CAPITOLO V.

I successivi sviluppi della geometria non-euclidea.

§ 66. Per rendere conto degli ulteriori progressi della geometria non-euclidea, secondo gli indirizzi *metrico-differenziale* e *proiettivo*, dovremmo uscire dal campo elementare, per parlare di alcune elevate teorie matematiche, quali la *geometria metrico-differenziale sopra le varietà*, la teoria dei *gruppi continui di trasformazioni*, la *geometria proiettiva pura* [sistema STAUDT] e le *geometrie metriche* ad essa subordinate. Non essendo consentaneo all' indole di questo volume entrare, sia pure sommariamente, in questioni elevate, ci restringeremo alle sole cose necessarie per fare comprendere al lettore lo spirito che informa le nuove indagini e condurlo ad un altro sistema geometrico, dovuto a RIEMANN, che le precedenti ricerche escludevano fin dal principio coll' ammettere l' infinità della retta. Questo sistema è conosciuto sotto il nome del suo fondatore e corrisponde all' ipotesi dell' angolo ottuso di SACCHERI e LAMBERT (1).

(1) Chi desiderasse un largo sviluppo degli argomenti trattati in questo capitolo può consultare le « *Vorlesungen über die Nickt-Euklidische Geometrie.* » di F. KLEIN [Gottinga, 1893] e le « *Lezioni sulla geometria differenziale.* » di L. BIANCHI, t. I, Cap. XI, XII, XIII, XIV, p. 326-513 [Pisa, Spoerri, 1903].

Indirizzo Metrico-Differenziale.

La geometria sopra una superficie.

§ 67. Per facilitare lo scopo conviene muovere dalle considerazioni seguenti.

Data una superficie, proponiamoci di vedere fino a che punto si possa fondare sopra di essa una geometria analoga a quella del piano.

Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna sulla superficie la minima distanza fra i due punti. Una tal linea è la *geodetica* congiungente i due punti dati. Se si tratta, per es., di una sfera, la geodetica, che congiunge due punti [non estremi di un diametro], è un arco del cerchio massimo ch' essi determinano.

Ora, volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria sul piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella, misuranti le distanze sopra la superficie, con le rette di questo ed anche di considerare come [*geodeticamente*] *eguali*, sopra una superficie, due figure tracciate su di essa che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

A questo concetto di uguaglianza si può pervenire in un modo intuitivo ammettendo che la superficie sia realizzata con un foglio *flessibile* ed *inestendibile* e che con un movimento della superficie, in cui essa non rimanga rigida, ma si fletta come è detto innanzi, le figure superficiali da noi chiamate uguali possano sovrapporsi l' una all' altra.

Prendiamo, come esempio, un pezzo di superficie cilindrica, che per semplice flessione senza estensione, duplicazione e rottura possa *applicarsi* sopra una regione piana. È chiaro che in questo caso dovranno chiamarsi uguali *sulla superficie* due figure che si distendano sopra figure piane uguali; ben inteso che due figure siffatte non sono generalmente uguali *nello spazio.*

Ritornando ad una superficie qualsiasi, il sistema di convenzioni innanzi accennato da origine ad una *geometria sopra la superficie*, che intendiamo sempre di considerare per regioni convenientemente limitate [*regioni normali*]. Due superficie applicabili l' una sull' altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria; così, per es., sopra una qualsiasi superficie cilindrica ed in genere sopra una qualsiasi superficie *sviluppabile*, si avrà una geometria simile a quella d' una superficie piana.

Un esempio di geometria sopra una superficie, essenzialmente diversa da quella del piano, ci è data dalla geometria della sfera, perchè è impossibile applicare una porzione di sfera sopra il piano. Tuttavia fra la geometria piana e quella sferica abbiamo però una notevole analogia: questa analogia trova il suo fondamento nel fatto che la sfera può muoversi liberamente su se stessa, precisamente come il piano; sicchè per le figure uguali sulla sfera valgono delle proposizioni in tutto analoghe ai postulati della congruenza sul piano.

Cerchiamo di generalizzare questo esempio. Affinchè una superficie convenientemente limitata possa muoversi, con flessione senza estensione, su se stessa come la superficie piana, occorre che un certo numero [K], invariante rispetto alle predette flessioni, abbia un *valore costante* in tutti i punti della superficie. Questo numero è stato introdotto da GAUSS col nome di *curvatura* [1].

---

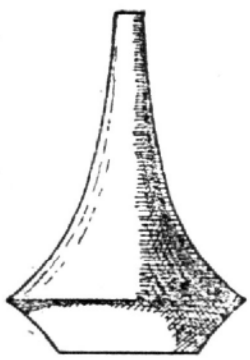
[1] Rammentando che la curvatura d' una linea piana in un punto è l' inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto, ecco come può definirsi la curvatura in un punto M d' una superficie.

Si possono costruire effettivamente delle superficie a *curvatura costante*, distinguendo i tre casi possibili:

$$K = o \quad , \quad K > o \quad , \quad K < o.$$

Per $K = o$ si hanno le superficie sviluppabili [applicabili sul piano]. Per $K > o$ si hanno le superficie applicabili sopra una superficie sferica di raggio $\sqrt{\frac{1}{K}}$ e la sfera può riguardarsi come *modello* di esse.

