CALCOLO DIFFERENZIALE

CAPITOLO I.

Delle Funzioni

Dei Numeri e delle Quantità.

1. Le quantità in Analisi si misurano e si rappresentano con numeri. Un numero è *intero* se risulta dall'unione di più unità, *fratto* se risulta dall'unione di unità e parti aliquote di unità. I numeri interi e fratti diconsi *commensurabili.*

2. Un numero commensurabile a divide tutti i numeri commensurabili in due categorie: numeri minori di a e numeri non minori di a (ovvero numeri non maggiori, e numeri maggiori di a), ed ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda. Viceversa, se tutti i numeri commensurabili trovansi divisi in due categorie, in modo che ogni numero della prima sia minore d'ogni numero della seconda, ammetteremo, estendendo il concetto di numero, che esista un numero non minore d'alcuno di quelli della prima categoria nè maggiore d'alcuno della seconda; e se nessun numero commensurabile gode di questa proprietà, diremo *incommensurabile* il numero così definito. Esso sarà maggiore di tutti quelli della prima categoria, e minore di tutti quelli della seconda.

Due numeri incommensurabili diconsi eguali se sono definiti dalle stesse categorie, ossia se ogni numero commensurabile minore dell'uno è pure minore dell'altro, e viceversa; il numero incommensurabile a si dirà minore di b, se esistono numeri commensurabili maggiori di a e minori di b.

3. Finora considerammo i numeri in valore assoluto; unendovi il concetto di direzione si hanno i numeri *positivi* e *negativi*. Il lettore già deve conoscere il modo di eseguire su essi le operazioni algebriche, e le loro proprietà; ed è specialmente per ben fissare il concetto, fondamentale nelle nostre ricerche, dei numeri incommensurabili, che si è ricordato quanto precede. Più tardi compariranno i numeri immaginarii.

4. Sono misurabili (con numeri positivi) le grandezze d'un sistema tali che: 1° se ne sia definita l'uguaglianza e la disuguaglianza — 2° di due grandezze disuguali si possa riconoscere la maggiore dalla minore — 3° che si sappiano sommare, e si sappia sottrarre la minore dalla maggiore — 4° che ogni grandezza si possa dividere in parti eguali — 5° e che ogni grandezza A, ripetuta un numero conveniente di volte, possa superare ogni altra grandezza B; e quindi che una parte aliquota di B possa rendersi minore d'ogni altra grandezza A.

Per eseguire questa misura, si prenda ad arbitrio nel sistema dato una grandezza U, che diremo *unità di misura;* essendo le grandezze sommabili e divisibili, si potranno immaginare tutte le grandezze nU, n essendo un numero commensurabile. Sia A una grandezza qualunque del sistema; o esisterà un valore di $n = a$, tale che $A = aU$, ed a è il numero che misura A; ovvero non esisterà, ed allora, in virtù dell'ipotesi 5ª, sonvi dei valori di n per cui $nU < A$, ed altri per cui $nU > A$; il numero (incommensurabile) maggiore dei primi e minore dei secondi valori di n sarà il numero che misura A. Due grandezze A e B disuguali sono misurate da numeri a e b pure disuguali; invero, se $A < B$, la differenza $B - A$ è misurata da un numero positivo (non nullo); ma questo numero vale $b - a$, dunque $b - a$ è positivo, ed a e b sono disuguali.

5. Fra le grandezze che compaiono in varie scienze alcune soddisfanno in modo evidente alle condizioni precedenti, e sono misurabili, come lunghezze di segmenti rettilinei, intervalli di tempo, ecc. Altre come le aree di superficie, le lunghezze di archi curvilinei, ecc., esigono, per potersi misurare, opportune definizioni e dimostrazioni.

Delle Funzioni e dei Limiti.

6. Nelle questioni che tratteremo possono comparire delle quantità cui si suppongono attribuiti valori determinati e fissi, e diconsi *costanti,* ed altre che si suppongono poter assumere diversi valori, e diconsi *variabili.* Fra le variabili ve ne sono di quelle, cui noi possiamo attribuire ad arbitrio successivamente diversi valori, e diconsi *variabili indipendenti,* ed altre i cui valori dipendono dai valori dati alle prime, e diconsi *variabili dipendenti* o *funzioni delle prime.*

Noi tratteremo dapprima le funzioni d'una sola variabile indipendente, e diremo che: *una funzione* y *di* x *è data in un intervallo* (a, b), *se ad ogni valore di* x *compreso fra* a *e* b *corrisponde un valore unico e determinato per* y — qualunque sia il mezzo di determinarlo.

Così ad esempio x^2 è funzione definita di x per ogni valore di x, e quindi è data in ogni intervallo; $\sqrt{x}$, intendendo per radice la radice aritmetica di x, è data per tutti i valori positivi di x; invece $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}$ è funzione di x definita per i soli valori interi e positivi della variabile, ecc.

Si suole indicare che y è una funzione di x scrivendo $y = f(x)$; $f(a)$ rappresenta il valore della funzione corrispondente al valore a della variabile. Altre funzioni di x si rappresenteranno con $\varphi(x)$ $f'(x)$.... Una notazione analoga serve anche per le funzioni di più variabili; così $F(x, y, z)$ significa una funzione delle tre variabili x y z, ecc.

7. *Dicesi che col tendere di* x *verso* a, $y = f(x)$ *ha per limite* A, *se, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare una quantità* h *tale che per ogni valore di* x, *che differisca da* a *meno di* h, *sia* $f(x) - A$ *in valore assoluto minore di* ϵ.

Dicesi che col crescere indefinitamente di x, $y = f(x)$ *ha per limite* A, *se, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero* N *tale che per ogni valore di* $x > N$ *sia* $f(x) - A < \epsilon$ *in valore assoluto.*

Si suole indicare che $f(x)$ ha per limite A col tendere di x verso a, o col crescere indefinitamente di x scrivendo $\lim f(x)_{x=a} = A$, ovvero $\lim f(x)_{x=\infty} = A$, od anche più semplicemente $\lim f(x) = A$, quando si possa sottintendere il modo di variare di x.

Se non esiste alcuna quantità A che goda della proprietà enunciata, si dice che $f(x)$, col tendere di x ad a, o col crescere indefinitamente di x, non tende verso alcun limite.

Così, ad esempio, x^2 col tendere di x a 0 ha per limite 0, perchè, preso ad arbitrio ϵ, sarà $x^2 - 0 = x^2 < \epsilon$ per ogni valore di $x < \sqrt{\epsilon}$; $\sqrt{x}$ col tendere di x a 0 ha pure per limite 0, perchè sarà $\sqrt{x} - 0 < \epsilon$ per ogni valore di $x < \epsilon^2$; $1 + \frac{1}{x}$ col crescere indefinitamente di x ha per limite 1, perchè la differenza fra la funzione ed 1, che è $\frac{1}{x}$, sarà minore di ϵ per ogni valore di $x > \frac{1}{\epsilon}$; se $f(x)$ ha un valore costante l pei valori di x sufficientemente prossimi ad a o sufficientemente grandi, col tendere di x ad a, ovvero col crescere indefinitamente di x il limite di $f(x)$ è il valore costante l, perchè la differenza $f(x) - l$ è per quei valori di x nulla, e quindi minore d'ogni quantità ϵ, il che si esprime dicendo che una costante ha per limite sè stessa; ecc.

Affinchè si possa parlare del limite di y per $x = a$, o per x crescente indefinitamente, occorre che la funzione sia data per un sistema di valori di x prossimi quanto si vuole ad a, o grandi quanto si voglia. La funzione può essere ovvero non data per $x = a$; se $f(a)$ è dato, escluderemo, parlando di limite, il valore a fra quelli che può assumere x; onde si deduce che $\lim f(x)_{x=a}$ può essere

diverso da $f(a)$, perchè $f(a)$ non dipende dai valori di $f(x)$ per x prossimo ad a, mentre da questi solamente dipende il limite di $f(x)$.

8. *Dicesi che* $f(x)$ *è funzione continua per* $x = x_0$, *se lim* $f(x) = f(x_0)$, *quando* x *tende verso* x_0. E, ricordando la definizione del limite: « dicesi che $f(x)$ è continua per $x = x_0$, se, fissata ad arbitrio una quantità ϵ, si può determinare un intervallo $x_0 - h$, $x_0 + h$ in modo che per ogni valore di x in esso sia in valore assoluto $f(x) - f(x_0) < \epsilon$ ».

Una funzione dicesi continua in un intervallo (a, b), *se è continua per tutti i valori di* x *in questo intervallo.*

Una funzione non continua dicesi *discontinua;* quindi $f(x)$ sarà discontinua per $x = x_0$ se col tendere di x ad x_0 $f(x)$ non tende verso alcun limite, ovvero, tende verso un limite diverso da $f(x_0)$.

Teoremi sui Limiti.

9. Teorema I. — *Una quantità non può tendere contemporaneamente verso due limiti diversi.*

Infatti pongasi per assurdo che una quantità P funzione di x tenda contemporaneamente verso due limiti A e B diversi. Posto $P = A + \alpha$, $P = B + \beta$, α e β, che sono le differenze fra P ed i suoi limiti A e B si possono rendere tanto piccoli quanto si vuole; e dall'eguaglianza $A + \alpha = B + \beta$ si ricava $A - B = \beta - \alpha$, eguaglianza impossibile, se A e B sono diversi, perchè il membro di sinistra è costante e non nullo, ed il membro di destra si può rendere tanto piccolo quanto si vuole.

10. Teorema II. — *Il limite della somma di più quantità, che abbiano tutte limite determinato, esiste ed è uguale alla somma dei limiti.*

Sia infatti $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ e supponiamo che $y_1, y_2, \dots y_n$, funzioni d'una variabile x, abbiano per limiti a_1, a_2, ... a_n quando x tende verso a. Posto

$$y_1 = a_1 + \alpha_1; \quad y_2 = a_2 + \alpha_2; \quad \dots \quad y_n = a_n + \alpha_n,$$

$\alpha_1 \dots \alpha_n$ sono quantità che si possono rendere tanto piccole quanto si vuole. Sommando si avrà: $y = (a_1 + a_2 \dots + a_n) + (\alpha_1 + \dots \alpha_n)$ ossia $y - (a_1 + \dots a_n) = \alpha_1 + \dots \alpha_n$. Fissiamo ora ϵ quantità piccola ad arbitrio e prendiamo x tale che ogni α sia $< \frac{\epsilon}{n}$ allora sarà $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < \epsilon$, $y - (a_1 + \dots a_n) < \epsilon$, ossia $\lim y = a_1 + \dots + a_n$.

11. Teorema III. — *Il limite del prodotto di più quantità aventi limiti determinati esiste ed è uguale al prodotto dei limiti.*

Sia $y = PQ$ dove P e Q sono funzioni di x aventi limiti determinati A e B, allora $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$ dove α e β possono prendersi minori di qualunque quantità piccola quanto si voglia. Sostituendo avremo: $y = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta$ donde $y - AB = A\beta + B\alpha + \alpha\beta$.

Fissiamo una quantità ϵ piccola ad arbitrio e si dia ad x un valore tale che $A\beta < \frac{\epsilon}{3}\left(\text{basterà porre } \beta < \frac{\epsilon}{3A}\right)$; $B\alpha < \frac{\epsilon}{3}\left(\alpha < \frac{\epsilon}{3B}\right)$ e finalmente $\alpha\beta < \frac{\epsilon}{3}\left(\text{basterà prendere } \alpha < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \beta < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)$; è chiaro che α e β possono soddisfare a tutte queste condizioni ed allora sarà $y - AB < \epsilon$; ossia $\lim y = AB$.

Se $y = P\,Q\,R\,S \dots$, sarà $\lim y = \lim P \,.\, \lim Q\,R\,S \dots = \lim P \,.\, \lim Q \,.\, \lim R\,S \dots = \dots\dots = \lim P \,.\, \lim Q \,.\, \lim R \,.\, \lim S \dots\dots$, il che dimostra il teorema qualunque sia il numero dei fattori.

