Così generalmente le equazioni del decimo grado si potranno costruire per mezzo di un luogo del terzo, e di uno del quarto, e similmente quelle dell'undecimo,

mo, e duodecimo, avvertendo però di ridurre quelle dell'undecimo al duodecimo col moltiplicarle per l'incognita, e di fare svanire dalle equazioni del duodecimo grado il secondo termine, quando lo abbiano; e proporzionalmente s'intenda delle equazioni di grado superiore.

205. Un'altra maniera di costruire le equazioni di qualunque grado può essere per mezzo d'un luogo dello stesso grado dell'equazione proposta, e d'una linea retta nel seguente modo.

Sia l'equazione del quinto grado

$$x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx^2 + a^2cx - a^2f = 0.$$

Trasportato dall'altra parte l'ultimo termine a^2f , e posto uno dei divisori lineari dell'ultimo termine, per esempio, $f = z$, dividasi l'equazione per a^2 , onde avremo

$$z = \frac{x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx^2 + a^2cx}{a^2}.$$

Sull'indefinita BQ , dal punto fisso B prendendo le x , (Fig. 111.) si descriva la curva $BMDRNLFC$ di quest'ultima equazione $z = \frac{x^5}{a^2}$ cc., faranno le ordinate

PM , SR cc. eguali a z , e però condotta dal punto B la retta $BA = f$, parallela alle ordinate PM , SR , e per lo punto A la indefinita KC d'ambe le parti, e parallela a BQ ; dai punti, nei quali essa taglia la curva, abbassate le perpendicolari MP , RS , CQ , determine-

T t

ranno

ranno esse le affisse BP , BS , BQ , che sono le radici dell'equazione proposta; intendendo le positive da B verso Q , e le negative dalla parte opposta.

Se la retta AC toccherà la curva in un punto, la corrispondente affissa x esprimerà due radici eguali; e se in nessun punto la incontrerà, faranno tutte le radici immaginarie.

Se l'ultimo termine avesse avuto il segno positivo, s'avrebbe fatto $z = -f$, e però s'avrebbe presa $BA = -f$, cioè al disotto del punto B nel senso dei negativi.

206. Può servire questa maniera per verificare le costruzioni, che si fanno con la combinazione di due curve, confrontando il numero delle radici reali, immaginarie, positive, e negative ritrovate con quelle, e con questa.

PROBLEMA I.

207. *Ritrovare tra due date quantità, quante medie geometricamente proporzionali si vogliano.*

Sieno le date quantità a , b . Chiamo x la prima delle medie proporzionali, e formo la progressione geometrica a , x , $\frac{xx}{a}$, $\frac{x^3}{aa}$, $\frac{x^4}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^4}$ cc.

Si

Se si vogliano due medie proporzionali, il quarto termine della progressione dovrà essere b , e però avremo l'equazione $x^4 = aab$: per costruirla colla parabola, e col circolo, la riduco al quarto grado moltiplicandola per $x=0$, ed è $x^4 - aabx = 0$; preso il luogo alla parabola $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $yy - bx = 0$, pure alla parabola, da cui sottraendo il primo, nasce il terzo $yy - bx - xx + ay = 0$, all'iperbola, ed aggiunto il primo al secondo, sarà finalmente $yy - bx + xx - ay = 0$, luogo al circolo, supposto retto l'angolo delle coordinate.

Col raggio $CG = \sqrt{\frac{aa + bb}{2}}$ si descriva il circolo

OMA (Fig. 112.), e presa $CB = \frac{1}{2}a$, si abbassi la perpendicolare $BA = \frac{1}{2}b$, la quale incontrerà il circolo nel punto A , da cui condotta la AQ parallela al diametro OG , e presa una qualunque porzione $AQ = y$, sarà $QM = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione $yy - bx + xx - ay = 0$. Al vertice A , asse AQ , parametro $= a$ si descriva la parabola $xx = ay$, incontrerà essa il circolo nel punto M , da cui abbassata la perpendicolare MQ , sarà essa la radice dell'equazione proposta; giacchè il vertice della parabola, essendo nella periferia del circolo, mi darà l'altra radice $x = 0$ da me introdotta; le altre due sono immaginarie.

Presa la prima, e la seconda equazione si costrui-

rà il problema per mezzo di due parabole apolloniane ; presa la prima , e la terza , si costruirà il problema per mezzo della parabola , e dell' iperbola riferita ai diametri .

208. Senza moltiplicare l'equazione $x' - aab = 0$ per $x = 0$, si poteva costruire con la parabola , e l' iperbola fra gl' asintoti , poichè preso il luogo $xx = ay$, e fatta la sostituzione , nasce $xy = ab$.

Fra gl' asintoti NN , QQ (Fig. 113.) si descriva l' iperbola MM del rettangolo costante ab , e sieno AP le y , PM le x ; all' asse AP , col vertice A , parametro $= a$ si descriva la parabola AM , dal punto M , in cui taglia l' iperbola , abbassata l' ordinata MP , farà essa la radice dell' equazione proposta .

Ritrovata la prima delle due medie proporzionali , si à anche la seconda eguale alla assissa $AP = y = \frac{xx}{a}$.

209. Per ritrovare tre medie proporzionali il problema è piano , perchè ritrovata geometricamente quella di mezzo , che sia per esempio m , la media fra a , ed m farà la prima delle tre , e la media fra m , e b farà la terza .

210. Debbanfi ritrovare quattro medie proporzionali , adunque dovrà essere b il sesto termine della progressione , e però si avrà l' equazione $x' = a \cdot b$.

Pren-

Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo $xyy - aab = 0$, che è l'iperboloide del terzo grado. E però fra gl'asintoti QQ , RR descrivasi l'iperboloide MN , mn dell'equazione $xyy = aab$, (Fig. 114.) prese le assisse $AP = y$, e le $PM = x$. Ora descritta al diametro AQ , vertice A la parabola dell'equazione $xx = ay$, e dal punto M , in cui incontra l'iperboloide, abbassata l'ordinata MP , farà essa la radice dell'equazione $x^3 - a^2b = 0$, e la prima delle medie proporzionali, che si cercano, per mezzo della quale si trovano le altre.

211. Anche per mezzo dell'iperbola apolloniana, fra gl'asintoti, e della seconda parabola cubica si può costruire il problema.

Si faccia adunque $aa = xy$, luogo all'iperbola suddetta, e sostituito in luogo di a^2 il valore xyy , nasce il luogo $x^3 = byy$, seconda parabola cubica.

All'asse AQ (Fig. 115.) si descriva la seconda parabola cubica RAN , in cui le AQ sono le x , e le QN le y ; e fra gl'asintoti ST , MQ descritta l'iperbola NN , ed abbassata dal punto N , in cui incontra la parabola, la ordinata NQ ; farà AQ la radice dell'equazione proposta, cioè la prima delle quattro medie proporzionali.

212. Per ritrovare cinque medie proporzionali il

pro-

problema non è se non cubico, imperciocchè ritrovata quella di mezzo geometricamente, che sia per esempio m , per avere le due medie fra a , ed m il problema è cubico, come si è veduto.

Per poca attenzione, che si usi, è facile a vedere, che il problema di ritrovare sei medie proporzionali si costruirà, o con un luogo del secondo, ed uno del quarto grado, o con due del terzo; ma per averne sette, ritrovata quella di mezzo, il problema si riduce a cercarne tre, e così discorrendo si vada di numero maggiore.

PROBLEMA II.

213. *Date le due corde BA, DC del circolo ABCD, (Fig. 116.) che partono dall'estremità del diametro BD, e data la terza corda AC, si dimanda il diametro BD del circolo.*

Si conduca la corda BC, e si chiami $AB=a$, $AC=b$, $DC=c$, il diametro $BD=x$, e si abbassi la perpendicolare BM sulla corda AC. Poichè l'angolo BCD nel semicircolo è retto, sarà $BC=\sqrt{xx-cc}$, e perchè gli angoli BAC, BDC insistono al medesimo arco BC, e di più gl'angoli M, e BCD sono retti, faranno simili i due triangoli BCD, BAM, quindi

di farà $AM = \frac{ac}{x}$; ma per la decimaterza del secondo

d'Euclide, è $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} - 2CAM$, adunque farà l'equazione $xx - cc = aa + bb - \frac{2abc}{x}$, cioè

$$x^3 - ccx - aax - bbx + 2abc = 0.$$

La moltiplico per x , a fine di ridurla del quarto grado, e così costruirla per mezzo della parabola, e del circolo; ed è $x^4 - ccxx - aaxx - bbxx + 2abx = 0$.

Preso adunque il luogo alla parabola, che abbia per parametro la minore delle tre corde, che sia per esempio c , cioè presa $xx = cy$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $yy - \frac{ccy}{c} - \frac{aay}{c} - \frac{bby}{c} + \frac{2abx}{c} = 0$;

che è pure alla parabola, a cui aggiunta la prima equazione $xx - cy = 0$, avremo finalmente il luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto,

$$yy - \frac{2ccy}{c} - \frac{aay}{c} - \frac{bby}{c} + \frac{2abx}{c} + xx = 0.$$

Al raggio $AC = \sqrt{\frac{aabb + ccmm}{c}}$ (facendo per brevità $m = \frac{2cc + aa + bb}{2c}$) si descriva il circolo $AMBP$, e presa (Fig. 117.) $CD = m$, si erigga dal punto D la perpendicolare $DE = \frac{ab}{c}$, che terminerà nella perife-

ria del circolo nel punto E , e condotta la EQ indefinita parallela al diametro AB , presa sopra di essa una qualunque $EL=y$, sarà l'ordinata corrispondente $LM=x$, ed il circolo il luogo dell'equazione. Al vertice E , asse EQ , parametro $=c$ si descriva la parabola dell'equazione $xx=cy$; taglierà essa il circolo col vertice nel punto E , che mi dà la radice $x=0$ da me introdotta. Lo taglierà in oltre ne' tre punti M, N, P ; da' quali abbassate alla retta EQ le perpendicolari ML, NR, PQ , saranno esse le tre radici dell'equazione $x'-ccx-aax-bbx+2abx=0$, due positive, ed una negativa. La prima positiva ML non serve per questo problema; imperciocchè, supposta $y=c$, sarà nella parabola $x=c$, e nel circolo

$$x = -\frac{ab}{c} + \sqrt{\frac{aabb+bb+aa+cc}{cc}}, \text{ ma questo valore di } x$$

relativamente al circolo è maggiore di c , se le due corde a, b non sono eguali tra loro, ed è eguale alla c , se le due corde a, b sono eguali, quindi il punto nella parabola, che corrisponde all'assisa $=c$, o cade in M , o cade dentro del circolo; adunque ML , o è minore di c , o al più ad essa eguale, e però necessariamente minore di ciascuna delle corde a, b , ed in conseguenza non potrà essere diametro del circolo.

La seconda radice positiva RN ci somministra il

ricercato diametro; la negativa QP ci fornisce il diametro per un'altro caso, cioè quando le due corde, che terminano al diametro, sieno condotte dalla medesima parte, come nella *Fig. 118*. Imperciocchè, fatte le stesse cose di sopra, si conduca in oltre la corda AD ; essendo retto l'angolo DAB , saranno i due DAC , MAB eguali ad un retto, ma sono pure eguali ad un retto i due MAB , MBA , adunque $MBA = DAC = CBD$, perchè insistente sul medesimo arco DC ; quindi simili i due triangoli CBD , MBA , e però $MA = \frac{ac}{x}$, ma per la duodecima del secondo

d'Euclide $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 + 2CAM$; adunque sarà l'equazione $xx - cc = bb + aa + \frac{2abc}{x}$, cioè $x^2 - ccx - bbx -$

$max - 2abc = 0$, la di cui costruzione è la stessa dell'antecedente, a riserva, che per essere ora negativo l'ultimo termine, si dovrà condurre DE (*Fig. 117.*) in senso negativo, per lo che l'asse della parabola sarà al di sotto del diametro del circolo, e le due radici positive nel primo caso sono negative in questo, e la negativa diviene positiva.

E perchè manca nell'una, e nell'altra equazione il secondo termine, ne viene, che le due radici positive nel primo caso sono eguali alla negativa, e la positiva nel secondo è eguale alle due negative, onde

V u

fi

si scopre, che la prima delle tre radici, la quale non dà soluzione alcuna del problema, ad esso però in certo modo appartiene in quanto, che è la differenza de' due diametri.

PROBLEMA III.

214. Dato il rettangolo ACDB, ritrovare nel lato prodotto AC (Fig. 119.) il punto E tale, che condotta dall'angolo B la retta BE, sia l'intercetta EF eguale ad una data retta linea c.

Quando in luogo del rettangolo ABDC, sia dato un quadrato, il problema è piano, ed è stato sciolto nel Capo IV. num. 176., ma supposto ABDC rettangolo, muta natura, ed è solido. Chiamata pertanto $AB=a$, $BD=b$, $DF=x$, e ripetuto lo stesso discorso del citato luogo, si à l'equazione del quarto grado

$$x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2abbx + aabb = 0.$$

Per costruirla con un'iperbola fra gl'asintoti, e con il circolo, pongo $ab=zx$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo al circolo

$$xx - 2ax + aa - 2bz + zz = 0.$$

Fra

Fra gl'asintoti BA , BD si descriva l'iperbola OM dell'equazione $zx = ab$, che passerà per lo punto C ; presa una qualunque assisa BP , BN ec. $= z$, sarà l'ordinata PO , NM ec. $= x$. Al centro C , col raggio eguale alla data retta c si descriva il circolo OMV , che sarà il luogo dell'equazione

$$xx - 2ax + aa - bz + zz + \frac{bb}{-cc} = 0.$$

Da' punti O , M , nei quali questo taglia l'iperbola, abbassate le perpendicolari OP , MN , esse saranno le due radici positive dell'equazione; la minore servirà per il problema nel caso proposto dell'angolo BAC , la maggiore per l'angolo ACf . E se la data retta c è tale, che il circolo non arrivi a tagliare la opposta iperbola mo , l'altre due radici sono immaginarie; che se la taglia, saranno negative reali, e serviranno per l'angolo ACD .

PROBLEMA IV.

215. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo FCB , (Fig. 120.) o sia arco FAB .*

Siano H , I i punti, che si cercano, della divisione, adunque dovranno essere eguali le corde FH , HI , IB , ed essendo dato l'arco FAB , sarà data la

Vu 2

corda

corda FB , che si chiami $=2f$, e condotto il raggio $CA=r$ perpendicolare ad FB , che la taglierà per metà in D , taglierà pure per metà anco la corda HI , e farà nota CD , che pongo $=a$; condotto il raggio CK perpendicolare a CA , e dal punto H abbassata la HL normale a CK , si chiami $CL=y$, farà, per la proprietà del circolo, $HL=\sqrt{rr-yy}$, e condotto il raggio CH , per la similitudine dei triangoli HLC, CDE , avremo $DE=\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$. Ma poichè l'angolo FHC deve

essere eguale all'angolo CHI , per la condizione del problema, e $CHI=CED$, per le parallele FB, HI , e $CED=FEH$, dunque $FHC=FEH$, e però $FE=EH$, ma $FH=HI=2y$, dunque $FE=2y$, e tutta la FD sarà $=2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$, ma $FD=f$; dunque $2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}=f$,

e togliendo l'asimmetria, farà

$$y^4 - fy^3 + \frac{ffyy}{4} + \frac{aayy}{4} - rryy + fryy - \frac{ffrr}{4} = 0, \text{ cioè (essendo } rr=ff+aa) \text{ } y^4 - fy^3 - \frac{3rryy}{4} + fryy - \frac{ffrr}{4} = 0,$$

equazione del quarto grado, la quale colle maniere già spiegate si potrà costruire, servendosi di que' luoghi conici, che più piaceranno. Ma quest'equazione è divisibile per $y-f$, ed il quoziente è l'equazione $y^3 - \frac{3rry}{4} + \frac{fr}{4} = 0$, che voglio costruire colla parabola,

e l'iperbola fra gl'asintoti; faccio adunque $yy=rz$, sarà, fatta la sostituzione, $zy - 3ry + fr = 0$, equazione all'iperbola.

Sia (Fig. 121.) $AR = \frac{1}{2}r$, ed $AB = \frac{1}{2}f$; prodotte indefinitamente dall'una, e dall'altra parte le AR , AB , fra esse come asintoti si descriva l'iperbola TP *tp*, che passerà per lo punto O ; indi presa la $RC = \frac{1}{4}r$, e dal punto C condotta la CI indefinita, e parallela ad AL , se si prenda una qualunque $CI=y$, sarà $IP=z$, e l'iperbola il luogo dell'equazione $zy - 3ry + fr = 0$. Al vertice C , diametro CM , parametro $=r$ si descriva la parabola NCH , taglierà questa l'iperbola nei tre punti T, P, N , dai quali condotte le TS, PQ, NM parallele ad AL , faranno esse le tre radici dell'equazione.

E' chiaro, che la parabola taglia l'iperbola TP nei punti T, P , poichè essendo $CR = \frac{r}{4}$, posto questo valore in luogo di z nell'equazione alla parabola $yy=rz$, ci dà $y = \frac{1}{2}r$, ma $\frac{1}{2}r$ è sempre maggiore di $\frac{1}{2}f$, adunque l'ordinata nella parabola corrispondente al punto R sarà maggiore di RO , e però la parabola passerà al di dentro dell'iperbola.

Ma giacchè è dato il circolo nel problema, torne-

rà molto meglio il servirsi di questo per la costruzione, coll'introdurlo prima di giungere all'equazione finale, e ciò col porre la linea HL (*Fig. 120.*), cioè $\sqrt{rr - yy} = z$; sarà adunque $DE = \frac{ay}{z}$, e $DF = 2y + \frac{ay}{z}$, e però l'equazione $2y + \frac{ay}{z} = f$, cioè $2yz + ay = fz$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Divisa per metà la DF in P , (*Fig. 122.*) per lo punto P , si conduca la indefinita PN parallela ad AC , e presa $QO = \frac{1}{2}a$, per lo punto O si conduca VA indefinita, e parallela a KC . Fra gl'asintoti PN , VA si descriva l'iperbola del rettangolo af , la quale passerà per lo punto C , e prese le y sulla linea CQ positive verso il punto K , le corrispondenti ordinate faranno z , e l'iperbola il luogo dell'equazione $2zy + ay - fz = 0$. Taglierà questa il circolo ne' quattro punti H , R , M , S , dai quali condotte perpendicolari ad AC le HX , RG , MY , ST , faranno esse le radici dell'equazione, tre positive HX , RG , MY , ed una negativa ST .

E' chiaro, che la radice HX , o sia CL serve per la divisione del dato arco FAB ; siccome la radice YM serve per la divisione del residuo FMB a tutto il circolo, imperciocchè se mi fossi propolta di dividere l'arco FMB , avrei avuta la medesima equazione, o sia il medesimo luogo.

La

La radice RG a nulla serve, ma si avverta però, che ella è $=f$, cioè quella, per cui è divisibile l'equazione, che risulta dai due luoghi $rr - yy = zz$, $2zy + ay - fz = 0$, cioè l'equazione solida ritrovata di sopra. $y^2 - fy'$ cc.

E per dimostrarlo, presa $O\omega = \frac{1}{2}a = OQ$, sarà l'ordinata corrispondente del circolo $GR = f$, ma $\omega G = PD = \frac{1}{2}f$, dunque $\omega R = \frac{1}{2}f$; ma il rettangolo costante dell'iperbola è af , dunque l'iperbola taglierà il circolo nel punto R , e però la radice RG corrispondente a questo punto è $=f$.

L'altra radice TS serve per la divisione in tre parti eguali di tutto il circolo, il che si può in questo modo dimostrare.

Poichè $FD = RG$, saranno eguali gl'archi FK , KR , e però prodotta la RG in Z , sarà l'arco $FAB = RMZ$, farà adunque FR , o sia BZ metà della differenza dei due archi FAB , FMB ; ma se si scioglierà il problema relativamente all'arco BZ , si troverà la stessa iperbola HCS , e farà ZS un terzo dell'arco BZ , cioè un terzo della metà della differenza degl'archi FAB , FMB , e però BS un terzo della detta differenza; ma HB è due terzi di FAB , e però un terzo della somma dei due archi FAB , RMZ , dunque la somma di HB , e BS ,

BS, cioè l'arco HS farà la terza parte di tutto il circolo, il che ec.

216. Questo Problema è stato sciolto in un'altra maniera al num. 110, e si è veduto, che nel caso, che il dato angolo sia retto il Problema è piano. Negli altri due casi dell'angolo ottuso, ed acuto sono giunta alle due equazioni cubiche $2bx' - 3aax + a^4 = 0$, $2bx' + 3aax - a^4 = 0$.

