CAPITOLO V.

Applicazioni analitiche.

Espressioni

che si presentano sotto forma indeterminata.

124. Forma $\frac{0}{0}$. — Il Calcolo differenziale è utile per determinare il limite del quoziente di due funzioni $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando, pel valore speciale x_0 della variabile, il numeratore e denominatore si annullano. Se si ponesse $x = x_0$ nell'espressione di $f(x)$, essa assumerebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; e si suol chiamare vero valore di $f(x_0)$ il limite di $f(x)$ per $x = x_0$.

Supposto adunque $\varphi(x_0) = 0$, $\psi(x_0) = 0$, si può scrivere

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0}},$$

e se le funzioni φ e ψ ammettono derivata per $x = x_0$, e $\psi'(x_0)$ non è nullo, passando ai limiti si deduce il limite cercato

$$\lim f(x) = \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Oppure si può ricorrere alla formula (N. 45)

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

ove x_1 è una quantità compresa fra x_0 ed x; si suppone che φ e ψ ammettano derivata nelle vicinanze del valore x_0, e che $\psi'(x)$ non sia nulla. Facendo tendere x ad x_0, anche x_1 tende ad x_0, e se il rapporto delle derivate tende verso un limite, anche il rapporto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ tende allo stesso limite.

Se quindi avvenisse che ciascheduna delle derivate avesse ancora per limite zero, si applicherebbe al rapporto delle derivate la stessa regola, e si passerà alle seconde derivate, e così via. In generale se per $x = x_0$ si ha

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = 0, \ldots\ldots \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$\psi(x_0) = 0, \quad \psi'(x_0) = 0, \ldots\ldots \psi^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{ma} \quad \psi^{(n)}(x_0) \gtrless 0,$$

si avrà

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \ldots\ldots = \lim \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}.$$

Lo stesso risultato si può ricavare dalla formula di Taylor. Si ha diffatti

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + h\,\varphi'(x_0) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

e nella nostra ipotesi

$$\varphi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

ed analogamente

$$\psi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(x_0 + \theta' h);$$

onde dividendo l'una per l'altra

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)}=\frac{\varphi^{(n)}(x_0+\theta h)}{\psi^{(n)}(x_0+\theta' h)},$$

e passando al limite

$$\lim_{x=x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}.$$

125. — Finora si è supposto x_0 finito; ma le formule precedenti si possono estendere al caso in cui x tende verso l'infinito.

Se col tendere di x ad ∞, $\lim \varphi(x)=0$, e $\lim \psi(x)=0$, posto $x=\frac{1}{z}$, sarà

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)},$$

e col tendere di x ad ∞, z tende a zero, e si può applicare quanto si è detto precedentemente, e si ha, facendo il rapporto delle derivate rispetto z,

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=0}\frac{-\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}=\lim_{z=0}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

ossia anche in questo caso il limite del rapporto delle funzioni è eguale al limite del rapporto delle derivate.

Si può osservare che se per $x=\infty$ $\lim \varphi(x)=0$, e se $\varphi'(x)$ tende verso un limite, anch'esso è zero. Infatti se il limite di $\varphi'(x)$ fosse diverso da zero, da un certo valore di x in poi la derivata avrebbe un segno costante, e si manterrebbe numericamente maggiore d'un numero finito A; sia a il valore di x dal quale in poi questo avviene; dalla formula:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(x_1)$$

ove x_1 è compreso fra x ed a, si deduce che col crescere indefinitamente di x $f(x)$ cresce indefinitamente, e quindi non può avere, contrariamente all'ipotesi, per limite lo zero.

Dal che si deduce che se in $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ si fa $x=\infty$, essa si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, come $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; il che però non impedisce che possa essere di qualche utilità il sostituire alla ricerca del limite di $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quella del limite dell'altra funzione $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

126. Forma $\frac{\infty}{\infty}$. — Sia $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, e suppongasi che col crescere indefinitamente di x $\lim\varphi(x)=\infty$ e $\lim\psi(x)=\infty$. Si vuol dimostrare che se da un certo valore di x in poi $\psi'(x)$ non è nullo, e se il rapporto delle derivate $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ col crescere indefinitamente di x tende ad un limite, tende pure allo stesso limite $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Invero dalle relazioni

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}},\quad \text{e}\quad \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

ove x_1 è compreso fra x_0 ed x, si ricava

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\,\frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}.$$

Supponiamo $x>x_0$; sarà anche $x_1>x_0$. Potremo quindi fissare x_0 così grande che $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ differisca dal suo limite d'una quantità tanto piccola quanto si voglia; inoltre, fissato x_0, siccome col crescere di x $\lim\varphi(x)=\infty$, e $\lim\Psi(x)=\infty$, $\lim\frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}=1$, e si potrà supporre x così grande che questa quantità differisca

dall'unità di tanto poco quanto si vuole, ossia si potrà fare in modo che la differenza fra $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ed il limite di $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ sia piccola ad arbitrio, e quindi

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Lo stesso avviene se $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty$, perchè dei due fattori in cui si è decomposto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ il primo si può rendere grande ad arbitrio, ed il secondo ad arbitrio prossimo all'unità.

Se nel rapporto $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ il numeratore ed il denominatore diventassero infiniti per un valore finito a della variabile, pongasi $x = a + \frac{1}{z}$; si ricava

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)}$$

ed il numeratore e il denominatore diventano infiniti per $z = \infty$, onde si ricava

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim \frac{\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)},$$

ed infine si ha ancora

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

È però a notarsi in quest'ultimo caso che, se pel valore finito $x = a$ una funzione (come $\varphi(x)$ e $\psi(x)$) diventa infinita, la sua derivata non può tendere verso un limite diverso dall'infinito.

Infatti se $f(x)$ è una funzione la cui derivata $f'(x)$ col tendere di x ad a tende verso un limite finito, od anche solo si mantiene inferiore ad una quantità finita, detto x_0 un valore prossimo ad a, dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_1)$$

si ricava che col tendere di x ad a anche $f(x)$ si mantiene finito.

127. — Forma $\infty - \infty$. Sia a considerarsi la differenza di due funzioni che per un dato valore di x diventano infinite di segno opposto. Rappresentandole con $\frac{1}{\varphi(x)}$ e $\frac{1}{\psi(x)}$, la loro differenza

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\psi(x)},$$

si potrà scrivere

$$\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Facendo qui tendere x al valore speciale considerato, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tendono a zero, e questa frazione si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, ed il suo limite si determinerà applicando le regole note.

Forma $0 \,.\, \infty$. — Abbiasi il prodotto $\varphi(x)\,\psi(x)$, e si supponga che per un valore speciale di x il primo fattore diventi zero, ed il secondo infinito. Si potrà mettere il prodotto sotto le forme

$$\varphi(x)\,\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

e nella prima espressione si ha un quoziente che prende la forma $\frac{0}{0}$, e nella seconda un quoziente che prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$, quindi siamo nei casi già trattati.

FORME 0^0, 1^∞, ∞^0. — Abbiasi la funzione $\varphi(x)^{\psi(x)}$, ove si suppone $\varphi(x) > 0$, e per un valore speciale di x sia

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

ovvero

$$\varphi(x) = 1, \quad \psi(x) = \infty,$$

ovvero

$$\varphi(x) = \infty, \quad \psi(x) = 0.$$

Prendendo il logaritmo della funzione si ha

$$\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \log \varphi(x),$$

e facendo tendere x verso il valore speciale, in ognuno dei tre casi uno dei due fattori di questo prodotto è nullo, e l'altro infinito, onde si ricade nel caso precedente. Determinato il limite del logaritmo, che è il logaritmo del limite, si avrà il limite della funzione passando dai logaritmi ai numeri.

128. — *Esempi.* 1° Determinare il vero valore di

$$y = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \quad \text{per} \quad x = a.$$

Facendo il quoziente delle derivate, si ha (N. 120)

$$\lim y = \lim \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

2° $$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{per} \quad x = 0.$$

Si ricava

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1.$$

È a notarsi che questo risultato è una verificazione, non una dimostrazione nuova; perchè qui si è derivato $\operatorname{sen} x$, e per dimostrare che la derivata di $\operatorname{sen} x$ è $\cos x$ ci serviamo appunto della proposizione che $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

3° $\quad y = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \quad$ per $\quad x = 0. \quad \lim y = \frac{\log a - \log b}{\log c - \log d}$.

4° $$y = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x} \quad \text{per} \quad x = 0.$$

$$\lim \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x} = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 1.$$

5° $\quad y = \frac{\log(e^x - e^a)}{\log(x - a)} \quad$ per $\quad x = a \quad \left(\text{forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim y = \lim \frac{e^x (x - a)}{e^x - e^a} = \lim e^x . \lim \frac{x - a}{e^x - e^a} = e^a \lim \frac{1}{e^x} = 1.$$

6° $\quad y = \sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)} - x, \quad$ per $x = \infty$

(forma $\infty - \infty$).

Posto $x = \frac{1}{z}$, si ha

$$y = \frac{\sqrt[n]{(1 + a_1 z)(1 + a_2 z) \ldots (1 + a_n z)} - 1}{z}$$

che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$; e, applicando le regole date,

$$\lim y = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

ossia il vero valore di y è media aritmetica delle a.

7° $y = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x$ per $x = 0$ (forma $\infty - \infty$).

Si può scrivere

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(\operatorname{sen} x + x \cos x)(\operatorname{sen} x - x \cos x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x\right) \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^2 \operatorname{sen} x}.$$

Facendo tendere x a zero il primo fattore ha per limite 2, onde basterà considerare il secondo fattore, che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, ed applicandovi le regole note si trova che ha per limite $\frac{1}{3}$, onde $\lim y = \frac{2}{3}$.

8° $y = xe^{-ax}$ (con $a > 0$), per $x = +\infty$. (forma $\infty \times 0$).

La funzione posta sotto la forma $y = \frac{x}{e^{ax}}$, assume la forma $\frac{\infty}{\infty}$, onde

$$\lim y = \lim \frac{1}{ae^{ax}} = 0.$$

9° Sia più generalmente a trovare il limite per $x = +\infty$ di $y = x^m e^{-ax}$, con a ed m positivi. Possiamo ridurci al caso precedente facendo $x^m = z$, onde $x = z^{\frac{1}{m}}$, e $y = z e^{-\frac{a}{m} z}$; facendo tendere x ad ∞ vi tende pure z, e quindi

$$\lim_{x=\infty} x^m e^{-ax} = 0.$$

Posto in questa formula $x = \log z$, si ricava

$$\lim_{z=\infty} \frac{(\log z)^m}{z^a} = 0;$$

e ponendo in essa $z = \frac{1}{t}$ si ha

$$\lim_{t=0} t^a (\log t)^m = 0,$$

risultati utili a ricordarsi.

10. $y = x^x$ per $x = 0$. (forma 0^0)

$$\text{Lim } y = 1.$$

11. $y = (1 + ax)^{\frac{1}{a}}$ per $x = 0$ (forma 1^∞)

$$\text{Lim } y = e^a.$$

12. $y = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$ per $x = \infty$ $\left(\text{forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore è

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x,$$

ed esso, col crescere indefinitamente di x non tende verso alcun limite; di qui non è lecito conchiudere che anche la funzione data manchi di limite. Invero mettendo la funzione sotto la forma

$$y = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}, \quad \text{si deduce} \quad \lim y = 1.$$

Funzioni di più variabili che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$.

129. — Più difficile è l'esame dei valori che assume il quoziente di due funzioni di più variabili

$$u = \frac{f(x, y, \ldots)}{\varphi(x, y, \ldots)},$$

ove si facciano tendere x, y,... verso i valori x_0, y_0,... per cui si annullano numeratore e denominatore.

Posto $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$,..., u diventa funzione di t che assume la forma $\frac{0}{0}$ per $t = 0$; il suo limite sarà (N. 124)

$$\lim u = \frac{f'_x(x_0, y_0, \ldots) h + f'_y(x_0, y_0, \ldots) k + \ldots}{\varphi'_x(x_0, y_0, \ldots) h + \varphi'_y(x_0, y_0, \ldots) k + \ldots},$$

supposto non nullo il denominatore. Questo limite dipende dai valori di h, k,..., salvochè le derivate parziali di f siano proporzionali a quelle di φ; e quindi u tende verso limiti diversi col tendere in vario modo di x, y,... a x_0, y_0,..., e considerata come funzione di x, y,... non tende ad alcun limite. Se le derivate parziali di f sono proporzionali a quelle di φ, occorre un esame ulteriore per riconoscere l'esistenza, ovvero non, del limite di u.

Se la funzione φ, che è nulla per $x = x_0$, $y = y_0$,..., si annulla ancora per altri valori delle variabili in ogni intorno di x_0, y_0,..., e se f non si annulla per questi valori che annullano φ, il rapporto $\frac{f}{\varphi}$ assume valori comunque grandi, ed anche il valore infinito in ogni intorno di x_0, y_0,..., e quindi u non può tendere verso un limite finito.

