PEANO

APPLICAZIONI
GEOMETRICHE

CALCOLO
GEOMETRICO

secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann

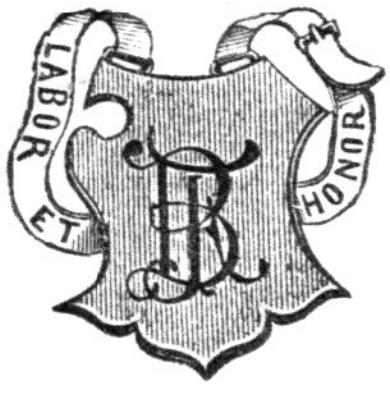
PRECEDUTO DALLE

OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA

PER

GIUSEPPE PEANO

PROFESSORE NELLA R. ACCADEMIA MILITARE
INCARICATO NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO



TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI

ROMA
Via del Corso, 216-217.

FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI

PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)

NAPOLI
Piazza Plebiscito, 2

CATANIA
S. Maria al Ros.o, 23
(N. Carosio)

1888

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Stabilimento Tipografico VINCENZO BONA

PREFAZIONE

Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. Esso permette di esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, di rappresentare con equazioni proposizioni di geometria, e di sostituire una trasformazione di equazioni ad un ragionamento. Il calcolo geometrico presenta analogia colla geometria analitica; ne differisce in ciò, che, mentre nella geometria analitica i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nuova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi.

Un primo tentativo di calcolo geometrico è dovuto alla vasta mente del LEIBNIZ (1679) ([1]); nel corrente secolo poi furono proposti e sviluppati varii metodi di calcolo, aventi utilità pratica, fra cui meritano menzione speciale il *Calcolo baricentrico* di MÖBIUS (1827) ([2]), quello delle *Equipollenze* di BELLAVITIS (1832) ([3]), i *Quaternioni* di HAMILTON (1853) ([4]) e le applicazioni alla geometria dell'*Ausdehnungslehre* di HERMANN GRASSMANN (1844) ([5]).

Di questi varii metodi l'ultimo citato comprende in gran parte gli altri, e li supera nella potenza del calcolo, e nella semplicità delle formule. Ma i concetti troppo elevati ed astrusi contenuti nell'Ausdehnungslehre impedirono la diffusione di questa scienza; e quindi anche le sue applicazioni alla geometria sono ancora pochissimo note ai matematici.

Lo scopo del presente libro è di esporre direttamente, e sotto forma accessibile a chiunque conosca i fondamenti della geometria e dell'algebra, un calcolo geometrico, basato su alcune notazioni contenute nell'Ausdehnungslehre, e di svilupparne le principali conseguenze.

Gli enti geometrici, su cui si eseguiscono, in questo opuscolo, i calcoli, sono le formazioni geometriche di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie (N. 5). Le operazioni che su esse si fanno nei cap. I-IV sono:

a) somma di due formazioni della stessa specie (N. 9);

b) prodotto d'una formazione per un numero (N. 9);

c) prodotto progressivo, o proiezione, di due formazioni (N. 10).

Nei cap. V-VII sono ancora introdotte:

d) le operazioni indicate coi segni $\perp$ e $|$, a eseguirsi rispettivamente sui vettori d'un piano fisso (N. 40), e sui vettori e bivettori dello spazio (N. 52);

e) il prodotto regressivo, o intersezione, di formazioni (N. 44, 51, 57, 58).

Le definizioni introdotte per le formazioni di quarta specie, o volumi, sono già comuni in geometria analitica; le definizioni per le formazioni delle tre prime specie sono ridotte con metodo uniforme a quelle date pei volumi (N. 6, 7).

Il calcolo sulle formazioni di prima specie (punti con coefficienti numerici e vettori) è identico al calcolo baricentrico di Möbius; la riduzione d'una formazione di prima specie alla forma più semplice (cap. II) coincide colla determinazione del baricentro di più punti materiali; quella speciale dei vettori colla composizione delle traslazioni.

I concetti di linea, bivettore, formazione di seconda specie, corrispondono esattamente alle espressioni forza, coppia, sistema di forze applicate ad un corpo rigido, della Meccanica.

Le formazioni di terza specie non hanno il loro corrispondente nella Meccanica.

Le formazioni di 1ª specie, quelle di 2ª prodotti di due formazioni di 1ª specie, e le formazioni di 3ª specie corrispondono pure,

a meno d'un fattore numerico, a ciò che in geometria proiettiva chiamasi punto, retta, piano; il vettore, bivettore e trivettore corrispondono al punto, retta e piano all'infinito.

Le formazioni geometriche e le operazioni su esse qui esposte sono tutte contenute nell'Ausdehnungslehre. Però credo del tutto nuove le definizioni qui date, il modo di trattazione, e molte formule.

Col capitolo VII può considerarsi terminata la parte elementare del calcolo geometrico sviluppato in questo opuscolo. Il lettore arrivato a questo punto, e presa cognizione delle applicazioni che seguono i varii capitoli, può vedere tutta la fecondità e semplicità di questa nuova analisi.

Nel capitolo successivo trovansi applicati alle formazioni geometriche i concetti del calcolo infinitesimale, ed enunciati i teoremi relativi, in gran parte nuovi ([6]). L'ultimo capitolo tratta sommariamente delle trasformazioni dei sistemi lineari in generale e delle formazioni geometriche in particolare. Lo sviluppo ulteriore delle questioni accennate in questi due capitoli mi avrebbe fatto varcare i limiti propostimi.

Il calcolo geometrico è preceduto da un'introduzione che tratta delle operazioni della logica deduttiva; esse presentano grande analogia con quelle dell'algebra, e del calcolo geometrico.

La logica deduttiva, la quale fa parte delle scienze matematiche, non ha finora molto progredito, benchè sia stata oggetto degli studii di Leibniz, Hamilton, Cayley, Boole, H. e R. Grassmann, Schröder, ecc. ([7]). Le poche questioni trattate in questa introduzione costituiscono già un insieme organico, che può servire in molte ricerche. Parecchie delle notazioni qui introdotte sono adoperate nel calcolo geometrico.

Sarei lieto delle mie fatiche nello scrivere questo libro (e questa sarà l'unica ricompensa ch'io ne aspetti), se esso servirà a divulgare fra i matematici alcune delle idee del Grassmann. È però mia opinione che, fra non molto tempo, questo calcolo geometrico, o qualche cosa di analogo, si sostituirà a metodi attualmente in uso nell'inse-

gnamento superiore. È ben vero che lo studio di questo calcolo, come di ogni altra scienza richiede un tempo; ma non credo che esso superi quello necessario allo studio, p. e., dei fondamenti della geometria analitica; e allora lo studioso si troverà in possesso d'un metodo che comprende quello della geometria analitica come caso particolare, che ne è assai più potente, e che si presta in modo meraviglioso allo studio delle applicazioni geometriche dell'analisi infinitesimale, della meccanica e della statica grafica; anzi alcune parti di tali scienze sarebbero già note a chi fosse in possesso di questo calcolo. Ai Professori, e specialmente a quelli di Geometria analitica, spetta il giudizio su questa mia opinione.

Ringrazio infine il dott. F. CASTELLANO, prof. all'Accademia Militare, per l'aiuto prestatomi nella correzione delle stampe.

Torino, 1° febbraio 1888.

G. PEANO.

NOTE ALLA PREFAZIONE

(1) LEIBNIZENS, *Math. Schriften*, Berlin, 1849, tomo II, pag. 17, e tomo V, pag. 133.

Vedasi anche, a questo proposito, GRASSMANN, *Geometrische Analyse*, Leipzig, 1847, pag. 4.

Le proposizioni che si possono esprimere colle notazioni di Leibniz si esprimono pure facilmente con quelle introdotte nel presente libro.

(2) MÖBIUS, *Der baricentrische Calcul*, Leipzig, 1827.

Le notazioni adoperate dal Möbius, in questo, e in altri scritti posteriori, sono tutte riprodotte, senza alterazione, nel presente libro.

(3) La teoria e le più notevoli applicazioni del calcolo delle equipollenze trovansi nella recente opera:

LAISANT, *Théorie et applications des équipollences*, Paris, 1887.

I concetti fondamentali del calcolo delle equipollenze compaiono pure nel calcolo che segue, ma le notazioni sono alquanto differenti.

(4) Il calcolo dei quaternioni ha già una vasta letteratura, che qui è inutile citare (V. LAISANT, *Introduction à la méthode des quaternions*, Paris, 1881).

I quaternioni di Hamilton non compaiono nel calcolo sviluppato nel presente opuscolo, non essendo essi nè formazioni geometriche, nè segni d'alcuna delle operazioni introdotte sulle formazioni. Un ente qui considerato, avente qualche proprietà dei quaternioni, è la trasformazione dei vettori nello spazio, indicata col segno $m+|(I^*)$, ove m è un numero, I un vettore (N. 86, 2; V. pure N. 83, 14).

I fatti geometrici che si possono esprimere coi quaternioni, si esprimono pure, e in generale con maggior semplicità, colle notazioni di Grassmann sviluppate nel presente libro.

Vedi: E. W. HYDE, *Calculus of direction and position*, American Journal of Math., vol. VI, pag. 1, ove sono messi in confronto alcuni calcoli fatti coll'uno e coll'altro metodo.

(5) I varii scritti del Grassmann sono citati dallo

SCHLEGEL, *System der Raumlehre, nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1872 e 1875.

Vedasi pure: *Grassmann, sein Leben und seine mathematisch-physikalische Arbeiten*, Math. Ann., XIV, 1.

Alcuni dei concetti introdotti dal Grassmann furono sviluppati, indipendentemente dal medesimo, da altri matematici. V. oltre lo scritto precedente:

HANKEL, *Vorlesungen ü. die Complexen Zahlen*, Leipzig, 1867, pag. 140.

CAYLEY, *On multiple Algebra*, Quart. Journal, XXII (1887), pag. 270.

Altre applicazioni dei metodi di Grassmann trovansi in

CASPARY, *Journal für Math.*, vol. 92, pag. 123; vol. 95, pag. 36; vol. 100, pag. 405; Math. Ann., vol. 29, pag. 581.

MEHMKE, Math. Ann., tomo 23, pag. 143.

Questi dice: « Im Laufe einiger im letzten Winter gehaltenen Vorlesungen über « " Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf Mechanik " habe « ich mich nun überzeugt dass die Methoden der Ausdehnungslehre, wie auf « allen übrigen Gebieten der Mechanik, so auch bei der Bestimmung von Schwer- « punkten, Trägheitsmomenten, u. s. w. mit grösstem Vortheil verwendet werden « können ».

CLIFFORD, *American Journal*, I, 350.

CARVALLO, *Bulletin de la Société math. de France*, 1887.

SCHENDEL, *Grundzüge der Algebra, nach Grassmann'schen Prinzipien*, Halle, 1885.

Inoltre per trovare nuove applicazioni di questo calcolo geometrico, si dovranno pure esaminare le opere riferentisi al calcolo delle equipollenze, e specialmente a quello dei quaternioni.

(6) Nelle mie " *Applicazioni Geometriche del calcolo infinitesimale*, Torino, 1887 ", introdussi alcune formazioni geometriche la cui teoria più ampia è sviluppata nel presente libro. Affinchè le notazioni adottate in quello coincidano colle notazioni di questo, alle parole *segmento, area, volume* si deve sostituire *vettore, bivettore, trivettore*, al segno $\equiv$ il segno $=$, alla scrittura AB, ove

A e B sono punti, la B — A, e il prodotto interno U × V di due vettori si dovrà rappresentare con U ⊥ V, ovvero U | V, secondochè si ragiona nel piano o nello spazio.

(7) Leibnizens, o. c., tomo V, *Logicæ inventionis semina*, e tomo VII, pag. 57. Cayley, Quart. Journal, XI, 282.

Veggasi, anche per indicazioni bibliografiche più estese:

E. Schröder, *Der Operationskreis der Logikkalkuls*, Leipzig, 1877.

In questo opuscolo dello Schröder (37 pagine) è sostanzialmente sviluppata la logica matematica che costituisce la introduzione al presente libro. Credetti utile di sostituire i segni ∩, ∪, — A, ○, ◍, ai segni di logica ×, +, A_1, 0, 1, usati dallo Schröder, affine d'impedire una possibile confusione fra i segni della logica e quelli della matematica (cosa del resto avvertita dallo Schröder stesso). Introdussi i segni di logica < e >, i quali, benchè non necessarii, sono assai utili (§ 1, 6). Infine introdussi il segno : (§ 4), il quale, espresso o sottinteso (§ 5), permette di applicare i segni logici precedenti alle proposizioni; e questo è il più importante uso dei segni logici introdotti; nel calcolo geometrico che segue trovansi solo adoperate le relazioni fra le proposizioni. Nello scritto dello Schröder trovasi accennata la possibilità di applicare i segni logici esprimenti relazioni fra classi per indicare relazioni fra proposizioni, ma non vi è fatta; forse essa doveva comparire in un posteriore scritto promesso, e non pubblicato.

Vedasi ancora:

E. Schröder, *Note über den Operationskreis des Logikkalkuls*, Math. Ann., XXII, pag. 481.

C. S. Peirce, *On the Algebra of Logic*, American Journal, III, 15, e VII, 180.

Clifford, *Mathematical papers*, London 1882.

Jevons, *The principles of Science*, London, 1883.

Liard, *Les philosophes anglais contemporains*, Paris, 1878.

Le questioni riferentisi alla logica matematica si prestano ad interessanti ricerche. Così date n classi, coi segni logici qui introdotti si possono enunciare su esse $N = 2^{\left(_2 2^n - _1\right)} - 2$ proposizioni, le quali si possono esprimere in funzione di 2^n proposizioni colle operazioni ∩, ∪, —; comunque si combinino colle operazioni della logica le N proposizioni precedenti, si hanno sempre proposizioni dello stesso sistema. Per $n = 1$, si ha $N = 6$, e, detta A la classe, le sei proposizioni sono A = ○, A = ◍, — (A = ○), — (A = ◍), — (A = ○) ∩ — (A = ◍), (A = ○) ∪ (A = ◍). Per $n = 2$, sarà $N = 32766$, e così via. Ecco un'altra questione, che non vidi ancora risolta: se $a \alpha b$ è una relazione determinata fra gli enti variabili a e b, si domanda quali siano le classi e le proposizioni che si possono enunciare per mezzo della relazione α, e dei segni logici.

INDICE

	Pag.
PREFAZIONE	v
Operazioni della logica deduttiva.	
Notazioni.	1
Identità	3
Proposizioni	7
Operazioni sulle proposizioni	10
CAP. I. *Formazioni geometriche.*	
Linee, superficie e volumi .	21
Operazioni sui volumi . .	22
Formazioni geometriche . .	25
Operazioni sulle formazioni .	28
CAP. II. *Formazioni di prima specie.*	
Riduzione delle formazioni di prima specie	33
Problemi sulla riduzione delle formazioni di prima specie	38
Applicazioni	44
CAP. III. *Formazioni di seconda specie*	49
Applicazioni	58
CAP. IV. *Formazioni di terza specie*	63
Applicazioni	66
CAP. V. *Formazioni su d'una retta*	68
Applicazioni	71
CAP. VI. *Formazioni nel piano.*	
Vettori	73
Intersezioni nel piano . .	79
Applicazioni	88
CAP. VII. *Formazioni nello spazio.*	
Vettori	97
Intersezioni	106
Coordinate	113
Applicazioni	119
CAP. VIII. *Derivate*	128
Applicazioni	136
CAP. IX. *Trasformazioni di sistemi lineari*	141
Applicazioni	152

Operazioni della logica deduttiva.

Notazioni.

§ 1. — Abbiasi un sistema di enti, e siano A, B, ... delle classi di questo sistema.

Ad esempio si può considerare il sistema di tutti i numeri reali e finiti, e saranno classi di questo sistema i numeri razionali, gli interi, i multipli di un dato numero, i numeri che possono essere radici di equazioni algebriche a coefficienti razionali, e così via. Essendo a un numero, resta definita la classe formata dai numeri maggiori di a, e che indicheremo in questi esempi con $(>a)$, come pure è definita la classe dei numeri minori di a, e che indicheremo con $(<a)$.

Introdurremo le notazioni seguenti:

1. Colla scrittura $A = B$ intenderemo di affermare l'identità delle due classi A e B, vale a dire che ogni ente A è pure B, e viceversa.

Il segno $=$ si leggerà *eguale;* la proposizione $A = B$ si dirà *equazione logica;* A e B sono i *membri* di questa equazione.

Es. 'numero pari' = 'multiplo di 2'

'numero razionale' = 'numero che si può sviluppare in frazione continua finita'.

2. Colla scrittura $A \cap B \cap C \cap \ldots$, ovvero $ABC\ldots$, intenderemo la massima classe contenuta nelle classi A, B, C, ... ossia la classe for-

mata da tutti gli enti che sono ad un tempo A e B e C, ecc. Il segno $\cap$ si leggerà *e;* l'operazione indicata col segno $\cap$ è la *congiunzione* della logica; noi la diremo anche moltiplicazione logica; le classi A, B, ... si diranno i *fattori* del *prodotto* A B...

Es. ' multiplo di 6 ' = ' multiplo di 2 ' $\cap$ ' multiplo di 3 '
' $(>1) \cap (<2)$ ' = ' il sistema dei numeri compresi fra 1 e 2 '.

3. Colla scrittura $A \cup B \cup C \cup \ldots$ intenderemo la minima classe che contiene le classi A, B, C, ..., ossia la classe formata dagli enti che sono o A o B o C, ecc. Il segno $\cup$ si leggerà *o;* l'operazione indicata col segno $\cup$ chiamasi in logica *disgiunzione;* noi la diremo anche *addizione logica;* le classi A, B, ... si diranno i *termini* della *somma* $A \cup B \cup \ldots$

Es. ' numero razionale ' = ' intero ' $\cup$ ' fratto '
' $(<1) \cup (>2)$ ' = ' numeri non compresi fra 1 e 2, e diversi da 1 e da 2 '.

4. Colla scrittura - A, ovvero $\bar{A}$ intenderemo la classe formata da tutti gli enti non appartenenti alla classe A. Il segno - si leggerà *non;* l'operazione indicata dal segno - dicesi *negazione.*

Es. - ' razionale ' = ' irrazionale '.
$-(>a)$ = ' classe dei numeri minori od eguali ad a '.

5. Affinchè le operazioni precedenti abbiano sempre significato, bisogna considerare come classe l'insieme di tutti gli enti del sistema, che si indicherà col segno ◍, e si leggerà *tutto;* bisogna pure considerare come classe la mancanza d'ogni ente, che si indicherà col segno ○, e si leggerà *nulla.*

Quindi la scrittura ' $A = ○$ ' rappresenta la proposizione ' non sonvi degli A '; la ' $AB = ○$ ' esprime la proposizione universale negativa ' nessun A è B '; la ' $A \cup B = ◍$ ' dice ' ogni cosa o è A o è B '.

Es. $(>1)\cup(<2)=\mathbb{1}$
$(<1)\cap(>2)=0.$

'interi' $\cup$ 'fratti' $\cup$ 'irrazionali' $=\mathbb{1}$

'razionali' $\cap$ - 'interi' $\cap$ 'radici d'un'equazione algebrica razionale intera a coefficienti interi, e in cui il coefficiente del termine di grado più elevato è l'unità' $=0$.

6. La scrittura $A\overline{B}=0$ dice che non esistono enti che siano A e che contemporaneamente non siano B; essa equivale in sostanza alla proposizione universale affermativa 'ogni A è B'. Benchè la scrittura precedente per indicare questa proposizione sia già assai semplice, tuttavia per maggior comodità la indicheremo anche colle scritture

$$A<B, \qquad \text{ovvero} \qquad B>A,$$

che si possono leggere 'ogni A è B', ovvero 'la classe B contiene la A'. I segni $<$ e $>$ si possono anche leggere *minore* e *maggiore*.

Es. 'interi' $<$ 'razionali' 'razionali' $>$ 'fratti,
$(<1)<(<2)$ $(>1)>(>2)$.

Identità.

§ 2. — Sono evidenti le seguenti identità:

(1) $AB=BA$ (1′) $A\cup B=B\cup A$

(2) $A(BC)=ABC$ (2′) $A\cup(B\cup C)=A\dot\cup B\cup C$

(3) $AA=A$ (3′) $A\cup A=A$

(4) $A(B\cup C)=AB\cup AC$ (4′) $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$

(5) $A\,\mathbb{1}=A$ (5′) $A\cup 0=A$

(6) $A \bigcirc = \bigcirc$ (6′) $A \cup \bullet = \bullet$

(7) $-(-A) = A$

(8) $-(AB) = (-A) \cup (-B)$ (8′) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$

(9) $A \cap -A = \bigcirc$ (9′) $A \cup -A = \bullet$

(10) $-\bigcirc = \bullet$ (10′) $-\bullet = \bigcirc$.

Le identità (1), (1′), (2), (2′) e (4) esprimono le proprietà commutativa ed associativa delle operazioni $\cap$ ed $\cup$, e la proprietà distributiva dell'operazione $\cap$ rispetto alla $\cup$. Queste proprietà dànno sufficiente ragione dei nomi di moltiplicazione e di addizione date a queste operazioni. Le formole (5) e (5′) dicono che $\bigcirc$ è il modulo dell'operazione $\cup$, e $\bullet$ quello dell'operazione $\cap$. Le proprietà espresse dalle identità (3) e (3′) non hanno le corrispondenti in algebra. La formola (4′), di cui faremo minor uso, esprime la proprietà distributiva dell'operazione $\cup$ rispetto alla $\cap$; sicchè le operazioni $\cup$ e $\cap$ sono commutative, associative, e ciascuna è distributiva rispetto all'altra; esse sono le sole operazioni finora conosciute nel calcolo operatorio, che godano di queste proprietà. Le operazioni $\cap$ e $\cup$ non ammettono le operazioni inverse nello stretto significato della parola; supplisce in qualche modo a questa mancanza l'operazione -; la formula (7) dice che due negazioni producono un'affermazione; la (8) dice che la negativa d'un prodotto è la somma delle negative dei fattori, proprietà analoga a quella dei logaritmi; la (8′) dice che la negativa di una somma è il prodotto delle negative dei termini. La formula (8′) si può pure scrivere $A \cup B = -(-A)(-B)$; quindi, introdotti i segni $\cap$ e - si potrebbe fare a meno del segno $\cup$. Le formule (10) e (10′) dicono che basterebbe introdurre uno solo dei due segni $\bigcirc$ e $\bullet$.

Le formule precedenti sono tutte evidenti, ed in ogni ragionamento si fa continuo uso di esse. Alcune fra queste si debbono ritenere come assiomi; le altre ne sono conseguenza; e precisamente le formule rimanenti si possono ricavare dalle (1), (2), (3), (4), (5), (7), (8), (9), (10), sostituendo in queste a certe espressioni, altre che loro sono eguali in virtù delle medesime formule.

Così, per ricavare la (8'), si ha la serie di eguaglianze

$$(-A) \cap (-B) \underset{(7)}{=} - \{ - [(-A) \cap (-B)] \} \underset{(8)}{=} - [(--A) \cup (--B)] \underset{(7)}{=} -(A \cup B),$$

in virtù delle identità indicate coi numeri posti sotto al segno $=$; l'eguaglianza del primo coll'ultimo membro dà appunto la formula a dimostrarsi.

Si ha pure

$$A \bigcirc \underset{(9)}{=} A (A \cap -A) \underset{(2)}{=} A \cap A \cap -A \underset{(3)}{=} A \cap -A \underset{(9)}{=} \bigcirc$$

e l'eguaglianza del primo coll'ultimo membro dà appunto la formula (6).

Le formule con accento si deducono poi da quelle senza, scambiando A, B, ... in $\overline{A}$, $\overline{B}$, ... e prendendo le negative d'ambi i membri.

Sussistono pure le identità

(11) $\quad A \cup AB = A \qquad$ (11′) $\quad A (A \cup B) = A.$

Invero si ha

$$A \cup AB \underset{(6')}{=} A \textcircled{\scriptsize } \cup AB \underset{(4)}{=} A (\textcircled{\scriptsize } \cup B) \underset{(6')}{=} A \textcircled{\scriptsize } \underset{(5)}{=} A.$$

e l'eguaglianza del primo coll'ultimo membro dà appunto la formula (11). Analogamente si dimostra la (11′).

Siccome $A < B$ è identica a $A\overline{B} = \bigcirc$, le formule

(12) $\quad AB < A \qquad$ (12′) $\quad A \cup B > A$

(13) $\quad \bigcirc < A \qquad$ (13′) $\quad \textcircled{\scriptsize } > A$

non sono altro che un nuovo modo di scrivere le identità

$$AB\overline{A} = \bigcirc \quad , \quad A\overline{A}\overline{B} = \bigcirc \quad , \quad \bigcirc\overline{A} = \bigcirc \quad , \quad A\overline{\textcircled{\scriptsize }} = \bigcirc.$$

§ 3. — Una espressione ottenuta operando su d'una classe X e su altre classi che si considerano come fisse, coi segni logici $\cap$ $\cup$ - si

dirà una funzione di X, e si indicherà con $f(X)$. In virtù delle identità precedenti essa si può mettere sotto molte forme differenti.

Noi diremo che una espressione logica funzione di X è sotto forma *separata* se è sotto la forma

$$(a) \qquad f(X) = PX \cup Q\overline{X},$$

ove P e Q sono classi indipendenti da X. Ogni funzione logica di X si può sempre mettere sotto forma separata, ed in un modo solo. Infatti una classe A indipendente da X si può mettere sotto la forma separata

$$A = AX \cup A\overline{X}.$$

La classe X si può mettere sotto la forma separata

$$X = \text{◍}X \cup \bigcirc\overline{X}.$$

La somma di due espressioni separate

$$(PX \cup Q\overline{X}) \cup (P'X \cup Q'\overline{X}) = (P \cup P')\,X \cup (Q \cup Q')\,\overline{X}$$

resta espressa sotto forma separata; il prodotto di due forme separate, dopo alcuni calcoli diventa

$$(PX \cup Q\overline{X})\,(P'X \cup Q'\overline{X}) = PP'X \cup QQ'\overline{X}$$

sotto forma separata; la negazione d'una forma separata

$$-(PX \cup Q\overline{X}) = \overline{P}X \cup \overline{Q}\overline{X}$$

resta pure espressa sotto forma separata. Quindi ogni funzione logica di X, che si ottiene operando un numero finito di volte su classi costanti e sulla X colle operazioni $\cup$, $\cap$, $-$, si potrà scrivere sotto forma separata.

È facile il vedere i significati dei coefficienti P e Q. Se nella (a) si fa $X = \text{◍}$, e poi $X = \bigcirc$, si ricava

$$f(\text{◍}) = P \quad , \quad f(\bigcirc) = Q;$$

quindi P e Q hanno un valore ben determinato. Sostituendo nella (a) si ha la relazione

$$f(X) = f(\blacksquare)\,X \cup f(\bigcirc)\,\overline{X} \tag{14}$$

che presenta analogia colla formula di Taylor.

Se $f(X, Y)$ è una funzione logica delle due classi variabili X ed Y, e di altre classi che si suppongono fisse, si avrà, per la (14):

$$f(X, Y) = f(\blacksquare, Y)\,X \cup f(\bigcirc, Y)\,\overline{X},$$

ed applicando ancora ai coefficienti la formula (14)

$$f(X,Y) = f(\blacksquare,\blacksquare)\,X\,Y \cup f(\blacksquare,\bigcirc)\,X\,\overline{Y} \cup f(\bigcirc,\blacksquare)\,\overline{X}\,Y \cup f(\bigcirc,\bigcirc)\,\overline{X}\,\overline{Y}. \tag{15}$$

Proposizioni.

§ 4. — Una proposizione può esprimere una relazione fra enti tutti determinati; allora si dirà *categorica;* considerata in sè stessa non può essere che o vera o falsa. Oppure una proposizione può contenere enti indeterminati (variabili), e si dirà *condizionale;* la condizione espressa da una tale proposizione è in generale verificata da certi enti, non da altri; può però la condizione essere verificata da tutti gli enti, o da nessuno. Ogni affermazione si fa mediante proposizioni categoriche; una proposizione condizionale non può essere che parte d'una categorica. Così ad esempio la proposizione '$x^2 - 3x + 2 = 0$' è una condizionale, contenente il numero indeterminato x; la proposizione 'l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha per radici 1 e 2' è categorica, avente per soggetto la condizione precedente. Così pure la '$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$' è condizionale, mentrechè la '$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ è un'identità' è categorica.

Se la proposizione condizionale α contiene l'ente indeterminato x, con $x : \alpha$ intenderemo la classe formata da tutti gli enti per cui è

vera la proposizione α. Se una proposizione α contiene più enti indeterminati x, y, ..., considereremo come un nuovo ente l'insieme d'un ente x, d'un ente y, ..., e lo indicheremo con $(x, y, ...)$. Colla scrittura $(x, y, ...) : \alpha$ intenderemo la classe formata da tutti gli enti $(x, y, ...)$ per cui è vera la α. Se la proposizione α non contiene altri enti indeterminati che $x, y, ...$, la classe $(x, y, ...) : \alpha$ è una classe ben determinata, ed una proposizione che affermi qualche proprietà di questa classe è categorica. Se invece la proposizione α contiene, oltre agli enti $x, y, ...$ ancora altri enti variabili $u, v, ...$, la classe $(x, y ..,) : \alpha$ dipenderà dagli enti $u, v, ...$ (sarà funzione di questi enti), e la proposizione che affermi una proprietà di questa classe sarà una proposizione condizionale in $u, v, ...$

Il segno : si potrà leggere *per cui*.

Esempi. Siano $x, y, ...$ numeri, f, $\varphi, ...$ simboli di funzioni numeriche; allora:

La scrittura $x : [f(x) = 0]$ rappresenta la classe di numeri x per cui $f(x)$ è nulla, cioè le radici dell' equazione $f(x) = 0$.

La scrittura $x : [f(x) = 0] \cap x : [\varphi(x) = 0]$ rappresenta le radici comuni alle due equazioni $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$.

La scrittura $x : [f(x) = 0] = x : [\varphi(x) = 0]$ esprime la proposizione 'le equazioni $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$ hanno le stesse radici'.

$x : [f(x)\,\varphi(x) = 0] = x : [f(x) = 0] \cup x : [\varphi(x) = 0]$ dice 'le radici dell'equazione $f(x)\,\varphi(x) = 0$ sono o radici della $f(x) = 0$, ovvero radici della $\varphi(x) = 0$'.

$x : [f(x) = 0] =$ ◍ dice 'la $f(x) = 0$ è un'identità rispetto ad x'.

$(x, y) : [f(x, y) = 0]$ rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di x ed y per cui $f(x, y) = 0$.

$x : [f(x, y) = 0]$ rappresenta l'insieme dei valori di x per cui $f(x, y) = 0$; esso dipende dal valore di y (supposta data la funzione f).

$x : [f(x, y) = 0] =$ ◍ dice 'la $f(x, y)$ è un'identità rispetto ad x; essa è una proposizione condizionale in y.

La $y : \{ x : [f(x, y) = 0] =$ ◍ $\}$ rappresenta la classe dei valori di y per cui la $f(x, y) = 0$ è un'identità rispetto ad x.

La $y : \} x : [f(x, y) = 0] = \text{◍} \{ = \text{○}$ dice: ‘ non esistono valori di y per cui la $f(x, y)$ sia nulla per ogni valore di x ’. Questa proposizione è categorica se $f(x, y)$ è una data funzione, condizionale se $f(x, y)$ non è una funzione data.

§ 5. — Onde semplificare le scritture, se in una questione è ben definito il sistema di enti $(x, y, ...)$ che si considerano come variabili, ometteremo davanti alle proposizioni condizionali il segno $(x, y, ...) :$. Noi adotteremo questa semplificazione solo quando si considerano come variabili tutti gli enti rappresentati con lettere. Quindi, essendo $\alpha, \beta, ...$ proposizioni condizionali, si ha che:

$\alpha < \beta$, ovvero $\beta > \alpha$ esprime ‘ la classe definita dalla condizione α è parte di quella definita dalla β ’, ovvero ‘ la α ha per conseguenza la β ’, ‘ la β è conseguenza della α ’, ‘ se è vera la α è pure vera la β ’.

$\alpha = \beta$ dice ‘ se è vera la α è pure vera la β, e viceversa ’.

$\alpha \cap \beta$ esprime la condizione che si ha supponendo verificate ad un tempo la α e la β.

$\alpha \cup \beta$ esprime la condizione che si ha supponendo verificata o la α o la β.

$- \alpha$ esprime la condizione che si ha negando la α.

○ esprime una condizione *assurda*.

◍ esprime una condizione *identica*.

Essendo A una classe $- [A = \text{○}]$ dice ‘ non è vero che la classe A non contenga alcun ente ’ ovvero ‘ la classe A contiene qualche ente ’; la scrittura $- [AB = \text{○}]$ esprime la proposizione particolare affermativa ‘ qualche A è B ’.

Esempi. Il lettore, per abituarsi ne’ segni introdotti, può interpretare in linguaggio ordinario le seguenti proposizioni, in cui $a, b, ... x, y, ...$ rappresentano numeri reali e finiti:

$(a < b) = (b > a)$; $- (a < b) = (a \geqq b)$; $- (a = b) = (a \gtrless b)$;
$(a = b) = (a + c = b + c)$;
$(a = b) < (a\,c = b\,c)$; $(a\,c = b\,c) = (a = b) \cup (c = 0)$;

$(a\,c = b\,c) \cap - (c = 0) < (a = b)$.

$(a = b) < (a^2 = b^2)$; $(a^2 = b^2) = (a = b) \cup (a = -b)$.

$(a\,x + b = a'\,x + b') = [(a - a')\,x = b' - b]$.

$(x + y = a) \cap (x - y = b) = (2\,x = a + b) \cap (2y = a - b)$.

$(x\,y = 0) = (x = 0) \cup (y = 0)$; $(x^2 + y^2 = 0) = (x = 0) \cap (y = 0)$.

$(x^2 - 3\,x + 2 > 0) = (x < 1) \cup (x > 2)$.

$- (x^2 - 3\,x + 2 > 0) = - (x < 1) \cap - (x > 2)$.

$[(x + y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2] = \circledcirc$; $(x^2 + y^2 + 1 = 0) = \bigcirc$.

$[x : (a\,x^2 + b\,x + c = a'\,x^2 + b'\,x + c') = \circledcirc] =$

$= (a = a') \cap (b = b') \cap (c = c')$

(vale a dire: affinchè l'eguaglianza $a\,x^2 + \ldots = a'\,x^2 + \ldots$ sia sodisfatta per ogni valore di x, è necessario e sufficiente che sia ad un tempo $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$).

$$\left\{ x : \left[\frac{1}{x\,(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} \right] = \circledcirc \right\} = (a = 1) \cap (b = -1).$$

$$[x : (x^2 + y^2 = 1) = \bigcirc] = (y < -1) \cup (y > +1)$$

(cioè: affinchè l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ non abbia radici reali in x è necessario e sufficiente che o y sia minore di -1, ovvero y sia maggiore di 1).

Operazioni sulle proposizioni.

§ 6. — Passeremo rapidamente in rassegna alcune identità logiche contenenti proposizioni condizionali.

Indicando con A, B, ... delle classi, ovvero delle proposizioni condizionali che definiscono delle classi, si hanno le identità:

[1] $(A = B) = (B = A)$

[2] $(A < B) = (A\,\overline{B} = \bigcirc)$

[3] $(A > B) = (B < A)$

[4] $(A = B) = (A > B) \cap (A < B)$.

Le identità (1) e (3) dicono che: *Ogni equazione logica si trasforma in un'altra eguale, ove si scambino i due membri, ed i segni* $=$, $<$, $>$ *che li uniscono in* $=$, $>$, $<$.

Le (2) e (3) esprimono le definizioni date dei segni $<$ e $>$ mediante il segno $=$; la (4) esprime il segno $=$ mediante i segni $>$ e $<$.

Si hanno ancora le identità seguenti, che esprimono l'uniformità delle operazioni $\cap$ $\cup$ - :

$$[5] \qquad (A = B) < (AC = BC)$$

$$[6] \qquad (A = B) < (A \cup C = B \cup C)$$

$$[7] \qquad (A = B) < (-A = -B).$$

Applicando due volte le identità (5) e (6) si ricava

$$[5'] \qquad (A = B) \cap (A' = B') < (AA' = BB')$$

$$[6'] \qquad (A = B) \cap (A' = B') < (A \cup A' = B \cup B').$$

Le identità seguenti:

$$[5''] \qquad (A < B) < (AC < BC)$$

$$[6''] \qquad (A < B) < (A \cup C < B \cup C)$$

$$[5'''] \qquad (A < B) \cap (A' < B') < (AA' < BB')$$

$$[6'''] \qquad (A < B) \cap (A' < B') < (A \cup A' < B \cup B')$$

si possono dedurre dalle precedenti sostituendo all'equazione $A < B$ la sua eguale $A\overline{B} = \bigcirc$. Così dalla [5] si ha $(A\overline{B} = \bigcirc) < (A\overline{B}C = \bigcirc)$; ora $A\overline{B}C = A\overline{B}C \cup A\overline{C}C = AC(\overline{B} \cup \overline{C}) = AC\overline{BC}$ per le identità (9), (4), (8); quindi, sostituendo, $(AB = \bigcirc) < (AC\,BC = \bigcirc)$ ossia $(A < B) < (AC < BC)$ che è la (5'').

Le identità precedenti dicono che: *Da un sistema di equazioni logiche, tutte vere, e contenenti tutte lo stesso segno* $=$, *o* $<$, *o* $>$, *si deducono nuove equazioni pure vere moltiplicando ambi i membri per uno stesso fattore o aggiungendovi uno stesso termine, o sommandole membro a membro, o moltiplicandole membro a membro.*

Se nella identità [7] si scambiano A e B in - A e - B si deduce

$$(-A = -B) < (A = B);$$

l'identità [7] e questa dànno, per la [4],

[7′] $$(A = B) = (-A = -B).$$

Si ha poi

$$(A < B) = (A\overline{B} = \bigcirc) = [\overline{B}(-\overline{A}) = \bigcirc] = [\overline{B} < \overline{A}] = (\overline{A} > \overline{B}),$$

ossia

[8] $$(A < B) = (\overline{A} > \overline{B}).$$

Le identità [7′] ed [8] dicono che: *Ogni equazione logica si trasforma in altra eguale prendendo le negative d'ambi i membri, e scambiando i segni* $=, <, >$ *in* $=, >, <$.

Ha importanza l'identità seguente:

[9] $$(A \cup B = \bigcirc) = (A = \bigcirc) \cap (B = \bigcirc).$$

Infatti, moltiplicando ambo i membri della prima per A si ha:

$$(A \cup B = \bigcirc) < (A \cup AB = \bigcirc)$$

e, poichè per la (11), $A \cup AB = A$, si ha

$$(A \cup B = \bigcirc) < (A = \bigcirc). \qquad (\alpha)$$

Moltiplicando per B i due membri dell'equazione proposta si otterrà analogamente

$$(A \cup B = \bigcirc) < (B = \bigcirc). \qquad (\beta)$$

Moltiplicando membro a membro le (α) e (β) si deduce:

$$(A \cup B = \bigcirc) < (A = \bigcirc) \cap (B = \bigcirc). \qquad (\gamma)$$

Sommando membro a membro le $A = \bigcirc$ e $B = \bigcirc$ si ha:

$$(A = \bigcirc) \cap (B = \bigcirc) < (A \cup B = \bigcirc) \qquad (\delta)$$

e l'insieme delle (γ) e (δ) dice appunto

$$(A \cup B = \bigcirc) = (A = \bigcirc) \cap (B = \bigcirc).$$

§ 7. — In virtù delle identità precedenti un'equazione logica può assumere varie forme diverse.

Così la proposizione universale affermativa 'ogni A è B' si è indicata colla scrittura (§ 1, 6)

(*a*) $\qquad A < B.$

Scambiando i membri [3] essa diventa

(*b*) $\qquad B > A$

ossia 'la classe B contiene la A'.

Moltiplicando ambo i membri della (*a*) per A si deduce

(*c*) $\qquad A < A\,B;$

e siccome si ha l'identità (12) $A\,B < A$, da questa e dalla (*c*) si deduce:

(*c'*) $\qquad A = A\,B.$

Si aggiunga B ad ambo i membri della (*a*); si ricava:

(*d*) $\qquad A \cup B < B;$

la quale unita all'identità (12') $A \cup B > B$ dà

(*d'*) $\qquad A \cup B = B.$

Si moltiplichino ambi i membri della (*a*) per $\overline{B}$; si avrà

(*e*) $\qquad A\,\overline{B} < \bigcirc$

e, per l'identità (13) $A\,\overline{B} > \bigcirc$ si ha

(*e'*) $\qquad A\,\overline{B} = \bigcirc.$

ossia 'nessun A è un non B'.

Si sommi $\bar{A}$ ad ambo i membri della (a); si avrà

(f) $$\bullet < \bar{A} \cup B$$

e, per l'identità (13′) $\bullet > \bar{A} \cup B$, si ha

(f') $$\bullet = \bar{A} \cup B$$

ossia ‘ogni cosa o non è A, o è B’.

Si prendano le negative [8] d'ambo i membri della (a); si avrà, scambiando i membri

(g) $$\bar{B} < \bar{A}$$

ossia ‘ogni non B è un non A’.

In tal modo dalla proposizione (a) si sono dedotte con operazioni logiche semplicissime le altre (b) ... (g); il lettore può per esercizio da una qualunque di queste proposizioni dedurre tutte le altre. Quindi esse sono tutte eguali fra loro, e non sono che modi diversi di esprimere ‘ogni A è B’.

§ 8. — Le quattro proposizioni:

(I) Ogni A è B

(II) Nessun A è B

(III) Qualche A è B

(IV) Qualche A non è B

si possono esprimere, come già si è visto, colle scritture

(I) $A\bar{B} = 0$; (II) $AB = 0$; (III) $-(AB = 0)$; (IV) $-(A\bar{B} = 0)$.

Le (I) e (II) diconsi dai logici *universali;* le (III) e (IV), che sono le negazioni di proposizioni universali, diconsi *particolari;* le (I) e (III), che contengono un numero pari di negazioni, diconsi *affermative;* le (II) e (IV) *negative.*

Si ha

$$(AB = \bigcirc) = (BA = \bigcirc)$$

ossia

'Nessun A è B' = 'Nessun B è A'.

Si ha pure

$$-(AB = \bigcirc) = -(BA = \bigcirc)$$

ossia

'Qualche A è B' = 'Qualche B è A'

le quali eguaglianze costituiscono la così detta *inversione* delle proposizioni universale negativa e particolare affermativa.

Le proposizioni (I) e (III), come pure le (II) e (IV), delle quali l'una è la negazione dell'altra diconsi *contradditorie*. Si ha

$$(AB = \bigcirc) \cap -(AB = \bigcirc) = \odot; \quad (A\bar{B} = \bigcirc) \cap -(A\bar{B} = \bigcirc) = \bigcirc;$$

ossia la coesistenza di due proposizioni contradditorie è un assurdo.

Le proposizioni (I) e (II) diconsi *contrarie;* nei trattati di logica sta scritto che due proposizioni contrarie non possono coesistere. Noi arriviamo ad un risultato alquanto diverso. Invero si ha, per la formula [9]

$$(AB = \odot) \cap (A\bar{B} = \bigcirc) = (AB \cup A\bar{B} = \bigcirc)$$

ossia

$$(AB = \bigcirc) \cap (A\bar{B} = \bigcirc) = (A = \odot)$$

vale a dire la coesistenza delle proposizioni (I) e (II) equivale ad $A = \bigcirc$; moltiplicando questa equazione per $-(A = \bigcirc)$ si deduce

[10] $$(AB = \bigcirc) \cap (A\bar{B} = \bigcirc) \cap -(A = \odot) = \odot$$

cioè non possono coesistere le proposizioni (I) e (II) supposto che la classe A non sia nulla. Certo, affermando i logici che due proposizioni contrarie non possono coesistere, sottintendono che la classe A non sia nulla; ma mentre tutte le regole enunciate

dalle formule precedenti sono vere qualunque siano le classi che compaiono, potendo essere esse anche ○ o ◍, questo è il primo caso in cui bisogna supporre non nulla una delle classi considerate.

La formula [10] si può pure scrivere

$$[10'] \qquad (A\overline{B}=○)\cap -(A=○) < -(BA=○)$$

ossia: 'se ogni A è B, e se la classe A non è nulla, si deduce che qualche B è A'. Quindi, fatta la convenzione di considerare come classi anche ○ e ◍, la 'qualche B è A' è conseguenza non della sola proposizione 'ogni A è B', ma di questa e della 'la classe A non è nulla'.

§ 9. — Le proposizioni 'ogni A è B' e 'ogni B è C' si possono scrivere

$$A\overline{B}=○, \qquad B\overline{C}=○.$$

Moltiplico la prima per $\overline{C}$, la seconda per A e sommo; avrò:

$$A\overline{C}=○$$

ossia 'ogni A è C'. Si ha così la forma più semplice del sillogismo:

$$[11] \qquad (A\overline{B}=○)\cap(B\overline{C}=○) < (A\overline{C}=○),$$

che si può anche scrivere

$$[11'] \qquad (A<B)\cap(B<C) < (A<C)$$

ovvero

$$[11''] \qquad (A\overline{B}=○)\cap(B\overline{C}=○)\cap -(A\overline{C}=○)=○$$

ovvero, scambiando anche C in $\overline{C}$,

$$[11'''] \qquad (A\overline{B}=○)\cap -(AC=○) < -(BC=○).$$

Questa ultima formula si può enunciare dicendo: 'se ogni A è B, e qualche A è C, si deduce che qualche B è C'.

Se nelle forme (11) e (11‴) si scambia B in $\overline{B}$, ovvero C in $\overline{C}$, ovvero tutti e due ad un tempo, e si scambiano fra loro i fattori del primo membro, il sillogismo prende varie forme, alcune delle quali vengono considerate dai logici e chiamate *modi* e *figure*; però fra i modi considerati dai logici alcuni non si possono ridurre alla forma precedente, e sono quelli in cui da due proposizioni generali si deduce una particolare. Così non si può ottenere la forma:

' Ogni B è C, e ogni B è A; dunque qualche A è C '.