Ma se si rifletta, che presa nella prima equazione, che serve per l'angolo ottuso, la x negativa, si muta essa nella seconda, che serve per l'angolo acuto, basterà costruire l'equazione del primo caso, poichè la radice negativa di questo darà la soluzione per l'altro.

Moltiplico adunque la prima equazione per $x=0$, a fine di ridurla del quarto grado, e la divido per $2b$, sarà essa pertanto $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{a^4x}{2b} = 0$.

Prendo l'equazione alla parabola $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, e fattone il quadrato, sarà $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{9a^2xx}{16bb} = aayy$, onde sostituito in luogo dei primi due termini $x^4 - \frac{3aax^3}{2b}$ il loro valore, sarà $yy - \frac{9aaxx}{16bb} + \frac{aax}{2b} = 0$.

Sostituisco in luogo di xx il suo valore $ay + \frac{3aax}{4b}$, ed

ed è l'equazione $yy - \frac{9a^2}{4b^2}y - \frac{27a^2x}{4b} + \frac{aax}{2b} = 0$, a cui aggiunta la prima $xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, sarà finalmente $yy - \frac{9a^2}{4b^2}y - \frac{27a^2x}{4b} + \frac{aax}{2b} + xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, equazione al circolo, prese le coordinate in angolo retto.

Al raggio $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{9a^2}{4b^2} + 16abb$, e $2n = \frac{27a^2}{4b} + 16aabb$) si descriva il circolo MNH , e presa $CD = m$, (Fig. 125.) si conduca dal punto D la DA perpendicolare a CD , ed eguale ad n , che incontrerà nel punto A la periferia del circolo; per lo punto A si tiri AK parallela ad RG , presa una qualunque $AK = y$, sarà la corrispondente ordinata $KH = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione.

Sulla retta AD si prenda $AI = \frac{3aa}{8b}$, e per lo punto I condotta LO parallela ad AK , se ne prenda la porzione $IL = \frac{9a^2}{64bb}$, ed al vertice L , asse LO , paramet-

ro $= a$, si descriva la parabola apolloniana ALH ; prese dal punto A le assisse y sull'asse AK , saranno le corrispondenti ordinate $KH = x$, e la parabola il luogo dell'equazione $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, la quale incontrerà il

circolo nei quattro punti A, M, H, N ; il punto A mi dà la radice da me introdotta eguale a zero, e le tre perpendicolari QM, PN, KH alla AK mi daranno le tre radici dell'equazione. La prima QM positiva servirà per l'angolo ottuso; la seconda negativa PN per l'angolo acuto; la terza KH servirà per dividere in tre parti eguali l'angolo, che è la differenza tra l'angolo dato, e l'angolo retto.

E che ciò sia vero; sia (Fig. 123.) l'angolo dato MAB , ad AB sia perpendicolare AH , e si voglia dividere in tre parti eguali l'angolo MAH , differenza fra il dato MAB , e l'angolo retto HAB . Si supponga esser diviso dalle rette AC, AD , ripetuto il discorso del num. 110., sarà $AC=CD$, ed il triangolo ACH simile al triangolo DAH , e però si avrà l'analogia $CH, HA::HA, DH$.

Denominando adunque, come nel citato num. 110., $AB=a$, $BR=b$, e chiamata $BC=x$, sarà $RC=x-b$, $BH=\frac{aa}{b}$, $CH=x-\frac{aa}{b}$, $AR=\sqrt{aa-bb}$, $HA=\frac{a}{b}\sqrt{aa-bb}$,

$$AC=\sqrt{aa+xx-2bx}, \quad DH=x-\frac{aa}{b}+\sqrt{aa+xx-2bx},$$

e però sostituiti nell'analogia i valori analitici, sarà $x-\frac{aa}{b}, \frac{a}{b}\sqrt{aa-bb}::\frac{a}{b}\sqrt{aa-bb}, x-\frac{aa}{b}+\sqrt{aa+xx-2bx}$,

cioè

x X

cioè

cioè l'equazione

$$\frac{aa}{bb} \times aa - bb = x - \frac{aa}{b} \times x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx} - 2bx, \text{ la}$$

quale ridotta, e finalmente divisa per $aa - bb$ si trova essere $2bx' - 3aaxx + a^2 = 0$, che è appunto l'equazione, che si è costruita.

Oltre gl'angoli minori di due retti, che insistono ad archi minori del semicircolo, e che *Entranti* s'appellano dagli Architetti, si danno pure degl'angoli maggiori di due retti, che insistono ad archi maggiori del semicircolo, e che si chiamano *Salienti*. Si consideri, come positiva, la inclinazione delle due linee AB, AM , (Fig. 124.) che mira verso C , negativa quella, che mira verso D . Sino a tanto, che la inclinazione delle due linee AB, AM farà positiva, e mirerà verso C , l'angolo MAB farà entrante, minore di due retti, ed insisterà ad un'arco BCM minore del semicircolo. Se le due linee A_2B, A_2M formeranno una linea retta A_2B_2M , l'inclinazione sarà nulla. Ma se l'inclinazione diverrà negativa, piegando le linee A_3B, A_3M dalla parte di D , allora l'angolo $3MA_3B$ si trasformerà in saliente, maggiore di due retti, ed insisterà ad un'arco $3MC_3B$ maggiore del semicircolo. La trisezione adunque di un qualunque angolo dato può ancor richiedersi di angolo saliente.

Ora si consideri, che insistendo la linea AB sopra la linea MAE , (*Fig. 123.*) mentre si forma l'angolo MAB , nascono di conseguenza altri tre angoli, cioè l'entrante BAE , che unito al parimente entrante dato MAB compie i due retti, ed i salienti MAB , BAE , che uniti ai corrispondenti entranti compiscono i quattro retti.

Le tre radici perciò della nostra equazione, $2bx^3 - 3aaxx + a^3 = 0$ servono a tripartire tutti e quattro i mentovati angoli. Col mezzo della più piccola positiva si divide in tre parti eguali l'angolo ottuso MAB , e col mezzo della negativa l'angolo acuto BAE , come si è veduto; ma si è altresì veduto, che la maggiore positiva serve per l'angolo MAH , ora questa appunto serve altresì per tripartire ambedue i salienti MAB , BAE . E vaglia il vero: l'angolo saliente BAE si eguaglia a tre retti più l'angolo MAH ; la terza parte adunque dell'angolo saliente BAE dovrà essere eguale ad un retto più la terza parte dell'angolo MAH , e tale si è l'angolo CAB . Non altrimenti l'angolo saliente MAB equivale a tre retti meno l'angolo MAH , o sia BAE , e conseguentemente CAB farà la sua terza parte, siccome eguale al retto bAB meno l'angolo bAC terza parte dell'angolo BAE .

217. Se per dividere il dato angolo in tre parti eguali, mi fossi servita del Problema XIII. num. 108, sarei giunta

giunta all'equazione $x^2 - 3bx - 3rrx + brr = 0$, e moltiplicandola per $x = 0$, $x^3 - 3bx^2 - 3rrxx + brrx = 0$.

Quindi preso il luogo alla parabola $xx + 3bx = by$, e

fatto il rimanente al solito, si avrà un'altro luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto, cioè

$$yy - \frac{26b^2}{8bb}y - \frac{24brr}{8bb} - \frac{39b^2}{8bb}x - \frac{28brr}{8bb}x + xx = 0.$$

Descritti, e combinati questi due luoghi, mi daranno la stessa costruzione della Figura 125., diversa solo nelle quantità cognite; imperciocchè sarà in questo caso il raggio del circolo $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{26b^2 + 24brr}{8bb}$, e $2n = \frac{39b^2 + 28brr}{8bb}$),

$$\text{e sarà } CD = \frac{26b^2 + 24brr}{16bb}, DA = \frac{39b^2 + 28brr}{16bb},$$

$$AI = 3b, \text{ ed } IL = 9b.$$

218. Dallo stesso Problema si à la maniera generale per dividere un qualunque dato arco, o angolo in quante si vogliano parti eguali; cosicchè per dividerlo in cinque parti eguali, si à l'equazione

$$5r^2x - 10rrx^2 + x^3 = b, \text{ cioè}$$

$$r^2 - 10rrxx + 5x^2 = \frac{b}{r^2}.$$

$$x^3 - 5bx^2 - 10rrx^2 + 10brrxx + 5r^2x - br^2 = 0.$$

Per costruirla, prendo il luogo alla parabola apollonia-

na $xx = ry$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo del terzo grado $xxx - 5byy - 10rxy + 10bry + 5rrx - brr = 0$,

cioè $x = 5byy - 10bry + brr$.

$yy - 10ry + 5rr$

Descritto adunque il luogo di questa equazione, che sarà (Fig. 126.) la curva dei tre rami, cioè HT fra gl'asintoti RK , BC ; GMQ fra gl'asintoti DI , KR , ed fnL fra gl'asintoti DF , DI , in cui sull'asse AV sono le y , e le corrispondenti ordinate sono le x . Se al vertice A , col parametro $= r$, all'asse AV si descriverà la parabola dell'equazione $xx = ry$, incontrerà essa la curva in cinque punti o , M , T , i , Q , i quali determineranno le cinque radici or , MN , TP , Si , PQ , tre positive, e due negative dell'equazione proposta.

219. Così per dividere, in quante altre parti eguali si vuole di numero dispari maggiore, un'arco, o angolo dato, altre curve ritroveransi relativamente al grado dell'equazione.



C A P O V.

Della costruzione de' luoghi, che superano il secondo grado.

220. **I**N due diverse maniere si possono costruire i luoghi, vale a dire descrivere le curve espresse da equazioni, che superano il secondo grado, se però nell'una, e nell'altra maniera può dirsi descrivere, e non piuttosto adombrare, e fare qualche idea di tali curve.

La prima maniera è per via d'infiniti punti; la seconda col mezzo di altre curve di grado inferiore, e già descritte, così che un luogo, o sia equazione del terzo grado si costruisca col mezzo di una retta, o di una sezione conica; un luogo, o equazione del quarto col mezzo di due sezioni coniche; un luogo, o equazione del quinto, col mezzo di una sezione conica, e d'un luogo del terzo, e così di mano in mano per ordine.

221. **E** quanto alla prima maniera per via d'infiniti punti, in primo luogo fa d'uopo ridurre l'equazione in modo, che una delle due incognite, cioè quella, che ei tornerà più comoda, sia libera da frazioni, da coefficienti, e che sia di una sola dimensione, e posta sola da una parte del segno d'egualità, il che si potrà sem-

pre

pre fare coi metodi spiegati al Capo II., qualora rispetto a tale incognita (considerando l'altra, come una costante) l'equazione sia di natura sua piana, cioè non ecceda il secondo grado; come per esempio l'equazione $xyy + 2aay = x^2$, cioè $yy + \frac{2aay}{x} = xx$, la quale trattata con le regole delle quadratiche affette ci dà

$$y = -aa \pm \sqrt{x^2 + a^2}.$$

In questo modo date, o ridotte le equazioni, la maniera di costruire il luogo, o sia la curva da esse espressa, consiste nel dare all'una delle due incognite, cioè a quella, che è nell'omogeneo di comparazione, (presa da un punto fisso sopra una retta, che scrya per asse, o diametro, secondo che l'angolo delle coordinate deve essere retto, o obliqua) come sarebbe alla x nell'equazione $y = -aa \pm \sqrt{x^2 + a^2}$, nel dare, dissi, un valore arbitrario, per mezzo di cui viene ad essere dato necessariamente il valore dell'altra, cioè della y , la quale dall'estremità del valore della prima essendo alzata nel dato angolo delle coordinate, ci fornisce un punto della curva da descriversi; un altro valore, che si dia alla stessa incognita x , somministra un altro valore della y , cioè un altro punto della curva, e così di mano in mano assegnando altri valori alla x , altri se ne

averanno della y , i quali ci daranno altrettanti punti della curva, il numero de' quali quanto più sarà grande, tanto più sarà esatta la descrizione della curva stessa, e si avrà perfettamente esatta allora solamente, quando se ne abbiano infiniti, anzi un numero infinitamente infinito di tali punti.

222. A motivo di maggiore semplicità supporrò sempre in appresso, che le curve sieno riferite agl'assi, cioè, che l'angolo delle coordinate sia retto, giacchè nel caso, che l'angolo sia obbliquo nessun'altra alterazione succede, che nel dato angolo stesso.

223. Per più facilmente intendere la applicazione del metodo, prendo per primo un'esempio semplice di curva già nota, cioè dell'iperbola equilatera $yy = xx - aa$, vale a dire $y = \pm \sqrt{xx - aa}$.

Sia A il punto fisso principio delle x da prendersi sull'indefinita AE . (Fig. 127.) In primo luogo cerco, quale ordinata corrisponda al punto A , cioè cosa sia la y quando $x = 0$; sostituito adunque il zero in luogo della x nella data equazione, troverassi $y = \pm \sqrt{0 - aa}$, cioè y immaginaria, dunque al punto A non corrisponde alcun punto in curva. Se fatta $x = 0$, avessi dall'equazione non y immaginaria, ma $y = 0$, la curva principierebbe dal punto A . Osservo, che qualora sia x minore di a , la radicale $\sqrt{xx - aa}$ farà sempre di quan-

tità negativa, e però y immaginaria, adunque fatta $AB=a$, ad una qualunque x minore di AB corrisponderà sempre y immaginaria, cioè nessun punto in curva. Prendo $x=a=AB$, sarà $y=\pm\sqrt{aa-aa}=0$, e però B sarà un punto in curva, vale a dire la curva avrà origine nel punto B . Prendo $x=2a=AC$, sarà $y=\pm\sqrt{4aa-aa}$, cioè $y=\pm\sqrt{3aa}$, positiva, e negativa; fatta adunque CD positiva, e Cd negativa $=\sqrt{3aa}$, saranno i due punti D, d in curva. Prendo $x=3a=AE$, sarà $y=\pm\sqrt{8aa}$, fatta però EM positiva, ed Em negativa $=\sqrt{8aa}$, saranno i due punti, M, m in curva; e così di mano in mano dando altri valori alla x si averanno altri valori della y . E' facile il vedere, che crescendo la x crescerà sempre la quantità $\sqrt{xx-aa}$, cioè il valore della y positiva, e negativa di modo, che s'anderà sempre più allargando la curva, ed allontanando al di sopra, e di sotto dell'asse, e prendendo finalmente x infinita, poichè il sottrarre quantità finita da infinita è lo stesso, che sottrarre nulla, sarà pure lo stesso $\sqrt{xx-aa}$, che $\sqrt{xx}$, quindi avrassi $y=\pm\sqrt{xx}$, cioè $y=\pm x$; dunque y positiva, e negativa infinita, e però anderà in infinito la curva.

224. E perchè nell'equazione $y=\pm\sqrt{xx-aa}$ la incognita x è elevata a potestà pari, cioè al quadrato,

se

se si prenda la x negativa, nulla si altera l'equazione stessa, quindi è, che dando alla x dei valori negativi, cioè prendendola dalla parte di A verso F , descriverassi la stessa curva di prima, ma posta al contrario col vertice H , essendo $AH = AB$, ed a nessuna assissa x positiva, o negativa presa tra B , ed H corrisponderà ordinata y positiva, o negativa reale, vale a dire nessun punto di curva.

225. Sebbene manifestamente si vede, che la data curva in nessun punto fuori de' vertici B , H taglia l'asse, poichè crescendo la x , cresce sempre la y , nulla di meno però di moltissime succede, che oltre il vertice in altri lo taglino, nel qual caso la y deve necessariamente essere zero; adunque per avere questi punti si dovrà nella data equazione supporre $y=0$, e ricavare i valori della x in questa supposizione, i quali ci daranno i punti cercati. Supposta per tanto nell'equazione $yy = xx - aa$ la $y=0$, sarà $xx = aa$, cioè $x = \pm a$, adunque ne' soli punti B , H la curva taglia l'asse, e non in altri.

226. Se fra i punti B , C si prenderanno altri valori della x , altri valori corrispondenti si avranno pure della y , cioè altri punti di curva tra B , e D , ovvero d per modo, che quanti più punti tali si avranno, più esatta sarà la descrizione della parte BD , o Bd , nè si avrà mai perfetta, se non quando i punti siano infiniti.

Yy 2

Nella

Nella stessa maniera si discorra di qualunque altra porzione.

227. E' chiaro, che se fatta infinita una qualunque delle due incognite, l'altra non sia nè infinita, nè immaginaria, ma o sia finita, o eguale al zero, sarà la prima un'asintoto della curva, il quale corrisponderà al punto determinato dal valore della seconda. Per vedere adunque se una curva à asintoti, e dove, basterà fare la y infinita, e vedere qual valore risulta dalla equazione per la x ; indi fare infinita la x , e vedere qual valore risulta per la y . Nell'equazione $y = \pm \sqrt{xx - aa}$, fatta y infinita, sarà $\sqrt{xx - aa} = \infty$, e però $xx = \infty + aa$, cioè xx eguale all'infinito, e però x infinita, perchè la radice di quadrato infinito è sempre infinita; adunque la y non può essere infinita, se non quando sia infinita anche la x , ond'è che l'asse delle y non può essere un'asintoto. Fatta infinita la x , sarà $\sqrt{xx - aa}$ lo stesso che x , poichè a quantità infinita l'aggiungere, o levare quantità finita è lo stesso, che aggiungere, o levare nulla, adunque sarà la $y = \pm x$, cioè fatta x infinita, è infinita anche la y , quindi l'asse delle x non potrà essere un'asintoto.

228. Non così nell'equazione $ay + xy = bb$, che già altronde si fa essere all'iperbola fra gl'asintoti; imperciocchè presa y infinita, saranno infiniti i due termini

ni

ni $ay + xy$, e rispetto a loro sarà nullo il termine bb , e però l'equazione sarà $ay + xy = 0$, cioè dividendo per y , $x = -a$, adunque presa $x = -a$, l'ordinata, che in quel punto è infinita, sarà un'asintoto della curva. Presa poi x infinita, poichè i due rettangoli ay , xy nella stessa altezza y sono tra loro, come le basi a , x , sarà il secondo infinitamente maggiore del primo, cioè sarà nullo ay riguardo ad xy ; e però cancellato dall'equazione il termine ay , resterà $xy = bb$, o sia $y = \frac{bb}{x}$, ma x è infinita, dunque $y = \frac{bb}{\infty} = 0$; sicchè quando $y = 0$, la x è infinita, e però è un'asintoto della curva.

229. Si avverta però, che questo metodo à luogo solamente nel caso degl'asintoti paralleli alle coordinate, e non altrimenti; ed in fatti l'iperbola $yy = xx - aa$ à benissimo i suoi asintoti, ma che non sono alle coordinate paralleli, e però in questo caso non serve la maniera spiegata, ma ci vuole altro artificio, il quale perchè dipende dal metodo degl'infinitesimi, fa d'uopo riservarlo per altro luogo.

230. Rimane il vedere, se la suddetta curva $y = \pm \sqrt{xx - aa}$ sia concava, o convessa all'asse, per la qual cosa prendasi dall'origine una qualunque asissa AE di determinato valore, e col mezzo della data equa-

equazione si ritrovi il valore della corrispondente ordinata EM ; indi presa un'altra assisa AC di determinato valore minore della prima, si trovi il valore della corrispondente ordinata CD , e si conduca la retta BM , che taglierà in I la CD prodotta, se fa di bisogno, ed essendo note le AE , AC , o sia le BE , BC , e la ordinata EM , per la similitudine de' triangoli BEM , BCI troverassi il valore della CI , e se questa sarà minore di CD , la curva sarà concava all'asse AE , com'è chiaro; e se sarà maggiore, la curva sarà convessa. Nella data equazione prendo $x = AE = 3a$, sarà $y = \sqrt{8aa}$, prendo $x = AC = 2a$, sarà $y = CD = \sqrt{3aa}$, e poichè $BE = 2a$, $BC = a$, sarà $CI = \sqrt{8aa} = \sqrt{2aa}$, cioè minore di CD , e però la curva concava all'asse AE .