Per la $K < o$ si hanno le superficie applicabili sulla *pseu-*



Pseudosfera

Fig. 47.

Trattrice

Fig. 48.

dosfera, la quale può assumersi come modello per le *superficie di curvatura costante negativa.*

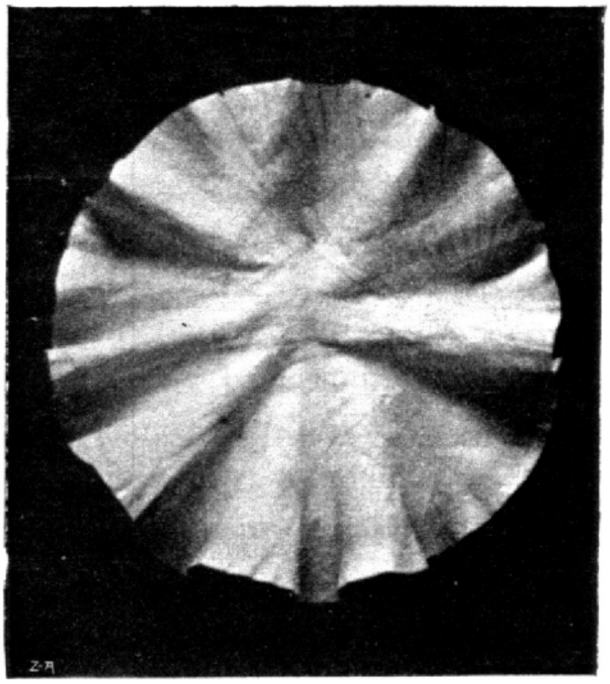
La pseudosfera è una superficie di rotazione: l' equazione

Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve ch' esso sega sulla superficie. Fra le curve [piane] di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature [sopra definite] godono delle proprietà di massimo o minimo. Il prodotto di tali curvature da la curvatura della superficie nel punto M [Gauss]. Alla curvatura di Gauss compete poi uno spiccatissimo carattere: essa si mantiene invariata per ogni flessione senza estensione della superficie; talchè se due superficie sono applicabili, nel senso indicato nel testo, debbono, nei punti corrispondenti, avere la stessa curvatura [Gauss]. Questo risultato, invertito dal Minding nel caso delle su-della curva meridiana [*trattrice* (1)], riferita all' asse di rotazione z e ad una retta x perpendicolare a z e convenientemente scelta è:

$$(1) \qquad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

dove k è legato alla curvatura K dalla relazione:

$$K = -\frac{1}{k^2}$$



Superficie di curvatura costante negativa (2).
Fig. 49.

Sulla pseudosfera generata dalla (1) può adagiarsi qualunque porzione di superficie di curvatura costante $-\frac{1}{k^2}$.

---

perficie a curvatura costante, rende manifesto che le superficie liberamente mobili sopra se stesse sono caratterizzate dalla costanza della curvatura.

(1) La trattrice è quella curva il cui segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l' asintoto ha una lunghezza costante.

(2) La superficie, di cui la Fig. 49 è una riproduzione fotografica, fu costruita da BELTRAMI. Ora fa parte della collezione di *modelli* appartenente all' ISTITUTO MATEMATICO di Pavia.

§ 68. Fra la geometria sopra una superficie di curvatura costante e quella d'una porzione di piano, prese l'una e l'altra con le opportune limitazioni, intercede una analogia, che possiamo mettere in evidenza *traducendo* le prime definizioni e proprietà dell'una in quelle dell'altra, com'è sommariamente indicato dalla contrapposizione di frasi che si osserva nel seguente quadro.

a) Superficie.	*a*) Regione di piano.
b) Punto.	*b*) Punto.
c) Geodetica.	*c*) Retta.
d) Arco di geodetica.	*d*) Segmento rettilineo.
e) Proprietà lineari della geodetica.	*e*) Postulati relativi all'ordinamento dei punti sulla retta.
f) Due punti determinano una geodetica.	*f*) Due punti determinano una retta.
g) Proprietà fondamentali dell'uguaglianza di archi geodetici e di angoli.	*g*) Postulati della congruenza segmentaria ed angolare.
h) Se due triangoli geodetici hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali.	*k*) Se due triangoli rettilinei hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali.

Segue che si possono ritenere comuni alla geometria delle superficie in discorso tutte quelle proprietà pertinenti a regioni limitate di piano, che nell'assetto euclideo sono indipendenti dal postulato delle parallele e nella cui dimostrazione non si fa uso del *piano completo* [per es. dell'infinità della retta].

Procediamo ora a confrontare, con le corrispondenti della superficie, quelle proposizioni relative alla regione piana, che sono in connessione con l'ipotesi euclidea. Si ha, per es., che sul piano la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti. La proprietà corrispondente non è generalmente vera sulla superficie.

Infatti GAUSS dimostrò che sopra una superficie a curvatura K, costante oppure variabile da punto a punto della superficie, l'integrale doppio

$$\int \mathrm{K}.d\sigma,$$

esteso alla superficie di un triangolo geodetico ABC, è uguale all'*eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti* (1). Cioè:

$$\int_{\mathrm{ABC}} \mathrm{K}.d\sigma = \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}} - \pi.$$

Applichiamo questa formula alle superficie di curvatura costante, distinguendo i tre casi possibili.