La ragione è facile a scorgersi. Invero mentre le formule precedenti, e i sillogismi che ne derivano, sono vere qualunque siano le classi introdotte, potendo essere le medesime anche $\bigcirc$ o $\circledcirc$, in questa nuova forma bisogna supporre inoltre che la classe B non sia nulla. Invero si ha, per la formula [9]

$$(B\overline{C}=\bigcirc)\cap(B\overline{A}=\bigcirc)\cap(AC=\bigcirc)=[B(\overline{C}\cup\overline{A})\cup AC=\bigcirc]$$
$$=[B\cap-(AC)\cup AC(B\cup\overline{B})=\bigcirc]=\{B\cap[-(AC)\cup AC]\cup AC\overline{B}=\bigcirc\}$$
$$=\{B\cup AC\overline{B}=\bigcirc\}=(B=\bigcirc)\cap(AC\overline{B}=\bigcirc).$$

Quindi, moltiplicando per $-(B=\bigcirc)$, si ha

$$(B\overline{C}=\bigcirc)\cap(B\overline{A}=\bigcirc)\cap(AC=\bigcirc)\cap-(B=\bigcirc)=\bigcirc,$$

che si può anche leggere

$$(B\overline{C}=\bigcirc)\cap(B\overline{A}=\bigcirc)\cap-(B=\bigcirc)<-(AC=\bigcirc)$$

ossia ' se ogni B è C, ogni B è A, e la classe B non è nulla, qualche A è C '.

Quindi in questo caso, la conclusione dipende da tre proposizioni.

§ 10. — Tratteremo infine alcune questioni riferentisi alle equazioni logiche. Le identità

$$(A < B) = (B > A) = (A\overline{B} = O)$$

e

$$(A = B) = (A < B) \cap (A > B) = (A\overline{B} = O) \cap (\overline{A}B = O)$$
$$= (A\overline{B} \cup \overline{A}B = O)$$

dicono che ogni equazione logica si può trasformare in un'altra eguale, in cui il secondo membro sia O.

L'identità

$$(A = O) \cap (B = O) \cap (C = O) \cap .... = (A \cup B \cup C \cup ... = O)$$

dice che il sistema di più equazioni logiche coesistenti si può ridurre ad una sola equazione, col secondo membro nullo.

Una equazione o sistema di equazioni può contenere una classe incognita X; ci possiamo proporre di risolverla rispetto a questa incognita. Ridotto perciò il sistema di equazioni ad una sola col secondo membro nullo, l'equazione avrà la forma: $f(X) = O$, ove $f(X)$ rappresenta una funzione logica di X. Per quanto si è detto $f(X)$ si può mettere sotto la forma separata $AX \cup B\overline{X}$, sicchè ogni equazione o gruppo di equazioni logiche si può ridurre alla forma

$$AX \cup B\overline{X} = O$$

ossia

$$(AX = O) \cap (B\overline{X} = O)$$

che si può anche scrivere

$$(X < \overline{A}) \cap (B < X)$$

ovvero

$$B < X < \overline{A}.$$

Affinchè queste equazioni siano possibili, deve essere $B < \overline{A}$, ossia $AB = O$; supposta verificata questa condizione, basterà prendere

per X una classe qualunque contenente B e contenuta in $\overline{A}$, il che si può fare, se B e $\overline{A}$ non sono eguali, in infiniti modi. La più piccola classe X è B, la più grande $\overline{A}$; ogni altra si può mettere sotto la forma $B \cup Z\overline{A}$, ove Z è una classe arbitraria.

§ 11. — *Eliminare* da un'equazione (o gruppo di equazioni) un'incognita significa scrivere, ove esista, un'equazione non contenente più l'incognita, ma le altre variabili, affinchè l'equazione proposta possa essere soddisfatta da qualche valore dell'incognita. Si è già visto che il risultato dell'eliminazione di X dall'equazione $AX \cup B\overline{X} = \bigcirc$ è $AB = \bigcirc$.

La risoluzione d'un sistema di equazioni logiche con più incognite si può ridurre alle questioni già trattate eliminando un'incognita alla volta, come in algebra.

Eliminando da una o più equazioni un sistema di variabili si ha la condizione che passa fra le variabili rimanenti affinchè il sistema sia possibile. Così dall'equazione

$$AXY \cup BX\overline{Y} \cup C\overline{X}Y \cup D\overline{X}\,\overline{Y} = \bigcirc$$

eliminando dapprima la X si ha

$$(AY \cup B\overline{Y}) \cap (CY \cup D\overline{Y}) = \bigcirc$$

ossia

$$ACY \cup BD\overline{Y} = \bigcirc;$$

eliminando di qui la Y si ha

$$ACBD = \bigcirc,$$

come condizione affinchè l'equazione proposta possa essere soddisfatta da certe classi X ed Y.

Un'altra applicazione dell'eliminazione è lo stesso sillogismo. Da due proposizioni contenenti tre classi (termine maggiore, minore, medio) si tratta di eliminare il termine medio per avere una rela-

zione fra gli altri due. Così volendosi dalle proposizioni $A < B$ e $B < C$ eliminare C, si avrà

$$(A < B) \cap (B < C) = (A\overline{B} = \bigcirc) \cap (B\overline{C} = \bigcirc) = (A\overline{B} \cup B\overline{C} = \bigcirc).$$

Qui il primo membro è sotto forma separata, ed eliminando B si ha $A\overline{C} = \bigcirc$, che è appunto la conclusione del sillogismo.

Invece, dalle premesse già considerate alla fine del § 9

$$(B\overline{C} = \bigcirc) \cap (B\overline{A} = \bigcirc),$$

che si possono scrivere $B(\overline{C} \cup \overline{A}) = \bigcirc$, eliminando il B si ha l'identità $\bigcirc = \bigcirc$; resta così confermato che da quelle due sole premesse non si può conchiudere alcuna relazione fra A e C.

CAPITOLO I.

Formazioni geometriche

Linee, superficie e volumi.

1. Il calcolo geometrico consiste in un sistema di operazioni analoghe a quelle del calcolo algebrico, ma in cui gli enti sui quali si eseguiscono i calcoli, invece che numeri, sono enti geometrici, che definiremo.

Siano A, B, C, ... dei punti nello spazio.

DEF. 1ª. *Diremo* linea AB *la linea retta limitata dai due punti* A *e* B, *e immaginata descritta da un punto* P *che la percorra da* A *verso* B.

Data una linea AB, se A e B non coincidono, risulta determinata la retta indefinita che la contiene, e che diremo retta AB. Risulta pure determinata la sua lunghezza; colla scrittura *gr* AB, che si legge *grandezza* AB, intenderemo il numero che misura la lunghezza di questa linea, rispetto ad una lunghezza fissa, che diremo unità di misura. Inoltre, data una linea, è pure determinato il verso in cui la si immagina descritta. Le linee AB e BA stanno sulla stessa retta, hanno la stessa grandezza, ma verso opposto; quindi non si devono considerare come identiche.

DEF. 2ª. *Diremo* superficie ABC *la superficie piana triangolare descritta dalla linea* AP, *ove il punto* P *descriva la linea* BC, *da* B *verso* C.

Data una superficie ABC, se ABC non sono in linea retta, ri-

sulta determinato il piano che la contiene, e che diremo piano ABC. Risulta pure determinata la sua area; e indicheremo con *gr* ABC il numero che la misura, rispetto ad un'area fissa assunta come unità di misura.

Data una superficie, è pure determinato il senso in cui la si immagina descritta.

DEF. 3ª. *Diremo* volume ABCD *il volume tetraedrale descritto dalla superficie* ABP, *ove il punto* P *descriva la linea* CD, *nel senso già convenuto.*

Con *gr* ABCD intenderemo il numero che misura questo volume, rispetto ad un volume fisso, assunto come unità di misura.

2. Spesso rappresenteremo una linea o una superficie, o un volume con una lettera sola; adotteremo più abitualmente le lettere a, b, ... per le linee, α, β, ... per le superficie, A, B, Γ, ... pei volumi.

Se a, a′, ... rappresentano le linee PQ, P′Q′, ... e se α rappresenta la superficie XYZ, alle scritture

$$Aa,\ aA;\ ABa,\ AaB,\ aAB,\ \alpha A,\ A\alpha,\ aa'$$

attribuiremo rispettivamente i significati

$$APQ,\ PQA;\ ABPQ,\ APQB,\ PQAB,\ XYZA,\ AXYZ,\ PQP'Q'.$$

Operazioni sui volumi.

3. DEF. 1ª. *Diremo che un volume* A *è* nullo, *e scriveremo* $A = 0$, *se è nulla la sua grandezza.*

Questa convenzione permette già di esprimere alcune proposizioni geometriche sotto forma più concisa.

Così:

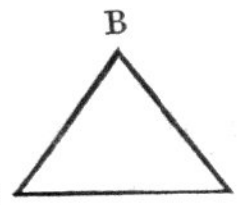
'ABCD = 0' significa 'i punti ABCD giacciono in uno stesso piano'.

'Aα = 0' » 'il punto A giace nel piano α'.

'ab = 0' » 'le rette a e b giacciono in uno stesso piano, cioè o si incontrano, o sono parallele'.

DEF. 2ª. *Un volume* ABCD, *non nullo, dicesi* destrorso, *ovvero* descritto nel senso positivo, *se una persona disposta lungo* AB, *col capo in* A *e colle estremità inferiori in* B, *vede la superficie* ABP, *la quale descrive il volume quando il punto* P *percorre la linea* CD, *da* C *verso* D, *a muoversi da sinistra verso destra. Se invece la stessa persona vede il piano a muoversi da destra verso sinistra, il volume si dirà* sinistrorso, *ovvero* descritto nel senso negativo.

Così ad esempio, il volume ABCD, ove BCD abbiano la posizione della figura, sarà destrorso se A sta avanti al piano del foglio, sinistrorso nel caso contrario. Il senso d'un volume, raramente considerato nella Geometria elementare, ha grande importanza nelle ricerche che intraprendiamo.



DEF. 3ª. *Diremo* rapporto di due volumi A *e* Ω, *e indicheremo con* $\frac{A}{\Omega}$, *il rapporto delle loro grandezze preso col segno* + *o col segno* —, *secondochè i due volumi hanno lo stesso senso, o senso opposto.*

Quindi il rapporto di due volumi è un numero reale che può essere positivo o negativo.

Sia Ω un volume determinato in grandezza e senso. Allora:

DEF. 4ª. *Diremo che i volumi* A *e* B *sono eguali, e scriveremo* A = B, *se*

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{B}{\Omega}.$$

DEF. 5ª. *Diremo che il volume* A *è eguale al volume* B *moltiplicato pel numero* m, *e scriveremo* $A = mB$, *ovvero* $A = Bm$, *se*

$$\frac{A}{\Omega} = m\,\frac{B}{\Omega}.$$

DEF. 6ª. *Diremo che il volume* A *è la somma dei volumi* B *e* Γ, *e scriveremo* $A = B + \Gamma$, *se*

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{B}{\Omega} + \frac{\Gamma}{\Omega}.$$

4. In virtù di queste definizioni ha un significato ben definito ogni eguaglianza della forma

$$\Sigma = mA + nB + p\Gamma + \dots,$$

in cui $m, n, p, \dots$ sono numeri, A, B, Γ, ... Σ volumi; essa è equivalente all'eguaglianza numerica

$$\frac{\Sigma}{\Omega} = m\,\frac{A}{\Omega} + n\,\frac{B}{\Omega} + p\,\frac{\Gamma}{\Omega} + \dots\dots$$

Quindi sussistono pei volumi le stesse identità che valgono pei numeri, e si ha

$$A + B = B + A, \quad A + (B + \Gamma) = A + B + \Gamma$$
$$(m + n)\,A = mA + nA, \quad m\,(A + B) = mA + mB$$
$$(A = B) < (A + \Gamma = B + \Gamma), \quad (A = B) < (mA = mB)$$
$$(A = B) \frown (B = \Gamma) < (A = \Gamma),$$

le quali esprimono le qualità commutativa e associativa dell'addizione fra volumi, la proprietà distributiva del prodotto d'un numero per un volume, rispetto ad ambo i fattori, e l'uniformità di queste operazioni.

Si debbono ben distinguere le eguaglianze $\mathrm{gr}\,A = \mathrm{gr}\,B$ e $A = B$; la prima dice che i due volumi hanno la stessa grandezza, la seconda che hanno la stessa grandezza e lo stesso senso.

Uniformandoci alle notazioni algebriche, alle scritture $-A$ e $A - B$ attribuiremo i significati $(-1)\,A$, $A + (-1)\,B$. Quindi l'egua-

glianza $\mathsf{A} = -\mathsf{B}$ dice che i volumi A e B hanno la stessa grandezza, ma senso opposto.

La diseguaglianza $\frac{\pi A}{\pi B} > 0$ significa che i volumi πA e πB hanno lo stesso senso, ossia che i punti A e B stanno dalla stessa parte del piano π. Analogamente

$$\left(\frac{\pi A}{\pi B} < 0\right) = (\text{i punti A e B stanno da parti opposte del piano } \pi).$$

$$(\pi A = \pi B) = (\text{la retta AB è parallela al piano } \pi).$$

Invero, se $\pi A = \pi B$, i tetraedri πA e πB, che hanno la stessa base, e sono eguali in grandezza, avranno la stessa altezza; e siccome hanno lo stesso senso, i punti A e B stanno da una stessa parte del piano π, e quindi la retta AB è parallela a π; e viceversa.

Se in un volume ABCD si scambiano fra loro due vertici, la grandezza del volume non cambia, ma, evidentemente, esso cambi di senso.

Scambiando uno o più vertici si deducono le seguenti identità:

$$ABCD = -BACD, \quad ABCD = BCAD, \quad ABCD = -BCDA,$$
$$ABCD = CDAB,$$

che si possono anche scrivere, cambiando lettere,

$$ABa = -BAa, \quad AaD = aAD, \quad A\alpha = -\alpha A, \quad ab = ba.$$

Formazioni geometriche.

5. DEF. 1ª. *L'insieme dei punti* A, B, C, ... *cui siano rispettivamente affissi i numeri* $m, n, p, \ldots$ *dicesi una* formazione di prima specie, *e si rappresenta colla scrittura* $mA + nB + pC + \ldots$

DEF. 2ª. *L'insieme delle linee* a, b, c, ... *cui siano affissi i numeri* $m, n, p, \ldots$ *dicesi una* formazione di seconda specie, *e si rappresenta colla scrittura* $ma + nb + pc + \ldots$

DEF. 3ª. *L'insieme delle superficie* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *cui siano affissi i numeri* $m, n, p, \ldots$ *dicesi una* formazione di terza specie, *e si rappresenta colla scrittura* $m\alpha + n\beta + p\gamma + \ldots$

DEF. 4ª. *I volumi, e le somme di volumi della forma* $m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + p\Gamma + \ldots$ *diconsi pure* formazioni di quarta specie.

Le formazioni delle quattro specie ora definite sono gli enti geometrici oggetto del nostro calcolo; per quelle della quarta specie già si sono definite alcune operazioni; noi faremo dipendere le definizioni analoghe per le tre prime specie da quelle della quarta nel modo seguente:

6. DEF. *Una formazione di* $\left\{\begin{matrix}1^a\\2^a\\3^a\end{matrix}\right\}$ *specie* $\left\{\begin{matrix}m\mathrm{A}+n\mathrm{B}+\ldots\\ m\mathrm{a}+n\mathrm{b}+\ldots\\ m\alpha+n\beta+\ldots\end{matrix}\right\}$ *dicesi*

nulla, *e si scrive* $\left\{\begin{matrix}m\mathrm{A}+n\mathrm{B}+\ldots=0\\ m\mathrm{a}+n\mathrm{b}+\ldots=0\\ m\alpha+n\beta+\ldots=0\end{matrix}\right\}$, *se, comunque si prenda*

$\left\{\begin{matrix}\text{la superficie } \pi\\ \text{la linea } \mathrm{p}\\ \text{il punto } \mathrm{P}\end{matrix}\right\}$ *si ha sempre* $\left\{\begin{matrix}m\mathrm{A}\pi+n\mathrm{B}\pi+\ldots=0\\ m\mathrm{a}\,\mathrm{p}+n\mathrm{b}\,\mathrm{p}+\ldots=0\\ m\alpha\mathrm{P}+n\beta\mathrm{P}+\ldots=0\end{matrix}\right\}$.

Quindi l'eguaglianza $\mathrm{ABC}=0$ significa che i punti ABC hanno tale posizione che comunque si prenda il punto P si ha $\mathrm{ABCP}=0$; il che evidentemente significa che l'area del triangolo ABC è nulla. Quindi.

$(\mathrm{ABC}=0)=$(i punti A, B, C giacciono su d'una stessa retta).

$(\mathrm{Aa}=0)=$(il punto A sta sulla retta a).

L' eguaglianza $\mathrm{AB}=0$ significa che, comunque si prendano i punti P e Q si ha $\mathrm{ABPQ}=0$, il che evidentemente significa che i punti A e B coincidono; quindi

$(\mathrm{AB}=0)=$(i punti A e B coincidono).

7. DEF. *Due formazioni di* $\left\{\begin{matrix}1^a\\2^a\\3^a\end{matrix}\right\}$ *specie* $\left\{\begin{matrix}mA+nB+...\\ma+nb+...\\m\alpha+n\beta+...\end{matrix}\right\}$ *e* $\left\{\begin{matrix}m'A'+n'B'+...\\m'a'+n'b'+...\\m'\alpha'+n'\beta'+...\end{matrix}\right\}$ *diconsi* eguali, *e si scrive*

$$\left\{\begin{matrix}mA+nB+...=m'A'+n'B'+...\\ma+nb+...=m'a'+n'b'+...\\m\alpha+n\beta+...=m'\alpha'+n'\beta'+...\end{matrix}\right\},$$

se, comunque si prenda $\left\{\begin{matrix}\text{la superficie } \pi\\\text{la linea } p\\\text{il punto } P\end{matrix}\right\}$ *si ha sempre*

$$\left\{\begin{matrix}mA\pi+nA\pi+...=m'B'\pi+n'B'\pi+...\\map+nbp+...=m'a'p+n'b'p+...\\m\alpha P+n\beta P+...=m'\alpha' P+n'\beta' P+...\end{matrix}\right\}.$$

Dalla definizione precedente si deduce:

TEOREMA 1°. *Due formazioni della stessa specie, che non differiscano che per l'ordine dei termini, sono eguali fra loro.*

Infatti, facciasi seguire ogni termine di ciascuna formazione da una superficie π, o da una linea p, o da un punto P, secondochè essa è di prima, seconda o terza specie; si avranno due somme di volumi, che differiscono solo per l'ordine dei termini, e quindi sono eguali; perciò anche le formazioni proposte sono eguali.

TEOREMA 2°. *Due formazioni eguali ad una terza sono eguali fra loro.*

La dimostrazione è analoga alla precedente.

8. Il lettore può dimostrare facilmente le proposizioni che seguono:

TEOREMA 1°. *L'equazione* $mA=nB$ *dice che i punti* A *e* B *coincidono, e che i numeri* m *ed* n *sono eguali.*

DEF. *Due linee* a *e* b *giacenti sulla stessa retta diconsi dello stesso senso, o di senso opposto, secondochè, presi ad arbitrio i punti* P *e* Q, *i volumi* aPQ *e* bPQ *hanno lo stesso senso o senso opposto.*

TEOREMA 2°. *L'equazione* $a = b$ *dice che le linee* a *e* b *giacciono sulla stessa retta, hanno egual grandezza e lo stesso senso.*

TEOREMA 3°. *L'equazione* $a = mb$ *dice che le linee* a *e* b *giacciono sulla stessa retta, che il rapporto delle loro grandezze è eguale al valore assoluto di* m, *e che esse hanno lo stesso senso, o senso opposto secondochè* m *è positivo o negativo.*

DEF. *Due superficie* α *e* β *giacenti in uno stesso piano diconsi dello stesso senso o di senso opposto, secondochè preso ad arbitrio il punto* P, *i volumi* αP *e* βP *hanno lo stesso senso o senso opposto.*

TEOREMA 4°. *L'equazione* $\alpha = \beta$ *dice che le superficie* α *e* β *giacciono in uno stesso piano, hanno egual grandezza e lo stesso senso.*

COROLLARIO. L'equazione $ABC = ABD$ dice che la retta CD è parallela ad AB.

TEOREMA 5°. *L'equazione* $\alpha = m\beta$ *dice che le superficie* α *e* β *giacciono in uno stesso piano, che il rapporto delle loro grandezze è eguale al valor assoluto di* m, *e che esse hanno lo stesso senso o senso opposto, secondochè* m *è positivo o negativo.*

Si hanno ancora le identità

$$AB = -BA$$
$$Aa = +aA.$$

Per dimostrarle basta far seguire i membri della prima da **p**, e quelli della seconda da P; si ottengono le note identità

$$ABp = -BAp \quad ; \quad AaP = aAP.$$

Operazioni sulle formazioni.

9. Introdurremo infine le seguenti operazioni sulle formazioni. Per semplicità colle lettere A, B, C, ... intenderemo indifferentemente punti, o linee, o superficie, o volumi; colle lettere S, S', ... intenderemo formazioni di specie qualunque.

DEF. 1ª. *Diremo* somma *di due formazioni della stessa specie* $S = mA + nB + \ldots$ *e* $S' = m'A' + n'B' + \ldots$, *e indicheremo con* $S + S'$, *la formazione*

$$mA + nB + \ldots + m'A' + n'B' + \ldots$$

composta dei termini delle due formazioni date.

Si ricavano le identità

$$S + S' = S' + S \quad ; \quad S + (S' + S'') = S + S' + S''.$$

Invero, i due membri di queste identità contengono gli stessi termini.

DEF. 2ª. *Diremo* prodotto *d'un numero* x *per una formazione* $S = mA + nB + \ldots$ *e indicheremo con* xS, *la formazione* $xmA + xnB + \ldots$, *la quale si ottiene moltiplicando i coefficienti di tutti i suoi termini per* x.

Si hanno le identità

$$x(S + S') = xS + xS' \quad , \quad (x + y)S = xS + yS$$

perchè i membri di queste identità contengono gli stessi termini.

Sono troppo facili a dimostrarsi le seguenti proposizioni:

$$(S = S') < (S + S'' = S' + S'').$$
$$(S = S') \frown (S'' = S''') < (S + S'' = S' + S''').$$
$$(S = S') < (xS = xS'),$$

le quali dicono che le equazioni geometriche si possono sommare e moltiplicare per numeri, come le algebriche.

Faremo ancora uso delle notazioni rappresentate dalle seguenti equazioni, in cui S, S' sono formazioni, x un numero:

$$Sx = xS$$
$$-S = (-1)S$$
$$S - S' = S + (-S')$$
$$\left(\frac{S}{S'} = x\right) = (S = xS').$$

L'ultima, che è un'equazione logica, equivale a dire: chiameremo rapporto di due formazioni S ed S' il numero x, per cui moltiplicando S' si ha S. Affinchè possa aver significato il rapporto $\frac{S}{S'}$, è anzitutto necessario che le due formazioni siano della stessa specie; ma questa condizione non è sufficiente. Risulta dalle cose dette, che hanno rapporto due volumi, due superficie giacenti sullo stesso piano, due linee giacenti sulla stessa retta.

10. Le operazioni precedenti sono la naturale estensione delle analoghe operazioni algebriche. Ora definiremo un'operazione geometrica che non ha più la corrispondente in algebra.

DEF. *Essendo* $S = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_n A_n$ *e* $S' = m'_1 A'_1 + \ldots + m'_{n'} A'_{n'}$ *due formazioni di specie* s *e* s', *supposto* $s + s' \leqq 4$, *diremo* formazione proiettante S' *da* S, *ovvero* prodotto progressivo *delle due formazioni, e indicheremo con* SS', *la formazione* $\sum_{i,j} m_i m'_j A_i A'_j$, *cioè la somma di tutti i termini che si ottengono dallo scritto sostituendo ad* i *ed* j *tutti i numeri interi rispettivamente da* 1 *ad* n, *e da* 1 *ad* n'.

Si ha, p. es.:

$$(A + B)\,C = AB + AC \quad , \quad (B - A)\,\pi = B\pi - A\pi\,;$$

$$((B - A)\,\pi = 0) = (\text{la retta AB è parallela al piano } \pi)$$

$$((B - A)\,a = 0) = (\text{la retta AB è parallela alla retta a}).$$

La definizione del N. 6 si può enunciare: Una formazione di 1ª, o 2ª, o 3ª specie dicesi nulla, se proiettando da essa rispettivamente una superficie, una linea o un punto, presi ad arbitrio, la somma dei volumi così ottenuta è nulla. Anche la definizione del N. 7 si può enunciare analogamente.

Si hanno le seguenti identità

$$S(S_1 + S_2) = SS_1 + SS_2 \quad , \quad (S_1 + S_2)\,S = S_1 S + S_2 S$$

$$S\,(S_1 S_2) = S S_1 S_2$$

$$(xS)\,S' = S\,(xS') = x\,(SS').$$

Invero i due membri di ciascheduna di queste eguaglianze contengono gli stessi termini, al più in ordine diverso.

Se le formazioni S ed S' sono di specie s ed s', si ha

$$SS' = (-1)^{ss'} S'S.$$

Invero le due formazioni SS' ed $S'S$ contengono gli stessi termini, collo stesso segno se ss' è pari, col segno opposto se ss' è dispari.

Si ha infine il seguente

TEOREMA. *Se si moltiplicano membro a membro due equazioni geometriche, si ottiene una nuova equazione, conseguenza di quelle due; cioè*

$$(S = S') \cap (S_1 = S'_1) < (SS_1 = S'S'_1).$$

Per maggior comodità supporremo che tutte le formazioni siano di prima specie, e comincieremo a dimostrare questo teorema in alcuni casi particolari.

a) $$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') < (\mathrm{SP} = \mathrm{S}'\mathrm{P}).$$

Infatti $(\mathrm{S} = \mathrm{S}') = (\text{qualunque sia la superficie } \pi \text{ si ha}$

$\mathrm{S}\pi = \mathrm{S}'\pi) < (\text{qualunque sia la linea p si ha } \mathrm{SP}p = \mathrm{S}'\mathrm{P}p) = (\mathrm{SP} = \mathrm{S}'\mathrm{P})$

che dimostra la (a).

b) $$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') < (\mathrm{S}\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}'\mathrm{S}_1).$$

Infatti, sia $\mathrm{S}_1 = m_1\mathrm{A}_1 + n_1\mathrm{B}_1 + \ldots$; si ha per la (a)

$$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') < (\mathrm{S}\mathrm{A}_1 = \mathrm{S}'\mathrm{A}_1) < (m_1\mathrm{S}\mathrm{A}_1 = m_1\mathrm{S}'\mathrm{A}_1)$$
$$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') < \ldots\ldots\ldots < (n_1\mathrm{S}\mathrm{B}_1 = n_1\mathrm{S}'\mathrm{B}_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Moltiplicando queste equazioni logiche si ha

$$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') < (m_1\mathrm{S}\mathrm{A}_1 = m_1\mathrm{S}'\mathrm{A}_1) \cap (m_2\mathrm{S}\mathrm{A}_2 = m_2\mathrm{S}'\mathrm{A}_2) \cap \ldots\ldots <$$
$$(m_1\mathrm{S}\mathrm{A}_1 + m_2\mathrm{S}\mathrm{A}_2 + \ldots = m_1\mathrm{S}'\mathrm{A}_1 + m_2\mathrm{S}'\mathrm{A}_2 + \ldots) = (\mathrm{S}\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}'\mathrm{S}_1)$$

che dimostra la (b).

c) $$(S_1 = S'_1) < (SS_1 = SS'_1).$$

Infatti $(S_1 = S'_1) < (S_1 S = S'_1 S) = (-SS_1 = -SS'_1) = (SS_1 = SS'_1)$

d) $$(S = S') \cap (S_1 = S'_1) < (SS_1 = S'S'_1).$$

Infatti $$(S = S') < (SS_1 = S'S_1)$$
$$(S_1 = S'_1) < (S'S_1 = S'S'_1)$$

quindi

$$(S = S') \cap (S_1 = S'_1) < (SS_1 = S'S_1) \cap (S'S_1 = S'S'_1) < (SS_1 = S'S'_1).$$

11. Riepilogando le cose dette, noi abbiamo introdotte quattro specie di formazioni, di cui sono casi particolari i punti, le linee, le superficie e i volumi.

Si è definita (N. 9) la somma di due formazioni della stessa specie, la quale operazione ha le proprietà commutativa ed associativa, come l'addizione algebrica.

Si è definito il prodotto d'un numero per una formazione di specie qualunque; questa operazione è distributiva rispetto ad ambi i fattori.

Si è definita infine la proiezione, o prodotto progressivo di due formazioni di specie s e s', supposto $s + s' \leqq 4$, che è una nuova formazione di specie $s + s'$. Esso ha la proprietà distributiva rispetto ad ambo i fattori, e l'associativa; scambiando i due fattori il prodotto vien moltiplicato per $(-1)^{ss'}$. Il prodotto d'un numero per una formazione si può subordinare al prodotto di due formazioni, supponendo che i numeri siano formazioni di specie zero.

L'eguaglianza di due formazioni di 4ª specie si è fatta dipendere dall'eguaglianza di due numeri; si è poi assunto per definizione che due formazioni di 1ª, o 2ª, o 3ª specie sono eguali, se facendole seguire da una stessa superficie, o una stessa linea, o uno stesso punto, i volumi ottenuti sono eguali; e si è dimostrato infine che, se due formazioni sono eguali, facendole precedere o seguire da una stessa formazione, o da formazioni eguali, i risultati sono eguali.

Passeremo ora a ridurre alla forma più semplice le formazioni delle successive specie, servendoci a questo scopo di poche proposizioni geometriche, e del calcolo geometrico precedentemente spiegato.

CAPITOLO II.

Formazioni di prima specie.

Riduzione delle formazioni di prima specie.

12. TEOREMA. *Essendo* A *e* B *due punti, m ed n due numeri, la cui somma non è nulla, la formazione di prima specie* $m\mathrm{A}+n\mathrm{B}$ *è eguale ad* $(m+n)\mathrm{C}$, *ove* C *è il punto della retta* AB, *le cui distanze dai punti* A *e* B *sono inversamente proporzionali ai due numeri m ed n, e che sta fra* A *e* B *se questi due numeri sono dello stesso segno, e sta fuori del segmento* AB *se essi sono di senso contrario.*

Per dimostrare che $m\mathrm{A}+n\mathrm{B}=(m+n)\mathrm{C}$, ove A, B, C hanno la posizione indicata, basta, in virtù delle definizioni date, dimostrare che, comunque si prenda la superficie triangolare π, si ha $m\mathrm{A}\pi+n\mathrm{B}\pi=(m+n)\mathrm{C}\pi$.

Ecco un modo di dare questa dimostrazione:

Lemma 1°. Se ABC *sono tre punti in linea retta, si ha* $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=0$, *e viceversa, ossia:*

$$(\mathrm{ABC}=0)=(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=0).$$

Infatti siano ABC in linea retta, e il punto B stia frammezzo ad A e C. Presi ad arbitrio i punti P e Q i volumi ABPQ, BCPQ e ACPQ hanno tutti lo stesso senso, e il terzo è la somma dei due primi; quindi si ha, qualunque sia la linea PQ:

$$\mathrm{ABPQ}+\mathrm{BCPQ}=\mathrm{ACPQ}$$

il che significa che

$$AB + BC = AC$$

che si può anche scrivere $AB + BC + CA = 0$. Si è supposto in questa dimostrazione che B fosse compreso fra A e C; siccome però questa relazione è simmetrica rispetto ad A, B, C, così essa vale qualunque sia la posizione relativa di questi punti.

Viceversa, se $AB + BC + CA = 0$, moltiplicando per C, e osservando che $BCC = 0$ e $CAC = 0$, si deduce $ABC = 0$, c. v. d.

Lemma 2°.

$$(ABCD = 0) = (ABC - ABD + ACD - BCD = 0).$$

Infatti, se ABCD giacciono in un piano, le linee AB e CD o si incontrano in un punto X, o sono parallele. Nel primo caso, poichè $XAB = 0$, e $XCD = 0$, si deduce dal lemma precedente:

$$AB = XB - XA \ ; \ CD = XD - XC.$$

Moltiplico ambo i membri della prima per C e per D, e quelli della seconda per A e per B; ottengo le equazioni:

$$ABC = XBC - XAC$$
$$ABD = XBD - XAD$$
$$CDA = XDA - XCA$$
$$CDB = XDB - XCB.$$

Sommando membro a membro la prima equazione colla seconda cambiata di segno, colla terza, e colla quarta cambiata di segno si ricava la formola a dimostrarsi.

Se invece AB e CD sono parallele, sarà

$$ABC = ABD \ , \ ACD = BCD$$

da cui si ricava ancora la formola a dimostrarsi.

Viceversa, se $ABC - ABD + ACD - BCD = 0$, moltiplicando per D si deduce $ABCD = 0$.

L'eguaglianza logica che costituisce questo lemma si può pure scrivere

$$(ABCD = 0) = (ABC = D\,(AB + BC + CA)).$$

Ciò premesso passiamo alla dimostrazione del teorema. Poichè i punti ABC sono in linea retta, e i segmenti AC e CB stanno inversamente ai numeri m ed n, si avrà

$$mAC = nCB$$

ovvero

a) $$mAC + nBC = 0.$$

Prendasi ad arbitrio la superficie triangolare $\pi = PQR$; il piano π o incontrerà la retta ABC in un punto X, o le riuscirà parallelo.

Nel primo caso, poichè $XAC = 0$ e $XBC = 0$, si avrà $AC = XC - XA$, $BC = XC - XB$; quindi, sostituendo nella (*a*), si ottiene dopo alcune riduzioni:

b) $$(m + n)\,CX = mAX + nBX.$$

Si moltiplichi questa eguaglianza per $PQ + QR + RP$, si avrà

c) $$(m+n)CX(PQ+QR+RP) = mAX(PQ+QR+RP) + nBX(PQ+QR+RP),$$

ovvero, siccome $XPQR = 0$, si ha pel lemma 2°, $X(PQ + QR + RP) = PQR$, onde:

$$(m + n)\,CPQR = mAPQR + nBPQR,$$

ossia

d) $$(m + n)\,C\pi = mA\pi + nB\pi.$$

Se poi il piano π fosse parallelo alla retta ABC, si ha $A\pi = B\pi = C\pi$, da cui si ricava la relazione *d)*.

Quindi, comunque si prenda il piano π risulta verificata la relazione *d)*, ossia

$$(m + n)\,C = mA + nB.$$

COROLLARIO. *Se* ABC *sono in linea retta, e* AB *sono distinti, si possono sempre determinare due numeri* m *ed* n *in modo che* $(m+n)\,C = mA + nB$.

13. DEF. *Dicesi* massa *d'una formazione di prima specie* $m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_n A_n$, *ove* $A_1 \ldots A_n$ *sono punti, la somma dei coefficienti* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

TEOREMA. *Ogni formazione di prima specie* $m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_n A_n$, *la cui massa* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ *non sia nulla, è riduttibile ad un punto solo* G *col coefficiente* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Infatti sia il numero n dei termini della formazione maggiore di 2; potremo supporre che nessuno dei coefficienti numerici sia nullo, poichè altrimenti il numero dei termini sarebbe minore di n; allora presi tre termini qualunque, p. es.: $m_1 A_1$, $m_2 A_2$, $m_3 A_3$, non possono essere vere ad un tempo le tre equazioni $m_1 + m_2 = 0$, $m_1 + m_3 = 0$, $m_2 + m_3 = 0$; supponiamo, p. e., che sia $m_1 + m_2 \gtrless 0$, si potrà, pel teorema precedente, determinare un punto G_1, tale che

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 = (m_1 + m_2)\, G_1$$

onde

$$m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n = (m_1 + m_2)\, G_1 + \ldots + m_n A_n,$$

ossia la formazione proposta, contenente n termini, è ridotta ad un'altra contenente $n - 1$ termini, e la massa della prima è eguale a quella della seconda.

Così continuando, la formazione proposta si ridurrà alla somma di due termini $pP + qQ$, in cui $p + q = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$; e siccome questa somma non è nulla, per ipotesi, si potrà determinare un punto G tale che $pP + qQ = (p+q)\,G$, ossia

$$m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n = (m_1 + \ldots + m_n)\, G.$$

NOTA. Il punto G così determinato dicesi, in Meccanica, *baricentro* o *centro di gravità* dei punti dati cui siano affisse masse misurate dai rispettivi coefficienti.

TEOREMA. *Ogni formazione di prima specie, la cui massa sia nulla, è riduttibile alla forma* P—Q; *uno qualunque dei due punti* P *e* Q *si può prendere ad arbitro.*

Infatti sia la formazione $S = m_1 A_1 + ... + m_n A_n$, in cui $m_1 + ... + m_n = 0$. Preso ad arbitrio il punto Q si ha

$$S = (m_1 A_1 + ... + m_n A_n + Q) - Q.$$

Ma la formazione entro parentesi, la cui somma vale 1, è riduttibile ad un punto solo P con coefficiente 1; si avrà quindi

$$S = P - Q.$$

14. DEF. *Ogni formazione di prima specie della forma* B — A *dicesi* vettore. *I punti* A *e* B *diconsi rispettivamente* origine *e* termine *del vettore.*

TEOREMA. *Affinchè due vettori* B — A *e* B′ — A′ *siano eguali, senzachè i punti siano tutti in linea retta, è necessario e sufficiente che le rette* AB *e* A′B′ *siano parallele, come pure le* AA′ *e* BB′, *ossia che la figura* ABB′A′ *sia un parallelogrammo.*

Infatti, se

a) $$B - A = B' - A'$$

moltiplicando per BA′B′ si deduce, trascurando i termini nulli, ABA′B′ = 0, ossia i quattro punti ABA′B′ giacciono in un piano.

Moltiplicando la *a)* per AA′ si deduce

$$BAA' = B'AA',$$

ossia la retta BB′ è parallela alla AA′. Moltiplicando invece per A′B′ si deduce

$$AA'B' = BA'B',$$

ossia la retta AB è parallela alla A′B′.

Viceversa, se la figura ABB′A′ è un parallelogrammo, detto O il punto d'incontro delle due diagonali, sarà $2O = A + B'$ e $2O = A' + B$, perchè O è il punto medio di ciascuna diagonale; quindi $A + B' = A' + B$, onde $B - A = B' - A'$, c. v. d.

Problemi sulla riduzione delle formazioni di prima specie.

15. Risolveremo alcuni problemi sulla riduzione delle formazioni. Questi problemi si risolvono ripetendo più volte le due costruzioni:

1. Condurre la retta passante per due punti dati;

2. Condurre la retta passante per un punto dato e parallela ad una retta data.

Queste costruzioni si fanno cogli strumenti detti *riga* e *parallele*. Alle parallele si può sostituire il compasso, ma noi non l'introdurremo. I problemi che si possono risolvere ripetendo più volte le costruzioni 1 e 2 diconsi *lineari*.

PROBLEMA. *Dati i punti* A, B, O *determinare il punto* X *in modo che*

$$X - O = B - A.$$

Se i punti A B O non sono su d'una stessa retta, si conduca da O la parallela ad A B, e da B la parallela ad A O; queste rette si incontreranno nel punto cercato X.

Se invece il punto O sta sulla retta A B, preso ad arbitrio il punto C fuori della retta A B O, si costruisca D tale che $D - C = B - A$, poi X tale che $X - O = D - C$; sarà $X - O = B - A$.

PROBLEMA. *Costrurre la somma* $O + (B - A)$ *d'un punto* O *e d'un vettore* $B - A$.

Si costruisca X tale che $X - O = B - A$, sarà

$$X = O + (B - A).$$

PROBLEMA. *Costrurre la somma di più vettori* $(B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) + \ldots + (B_n - A_n)$.

Preso ad arbitrio il punto O, si determinino i punti $X_1 X_2 \dots X_n$ in modo che

$$X_1 - O = B_1 - A_1\,,\quad X_2 - X_1 = B_2 - A_2\,,\quad \dots\quad X_n - X_{n-1} = B_n - A_n.$$

Sommando si ha

$$X_n - O = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) + \dots + (B_n - A_n).$$

PROBLEMA. *Costrurre un vettore eguale ad* $m\,(B - A)$, *ove* m *è un numero intero.*

Se m è un intero positivo, il vettore cercato è la somma di m vettori eguali a $B - A$, e si costruisce colla regola precedente.

Se m è un intero negativo, posto $m = -m'$, sarà $m\,(B - A) = m'\,(A - B)$; e così siamo ridotti al caso precedente.

PROBLEMA. *Costrurre il baricentro* C *di due punti dati* A *e* B *cui siano affissi i numeri interi* m *ed* n.

Il baricentro deve anzitutto stare sulla retta AB. Prendasi ad arbitrio un punto O fuori di essa; si costruiscano i punti A′, B′ e C′ in modo che

$$A' - O = m\,(A - O)\quad ;\quad B' - O = n\,(B - O)\,,$$
$$C' - O = (A' - O) + (B' - O).$$

Si avrà $C' - O = mA + nB - (m + n)\,O$, ovvero, poichè $mA + nB = (m + n)\,C$, si avrà:

$$(m + n)\,C = C' + (m + n - 1)\,O.$$

Questa formola dice che C sta sulla retta OC′; quindi C sarà il punto d'incontro delle rette AB e OC′.

PROBLEMA. *Costrurre un vettore eguale a* $\frac{m}{n}\,(B - A)$, *in cui* m *ed* n *sono numeri interi.*

Si costruisca il punto C tale che

$$nC = (n - m)\,A + mB,$$

cioè il baricentro dei punti A e B cui siano affissi i numeri interi $n-m$ ed m, la cui somma, che è n, si è supposta implicitamente non nulla. Si ricava

$$n(C-A)=m(B-A)$$

ossia

$$C-A=\frac{m}{n}(B-A).$$

PROBLEMA. *Ridurre alla forma più semplice una formazione qualunque di prima specie:*

$$S=m_1 A_1+m_2 A_2+\ldots+m_n A_n$$

supposti i coefficienti razionali.

Preso ad arbitrio il punto O, si avrà:

$$m_1A_1+\ldots+m_nA_n=(m_1+\ldots+m_n)O+m_1(A_1-O)+\ldots+m_n(A_n-O).$$

Se si pone $m=m_1+\ldots+m_n$, e se si chiama I il vettore a cui è riduttibile la somma $m_1(A_1-O)+\ldots+m_n(A_n-O)$, si avrà

$$S=mO+I;$$

vale a dire ogni formazione di prima specie, è riduttibile ad un punto arbitrario O, cui sia affissa la somma di tutti i coefficienti, cioè la massa della formazione, più un vettore I.

Se $m \gtrless 0$, fatto $G=O+\frac{1}{m}I$, si avrà

$$S=mG,$$

ossia G è il baricentro dei punti dati.

Se invece $m=0$, si avrà $S=I$, ossia la formazione è ridotta ad un vettore, che potrebbe anche annullarsi.

16. DEF. *Due vettori* $B-A$ e $B'-A'$ *diconsi* paralleli, od aventi la stessa direzione, *se sono parallele le rette* AB e A′B′. *Un vettore*

$B - A$ *dicesi parallelo ad una retta* P, *o ad un piano* π, *se la retta* AB *è parallela a* P, *o a* π.

TEOR. 1°. *Se i vettori* I *e* J *sono paralleli, ed il primo non è nullo, si può determinare un numero* x *tale che* $J = xI$.

Infatti, preso ad arbitrio il punto A, si faccia $B = A + I, C = A + J$; i punti A, B, C sono in linea retta; e poichè A e B sono distinti, si potranno determinare i numeri m ed n in modo che $(m+n)C = mA + nB$; da cui si ricava $(m+n)(C - A) = m(B - A)$, $C - A = \frac{m}{m+n}(B - A)$, e fatto $\frac{m}{m+n} = x$, si ha $J = xI$.

TEOR. 2°. *Se i vettori* I *e* J *sono paralleli, si ha* $IJ = 0$, *e viceversa.*

Infatti, se I e J sono paralleli, si determini il numero x tale che $J = xI$; sarà $IJ = xII = 0$.

Viceversa, preso ad arbitrio A, e fatto $B - A = I$, $C - A = J$, se $IJ = 0$, si deduce $(B - A)(C - A) = 0$, onde $A(B - A)(C - A) = 0$, e sviluppando $ABC = 0$; quindi i tre punti ABC sono in linea retta, e i vettori I e J, paralleli alla retta ABC sono paralleli fra loro.

Le proposizioni

$$((B - A)\,a = 0) = (\text{la retta AB è parallela alla retta a})$$

e $$((B - A)\,\pi = 0) = (\text{la retta AB è parallela al piano } \pi),$$

fatto $B - A = I$, e servendoci della definizione introdotta, diventano:

$$(Ia = 0) = (\text{il vettore I è parallelo alla retta a}).$$

$$(I\pi = 0) = (\text{il vettore I è parallelo al piano } \pi).$$

TEOR. 3°. *Se* ABC *sono tre punti in linea retta, si ha*

$$AB + BC + CA = 0, \tag{1}$$

e viceversa.

Infatti, se ABC sono in linea retta, i vettori $B - A$ e $C - A$ sono paralleli; quindi $(B - A)(C - A) = 0$, che sviluppata, dà la formula

precedente. Viceversa, se è verificata la (1), moltiplicando per C si deduce $ABC = 0$, e i punti A, B, C sono in linea retta. Questa proposizione non è altro che il lemma 1° del teor. N. 12.

L'identità (1) si può pure scrivere:

$$AB = C(B - A). \tag{1'}$$

17. Teor. 1.° *Se i vettori* IJK *sono paralleli ad uno stesso piano, e non è* $IJ = 0$, *si possono determinare i numeri* x *e* y *in modo che si abbia*

$$K = xI + yJ.$$

Infatti, preso ad arbitrio il punto O, facciasi $A - O = I$, $B - O = J$, $C - O = K$; i punti OABC giacciono in uno stesso piano, e le rette OA e OB (parallele ad I e J) non sono parallele fra loro. Si conduca da C la parallela ad OB, che incontrerà OA in A′: sarà $C - O = (C - A') + (A' - O)$; ora $A' - O$, che è parallelo ad OA, e quindi ad I, si può mettere sotto la forma xI; inoltre $C - A'$, che è parallelo ad J, si può mettere sotto la forma yJ; si avrà così $K = xI + yJ$.