231. Vale però quest'illazione in quelle curve solamente, le quali non abbiano punti di flesso contrario, o di regresso; ma perchè questi hanno i loro metodi particolari, de' quali non è questo il luogo di trattare, quindi è, che per ora non si può formare un'idea giusta, e compita delle curve.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 = aax$, cioè $y = \sqrt[3]{aax}$; condotte le due indefinite BH , DC , (Fig. 128.) che facciano l'angolo dato BAC eguale a quello delle coordinate, si prendano nella AC dal punto A le x , e sulla AB , o sia parallela alla AB le y . Cerco primieramente, se la curva passa, o nò per lo punto A , cioè cosa sia y quando $x = 0$; ma posta $x = 0$, si trova $y = \sqrt[3]{aa \times 0}$, cioè $y = 0$, adunque la curva passa per lo punto A . Cerco in oltre, se la curva taglia l'asse AC in altro punto, vale a dire cosa sia la x , posta $y = 0$, e trovo $\sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$; adunque in nessun'altro punto fuori di A la curva taglia l'asse. Faccio $x = AM = \frac{1}{2}a$, e sarà la data equazione $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2}$, e però alzata $MP = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2}$, e parallela ad AB , sarà P un punto in curva. Faccio $x = AC = a$, e sarà $y = \sqrt[3]{a^3} = a$, alzata adunque $CN = a$, e parallela ad AB , sarà N un'altro punto in curva; e così facendo successivamente, si troveranno quanti punti si vogliono, per i quali

passa la curva della data equazione . Faccio finalmente x infinita , cioè $x = \infty$, e sarà $y = \sqrt[3]{aa \times \infty}$, cioè y infinita , e però la nostra curva va all'infinito . E poichè presa $x = 0$, è pure $y = 0$; e presa $x = \infty$, è pure $y = \infty$, la curva non avrà asintoti paralleli alle coordinate .

Si conduca la sottesa AN , che taglia in I la MP prodotta , se fa bisogno ; poichè $AM = \frac{1}{2}a$, $AC = a$, $CN = a$, sarà $MI = \frac{1}{2}a$, ma $MP = \sqrt[3]{a^3}$, adunque MI sarà minore di MP , e però la curva concava all'asse AC .

Si prenda ora la assissa x negativa . Poichè nella data equazione $y' = aax$ la x è di esponente dispari , quando si prenda negativa dovrà mutare il segno , e l'equazione sarà quest'altra $y' = \sqrt[3]{-aax}$, la quale , come chiaramente si vede , prendendo i valori della x dalla parte dei negativi , cioè da A verso D , ma eguali ai già presi della parte dei positivi , ci darà altrettanti valori negativi della y eguali ai positivi , quindi il ramo AE sarà affatto lo stesso del ramo AN , ma posto in senso contrario .

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $a' - zyy = 0$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{a'}{z}}$, e

si prendano le z dal punto A sull'asse AC . (Fig. 129.) Cerco primieramente, se la curva passi per lo punto A , fatta adunque $z = 0$, l'equazione è $y = \pm \sqrt{\frac{a'}{0}}$, cioè $y = \pm \infty$,

adunque BD infinita d'ambe le parti di A sarà un'asintoto della curva. Cerco se in nessun punto la curva tagli l'asse, e però pongo $y = 0$, e l'equazione sarà $\pm \sqrt{\frac{a'}{z}} = 0$, cioè $0 = \frac{a'}{z}$, vale a dire $z = \frac{a'}{0}$, e però

$z = \infty$, adunque quando sia $y = 0$ sarà $z = \infty$, e però AC sarà un'altro asintoto. Presa $z = a = AE$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{a'}{a}}$, cioè $y = \pm a$, fatte adunque EF positiva, ed

EG negativa $= a$, faranno i punti F, G in curva.

Preso $z = 2a = AH$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{a'}{2a}}$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{aa}{2}}$,

fatte adunque HI positiva, ed HK negativa $= \sqrt{\frac{aa}{2}}$,

faranno i punti I, K in curva. Prendendo successivamente nuovi valori di z sempre maggiori, risulteranno

Zz

nuovi

nuovi valori della y sempre minori di modo, che i due rami FI , GK in tutto simili, ed eguali della curva, s'anderanno dall'una, e dall'altra parte accostando agli asintoti BD , AC , senza però mai toccarli, se non in infinita distanza dal punto A .

Rispetto alle assisse z negative, poichè l'esponente di z è dispari, se si prenda negativa, converrà mutare il segno al termine $-zyy$, e l'equazione sarà $a' + zyy = 0$, cioè $y = \pm \sqrt{-\frac{a'}{z}}$, vale a dire l'ordinata y immaginaria, adunque dalla parte delle assisse negative non vi farà curva.

Per vedere, se la curva sia concava, o convessa all'asse AC ; prendo $AC = 3a$, farà $CM = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e condotta FM , che tagli in O la HY prodotta, se fa bisogno, ed MN parallela ad AC , farà $NF = a - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, $PI = \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e facendo l'analogia $MN, NF :: MP, PO$, cioè $2a, a - \sqrt{\frac{aa}{3}} :: a, PO$, farà $PO = a - \sqrt{\frac{aa}{3}}$,

adunque se PO sarà maggiore di PI , la curva sarà convessa all'asse AC , il che si ricerca così. Quando

fia

sia $a - \sqrt{\frac{aa}{3}} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, farà anche, multipli-
 cando per 2, $a - \sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}} - 2\sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed
 $a + \sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}}$, e quadrando, $aa + 2a\sqrt{\frac{aa}{3}} + \frac{aa}{3} > 2aa$,
 e moltiplicando per 3, $3aa + 6a\sqrt{\frac{aa}{3}} + aa > 6aa$, e ri-
 ducendo i termini, $6a\sqrt{\frac{aa}{3}} > 2aa$, e dividendo per 2a,
 $3\sqrt{\frac{aa}{3}} > a$, e finalmente quadrando, farà $\frac{9aa}{3} > aa$,
 ma è vero, che $\frac{9aa}{3} > aa$, adunque è anche vero,
 che $a - \sqrt{\frac{aa}{3}} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, cioè, che PO è maggio-
 re di PI , ed in conseguenza, che la curva è convessa
 all'asse AT .

ESEMPIO IV.

Sia la curva dell'equazione

$$y = \pm \sqrt{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}.$$

Prendendo sul-
 la AB indefinita (Fig. 130.) le x dal punto fisso A , e
 Z z 2 le

le y sulla AD , che faccia l'angolo DAB delle coordinate, se si ponga $x=0$, sarà $y=\pm\sqrt{\frac{aa\pm a\sqrt{aa}}{2}}$,

cioè $y=\pm\sqrt{\frac{2aa}{2}}$, ed $y=\pm\sqrt{\frac{0}{2}}$, vale a dire $y=\pm a$, ed

$y=0$; adunque fatta AE positiva, e negativa $=a$, i punti E, A, E saranno in curva. Per vedere dove la curva tagli l'asse AB , pongo $y=0$, e però

$$\pm\sqrt{\frac{4ax+aa-2xx\pm a\sqrt{aa+8ax}}{2}}=0, \text{ e quadrando,}$$

e trasponendo, $4ax+aa-2xx=\mp a\sqrt{aa+8ax}$, e di nuovo quadrando, $16aaxx+8a^2x+a^4+4x^4-16aax-4aaxx=a^4+8a^2x$, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $3aa-4ax+xx=0$, e risolvendo l'equazione, $x=\pm a+2a$, cioè $x=a$, ed $x=3a$; presa adunque $x=AF=a$, ed $x=AB=3a$, la curva taglierà l'asse ne' punti F, B .

Fatta $x=\frac{1}{3}a=AH$, sarà $y=\pm\sqrt{\frac{5aa\pm 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, e però

quattro i valori della y reali, per essere $2a\sqrt{5aa}$ minore di $5aa$, e sono $\sqrt{\frac{5aa+2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $\sqrt{\frac{5aa-2a\sqrt{5aa}}{4}}$,

$-\sqrt{\frac{5aa-2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $-\sqrt{\frac{5aa+2a\sqrt{5aa}}{4}}$, ed i due

positivi sono relativamente eguali ai due negativi; presa adun-

adunque $HI=Hi=\sqrt{5aa+2a\sqrt{5aa}}$, ed $HG=Hg=\sqrt{5aa-2a\sqrt{5aa}}$, i quattro punti I, G, g, i saranno
 in curva.

232. Ogni qual volta la quantità sotto al comune vincolo radicale sia quantità negativa (giacchè quella sotto al secondo vincolo, cioè $\sqrt{aa+8ax}$ non lo può essere, essendo le assisse positive, come ora le suppongo) sarà immaginaria la ordinata y , adunque perchè vi sia ordinata, converrà che sia

$$\sqrt{4ax+aa-2xx\pm a\sqrt{aa+8ax}} > 0.$$

Prendo in primo luogo il segno positivo del secondo radicale, nel qual caso sarà certamente positiva la quantità tutta, se sia $4ax+aa-2xx > 0$, cioè $2xx-4ax < aa$, e però $xx-2ax < \frac{aa}{2}$, ed $xx-2ax+aa < \frac{3aa}{2}$, e cavando la radice, $x-a < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, o pure

$$a-x < \sqrt{\frac{3aa}{2}}.$$

Dalla prima radice $x-a < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, in cui si suppone x maggiore di a , inferisco, che deve poi essere $x < a + \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; dalla seconda $a-x < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$

in

in cui si suppone $x < a$ ricavo, che deve poi essere $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; ma essendo sempre $a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$ quantità

negativa, sarà sempre $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, quando si prenda

x minore di a , adunque presa x minore di a , sarà $4ax + aa - 2xx$ quantità positiva, quindi molto più sarà positiva la quantità $4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}$, e però generalmente, presa x minore di $AF(a)$,

farà $y = \pm \sqrt{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}$, ordinata

reale. Ma quando anche sia $4ax + aa - 2xx$ quantità ne-

gativa, pure può essere $\sqrt{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}$

quantità positiva, cioè ogni qual volta sia

$\sqrt{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}} > 0$, e quadrando, e

trasportando, $a\sqrt{aa + 8ax} > 2xx - aa - 4ax$, e di nuovo quadrando, $a^4 + 8a^3x > 4x^4 - 16ax^3 + 16a^2xx -$

$4a^2xx + 8a^3x + a^4$, cioè $4x^4 - 16ax^3 + 12a^2xx < 0$, e dividendo per $4xx$, $xx - 4ax + 3aa < 0$, e però anche

$xx - 4ax + 4aa < aa$, e cavando la radice, $x - 2a < a$, come pure $2a - x < a$. Dalla prima radice $x - 2a < a$,

che suppone x maggiore di $2a$, viene $x < 3a$, adun-

que

quē presa x maggiore di $2a$, ma minore di AB , ($3a$) sarà la radicale positiva, e però reale la ordinata y . Dalla seconda radice $2a - x < a$, che suppone x minore di $2a$, cavo $x > a$, adunque quando anco sia x maggiore di a , e minore di $2a$, la radicale sarà positiva, e però reale l'ordinata y , ma si è veduto per primo, che presa x minore di a , l'ordinata y è reale, adunque generalmente sarà reale la ordinata y , purchè si prenda x minore di AB ($3a$).

Prendendo il segno negativo del secondo radicale, dovrà essere $\sqrt[4]{4ax + aa - 2xx - a\sqrt{aa + 8ax}} > 0$, e

quadrando, $4ax + aa - 2xx > a\sqrt{aa + 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, sarà $xx - 4ax > -3aa$, e però anche $xx - 4ax + 4aa > aa$, e cavando la radice, $x - 2a > a$, come pure $2a - x > a$; dalla prima radice ricavo $x > 3a$, ma si è veduto, che $x > 3a$ ci dà il valore della y immaginario quando il secondo radicale à il segno positivo, molto più adunque lo darà quando à il segno negativo, onde ommessa questa radice, faccio uso dell'altra $2a - x > a$, che mi dà $x > a$, adunque presa x minore di AF , (a) sarà positiva la quantità sotto il comune vincolo radicale, tanto se si prenda il segno positivo, quanto il negativo del secondo radicale, e però tra A , ed F corrispon-

ponderanno quattro ordinate reali, due positive, e due negative relativamente eguali alle positive. Ma quando sia x maggiore di AF , (a) il segno negativo del secondo radicale dà ordinata immaginaria, e la dà reale il segno positivo, purchè sia x minore di AB , ($3a$) adunque tra F , e B corrisponderanno due sole ordinate reali alla medesima assissa, una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva; ed oltre il punto B faranno immaginarie.

Prendansi ora le assisse negative, cioè da A verso K . In questo caso mutando nell'equazione il segno a tutti i termini, che hanno la x d'esponente dispari, sarà

$$y = \pm \sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}}. \text{ Pongo } x=0,$$

$$\text{sarà } y = \pm \sqrt{\frac{aa \pm a\sqrt{aa}}{2}}, \text{ cioè } y = \pm a, \text{ ed } y=0,$$

adunque i punti E, A, E faranno in curva, come nel primo caso. Per vedere se la curva taglia l'asse, pongasi $y=0$, e però

$$\sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}} = 0,$$

e quadrando, e trasponendo, $aa - 2xx - 4ax = \pm a\sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $xx + 4ax + 3aa = 0$, e risolvendo, $x = -2a \pm a$; la curva adunque taglierà l'asse quando sia $x=0$, essendo stata fatta la divisione per $4xx$; quando sia $x = -3a$;

e quando sia $x = -a$, cioè, per essere quantità negativa, dalla parte opposta a quella, verso cui ora si prendono le x , e però solo in A, F, B , come già si è veduto. Pongo $x = \infty$ per vedere se la curva va all'infinito, o all'asintoto AK , ed è

$$y = \pm \sqrt{-2 \times \infty \pm \sqrt{-8a \times \infty}}, \text{ cioè } y \text{ immaginaria.}$$

Ricerco adunque, quale sia il limite delle ordinate reali: è certo, che qualora sia x maggiore di $\frac{a}{8}$, il secondo

radicale sarà di quantità negativa, e però immaginaria la ordinata y , adunque deve si prendere x non maggiore di $\frac{a}{8}$; ma in questa ipotesi perchè sia positiva tutta

la quantità sotto il comune radicale, prendendo il segno positivo del secondo, basterà, che sia $aa - 2xx - 4ax$ positiva, cioè $aa - 2xx - 4ax > 0$, e però $xx + 2ax < \frac{aa}{2}$,

o sia $x < \sqrt{\frac{3aa}{2}} - a$; ma quando sia x non maggiore

di $\frac{a}{8}$, è anche $< \sqrt{\frac{3aa}{2}} - a$, quindi fatta x non mag-

giore di $\frac{a}{8}$, l'ordinata sarà reale. Preso il segno negativo del secondo radicale, dovrà essere

$$\sqrt{aa - 2xx - 4ax} - a \sqrt{aa - 8ax} > 0, \text{ cioè quadrando, e}$$

Aaa

traf-

trasponendo, $aa - 2xx - 4ax > a \sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, $x + 2a > a$, ma $x + 2a$ è sempre maggiore di a , adunque purchè prendasi x non maggiore di $\frac{a}{2}$, le ordinate saranno sempre reali. Prendo

$x = \frac{a}{2}$, sarà $y = \pm \sqrt{15aa}$, e però fatta KM positiva, e KN negativa $\pm \sqrt{15aa}$, i punti M , N faranno

in curva. Prendo $x = \frac{a}{16}$, sarà $y = \pm \sqrt{95aa \pm 128a \sqrt{\frac{aa}{2}}}$, cioè quattro valori reali: due positivi relativamente

eguali ai due negativi. E perchè la quarta proporzionale di a , di $\sqrt{15aa}$, e di $\frac{a}{16}$, cioè $\sqrt{15aa}$ è minore, di $\sqrt{95aa + 128a \sqrt{\frac{aa}{2}}}$, ma è maggiore di

$\sqrt{95aa - 128a \sqrt{\frac{aa}{2}}}$; la curva avrà due rami al di sopra di AK , uno concavo, e l'altro convesso, e due ne avrà al di sotto affatto simili, ed eguali a quelli di sopra, e sarà a un di presso come nella Fig. 130.

ESEMPIO V.

Sia la curva dell'equazione

$$y = \pm \sqrt{bbx - x^3 + 2axx - aax} ; \text{ in cui sia, per un caso,}$$

a maggiore di b , e si prendano dal punto A sulla indefinita AM le x , e sulla AD nel dato angolo le y , o sia ad essa parallele. (Fig. 131.) Fatta $x=0$, sarà $y=0$, e però il punto A sarà in curva. Fatta $y=0$,

$$\text{sarà } \sqrt{bbx - x^3 + 2axx - aax} = 0, \text{ cioè } bbx - x^3 +$$

$$2axx - aax = 0, \text{ e dividendo per } x, bb - xx + 2ax -$$

$$aa = 0, \text{ e però } xx - 2ax + aa = bb, \text{ e cavando la radice, } x - a = \pm b; \text{ adunque i valori della } x \text{ saranno } x = a + b,$$

$$x = a - b, \text{ ed } x = 0, \text{ essendo stata divisa l'equazione per } x. \text{ Quindi fatta } AB = BM = a, BN = BC = b, \text{ la curva}$$

taglierà l'asse nel punto A , come già si è veduto, e ne' punti N, C . Fatta $x = AM = 2a$, sarà y positiva, e negativa infinita, e però in M vi sarà un'asintoto.

Pongo $x = \infty$, sarà $y = \pm \sqrt{-xx}$, cioè immaginaria, dunque la curva non va all'infinito. Poichè acciò sia

reale l'ordinata y , fa d'uopo, che la quantità sotto il vincolo sia positiva, converrà ch'essendo positivo il numeratore della frazione, lo sia pure il denominatore,

ed essendo l'uno negativo, lo sia l'altro ancora; ma acciò sia positivo il numeratore, deve essere $bbx - x^3 + 2axx - aax > 0$, cioè, dividendo per x , e trasponendo, $xx - 2ax < bb - aa$, e però $xx - 2ax + aa < bb$, e cavando la radice, $x - a < b$, presa x maggiore di a ; ed $a - x < b$, presa x minore di a . Dalla prima radice $x - a < b$ cavo $x < a + b$; dalla seconda $a - x < b$ cavo $x < a - b$; presa adunque x maggiore di a dovrà essere $x < a + b$, e presa x minore di a , dovrà essere $x > a - b$, acciò sia positivo il numeratore; ma perchè sia positivo il denominatore, deve essere $x > 2a$, e non potendo essere maggiore di $2a$, ed assieme minore di $a + b$, e di a , non potranno essere positivi il numeratore, e denominatore; e però tra i punti N , e C non vi saranno ordinate reali. Se si prenda $x > a + b$, farà il numeratore negativo, come pure se si prenda $x < a - b$; e se si prenda $x < 2a$, farà pure negativo il denominatore; adunque tra A , ed N , e tra C , ed M vi saranno ordinate reali, e la curva sarà a un di presso, come nella Fig. 131.

Prendo la x negativa, mutando adunque i segni a' termini della x ad esponente dispari, farà l'equazione

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - bbx + 2axx - aax}{2a - x}}, \text{ cioè}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{bbx - x^3 - 2axx - aax}{2a + x}}. \text{ Il denominatore sarà}$$

sempre

sempre positivo, ma acciò sia positivo il numeratore, converrà, che sia $bbx - x^3 - 2axx - aax > 0$, e dividendo per x , e trasponendo, $xx + 2ax + aa < bb$, cioè $x + a < b$, e però $x < b - a$, ma si è supposto $b < a$, adunque $b - a$ farà quantità negativa, e però non potrà mai essere $x < b - a$, cioè non potrà mai essere positivo il numeratore, quindi le ordinate y saranno sempre immaginarie, onde dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva.

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, cioè $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$. Dal punto fisso A

(Fig. 132.) sulla indefinita AQ prendo le y , e sulla indefinita AM , o ad essa parallele nel dato angolo delle coordinate, prendo le x . Posta $y = 0$, farà $x = \frac{2aaz}{0}$,

cioè $x = \infty$, adunque la curva anderà all'asintoto AM . Per vedere, se la curva taglia l'asse, e dovè, pongo $x = 0$, e però $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 0$, e risolvendo quest'equazione cubica si hanno tre valori della y , cioè $y = a$, $y = 2a$, $y = -a$. Fatta adunque $AB = AD = BC = a$, ne' punti B, C dalla parte de' positivi, e nel punto D dalla parte de' negativi la curva taglierà l'asse.

233. Se l'equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^2$ fosse irriducibile, onde non si potessero avere i valori aritmetici della y , s'avrebbe a costruire essa equazione, ed i valori della y geometricamente ritrovati, e colle linee espressi, ci darebbero i punti ricercati, il che s'intenda detto di qualunque caso simile. Pongo $y = \frac{3}{2}a$, e farà $x = -\frac{5a}{12}$, cioè ordinata negativa, adunque la curva.

passa al di sotto dell'asse AQ in B , e torna al di sopra in C . Pongo $y = \infty$, farà $x = \frac{yy}{a}$, cioè $x = \infty$, e però la curva anderà all'infinito. E' chiaro, che il ramo infinito BE sarà convesso all'asse AM , il ramo BC concavo all'asse AQ , e CF convesso, quando la curva non abbia flessi contrarj.