12. Teorema IV. — *Il limite del quoziente di due quantità aventi limiti determinati, il limite del divisore essendo diverso da zero, esiste, ed è uguale al quoziente dei limiti.*

Infatti sia $y = \frac{P}{Q}$, $\lim P = A$, e $\lim Q = B$, e $B \gtrless 0$; posto $P = A + \alpha$, $Q = B + \beta$, sarà $\frac{P}{Q} - \frac{A}{B} = \frac{\alpha B - \beta A}{B(B + \beta)}$. Dicansi $A_1\, B_1\, \alpha_1\, \beta_1$ i valori assoluti di A, B, α, β; potremo supporre β numericamente minore di una quantità $h < B_1$; $B + \beta$ sarà numericamente maggiore di $B_1 - h$, ed il valore della frazione $< \frac{\alpha_1 B_1 + \beta_1 A_1}{B_1 (B_1 - h)}$, la quale quantità si può supporre minore d'una quantità arbitraria ϵ col sup-

porre $\frac{\alpha_1 B_1}{B_1(B_1-h)} < \frac{\epsilon}{2}$ e $\frac{\beta_1 A_1}{B_1(B_1-h)} < \frac{\epsilon}{2}$, ossia $\alpha_1 < \frac{\epsilon}{2}(B_1 - h)$, $\beta_1 < \frac{\epsilon}{2}\frac{B_1}{A_1}(B_1 - h)$, e quindi $\lim \frac{P}{Q} = \frac{A}{B} = \frac{\lim P}{\lim Q}$.

13. Teorema V. — *Se una quantità è sempre compresa fra due altre che tendono verso uno stesso limite, anche la prima tende verso questo limite.*

Infatti se P e Q sono due variabili che tendono verso A, ed R è sempre compreso fra P e Q, sarà anche $R - A$ compreso fra $P - A$ e $Q - A$; e se si rendono $P - A$ e $Q - A$ minori di ϵ sarà anche $R - A$ minore di ϵ, ossia R ha per limite A.

14. Teorema VI. — *Se col crescere continuamente di* x, y *cresce continuamente, ma mantenendosi sempre inferiore ad una quantità* A, y *tende verso un limite che è o* A *stesso, o una quantità minore di* A.

Infatti tutte le quantità si possono distinguere in due categorie: quantità che possono essere superate dai valori di y, e quantità che non ne possono essere superate; appartengono alla prima le quantità minori dei valori di y, alla seconda la quantità A; ed ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda; onde queste due categorie individuano un numero L che non viene mai superato dai valori di y, e tale che ogni numero minore di L è superato da valori di y; dico che L è il limite verso cui tende y col crescere di x. Invero, fissata una quantità ad arbitrio ϵ, il numero $L - \epsilon$ è superato da qualche valore di y, e quindi anche dai valori successivi, vale a dire da un certo valore di x in poi è $L - \epsilon < y < L$, ossia la differenza $y - L$ si conserva minore di ϵ, c. v. d.

15. Teorema VII. — *Se, col crescere indefinitamente di* x, y = f(x) *tende verso un limite, fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero* N *tale che la differenza* f(x) — f(x′), *sia sempre minore di* ϵ *per tutte le coppie di valori di* x *e* x' *non minori di* N.

Invero, sia A il limite di y; si prenda N tale che per ogni valore

di $x \geqq$ di N sia $f(x) - A < \frac{\epsilon}{2}$; sia x' un altro valore $\geqq$ N; sarà anche $f(x') - A < \frac{\epsilon}{2}$; e $f(x) - f(x') < \epsilon$, c. v. d.

Teorema VIII. — *Se fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *si può determinare un numero N tale che la differenza* f(x) — f(x') *sia sempre* $< \epsilon$ *per tutti i valori di* x *e di* x' *non minori di* N, *col crescere indefinitamente di* x, f(x) *tende verso un limite.*

Infatti, diamo ad ϵ i valori decrescenti indefinitamente $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 > \ldots$ e siano $N_1 N_2 N_3 \ldots$ i valori corrispondenti di N. Dando ad x un valore $> N_1$, sarà $f(x) - f(N_1)$ minore in valore assoluto di ϵ_1, ossia $f(x)$ sarà compreso fra $f(N_1) + \epsilon_1$ ed $f(N_1) - \epsilon_1$, che dirò a_1 e b_1; dando ad x un valore $> N_2$, $f(x$ sarà compreso fra $f(N_2) + \epsilon_2$ ed $f(N_2) - \epsilon_2$; e quindi, dando ad x valori maggiori di N_1 ed N_2, $f(x)$ sarà minore della più piccola delle due quantità a_1 e $f(N_2) + \epsilon_2$, che dirò a_2, e maggiore della più grande delle quantità b_1 e $f(N_2) - \epsilon_2$, che dirò b_2; onde per questi valori di x sarà $a_2 > f(x) > b_2$, ed $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$, e $a_2 - b_2 \leqq 2\epsilon_2$; in modo analogo, per tutti i valori di $x > N_1, N_2, N_3$ sarà $f(x)$ compresa fra la minore delle due quantità a_2 e $f(N_3) + \epsilon_3$, che dirò a_3, e la maggiore delle due b_2 e $f(N_3) - \epsilon_3$, che dirò b_3; così continuando si avrà una serie di quantità $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ che, quando variano, decrescono continuamente, ad un'altra serie $b_1 b_2 b_3 \ldots$ che crescono continuamente, in modo però che le prime sono sempre maggiori delle seconde; e quindi le a e le b tendono verso limiti, che sono gli stessi, perchè, essendo $a_n - b_n \leqq 2\epsilon_n$, sarà $\lim a_n = \lim b_n$; ed $f(x)$, sempre compresa fra le a e le b, tenderà pure verso lo stesso limite c. v. d.

16. Una quantità variabile dicesi *infinitesima* se ha per limite zero. In una stessa questione possono comparire diversi infinitesimi, e si sogliono paragonare fra loro; si dice che due quantità α e β sono infinitesime dello stesso ordine se il loro rapporto tende verso un limite finito e diverso da zero; si dirà che α è infinitesimo di ordine minore di β se $\frac{\alpha}{\beta}$ ha per limite zero, e quindi che α è infinitesimo d'ordine maggiore di β se $\frac{\alpha}{\beta}$ cresce in valore assoluto indefinitamente.

Fra i diversi infinitesimi che compaiono nella questione si suol sceglierne uno ad arbitrio, cui si dà il nome di infinitesimo principale, e sia h; si dirà che un altro infinitesimo α è di ordine n

se tende verso un limite finito diverso da zero il rapporto $\frac{\alpha}{h^n}$. Così ad esempio sen x è infinitesimo di primo ordine prendendo x per infinitesimo principale, perchè $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ha per limite 1, come vedremo; e $1 - \cos x$ è infinitesimo di secondo ordine, perchè

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2} x}\right)^2 \text{ ha per limite } \frac{1}{2}.$$

Si dice che $y = f(x)$ diventa infinita per $x = a$ se col tendere di x ad a i valori assoluti di y crescono indefinitamente, e quindi $\frac{1}{f(x)}$ è infinitesima. Anche per gli infiniti si può parlare di ordini, ed una quantità α si dirà infinita di ordine n rispetto all'infinito principale h se $\frac{\alpha}{h^n}$ tende verso un limite finito diverso da zero.

Una quantità variabile che tenda verso un limite finito si potrebbe perciò considerare come infinitesima d'ordine zero, ed una quantità infinita come infinitesima d'ordine negativo.

Non è vero però che, prendendo ad arbitrio l'infinitesimo principale, ogni altro infinitesimo sia di ordine misurato da un numero, ossia, α ed h essendo due infinitesimi, non è vero che si possa sempre determinare un numero n tale che $\frac{\alpha}{h^n}$ tenda verso un limite finito, e ciò perchè può avvenire che il rapporto $\frac{\alpha}{h^n}$ per certi valori di n possa non tendere verso alcun limite finito, nè verso lo zero, nè verso l'infinito, ed allora non possiamo dire se l'ordine di α sia maggiore o eguale, o minore di n; inoltre, anche supposto che questo non si presenti, perchè può avvenire che $\frac{\alpha}{h^n}$ qualunque sia n tenda sempre verso zero, o sempre verso ∞, od anche che esista un numero m tale che per $n < m$ quel rapporto tenda a zero, per $n > m$ tenda ad ∞, senza che per $n = m$ tenda ad un limite finito.

Teoremi sulle Funzioni continue.

17. Teorema I. — *Se una funzione è continua per* $x = x_0$ *e* $f(x_0)$ *è diverso da zero, essa conserva un segno costante nelle vicinanze di* x_0.

Infatti posto: $f(x) = f(x_0) + \alpha$ se $f(x_0)$ è diverso da zero potremo determinare un intervallo comprendente x_0 tale che per ogni valore di x in questo intervallo sia: $\alpha < f(x_0)$ in valore numerico. Allora $f(x_0) + \alpha$ ossia $f(x)$ avrà costantemente il segno di $f(x_0)$.

18. Teorema II. — *Se una funzione è continua in un certo intervallo* (a, b) *e per* $x = a$ *e per* $x = b$ *assume valori di segno contrario, la funzione* f(x) *si annulla per un valore di* x *compreso tra* a *e* b.

Infatti si consideri il valore medio fra a e b; se per esso $f(x)$ non si annulla, nel qual caso sarebbe dimostrato il teorema, $f(x)$ assumerà un certo segno che sarà o quello di $f(a)$ o quello di $f(b)$; si consideri fra i due intervalli in cui si è diviso (a, b) quello alle cui estremità $f(x)$ assume segni contrarii, e diconsi a_1 e b_1 i limiti di questo intervallo; sarà

$$a_1 \geq a; \quad b_1 \leq b$$

ed il nuovo intervallo sarà la metà del primo. Si ragioni sull'intervallo $a_1\, b_1$ come si è ragionato sull'intervallo $a\, b$, e si troverà un intervallo $a_2\, b_2$ ai cui estremi $f(x)$ assume valori di segno contrario. Così continuando, si troverà una serie di intervalli $a\, b$, $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$, ... $a_n\, b_n$, ... in numero che si può rendere grande ad arbitrio (ove non si trovi un valore per cui $f(x)$ si annulli, ed il teorema resterebbe dimostrato) che soddisferanno alle condizioni:

$$a \leq a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq \ldots \quad b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$$

e
$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

ed in generale:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

La serie delle quantità $a, a_1, a_2 \ldots a_n$, crescenti sempre ma tutte inferiori a b, tendono verso un limite; analogamente le quantità $b, b_1, b_2 \ldots b_n$ decrescenti sempre, mantenentisi però superiori ad a, tendono verso un limite col crescere di n, e l'ultima formola dice che $\lim a_n = \lim b_n$.

Detto x_1 il limite comune delle quantità a e delle quantità b, si potrà prendere n così grande che a_n differisca da x_1 di una quantità minore di ϵ piccolo quanto si vuole, e che b_n differisca pure da x_1 di una quantità minore ϵ; vale a dire in un intervallo comunque piccolo ma finito comprendente x_1, sonvi valori di x per cui $f(x)$ è positivo, ed altri per cui $f(x)$ è negativo. Dovrà adunque essere $f(x_1) = 0$ perchè se $f(x_1)$ fosse diverso da 0, la funzione $f(x)$ non assumerebbe in un intervallo sufficientemente piccolo comprendente x_1 valori di segno contrario; quindi è dimostrato il teorema.

19. Teorema III. — *Se* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *e* f(a) = A, f(b) = B, *variando* x *nell'intervallo* (a, b), f(x) *assume ogni valore compreso fra* A *e* B.

Infatti sia K una quantità compresa fra A e B e supponiamo, p. e., che:

$$A < K < B.$$

Pongasi $F(x) = f(x) - K$; si avrà $F(a) = A - K < 0$, e $F(b) = B - K > 0$, e poichè la funzione $F(x)$ continua assume per $x = a$, e per $x = b$ valori di segno contrario, esisterà un valore x_1 di x compreso fra a e b per cui $F(x_1) = 0$, ossia $f(x_1) - K = 0$, ed $f(x_1) = K$, c. v. d.

20. Dicesi *limite superiore* dei valori d'una quantità variabile y una quantità l non minore d'alcuno dei valori di y, ma tale che ogni quantità minore di l possa essere superata da qualche valore di y. Dicesi che l' è il *limite inferiore* dei valori di y se nessun valore di y è minore di l', ed esistono valori di y minori d'ogni quantità più grande di l'

Teorema. — *Se una quantità variabile* y *assume valori minori di una quantità fissa* A, *esiste un limite superiore dei valori di* y (*eguale o minore di* A).