Teor. 2°. *Se* IJK *sono tre vettori paralleli ad uno stesso piano, si ha* $IJK = 0$, *e viceversa.*

Infatti, se IJ non è nullo, determinati i numeri x ed y tali che $K = xI + yJ$, si deduce $IJK = 0$. Se $IJ = 0$, sarà pure $IJK = 0$.

Viceversa, se $IJK = 0$, preso ad arbitrio, come nel teorema che precede, il punto O, e fatto $A - O = I$, $B - O = J$, $C - O = K$, sarà $(A - O)(B - O)(C - O) = 0$, onde si deduce

$$O(A - O)(B - O)(C - O) = 0,$$

ossia, sviluppando, $OABC = 0$; quindi i quattro punti OABC giacciono in un medesimo piano, e i vettori I, J, K, che sono paralleli alle rette OA, OB, OC giacenti in uno stesso piano, sono paralleli a questo piano.

TEOR. 3°. *Se* ABCP *sono quattro punti d'uno stesso piano, e non è* $ABC = 0$, *si possono determinare i numeri* xyz *in modo che risulti* $P = xA + yB + zC$.

Infatti, poichè i vettori $B - A$, $C - A$, $P - A$ sono paralleli ad uno stesso piano, e i primi due non sono paralleli, si possono determinare i numeri m ed n in modo che $P - A = m(B - A) + n(C - A)$, onde si ricava

$$P = (1 - m - n)A + mB + nC,$$

ossia P è espresso sotto la forma voluta.

TEOR. 4°. *Essendo* ABCP *quattro punti d'uno stesso piano, si ha*

$$ABC - ABP + ACP - BCP = 0,$$

e viceversa (N. 12, lemma 2°).

Infatti, poichè i vettori $B - A$, $C - A$, $P - A$ sono paralleli ad uno stesso piano, sarà $(B - A)(C - A)(P - A) = 0$, che sviluppata dà l'identità proposta. Essa si può pure scrivere:

$$ABC = (AB + BC + CA)P.$$

Viceversa, se questa relazione è soddisfatta, moltiplicandola per P si deduce $ABCP = 0$, ossia i quattro punti sono in un piano.

18. TEOR. 1.° *Se* IJKU *sono quattro vettori nello spazio, e non è* $IJK = 0$, *si possono determinare i numeri* $x\ y\ z$ *tali che risulti*

$$U = xI + yJ + zK.$$

Infatti, preso ad arbitrio il punto O, facciasi $A - O = I$, $B - O = J$, $C - O = K$, $P - O = U$; da P si conduca la parallela ad OC che incontrerà il piano OAB in Q. Si avrà $P - O = (P - Q) + (Q - O)$. Ora $Q - O$ giace nel piano OAB, perciò si può porre

$$Q - O = x(A - O) + y(B - O);$$

$P - Q$ è parallelo a $C - O$, perciò si può porre $P - Q = z(C - O)$; sostituendo si ha $P - O = x(A - O) + y(B - O) + z(C - O)$, che è la formula a dimostrarsi.

TEOR. 2°. *Essendo* IJKU *quattro vettori qualunque, si ha sempre* $IJKU = 0$.

TEOR. 3°. *Se* ABCDP *sono cinque punti dello spazio, e non è* $ABCD = 0$, *si possono determinare i numeri* $x\ y\ z\ t$ *in modo che risulti* $P = xA + yB + zC + tD$.

TEOR. 4°. *Fra cinque punti* ABCDP *dello spazio passa la relazione:*

$$ABCD - ABCP + ABDP - ACDP + BCDP = 0,$$

che si può anche scrivere

$$ABCD = (ABC - ABD + ACD - BCD)P.$$

Le dimostrazioni di questi teoremi sono analoghe a quelle dei corrispondenti del numero precedente.

Applicazioni.

19. Sostituendo all'espressione 'formazione di prima specie' il suo significato che risulta dalla definizione data, e limitandoci per maggior chiarezza alle formazioni in cui tutti i punti hanno per coefficiente l'unità, la proposizione del N. 13 si può enunciare a questo modo:

1. Essendo $A_1, A_2, \ldots A_n$ n punti dello spazio, si può determinare un punto G, loro baricentro, il quale ha la proprietà che, comunque si prenda il triangolo PQR, si ha sempre

$$A_1PQR + A_2PQR + \ldots + A_nPQR = nGPQR,$$

i volumi essendo considerati in grandezza e senso.

2. Sia U un punto dello spazio, la cui distanza dal piano PQR sia eguale all'unità di misura; allora il rapporto $\frac{APQR}{UPQR}$ rappresenta la distanza dal punto A al piano PQR, presa col segno +, se A e U stanno dalla stessa parte del piano, col segno — se da parti opposte. Dividendo tutti i termini dell'identità precedente per UPQR, si deduce:

La somma delle distanze dei punti $A_1 \dots A_n$ da un piano è eguale ad n volte la distanza del baricentro G di quei punti da questo piano, queste distanze essendo prese positivamente per tutti i punti che stanno da una parte a convenirsi del piano, negativamente pei punti che stanno da parte opposta. Questa somma delle distanze è nulla per tutti i piani che passano per G, è costante, in valor assoluto, pei piani tangenti ad una stessa sfera di centro G.

3. Siano $A_1 \dots A_m$, $B_1 \dots B_n$; $C_1 \dots C_p$, $D_1 \dots D_q$ 4 sistemi di punti. Detti G, H, K, L i loro baricentri, sicchè $A_1 + \dots + A_m = mG$, $B_1 + \dots + B_n = nH$, $C_1 + \dots + C_p = pK$, $D_1 + \dots + D_q = qL$, si avrà

$$(A_1 + \dots + A_m)(B_1 + \dots + B_n)(C_1 + \dots + C_p)(D_1 + \dots + D_q) = mnpq\,GHKL,$$

ossia: La somma di tutti i tetraedri aventi per primo vertice un punto qualunque del primo sistema, per secondo vertice un punto qualunque del secondo sistema, e così via, è eguale al tetraedro avente per vertici i baricentri dei quattro sistemi dati, moltiplicato per $mnpq$.

4. Posto ancora $nG = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, se si scinde il sistema di punti dato in due gruppi, dei quali l'uno contenga r punti e l'altro i rimanenti $n - r$, detti G_1 e G_2 i baricentri di questi gruppi, sarà $nG = rG_1 + (n - r)G_2$; quindi il punto G sta sulla retta G_1G_2, e la divide in parti inversamente proporzionali ai numeri r ed $n - r$. Variando i gruppi in cui il sistema si può decomporre, si avranno $2^{n-1} - 1$ rette passanti pel baricentro.

Facendo $n = 3$ ed $n = 4$ si hanno le proposizioni:

Le mediane d'un triangolo passano per un medesimo punto.

Le rette che in un tetraedro uniscono i vertici coi baricentri delle faccie opposte, e le rette che uniscono i punti medii degli spigoli opposti passano per un medesimo punto.

5. Costrurre il triangolo ABC conoscendone il baricentro G, il punto H che divide il lato AC in parti che stanno fra loro come 2 : 1, e il punto K sul prolungamento di BC ad una distanza da C eguale a BC.

Le condizioni precedenti si trasformano nelle equazioni:

$$A + B + C = 3G$$
$$H - A = 2(C - H)$$
$$K - C = C - B.$$

Queste tre equazioni, trattate come equazioni algebriche lineari in A B C determinano queste incognite. Eliminando A e B si ricava

$$C = K + 3(G - H)$$

poi $$B = C + (C - K)$$

e infine $$A = H + 2(H - C),$$

onde si ha una costruzione semplicissima dei tre punti cercati.

6. Essendo I un vettore fisso, l'eguaglianza

$$P' = P + I$$

fa corrispondere ad ogni punto P dello spazio un punto P′, che dicesi il corrispondente di P nella *traslazione* determinata dal vettore I.

7. Essendo O un punto fisso, e k un numero dato, l'eguaglianza

$$P' = O + k(P - O)$$

fa corrispondere ad ogni punto P un punto P′ che dicesi *omotetico* di P con centro di omotetia in O e con rapporto d'omotetia k.

8. Se P_1 è il corrispondente di P nella traslazione I, cioè $P = P_1 + I$, e se P_2 è il corrispondente di P_1 nell'omotetia (O, k), cioè $P_2 = O + k(P_1 - O)$, sarà

(1) $$P_2 = O + kI + k(P - O)$$

la relazione che passa fra P e P_2. Si determini il punto C in guisa che

(2) $$C = O + kI + k(C - O);$$

si avrà $$C = O + \frac{k}{1-k} I.$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si deduce

$$P_2 = C + k(P - C),$$

vale a dire P_2 è l'omotetico di P con centro d'omotetia in C e con rapporto k.

9. Se P_1 è l'omotetico di P con centro O e con rapporto k, cioè

$$P_1 = O + k(P - O),$$

e se P_2 è l'omotetico di P_1, con centro O_1 e con rapporto k_1, cioè

$$P_2 = O_1 + k_1(P_1 - O_1),$$

si avrà fra P e P_2 la relazione

$$P_2 = O_1 + k_1 (O - O_1) + k k_1 (P - O). \tag{1}$$

Si determini il punto C in modo che

$$C = O_1 + k_1 (O - O_1) + k k_1 (C - O) \tag{2}$$

da cui si ricava

$$C = O + \frac{1 - k_1}{1 - k k_1} (O_1 - O)$$

e C sarà effettivamente determinato se $1 - k k_1$ non è nullo.

Sottraendo la (2) dalla (1) si deduce

$$P_2 = C + k k_1 (P - C),$$

ossia P_2 è l'omotetico di P con centro in C e con rapporto $k k_1$.

Che cosa avviene se $k k_1 = 1$?

10. Se ABC sono tre punti in linea retta, e A B non coincidono, si ha

$$C = \frac{CB}{AB} A + \frac{AC}{AB} B.$$

11. Siano ABC i tre vertici d'un triangolo. Prendansi sui suoi lati i punti $A_1 B_1 C_1$. Si avrà

$$A_1 = \frac{A_1 C}{BC} B + \frac{B A_1}{BC} C, \quad B_1 = \frac{B_1 A}{CA} C + \frac{C B_1}{CA} A, \quad C_1 = \frac{C_1 B}{AB} A + \frac{A C_1}{AB} B$$

onde, eseguendo il calcolo,

$$A_1 B_1 C_1 = \left(\frac{A_1 C}{BC} \cdot \frac{B_1 A}{CA} \cdot \frac{C_1 B}{AB} + \frac{B A_1}{BC} \cdot \frac{C B_1}{CA} \cdot \frac{A C_1}{AB} \right) ABC.$$

Supposto ABC non nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i tre punti $A_1 B_1 C_1$ siano in linea retta, ossia $A_1 B_1 C_1 = 0$, è l'annullarsi del coefficiente di ABC. Dunque se i punti $A_1 B_1 C_1$, che stanno sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC sono in linea retta, si ha

$$\frac{B A_1}{A_1 C} \cdot \frac{C B_1}{B_1 A} \cdot \frac{A C_1}{C_1 B} = -1$$

e viceversa. Questo è il *teorema di Menelao*.

12. Siano A, B, C, D i vertici successivi d'un quadrilatero sghembo. Prendansi sui suoi lati AB, BC, CD, DA i punti P, Q, R, S. Il volume del tetraedro PQRS si può calcolare in funzione di ABCD, e dei rapporti dei segmenti in cui i punti PQRS dividono i lati, in modo analogo al precedente, e si trova

$$PQRS = \left(\frac{PB}{AB} \cdot \frac{QC}{BC} \cdot \frac{RD}{CD} \cdot \frac{SA}{DA} + \frac{AP}{AB} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{CR}{CD} \cdot \frac{DS}{DA} \right) ABCD.$$

Quindi, supposto ABCD non nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti PQRS giacciano in un piano è

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = -1.$$

CAPITOLO III.

Formazioni di seconda specie.

---

20. DEF. *Diremo* vettore d'una linea AB *il vettore* B — A.

DEF. *Diremo* grandezza d'un vettore B — A *la grandezza della linea* AB.

PROBL. *Costruire il prodotto* AI *del punto* A *pel vettore* I.

Si determini $B = A + I$, Sarà $AB = AI$.

Quindi:

Ogni linea si può considerare come il prodotto della sua origine pel suo vettore.

PROBLEMA. *Data la linea* AB *e il punto* C *sulla retta* AB, *costrurre una linea avente per origine* C *ed eguale ad* AB.

Facciasi $D - C = B - A$; si ricava $CD = C(B - A)$; ora, poichè ABC sono in linea retta, si ha $C(B - A) = AB$, ossia $CD = AB$.

Si deduce di qui che:

Una linea qualunque si può trasformare in un'altra avente per origine un punto arbitrario della retta che contiene la linea data, e per vettore il vettore della linea data.

PROBLEMA. *Costrurre una linea eguale ad* mAB, *ove* A *e* B *sono punti,* m *un numero.*

Si faccia $C = A + m(B - A)$: sarà $AC = m$AB.

COROLL. *Ogni formazione di seconda specie della forma* $ma + nb + \ldots$ *è riduttibile alla somma* $a' + b' + \ldots$ *di più linee aventi coefficienti eguali all'unità.*

PROBLEMA. *Costrurre la somma di più linee* $OA + OB + OC$ *aventi la stessa origine* O.

Si costruisca il punto **X** in modo che

$$X - O = (A - O) + (B - O) + (C - O)$$

sarà

$$OX = OA + OB + OC.$$

Quindi:

La somma di più linee aventi la stessa origine è una linea avente la stessa origine, e il cui vettore è la somma dei vettori delle linee date.

21. PROBLEMA. *Costrurre la somma di due linee* AB *e* A′B′ *le cui rette si incontrano in un punto* O.

Si costruiscano le linee $OP = AB$ e $OP' = A'B'$; poi $OQ = OP + OP'$; sarà $OQ = AB + A'B'$.

Quindi:

La somma di due linee che si incontrano in un punto è rappresentata da una linea passante pel punto d'incontro delle linee date, e il cui vettore è la somma dei vettori delle medesime.

PROBLEMA. *Costrurre la somma di due linee parallele, ove la somma dei loro vettori non sia nulla.*

Siano le linee AI e BJ, aventi per origini A e B, e per vettori I ed J paralleli. Prendasi ad arbitrio nel piano delle due linee una linea CK, il cui vettore K non sia parallelo ad I ed J. Si ha:

$$AI + BJ = (AI + CK) + (BJ - CK).$$

Le linee AI e CK si incontrano; quindi la loro somma è riduttibile ad una linea sola avente per vettore $I + K$; detta D l'origine di questa retta, si avrà $AI + CK = D(I + K)$. Analogamente la somma $BJ - CK$ è riduttibile ad una linea sola; detta E la sua origine, sarà $BJ - CK = E(J - K)$, e

$$AI + BJ = D(I + K) + E(J - K).$$

Le due linee $D(I+K)$ e $E(J-K)$ non sono parallele. Invero, se esse fossero parallele, sarebbe $(I+K)(J-K)=0$, ossia

$$IJ-IK-JK=0;$$

e poichè $IJ=0$, dovrebbe essere $(I+J)K=0$, il che non è poichè $I+J$ non è nullo per ipotesi, e la sua direzione, che è quella di I e di J, è diversa da quella di K. Quindi queste linee si possono ridurre ad una sola avente per vettore $I+K+J-K=I+J$.

La linea ausiliaria CK si può prendere ad arbitrio; prendendo per essa la AB, si avrà la costruzione seguente: Facciasi $B'-B=I$, $A'-A=J$; si tirino le linee $AB'=AI+AB$, e $BA'=BJ+BA$. Sarà $AI+BJ=AB'+BA'$; ossia la linea cercata passa pel punto O d'incontro delle AB' e BA'; conoscendone il vettore $I+J$, essa è immediatamente costrutta.

Quindi:

La somma di due linee parallele, ove la somma dei loro vettori non sia nulla, è riduttibile ad una linea sola, il cui vettore è la somma dei vettori delle linee date; essa è quindi parallela alle medesime linee.

PROBLEMA. *Costrurre la somma di più linee giacenti in uno stesso piano, supposto che la somma dei loro vettori non sia nulla.*

Già si è fatta la costruzione nel caso di due linee. Se il numero delle linee è >2, se ne considerino tre ad arbitrio; i loro vettori non possono essere contemporaneamente a due a due eguali e di segno contrario; quindi di queste tre si prendano quelle due i cui vettori non sono eguali e di segno contrario, e si sostituisca alla loro somma la linea che le è eguale, e che si sa costrurre. In tal modo si è ridotta la somma proposta ad un'altra contenente una linea di meno; e la somma dei vettori della seconda formazione è eguale a quella della prima. Così continuando si ridurrà il sistema a due linee, e poi ad una. Quindi:

La somma di più linee giacenti in uno stesso piano, ove la somma dei vettori di queste linee non sia nulla, è riduttibile ad una linea sola, il cui vettore è la somma dei vettori delle linee date

COROLLARIO. *La somma di più linee giacenti in uno stesso piano, ove la somma dei loro vettori sia nulla, è riduttibile alla somma di due linee aventi i vettori eguali e di segno contrario. Una delle due linee si può prendere, nel piano, ad arbitrio.*

Infatti, sia la somma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, e sia la somma dei vettori di queste linee nulla. Presa ad arbitrio nel piano la linea p non nulla, la somma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + p$ è tale che la somma dei vettori delle linee che la compongono vale il vettore di p, che non è nullo; quindi questa somma è riduttibile ad una linea

$$q = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + p;$$

e il vettore di q sarà eguale a quello di p. Si ricava di qui:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = q - p,$$

e così la somma proposta resta ridotta alla somma delle due linee p e $-q$, aventi i vettori eguali e di segno contrario.

22. La costruzione della linea somma, o risultante, di più linee giacenti nello stesso piano, si può disporre praticamente in questa guisa. Per comodità di scrittura, essendo a e b due linee del piano che si incontrano in un punto, con ab intenderemo il loro punto d'incontro (V. N. 44).

Siano $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ le linee date, $I_1\ I_2\ I_3\ I_4$ i loro vettori. Preso nel piano il punto O ad arbitrio, si costruiscano i punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$A_1 - O = I_1,\ A_2 - A_1 = I_2,\ A_3 - A_2 = I_3,\ A_4 - A_3 = I_4.$$

Sarà

$$A_2 - O = I_1 + I_2,\ A_3 - O = I_1 + I_2 + I_3,\ A_4 - O = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

La linea $a_1 + a_2$ passa pel punto $a_1\,a_2$, ed ha per vettore $I_1 + I_2 = A_2 - O$; quindi dal punto $a_1\,a_2$ conducasi la parallela ad OA_2; su questo giace la linea $a_1 + a_2$.

La linea $a_1 + a_2$ incontra la a_3 nel punto $(a_1 + a_2)\, a_3$. Per questo punto conducasi la parallela ad OA_3; su questa retta giace la linea $a_1 + a_2 + a_3$. Questa retta incontrerà la a_4 nel punto $(a_1 + a_2 + a_3)a_4$; se da questo punto si conduce la parallela ad OA_4, su quest'ultima retta giacerà la $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$; e siccome il vettore di questa linea vale $A_4 - O$, la linea cercata risulta completamente determinata.

In questa costruzione si è supposto implicitamente che le rette a_1 e a_2, $a_1 + a_2$ e a_3, $a_1 + a_2 + a_3$ e a_4 non fossero parallele, vale a dire che nessun lato del poligono $OA_1\, A_2\, A_3\, A_4$, tolto il primo, passi per O. Se questa condizione non è verificata (ovvero, in pratica, anche essendo verificata, le rette di cui si debbono determinare i punti d'intersezione si incontrano sotto angolo troppo piccolo, o fuori del foglio), si può costruire la risultante in quest'altro modo.

Costrutto, come prima, il poligono $OA_1\, A_2\, A_3\, A_4$, prendasi ad arbitrio nel piano il punto P, purchè non giaccia su nessun lato di questo poligono; sia p una linea avente per vettore $O - P$, e si costruisca colla regola precedente la risultante del sistema $p + a_1 + a_2 + \ldots + a_n - p$, che è eguale al dato.

Perciò dal punto $p\, a_1$ si conduca la parallela a PA_1 (che conterrà $p + a_1$); questa incontrerà a_2 nel punto $(p + a_1)a_2$; da questo punto conducasi la parallela a PA_2 (che conterrà $p + a_1 + a_2$); questa incontrerà a_3 in $(p_1 + a_1 + a_2)\, a_3$; da questo punto si conduca la parallela a PA_3 (che conterrà $p + a_1 + a_2 + a_3$); questa incontrerà a_4 in $(p + a_1 + a_2 + a_3)\, a_4$; da questo punto conducasi la parallela a PA_4 (che conterrà $p + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$); questa retta incontra la $-p$ in un certo punto $(p + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\, p$, per cui passa la linea $p + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - p$. Sapendo poi che il vettore di questa linea vale $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = A_4 - O$, essa è immediatamente determinata.

Il poligono avente per lati p, $p + a_1$, $p + a_1 + a_2$, $p + a_1 + a_2 + a_3$, ..., ed i vertici, in conseguenza, sulle linee date $a_1\, a_2\, a_3$ ... dicesi, in Statica Grafica, un *poligono funicolare* che connette le linee (o forze) date. Un sistema di linee ha infiniti poligoni funicolari, a causa dell'arbitrarietà della linea p.

23. PROBLEMA. *Costrurre la somma di più linee parallele.*

Siano le linee parallele AA_1, BB_1, CC_1, ... Se il loro numero è maggiore di 2, se ne possono sempre prendere due di esse i cui vettori non sono eguali e di segno contrario; alla loro somma si può sostituire una linea sola, parallela alle date, e così si riduce il sistema proposto ad un altro avente una linea di meno. Così continuando si ridurrà il sistema a due linee, e se la somma dei vettori delle linee proposte non è nulla, la formazione data si potrà ridurre ad una linea sola. Se invece la somma dei vettori delle linee date è nulla, detta XX_1 una linea parallela alle date, si avrà $AA_1+BB_1+\ldots=(AA_1+BB_1+\ldots+XX_1)-XX_1$. La somma entro parentesi è riduttibile ad una linea sola avente per vettore quello a XX_1; quindi la formazione proposta resta ridotta alla somma di due linee con vettori eguali e di segno contrario.

Si arriva allo stesso risultato per quest'altra via:

Sia I un vettore parallelo alle linee del sistema. Si possono determinare i numeri a, b, ... in modo che $A_1-A=aI$, $B_1-B=bI$, ... Si deduce $AA_1=aAI$, $BB_1=bBI$, ...; e sommando

$$AA_1+BB_1+\ldots=(aA+bB+\ldots)I.$$

Ora, se la somma $a+b+\ldots$ non è nulla, vale a dire, moltiplicandola pel vettore I, se la somma dei vettori $(A_1-A)+(B_1-B)+\ldots$ non è nulla, si determini il punto G che soddisfa alla condizione

$$(a+b+\ldots)G=aA+bB+\ldots.$$

Sarà $AA_1+BB_1+\ldots=(a+b+\ldots)\,GI=G\,(aI+bI+\ldots)=G\,[(A_1-A)+(B_1-B)+\ldots]$.

Se invece $a+b+\ldots=0$, la somma $aA+bB+\ldots$ è riduttibile ad un vettore J, e si avrà $AA_1+BB_1+\ldots=JI$. Quindi:

La somma di più linee parallele, se la somma dei vettori di queste linee non è nulla, è riduttibile ad una linea sola, parallela alle date, avente per vettore la somma dei vettori delle medesime, e per sua origine si può prendere il baricentro delle origini delle linee date cui siano affissi numeri proporzionali ai vettori

delle medesime. Se invece la somma dei vettori è nulla, la formazione proposta è riduttibile alla somma di due linee con vettori eguali e di segno contrario.

24. Nei teoremi dei N.^{ri} 21 e 23 già comparve la somma di due linee aventi i vettori eguali e di segno contrario. Dette A e B le origini delle due linee, J il vettore della prima, e quindi — J quello della seconda, la somma considerata si può scrivere AJ − BJ, ossia (A — B) J, ossia è riduttibile al prodotto dei due vettori A — B e J. Viceversa il prodotto IJ di due vettori I e J, ove si faccia I = A — B, diventa eguale a (A — B) J = AJ — BJ, ossia si trasforma nella somma di due linee aventi i vettori eguali e di segno contrario. Il prodotto di due vettori, ossia la somma di due linee con vettori eguali e di segno contrario, ha, nello studio delle formazioni di seconda specie la stessa importanza che il vettore nelle formazioni della prima; perciò è utile il darvi un nome.

DEF. *Il prodotto di due vettori dicesi* bivettore.

Allora dalle proposizioni dei N.^{ri} 21 e 23 si deduce:

La somma di più linee giacenti in uno stesso piano, e la somma di più linee parallele, quando la somma dei vettori di quelle linee sia nulla, è riduttibile ad un bivettore.

Un bivettore IJ, cioè il prodotto dei due vettori I e J, si può rappresentare, come si è visto, colla somma di due linee aventi i vettori eguali e di segno contrario. Esso si può ancora rappresentare a quest'altro modo. Preso ad arbitrio il punto A, e fatto B — A = I, C — A = J, sarà IJ = (B — A)(C — A), ossia, sviluppando:

$$IJ = AB + BC + CA,$$

e così il bivettore resta ridotto alla somma dei tre lati d'un triangolo.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un bivettore sia nullo è che i due vettori di cui è il prodotto siano paralleli.

DEF. *Diremo che il vettore* I *è parallelo al bivettore* JK, *se* I, J, K *sono paralleli ad uno stesso piano, ossia se* IJK = 0. *Di-*

remo che due bivettori IJ *e* I'J' *sono paralleli ovvero che hanno la stessa giacitura, se i quattro vettori* I, J, I', J' *sono paralleli ad uno stesso piano.*

25. PROBL. *Dato il bivettore* IJ, *e il vettore* K *parallelo ad* IJ, *e non nullo, determinare un vettore* L, *tale che* IJ = KL.

Preso ad arbitrio il punto O, facciasi A — O = I, B — O = J, C — O = K; i punti O, A, B, C, giaceranno in uno stesso piano, e si avrà IJ = (A — O) (B — O) = OA + AB + BO. Si costruisca la linea OA + AB + BO — OC, cosa possibile, perchè queste linee giacciono in uno stesso piano, e la somma dei loro vettori vale — (C — O), che non è nullo; detto D un punto qualunque di questa linea, essa si potrà mettere sotto la forma

$$OA + AB + BO - OC = -D(C - O),$$

onde si ricava:

$$OA + AB + BO = OC - D(C - O) = O(C - O) - D(C - O) = (C - O)(D - O);$$

quindi fatto L = D — O, sarà IJ = KL.

PROBL. *Costrurre la somma di due bivettori* i *e* j, *dati comunque nello spazio.*

Prendasi un vettore U parallelo ai due bivettori dati, e si determinino i vettori I e J in modo che UI = i, UJ = j; fatto K = I + J, sarà UK = UI + UJ = i + j.

COROLL. *La somma di quanti si vogliano bivettori nello spazio è riduttibile ad un bivettore solo.*

26. TEOREMA. *La somma di più linee nello spazio è riduttibile ad una linea, avente per origine un punto arbitrario e per vettore la somma dei vettori delle linee date, più un bivettore.*

Sia la somma $s = A_1I_1 + A_2I_2 + \dots + A_nI_n$, in cui A_1 A_2 ... sono le origini, I_1, I_2, ... i vettori delle linee a sommarsi. Preso ad arbitrio

il punto O, si ha l'identità

$$s = O(I_1 + I_2 + \ldots + I_n) + [(A_1 - O)I_1 + (A_2 - O)I_2 + \ldots + (A_n - O)I_n].$$

Il primo termine di s rappresenta una linea avente per origine il punto preso ad arbitrio O, e per vettore la somma dei vettori delle linee date; il secondo termine, che è la somma di *n* bivettori, è riduttibile ad un bivettore solo; così resta dimostrato il teorema.

COROLLARIO. *La somma di più linee nello spazio, ove la somma dei vettori di queste linee sia nulla, è riduttibile ad un bivettore* (*che potrebbe anche annullarsi*).

Infatti nella formula precedente sparisce il primo termine.

TEOREMA. *Se la somma dei vettori delle linee date non è nulla, ma è nulla la somma dei volumi* ss, *la somma delle linee date è riduttibile ad una linea sola, e viceversa.*

Infatti, posta la formazione $s = a + i$, ove a rappresenta la linea, i il bivettore alla cui somma si può ridurre s, si avrà

$$ss = (a + i)(a + i) = 2ai.$$

Se ora $ss = 0$, dovrà essere $ai = 0$, quindi la linea a è parallela al bivettore i. Si determini perciò la linea b tale che $b - a = i$; sarà $b = a + i = s$.

Viceversa, se s è riduttibile ad una linea sola b, sarà $ss = bb = 0$.

TEOREMA. *Ogni somma* s *di linee è riduttibile in infiniti modi alla somma di due linee.*

Infatti, presa ad arbitrio la linea p, si consideri la somma $s' = s - kp$, ove k è un numero a determinarsi. Si avrà $s's' = ss - 2ksp$. Ora, se sp non è nullo, facendo $k = \frac{ss}{2sp}$, si avrà $s's' = 0$. Quindi, se la somma dei vettori di s' non è nulla (il che avverrà certamente se la direzione del vettore di p non coincide colla direzione della somma dei vettori di s), la somma s' è riduttibile ad una linea sola q; quindi $s - kp = q$, ossia $s = kp + q$; così la somma proposta è ridotta alla somma di due linee.

Applicazioni.

27. 1. Se A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... sono linee giacenti in uno stesso piano, per cui la somma dei vettori non sia nulla, e XY è la linea eguale alla loro somma, ossia

$$XY = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \dots,$$

preso ad arbitrio il punto P nel piano, si avrà

$$PXY = PA_1B_1 + PA_2B_2 + PA_3B_3 + \dots$$

ossia:

Date in un piano più linee A_1B_1, A_2B_2, ..., *se la somma dei loro vettori non è nulla, si può costrurre una linea* XY *in modo che, comunque si prenda il punto* P *nel piano, si abbia sempre*

$$PXY = PA_1B_1 + PA_2B_2 + \dots$$

Il luogo dei punti P *per cui la somma delle aree triangolari aventi il vertice in* P *e per basi* A_1B_1, A_2B_2, ... *è nulla, è la retta* XY; *il luogo dei punti* P *per cui questa somma ha un valore costante (in grandezza e segno) è una retta parallela a* XY.

Se invece la somma dei vettori delle linee A_1B_1, A_2B_2, ... è nulla, quella somma è riduttibile ad un bivettore $XY + YZ + ZX = A_1B_1 + A_2B_2 + \dots$; moltiplicando per P si ha

$$XYZ = PA_1B_1 + PA_2B_2 + \dots$$

ossia:

Se la somma dei vettori delle linee A_1B_1, A_2B_2, ... *è nulla, comunque si prenda il punto* P *nel piano, la somma dei triangoli* $PA_1B_1 + PA_2B_2 + \dots$ *ha un valore costante.*

2. Le linee considerate possono essere rappresentate dai lati successivi $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$ d'una linea poligonale aperta o chiusa. La somma dei vettori di queste linee $(A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \dots + (A_n - A_{n-1}) = A_n - A_1$ non è nulla se la linea è aperta, è nulla se la linea è chiusa. Quindi le proposizioni precedenti diventano in questo caso:

Data una linea poligonale aperta $A_1A_2 \dots A_n$, *si può costrurre una linea* XY, *il cui vettore vale* $A_n - A_1$, *in guisa che, comunque si prenda il punto* P *nel piano, si abbia*

$$PXY = PA_1A_2 + PA_2A_3 + \dots + PA_{n-1}A_n.$$

Data una linea poligonale chiusa $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$, *comunque si prenda il punto* P *nel piano, la somma* $PA_1A_2 + PA_2A_3 + \dots + PA_{n-1}A_1$ *ha un valore costante.*

A questa somma costante si suol dare il nome di *area limitata dalla linea poligonale* $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$. Queste proposizioni valgono pure se alla linea poligonale si sostituisce una curva.

3. Le costruzioni fatte permettono di risolvere il seguente problema:

Data una linea poligonale chiusa $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_1$, *e nel suo piano una linea* PQ, *costrurre il triangolo* PQR *eguale all'area limitata da questa linea poligonale.*

Si costruisca la linea $RS = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_1 - PQ$ il cui vettore è eguale e di segno contrario a quello di PQ. Sarà

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_1 = PQ + RS.$$

Si moltiplichi per un punto qualunque di RS, p. e. R, e si avrà

$$(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_1)R = PQR$$

ossia PQR è il triangolo cercato.

4. Essendo a e b due linee passanti per uno stesso punto, ed in grandezza eguali, le linee $a + b$ e $a - b$ rappresentano le bissetrici interna ed esterna dell'angolo formato dalle due linee date. Se le linee a e b sono parallele, eguali in grandezza, e rivolte per lo stesso senso, $a + b$ rappresenta la linea equidistante dalle due date, $a - b$ un bivettore.

5. Sia ABC un triangolo; siano a b c tre linee giacenti sui lati BC, CA, AB, aventi i sensi di questi lati, ed in grandezza eguali fra di loro. Allora le linee $a - b$, $b - c$, $c - a$ stanno sulle bissettrici interne del triangolo, e le $a + b$, $b + c$, $c + a$ sulle esterne. Le identità

$$a + b + c = (a + b) + c = (b + c) + a = (c + a) + b$$

dicono che *i punti d'incontro delle bissetrici esterne d'un triangolo coi lati opposti stanno su d'una medesima retta.*

Si hanno pure le identità

$$a+b-c=(a+b)-c=(a-c)+b=(b-c)+a$$
$$a-b+c=(a-b)+c=(a+c)-b=(c-b)+a$$
$$-a+b+c=(b-a)+c=(c-a)+b=(b+c)-a$$

le quali dicono che *i punti d'incontro di due bissetrici interne e della rimanente esterna coi lati opposti, stanno in linea retta.*

L'identità $a-c=(a-b)+(b-c)$ dice che la bissetrice interna $a-c$ passa pel punto d'incontro delle altre due $a-b$ e $b-c$, ossia *le bissetrici interne del triangolo si incontrano in un punto.*

Le identità

$$a-b=(a+c)-(b+c)$$
$$a-c=(a+b)-(b+c)$$
$$b-c=(a+b)-(a+c)$$

dicono che *pel punto d'incontro di due bissetrici esterne passa pure l'altra bissetrice interna.*

6. Siano a, b, c, d quattro linee giacenti in uno stesso piano, ed eguali in grandezza; esse formano un *quadrilatero completo.* Le identità

$$a+b+c+d=(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c)$$
$$=(a+b+c)+d=\ldots$$

dicono che la retta $a+b+c+d$ contiene i tre punti d'incontro delle bissetrici interne degli angoli opposti del quadrilatero, e i quattro punti d'incontro di un lato del quadrilatero, p. e. d, colla retta $a+b+c$, il cui significato nel trilatero a, b, c fu già precedentemente trovato.

Scambiando i segni di alcune delle linee a, b, c, d, si hanno in tutto le 8 linee $a\pm b\pm c\pm d$, che hanno proprietà analoghe a quelle della linea $a+b+c+d$.

7. Siano $a_1\, a_2 \ldots a_n$ delle linee giacenti in uno stesso piano, ed in grandezza eguali all'unità di misura. Sia ω un triangolo giacente nello stesso piano, avente la base e l'altezza eguali all'unità di misura. Allora, detto P un punto qualunque del piano, il rapporto $\frac{Pa}{\omega}$ rappresenta l'altezza del triangolo Pa, cioè la distanza del punto P dalla retta a, questa distanza essendo presa positivamente se Pa ha lo stesso senso di ω, negativamente nel caso opposto.

Se la somma $a_1+a_2+\ldots+a_n$ è riduttibile ad una linea sola che metteremo

sotto la forma ma, ove m è un numero ed a una linea eguale in grandezza all'unità di misura, si avrà

$$\frac{Pa_1}{\omega} + \frac{Pa_2}{\omega} + \ldots + \frac{Pa_n}{\omega} = m\frac{Pa}{\omega},$$

ossia la somma delle distanze del punto P dalle linee date, queste distanze essendo prese con segno conveniente, è eguale alla distanza dello stesso punto della retta $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, moltiplicata pel numero m. Questa somma è nulla pei punti di questa retta; ha un valore costante pei punti che stanno su parallele alla medesima.

Se invece la somma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ è riduttibile ad un bivettore, la somma delle distanze del punto P delle linee date ha un valore indipendente dalla posizione di P.

Nel piano, il luogo dei punti per cui è costante la somma delle distanze dalle rette date $a_1 \ldots a_n$, queste distanze essendo prese in valor assoluto, è formato dal perimetro d'un poligono, i cui vertici stanno sulle rette date, e i cui lati sono paralleli alle rette $\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$.

8. Siano a, b, c tre linee eguali in grandezza passanti per uno stesso punto O, ma non giacenti in uno stesso piano. Le rette a, b, c si possono considerare come gli spigoli d'un angolo triedro. Le identità

$$a + b + c = (a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + a$$

dicono che i tre piani che passano per uno spigolo, p. e. a del triedro, e per la bissetrice interna $b + c$ della faccia opposta, contengono tutti la retta $a + b + c$.

Analogamente, per ciascheduna delle rette $a + b - c$, $a - b + c$, $-a + b + c$ passano tre piani che uniscono uno spigolo del triedro con una bissetrice della faccia opposta.

Le identità $(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$, $(a + b) - (b + c) + (c - a) = 0$, $(b + c) - (c + a) + (a - b) = 0$, $(c + a) - (a + b) + (b - c) = 0$, dicono che le tre bissetrici esterne giacciono in un medesimo piano, come pure due interne e l'altra esterna.

9. Data una linea poligonale $A_1 A_2 \ldots A_n$ nello spazio, si possono sempre determinare, in infiniti modi, due linee PQ e P′Q′ in modo che, comunque si prendano i punti XY, il volume descritto dal triangolo MXY, ove il punto M descriva la poligonale $A_1 \ldots A_n$, sia eguale alla somma $PQXY + P'Q'XY$.

10. Dimostreremo in seguito che, proiettando su d'un piano, con proiezioni parallele, due sistemi di linee eguali, anche le loro proiezioni sono eguali. Si deduce allora dai teoremi dimostrati che:

Data una linea poligonale chiusa qualunque (non piana) si può sempre determinare un triangolo ABC *in guisa che, proiettando su d'un piano arbitrario con proiezioni parallele di direzione arbitraria e la linea poligonale data, e il triangolo* ABC, *l'area limitata dalla proiezione della poligonale chiusa risulta eguale alla proiezione del triangolo* ABC.

11. In Meccanica una *forza* si rappresenta con una linea; un *sistema di forze* con una formazione di seconda specie; due sistemi di forze applicate ad uno stesso corpo rigido sono *equivalenti* se sono rappresentati da formazioni di seconde specie eguali. Il sistema di forze rappresentato da un bivettore, cioè da due linee aventi i vettori eguali e di segno contrario dicesi *coppia di forze.* Dalle proposizioni dimostrate risulta:

Ogni sistema di forze applicate ad uno stesso punto è riduttibile ad una forza sola; ogni sistema di forze giacenti in un piano è riduttibile ad una forza sola o ad una coppia; ogni sistema di coppie è riduttibile ad una sola coppia; ogni sistema di forze è riduttibile in infiniti modi all'insieme d'una forza e d'una coppia.

Se a è una linea in grandezza eguale all'unità di misura, e f un'altra linea rappresentante una forza, il volume af (o meglio, il numero che lo misura) dicesi in Meccanica il *momento della forza* f *rispetto all'asse* a. Se due sistemi di forze s ed s′ sono equivalenti, cioè $s = s'$, si deduce $as = as'$, ossia *le somme dei momenti delle forze di due sistemi equivalenti rispetto ad un asse arbitrario sono eguali.*

Dall'ultimo teorema del N. 26 risulta:

Ogni sistema di forze è riduttibile in infiniti modi alla somma di due forze; si può prendere ad arbitrio la retta che contiene una delle due forze, purchè la somma dei momenti delle forze del sistema rispetto a questa retta non sia nulla, e questa retta non sia parallela alla somma dei vettori delle forze date.

CAPITOLO IV.

Formazioni di terza specie.

---

28. DEF. *Diremo* bivettore *d'una superficie triangolare* A B C *il bivettore* $AB+BC+CA$, *ossia* $(B-A)(C-A)$.

DEF. *Diremo* grandezza d'un bivettore $AB+BC+CA$ *la grandezza di* ABC.

PROBLEMA. *Costrurre il prodotto d'un punto* A *per un bivettore* IJ.

Fatto $B=A+I$, $C=A+J$, sarà $AIJ=A(B-A)(C-A)=ABC$; così il prodotto proposto è un triangolo di cui un vertice è A, e il cui bivettore è eguale al bivettore dato.

PROBLEMA. *Dato il triangolo* ABC, *e nel suo piano la linea* PQ, *costrurre il punto* R *in guisa che* $ABC=PQR$.

Si costruisca la linea $RS=AB+BC+CA-PQ$, la quale giacerà nel piano ABCPQ, e si avrà $AB+BC+CA=PQ+RS$.

Preso sulla RS un punto ad arbitrio, p. e. R, si avrà

$$(AB+BC+CA)R=PQR,$$

ossia

$$ABC=PQR.$$

PROBLEMA. *Costrurre la superficie* mABC, *ove* m *è un numero.*

Fatto $B'-A=m(B-A)$, sarà $AB'C=m$A BC.

29. PROBLEMA. *Costrurre la somma di due superficie* $\alpha + \beta$.

Se i piani delle due superficie si incontrano, prendasi ad arbitrio sulla loro intersezione la linea PQ; si costruiscano i punti M ed N in modo che $PQM = \alpha$, $PQN = \beta$. Si avrà

$$\alpha + \beta = PQ(M - P) + PQ(N - P).$$

Fatto $R - P = (M - P) + (N - P)$, si avrà

$$\alpha + \beta = PQR.$$

Si osservi che il bivettore di PQR, cioè $(Q - P)(R - P)$ vale $(Q - P)(M - P) + (Q - P)(N - P)$, ossia è la somma dei bivettori delle superficie date.

Se i piani delle due superficie sono paralleli, prendansi nel primo piano due punti A e B, e nel secondo due A′ e B′ tali che $B' - A' = B - A$; costruiscasi il punto C tale che $ABC = \alpha$, e nel secondo il punto C′ tale che $A'B'C' = \beta$, e inoltre in modo che le rette AC e A′C′ siano parallele. Supposto che non sia $(C - A) + (C' - A') = 0$, si costruisca la $RS = AC + A'C'$, e il punto $T = R + (B - A)$. Si avrà

$$\alpha + \beta = ABC + A'B'C' = A(B - A)C + A'(B' - A')C' =$$
$$-(AC + A'C')(B - A) = -RS(T - R) = RTS.$$

Si è supposto in questa costruzione che non fosse

$$(C - A) + (C' - A') = 0.$$

Se questa condizione fosse soddisfatta, sarebbe pure

$$(B - A)(C - A) + (B' - A')(C' - A') = 0,$$

cioè la somma dei bivettori delle superficie date sarebbe nulla. In questo caso $\alpha + \beta$ è la somma di due superficie aventi i bivettori eguali e di segno contrario, e si ha

$$\alpha + \beta = A(B - A)(C - A) + A'(B' - A')(C' - A') =$$
$$(A - A')(B - A)(C - A),$$

ossia la somma delle due superficie aventi i vettori eguali, ma di segno contrario, è il prodotto di tre vettori.

DEF. *Diremo* trivettore *il prodotto di tre vettori.*

Allora dalla risoluzione dell'ultimo problema risulta il seguente:

TEOREMA. *La somma di più superficie triangolari, se la somma dei bivettori di queste superficie non è nulla, è riduttibile ad una superficie triangolare sola. Se invece la somma dei bivettori di quelle superficie è nulla, la somma proposta è riduttibile ad un trivettore.*

30. Come già si è visto, un trivettore è eguale alla somma di due superficie triangolari aventi i bivettori eguali e di segno contrario. Ad un trivettore si può ancora dare un'altra forma notevole.

Sia il trivettore IJK. Preso ad arbitro A, e fatto $B - A = I$, $C - A = J$, $D - A = K$, si ricava

$$IJK = (B - A)(C - A)(D - A) = BCD - ACD + ABD - ABC = BCD + DCA + ACB + ABD$$

e così resta ridotta alla somma delle faccie d'un tetraedro, in modo che ogni lato risulti percorso due volte in sensi opposti.

L'identità

$$P(BCD - ACD + ABD - ABC) = ABCD$$

dice che il prodotto d'un punto per un trivettore dà un volume indipendente dalla posizione del punto. Quindi due trivettori sono eguali, se messi sotto la forma di somma delle faccie di due tetraedri, questi tetraedri sono eguali.

Applicazioni.

31. 1. Siano ABC, A′B′C′, A″B″C″, ... dei triangoli dati in grandezza e posizione nello spazio. Se la somma dei bivettori di questi triangoli non è nulla, costrutto il triangolo $PQR = ABC + A'B'C' + \ldots$, allora, qualunque sia il punto X dello spazio, la somma dei tetraedri aventi il vertice in X e per basi i triangoli dati è eguale al tetraedro avente lo stesso vertice e per base il triangolo PQR. Se invece la somma dei bivettori dei triangoli è nulla, la somma dei tetraedri $XABC + XA'B'C' + XA''B''C'' + \ldots$ ha un valore indipendente dalla posizione del punto X.

2. Diremo che un sistema di triangoli dati nello spazio in posizione e senso formano una superficie poliedrica chiusa, se ogni linea che è lato d'un triangolo, presa in senso opposto, è pure lato d'un altro triangolo. La somma dei bivettori di questi triangoli è nulla, quindi la somma dei tetraedri aventi per vertice un punto X e per basi le faccie del poliedro, ha un valore indipendente da X. A questa somma costante si suol dare il nome di *volume limitato da quella superficie poliedrica.*

3. Un sistema di triangoli dati nello spazio in posizione e senso, tali che i lati di questi triangoli, alcuni eccettuati, vengano percorsi in due sensi opposti, e che quelli che sono percorsi una volta sola si possano ordinare in modo da essere i lati consecutivi d'una linea poligonale chiusa l, dicesi formare una superficie poliedrica aperta, avente per contorno la poligonale l.