I criterii che seguono possono servire a riconoscere se φ si annulli ancora, ovvero non, in ogni intorno di x_0, y_0,..., eccettuati questi valori; ed in questo caso se u tenda o non tenda ad un limite. Ci occorrerà premettere alcune nozioni sulle forme algebriche.

130. — Dicesi *forma* di n^{mo} grado una funzione algebrica razionale intera e omogenea di più variabili.

Per esempio, sviluppando colla formula di Taylor

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k, \ldots)$$

i successivi termini sono negli incrementi h, k,... forme di gradi 0, 1, 2,.....

Una forma dicesi *definita* se si annulla solo quando si annullano ad un tempo tutte le variabili.

Tale per es., è la forma $x^2 + y^2 + z^2$.

Una forma dicesi *indefinita* se può assumere valori di segno contrario. Tale è per es., ogni forma di grado dispari non identicamente nulla, perchè attribuendo alle variabili prima un sistema di valori per cui la forma non sia nulla, poi gli stessi valori cambiati di segno, la forma assume valori eguali e di segno contrario.

Una forma è funzione continua delle variabili, e se assume valori di segno contrario, si annulla per infiniti gruppi di valori delle variabili (N. 100, teor. 4°); ossia una forma indefinita non può essere definita, od anche una forma non può essere ad un tempo definita ed indefinita. Ma una forma potrebbe anche essere nè definita nè indefinita, il che avviene quando essa si annulla per valori non tutti nulli delle variabili, senza cambiare di segno.

Teorema 1°. — *Se* $\psi(x, y, \ldots)$ *è una forma definita di grado* n, *e* $\omega(x, y, \ldots)$ *è una forma qualunque dello stesso grado, il rapporto* $\frac{\omega}{\psi}$ *ha un massimo ed un minimo finiti.*

Infatti $\frac{\omega(x, y, \ldots)}{\psi(x, y, \ldots)}$ è funzione omogenea di grado zero in x, $y, \ldots$, ed il suo valore non si altera moltiplicando tutte le variabili per una stessa quantità. Ma con questa moltiplicazione si può supporre che le variabili soddisfino alla equazione

$$\varpi = x^2 + y^2 + \ldots\ldots - 1 = 0,$$

perchè ove non vi soddisfacessero, basterebbe moltiplicarle per la quantità finita $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \ldots}}$. Dunque i valori che assume $\frac{\omega}{\psi}$ attribuendo alle variabili tutti i valori, sono gli stessi che i valori assunti attribuendo alle variabili solamente i valori appartenenti al campo definito dall'equazione $\varpi = 0$. Ora questo campo è finito, perchè ogni variabile risulta compresa fra -1 e $+1$; ogni punto limite del campo appartiene al campo stesso, perchè se valori comunque prossimi ad X, $Y, \ldots$ soddisfano all'equazione $\varpi = 0$, a causa della continuità della funzione ϖ anche X, $Y, \ldots$ soddisfano a questa equazione; infine a questo campo non appartiene il punto (0, 0,..), pel quale solo si annulla ψ. Quindi in tutto il campo le funzioni ω e ψ sono continue, e ψ mai nulla; e il loro quoziente $\frac{\omega}{\psi}$ è pure funzione finita e continua; quindi (N. 100 teor. 6°) esistono il massimo ed il minimo dei valori di $\frac{\omega}{\psi}$, ed essi sono finiti.

Teorema 2°. — *Se* $\psi(x, y, \ldots)$ *è una forma definita di grado* n, *ed* $\omega(x, y, \ldots)$ *è una funzione che si può mettere sotto la forma di un polinomio omogeneo in* x, y,... *di grado* n, *i cui coefficienti dipendano ancora da queste variabili ed abbiamo per limite zero col tendere delle variabili a zero, anche* $\frac{\omega}{\psi}$ *ha per limite zero.*

Infatti ω è la somma di più termini della forma $Cx^{\alpha}y^{\beta}\ldots$, ove $\alpha+\beta+\ldots=n$, e C è funzione di $x, y, \ldots$ avente per limite zero. Quindi $\frac{\omega}{\psi}$ è la somma di più termini della forma

$$C\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{\psi(x, y, \ldots)}.$$

In questo prodotto il primo fattore C ha per limite zero; il secondo è compreso fra limiti finiti, perchè è il rapporto d'una forma di grado n ad una forma definita dello stesso grado; quindi quel termine ha per limite zero, e

$$\lim \frac{\omega}{\psi}=0.$$

Teorema 3° — *Se nella formula di Taylor per le funzioni di più variabili il termine che contiene omogeneamente al grado* n *gli incrementi delle variabili è una forma definita, facendo tendere a zero gli incrementi delle variabili, il rapporto del resto dopo quel termine al termine stesso ha per limite zero, e il rapporto del resto prima di quel termine al termine stesso ha per limite uno.*

Infatti, conservando le notazioni della pag. 147, e detti R_n ed R_{n+1} i resti prima e dopo il termine considerato, si avrà

$$F(1)=F(0)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)$$

$$F(1)=F(0)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+R_{n+1},$$

onde si ricava

$$R_n=\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta), \quad R_{n+1}=\frac{1}{n!}\left[F^{(n)}(\theta)-F^{(n)}(0)\right],$$

e

$$\frac{R^{n+1}}{\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)}=\frac{F^{(n)}(\theta)-F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)}.$$

Il numeratore della frazione di destra è un polinomio omogeneo di grado n

negli incrementi delle variabili, i cui coefficienti dipendono ancora da questi incrementi, ed hanno la forma

$$f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \ldots}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, \ldots) - f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta \ldots}(x_0, y_0, \ldots),$$

e col tendere di h, k,... a zero, il loro limite è zero; quindi pel teorema precedente,

$$\frac{R^{n+1}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = \lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0 .$$

E dall'essere

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta) - F^{(n)}(0)}{F^{(n)}(0)} = 0 ,$$

si deduce

$$\lim \frac{F^{(n)}(\theta)}{F^{(n)}(0)} = 1 ,$$

ossia

$$\lim \frac{R_{(n)}}{\frac{1}{n!} F^{(n)}(0)} = 1 .$$

Teorema 4° — *Se la funzione* $f(x, y, \ldots)$ *si annulla pei valori* $x_0, y_0, \ldots$ *e, sviluppando* f *colla formula di Taylor, il primo termine non identicamente nullo è una forma indefinita negli incrementi delle variabili, in ogni intorno di* $x_0, y_0, \ldots$ *la funzione assume valori di segno contrario, e si annulla.*

Invero, supposta nulla la funzione e le sue derivate d'ordine minore di n, la formula di Taylor dà

$$f(x_0 + th, y_0 + tk, \ldots) = F(t) = \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t) .$$

Ora $F^{(n)}(0)$ è una forma indefinita in h, k,...; quindi si possono dare ad esse valori tali che $F^{(n)}(0)$ risulti positivo, ovvero negativo. Supposto nella formula precedente $t > 0$, e facendolo tendere a zero, $F^{(n)}(\theta)$ tende a $F^{(n)}(0)$, ossia verso un limite che è, a seconda della scelta di h, k,... positivo o negativo; quindi anche $F(t)$ è a nostro arbitrio positivo o negativo, e la funzione data assume in vicinanza di x_0, y_0,... valori positivi e valori negativi; ed a causa della sua continuità, essa si annulla infinite volte.

TEOREMA 5° — *Se la funzione* $f(x, y, \ldots)$ *si annulla pei valori* x_0, $y_0, \ldots$ *e nello sviluppo colla formula di Taylor il primo termine non identicamente nullo è una forma definita negli incrementi delle variabili, in un conveniente intorno di* $x_0, y_0, \ldots$ *e per i valori delle variabili diversi da questi, la funzione non è nulla, e conserva un segno costante.*

Infatti, se sono nulle le derivate d'ordine minore di n, nella formula di Taylor, $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ si riduce al solo resto R_n prima dell'n^{mo} termine; e siccome questo è forma definita, e pel teorema 3° il rapporto di R_n al termine n^{mo} ha per limite 1, si deduce che il rapporto di $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ al termine n^{mo} ha per limite 1, ossia $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ è per valori di $h, k, \ldots$ sufficientemente piccoli dello stesso segno del termine di grado n.

TEOREMA 6°. — *Posto*

$$f(x, y, \ldots) = f_0 + f_1 + \cdots\cdots f_p + r_{p+1}$$
$$\varphi(x, y, \ldots) = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots\cdots \varphi_q + \rho_{q+1},$$

ove f_i e φ_j *sono funzioni omogenee in* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$ *di gradi eguali al loro indice, ed ottenute applicando la formula di Taylor, se i primi termini non nulli negli sviluppi di* f *e* φ *sono* f_m e φ_n, *e se* φ_n *è forma definita negli incrementi delle variabili, posto* $u = \frac{f}{\varphi}$, *e facendo tendere* $x, y, \ldots$ *a* $x_0, y_0, \ldots$, *si ha:*

1° — *Se* $m > n$, *lim* $u = 0$;

2° — *Se* $m = n$, u *oscilla entro limiti finiti, e tende verso un limite* L *se qualunque siano gli incrementi delle variabili*

$$f_n = L\,\varphi_n\,.$$

3° — *Se* $m < n$, u *non tende ad un limite finito.*

Infatti, se $m > n$, si può scrivere

$$u = \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{\frac{r_n}{\varphi_n}}{\frac{\rho_n}{\varphi_n}}\,.$$

Facendo tendere gli incrementi delle variabili a zero, $\lim \frac{\rho_n}{\varphi_n} = 1$ pel teorema 3°, ed $\frac{r_n}{\varphi_n}$ è il rapporto alla forma definita φ_n d'una funzione omogenea

di grado n negli incrementi delle variabili, i cui coefficienti dipendono ancora da essi, ed hanno per limite zero, onde $\lim \frac{r_n}{\varphi_n} = 0$, e $\lim u = 0$.

Se $m = n$, si avrà

$$u = \frac{f_n + r_{n+1}}{\rho_n} = \frac{\frac{f_n}{\varphi_n} + \frac{r_{n+1}}{\varphi_n}}{\frac{\rho_n}{\varphi_n}};$$

e facendo tendere gli incrementi delle variabilli a zero, $\lim \frac{\rho_n}{\varphi_n} = 1$, $\lim \frac{r_{n+1}}{\varphi_n} = 0$, perchè il numeratore, che è funzione omogenea di grado $n+1$ negli incrementi, i cui coefficienti dipendono ancora dai medesimi, e sono finiti, si può considerare come una funzione omogenea di grado n, i cui coefficienti sono ancora funzioni omogenee di primo grado, ed hanno per limite zero. Infine $\frac{f_n}{\varphi_n}$ varia fra limiti finiti che sono il massimo M e il minimo m valore di $\frac{f_n}{\varphi_n}$ (pel teorema 1°); quindi anche u varia entro limiti finiti tanto prossimi quanto si vuole ad M ed m, e non tenderà verso alcun limite, salvochè $M = m$. In questo caso, detto L il loro valore comune, sarà identicamente $\frac{f_n}{\varphi_n} = L$, ossia $f_n = L\varphi_n$, e $\lim u = L$

Se infine $m < n$, posto

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk, \ldots\ldots) \quad \text{e} \quad \Phi(t) = \varphi(x_0 + th, y_0 + tk, \ldots\ldots),$$

si avrà

$$\frac{F(t)}{\Phi(t)} = \frac{\frac{t^m}{m!} F^{(m)}(\theta t)}{\frac{t^n}{n!} \Phi^{(n)}(\vartheta t)} = \frac{1}{t^{n-m}} \frac{n!}{m!} \frac{F^{(m)}(\theta t)}{\Phi^{(n)}(\vartheta t)};$$

e facendo tendere t a zero, l'ultimo fattore tende al limite finito $\frac{F^{(m)}(0)}{\Phi^{(n)}(0)}$, che non è nullo, se si sono scelti $h, k, \ldots$ in modo che non sia nullo il numeratore, onde u tende verso l'infinito, e non può tendere ad un limite finito.

Massimi e minimi
delle funzioni d'una variabile.

131. — Diremo che una funzione $f(x)$, data in un intorno del valore x_0, diventa *massima* per $x = x_0$ se si può determinare un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$ in modo che per ogni valore di x in esso sia

$$f(x_0) \geqq f(x).$$

Diremo che $f(x)$ diventa *minima* per $x = x_0$, se per ogni valore di x d'un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$ si ha

$$f(x_0) \leqq f(x).$$

I massimi e minimi così definiti dipendono dalla successione dei valori della funzione, e li diremo anche *assoluti*. Una funzione può avere parecchi di tali massimi e minimi, anche fra loro diseguali, ed anche minimi più grandi di massimi. Essi sono a distinguersi dal massimo e minimo valore d'una funzione relativamente ad un dato intervallo (a, b) definiti al N. 21, e che diremo *relativi*, od anche *il più grande* e *il più piccolo* dei valori della funzione; questi dipendono dal sistema di valori assunti dalla funzione, e non dall'ordine in cui si susseguono.