Infatti tutti i numeri trovansi divisi in due categorie: numeri che possono essere superati da qualche valore di y, e numeri che non ne possono essere superati; ogni numero della prima categoria è minore d'ogni numero della seconda; quindi queste due categorie individuano un numero l non minore di alcuno di quelli della prima, nè maggiore di alcuno di quelli della seconda categoria; l sarà il limite superiore dei valori di y. Invero l non può essere superato da alcun valore di y, perchè se a fosse un valore di y, ed $a > l$, ogni numero compreso fra a ed l apparterrebbe alla prima categoria, e quindi non è vero che l non sia minore d'alcun numero di essa; ed ogni numero minore di l appartenendo alla prima categoria può essere superato da qualche valore di y.

In modo analogo si dimostra che:

Se una quantità variabile y *assume valori maggiori d'una quantità* B, *esiste un limite inferiore dei valori di* y.

Teorema. — *Se* l *è il limite superiore (inferiore) dei valori di* f(x) *quando* x *varia in un intervallo finito* a b, *esiste un valore* x_1 *compreso nello stesso intervallo, tale che in ogni intervallo comunque piccolo comprendente* x_1 *nel suo interno il limite superiore (inferiore) dei valori di* f(x) *è ancora* l.

Infatti si divida l'intervallo $a\ b$ in due parti eguali; il limite superiore dei valori $f(x)$ in ciascheduno di questi intervalli esiste, non è maggiore di l, ed in uno è eguale ad l; si divida l'intervallo $a_1\ b_1$ in cui il limite superiore di $f(x)$ è ancora l in due parti eguali, e così via.

Si avrà una serie di quantità $a\ a_1\ a_2$ .... sempre crescenti quando variano, ed un'altra serie di quantità $b\ b_1\ b_2$ .... decrescenti, ma non indefinitamente, e quindi tendono verso uno stesso limite x_1.

Si prenda ora un intervallo $x_1 - \epsilon\ x_1 + \epsilon'$ contenente nel suo interno x_1; esisterà un valore di n per cui $x_1 - \epsilon < a_n < x_1 < b_n < x_1 + \epsilon'$; e siccome il limite superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $a_n\ b_n$ è l, anche il limite superiore dei valori di $f(x)$ in ogni intervallo contenente x_1 nel suo interno è ancora l, c. v. d.

Si dimostrerebbe nello stesso modo che:

Se non esiste limite superiore (o inferiore) dei valori di f(x) *quando* x *varia nell'intervallo* (a, b), *esiste un valore* x_1 *compreso in questo stesso intervallo tale che in ogni intervallo comunque piccolo comprendente* x_1 *nel suo interno manca il limite superiore (o inferiore) dei valori di* f(x).

21. Dicesi che una funzione $f(x)$ diventa massima relativamente ad un intervallo (a, b) per $x = x_0$ se $f(x_0)$ non è minore d'alcun valore di $f(x)$ nello stesso intervallo. Dicesi che $f(x)$ diventa minima per $x = x_0$ relativamente allo stesso intervallo se $f(x_0)$ non è maggiore d'alcun altro valore di $f(x)$ nello stesso intervallo.

Teorema. — *Se* f(x) *è funzione continua nell'intervallo* (a, b), *esiste un limite superiore ed un limite inferiore dei valori di* f(x) *che ne sono anche il massimo ed il minimo.*

Infatti, si neghi l'esistenza del limite superiore dei valori di $f(x)$, esisterà un valore x_1 compreso nell'intervallo (a, b) tale che in ogni intervallo comprendente x_1 nel suo interno manca il limite superiore dei valori di $f(x)$; ma $f(x)$ essendo continua anche per $x = x_1$ fissata ad arbitrio ϵ, si può determinare un intervallo $x_1 - h$, $x_1 + h$ in modo che per ogni valore di x in esso sia $f(x) < f(x_1) + \epsilon$, e quindi esiste un limite superiore dei valori di $f(x)$ in un intervallo comprendente x_1 nel suo interno, il che è contradditorio coll'ipotesi precedente. Dunque esiste un limite superiore dei valori di $f(x)$ in questo intervallo, e sia l; si vuol dimostrare che $f(x)$ assume anche il valore l. Sia x_1 quel valore di x tale che in ogni intervallo contenente x_1 nel suo interno il limite superiore è ancora l; fissato piccolo ad arbitrio ϵ, si può determinare un intervallo $x_1 - h$, $x_1 + h$, tale che per tutti i valori di x in esso $f(x) - f(x_1)$ è minore di ϵ; inoltre, ~~avendo~~ essendo l il limite superiore dei valori di $f(x)$ in esso, esisteranno dei valori di x in questo intervallo ~~che~~ tali che i valori corrispondenti di $f(x)$ differiranno di meno di ϵ di l, quindi $l - f(x_1)$ deve essere minore di 2ϵ; e siccome ϵ è piccolo ad arbitrio, ciò non sarà possibile se non quando $f(x_1) = l$, c. v. d.

In modo analogo si ragionerebbe pel limite inferiore, e pel minimo.

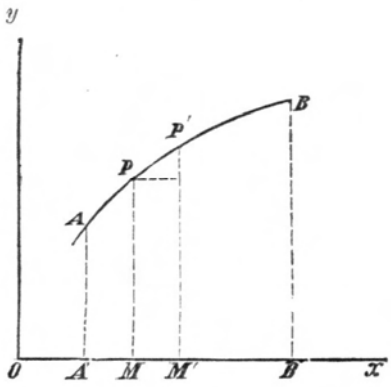
Teorema. — *Se* f(x) *è continua nell'intervallo* (a, b), *fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ, *se ne può determinare un'altra* h *tale che per ogni coppia di valori* x *ed* x′ *della variabile, la cui differenza sia minore di* h, f(x) — f(x′) *è minore di* ϵ.

Sia $a < b$; si determini $a_1 > a$ tale che per ogni valore di x compreso fra a e a_1 sia $f(x) - f(a) < \frac{\epsilon}{3}$; poi una quantità $a_2 > a_1$ tale che per ogni valore di x compreso fra a_1 e a_2 sia $f(x) - f(a_1) < \frac{\epsilon}{3}$, e così via, il che è possibile, perchè $f(x)$ è continua nell'intervallo $a\ b$. Si avrà una serie di quantità $a\ a_1\ a_2$ .... crescenti continuamente. Dico che esse possono crescere in modo tale da raggiungere b. Invero lo si neghi; le quantità $a\ a_1\ a_2$ .... tenderanno verso un limite eguale o minore di b, e sia c. Si determini un intervallo $c - \sigma$, c

tale che $f(x) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$ per ogni valore di x in esso; le quantità $a\ a_2$ .... avendo per limite c, se ne troverà una a_r contenuta in questo intervallo, e sarà $f(a_r) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$, e x essendo contenuto nell'intervallo (a_r, c) sarà anche $f(x) - f(c) < \frac{\epsilon}{6}$, e quindi $f(x) - f(a_r) < \frac{\epsilon}{3}$, e posso porre $a_{r+1} = c$; vale a dire c può essere raggiunto da qualche valore della a, ossia effettivamente si può dividere l'intervallo $a\ b$ in altri intervalli in numero finito $a\ a_1\ a_1\ a_2$ .... $a_{n-1}\ b$ tali che x essendo compreso nell'intervallo (a_s, a_s+1) sia $f(x) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$. Sia h il più piccolo di questi intervalli; dico che $f(x) - f(x^1) < \epsilon$ se $x - x' < h$; invero x ed x' saranno o contenuti in uno stesso intervallo (a_s, a_s+1), ed allora $f(x) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$, $f(x') - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3}$ e $f(x) - f(x') < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$; ovvero sono contenuti in due intervalli contigui $(a_s - 1, a_s)$ e (a_s, a_s+1), e quindi

$$f(x) - f(a_s - 1) < \frac{\epsilon}{3},\ f(a_s - 1) - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3},\ f(x') - f(a_s) < \frac{\epsilon}{3},$$

e $f(x) - f(x') < \epsilon$, c. v. d.



22. Le funzioni d'una variabile si sogliono rappresentare geometricamente con curve. Sia $y = f(x)$ una funzione di x data in un intervallo (a, b); segnati due assi cartesiani $o\,x$ ed $o\,y$, si dia ad x un valore qualunque compreso in questo intervallo, e sia $o\,M$ un segmento misurato dal numero x; si segni il segmento $M\,P$ parallelo all'asse delle y, e misurato dal numero $f(x)$; variando x nell'intervallo (a, b), M varierà fra i due punti A' e B' le cui ascisse sono a e b ed il punto P assumerà infinite posizioni, che diremo formare una linea $A\,B$. Se la funzione $f(x)$ è continua, anche la linea è continua, ossia, fissato ad arbitrio ϵ si può determinare un arco $P\,P'$ di curva tale che le distanze dei suoi punti dal punto P siano minori di ϵ; invero si ha che $P\,P' < P\,Q + Q\,P'$, e siccome $P\,Q$ si può prendere piccolo ad arbitrio, e $Q\,P'$, che rappresenta l'incremento della funzione si può pure rendere piccolo ad arbitrio, perchè la funzione è continua anche $P\,P'$ si può rendere piccolo ad arbitrio.

Viceversa, se si ha una curva continua riferita ad assi cartesiani tale che ogni parallela all'asse delle y la incontri in un punto solo, questa curva dà luogo ad una funzione continua. Invero dando ad x un valore qualunque, si avrà un valore corrispondente per y; e siccome $Q P' < P P'$ (supposti gli assi ortogonali) e $P P'$ si può rendere piccolo ad arbitrio, si potrà pure rendere tale $Q P'$ che rappresenta l'incremento della funzione.

Si noti però, che, avendo noi chiamato *linea* il sistema di punti rappresentativi dei valori d'una funzione, non sarà lecito estendere, senza dimostrazione, alle linee così definite le proprietà delle linee che più comunemente si adoperano, e tanto meno poi di ricorrere a queste proprietà per dimostrare dei teoremi sulle funzioni.

Esempi di Funzioni continue.

23. I teoremi dimostrati ai n^i 10, 11, 12 dicono che la somma, e il prodotto di funzioni continue sono pure funzioni continue; ed è pure funzione continua il quoziente di due funzioni continue, purchè non si annulli la funzione divisore. Quindi ogni funzione algebrica razionale intera di x, che si ottiene eseguendo su x e su costanti delle addizioni e moltiplicazioni, è funzione continua per tutti i valori di x. Le funzioni fratte saranno continue per tutti i valori di x per cui non si annulli qualche denominatore.

24. Funzione esponenziale. — Consideriame la $y = a^x$ dove a è un numero qualunque positivo. Ad ogni valore intero di x corrisponde un valore determinato per y; se si dà ad x un valore fratto $\frac{m}{n}$, $a^{\frac{m}{n}}$ ha, come si sa dall'algebra, n valori, di cui uno solo reale e positivo; sarà questo il valore che intendiamo rappresentato con a^x; e se ad x si dà un valore x_0 incommensurabile, si assumerà per a^{x_0} il limite verso cui tende a^x, dove si diano ad x valori commensurabili approssimantisi indefinitamente ad x_0. Con

queste restrizioni, la funzione a^x, detta esponenziale, è data per ogni valore di x.

Essa è continua. Per dimostrarlo premettiamo che quando x tende verso 0, $\lim a^x = 1$.

Infatti, supposto dapprima $a > 1$, essendo ϵ una quantità positiva piccola ad arbitrio, ed m un numero intero e positivo, che ci riserveremo fissare, sarà soddisfatta la disuguaglianza $a^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon$ se posso determinare m in modo che $(1+\epsilon)^m > a$, e siccome

$$(1+\epsilon)^m = 1 + m\epsilon + \frac{m(m-1)}{1.2}\epsilon^2 + \ldots\ldots$$

ed i termini di questo polinomio sono tutti positivi, sarà $(1+\epsilon)^m > 1 + m\epsilon$; quindi sarà soddisfatta la disuguaglianza precedente se $1 + m\epsilon \geqq a$, ossia $m \geqq \frac{a-1}{\epsilon}$.