Si prendano ora le assisse y negative da A verso D , farà adunque l'equazione $x = -\frac{y^3 - 2ayy + aay + 2a^2}{-ay}$, cioè $x = \frac{y^3 + 2ayy - aay - 2a^2}{ay}$. Prendo $y = 0$, farà $x = -\frac{2aa}{0} = -\infty$, adunque MA infinitamente prodotta dalla parte dei negativi sarà pure asintoto della curva. Prendo $y = \frac{1}{2}a$, farà $x = -\frac{15a}{4}$; prendo $y = a$, farà $x = 0$, e la curva passerà per D ; prendo $y = \infty$, farà $x = \frac{yy}{a} = \infty$, e la

cur-

curva al di sopra di AD anderà all'infinito; prendo $y=3a=AK$, farà $x=4a=KP$; prendo $y=2a=AN$, farà $x=6a=NR$; quindi perchè condotta la retta DP , farà $NT=4a$, e $4a > 6a$, adunque sarà $NT > NR$, e la curva in R convessa all'asse AK , cioè concava all'asse AM ; ma se essa va all'asintoto AP al di sotto di AK , necessariamente deve anche essere ad esso convessa, adunque avrà un flesso contrario, per determinare il quale non è questo il luogo.

234. Ma se la proposta equazione della curva da costruirsi conterrà ambe le incognite elevate a maggiore potestà della seconda, onde non possa generalmente ridursi tale, che da una parte del segno d'egualità abbia una delle due incognite sola, e di una sola potestà, allora crescerà bensì l'operazione, ma non la difficoltà del metodo, imperciocchè fissato un valore noto per l'una delle incognite, per esempio x , si avrà un'equazione solida data per y , e le costanti, da risolversi o costruirsi, da cui si averanno i valori della y , che determineranno tanti punti in curva.

Indi fissato un'altro valore per la x , averassi un'altra equazione solida da risolversi o costruirsi, che ci somministrerà altri punti in curva; e così di mano in mano successivamente operando, si troveranno quanti
punti

punti si vogliono della curva da descriversi.

235. Ma dovendosi in questi incontri, ed in altri ancora, come nell'esempio sesto, risolvere e costruire equazioni solide; pare, che si faccia un circolo vizioso, poichè trattando de' problemi solidi o supposta la descrizione delle curve anche superiori alle sezioni coniche; ma la cosa non è così, se bene si riflette, imperciocchè se la curva da descriversi è della terza, o quarta dimensione, della terza o quarta al più sarà l'equazione solida da costruirsi, il che si fa per mezzo delle sezioni coniche; adunque senza circolo vizioso descriverassi qualunque curva della terza, o quarta dimensione. Se l'equazione della curva da descriversi sarà della quinta dimensione, l'equazione solida da costruirsi sarà al più della quinta, il che si farà per mezzo d'una curva della terza, e di una della seconda, e similmente si discorra di dimensioni superiori; dal che apparisce, non esservi ombra di circolo vizioso.

PROBLEMA I.

236. Dato il semicircolo AEB, (Fig. 133.) si dimanda il luogo de' punti M tali, che se per ciascuno di essi si tiri dall'estremità A del diametro una retta, che taglierà la periferia in D, e si abbassino le MP, DO perpendicolari al diametro, le intercette dal centro CP, CO sieno sempre eguali tra loro.

Sia

Sia M uno dei punti, che si cercano, e si chiami $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, e poichè deve essere $CP=CO$, farà $OB=AP=x$, ed $OD=\sqrt{ax-xx}$, e per la similitudine de' triangoli APM , AOD , farà $x, y::a-x, \sqrt{ax-xx}$, e però $y=\frac{x\sqrt{ax-xx}}{a-x}$, cioè $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, o pure $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$, equazione della curva da descriversi,

che è la *Cissoide di Diocle*.

Per descriverla sulla data Figura per varj punti: si osservi, che la retta AB è l'asse delle x , ed A il punto, da cui hanno origine, e perchè le y sono perpendicolari a questo asse, condotta dal punto A la tangente AQ ; farà essa l'asse, a cui le ordinate y debbono riferirsi. Queste cose premesse, si ponga in primo luogo $x=0$ per vedere se la curva taglia l'asse AQ , e perchè si ritrova pure $y=0$, farà A un punto nella curva da descriversi. Si ponga $y=0$ per vedere se la curva taglia l'asse AB in qualche altro punto, ma poichè si trova $x=0$, non incontrerà la curva i due assi in altro punto, fuorchè in A .

Sia $x=\frac{1}{3}a$, farà $y=\frac{a}{3\sqrt{2}}$; sia $x=\frac{1}{2}a$, farà $y=\frac{1}{2}a$, e però eretta dal centro la perpendicolare CE al diametro AB , passerà la curva per lo punto E .

Bbb

Sia

Sia $x = \frac{2a}{3}$, farà $y = \frac{4a}{3\sqrt{2}}$, e posta finalmente $x=a$, si trova $y = \frac{aa}{0} = \infty$, e perciò la tangente BR al circolo

farà l'asintoto della curva. Prendo x maggiore di a , farà negativa la quantità sotto il segno radicale nel denominatore, e la curva immaginaria, la quale essendo pure immaginaria, presa la x negativa, farà compresa fra le due tangenti AQ , BR prodotte in infinito. E poichè va all'asintoto BR , non avendo flessi contrarj, converrà, che sia tutta convessa all'asse AB , e farà, come nella Fig. 133.

PROBLEMA II.

237. Dato l'angolo retto ABC , (Fig. 134.) e dato il punto A nel lato AB , si cerca il luogo di tutti i punti M tali, che condotte per ciascuno di essi le rette linee AE , terminate dal lato BC nei punti E , sia sempre $EM=EB$.

Si tiri una qualunque retta AE , e sia M uno dei punti, che si cercano; si abbassi dal punto M ad AB la perpendicolare MP , e si chiami $AP=x$, $PM=y$, $AB=a$, farà $PB=a-x$, ed $AM=\sqrt{xx+yy}$, ma per i triangoli simili APM , ABE , farà $x, y::a, BE$, dunque $BE=EM=\frac{ay}{x}$, ma è anche $AP, PB::AM, ME$,

cioè

cioè

cioè $x, a - x :: \sqrt{xx + yy}, \frac{ay}{x}$, dunque $ay = a - x \sqrt{xx + yy}$,

e quadrando, $aayy = aaxx - 2ax^2 + x^4 + aayy - 2axyx + xxyy$, cioè $\frac{aaxx - 2ax^2 + x^4}{2ax - xx} = yy$, e finalmente, essen-

do la radice di $aaxx - 2ax^2 + x^4$ tanto $ax - xx$, quanto $xx - ax$, farà $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ed $y = \frac{xx - ax}{\sqrt{2ax - xx}}$, cioè

$\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, equazione alla curva, che si cerca.

Le ordinate y faranno adunque positive, e negative, ed eguali fra loro, e le positive e le negative corrisponderanno alla medesima asissa, e però la curva farà al di sopra, ed al di sotto dell'asse AB in tutto simile, ed eguale.

Condotta dal punto A la perpendicolare AR alla AB , la quale farà l'asse, a cui si rapportano le ordinate y , siccome AB è quello delle assisse x ; pongo in primo luogo $x=0$ per vedere se la curva passa per lo punto A , e perchè trovo parimenti $y=0$, farà il punto A il vertice della curva. Sia ora $y=0$, farà $ax - xx=0$, e però $x=0$, ed $x=a$, onde ricavo, che la curva passerà per lo punto B . Sia $x=\frac{1}{3}a$, farà $\pm y = \frac{2a}{3\sqrt{5}}$. Sia $x=\frac{1}{2}a$, farà $\pm y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Sia $x=\frac{4}{3}a$, farà $\pm y = \frac{4a}{3\sqrt{8}}$. Sia $x=2a$, farà $\pm y = \frac{2ax}{0} = \infty$, e perciò,

presa $AD=2a$, e condotta la retta SQ indefinita parallela alla PM , sarà essa l'asintoto della curva. Sia x maggiore di $2a$, sarà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata y , adunque oltre il punto D non vi sarà più curva. E' chiaro, che la curva tra il punto A , ed il punto B sarà concava all'asse AB , e poichè oltre al punto B va all'asintoto SQ , sarà tra B , e D convessa all'asse BD ; intendendo però, che non abbia flessi contrarj.

Presa la x negativa, sarà sempre negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata y ; adunque dalla parte delle asisse negative non vi sarà curva, quindi sarà essa a un di presso, come, nella Fig. 134.

PROBLEMA III.

238. Dato il semicircolo ADC (Fig. 135.) del diametro AC ; si ricerca fuori di esso il punto M tale, che condotta MB normale al diametro AC , che taglierà il circolo in D , sia AB , $BD :: AC$ alla BM , e perchè infiniti sono i punti M , che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.

Sia M uno di questi punti, e chiamata $AC=a$, $AB=x$, $BM=y$, sarà, per la proprietà del circolo,

lo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, sarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o sia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione

alla curva da descriversi, che dicefi la *Versiera*.

Poichè $AB = x$, $BM = y$, sarà AC l'asse delle x , ed AQ , parallela alla BM , l'asse delle ordinate y . Si ponga primieramente $x = 0$, sarà $y = \infty$, e però AQ l'asintoto della curva. Sia $y = 0$, sarà $a\sqrt{a - x} = 0$, e però $x = a$; quando adunque sia $x = a$, la curva taglierà l'asse AC , e passerà per conseguenza per lo punto C , che ne farà il vertice. Sia $x = AR = \frac{a}{2}$, sarà $y = a$;

sia $x = AP = \frac{3a}{4}$, sarà $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; sia $x = AF = \frac{4a}{5}$, sarà

$y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Posta x maggiore di a , la quantità sotto il segno

radicale sarà negativa, e la curva immaginaria. Per vedere se la curva sia concava, o convessa all'asse AC , si faccia la proporzione: come $CP = \frac{a}{4}$ (che corrisponde alla $x = \frac{3a}{4}$)

alla $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, così $CF = \frac{1}{5}a$ (che corrisponde alla $x = \frac{4a}{5}$)

al quarto, che sarà $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$; ma la $x = \frac{4a}{5}$ ci dà

$y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, e $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$ è minore di $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, adun-

que sarà la curva concava all'asse AC ; ma per l'asint.

l'asintoto AQ deve anche essere convessa, adunque sarà in parte concava, ed in parte convessa, e però avrà un flesso contrario, il quale si troverà col metodo da darsi a suo luogo; e perchè, presa la x negativa, è negativa la quantità sotto il vincolo radicale del denominatore, cioè immaginaria la y , perciò la curva sarà, come si vede nella Fig. 135. avvertendo, che essa curva è un ramo simile, ed eguale al ramo CLM , dalla parte delle y negative.

PROBLEMA IV.

139. *Data la retta indefinita NN , (Fig. 136.) e dato un punto P fuori della medesima, si domanda il punto M tale, che condotta da esso al punto P la retta MP , sia la intercetta fra la linea indefinita NN , ed il punto M , eguale ad una data linea, e perchè infiniti sono i punti, che soddisfanno, si cerca il luogo di essi punti.*

Si tiri dal punto P la retta PA perpendicolare alla NN , e la retta PM ad un qualunque punto M , che si supponga essere uno di quelli, che si cercano, e condotta la retta ME parallela alla NN , si chiami $PS=b$, $SE=x$, $EM=y$, e sia $SA=a$ la data linea, a cui deve essere eguale la retta NM , per la condizione del problema. Si tiri dal punto N la retta NO perpendicolare

alla

alla EM , sarà $MO = \sqrt{aa - xx}$, e per i triangoli simili PEM , NOM ; PE , $EM :: NO$, OM , cioè $b + x$, $y :: x$, $\sqrt{aa - xx}$, e però $b + x \sqrt{aa - xx} = xy$, e quadrando, $xyy = aaxx - x^4 + 2aabbx - 2bx^3 + aabb - bbyx$, e finalmente

$$y = \pm \sqrt{aaxx - x^4 + 2aabbx - 2bx^3 + aabb - bbyx}, \text{ equa-}$$

zione alla curva da descriversi, che è la *Concoide di Nicomede*.

Tre diversi casi possono distinguersi in questo problema; cioè può essere $b = a$; può essere b minore di a ; e finalmente b maggiore di a . Sia in primo luogo $b = a$, si muterà l'equazione nella seguente

$$y = \pm \sqrt{-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4}.$$

Poichè $SE = x$, $EM = y$, farà NN l'asse, a cui si riferiscono le y , e PA quello delle x , delle quali S è l'origine. Pongo in primo luogo $x = 0$, per vedere se la curva passa per lo punto S , e perchè ne viene, $y = \pm \frac{aa}{0}$, cioè y infinita positiva, e negativa, farà

NN l'asintoto della curva; pongo $y = 0$ per vedere dove la curva taglia l'asse PA , e sarà $-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4 = 0$, ondè risolta colle regole già insegnate, quest'equazione, le radici di essa ci determineranno i

punti

punti, ne' quali la curva incontra il detto asse PA ; ma quattro sono le radici di quell'equazione, cioè $x=a$ positiva, e tre eguali negative $x=-a$, dunque la curva incontrerà l'asse in due punti lontani dal punto S la quantità a , ma perchè non si tratta per ora, che delle x positive, basterà considerare il valore positivo, e però la curva passerà per lo punto A , essendo, come si è supposto, $SA=a$. Sia $x=\frac{1}{2}a$, farà $y=\pm\sqrt{\frac{27aa}{2}}$. Sia $x=\frac{2a}{3}$, farà $y=\pm\sqrt{\frac{125aa}{6}}$. Sia x maggiore di a , farà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, essendo in quest'ipotesi il primo termine maggiore del quarto, ed il terzo maggiore del secondo, onde presa la x maggiore di a , farà la curva immaginaria. Resta da vedersi se sia sempre essa curva convessa all'asse PA , giacchè in parte deve esserlo per cagione dell'asintoto NN . Si faccia adunque la proporzione: come $AE=\frac{1}{2}a$ (la quale corrisponde alla $x=\frac{1}{2}a$) alla $y=\sqrt{\frac{27aa}{2}}$, così $AI=\frac{1}{3}a$ al quarto, che farà $y=\sqrt{\frac{27aa}{3}}$, ma $AI=\frac{1}{3}a$ corrisponde alla $x=\frac{2a}{3}$, e perciò alla $y=\sqrt{\frac{125aa}{6}}$, e la $\sqrt{\frac{125aa}{6}}$ è maggiore di $\sqrt{\frac{27aa}{3}}$, dunque la curva sarà in parte concava all'asse PA , ed

in

in conseguenza avrà un flesso contrario, come si vedrà a suo luogo. E perchè al medesimo valore della x corrispondono due valori eguali della y , l'uno positivo, l'altro negativo, avrà la curva un'altro ramo dalla parte delle y negative simile, ed eguale a quello dalla parte delle positive, e sarà, come si vede descritta nella Fig. 136.

Per descrivere la curva dalla parte delle x negative, converrà cambiare i segni de' termini, ne quali la incognita è elevata a potestà dispari, onde sarà l'equazione $y = \pm \sqrt{-x^4 - 2a^2x + 2ax^3 + a^4}$. Sia in primo luogo adunque $x=0$, sarà $y = \pm \frac{aa}{0}$, e perciò NN l'asintoto della curva anche dalla parte dei negativi. Sia $y=0$, sarà $-x^4 - 2a^2x + 2ax^3 + a^4 = 0$, da cui si ricavano, come sopra, quattro radici; tre eguali positive $x=a$, ed una negativa $x=-a$. La radice negativa, che era positiva nel caso anteriore, si è già fissata nella concoide superiore; i tre valori eguali poi significano, che nel polo, distante appunto la quantità a dall'origine delle x , avrà la curva un regresso, di cui si tratterà nel metodo dei flessi contrarj. Sia $x = \frac{1}{2}a$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; sia $x = \frac{2a}{3}$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{5aa}{6}}$. Si prenda x maggiore di a , sarà la curva immaginaria,

perchè essendo la quantità sotto il vincolo radicale il prodotto di $xx - 2ax + aa$, quantità sempre positiva, in $aa - xx$, che in questa ipotesi è negativa, sarà negativa tutta la quantità sotto il segno radicale, e però immaginaria la ordinata y . Si faccia ora la proporzione: come $PR = \frac{1}{2}a$ (fatta $SR = \frac{1}{2}a$) alla $\sqrt{3aa}$, così

$PQ = \frac{1}{3}a$ (fatta $SQ = \frac{2}{3}a$) al quarto, che sarà $\sqrt{3aa}$,

ma alla $SQ = \frac{2}{3}a$, cioè alla $PQ = \frac{a}{3}$ corrisponde la

$y = \sqrt{5aa}$, e $\sqrt{5aa}$ è minore di $\sqrt{3aa}$, adunque sarà

sempre convessa la curva all'asse NN , (supposto, che non abbia flessi contrarij) ed avrà due rami simili, ed eguali fra loro, corrispondendo alla stessa x due valori eguali della y , l'uno positivo, l'altro negativo, e però sarà, come si vede descritta inferiormente nella Fig. 136.

240. Sia ora b minore di a , l'equazione è adunque

$$y = \pm \sqrt{aaxx - x^4 + 2abx - 2bx^2 + aabb - bbxx}$$

Pongo $x = 0$, farà $y = \pm \frac{ab}{0} = \pm \infty$, e però NN

(Fig. 137.) anche in questo caso l'asintoto della curva; sia $y = 0$, farà $aaxx - x^4 + 2abx - 2bx^2 + aabb - bbxx = 0$,

le di cui quattro radici (cioè $x = \pm a$, e due tra loro eguali $x = -b$) determineranno i punti, ne' quali la curva taglia l'asse PA ; ma per ora basterà considerare il valore positivo $x = a$, e perchè $SA = a$, sarà A il vertice della curva. Pongo $x = \frac{1}{2}a = SE$, sarà $y = \pm$

$$\sqrt{\frac{3aa + 12ab + 12bb}{2}} = EM. \text{ Pongo } x = \frac{2a}{3} = SI, \text{ sarà}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{20aa + 60ab + 45bb}{6}} = IK. \text{ Faccio la proporzione:}$$

$$AE \left(\frac{1}{2}a \right), EM \left(\sqrt{\frac{3aa + 12ab + 12bb}{2}} \right) :: AI \left(\frac{1}{3}a \right) \text{ al}$$

quarto IV , che sarà $\sqrt{\frac{3aa + 12ab + 12bb}{3}}$, per vedere se

la curva è concava, o convessa all'asse SA ; ma presa $AI = \frac{1}{3}a$, si ha $SI = \frac{2a}{3}$, a cui corrisponde

$$IK = y = \sqrt{\frac{20aa + 60ab + 45bb}{6}}, \text{ e si trova essere}$$

$$IV \left(\sqrt{\frac{3aa + 12ab + 12bb}{3}} \right) \text{ minore di } IK \left(\sqrt{\frac{20aa + 60ab + 45bb}{6}} \right),$$

dunque sarà la curva concava all'asse SA ; ma poichè va all'asintoto NN , sarà pure convessa, e però avrà un flesso contrario.

E' chiaro, che presa l'assisa oltre il punto A , cioè la x maggiore di a , non vi sarà curva, poichè il se-

condo termine del radicale sarebbe maggiore del primo, il quarto maggiore del terzo, il sesto maggiore del quinto, e però negativa la quantità sotto il vincolo, cioè immaginaria la y .

E perchè alla stessa asse x corrispondono due ordinate y eguali, una positiva l'altra negativa, sarà la curva la stessa anche dalla parte delle ordinate negative, ed a un di presso, come nella Fig. 137.