1° caso: $\mathrm{K} = o.$

Allora avremo:

$$\int_{\mathrm{ABC}} \mathrm{K}.d\sigma = o, \quad \text{quindi:} \quad \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}} = \pi.$$

Sulle superficie a curvatura nulla la somma degli angoli d'un triangolo geodetico è uguale a due angoli retti. Questo risultato del resto ci era noto.

2° caso: $\mathrm{K} = \frac{1}{k^2} > o.$

Allora avremo:

$$\int_{\mathrm{ABC}} \mathrm{K}.d\sigma = \frac{1}{k^2} \cdot \int_{\mathrm{ABC}} d\sigma.$$

(1) Cfr., ad es., le citate « *Lezioni sulla Geometria Differenziale* » di L. BIANCHI, Cap. VI.

Ma l'integrale: $\int d\sigma$, esteso al triangolo ABC, da l'area Δ di quel triangolo, talchè:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

Da questa relazione ricaviamo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi;$$

$$\Delta = k^2 (A + B + C - \pi).$$

Cioè:

a) Sulle superficie a curvatura costante positiva la somma degli angoli di un triangolo geodetico è maggiore di due angoli retti.

b) L'area di un triangolo geodetico è proporzionale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.

3° caso: $\quad K = -\frac{1}{k^2}.$

Allora avremo:

$$\int_{ABC} K d\sigma = -\frac{1}{k^2} \int_{ABC} d\sigma = -\frac{\Delta}{k^2},$$

dove, anche qui, con Δ abbiamo indicato l'area del triangolo ABC. Segue allora:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \pi - \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right),$$

dalla quale si ricavano le due relazioni seguenti:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$$

$$\Delta = k^2 \left(\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}\right).$$

Cioè:

a) Sulle superficie a curvatura costante negativa la somma dei tre angoli di un triangolo geodetico è minore di due angoli retti.

b) L'area d'un triangolo geodetico è proporzionale alla deficienza della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.

Riassumiamo i risultati nella seguente tabella:

Superficie a curvatura costante.

Valore della curvatura	Modello della superficie	Carattere specifico
$K = o$	piano	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$
$K = \frac{1}{k^2}$	sfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$
$K = -\frac{1}{k^2}$	pseudosfera	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$

La geometria delle superficie di curvatura nulla e di curvatura costante positiva ci è nota, perchè corrisponde alla geometria piana euclidea ed alla geometria sferica.

Lo studio della geometria delle superficie a curvatura costante negativa fu iniziato da F. MINDING [1806-1885] con la ricerca delle forme di rotazione su cui esse possono applicarsi [1]. La seguente osservazione di MINDING, sviluppata distesamente da D. CODAZZI [1824-1873], permette poi di assegnarne la trigonometria. *Se nelle formule trigonometriche della sfera si tengono fissi gli angoli e si moltiplicano i lati per $i = \sqrt{-1}$, si ottengono le relazioni a cui soddisfano gli elementi dei triangoli geodetici delle su-*

---

(1) « *Wie sich entschneiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse.* »; Crelle, t. XIX, p. 370-87 [1839].

perficie di curvatura costante negativa (1). Queste relazioni [*trigonometria pseudosferica*] evidentemente coincidono con quelle di TAURINUS, cioè con le formule della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI.

§ 69. Dai precedenti §§ risulta che le proprietà relative alla somma degli angoli d'un triangolo, nella geometria delle superficie di curvatura costante, corrispondono rispettivamente:

per $K = 0$, a quelle valide nel piano in forza dell'*ip. ang. retto;*

per $K > 0$, a quelle che sussisterebbero nel piano in forza dell'*ip. ang. ottuso*;

per $K < 0$, a quelle valide nel piano, in forza dell'*ip. angolo acuto.*

Il primo di questi risultati è evidente a priori, perchè si tratta di superficie sviluppabili.

L'analogia fra la geometria sulle superficie di curvatura costante negativa, ad es., e la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI si potrebbe rendere ancor piú manifesta ponendo a riscontro le relazioni fra gli elementi dei triangoli geodetici tracciati su quelle superficie con le formule della trigonometría non-euclidea. Un tale riscontro fu fatto da E. BELTRAMI nel suo « *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (2). ».

Risulta cosi che la geometria sopra una superficie a curvatura costante positiva o negativa si può considerare

---

(1) MINDING: « *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen.* »; Crelle, t. XX, p. 323-27 [1840]. — D. CODAZZI: « *Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto de' due raggi di curvatura.* »; Ann. di Scien. Mat. e Fis. t.VIII, p. 346-55 [1857].

(2) Giorn. di Matem., t. VI, p. 284-312 [1868]. — Opere Mat., t. 1, p. 374-405 [Hepli, 1902].

come una *interpretazione concreta della geometria non-euclidea che si ottiene in una regione limitata di piano adottando l' ip. ang. ottuso o quella dell' ang. acuto.*

La possibilità di interpretare la geometria delle *varietà a due dimensioni* mediante quella delle superficie ordinarie era nota a B. RIEMANN [1826-1866] fino dal 1854, anno in cui egli compose la celebre dissertazione: « *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1). », che sta a fondamento dell' indirizzo metrico differenziale.