Diansi ora ad x valori positivi non maggiori di $\frac{1}{m} = \frac{\epsilon}{a-1}$; sarà $a^x > 1$, e $a^x < 1 + \epsilon$, quindi per valori positivi sufficientemente piccoli di x, $a^x - 1$ si può rendere minore di una quantità ϵ piccola ad arbitrio, ossia $\lim a^x = 1$ per x infinitesimo positivo. Se x è un infinitesimo ma negativo ed uguale a $-y$, sarà $a^x = \frac{1}{a^y}$, e col tendere di x a 0, anche y tende a 0, a^y tende ad 1, ed $\frac{1}{a^y} = a^x$ ha per limite 1. Lo stesso avverrà per $a < 1$. Infatti posto $\frac{1}{a} = b$, sarà $b > 1$ ed $a^x = b^{-x}$, e col tendere di x a 0, b^x e b^{-x} tendono verso 1 come si è dimostrato.

Diamo ora ad x l'incremento h; l'incremento della funzione è $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$; ora a^x ha un valore finito ed $a^h - 1$ ha per limite 0, quindi l'incremento della funzione è infinitesimo coll'incremento della variabile.

La disuguaglianza trovata: $(1+\epsilon)^m > a$ per valori sufficientemente grandi di m, dice che una quantità $1 + \epsilon > 1$ si può elevare ad una tale potenza da superare ogni quantità grande quanto si vuole. Quindi la funzione a^x con $a > 1$, cresce, col crescere di x,

al di là di ogni limite. La stessa quantità a^x, quando x tende verso $-\infty$, cioè assume valori negativi, ma grandi quanto si vuole, tende verso 0, perchè, posto $x = -y$, $a^x = \frac{1}{a^y}$, e col tendere di x a $-\infty$, y tende a $+\infty$, a^y ad ∞, ed $\frac{1}{a^y}$ a zero. Se $a < 1$, a^x, col tendere di x a $+\infty$, tende a zero; e col tendere di x a $-\infty$, tende a $+\infty$.

Si è definito, quando x_0 è incommensurabile, $a^{x_0} = \lim_{x=x_0} a^x$, e per rendere del tutto rigoroso quanto precede conviene dimostrare che questo limite esiste. Diansi perciò alla variabile valori commensurabili x che tendono ad x_0 crescendo; se $a > 1$, a^x andrà crescendo continuamente, ma non indefinitamente, perchè, se x' è un numero commensurabile $> x_0 > x$, sarà $a^x < a^{x'}$; quindi a^x tende ad un limite. Diansi ora alla variabile valori commensurabili x' che tendono ad x_0 decrescendo; $a^{x'}$ va decrescendo continuamente, ma non indefinitamente, quindi tende verso un limite; e $\lim a^x = \lim a^{x'}$, perchè $\frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x}$ e, col tendere di x ed x' ad x_0, $x' - x$ tende a zero assumendo valori commensurabili, e $a^{x'-x}$ tende ad uno, perchè la dimostrazione precedente nulla lascia a desiderare se si dànno alla variabile valori commensurabili. Inoltre se $x < x_0 < x'$ sarà $a^x < a^{x_0} < a^{x'}$.

Se x_0 ed x_1 sono numeri incommensurabili, e $x_0 < x_1$, sarà ancora $a^{x_0} < a^{x_1}$, sempre supposto $a < 1$; invero sia x un numero commensurabile tale che $x_0 < x < x_1$, sarà $a^{x_0} < a^x < a^{x_1}$, e $a^{x_0} < a^{x_1}$. Essendo x_0 ed x_1 incommensurabili sarà ancora $a^{x_0} . a^{x_1} = a^{x_0+x_1}$; invero siano x ed x_1 valori commensurabili che tendono a x_0 e x_1; sarà $a^x . a^{x'} = a^{x+x'}$, e passando al limite si trova la formola a dimostrarsi, ecc.

25. Funzioni di Funzioni. — Alcune volte una variabile y è legata ad una variabile x per mezzo d'una terza variabile u; cioè si ha

$$y = f(u) \text{ ed } u = \varphi(x).$$

Allora dato ad x un valore x_0, u assumerà un valore u_0 tale

che $u_0 = \varphi(x_0)$, ed y un valore y_0 tale che $y_0 = f(u_0)$ e si dice che la y è funzione di funzione della x o funzione di x per mezzo di u.

Se le funzioni f e φ sono continue, anche la y, considerata come funzione della x, è continua.

Infatti essendo f funzione continua di u, fissata una quantità piccola ad arbitrio ϵ sarà possibile il determinare un'altra quantità ϵ' tale che dando ad u un aumento minore di ϵ' in valore assoluto, sia l'incremento di y minore di ϵ anche in valore assoluto; ed essendo $u = \varphi(x)$ funzione continua di x, si potrà fissare una nuova quantità ϵ'', tale che, dando ad x incrementi minori di ϵ'', sia l'incremento di u minore di ϵ' e quindi quello di y minore di ϵ, c. v. d.

Così, p. e., se u è una funzione continua di x, e^u sarà pure funzione continua di x.

26. Funzioni inverse. — Sia $y = f(x)$ funzione data e continua della variabile x in un intervallo ab, e sia $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$; allora la funzione y assumerà ogni valore compreso fra α e β, ma potrà assumerli più di una volta. Supponiamo che $f(x)$ assuma ogni valore fra α e β una volta sola. Affinchè ciò avvenga, col variare di x fra a e b, y dovrà variare sempre nello stesso senso, ossia andar sempre crescendo o sempre diminuendo; perchè altrimenti essa assumerebbe più volte uno stesso valore. Allora fissato un valore di y compreso tra α e β, esiste un valore unico e determinato per x tale che $f(x) = y$, ed x, considerato come funzione di y, dicesi *funzione inversa* della $f(x)$.

Se una funzione $f(x)$ è continua, anche la sua inversa è continua. Sia $y = f(x)$; dò ad y un valore y_0 e cerco il corrispondente x_0 tale che $y_0 = f(x_0)$. Fisso ϵ piccolo ad arbitrio e faccio variare x tra $x_0 + \epsilon$ ed $x_0 - \epsilon$; y varierà tra y_1 e y_2, dove y_1 ed y_2 sono due valori comprendenti y; allora ad ogni valore di y compreso fra y_1 ed y_2 corrisponde un valore di x compreso fra $x_0 + \epsilon$ ed $x_0 - \epsilon$, la cui differenza da x_0 è minore di ϵ, onde x è funzione continua di y.

27. Logaritmi. — Dicesi che y è il logaritmo di x in base a se $a^y = x$, e si scrive $y = \mathrm{Log}_a\, x$. La base a è un numero positivo diverso dall'unità. Ogni numero positivo ha il logaritmo corrispondente, perchè, se $a > 1$, a^y col crescere di y da $-\infty$ a $+\infty$ va crescendo continuamente da O ad ∞ in modo da assumere sempre ed una sola volta ogni valore positivo; la funzione esponenziale essendo continua, è pure tale la sua inversa.

Fra gli infiniti sistemi di logaritmi sono specialmente usati quelli aventi per base $e = \lim\limits_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, i quali diconsi naturali (neperiani, iperbolici), e che indicheremo colla caratteristica log, ed i logaritmi in base 10, che diconsi decimali (volgari, di Brigg.).

Se u è funzione continua di x, ed ha valori positivi, anche $\mathrm{Log}\, u$ è funzione continua di x. La funzione u^v, ove u e v sono funzioni continue di x, ed $u > o$, è pure funzione continua, perchè si ha che $u^v = e^{v \log u}$. Come caso speciale, se v è costante $= m$, la funzione u^m, ove u è funzione continua e positiva, è pure continua, qualunque sia m, intero o fratto o incommensurabile, positivo o negativo.

28. Limite di $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ per m infinito. Diamo anzitutto ad m valori interi e positivi; si ha dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots m}\frac{1}{m^m}$$

che potremo scrivere

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + 1 + \frac{1}{1.2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots m}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)$$

dove tutti i termini sono positivi. Col crescere di m tutti i termini, a cominciare dal terzo, vanno crescendo, ed inoltre cresce pure il loro numero; onde $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ col crescere di m va crescendo con-

tinuamente. Ma, sostituendo l'unità ai binomii $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$, ... il secondo membro crescerà di valore, ossia

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots m}$$

e se nel membro di destra invece dei divisori 3, 4,.....m metto 2 avrò *a fortiori*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}$$

e sommando la progressione geometrica del membro di destra:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}, \text{ ossia } < 2+1-\frac{1}{2^{m-1}}$$

ed *a fortiori*

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

Dunque l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, col crescere di m, cresce continuamente, mantenendosi inferiore a 3, e perciò tende verso un limite non superiore a 3. Il limite di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ si rappresenta colla lettera e; vedremo più tardi dei metodi rapidi per calcolarne il suo valore, le cui prime cifre decimali sono

$$e = 2{,}718281828459045\ldots\ldots$$

Diansi ora ad m valori positivi non interi; sia n il più grande intero minore di m sicchè

$$n < m < n+1$$

sarà

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{n+1} \text{ e } 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$$

e siccome

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^m, \text{ e } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^m$$

sarà a maggior ragione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Facendo crescere indefinitamente m, anche n ed $n+1$ crescono indefinitamente, ed il primo membro ha per limite e, perchè $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, e $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, e l'ultimo ha pure per limite e, perchè $\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$, e $\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$, onde $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, essendo compresa fra due quantità che tendono verso uno stesso limite, avrà pure per limite e.

Diansi in fine ad m valori negativi; e minori di -1 affinchè l'espressione abbia significato; posto $m = -n$, n sarà positivo, ed

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

e facendo crescere indefinitamente m in valore assoluto, n cresce pure indefinitamente, e, siccome $\lim \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$, e $\lim \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$, sarà ancora $\lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$, ossia quest'espres-

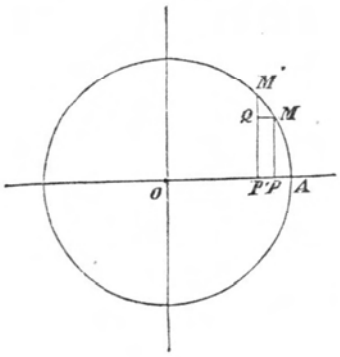
sione ha sempre per limite e, qualunque siano i valori dati ad m purchè in valore assoluto crescenti indefinitamente.

Se si pone nelle formule precedenti $m = \frac{1}{\alpha}$, col crescere indefinitamente in valore assoluto di m, α tende verso zero, ossia la quantità $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ha per limite e col tendere di α a zero.

29. Funzioni circolari. — Sia x la lunghezza d'un arco di cerchio AM, il cui raggio si assume per unità; sarà

$$MP = \operatorname{sen} x, \quad OP = \cos x,$$

diasi ad x un incremento MM′; il seno riceverà l'incremento QM′, ed il coseno l'incremento PP′; ma PP′ e QM′ sono minori della corda MM′, e dell'arco MM′, e quindi, col tendere di MM′, incremento della variabile, a zero, tendono pure a zero gli incrementi del seno e del coseno, ossia essi sono funzioni continue di x.



Le formule

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

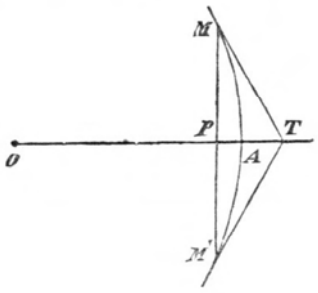
dicono che anche le altre linee trigonometriche sono continue per tutti i valori di x, eccettuati, per la tangente e secante i valori di x che annullano il coseno, e per la cotangente e cosecante quelli che annullano il seno, pei quali valori le funzioni diventano discontinue passando per l'infinito.

Se u è funzione continua di x, anche $\operatorname{sen} u$ e $\cos u$ sono funzioni continue di x (N. 25).

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno;* quindi $y = \operatorname{arc\,sen} x$ se $x = \operatorname{sen} y$. Facendo variare y fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{sen} y$ va crescendo con legge di continuità da -1 a $+1$; quindi ad ogni valore di x compreso fra -1 e $+1$ corrisponde uno

ed un sol valore di $y = \text{arc sen}\, x$ compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Esso però non è il solo arco il cui seno sia x, perchè anche gli archi $\text{arc sen}\, x + 2k\pi$, e $(2k+1)\pi - \text{arc sen}\, x$ hanno pure per seno x. Se $x > 1$ in valore assoluto, non esiste alcun arco il cui seno sia x. Intendendo adunque per $y = \text{arc sen}\, x$, ove $x^2 < 1$, quell'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ avente per seno x, y è una funzione continua della variabile x. In modo analogo la funzione $y = \text{arc cos}\, x$ è funzione uniforme e continua di x, ove x sia compreso fra -1 e $+1$, e per y si prenda quell'unico arco compreso fra 0 e π avente per coseno x. Con opportune convenzioni si rendono pure funzioni uniformi $\text{arc tang}\, x$, $\text{arc cot}\, x$, $\text{arc sec}\, x$ e $\text{arc cosec}\, x$.