Se per $x = x_0$ la funzione $f(x)$ ammette derivata $f'(x_0)$ positiva, la funzione è crescente (N. 43), ed i suoi valori sono rispettivamente minori o maggiori di $f(x_0)$, secondochè x è minore o maggiore di x_0, purchè sufficientemente prossimo; quindi la funzione non è per $x = x_0$ nè massima nè minima. Lo stesso avviene se $f'(x)$ è negativo; onde:

Se per $x = x_0$ *la funzione* $f(x)$ *ha derivata non nulla, per questo valore la funzione non è nè massima nè minima.*

Quindi, scartati dal sistema di valori di x quelli cui corrisponde una derivata (determinata, finita) non nulla, rimangono quelli per cui la funzione non ha derivata, od ha derivata nulla, pei quali la funzione può diventare massima o minima, e per essi occorre uno studio ulteriore per accertarsi dell'esistenza ovvero no dell'uno o dell'altro. Non daremo regole nei casi in cui manchi la derivata. Supposta la derivata nulla, possono servire le seguenti.

Se $f(x)$ ammette derivata $f'(x)$ in un intervallo $x_0 - k$, $x_0 + k$, si ha la formula

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_1),$$

ove x_1 è compreso fra x_0 ed x.

Se $f'(x)$, annullandosi per $x = x_0$, assume valori positivi per $x < x_0$, e valori negativi per $x > x_0$, comunque si supponga $x \gtrless x_0$ sarà sempre $(x - x_0) f'(x_1)$ negativo, onde $f(x) < f(x_0)$, e la funzione è massima per $x = x_0$. Se invece $f'(x)$ è negativa per $x < x_0$, e positiva per $x > x_0$, il prodotto $(x - x_0) f'(x_1)$ è sempre positivo, e la funzione è minima per $x = x_0$. Se poi $f'(x)$ conserva un segno costante nelle vicinanze di $x = x_0$, il prodotto $(x - x_0) f'(x_1)$ cambia segno secondochè $x \gtrless x_0$, e la funzione non è massima nè minima. Quindi si ha:

La funzione $f(x)$ *è massima, ovvero minima per* $x = x_0$, *se la sua derivata, annullandosi per questo valore, passa dal campo positivo al negativo, ovvero dal negativo al positivo. Non si ha nè l'uno nè l'altro se la derivata non cambia segno.*

Invece di considerare il segno della derivata nelle vicinanze di x_0 basta considerare il segno della seconda derivata per $x = x_0$, e si ha la regola:

La funzione $f(x)$ *è massima, ovvero minima per* $x = x_0$ *se, supposto* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0)$ *è negativo o positivo.*

Invero, se $f''(x_0) < 0$, $f'(x)$ è decrescente, ed essendo nulla per $x = x_0$, passa dal campo positivo al negativo; succede l'opposto se $f''(x_0) > 0$.

Questa regola ci lascia in dubbio se $f''(x_0) = 0$. Supposto in generale che per $x = x_0$ sia

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \ldots\ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \gtrless 0 ,$$

ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_1)$$

con x_1 compreso fra x ed x_0; supposta, per semplicità di ragionamento, continua $f^{(n)}(x)$, essa conserva un segno costante variando x nelle vicinanze di x_0; se n è impari il fattore $(x - x_0)^n$ cambia segno secondochè $x \gtrless x_0$, onde cambia pure segno $f(x) - f(x_0)$, e non si ha nè massimo nè minimo; se n è pari, il fattore $(x - x_0)^n$ è positivo, ed $f(x) - f(x_0)$ ha il segno costante di $f^{(n)}(x_0)$; quindi la funzione sarà massima, ovvero minima secondochè $f^{(n)}(x_0)$ è negativa o positiva. Onde:

Se per $x = x_0$ *si annullano la prima, e alcune delle successive derivate, la funzione non sarà, ovvero sarà massima o minima secondochè la prima derivata non nulla è d'ordine dispari, o pari; in questo caso si avrà un massimo od un minimo a seconda del segno negativo o positivo della prima derivata non nulla.*

132. — Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo finito (a, b), esistono il massimo e minimo dei valori della funzione relativi a questo intervallo. L'uno e l'altro di essi può corrispondere a un valore estremo dell'intervallo (a, b), o a un valore medio; in quest'ultimo caso il massimo e il minimo relativo sono anche massimi e minimi assoluti della funzione; onde il massimo e il minimo relativo

corrispondono o agli estremi dell'intervallo, o a quei valori di x che rendono la funzione massima o minima assolutamente.

Se l'intervallo entro cui varia x è infinito $[(a, \infty)$, ovvero $(-\infty, b)$, ovvero $(-\infty, +\infty)]$, la funzione può mancare di massimo o minimo, avendo, ovvero non, limiti superiore ed inferiore.

Esempi: — 1° Decomporre un numero in due parti in modo che il loro prodotto sia massimo.

Sia a il numero dato, x e $a-x$ le due parti, $y=x(a-x)$ il loro prodotto; considerando x come variabile, si ha

$$y'=a-2x$$

che si annulla pel solo valore $x=\frac{a}{2}$; inoltre $y''=-2$; quindi la funzione y ha un massimo assoluto per $x=\frac{a}{2}$, ossia quando si decomponga il numero dato in parti eguali; ed $y=\frac{a^2}{4}$. Esso poi è il più grande valore che assume y, perchè la derivata y' è positiva per $x<\frac{a}{2}$, e negativa per $x>\frac{a}{2}$, ossia nell'intervallo $-\infty, \frac{a}{2}$ la funzione è crescente, nel secondo $\frac{a}{2}, +\infty$ è decrescente.

La funzione non ammette nè minimo, nè limite inferiore.

2° — $\qquad y=x^x \qquad (x>0).$

Derivando si ha

$$y'=x^x(1+\log x).$$

Il primo fattore non si annulla mai, ed è sempre positivo; il secondo si annulla se $\log x=-1$, ossia $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$, ed annullandosi passa dai valori negativi che assume per $x<\frac{1}{e}$ a valori positivi; onde la funzione presenta un minimo assoluto per $x=\frac{1}{e}=0{,}36788\ldots$, ed il minimo è $y=0{,}67641\ldots$; esso è anche il

più piccolo valore che possa assumere la funzione nell'intervallo $(0, \infty)$. La funzione non ha nè massimo, nè limite superiore.

3° — $y = x^{\frac{2}{3}}$; si ha $y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$.

La derivata non è nulla per alcun valore di x, ma è infinita per $x = 0$; per questo valore $y = 0$, e la funzione diventa effettivamente minima sia assolutamente, che relativamente all'intervallo $(-\infty, +\infty)$, perchè dando ad x un altro valore qualunque il valore della funzione è sempre maggiore di zero. La funzione non ha nè massimo nè limite superiore.

Massimi e minimi delle funzioni di più variabili.

133. — Si dice che $u = f(x, y, z, \ldots)$ diventa massima, ovvero minima pei valori $x_0\, y_0\, z_0 \ldots\ldots$ delle variabili, se per un conveniente intorno di questi valori si ha sempre

$$f(x_0\, y_0\, z_0 \ldots) \geqq f(x, y, z, \ldots)$$

ovvero

$$f(x_0\, y_0\, z_0 \ldots) \leqq f(x, y, z, \ldots).$$

Si consideri la funzione della sola x

$$f(x, y_0, z_0, \ldots);$$

se u diventa massima o minima per $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ questa funzione lo diventa per $x = x_0$; quindi la sua derivata $f'_x(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, se esiste, è nulla. In modo analogo si può ragionare per le altre variabili, e si deduce:

Se $u = f(x, y, z, \ldots)$ *diventa massima o minima pei valori* $x_0, y_0, z_0 \ldots$, *corrispondentemente a questi valori le derivate parziali di* u, *se esistono, sono nulle.*

134. — Pongasi

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \ldots\ldots$$

e

$$F(t) = f(x, y, z, \ldots\ldots).$$

Se u diventa massima o minima pei valori $x_0\, y_0\, z_0 \ldots$, lo stesso avviene di $F(t)$ per $t = 0$.

Ora, se $f(x, y, z, \ldots)$ ammette le derivate prime continue, la funzione $F(t)$ ammette derivata finita

$$F'(t) = f'_x(x, y, z, \ldots)\, h + f'_y(x, y, z, \ldots)\, k + f'_z(x, y, z, \ldots)\, l + \ldots,$$

e quindi dovrà essere

$$F'(0) = f'_x(x_0, y_0, z_0 \ldots)\, h + f'_y(x_0, y_0, z_0, \ldots)\, k + \ldots = 0$$

qualunque siano i valori di $h, k, \ldots$; ed affinchè questa condizione sia soddisfatta dovrà essere

$$f'_x(x_0, y_0, \ldots) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0, \ldots) = 0, \ldots\ldots$$

come già si è trovato.

Supposto poi che f ammetta derivate parziali di secondo ordine continue, si ha

$$F''(t) = f''_{xx}(x, y, \ldots)\, h^2 + f''_{yy}(x, y, \ldots)\, k^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2 f''_{xy}(x, y, \ldots)\, hk + \ldots\ldots;$$

e se u diventa massima ovvero minima pei valori considerati, altrettanto avviene per $F(t)$ per $t = 0$, quindi è necessario

pel massimo che

$$F''(0) \leqq 0$$

pel minimo che

$$F''(0) \geqq 0,$$

qualunque siano h, k, ..., ossia

Affinchè la funzione u *possa diventare massima, ovvero minima pei valori* $x_0\, y_0 \ldots$ *delle variabili che annullano le derivate prime, è necessario che la funzione omogenea di secondo grado in* h, k,...

$$F''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0, \ldots) h^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, \ldots) k^2 + \ldots\ldots$$
$$+ 2 f''_{xy}(x_0, y_0, \ldots) h k + \ldots\ldots$$

non assuma rispettivamente valori positivi, ovvero negativi, qualunque siano h, k, l,...

135. — *Se per* $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ *si annullano tutte le derivate parziali d'ordine minore di* n *della funzione* $u = f(x, y, \ldots)$, *e se, sviluppando* $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ *colla formula di Taylor, il termine che contiene* h, k,... *omogeneamente al grado* n *è forma indefinita,* u *non è nè massimo nè minimo pei valori* $x_0, y_0, \ldots$ *delle variabili. Se invece questo termine è forma definita positiva,* u *è minima, e se forma definita negativa* u *è massima.*

Infatti, applicando i teoremi 4° e 5° del N. 130 alla funzione

$$v = f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots),$$

se il termine considerato è forma indefinita, in ogni intorno di x_0, $y_0, \ldots$ v assume valori positivi e negativi, e $f(x, y, \ldots)$ valori maggiori e minori di $f(x_0, y_0, \ldots)$ onde la funzione u non è nè massima nè minima. Se invece esso è forma definita positiva sarà in un certo intorno di x_0, $y_0, \ldots$ $v > 0$, ossia

$$f(x, y, \ldots) > f(x_0, y_0, \ldots)$$

e la funzione u è minima per $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ In modo analogo si ragionerebbe se il termine considerato fosse forma definita negativa.

136. — Ecco un criterio per riconoscere se una data funzione omogenea di secondo grado $\psi(h, k, l, \ldots)$ è forma definita positiva, ossia se, qualunque siano

i valori attribuiti ad h, k,... essa assume valori positivi, e mai nulli, salvochè si annullino ad un tempo tutte le variabili.

Se la ψ dipende da una variabile sola h, sarà $\psi = Ah^2$, ed essa sarà positiva, e nulla solo quando si annulli h, se $A > 0$.

Se ψ dipende da due variabili h e k, sarà

$$\psi = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2;$$

e se essa è forma definita positiva, posto $k = 0$, ed h non nullo, ψ assume il valore Ah^2 che deve essere positivo e non nullo, onde deve essere

$$A > 0;$$

ψ si può mettere sotto la forma

$$\psi = \frac{1}{A}\left[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2\right],$$

e se si dispone di h in modo che $Ah + Bk = 0$, ψ assume il valore positivo e non nullo $\frac{1}{A}(AC - B^2)k^2$; ed affinchè ciò avvenga è necessario che

$$AC - B^2 > 0.$$

Le condizioni $A > 0$ e $AC - B^2 > 0$, necessarie affinchè ψ sia forma quadratica definita positiva, sono anche sufficienti; invero, se k non è nullo, sarà

$$(AC - B^2)k^2 > 0, \quad \text{e} \quad (Ah + Bk)^2 \geqq 0,$$

onde la loro somma è positiva e $\psi > 0$; se k è nullo, non sarà nullo h, e quindi ψ si riduce a Ah^2, quantità positiva.