Supposto che il bivettore l, che è il bivettore del sistema di triangoli dato, non sia nullo, costrutto il triangolo PQR, somma delle faccie del poliedro, allora, qualunque sia il punto X, il volume del solido poliedrico di vertice X e di base la superficie poliedrica data, è eguale al volume XPQR. Questo volume risulterà nullo se il punto X giace nel piano PQR; avrà un valore costante se il punto X si sposta in un piano parallelo a PQR.

4. Se α e β sono due superficie triangolari, eguali in grandezza, incontrantisi, $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ rappresentano i due piani bissettori del diedro $\alpha\beta$, il primo è interno, il secondo esterno.

Si consideri il triedro di vertice O e di spigoli OA, OB, OC; sui piani delle faccie prendansi tre superficie α, β, γ eguali in grandezza, e che abbiano i sensi di BOC, COA, AOB, allora $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$, e $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$

sono i piani bissettori degli angoli del triedro, i tre primi i bissettori esterni, gli altri interni. Le identità

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (\beta + \gamma) + \alpha = (\gamma + \alpha) + \beta$$

dicono che *le tre rette d'intersezione dei piani bissettori esterni colle faccie opposte giacciono tutte nel piano* $\alpha + \beta + \gamma$.

Analogamente i piani $\alpha + \beta - \gamma$, $\alpha - \beta + \gamma$, $-\alpha + \beta + \gamma$ contengono ciascuno tre intersezioni dei piani bissettori del triedro colle faccie opposte.

L'identità

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$$

dice che *i tre piani bissettori interni passano per una stessa retta.* Le identità che si ricavano da questa cambiando il segno di una delle superficie α, β, γ, dicono che due piani bissettori esterni e l'altro interno passano pure per una medesima retta.

5. Sia ABCD un tetraedro, e siano α, β, γ, δ quattro superficie eguali in grandezza, giacenti sulle faccie del tetraedro, ed aventi i sensi di BCD, $-$ACD, ABD, $-$ABC.

Il tetraedro ha sei diedri, e 12 piani bissettori che si possono rappresentare con $\alpha \pm \beta$, $\alpha \pm \gamma$, $\alpha \pm \delta$, $\beta \pm \gamma$, $\beta \pm \delta$, $\gamma \pm \delta$. Ciascheduno di questi piani incontra lo spigolo opposto in un punto, e si hanno così 12 punti P. Si dimostra con ragionamento analogo ai precedenti che esistono 16 rette p, ciascheduna delle quali contiene tre punti P, e 8 piani π, ciascheduno dei quali contiene 4 rette p e sei punti P. Le 4 rette p giacenti in un piano π sono i lati d'un quadrilatero completo di cui i 6 punti P sono i vertici.

CAPITOLO V.

Formazioni su d'una retta.

---

32. In questo capitolo considereremo solamente dei punti che stanno su d'una retta fissa, e le formazioni che con questi punti si possono fare; avremo a considerare solo formazioni di prima e seconda specie, poichè quelle di specie superiore sono tutte nulle.

Fisseremo ad arbitrio una linea u, cui daremo il nome di *linea unità;* indicheremo con U il vettore della linea u, e lo chiameremo *vettore unità.* Perciò, essendo O un punto arbitrario, fra le due unità U ed u passa la relazione $OU = u$.

Se A è una formazione di prima specie $A = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_n A_n$, in cui $m_1 \ldots m_n$ sono numeri, $A_1 \ldots A_n$ punti, sarà $AU = m_1 A_1 U + \ldots + m_n A_n U$; e poichè $A_1 U = A_2 U = \ldots = A_n U = u$, sarà $AU = (m_1 + \ldots + m_n)\, u$, od ancora:

$$\frac{AU}{u} = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

vale a dire $\frac{AU}{u}$ rappresenta la somma dei coefficienti dei punti che costituiscono A, ossia la massa del sistema A. L'equazione $AU = 0$ significa che la formazione A è riduttibile ad un vettore. Se AU non è nullo, l'espressione $\frac{u}{AU} A$ rappresenta il punto semplice, al quale, moltiplicato per la massa di A, è riduttibile il sistema A.

Se a è una linea, la espressione $\frac{a}{u} U$ rappresenta il vettore di a.

33. Per semplificare le scritture, quando sia ben fissata la linea unità u, invece di $\frac{a}{u}$ scriveremo semplicemente a; sicchè AU rappresenta la massa del sistema A; aA rappresenta la formazione A moltiplicata pel rapporto $\frac{a}{u}$; aU rappresenta il vettore di a; ab rappresenta il prodotto dei due numeri $\frac{a}{u}$ e $\frac{b}{u}$.

TEOREMA. *Essendo* ABC *tre formazioni di prima specie (giacenti sulla retta fissa), si ha l'identità*

$$(1) \qquad AB.C + BC.A + CA.B = 0.$$

Infatti, siano dapprima A, B, C dei punti non tutti coincidenti; e siano p. e. A e B distinti; allora si potranno determinare i numeri x ed y in guisa che risulti $C = xA + yB$. Si moltiplichi quest'equazione per B e per A; si deduce $CB = xAB$, $AC = yAB$; onde $x = \frac{CB}{AB}$, $y = \frac{AC}{AB}$; sostituendo nella formula precedente ad x ed y i loro valori, fatti sparire i denominatori, si ha la (1). Se poi i punti ABC coincidono, i tre termini della (1) sono nulli, e questa eguaglianza è ancora soddisfatta; quindi la (1) è dimostrata, essendo ABC punti.

Se A, B, C sono formazioni qualunque: $A = m_1 A_1 + \ldots + m_h A_h$, $B = n_1 B_1 + \ldots + n_k B_k$, $C = p_1 C_1 + \ldots + p_l C_l$, ove A_r, B_s, C_t sono punti, saranno soddisfatte tutte le eguaglianze della forma

$$A_r B_s . C_t + B_s C_t . A_r + C_t A_r B_s = 0.$$

Si moltiplichi questa identità per $m_r n_s p_t$, e si sommino tutte le identità che si ricavano da questa attribuendo ad r, s, t i valori compresi fra 1 e h, 1 e k, 1 e l; si otterrà la formola (1).

La formula (1) si può pure scrivere:

$$(2) \qquad AB.C = AC.B - BC.A.$$

Moltiplicandola per una formazione qualunque D di prima specie, si deduce

$$AB.CD = AC.BD - BC.AD \tag{3}$$

che si può pure scrivere:

$$AB.CD = \begin{vmatrix} AC & AD \\ BC & BD \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Se nella (1) si suppongono A B C punti (semplici), e la si moltiplica pel vettore U (punto all'infinito), si deduce

$$AB + BC + CA = 0. \tag{5}$$

Se nella (2) si fa $C = U$, si deduce

$$AB.U = AU.B - BU.A,$$

la quale dà il vettore della linea AB espresso in funzione dei due fattori A e B, e delle loro masse.

34. Siano A_1 e A_2 due formazioni di prima specie, il cui prodotto non sia nullo; allora essendo A una nuova formazione di prima specie, si possono sempre determinare i numeri x_1 e x_2 in guisa che si abbia:

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2. \tag{1}$$

Invero, l'identità $A_1A_2.A = AA_2.A_1 + A_1A.A_2$, si trasforma nella precedente ove si faccia:

$$x_1 = \frac{A\,A_2}{A_1\,A_2}, \quad x_2 = \frac{A_1\,A}{A_1\,A_2}. \tag{2}$$

DEF. *I numeri* x_1 *e* x_2, *che soddisfano alla* (1) *diconsi le* coordinate della formazione A *rispetto alle formazioni di riferimento* A_1 e A_2.

Si hanno le seguenti proposizioni, in cui A, B... rappresentano formazioni di prima specie, e k un numero:

$$(A = x_1 A_1 + x_2 A_2) < (kA = kx_1 A_1 + kx_2 A_2),$$

$$(A = x_1 A_1 + x_2 A_2) \frown (B = y_1 A_1 + y_2 A_2) < [A + B = (x_1 + y_1) A_1 + (x_2 + y_2) A_2],$$

$$(A = x_1 A_1 + x_2 A_2) \frown (B = y_1 A_1 + y_2 A_2) < [AB = (x_1 y_2 - x_2 y_1) A_1 A_2]$$

$$(A = x_1 A_1 + x_2 A_2) < (AU = x_1 A_1 U + x_2 A_2 U),$$

le quali formule dànno le coordinate di kA, di $A + B$, la linea AB, e la massa di A in funzione delle coordinate di A e B (e della linea $A_1 A_2$ formata cogli elementi di riferimento, e delle masse degli elementi di riferimento).

35. Fra gli infiniti sistemi di coordinate, corrispondenti alle varie scelte degli elementi di riferimento, merita menzione speciale quello in cui si prendono per elementi di riferimento un punto O ed il vettore unità U. Allora ogni formazione A di prima specie è riduttibile alla forma $A = mO + xU$; si avrà $AU = mu$, ossia m è la massa di A. Ogni punto è riduttibile alla forma $O + xU$; il numero x dicesi la *coordinata cartesiana del punto*. Ogni vettore è riduttibile alla forma xU; il numero x dicesi la *coordinata del vettore*.

Applicazioni.

36. 1. Date le coordinate x_1 e x_2 della formazione A rispetto alle formazioni di riferimento A_1 e A_2, trovare le coordinate di A rispetto ad altre due formazioni di riferimento B_1 e B_2.

Si avrà $A = x_1 A_1 + x_2 A_2$; affinchè il problema si possa risolvere, occorre conoscere le relazioni che passano fra A_1, A_2 e B_1, B_2; supponiamo date le coordinate di A_1 e A_2 rispetto a B_1 e B_2, e sia $A_1 = m_{11} B_1 + m_{12} B_2$,

$A_2 = m_{21} B_1 + m_{22} B_2$. Sostituendo questi valori di A_1 e A_2 nell'espressione di A, si ricava:

$$A = (m_{11} x_1 + m_{21} x_2) B_1 + (m_{12} x_1 + m_{22} x_2) B_2,$$

che dà le coordinate di A rispetto agli elementi di riferimento B_1 e B_2.

2. Siano ABCD quattro elementi di prima specie sulla retta; il numero $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ si dice il loro *doppio rapporto*, e si indica con (ABCD). Esso è una funzione delle quattro formazioni ABCD, che non si altera se si moltiplica una qualunque di queste formazioni per un numero; quindi quel doppio rapporto dipende solo dalle posizioni dei quattro elementi.

Se ABC sono punti, e D un vettore (punto all'infinito) sarà $AD = BD$; quindi $(ABCD) = \frac{AC}{BC}$.

3. Quattro elementi ABCD diconsi *armonici*, se il loro doppio rapporto vale -1, ossia se $AC . BD + BC . AD = 0$. Dati tre elementi ABC, il quarto armonico D deve soddisfare all'equazione $(AC . B + BC . A) D = 0$; basterà perciò fare $D = AC . B + BC . A$; ogni altro valore di D che soddisfi all'equazione proposta si ottiene moltiplicando il precedente per un numero. Se A e B sono punti semplici, e C è un vettore U, sarà $AC = BC = 1$, perciò $D = A + B$ sarà il quarto armonico dopo i punti A e B e il vettore U.

CAPITOLO VI.

Formazioni nel piano.

Vettori.

37. In questo capitolo ci occuperemo dei sistemi di punti giacenti in un piano fisso, e delle formazioni che con essi si possono fare. Queste formazioni possono essere della 1ª o 2ª o 3ª specie, poichè quelle di 4ª specie sono nulle.

Fisseremo ad arbitrio una superficie ω, cui daremo il nome di *superficie unità*. Indicheremo con u il bivettore di questa superficie, e lo diremo *bivettore unità*. Quindi, se O è un punto (semplice) qualunque del piano, fra le due unità u ed ω passa la relazione

$$Ou = uO = \omega.$$

Se A è una formazione di prima specie $A = m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n$, in cui $A_1 \ldots A_n$ sono punti, sarà $uA = (m_1 + \ldots + m_n)\,\omega$, ossia

$$\frac{uA}{\omega} = m_1 + \ldots + m_n,$$

vale a dire $\frac{uA}{\omega}$ rappresenta la massa della formazione di prima specie A. L'equazione $uA = 0$ dice che A è un vettore (punto all'infinito). Se uA non è nullo, $\frac{\omega}{uA}A$ rappresenta il punto semplice coincidente con A. Se α è una superficie, $\frac{\alpha}{\omega}u$ rappresenta il bivettore della superficie.

38. Comincieremo ad occuparci dei vettori e bivettori giacenti nel piano. Per semplicità di scrittura, essendo i un bivettore qualunque, invece di $\frac{i}{u}$ leggeremo semplicemente i.

È stato dimostrato che se i vettori I e J non coincidono, ogni altro vettore K (del piano) si può mettere sotto la forma

$$K = xI + yJ. \tag{1}$$

I numeri x ed y diconsi le *coordinate del vettore* K *rispetto ai vettori di riferimento* I *e* J. Moltiplicando l'equazione precedente per J e per I si ricava, dopo aver diviso per IJ:

$$x = \frac{KJ}{IJ},\ y = \frac{IK}{IJ}, \tag{2}$$

le quali formole esprimono le coordinate di K come rapporti di bivettori.

Se nella (1) al posto di x ed y si sostituiscono i loro valori dati dalla (2), si ricava, fatti sparire i denominatori:

$$IJ.K = IK.J - JK.I \tag{3}$$

relazione fra tre vettori qualunque del piano.

Se si moltiplica la (3) per un vettore L, si ha l'identità fra quattro vettori del piano:

$$IJ.KL = IK.JL - JK.IL, \tag{4}$$

che si può pure mettere sotto la forma:

$$IJ.KL = \begin{vmatrix} IK & IL \\ JK & JL \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Eseguendo il prodotto di sinistra si ha

$$(xI + yJ)(x'I + y'J) = (xy' - x'y)IJ, \tag{6}$$

la quale formula esprime il bivettore prodotto di due vettori in funzione delle coordinate di questi vettori.

39. Finora non è stata definita la superficie unità, e quindi il bivettore unità. Noi converremo di prendere per *bivettore unità* il bivettore prodotto di due vettori I e J le cui lunghezze siano eguali all'unità di lunghezza, e ortogonali fra loro. (Inoltre, nelle figure, si potrà supporre, p. e., che una retta, la quale descrive l'angolo retto IJ da I verso J, sia vista da un punto che sta avanti al foglio a muoversi nel senso delle lancette d'un orologio, vale a dire in modo che se O è un punto del piano della figura, e P un punto che sta avanti al foglio, il volume POIJ risulti destrorso). In conseguenza la superficie unità risulta OIJ. Se si fa $A = O + I$, $B = O + J$, sarà $OIJ = OAB$, ossia la superficie unità è un triangolo avente per base e per altezza l'unità di lunghezza, cioè la metà del quadrato di lato l'unità di lunghezza.

40. DEF. *Essendo* U *un vettore qualunque del piano, con* $\perp U$ *intenderemo il vettore eguale in grandezza ad* U, *la cui direzione sia normale a quella di* U, *ed il cui senso sia tale che il bivettore* $U \perp U$ *sia positivo* (*cioè dello stesso senso del bivettore unità*).

Diremo anche che il $\perp U$ si ottiene facendo rotare U d'un angolo retto positivo. Invece di $\perp(xU)$, $x(\perp U)$, $(\perp U) + V$, $U(\perp V)$ scriveremo semplicemente $\perp xU$, $x \perp U$, $\perp U + V$, $U \perp V$. Il segno $\perp$ si potrà leggere *perpendicolare*.

Sono evidenti le formule seguenti:

$$(1) \qquad (U = U') = (\perp U = \perp U').$$

$$(2) \qquad \perp\perp U = -U.$$

$$(3) \qquad \perp xU = x \perp U.$$

$$(4) \qquad \perp(U + V) = \perp U + \perp V.$$

$$(5) \qquad (\perp U)(\perp V) = UV.$$

Le formule (3) e (4) esprimono la proprietà distributiva dell'operazione $\perp$; da esse si deduce

$$(4') \qquad \perp(xI + yJ) = x \perp I + y \perp J.$$

Sostituendo nella (5) $\perp V$ al posto di V si deduce $(\perp U)(-V) = U \perp V$, ossia invertendo l'ordine dei fattori del primo membro, col che esso cambia segno, si ha:

$$(6) \qquad V \perp U = U \perp V.$$

Quindi l'espressione $U \perp V$ rappresenta un numero (cioè il rapporto del bivettore prodotto di U e di $\perp V$, al bivettore unità) il quale è funzione distributiva dei due fattori, e commutativa.

Sia U un vettore qualunque, $gr\,U$ la sua grandezza; fatto $\frac{U}{gr\,U} = K$, sarà K un vettore in grandezza eguale all'unità.

Si deduce $U = (gr\,U)\,K$, $\perp U = (gr\,U) \perp K$, $U \perp U = (gr\,U)^2\, K \perp K$; ora poichè il bivettore $K \perp K$ è il bivettore unità, che si è convenuto di sopprimere, si ha:

$$(7) \qquad U \perp U = (gr\,U)^2.$$

La condizione d'ortogonalità dei vettori U e V è $U \perp V = 0$.

41. Essendo U e V due vettori nel piano, porremo per definizione:

$$(1) \quad \text{sen}\,(U, V) = \frac{UV}{(gr\,U)\,(gr\,V)}, \quad (2) \quad \cos\,(U, V) = \text{sen}\,(U, \perp V).$$

Si deduce che se U e V sono vettori la cui grandezza sia l'unità, il loro seno è eguale al bivettore UV. Si ricava immediatamente

$$(3) \qquad UV = (gr\,U)\,(gr\,V)\,\text{sen}\,(U, V).$$

$$(4) \quad \text{sen}\,(U, U) = 0, \ \text{sen}\,(U, \perp U) = 1, \ \text{sen}\,(U, -\perp U) = -1.$$

$$(5) \quad \text{sen}\,(U, V) = -\,\text{sen}\,(V, U) = -\,\text{sen}\,(-U, V) = -\,\text{sen}\,(U, -V) = \text{sen}\,(-U, -V) = \text{sen}\,(\perp U, \perp V).$$

$$(6) \qquad \cos\,(U, V) = \frac{U \perp V}{(gr\,U)\,(gr\,V)}.$$

$$(7) \qquad U \perp V = (gr\,U)\,(gr\,V)\,\cos\,(U, V).$$

$$(8) \quad \cos\,(U, U) = 1, \ \cos\,(U, -U) = -1, \ \cos\,(U, \perp U) = 0.$$

(9) $\cos(U, V) = \cos(V, U) = -\cos(-U, V) = -\cos(U, -V) = \cos(-U, -V) = \cos(\perp U, \perp V)$.

L'identità (N. 38 (5)).

$$UV.U'V' = \begin{vmatrix} UU' & UV' \\ VU' & VV' \end{vmatrix},$$

ove si dividano ambi i membri per $gr\,U \,.\, gr\,V \,.\, gr\,U' \,.\, gr\,V'$ (ovvero si supponga la grandezza di questi vettori eguale all'unità di misura), diventa

(10) $\operatorname{sen}(U,V)\operatorname{sen}(U',V') = \operatorname{sen}(U,U')\operatorname{sen}(V,V') - \operatorname{sen}(U,V')\operatorname{sen}(V,U')$.

Se al posto di U' e V' si legge $\perp U'$ e $\perp V'$, si deduce:

(11) $\operatorname{sen}(U,V)\operatorname{sen}(U',V') = \cos(U,U')\cos(V,V') - \cos(U,V')\cos(V,U')$.

E così si potrebbero dedurre molte altre formule. Ci limiteremo alle seguenti:

Fatto $U' = \perp U$, $V' = \perp V$, si ha:

(12) $$\operatorname{sen}^2(U,V) = 1 - \cos^2(U,V).$$

Fatto $U' = W$, $V' = \perp W$, si ha:

(13) $\operatorname{sen}(U,V) = \operatorname{sen}(U,W)\cos(V,W) - \cos(U,W)\operatorname{sen}(V,W)$.

Ponendo in questa $\perp V$ al posto di V, si deduce:

(14) $\cos(U,V) = \operatorname{sen}(U,W)\operatorname{sen}(V,W) + \cos(V,W)\cos(V,W)$.

Le formule (13) e (14) esprimono il seno ed il coseno dell'angolo di due vettori in funzione dei seni e dei coseni degli angoli che questi vettori fanno con un terzo vettore W; esse sono le formule per l'addizione degli angoli.

Ricorderemo ancora dalla trigonometria le seguenti formule, che assumeremo come definizione:

(15) $$\operatorname{tang}(U,V) = \frac{\operatorname{sen}(U,V)}{\cos(U,V)}, \quad \cot(U,V) = \frac{\cos(U,V)}{\operatorname{sen}(U,V)}.$$

Si avrà:

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{tang}(U,V) = \frac{UV}{U \perp V}, \quad \cot(U,V) = \frac{U \perp V}{UV}.$$

42. Se per vettori di riferimento d'un sistema di coordinate si prendono un vettore I eguale in grandezza all'unità di misura, ed il vettore $J = \perp I$, allora IJ sarà il bivettore unità, e si avrà

$$\perp I = J, \ \perp J = -I, \ IJ = I \perp I = J \perp J = 1, \ I \perp J = 0.$$

Applicando le formule precedenti si deduce:

$$\text{(1)} \qquad \perp (xI + yJ) = -yI + xJ.$$

$$\text{(2)} \qquad (xI + yJ)(x'I + y'J) = xy' - x'y.$$

$$\text{(3)} \qquad (xI + yJ) \perp (x'I + y'J) = xx' + yy'.$$

Supponendo in quest'ultima il secondo fattore eguale al primo, si ha

$$\text{(4)} \qquad (xI + yJ) \perp (xI + yJ) = x^2 + y^2.$$

Da questa si deduce (N. 40, (7)).

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{gr}(xI + yJ) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le (2) e (3) si possono pure leggere

$$\text{(6)} \quad \operatorname{gr}(xI+yJ).\operatorname{gr}(x'I+y'J).\operatorname{sen}(xI+yJ,\ x'I+y'J) = xy' - x'y.$$

$$\text{(7)} \quad \operatorname{gr}(xI+yJ).\operatorname{gr}(x'I+y'J).\cos(xI+yJ,\ x'I+y'J) = xx' + yy'.$$

Queste ultime formule permettono di esprimere il seno e il coseno dell'angolo di due vettori in funzione delle coordinate dei vettori dati.

Intersezioni nel piano.

43. Ritorniamo ora a considerare le formazioni in generale giacenti nello stesso piano. Essendo α una superficie, ed ω la superficie unità converremo di scrivere α al posto del rapporto $\frac{\alpha}{\omega}$. Allora, essendo u il bivettore unità, sarà uA la massa della formazione A; $uA = 0$ è la condizione affinchè la A sia un vettore; $\frac{A}{uA}$ rappresenta il punto semplice coincidente con A; $u\alpha$ il bivettore della superficie α.

TEOREMA. *Fra quattro formazioni di prima specie* ABCD *del piano passa la relazione*

$$(1) \qquad BCD.A - ACD.B + ABD.C - ABC.D = 0.$$

Infatti, se ABCD sono punti, e ABC non è nullo, si possono determinare i numeri $x\ y\ z$ in modo che risulti $D = xA + yB + zC$. Moltiplicando per BC si deduce $DBC = xABC$, onde $x = \frac{DBC}{ABC}$; analogamente si ha $y = \frac{ADC}{ABC}$, $z = \frac{ABD}{ABC}$. Sostituendo questi valori di $x\ y\ z$ nell'espressione di D, e fatto sparire il denominatore, si ha la formula a dimostrarsi. Essa è stata dimostrata se ABC non sono in linea retta; ma siccome essa è simmetrica nei quattro punti, essa sarà dimostrata se i quattro punti non sono tutti in linea retta. Se poi questo avvenisse, tutti i termini si annullano, e la (1) è ancora verificata. Così dimostrata la (1) se ABCD sono punti, la si dimostra quando ABCD rappresentano formazioni qualunque, con ragionamento analogo a quello fatto al N. 33.

La formula (1) si può pure scrivere:

$$(2) \qquad ABC.D = BCD.A + CAD.B + ABD.C.$$

$$(3) \qquad ACD.B - BCD.A = ABD.C - ABC.D.$$

Se si moltiplica la (2) per una formazione di seconda specie p, si avrà l'identità fra quattro formazioni di 1ª specie, ed una di seconda:

$$(4) \qquad ABC.Dp = BCD.Ap + CAD.Bp + ABD.Cp.$$

E siccome, dati ABC e p, essa vale qualunque sia D, si deduce la relazione fra tre formazioni di prima specie ed una di seconda:

$$(5) \qquad ABC.p = Ap.BC + Bp.CA + Cp.AB.$$

Se nella (4) si suppongono ABCD punti, e si fa $p = u$, sarà $Ap = Bp = Cp = Dp = 1$, onde si ricava:

$$(6) \qquad ABC = BCD + CAD + ABD.$$

44. DEF. *Alla scrittura* AB.CD *attribuiremo il significato*

$$(1) \qquad AB.CD = ACD.B - BCD.A.$$

Perciò la scrittura AB.CD rappresenta una formazione di prima specie, che è collineare con AB, perchè $(ACD.B - BCD.A)\,AB = 0$, ed è collineare con CD, perchè $(ACD.B - BCD.A)\,CD = ACD.BCD - BCD.ACD = 0$. Ad essa daremo il nome di *intersezione,* o *prodotto regressivo* di AB e CD. Se AB si rappresenta con a, CD con b, invece di AB.CD scriveremo anche a.CD, AB.b, a.b, ab.

L'identità ACD.B — BCD.A = ABD.C — ABC.D dice che

$$(2) \qquad AB.CD = ABD.C - ABC.D.$$

Se nella (1) al posto di CD si legge p, si avrà

$$(3) \qquad AB.p = Ap.B - Bp.A$$

Se nella (2) al posto di AB si legge p, e al posto di C e D si legge A e B si deduce

$$(4) \qquad p.AB = pB.A - pA.B.$$

Dal paragone della (3) colla (4) si deduce:

$$pq = -qp. \tag{5}$$

La formola (1) dice che $AB.CD$ è funzione della linea CD, ossia, se $CD = C'D'$, sarà $AB.CD = AB.C'D'$; la formula (2) dice che $AB.CD$ è funzione della linea AB, ossia se $AB = A'B'$, sarà $AB.CD = A'B'.CD$. Di qui si deduce:

$$(a = a') \frown (b = b') < (ab = a'b'). \tag{6}$$

Si ha dalla (3) $AB.(q+q') = A(q+q').B - B(q+q').A =$ $(Aq+Aq').B - (Bq+Bq').A = (Aq.B - Bq.A) + (Aq'.B - Bq'.A) =$ $AB.q + AB.q'$, ossia, al posto di AB leggendo p,

$$p(q+q') = pq + pq'. \tag{7}$$

Si dimostra analogamente

$$(p+p')q = pq + p'q. \tag{8}$$

$$(kp)q = p(kq) = k(pq). \tag{9}$$

Se nella (1) si suppone che dei quattro punti $ABCD$ due coincidano, si trovano come casi particolari:

$$AB.AC = ABC.A,\ AB.BC = ABC.B,\ AC.BC = ABC.C. \tag{10}$$

Pertanto la scrittura pq rappresenta una formazione di prima specie che giace su p e su q, che è funzione distributiva rispetto ad amendue i fattori, e che vien moltiplicata per -1 ove si scambi l'ordine dei fattori. Esamineremo il suo significato in alcuni casi particolari.

Se p e q sono due linee, le cui rette si incontrino in un punto O, si determinino i punti P e Q in guisa che sia $p = OP$, $q = OQ$. Allora dalla (6) si ha $pq = OP.OQ = OPQ.O$, ossia pq rappresenta il punto d'incontro delle due rette p e q, cui sia affisso il numero che misura la superficie OPQ, cioè il prodotto delle grandezze delle due linee pel seno dell'angolo compreso. Se le linee p e q

sono in grandezza eguali all'unità di misura, il prodotto pq rappresenta il loro punto d'incontro cui sia affisso il seno dell'angolo che esse fanno; se le linee pq sono in grandezza eguali all'unità di misura ed ortogonali fra loro, il prodotto pq rappresenta il loro punto d'incontro col coefficiente ± 1.

La formazione di prima specie pq è un vettore se p e q sono due linee parallele, o se dei due fattori uno è un bivettore. Merita menzione speciale il caso in cui uno dei fattori è il bivettore unità u.

Se $p = AB$, ove A e B sono punti semplici, sarà $pu = AB \,.\, u = Au \,.\, B - Bu \,.\, A = B - A$, che è il vettore della linea p; onde:

$$pu = -up = \text{vettore della linea p.}$$

Il prodotto regressivo pq è nullo quando è nullo l'uno dei fattori, ovvero quando p e q sono linee giacenti sulla stessa retta, o quando sono due bivettori.

45. La scrittura $ab \,.\, P$ rappresenta la formazione di seconda specie che dall'intersezione ab proietta P.

Si ha la identità

$$ab \,.\, P = aP \,.\, b - bP \,.\, a. \tag{1}$$

Invero, se $b = MN$, sarà $ab = a \,.\, MN = aN \,.\, M - aM \,.\, N$; onde $ab \,.\, P = aN \,.\, MP - aM \,.\, NP$.

Ora dall' identità $MNP \,.\, a = Ma \,.\, NP + Na \,.\, PM + Pa \,.\, MN$ si ricava $aN \,.\, MP - aM \,.\, NP = aP \,.\, MN - MNP \,.\, a$, ossia $ab \,.\, P = aP \,.\, b - bP \,.\, a$, che è la formula a dimostrarsi.

La (1) moltiplicata per Q dà

$$ab \,.\, PQ = aP \,.\, bQ - bP \,.\, aQ. \tag{2}$$

Si ha l'identità

$$ab \,.\, c = a \,.\, bc \tag{3}$$

e il valore comune di questi due membri si indicherà semplicemente con abc.

Infatti, se $c = PQ$, sarà $ab \,.\, c = ab \,.\, PQ = aP \,.\, bQ - bP \,.\, aQ$; si avrà poi $bc = b \,.\, PQ = bQ \,.\, P - bP \,.\, Q$, onde $a \,.\, bc = bQ \,.\, aP - bP \,.\, aQ = ab \,.\, c$.

L'equazione $abc = 0$ dice che l'elemento ab giace sulla c, ossia che le tre formazioni abc hanno un elemento di prima specie comune.

La espressione uab rappresenta la massa della formazione ab, cioè $uab = gra \,.\, grb \,.\, \mathrm{sen}\,(a, b)$.

L'equazione $uab = 0$ dice che le rette a e b sono parallele. Se uab non è nullo, $\frac{ab}{uab}$ rappresenta il punto semplice intersezione delle rette a e b.

46. TEOREMA. *Essendo* $A_1\, A_2\, A_3$ *tre formazioni di prima specie, giacenti nel piano, e il cui prodotto non sia nullo, allora, essendo* A *una formazione qualunque di prima specie, ed* a *una di seconda, si possono sempre determinare i numeri* $x_1\, x_2\, x_3$, *ed i numeri* $u_1\, u_2\, u_3$ *in guisa che si abbia:*

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3, \tag{1}$$

$$a = u_1 A_2 A_3 + u_2 A_3 A_1 + u_3 A_1 A_2. \tag{2}$$

Infatti, le identità

$$A_1 A_2 A_3 \,.\, A = A A_2 A_3 \,.\, A_1 + A_1 A A_3 \,.\, A_2 + A_1 A_2 A \,.\, A_3$$

e

$$A_1 A_2 A_3 \,.\, a = A_1 a \,.\, A_2 A_3 + A_2 a \,.\, A_3 A_1 + A_3 a \,.\, A_1 A_2,$$

divise per $A_1 A_2 A_3$, che non è nullo, dànno luogo alle formule (1) e (2) ove si faccia:

$$x_1 = \frac{A A_2 A_3}{A_1 A_2 A_3}, \quad x_2 = \frac{A_1 A A_3}{A_1 A_2 A_3}, \quad x_3 = \frac{A_1 A_2 A}{A_1 A_2 A_3}, \tag{3}$$

$$u_1 = \frac{A_1 a}{A_1 A_2 A_3}, \quad u_2 = \frac{A_2 a}{A_1 A_2 A_3}, \quad u_3 = \frac{A_3 a}{A_1 A_2 A_3}. \tag{4}$$

DEF. *Ai numeri* $x_1\ x_2\ x_3$ *e* $u_1\ u_2\ u_3$, *che soddisfano alle equazioni* (1) *e* (2) *daremo il nome di* coordinate di A *e di* a, *rispetto agli elementi di riferimento* $A_1\ A_2\ A_3$.

Per semplificare le scritture porremo

$$a_1 = A_2 A_3, \quad a_2 = A_3 A_1, \quad a_3 = A_1 A_2. \tag{5}$$

$$\theta = A_1 A_2 A_3. \tag{6}$$

Allora si avrà

$$A_1 a_1 = A_2 a_2 = A_3 a_3 = \theta \tag{7}$$

$$a_2 a_3 = \theta A_1, \quad a_3 a_1 = \theta A_2, \quad a_1 a_2 = \theta A_3. \tag{8}$$
$$a_1 a_2 a_3 = \theta^2.$$

Si ricavano, eseguendo le operazioni indicate nei primi membri colle regole spiegate, le seguenti formule:

$$(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3) + (y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3) = \tag{9}$$
$$(x_1 + y_1) A_1 + (x_2 + y_2) A_2 + (x_3 + y_3) A_3,$$

$$k (x_1 A_1 + \ldots) = k x_1 A_1 + \ldots \tag{10}$$

$$(u_1 a_1 + \ldots) + (v_1 a_1 + \ldots) = (u_1 + v_1) a_1 + \ldots \tag{11}$$

$$k (u_1 a_1 + \ldots) = k u_1 a_1 + \ldots \tag{12}$$

$$(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3) (y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

$$(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3) (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3) = \tag{14}$$
$$(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3)\ \theta.$$

$$(u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3) (v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \theta. \tag{15}$$

$$(16)\quad (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)\,(y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3)(z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \theta.$$

$$(17)\quad (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3)\,(v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3)\,(w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \theta^2.$$

Le formule precedenti esprimono in funzione delle coordinate delle formazioni date le coordinate d'ogni formazione che si ottenga dalle medesime colle operazioni: somma di due formazioni della stessa specie, prodotto d'una formazione per un numero, prodotto progressivo o regressivo di due formazioni.

Delle formule

$$(18)\quad (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)\,u = x_1 A_1 u + x_2 A_2 u + x_3 A_3 u,$$

$$(19)\quad (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3)\,u = u_1 a_1 u + u_2 a_2 u + u_3 a_3 u,$$

la prima esprime la massa d'una formazione di prima specie in funzione delle sue coordinate, e delle masse delle formazioni di riferimento; la seconda il vettore d'una formazione di 2ª specie in funzione delle sue coordinate, e dei vettori delle formazioni di riferimento. Sopra i vettori così ottenuti si può operare col segno $\perp$; in tal modo si possono esprimere in funzione delle coordinate di elementi dati, e di elementi che dipendono puramente dagli elementi di riferimento tutte le funzioni che si ottengono colle operazioni geometriche introdotte; come caso particolare la grandezza d'una linea, il seno e coseno dell'angolo di due linee, e così via.

Queste formule in generale sono alquanto complicate. Noi ne svilupperemo alcune nel sistema di coordinate che segue.

47. Prendansi per elementi di riferimento un vettore I eguale in grandezza all'unità di misura, il vettore $J = \perp I$, ed un punto sem-

plice O. Allora il bivettore IJ è il bivettore unità u, e fra I ed J passano le relazioni del N. 42. La superficie $IJO = uO$ è la superficie unità ω.

Ogni formazione di prima specie A è riduttibile alla forma

$$A = mO + xI + yJ. \tag{1}$$

Moltiplicandola per u si ha $Au = m$, ossia m è la massa del sistema. Quindi ogni punto semplice si può mettere sotto la forma:

$$A = O + xI + yJ. \tag{2}$$

I numeri x ed y diconsi le *coordinate cartesiane* del punto A. Ogni vettore resta espresso, come già si è visto al N. 42, da

$$V = xI + yJ. \tag{3}$$

L'identità

$$(O + xI + yJ) - (O + x'I + y'J) = (x - x')I + (y - y')J \tag{4}$$

dà le coordinate di un vettore in funzione delle coordinate dei suoi estremi. Applicando la formula (5) del N. 42, si deduce:

$$gr\,[(O + xI + yJ) - (O + x'I + y'J)] = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \tag{5}$$

la quale dà la distanza di due punti in funzione delle loro coordinate.

Ogni formazione di seconda specie a è riduttibile alla forma:

$$a = pJO + qOI + ru. \tag{6}$$

La somma dei primi due termini è una linea passante per l'origine, l'ultimo è un bivettore.

Moltiplicando per $u = IJ$, ed osservando che $JO.u = -J$, e $OI.u = I$, si deduce:

$$au = qI - pJ \tag{7}$$

la quale formula dà il vettore d'una linea in funzione delle sue coordinate. Poichè $gr\,\mathrm{a} = gr\,(\mathrm{a\,u})$, si deduce dalle formule del N. 42 e dalle precedenti

$$gr\,(p\,\mathrm{JO} + q\,\mathrm{OI} + r\,\mathrm{u}) = \sqrt{p^2 + q^2}. \tag{8}$$

Si ha

$$(\mathrm{O} + x\,\mathrm{I} + y\,\mathrm{J})\,(p\,\mathrm{JO} + q\,\mathrm{OI} + r\,\mathrm{u}) = px + qy + r \tag{9}$$

la quale esprime l'area d'un triangolo conoscendone le coordinate del vertice e della base. La condizione affinchè il punto A di coordinate x, y stia sulla retta a di coordinate p, q, r, che in generale è espressa da $\mathrm{A\,a} = 0$, introducendo le coordinate dei due elementi diventa

$$px + py + r = 0. \tag{10}$$

Il numero $\frac{\mathrm{A\,a}}{gr\,\mathrm{a}}$ misura la distanza del punto A dalla retta a, presa col segno + o — secondochè il triangolo A a è positivo o negativo. Introducendo le coordinate di A ed a, si ha:

$$\frac{\mathrm{A\,a}}{gr\,\mathrm{a}} = \frac{px + qy + r}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{11}$$

Sviluppando il prodotto regressivo di due linee si ha:

$$\begin{aligned}(p\,\mathrm{JO} + q\,\mathrm{OI} + r\,\mathrm{u})\,(p'\,\mathrm{JO} + q'\,\mathrm{OI} + r'\,\mathrm{u}) = \\ (pq' - p'q)\,\mathrm{O} + (qr' - q'r)\,\mathrm{I} + (rp' - r'p)\,\mathrm{J}\end{aligned} \tag{12}$$

espresso mediante le coordinate delle due linee. Se $pq' - p'q$ è nullo, l'intersezione delle due linee è un vettore, ed esse sono parallele; se esso non è nullo, dividendo la formazione ottenuta per $pq' - p'q$ si hanno le coordinate cartesiane del punto d'incontro delle due linee.

Applicazioni.

48. 1. Essendo IJKL quattro vettori del piano, il numero $\frac{IK}{JK} : \frac{IL}{JL}$ dicesi il *doppio rapporto* dei quattro vettori; esso non si altera se si moltiplicano i vettori dati per numeri arbitrarii; quindi dipende solo dalle direzioni dei quattro vettori. Quattro vettori diconsi *armonici* se il loro doppio rapporto vale -1, ossia se $IK \,.\, JL + JK \,.\, IL = 0$. I vettori I, J, $xI + yJ$ e $xI - yJ$ sono armonici, qualunque siano i numeri x ed y. Per quarto armonico dopo I, J, K si può prendere $IK \,.\, J + JK \,.\, I$.

2. L'espressione $U \perp V$ rappresenta, come si è visto, il prodotto delle grandezze dei due vettori U e V pel coseno dell'angolo compreso. Questo numero è funzione simmetrica e distributiva dei due vettori; esso chiamasi anche *prodotto interno* dei due vettori. Convenendo di indicare in questi esercizi con U^2 il numero $U \perp U = (gr\, U)^2$, si hanno le seguenti identità:

$$(U \pm V)^2 = U^2 + V^2 \pm 2\, U \perp V$$
$$(U + V) \perp (U - V) = U^2 - V^2.$$

Essendo A, B, C, D quattro punti del piano:

$$(A - B) \perp (C - D) + (B - C) \perp (A - D) + (C - A) \perp (B - D) = 0.$$

3. Un'equazione contenente un punto variabile P esprime una condizione la quale è soddisfatta in generale da un sistema di punti, costituenti un luogo geometrico; quell'equazione dicesi l'equazione di questo luogo geometrico.

L'equazione $(P - O) \perp I = 0$, ove O è un punto fisso, I un vettore dato, e P un punto variabile, è soddisfatta da tutti i punti P che stanno sulla retta passante per O e normale al vettore I; quindi è l'equazione di questa retta.

L'equazione $(P - O) \perp I = k$, ove k è una costante, rappresenta una retta normale ad I.

Un' equazione della forma

$$m_1 (P - A_1) \perp I_1 + m_2 (P - A_2) \perp I_2 + \ldots + m_n (P - A_n) \perp I_n = k,$$

rappresenta una retta perpendicolare al vettore $m_1 I_1 + m_2 I_2 + \ldots + m_n I_n$, supposto che questo non sia nullo.

4. L'equazione del cerchio di centro O e di raggio r si può scrivere $gr\,(P-O)=r$, ovvero $(P-O)\perp(P-O)-r^2=0$, od ancora, adottando la convenzione dell'esercizio 2, $(P-O)^2-r^2=0$. La quantità $(P-O)^2-r^2$, essendo P un punto qualunque del piano, dicesi *potenza* del punto P rispetto al cerchio di centro O e di raggio r; essa è positiva, o nulla, o negativa, secondochè il punto è fuori, o sopra, o dentro al cerchio.

Il luogo dei punti aventi la stessa potenza rispetto ai due cerchi di centri O ed O′ e di raggi r ed r' ha per equazione $(P-O)^2-r^2=(P-O')^2-r'^2$, ovvero $((P-O)+(P-O'))\perp((P-O)-(P-O'))=r^2-r'^2$, ossia

$$\left(P-\frac{O+O'}{2}\right)\perp(O'-O)=\frac{1}{2}(r^2-r'^2),$$

la quale rappresenta una retta perpendicolare ad OO′, e che dicesi l'*asse radicale* dei due cerchi.

5. Ogni funzione $f(P)$ del punto P, la quale sia una somma di termini delle forme $m\,(P-A)\perp(P-B)$, $m\,(P-A)^2$, $m\,(P-A)\perp I$, $m\,(P-A)\,I$, m, dove gli m sono coefficienti numerici qualunque, A, B, ... sono punti fissi, gli I sono vettori fissi, è sempre riduttibile alla forma:

$$f(P)=m\,(P-O)^2+n\,(P-O)\perp I+p.$$

dove O è un punto ad arbitrio. Invero basta ai vettori $P-A$ sostituire la differenza $(P-O)-(A-O)$, e ordinare il risultato secondo $P-O$.

Se m non è nullo, fatto $O'=O-\frac{n}{2m}\perp I$, e $k=\frac{p}{m}-\frac{n^2}{4m^3}\,I^2$, la funzione $f(P)$ si può pure ridurre alla forma

$$f(P)=m\,[(P-O')^2+k].$$

L'equazione $f(P)=0$, se k è negativo, rappresenta quindi un cerchio di centro O′ e di raggio $\sqrt{-k}$.

L'equazione $(P-A)\perp(P-B)=0$ rappresenta il luogo dei punti P tali che le rette PA e PB sono ortogonali. Quest'equazione si può pure scrivere $\left(P-\frac{A+B}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(A-B)^2=0$, e quindi questo luogo è un cerchio di centro $\frac{A+B}{2}$ e di raggio $\frac{1}{2}gr(A-B)$.

Essendo $A_1,\ldots A_n$ punti fissi, $m_1\ldots m_n$ numeri dati, la cui somma non sia nulla, e posto $m_1A_1+\ldots+m_nA_n=(m_1+\ldots+m_n)\,G$, la funzione del punto P:

$$f(P)=m_1\,(P-A_1)^2+\ldots+m_n\,(P-A_n)^2$$

è riduttibile alla forma:

$$f(\mathrm{P}) = (m_1 + \ldots + m_n)\,(\mathrm{P} - \mathrm{G})^2 + m_1\,(\mathrm{G} - \mathrm{A}_1)^2 + \ldots m_n\,(\mathrm{G} - \mathrm{A}_n)^2.$$

Quindi il luogo dei punti per cui è costante $f(\mathrm{P})$, ossia per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze dai punti dati, moltiplicati pei numeri $m_1 \ldots m_n$, è un cerchio di centro G.

Il luogo dei punti per cui è costante il rapporto delle distanze da due punti dati A e B ha per equazione $\dfrac{gr\,(\mathrm{P} - \mathrm{A})}{gr\,(\mathrm{P} - \mathrm{B})} = k$, ovvero $(\mathrm{P} - \mathrm{A})^2 - k^2(\mathrm{P} - \mathrm{B})^2 = 0$.

Quindi è un cerchio di centro $\dfrac{\mathrm{A} - k^2\,\mathrm{B}}{1 - k^2}$ (supposto $1 - k^2 \gtrless 0$).