30. — La quantità $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ col tendere di x a zero ha per limite uno.



Sia O il centro d'un cerchio, $OA = 1$ il suo raggio; l'arco $AM = x$; sia $AM' = x$, MT ed $M'T$ le tangenti al cerchio in M ed M'; si ha dalla geometria che $MPM' < MAM' < MTM'$, ossia $2\,\text{sen}\, x < 2x < 2\,\text{tang}\, x$, e, dividendo per $2\,\text{sen}\, x$ e ricordando che $\text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, si ha: $1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x}$. Facendo tendere x verso zero, $\frac{x}{\text{sen}\, x}$ è compresa fra due quantità, l'una costante $= 1$, e l'altra $\frac{1}{\cos x}$ variabile, che ha per limite 1 quando x tende verso zero; quindi anche $\frac{x}{\text{sen}\, x}$ e $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ hanno per limite uno, c. v. d.

Esercizii.

31. — 1° Se $f(x)$ è funzione intera di x, col tendere di x a $+\infty$, $f(x)$ cresce indefinitamente assumendo il segno del coefficiente del primo termine.

2° Se $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, f e φ essendo funzioni intere di x, e prime fra loro, y è funzione continua per tutti i valori di x che non annullano $\varphi(x)$. Se a è una radice multipla α volte dell'equazione $\varphi(x) = 0$, col tendere di x ad a, y diventa infinita d'ordine α, essendo $x - a$ l'infinitesimo principale. Col crescere indefinitamente di x, y tende verso un limite finito, o verso zero, o verso l'infinito, secondochè il grado di $f(x)$ è eguale o minore o maggiore di quello di $\varphi(x)$. Se i gradi di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono eguali, il limite di y per $x = \infty$ è eguale al rapporto dei coefficienti dei termini di grado più elevato; se i gradi di f e φ sono disuguali, y diventa infinita o infinitesima d'ordine eguale alla differenza dei gradi, preso x per infinito principale.

3° Si è dimostrato (N. 25) che e^u è funzione continua se u è funzione continua di x. Se u è discontinua, e^u può essere continua o discontinua. Così, posto $u = \frac{1}{x}$, la funzione $e^{\frac{1}{x}}$ è continua per tutti i valori di x eccettuato il valore $x = 0$, per cui $\frac{1}{x}$ diventa discontinua; col tendere di x a zero $e^{\frac{1}{x}}$ tende verso $+\infty$, ovvero verso zero secondochè x tende a zero assumendo valori positivi o valori negativi. La funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$, cui si attribuisca per $x = 0$ il valore zero, è funzione continua per tutti i valori di x, benchè $-\frac{1}{x^2}$ diventi discontinua per $x = 0$. La funzione $y = \frac{a e^{\frac{1}{x}} + b}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ è continua per tutti i valori di x tolto lo zero; col tendere di x a zero, y tende verso a o verso b secondochè x assume valori positivi o negativi.

In modo analogo sen u può essere discontinua se u è funzione discontinua di x; posto $u = \frac{1}{x}$, la funzione $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$ è continua per tutti i valori di x tolto il valore zero; col tendere di x a zero y oscilla fra -1 e $+1$ senza tendere ad alcun limite. La funzione

$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ col tendere di x a zero tende verso zero, e quindi è funzione continua per tutti i valori di x se per $x = 0$ si fa $y = 0$. La funzione $\frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ col tendere di x a zero va oscillando in modo da assumere infinite volte ogni valore.

4° Dimostrare che

$$e > 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m}$$

e che

$$e < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{1}{1.2\ldots m} \cdot \frac{1}{m}$$

qualunque sia il numero intero m.

5° Dimostrare che

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x .$$

Un capitale C messo all'interesse dell'r per 100 composto ogni n^{ma} parte di anno, diventa alla fine di t anni

$$C\left(1 + \frac{r}{n.100}\right)^{nt};$$

trovarne il suo limite col crescere indefinitamente di n.

6° *Se* $f(x+1) - f(x)$ *col crescere indefinitamente di* x *tende verso un limite* L, *e se esiste il limite superiore dei valori assoluti di* $f(x)$ *in ogni intervallo finito, anche* $\frac{f(x)}{x}$ *tende verso lo stesso limite.*

Infatti, essendo $\lim_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$, fissato ad arbitrio ϵ si può determinare un numero N tale che per ogni valore di $x > N$ sia $f(x+1) - f(x) - L < \epsilon$ in valor assoluto. Diasi ad x un valore $> N$; sia n il massimo intero contenuto in $x - N$; onde $x - n = y$

sarà compreso fra N ed $N+1$. Essendo y, $y+1$, $y+2, \ldots\ldots > N$, si avranno le diseguaglianze:

$$f(y+1)-f(y)-L<\epsilon$$
$$f(y+2)-f(y+1)-L<\epsilon$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(y+n-1)-f(y+n-2)-L<\epsilon$$
$$f(x)-f(y+n-1)-L<\epsilon,$$

e sommando:

$$f(x)-f(y)-nL<n\epsilon$$

e dividendo per x, e ponendo $x-y$ invece di n

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{x}-L+\frac{y}{x}L<\frac{x-y}{x}\epsilon$$

ed ancora

$$\frac{f(x)}{x}-L<\frac{f(y)}{x}-\frac{y}{x}L+\frac{x-y}{x}\epsilon\,.$$

Il membro di destra consta di tre termini; il terzo è $<\epsilon$, e quindi si può supporre piccolo ad arbitrio; il secondo $\frac{y}{x}L$ col crescere di x tende verso zero, perchè L è finito, e $y<N+1$; il primo termine, detto l il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ quando x varia nell'intervallo N, $N+1$, è $<\frac{l}{x}$, che tende verso zero col crescere indefinitamente di x; e perciò la differenza $\frac{f(x)}{x}-L$ potendosi rendere tanto piccola quanto si vuole, $\lim\frac{f(x)}{x}=L$, c. v. d.

Si può dimostrare in modo analogo che:

Se, col crescere indefinitamente di x, f(x + 1) — f(x) *cresce indefinitamente in valor assoluto, e se esiste il limite superiore dei valori assoluti di* f(x) *in ogni intervallo finito, anche* $\frac{f(x)}{x}$ *cresce indefinitamente.*

La condizione che esista il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ in ogni intervallo finito, da un certo valore di x in poi, è necessaria; così p. e. la funzione $f(x) = \operatorname{tang} \pi x$ è tale che $f(x+1) - f(x) = 0$, ed il suo limite è zero; cionondimeno $\frac{\operatorname{tang} \pi x}{x}$ col crescere di x non tende ad alcun limite. La proposizione inversa, cioè che se $\lim \frac{f(x)}{x} = L$, anche $\lim [f(x+1) - f(x)] = L$, non è esatta, e vi fa eccezione p.e. la funzione $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$, per cui $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$, e $f(x+1) - f(x) = -2 \operatorname{sen} \pi x$ col crescere di x non tende ad alcun limite.

7° Dimostrare che:

Se $\lim \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = L$, *(od è infinito) ed esiste il limite superiore dei valori assoluti di* $f(x)$, *anche* $\lim \frac{f(x)}{x^{n+1}} = L$ *(od è infinito).*

Se $\frac{f(x+1)}{f(x)}$, *col crescere di* x *tende verso un limite finito, o verso l'infinito, ed* $f(x)$ *assume valori sempre positivi, in modo che in ogni intervallo finito esiste un limite superiore, ed un limite inferiore non nullo dei valori di* $f(x)$, *anche* $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ *tende verso lo stesso limite.*

8° Dimostrare che col tendere di x a $+\infty$, qualunque sia n $\frac{a^x}{x^n}$, ove $a > 1$, tende a $+\infty$, $a^x x^n$, ove $a < 1$, tende a zero, $\frac{\log x}{x^n}$ tende a zero.

Le funzioni precedenti forniscono esempi di quantità infinite od infinitesime non aventi ordine. Così a^x con $a > 1$ tende verso infinito col crescere di x; ma, prendendo x per infinito principale, non esiste alcun valore di n tale che $\frac{a^x}{x^n}$ tenda verso un limite finito, ossia a^x diventa infinito d'ordine maggiore di qualunque ordine misurabile con un numero; in modo analogo a^x, con $a < 1$, diventa infinitesima rispetto $\frac{1}{x}$ d'ordine maggiore d'ogni ordine misurabile con un numero; e $\log x$ diventa infinito d'ordine minore d'ogni ordine misurabile con un numero.

Si può dimostrare in modo analogo che la funzione x^x definita per tutti i valori positivi di x tende verso 1 col tendere di x a zero; col tendere di x ad ∞ diventa infinita d'ordine maggiore di qualunque ordine finito. Il N. 27 non definisce questa funzione per x negativo. L'espressione x^x, secondochè x è della forma

$$\frac{2m}{2n+1} \quad \text{o} \quad \frac{2m+1}{2n+1} \quad \text{o} \quad \frac{2m+1}{2n},$$

ha dall'algebra, oltre a valori immaginarii, rispettivamente o un sol valore positivo, o un sol valore negativo, o nessun valore reale.

9° La funzione $f(x) = ax$, dove a è una costante arbitraria, è la sola funzione continua di x tale che, x ed y essendo due valori qualunque della variabile,

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Infatti sia $f(x)$ una funzione i cui valori soddisfanno all'eguaglianza (1). Posto $y = 0$, essa diventa $f(x) = f(x) + f(o)$, onde

$$f(o) = 0 \tag{2}$$

Posto $y = -x$ ricavo $o = f(x) + f(-x)$, onde

$$f(-x) = -f(x) \tag{3}$$

Ponendo $y + z$ invece di y ricavo

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y+z) = f(x) + f(y) + f(z)$$

e più generalmente

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n). \tag{4}$$

Facendo in questa formula tutte le x eguali fra loro ricavo

$$f(nx) = nf(x). \tag{5}$$

Pongo in questa formula $x = 1$, e ricavo $f(n) = nf(1)$, e se chiamo a la quantità $f(1)$ avrò $f(n) = an$ pei valori interi e positivi di n;

e per le formule (2) e (3) l'eguaglianza $f(n) = a\,n$ sussiste per tutti i valori interi di n.

Pongo nella (5) $x = \frac{m}{n}$, m ed n essendo numeri interi ed n positivo e ricavo $f(m) = n\,f\left(\frac{m}{n}\right)$ ossia $a\,m = n\,f\left(\frac{m}{n}\right)$ ed $f\left(\frac{m}{n}\right) = a\frac{m}{n}$, che dà i valori della funzione per tutti i valori commensurabili della variabile; ossia per tutti i valori commensurabili di x si ha $f(x) = a\,x$. Facciasi ora tendere x verso un valore incommensurabile x_0; $f(x)$, essendo supposta continua, tende a $f(x_0)$, e $a\,x$ tende ad $a\,x_0$, onde $f(x_0) = a\,x_0$, ossia la sola funzione che goda della proprietà enunciata è $a\,x$.

10°. La funzione $f(x) = a^x$ è la sola funzione continua di x i cui valori soddisfanno all'equazione:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

11°. Se per tutte le coppie di valori di x e di y si ha $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$, la funzione $f(x) = x^a$, a essendo una costante.

12°. Se $f(xy) = f(x) + f(y)$, la funzione $f(x) = \text{Log}\,x$, il logaritmo essendo preso in una base qualunque.

13°. Se $f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,f(y)$, la funzione $f(x)$ vale o $\cos a\,x$, ovvero $\frac{a^x + a^{-x}}{2}$, a essendo una costante arbitraria.

14°. Sia $f(x, t)$ una funzione di due variabili x e t, e suppongasi che per una certa categoria di valori di x esista il limite di $f(x, t)$, quando t tende verso l'infinito, o verso una quantità finita e costante, od anche verso un limite funzione di x. Il limite di $f(x,t)$ dipenderà in generale da x, e sarà una funzione di x. Così p. e. $\lim\limits_{t=\infty}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$ è una funzione definita per tutti i valori di x, e vale e^x (Eserc. 5°). Le funzioni definite a questo modo forniscono esempi di discontinuità delle funzioni.