In generale, se ψ dipende da più variabili, h, k, l,..., si potrà scrivere

$$\psi = Ah^2 + 2Bh + C,$$

dove A è una costante, B è funzione omogenea di primo grado in k, l,... e C è funzione omogenea di secondo grado delle stesse quantità. Se si annullano k, l,... senza annullare h, si annullano B e C, e ψ assume il valore Ah^2, che è positivo per ipotesi, onde

$$A > 0.$$

La forma ψ si può scrivere

$$\psi = \frac{1}{A}\left[(Ah + B)^2 + (AC - B^2)\right],$$

ed $AC - B^2$ è funzione omogenea di secondo grado in $k, l, \ldots$ Dando a queste variabili valori qualunque non tutti nulli, e ad h un valore tale che $Ah + B = 0$, ψ assume il valore $\frac{1}{A}(AC - B^2)$ che è positivo e non nullo, quindi deve essere positiva e non nulla l'espressione $AC - B^2$; ossia, posto $\psi_1(k, l, \ldots) = AC - B^2$, ψ_1 è funzione omogenea di $k, l, \ldots$ che è sempre positiva e mai nulla, salvochè si annullino tutte le variabili.

Quindi le condizioni necessarie affinchè ψ sia forma definita positiva sono: 1° $A > 0$; 2° $AC - B^2$ sia forma definita positiva delle variabili $k, l, \ldots$

Queste condizioni sono sufficienti. Invero se si attribuisce ad h un valore arbitrario, e a $k, l, \ldots$ valori arbitrarii non tutti nulli, dei due termini in cui si è decomposto ψ il primo è positivo o nullo, ed il secondo positivo, onde $\psi > 0$. Se invece si attribuiscono a $k, l, \ldots$ valori tutti nulli, h non sarà nullo, e ψ assume il valore Ah^2, che è positivo.

In tal modo, per riconoscere se una forma quadratica sia definita positiva siamo ridotti a riconoscere se abbia la stessa proprietà un'altra forma quadratica contenente una variabile di meno. Così continuando saremo ridotti ai casi già studiati con una o due variabili.

Si riconosce se una forma ψ sia definita negativa, se $-\psi$ è forma definita positiva.

Esempi.

137. — Spesso si domanda il massimo od il minimo valore relativo d'una funzione, cioè il più grande o il più piccolo valore d'una funzione mentre le variabili variano in un dato campo finito od infinito. E se esso corrisponde ad un sistema di valori interni al campo dato, corrispondentemente a questo sistema di valori la funzione diventa massima o minima, nel senso definito, cioè assolutamente.

Vogliasi per es. decomporre un numero positivo a in p parti positive in modo che il prodotto delle potenze positive $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$ di queste parti sia massimo.

Dette $x, y, \ldots . u$, $a - x - y - \ldots - u$ queste parti, e posto

$$U = x^{\alpha} y^{\beta} \ldots u^{\lambda} (a - x - y - \ldots - u)^{\mu},$$

trattasi di rendere massima la funzione U, o ciò che fa lo stesso, il suo logaritmo neperiano. Annullando quindi le derivate parziali di $\log U$, si ha

$$\frac{d \log U}{dx} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

$$\frac{d \log U}{dy} = \frac{\beta}{y} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \log U}{dy} = \frac{\lambda}{u} - \frac{\mu}{a - x - y - \ldots - u} = 0,$$

le quali equazioni si possono pure scrivere

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \ldots = \frac{u}{\lambda} = \frac{a - x - y - \ldots - u}{\mu} = \frac{a}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu},$$

dove l'ultimo termine si ottiene componendo le proporzioni precedenti. Quindi, detti x_0, $y_0, \ldots u_0$ i valori delle variabili che soddisfanno a queste equazioni, si ricava

$$x_0 = a \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}, \quad y_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}, \ldots, u_0 = a \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \ldots + \mu}.$$

e
$$a - x_0 - y_0 - \ldots - u_0 = a \frac{\mu}{\alpha + \beta + \ldots + \mu},$$

ed il valore corrispondente di U, che diremo U_0 sarà

$$U_0 = a^{\alpha + \beta + \ldots + \mu} \frac{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \ldots \lambda^{\lambda} \mu^{\mu}}{(\alpha + \beta + \ldots + \mu)^{\alpha + \beta + \ldots + \mu}}.$$

Per riconoscere che U_0 è il più grande dei valori di U si potrebbe dimostrare che U diventa effettivamente massima per un sistema di valori $x_0, y_0, \ldots$ delle variabili, che questo è interno al campo considerato; e che per essi si debbono annullare le derivate di $\log U$; ma queste derivate non si annullano che pei valori precedentemente trovati; dunque essi sono i valori che rendono massima U.

Oppure, ricorrendo alla formula di Taylor, se $x, y, \ldots u$ è un altro sistema di valori positivi delle variabili, corrispondentemente a cui sia anche positivo $a - x - y - \ldots - u$, lo stesso avverrà per i valori

$$x_0 + t(x - x_0). \quad y_0 + t(y - y_0), \ldots \; u_0 + t(u - u_0),$$

ove t è una variabile compresa fra 0 ed 1; quindi $\log U$ avrà le derivate parziali prime e seconde finite e continue, e osservando che le derivate prime si annullano pei valori $x_0, y_0, \ldots$ delle variabili, si avrà:

$$\log U = \log U_0 - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha(x-x_0)^2}{x_1^2} + \frac{\beta(y-y_0)^2}{y_1^2} + \ldots + \frac{\lambda(u-u_0)^2}{u_1^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu(x+y+\ldots+u-x_0-y_0-\ldots-u_0)^2}{(\alpha-x_1-y_1-\ldots-u_1)^2}\right]$$

dove $x_1, y_1, \ldots u_1$ sono valori delle variabili della forma

$$x_0 + \theta(x - x_0), \quad y_0 + \theta(y - y_0), \ldots \; u_0 + \theta(u - u_0)$$

con $0 < \theta < 1$. La quantità entro parentesi è positiva, e non nulla, supposto che il sistema $x, y, \ldots u$ non coincida col sistema $x_0, y_0, \ldots u_0$; quindi

$$\log U < \log U_0$$

e

$$U < U_0,$$

ossia effettivamente U_0 è il massimo valore che può assumere U.

Si osservi che U diventa minimo $= 0$ se è nulla qualcuna delle parti in cui è decomposta a. Se a queste parti si dànno anche valori negativi, potrebbe avvenire che U_0 non sia il più grande dei valori di u.

138. — Vogliansi i massimi o minimi della funzione

$$u = F(x, y, z)$$

le variabili essendo legate dalla relazione

$$f(x, y, z) = 0.$$

Se da questa equazione si ricava z in funzione di x ed y, e si sostituisce nella prima, u sarà una funzione di x ed y ed i valori delle variabili che rendono u massima o minima debbono annullare il differenziale totale du qualunque siano dx e dy. Ora si ha

$$du = \frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz\,,$$

dove dz rappresenta il differenziale totale di z, definito dalla equazione

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz = 0\,.$$

Se all'equazione $du = 0$ si aggiunge quest'ultima moltiplicata per un'indeterminata $-\lambda$, si avrà

$$\left(\frac{dF}{dx} - \lambda\,\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy} - \lambda\,\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dz} - \lambda\,\frac{df}{dz}\right)dz = 0\,;$$

e se in questa equazione si dispone di λ in modo da annullare il coefficiente di dz, si dovranno anche annullare, corrispondentemente al massimo od al minimo, i coefficienti di dx e dy, e si ottengono le equazioni

$$\frac{dF}{dx} - \lambda\,\frac{df}{dx} = 0\,,\quad \frac{dF}{dy} - \lambda\,\frac{df}{dy} = 0\,,\quad \frac{dF}{dz} - \lambda\,\frac{df}{dz} = 0\,,$$

che sono simmetriche rispetto alle variabili, e che si ottengono eguagliando a zero le derivate parziali di

$$F - \lambda\,f.$$

Queste tre equazioni e le $f=0$, $u=F$ determinano le incognite λ, x, y, z, u, corrispondentemente ai quali valori u può diventare massima o minima.

Si ragionerebbe in modo analogo qualunque sia il numero delle variabili, e delle relazioni passanti fra esse.

Cambiamento delle variabili indipendenti.

139. — Abbiasi un sistema di variabili legate fra loro da relazioni convenienti. Preso un gruppo di queste come variabili indipendenti, di cui le rimanenti sono funzioni, si considerino le derivate ordinarie o parziali dei varii ordini di queste rispetto quelle. Preso un altro gruppo di variabili indipendenti, si considerino in modo analogo le derivate delle rimanenti variabili. Il problema del cambiamento delle variabili indipendenti consiste nel trovare le relazioni che passano fra le derivate prese nella seconda ipotesi e quelle prese nella prima.

Il caso più semplice è quello in cui $y=f(x)$, e si pone $x=\varphi(t)$; y diventerà una funzione di t; e le derivate $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ di y considerato come funzione di x si possono esprimere in funzione delle derivate di y rispetto a t e di x rispetto a t, come ora vedremo.

La regola di differenziazione delle funzioni composte dà.

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\,\varphi'(t)=f'(x)\,\frac{dx}{dt}\,,$$

onde si ricava

$$f'(x)=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\,,$$

che si potrà scrivere più semplicemente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

intendendo che nel membro di sinistra $\frac{dy}{dx}$ rappresenti la derivata di y rispetto a x, cioè $f'(x)$, e che nel membro di destra $\frac{dy}{dx}$ rappresenti il quoziente dei differenziali di y ed x considerate come funzioni di t.

Differenziando rispetto t ambi i membri dell'equazione precedente, e dividendo per dx si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}. \tag{2}$$

Differenziando un'altra volta, e dividendo per dx si ha ancora

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx\,(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3\, d^2x\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^5}, \tag{3}$$

e così di seguito si hanno le formule che esprimono le derivate di y rispetto ad x in funzione dei differenziali, e quindi delle derivate di x e y funzioni di t.

Si possono verificare le formule precedenti col supporre $t = x$, ossia che la nuova variabile non differisca dall'antica; allora nella differenziazione sarà dx costante, e $d^2x = d^3x = \ldots = 0$. Tenendo conto di questo le formule precedenti riduconsi ad identità.

Se si fa $t = y$, ossia si considera y come variabile indipendente, nelle formule precedenti bisognerà porre $d^2y = d^3y = \ldots = 0$, ed esse si riducono a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy\, d^2x}{dx^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-dx\, dy\, d^3x + 3\, dy\, d^2x^2}{dx^5}, \ldots$$

ovvero mettendo in evidenza le derivate di x rispetto y si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{d^2y}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)},\ldots$$

Esempio. — Trasformare l'espressione

$$V=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ove x è la variabile indipendente, ed y funzione di x, in un'altra in cui sia t la variabile indipendente, e x e y funzioni di t.

Applicando le formule precedenti si ha:

$$V=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Sia ancora y funzione di x; siano t ed u altre due variabili legate alle precedenti da relazioni che supporremo messe sotto la forma

$$x=\varphi(t,u),\quad y=\psi(t,u).$$

Si vogliono esprimere le derivate di y rispetto a x in funzione delle derivate di u rispetto a t.

Basterà a questo scopo di esprimere le derivate di y rispetto a x in funzione delle derivate di y ed x rispetto a t; queste si potranno infine calcolare fra le relazioni che passano fra x, y, t ed u, perchè si ricava differenziando

$$dx=\frac{d\varphi}{dt}dt+\frac{d\varphi}{du}du,\qquad dy=\frac{d\psi}{dt}dt+\frac{d\psi}{du}du,$$

$$d^2x=\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt^2+2\frac{d^2\varphi}{dt\,du}dt\,du+\frac{d^2\varphi}{du^2}du^2+\frac{d\varphi}{du}d^2u,\qquad \text{ecc.}$$

Esempio. — Vogliasi trasformare l'espressione V dell'esempio precedente in un'altra in cui si prendono per variabili r ed α legate alle x e y dalle relazioni

$$x = r \cos \alpha\,, \quad y = r \operatorname{sen} \alpha\,,$$

ed α è la variabile indipendente.

Trasformata l'espressione di V in modo che α risulti la variabile indipendente, si trovò

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}\,;$$

differenziando le relazioni date si ricava

$$dx = \cos \alpha\, dr - r \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha\,,$$
$$dy = \operatorname{sen} \alpha\, dr + r \cos \alpha\, d\alpha\,,$$

onde

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\alpha^2\,,$$

e

$$d^2x = \cos \alpha\, d^2r - 2 \operatorname{sen} \alpha\, dr\, d\alpha - r \cos \alpha\, d\alpha^2$$
$$d^2y = \operatorname{sen} \alpha\, d^2r + 2 \cos \alpha\, dr\, d\alpha - r \operatorname{sen} \alpha\, d\alpha^2\,,$$

quindi

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = - r d^2 r d\alpha + 2\, dr^2\, d\alpha + r^2 d\alpha^3$$

ed infine

$$V = \frac{(dr^2 + r^2\, d\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{- r d^2 r\, d\alpha + 2\, dr^2\, d\alpha + r^2 d\alpha^3}\,.$$

140. — Sia z funzione di x ed y; si sostituiscono ad x ed y due altre variabili t, u legate ad esse da relazioni note, che permettono di esprimere x e y in funzione di t e u, e reciprocamente. Si vogliono esprimere le derivate parziali di z rispetto ad x e y in funzione delle derivate parziali di z rispetto a t ed u.