Per descrivere la curva dalla parte delle asse x negative, muto il segno nell'equazione ai termini, ne quali la x è a potestà dispari, ed è

$$y = \pm \sqrt{aaxx - x^4 - 2abx + 2bx^3 + abb - bxx}$$

Pongo $x = 0$, e trovo $y = \pm \frac{ab}{0}$, cioè infinita, e

però NN sarà pure l'asintoto. Pongo $y = 0$, e sarà $aaxx - x^4 - 2abx + 2bx^3 + abb - bxx = 0$; le quattro radici di quest'equazione, che sono, due $x = \pm a$, e due eguali $x = b$, determinano i punti, dove la curva taglia l'asse AP . La negativa $x = -a$ mi dà il punto A , la positiva $x = a$ il punto m , e le due eguali $x = b$ il punto P , che sarà un nodo della curva; presa $PR = SR = \frac{1}{2}b = x$, sarà $y = \pm \sqrt{4aa - bb} = RT$; presa $PQ = \frac{1}{3}b$, cioè $SQ = x = \frac{2}{3}b$, sarà $y = \pm \sqrt{9aa - 4bb} = QH$. Faccio

l'ana-

l'analogia $PR (\frac{1}{2}b)$, $RT (\sqrt[3]{4aa-bb}) :: PQ (\frac{1}{3}b)$,
 $QO (\sqrt[3]{4aa-bb})$, per vedere se la curva è concava,
 o convessa all'asse PS , ma $QO (\sqrt[3]{4aa-bb})$ è mag-
 giore di $QH (\sqrt[6]{9aa-4bb})$, adunque la curva è con-
 vessa all'asse PS , e seguita ad esserlo, andando all'asim-
 totto NN .

Presa l'assisa oltre il punto m , cioè x maggiore
 di a , non vi farà curva, perchè il radicale

$\sqrt[3]{aaxx-x^4-2aaxx+2bx^3+aabb-bbxx}$ è lo stesso,
 che $\sqrt[3]{aa-xx} \times xx-2bx+bb$, ma posta x maggiore
 di a , sarà $aa-xx$ quantità negativa, ed $xx-2bx+bb$
 è quantità positiva, adunque negativo il prodotto, e
 però immaginaria la ordinata y . Presa l'assisa oltre il
 punto P , cioè x maggiore di b , ma però minore di a ,
 sarà $aa-xx$, come pure $xx-2bx+bb$, quantità posi-
 tiva, e però positivo il prodotto, e reale la ordinata y ,
 adunque tra P , ed m corrisponderà pure la curva, e
 sarà essa la foglia $Pxmy$ col nodo in P , e la curva sarà
 a un di presso, come nella Fig. 137.

241. Sia finalmente b maggiore di a , l'equazione
 è la stessa del caso anteriore, e prese le assisse x posi-
 tive,

tive, è pure simile la curva, prese poi le x negative, e supposta $y=0$, le quattro radici dell'equazione, cioè $x=\pm a$, e le due eguali $x=b$ danno bensì i medesimi punti A, m, P nell'asse PA ; ma il punto m è al di sopra del punto P , ed assunta l'assisa maggiore di Sm , cioè x maggiore di a , farà $ax-xx$ quantità negativa, e perchè è $xx-2bx+bb$ quantità positiva, farà negativo il prodotto, e però immaginaria l'ordinata y , adunque la curva non avrà la foglia dell'anteriore, ma avrà in m il vertice. E poichè la curva è prima concava, e poi convessa all'asse PS , come facilmente si può vedere, e va all'asintoto NN , farà a un di presso, come nella Fig. 138.

242. Questo metodo di descrivere le curve per infiniti punti può forse ridursi a maggior perfezione col servirsi anche di costruzioni geometriche. Ne darò alcuni esempj, i quali basteranno a mettere la cosa in chiaro.

ESEMPIO I.

Vogliasi costruire per varj punti la curva del Problema I. num. 236., che è la Cissoide di Diocle, la di cui equazione si è trovata essere $y = \frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Col

Col raggio $AC = \frac{1}{2}a$ (Fig. 133.) descritto il circolo AEB , e presa ad arbitrio $AP = x$, osservo, che la corrispondente ordinata Pf è $= \sqrt{ax - xx}$; per lo punto f tiro il diametro fCD , e congiunti i punti A, D colla linea AD , il punto M , in cui essa taglia l'ordinata superiore PF continuata, se fa bisogno, sarà alla Cissoide. Imperciocchè essendo retto l'angolo nel semicircolo fAD , siccome pure l'angolo APM delle coordinate, saranno simili i triangoli Afp, APM , e però sarà l'analogia $fp, AP :: AP, PM$, cioè $\sqrt{ax - xx}, x :: x, y$, onde sarà $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, il che cc.

In altra maniera: poichè sono simili i triangoli PCf, CDO , per esser retti gl'angoli P, O , ed eguali gl'angoli al vertice PCf, DCO ; ed in oltre $Cf = CD$, sarà anco $CP = CO$, proprietà della curva.

ESEMPIO II.

Sia la curva del Problema II. num. 237, la cui equazione è $\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Col raggio $AB = a$ (Fig. 134.) si descriva il circolo AfD , presa una qualunque $AP = x$, si tiri dal punto P l'ordinata $PF = \sqrt{2ax - xx}$, e condotto il raggio Bf , si tiri AHE ad

ad esso normale, taglierà questa l'ordinata PF continuata, se bisogna, nel punto M , che sarà alla curva AMB , che si cerca. Imperocchè essendo simili i due triangoli AMP , FMH , ed in oltre simili i triangoli FMH , FBP , sarà il triangolo AMP simile al triangolo FBP , e però si avrà $PF, PB :: AP, PM$, cioè $\sqrt{2ax - xx}, a - x :: x, y$, onde si ricava l'equazione proposta $\frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}} = y$, il che ec.

In altra maniera: poichè il triangolo AMP è simile al triangolo AHB , e si è veduto di sopra, che il triangolo AMP è simile pure al triangolo FPB , sarà il triangolo AHB simile al triangolo FPB , ma il lato $AB = BF$, dunque sarà anche $BH = BP$; si tiri la retta MI parallela ad AB , faranno simili i triangoli BHE , MIE , ma faranno anche fra loro equilateri, essendo $BH = BP = MI$, dunque sarà $EB = EM$, che è la proprietà fondamentale della curva proposta.

ESEMPIO III.

Sia da descriversi la Versiera del Problema III. num. 28., la di cui equazione è $y = a \sqrt{\frac{ax - xx}{x}}$. Essendo il diametro del circolo $AC = a$, e presa ad arbitrio

trio una qualunque $AB=x$, (Fig. 135.) si tirino le indefinite BM , CE perpendicolari ad AC , indi per lo punto D , in cui la BM taglia il circolo, si tiri AD , che prodotta taglierà CE in E , dal punto E si abbassi una parallela ad AC , incontrerà essa la BM nel punto M , che appartiene alla curva. In fatti, per la proprietà del circolo, $BD=\sqrt{ax-xx}$, e, per i triangoli simili ABD , ACE , è $AB, BD :: AC, CE$, cioè $x, \sqrt{ax-xx} :: a, CE=a\sqrt{ax-xx}=y$, equazione della curva.

ESEMPIO IV.

Sia da descriverfi per varj punti la Concoide di Nicomede del Problema IV. num. 239., la di cui equazione $\pm y=b \pm x \sqrt{aa-xx}$; sia $SA=Sa=a$, $SP=b$,

col raggio $SA=a$ si descriva il circolo $ABCa$, (Fig. 139.) e prese ad arbitrio due assisse SE , Se tra loro eguali, che si chiamino x , positive, e negative, si tirino le ordinate EB , eC , ciascuna delle quali farà $=\sqrt{aa-xx}$, e si producano oltre i punti B, C indefinitamente, per i punti S, B si tiri la retta SB , e per lo punto P ad essa si tiri parallela la PM ; i due punti M, m , ne' quali la PM taglia le due rette EB, eC ,

Ddd

ap-

apparterranno alla curva, che si cerca, vale a dire il punto M al ramo superiore, ed il punto m al ramo inferiore della Concoide.

E quanto al punto M : poichè sono simili i due triangoli SEB , PEM , farà $SE, EB :: PE, EM$, cioè $x, \sqrt{aa - xx} :: b + x, y$; e conseguentemente l'equazione $y = \frac{b + x\sqrt{aa - xx}}{x}$ spettante al ramo superiore della Concoide.

Riguardo poi al punto m , condotta la linea SC , farà il triangolo SeC eguale al triangolo SEB , ma il triangolo Pem è simile al triangolo SEB , dunque farà anco simile al triangolo SeC , e però si avrà l'analogia $Pe, em :: Se, eC$, cioè $-x, \sqrt{aa - xx} :: b - x, y$, onde si ricava l'equazione $y = \frac{b - x\sqrt{aa - xx}}{-x}$, che è appunto quella, che appartiene al ramo inferiore della curva.

Condotta per lo punto S la indefinita SN parallela alle ordinate EM, em , facilmente si ricava dalla costruzione superiore la principale proprietà della Concoide, cioè, che se dal polo P si condurrà la PM , la quale tagli la curva nei punti M, m , e la SN nel punto N , faranno le intercette mN, NM fra la curva, e la indefinita SN di lunghezza sempre costante, ed
eguali

eguali ad $SA=SB=s$. Imperciocchè per la costruzione sarà $SBMN$ un parallelogrammo, e però $NM=SB$, ma condotta NO parallela ad Se , sono simili i triangoli SBE , mNO , ed in oltre $NO=Se=SE$, dunque sarà $mN=SB$, ed in conseguenza $mN=NM$, il che ec.

243. Le costruzioni dei primi tre Esempj riescono assai semplici, non essendosi in esse adoperati se non che circoli di dato diametro, e rette linee. In altri incontri verranno ad uso le sezioni coniche, descritte anche tal' ora con diametri, parametri, e rettangoli variabili, ma che si prendono come costanti per determinare uno, o più punti della curva.

Per darne nn' esempio: vogliasi costruire per punti la curva dell' equazione $x\sqrt{2ax-xx}=yy$ (Fig. 140.) Descritto il circolo $AHBb$, il di cui diametro $AB=2a$, prendo ad arbitrio $AD=KB=x$, sarà $DE=KI=\sqrt{2ax-xx}$. Col parametro DE , all'asse AB descrivo la parabola apolloniana $GFAfg$, e DF , Df daranno i valori positivo, e negativo di y , posta $x=AD$; KG , Kg i valori positivo, e negativo di y , posta $x=AK$. I quattro punti per tanto F , f , G , g saranno nella curva cercata. Con simil metodo, variato il valore della x , si determineranno altri punti della nostra curva.

244. La seconda maniera di costruire le curve superiori al secondo grado sarà, come ô detto al num. 220., per

mezzo di altre linee di grado inferiore; e per cominciare dalle parabole di qualunque grado, si osservi primieramente, che la parabola apolloniana è una sola, e si esprime coll'equazione $ax = yy$; le cubiche sono due, cioè $aaax = y^3$, $axx = y^3$; quelle del quarto grado sono tre, cioè $a^3x = y^4$, $aaaxx = y^4$, $ax^3 = y^4$. Quelle del grado n sono $n - 1$, cioè $ax^{n-1} = y^n$; $aaax^{n-2} = y^n$; $a^3x^{n-3} = y^n$; $a^4x^{n-4} = y^n$, e così successivamente, fin' a tanto, che l'esponente della x sia l'unità.

245. Tutte quelle, che hanno la x coll'esponente dell'unità, si chiamano parabole prime, onde $aaax = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^{n-1}x = y^n$ sono tutte parabole prime.

Per costruire qualunque parabola di qualsivoglia grado, si dia principio dalla parabola prima cubica $aaax = y^3$.

E' manifesto, che questa averà due rami, uno positivo, negativo l'altro, imperocchè pigliando la x positiva, sarà positiva anche la y , cioè $y = \sqrt[3]{aaax}$, e questo sarà il ramo positivo. Ma pigliando la x negativa, sarà negativa anche la y , cioè $y = \sqrt[3]{-aaax}$, (che non è punto quantità immaginaria) e questo sarà il ramo negativo. E' chiaro, che i due rami vanno all'infinito, e sono concavi all'asse AB . (Fig. 141.)

Per passare alla costruzione: si ponga $yy = az$, e sostituendo nell'equazione $aaax = y^3$, in luogo di yy , questo

sto valore az , l'equazione alla parabola cubica si muterà in quest'altra $ax = zy$, che si risolve nella seguente analogia $a, z :: y, x$.

Ciò posto, all'asse AB si descriva la parabola dell'equazione $yy = az$, e sia DAE . Sia $AB = z$, $BE = y$, $BD = -y$, $AC = a$, e si conduca CB , e per lo punto A la linea KAF parallela alla CB , e fatta $AG = BE$, si tiri GE , sarà $CA, AB :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, onde presa ad arbitrio la AB , le corrispondenti BE , o sia AG , e GF saranno le coordinate della nostra parabola cubica, ed F ne farà un punto; imperocchè restituendo nell'analogia $a, z :: y, x$ il valore di z , cioè $\frac{yy}{a}$, sarà $a, \frac{yy}{a} :: y, x$, che appunto ci dà l'equazione $y^3 = ax^2$.

Ma perchè, quando si prenda x negativa, anche y è negativa, l'analogia $a, z :: y, x$ si muterà nella seguente $a, z :: -y, -x$; onde presa $AV = BD$, sarà $CA, AB :: AV, VK$, cioè $a, z :: -y, -x$, ed il punto K farà nella parabola cubica. Il ramo AMF sarà il positivo, ed il ramo ANK il negativo.

246. Sia proposta da costruirsi la parabola prima del quarto grado $a^2x = y^4$. Questa avrà pure due rami, uno sopra l'asse, l'altro al di sotto, perchè alla x positiva corrisponde tanto y , quanto $-y$, per essere l'indice della potestà della y di numero pari. Questi due rami sa-

ran-

ranno concavi all'asse, ed anderanno all'infinito. Per passare alla costruzione, faccio $y' = aaz$, e sostituendo in luogo di y' questo valore nell'equazione proposta, si avrà $zy = ax$, o sia $a, z :: y, x$.

All'asse KC (Fig. 142.) si descriva la parabola dell'equazione $y' = aaz$, che, per essere la prima cubica, già si fa costruire, e sia questa la QAD , sarà $AC = GD = z$, $AK = -z$, $CD = AG = y$, $KQ = -y$. Prendasi $AB = a$, e si tirino le rette BC , BK , e per lo punto A sia AF parallela a BC , ed AP parallela a KB , cioè posto, sarà $BA, AC :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, ed il punto F sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $z = \frac{y'}{aa}$, sarà $a, \frac{y'}{aa} :: y, x$, cioè $a^3x = y^4$.

Ma poichè, essendo x positiva, si può prendere la y anche negativa, che in questo caso sarà la KQ , e la AK sarà $-z$, avrassi pure $BA, AK :: KQ$ (cioè AR), RP , o sia $a, -z :: -y, x$, e però il punto P sarà nella curva $a^3x = y^4$.

247. Sia proposta da costruirsi la parabola prima del quinto grado $a^4x = y^5$. Questa ancora avrà due rami, uno positivo, negativo l'altro; imperocchè pigliando x positiva, sarà y positiva, cioè $y = \sqrt[5]{a^4x}$, ma pigliando x negativa, sarà y negativa, cioè $y = \sqrt[5]{-a^4x}$.

Questi

Questi due rami vanno all'infinito, e sono concavi all'asse AB . Per passare alla costruzione: faccio $y^2 = a^2 z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, sarà $ax = yz$, o sia $a, z :: y, x$.

All'asse AB (Fig. 141.) si descriva la parabola dell'equazione $y^2 = a^2 z$, e sia DAB . Essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, $BD = -y$. Sia $AC = a$, e si conduca CB , e ad essa parallela la KAF , indi si tiri la retta EFG , e la parallela DFK . Ciò posto, sarà $CA, AB :: AG, GF$, ($a, z :: y, x$) ed il punto F sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $a^2 z = y^2$, sarà $a, y^2 :: y, x$, cioè $y^2 = a^2 x$.

Ma perchè essendo x negativa, anche la y sarà negativa, l'analogia $a, z :: y, x$ si muta nella seguente $a, z :: -y, -x$, onde presa $AV = DB$, sarà $CA, AB :: AV, VK$ ($a, z :: -y, -x$), ed il punto K sarà nella curva proposta da costruirsi. Il ramo AMF sarà il positivo, ed il ramo ANK il negativo.

248. Generalmente sia proposta da costruirsi la parabola $a^{n-1}x = y^n$. Facciasi $y^{n-1} = a^{n-1}z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, si avrà sempre $zy = ax$. Onde si scopre, che si potrà sempre costruire qualunque parabola prima per mezzo del triangolo, e della parabola prima del prossimo grado inferiore.

249. Ora sarà facile passare alla costruzione dell'altre para-

parabole ancora, cioè alla costruzione delle seconde, terze, quarte ec. di qualunque grado; anzi queste pure si sono costruite nella costruzione delle prime.

Sia proposta da costruirsi la seconda parabola cubica $axx = y^3$. Pongo $y^3 = aaz$, dunque sostituendo nell'equazione proposta, in luogo di y^3 , il suo valore, aaz , sarà $xx = az$.

All'asse AB (Fig. 143.) si descriva la parabola apolloniana AC dell'equazione $xx = az$, indi allo stesso asse si descriva la prima parabola cubica dell'equazione $y^3 = aaz$, ed essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, ma nella parabola apolloniana AC , essendo $AB = z$, sarà $BC = x$, dunque si avranno sempre le due coordinate x , y della seconda parabola cubica.

Sia proposta da costruirsi la parabola terza del quarto grado $ax^4 = y^4$. Pongo $a^4z = y^4$, dunque sostituendo, sarà $x^4 = aaz$. Sia costruita la parabola prima cubica $x^3 = aaz$, ed al medesimo asse si costruisca pure la prima del quarto grado $y^4 = a^4z$. Le due ordinate di queste curve corrispondenti alla medesima asissa z daranno le coordinate x , y dell'equazione proposta $ax^4 = y^4$.

In tutte le altre di qualunque grado superiore si proceda collo stesso metodo, bastando i dati esempi, per essere la cosa da se chiara.

250. Solo rimane da osservarsi, che la parabola seconda del quarto grado $aaxx = y^4$ non è altro, che

la

la parabola apolloniana, ma raddoppiata in senso contrario. E primieramente se è $aaxx = y^4$, farà anche, estraendo la radice quarta, $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ora $\sqrt{ax} = \pm y$, o sia $ax = yy$, altro non è, che l'equazione alla parabola apolloniana. La nostra curva poi è una parabola apolloniana raddoppiata, poichè il termine $aaxx$ viene egualmente generato tanto da $+ax \times +ax$, quanto da $-ax \times -ax$, verificandosi del pari, essere $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt[4]{+ax \times +ax} = \sqrt[4]{-ax \times -ax} = \sqrt{ax} = \pm y$. Alle x negative per tanto corrispondono le y reali, ed il ramo MAN della parte dei negativi (Fig. 144.) farà affatto simile al BAC dalla parte dei positivi, avverandosi rispetto ad entrambi l'equazione $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ma la parabola apolloniana non à il ramo dalla parte dei negativi, poichè posta x negativa, si à $\sqrt{-ax} = \pm y$, curva immaginaria.

Se si alzerà l'equazione $ax = yy$ alla terza potestà, la curva corrispondente alla equazione $a^3x^3 = y^6$ non farà, che la sola parabola apolloniana. Alzata l'equazione $ax = yy$ alla quarta potestà, la curva corrispondente alla formola $a^4x^4 = y^8$ torna ad essere la parabola apolloniana raddoppiata in senso contrario. Generalmente se la potestà, a cui si alza la formola $ax = yy$,

Ecc

farà

farà pari, soddisfarà la parabola apolloniana raddoppiata; e se sarà dispari, soddisfarà la parabola apolloniana semplice.

Una tale dottrina si può applicare a tutte le parabole, ed iperbole prime, la di cui equazione canonica si è (prendendo per n un numero qualunque intiero affermativo, o negativo) $a^{n-1}x = y^n$. Alzata questa a potestà pari, la curva propria della nuova equazione sarà la parabola, o iperbola $a^{n-1}x = y^n$ raddoppiata, in senso contrario. Se la potestà sarà dispari, svanirà il raddoppiamento, e resterà la curva semplice propria dell'equazione $a^{n-1}x = y^n$.

251. Dalla costruzione delle parabole di qualunque grado si fa passaggio alla costruzione degl' Iperboloidi pure di qualunque grado.

Gli iperboloidi del terzo grado sono due, cioè $a^3 = xxy$, $a^3 = xyy$. Sia proposto da costruirsi l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xxy$. Questa curva avrà due rami, che vanno agl'asintoti, e l'uno, e l'altro avrà le ordinate positive, ma le assisse in uno saranno positive, negative nell'altro.