La funzione $F(x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{a\,t\,x + b}{t\,x + 1}$ è definita per tutti i valori di x, e vale costantemente a se $x \lesseqgtr 0$, e vale b se $x = 0$. La stessa funzione si può anche scrivere $F(x) = \lim\limits_{t=0} \frac{a\,x + b\,t}{x + t}$.

x^t, ove $x > 0$, col crescere indefinitamente di t tende verso zero, o verso 1, o verso $+\infty$ secondochè x è minore, o eguale, o maggiore di uno.

Quindi la funzione $F(x) = \lim_{t=\infty} \frac{f(x)\,x^t + \varphi(x)}{x^t + 1}$, ove f e φ siano definite pei valori positivi di x è pure definita per gli stessi valori, e coincide colla funzione $\varphi(x)$ se $x < 1$, e colla $f(x)$ se $x > 1$; e $F(1) = \frac{f(1) + \varphi(1)}{2}$.

La funzione $F(x) = \lim_{t=\infty} \frac{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t - 1}{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t + 1}$ è definita per tutti i valori di x, e vale 0 se x è intero, $+1$ se x non è intero, ed il massimo intero algebricamente minore di esso è pari, -1 se x non è intero, ed il massimo intero minore di esso è dispari.

CAPITOLO II

Delle Derivate.

---

32. — Dicesi *derivata* d'una funzione il limite del rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile, quando l'incremento della variabile tende a zero.

Se $y = f(x)$ è la funzione, $\Delta x = h$ l'incremento della variabile, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ l'incremento corrispondente della funzione, la derivata sarà il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, per h infinitesimo. Così ad es. se $f(x) = ax + b$, sarà $f(x+h) = a(x+h) + b$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, e $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, ossia a è la derivata di $ax + b$. Se $a = 0$, la funzione si riduce ad una costante, e la sua derivata è nulla.

La derivata d'una funzione $y = f(x)$ si rappresenta con y' o $f'(x)$, od anche con Dy e $Df(x)$; essa in generale dipende dal valore attribuito alla x, ed è perciò una funzione di x. Può però una funzione mancare di derivata o per valori speciali di x, od anche per tutti. È assai conveniente di eguagliare la derivata, che è il limite d'un rapporto, ad un vero rapporto, e si pone $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, dy e dx essendo due quantità dette differenziale della funzione, e differenziale della variabile, legate dalla sola condizione che il loro quoziente valga $f'(x)$. Una di esse è perciò arbitraria; si suol prendere ad arbitrio dx, ed allora $dy = f'(x)\,dx$, ossia il differenziale d'una funzione è eguale alla derivata moltiplicata pel differenziale della variabile indipendente. Derivare, o differenziare una funzione è il calcolare la derivata od il differenziale.

Una funzione avente derivata è continua, perchè, essendo $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$, col tendere di Δx a zero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende ad un limite finito y' e quindi Δy tende a zero. Inoltre, se la derivata non è nulla, l'incremento della funzione è infinitesimo del primo ordine, prendendo Δx per infinitesimo principale, perchè $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso un limite finito.

33. — Sia $y = f(x)$ l'equazione d'una curva riferita ad assi cartesiani ortogonali (Vedi N. 22). Posto $OM = x$, $MP = y$, $MM' = PQ = \Delta x$, $QP' = \Delta y$, sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta PP' fa coll'asse delle x. Facendo tendere Δx a zero, se la funzione $f(x)$ ammette derivata, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende a $f'(x)$, quindi tende verso un limite l'angolo di PP' con ox, e la retta PP', che congiunge il punto P della curva con un altro punto P' il quale si va avvicinando indefinitamente al primo, tende verso una posizione limite. Dicesi tangente ad una curva in un suo punto P la posizione limite della congiungente il punto P con un altro punto della curva, quando il secondo punto si avvicina indefinitamente al primo. Quindi se la funzione $f(x)$ ha derivata, la curva ha tangente, e la tangente fa coll'asse delle x un angolo α tale che $\operatorname{tang} \alpha = f'(x)$.

Anche in questioni di meccanica la derivata ha un significato semplicissimo. Suppongasi che un punto P si muova percorrendo una retta. Sia x la distanza del punto mobile P da un punto fisso della retta (x sarà la coordinata di P); sia t il tempo compreso fra un istante fisso ed un istante variabile. Ad ogni valore di t corrisponde una posizione di P e quindi un valore di x, onde sarà $x = f(t)$. Il moto del punto P dicesi equabile se lo spazio percorso in un intervallo di tempo è proporzionale a questo intervallo, e dicesi velocità del moto equabile il rapporto dello spazio percorso al tempo impiegato a percorrerlo. Se il moto è qualunque, dato un valore a t, e trovato il valore corrispondente per x, si dia al tempo un incremento Δt; x riceverà un incremento Δx che è lo spazio

percorso dal mobile nell'intervallo di tempo Δt successivo al momento considerato; il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ rappresenta la velocità del moto equabile che nel tempo Δt percorre lo spazio Δx; si chiama velocità del moto proposto nell'istante considerato il limite di questo rapporto. Onde la velocità in un moto qualunque è la derivata dello spazio rispetto al tempo.

Regole di Derivazione.

34. — Derivata d'una somma. Sia $y = u + v - w$, u, v, w essendo tre funzioni di x aventi derivata $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$; sarà

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

e facendo tendere Δx verso zero, si ha:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx},$$

ossia *la derivata della somma algebrica di più funzioni è eguale alla somma delle derivate.*

Moltiplicando per dx, si ha:

$$d(u + v - w) = du + dv - dw. \qquad [1]$$

35. — Derivata d'un prodotto. Sia $y = au$, dove a è una costante ed u una funzione di x; sarà $\Delta y = a \Delta u$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta u}{\Delta x}$, e passando al limite $\frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx}$, e

$$d \,.\, au = adu, \qquad [2]$$

ossia *la derivata del prodotto d'una costante per una funzione è eguale al prodotto della costante per la derivata della funzione.*

Sia ora $y = uv$, u e v essendo funzioni di x; sarà

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v,$$
$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x,$$

e passando al limite, $\frac{d\,.\,uv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, e

$$d\,.\,uv = udv + vdu\,; \qquad [3]$$

cioè *il differenziale del prodotto di due funzioni è eguale alla somma dei prodotti di ciascuna funzione pel differenziale dell'altra.* Quest'ultima formula si può anche scrivere $\frac{d\,.\,uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$.

Se y è eguale al prodotto di più funzioni $u_1\,u_2 \ldots u_n$, sarà

$$\frac{d\,.\,u_1 u_2 \ldots u_n}{u_1 u_2 \ldots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d\,.\,u_2 u_3 \ldots u_n}{u_2 u_3 \ldots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d\,.\,u_3 \ldots u_n}{u_3 \ldots u_n} = \ldots$$
$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \ldots + \frac{du_n}{u_n}\,.$$

Se gli n fattori precedenti si eguagliano ad una stessa funzione u, sarà $\frac{d\,.\,u^n}{u^n} = n\frac{du}{u}$, ossia $d\,.\,u^n = n\,u^{n-1}\,du$, e la derivata $\frac{d\,.\,u^n}{dx} = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$. Se $u = x$, la sua derivata $\frac{du}{dx} = 1$, e quindi $\frac{d\,.\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1}$, e

$$d\,.\,x^n = n x^{n-1}\,dx\,, \qquad [4]$$

la quale formula serve a derivare una potenza di x con esponente intero e positivo.

Le regole precedenti forniscono il mezzo di derivare ogni funzione algebrica razionale intera; così se

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,,$$

sarà

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,.$$

36. — Derivata d'un quoziente. Sia $y = \frac{u}{v}$, e $v \gtrless 0$; sarà

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}, \quad \Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

e passando al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}, \quad \text{e} \quad dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \qquad [5]$$

ossia *il differenziale d'un quoziente vale il denominatore moltiplicato pel differenziale del numeratore meno il numeratore moltiplicato pel differenziale del denominatore, tutto diviso pel quadrato del denominatore.*

Come caso particolare, se il numeratore si suppone costante ed $= 1$, sarà $du = 0$, e

$$d\,\frac{1}{v} = -\,\frac{dv}{v^2}.$$

Se $v = x^m$, $d\,\frac{1}{x^m} = d\,.\,x^{-m} = -\,\frac{mx^{m-1}\,dx}{x^{2m}} = -\,m\,x^{-m-1}\,dx$,

che si ottiene dalla formula [4] supponendo l'esponente intero e negativo.

37. — Derivate delle funzioni di funzioni. Sia $y = f(u)$, ed $u = \varphi(x)$; y è funzione di x per mezzo di u. Suppongasi che le funzioni $f(u)$ e $\varphi(x)$ ammettano derivata $f'(u)$ e $\varphi'(x)$. Si dia ad x un incremento Δx, e siano Δu e Δy gli incrementi corrispondenti di u ed y; sarà

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \text{e} \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Se, dando a Δx valori sufficientemente piccoli, Δu non si annulla mai, sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}$, e facendo tendere Δx a zero $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tende

verso $\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$, e Δu tende a zero, e $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ col tendere di Δu a zero, tende verso $f'(u) = \frac{dy}{du}$, onde

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx},$$

e

$$dy = f'(u)\,\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,du, \qquad [6]$$

formula identica a quella che definisce dy se u fosse la variabile indipendente, ma qui du vale $\varphi'(x)dx$.

Se, comunque piccolo si prenda Δx, Δu, si annulla per qualche valore di Δx, la formula precedente è ancora a ritenersi vera. Infatti, se Δu si annulla per infiniti valori di Δx piccoli quanto si voglia, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ si annulla pure per gli stessi valori, ed il suo limite, che si suppone esistere, dovrà essere zero, onde $\varphi'(x) = 0$.

Facendo tendere Δx a zero, dandogli dapprima i soli valori per cui $\Delta u \gtrless 0$, è applicabile il ragionamento precedente, e quindi $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\,\varphi'(x) = 0$; dando a Δx i valori per cui $\Delta u = 0$, sarà anche $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, e $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$; ossia il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è costantemente nullo, comunque si faccia tendere Δx a zero, e la formula per la derivazione delle funzioni di funzioni è ancora applicabile.

38. — Derivazione delle funzioni inverse. Sia x funzione di y, che diremo diretta: $x = \varphi(y)$; si suppone che essa permetta inversione, vale a dire che si possa considerare y come funzione di x : $y = f(x)$; se $\varphi(y)$ ammette derivata non nulla, la sua inversa $f(x)$ ammette pure derivata. Invero diasi ad x un incremento Δx; sia Δy l'incremento corrispondente di y; sarà $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$, e

$x = f(y)$ $\qquad$ $y = f(x)$

$\frac{x}{y} = f(x)$ $\qquad$ $\frac{y}{x} = f(y)$

facendo tendere Δx a zero, anche Δy vi tende, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende a $\varphi'(y)$, onde $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\varphi'(y)}$ ossia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad [7]$$

e la derivata d'una funzione inversa ha il valore reciproco della derivata della diretta.

Esempio: Sia $x = y^m$, m essendo un numero intero e positivo; variando y fra 0 e $+\infty$, x va crescendo con legge di continuità da 0 a $+\infty$; quindi questa funzione permette inversione, ossia, dato ad x un valore positivo, esisterà un sol valore positivo per y, che si rappresenta con $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ tale che $y^m = x$. Applicando la regola precedente si ha $\frac{dx}{dy} = m\, y^{m-1}$, onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m\, y^{m-1}}$; e sostituendo ad y la sua funzione di x, sarà:

$$\frac{d \,.\, x^{\frac{1}{m}}}{dx} = \frac{1}{m}\, x^{\frac{1}{m}-1} .$$

Se invece di x pongo u, u essendo una funzione di x, si ha, per la regola delle funzioni di funzioni, $d \,.\, u^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\, u^{\frac{1}{m}-1} du$,
e se $u = x^n$, n essendo un numero intero, sarà:

$$d \,.\, x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\, x^{\frac{n}{m}-1}\, dx ,$$

ossia la formula [4] per la differenziazione delle potenze sussiste anche per esponenti razionali.