La regola di differenziazione delle funzioni composte, considerando z funzione di t ed u, funzioni di x ed y, dà

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dx} + \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dx}\,,$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{dy} + \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dy}\,,$$

che esprimono appunto le derivate $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ in funzione di $\frac{dz}{dt}$ e $\frac{dz}{du}$.

I coefficienti $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$,... si ricavano dalle relazioni date fra x, y, t, u.

Differenziando ancora le equazioni precedenti se ne dedurranno altre che determinano $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ecc.

Esempio. — Sia z una funzione di x ed y tale che soddisfi all'equazione

$$\frac{d^2z}{dy^2} - a^2 \frac{d^2z}{dx^2} = 0;$$

invece di x ed y prendansi per variabili indipendenti t ed u legate alle precedenti dalle relazioni

$$t = x + ay, \quad u = x - ay,$$

onde si ricava

$$\frac{dt}{dx} = 1, \qquad \frac{dt}{dy} = a, \qquad \frac{du}{dx} = 1, \qquad \frac{du}{dy} = -a.$$

Derivando z rispetto x ed y, come si è detto, si ricava nel nostro caso:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{du}, \quad \frac{dz}{dy} = a\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz}{du}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{d^2z}{dt\,du} + \frac{d^2z}{du^2},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2\left(\frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{d^2z}{dt\,du} + \frac{d^2z}{du^2}\right),$$

onde sostituendo nell'equazione data, dopo aver diviso per $4a^2$, si ha

$$\frac{d^2z}{dt\,du} = 0.$$

In modo analogo si trattano i casi in cui sia maggiore il numero delle variabili.

CAPITOLO VI.

Variabili complesse.

Limiti.

141. — Le regole del calcolo infinitesimale si possono estendere alle quantità che l'algebra chiama immaginarie o complesse, riduttibili alla forma

$$a + bi,$$

ove a e b sono quantità reali, ed i l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$.

Diremo *variabili* le quantità $z = x + iy$ se sono variabili le quantità reali x ed y. Diremo che z tende ad un *limite* $c = a + ib$ se

$$\lim x = a, \qquad \lim y = b.$$

La differenza $z - c = (x - a) + i(y - b)$ ha per modulo

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

il quale, se $\lim z = c$, ha evidentemente per limite zero. Viceversa, se

$$\lim \operatorname{mod}(z - c) = 0,$$

le quantità $x-a$ e $y-b$ avranno pure per limite zero, perchè numericamente minori di mod $(z-c)$, e quindi $\lim z=c$.

Ammetteremo dimostrati i teoremi (N. 10-12) sui limiti d'una somma, d'un prodotto e d'un quoziente, anche per le variabili complesse, perchè la dimostrazione è facilmente riduttibile alle variabili reali.

Serie a termini complessi.

142. — La serie

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots$$

i cui termini sono complessi si dirà *convergente* se la somma

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$

col crescere indefinitamente di n tende verso un limite, cui si dà il nome di somma della serie.

Se si pone

$$u_0 = p_0 + iq_0, \quad u_1 = p_1 + iq_1, \ldots\ldots$$

ove le p e le q sono reali, si ha

$$s_n = (p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}) + i(q_0 + q_1 + \ldots + q_{n-1})$$

e se la serie è convergente, ossia s_n tende ad un limite $S = P + Qi$, è necessario e sufficiente che siano convergenti le serie delle p e delle q, e sia

$$P = p_0 + p_1 + \ldots\ldots$$
$$Q = q_0 + q_1 + \ldots\ldots$$

143. — Si consideri p. e. la progressione geometrica

$$1\,,\quad x\,,\quad x^2\,,\quad x^3\,,\ldots\ldots;$$

si ha

$$s_n = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\,;$$

se il modulo di x è minore di 1, il modulo di x^n col crescere indefinitamente di n ha per limite zero, onde la serie proposta è convergente e si ha

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \qquad (\text{mod}\, x] < 1).$$

Se si fa $x = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, si ha $(r < 1)$

$$\frac{1}{1 - r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)} = 1 + r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) + r^2(\cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha) + \\ + r^3(\cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha) + \ldots\ldots$$

Ma il membro di sinistra

$$\frac{1}{1 - r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{1 - r\cos\alpha + i\, r \operatorname{sen}\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}\,,$$

quindi eguagliando le parti reali ed i coefficienti di i si hanno le formule per tutti i valori positivi di $r < 1$, e per tutti i valori reali di α:

$$\frac{1 - r\cos\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots\ldots$$

$$\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = 0 + r\operatorname{sen}\alpha + r^2 \operatorname{sen} 2\alpha + \ldots\ldots$$

144. Teorema. — *Il termine generale d'una serie convergente ha per limite zero col crescere indefinitamente dell'indice.*

Invero, se $u_n = p_n + iq_n$, e se è convergente la serie delle u_n, sono pure convergenti le serie reali i cui termini sono p_n e q_n, onde (N. 55) $\lim p_n = \lim q_n = 0$, e $\lim u_n = 0$.

Ammetteremo dimostrati i teoremi (N. 52 e 53) riferentesi alla moltiplicazione d'una serie per una costante, e alla somma di due serie.

Teorema. — *Una serie a termini complessi è convergente se è convergente la serie formata coi moduli dei termini.*

Siano

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots$$

i termini della serie data,

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots$$

i loro moduli che supporremo formino una serie convergente; e siano

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots$$

gli argomenti dei termini. Si avrà che

$$u_n = r_n (\cos \alpha_n + i \operatorname{sen} \alpha_n),$$

quindi le serie formate colle parti reali e coi coefficienti di i dei termini sono

$$r_0 \cos \alpha_0, \quad r_1 \cos \alpha_1, \quad r_2 \cos \alpha_2, \ldots$$

e

$$r_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \quad r_1 \operatorname{sen} \alpha_1, \quad r_2 \operatorname{sen} \alpha_2, \ldots$$

i termini delle quali sono rispettivamente minori in valor assoluto dei termini della serie convergente

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \ldots$$

onde esse sono pure convergenti, ed è convergente la serie delle u.

Così p. es. la serie

$$1, \quad x, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots$$

è convergente qualunque sia x, reale o complesso, perchè, detto r il modulo di x, i moduli dei termini formano la serie

$$1, \quad r, \quad \frac{r^2}{2!}, \quad \frac{r^3}{3!}, \ldots\ldots$$

che è convergente, ed ha per somma e^r.

145. Teorema. — *Se le serie*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots \tag{1}$$

e

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \ldots\ldots \tag{2}$$

sono convergenti, e sono pure convergenti le serie formate coi moduli dei loro termini

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots\ldots \tag{3}$$

e

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ldots\ldots \tag{4},$$

la serie

$$w_0, \quad w_1, \quad w_2, \ldots\ldots \tag{5}$$

in cui

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \quad w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \ldots\ldots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots\ldots + u_n v_0, \ldots\ldots$$

è convergente, ed ha per somma il prodotto delle somme delle due serie date.

Dimostreremo dapprima il teorema sulle serie (3) e (4) formate coi moduli dei termini, ossia sulle serie a termini positivi.

Posto

$$A_p = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_{p-1}$$
$$B_p = b_0 + b_1 + \ldots\ldots + b_{p-1}$$

e

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots\ldots + (a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} b_0)$$

è facile il riconoscere che il prodotto

$$\begin{aligned} A_p\, B_p = {} & a_0\, b_0 + a_1\, b_0 + \ldots\ldots a_{p-1}\, b_0 \\ & + a_0\, b_1 + a_1\, b_1 + \ldots\ldots + a_{p-1}\, b_1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_0\, b_{p-1} + a_1\, b_{p-1} + \ldots\ldots + a_{p-1}\, b_{p-1} \end{aligned}$$

vale

$$A_p B_p = C_p + a_1\, b_{p-1} + \ldots + a_{p-1}\, b_1 + \ldots + a_{p-1}\, b_{p-1}\,,$$

ossia

$$A_p\, B_p > C_p\,,$$

e che

$$A_p\, B_p < C_{2p} < C_{2p+1}\,.$$

Ponendo nella prima diseguaglianza $p = n$, si ha

$$C_n < A_n\, B_n\,,$$

e fatto nella seconda $n = 2p$, ovvero $2p + 1$, onde p risulta il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$, si ha

$$C_n > A_p\, B_p\,.$$

Facendo crescere indefinitamente n, anche p cresce indefinitamente, e dette A e B le somme delle serie (3) e (4) si ha

$$\lim A_n = \lim A_p = A\,, \quad \lim B_n = \lim B_p = B\,,$$

quindi C_n risulta compresa fra due quantità che tendono verso uno stesso limite, e sarà perciò

$$\lim C_n = AB.$$

Si considerino ora le serie complesse (1) e (2); posto

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$$
$$s'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$$
$$s''_n = w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{n-1},$$

si ha

$$s_n\, s'_n - s''_n = u_1\, v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}\, v_1 + \ldots + u_{n-1}\, v_{n-1},$$

onde, considerando i moduli d'ambo i membri, e ricordando che il modulo d'una somma non è maggiore della somma dei moduli,

$$\text{mod}\,(s_n\, s'_n - s''_n) \leqq a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, b_1 + \ldots + a_{n-1}\, b_{n-1},$$

ossia

$$\text{mod}\,(s_n\, s'_n - s''_n) \leqq (A_n\, B_n - C_n);$$

facendo crescere indefinitamente n, $\lim (A_n\, B_n - C_n) = 0$, onde $\lim \text{mod}\,(s_n\, s'_n - s''_n) = 0$, e quindi

$$\lim s''_n = \lim s_n \,.\, \lim s'_n \qquad \text{c. v. d.}$$

Funzioni esponenziali e circolari di variabile complessa.

146. — Porremo per definizione di e^x, quando x è complesso

(1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

ove nel membro di destra la serie è convergente qualunque sia x, e la sua somma per x reale è appunto e^x.

Porremo in modo analogo, quando x è complesso, per definizione

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots \tag{3}$$

le quali serie sono convergenti qualunque sia x, e se x è reale rappresentano appunto $\text{sen}\, x$ e $\cos x$.

Se nella formula (1) invece di x si legge ix, si ha

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

ovvero, a causa delle formule (2) e (3):

$$e^{ix} = \cos x + i\, \text{sen}\, x\,, \tag{4}$$

e scambiando x in $-x$

$$e^{-ix} = \cos x - i\, \text{sen}\, x\,. \tag{5}$$

Da queste ultime due formule si ricava

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \text{sen}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,, \tag{6}$$

e si hanno così le funzioni circolari espresse mediante esponenziali.

147. — La proprietà

$$e^x \,.\, e^y = e^{x+y} \tag{7}$$

sussiste anche se x ed y sono complessi. Invero si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots\cdots$$

e moltiplicando le due serie colla regola nota, il che si può fare, perchè sono convergenti le serie formate coi moduli dei termini, si ha

$$e^x \,.\, e^y = 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \ldots\ldots$$

ed il termine generale è

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{y}{1} + \ldots + \frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\,\frac{y^r}{r!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[x^n + nx^{n-1}y + \ldots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,x^{n-r}y^r + \ldots + y^n\right] = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

ossia

$$e^x \,.\, e^y = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots.$$

e siccome la serie di destra ha per somma e^{x+y} per definizione, si ricava la formula a dimostrarsi.

In virtù di questo teorema si ha che

$$(8) \qquad e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,;$$

supposto x ed y reali, $x + iy$ sarà una quantità complessa qualunque, e e^{x+iy} resta espressa sotto forma trigonometrica, ed ha per modulo e^x e per argomento y.

Reciprocamente una quantità complessa di modulo r e di argomento α si può scrivere semplicemente $re^{i\alpha}$.

Moltiplicando le formule (4) e (5) membro a membro, si ha

$$(9) \qquad 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\,,$$

formula nota di trigonometria, che risulta così dimostrata qualunque siano i valori di x.

Moltiplicando le formule

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$
$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

si ha

$$e^{i(x+y)} = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x),$$

ossia

$$\cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) =$$
$$\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x);$$

scambiando in essa x ed y in $-x$ e $-y$ si ha

$$\cos(x+y) - i \operatorname{sen}(x+y) =$$

$$\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - i(\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x),$$

onde, si ricavano le formule per l'addizione degli archi

$$(10) \qquad \begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

che valgono qualunque siano x ed y, reali o complessi.