Per costruirla: pongo $xx = az$, e sostituendo, sarà $aa = zy$. Fra gl'asintoti AM , AG (Fig. 145.) si descriva l'iperbola FQ dell'equazione $aa = zy$. Presa adunque $A G = z$, sarà $G F = y$, indi dal punto G in angolo semiretto si si conduca GB , e sarà $AB = AG = z$; all'asse AB si descri-

descriva la parabola CAE dell'equazione $az = xx$, indi condotte le ordinate BC , BE , e le indefinite CK , EP parallele alla BA , farà $AH = BE = x$, e tirata FK parallela a GD , farà $HP = GF = y$. Istessamente farà $AD = BC = -x$, $DK = y$, ed i punti P , K faranno nella curva proposta.

Ometto la costruzione dell'equazione $a' = xy$, perchè è la medesima, mutandosi solo le veci delle coordinate.

252. Sia proposto l'iperboloide del quarto grado, e sia l'equazione $a' = x'y$. Questa curva avrà due rami, che vanno agl'asintoti, in uno de' quali farà x positiva, ed y positiva, e nell'altro x negativa, ed y negativa.

Pongo $x' = aaz$, dunque sostituendo, si avrà $zy = aa$. Fra gl'asintoti MF , TG , (Fig. 146.) indefinitamente prodotti, si descriva l'iperbola ER , KO dell'equazione $zy = aa$, e farà $AF = z$, $FE = y$, $AM = -z$, $MK = -y$; dal punto F si tiri FG in angolo semiretto, a cui sia parallela MT , e farà $AG = AF = z$; $AT = AM = -z$. All'asse TG si descriva la parabola cubica SAH dell'equazione $x' = aaz$, e farà $AI = GH = x$, $AP = TS = -x$; onde condotte le rette EC , KV parallele alla AI , farà $IC = y$, $PV = -y$, ed i punti C , V nella curva proposta.

Quì pure ometto la costruzione dell'equazione $a' = xy$, perchè è la medesima, mutandosi solo le ve-

ci delle coordinate. Ommetto ancora la costruzione dell'equazione $a' = xxyy$, perchè questa si riduce all'iperbola apolloniana.

253. Sia proposta la curva iperboloide del quinto grado, e sia in primo luogo l'equazione $a' = x^4y$. Questa avrà due rami, che vanno agl'asintoti, in uno de' quali presa x positiva, sarà pure positiva la y ; nell'altro presa la x negativa, cioè non ostante, sarà la y positiva.

Pongo $x^4 = a^1z$, dunque sostituendo, sarà $aa = zy$. Fra gl'asintoti AG , AM si descriva l'iperbola apolloniana FQ dell'equazione $aa = zy$, (Fig. 145.) onde presa $AG = z$, sarà $GF = y$. Dal punto G in angolo semiretto si conduca la GB , e sarà $AB = AG = z$. All'asse AB si descriva la parabola CAE dell'equazione $x^4 = a^1z$, e sarà $BE = AH = x$, $BC = AD = -x$, e condotta FK parallela alla GD , e le CK , EP perpendicolari alla stessa, sarà $HP = DK = GF = y$, ed i punti P , K nella curva proposta.

Sia l'altra equazione $a' = x^1yy$ dell'iperboloide dello stesso grado, questa avrà due rami, imperocchè alla stessa x positiva corrispondono due ordinate y , una positiva, negativa l'altra.

Pongo $x^1 = aaz$, dunque sostituendo, sarà $a^1 = zyy$. Fra gl'asintoti DM , CN (Fig. 147.) sia descritto l'iperboloide RG , FV dell'equazione $a^1 = zyy$, ed essen-

do

do $AH = y$, $AP = -y$, sarà $HI = z = PK = AB$. All'asse PH si descriva la parabola cubica AS dell'equazione $x^3 = aaz$, indi dal punto B si conduca ad angolo semiretto la BQ , e si alzi la perpendicolare QS , sarà adunque $AQ = z$, $QS = x$. Per lo punto S si conduca la retta OT parallela all'asintoto NC , e che incontri le prodotte HI , PK ne' punti T , O ; essendo adunque $AH = y$, sarà $HT = x$, $AP = -y$, $PO = x$, ed i punti O , T saranno nella curva proposta.

Le costruzioni dell'altre due equazioni $a^3 = xxy$, $a^3 = xy^3$ sono le medesime, mutandosi solo le veci delle coordinate. Con lo stesso artificio si costruiranno facilmente tutti gl'iperboloidi di qualunque grado.

254. E' da notarsi, che tutte le parabole prime descritte intorno ad un'asse medesimo si tagliano nel medesimo punto; imperciocchè presa per ciascuna di esse la medesima asse $x = a$, sarà per tutte la medesima ordinata corrispondente $y = a$, il che non può essere se non tagliandosi tutte nel medesimo punto.

255. In oltre, le parabole superiori di dimensioni (intendendo delle prime) cadono prima di arrivare al punto della sezione al di sopra delle inferiori, avvicinandosi più alla tangente nel vertice, e dopo la sezione più quelle, che queste, si accostano all'asse; poichè essendo nella parabola apolloniana $y = \sqrt{ax}$, nella

nella prima cubica $y = \sqrt[3]{aax}$, nella prima del quarto grado $y = \sqrt[4]{a^3x}$ ec., se si prenda x minore di a , farà $\sqrt{ax}$ minore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ minore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.; ed all'opposto, presa x maggiore di a , farà $\sqrt{ax}$ maggiore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ maggiore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.

Istessamente, e per simil ragione gli iperboloidi (intendendo pure de' primi) si tagliano tutti nel vertice, ed i superiori di dimensioni cadono dopo il punto della sezione al di dentro tra gl' inferiori, e l'asintoto, su cui si prendono le x ; e dalla parte dell'asintoto parallelo alla y gl' inferiori cadono al di dentro tra i superiori, e l'asintoto stesso.

256. Restano ora da costruirsi quelle equazioni, che hanno più termini, le quali io distinguo in tre casi. Chiamo del primo caso quelle, che hanno un solo termine, in cui sia l'indeterminata y , e questa di una sola dimensione. Del secondo caso quelle, che hanno un solo termine, in cui sia l'indeterminata y , e questa elevata a qualunque potenza. Del terzo caso quelle, in molti termini delle quali si ritrova l'indeterminata y , ed elevata a qualunque potenza.

CASO

CASO I. ESEMPIO I.

257. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $a^4 - x^4 = a^4 y$. Pongo $y = t - q$, e faccio le due equazioni $a^4 = a^4 t$, $x^4 = a^4 q$. All'asse AB (Fig. 148.) descrivasi la parabola MAC dell'equazione $x^4 = a^4 q$, ed essendo $AD = q$, farà $DH = x$, $DF = -x$. Ma per l'equazione $a^4 = a^4 t$, farà $t = a$, e però presa $AB = a = t$, farà $DB = t - q$, cioè $= y$; onde presa ad arbitrio una qualunque assissa $BS = DH = x$, e $BO = DF = -x$, le SH , OF , parallele a BA , saranno le corrispondenti ordinate della curva proposta, la quale è una porzione della medesima parabola del quarto grado.

ESEMPIO II.

258. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a^4 y$. Questa curva, per le regole già note, si fa avere tre rami, due infiniti, e positivi, ed uno negativo con un massimo, che per ora non si fa riconoscere, e l'asse sarà tagliato in due punti. Pongo $y = z + t$, e faccio le due equazioni $x^4 = a^4 z$, $x^3 = aat$. All'asse AB (Fig. 149.) si descriva la parabola MAD dell'equazione $x^4 = a^4 z$, ed essendo $AF = z$, farà $FD = AE = x$. Per lo medesimo punto A si descriva la parabola

rabola cubica CAP dell'equazione $x^3 = aat$, ed alla medesima x corrisponderà $PE=t$, onde essendo $AE=x$, farà $PE+ED=z+t=y$, fatta PD parallela alla AF , dal che si vede, che presa x positiva, la y cresce in infinito.

Presa poi x negativa, farà t negativa, e per conseguenza $y=z-t$. Sia $AG=x$ negativa, farà $GM=z$, $GT=t$, onde $y=MT$ negativa, e fra tutte le MT vi è una massima. Presa $x=-a$, farà $GM=GT$, onde $y=0$. Presa x negativa, e maggiore di a , farà $GM-GT$ quantità positiva, onde la y farà positiva, e crescerà in infinito.

La curva farà a un di presso della seguente forma, prendendo le x dal punto A . (Fig. 150.)

ESEMPIO III.

259. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 - aaxx = a'y$. Questa curva avrà quattro rami; due positivi, ed infiniti; due negativi, e finiti. In due punti taglierà l'asse, ed in uno lo toccherà, avrà due massimi negativi ec.; il che si saprà dalle regole da darsi a suo luogo.

Pongo $y=z-q$, e faccio le due equazioni $x^4 + ax^3 = a'z$, $-xx = -aq$. La curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a'z$ già si fa costruire in virtù di questo metodo, e

sia

sia questa $CBADG$, (Fig. 151.) in cui presa $AK=x$ positiva, sarà $KG=z$; presa x negativa $=AP$, sarà z negativa $=PB$, presa x negativa, e maggiore di AO , sarà z positiva. All'asse AN si descriva la parabola TAH dell'equazione $xx=aq$. Essendo dunque $AK=x$ positiva, sarà $KH=q$, e $GH=z-q=y$, la quale crescerà in infinito, crescendo la x in infinito. Nel punto F , sarà $z=q$, ed $y=0$. Fra il punto F , ed il punto A , sarà q maggiore di z , onde $z-q$ sarà quantità negativa, ed y negativa, e vi sarà un massimo negativo. Nel punto A sarà $z=0$, $q=0$, $y=0$. Presa x negativa $=AP$, sarà $z=BP$, e negativa, onde sempre y negativa. Fra il punto A , ed il punto O vi sarà una massima BQ , onde vi sarà una massima y negativa. Presa x negativa, e maggiore di AO , sarà z positiva, ma minore di q , onde y negativa. Presa x negativa, ed eguale ad AM , sarà $z=q$, ed $y=0$. Presa x negativa, e maggiore di AM , sarà sempre z maggiore di q , onde sempre y positiva in infinito.

Se l'equazione sarà più numerosa di termini, lo stesso artificio servirà, ed abbenchè la costruzione in questo caso si faccia più composta, ed imbrogliata, tuttavia però non sfugge il metodo.

Si poteva in altra maniera ancora costruire l'ultima equazione, facendo $y=z+t-q$, indi $x'=a'z$, $x''=aat$, $-xx=-aq$, e col mezzo di queste tre curve ausilia-

rie passare alla costruzione della principale, il che ometto per brevità.

260. Può forse sembrare, che nelle passate costruzioni, e nelle poche, che seguono, sia necessario che l'angolo delle coordinate sia retto, essendosi tale supposto; ma se ben si rifletta, si vedrà, che esso angolo può essere, come si vuole, quando si usi qualche piccola attenzione intorno all'angolo delle coordinate delle curve sussidiarie introdotte, relativamente all'angolo delle coordinate dell'equazione proposta.

CASO II. ESEMPIO IV.

261. Sia proposta da costruirsi l'equazione $x^n \pm a' x^{n-1} \pm a'' x^{n-2} \pm a''' x^{n-3} \pm \dots \pm ec. = y^2$, Pongo $y^2 = a'^2 - x^2$, e sostituendo questo valore in luogo della y^2 , l'equazione farà $x^n \pm a' x^{n-1} \pm a'' x^{n-2} \pm a''' x^{n-3} \pm \dots \pm ec. = a'^2 - x^2$: col metodo del primo caso si costruisca questa curva, poscia si descriva la parabola dell'equazione $y^2 = a'^2 - x^2$, e si avrà la relazione tra le x , e le y della curva proposta.

CASO

CASO III. ESEMPIO V.

262. Sia proposta da costruirsi l'equazione

$$x^m \pm ax^n \pm bx^s \pm \text{ec.} = y^p \pm y^q \pm \text{ec.}$$

Pongo $y^p \pm y^q \pm \text{ec.} = z$, dunque sostituendo, l'equazione sarà $x^m \pm ax^n \pm bx^s \text{ ec.} = z$. Col metodo del primo caso si costruisca l'una, e l'altra di queste due curve ausiliarie al medesimo asse, in cui si prendono le z , e si avrà la relazione delle due coordinate x , ed y della curva proposta.

263. Sino ad ora non sono state da me considerate se non quelle equazioni, che hanno le incognite separate, così che, quando esse incognite sono miste fra loro, le regole date non hanno più luogo.

In questi casi bisogna, o con l'ordinaria divisione, o con l'estrazione delle radici, o con una congrua sostituzione, o con altri ripieghi procurare di separare le indeterminate medesime. Come se fosse l'equazione $a^1y + axxy = aaxx + x^4$, dividendo per $a^1 + axx$, sarebbe $y = \frac{aaxx + x^4}{a^1 + axx}$; e se fosse l'equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$,

$$\frac{a^1 + axx}{a}$$

fatta la sostituzione $z = \frac{yx}{a}$, avremmo l'equazio-

ne $a'z + aazz = x' + a'$, nella quale le incognite sono separate.

Così preparate le proposte equazioni, si passa alla costruzione nella seguente maniera.

ESEMPIO VI.

264. Sia l'equazione da costruirsi $y = \frac{aaxx + x^4}{a' + axx}$.

Pongo $aaxx + x^4 = a'p$; pongo di più $a' + axx = aat$; e sostituendo questi valori nell'equazione proposta, sarà $y = \frac{ap}{t}$, cioè $t, p :: a, y$.

La curva proposta avrà due rami, che vanno all'infinito; alle x tanto positive, quanto negative corrisponderanno le y positive.

All'asse HD (Fig. 152.) si descriva la curva LAC dell'equazione $aaxx + x^4 = a'p$, e pigliando $AD = x$, sarà $DC = p = AB$. Si prenda $AF = a = AM$, indi col vertice F , all'asse HD si descriva la curva PFE dell'equazione $a' + axx = aat$, e pigliando $AD = x$, sarà $DE = t$, onde essendo $DC = p$, sarà $DE = t$, e fatta EG parallela ad AD , dal punto G si tiri in angolo semiretto la GH , sarà $AH = t$. Dal punto C si tiri

CB

CB parallela a DA , e si conduca la retta BH , a cui sia parallela MK , sarà $AK=y$, essendo $AD=x$; imperocchè, per i triangoli simili AMK , AHB , sarà AH , $AB::AM$, AK , cioè r , $p::a$, $AK=\frac{ap}{r}=y$, onde condotta parallela all'asse la KQ , faranno le AD , DQ le due coordinate della curva proposta. Per avere l'altro ramo della nostra curva, basta prendere le x dalla parte dei negativi, e replicare nella parte contraria la medesima costruzione.

ESEMPIO VII.

265. Sia ora proposta da costruirsi l'altra equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$, la quale trattata colle regole delle quadratiche affette avrà le incognite separate; ovvero colla sostituzione $z = \frac{xy}{a}$ si ridurrà ad essere $a^4z + aazz = x^4 + a^4$. Col metodo del terzo caso si costruisca questa equazione, e si averanno le due coordinate x , z ; indi si faccia l'analogia x , $z::a$ al quarto, che sarà la y ec. Se una sostituzione non gioverà per liberare le indeterminate dalla confusione, se ne devono tentare dell'altre, e quando niuna serva, le equazioni sfuggono il metodo esposto, onde bisogna ricorrere ad altri artifizj.

266. Una congrua sostituzione può servire negl' altri casi ancora, ne' quali le indeterminate sono separate, e quindi alle volte somministrare una costruzione più facile, e più elegante, e però sarà sempre bene mettere alla prova diversi artifizj, ed in fine appigliarsi a quello, che si giudicherà migliore.

ESEMPIO VIII.

267. Sia l'equazione $y^4 - 4zy^3 + 4aayy = 2a^2x$. Faccio $2a^2x = z^4$, e però farà $y^4 - 4zy^3 + 4aayy = z^4$; cioè $yy - 2ay = zz$, o pure $2ay - yy = zz$.

Costruisco adunque questo luogo, che sarà nel primo caso alle due Iperbole equilatera opposte coll'asse trasverso $= 2a$; ed al Circolo nel secondo caso col diametro $= 2a$, e generalmente a quelle, ed a questo insieme. Al diametro trasverso $AB = 2a$ (Fig. 153.) sieno descritte le due iperbole equilatera AMH , BMH , ed il circolo AMB ; indi descritta al vertice A la parabola dell'equazione $2a^2x = z^4$, edalzata la perpendicolare AQ indefinita, e presa una qualunque $AD = z$, indi condotta MM parallela ad AB , faranno le $DS = x$, e le $DM = y$ positive nel circolo, e nell'iperbola da A verso B ; e

ne-

negative nell' iperbola dalla parte opposta, e la curva sarà a un di presso, come $KAGBF$, (*Fig. 154.*) in cui i due rami AK negativo, e BF positivo vanno all' infinito, nè avrà ramo alcuno al di sotto dell' asse AB , perchè non può mai avere la x negativa.



C A P O VI.

Del metodo de' Massimi, e Minimi, delle Tangenti delle Curve, de' Flessi contrarj, e Regressi, facendo uso della sola Algebra Cartesiana.

268. **Q**uantunque il calcolo degl'infinitesimi sia il più semplice, il più breve, ed il più universale per trattare tali questioni, non voglio però, prima di terminare l'Algebra Cartesiana, lasciare di mostrare brevemente, e per modo d'erudizione, come le soluzioni di questi quesiti possano nelle curve geometriche (cioè in quelle, che sono espresse da equazione finita algebrica) averli senza l'ajuto del calcolo differenziale.

E per cominciare da' Massimi, e da' Minimi, vale a dire dal ritrovare nelle curve geometriche le massime, o le minime ordinate; sia la curva AGB (Fig. 155., e 156.), e presa una qualunque ordinata DM , si tiri MF parallela all'asse delle assisse AB , faranno eguali le due ordinate DM , EF , alle quali corrispondono due diverse assisse AD , AE ; ma quanto più le ordinate DM , EF anderanno egualmente accostandosi fra di loro, sempre minore si farà la differenza delle assisse AD , AE , finché cadendo finalmente le due ordinate DM , EF nella

massima CG , o le due LM , NF nella minima IG , si faranno eguali le assisse AD , AE , o le HL , HN rispetto all'asse HK . Adunque quando l'ordinata sia la massima, o la minima, l'equazione della curva disposta secondo la lettera, che esprime l'assissa, dovrà avere due radici eguali. Per determinarle si formi un'equazione di due radici eguali, per esempio $xx - 2ex + ee = 0$, che è il prodotto di $x - e$ in $x - e$, e sia la curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, per esempio l'ellisse $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, deno-

minate le assisse dal vertice. Si paragoni questa equazione, termine per termine, coll'equazione formata dalle due radici eguali, nel seguente modo

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$$

$$xx - 2ex + ee = 0;$$

dal paragone de' secondi termini si trova $a = e$, ma e è radice dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, e però $e = x$, adunque sarà $a = x$, e perchè è già determinata la x , è superfluo il paragone degl'ultimi termini.

Presa per tanto $x = a$, la corrispondente ordinata nell'ellissi sarà la massima, come già si fa, essendo allora essa il semiasse conjugato.

Ma se l'equazione della curva fosse del terzo, quarto, o superiore grado, a fine di potere istituire il pa-

Ggg

rago-

ragione, fa d'uopo, che l'equazione delle due radici eguali $xx - 2ex + ee = 0$ si riduca a quel grado, di cui è la proposta, moltiplicandola per tante radici qualunque esse sieno, quante fanno di bisogno. Sia la curva dell'equazione del terzo grado $x^3 - axy + y^3 = 0$ (la stelletta è posta in luogo del secondo termine mancante, il che si offervi sempre qualora manca un qualche termine) di cui si cerchi la massima ordinata, moltiplico adunque per $x - f = 0$ l'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, ed il prodotto lo paragono colla proposta

$$\begin{array}{r} x^3 - axy + y^3 = 0 \\ x^3 - 2exx + exx - eef = 0 \\ \hline -fxx + 2efx \end{array}$$

Dal paragone de' secondi termini trovo $-2e - f = 0$; e però $f = -2e$; dal paragone de' terzi trovo $2ef + ee = -ay$, e posto il valore di f , $-3ee = -ay$, ma $e = x$, adunque $y = \frac{3xx}{a}$. Si sostituiscia in luogo di y

questo valore nell'equazione della curva, e ci darà $x = \sqrt[3]{2a^2}$, a cui corrisponde la massima ordinata y , che sarà $\frac{a}{3} \times 2^{\frac{2}{3}}$, cioè $\frac{\sqrt[3]{4a^3}}{3}$.