39. — Derivata di Log x. Sia $y = \operatorname{Log} x$, il logaritmo essendo preso in una base a positiva, ed x una variabile che assume valori positivi, sarà

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} .$$

Posto $\frac{h}{x}=\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\operatorname{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, e col tendere di α a zero,

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e, \quad \text{e} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\operatorname{Log} e,$$

ossia

$$\frac{d \operatorname{Log} x}{d x}=\frac{1}{x}\operatorname{Log} e, \qquad d \operatorname{Log} x=\frac{dx}{x}\operatorname{Log} e.$$

Se i logaritmi sono naturali, $\log e=1$, e quindi

$$d \log x=\frac{dx}{x} \qquad [8]$$

la quale formula sussiste qualunque sia la variabile indipendente.

Es. Sia

$$y=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad dy=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot d\frac{1+x}{1-x}=\tfrac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}dx=\frac{dx}{1-x^2}.$$

Sia

$$y=\log\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right),$$

$$dy=\frac{1+\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax+b}}}{x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}}dx=\frac{dx}{\sqrt{x^2+2ax+b}}.$$

40. Derivata di a^x. — Sia $y=a^x$; prendendo i logaritmi in una base qualunque, sarà $\operatorname{Log} y=x\operatorname{Log} a$, onde

$$x=\frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}, \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{Log} a}\frac{1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx}=y\frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e}=a^x\frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} e},$$

ossia:

$$d.a^x = a^x \frac{\text{Log } a}{\text{Log } e} dx = a^x \frac{1}{\text{Log}_a e} dx = a^x \log a \, dx .$$

Se $a = e$, si ha

$$d\, e^x = e^x \, dx. \qquad [9]$$

41. Derivata di u^v. — Sia $y = u^v$, dove u e v sono funzioni di x, ed u assume solamente valori positivi. Sarà $y = e^{v \log u}$; onde

$$dy = e^{v \log u} \, d\,(v \log u) = e^{v \log u} \left(v \frac{du}{u} + \log u \, dv\right)$$

$$= v u^{v-1} \, du + u^v \log u \, dv.$$

Come caso speciale, se si fa u costante, ed eguale ad a, sarà $du = 0$, e

$$d.a^v = a^v \text{ Log } a \, dv ,$$

formola per la differenziazione delle funzioni esponenziali. Se si suppone v costante $= m$, si ha:

$$d.u^m = m u^{m-1} \, du ,$$

che dà la derivata d'una potenza, qualunque sia l'esponente (V. formula [4]).

42. Derivazione delle funzioni trigonometriche. — Sia $y = \text{sen } x$; sarà:

$$\Delta y = \text{sen}\,(x+h) - \text{sen } x = 2 \,\text{sen} \frac{1}{2} h \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

e

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen} \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

e facendo tendere h a zero, $\lim \frac{\text{sen} \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} = 1$, $\lim \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$,

e quindi

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x\,, \quad d \operatorname{sen} x = \cos x\, dx. \qquad [10]$$

Sia $y = \cos x$; sarà

$$\Delta y = \cos(x+h) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

e passando al limite

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x\,, \qquad d \cos x = -\operatorname{sen} x\, dx. \qquad [11]$$

Si può anche trovare la derivata del coseno osservando che

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e derivando colla regola delle funzioni di funzioni.

Le altre funzioni trigonometriche si sanno esprimere razionalmente mediante il seno ed il coseno, ed applicandovi le regole note si ricava

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}\,, \quad d \cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}\,, \qquad [12]$$

$$d \sec x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx\,, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx. \qquad [13]$$

Sia ora $y = \operatorname{arc\,sen} x$, ove x è compreso fra -1 e $+1$, e per y si prende l'arco compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$ il cui seno è x, secondo le convenzioni del N. 29, si ha $x = \operatorname{sen} y$, $dx = \cos y\, dy$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$, e volendo esprimere la derivata in funzione della variabile indipendente x, si osservi che $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$,

ove il radicale si deve prendere col segno $+$, perchè, essendo y compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, $\cos y$ è positivo; quindi

$$d \text{ arc sen } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad [14]$$

Sia $y = \text{arc} \cos x$; sarà

$$x = \cos y, \quad dx = -\text{sen } y \, dy,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \text{ arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [15]$$

ed il radicale si prenderà positivo, se y è compreso fra 0 e π.

Sia $y = \text{arc tang } x$; si ha

$$x = \text{tang } y, \; dx = \frac{dy}{\cos^2 y}, \; \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2},$$

$$d \text{ arc tang } x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

In modo analogo si ricava

$$d \text{ arc cot } x = -\frac{dx}{1+x^2}, \qquad [16]$$

$$d \text{ arc sec } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d \text{ arc cosec } x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \qquad [17]$$

Le formule precedenti permettono di determinare la derivata d'ogni funzione di x ottenuta eseguendo sulla variabile e su costanti un numero finito di volte le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza d'esponente qualunque, prendere logaritmi e funzioni trigonometriche dirette ed inverse.

Teoremi sulle derivate.

43. — Una funzione $f(x)$ dicesi *crescente* per $x = x_0$ se l'incremento $f(x+h) - f(x_0)$ della funzione è dello stesso segno dell'incremento h della variabile, supposto però sufficientemente piccolo h; dicesi invece *decrescente* se l'incremento della funzione è di segno contrario all'incremento della variabile.

TEOREMA. — *Se la derivata è positiva, la funzione è crescente, se negativa, è decrescente.*

Infatti sia $f(x)$ la funzione, $f'(x)$ la derivata; sarà

$$\lim \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

e quindi

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha, \text{ e } f(x_0+h) - f(x_0) = h\,[f'(x_0) + \alpha]$$

α essendo una quantità infinitesima con h. Se ora $f'(x_0)$ non è nullo, si può supporre α minore in valor assoluto di $f'(x_0)$, quindi la quantità $f'(x_0) + \alpha$ del segno di $f'(x_0)$, ed allora $f(x_0+h) - f(x_0)$ sarà del segno di h, o del segno opposto di h secondochè $f'(x_0)$ è positivo ovvero negativo, vale a dire la funzione è crescente se $f'(x_0)$ è positivo, decrescente se $f'(x_0)$ è negativo.

44. — TEOREMA (di Rolle). — *Se* f(x) *è funzione di* x *data in un intervallo* (a, b), *avente derivata* f'(x) *per tutti i valori di* x *in questo intervallo, e se* f(a) = 0 *ed* f(b) = 0, *esisterà un valore* x_1 *compreso fra* a *e* b *e diverso dagli estremi, per cui la derivata è nulla.*

Infatti o $f(x)$ è sempre nulla per tutti i valori di x compresi fra a e b, e allora per ogni valore di x compreso nello stesso intervallo

sarà $f'(x) = 0$; ovvero $f'(x)$ assume anche valori diversi da zero, che potranno essere positivi o negativi. Se $f(x)$ ammette valori positivi, se ne consideri il loro massimo, che esiste, è positivo, e corrisponde ad un valore x_1 della variabile x compreso fra a e b, e diverso da a e da b, per cui la funzione è nulla. Quindi la quantità $f(x_1 + h) - f(x_1)$ sarà sempre negativa o nulla, qualunque sia h, e, supposto h positivo, le quantità $\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h}$ e $\frac{f(x_1 + h) - f x_1)}{h}$ saranno la prima positiva o nulla, e la seconda negativa o nulla; e dovendo esse, col tendere di h a zero, tendere verso uno stesso limite finito $f'(x_1)$, dovrà essere $f'(x_1) = 0$, c. v. d.

Se la funzione assume soli valori negativi, diventerà minima per un valore x_1 compreso fra a e b, e si dimostra con ragionamento analogo che per questo valore la derivata è nulla.

45. — Teorema. — *Se* f (x) *ammette derivata per tutti i valori di* x *nell'intervallo* (a, b), *sarà*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) ,$$

x_1 *essendo una quantità compresa fra* a *e* b.

Infatti si consideri la funzione

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}[f(b) - f(a)];$$

essa si annulla per $x = a$ ed $x = b$, ed inoltre ha derivata $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per tutti i valori di x compresi fra a e b, perciò esisterà un valore x_1 compreso fra a e b per cui $F'(x_1) = 0$, ossia $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La formula precedente si può scrivere diversamente. Pongasi $b = a + h$; x_1 che è compreso fra a e b, si può mettere sotto la forma $x_1 = a + \theta h$, θ essendo una quantità compresa fra 0 ed 1 (esclusi i limiti); quindi moltiplicando per h si ha:

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$$

formula assai importante, che vale supposto che $f(x)$ ammetta derivata per tutti i valori di x compresi fra a ed $a+h$.

Si può trovare una formula più generale della precedente.

Siano $f(x)$ e $\varphi(x)$ funzioni aventi derivata nell'intervallo (a, b) e si supponga che $\varphi'(x)$ non si annulli per alcun valore di x interno allo stesso intervallo, potendosi però annullare per $x=a$ ovvero $=b$. Si consideri la funzione

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,[\varphi(x)-\varphi(a)]\,;$$

si avrà $F(a)=0$, $F(b)=0$, $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,\varphi'(x)$, quindi esisterà un valore x_1 compreso fra a e b, per cui $F'(x_1)=0$, ossia $f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,\varphi'(x_1)$, e dividendo per $\varphi'(x)$, che non è nullo,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}\,.$$

Ponendo in questa formula $b=a+h$, $x_1=a+\theta h$, si ha

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}\,.$$

46. — Teorema. — *Se la derivata d'una funzione è nulla per tutti i valori di* x *nell'interno d'un intervallo,* f (x) *ha un valore costante nello stesso intervallo.*

Infatti sia a un valore di x compreso nell'intervallo dato, $a+h$ un altro valore di x nello stesso intervallo; sarà

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a+\theta h)\,,$$

ed essendo $a+\theta h$ pure compreso nello stesso intervallo, sarà $f'(a+\theta h)=0$, onde $f(a+h)=f(a)$ ha un valore costante.

TEOREMA. — *Se due funzioni* f (x) *e* φ (x) *hanno derivate eguali pei valori di* x *in un dato intervallo, la loro differenza è costante.*

Invero pongasi $F(x)=f(x)-\varphi(x)$; sarà $F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)=0$, e quindi $F(x)$ è costante.

Derivate successive.

47. — Se una funzione $f(x)$ ammette derivata $f'(x)$ pei valori di x in un certo intervallo, $f'(x)$ sarà una nuova funzione di x che potrà ammettere derivata, che rappresenteremo con $f''(x)$, e diremo seconda derivata di $f(x)$, chiamando anche la $f'(x)$ derivata prima.

La derivata della derivata seconda si chiama derivata terza, e si rappresenta con $f'''(x)$, e così di seguito. Se $f(x)$ è funzione analitica di x, anche le derivate successive sono funzioni analitiche della stessa natura, e si ottengono successivamente applicando le regole di differenziazione studiate.

Esempi: 1° — Sia $y=x^m$; sarà $y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)x^{m-2}$,...

$$y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Se m è intero e positivo l'm^a derivata è costante ed $=m!$, e le successive sono nulle; altrimenti le derivate sono in numero infinito, e tutte funzioni di x.

2° — Sia $y=\operatorname{Log} x$; sarà $y'=\frac{1}{x}\operatorname{Log} e$, $y''=-\frac{1}{x^2}\operatorname{Log} e,\ldots$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\operatorname{Log} e.$$

3° — Sia $y=\operatorname{sen} x$; sarà

$$y'=\cos x,\ y''=-\operatorname{sen} x,\ y'''=-\cos x,\ y^{IV}=\operatorname{sen} x,\ldots$$

ed esse si riproducono periodicamente. Si può pure scrivere

$$y' = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ldots$$
$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4° — Sia $y = a^x$; sarà $y' = a^x \log a$, $y'' = a^x (\log a)^2, \ldots$
$$y^{(n)} = a^x (\log a)^n .$$

48. — Dicesi differenziale n^{mo}, o d'ordine n d'una funzione y il prodotto dell'n^{ma} potenza del differenziale della variabile indipendente, per la derivata n^{ma} della funzione. La potenza n^{ma} di dx si rappresenta con dx^n (mentre con $d \,.\, x^n$ ovvero $d(x^n)$ si rappresenta il differenziale di x^n, ossia $nx^{n-1}dx$), e il differenziale n^{mo} di y si rappresenta con $d^n y$; onde se $y = f(x)$,

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

e quindi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

e questa notazione è assai usata per esprimere le derivate successive. Se nell'eguaglianza $dy = f'(x)\,dx$ differenziamo ambo i membri, considerando dx come costante, abbiamo: $d\,dy = f''(x)\,dx^2$, cioè $d\,dy = d^2 y$; ed analogamente $d\,d^2 y = d^3 y$, ecc., ossia un differenziale qualunque si ottiene differenziando il precedente, ma considerandovi il dx come costante.