6. Essendo A B C i vertici d'un triangolo, le identità

$$\mathrm{A\,B} + \mathrm{B\,C} + \mathrm{C\,A} = (\mathrm{A} - \mathrm{B})\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}) = (\mathrm{B} - \mathrm{C})\,(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = (\mathrm{C} - \mathrm{A})\,(\mathrm{C} - \mathrm{B})$$

dicono che l'area del triangolo è eguale al prodotto di due suoi lati pel seno dell'angolo compreso. Di qui si ricava che nel triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Dall'identità

$$\mathrm{B} - \mathrm{C} = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) - (\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

si ricava

$$(\mathrm{B} - \mathrm{C})^2 = (\mathrm{B} - \mathrm{A})^2 + (\mathrm{C} - \mathrm{A})^2 - 2\,(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \perp (\mathrm{C} - \mathrm{A}),$$

ovvero

$$[gr\,(\mathrm{B} - \mathrm{C})]^2 = [gr\,(\mathrm{B} - \mathrm{A})]^2 + [gr\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})]^2 - \\ - 2\,gr\,(\mathrm{B} - \mathrm{A})\,.\,gr\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\cos(\mathrm{B} - \mathrm{A}, \mathrm{C} - \mathrm{A})$$

che esprime un lato d'un triangolo in funzione degli altri due e del coseno dell'angolo compreso.

7. Essendo A un punto, a una linea, la retta A . u a è la parallela ad a condotta per A; essa si può pure mettere sotto la forma $\mathrm{A\,a}\,.\,\mathrm{u} - \mathrm{A\,u}\,.\,\mathrm{a}$. La retta $\mathrm{A} \perp (\mathrm{u\,a})$ è la perpendicolare ad a condotta per A. La scrittura $[\mathrm{A} \perp (\mathrm{u\,a})]\mathrm{a}$ rappresenta il piede della perpendicolare abbassata da A su a, colla massa $(gr\,\mathrm{a})^2$. Se $gr\,\mathrm{a} = 1$, allora la scrittura precedente rappresenta il piede di questa perpendicolare.

Essendo a e b linee, $\dfrac{\mathrm{a}}{gr\,\mathrm{a}} \pm \dfrac{\mathrm{b}}{gr\,\mathrm{b}}$ sono le bissettrici delle due linee; se le grandezze delle linee date sono eguali all'unità di misura, queste bissettrici sono rappresentate da $\mathrm{a} \pm \mathrm{b}$.

La scrittura $ab \perp (uc)$ rappresenta la perpendicolare abbassata dal punto ab sulla retta c. Essa si può anche scrivere $a \perp (uc) \cdot b - b \perp (uc) \cdot a$. Se le linee a, b, c sono in grandezza eguali all'unità di misura, sarà $a \perp uc = \cos(a, c)$, $b \perp uc = \cos(b, c)$, onde la normale abbassata dal punto ab sulla c si può scrivere $\cos(a, c) \cdot b - \cos(b, c) \cdot a$.

Essendo a b c tre linee nel piano, che si incontrino a due a due, detti A, B, C i loro punti d'intersezione, sarà $A = \frac{bc}{ubc}$, $B = \frac{ca}{uca}$, $C = \frac{ab}{uab}$, onde si ricava per l'area del triangolo avente per lati queste tre rette

$$ABC = \frac{(abc)^2}{(ubc)(uca)(uab)}.$$

8. Siano A B C tre punti del piano, i quali determinano un triangolo. Diremo a, b, c le lunghezze dei suoi tre lati, e determineremo le tre linee a, b, c in guisa che si abbia $BC = a\,a$, $CA = b\,b$, $AB = c\,c$. Allora a, b, c sono linee in grandezza eguali all'unità di misura, e giacenti sui lati del triangolo. Indicheremo ancora con A l'angolo $(B - A, C - A)$; e analogamente per B e C. Allora le bissettrici degli angoli del triangolo sono $b \pm c$, $c \pm a$, $a \pm b$; esse passano a tre a tre pei quattro punti $bc \pm ca \pm ab = A \operatorname{sen} A \pm B \operatorname{sen} B \pm C \operatorname{sen} C$.

La perpendicolare abbassata da A su BC si può scrivere $b \cos B - c \cos C$. Il punto d'incontro delle altezze sarà

$$(b \cos B - c \cos C)(c \cos C - a \cos A) =$$
$$bc \cos B \cos C + ca \cos C \cos A + ab \cos A \cos B =$$
$$A \operatorname{sen} A \cos B \cos C + B \operatorname{sen} B \cos A \cos C + C \operatorname{sen} C \cos A \cos B;$$

dividendo pel prodotto dei coseni lo stesso punto si può rappresentare con

$$A \operatorname{tang} A + B \operatorname{tang} B + C \operatorname{tang} C.$$

Il centro del cerchio circoscritto al triangolo dato è il punto d'incontro delle altezze del triangolo di vertici $A + B$, $B + C$, $C + A$, ossia è

$$(B + C) \operatorname{tang} A + (C + A) \operatorname{tang} B + (A + B) \operatorname{tang} C.$$

Eseguendo alcune trasformazioni, esso si può ridurre alla forma

$$A \operatorname{sen} 2A + B \operatorname{sen} 2B + C \operatorname{sen} 2C.$$

9. Indicando con A, B, ... a, b, ... formazioni di prima e seconda specie, si hanno, oltre alle già viste, le seguenti identità:

$$abc \,.\, P = aP \,.\, bc + bP \,.\, ca + cP \,.\, ab$$
$$bcd \,.\, a - acd \,.\, b + abd \,.\, c - abc \,.\, d = 0.$$
$$(BC \,.\, a)\,(CA \,.\, b)\,(AB \,.\, c) = (Ba \,.\, Cb \,.\, Ac - Ca \,.\, Ab \,.\, Bc)\,ABC.$$
$$abc \,.\, (BC \,.\, a)\,(CA \,.\, b)\,(AB \,.\, c) = ABC \,.\, (A \,.\, bc)\,(B \,.\, ca)\,(C \,.\, ab)$$
$$(BC \,.\, B'C')\,(CA \,.\, C'A')\,(AB \,.\, A'B') = ABC \,.\, A'B'C' \,.\, (AA' \,.\, BB' \,.\, CC')$$
$$(bc \,.\, b'c')\,(ca \,.\, c'a')\,(ab \,.\, a'b') = abc \,.\, a'b'c' \,.\, (aa' \,.\, bb' \,.\, cc').$$

Annullando uno dei due membri di queste ultime identità si deduce il teorema di Desargues sui triangoli omologici. Si noti che le identità precedenti valgono qualunque siano le formazioni introdotte, le quali possono essere punti o vettori (punti all'infinito), linee o bivettori (retta all'infinito), e questi elementi possono comunque coincidere fra loro.

10. Le operazioni algebriche e geometriche che si possono eseguire sopra numeri e formazioni geometriche, permettono di esprimere delle funzioni di questi numeri e di queste formazioni. Noi diremo che una funzione di numeri e di formazioni geometriche è *intera*, se la funzione si esprime mediante questi numeri e formazioni (variabili indipendenti), e di altri numeri e formazioni (costanti) colle operazioni:

a) addizione di numeri; addizione di formazioni della stessa specie.

b) moltiplicazione di due numeri; moltiplicazione di un numero per una formazione; moltiplicazione progressiva (proiezione) di due formazioni (di 1ª specie, ovvero l'una di prima e l'altra di 2ª); moltiplicazione regressiva (intersezione) di due formazioni (di 2ª specie); l'operazione $\mathbf{1}$ da eseguirsi su d'un vettore; la divisione d'un bivettore o d'un'area rispettivamente pel bivettore unità, o area unità.

Una funzione la quale si esprima mediante le sole operazioni (*b*) dicesi *monomio*. Il *grado* d'un monomio rispetto ad una formazione è il numero delle volte che comparisce quella formazione nella scrittura. Ogni funzione intera è riduttibile alla somma di più monomii (*termini*). Si dirà *grado* d'una funzione intera il massimo fra i gradi dei suoi termini. Se tutti i termini sono dello stesso grado, la funzione si dirà *omogenea*. Ogni monomio è funzione omogenea.

Ad esempio, le coordinate d'una formazione di prima o seconda specie (N. 46, (3), e (4)) sono funzioni omogenee di primo grado nella formazione. Un numero, funzione omogenea di grado n delle coordinate d'una formazione sarà una funzione omogenea di grado n di questa formazione, e viceversa. Le coordinate d'una formazione funzione omogenea di grado n d'una seconda for-

mazione sono funzioni omogenee di grado n della seconda formazione. L'espressione

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n,$$

ove $A_0, \dots A_n$ siano formazioni di prima specie costanti (indipendenti da t) rappresenta una formazione di prima specie funzione intera di grado n della variabile numerica t; e viceversa, ogni formazione di prima specie funzione intera di grado n di t si può ridurre alla forma enunciata. Le scritture:

$$(a + bt)(a' + b't),$$
$$(A + Bt)(A' + B't).(a + bt), \quad (A + Bt)(A' + B't).(A'' + B''t)(A''' + B'''t)$$

rappresentano formazioni di prima specie funzioni rispettivamente di secondo, terzo e quarto grado in t, prodotti di funzioni di primo grado. $gr\,a$ è funzione non intera della linea a; ma il suo quadrato $gr^2 a = ua \perp ua$ è funzione intera omogenea di 2° grado in a.

11. Siano A, B, C tre formazioni di prima specie. Pongasi:

$$P = A u^2 + B uv + C v^2 \tag{1}$$

Sarà P una formazione di prima specie, funzione omogenea e di secondo grado delle due variabili numeriche u e v. Se al posto di u e v si legge ku e kv, la formazione P risulta moltiplicata per k^2, quindi la posizione del punto P, o la direzione del vettore P, non dipende che dal rapporto delle due variabili u e v.

Dati a u e v i valori $u_1, v_1; u_2, v_2; \dots$ e dette $P_1, P_2, \dots$ le formazioni P corrispondenti, si deduce:

$$P_1 P_2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)(AB u_1 u_2 + AC(u_1 v_2 + u_2 v_1) + BC u_2 v_2). \tag{2}$$

$$P_1 P_2 P_3 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)(u_1 v_3 - u_3 v_1)(u_2 v_3 - u_3 v_2)\,ABC. \tag{3}$$

Se ABC non è nullo, si deduce che tre formazioni P corrispondenti a valori di u e v non proporzionali non sono mai collineari. Il sistema delle posizioni del punto P, o delle direzioni del vettore P, dicesi *curva di 2° grado*. Affinchè P stia sulla linea p, deve avere $Pp = 0$, ossia

$$Ap.u^2 + Bp.uv + Cp.v^2 = 0, \tag{4}$$

equazione di secondo grado nel rapporto $u : v$. La linea p incontrerà la curva, o le sarà tangente, o non l'incontrerà secondochè

$$(Bp)^2 - 4Ap.Cp \gtreqless 0.$$

La condizione affinchè la retta p sia tangente alla curva è:

$$(5) \qquad (Bp)^2 - 4\,Ap \,.\, Cp = 0.$$

La massa di P è data da

$$(6) \qquad uP = uA \,.\, u^2 + uB \,.\, uv + uC \,.\, v^2.$$

Questa massa sarà nulla, e quindi P un vettore (punto all' infinito) se $uA \,.\, u^2 + uB \,.\, uv + uC \,.\, v^2 = 0$, equazione di secondo grado in $u : v$; la curva conterrà due vettori, o uno, o nessuno (cioè avrà due punti all'infinito, o uno, o nessuno), secondochè

$$(7) \qquad (uB)^2 - 4\,uA \,.\, uC \gtreqless 0.$$

La curva dicesi in questi tre casi rispettivamente *iperbole*, *parabola* ed *ellisse*.

La retta

$$(8) \qquad p = AB\,u^2 + 2AC\,uv + BC\,v^2$$

è *tangente* alla curva nel punto (u, v).

Se si moltiplica la (1) per BC, CA, AB, si deduce: $PBC = u^2 ABC$, $PCA = uv\,ABC$, $PAB = v^2 ABC$, onde:

$$(9) \qquad (PCA)^2 - (PBC)\,(PAB) = 0,$$

che è la condizione affinchè l'elemento P appartenga alla curva.

Il punto semplice coincidente colla formazione P, supposto uP non nullo, è dato da

$$(10) \qquad \frac{P}{uP} = \frac{A\,u^2 + B\,uv + C\,v^2}{uA \,.\, u^2 + uB \,.\, uv + uC \,.\, v^2}.$$

12. Una funzione numerica intera omogenea di grado n in una formazione di prima specie P, posta eguale a zero, stabilisce una relazione a cui, se soddisfa un elemento P, soddisfa pure l'elemento kP, vale a dire, se vi soddisfa un elemento, vi soddisfano pure tutti gli elementi aventi la stessa posizione, o direzione. L'insieme di questi elementi si dice un luogo geometrico di grado n.

Quindi l'equazione $Pa = 0$, se a è una linea, rappresenta la retta a; se a è un bivettore (retta all'infinito), essa è soddisfatta ponendo per P un vettore qualunque (punto all'infinito).

L'equazione

$$(PA \,.\, a)\,(PB \,.\, b)\,C = 0$$

rappresenta un luogo di secondo ordine (conica), i cui elementi hanno la proprietà che proiettandoli da A e da B colle formazioni PA e PB, e secando queste colle a e b, gli elementi così ottenuti sono collineari con C. Si vede immediatamente che questo luogo contiene gli elementi A, B, e ab.

L'equazione

$$(AB \,.\, DE)\,(BC \,.\, EF)\,(CD \,.\, FA) = 0$$

esprime una relazione fra sei elementi di prima specie ABCDEF; essa è di secondo grado in ognuno di questi elementi, ed è soddisfatta se due degli elementi coincidono. Supposti dati cinque degli elementi, essa sarà nel sesto un'equazione di secondo grado, rappresentante un luogo di secondo ordine che contiene i cinque elementi dati. La relazione precedente non è altro che la relazione fra i sei punti d'una conica espressa dall'esagrammo di Pascal.

L'equazione

$$(PA \,.\, a)\,(PB \,.\, b)\,(PC \,.\, c) = 0$$

rappresenta un luogo di terzo ordine, contenente gli elementi A, B, C, ab, bc, ca.

Un luogo può anche essere rappresentato da un'equazione non omogenea in P, purchè si aggiunga che P è un punto semplice. Essa si può trasformare in un'altra omogenea avente sempre significato qualunque sia P, e, quando P è un punto semplice, avente il significato della proposta, ove si moltiplichino tutti i termini per potenze convenienti di uP, la quale quantità, quando P è un punto semplice, vale 1. Così l'equazione del cerchio di centro il punto O e di raggio r si può scrivere $(u \,.\, OP) \perp (u \,.\, OP) - (uO)^2\,(uP)^2 \,.\, r^2 = 0$.

Siano $a_1\ a_2 \ldots a_n$ delle linee nel piano, in grandezza eguali all'unità di misura; da un punto P si abbassino le perpendicolari sulle rette date, i cui piedi saranno $(P \perp u a_1) \,.\, a_1$, $(P \perp u a_2) \,.\, a_2$, ...; l'area del poligono avente per vertici questi piedi sarà data dal numero che misura il bivettore:

$$(P \perp u a_1 \,.\, a_1)\,(P \perp u a_2 \,.\, a_2) + (P \perp u a_2 \,.\, a_2)\,(P \perp u a_3 \,.\, a_3) + \ldots$$
$$+ (P \perp u a_n \,.\, a_n)\,(P \perp u a_1 \,.\, a_1),$$

funzione di secondo grado in P. Ponendo quest'area eguale ad una costante k, ovvero, per omogeneità, a $(uP)^2 k$, si avrà un'equazione di secondo grado in P, che rappresenta un luogo di secondo ordine. Si può riconoscere che esso è un cerchio.

13. Eguagliando a zero una funzione omogenea di grado n in una linea p, si ha un'equazione la quale, se è soddisfatta da una linea p, è pure soddisfatta

da tutte le linee kp aventi la stessa posizione. Il sistema delle linee che soddisfano a quella equazione dicesi un inviluppo di classe n.

L'inviluppo delle rette p che formano con due rette date a e b un triangolo di area data k è (Es. 7)

$$(\mathrm{a\,b\,p})^2 = k\,(\mathrm{a\,b\,u})\,(\mathrm{a\,p\,u})\,(\mathrm{b\,p\,u})$$

di seconda classe.

L'inviluppo delle rette p per cui è eguale ad una costante k il prodotto delle distanze da due punti fissi A e B ha per equazione $\frac{\mathrm{p\,A}}{gr\,\mathrm{p}} \,.\, \frac{\mathrm{p\,B}}{gr\,\mathrm{p}} = k$, ovvero

$$\mathrm{p\,A}\,.\,\mathrm{p\,B} = k\,gr^2\,\mathrm{p},$$

e quindi è un inviluppo di seconda classe.

L'inviluppo delle rette p le quali tagliano i lati a, b, c d'un triangolo in punti, nei quali innalzando le perpendicolari ai lati, queste vengano a passare per uno stesso punto, ha per equazione

$$(\mathrm{p\,a}\,.\perp \mathrm{u\,a})\,(\mathrm{p\,b}\,.\perp \mathrm{u\,b})\,(\mathrm{p\,c}\,.\perp \mathrm{u\,c}) = 0,$$

di terza classe, e che contiene le linee a, b, c.

14. Siano dati in un piano degli elementi di prima e di seconda specie. Per semplicità di linguaggio diremo, in questo esercizio, *punto* un elemento di prima specie, *retta* uno di seconda. Allora, congiungendo i punti a due a due, e segnando le intersezioni delle rette, si ottengono nuove rette e nuovi punti, da cui, operando nello stesso modo, derivano nuovi elementi, i quali si possono esprimere in funzione degli elementi dati coi prodotti progressivi e regressivi.

Dati tre punti non si ricavano con queste costruzioni che tre rette.

Dati quattro punti ABCD (vertici d'un quadrangolo completo), si deducono 6 rette (lati del quadrangolo) AB, ...; i lati opposti si incontrano in tre punti AB . CD, ... (punti diagonali); questi punti uniti a due a due determinano tre rette (rette diagonali). Pongasi $\mathrm{X} = \mathrm{AB}\,.\,\mathrm{CD}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{BC}\,.\,\mathrm{AD}$, $\mathrm{Z} = \mathrm{CA}\,.\,\mathrm{BD}$ $\mathrm{x} = \mathrm{YZ}$, $\mathrm{y} = \mathrm{ZX}$, $\mathrm{z} = \mathrm{XY}$; allora, facendo astrazione da coefficienti numerici, e badando solo alla posizione degli elementi, i quattro punti dati sono rappresentati da $\mathrm{X} \pm \mathrm{Y} \pm \mathrm{Z}$; i sei lati da $\mathrm{x} \pm \mathrm{y}$, ...; i punti e rette diagonali furono chiamati X, ... x, ...; le rette diagonali incontrano i lati nei 6 nuovi punti $\mathrm{X} \pm \mathrm{Y}$, ...; questi uniti a due a due dànno le quattro rette nuove $\mathrm{x} \pm \mathrm{y} \pm \mathrm{z}$. Così continuando si possono ottenere tutti i punti e tutte le rette della forma $x\,\mathrm{X} + y\,\mathrm{Y} + z\,\mathrm{Z}$ o $x\mathrm{x} + y\mathrm{y} + z\mathrm{z}$, in cui x, y, z sono numeri interi (o commensurabili), e solamente questi elementi.

CAPITOLO V.

Formazioni nello spazio.

Vettori.

49. Nello spazio fisseremo ad arbitrio un volume Ω, cui daremo il nome di *volume unità;* indicheremo con ω il trivettore di questo volume, cioè quel trivettore tale che se O è un punto qualunque dello spazio si abbia $O\omega = \Omega$, e lo diremo *trivettore unità.*

Se A è una formazione di prima specie, $A = m_1 A_1 + \ldots + m_n A_n$, in cui $A_1 \ldots A_n$ sono punti, si deduce:

$$\frac{A\omega}{\Omega} = m_1 + \ldots + m_n,$$

ossia $\frac{A\omega}{\Omega}$ rappresenta la massa del sistema A. L'equazione $A\omega = 0$ dice che A è un vettore. Se $A\omega$ non è nullo, $\frac{\Omega}{A\omega}$ A rappresenta il punto semplice coincidente con A. Se A è un volume, $\frac{A}{\Omega}\omega$ rappresenta il trivettore del volume.

50. Comincieremo ad occuparci dei vettori, e loro prodotti, cioè bivettori e trivettori. Si è dimostrato che se IJK sono tre vettori, tali però che IJK non sia nullo, ogni altro vettore U si può mettere sotto la forma

$$U = xI + yJ + zK. \tag{1}$$

I numeri x, y, z diconsi le *coordinate del vettore* U rispetto ai tre vettori di riferimento I, J, K.

Moltiplicando l'equazione precedente per JK, KI, IJ, si ricava

$$(2) \qquad x = \frac{\mathrm{UJK}}{\mathrm{IJK}}, \quad y = \frac{\mathrm{UKI}}{\mathrm{IJK}}, \quad z = \frac{\mathrm{UIJ}}{\mathrm{IJK}},$$

le quali formule esprimono le coordinate del vettore U come rapporti di trivettori.

Si sostituiscano i valori di xyz dati dalle (2) nella (1); si avrà, dopo alcune riduzioni,

$$\frac{\mathrm{IJK}}{\omega} . \mathrm{U} = \frac{\mathrm{UJK}}{\omega} . \mathrm{I} + \frac{\mathrm{UKI}}{\omega} . \mathrm{J} + \frac{\mathrm{UIJ}}{\omega} . \mathrm{K}.$$

Per semplicità di scrittura converremo di sopprimere il trivettore unità al denominatore, intendendo, d'ora innanzi, con IJK non più il trivettore prodotto di I, J, K, ma il rapporto di questo trivettore al trivettore unità.

Allora la formula precedente si potrà scrivere

$$(3) \qquad \mathrm{IJK} . \mathrm{U} = \mathrm{UJK} . \mathrm{I} + \mathrm{UKI} . \mathrm{J} + \mathrm{UIJ} . \mathrm{K}$$

relazione fra quattro vettori qualunque.

Se $\mathrm{U} = x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + z\mathrm{K}$, $\mathrm{V} = x'\mathrm{I} + y'\mathrm{J} + z'\mathrm{K}$, si ricava pel bivettore UV l'espressione

$$(4) \quad \mathrm{UV} = (yz' - y'z)\,\mathrm{JK} + (zx' - z'x)\,\mathrm{KI} + (xy' - x'y)\,\mathrm{IJ}.$$

Si vede di qui che ogni bivettore u si può mettere sotto la forma:

$$(5) \qquad \mathrm{u} = u\mathrm{JK} + v\mathrm{KI} + w\mathrm{IJ}.$$

I numeri u, v, w diconsi le *coordinate del bivettore* u; la formula (4) dà le coordinate del bivettore UV in funzione delle coordinate dei suoi fattori.

Se il vettore U e il bivettore u sono dati dalle (1) e (5) si ricava:

$$(6) \qquad \mathrm{Uu} = (xu + yv + zw)\mathrm{IJK}.$$

Se $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ sono le coordinate dei tre vettori U, V, W, si ricava:

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{UVW} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \mathrm{IJK}.$$

51. Se, come al N. 44, alla scrittura $\mathrm{UV}\,.\,\mathrm{U'V'}$ attribuiamo il significato

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{UV}\,.\,\mathrm{U'V'} = \mathrm{UU'V'}\,.\,\mathrm{V} - \mathrm{VU'V'}\,.\,\mathrm{U},$$

si avrà anche, in virtù della identità (3) del N. precedente:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{UV}\,.\,\mathrm{U'V'} = \mathrm{UVV'}\,.\,\mathrm{U'} - \mathrm{UVU'}\,.\,\mathrm{V'},$$

quindi $\mathrm{UV}\,.\,\mathrm{U'V'}$ rappresenta un vettore che giace sui due bivettori UV e U'V'; lo potremo chiamare *prodotto regressivo*, o *intersezione* dei due bivettori. Se i bivettori si rappresentano con u e v, il loro prodotto regressivo si potrà rappresentare con $\mathrm{u}\,.\,\mathrm{v}$ ovvero uv.

Pei prodotti regressivi dei bivettori sussistono tutte le identità che valgono pei prodotti regressivi di linee nel piano, vale a dire:

(3) $\mathrm{UV}\,.\,\mathrm{u} = \mathrm{Uu}\,.\,\mathrm{V} - \mathrm{Vu}\,.\,\mathrm{U}.$

(4) $\mathrm{u}\,.\,\mathrm{v} = -\,\mathrm{v}\,.\,\mathrm{u}.$

(5) $(\mathrm{u} = \mathrm{u'}) \frown (\mathrm{v} = \mathrm{v'}) < (\mathrm{u}\,.\,\mathrm{v} = \mathrm{u'}\,.\,\mathrm{v'}).$

(6) $(\mathrm{u} + \mathrm{u'})\,.\,\mathrm{v} = \mathrm{u}\,.\,\mathrm{v} + \mathrm{u'}\,.\,\mathrm{v}; \quad \mathrm{u}\,.\,(\mathrm{v} + \mathrm{v'}) = \mathrm{u}\,.\,\mathrm{v} + \mathrm{u}\,.\,\mathrm{v'}.$

(7) $(k\mathrm{u})\,\mathrm{v} = \mathrm{u}\,(k\mathrm{v}) = k\,(\mathrm{uv}).$

(8) $\mathrm{UV}\,.\,\mathrm{UW} = \mathrm{UVW}\,.\,\mathrm{U}.$

(9) $\mathrm{uv}\,.\,\mathrm{U} = \mathrm{uU}\,.\,\mathrm{v} - \mathrm{vU}\,.\,\mathrm{u}.$

(10) $\mathrm{uv}\,.\,\mathrm{w} = \mathrm{u}\,.\,\mathrm{vw}$, e il loro valore comune si potrà rappresentare con uvw.

(11) $(\mathrm{uv} = 0) =$ (i bivettori u e v hanno la stessa giacitura).

(12) $(\mathrm{uvw} = 0) =$ (i bivettori u, v, w, hanno un vettore comune).

Siano IJK i tre vettori di riferimento; facciasi $i = JK$, $j = KI$, $k = IJ$. Se $u = ui + vj + wk$, $v = u'i + v'j + w'k$, sarà:

$$uv = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ I & J & K \end{vmatrix} IKJ.$$

52. Finora non fu fatta alcuna convenzione sulla scelta del volume unità, e del trivettore unità. Converremo di prendere come *trivettore unità* il trivettore prodotto di tre vettori I, J, K eguali in lunghezza all'unità di misura, a due a due ortogonali, e tali che il volume OIJK, ove O è un punto, risulti destrorso. In conseguenza il *volume unità* sarà il tetraedro destrorso di base l'unità superficiale, e di altezza l'unità lineare; la sua grandezza è il sesto del cubo di lato l'unità lineare.

DEF. *Diremo che il vettore* U *è l'*indice del bivettore u, *ovvero che il bivettore u è l'*indice del vettore U, *e scriveremo*:

$$U = |u, \quad u = |U,$$

quando la direzione di U *e la giacitura di* u *sono normali fra loro, le grandezze di* U *e di* u *sono eguali, ed i loro sensi sono tali che il trivettore* $Uu = uU$ *risulti positivo.*

53. Risulta immediatamente dalle definizioni date:

(1) $$(u = u') = (|u = |u'); \quad (U = U') = (|U = |U').$$

(2) $$||u = u, \quad ||U = U.$$

(3) $$|ku = k|u, \quad |kU = k|U.$$

Si hanno ancora le seguenti formule:

(4) $$|(U + V) = |U + |V,$$

(5) $$|(UV) = (|U).(|V)$$

(6) $$U|V = V|U.$$

La (4) esprime la proprietà distributiva dell'operazione |; la (5) dice che l'indice del bivettore UV è il prodotto regressivo di due bivettori | U e | V; la (6) dice che il trivettore U | V, o il numero che lo misura, è funzione simmetrica di U e V.

Per dimostrare queste formule, sia I un vettore eguale in grandezza all'unità di misura, e normale contemporaneamente ad U e a V. Sia i l'indice di I; sarà i un bivettore giacente nel piano UV, eguale all'unità di misura, e di senso determinato. Allora nel piano UV risulta definita l'operazione indicata col segno ⊥ fatta sui vettori giacenti in questo piano, e si avrà:

$$a)\quad \perp(U+V)=\perp U+\perp V,\quad b)\ UV=(\perp U)(\perp V),\quad c)\ U\perp V=V\perp U.$$

Inoltre, essendo X un vettore qualunque giacente in questo piano, si ha:

$$d)\qquad\qquad |X=(\perp X)\,I,$$

ossia l'indice del vettore X è il bivettore prodotto di ⊥X e di I; invero, il vettore X e il bivettore (⊥X) I sono ortogonali, hanno egual grandezza, e il loro prodotto $X(\perp X)\,I=(gr\,X)^2\,iI$, è un trivettore positivo.

Si moltiplichi perciò la *a*) per I; si deduce:

$$[\perp(U+V)]\,I=(\perp U)\,I+(\perp V)\,I,$$

e in virtù della *d*) si ha la (4).

Per dimostrare la (5) si ha successivamente per la *d*), per la (8) del N. 51, e per la *c*):

$$(|\,U)\,.\,(|\,V)=[(\perp U)\,I]\,.\,[(\perp V)\,I]=[(\perp U)(\perp V)\,I]I=[UVI]I=|\,(UV).$$

Per la (6), si moltiplichi la *c*) per I; si avrà: $U(\perp V)\,I=V(\perp U)\,I$, e quindi, per la *d*) si ha la formula a dimostrarsi.

Se nella (4), al posto di U e V si legge | u e | v si deduce, scambiando i due membri:

$$u+v=|\,(|\,u+|\,v),$$

la quale formula permette di ridurre, coll'operazione |, la somma di due bivettori a quella di due vettori.

Prendendo gli indici d'ambo i membri si ha:

$$(4') \qquad |(u+v) = |u + |v.$$

Colla stessa operazione si ricava dalla (5):

$$uv = |(|u \,.\, |v)$$

la quale formula permette di ridurre il prodotto regressivo di due bivettori al prodotto progressivo di due vettori. Prendendo gli indici d'ambo i membri si ha:

$$(5') \qquad |(uv) = |u \,.\, |v.$$

Colla stessa operazione si ricava dalla (6):

$$(6') \qquad u \,|\, v = v \,|\, u.$$

Se I è un vettore eguale in grandezza all'unità di misura, sarà $I|I$ il trivettore unità, ossia $I|I = 1$.

Essendo U un vettore qualunque, fatto $I = \frac{U}{gr\,U}$, sarà I un vettore eguale all'unità di misura; quindi si ha:

$$U = (gr\,U)\,I, \quad |U = (gr\,U)\,|I, \quad U|U = (gr\,U)^2\,I|I,$$

ossia:

$$(7) \qquad U|U = (gr\,U)^2.$$

Analogamente si ha:

$$(7') \qquad u|u = (gr\,u)^2.$$

Le condizioni d'ortogonalità dei due vettori U e V, del vettore U e del bivettore u, dei due bivettori u e v sono rispettivamente:

$$U|V = 0, \quad U|u = 0, \quad u|v = 0.$$

Sono ancora a notarsi le formule

$$(8)\qquad U + |\, u = |\,(u + |\, U) \qquad u + |\, U = |\,(U + |\, u)$$
$$(9)\qquad U\,|\,u = -\,|\,(u\,|\,U) \qquad u\,|\,U = -\,|\,(U\,|\,u)$$

le quali si ricavano dalle (4) e (5) leggendo $|\,u$ al posto di V, e le

$$(10)\qquad UVW = |\,U\,.\,|\,V\,.\,|\,W\,, \qquad uvw = |\,u\,.\,|\,v\,.\,|\,w\,,$$

che si ricavano dalla (6) leggendo $|\,(VW)$ al posto di V.

54. Nello spazio, se i vettori I e J, e i bivettori i e j sono in grandezza eguali all'unità di misura, porremo per definizione:

$$(1)\qquad \text{sen}\ (I, J) = \text{gr}\,(IJ),\ \text{sen}\,(I, i) = Ii,\ \text{sen}\,(i, I) = iI,$$
$$\text{sen}\,(i, j) = \text{gr}\,(ij).$$

$$(2)\qquad \cos(I, J) = \text{sen}\,(I, |\, J),\ \cos(I, i) = \text{sen}\,(I, |\, i),$$
$$\cos(i, I) = \text{sen}\,(i, |\, I),\ \cos(i, j) = \text{sen}\,(i, |\, j).$$

Queste ultime formule si possono pure scrivere:

$$(2')\qquad \cos(I, J) = I\,|\,J,\ \cos(I, i) = \text{gr}\,(I\,|\,i),\ \cos(i, I) = \text{gr}\,(i\,|\,I),$$
$$\cos(i, j) = i\,|\,j.$$

Se i vettori I, J, e i bivettori i, j non sono in grandezza eguali all'unità, per seno e coseno dei loro angoli intenderemo i seni e coseni degli angoli dei vettori e bivettori $\frac{I}{gr\,I}$, $\frac{J}{gr\,J}$, $\frac{i}{gr\,i}$, $\frac{j}{gr\,j}$, aventi la stessa direzione, o giacitura dei vettori dati, e lo stesso senso, ma grandezza eguale all'unità di misura.

Si deduce dalle definizioni date che il seno di due vettori, o di due bivettori è compreso fra 0 ed 1, mentrechè il seno d'un vettore con un bivettore, o d'un bivettore con un vettore è un numero compreso fra -1 e $+1$. Succede l'opposto pei coseni.

Essendo a un vettore o un bivettore, e b un vettore o un bivettore, si ha:

(3) $\quad \text{sen}\,(a, b) = \text{sen}\,(b, a), \qquad \cos\,(a, b) = \cos\,(b, a).$

(4) $\quad \text{sen}\,(a, a) = 0, \qquad \cos\,(a, a) = 1.$

(5) $\quad \text{sen}\,(a, \mid a) = 1, \qquad \cos\,(a, \mid a) = 0.$

(6) $\quad \text{sen}\,(a, b) = \cos\,(a, \mid b) = \cos\,(\mid a, b) = \text{sen}\,(\mid a, \mid b).$

(7) $\quad \cos\,(a, b) = \text{sen}\,(a, \mid b) = \text{sen}\,(\mid a, b) = \cos\,(\mid a, \mid b).$

Se a e b sono due vettori, o due bivettori, si ha:

(8) $\quad \text{sen}\,(a, b) = \text{sen}\,(-a, b) = \text{sen}\,(a, -b).$

(9) $\quad \cos\,(a, b) = -\cos\,(-a, b) = -\cos\,(a, -b).$

Se invece a e b sono l'uno un vettore I e l'altro un bivettore **i**, si ha:

(10) $\quad \text{sen}\,(\text{I}, \text{i}) = -\text{sen}\,(-\text{I}, \text{i}) = -\text{sen}\,(\text{I}, -\text{i})$

(11) $\quad \cos\,(\text{I}, \text{i}) = \cos\,(-\text{I}, \text{i}) = \cos\,(\text{I}, -\text{i}).$

Si hanno ancora le formule:

(12) $\quad \text{gr}\,(\text{IJ}) = \text{gr I gr J sen}\,(\text{I}, \text{J}); \quad \text{iI} = \text{Ii} = \text{gr I gr i sen}\,(\text{I}, \text{i}),$

$$\text{gr}\,(\text{ij}) = \text{gr i gr j sen}\,(\text{i}, \text{j}).$$

(13) $\quad \text{I} \mid \text{J} = \text{gr I gr J cos}\,(\text{I}, \text{J}); \quad \text{gr}\,(\text{i} \mid \text{I}) = \text{gr i gr I cos}\,(\text{i}, \text{I}),$

$$\text{i} \mid \text{j} = \text{gr i gr j cos}\,(\text{i}, \text{j}).$$

Fra i seni e coseni degli angoli di vettori e bivettori passano relazioni che si ottengono immediatamente dalle note identità fra vettori e bivettori. Ci limiteremo alle seguenti. Si ha:

$$\text{IJ} \,.\, \text{ij} = \begin{vmatrix} \text{Ii} & \text{Ij} \\ \text{Ji} & \text{Jj} \end{vmatrix}$$

onde, in virtù della (12), dividendo per gr I gr J gr i gr j si deduce:

(14) $\quad \text{sen}\,(\text{I}, \text{J})\,\text{sen}\,(\text{i}, \text{j})\,\text{sen}\,(\text{IJ}, \text{ij}) = \text{sen}\,(\text{I}, \text{i})\,\text{sen}\,(\text{J}, \text{j}) - \text{sen}\,(\text{I}, \text{j})\,\text{sen}\,(\text{J}, \text{i}).$

Se in questa si fa $\text{i} = \mid \text{K}$, $\text{j} = \mid \text{L}$, osservando che

$$\text{ij} = (\mid \text{K})\,(\mid \text{L}) = \mid (\text{K L}),$$

si deduce:

$$(15)\qquad \begin{aligned}&\operatorname{sen}(I, J)\operatorname{sen}(K, L)\cos(IJ, KL) =\\ &\cos(I, K)\cos(J, L) - \cos(I, L)\cos(J, K).\end{aligned}$$

Supponendo in quest'ultima $L = I$, si deduce:

$$(16)\quad \cos(J, K) = \cos(I,J)\cos(I, K) + \operatorname{sen}(I, J)\operatorname{sen}(I, K)\cos(IJ, IK)$$

che è la formula fondamentale di trigonometria sferica.

55. Prendansi come vettori di riferimento nello spazio tre vettori IJK eguali in grandezza all'unità di misura, a due a due ortogonali, e il cui trivettore sia positivo. Sarà:

$$IJK = \omega = 1.$$

Pongasi

$$i = JK,\ j = KI,\ k = IJ;$$

si ricava:

$$\begin{aligned}&I = jk,\ J = ki,\ K = ij;\\ &|I = i,\ |J = j,\ |K = k;\ |i = I,\ |j = J,\ |k = K;\\ &I|I = J|J = K|K = Ii = Jj = Kk = IJK = \omega = 1;\\ &I|J = I|K = J|K = 0.\end{aligned}$$

Le formule dei N. 50 e 51 diventano in questo caso:

$$(1)\qquad (xI + yJ + zK)(x'I + y'J + z'K) = \begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ i & j & k\end{vmatrix},$$

$$(2)\qquad (xI + yI + zK)(x'i + y'j + z'k) = xx' + yy' + zz'$$

$$(3)\qquad (xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k) = \begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ I & J & K\end{vmatrix}.$$

Si ha inoltre:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&|(xI + yJ + zK) = xi + yj + zk,\\ &|(xi + yj + zk) = xI + yJ + zK.\end{aligned}$$

$$(5) \qquad (x\mathrm{I}+y\mathrm{J}+z\mathrm{K})\,|\,(x'\mathrm{I}+y'\mathrm{J}+z'\mathrm{K})=xx'+yy'+zz'$$

$$(6) \qquad (x\mathrm{I}+y\mathrm{J}+z\mathrm{K})\,|\,(x'\mathrm{i}+y'\mathrm{j}+z'\mathrm{k})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \end{vmatrix}$$

$$(7) \qquad (x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})\,|\,(x'\mathrm{I}+y'\mathrm{J}+z'\mathrm{K})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ \mathrm{I} & \mathrm{J} & \mathrm{K} \end{vmatrix},$$

$$(8) \qquad (x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})\,|\,(x'\mathrm{i}+y'\mathrm{j}+z'\mathrm{k})=xx'+yy'+zz'.$$

Se nelle (5) e (8) si fa $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, tenendo conto delle identità (7) e (7′) del N. 53, si ha:

$$(9) \qquad \mathrm{gr}\,(x\mathrm{I}+y\mathrm{J}+z\mathrm{K})=\mathrm{gr}\,(x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k})=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Infine le identità precedenti, insieme alle (12) e (13) del N. 54, permettono di ricavare il seno ed il coseno di due vettori, d'un vettore e d'un bivettore, e di due bivettori in funzione delle coordinate dei medesimi.

Intersezioni.

56. Passiamo ora a considerare le formazioni in generale nello spazio. Converremo, nelle formule che seguono, di sopprimere il volume unità Ω quando comparisce come fattore o come divisore. Quindi, essendo A una formazione qualunque di prima specie, $\mathrm{A}\omega$ rappresenta la sua massa; l'equazione $\mathrm{A}\omega=0$ dice che la formazione A è riduttibile ad un vettore; $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}\omega}$ rappresenta il punto coincidente colla formazione A.

$\mathrm{A}\omega$ rappresenta il trivettore del volume A.

TEOREMA. Fra cinque formazioni di prima specie ABCDE passa la relazione:

$$(1) \qquad \mathrm{BCDE.A}-\mathrm{ACDE.B}+\mathrm{ABDE.C}-\mathrm{ABCE.D}+\mathrm{ABCD.E}=0.$$

Infatti, se ABCDE sono punti semplici, e se ABCD non è nullo, si possono determinare i numeri x, y, z, t in guisa che risulti:

$$E = xA + yB + zC + tD.$$

Moltiplicando per BCD si ha $EBCD = xABCD$, onde $x = \frac{EBCD}{ABCD}$; e formule analoghe per y, z, t; sostituendo questi valori di x, y, z, t nell'espressione di E si ha la formula (1). Questa formula è dimostrata se ABCD non giacciono in un medesimo piano; ma siccome essa è simmetrica rispetto ai cinque punti, essa sarà dimostrata se essi non giacciono tutti in un medesimo piano. Se poi questo avvenisse, tutti i termini della (1) si annullano, ed essa è ancor vera. Quindi la formula (1) risulta dimostrata se ABCDE sono punti semplici. Si dedurrà che essa è vera anche se queste lettere rappresentano formazioni di prima specie con ragionamento analogo a quello fatto al N. 33.

Se nella (1) si suppongono ABCDE punti semplici, e la si moltiplica pel trivettore unità ω, poichè $A\omega = B\omega = \ldots = 1$, si deduce l'identità (N. 18, 4°):

$$(2) \qquad BCDE - ACDE + ABDE - ABCE + ABCD = 0.$$

57. DEF. *Alla scrittura* AB.PQR *ovvero* PQR.AB *attribuiremo il significato*:

$$(1) \qquad AB.PQR = APQR.B - BPQR.A.$$

Perciò la scrittura AB.PQR rappresenta una formazione di prima specie che giace su AB e su PQR; la diremo *intersezione* o *prodotto regressivo* dei due elementi AB e PQR. Se la AB si rappresenta con a, e la PQR con α, il loro prodotto si rappresenterà con AB.α, o a.PQR, o a.α, o aα, o αa.

Dall'identità (N. 56)

$$APQR.B - BPQR.A = ABQR.P + ABRP.Q + ABPQ.R$$

e dalla definizione (1) si ricava:

$$(2) \qquad AB.PQR = ABQR.P + ABRP.Q + ABPQ.R.$$

Si deduce dalla (1) che $AB.PQR$ è funzione di PQR, ossia se $PQR = P'Q'R'$, sarà $AB.PQR = AB.P'Q'R'$.

Dalla (2) si deduce che la stessa intersezione è funzione di AB, ossia se $AB = A'B'$, sarà $AB.PQR = A'B'.PQR$.

Quindi si deduce che:

$$(3) \qquad (a = a') \cap (\alpha = \alpha') < (a\alpha = a'\alpha').$$

Se al posto di AB e PQR si legge a e α, le formule (1) e (2) si possono pure scrivere:

$$(1') \qquad AB.\alpha = A\alpha.B - B\alpha.A$$

$$(2') \qquad a.PQR = aQR.P + aRP.Q + aPQ.R.$$

Si ha ancora, in virtù della (1):

$$PQ.aR = PaR.Q - QaR.P = -aQR.P - aRP.Q.$$

Sommando questa identità colla precedente, e al posto di PQ leggendo b si deduce:

$$(4) \qquad a.bR + b.aR = ab.R.$$

Risulta immediatamente dalle (1') e (2') che:

$$(5) \qquad a(\alpha + \alpha') = a\alpha + a\alpha', \ (a + a')\alpha = a\alpha + a'\alpha$$

$$(6) \qquad (ka)\alpha = a(k\alpha) = k(a\alpha).$$

Si ha come caso particolare della (1), o della (2):

$$(7) \qquad AB.ACD = ABCD.A.$$

Dalla definizione risulta pure:

$$(8) \qquad a\alpha = \alpha a.$$

Esamineremo il significato del prodotto regressivo $a\alpha$ in alcuni casi particolari. Se a è una linea, α una superficie, e queste hanno un punto comune O, si determinino il punto P e la linea p in guisa che $OP = a$, $Op = \alpha$; sarà $a\alpha = OP \,.\, Op = OPp \,.\, O$, ossia $a \,.\, \alpha$ rappresenta il punto d'intersezione di a e di α, cui sia affisso il numero che misura il volume OPp. Questo numero è anche il numero che misura il trivettore di questo volume, cioè vale gr a . gr α . sen (a, α).

Se a e α sono eguali in grandezza all'unità di misura, e ortogonali fra loro, $a\alpha$ rappresenterà il loro punto d'incontro col coefficiente ± 1.

La scrittura $a\alpha$ rappresenta un vettore se a e α sono una linea ed una superficie paralleli, o se a è un bivettore e α una superficie non contenente il bivettore, o se a è una linea ed α un trivettore.

Merita menzione speciale il caso in cui α è il trivettore unità ω. Fatto $a = AB$, ove A e B siano punti, si avrà $a\omega = AB \,.\, \omega = A\omega \,.\, B - B\omega \,.\, A = B - A$, vale a dire la scrittura $a\omega = \omega a$ rappresenta il vettore della linea a.

La formazione $a\alpha$ è nulla, se la retta a è contenuta nel piano α, ovvero se il bivettore a è contenuto nel piano α, ovvero se a è un bivettore, ed α un trivettore.

La definizione del prodotto $a\alpha$ data dalla formola (1), o (1′), è applicabile solo quando la formazione di seconda specie a si può eguagliare al prodotto AB di due formazioni di prima specie, ossia quando a è riduttibile ad una linea o ad un bivettore. Se invece aa non è nullo, si può assumere per definizione del prodotto $a\alpha$ la formula (2′).

58. DEF. *Alla scrittura* ABC . PQR *attribuiremo il significato:*

$$(1) \qquad ABC \,.\, PQR = APQR \,.\, BC + BPQR \,.\, CA + CPQR \,.\, AB.$$

Quindi ABC . PQR rappresenta una formazione di seconda specie, che giace su ABC, e su PQR, come si scorge moltiplicandola per

ABC e PQR. La diremo *intersezione* o *prodotto regressivo* delle due formazioni di terza specie ABC e PQR. Se queste formazioni si rappresentano colle lettere α e β, il loro prodotto regressivo si potrà rappresentare con $\alpha\beta$.