269. Ma senza paragonare la data equazione con un'altra, che contenga le due radici eguali, per soddisfare alla condizione del problema, basterà moltiplicarla,

ter-

termine per termine con una serie aritmetica qualunque, imperciocchè se l'equazione à le due radici eguali, come deve nel caso dei massimi, e minimi, infallibilmente una di esse radici sarà anco nel prodotto di essa equazione moltiplicata per la serie aritmetica, quindi moltiplicando così l'equazioni s'include la condizione, sotto cui devesi ritrovare il valore dell'assisa, a cui corrisponde la ricercata massima, o minima ordinata. E per dimostrarlo: sia generalmente l'equazione di due radici eguali $xx - 2bx + bb = 0$, che si moltiplichì per la serie aritmetica $a, a + b, a + 2b$, sarà il prodotto

$$axx - 2abx + abb \\ - 2bbx + 2bbb = 0, \text{ in questo sostituita la quantità}$$

b in luogo di x , tutti i termini si distruggono, o pure dividendolo per $x - b$, succede la divisione, adunque $x - b$ sarà una radice di esso prodotto, siccome è di $xx - 2bx + bb$; lo stesso succede se la progressione aritmetica sia decrefcente, cioè $a, a - b, a - 2b$ ec.

E perchè l'equazione delle due radici eguali è generale, ed è generale altresì la serie aritmetica $a, a + b, a + 2b$ ec., sarà sempre vero, che moltiplicata un'equazione di due radici eguali per una serie aritmetica qualunque, termine per termine, sarà il prodotto divisibile per una di esse radici. Per la stessa ragione, se l'equazione avrà tre radici eguali, moltiplicata essa in una serie aritmetica, il prodotto averà due di esse radici e-

Ggg 2

guali,

quali, e se questo prodotto si moltiplicherà similmente per una serie aritmetica, il nuovo prodotto ne avrà una, e così discorrendo d'equazioni superiori.

Ripiglio l'equazione $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$ all' ellissi, la moltiplico per la serie 2, 1, 0.

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$

$$2, \quad 1, \quad 0.$$

Il prodotto è $2xx - 2ax = 0$, che ci dà $x = a$, come si è trovato di sopra. Moltiplico questa stessa equazione, con un'altra serie aritmetica 3, 2, 1.

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$

$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Il prodotto è $3xx - 4ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, in cui sostituito in

luogo della yy il valore $\frac{2ax - xx \times \frac{p}{2a}}$, dato dall'equazione della curva, si trova istessamente $x = a$.

Prendo la seconda equazione $x' * - axy + y' = 0$, che moltiplico con la serie 3, 2, 1, 0.

$$x' * - axy + y' = 0.$$

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

Il prodotto è $3x' * - axy = 0$, cioè $3xx = ay$, come sopra.

270. Con simil metodo si trovano le tangenti, e le perpendicolari alle curve in qualunque punto dato.

La questione si riduce a ritrovare il circolo, che tocchi la curva in quel punto, essendo in questo caso sì la tangente del circolo in quel punto, come la perpendicolare, cioè il raggio, comuni pure alla curva nel punto stesso.

Sia la curva ACM (Fig. 157.), di cui si voglia la tangente nel punto L , e sia il circolo GMH , che la tagli ne' due punti M, C ; abbassate le due ordinate CE, MP , e per i punti M, C , condotta la retta MCT , taglierà essa la curva pure ne' punti M, C ; ma quanto più si anderanno accostando i detti punti, minore sempre si farà la differenza delle ordinate CE, MP , e delle assisse AE, AP di modo, che quando un punto cada sopra dell'altro, per esempio in L , faranno eguali i valori di queste ordinate, ed assisse, ed allora il circolo toccherà la curva nel punto L , (a riserva però, che il circolo sia l'osculatore, perchè in quel caso taglia la curva, e la tocca nello stesso punto, come si vedrà nel calcolo differenziale) e la retta MT farà la tangente della curva, e del circolo nel punto L , siccome FL normale.

Si chiami adunque nella curva ALM (Fig. 158.) la $AQ = x$, $QL = y$, e condotta dal punto dato L la

retta

retta LN , che si supponga normale alla curva; ed in conseguenza alla tangente in L , sia $LN=s$, $AN=u$, sarà $QN=u-x$, ed il triangolo rettangolo QLN darà l'equazione canonica $ss=uu-2ux+xx+yy$, da cui ricavato il valore della y , o della x , si sostituisca nell'equazione della curva data, per mezzo della quale si deve avere il valore della s , o della u , considerando come data la x , o la y , poichè si assume per dato il punto L .

Sia per esempio la curva ALM la parabola apolloniana dell'equazione $ax=yy$; fatta la sostituzione in luogo della yy , del suo valore dato dall'equazione canonica, sarà l'equazione $ax=ss-uu+2ux-xx$, ed ordinata per la lettera x sarà $xx-2ux+uu=0$. Que-

$$+ ax - ss$$

sta adunque deve avere due radici eguali quando la retta $LN=s$ sia normale alla parabola nel punto L , cioè nel caso della tangente, e però ritrovato nell'ipotesi delle due radici eguali il valore della incognita $AN=u$, si avrà il punto N , da cui condotta la NL al dato punto L , e la perpendicolare LT ad NL , sarà essa la tangente cercata.

Ora per determinare la incognita u nell'ipotesi delle due radici eguali: paragono l'equazione, termine per termine, con una di due radici eguali, cioè

con

con $xx - 2ex + ee = 0$ nel seguente modo

$$\begin{aligned} xx - 2ux + uu \\ + ax - ss &= 0 \\ xx - 2ex + ee &= 0; \end{aligned}$$

e dal paragone de' secondi termini si avrà $-2u + a = -2e$, cioè $u = \frac{a + 2e}{2}$, ma $e = x$, per l'equazione,

$$xx - 2ex + ee = 0; \text{ dunque } u = \frac{a}{2} + x, \text{ e perciò dal}$$

punto Q presa $QN = \frac{1}{2}a$, farà NL la normale, ed LT , ad essa perpendicolare, farà la tangente della curva nel punto L .

In vece di paragonare la suddetta equazione con una di due radici eguali, la moltiplico colla serie aritmetica 3, 2, 1

$$\begin{aligned} xx - 2ux + uu \\ + ax - ss &= 0 \\ 3, \quad 2, \quad 1. \end{aligned}$$

Il prodotto è $3xx - 4ux + uu = 0$, ma $ss = uu - 2ux +$
 $+ 2ax - ss$

$xx + yy$, e per la parabola è $yy = ax$, onde $ss = uu - 2ux + xx + ax$; sostituito adunque questo valore in luogo di ss , farà $2xx - 2ux + ax = 0$, cioè $u = \frac{a}{2} + x$, come prima.

Più brevemente si avrebbe avuto l'intento moltipli-

moltiplicando l'equazione per la serie aritmetica 2, 1, 0;

271. Sia la seconda parabola cubica $x' = ayy$; fatta la sostituzione del valore di yy cavato dall'equazione canonica, nasce l'equazione $x' + axx - 2aux + auu = 0$,
 $- ass$

la quale per essere del terzo grado si paragoni col prodotto dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$ in $x - f = 0$

$$x' + axx - 2aux + auu = 0$$

$$- ass$$

$$x' - 2exx + eex - eef = 0;$$

$$- fxx + 2efx$$

dal paragone de' secondi termini si à $-2e - f = a$, cioè $f = -a - 2e$; dal paragone de' terzi si à $ee + 2ef = -2au$, e posto il valore già ritrovato di f , $u = \frac{3ee + 2ae}{2a}$, cioè $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$, perchè $e = x$.

Moltiplico ora l'equazione con la serie aritmetica 3, 2, 1, 0

$$x' + axx - 2aux + auu = 0$$

$$- ass$$

$$3, 2, 1, 0;$$

il prodotto è $3x' + 2axx - 2aux = 0$, e però istessamente $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$.

272. Circa l'elezione delle serie aritmetiche si può osservare, che per lo più sarà la più comoda quella, che

che formano gl'esponenti cominciando dal massimo della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione.

273. Un'altra maniera di sciogliere questo Problema poco diversa, ma forse più semplice, e che avrà uso ne' flessi contrarj, e ne' regressi può essere questa.

Sia la curva $AEMD$ (Fig. 159.) tagliata dalla retta HED ne' punti E, D ; e sieno le affisse $AB, AC = x$, le ordinate $BE, CD = y$. E' chiaro, che passando la retta HD ad essere la tangente TM della curva nel punto M , i due punti E, D caderanno in M , e per conseguenza si faranno eguali tra loro le AB, AC , siccome tra loro le BE, CD . Si alzi AN parallela alle ordinate, e sia $AT = u, AN = s$, per la similitudine de' triangoli TAN, TKM , sarà $u, s :: u + x, y$, cioè $y = \frac{us + sx}{u}$, ed $x = \frac{uy - us}{u}$; nell'equazione della curva data si sostituiscano questi valori in luogo della y , o della x , e ne nascerà un'altra, la quale dovrà avere due radici eguali, quando AT, AN sieno tali, che la retta TNM tocchi la curva, adunque facendo il paragone con un'altra di due radici eguali, o moltiplicandola per una serie aritmetica, si averà il valore della ricercata AT , o AN , e data l'una, è pure data l'altra. Ometto gl'esempij, perchè la maniera di operare è la stessa della usata di sopra.

274. Siccome il metodo, e la natura de' massimi, e minimi, e delle tangenti include necessariamente nelle equazioni due radici eguali, così tre radici eguali si danno ne' Flessi contrarij, e ne' Regressi. Per flesso contrario s'intende quel punto, in cui la curva da concava si fa convessa, o all'opposto; e per regresso quel punto, in cui essa torna all'indietro, o concava, o convessa.

Sia la curva $ACFM$, (Fig. 160.) che abbia un flesso contrario nel punto F , e si conduca la retta GCM , che la tocchi nel punto C , e la tagli nel punto M , abbassate da essi le ordinate CH , MP , facilmente si vede, che quanto più il punto C della tangente s'accosterà al punto del flesso contrario F , tanto più altresì si accosterà al punto F il punto M di modo, che quando C cada in F , vi caderà pure M ; ed in conseguenza si faranno eguali AH , AP , siccome CH , MP , e la retta GCM toccherà, e taglierà la curva nel punto F ; ma la natura della tangente già porta due radici eguali, ed ora si aggiunge la terza, adunque di natura del flesso contrario è, che a lui corrispondano tre radici eguali.

Dal punto A alzata AN parallela all'ordinata, e fatta $AN = s$, $AT = u$, e condotta TNF ; farà,

per

per i triangoli simili TAN , TVF , $y = \frac{us}{x} + sx$, ed
 $x = \frac{uy}{s} - \frac{us}{s}$, chiamate $AV = x$, $VF = y$. Sostituiti per
 tanto questi valori in luogo di x , o di y nell'equa-
 zione della curva data, l'equazione, che nasce, do-
 vrà avere tre radici eguali quando AT , o AN sieno
 tali, che la TNF condotta dal punto T per lo pun-
 to N incontri la curva nel ricercato punto del flesso
 contrario F .

Similmente si discorra della curva ACM , (Fig.
 161.) che abbia un regresso nel punto C ; poichè
 la tangente TC della curva nel punto C assieme la
 taglia nello stesso punto, e quindi ne nascono nella
 stessa maniera le tre radici eguali.

Sia la curva AFS (Fig. 162.) dell'equazione
 $ayy - xyy - aax = 0$, in cui sono le $AQ = x$, e
 le $QF = y$, e si cerchi il punto del flesso contrario
 F . Posta $AT = u$, $AV = s$, e parallela alle ordina-
 te QF , e sostituito in luogo di x il valore
 $\frac{uy}{s} - \frac{us}{s}$ nell'equazione della curva, sarà ella

$$y^3 - \frac{ayy}{u} + aay - aas = 0,$$

la quale dovrà avere tre radici eguali, e però si avrà da paragonare con una equazione di tre radici eguali, o da moltiplicarsi per due serie aritmetiche.

Si moltiplichino adunque per la serie 1, 0, -1, -2, ed il prodotto $y' * -aay + 2aas = 0$, di nuovo moltiplicato per la serie 3, 2, 1, 0, ci darà $3y' - aay = 0$, e però $yy = \frac{aa}{3}$, il qual valore sostituito nell'equazione data della curva ci fornisce final-

mente $x = \frac{1}{4}a$.

275. La maniera è la stessa per ritrovare i regressi delle curve, ed il metodo dà tanto questi, come quelli; quindi per distinguerli non vi è altro modo, che il ricercare per mezzo della costruzione l'andamento della curva.

L'istessa ambiguità nasce nelle questioni de' massimi, e minimi, la quale solo con l'idea della curva si può togliere. Con la medesima condizione delle tre radici eguali si potrebbero ritrovare i Raggi Osculatori, ma giacchè di tali cose si tratterà nel seguente libro, porrò fine a questo per non recare troppo di noia.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

TOMO PRIMO.

ERRORI

CORREZIONI

Pag. 55 lin. 7 $\sqrt{aa+3ax}-\sqrt{ax}$

$\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$

Pag. 94 lin. 19 paragonali

paragonarli

Pag. 146 lin. 9 $-\sqrt{\frac{xx-aa}{xx}}$

$-\sqrt{\frac{xx-a^2}{xx}}$

Pag. 267 lin. 5 $+fuz$

$+fux$

Pag. 382 lin. 11 num. 139.

num. 239.

Pag. 426 lin. 19 toccherà

toccherà

Fig. 1.

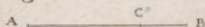


Fig. 2.

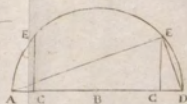


Fig. 4.

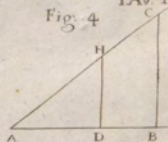


Fig. 3.

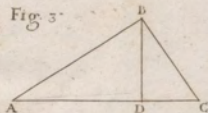


Fig. 5.

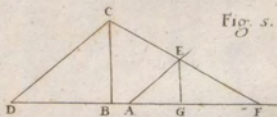


Fig. 6.



Fig. 7.

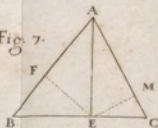


Fig. 9.

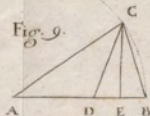


Fig. 8.

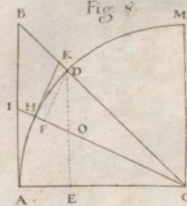


Fig. 10.

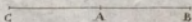


Fig. 11.

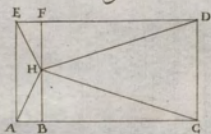


Fig. 12.

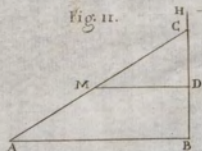


Fig. 13.

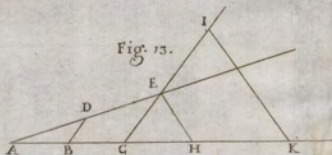
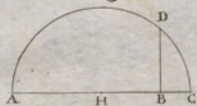


Fig. 15.

Fig. 16.

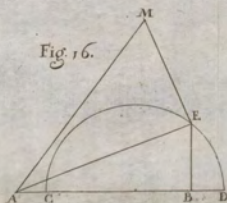
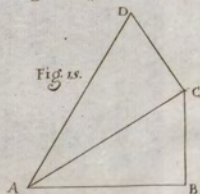


Fig. 17.

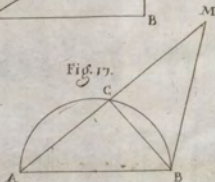


Fig. 18.

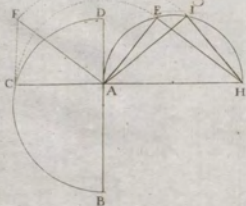


Fig. 19.

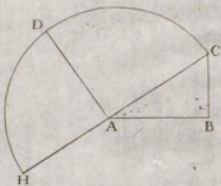


Fig. 20.

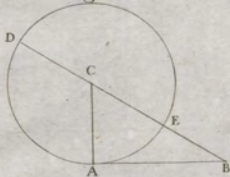


Fig. 21.

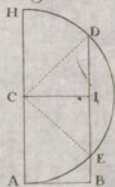


Fig. 22.

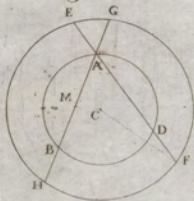


Fig. 23.

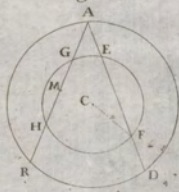


Fig. 24.

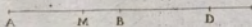


Fig. 26.

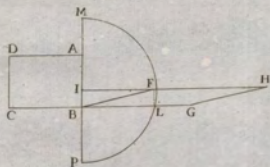


Fig. 27.

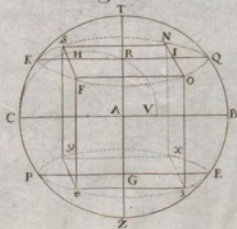


Fig. 25.

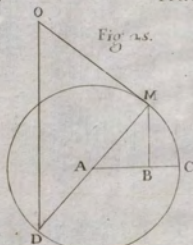


Fig. 28.

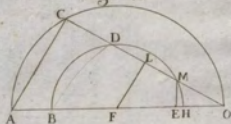


Fig. 29.



Fig. 30.

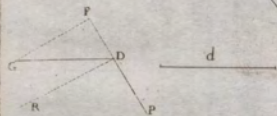
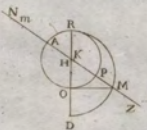


Fig. 32.

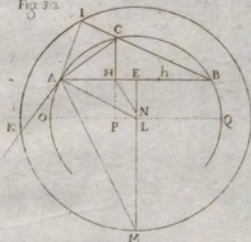


Fig. 33.

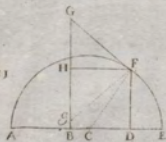


Fig. 33.

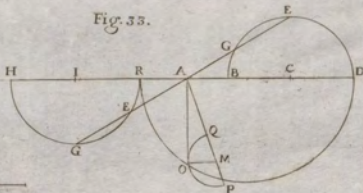


Fig. 34.

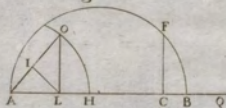


Fig. 35.

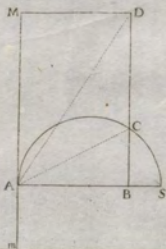


Fig. 36.

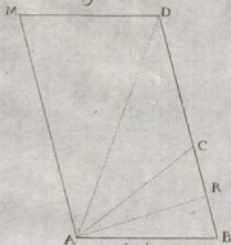


Fig. 37.

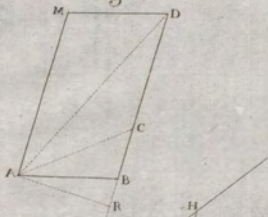


Fig. 38

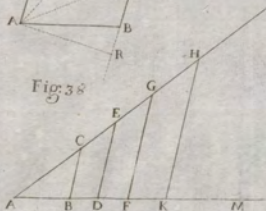


Fig. 39.

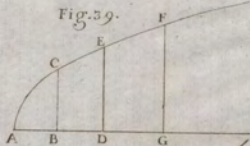


Fig. 40.

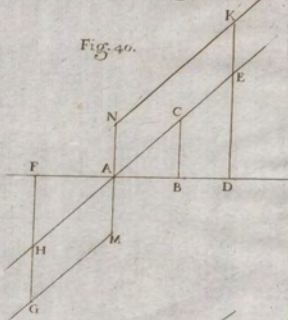


Fig. 41.

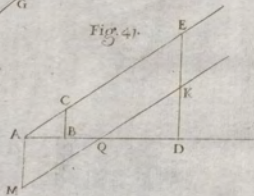


Fig. 42.

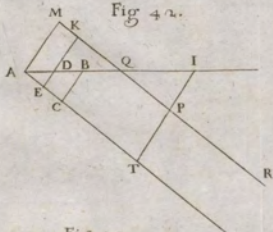


Fig. 43.

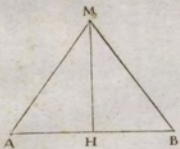


Fig. 44.

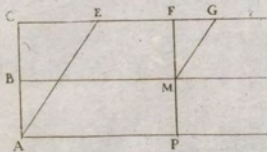


Fig. 45.

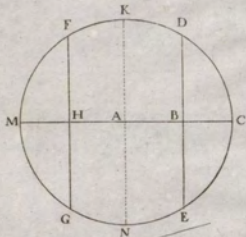


Fig. 46.

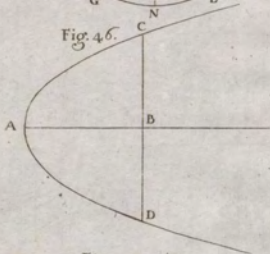


Fig. 47.