Esercizii.

49. — 1° — Derivare le seguenti funzioni:

$$x^x,\ x^{\operatorname{sen} x},\ e^{\operatorname{sen} x},\ e^{\operatorname{arc\,sen} x},\ x^{\frac{1}{x}},\ \log\cos x,\ \log\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

$$\log\log x,\ \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}.$$

2° — Derivare la funzione $x - \log(1 + x)$, e dedurre dal segno della derivata che per tutti i valori positivi di x è $x > \log(1 + x)$.

3° — Applicando ad una stessa funzione, mettendola, se occorre, sotto forme diverse, differenti procedimenti di differenziazione, si possono trovare facilmente delle identità. Così ad esempio si ha:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y,$$

e derivando rispetto ad x, si ricava la formula

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

4° — Se si eleva a potenza n (n essendo intero e positivo) il binomio $a + x$, si ha un risultato della forma

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$

e derivando

$$\begin{aligned} n(a + x)^{n-1} &= A_1 + 2 A_2 x + \dots + n A_n x^{n-1} \qquad (*) \\ n(n - 1)(a + x)^{n-2} &= 2 A_2 + \dots + n(n - 1) A_n x^{n-2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n(n - 1)\dots(n - r + 1)(a + x)^{n-r} &= \\ = r!\, A_r + \dots + n(n - 1)\dots(n - r + 1) A_n x^{n-r} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n! &= n!\, A_n, \end{aligned}$$

e ponendo in queste formule $x = 0$ si hanno tante equazioni che determinano i coefficienti $A_0\, A_1 \dots$, e si ricava

$$A_0 = a^n,\ A_1 = n a^{n-1},\ A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}, \dots$$

$$A_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} a^{n-r},\quad A_n = 1$$

e così resta dimostrata la formula del binomio di Newton per esponente intero e positivo.

Si può dimostrare la stessa formula moltiplicando la (*) per $(a+x)$ ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri.

Si dimostrerebbe in modo analogo la formula di Taylor per le funzioni intere di x.

5° — Dall'eguaglianza

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

che vale per tutti i valori di x diversi da 1, derivando, e poi moltiplicando per x, si ha

$$x + 2x^2 + \dots + n\,x^n = \frac{n\,x^{n+2} - (n+1)\,x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

e così si possono avere successivamente le somme

$$1^2\,x + 2^2\,x^2 + \dots + n^2\,x^n,$$
$$1^3\,x + 2^3\,x^2 + \dots + n^3\,x^n, \text{ ecc.},$$

sempre per $x \gtrless 1$.

Se in queste espressioni si fa $x = 1$, a sinistra si hanno le somme delle potenze dei successivi numeri naturali; ma il membro di destra si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$.

6° — Sia la funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ che è definita e continua per tutti i valori di x. La sua derivata per $x = 0$ è il limite di $\frac{f(h) - f(o)}{h}$, ossia il limite di $h^{-\frac{1}{3}}$; ora $h^{-\frac{1}{3}}$ col tendere di h a zero cresce indefinitamente in valor assoluto assumendo valori positivi se h è positivo, ed assumendo valori negativi se h è negativo; dunque $f(x)$ non ha derivata finita per $x = 0$.

7° — La funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, ed $f(0) = 0$, è continua; la sua derivata per $x = 0$ è il limite di $\frac{f(h) - f(0)}{h}$, ossia il limite di $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ quando h tende a zero; ma col tendere di h a zero

sen $\frac{1}{h}$ non tende verso alcun limite, dunque la funzione x sen $\frac{1}{x}$ non ha derivata per $x = 0$.

8° — La funzione $x \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$, cui si attribuisce il valore 0 quando x vale 0, è funzione continua di x; e cercandone la derivata per $x = 0$ si ha che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso $+1$, ovvero verso -1 col tendere di Δx a zero, secondochè si dànno a Δx valori positivi o negativi; onde questa funzione non ha derivata per $x = 0$.

9° — Non è vero in generale che se $f(x)$ è continua ed ammette derivata per tutti i valori di x in un dato intervallo, anche la derivata sia funzione continua. Per es. la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, con $f(0) = 0$, è funzione continua di x, ed ammette derivata per tutti i valori di x, perchè, per x diverso da zero, la derivata si ottiene colle regole note, ed è:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

e per $x = 0$ la derivata si ricava dalla sua definizione:

$$f'(0) = \lim \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0 \ ;$$

ciononondimeno la derivata $f'(x)$ è discontinua per $x = 0$, poichè col tendere di x a zero $f'(x)$ non tende verso alcun limite, perchè il primo termine tende verso zero, ed il secondo oscilla indefinitamente fra -1 e $+1$.

Tuttavia potremo dimostrare i seguenti teoremi (10° — 14°):

10° — *Se* f (x) *ha derivata* f′ (x) *in un dato intervallo, e se col tendere di* x *ad* a, f′(x) *tende verso un limite* A, *sarà questo limite il valore della derivata per* x = a, *ossia* A = f′ (a).

Infatti si ha che $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)$, essendo $0 < \theta < 1$, e, col tendere di h a zero, $a + \theta h$ tende verso a, ed $f'(a + \theta h)$ tende verso A, ossia $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tende verso un limite, e $f'(a) = A$.

Quindi se $f'(x)$ è discontinua per $x = a$, col tendere di x ad a, $f'(x)$ non deve tendere verso alcun limite.

11° — *Se* f (x) *ammette derivata in un certo intervallo comprendente il valore* a, *col tendere di* x *ad* a, f'(x) *assume infinite volte valori comunque prossimi ad* f' (a), *cioè fissata una quantità piccola ad arbitrio* ϵ *si può determinare un intervallo comprendente* a *tale che* f' (x) *assume in questo intervallo infiniti valori che differiscono da* f' (a) *di meno di* ϵ.

12° — *Se* f (x) *ha derivata nell'intervallo* (a, b) *ed* f' (a) *ed* f' (b) *sono di segno contrario, esiste un valore di* x *compreso fra* a *e* b *per cui la derivata si annulla.*

13° — *Se* f (x) *ha derivata nell'intervallo* (a, b), *ed* f' (a) = A *e* f' (b) = B, *variando* x *nell'intervallo* (a, b), f' (x) *assumerà tutti i valori compresi fra* A *e* B.

14° — *Se* f (x) *ha derivata* f' (x) *nell' intervallo* (a, b), *e se fissato ad arbitrio* ϵ *si può determinare* σ *in modo tale che per ogni valore di* x *compreso in esso e per ogni valore di* $h < \sigma$ *sia* $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) < \epsilon$ *in valore assoluto, la derivata* f' (x) *è funzione continua, e viceversa.*

15° — Dimostrare le formule

$$d^n(u+v) = d^n u + d^n v$$
$$d^n . au = ad^n u$$
$$d^n(au + bv) = ad^n u + b\,d^n v\,,$$

dove u e v sono funzioni di x, e a e b costanti:

16° — Essendo u e v ~~sono~~ due funzioni di x, si ha:

$$d^n . uv = u\,d^n v + n\,du\,d^{n-1} v + \binom{n}{2} d^2 u\,d^{n-2} v + \ldots + v\,d^n u\,.$$

I coefficienti dei termini sono quelli dello sviluppo della potenza n^{ma} d'un binomio; onde la formula precedente si può scrivere simbolicamente

$$d^n . uv = (du + dv)^n$$

dove occorre intendere che sviluppata la potenza n^{ma} del binomio $du + dv$, scrivendo anche nel primo e nell'ultimo termine le potenze 0 di du e di dv, si porti al d l'esponente di du e di dv; ossia che invece di du^α, dv^β si legga $d^\alpha u$, $d^\beta v$, e ritenendo che $d^0 u = u$, $d^0 v = v$.

In modo analogo si ha simbolicamente:

$$d^n uvw \ldots t = (du + dv + \ldots + dt)^n .$$

17° — Pongasi $u_0 = u$, $u_1 = \frac{u'}{1}$, ... $u_n = \frac{u^{(n)}}{n!}$, e notazioni analoghe per v ed y.

Se $y = uv$, si ricava dalla formula del numero precedente:

$$y_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots\ldots + u_n v_0 .$$

18° — Sia $y = \frac{u}{v}$; si ha $u = vy$. Derivando quest'eguaglianza, servendoci delle notazioni e della formula (17°), si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned}
u_0 &= v_0 y_0 \\
u_1 &= v_1 y_0 + v_0 y_1 \\
u_2 &= v_2 y_0 + v_1 y_1 + v_0 y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n-1} &= v_{n-1} y_0 + v_{n-2} y_1 + v_{n-3} y_2 + \ldots + v_0 y_{n-1} \\
u_n &= v_n y_0 + v_{n-1} y_1 + v_{n-2} y_2 + \ldots + v_1 y_{n-1} + v_0 y_n
\end{aligned}$$

dalle quali si possono ricavare successivamente $y_0\, y_1 \ldots y_n$, ossia le derivate di y, in funzione delle derivate di u e v. Risolvendo il sistema delle equazioni lineari precedenti col metodo dei determinanti, si ha:

$$y_n = \frac{1}{v_0^{n+1}} \begin{vmatrix}
v_0 & o & o & \ldots o & u_0 \\
v_1 & v_0 & o & \ldots o & u_1 \\
v_2 & v_1 & v_0 & \ldots o & u_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
v_{n-1} & v_{n-2} & v_{n-3} & \ldots v_0 & u_{n-1} \\
v_n & v_{n-1} & v_{n-2} & \ldots v_1 & u_n
\end{vmatrix}$$

che si può pure scrivere:

$$y_n = \frac{u_n}{v_0} - \frac{u_{n-1}}{v_0^2} v_1 + \frac{u_{n-2}}{v_0^3} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 \\ v_2 & v_1 \end{vmatrix} - \frac{u_{n-3}}{v_0^4} \begin{vmatrix} v_1 & v_0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_0 \\ v_3 & v_2 & v_1 \end{vmatrix} + \ldots\ldots$$

19. — Sia $y = F(u)$ ed $u = \varphi(x)$, onde y è funzione di funzione di x mediante u. Si ha:

$$\frac{dy}{dx} = F'(u)\varphi'(x) = F'(u)\,u',$$

e derivando più volte quest'eguaglianza, si ricava

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F'(u)\,.\,u'' + F''(u)\,.\,u'^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F'(u)\,.\,u''' + F''(u)\,.\,3u'u'' + F'''(u)\,.\,u'^3$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = F'(u)u^{\text{IV}} + F''(u)(4u'u''' + 3u''^2) + F'''(u)\,.\,6u'^2u'' + F^{\text{IV}}(u)\,.\,u'^4$$

. . . . . .

Questi risultati si possono riassumere nella formula:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!\,F^{(r)}(u)}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha} \left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta} \ldots\ldots \left(\frac{u^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda}$$

ove nel membro di destra si intende la somma di tutti i termini che si possono ricavare da quello scritto dando ad r i valori $1, 2, \ldots n$, e alle $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ valori interi e positivi, o nulli, tali che:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = r$$
$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n.$$

Si verifica questa formula per $n = 1, 2, \ldots$ e si può dimostrare facilmente che, se è vera per un dato valore di n, è anche vera aumentando n di un'unità.

20. — In casi particolari si può, con opportuni artifizii, determinare la derivata d'ordine n d'una funzione.

Sia $y = \frac{1}{1-x^2}$; si può scrivere $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$, e derivando n volte, si ha:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{n!}{2}\left[\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right].$$

21. — Sia $y = \text{arc tang}\, x$. Si ha $y' = \frac{1}{1+x^2}$, od esprimendo questa derivata in funzione di y, si ha $y' = \cos^2 y$; derivando successivamente, si ha la formula

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)!\cos^n y \,.\, \text{sen}\, n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$