L' interpretazione di BELTRAMI si presenta come caso particolare di quella di RIEMANN. La quale, per le proprietà delle superficie di curvatura costante, ci mostra chiaramente come il seguito delle deduzioni ricavato dalle tre ipotesi sulla somma degli angoli di un triangolo debba condurre a dei sistemi geometrici logicamente coerenti.

---

(1) « *Opere di Riemann* », 1ª ed. [1876], p. 254-96; 2ª ed. [1892], p. 272-87. Fu letta da RIEMANN nel 1854, per la sua abilitazione presso la Facoltà filosoflca di Gottinga, davanti ad un pubblico composto non di soli matematici. Perciò non contiene sviluppi analitici ed i concetti ivi esposti hanno veste prevalentemente intuitiva. Qualche schiarimento analitico si trova nelle note della Memoria inviata da RIEMANN in risposta ad una questione messa a concorso dall' Istituto di Parigi [*Op. Riemann*, 1ª ed. p. 384-91].

Il fondamento filosofico della « *Dissertazione* » è lo studio delle proprietà delle cose *dal loro modo di comportarsi nell' infinitesimo*. Cfr. il discorso di KLEIN: « *Riemann e la sua importanza nello sviluppo della matematica moderna.* », tradotto da E. PASCAL negli Annali di Mat., (2), t. XXIII [p. 222].

La « *Dissertazione* » fu pubblicata soltanto nel 1867 [Gött. Abh., XIII], dopo la morte dell' A., per cura di R. DEDEKIND, poi tradotta in francese da J. HOÜEL [Annali di Mat, (2), t. III, 1870; Oeuvres Math. de Riemann, 1876], in inglese da W. CLIFFORD [Nature, t. VIII, 1873] e da G. B. HALSTED [Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji, t. VII, 1895], in polacco da DICKSTEIN [Comm. Acad. Litt. Cracoviensis, t. IX, 1877], in russo da D. SINTSOFF [Notizie della Società fisico-matematica della R. Università di Kasan, (2), t. III, Appendice, 1893].

Questa conclusione, per quanto riguarda l'*ip. ang. ottuso*, sembra contraddire i teoremi di SACCHERI, LAMBERT, LEGENDRE, che escludono fin dal principio la possibilità d'una geometria fondata su detta ipotesi. La contraddizione si elimina però facilmente riflettendo che nella dimostrazione di quei teoremi si utilizzarono non solo le proprietà fondamentali pertinenti ad una regione limitata di piano, ma anche proprietà del piano completo, ad. es. l'infinità della retta.

FONDAMENTI D'UNA GEOMETRIA PIANA SECONDO LE IDEE DI RIEMANN.

§ 70. Le precedenti osservazioni ci guidano a porre i fondamenti d'una geometria metrica, prescindendo dal postulato di EUCLIDE e adottando un punto di vista più generale di quello innanzi tenuto.

a) Ammettiamo di partire da una regione limitata di piano [regione normale], *non dell' intero piano;*

b) concediamo come postulati quelle proposizioni elementari, rivelateci dai sensi, nella regione inizialmente presa; proposizioni relative alla determinabilità della retta, alla congruenza etc.;

c) ammettiamo che le proprietà della regione iniziale si possano estendere all' intorno di un punto qualunque del piano [*non diciamo al piano completo abbracciato con un solo sguardo*].

La geometria sviluppata in base a questi principi sarà la più generale geometria piana, conciliabile coi dati che esprimono il risultato delle nostre esperienze prese in un senso rigoroso, ma limitatamente ad un campo accessibile.

In base a quanto si disse nel § 69 è chiaro che la detta geometria troverà una concreta interpretazione in quella delle superficie a curvatura costante.

Ma tale corrispondenza sussiste soltanto dal punto di vista [*differenziale*] secondo cui si confrontano delle regioni limitate. Se ci si pone invece dal punto di vista [*integrale*] secondo cui si confrontano la geometria dell' intiero piano e la geometria sopra la superficie, il riscontro non sussiste piú. Già infatti, sotto questo aspetto, non può dirsi nemmeno che sopra due superficie con una medesima curvatura costante valga la medesima geometria. Per es., il cilindro circolare ha una curvatura nulla ed una regione di esso può svilupparsi sopra una regione di piano, ma l' intero cilindro non è applicabile in tal modo sopra l' intero piano. La geometria integrale sul cilindro differisce perciò da quella dell' intero piano euclideo. Infatti, vi sono sul cilindro delle geodetiche chiuse [sezioni circolari] e generalmente due geodetiche di esso [eliche] s' incontrano in un numero infinito di punti, anzichè in due.

Differenze analoghe intercederanno in generale fra una delle geometrie metriche non-euclidee che potrebbe fondarsi sulla base dei postulati sopra enunciati e la geometria d' una corrispondente superficie a curvatura costante.