Sostituendo nella (1) al posto di PQR la lettera π si ha:

$$(1') \qquad ABC \,.\, \pi = A\pi \,.\, BC + B\pi \,.\, CA + C\pi \,.\, AB.$$

Si ha come caso particolare:

$$(2) \qquad ABC \,.\, ABD = ABCD \,.\, AB.$$

Si hanno inoltre le seguenti identità, che il lettore potrà facilmente dimostrare:

$$(3) \qquad \alpha\beta = -\beta\alpha.$$

$$(4) \qquad (\alpha = \alpha') \frown (\beta = \beta') < (\alpha\beta = \alpha'\beta').$$

$$(5) \qquad \alpha(\beta + \beta') = \alpha\beta + \alpha\beta', \quad (\alpha + \alpha')\beta = \alpha\beta + \alpha'\beta.$$

$$(6) \qquad (k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k\alpha\beta.$$

Se α e β sono due superficie che si incontrino, $\alpha\beta$ rappresenta una linea giacente sulla retta intersezione dei piani α e β, e la cui grandezza vale gr α . gr β . sen (α, β). Se le due superficie α e β sono parallele, $\alpha\beta$ rappresenta un bivettore parallelo ad amendue. Essendo ω il trivettore unità, sarà $\alpha\omega$ il bivettore della superficie α. L'equazione $\alpha\beta = 0$ è soddisfatta quando α e β sono superficie i cui piani coincidono, ovvero sono due trivettori (giacenti nel piano all'infinito).

59. Dalle definizioni date dei prodotti regressivi nello spazio, risulta che essendo A e B due formazioni dello spazio, di specie s e s', se $s + s' \leqq 4$, la scrittura AB rappresenta un prodotto progressivo, o proiezione, ed è una formazione di specie $s + s'$. Se invece $s + s' > 4$, la scrittura AB rappresenta un prodotto regressivo, o intersezione, di specie $s + s' - 4$. Sia nei prodotti progressivi

che nei regressivi sono soddisfatte le proprietà:

$$(A = A') \cap (B = B') < (AB = A'B')$$
$$A(B + B') = AB + AB', \ (A + A')B = AB + A'B$$
$$(kA)B = A(kB) = k(AB).$$

Nei prodotti progressivi si ha:

$$AB = (-1)^{ss'} BA$$

e nei regressivi:

$$AB = (-1)^{(4-s)(4-s')} BA,$$

che si può anche scrivere:

$$AB = (-1)^{ss'} BA.$$

Nel prodotto regressivo AB, detto X un elemento di specie $s + s' - 4$ comune ad A e B, e determinati gli elementi P e Q, di specie $4 - s'$ e $4 - s$ in modo che $XP = A$, $XQ = B$, sarà $AB = XPQ \,.\, X$.

Siano ABC tre formazioni di specie s, s', s''. Con esse si possono fare i 12 prodotti:

$$AB.C, \ BA.C, \ C.AB, \ C.BA; \ AC.B, \ CA.B, \ B.AC, \ B.CA;$$
$$BC.A, \ CB.A, \ A.BC, \ A.CB,$$

ciascuno dei quali si ottiene eseguendo due moltiplicazioni, che possono essere tutte e due progressive, o una progressiva ed una regressiva, o tutte e due regressive. Nel primo caso ciascheduno di quei prodotti rappresenta una formazione di specie $s + s' + s''$; nel secondo caso di specie $s + s' + s'' - 4$, nel terzo di specie $s + s' + s'' - 8$. Fra i primi quattro prodotti passano le relazioni $AB.C = (-1)^{ss'} BA.C = (-1)^{(s+s')s''} C.AB = (-1)^{ss' + ss'' + s's''} C.BA$, e relazioni analoghe fra i prodotti della seconda e della terza quaterna. Noi ci proponiamo di scrivere le relazioni, ove esistano, fra tre prodotti delle tre quaterne, p. e.: fra $AB.C$, $AC.B$ e $BC.A$.

Si ha:

(1) $AB \,.\, C = A \,.\, BC = ABC$

(2) $AB \,.\, a = A \,.\, Ba = ABa.$

In queste i prodotti sono progressivi.

(3) $AB \,.\, \alpha = A\alpha \,.\, B - B\alpha \,.\, A$

(4) $ab \,.\, A = a \,.\, bA + b \,.\, aA$

(5) $a \,.\, A\alpha = aA \,.\, \alpha - a\alpha \,.\, A$

(6) $ab \,.\, \alpha = a \,.\, b\alpha + b \,.\, a\alpha$

(7) $\alpha\beta \,.\, A = \alpha A \,.\, \beta - \beta A \,.\, \alpha.$

In queste i prodotti sono l'uno progressivo e l'altro regressivo.

(8) $\alpha\beta \,.\, a = \alpha \,.\, \beta a$, e il loro valore comune si indicherà con $\alpha\beta a$.

(9) $\alpha\beta \,.\, \gamma = \alpha \,.\, \beta\gamma$, e il loro valore comune si indicherà con $\alpha\beta\gamma$.

Nelle 9 formule così ottenute quelle equidistanti dagli estremi si trasformano l'una nell'altra scambiando gli elementi di prima specie con quelli di terza, e viceversa.

Fra i prodotti di quattro o più fattori, oltre alle relazioni già trovate, meritano ancora menzione le seguenti:

$$AB \,.\, \alpha\beta = \begin{vmatrix} A\alpha & A\beta \\ B\alpha & B\beta \end{vmatrix},$$

$$ABC \,.\, \alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} A\alpha & A\beta & A\gamma \\ B\alpha & B\beta & B\gamma \\ C\alpha & C\beta & C\gamma \end{vmatrix},$$

$$ABCD \,.\, \alpha\beta\gamma\delta = \begin{vmatrix} A\alpha & A\beta & A\gamma & A\delta \\ B\alpha & B\beta & B\gamma & B\delta \\ C\alpha & C\beta & C\gamma & C\delta \\ D\alpha & D\beta & D\gamma & D\delta \end{vmatrix}.$$

$\alpha \,.\, \beta\gamma\delta = \alpha\beta \,.\, \gamma\delta = \alpha\beta\gamma \,.\, \delta$, e il loro valore comune si potrà indicare con $\alpha\beta\gamma\delta$.

Coordinate.

60. Siano $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ quattro formazioni di prima specie il cui prodotto $A_1A_2A_3A_4$ non sia nullo. Pongasi

$$\alpha_1 = A_2A_3A_4,\ \alpha_2 = -A_1A_3A_4,\ \alpha_3 = A_1A_2A_4,\ \alpha_4 = -A_1A_2A_3.$$

Allora si ha il seguente:

TEOREMA. *Essendo* A *una formazione di prima specie,* a *una di seconda,* α *una di terza, si possono sempre determinare, ed in modo unico, i* 4 *numeri* $x_1 \dots x_4$, *i* 6 *numeri* $p_{12} \dots p_{34}$, *i* 4 *numeri* $u_1 \dots u_4$, *in modo che si abbia:*

$$(1) \qquad A = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4,$$

$$(2) \qquad a = p_{12}A_1A_2 + p_{13}A_1A_3 + p_{14}A_1A_4 + p_{23}A_2A_3 + p_{24}A_2A_4 + p_{34}A_3A_4.$$

$$(3) \qquad \alpha = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 + u_4\alpha_4.$$

DEF. *I numeri* $x_1 \dots x_4$ *diconsi le* coordinate di A; *i numeri* $p_{12} \dots p_{34}$ *le* coordinate di a; *i numeri* $u_1 \dots u_4$ *le* coordinate di α. *Le quattro formazioni* $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ *diconsi le* formazioni di riferimento *di prima specie; i loro prodotti le formazioni di riferimento di* 2ª, 3ª e 4ª *specie.*

61. In questo numero, oltre a dimostrare il teorema precedente, troveremo alcune formule utili pel calcolo colle coordinate.

L'identità (N. 56)

$$A_1A_2A_3A_4 \,.\, A - A\,A_2A_3A_4 \,.\, A_1 + A\,A_1A_3A_4 \,.\, A_2 - A\,A_1A_2A_4 \,.\, A_3 + A\,A_1A_2A_3 \,.\, A_4 = 0,$$

risolta rispetto ad A, cosa possibile, perchè il suo coefficiente non è nullo, dà appunto la formola (1), ove si faccia:

$$x_1 = \frac{A\,A_2A_3A_4}{A_1A_2A_3A_4}, \quad x_2 = \frac{A_1\,A\,A_3A_4}{A_1A_2A_3A_4}, \dots$$

Se $A = x_1 A_1 + ...$, si ricava, k essendo un numero,

$$kA = kx_1 A_1 + ..., \tag{4}$$

la quale formula dà le coordinate di kA in funzione di quelle di A.
Se $A = x_1 A_1 + ...$, e $B = y_1 A_1 + ...$, si ricava:

$$A + B = (x_1 + y_1) A_1 + ..., \tag{5}$$

la quale formula dà le coordinate della somma $A + B$ in funzione delle coordinate di A e di B.

Se $A = x_1 A_1 + ...$, e $B = y_1 A_1 + ...$, si ricava, sviluppando il prodotto AB e ordinando:

$$AB = (x_1 y_2 - x_2 y_1) A_1 A_2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) A_1 A_3 + ..., \tag{6}$$

e così resta messo sotto la forma (2) il prodotto di due formazioni di prima specie; come caso particolare resta messa sotto la forma (2) una linea qualunque.

Se $a = p_{12} A_1 A_2 + ...$ e $b = q_{12} A_1 A_2 + ...$ si ricava:

$$ka = kp_{12} A_1 A_2 + ... \tag{7}$$

$$a + b = (p_{12} + q_{12}) A_1 A_2 + ... \tag{8}$$

Siccome ogni formazione di seconda specie è della forma $m_1 a_1 + m_2 a_2 + ...$, in cui m_1 ... sono numeri, $a_1 a_2$ ... linee, e perchè le linee si possono mettere sotto la forma (2), come pure il prodotto di linee per coefficienti, e le somme di più linee, si conchiude che ogni formazione di seconda specie si può mettere sotto la forma (2).

La formula (6) dà le coordinate del prodotto AB in funzione delle coordinate di A e di B; la (7) dà le coordinate di ka in funzione delle coordinate di a; la (8) esprime le coordinate di $a + b$ mediante quelle di a e di b.

Se $A = x_1 A_1 + ...$, $B = y_1 A_1 + ...$, $C = z_1 A_1 + ...$, si ricava, sviluppando il prodotto ABC,

$$ABC = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \alpha_1 + ... \tag{9}$$

Se $A = x_1 A_1 + \ldots$, $a = p_{12} A_1 A_2 + \ldots$, si ricava:

$$(10) \qquad Aa = aA = (x_2 p_{34} - x_3 p_{24} + x_4 p_{23})\,\alpha_1 + \ldots$$

Se $\alpha = u_1 \alpha_1 + \ldots$, $\beta = v_1 \alpha_1 + \ldots$, si ricava

$$(11) \qquad k\alpha = k u_1 \alpha_1 + \ldots$$

$$(12) \qquad \alpha + \beta = (u_1 + v_1)\,\alpha_1 + \ldots$$

Le formule (10), (11) e (12) dicono che si possono mettere sotto la forma (3) le superficie triangolari, come pure i prodotti di queste superficie per numeri, e le somme di tali prodotti; ossia ogni formazione di terza specie è riduttibile alla forma (3).

Le formule (9) ... (12) dànno le coordinate di ABC, Aa, $k\alpha$, $\alpha + \beta$ in funzione delle coordinate di A, B, C, di A e a, di α, di α e β.

Così resta dimostrata l'esistenza dei numeri x, p, u che soddisfano alle condizioni (1), (2), (3). Rimane a dimostrare che questi numeri sono completamente determinati. Perciò si moltiplichi la (1) per $A_2 A_3 A_4, \ldots$; la (2) per $A_3 A_4, \ldots$; la (3) per $A_1, \ldots$; dividendo per $A_1 A_2 A_3 A_4$ si ricava:

$$(13) \quad x_1 = \frac{A\,A_2 A_3 A_4}{A_1 A_2 A_3 A_4}, \ldots; \; p_{12} = \frac{a\,A_3 A_4}{A_1 A_2 A_3 A_4}, \ldots; \; u_1 = \frac{A_1 \alpha}{A_1 A_2 A_3 A_4}, \ldots$$

le quali formule esprimono in modo unico le coordinate di A, a, α.

62. Sono ancora a notarsi le formule seguenti:

Se $A = x_1 A_1 + \ldots$, $B = y_1 A_1 + \ldots$, $C = z_1 A_1 + \ldots$, $D = t_1 A_1 + \ldots$ si ricava

$$(14) \qquad ABCD = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Se $a = p_{12} A_1 A_2 + \ldots$, $b = q_{12} A_1 A_2 + \ldots$, si ricava:

$$(15) \qquad ab = (p_{12} q_{34} - p_{13} q_{24} + p_{14} q_{23} + p_{23} q_{14} - p_{24} q_{13} + p_{34} q_{12})\,A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Come caso particolare

$$(16) \qquad a\,a = 2\,(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})\,A_1A_2A_3A_4.$$

Se $A = x_1A_1 + .,.,\ \alpha = u_1\alpha_1 + ...$, si ha:

$$(17) \qquad A\alpha = (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)\,A_1A_2A_3A_4.$$

Fatto, per semplicità di scrittura, $A_1A_2A_3A_4 = \Delta$, si avranno i seguenti prodotti regressivi:

$$A_1A_2\,.\,\alpha_1 = \Delta A_2,\ A_1A_2\,.\alpha_2 = \Delta A_1,\ A_1A_2\,.\alpha_3 = 0,\ A_1A_2\,.\alpha_4 = 0,\ \text{ecc.}$$

Quindi, sviluppando il prodotto regressivo di sinistra:

$$(18)\ (p_{12}A_1A_2 + ...)\,(u_1\alpha_1 + ...) = (p_{12}u_2 - p_{13}u_3 + p_{14}u_4)\,\Delta A_1 + ...$$

Si ha pure $\alpha_1\alpha_2 = \Delta A_3A_4$, ecc. Quindi sviluppando il prodotto regressivo di sinistra si ha:

$$(19) \qquad (u_1\alpha_1 + ...)\,(v_1\alpha_1 + ...) = (u_1v_2 - u_2v_1)\,\Delta A_3A_4 + ...$$

Dalle formule $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \Delta^2 A_1$ e analoghe, e dalla $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \Delta^3$ si ricava:

$$(20) \qquad (u_1\alpha_1 + ...)\,(v_1\alpha_1 + ...)\,(w_1\alpha_1 + ...) = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} \Delta^2 A_1 + ...$$

$$(21) \qquad (u_1\alpha_1 + ...)\,(v_1\alpha_1 + ...)\,(w_1\alpha_1 + ...)\,(t_1\alpha_1 + ...) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} \Delta^3.$$

Essendo ω il trivettore unità, si avrà:

$$(x_1A_1 + ...)\,\omega = x_1A_1\omega + ...$$
$$(p_{12}A_1A_2 + ...)\,\omega = p_{12}A_1A_2\omega + ..$$
$$(u_1\alpha_1 + ...)\,\omega = u_1\alpha_1\omega + ...$$

le quali formule esprimono la massa d'una formazione di prima specie il vettore d'una di seconda, il bivettore d'una di terza in funzione delle coordinate della formazione, e delle masse, o vettori e bivettori delle formazioni di riferimento.

Applicando ai vettori e bivettori l'operazione |, si deduce che ogni funzione di più formazioni ottenuta eseguendo su queste le operazioni: somma, moltiplicazione per numeri, moltiplicazioni progressive e regressive e l'operazione |, si può esprimere mediante le coordinate delle formazioni date, e elementi che dipendono puramente dagli elementi di riferimento. Quindi si possono calcolare la grandezza d'una linea o superficie, le funzioni trigonometriche dell'angolo di due linee, o d'una linea e d'una superficie, o di due superficie mediante le coordinate di questi elementi e numeri che dipendono dal sistema di coordinate.

63. Svilupperemo le formule precedenti nel caso speciale in cui si prendano come elementi di riferimento un punto O e tre vettori IJK, eguali in grandezza all'unità di misura, ortogonali a due a due, e il cui trivettore sia positivo. Allora il trivettore IJK sarà il trivettore unità: $IJK = \omega$, e il volume $OIJK = O\omega$ sarà il volume unità Ω.

Ogni formazione di prima specie sarà riduttibile alla forma:

$$A = mO + xI + yJ + zK; \tag{1}$$

moltiplicandola per ω si deduce $A\omega = m$, ossia m è la massa del sistema. Se $m = 1$, A è un punto semplice, quindi ogni punto semplice può ridursi alla forma:

$$O + xI + yJ + zK; \tag{2}$$

i numeri x, y, z diconsi le *coordinate cartesiane* ortogonali del punto. Se $m = 0$, la formazione rappresenta un vettore, il quale ha la forma (N. 50)

$$xI + yJ + zK. \tag{3}$$

L'identità

$$(4) \qquad (O + xI + yJ + zK) - (O + x'I + y'J + z'K) = (x - x')I + (y - y')J + (z - z')K$$

dà le coordinate d'un vettore in funzione delle coordinate dei suoi estremi. Quindi, dalla formula (9) del N. 55 si ricava la distanza di due punti in funzione delle loro coordinate.

Ponendo, come al N. 55,

$$i = JK,\ j = KI,\ k = IJ,$$

ogni formazione di seconda specie a è riduttibile alla forma:

$$(5) \qquad a = pOI + qOJ + rOK + p'i + q'j + r'k.$$

Moltiplicandola per ω si deduce:

$$(6) \qquad a\omega = pI + qJ + rK$$

la quale formula dà le coordinate del vettore di a in funzione delle coordinate di a.

Si ha pure:

$$(7) \qquad aa = 2(pp' + qq' + rr')$$

e l'annullarsi di aa è la condizione affinchè a sia riduttibile ad una linea o ad un bivettore.

Ogni funzione di terza specie è riduttibile alla forma:

$$(8) \qquad \alpha = sOi + tOj + uOk + v\omega.$$

Moltiplicandola per ω si deduce:

$$(9) \qquad \alpha\omega = si + tj + uk$$

la quale formula dà le coordinate del bivettore di α in funzione delle coordinate di α.

Ora, poichè la grandezza d'una linea o d'una superficie, e l'angolo di due linee, o di una linea e d'una superficie, o di due superficie

sono eguali alla grandezza del vettore della linea, o del bivettore della superficie, e agli angoli dei vettori o bivettori delle linee o superficie, le formule del N. 55 permettono di esprimere immediatamente quelle grandezze, e i seni e coseni di questi angoli in funzione delle coordinate degli elementi dati.

Applicazioni.

64. 1. Se I, J, K sono tre vettori eguali all'unità di misura, si ponga per definizione del primo membro:

$$\text{(1)} \qquad \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}) = \mathrm{IJK}.$$

Se I, J, K sono tre vettori qualunque, pongasi per definizione:

$$\text{(2)} \qquad \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}) = \text{sen}\left(\frac{\mathrm{I}}{gr\,\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{J}}{gr\,\mathrm{J}}, \frac{\mathrm{K}}{gr\,\mathrm{K}}\right).$$

Se a, b, c sono tre rette di senso determinato passanti per uno stesso punto, le quali formano un *trispigolo*, si definisca per *seno del trispigolo* il seno di tre vettori paralleli e dello stesso senso delle tre rette date.

Si ricava dalla (2):

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{IJK} = gr\,\mathrm{I}\,.\,gr\,\mathrm{J}\,.\,gr\,\mathrm{K}\ \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}).$$

Supposto I, J, K eguali in grandezza all'unità di misura, le identità:

$$\mathrm{IJK} = \mathrm{I}\,.\,\mathrm{JK} = \mathrm{J}\,.\,\mathrm{KI} = \mathrm{K}\,.\,\mathrm{IJ}$$

si possono pure scrivere:

$$\text{(4)} \quad \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}) = \text{sen}\,(\mathrm{J}, \mathrm{K})\ \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{JK}) = \text{sen}\,(\mathrm{K}, \mathrm{I})\ \text{sen}\,(\mathrm{J}, \mathrm{KI}) = \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J})\ \text{sen}\,(\mathrm{K}, \mathrm{IJ})$$

ossia il seno d'un trispigolo è eguale al prodotto del seno d'una faccia pel seno dell'angolo di questa faccia collo spigolo opposto.

La formula $\mathrm{IJ}\,.\,\mathrm{IK} = \mathrm{IJK}\,.\,\mathrm{I}$, prendendo i valori assoluti d'ambo i membri, diventa:

$$\text{(5)} \qquad \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{J})\ \text{sen}\,(\mathrm{I}, \mathrm{K})\ \text{sen}\,(\mathrm{IJ}, \mathrm{IK}) = gr\,\mathrm{IJK}$$

ossia il seno d'un trispigolo, in valor assoluto, è eguale al prodotto dei seni di due faccie pel seno dell'angolo che esse fanno. Si ricava dalla stessa formula:

$$(6)\quad \frac{\operatorname{sen}(IJ, IK)}{\operatorname{sen}(J, K)} = \frac{\operatorname{sen}(JK, JI)}{\operatorname{sen}(K, I)} = \frac{\operatorname{sen}(KI, KJ)}{\operatorname{sen}(I, J)} = \frac{gr\, IJK}{\operatorname{sen}(J, K)\operatorname{sen}(K, I)\operatorname{sen}(I, J)},$$

la quale esprime la proporzionalità fra i seni dei diedri e i seni delle faccie opposte.

2. Siano i, j, k tre bivettori eguali in grandezza all'unità di misura. Porremo per definizione:

$$(1)\qquad \operatorname{sen}(i, j, k) = ijk.$$

Se i, j, k sono tre bivettori qualunque, porremo:

$$(2)\qquad \operatorname{sen}(i, j, k) = \operatorname{sen}\left(\frac{i}{gr\, i}, \frac{j}{gr\, j}, \frac{k}{gr\, k}\right).$$

Si deduce da quest'ultima:

$$(3)\qquad ijk = gr\, i\, gr\, j\, gr\, k \operatorname{sen}(i, j, k).$$

Se tre piani, di giacitura determinata in senso, passano per uno stesso punto, e formano un *triedro*, si definisca per seno di questo triedro il seno di tre bivettori aventi la stessa giacitura e senso dei piani dati. Si dimostra, in modo analogo al precedente, che il seno d'un triedro è eguale al prodotto del seno d'un diedro pel seno dell'angolo che questo spigolo fa colla faccia opposta, e che, in valor assoluto, vale il prodotto dei seni di due diedri pel seno della faccia compresa.

La formula $IJ \,.\, IK \,.\, JK = (IJK)^2$ si può leggere:

$$(4)\qquad \operatorname{sen}(I, J)\operatorname{sen}(I, K)\operatorname{sen}(J, K)\operatorname{sen}(IJ, IK, JK) = \operatorname{sen}^2(I, J, K).$$

Si ha pure:

$$(5)\qquad \operatorname{sen}(i, j, k) = \operatorname{sen}(\lfloor i, \lfloor j, \lfloor k),$$

e dalle formule (4) e (5) si possono dedurre due altre formule scambiando i vettori coi bivettori.

3. Siano IJK tre vettori, in grandezza eguali all'unità di misura. Siano i, j, k tre bivettori aventi le giaciture e sensi di JK, KI, IJ, ed eguali in grandezza all'unità di misura. Fra essi passano le relazioni:

$$JK = i \operatorname{sen}(J, K),\quad KI = j \operatorname{sen}(K, I),\quad IJ = k \operatorname{sen}(I, J).$$
$$jk = I \operatorname{sen}(j, k),\quad ki = J \operatorname{sen}(k, i),\quad ij = K \operatorname{sen}(i, j).$$

Sia O un punto fissato ad arbitrio; essendo I un vettore qualunque, colla espressione 'retta I' intenderemo la retta passante per O e parallela ad I, cioè la retta OI; ed essendo i un bivettore qualunque, colla espressione 'piano i' intenderemo il piano passante per O e parallelo ad i, cioè il piano Oi. Allora le rette I, J, K sono gli spigoli d'un *trispigolo* o *triedro*, le cui faccie sono i piani i, j, k.

Le rette $I \pm J$, $I \pm K$, $J \pm K$ sono le sei bissettrici delle faccie del triedro. Esse giacciono a tre a tre nei quattro piani $JK \pm KI \pm IJ = i \operatorname{sen}(J, K) \pm j \operatorname{sen}(K, I) \pm k \operatorname{sen}(I, J)$. Questi piani fanno angoli eguali coi tre spigoli del triedro.

I piani $IJ \pm IK$, ... sono i sei piani passanti per uno spigolo del triedro, e per una bissettrice della faccia opposta. Essi passano a tre a tre per le quattro rette $I \pm J \pm K$.

I piani bissettori dei diedri del triedro sono $i \pm j$, $i \pm k$, $j \pm k$. Essi passano a tre a tre per le quattro rette $I \operatorname{sen}(j, k) \pm J \operatorname{sen}(k, i) \pm K \operatorname{sen}(i, j)$; queste rette fanno angoli eguali colle faccie del triedro. Il piano bissettore $i - j$ incontra la faccia opposta k secondo la retta $k(i - j) = ki - kj = J \operatorname{sen}(k, i) + I \operatorname{sen}(k, j)$; queste rette giacciono a tre a tre nei quattro piani $i \pm j \pm k$.

I piani $I \mid i$, $J \mid j$, $K \mid k$ sono i piani passanti per uno spigolo e perpendicolari alla faccia opposta; essi si incontrano secondo la retta:

$$I \operatorname{tang}(j, k) + J \operatorname{tang}(k, i) + K \operatorname{tang}(i, j).$$

Le rette $i \mid I$, $j \mid J$, $k \mid K$ sono le rette contenute in una faccia del triedro e perpendicolari allo spigolo opposto. Esse giacciono in un medesimo piano:

$$i \operatorname{tang}(J, K) + j \operatorname{tang}(K, I) + k \operatorname{tang}(I, J).$$

Questo piano è perpendicolare alla retta ultimamente considerata.

4. Siano A, a, α, A ... formazioni di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie. Raccogliendo i risultati precedentemente ottenuti si ha:

(1) $A\omega =$ massa della formazione A.

(2) $\dfrac{A}{A\omega} =$ punto semplice coincidente con A.

(3) $(A\omega = 0) =$ la formazione A è riduttibile ad un vettore (punto all'infinito).

(4) $(aa = 0) \cap - (a\omega = 0) =$ la formazione a è riduttibile ad una linea.

(5) $(a\omega = 0) =$ la formazione a è riduttibile ad un bivettore (retta all'infinito).

(6) $a\omega =$ vettore della formazione a.

(7) $\alpha\omega$ = bivettore della superficie α.

(8) $(\alpha\omega = 0)$ = la formazione α è riduttibile ad un trivettore (piano all'infinito).

(9) $A\omega$ = trivettore del volume A.

5. Siano A, B, ... punti semplici, a, b, ... linee, α, β, ... superficie. Si avrà:

(1) Retta AB = retta che unisce i punti A e B.

(2) $(AB = 0)$ = i punti A e B coincidono.

(3) Piano $(A + B) \mid (A - B)$ = luogo dei punti equidistanti da A e da B.

(4) Piano Aa = piano passante per A e a.

(5) $(Aa = 0)$ = il punto A sta sulla retta a.

(6) $\frac{gr\ Aa}{gr\ a}$ = distanza del punto A dalla retta a.

(7) Retta $A\ .\ a\omega$ = retta passante per A e parallela ad a.

(8) Piano $A \mid (a\omega)$ = piano passante per A e normale ad a.

(9) Retta $Aa\ .\ A \mid (a\omega)$ = perpendicolare abbassata da A su a.

(10) $A \mid (a\omega)\ .\ a$ = piede della perpendicolare abbassata da A su a colla massa $gr^2\,a$.

(11) $(A\alpha = 0)$ = il punto A giace nel piano α.

(12) $\frac{A\alpha}{gr\ \alpha}$ = distanza dal punto A al piano α, presa col segno del volume $A\alpha$.

(13) Piano $A\ .\ \alpha\omega$ = piano passante per A e parallelo ad α.

(14) Retta $A \mid (\alpha\omega)$ = perpendicolare abbassata da A su α.

(15) $A \mid (\alpha\omega)\ .\ \alpha$ = piede della perpendicolare precedente colla massa $gr^2\,\alpha$.

(16) $(ab = 0)$ = le rette a e b giacciono in uno stesso piano.

(17) $(a\omega\ .\ b\omega = 0)$ = le rette a e b sono parallele.

(18) $(a\omega\ .\mid b\omega = 0)$ = le rette a e b sono perpendicolari.

(19) $gr\ (a\omega\ .\ b\omega) = gr\ a\ .\ gr\ b\ sen\ (a, b)$.

(20) $(a\omega) \mid (b\omega) = gr\ a\ .\ gr\ b\ cos\ (a, b)$.

(21) Piano $a\ .\ b\omega$ = piano passante per a e parallelo a b.

(22) Retta $[a \mid (a\omega\ .\ b\omega)]\ [b \mid (a\omega\ .\ b\omega)]$ = perpendicolare comune alle due rette a e b.

(23) $a\,[b \mid (a\omega\ .\ b\omega)]$ = punto d'incontro della retta precedente colla retta a, colla massa $gr^2\ (a\omega\ .\ b\omega)$.

(24) $\frac{ab}{gr\ (a\omega\ .\ b\omega)}$ = minima distanza delle due rette, presa col segno del volume ab.

(25) $\frac{ab}{gr\,a\ gr\,b}$ = (secondo Staudt) momento delle due rette a e b.

(26) $a\alpha$ = punto d'incontro della retta a col piano α, colla massa $a\alpha\omega = gr\ a\ gr\ \alpha\ .\ sen\ (a, \alpha)$.

(27) $(a\alpha\omega = 0)$ = la retta a è parallela al piano α.

(28) $(a\,\alpha = 0) =$ la retta a giace nel piano α.

(29) Piano $a \mid (\alpha\omega) =$ piano passante per a e perpendicolare ad α.

(30) $(a \mid (\alpha\omega) = 0) =$ la retta a è perpendicolare al piano α.

(31) Retta $[a \mid (\alpha\omega)]\,\alpha =$ proiezione ortogonale della retta a sul piano α.

(32) $sen\,(a, \alpha) = \dfrac{a\,\alpha\,\omega}{gr\,a\;gr\,\alpha}$, $cos\,(a, \alpha) = \dfrac{gr\,(a \mid \alpha\omega)}{gr\,a\;gr\,\alpha}$.

(33) Retta $\alpha\beta =$ intersezione dei piani α e β.

(34) $(\alpha\beta = 0) =$ i piani α e β coincidono.

(35) $(\alpha\beta\omega = 0) =$ i piani α e β sono paralleli.

(36) $[(\omega\alpha) \mid (\omega\beta) = 0] =$ i piani α e β sono perpendicolari.

(37) $sen\,(\alpha, \beta) = \dfrac{gr\,(\alpha\beta\omega)}{gr\,\alpha\;gr\,\beta}$, $cos\,(\alpha, \beta) = \dfrac{(\omega\alpha) \mid (\omega\beta)}{gr\,\alpha\;gr\,\beta}$.

(38) Piano $\dfrac{\alpha}{gr\,\alpha} \pm \dfrac{\beta}{gr\,\beta} =$ piano bissettore dei piani α e β.

(39) $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma\omega} =$ punto d'incontro dei tre piani α, β, γ.

(40) $(\alpha\beta\gamma = 0) =$ i piani α, β, γ passano per una stessa retta, o sono paralleli fra loro.

(41) $(\alpha\beta\gamma\omega = 0) =$ i piani α, β, γ sono paralleli ad una stessa retta.

(42) $(\alpha\beta\gamma\delta = 0) =$ i piani $\alpha\beta\gamma\delta$ passano per uno stesso punto, o sono paralleli ad una stessa retta.

(43) $\dfrac{(\alpha\beta\gamma\delta)^3}{\alpha\beta\gamma\omega \,.\, \alpha\beta\delta\omega \,.\, \alpha\gamma\delta\omega \,.\, \beta\gamma\delta\omega} =$ volume del tetraedro limitato dai quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

6. Siano ABCD i vertici d'un tetraedro. Le identità:

$$ABCD = A \,.\, BCD = AB \,.\, CD = A\,(B - A)\,(C - A)\,(D - A)$$

dicono che il volume d'un tetraedro è eguale al prodotto d'una base per l'altezza corrispondente, ovvero al prodotto delle grandezze di due spigoli opposti pel loro momento, ovvero al prodotto delle grandezze di tre spigoli concorrenti in un vertice pel seno del trispigolo corrispondente.

L'identità $ABC \,.\, ABD = AB \,.\, ABCD$, ove si prendano i valori assoluti d'ambi i membri, diventa:

$$gr\,ABC \,.\, gr\,ABD \,.\, sen\,(ABC, ABD) = gr\,AB \,.\, gr\,ABCD,$$

la quale dice che un tetraedro, in valor assoluto, è eguale al prodotto di due faccie pel seno dell'angolo compreso, diviso per lo spigolo corrispondente.

L'identità $ABC \,.\, ABD \,.\, ACD = A \,.\, ABCD^2$, ove si prendano le masse d'ambo i membri, dice che il quadrato del volume d'un tetraedro è eguale al prodotto di tre faccie pel seno del triedro che esse formano.

Il piano $\frac{ABC}{gr\,ABC} + \frac{ABD}{gr\,ABD}$ è il piano bissettore del diedro AB. Esso incontra lo spigolo opposto CD nel punto

$$\left(\frac{ABC}{gr\,ABC} + \frac{ABD}{gr\,ABD}\right)CD = ABCD\left(\frac{C}{gr\,ABC} + \frac{D}{gr\,ABD}\right);$$

di qui si ricava immediatamente che esso divide lo spigolo CD in parti direttamente proporzionali alle faccie che vi terminano.

I 12 piani bissettori dei diedri del triedro passano pegli 8 punti.

$$A\,gr\,BCD \pm B\,gr\,ACD \pm C\,gr\,ABD \pm D\,gr\,ABC,$$

i quali sono i centri delle sfere tangenti alle faccie del tetraedro.

La retta $\frac{AB}{gr\,AB} + \frac{AC}{gr\,AC} + \frac{AD}{gr\,AD}$ è la retta per cui passano i piani che uniscono gli spigoli del triedro in A colle bissettrici interne delle faccie opposte. Affinchè essa incontri la corrispondente nel triedro in B, deve essere nullo il loro prodotto progressivo. Sviluppando i calcoli si ha come condizione:

$$gr\,AC \,.\, gr\,BD = gr\,AD \,.\, gr\,BC.$$

La formazione:

0	A	B	C	D
1	0	$gr^2\,AB$	$gr^2\,AC$	$gr^2\,AD$
1	$gr^2\,BA$	0	$gr^2\,BC$	$gr^2\,BD$
1	$gr^2\,CA$	$gr^2\,CB$	0	$gr^2\,CD$
1	$gr^2\,DA$	$gr^2\,DB$	$gr^2\,DC$	0

rappresenta il centro della sfera circoscritta al tetraedro con massa 8 volte il quadrato del tetraedro.

7. Diremo che un numero o una formazione geometrica è funzione intera di numeri e formazioni geometriche, quando essa si può ottenere dalle variabili indipendenti e da enti costanti colle operazioni:

a) Somma di due numeri, o di due formazioni della stessa specie.

b) Moltiplicazione di due numeri; moltiplicazione progressiva di due for-

mazioni (di specie 1 e 1, o 1 e 2, o 1 e 3, o 2 e 2); moltiplicazione regressiva di due formazioni (di 2ª e 3ª specie, ovvero amendue di terza specie); l'operazione | da eseguirsi sopra un vettore o bivettore; la divisione d'un trivettore pel trivettore unità, o d'un volume pel volume unità.

Una funzione dicesi *monomio* se essa si può ottenere eseguendo solamente le operazioni distributive *b*). Dicesi *grado d'un monomio* rispetto ad una formazione il numero delle volte che comparisce questa formazione come fattore nel monomio. Ogni funzione intera è riduttibile alla somma di più monomii. Dicesi grado d'una funzione intera il massimo dei gradi dei suoi monomii. Se tutti i monomii che compongono una funzione intera sono dello stesso grado, la funzione si dirà *omogenea*. Ogni monomio è funzione omogenea. Se una formazione Y è funzione intera, omogenea, di grado n d'una formazione X, le coordinate di Y sono funzioni intere omogenee di grado n delle coordinate di X.

Le quantità $gr^2\,\mathrm{a}$ e $gr^2\,\alpha$, ove a e α sono linee e superficie, sono funzioni intere di secondo grado di a e α.

8. I punti P dello spazio per cui è nulla una funzione numerica di P formano, in generale, una superficie. Se la funzione è intera di grado n, questa superficie si dirà d'ordine n.

Così l'equazione $gr\,\mathrm{OP} = r$, ovvero $(\mathrm{P}-\mathrm{O})\,|\,(\mathrm{P}-\mathrm{O}) - r^2 = 0$ rappresenta una sfera di centro O e di raggio r. Il primo membro della seconda equazione è funzione intera di secondo grado di P.

L'equazione di 2° grado $[(\mathrm{P}-\mathrm{O})\,|\,\mathrm{I}]^2 - k\,gr^2\,(\mathrm{P}-\mathrm{O}) = 0$, ove O sia un punto, I un vettore, e k una costante numerica, rappresenta un cono di rivoluzione avente per vertice O, e il cui asse ha la direzione di I.

L'equazione $gr\,\mathrm{Pa} = r$, che si può mettere sotto la forma, di secondo grado in P, $gr^2\,\mathrm{Pa} = r^2$, ove a rappresenta una linea, in grandezza eguale all'unità di misura, e r una costante numerica, rappresenta il cilindro di rivoluzione avente per asse la retta a, e per raggio r.

L'equazione del luogo dei punti per cui è costante il rapporto delle distanze da due rette date si può mettere sotto la forma $\dfrac{gr\,\mathrm{Pa}}{gr\,\mathrm{Pb}} = k$, ove a e b sono linee, in grandezza eguali all'unità di misura, giacenti sulle rette date, e k è il rapporto costante dato. La stessa equazione si può scrivere:

$$gr^2\,\mathrm{Pa} - k^2\,gr^2\,\mathrm{Pb} = 0$$

e il primo membro è una funzione di secondo grado di P.

9. Un numero funzione omogenea intera di grado n d'una formazione di prima specie P, col suo annullarsi, esprime una condizione tale che se una

formazione P vi soddisfa, tutte le formazioni, della forma mP, aventi la stessa posizione, o direzione, vi soddisfano pure. L'insieme di queste formazioni si dirà un luogo geometrico d'ordine n.

Così l'equazione della sfera $(P-O)\,|\,(P-O)-r^2=0$, ove O è un punto semplice ed r un numero, ha significato solo quando P è un punto semplice. Essa si può pure scrivere:

$$(OP\,.\,\omega)\,|\,(OP\,.\,\omega)-(P\omega)^2\,r^2=0,$$

e il primo membro è funzione omogenea di secondo grado in P, avente significato qualunque sia la formazione di prima specie P.

L'equazione $Pa\,.\,Pb\,.\,c=0$, ove a b c sono linee, rappresenta la superficie del secondo ordine contenente le rette a, b, c.

Il luogo dei punti P tali che i 4 piedi delle perpendicolari abbassate da P sulle faccie d'un tetraedro ABCD giacciano in un piano ha per equazione:

$$\frac{gr^2\,ABC}{PABC}-\frac{gr^2\,ABD}{PABD}+\frac{gr^2\,ACD}{PACD}-\frac{gr^2\,BCD}{PBCD}=0.$$

Fatti sparire i denominatori, essa diventa di terzo grado in P. Gli spigoli del tetraedro appartengono al luogo.

L'equazione

$$(PA\,.\,\alpha)\,(PB\,.\,\beta)\,c=0$$

rappresenta una superficie del secondo ordine. Essa si può pure scrivere:

$$P\alpha\,.\,P\beta\,.\,ABc+P\alpha\,.\,B\beta\,.\,PAc+A\alpha\,.\,P\beta\,.\,BPc=0.$$

Questa superficie contiene la retta $\alpha\beta$, la $Bc\,.\,\alpha$, la $Ac\,.\,\beta$, ecc.

L'equazione $(Pa\,.\,\omega)\,|\,(Pb\,.\,\omega)=0$, ove a e b sono linee, rappresenta la superficie di secondo ordine luogo dei punti P tali che i piani Pa e Pb siano ortogonali. Essa contiene le rette a e b.

10. Un numero funzione omogenea intera di grado n d'una formazione di seconda specie p, col suo annullarsi esprime una condizione tale che se una linea p vi soddisfa, tutte le linee mp che stanno sulla retta p, vi soddisfano pure. Le rette che contengono linee p che soddisfano a quella condizione formano un sistema chiamato *complesso di grado n*.

Sia a una formazione di prima specie. L'equazione $ap=0$ rappresenta un complesso di primo grado. Se a è riduttibile ad una linea, questo complesso è costituito dall'insieme delle rette che incontrano a, o le sono parallele. Se a

è riduttibile ad un bivettore, il complesso contiene tutte le rette parallele a questo bivettore. Qualunque sia a, le rette del complesso passanti pel punto P giacciono nel piano Pa, e le rette del complesso giacenti nel piano π passano pel punto πa. Se il punto P descrive una retta p, il piano Pa passa per la retta 2ap . a — aa . p.

L'equazione (pA . ω) | (pB . ω) = 0, ove A e B sono punti, rappresenta il complesso di secondo ordine le cui rette p sono tali che i piani pA e pB risultano ortogonali.

11. Un numero funzione omogenea intera di grado n d'una formazione di terza specie π col suo annullarsi esprime una condizione tale, che se una superficie π vi soddisfa, ogni superficie $m\pi$ contenuta nello stesso piano π vi soddisfa. L'insieme di questi piani π dicesi un inviluppo di classe n.

L' inviluppo dei piani per cui è costante la somma delle distanze dei punti A, B, C, ... ha un'equazione che si può scrivere:

$$[(A + B + ...)\,\pi]^2 = k^2\, gr^2\, \pi,$$

di secondo grado in π.

L'inviluppo dei piani per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze dei punti A, B, ... ha per equazione:

$$(A\,\pi)^2 + (B\,\pi)^2 + ... = k^2\, gr^2\, \pi$$

pure di secondo grado.

L'inviluppo dei piani π che fanno con tre piani dati αβγ un tetraedro di volume dato k ha per equazione:

$$(\alpha\beta\gamma\pi)^3 = (\alpha\beta\gamma\omega)\,(\alpha\beta\pi\omega)\,(\alpha\gamma\pi\omega)\,(\beta\gamma\pi\omega)\,k,$$

di terzo grado in π.

L'equazione πa . πb . c = 0 rappresenta un inviluppo di secondo grado. Vi appartengono tutti i piani tangenti alla superficie di equazione Pa . Pb . c = 0.

CAPITOLO VIII.

Derivate.

---

65. Le formazioni geometriche possono essere, come i numeri, costanti o variabili. Supporremo note le definizioni e teoremi che si riferiscono ai numeri variabili, e porremo le seguenti definizioni pei limiti di formazioni geometriche.

DEF. *Diremo che il volume variabile* A *ha per limite il volume fisso* A_0, *se essendo* Ω *il volume unità, il numero* $\frac{\mathsf{A}}{\Omega}$ *ha per limite il numero* $\frac{\mathsf{A}_0}{\Omega}$.

Diremo che la formazione variabile di $\begin{pmatrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{pmatrix}$ *specie* $\begin{pmatrix} S \\ s \\ \sigma \end{pmatrix}$ *ha per limite la formazione fissa* $\begin{pmatrix} S_0 \\ s_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix}$, *se, comunque si prenda*

$$\begin{Bmatrix} \textit{la superficie } \pi \\ \textit{la linea } \quad p \\ \textit{il punto } \quad P \end{Bmatrix} \textit{ si ha } \begin{Bmatrix} \textit{lim } S\pi = S_0\pi \\ \textit{lim } sp = s_0 p \\ \textit{lim } \sigma P = \sigma_0 P \end{Bmatrix}.$$

Si riducono immediatamente ai teoremi sui limiti di numeri le proposizioni che seguono:

1. *Se A e B sono due formazioni della stessa specie, si ha:*

$$(\textit{lim } A = A_0) \cdot (\textit{lim } B = B_0) < (\textit{lim } (A + B) = A_0 + B_0).$$

2. $(lim\ A = A_0) \cap (lim\ x = x_0) < (lim\ x\ A = x_0\ A_0)$,

3. $(lim\ A = A_0) \cap (lim\ x = x_0) \cap -(x_0 = 0) < \left(lim\ \frac{A}{x} = \frac{A_0}{x_0}\right)$.

4. *Se* AB *è il prodotto progressivo o regressivo delle due formazioni* A *e* B, *si ha:*

$$(lim\ A = A_0) \cap (lim\ B = B_0) < (lim\ A\ B = A_0\ B_0).$$

5. $(lim\ A = A_0) =$ *le coordinate di* A *hanno per limite le coordinate di* A_0.

6. *Se* I *è un vettore nel piano, si ha:*

$$(lim\ \mathrm{I} = \mathrm{I}_0) = (lim \perp \mathrm{I} = \perp \mathrm{I}_0).$$

7. *Se* I *è un vettore o bivettore nello spazio, si ha:*

$$(lim\ \mathrm{I} = \mathrm{I}_0) = (lim\ |\ \mathrm{I} = |\ \mathrm{I}_0).$$

Applicando le proposizioni precedenti si può determinare il limite di espressioni più complicate. Così, essendo a una formazione di seconda specie, si ha $(lim\ \mathrm{a} = \mathrm{a}_0) < (lim\ \omega\mathrm{a} = \omega\mathrm{a}_0) < (lim\ |\ \omega\mathrm{a} = |\ \omega\mathrm{a}_0) <$ $< (lim\ \omega\mathrm{a}\,|\,\omega\mathrm{a} = \omega\mathrm{a}_0\,|\,\omega\mathrm{a}_0) < (lim\ gr^2\,\mathrm{a} = gr^2\,\mathrm{a}_0) < (lim\ gr\,\mathrm{a} = gr\,\mathrm{a}_0)$, in virtù delle 4, 7, 4, e di identità numeriche.