Da queste ultime formule si ricava

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy,$$
$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy,$$

ed in virtù delle (6)

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \qquad \operatorname{sen} iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

onde, se y è reale, $\cos iy$ è pure reale, e $\operatorname{sen} iy$ è immaginario puro; onde sostituendo nelle ultime formule, supposto x ed y reali, si ha $\cos(x+iy)$ e $\operatorname{sen}(x+iy)$ ridotti alla forma $a+bi$.

148. — Le funzioni $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ presentano molta analogia colle funzioni circolari coseno e seno, e, benchè si esprimano

mediante esponenziali, e quindi non siano funzioni nuove, tuttavia si imposero loro i nomi di *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*, e si rappresentano scrivendo

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

e si ricavano con tutta facilità le formule

$$\mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\, x, \qquad \mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\, x.$$

$$\mathrm{Ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots$$

$$e^x = \mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x$$

$$e^{-x} = \mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x,$$

$$1 = \mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x$$

$$\cos ix = \mathrm{Ch}\, x, \quad \mathrm{sen}\, ix = i\, \mathrm{Sh}\, x,$$

$$\mathrm{Ch}(x+y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y$$

$$\mathrm{Sh}(x+y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y.$$

Le altre funzioni trigonometriche si definiscono mediante le loro espressioni in funzione del seno e del coseno, le quali sono i risultati di dimostrazione se x è reale; così per x complesso si pone

$$\mathrm{tang}\, x = \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x},$$

ovvero, esprimendo tutto mediante esponenziali

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{tang}\, x = \frac{1}{i}\, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

Si dà una definizione analoga per la tangente iperbolica, e si pone

$$\mathrm{Th}\, x = \frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

onde si ha

$$\tan ix = i\, \mathrm{Th}\, x, \qquad \text{ecc.}$$

149. — Si dice che y è il logaritmo naturale di x, e si scrive

$$y = \log x$$

se

$$e^y = x .$$

Pongasi $x = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, ed $y = p + iq$; si avrà

$$e^y = e^{p+iq} = e^p(\cos q + i \operatorname{sen} q),$$

ed affinchè questa quantità complessa possa essere eguale ad x, è necessario che i moduli siano eguali, e gli argomenti non differiscano che per un multiplo di 2π; onde l'equazione $e^y = x$ si riduce alle seguenti fra quantità reali

$$e^p = r$$
$$q = \alpha + 2k\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

La seconda determina q; dalla prima si ricava p in modo unico, perchè essendo r reale e positivo, esiste un sol valore reale di p tale che $e^p = r$, ed è il logaritmo di r stato definito a proposito delle funzioni di variabile reale; noi lo indicheremo scrivendo

$$p = \log' r.$$

Così determinate p e q, risulta noto $p + qi = y = \log x$, e si ha

$$\log[r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)] = \log' r + i(\alpha + 2k\pi), \tag{13}$$

ossia il logaritmo d'una quantità complessa ha infiniti valori; la loro parte reale è comune, ed è il logaritmo (nel significato di variabili reali) del modulo; ed il coefficiente di i è l'argomento aumentato d'un multiplo arbitrario di 2π.

Se la quantità di cui si vuole il logaritmo è reale e positiva, essa è eguale al suo modulo r, e per argomento si può assumere lo zero; onde la formula precedente dà

$$\log r = \log' r + 2k\pi i;$$

ossia il logaritmo d'una quantità reale e positiva ha infiniti valori; uno, corrispondente a $k=0$, è reale, ed è il logaritmo definito per le variabili reali; tutti gli altri sono immaginarii, e a due a due coniugati, perchè si avranno valori coniugati per $\log r$ se si dànno a k valori eguali e di segno contrario.

Sia ora $-r$ una quantità reale e negativa; il suo modulo è r, e per argomento si può assumere π; onde

$$\log(-r) = \log' r + (2k+1)\pi i;$$

essi sono tutti immaginarii; dando a k le coppie di valori $0, -1$; $1, -2$; $2, -3$;... $\log(-r)$ assume i valori immaginarii coniugati

$$\log' r \pm \pi i, \quad \log' r \pm 3\pi i, \quad \log' r \pm 5\pi i, \ldots\ldots$$

150. — Alla scrittura u^v si dà, per u e v complessi, il significato

$$u^v = e^{v \log u}$$

che costituisce un'identità nota per u e v reali ed $u > 0$. Siccome $\log u$ ha infiniti valori, e detto $\log u$ uno di essi, tutti gli altri sono della forma

$$\log u + 2k\pi i,$$

anche u^v avrà infiniti valori, che in generale sono distinti.

Così ad esempio, in virtù delle convenzioni fatte, l'espressione $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ ha il significato $e^{i \log i}$; e siccome

$$\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = (4k+1)\frac{\pi}{2} i,$$

si ha

$$i^i = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}},$$

ossia, assume infiniti valori, tutti reali.

151. — Diremo che $x = \text{arc sen}\, z$, ovvero $x = \text{arc cos}\, z$ se $\text{sen}\, x = z$, ovvero $\cos x = z$. Queste funzioni circolari inverse si possono facilmente ridurre ai logaritmi. Invero, prendendo i logaritmi d'ambo i membri dell'eguaglianza (4) si ha

$$ix = \log(\cos x + i\, \text{sen}\, x), \tag{14}$$

e se si pone in essa $\text{sen}\, x = z$, onde $\cos x = \sqrt{1 - z^2}$, e $x = \text{arc sen}\, z$, si ha

$$\text{arc sen}\, z = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1 - z^2} + iz\right); \tag{15}$$

analogamente, ponendo nella formula (14)

$$\cos x = z, \qquad \text{sen}\, x = \sqrt{1 - z^2}, \qquad x = \text{arc cos}\, z,$$

si ha

$$\text{arc cos}\, z = \frac{1}{i} \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right). \tag{16}$$

Esaminando la formula (15), si scorge che dato z, l'espressione $\sqrt{1 - z^2} + iz$ ha due valori corrispondenti al doppio valore del radicale; ad ognuno di essi corrispondono ancora infiniti valori di $\text{arc sen}\, z$, perchè il logaritmo ha infiniti valori. Se z è reale e < 1, $\sqrt{1 - z^2}$ è reale, il modulo di $\sqrt{1 - z^2} + iz$ è l'unità, il logaritmo di questa quantità è immaginario puro, e dividendo per i si ha $\text{arc sen}\, z$ reale. Ma se z è reale > 1, ovvero immaginario, risulta immaginario anche $\text{arc sen}\, z$. Così ad esempio, l'espressione

$$\text{arc sen}\, 2 = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{-3} + 2i\right) = \frac{1}{i} \log i\left(\sqrt{3} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{i} \log'\left(\sqrt{3} + 2\right) + \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Si divida la formula (4) per la (5); si avrà

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos x - i \operatorname{sen} x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x};$$

prendendone i logaritmi

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x},$$

e posto $\operatorname{tang} x = z$, e $x = \operatorname{arc\,tang} z$, si ha

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz}.$$

Così restano definite le funzioni esponenziali e logaritmiche, e le funzioni trigonometriche dirette ed inverse per valori complessi delle variabili, e si vede che le funzioni trigonometriche dirette si possono esprimere mediante esponenziali, e le inverse mediante logaritmi; onde se dell'esponenziale e del logaritmo che ne è l'inverso si fa una sola categoria di funzioni, si deduce che tutte le funzioni trascendenti finora introdotte nel calcolo si possono ridurre alla sola e^x.

Funzioni di variabile complessa.

152. — Diremo che w è funzione della variabile complessa z, e si scrive $w = f(z)$, se ad ogni valore di z corrisponde un valore di w.

Se si fa $w = u + iv$, $z = x + iy$, ove u, v, x, y sono variabili reali, se w è funzione di z saranno u e v funzioni reali di x ed y.

Diremo che la funzione $w = f(z)$ ha derivata se, col tendere a zero della quantità complessa h, tende verso un limite la quantità

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

e questo limite è il valore della derivata $f'(z)$ corrispondentemente al valore considerato di z.

153. — Pongasi

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

e

$$h = k + il,$$

ove k ed l sono quantità reali. Si avrà:

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

e

$$f(z+h) = \varphi(x+k, y+l) + i\psi(x+k, y+l),$$

onde

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{[\varphi(x+k, y+l) - \varphi(x, y)] + i[\psi(x+k, y+l) - \psi(x, y)]}{k+il},$$

Se w ammette derivata $f'(z)$, la quantità $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ tende verso $f'(z)$ in qualunque modo si faccia tendere Δz a zero. Suppongasi dapprima in $\Delta z = h = k + il$, nulla la parte immaginaria l; si avrà:

$$\lim \frac{\varphi(x+k, y) - \varphi(x, y) + i[\psi(x+k, y) - \psi(x, y)]}{h} = f'(z),$$

ed affinchè ciò avvenga, debbono tendere verso limiti la parte reale ed il coefficiente di i; quindi le funzioni φ e ψ ammettono derivate parziali rispetto x, e si avrà

$$f'(z) = \varphi'_x(x, y) + i\,\psi'_x(x, y).$$

Suppongasi invece in Δz nulla la parte reale k; si avrà:

$$\lim \frac{\varphi(x, y+l) - \varphi(x, y) + i[\psi(x, y+l) - \psi(x, y)]}{il} = f'(z),$$

e quindi con ragionamento analogo si deduce l'esistenza delle derivate parziali di φ e ψ rispetto y, e

$$f'(z) = \psi'_y(x, y) - i\,\varphi'_y(x, y).$$

Paragonando questa espressione di $f'(z)$ colla precedente, colla quale deve essere identica, si ha:

$$\varphi'_x(x, y) = \psi'_y(x, y) \quad \text{e} \quad \psi'_x(x, y) = -\varphi'(x, y),$$

ossia:

Affinchè $w = u + iv$ *sia funzione di* $z = x + iy$, *è necessario che le funzioni reali* u *e* v *delle variabili reali* x *ed* y *soddisfino alle equazioni*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Se si deriva la prima equazione rispetto x, la seconda rispetto y, e se si ritiene $\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx}$, si ricava l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

equazione a derivate parziali di secondo ordine, in cui non entra che la funzione u. In modo analogo, derivando la prima equazione rispetto y e la seconda rispetto x, e sottraendo si ha

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

ossia anche v soddisfa alla stessa equazione a derivate parziali cui pure soddisfa u.

154. — *Se le condizioni*

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \quad \text{e} \quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$$

sono verificate, la funzione w *ha derivata.*

Invero, si ha (N. 105)

$$\varphi(x+k, y+l)-\varphi(x, y)=k\varphi'_x(x, y)+l\varphi'_y(x, y)+\alpha k+\beta l,$$
$$\psi(x+k, y+l)-\psi(x, y)=k\psi'_x(x, y)+l\psi'_y(x, y)+\alpha' k+\beta' l,$$

e, sommata la prima equazione colla seconda moltiplicata per i, si ha

$$\Delta w=k(\varphi'_x+i\psi'_x)+l(\varphi'_y+i\psi'_y)+\alpha k+\beta l+\alpha' i k+\beta' i l,$$

ovvero, osservando che $\psi'_y=\varphi'_x$ e $\varphi'_y=-\psi'_x=i^2\psi'_x$,

$$\Delta w=(k+il)(\varphi'_x+i\psi'_x)+\alpha k+\beta l+\alpha' i k+\beta' i l,$$

e dividendo per $\Delta z=k+il$,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\varphi'_x+i\psi'_x+\alpha\frac{k}{k+il}+\beta\frac{l}{k+il}+i\alpha'\frac{k}{k+il}+i\beta'\frac{l}{k+il}.$$

Facciasi qui tendere Δz a zero; k ed l tendono pure a zero, e quindi anche α, β, α', β'; le quantità

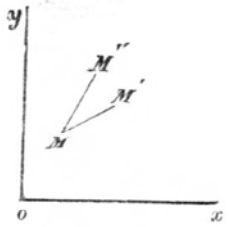
$$\frac{k}{k+il} \quad \text{e} \quad \frac{l}{k+il}$$

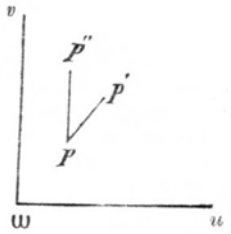
sono finite, perchè il loro modulo è minore dell'unità, onde

$$\lim\frac{\Delta w}{\Delta z}=\varphi'_x+i\psi'_x, \qquad \text{c. v. d.}$$

155. — Si rappresenti su d'un piano la variabile $z=x+iy$ mediante un punto M le cui coordinate cartesiane ortogonali sono

x ed y; si rappresenti in modo analogo in un altro piano la funzione $w = u + iv$ mediante un punto P le cui coordinate siano u e v. Essendo w funzione di z, ad ogni punto M del primo piano corrisponde un punto P nel secondo, e quindi la funzione complessa $w = f(z)$ determina una corrispondenza fra i punti del primo piano e quelli del secondo.