Quando tentiamo di abbracciare in senso integrale la geometria sopra una superficie a curvatura costante [p. es. sulla sfera o sulla pseudosfera] vediamo in generale che la proprietà fondamentale di una regione normale, relativa alla determinazione della geodetica passante per due punti, cessa di valere. Questo fatto non è però una conseguenza necessaria delle ipotesi su cui si basa, nel senso anzidetto, una metrica non-euclidea generale del piano. Infatti, quando si domandi se è logicamente possibile un sistema di geometria piana soddisfacente alle condizioni *a*) *b*) *c*) e tale che i postulati della congruenza e quello di determinazione della retta valgano nel piano completo, si ottengono, oltre l' ordinario sistema euclideo, i due sistemi geometrici seguenti:

1°) *Il sistema di* Lobacefski-Bolyai, già innanzi incontrato, in cui per un punto passano due parallele ad una retta.

2°) *Un nuovo sistema* [detto di RIEMANN], che corrisponde all'*ip. ang. ottuso* di SACCHERI, in cui non esistono parallele.

In quest'ultimo sistema la retta è una *linea chiusa*, di lunghezza finita: si evita perciò la contraddizione cui si andrebbe incontro supponendo la retta aperta [infinita], ipotesi di cui si fa uso per stabilire il teorema dell'angolo esterno di EUCLIDE ed alcuni risultati di SACCHERI.

§ 71. Il primo a notare l'esistenza di un sistema geometrico compatibile con l'*ip. ang. ottuso* fu RIEMANN, perchè egli fu il primo a sostituire l'ipotesi della retta infinita, con l'altra più generale della *retta illimitata*. La distinzione che qui si presenta tra infinito ed illimitato è di fondamentale importanza. Riportiamo, a tale proposito, le parole di RIEMANN. « Quando si estendono le costruzioni dello spazio all'infinitamente grande bisogna fare distinzione fra l'illimitato e l'infinito: il primo appartiene ai rapporti d'estensione, il secondo ai rapporti metrici. Che lo spazio sia una varietà illimitata a tre dimensioni è una ipotesi che si applica in tutte le concezioni relative al mondo esterno, che ci serve per completare in ogni momento il campo delle nostre percezioni effettive ed a costruire i luoghi possibili degli oggetti cercati e che si trova costantemente verificata in tutte queste applicazioni. La proprietà dello spazio di essere illimitato possiede dunque una certezza empirica che nessun altro dato empirico possiede. Ma l'infinità dello spazio non ne segue in alcun modo; al contrario, se si suppongono i corpi indipendenti dalla loro posizione e si attribuisce allo spazio una curvatura costante, lo spazio sarebbe necessariamente finito non appena questa misura della curvatura avesse un valore positivo, comunque piccolo (1). ».

---

(1) Cfr. la « *Dissertazione* » di RIEMANN, parte III, § 2.

Concludendo, il postulato che attribuisce alla retta una lunghezza infinita, sott' inteso nelle ricerche dei precedenti geometri, non è per RIEMANN meno discutibile di quello delle parallele: ciò che RIEMANN ritiene indiscutibile è l' illimitazione dello spazio, proprietà compatibile tanto con l' ipotesi della retta infinita [aperta], quanto con quella della retta finita [chiusa].

La possibilità logica del sistema di RIEMANN si può desumere dall' interpretazione concreta ch' esso riceve mediante *la geometria della stella di rette.* Le proprietà della stella di rette si traducono facilmente in quelle del piano di RIEMANN e viceversa, con il sussidio del seguente *dizionario*:

Stella	Piano
retta	punto
piano [fascio]	retta
angolo di due rette	segmento
angolo diedro	angolo
triedro	triangolo
. . . .	. . . .

Ecco, per es., la traduzione di alcune fra le più notevoli proposizioni della stella:

Stella	Piano
a) La somma dei tre diedri di un triedro è maggiore di due diedri retti.	*a)* La somma dei tre angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti.
b) Tutti i piani perpendicolari ad un altro piano passano per una retta.	*b)* Tutte le rette perpendicolari ad un'altra retta passano per un punto.
c) Se ad ogni piano della stella facciamo corrispondere la retta in cui s' intersecano i piani perpendicolari al piano dato si ottiene una corrispon-	*c)* Se ad ogni retta del piano facciamo corrispondere il punto in cui s' intersecano le rette perpendicolari alla retta data, si ottiene una cor-

denza fra piani e rette, che gode della seguente proprietà: le rette corrispondenti ai piani di un fascio appartengono ad un piano, il quale, alla sua volta, ha per retta corrispondente l'asse del fascio.

La corrispondenza così definita prende il nome di *polarità assoluta* [ortogonale] della stella.

rispondenza fra rette e punti, che gode della seguente proprietà: i punti corrispondenti alle rette d'un fascio appartengono ad una retta, la quale, alla sua volta, ha per punto corrispondente il centro del fascio.

La corrispondenza così definita prende il nome di *polarità assoluta* del piano.

§ 72. Una notevole osservazione intorno all'*ip. ang. ottuso* fu fatta recentemente da DEHN.