8. In modo analogo si ha, se A è una formazione di cui è definita la grandezza:

$$(lim\ A = A_0) < (lim\ gr\ A = gr\ A_0).$$

9. Essendo A una formazione di prima specie:

$$(lim\ \mathrm{A} = \mathrm{A}_0) \cap -(\omega\,\mathrm{A}_0 = 0) < \left(lim\ \frac{\mathrm{A}}{\omega\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}_0}{\omega\,\mathrm{A}_0}\right),$$

ossia, se A ha per limite A_0, e la massa di A_0 non è nulla, il punto semplice coincidente con A ha per limite il punto semplice coincidente con A_0.

10. $$(lim\ \mathrm{A} = \mathrm{A}_0) \cap (lim\ \mathrm{a} = \mathrm{a}_0) \cap -(gr\ \mathrm{a}_0 = 0)$$
$$< \left(lim\ \frac{gr\ \mathrm{A\,a}}{gr\ \mathrm{a}} = \frac{gr\ \mathrm{A}_0\,\mathrm{a}_0}{gr\ \mathrm{a}_0}\right).$$

Supponendo A un punto semplice, questa proposizione si può leggere: se il punto A e la linea a hanno rispettivamente per limiti A_0 e a_0, e la grandezza di a_0 non è nulla, la distanza di A da a ha per limite la distanza di A_0 da a_0.

Ricordando quindi la definizione del limite d'una retta e d'un piano (Applicazioni Geom. pag. 30), si deduce:

11. $(lim\, a = a_0) \cap - (gr\, a_0 = 0) <$ *la retta* a *ha per limite la retta* a_0.

E analogamente:

12. $(lim\, \alpha = \alpha_0) \cap - (gr\, \alpha_0 = 0) <$ *il piano* α *ha per limite il piano* α_0.

66. Se $A(t)$ è una formazione geometrica di specie qualunque, funzione d'una variabile numerica t, porremo:

$$A'(t) = lim\, \frac{1}{h} [A(t+h) - A(t)].$$

La formazione $A'(t)$, che è della stessa specie di $A(t)$, si dice la *derivata* di $A(t)$. La indicheremo anche colla scrittura $\frac{dA(t)}{dt}$; in questa dt è un numero arbitrario, detto differenziale della variabile indipendente; la formazione $dA(t) = A'(t)dt$ dicesi il *differenziale* di $A(t)$. Invece di $A(t)$, sottintendendo la variabile t, scriveremo spesso solamente A.

Si hanno le seguenti regole di differenziazione:

1. Se A e B sono formazioni variabili della stessa specie, si ha:

$$d(A+B) = dA + dB.$$

2. $$d(xA) = dx \,.\, A + x \,.\, dA.$$

3. Se AB è il prodotto progressivo o regressivo di due formazioni, si ha:

$$d \,.\, AB = dA \,.\, B + A \,.\, dB.$$

(Si noti che il secondo membro non è sempre eguale a $BdA + AdB$).

Quindi, se $ABC...$ è il prodotto delle formazioni $ABC...$ composto di prodotti di due fattori, progressivi o regressivi, sarà:

$$d(ABC...) = (dA)BC... + A(dB)C... + AB(dC)... + ...$$

4. Se I è un vettore nel piano, si ha:

$$d \perp \mathrm{I} = \perp d\mathrm{I}.$$

5. Se I è un vettore o bivettore nello spazio, si ha:

$$d \mid \mathrm{I} = \mid d\,\mathrm{I}.$$

6. Se $x_1 x_2 ...$ sono le coordinate della formazione variabile A rispetto alle formazioni di riferimento fisse A_1, A_2, ..., ossia se $A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + ...$, sarà $dA = dx_1 . A_1 + dx_2 . A_2 + ...$, ossia le coordinate della derivata di A sono le derivate delle coordinate di A.

TEOR. *Se la derivata di $A(t)$ è nulla, la funzione $A(t)$ è costante.*

Invero, se la derivata di A è nulla, le coordinate di questa derivata, ossia le derivate delle coordinate di A, sono pure nulle; quindi queste coordinate sono costanti, ed è perciò costante la A.

67. La derivata della derivata di $A(t)$ dicesi *derivata seconda* di $A(t)$ e si indica con $A''(t)$, ovvero $\frac{d^2 A}{dt^2}$; la derivata della derivata $(n-1)^{\text{ma}}$ dicesi *derivata* n^{ma}, e si indica con $A^{(n)}(t)$ ovvero $\frac{d^n A}{dt^n}$. La formazione $d^n A = A^{(n)}(t)\,dt^n$ dicesi il differenziale d'ordine n.

Si riconosce subito che la derivata d'ordine n d'una formazione ha per coordinate, rispetto ad elementi di riferimento fissi, le derivate d'ordine n delle coordinate della formazione data.

Si ha pure:

$$d^n . AB = d^n A . B + n d^{n-1} A . d^2 B + \binom{n}{2} d^{n-2} A . d^2 B + ... + A . d^n B.$$

TEOR. (di TAYLOR). *Essendo* $A(t)$ *una formazione funzione di* t, *avente le derivate che compaiono nella formula seguente, determinato* R *in modo che sia:*

$$A(t+h)=A(t)+h\,A'(t)+\frac{h^2}{2!}\,A''(t)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\,A^{(n)}(t)+R,$$

si ha, per $h=0$, $\qquad\qquad \lim \frac{R}{h^n}=0.$

68. DEF. *Diremo che il numero* a *è* medio *fra i numeri* $a_1\ a_2\ldots$, *in numero finito od infinito, se esso non è maggiore del limite superiore di questi numeri, nè minore del loro limite inferiore.*

Diremo che il volume A *è* medio *fra i volumi* $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\ldots$, *se, essendo* Ω *il volume unità, il numero* $\frac{\mathsf{A}}{\Omega}$ *è medio fra i numeri* $\frac{\mathsf{A}_1}{\Omega}, \frac{\mathsf{A}_2}{\Omega}, \ldots$

Diremo che la formazione A, *di* 1ª, *o* 2ª, *o* 3ª *specie, è* media *fra le formazioni* $A_1 A_2\ldots$ *della stessa specie di* A, *se, comunque si prenda la superficie, o linea, o punto,* P, *il volume* AP *è medio fra i volumi* $A_1P,\ A_2P, \ldots$

Per esempio, essendo $A_1 A_2\ldots$ delle formazioni della stessa specie, $m_1, m_2, \ldots$ numeri tutti positivi, la formazione $\frac{m_1A_1+m_2A_2+\ldots}{m_1+m_2+\ldots}$ è media fra le formazioni $A_1, A_2\ldots$

Se $\mathsf{A}_1\ \mathsf{A}_2\ldots$ sono punti semplici, le formazioni medie fra essi sono i punti semplici appartenenti al minimo campo convesso chiuso che li contenga (V. *Appl. Geom.* pag. 152 e 164).

Se A è medio fra $A_1 A_2\ldots$, le coordinate di A sono medie fra quelle di $A_1, A_2, \ldots$, ma non viceversa.

TEOR. *Se* $A(t)$ *ha derivata per tutti i valori di* t *nell' intervallo* (t_0, t_1), *sarà* $\frac{A(t_1)-A(t_0)}{t_1-t_0}$ *medio fra i valori di* $A'(t)$ *nello stesso intervallo.*

COROLL. Se $A(t)$ ha derivata nell'intervallo (t_0, t_1), e si annulla agli estremi di questo intervallo, un valor medio fra quelli della derivata sarà lo zero.

TEOR. *Se $A(t)$ ha le successive derivate fino all'ordine $n+1$ nell'intervallo $(t, t+h)$, la formazione K, che soddisfa alla condizione:*

$$A(t+h) = A(t) + hA'(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!} A^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} K,$$

sarà media fra i valori della derivata d'ordine $n+1$ nello stesso intervallo.

Si ha così una seconda forma del teorema di Taylor.

69. DEF. *Porremo* $A(t_1, t_2) = \frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}$,

$$A(t_1, t_2, t_3) = \frac{A(t_1, t_3) - A(t_1, t_2)}{t_3 - t_2}, \ldots$$

Le funzioni $A(t_1, t_2)$, $A(t_1, t_2, t_3)$, ... diconsi le funzioni interpolari di primo, secondo, ecc. ordine (V. Calc. diff., N. 84).

TEOR. 1. *La funzione interpolare d'ordine n, $A(t_0 t_1 \ldots t_n)$, è media fra i valori di $\frac{A^{(n)}(t)}{n!}$, ove t sia compreso fra $t_0, t_1, \ldots t_n$.*

TEOR. 2. *Se $A^{(n)}(t)$ è funzione continua di t, facendo tendere $t_0 t_1 \ldots t_n$ ad uno stesso valore t, si ha:*

$$lim\ A(t_0, t_1, \ldots t_n) = \frac{A^{(n)}(t)}{n!}.$$

TEOR. 3. *Se $A(t)$ è una formazione di prima specie, avente le successive derivate continue, facendo tendere $t_1\ t_2\ t_3 \ldots$ verso uno stesso valore t si avrà:*

(a) $$lim \frac{A(t_1) A(t_2)}{t_2 - t_1} = A(t)\ A'(t)$$

$$(b) \qquad lim \frac{A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)} = \frac{1}{2}\,A(t)\,A'(t)\,A''(t)$$

$$(c) \qquad lim \frac{A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3)\,A(t_4)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)\,(t_4-t_1)\,(t_4-t_2)\,(t_4-t_3)} = \frac{1}{2!\,3!}\,A(t)\,A'(t)\,A''(t)\,A'''(t).$$

Infatti, per dimostrare la (b), si ha:

$$A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3) = A(t_1)\,[A(t_2)-A(t_1)]\,[A(t_3)-A(t_1)]$$

onde

$$\frac{A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)} = A(t_1)\,A(t_1t_2)\,A(t_1t_3) = A(t_1)\,A(t_1t_2)\,[A(t_1t_3)-A(t_1t_2)];$$

quindi, dividendo ancora per t_3-t_2,

$$\frac{A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)} = A(t_1)\,A(t_1t_2)\,A(t_1t_2t_3).$$

Passando al limite, in virtù del teorema precedente, si ha la formula a dimostrarsi.

TEOR. *Se* $a(t)$ *è una formazione di seconda specie nel piano, si ha:*

$$lim \frac{a(t_1)\;a(t_2)}{t_2-t_1} = a(t)\,a'(t),$$

$$lim \frac{a(t_1)\,a(t_2)\,a(t_3)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)} = \frac{1}{2}\,a(t)\,a'(t)\,a''(t).$$

TEOR. *Se* $\alpha(t)$ *è una formazione di terza specie, nello spazio, si ha:*

$$lim \frac{\alpha(t_1)\,\alpha(t_2)}{t_2-t_1} = \alpha(t)\,\alpha'(t),$$

$$lim \frac{\alpha(t_1)\,\alpha(t_2)\,\alpha(t_3)}{(t_2-t_1)\,(t_3-t_1)\,(t_3-t_2)} = \frac{1}{2}\,\alpha(t)\,\alpha'(t)\,\alpha''(t),$$

$$lim \frac{\alpha(t_1)\,\alpha(t_2)\,\alpha(t_3)\,\alpha(t_4)}{(t_2-t_1)\,\ldots\,(t_4-t_3)} = \frac{1}{12}\,\alpha(t)\,\alpha'(t)\,\alpha''(t)\,\alpha'''(t).$$

70. DEF. *Colla scrittura* $\int A(t)dt$ *intenderemo una funzione avente per derivata* $A(t)$.

Se $B(t)$ è una funzione avente per derivata $A(t)$, ogni altra funzione avente la stessa derivata sarà della forma $B(t)+C$, ove C è una formazione costante, della stessa specie di B. Si dimostra, riducendola alla corrispondente sulle funzioni numeriche, la proposizione: se $A(t)$ è funzione continua di t, essa è integrabile.

Le regole d'integrazione che seguono si ricavano immediatamente da quelle viste per la derivazione:

1. $$\int (A+B)\,dt = \int A\,dt + \int B\,dt.$$

2. $$\int x\,dA = x\,A - \int A\,dx.$$

3. $$\int A\,dB = A\,B - \int dA\,.\,B.$$

4. $$\int \perp \mathrm{I}\,dt = \perp \int \mathrm{I}\,dt.$$

5. $$\int | \mathrm{I}\,dt = | \int \mathrm{I}\,dt.$$

6. *Se* $A_1\,A_2\ldots$ *sono formazioni costanti,* $x_1, x_2, \ldots$ *numeri funzioni di* t, *si ha:*

$$\int (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots)\,dt = A_1 \int x_1\,dt + A_2 \int x_2\,dt + \ldots$$

Quindi le coordinate, rispetto ad elementi fissi, dell'integrale d'una formazione geometrica sono gli integrali delle coordinate della formazione proposta.

DEF. *Se* $B(t)$ *è uno degli integrali di* $A(t)\,dt$, *porremo:*

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)\,dt = B(t_1) - B(t_0).$$

TEOR. *Se* $A(t)$ *ha le successive derivate, si ha:*

$$A(t+h) = A(t) + h\,A'(t) + \frac{h^2}{2!}\,A''(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{h^n}{n!}\,A^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-z)^n\,A^{(n+1)}(t+zh)\,dz.$$

Questo teorema è una terza forma del teorema di Taylor applicato alle formazioni geometriche.

Applicazioni.

71. 1. Sia $A(t)$ una formazione di prima specie funzione della variabile t, avente le successive derivate continue, e suppongasi che, per quei valori che si considerano di t, la massa di A non sia nulla. Allora il punto semplice coincidente con A, variando t, descrive una linea. La retta $A(t_1)\,A(t_2)$ unisce i due punti della curva corrispondenti ai valori t_1 e t_2 di t. Facendo tendere t_1 e t_2 ad uno stesso valore t, in virtù delle teor. 3, N. 68 e 11 del N. 64, si deduce che la retta precedente ha per limite la retta $A(t)\,A'(t)$, supposto $A\,A'$ non nullo. Questa retta limite è la *tangente* alla curva nel punto considerato.

2. Il piano $A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_3)$ contiene tre punti della curva; facendo tendere $t_1\,t_2\,t_3$ ad uno stesso valore t, esso ha per limite il piano $A(t)\,A'(t)\,A''(t)$, supposto che questa formazione non sia nulla. Questo piano limite è il *piano osculatore* alla curva.

3. Se $A(t)$ è un punto semplice, le sue derivate successive sono vettori. Se la variabile t rappresenta il *tempo*, la derivata prima dicesi *velocità*, la seconda *accelerazione* del punto. Se $A(t)$ è un punto con massa costante, le sue derivate sono ancora vettori; essendo t il tempo, la derivata prima dicesi *quantità di moto* del punto materiale, la derivata seconda *forza* che agisce sul punto.

4. Se $A(t)$ è un punto semplice che si muove in un piano fisso, la retta $A \perp A'$ è la normale alla curva descritta da A.

5. Se $A(t)$ è un punto semplice che si muove nello spazio, allora la direzione del vettore A' è quella della *tangente* $A\,A'$; e la giacitura del bivettore $A'A''$ è quella del piano *osculatore* $A\,A'\,A''$. La giacitura $|\,A'$ è normale alla direzione della tangente; il piano $A\,|\,A'$ è il *piano normale* alla curva. La direzione $|\,(A'\,A'')$ è normale al piano osculatore; la retta $A\,|\,(A'\,A'')$ è la *binormale*.

La direzione $A'A'' . | A' = (A' | A') . A'' - (A' | A'') . A'$ è l'intersezione delle giaciture dei piani osculatore e normale; la retta $A(A'A'' . | A') = (A' | A') . AA'' - (A' | A'')\,AA'$ è la *normale principale.*

6. L' $\int (gr\,A')\,dt = \int (gr\,d\,A)$, preso fra certi limiti, rappresenta la *lunghezza dell'arco* descritto dal punto semplice A, ove t varii fra gli stessi limiti. Detta s la lunghezza dell'arco descritto da A, ove t varii da un valore fisso al valore variabile t, sarà $ds = (gr\,A')\,dt = gr\,d\,A$.

7. L' $\int AA'dt = \int A d A$ rappresenta una formazione di seconda specie. Essa è il limite verso cui tende la somma $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$, in cui $A_0A_1 \ldots A_n$ siano punti consecutivi della curva, A_0 e A_n le posizioni di A corrispondenti ai limiti di t, il limite essendo ottenuto col far crescere indefinitamente il numero dei punti, in modo che la distanza di due punti consecutivi qualunque tenda a zero.

Il vettore di $\int AA'dt$ sarà $\int A'dt$, ossia sarà il vettore formato dagli estremi dell'arco considerato.

8. Se il punto A si muove in un piano e descrive un arco i cui estremi non coincidono, la formazione $\int AA'dt$ è riduttibile ad una linea MN; essendo X un punto qualunque del piano, l'area descritta dal segmento XA, ove A descriva l'arco considerato di curva, è eguale all'area del triangolo XMN. Se invece gli estremi dell'arco considerato coincidono, l' $\int AA'dt$ è un bivettore, e l'area $X\int AA'dt$, che è indipendente dalla posizione del punto X, dicesi l'area limitata da quella curva chiusa.

9. Se il punto A si muove nello spazio, e gli estremi dell'arco considerato coincidono, la formazione $\int AA'dt$ è riduttibile ad un bivettore i. Se XY sono due punti dello spazio, il volume descritto dal triangolo XYA, ove A descriva l'arco chiuso considerato, è eguale al volume XYi. Se si proiettano su d'un piano con proiezioni parallele la linea chiusa descritta da A e il bivettore i, l'area limitata dalla proiezione di quella linea ha per bivettore la proiezione di i.

10. L' $\int A\,(gr\,A')\,dt = \int A\,(gr\,d\,A) = \int A\,ds$ rappresenta una formazione di prima specie, di massa la lunghezza dell'arco descritto da A. Essa è il limite verso cui tende la formazione $s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_nA_n$, ove $s_1s_2 \ldots s_n$ sono le lunghezze di n archi in cui si è decomposto l'arco dato, e $A_1A_2 \ldots A_n$ sono

punti di questi archi parziali. Il punto semplice che coincide con questa formazione, ossia $\frac{\int A\,(gr\,dA)}{\int (gr\,dA)}$ dicesi il *baricentro* dell'arco.

11. Il punto $A = O + tI + \frac{1}{t}J$, ove A sia un punto semplice, I ed J siano vettori, descrive un'*iperbole* di centro O e di assintoti OI ed OJ. Si avrà: $A' = I - \frac{1}{t^2}J$; quindi si scorge che i quattro vettori I, J, A — O, A′ sono armonici. Si ha la tangente $AA' = OI - \frac{1}{t^2}OJ - \frac{2}{t}IJ$. Detti B e C i punti d'incontro della tangente cogli assintoti OI e OJ, si avrà $B = \frac{AA'.OI}{AA'.OI.u} = O + 2tI$; e analogamente $C = O + \frac{2}{t}J$.

Si deducono immediatamente le formule $A = \frac{1}{2}(B + C)$, $ABC = 4OIJ$, le quali, interpretate geometricamente, esprimono note proprietà dell'iperbole.

L'area descritta dal segmento OA, mentre t varia da t_0 a t_1 è data da $\int_{t_0}^{t_1} OAA'\,dt = \int_{t_0}^{t_1} -\frac{2}{t}OIJ\,dt = 2OIJ \log \frac{t_0}{t_1}$.

12. Il punto $O + It + Jt^2$, ove O è un punto semplice, I e J sono vettori, descrive una parabola.

Il punto $O + I\cos t + J\,\mathrm{sen}\,t$, come pure $O + I\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + J\frac{2t}{1 + t^2}$, ove OIJ hanno lo stesso significato che negli esempi precedenti, descrivono ellissi. Si possono applicare a queste linee le formule trovate.

13. Il punto $O + r\cos t.I + r\,\mathrm{sen}\,t.J + ht.K$, ove O è un punto semplice, e IJK sono tre vettori eguali all'unità di misura e a due a due ortogonali, descrive un'elica avente per asse la retta OK, per raggio r, per passo $2\pi h$. La linea chiusa l formata da una spira dell'elica, dai due raggi del cilindro che vanno agli estremi della spira, e dalla porzione dell'asse compresa fra questi due raggi, considerata come una formazione di seconda specie, è eguale al bivettore del cerchio base del cilindro su cui sta tracciata l'elica. Quindi, proiettando con rette parallele su d'un piano arbitrario, l'area limitata dalla proiezione della linea l è eguale all'area della proiezione del cerchio base.

14. Sia $a(t)$ una linea funzione della variabile t, che si muove in un piano fisso. Il limite del punto $a(t_1)a(t_2)$ d'intersezione di due linee a, ove t_1 e t_2 tendano ad uno stesso valore t, sarà il punto aa', supposto $aa'u$ non nullo. Questo punto dicesi il punto d'incontro di due linee consecutive del sistema, ovvero il punto di contatto della a col suo inviluppo. La retta $aa'.\perp ua$ è la *normale all'inviluppo*.

15. Sia A (t) un punto semplice mobile nel piano. Fatto $a = A \perp A'$, la retta a sarà la normale alla curva descritta da A. Si avrà $a' = A' \perp A' + A \perp A''$. Quindi, il punto $a\,a'$ d'incontro di due normali consecutive, si può ridurre, dopo alcune trasformazioni, alla forma $A + \frac{gr^2\,A'}{A'\,A''} \cdot \perp A'$.

16. Sia a (t) una linea che si muove nello spazio, ed avente le successive derivate, che saranno formazioni di seconda specie. Poichè a è una linea, sarà $a\,a = 0$, onde, derivando, $a\,a' = 0$, $a\,a'' + a'\,a' = 0$, ecc. Variando t, la retta a descrive una *superficie rigata*. Se P è un punto della retta a, il piano $P\,a'$ è il piano tangente alla superficie nel punto P; e se π è un piano passante per la retta a, il punto $\pi\,a'$ è il punto di contatto del piano π colla superficie.

Dati a t i valori t_1 e t_2, dette a_1 e a_2 le posizioni corrispondenti di a, θ il loro angolo, δ la loro minima distanza, si ricava:

$$\lim \frac{\theta}{t_2 - t_1} = \frac{gr\,(\omega a \,.\, \omega a')}{gr^2\,a}, \qquad \lim \frac{\delta}{t_2 - t_1} = \frac{a'\,a'}{2\,gr\,(\omega a \,.\, \omega a')}.$$

Il limite del piano passante per a_1 e parallelo ad a_2 è il piano $p \,.\, p'\omega = -p' \,.\, p\omega$. Il limite degli estremi della minima distanza delle due rette a_1 e a_2 è il punto $[p \mid (\omega p \,.\, \omega p')]\,p'$.

17. Sia $\alpha\,(t)$ una formazione di terza specie funzione di t. Se il bivettore di α non è nullo, questa formazione è riduttibile ad una superficie triangolare. La retta $\alpha\alpha'$, supposto $\alpha\alpha'\omega$ non nullo, è la posizione limite dell'intersezione di due piani α; il punto $\alpha\alpha'\alpha''$, supposto $\alpha\alpha'\alpha''\omega$ non nullo, è il limite del punto d'incontro di tre piani del sistema, corrispondenti a valori di t che tendono ad uno stesso valore. Se $\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''$ non è nullo, il punto $\alpha\alpha'\alpha''$ descrive una curva la cui tangente è $\alpha\alpha'$ e il cui piano osculatore è α. Il piano normale è $\alpha\alpha'\alpha'' \,.\mid (\alpha\alpha'\omega)$.

18. Una formazione geometrica A potrebbe essere funzione di due o più numeri $u, v, \ldots$; ed allora si hanno a considerare le derivate parziali $\frac{dA}{du}$, $\frac{dA}{dv}$, $\frac{d^2A}{du^2}, \ldots,$ per le quali sussistono teoremi analoghi a quelli che si dimostrano per le funzioni numeriche di più variabili.

19. Se la formazione di prima specie A è funzione di due variabili u e v, e la sua massa non è nulla, il punto semplice coincidente con essa, col variare di u e v descrive una superficie. Il piano $A\,\frac{dA}{du}\,\frac{dA}{dv}$ è il *piano tangente* alla superficie nel punto A.

20. Se A è un punto semplice funzione di u e v, le sue derivate saranno vettori; la giacitura $\frac{dA}{du}\,\frac{dA}{dv}$ è quella del piano tangente; la retta $A \mid \left(\frac{dA}{du}\,\frac{dA}{dv}\right)$ è la *normale* alla superficie.

21. Variando u fra i valori fissi u_0 e $u_1 > u_0$, e v fra i valori v_0 e $v_1 > v_0$, funzioni di u, il punto semplice A, funzione di u e v, descrive una superficie limitata σ; con $\int\int \psi\, du\, dv$, ove ψ è una funzione di u e v, intenderemo l' $\int_{u_0}^{u_1} \left(\int_{v_0}^{v_1} \psi\, dv \right) du$. Allora $2\int\int \frac{dA}{du}\frac{dA}{dv}\, du\, dv$ rappresenta un bivettore eguale al contorno di σ. Se si scompone la superficie σ in parti $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$, detti $i_1 i_2 \ldots i_n$ i loro bivettori, il limite superiore della quantità $gr\, i_1 + gr\, i_2 + \ldots + gr\, i_n$ dicesi l'*area* della superficie data. L' area risulta misurata da $2\int\int gr \left(\frac{dA}{du}\frac{dA}{dv} \right) du\, dv$ (l'unità di misura delle aree essendo quella definita al N. 39).

22. $2\int\int A \frac{dA}{du}\frac{dA}{dv}\, du\, dv$ rappresenta una formazione di terza specie; essa è il limite verso cui tende la somma $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \ldots + A_n i_n$, ove $i_1 i_2 \ldots i_n$ sono i bivettori delle parti $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ in cui si può decomporre la superficie σ, $A_1 A_2 \ldots A_n$ sono punti di queste parti, il limite essendo ottenuto col far variare la decomposizione di σ in guisa che la distanza di due punti appartenenti alla stessa parte tenda a zero. Se il bivettore di questa formazione non è nullo, essa è riduttibile ad una superficie triangolare PQR. Comunque si prenda il punto X dello spazio, il volume descritto dal segmento XA, ove il punto A descriva la superficie σ, tenendo conto dei segni, è eguale al tetraedro XPQR. Se invece quel bivettore è nullo, il volume descritto da XA è indipendente dal punto X.

23. $2\int\int A\, gr \left(\frac{dA}{du}\frac{dA}{dv} \right) du\, dv$ rappresenta una formazione di prima specie, la cui massa è l'area della superficie; il punto semplice che vi coincide dicesi *baricentro* della superficie.

24. Se A è un punto semplice funzione dei tre numeri t, u, v, allora $6\int\int\int \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dA}{du} \cdot \frac{dA}{dv}\, dt\, du\, dv$ misura il volume descritto dal punto A mentre le variabili variano fra i limiti a cui si estende l'integrazione.

Se un segmento rettilineo AB varia col variare di due numeri u e v, detto I il vettore B — A di quel segmento, e C il suo punto medio, il volume descritto da AB è misurato da $6\int\int I \frac{dC}{du}\frac{dC}{dv}\, du\, dv + \frac{1}{2}\int\int I \frac{dI}{du}\frac{dI}{dv}\, du\, dv$.

Se un'area piana σ si muove col variare d'un numero t, detto i il bivettore di quell'area, e G il baricentro, il volume descritto da σ è misurato da $3\int i\, dG$.

CAPITOLO IX.

Trasformazioni di sistemi lineari.

---

72. Esistono dei sistemi di enti sui quali sono date le seguenti definizioni:

1. È definita l'*eguaglianza* di due enti **a** e **b** del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) = (\mathbf{b} = \mathbf{a}),\ (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \cap (\mathbf{b} = \mathbf{c}) < (\mathbf{a} = \mathbf{c}).$$

2. È definita la *somma* di due enti **a** e **b**, vale a dire è definito un ente, indicato con $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) < (\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c}),\ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},\ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

3. Essendo **a** un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura $m\mathbf{a}$ intenderemo la somma di m enti eguali ad **a**. È facile riconoscere, essendo **a**, **b**, ... enti del sistema, m, n, ... numeri interi e positivi, che

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) < (m\mathbf{a} = m\mathbf{b});\ m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b};\ (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a};$$
$$m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a};\ 1\,\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura $m\,\mathbf{a}$, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente $m\,\mathbf{a}$ si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l'ente **a**.

4. Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo con 0, tale che, qualunque sia l'ente **a**, il prodotto del numero 0 per l'ente **a** dia sempre l'ente 0, ossia

$$0\,\mathbf{a} = 0.$$

Se alla scrittura $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ si attribuisce il significato $\mathbf{a} + (-1)\,\mathbf{b}$, si deduce:

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = 0,\ \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}.$$

DEF. *I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi* sistemi lineari.

Si deduce che se **a**, **b**, **c**, ... sono enti d'uno stesso sistema lineare, $m, n, p, \ldots$ numeri reali, ogni funzione lineare omogenea della forma $m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} + \ldots$ rappresenta un ente dello stesso sistema.

Costituiscono sistemi lineari i numeri reali, e le formazioni della stessa specie nello spazio.

Costituiscono pure sistemi lineari le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, i vettori nel piano o nello spazio, e così via. Ma i punti dello spazio non costituiscono un sistema lineare, perchè le loro somme, secondo le definizioni date, non sono più punti, ma formazioni qualunque di prima specie.

73. DEF. *Più enti* $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$ *d'un sistema lineare diconsi fra loro* dipendenti, *se si possono determinare n numeri* $m_1\,m_2 \ldots m_n$, *non tutti nulli, in guisa che risulti*

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n = 0.$$

In questo caso uno qualunque degli enti, il cui coefficiente non sia nullo, si può esprimere qual funzione lineare omogenea dei rimanenti.

Se gli enti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ sono fra loro indipendenti, e se fra essi passa una relazione $m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_n\mathbf{a}_n = 0$, si deduce $m_1 = 0, \dots m_n = 0$.

Essendo AB ... formazioni di prima specie nello spazio, le equazioni $AB = 0$, $ABC = 0$, $ABCD = 0$ esprimono la dipendenza fra 2 o 3 o 4 formazioni. 5 formazioni di prima specie nello spazio sono sempre fra loro dipendenti.

DEF. *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.*

Ad esempio le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, o nello spazio, formano sistemi lineari rispettivamente a 2, 3 e 4 dimensioni; i vettori nel piano o nello spazio formano sistemi a 2 e 3 dimensioni; le formazioni di seconda specie nello spazio formano un sistema a 6 dimensioni. I numeri reali formano un sistema lineare ad una dimensione; i numeri immaginarii o complessi ordinarii formano un sistema a due dimensioni. Un sistema lineare può anche avere infinite dimensioni.

TEOR. *Se il sistema A è ad* n *dimensioni, presi nel sistema n enti indipendenti* $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$, *e dato un nuovo ente* $\mathbf{a}$, *si possono sempre determinare n numeri* $x_1 \dots x_n$, *in guisa che risulti*

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n. \tag{1}$$

Inoltre essi sono determinati univocamente, ossia

$$(x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = x_1'\mathbf{a}_1 + \dots + x_n'\mathbf{a}_n) = (x_1 = x_1') \cdot \dots \cdot (x_n = x_n'). \tag{2}$$

Infatti, poichè il sistema $\mathbf{a}$ è ad n dimensioni, fra gli $n+1$ enti $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ passerà una relazione della forma della definizione 1ª; in questa relazione il coefficiente di $\mathbf{a}$ non è nullo, perchè altrimenti passerebbe una relazione fra $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$, cosa contraria all'ipotesi; risolta quindi questa relazione rispetto ad $\mathbf{a}$ si ha la formula a dimostrarsi.

Se poi fosse $x_1\mathbf{a}_1 + \dots = x_1'\mathbf{a}_1 + \dots$, si deduce $(x_1 - x_1')\mathbf{a}_1 + \dots = 0$; e quindi, poichè $\mathbf{a}_1 \dots$ sono indipendenti, $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, ...

DEF. *Essendo* $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_n$ *n enti indipendenti d'un sistema ad n dimensioni, i numeri* $x_1 \ldots x_n$ *che soddisfano alla relazione* (1) *diconsi le* coordinate *di* **a** *rispetto agli* enti di riferimento $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$.

Le formule

$$(3)\quad (x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n)+(y_1\mathbf{a}_1+\ldots+y_n\mathbf{a}_n)=(x_1+y_1)\mathbf{a}_1+\ldots+(x_n+y_n)\mathbf{a}_n,$$

$$(4)\qquad m(x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n)=mx_1\mathbf{a}_1+\ldots+mx_n\mathbf{a}_n,$$

dànno le coordinate della somma di due enti, e del prodotto d'un numero m per un ente in funzione delle coordinate di questi enti. Le coordinate dell'ente 0 sono tutte nulle.

La definizione precedente coincide colle definizioni date ai N. 34, 38, 46, 50, 60 per le formazioni di prima specie su d'una retta, pei vettori nel piano, per le formazioni di prima e seconda specie nel piano, ecc.

Se $x_1 \ldots x_n$ sono le coordinate di **a** rispetto agli enti di riferimento $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$, ossia

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n,$$

e si conoscono le coordinate di $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ rispetto ad un altro gruppo di enti di riferimento $\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$, ossia

$$\mathbf{a}_1 = m_{11}\mathbf{b}_1 + \ldots + m_{1n}\mathbf{b}_n, \ldots, \mathbf{a}_n = m_{n1}\mathbf{a}_1 + \ldots + m_{nn}\mathbf{a}_n,$$

sostituendo si deduce:

$$\mathbf{a} = (m_{11}x_1 + \ldots + m_{n1}x_n)\ \mathbf{b}_1 + \ldots + (m_{1n}x_1 + \ldots + m_{nn}x_n)\ \mathbf{b}_n.$$

Si hanno in tal modo calcolate le coordinate di **a** rispetto a $\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$; esse sono funzioni lineari ed omogenee delle coordinate di **a** rispetto ad $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$; i coefficienti di queste funzioni sono le coordinate di $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ rispetto a $\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$.

74. Un ente d'un sistema si può considerare come costante o variabile.

DEF. *Diremo che l'ente variabile* **a** *d'un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni, ha per limite l'ente fisso* $\mathbf{a}_0$, *se le coordinate di* **a**, *rispetto ad enti fissi, hanno per limite le coordinate di* $\mathbf{a}_0$.

Risulta dalle cose dette che il limite non dipende dagli enti di riferimento.

Un ente variabile **a** d'un sistema lineare può essere funzione d'una variabile numerica t; su questa funzione si possono dare le definizioni di *derivata, derivate successive, integrale indefinito* e *definito* che si ricavano dai N^i 66, 67 e 70, leggendo 'ente d'un sistema lineare' invece di 'formazione geometrica'; sono pure applicabili i teoremi ivi trovati, che si riferiscono puramente alle somme, moltiplicazioni per numeri, e coordinate.

Un ente **y**, funzione d'un ente **x**, dicesi *funzione continua*, se il limite della funzione è la funzione del limite. Si suppone naturalmente definito il limite dell'ente **x** e dell'ente **y**. Se l'ente **y** d'un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni è funzione continua dell'ente **x** appartenente pure ad un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni, le coordinate di **y** sono funzioni (numeriche) continue delle coordinate di **x**.

75. DEF. *Un'operazione* **R**, *a eseguirsi su ogni ente* **a** *d'un sistema lineare A, dicesi* distributiva, *se il risultato dell'operazione* **R** *sull'ente* **a**, *che indicheremo con* **Ra**, *è pure un ente d'un sistema lineare, e sono verificate le identità*

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}+\mathbf{a}') = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{a}', \quad \mathbf{R}(m\mathbf{a}) = m(\mathbf{R}\mathbf{a}),$$

ove **a** *e* **a**′ *sono enti qualunque del sistema A, ed m un numero reale qualunque.*

L'ente **Ra**, cioè il risultato dell'operazione distributiva **R** sull'ente **a**, dicesi *funzione distributiva* di **a**. Un'operazione distributiva si chiamerà anche *trasformazione lineare*, o *trasformazione* senz'altro. Se l'ente **Ra** appartiene allo stesso sistema lineare *A* cui appartengono gli enti **a**, l'operazione **R** si dirà una *sostituzione*. L'ente **Ra** dicesi anche prodotto della trasformazione **R** per l'ente **a**.

Essendo **R** un'operazione distributiva, **a**, **b**, ... enti del sistema A, e $m, n, \ldots$ numeri, si avrà:

$$\mathbf{R}(m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + \ldots) = m\mathbf{R}\mathbf{a} + n\mathbf{R}\mathbf{b} + \ldots$$

$$\mathbf{R}0 = 0.$$

L'unica operazione distributiva a eseguirsi sui numeri (reali), e il cui risultato sia ancora un numero, è la moltiplicazione. Se A e B sono formazioni geometriche di specie qualunque, il loro prodotto progressivo o regressivo AB è funzione distributiva di ambi i fattori. Le operazioni indicate coi segni $\perp$ e $|$, da eseguirsi sui vettori d'un piano, o sui vettori e bivettori dello spazio, sono operazioni distributive.

La moltiplicazione d'un ente d'un sistema lineare per un numero m è un'operazione distributiva. Una qualunque delle coordinate dell'ente **a** d'un sistema ad n dimensioni, rispetto ad enti fissi, è funzione distributiva di **a**, come indicano le formule (3) e (4) del N. 73.

Si osservi che delle due condizioni imposte ad una operazione per essere distributiva, la seconda è conseguenza della prima per m commensurabile; se m è incommensurabile, essa si può pure dedurre dalla prima, supposta p. e. la continuità della formazione **Ra.**

76. Introdurremo le seguenti convenzioni:

1° Essendo **R** e **S** due trasformazioni degli enti del sistema A in enti d'uno stesso sistema lineare B, porremo

$$\mathbf{R} = \mathbf{S},$$

se, qualunque sia l'ente **a** del sistema A, si ha $\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{a}$.

2° La moltiplicazione degli enti d'un sistema per un numero m, è, come si è detto, un'operazione distributiva; noi la indicheremo collo stesso numero m. Quindi le eguaglianze $\mathbf{R} = 1$, $\mathrm{R} = 0$ dicono che l'operazione **R** fa corrispondere ad ogni ente rispettivamente sè stesso, o zero.

3° Essendo **R** ed **S** trasformazioni degli enti **a** d'un sistema A in enti d'uno stesso sistema lineare B, porremo

$$(\mathbf{R}+\mathbf{S})\,\mathbf{a}=\mathbf{R}\mathbf{a}+\mathbf{S}\mathbf{a}.$$

L'operazione indicata col segno $\mathbf{R}+\mathbf{S}$ è pure distributiva. La diremo *somma* delle due operazioni **R** ed **S**; essa è una nuova trasformazione degli enti di A in enti di B. Sono evidentemente soddisfatte le condizioni imposte ad una somma al N. 72.

4° Essendo **R** una trasformazione degli enti **a** del sistema A in enti del sistema B, ed essendo **S** una trasformazione degli enti B in enti d'un sistema C, porremo

$$\mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{a}=\mathbf{S}\,(\mathbf{R}\mathbf{a}).$$

L'operazione indicata col segno **SR** è pure distributiva; la diremo *prodotto* delle due trasformazioni **R** ed **S**. L'operazione **SR** trasforma gli enti del sistema A in enti del sistema C.

Come caso particolare, poichè un numero rappresenta una trasformazione, è definito il prodotto $m\mathbf{R}$, d'una trasformazione **R** per un numero, e sono soddisfatte le condizioni imposte al N. 72, 3°.

Si deduce che le varie trasformazioni degli enti d'un sistema A in enti d'un sistema B costituiscono un sistema lineare.

Se **R**, **R**′ sono trasformazioni degli enti A in enti B, e se **S**, **S**′, sono trasformazioni degli enti B in enti C, si avrà

$$\mathbf{S}\,(\mathbf{R}+\mathbf{R}')=\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{S}\mathbf{R}',\ \ (\mathbf{S}+\mathbf{S}')\,\mathbf{R}=\mathbf{S}\mathbf{R}+\mathbf{S}'\mathbf{R}.$$

Se **R**, **S**, **T** trasformano rispettivamente gli enti A in B, gli enti B in C, e gli enti C in D, si avrà $\mathbf{T}\,(\mathbf{S}\mathbf{R})=(\mathbf{T}\mathbf{S})\,\mathbf{R}$, e il loro valore comune si indicherà con **TSR**; questa è una trasformazione degli enti del sistema A in enti del sistema D.

Quindi la moltiplicazione delle trasformazioni ha la proprietà distributiva rispetto alla somma, e l'associativa; ma essa non è in generale commutativa, vale a dire non è in generale $\mathbf{S}\mathbf{R}=\mathbf{R}\mathbf{S}$.

Quando questa condizione è soddisfatta, le due operazioni si diranno *commutabili* fra loro. Se m è un numero, **R** una trasformazione qualunque, si avrà $m\mathbf{R} = \mathbf{R}m$, ossia le trasformazioni eguali a numeri sono commutabili con ogni altra trasformazione.

77. TEOR. *Se* $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ *sono n enti indipendenti d'un sistema lineare A ad n dimensioni, e* $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ *sono enti pure d'un sistema lineare, è determinata una ed una sola trasformazione* **R** *del sistema A che soddisfa alle condizioni*

$$(\alpha) \qquad \mathbf{R}\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{R}\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n.$$

Infatti, ad ogni ente **a** del sistema A corrispondono gli n numeri $x_1 \dots x_n$ che soddisfano alla condizione $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$, cioè le coordinate di **a** rispetto ad $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$, le quali sono funzioni distributive di **a**. Pongasi $\mathbf{R}\mathbf{a} = x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$; sarà $\mathbf{R}\mathbf{a}$ una funzione distributiva di **a**, e quindi l'operazione **R** è distributiva, e soddisfa evidentemente alle condizioni imposte (α).

Se poi **R** e **S** sono due trasformazioni che soddisfano alle condizioni (α), preso un ente qualunque $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ di A, si scorge subito che $\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{S}\mathbf{a}$, e quindi $\mathbf{R} = \mathbf{S}$.

DEF. *La trasformazione degli enti del sistema lineare A ad n dimensioni che fa corrispondere agli n enti indipendenti* $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ *gli enti* $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_n$ *si indicherà colla scrittura:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Il gruppo degli enti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ dicesi anche il *denominatore* della trasformazione, mentre il gruppo $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ dicesi il *numeratore* della medesima. Per denominatore d'una trasformazione si può prendere un gruppo qualunque di n enti indipendenti di A. Due trasformazioni degli enti dello stesso sistema A si possono sempre ridurre allo stesso denominatore.

Si ricava da questa definizione, e dalle proposizioni precedenti:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} (x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n) = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n.$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \dots \mathbf{b}_n' \\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \right\} = (\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1') \cap (\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2') \cap \dots \cap (\mathbf{b}_n = \mathbf{b}_n').$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, ,,. \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1, & \mathbf{c}_2, \dots \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1, & \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2, \dots \mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{a}_1 & m\mathbf{a}_2 \dots m\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = m; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 1; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots 0 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_n \\ \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

La coordinata x_1 dell'ente $\mathbf{a}$ rispetto agli enti di riferimento $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ è, come si è detto, una funzione distributiva di $\mathbf{a}$; l'operazione che dà questa coordinata si può indicare col segno

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots 0 \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Essendo a, b, c numeri, l'espressione $\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} a$ vale $\frac{c}{b} a$.

DEF. *Se* $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ *è una trasformazione degli enti del sistema A ad n dimensioni negli enti del sistema B pure ad n dimensioni, e gli enti* $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ *sono fra loro indipendenti, porremo*

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

La $\mathbf{R}^{-1}$ sarà una trasformazione degli enti del sistema B in enti del sistema A; essa dicesi l'*inversa* di $\mathbf{R}$. Si ha:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = 1, \ \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = 1, \ (\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}.$$

78. Fra le trasformazioni meritano menzione speciale le *sostituzioni*, ossia le trasformazioni degli enti d'un sistema lineare A in enti dello stesso sistema lineare. Sono sostituzioni le trasformazioni eguali a numeri. Le sostituzioni si possono sempre sommare e moltiplicare fra loro e con numeri.

Se $\mathbf{R}$ è una sostituzione, indicheremo con $\mathbf{R}^n$, ove n è un numero intero e positivo, il prodotto di n sostituzioni $\mathbf{R}$. Si avrà

$$\mathbf{R}^m \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}; \quad (\mathbf{R}^m)^n = \mathbf{R}^{mn}. \tag{1}$$

Se esiste la sostituzione $\mathbf{R}^{-1}$ inversa della $\mathbf{R}$, essendo n un numero intero positivo, porremo $\mathbf{R}^{-n} = (\mathbf{R}^{-1})^n$, e $\mathbf{R}^0 = 1$. Si deduce che, qualunque siano i numeri interi m ed n, positivi o negativi, sussistono le formule (1).

Essendo $\mathbf{R}$ una sostituzione qualunque, porremo per definizione

$$e^{\mathbf{R}} = 1 + \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R}^2}{2!} + \frac{\mathbf{R}^3}{3!} + \dots$$

Si suppongono estese agli enti lineari e alle trasformazioni le definizioni di serie, convergenza, e loro somma.

Si può dimostrare che la serie del secondo membro è sempre convergente, supposto che il sistema lineare A abbia un numero finito di dimensioni (V. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari. Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, 1887).

Essendo t una variabile numerica, $\mathbf{a}_0$ un ente costante del sistema A, e fatto

$$\mathbf{a} = e^{\mathbf{R}t}\, \mathbf{a}_0,$$

sarà $\mathbf{a}$ funzione di t, che per $t = 0$ si riduce ad $\mathbf{a}_0$, e che soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{R}\,\mathbf{a}.$$

Se due sostituzioni $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$ sono fra loro commutabili, cioè

$\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$, sono pure commutabili con esse e fra loro le sostituzioni $\mathbf{R} + \mathbf{S}$, $\mathbf{RS}$, $\mathbf{R}^{-1}$, $e^{\mathbf{R}}$, e tutte le sostituzioni che si ottengono da queste ripetendo le stesse operazioni. Nella ipotesi della commutabilità di $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$ sarà pure $e^{\mathbf{R}+\mathbf{S}} = e^{\mathbf{R}}\,'e^{\mathbf{S}}$.