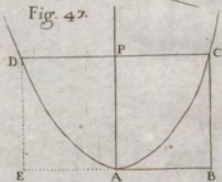


Fig. 48.

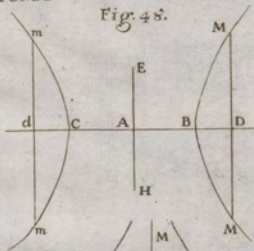


Fig. 53.

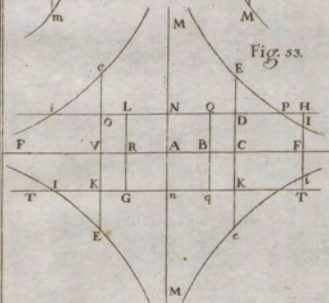


Fig. 51.

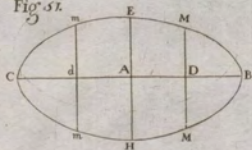


Fig. 49.

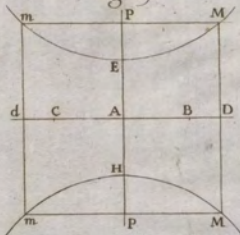


Fig. 50.

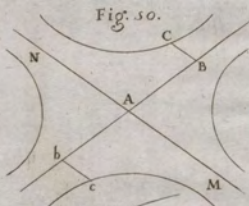


Fig. 52.

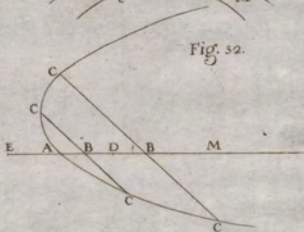


Fig. 58.

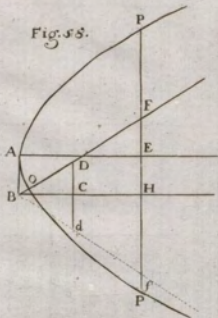


Fig. 59.

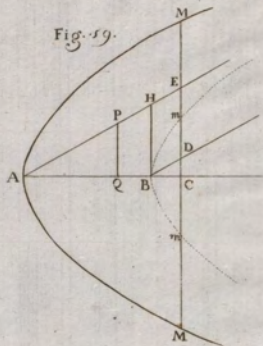


Fig. 60.

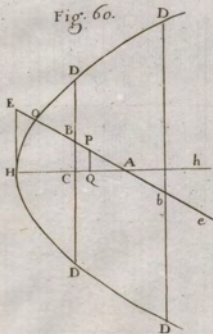


Fig. 6,

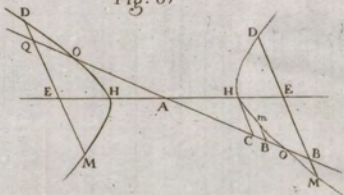


Fig. 63.

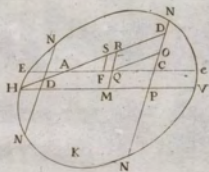


Fig. 66.

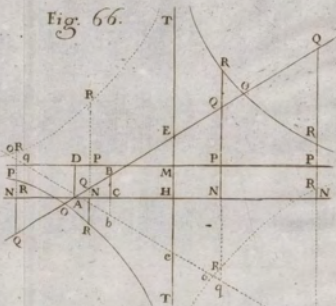


Fig: 67.

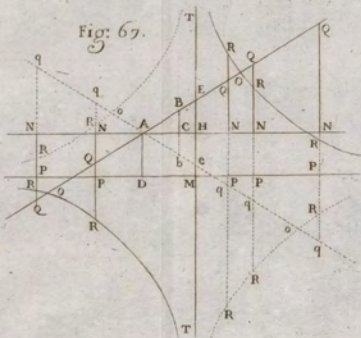


Fig. 68.

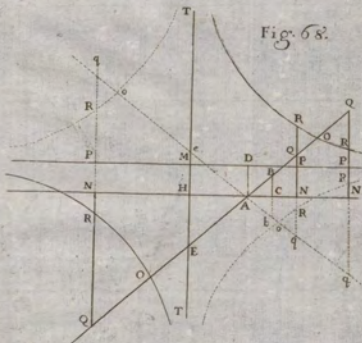


Fig. 70.

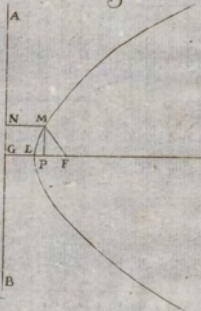


Fig. 69.

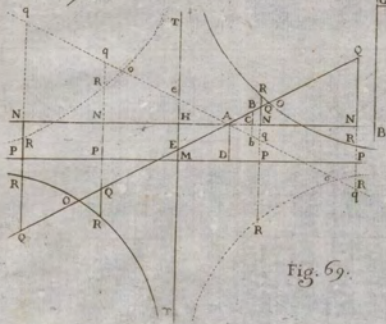


Fig. 71.

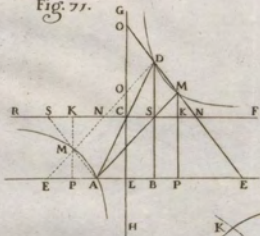


Fig. 73.

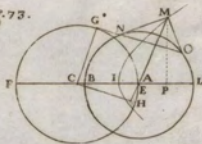


Fig. 75.

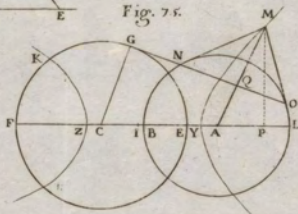


Fig. 72.

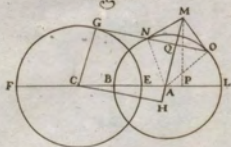


Fig. 74.



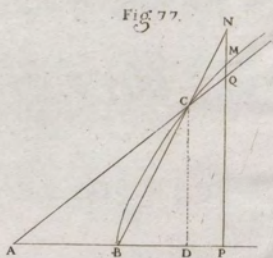
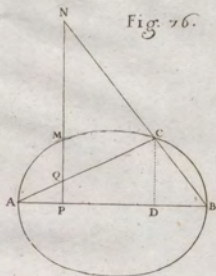


Fig. 79.

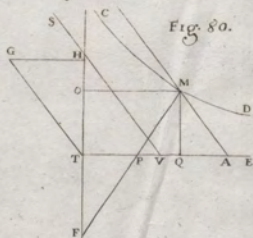
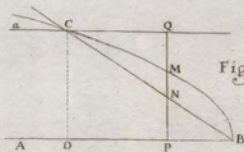
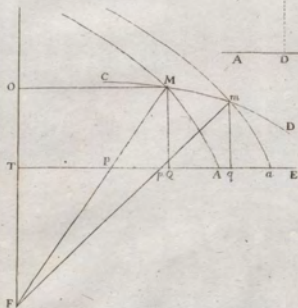


Fig. 81.

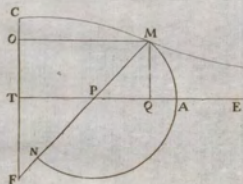


Fig. 82.

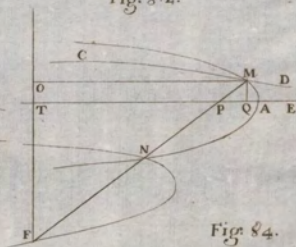


Fig. 83.



Fig. 84.

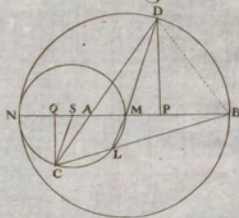


Fig. 85.

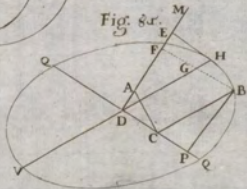


Fig. 86.

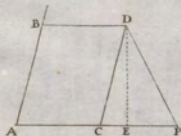


Fig. 87.

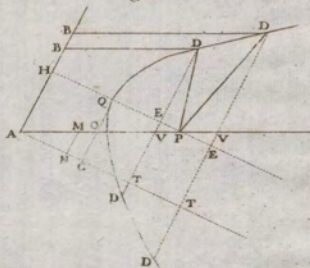


Fig. 88.

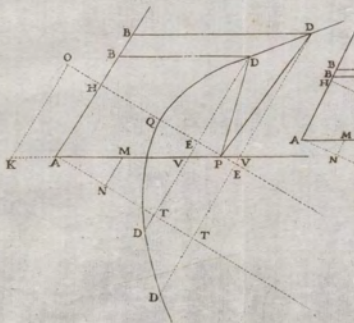


Fig. 89.

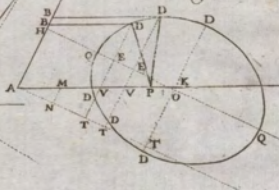


Fig. 90.

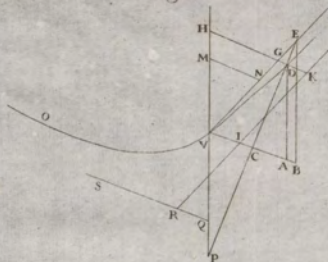


Fig. 91.

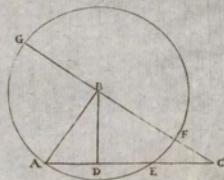


Fig. 92.

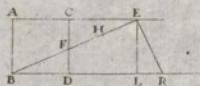


Fig. 93.

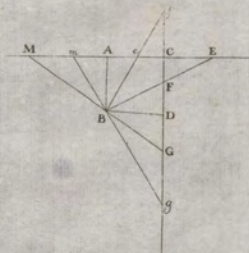


Fig. 94.



Fig. 95.

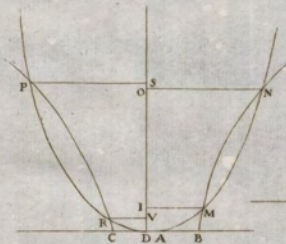


Fig. 97.

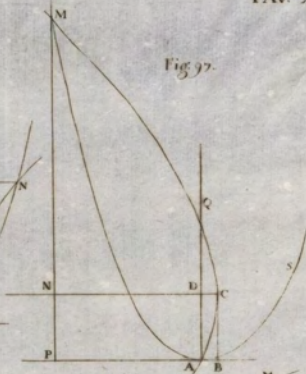


Fig. 98.

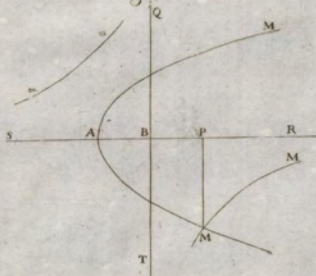


Fig. 96.

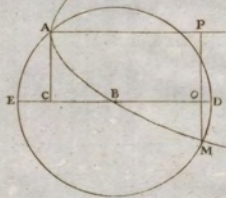


Fig. 103.

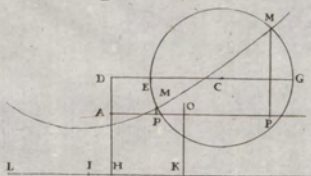


Fig. 104.

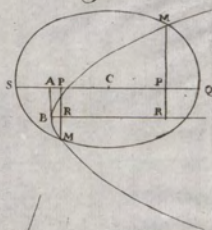


Fig. 105.

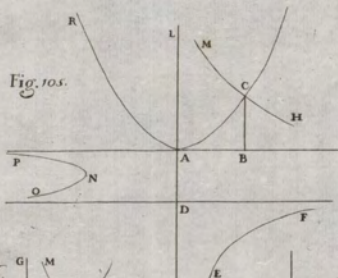


Fig. 106.

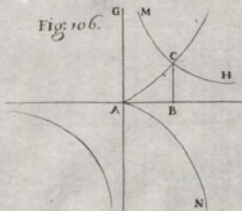


Fig. 107.

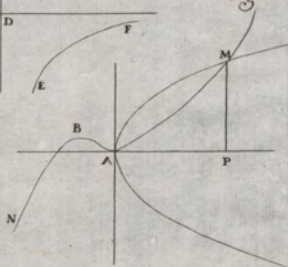


Fig. 108.

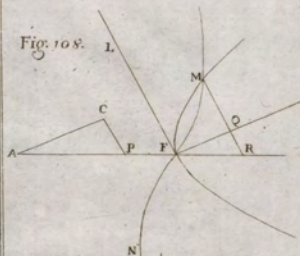


Fig. 109.

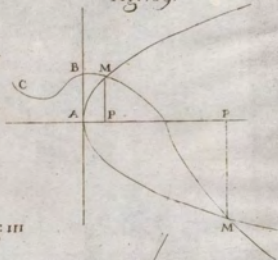


Fig. III

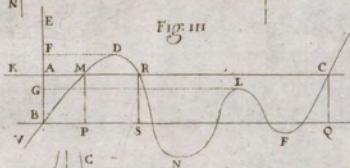


Fig. 112.

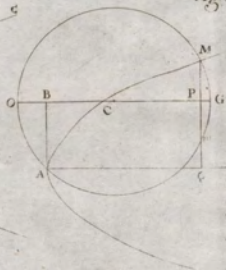


Fig. 110

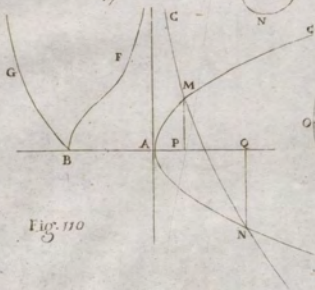


Fig. 113.

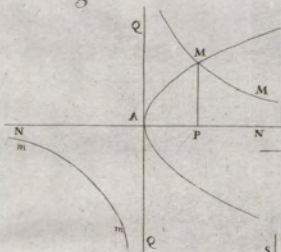


Fig. 114.

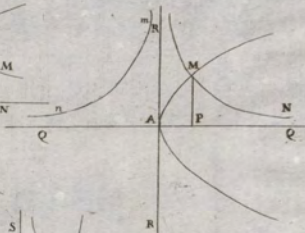


Fig. 115.

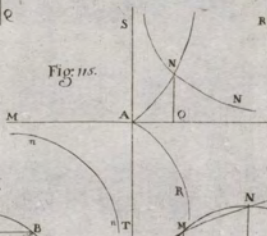


Fig. 116.



Fig. 117.

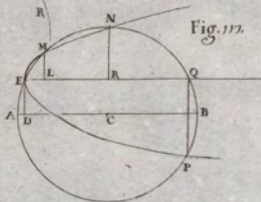


Fig. 127.

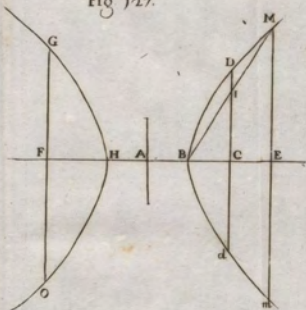


Fig. 128.

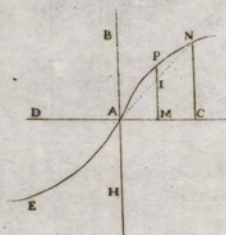


Fig. 129.

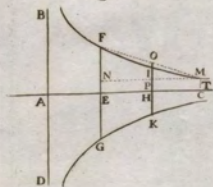


Fig. 130.

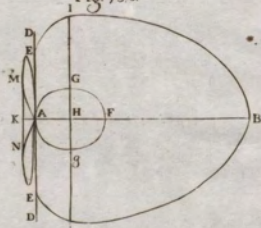


Fig. 131.

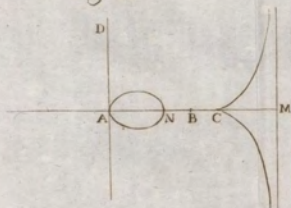


Fig. 132.

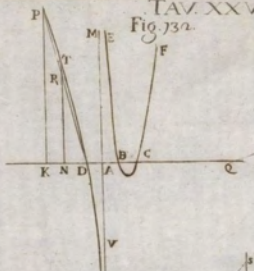


Fig. 134.

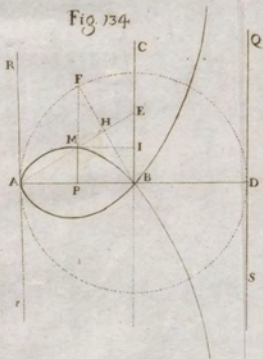


Fig. 133.

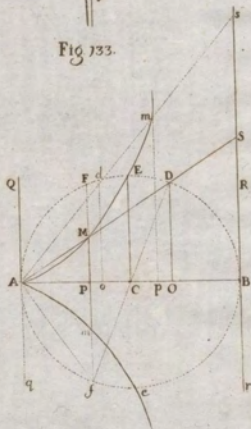


Fig. 138.



Fig. 139.

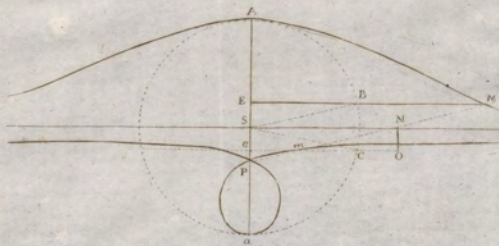


Fig. 148.

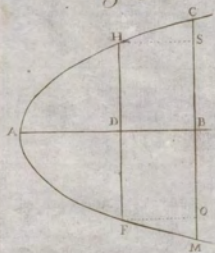


Fig. 149.

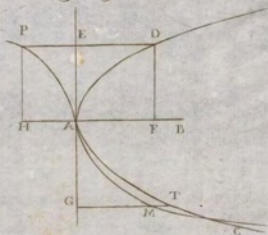


Fig. 150.

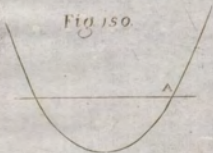


Fig. 151.

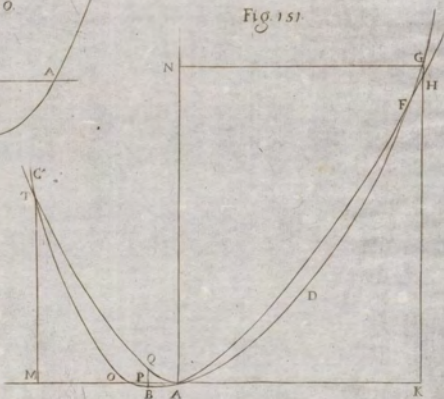


Fig. 152

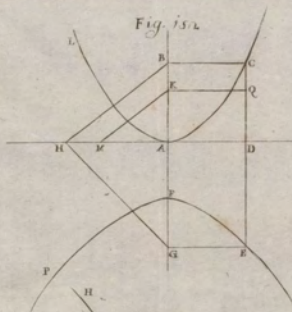


Fig. 153.
e

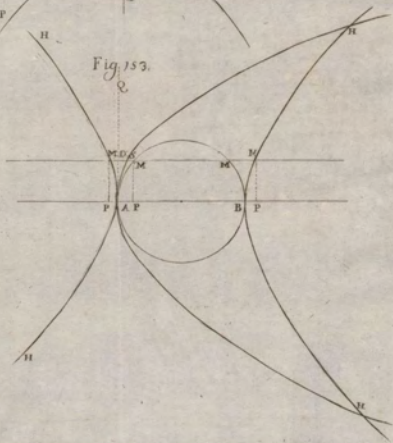


Fig. 154.

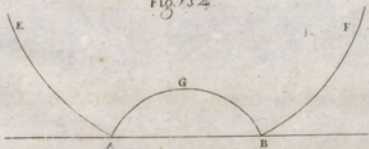


Fig. 155.

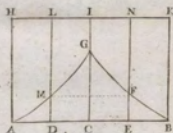


Fig. 156.



Fig. 157.

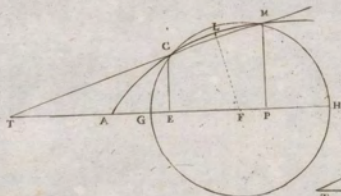


Fig. 158.

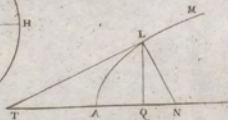


Fig. 159.

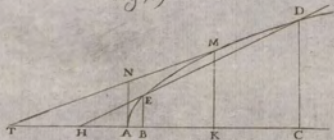


Fig. 160.

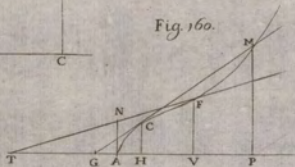


Fig. 161.

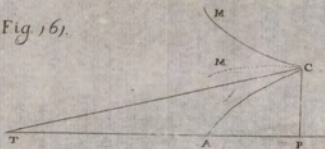


Fig. 162.