Riferendoci ai ragionamenti di SACCHIERI [p. 32], LAMBERT [p. 39-40], LEGENDRE [50-1], si scorge facilmente che questi autori, per dimostrare la falsità dell'*ip. ang. ottuso*, si giovarono non solo dell'ipotesi della retta infinita, ma anche dell'*ipotesi archimedea*. Ora ci possiamo chiedere se quest'ultima sia realmente necessaria per stabilire il risultato. In altre parole possiamo chiederci se, escludendo il *postulato di Archimede*, le due ipotesi che attribuiscono l'una alla retta i caratteri delle linee aperte, l'altra alla somma degli angoli di un triangolo un valore maggiore di 180° siano compatibili fra loro. A una tale domanda rispose DEHN, con la memoria citata p. 26 [nota (²)], costruendo una geometria *non-archimedea*, in cui la retta è aperta ed i triangoli verificano la 2ª ipotesi saccheriana. Sicchè, la seconda delle tre ipotesi di SACCHERI è compatibile con l'ipotesi della retta aperta, nel seno d'un sistema *non-archimedeo*. La nuova geometria fu chiamata da DEHN « *Nicht-Legendre'sche Geometrie* ».

§ 73. Sebbene, come abbiamo detto, la geometria di una superficie a curvatura costante [positiva o negativa] non rispecchi in generale la intera geometria non-euclidea del piano di LOBACEFSKI e di RIEMANN si può domandare se un tale riscontro possa aver luogo per una qualche superficie particolare.

A questa domanda si risponde così:

1°) *Non esiste alcuna superficie regolare* (1), *analitica, su cui valga nella sua integrità la geometria di Lobacefski-Bolyai* [Teorema di HILBERT (2)].

2°) *Una superficie su cui valesse nella sua integrità la geometria del piano di Riemann dovrebbe essere necessariamente chiusa.*

---

(1) Cioè priva di singolarità.

(2) « *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung.* », Transactions of the American Math. Society, t. II, p. 86-99 [1901]; « *Grundlagen der Geometrie.* », 2ª ediz., p. 162-75 [Leipzig, Teubner, 1903].

La questione risolta col *teorema di* HILBERT si affacciò ai geometri in seguito all'interpretazione di BELTRAMI della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI. — HELMHOLTZ, fin dal 1870, nel suo articolo « *Les axiomes de la géométrie.* » [Revue des cours scientif., t. VII, p. 499] aveva affermato l'impossibilità di costruire una superficie pseudosferica, estesa indefinitamente in ogni direzione, e A. GENOCCHI, nella « *Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques.* » [Belgique Bull., (2), t. XXXVI, p. 181-98, 1873] e più distesamente nello scritto: « *Sur un Mémoire de D. Foncenex et sur les géométries non-euclidiennes.* » [Torino, Memorie, (3), t. XXIX, 365-404, 1877], dopo aver rilevato l'insufficienza di certi ragionamenti intuitivi, diretti a provare l'esistenza concreta d'una superficie atta a rappresentare l'intero piano non-euclideo, insiste sulla probabile esistenza di punti singolari, [come, ad es., quelli situati sulla linea di regresso della fig. 47], in ogni modello concreto di superficie a curvatura costante negativa.

Sul teorema di HILBERT aggiungiamo che il carattere analitico della superficie, ammesso dall'autore, fu dimostrato superfluo. Vedi in proposito la dissertazione di G. LÜTKEMEYER: « *Uber den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen.* », [Göttingen 1902] e la nota di E. HOLMGREN: « *Sur les surfaces à courbure constante negative.* », Comptes Rendus, I° sem. 1902, p. 840-43.

La sola superficie regolare, analitica, chiusa a curvatura costante positiva è la sfera [Teorema di LIEBMANN [1]]. Ma sulla sfera, nelle cui regioni normali è valida la geometria di RIEMANN, due rette s' incontrano sempre in due punti [opposti]. Concluderemo pertanto:

Nello spazio ordinario non esistono superficie che verifichino integralmente tutte le proprietà dei piani non-euclidei.

§. 74. A questo punto conviene osservare che la sfera, fra tutte le superficie di curvatura costante non nulla, è dotata d' un carattere che l' avvicina più delle altre al piano. Infatti la sfera può muoversi su stessa allo stesso modo del piano, di guisa che le proprietà della congruenza valgono non solo per regioni normali ma, come sul piano, per l' intera superficie sferica abbracciata d' uno sguardo.

Questo fatto ci suggerisce un modo di enunciare i postulati della geometria, che non escluda a priori la possibile esistenza di un piano con tutti i caratteri della sfera, compreso quello dei punti opposti. Si potrebbe infatti richiedere che sul piano fossero validi:

1°) i postulati *b*), *c*) [cfr. § 70], in ogni regione normale;

2°) i postulati della congruenza sull' intero piano.

Si troverebbero allora i sistemi geometrici di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN [*tipo ellittico*], precedentemente incontrati, in cui due rette hanno solo un punto

---

(1) « *Eine neue Eigenschaft der Kugel.* », Gött. Nachricten, 1899, p. 44-54. — A p. 172-75 dei « *Grundlagen der Geometrie.* » di HILBERT è pure dimostrata questa proprietà. Notiamo che le superficie di curvatura costante positiva sono necessariamente analitiche. Vedi in proposito la citata dissertazione di LÜTKEMEYER, [p. 163] e la memoria di HOLMGREN: « *Über eine Klasse von partielle Differentialgleichungen der Zweiten Ordnung.* », Math. Ann., t. LVII, p. 407-20 [1903].

comune; un altro sistema riemanniano [*tipo sferico*], in cui due rette hanno sempre in comune due punti.