Dato a z il nuovo valore $z + h$, rappresentato dal punto M', sarà il modulo di h rappresentato dal segmento MM' ed il suo argomento dall'angolo di MM' coll'asse delle x. Se P' è il punto corrispondente ad M', $PP' = \text{mod}\, \Delta w$, e angolo $\widehat{PP', \omega u} = \text{arg.}\, \Delta w$. Fatto qui tendere Δz a zero, se la funzione ha derivata $f'(z)$ sarà

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

e quindi

$$\lim \text{mod}\, \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\text{mod}\, \Delta w}{\text{mod}\, \Delta z} = \lim \frac{PP'}{MM'} = \text{mod}\, f'(z),$$

e se $\text{mod}\, f'(z)$ non è nullo, anche

$$\lim \text{arg}\, \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim [\text{arg}\, \Delta w - \text{arg}\, \Delta z] =$$

$$= \lim [\widehat{P'P, \omega u} - \widehat{M'M, ox}] = \text{arg}\, f'(z).$$

Se M'' è un altro punto prossimo ad M, e P'' il corrispondente, sarà anche

$$\lim \frac{PP''}{MM''} = \text{mod}\, f'(z), \quad \lim [\widehat{P''P, \omega u} - \widehat{M''M, ox}] = \text{arg}\, f'(z),$$

quindi si deduce

$$\lim \frac{PP''}{MM''} : \frac{PP'}{MM'} = 1 ,$$

$$\lim [(P''\widehat{P, \omega u} - P'\widehat{P, \omega u}) - (M''\widehat{M, ox} - M'\widehat{M, ox})] = 0 ,$$

la quale ultima si può pure scrivere

$$\lim (P''\widehat{PP'} - M''\widehat{MM'}) = 0.$$

La prima equazione si può interpretare dicendo che, col tendere di M' e M'' ad M i rapporti $\frac{PP''}{MM''}$ e $\frac{PP'}{MM'}$ tendono a diventare eguali, e quindi i lati MM', MM'', PP', PP'' tendono a diventare proporzionali. La seconda equazione, ove si supponga di far variare M' e M'' in modo che $M''MM'$ tenda ad un limite, dice che

$$\lim P''PP' = \lim M''MM' ,$$

il che si può interpretare dicendo che gli angoli $M''MM'$ e $P''PP'$ tendono all'eguaglianza; onde i triangoli $M'MM''$ e $P'PP''$ tendono a diventare simili. Tutto questo fatto si suol esprimere dicendo che i due piani sono nelle loro parti infinitesime simili. Però quanto precede non si deve ritenere che come schiarimento delle formule trovate.

156. — Ammetteremo dimostrate anche per le variabili immaginarie le regole di differenziazione per le variabili reali, d'una somma, prodotto, quoziente, funzioni di funzioni, e funzioni inverse (N. 34-38), perchè la dimostrazione è la stessa.

La derivata della funzione esponenziale e^x si può ottenere nel seguente modo. Si ha

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h ,$$

onde

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} . \qquad (1)$$

Ora

$$e^h = 1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{1} + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = h\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \ldots\ldots\right],$$

e

$$\operatorname{mod}\left[\frac{e^h - 1}{h} - 1\right] = \operatorname{mod} h \,.\, \operatorname{mod}\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \ldots\ldots\right] \qquad (2)$$

La quantità racchiusa nella parentesi di destra è finita, e, detto k una quantità positiva maggiore del modulo di h, sarà

$$\operatorname{mod}\left[\frac{1}{2!} + \frac{h}{3!} + \ldots\right] < \frac{1}{2!} + \frac{k}{3!} + \ldots,$$

quindi, facendo tendere h a zero, il membro di destra della (2) ha per limite zero, e

$$\lim \operatorname{mod}\left[\frac{e^h - 1}{h} - 1\right] = 0,$$

ossia

$$\lim \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Quindi dalla formula (1) si ha

$$\lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x,$$

vale a dire la derivata di e^x è ancora e^x.

Dalla derivata di e^x si deducono le derivate di $\operatorname{sen} x$, e $\cos x$, perchè queste funzioni si possono esprimere mediante esponenziali; si ha:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

onde, derivando

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x\,, \quad \frac{d \cos x}{dx} = i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = -\operatorname{sen} x\,,$$

precisamente come se le variabili fossero reali.

Applicando la regola della derivazione di funzioni inverse, si trovano le derivate di $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x, \ldots$ che coincidono con quelle trovate per le variabili reali.

Serie ordinate
secondo le potenze d'una variabile.

157. — Teorema. *Se in una serie*

$$u_0\,,\ u_1 x\,,\ u_2 x^2\,,\ u_3 x^3\,, \ldots\ldots,$$

ove $u_0, u_1, \ldots$ *sono quantità indipendenti da* x, *per un certo valore di* x *di modulo* R *il modulo del termine generale* $u_n x^n$ *non assume valori comunque grandi, la serie proposta è convergente per ogni valore di* x *il cui modulo è minore di* R.

Infatti, suppongasi che il modulo del termine generale, pel valore di x il cui modulo è R, sia sempre minore d'una quantità finita A; sarà

$$\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n < A\,.$$

Diasi ad x un valore il cui modulo sia $r < R$; il modulo del termine generale della serie sarà $\operatorname{mod} u_n x^n = \operatorname{mod} u_n \,.\, r^n$, che si può scrivere $\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n \,.\, \left(\frac{r}{R}\right)^n$. In virtù dell'ipotesi precedente si ha che $\operatorname{mod} u_n x^n < A \left(\frac{r}{R}\right)^n$. Ora la serie, il cui termine generale è

$A\left(\frac{r}{R}\right)^n$, è convergente, perchè è una progressione geometrica la cui ragione $\frac{r}{R}$ è minore dell'unità.

Quindi la serie formata coi moduli della data, che ha i suoi termini minori dei corrispondenti d'una serie convergente, è pure convergente, e perciò è pure convergente la serie proposta.

Corollario. — *Se la serie* u_0, $u_1 x$, $u_2 x^2, \ldots$ *è convergente per un valore di* x *di modulo* R, *è ancora convergente per ogni valore di* x *il cui modulo è minore di* R.

Infatti, se la serie data è convergente pel valore considerato di x, il modulo del termine generale ha per limite zero col crescere indefinitamente di n; onde da un certo termine in poi il modulo dei termini della serie saranno minori d'una quantità finita (positiva) scelta ad arbitrio; i termini precedenti sono finiti, ed in numero finito, quindi i loro moduli sono tutti minori d'una quantità finita; onde i moduli dei termini sono minori d'una quantità finita, e ricadiamo nel teorema precedente.

158. — Una serie ordinata secondo le potenze di x può essere convergente per tutti i valori di x; tale sarebbe la

$$1, \quad x, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \ldots\ldots$$

la cui somma è e^x; oppure non essere convergente per alcun valore di x, tolto il valore $x=0$, per cui la serie si riduce al primo termine; tale è la serie

$$1, \quad x, \quad 2!\,x^2, \quad 3!\,x^3, \ldots\ldots,$$

perchè in essa, supposto $\operatorname{mod} x > 0$, il termine generale ha per limite l'infinito. Ma può avvenire che la serie proposta sia convergente per alcuni valori di x, e divergente per altri. Sia ρ il limite superiore dei valori dei moduli di x per cui la serie è convergente.

La serie data sarà convergente per tutti i valori di x il cui modulo è minore di ρ, divergente per quelli il cui modulo è maggiore di ρ; potrà essere convergente, ovvero divergente pei valori di x di modulo eguale a ρ.

Per es. la progressione geometrica

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \ldots\ldots$$

è convergente per ogni valore di x di modulo minore di 1, è divergente pei valori di x di modulo $\geqq 1$.

La quantità ρ dicesi *raggio di convergenza* della serie; se nel piano in cui si rappresenta la variabile complessa, centro nell'origine con raggio ρ, si descrive un cerchio, questo vien detto *cerchio di convergenza;* la serie proposta è convergente pei valori della variabile rappresentati da punti interni al cerchio di convergenza, divergente per gli esterni.

159. — *Se la serie*

$$u_0, \quad u_1 x, \quad u_2 x^2, \ldots\ldots$$

è convergente pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *sono pure convergenti per gli stessi valori di* x *le serie formate colle derivate dei termini, e, posto*

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots\ldots \\ f'(x) &= \quad u_1 + 2 u_2 x + 3 u_3 x^2 + \ldots\ldots \\ f''(x) &= \quad 2 u_2 + 3.2 u_3 x + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

le funzioni $f'(x)$, $f''(x)$, ... *sono le derivate prima, seconda*, ... *di* $f(x)$.

Infatti, detto r il modulo di x, che supporremo $< \rho$, e detto R una quantità compresa fra r e ρ, la serie data è convergente se si

dà ad x un valore di modulo R; quindi il modulo del suo termine generale $u_n x^n$, che sarà $\operatorname{mod} u_n R^n$ avrà per limite zero col crescere di u, e quindi sarà sempre finito; e potremo supporre

$$\operatorname{mod} u_n \,.\, R^n < A \,.$$

Ora il termine generale della serie delle derivate, che è $n u_n x^{n-1}$ ha per modulo

$$n \operatorname{mod} u_n \,.\, r^{n-1} = n \,.\, \operatorname{mod} u_n \,.\, R^n \,.\, \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{R} < n A \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{r} \,.$$

Ma la serie il cui termine generale è $n A \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{1}{r}$ è convergente, perchè il rapporto d'un termine al precedente ha per limite $\frac{r}{R} < 1$ col crescere indefinitamente di n; quindi anche la serie formata coi moduli dei termini di $f'(x)$ è convergente, ed è convergente infine la serie i cui termini si ottengono derivando i termini di $f(x)$.

La serie $f''(x)$, che si ottiene da $f'(x)$ come questa si è ottenuta da $f(x)$, è pure convergente, e lo stesso avviene qualunque sia il numero delle derivazioni eseguite.

Ciò premesso, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n x^n \,,$$

$$f(x+h) = \sum u_n (x+h)^n$$

$$f(x+h) - f(x) = \sum u_n \left[(x+h)^n - x^n\right] =$$

$$= \sum u_n \left[n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots\right]$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum u_n \left[n x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots\right]$$

e sottraendo la serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} n u_n x^{n-1},$$

si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = h \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n \left[\binom{n}{2} x^{n-2} + \binom{n}{3} x^{n-3} h + \dots \right]$$

$$= \frac{h}{1.2} \sum_{n=0}^{n=\infty} n(n-1) u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4} x^{n-4} h^2 + \dots \right]$$

e per dimostrare che

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

basta dimostrare che il membro di destra ha per limite zero col tendere di h a zero, e quindi basterà riconoscere che il fattore che moltiplica h è finito.

Suppongasi mod h così piccolo che mod x + mod $h < \rho$, cosa possibile, poichè mod $x < \rho$; sia R tale che

$$\text{mod}\, x + \text{mod}\, h < R < \rho.$$

Si avrà

$$\text{mod} \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3} x^{n-3} h + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4} x^{n-4} h^2 + \dots \right] <$$

$$(\text{mod}\, x)^{n-2} + \frac{n-2}{3} (\text{mod}\, x)^{n-3}\, \text{mod}\, h + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4} (\text{mod}\, x)^{n-4} (\text{mod}\, h)^2 + \dots$$

$$< (\text{mod}\, x)^{n-2} + \frac{n-2}{1} (\text{mod}\, x)^{n-3}\, \text{mod}\, h + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} (\text{mod}\, x)^{n-4} (\text{mod}\, h)^2 + \dots$$

$$< (\text{mod}\, x + \text{mod}\, h)^{n-2} < R^{n-2}$$

ed il modulo del termine generale della serie che si considera sarà minore di

$$n(n-1) \bmod u_n \,.\, R^{n-2};$$

ora si è dimostrato che la serie il cui termine generale è $n(n-1)\,u_n\,x^{n-2}$ è convergente, ed è anche convergente la serie dei suoi moduli per ogni valore di x di modulo $<\rho$, quindi anche pei valori di x di modulo R; quindi la serie il cui termine generale è $n(n-1) \bmod u_n \,.\, R^{n-2}$ è convergente ed ha una somma finita B. Lo stesso avverrà per la serie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n(n-1)\,u_n \left[x^{n-2} + \frac{n-2}{3}\, x^{n-3}\, h + \ldots \right]$$

il cui modulo sarà $< B$; onde

$$\bmod \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] < \bmod h \,.\, B\,,$$

e siccome il membro di destra ha per limite 0 per $h = 0$, si conchiude che $f'(x)$ è appunto la derivata di $f(x)$.

Per la stessa ragione $f''(x)$ è la derivata di $f'(x)$, e quindi la derivata seconda di $f(x)$, e così di seguito.