Le varie sostituzioni che si possono ottenere da una sostituzione $\mathbf{R}$ e da numeri colle operazioni somma, moltiplicazione, inversione, esponenziale sono fra loro commutabili.

79. Sia $\mathbf{x}$ un ente d'un sistema lineare A, e sia $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ una sua funzione, il cui risultato appartenga pure ad un sistema lineare B. Essendo $\mathbf{x}'$ un ente qualunque del sistema A, porremo per definizione del primo membro

$$\left(d\ \begin{matrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)\mathbf{f}(\mathbf{x}) = lim\,\frac{1}{h}\,[f(\mathbf{x}+h\,\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})]$$

il limite essendo ottenuto col far tendere il numero h a zero. L'ente $\left(d\ \begin{matrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$ appartiene al sistema lineare B, ed è funzione di $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{x}'$. All'ente $\mathbf{x}'$ si dà il nome di differenziale della variabile indipendente $\mathbf{x}$, e all'ente $\left(d\ \begin{matrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$ quello di differenziale della funzione $f(\mathbf{x})$. Quando sia ben fissata la variabile indipendente $\mathbf{x}$ e il suo differenziale $\mathbf{x}'$, al posto di $\left(d\ \begin{matrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)$ scriveremo semplicemente la lettera d.

Se p. e. $f(x)$ è una funzione numerica del numero x, avente derivata $f'(x)$, si avrà

$$\left(d\ \begin{matrix}1\\ x\end{matrix}\right)f(x) = f'(x),\quad \left(d\ \begin{matrix}h\\ x\end{matrix}\right)f(x) = f'(x)\,h.$$

Se il sistema lineare A ha m dimensioni, e quello B ha n dimensioni, posto

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m$$
$$\mathbf{x}' = x_1'\mathbf{a}_1 + \ldots + x'_m\mathbf{a}_m$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + \ldots + y_n\mathbf{b}_n,$$

ove $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ sono gli enti di riferimento nei sistemi A e B, se l'ente $\mathbf{y}$ è funzione di $\mathbf{x}$, le variabili numeriche $y_1, \dots y_n$, sono funzioni dei numeri $x_1 \dots x_m$, e si avrà:

$$\left(d \begin{matrix}\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)\mathbf{y} = \left(\frac{dy_1}{dx_1}x_1' + \dots + \frac{dy_1}{dx_m}x'_m\right)\mathbf{b}_1 + \dots$$
$$+ \left(\frac{dy_n}{dx_1}x_1' + \dots + \frac{dy_n}{dx_m}x_m'\right)\mathbf{b}_n,$$

supposta la continuità delle derivate parziali delle y rispetto alle x.

Nella stessa ipotesi, supposto k un numero reale, e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ due enti del sistema lineare A, si ha

$$\left(d \begin{matrix}k\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x}) = k\left(d \begin{matrix}\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$$

$$\left(d \begin{matrix}\mathbf{x}'+\mathbf{x}'' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x}) = \left(d \begin{matrix}\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x}) + \left(d \begin{matrix}\mathbf{x}'' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x}).$$

Queste due ultime formule dicono che $\left(d \begin{matrix}\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$ è funzione distributiva dell'ente $\mathbf{x}'$.

L'operazione distributiva o trasformazione, che eseguita su $\mathbf{x}'$, dà per risultato $\left(d \begin{matrix}\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$, si potrà indicare con $\left(d \begin{matrix}* \\ \mathbf{x}\end{matrix}\right)f(\mathbf{x})$, e si potrebbe chiamare la *derivata* dell'ente $\mathbf{y}$ rispetto all'ente $\mathbf{x}$.

Applicazioni.

80. 1. Detta $a\,\alpha\,b$ una proposizione qualunque contenente due enti a e b dello stesso sistema, possono essere soddisfatte o no le equazioni logiche

(1) $$(a\,\alpha\,b) = (b\,\alpha\,a)$$

(2) $$(a\,\alpha\,b) \cap (b\,\alpha\,c) < (a\,\alpha\,c).$$

Così se con $a\,\alpha\,b$ si intende la proposizione

'il numero a è il quadrato del numero b'

non sarà soddisfatta alcuna delle equazioni (1) e (2). Se invece collo stesso segno si intende

‘ il numero a è eguale e di segno contrario al numero b ’
‘ la retta a incontra la retta b ’
‘ la retta a è perpendicolare alla retta b ’,

sarà soddisfatta la (1), ma non la (2). Le proposizioni:

‘ il numero a è maggiore di b ’,
‘ il numero a è un multiplo del numero b ’,

soddisfano alla condizione (2), ma non alla (1). Le proposizioni:

‘ il numero a è eguale al numero b ’
‘ il numero a è congruente col numero b, rispetto ad un modulo fisso ’
‘ la retta a è parallela alla retta b ’
‘ la retta a coincide colla b ’
‘ la figura a è sovrapponibile alla figura b ’, ecc.

soddisfano alle due condizioni (1) e (2), perciò esse si possono considerare come eguaglianze (N. 72).

2. L’*identità* di due enti a e b, ossia l’affermazione che a e b sono due nomi attribuiti ad uno stesso ente, è una eguaglianza particolare. Ma fra gli enti d’uno stesso sistema si possono stabilire più specie di eguaglianze. Così se si considerano i segmenti rettilinei AA', BB', ... descritti da un punto che li percorra dalla loro origine al loro termine, l’identità di due segmenti equivale all’identità delle loro origini e dei loro termini. Ma le proposizioni: ‘ il segmento AB si può sovrapporre ad $A'B'$ ’ ‘ la retta AB è parallela ad $A'B'$ ’ ‘ la retta AB coincide colla $A'B'$ ’, ecc., si possono assumere come altrettante eguaglianze.

3. Ogni eguaglianza fra gli enti d’un sistema, diversa dall’identità, equivale all’identità fra gli enti che si ottengono da quelli del sistema dato astraendo da tutte e sole quelle proprietà che distinguono un ente dai suoi eguali. Così l’eguaglianza ‘ il segmento AB è sovrapponibile ad $A'B'$ ’ equivale all’identità fra gli enti che si ottengono da ogni segmento astraendo da tutte le proprietà che lo distinguono da quelli con cui è sovrapponibile. L’ente che risulta da questa astrazione vien chiamato *grandezza* del segmento; l’eguaglianza precedente equivale quindi all’identità delle grandezze dei due segmenti. Se conve-

niamo di indicare col segno = l'identità, l'eguaglianza ora considerata si potrà scrivere:

$$gr\,AB = gr\,A'B'.$$

Analogamente, l'eguaglianza ' la retta AB è parallela ad A'B' ' si può scrivere:

$$\text{direzione } AB = \text{direzione } A'B'$$

e così via.

4. Il prodotto logico (congiunzione) di due eguaglianze è ancora un'eguaglianza; non lo è più la negazione d'un'eguaglianza, o la somma logica di due eguaglianze.

81. 1. Si considerino dei sistemi di forze applicate ad una figura di forma invariabile, o variabile con leggi determinate. Attribuendo ai segni $=$, $+$, 0 i significati di equivalenza meccanica di due sistemi, di sovrapposizione meccanica di due sistemi, di sistema in equilibrio, e per prodotto d'un sistema per un numero intendendo il sistema che si ottiene moltiplicando tutte le forze per questo numero, si deduce che i sistemi di forze sono enti d'un sistema lineare. Il numero delle dimensioni di questo sistema lineare dipende dalla variabilità della figura; se questa è rigida e libera nello spazio, il sistema è a 6 dimensioni.

2. Si considerino le funzioni algebriche intere $f(x)$ d'una variabile numerica x. Intendendo con $f_1(x) = f_2(x)$ l'identità dei valori di $f_1(x)$ e $f_2(x)$, qualunque sia il valore di x, con $f_1(x) + f_2(x)$ la funzione intera somma di $f_1(x)$ e $f_2(x)$, con $mf(x)$, ove m è un numero, il prodotto del numero m per la funzione $f(x)$, e con 0 una funzione nulla per ogni valore di x, le funzioni considerate sono enti di un sistema lineare.

Se si considerano solo le funzioni intere di grado n, esse costituiscono un sistema lineare ad $n+1$ dimensioni; le funzioni intere di grado qualunque formano un sistema lineare ad infinite dimensioni.

3. Dalle ipotesi 1, 2, 3 e 4 fatte al N. 72 si deduce $(\mathbf{a} = \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Viceversa delle ipotesi 1, 2 e 3, e da questa eguaglianza logica si può dedurre la 4.

82. 1. Se $u = \mathbf{R}A$ è un numero, funzione distributiva delle formazioni di prima specie A su d'una retta, si può determinare un'altra formazione di prima specie P sulla stessa retta, in guisa che, qualunque sia A, si abbia:

$$\mathbf{R}A = PA$$

dove, nel secondo membro, con PA si intende il numero $\frac{PA}{u}$ (V. N. 33).

Se $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}$, ossia se u_1 e u_2 sono i valori di u corrispondenti alle due formazioni $A_1 A_2$, il cui prodotto non sia nullo, basta fare

$$P = \frac{1}{A_1 A_2} (u_2 A_1 - u_1 A_2).$$

2. Se $u = \mathbf{R} A$ è un numero, funzione distributiva della formazione di prima specie A in un piano, si può determinare una formazione di seconda specie p nel piano, in guisa che, qualunque sia A, si abbia:

$$\mathbf{R} A = p A,$$

ove, nel secondo membro, con pA si intende il numero $\frac{pA}{\omega}$ (V. N. 43).

3. Se $u = \mathbf{R} a$ è un numero, funzione distributiva delle formazioni di seconda specie a del piano, si può determinare una formazione di prima specie P nel piano, in modo che, qualunque sia a, si abbia:

$$\mathbf{R} a = P a.$$

4. Se $u = \mathbf{R} U$ è un numero, funzione distributiva dei vettori U dello spazio, si può determinare un vettore I in modo che, qualunque sia U, si abbia:

$$\mathbf{R} U = I | U.$$

5. Se $u_1 = \mathbf{R}_1 A$, $u_2 = \mathbf{R}_2 a$, $u_3 = \mathbf{R}_3 \alpha$ sono numeri funzioni distributive delle formazioni A, a, α, di 1ª, 2ª e 3ª specie nello spazio, si possono determinare le formazioni π, p, P di 3ª, 2ª e 1ª specie, in guisa che, qualunque siano A, a, α, si abbia:

$$\mathbf{R}_1 A = \pi A, \quad \mathbf{R}_2 a = p a, \quad \mathbf{R}_3 \alpha = P \alpha.$$

83. 1. Siano A, B due formazioni di prima specie su d'una retta, A′, B′ due altre formazioni di prima specie su d'una seconda retta.

Supposto AB non nullo, la trasformazione:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A & B \end{pmatrix}$$

dicesi un'*omografia*. Essa fa corrispondere ad ogni formazione di prima specie della prima retta una formazione della stessa specie sulla seconda; ad A e B

corrispondono A′ e B′. Se A′B′ non è nullo, la trasformazione **T** permette inversione, e la $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$ fa corrispondere ad ogni formazione della seconda retta una formazione della prima.

2. Se $P = xA + yB$ e $Q = x'A + y'B$ sono formazioni della prima retta, posto $\mathbf{T}P = P'$, $\mathbf{T}Q = Q'$, sarà $P' = xA' + yB'$, $Q' = x'A' + y'B'$. Si deduce $PQ = (xy' - x'y)AB$, $P'Q' = (xy' - x'y)A'B'$, onde

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{P'Q'}{A'B'}.$$

Si deduce di qui che il doppio rapporto (N. 36, 2) di quattro formazioni della prima retta è eguale a quello delle loro corrispondenti.

3. Se A, B, A′, B′ sono punti semplici, l'omografia dicesi *similitudine*. In questo caso ad ogni punto semplice corrisponde un punto semplice, ad un vettore un vettore.

4. Essendo ABA′B′ quattro formazioni di prima specie su d'una stessa retta, la trasformazione **T** è una sostituzione.

Fra la sostituzione **T** e il suo quadrato $\mathbf{T}^2$ passa la relazione:

$$\mathbf{T}^2 - p\mathbf{T} + q = 0,$$

ove si è posto:

$$p = \frac{AB' + A'B}{AB}, \quad q = \frac{A'B'}{AB}.$$

I numeri p e q hanno importanza nello studio della sostituzione **T**. Se q è nullo, la **T** non ammette inversione.

Se p è nullo, il quadrato di **T** vale il numero $-q$.

5. Una sostituzione non numerica, il cui quadrato sia un numero, dicesi *involuzione*. Se **T** è un'involuzione, $\mathbf{T}^2P$ coincide con P.

6. La sostituzione:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A, & -B \\ A, & B \end{pmatrix}$$

ha per quadrato 1, e quindi è un'involuzione; gli elementi A e B coincidono coi loro corrispondenti. Ogni sostituzione, diversa da 1 e -1, il cui prodotto sia 1, è riduttibile alla forma precedente.

La sostituzione $\begin{pmatrix} Q & P \\ P & Q \end{pmatrix}$, il cui quadrato vale 1, si riduce alla forma precedente, facendo $A = P + Q$, $B = P - Q$.

7. La sostituzione:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}, & -\mathrm{A} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

ha per quadrato -1, ed è perciò un'involuzione; in essa nessun elemento coincide col corrispondente. Ogni sostituzione il cui quadrato vale -1 è riduttibile alla forma precedente in infiniti modi, potendosi prendere ad arbitrio l'elemento A.

8. La sostituzione:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

ha per quadrato 0. Ogni sostituzione non nulla, il cui quadrato è nullo, si può ridurre alla forma precedente; l'elemento A si può prendere ad arbitrio, purchè non coincidente con B, cui corrisponde lo zero.

9. Una sostituzione **T**, se i numeri p e q soddisfano alla condizione $\frac{p^2}{4} - q > 0$ si può ridurre in modo unico alla forma:

$$\mathbf{T} = x + y\mathbf{I},$$

ove x e y sono numeri reali, e **I** è una involuzione, il cui quadrato vale 1 (V. es. 6). Nelle stesse ipotesi, la sostituzione **T** si può pure ridurre alla forma:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} k_1\,\mathrm{A}, & k_2\,\mathrm{B} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

ove k_1 e k_2 sono le radici reali dell'equazione $k^2 - pk + q = 0$.

10. Una sostituzione **T**, ove $\frac{p^2}{4} - q < 0$, è riduttibile in modo unico alla forma:

$$\mathbf{T} = x + y\mathbf{I},$$

ove x ed y sono numeri reali, ed **I** una sostituzione il cui quadrato vale -1 (V. es. 7).

11. Una sostituzione **T**, ove $\frac{p^2}{4} - q = 0$, è riduttibile alla forma:

$$\mathbf{T} = x + \mathbf{I},$$

ove **I** è una sostituzione il cui quadrato vale 0 (V. es. 8).

12. Se $\mathbf{I}^2 = 1$, sarà:

$$e^{x+y\mathbf{I}} = e^x \ (\mathrm{Ch}\ y + \mathbf{I}\,\mathrm{Sh}\ y);$$

se invece $\mathbf{I}^2 = -1$, sarà:

$$e^{x+y\mathbf{I}} = e^x \ (\cos y + \mathbf{I}\,\mathrm{sen}\ y);$$

e se $\mathbf{I}^2 = 0$, sarà:

$$e^{x+y\mathbf{I}} = e^x \ (1 + \mathbf{I}y).$$

13. Essendo A, B punti semplici, I un vettore, la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} + \mathrm{I}, & \mathrm{I} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

rappresenta una *traslazione*, per cui ad ogni punto P si fa corrispondere il punto P + I; la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}, & -\mathrm{I} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

rappresenta una *simmetria*, per cui ad ogni punto si fa corrispondere il simmetrico rispetto al punto A.

14. Facciasi

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}, & \mathrm{A} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}, & -\mathrm{B} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}, & -\mathrm{A} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix};$$

si avrà

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = -\mathbf{K}^2 = 1; \quad \mathbf{IJ} = -\mathbf{JI} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{IK} = -\mathbf{KI} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{KJ} = -\mathbf{JK} = \mathbf{I}.$$

Ogni sostituzione $\mathbf{T}$ si può ridurre alla forma

$$\mathbf{T} = m + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K},$$

ove m, x, y, z sono numeri (coordinate di $\mathbf{T}$ rispetto alle sostituzioni di riferimento 1, **I**, **J**, **K**).

Conservando le notazioni dell'es. 4 del presente N., si avrà

$$p = 2m, \quad q = m^2 - x^2 - y^2 + z^2.$$

Se $m = 0$, la $\mathbf{T}$ è un'involuzione.

15. Se **S** e **T** sono due involuzioni, anche la loro somma $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ è un'involuzione. La trasformazione $\mathbf{ST}+\mathbf{TS}$ è eguale ad un numero; se questo numero è nullo, le due involuzioni diconsi *armoniche*, e sarà $\mathbf{ST}=-\mathbf{TS}$.

La trasformazione $\mathbf{ST}-\mathbf{TS}$ è un'involuzione; se questa involuzione è nulla, sarà $\mathbf{ST}=\mathbf{TS}$, e le due involuzioni sono *commutabili*. I prodotti **ST** e **TS** rappresentano involuzioni se le due involuzioni sono armoniche.

16. L'equazione:

$$\mathbf{T}^n + a_1\mathbf{T}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{T} + a_n = 0,$$

ove $a_1 \ldots a_n$ sono numeri dati, e **T** è una sostituzione a determinarsi delle formazioni di prima specie su d'una retta, è soddisfatta:

a) Facendo $\mathbf{T}=x$, ove x sia un numero (reale) che sostituito nell'equazione precedente al posto di **T**, la soddisfi.

b) Se x_1 e x_2 sono due numeri disuguali che, sostituiti al posto di **T** soddisfano all'equazione, si può fare:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} x_1\,\mathrm{A}, & x_2\,\mathrm{B} \\ \mathrm{A}, & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

ove **A** e B sono formazioni arbitrarie.

c) Se il numero complesso $x+y\sqrt{-1}$ sostituito al posto di **T** soddisfa all'equazione data, si può fare $\mathbf{T}=x+y\mathbf{I}$, ove **I** sia una sostituzione qualunque il cui quadrato valga -1 (V. es. 7).

Ogni soluzione dell'equazione proposta è compresa nelle precedenti.

84. 1. Le cose dette precedentemente sulle sostituzioni delle formazioni di prima specie su d'una retta sono applicabili a tutte le sostituzioni degli enti di sistemi lineari a due dimensioni; come caso particolare ai sistemi di vettori di un piano.

L'operazione distributiva $\perp$, a eseguirsi sui vettori d'un piano, trasforma i vettori in vettori; quindi è una sostituzione; e poichè (N. 40)

$$\perp^2 = -1,$$

essa rappresenta un'involuzione. Quindi ogni espressione della forma $x+y\perp$ ove x ed y sono numeri (reali) rappresenta una sostituzione dei vettori del piano. Se U è un vettore, posto

$$\mathrm{V}=(x+y\perp)\,\mathrm{U},$$

sarà $V = xU + y \perp U$, ossia V è un vettore avente per coordinate x ed y rispetto ai vettori U e $\perp U$.

2. Si avrà, essendo x un numero:

$$e^{x\perp} = \cos x + \perp \operatorname{sen} x.$$

L'espressione:

$$V = r\, e^{x\perp} U,$$

ove U è un vettore, x è un numero reale, r un numero positivo, rappresenta il vettore che si ottiene facendo rotare il vettore U dell'angolo x, e poi moltiplicandolo per r.

3. L'equazione:

$$P_1 = O + e^{x\perp} (P - O),$$

ove O sia un punto semplice, fa corrispondere ad ogni punto P del piano un punto P_1 che si ottiene facendo rotare P attorno ad O dell'angolo x.

4. Ponendo:

$$P_1 = P + I, \quad P_2 = O + e^{x\perp} (P_1 - O),$$

sarà P_2 la nuova posizione del punto P dopo una traslazione rappresentata dal vettore I, ed una rotazione attorno ad O dell'angolo x. Si ricava:

$$P_2 = O + e^{x\perp} I + e^{x\perp} (P - O). \tag{1}$$

Si determini il punto C in modo che sia:

$$C = O + e^{x\perp} I + e^{x\perp} (C - O). \tag{2}$$

Si ricava:

$$C = O + \frac{e^{x\perp}}{1 - e^{x\perp}} I = O + \frac{1}{e^{-x\perp} - 1} I = O + \frac{\perp e^{\frac{x}{2}\perp}}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x} I.$$

Sottraendo dalla (1) la (2), si deduce:

$$P_2 = C + e^{x\perp} (P - O),$$

ossia una traslazione susseguita da una rotazione equivale ad una sola rotazione.

5. Una rotazione dell'angolo x attorno al punto O_1 susseguita da una rotazione dell'angolo y attorno al punto O_2 equivale ad una rotazione sola dell'angolo $x+y$ attorno al punto

$$O_1 + \frac{1-e^{y\perp}}{1-e^{(x+y)\perp}}(O_2-O_1) = O_1 + \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}y}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)} e^{-\frac{1}{2}x\perp}(O_2-O_1) =$$

$$= O_2 + \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)} e^{\frac{1}{2}y\perp}(O_1-O_2),$$

supposto $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)$ non nullo; se questo avvenisse, l'insieme delle due rotazioni equivale ad una traslazione.

6. Essendo U e V due vettori nel piano, di cui il primo non nullo, si può sempre determinare, e in modo unico, una trasformazione della forma $x+y\perp$ in guisa che risulti:

$$V = (x + y\perp)\,U.$$

Questa trasformazione si potrà indicare con $\frac{V}{U}$. Si deduce:

$$\frac{V}{U} = \begin{pmatrix} V, \perp V \\ U, \perp U \end{pmatrix} = \frac{U \perp V}{U \perp U} + \frac{U V}{U \perp U}\perp.$$

7. L'equazione:

$$\frac{V}{U} = \frac{V'}{U'},$$

dice che $\frac{\text{gr } V}{\text{gr } U} = \frac{\text{gr } V'}{\text{gr } U'}$, e che gli angoli (U, V) e (U′, V′) sono eguali.

8. L'equazione:

$$\frac{C-A}{B-A} = \frac{C'-A'}{B'-A'},$$

ove A, B, C, A′, B′, C′ sono punti, dice che i triangoli ABC e A′B′C′ sono simili e dello stesso senso.

Si deduce una costruzione colla riga e col compasso del vettore $\frac{V}{U}$ W, ove U, V, W sono vettori dati.

9. Siano A, B, A′, B′ quattro punti del piano; vogliasi determinare il punto C in guisa che i triangoli CAB e CA′B′ risultino simili e dello stesso senso. Il punto C deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{C - A}{B - A} = \frac{C - A'}{B' - A'},$$

la quale risolta rispetto a C dà:

$$C = A + \frac{B - A}{(B - A) - (B' - A')}(A' - A)$$

e così si può costrurre il punto C, salvochè sia $B - A = B' - A'$.

10. La trasformazione $\begin{pmatrix} I, & -\perp I \\ I, & \perp I \end{pmatrix}$, ove I è un vettore del piano, fa corrispondere ad ogni vettore il *simmetrico* rispetto ad I.

11. Le trasformazioni $\begin{pmatrix} I, & -J \\ I, & J \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} J, & -I \\ I, & J \end{pmatrix}$, ove I e J sono vettori qualunque del piano, sono le trasformazioni più generali il cui quadrato vale rispettivamente 1 e -1.

12. Essendo I, J, I′, J′, U, 5 vettori dati nel piano, la costruzione del vettore

$$\begin{pmatrix} I' & J' \\ I & J \end{pmatrix} U$$

è un problema lineare (N. 15).

13. Fatto:

$$P = O + e^{t\mathbf{S}} I,$$

ove O è un punto, I un vettore, **S** una sostituzione dei vettori nel piano, t una variabile numerica, variando t il punto P descrive una curva nel piano. Se $\mathbf{S} = \perp$, essa è un *cerchio*. Se **S** è una sostituzione qualunque il cui quadrato vale -1, si ha un'*ellisse*. Se **S** è una sostituzione non numerica il cui quadrato vale 1, la curva è un'*iperbole;* se $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I, & -\perp I \\ I, & \perp I \end{pmatrix}$, si ha l'iperbole *equilatera*. Se $\mathbf{S} = \frac{V}{U}$, essendo U e V due vettori qualunque, si ha la *spirale logaritmica*. In ogni caso, derivando, si ha:

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{S}(P - O), \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \mathbf{S}^2(P - O),$$

e quindi si possono facilmente costrurre le derivate prima e seconda, e in conseguenza la tangente e il centro del cerchio osculatore alla curva.

85. 1. Essendo ABC A′B′C′ formazioni di prima specie in un piano fisso, la sostituzione:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

dicesi un'*omografia*. Ad ogni formazione di prima specie nel piano corrisponde un'altra formazione di prima specie. Ad elementi collineari corrispondono elementi collineari. Se PQR sono tre formazioni nel piano, e P′Q′R′ le loro corrispondenti, si avrà;

$$\frac{P'Q'R'}{A'B'C'} = \frac{PQR}{ABC}.$$

2. Se A′B′C′ non è nullo, la trasformazione **T** permette inversione. Se invece $A'B'C' = 0$, A′, B′, C′ sono collineari, e si possono determinare tre numeri m, n, p non tutti nulli, in guisa che $mA' + nB' + pC' = 0$. In questa ipotesi ad ogni elemento del piano corrisponde un elemento collineare con A′B′C′, e all'elemento non nullo $mA + nB + pC$ corrisponde lo zero. L'omografia dicesi in questo caso *speciale.*

3. Si ha, essendo x un numero qualunque:

$$\mathbf{T} - x = \begin{pmatrix} A' - xA, & B' - xB, & C' - xC \\ A, & B, & C \end{pmatrix},$$

ed affinchè l'omografia $T - x$ sia speciale, deve essere:

$$(A' - xA)\ (B' - xB)\ (C' - xC) = 0,$$

ovvero, sviluppando:

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0,$$

ove si è fatto:

$$p = \frac{A'BC + AB'C + ABC'}{ABC}, \quad q = \frac{A'B'C + A'BC' + AB'C'}{ABC}, \quad r = \frac{A'B'C'}{ABC}.$$

4. Si ha fra le potenze 0, 1, 2, 3 di **T** la relazione:

$$\mathbf{T}^3 - p\mathbf{T}^2 + q\mathbf{T} - r = 0.$$

5. Se si suppongono A B C A′ B′ C′ punti semplici, la trasformazione **T** chiamasi un'*affinità*. Le aree dei triangoli formati dai punti corrispondenti sono proporzionali. Se inoltre la figura A′ B′ C′ è simile, o eguale ad A B C, la **T** rappresenta una *similitudine* nel piano, ovvero un'*eguaglianza*.

6. Essendo A B C D A′ B′ C′ D′ formazioni di prima specie nello spazio, la sostituzione:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

rappresenta un'*omografia*, per cui ad ogni elemento corrisponde un altro elemento, e ad elementi collineari o complanari corrispondono elementi collineari o complanari. Se gli elementi che compaiono in **T** sono punti semplici, la **T** rappresenta un'*affinità*. I volumi dei tetraedri corrispondenti in un'affinità sono proporzionali. L'affinità comprende come caso particolare la *similitudine*, e l'*eguaglianza*.

86. 1. Nel piano, essendo O e P formazioni di prima specie, u il bivettore unità, si indichi con $\perp(O^*.u)$ quell' operazione distributiva, la quale, eseguita sul punto P, dà per risultato $\perp(OP\,.\,u)$. Allora la trasformazione:

$$e^{x\perp(O^*.u)}$$

a eseguirsi sulle formazioni di prima specie P nel piano, rappresenta, se O è un punto semplice, una rotazione dell'angolo x attorno al punto O; se O è un punto colla massa m, essa rappresenta una rotazione attorno ad O dell'angolo mx; se O è un vettore, essa rappresenta una traslazione.

2. Nello spazio, essendo I un vettore, in grandezza eguale all'unità, si indichi con $|(I^*)$ l'operazione distributiva che eseguita su d'un vettore U dà per risultato $|(IU)$. Allora la trasformazione:

$$e^{x|(I^*)}$$

a eseguirsi sui vettori nello spazio, rappresenta una rotazione di questi vettori dell'angolo x attorno alla direzione di I.

3. Nello spazio, essendo a una formazione qualunque di seconda specie, ω il trivettore unità, si indichi con $|(a^*.\omega)$ quell'operazione distributiva che eseguita su d'una formazione di prima specie P dà per risultato $|(aP.\omega)$. Allora la trasformazione:

$$e^{x|(a^*.\omega)}$$

a eseguirsi sulle formazioni di prima specie dello spazio rappresenta o una rotazione attorno ad una retta, o una traslazione, o l'insieme d'una rotazione e d'una traslazione, secondochè a è riduttibile ad una linea, o ad un bivettore, o all'insieme d'una linea e d'un bivettore.

87. Le regole per trovare i differenziali di enti funzioni di altri enti (supposto che e gli enti variabili, e quelli funzioni appartengano a sistemi lineari) sono analoghe a quelle che servono per gli enti funzioni di numeri. Si ha:

1. Se l'ente $\mathbf{u}$ non dipende da $\mathbf{x}$, sarà:

$$\left(d \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{u} = 0.$$

2. Se $\mathbf{R}\mathbf{x}$ è una funzione distributiva di $\mathbf{x}$, sarà:

$$\left(d \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} \right) \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}.$$

3. $$d(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = d\mathbf{u} + d\mathbf{v}.$$

4. Se $\mathbf{u}\,\mathbf{v}$ indica una funzione distributiva degli enti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, come il prodotto di due numeri, il prodotto d'un numero per una formazione geometrica, o per un ente d'un sistema lineare, il prodotto progressivo o regressivo di due formazioni geometriche, il prodotto d'una trasformazione per un ente d'un sistema lineare, il prodotto di due trasformazioni, supposto che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dipendano dall'ente $\mathbf{x}$, sarà sempre:

$$d \,.\, \mathbf{u}\mathbf{v} = d\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} + \mathbf{u} \,.\, d\mathbf{v}.$$

5. Quindi, se $\mathbf{S}$ è una sostituzione degli enti d'un sistema lineare, si avrà:

$$d \,.\, \mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \,.\, d\mathbf{S} + d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S},$$

$$d \,.\, \mathbf{S}^3 = \mathbf{S}^2 \,.\, d\mathbf{S} + \mathbf{S} \,.\, d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S} + d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S}^2, \text{ ecc.}$$

$$d \,.\, \mathbf{S}^{-1} = -\,\mathbf{S}^{-1} \,.\, d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S}^{-1}$$

$$d \,.\, \mathbf{S}^{-2} = -\,\mathbf{S}^{-1} \,.\, d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S}^{-2} - \mathbf{S}^{-2} \,.\, d\mathbf{S} \,.\, \mathbf{S}^{-1}, \text{ ecc.}$$

6. Se $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ è una sostituzione qualunque degli enti d'un sistema lineare, e se $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \;\; \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ sono enti funzioni dell'ente $\mathbf{x}$, sarà:

$$d\mathbf{S} = \begin{pmatrix} d\mathbf{b}_1, \dots d\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{a}_1, \dots d\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

88. 1. Se $f(\mathbf{x})$ è un ente funzione omogenea dell'ente $\mathbf{x}$, di grado n, ossia è tale che, qualunque sia il numero t, si abbia $f(t\mathbf{x}) = t^n f(\mathbf{x})$, sarà:

$$\left(d\,\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) = n f(\mathbf{x}).$$

2. Se $f(\mathbf{x})$ è funzione omogenea di grado 0 in $\mathbf{x}$, sarà:

$$\left(d\,\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) = 0.$$

3. Se $f(\mathbf{x})$ è funzione intera omogenea di grado n di $\mathbf{x}$ (cioè le coordinate di $f(\mathbf{x})$ sono funzioni intere omogenee di grado n delle coordinate di $\mathbf{x}$), essendo p e q numeri, ed $\mathbf{y}$ un ente dello stesso sistema lineare cui appartiene $\mathbf{x}$, sarà:

$$f(p\mathbf{x} + q\mathbf{y}) = p^n f(\mathbf{x}) + \frac{p^{n-1}q}{1}\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) +$$
$$+ \frac{p^{n-2}q^2}{2!}\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)^2 f(\mathbf{x}) + \ldots + \frac{q^n}{\mathrm{n!}}\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)^n f(\mathbf{x}).$$

I differenziali successivi $\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x})$, $\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)^2 f(\mathbf{x})$, ... diconsi anche le *funzioni polari* dei successivi ordini ottenute da $f(\mathbf{x})$ coll'operazione $\left(d\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)$. Essi sono funzioni intere omogenee di grado $n-1$, $n-2$, ... in $\mathbf{x}$, e di grado 1, 2, ... in $\mathbf{y}$.

4. Se $u = f(\mathrm{X})$ è un numero funzione intera omogenea della formazione X di prima specie nel piano, allora $\left(d\,\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right) u$ è una funzione distributiva di Y, che è un'altra formazione di prima specie nel piano. Quindi si potrà determinare una formazione p di seconda specie nel piano, dipendente da X, ma non da Y, tale che si abbia $\left(d\,\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right) u = \mathrm{p}\,\mathrm{X}$. La formazione p si può indicare con $\left(d^*_{\mathrm{X}}\right) u$, e si suol chiamare la *formazione polare* di X rispetto ad $f(\mathrm{X})$.

Se X è un punto del luogo di equazione $f(\mathrm{X}) = 0$, sarà $\mathrm{p}\,\mathrm{X} = 0$; quindi la formazione $\mathrm{p} = \left(d^*_{\mathrm{X}}\right) u$ è una linea passante pel punto X; questa è la tangente in questo punto alla curva di equazione $f(\mathrm{X}) = 0$.

5. Se $u = f(\mathrm{x})$ è un numero funzione intera omogenea della formazione x di seconda specie nel piano, allora $\left(d\,\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) u$ è un numero funzione distributiva

della formazione di seconda specie y. Si potrà perciò determinare una formazione di prima specie P, che si potrà anche indicare con $\left(d^{*}_{x}\right) u$ tale che, qualunque sia y, si abbia $\left(d^{y}_{x}\right) u = \mathrm{P}y$. La formazione P si suol chiamare *polo* di x. Se x è una linea che soddisfa all'equazione $f(x) = 0$, e P è un punto, sarà $\mathrm{P}x = 0$, ossia P sta su x; il punto P è il punto di contatto della retta x coll'inviluppo di equazione $f(x) = 0$.

6. Le cose dette si possono agevolmente estendere alle formazioni di prima, seconda e terza specie dello spazio.

89. 1. In un piano fisso sia X una formazione variabile di prima specie, $a_0\, a_1 \ldots a_n$ formazioni date di seconda specie, e siano $m_0\, m_1 \ldots m_n$ numeri dati; pongasi:

$$f(X) = m_0 (a_0 X)^2 + m_1 (a_1 X)^2 + \ldots + m_n (a_n X)^2 = \sum_i m_i (a_i X)^2.$$

Sarà $f(X)$ una funzione numerica di secondo grado di X. Si avrà:

$$\frac{1}{2}\left(d^{Y}_{X}\right) f(X) = \Sigma m_i a_i X \,.\, a_i Y,$$

quindi la polare di X è:

$$\frac{1}{2}\left(d^{*}_{X}\right) f(X) = \Sigma m_i a_i X \,.\, a_i.$$

2. L'intersezione, o prodotto regressivo, delle due formazioni di seconda specie $\frac{1}{2}\left(d^{*}_{X}\right) f(X)$ e $\frac{1}{2}\left(d^{*}_{Y}\right) f(Y)$ si può mettere sotto la forma $\Sigma m_i m_j (a_i a_j . XY)\, a_i a_j$, ovvero, fatto $XY = x$, sotto la forma:

$$\Sigma m_i m_j a_i a_j x \,.\, a_i a_j .$$

che è una formazione di prima specie. Essa dicesi il *polo* di x.

3. Dipendono da $f(X)$ la funzione di secondo grado in x,

$$F(x) = \Sigma m_i m_j (a_i a_j x)^2$$

e la costante

$$A = \Sigma m_i m_j m_k (a_i a_j a_k)^2.$$

L'equazione $f(X)=0$ rappresenta un luogo di secondo ordine. La formazione di seconda specie (retta) x contiene nessun elemento, o uno, o due, che soddisfano all'equazione, secondochè $F(x)\gtreqless 0$. Questo luogo conterrà nessun vettore, o uno, o due (cioè sarà un'ellisse o parabola o iperbole) secondochè $F(u)\gtreqless 0$.

Per la formazione di prima specie (punto) X passano nessuna, o una, o due formazioni (rette) x che soddisfano alla $F(x)=0$, secondochè $A f(X)\gtreqless 0$.

4. Se nella funzione $f(X)$ si suppongono $a_1,\dots a_n$ linee in grandezza eguali all'unità di misura, i numeri $m_1 \dots m_n$ eguali all'unità, a_0 il bivettore unità u, ed m_0 un numero qualunque $-k$, la funzione diventa

$$f(X)=(a_1 X)^2+\dots+(a_n X)^2-k(u X)^2,$$

e l'equazione $f(X)=0$ è soddisfatta da tutti i punti X per cui la somma dei quadrati delle distanze dalle rette $a_1 \dots a_n$ è una quantità data k.

5. Se X è un vettore, la polare di X sarà, osservando che $u X=0$,

$$\frac{1}{2}\left(d^*_X\right) f(X)=a_1 X . a_1+\dots+a_n X . a_n.$$

Questa retta dicesi il *diametro coniugato* alla direzione del vettore X. Per costruirlo, si costruiscano le linee $a_i X . a_i$, cioè le linee che stanno sulle rette date, e proporzionali ai seni degli angoli che esse fanno colla direzione X; la loro somma sarà una linea giacente sul diametro cercato.

6. I diametri coniugati alle varie direzioni X passano per uno stesso punto, detto *centro*, che è il polo del bivettore u (retta all'infinito). Esso, in virtù della formula 2, si può scrivere

$$\sum_{ij} a_i a_j u . a_i a_j,$$

e quindi è il baricentro dei punti d'incontro (a distanza finita) delle rette considerate, con masse eguali ai quadrati dei seni degli angoli che esse fanno fra loro.

Questo centro è anche il punto per cui è minima la somma dei quadrati delle distanze dalle rette date.

7. Le direzioni degli assi, cioè dei diametri coniugati a vettori loro perpendicolari, si può ottenere colla costruzione che segue. Preso un vettore X ad

arbitrio, si determinino i vettori $X_1 \dots X_n$ simmetrici di X rispetto $a_1 \dots a_n$; le direzioni che dividono per metà l'angolo di X con $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ sono quelle degli assi.

90. 1. Sia u un numero funzione della posizione d'un punto semplice P dello spazio. Poichè la differenza di due punti è un vettore, si può prendere per differenziale del punto P un vettore I. Allora $\left(d_{\mathrm{P}}^{\mathrm{I}}\right) u$ rappresenta un numero, funzione distributiva del vettore I. Quindi si potrà determinare un vettore U, dipendente da P, ma non da I, tale che, qualunque sia I, si abbia

$$\left(d_{\mathrm{P}}^{\mathrm{I}}\right) u = \mathrm{U} \mid \mathrm{I}.$$

Il vettore U dicesi *parametro differenziale* (di primo ordine) di u.

Se u rappresenta la distanza del punto P da un punto fisso, o da una retta fissa, o da un piano fisso, il parametro differenziale è un vettore diretto dal punto P al punto fisso, o normalmente alla retta fissa, o piano fisso, nel senso che va dal punto o retta o piano fisso al punto variabile, ed in grandezza eguale all'unità di misura.

Se $u = f(u_1, u_2 \dots, u_n)$ è un numero funzione dei numeri $u_1 \dots u_n$, che alla loro volta sono funzioni del punto P, se $\mathrm{U}_1 \dots \mathrm{U}_n$ sono i parametri differenziali di $u_1 \dots u_n$, il parametro differenziale di u sarà $\frac{df}{du_1} \mathrm{U}_1 + \dots + \frac{df}{du_n} \mathrm{U}_n$.

Il parametro differenziale U di u è normale alla superficie luogo dei punti per cui u ha lo stesso valore.

Se per un punto P, u diventa massima o minima, il suo parametro differenziale, se esiste, è nullo (V. *App. Geom.* Cap. IV).

2. Sia u un numero funzione della posizione d'una retta in un piano fisso. Presa una linea qualunque p, risulta determinata la retta p, e quindi un valore di u; e poichè la retta tp, ove t è numero, coincide colla p, e quindi il valore di u rimane lo stesso, si deduce che u è funzione omogenea di grado zero d'ogni linea p del piano. Si determini la formazione di prima specie (punto o vettore) $\mathrm{P} = \left(d_{\mathrm{p}}^{*}\right) u$. Sarà $\mathrm{Pp} = 0$, ossia P sta sulla linea p. Se P è un punto, esso sarà il punto di contatto della retta p col suo inviluppo; se per una certa posizione di p la funzione u diventa massima o minima, la formazione di prima specie $\left(d_{\mathrm{p}}^{*}\right)$ u deve essere nulla.

Se $u = f(r_1, r_2, \dots r_n)$, ove $r_1 \dots r_n$ rappresentano le distanze di punti fissi

$A_1 \dots A_n$ dalla retta p, detti $B_1 \dots B_n$ i piedi delle perpendicolari abbassate dai punti dati su p, e supposto $gr\,p=1$, sarà:

$$\left(d^*_p\right) u = \frac{df}{dr} B_1 + \frac{df}{dr_2} B_2 + \dots + \frac{df}{dr_n} B_n.$$

(V. *App. Geom.*, pag. 329).

3. Le stesse cose si possono ripetere per un numero funzione della posizione d'un piano nello spazio (V. *App. Geom.*, pag. 333).

4. Se u è un numero funzione della posizione d'una retta nello spazio, presa una linea qualunque p, risulta determinata una retta, e quindi un valore di u; perciò u è funzione d'ogni linea dello spazio, e sarà funzione omogenea di grado zero. Posto $q = \left(d^*_p\right) u$, sarà q una formazione di seconda specie nello spazio, che soddisfa alla condizione $pq=0$. Preso sulla retta p un punto P, il piano Pq è tangente lungo la retta p al cono luogo delle rette passanti per P, e per cui u ha un valore costante. Condotto per p un piano π, il punto πq è il punto di contatto della p coll'inviluppo delle rette contenute nel piano π, e per cui u ha un valore costante.

OPERE DI MATEMATICA E INGEGNERIA

	Lire Cent.
Boggio (Ing. C.). Le prime chiese cristiane nel Canavese. — 1887, 1 vol. in-8° con tavole e disegni nel testo	4 —
Cassani (P.). Corso di matematica complementare. — Complementi d'Algebra ad uso degli allievi del 2° biennio della sezione fisico-matematica degli istituti tecnici e preparatorio allo studio del 1° anno della Facoltà matematica universitaria. — Torino, 1885, in-12°	3 —
— Elementi di stereometria, ad uso degli Istituti tecnici. — Torino, 1885, in-12°	2 50
Castellazzi (G.). Schizzi architettonici dal vero. — Torino, 1879. Album in-4° contenente 100 tavole.	25 —
Gatti (S.). Elementi di geometria piana con applicazione dell'algebra. — Torino, 1876, 1 vol. in-8°.	3 50
Giletta. Lezioni di geodesia. — Torino, 1880, 2 vol. in-8° con atlante di 20 tavole in-foglio	15 —
Molesworth (G. L.). Manuale dell'ingegnere civile e meccanico. 4ª ed. leg. in tela — Roma, 1887, in-32°	5 —
Mella (E.). Elementi di architettura Romano-Bizantina detta Lombarda. — 1 vol. in-folio con 10 tav..	14 —
Peano (G.). Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale. — Torino, 1887, 1 vol. in-8° . .	10 —
Peano (A. Genocchi). Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Torino, 1884, 1 vol. in-8° . .	10 —
Porta. Complementi di algebra e geometria per l'ammissione all'accademia militare. — Torino, 1885. 2ª edizione riveduta ed accresciuta, 1 vol. in-12°	3 —
— Goniometria e trigonometria piana. — Torino, 1885, 2ª ediz. interamente rifatta, 1 vol. in-12° .	2 50
— Trigonometria sferica. — Torino 1886, 1 vol. in-12°	2 —
— Geometria solida. — Torino, 1887, 1 vol. in-16° con 123 fig. nel testo	3 —
Promis e **Castellazzi.** Fabbriche moderne inventate da Carlo Promis ad uso degli studenti d'architettura e pubblicate con note ed aggiunte da Giovanni Castellazzi. — Torino, 1872, 1 vol. in-fol. con 120 tav.	60 —

	Lire Cent.
Regis (Ing. D.) Corso di applicazione della Geometria descrittiva. — Fasc. I°. Contorni d'ombra e linee di eguale illuminazione. — Torino, 1887, in-8°	3 —
Rivera (A.-R.). Problemi di geometria, e di trigonometria con le loro soluzioni e considerazioni generali sopra la soluzione dei problemi di geometria. — Torino, 1861, 1 vol. in-8°	5 —
Tessari (D.). Applicazione della geometria descrittiva. La teoria delle ombre e del chiaroscuro, ad uso delle Università, Scuole d'applicazione per gli ingegneri, Accademie militari, Istituti tecnici, ingegneri, architetti e disegnatori. — Torino, 1882, in-8° . . .	15 —
Zanotti-Bianco (O.). Il problema meccanico della figura della Terra, esposto secondo i migliori autori. Parte prima. — Torino, 1880, 1 vol. in-8° . .	8 —
» seconda, libro primo	6 —

In corso di stampa:

Staudt. Geometria di posizione. — 1 vol. in-8°.

Memorie del Dott. G. PEANO.

Costruzione dei connessi (1, 2) e (2, 2) (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1881).

Un teorema sulle forme multiple (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1881).

Formazioni invariantive delle corrispondenze (Giornale di Matem., Vol. XX).

Sui sistemi di forze binarie di egual grado e sistema completo di quanto si vogliano cubiche (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1882).

Sull'integrabilità delle funzioni (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1883).

Funzioni interpolari (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1883).

Integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1886).

Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari (Atti R. Acc. delle Scienze Torino 1887).

Fratelli Bocca, Librai di S. M. il Re - Torino, Via Carlo Alberto, 3.