§. 75. Come RIEMANN abbia concepito il suo piano completo, se abbia cioè pensato al *piano-ellittico* o al *piano-sfera*, od abbia riconosciuto la possibilità di entrambi, non si può precisare, perchè egli, nella sua memoria, fa della geometria differenziale e dedica soltanto poche parole alle forme complete. Però i continuatori del suo indirizzo, fra cui BELTRAMI, considerando costantemente la geometria riemanniana accanto alla sferica, furono tratti a supporre che sul piano completo di RIEMANN, come sulla sfera [per l'esistenza dei punti opposti], il postulato di determinazione della retta presentasse delle eccezioni [1] e che l'unica forma compatibile con *l' ip. ang. ottuso* fosse il *piano-sfera*.

Le proprietà essenziali del *piano-ellittico* furono date da A. CAYLEY [1821-1895] nel 1859, ma la relazione fra queste proprietà e la geometria non euclidea fu additata da KLEIN solo nel 1871. A KLEIN si deve pure la netta distinzione fra le due geometrie riemanniane e la rappresentazione di quella ellittica con la geometria della stella [cfr. § 71]

Per comprendere in che consista la differenza fra la geometria sferica e la ellittica fissiamo l'attenzione su due tipi di superficie che si presentano nello spazio ordinario, cioè sulle superficie a due faccie [*bilatere*] e sulle superficie ad una sola faccia [*unilatere*].

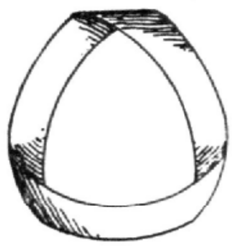
Esempi di superficie bilatere sono il piano ordinario, le superficie del 2° ordine [coniche, cilindriche, sferiche] ed in

---

(1) Cfr., ad es., il breve cenno sulla geometria degli spazi di curvatura costante positiva, con cui BELTRAMI chiude la sua memoria « *Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante.* » [Annali di Matem., (2), t. II, p. 354-5, 1868]. Questa memoria, che dovremo richiamare nel seguito, fu tradotta in francese da HOÜEL nel t. VI, p. 347-77, degli Annales scien. de l'École Normale supérieure.

generale tutte quelle che racchiudono solidi. Su queste è possibile distinguere due faccie.

Un esempio di superficie unilatera ci è dato dal *foglio di Möebius* [*Möebiussche Blatte*], il quale si costruisce facilmente così. Tagliata una striscia rettangolare ABCD, invece di congiungere i lati opposti AB, CD in modo da ottenere una superficie cilindrica, si congiungano gli stessi lati dopo che uno di essi, ad es. CD, ha ruotato di 180° intorno al suo punto di mezzo. Allora, quella ch' era la faccia superiore del rettangolo, in prossimità di CD, viene a trovarsi proseguita dalla faccia inferiore del retttangolo primitivo, sicchè *sul foglio di Möebius la distinzione delle due faccie diventa impossibile.*



Foglio di Möebius

Fig. 50

Volendo distinguere le superficie unilatere dalle bilatere mediante un carattere che dipenda solo dalle proprietà intrinseche delle superficie si procede così. Fissato un punto della superficie ed un verso di rotazione intorno ad esso, si faccia percorrere al punto un cammino chiuso sulla superficie che non ne attraversi l' eventuale contorno: per le superficie bilatere, allorchè il punto ritorna nella posizione iniziale, il verso iniziale della rotazione coincide col verso finale; per le superficie unilatere [come facilmente si verifica sul foglio di MÖEBIUS, percorrendo la linea mediana della superficie] esistono dei cammini chiusi per cui il verso finale della rotazione è l' inverso dell' iniziale.

Ritornando ai due piani di RIEMANN si può ora facilmente spiegare in che consista la loro sostanziale differenza: *il* *piano-sfera è dotato dei caratteri delle superficie bilatere, il piano ellittico di quelli delle superficie unilatere.*

La proprietà del piano ellittico ora enunciata trova poi, come tutte le altre, una interpretazione concreta nella stella di rette.

Infatti, un ribaltamento d'una retta su se stessa, intorno al centro della stella, scambia fra loro le due rotazioni che hanno per asse quella retta.

Un'altra proprietà del piano ellittico, legata alla precedente, è questa: *Il piano ellittico*, contrariamente a ciò che accade per l'euclideo e gli altri non euclidei, *non viene spezzato in due falde dalle sue rette*. Ciò può esprimersi ancora dicendo che dati su esso due punti A, A' ed una retta arbitraria si può passare da A ad A' per un cammino che non esca dal piano nè attraversi la retta.

Questo fatto si traduce in una chiara proprietà della stella, che è superfluo richiamare.

§ 76. Analoga all'interpretazione del piano ellittico è quella che può darsi del piano-sfera mediante la *stella di raggi* [*semirette*]. La traduzione delle proprietà di questo piano nella proprietà della stella di raggi si effettua con l'uso di un *dizionario*, simile a quello del § 71, in cui la parola *punto* si trova contrapposta alla parola *raggio*.

La considerazione della stella di raggi a fianco della stella di rette si presta assai bene per rischiarare i legami e spiegare le differenze che intercedono fra le due geometrie riemanniane.