Le funzioni $f(x)$, $f'(x)$,... che ammettono derivata sono continue.

Applicando il teorema precedente alla serie che servì per definizione di e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

si ha

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

ossia

$$\frac{de^x}{dx} = e^x\,.$$

Analogamente, derivando le serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots\cdots$$

si ritrova

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \, dx, \qquad d \cos x = - \operatorname{sen} x \, dx.$$

160. — I teoremi precedenti fanno scorgere una certa analogia fra le funzioni definite come somma d'una serie ordinata secondo le potenze delle variabili, nell'interno del cerchio di convergenza, colle funzioni intere. Questa analogia si fa più evidente coi teoremi che seguono.

Teorema. — *Se la serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots\cdots \tag{1}$$

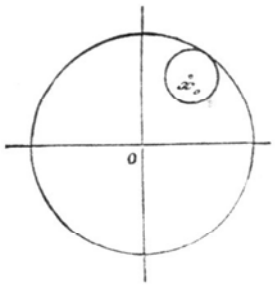
è convergente pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *sarà applicabile la serie di Taylor*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots\cdots, \tag{2}$$

supposto $\operatorname{mod} x_0 < \rho$, *per tutti i valori di* h *per cui*

$$\operatorname{mod} h < \rho - \operatorname{mod} x_0 .$$

In altre parole, ricorrendo alla rappresentazione geometrica, la (1) definisce una funzione $f(x)$ per tutti i valori di x rappresentati da punti interni al cerchio il cui centro è l'origine, e il cui raggio è ρ. Se x_0 è un punto interno a questo cerchio, si vuol dimostrare che la serie (2) è convergente, ed ha per somma $f(x_0 + h)$ per tutti i valori di h il cui modulo è minore di $\rho - \operatorname{mod} x_0$,, ossia per tutti i valori $x_0 + h$ rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_0, e tangente internamente al cerchio di convergenza della serie (1). Però non è esclusa la possibilità che la serie (2), ordinata secondo le potenze ascendenti di h, possa ancora essere convergente per altri valori di h.



Infatti, posto

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0)+R_m, \tag{3}$$

ed osservando che

$$f(x_0+h)=\sum u_n(x_0+h)^n, \quad f(x_0)=\sum u_n x_0^n,$$

$$f'(x_0)=\sum n u_n x_0^{n-1}, \ldots\ldots f^{(m)}(x_0)=\sum n(n-1)\ldots(n-m+1)\,u_n x_0^{n-m},$$

si ricava:

$$R_m=\sum u_n\left[(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right].$$

I sommatarii si debbono prendere rispetto n, che varia da 0 ad ∞. Però nell'espressione di R_m i primi termini corrispondenti ai valori 0, 1,... m di n sono nulli; quindi in R_m basterà dare ad n i valori

$$m+1, \quad m+2, \ldots\ldots$$

Prendendo i moduli d'ambo i membri si ha

$$\operatorname{mod} R_m<\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\,.\operatorname{mod}\left[(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right]$$

ma

$$\operatorname{mod}\left[(x_0+h)^n-x_0^n-nhx_0^{n-1}-\ldots-\binom{n}{m}h^m x_0^{n-m}\right]<$$

$$\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+(\operatorname{mod}x_0)^n+n\operatorname{mod}h\,(\operatorname{mod}x_0)^{n-1}+\ldots+\binom{n}{m}(\operatorname{mod}h)^m(\operatorname{mod}x_0)^{n-m}$$

$$<\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+\left[\operatorname{mod}x_0+\operatorname{mod}h\right]^n,$$

onde

$$\operatorname{mod} R_m<\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\left[\operatorname{mod}(x_0+h)\right]^n+\sum_{n=m+1}^{n=\infty}\operatorname{mod} u_n\left[\operatorname{mod}x_0+\operatorname{mod}h\right]^n. \tag{4}$$

Ora le serie i cui termini generali sono

$$\operatorname{mod} u_n \left[\operatorname{mod}(x_0 + h)\right]^n, \quad \text{e} \quad \operatorname{mod} u_n \left[\operatorname{mod} x_0 + \operatorname{mod} h\right]^n$$

sono convergenti; quindi i due sommatarii della (4) col crescere indefinitamente di m hanno per limite zero, onde

$$\lim \operatorname{mod} R_m = 0\,,$$

e $\lim R_m = 0$. Facendo quindi crescere indefinitamente m nella (3), si ricava la formula (2), che volevasi dimostrare.

Teorema. — *Se nella serie (convergente se mod* $\mathrm{x} < \rho$*)*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$

non tutti i coefficienti sono nulli, $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *si può annullare per* $\mathrm{x} = 0$*, ma essa non si annulla più in un conveniente intorno di* $\mathrm{x} = 0$.

Infatti se il primo dei coefficienti non nulli è u_n, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= u_n x^n + u_{n+1} x^{n+1} + \ldots\ldots \\ &= x^n \left[u_n + u_{n+1} x + \ldots\ldots\right]; \end{aligned}$$

il primo fattore x^n si annulla per $x = 0$ se $n > 0$, e non si annulla per altri valori di x; il secondo è funzione continua di x, che per $x = 0$ assume il valore non nullo u_n, quindi esso non è nullo in un conveniente intorno di $x = 0$, e lo stesso avviene di $f(x)$.

Teorema. — *Se* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 \mathrm{x} + \mathrm{u}_2 \mathrm{x}^2 + \ldots\ldots$, *si annulla, per valori non nulli di* x *in ogni intorno di* $\mathrm{x} = 0$, *i coefficienti* $\mathrm{u}_0, \mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots$ *sono tutti nulli.*

Questo teorema è conseguenza del precedente.

Teorema. — *Se la serie*

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 \mathrm{x} + \mathrm{u}_2 \mathrm{x}^2 + \ldots\ldots$$

è convergente per i valori di x *di modulo* $< \rho$, *e se* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *si annulla per infiniti valori di* x *il cui modulo è minore d'una quantità* $\mathrm{R} < \rho$, *tutti i coefficienti sono nulli, ed* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *è identicamente nulla.*

Infatti, esisterà un valore x_0 di x, di modulo non maggiore di R, tale che in ogni suo intorno $f(x)$ si annulla. Sviluppando $f(x_0 + h)$ secondo le potenze di h, il che è lecito se $\operatorname{mod} h < \rho - \operatorname{mod} x_0$, quantità finita, $\geq \rho - R$, si avrà una funzione di h, che si annulla in ogni intorno di $h = 0$, per valori non nulli di h, e quindi è identicamente nulla per questi valori; ossia $f(x)$ è identicamente nulla pei valori di x rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_0, e di raggio $\rho - \operatorname{mod} x_0$. Se ora si considera un altro punto x_1, interno a questo cerchio, $f(x)$ è nulla in un suo intorno, qnindi è nulla per tutti i valori di x rappresentati da punti interni al cerchio di centro x_1 e di raggio $\rho - \operatorname{mod} x_1$. Così continuando si scorge che $f(x)$ è nulla identicamente per tutti i valori di x, e quindi tutti i suoi coefficienti sono nulli.

Teorema. — *Se le serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$\varphi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots\ldots$$

sono convergenti pei valori di x *il cui modulo è minore di* ρ, *e sono eguali per infiniti valori di* x *il cui modulo è minore d'una quantità* $R < \rho$, *i coefficienti delle stesse potenze di* x *nelle due serie sono eguali, e le serie identiche.*

Infatti, basta applicare il teorema precedente alla serie

$$f(x) - \varphi(x) = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1)\, x + (u_2 - v_2)\, x^2 + \ldots\ldots$$

Teorema (di Abel). — *Se la serie*

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$

è convergente pel valore x_0 *di* x *(che supporremo appartenere alla circonferenza del cerchio di convergenza), facendo tendere* x *verso* x_0 *in modo che* $\frac{x}{x_0}$ *tenda all'unità assumendo soli valori reali e crescenti,* $f(x)$ *tende a* $f(x_0)$.

Infatti, detta $\varphi(x)$ la somma dei primi m termini della serie,

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + \ldots\ldots + u_{m-1}\, x^{m-1}$$

e $\psi(x)$ il resto della serie

$$\psi(x) = u_m x^m + u_{m+1}\, x^{m+1} + \ldots\ldots$$

si avrà

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Ma $\psi(x)$ si può scrivere

$$\psi(x) = u_m x_0^m \left(\frac{x}{x_0}\right)^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+1} + \ldots\ldots$$

Si considerino le quantità

$$\begin{aligned}
p_0 &= u_m x_0^m, \\
p_1 &= u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1}, \\
p_2 &= u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} + u_{m+2} x_0^{m+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

e dicasi p il massimo dei loro moduli, od il loro limite superiore, il quale esiste, perchè ciascheduna delle quantità $p_0, p_1, \ldots$ è finita, e col crescere indefinitamente del loro indice, $\lim p_n = \psi(x_0) = f(x_0) - \varphi(x_0)$, quantità finita.

Posto ancora

$$r_n = u_m x_0^m + u_{m+1} x_0^{m+1} \left(\frac{x}{x_0}\right) + \ldots\ldots + u_{m+n} x_0^{m+n} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

si ha

$$r_n = p_0 + (p_1 - p_0)\left(\frac{x}{x_0}\right) + (p_2 - p_1)\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + (p_n - p_{n-1})\left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

ossia

$$\begin{aligned}
r_n = p_0 &\left[1 - \frac{x}{x_0}\right] + p_1\left[\frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] + \ldots \\
&+ p_{n-1}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] + p_n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n.
\end{aligned}$$

e presi i moduli d'ambi i membri, osservando che i binomii entro parentesi sono reali e positivi, e che i moduli di $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}, p_n$ non sono maggiori di p, si avrà:

$$\operatorname{mod} r_n < p\left[1 - \frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right],$$

ossia

$$\operatorname{mod} r_n < p\,;$$

e facendo crescere indefinitamente n,

$$\lim \operatorname{mod} r_n = \operatorname{mod} \lim r_n < p.$$

Ora si ha che

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^m \lim r_n,$$

quindi, prendendo i moduli d'ambo i membri, e ricordando che $\frac{x}{x_0}$ è reale < 1,

$$\text{mod}\, \psi(x) < \left(\frac{x}{x_0}\right)^m p < p.$$

Ma, essendo convergente la serie $f(x_0)$, si può determinare un valore di m così grande che la somma di un numero qualunque di termini successivi a quello di posto m, le quali somme sono appunto $p_0, p_1, p_2, \ldots$, abbia un modulo minore d'una quantità ω piccola ad arbitrio; quindi anche il loro limite superiore $p < \omega$; ossia, fissata ad arbitrio una quantità ω, si può determinare m in modo tale che il resto $\psi(x)$ della serie $f(x)$ troncata all'm^o termine sia minore di ω, qualunque sia il valore reale < 1 di $\frac{x}{x_0}$. In altri termini la serie considerata ha i suoi termini complessi, che si possono considerare come funzioni della variabile reale $\frac{x}{x_0}$, compresa fra 0 ed 1, ed è di convergenza equabile.

Ciò premesso, siccome

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

e

$$f(x_0) = \varphi(x_0) + \psi(x_0)$$

si ricava

$$f(x_0) - f(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) + \psi(x_0) - \psi(x);$$

si può prendere m così grande che i moduli di $\psi(x_0)$ e $\psi(x)$ siano $< \omega$; si può supporre x così prossimo ad x_0, che

$$\text{mod}\left[\varphi(x_0) - \varphi(x)\right] < \omega',$$

perchè $\varphi(x)$ è funzione continua di x; quindi si può rendere

$$\text{mod}\left[f(x_0) - f(x)\right] < \omega' + 2\,\omega,$$

quantità piccola ad arbitrio, ed infine,

$$\lim f(x) = f(x_0), \qquad \text{c. v. d.}$$

Il teorema precedente si può applicare in molte questioni. Eccone un esempio.

TEOREMA. — *Se le serie*

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots\ldots$$

e

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \ldots\ldots$$

sono convergenti, ed è pure convergente la serie

$$w_0 = u_0 v_0, \; w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \ldots, \; w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0, \ldots,$$

la somma di questa serie è eguale al prodotto delle somme delle due serie date (V. N. 145).

Infatti, se x è una quantità positiva minore di 1, sono convergenti le serie

$$u_0, \quad u_1 x, \quad u_2 x^2, \ldots\ldots$$

e

$$v_0, \quad v_1 x, \quad v_2 x^2, \ldots\ldots$$

e sono pure convergenti le serie formate coi loro moduli. Onde applicando il teorema del N. 145 si deduce, per $x < 1$,

$$(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots)(v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots\ldots)$$
$$= w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots\ldots$$

Facciasi qui tendere x verso 1; pel teorema precedente le serie

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots\ldots$$
$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots\ldots$$

tendono rispettivamente alle somme delle serie date, e quindi

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \qquad \text{c. v. d.}$$