Noi possiamo considerare due stelle, l'una di rette e l'altra di raggi, col medesimo centro. È chiaro che ad ogni retta della prima corrispondono due raggi della seconda, che ogni figura della prima è formata con due figure *simmetriche* della seconda e che, sotto certe restrizioni, le proprietà metriche delle due forme sono le stesse. Cosicchè se si conviene di riguardare i due raggi opposti della stella di raggi come formanti un solo elemento, la stella di raggi s' identifica con la stella di rette.

Le stesse considerazioni si applicano ai due piani di RIEMANN. Ad ogni punto del piano ellittico ne corrispondono due distinti e opposti del piano-sfera, a due rette del primo che passano per quel punto, due rette del secondo che hanno due punti in comune, etc....

Il piano ellittico, a fianco del piano-sfera, deve adunque concepirsi come un *piano doppio*.

A proposito del piano ellittico e del piano sfera conviene osservare che le formule della trigonometria assoluta, indicate al § 56, possono ad essi applicarsi in ogni loro regione convenientemente limitata. Ciò risulta dal fatto, già notato al § 58, che le formule della trigonometria assoluta sono valide sulla sfera, la cui geometria, per quanto riguarda le regioni normali, coincide con quella de'due piani in discorso.

FONDAMENTI D'UNA GEOMETRIA SPAZIALE SECONDO RIEMANN.

§ 77. Rivolgendoci ora allo spazio, partiamo dal fondamento filosofico che i postulati, sebbene ad essi si accordi per ipotesi un valore rigoroso, esprimono delle verità d'indole sperimentale, verificabili solo in una regione limitata e ammettiamo che, in base ai detti postulati, i punti dello spazio siano rappresentati da tre coordinate x_1, x_2, x_3.

In tale rappresentazione [analitica] ad ogni linea verranno a corrispondere tre equazioni parametriche:

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t),\ x_3 = f_3(t),$$

ed allora potremo proporci di determinare una funzione s, del parametro t, che esprima la *lunghezza* d'un arco di curva.

Stante la *proprietà distributiva*, per la quale la lunghezza d'un arco è uguale alla somma delle lunghezze delle parti in cui può immaginarsi diviso, una tale funzione sarà pienamente determinata quando si conosca la *distanza elementare* [ds] di due punti infinitamente vicini, di coordinate:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$
$$x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3.$$

RIEMANN parte da ipotesi assai generali, che vengono soddisfatte, nel modo più semplice, assumendo come espressione del quadrato della distanza elementare [ds^2] una forma quadratica, sempre positiva, nei differenziali delle variabili:

$$ds^2 = \sum a_{ij},\ dx_i\ dx_j,$$

nella quale le a_{ij} sono funzioni di x_1, x_2, x_3.

Ammettendo ora il principio della sovrapponibilità delle figure, si dimostra che le funzioni a_{ij} debbono essere di tale natura da permettere, in seguito ad un opportuno mutamento del sistema di coordinate, che il ds^2 assuma la forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{K}{4}\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

nella quale la costante K è ciò che RIEMANN, per estensione del concetto gaussiano, denomina convenzionalmente *curvatura dello spazio.*

A seconda poi che K è maggiore, uguale, minore di zero abbiamo lo spazio a curvatura costante positiva, lo spazio a curvatura nulla, lo spazio a curvatura costante negativa.

Facciamo un passo ulteriore ammettendo di estendere allo spazio completo il principio di sovrapponibilità [movimenti] e il postulato per cui la retta è determinata, senza eccezione, da due punti: si trovano allora tre forme spaziali, cioè tre geometrie logicamente possibili e conciliabili coi dati da cui siamo partiti.

La prima di tali geometrie, rispondente alla curvatura positiva, è caratterizzata dal fatto che in ogni piano vale il sistema di RIEMANN, per la qual cosa lo spazio a curvatura positiva sarà illimitato e finito in tutte le direzioni; la seconda, rispondente alla curvatura nulla, è l'ordinaria geometria d'EUCLIDE; la terza infine, che risponde al valore negativo della curvatura, da luogo in ogni piano al sistema di LOBACEFSCKI-BOLYAI.

L'OPERA DI H. HELMHOLTZ E LE RICERCHE DI S. LIE.

§ 78. Anche HERMANN HELMHOLTZ [1821-1894], in alcuni suoi scritti d'indole matematica e filosofica (1), ha trattato la questione relativa ai fondamenti della Geometria. Invece di assumere a priori la forma

$$ds^2 = \sum a_{ij}\ dx_i\ dx_j,$$

---

(1) « *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie.* »; Heidelberg, Verhandl. d. natur.-med. Vereins, t. IV. p. 197-202 [1868]; t. V, p. 31-32 [1869]. — Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, p. 610-17 [Leipzig, 1883] — Fu tradotto in francese da J. HOÜEL e pubblicato nei Mémoires de la Société des Sciences Phy. et Nat. de Bordeaux [t. V, 1868] ed anche insieme agli « *Études geometriques* » di LOBACESFSKI ed alla *Correspondance de Gauss et de Schumacher.* » [Paris, Hermann, 1895].

« *Ueber die Thatsaschen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* »; Götting. Nachr., t. XV 193-221 [1868] — Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II, p. 618-39.

« *The Axioms of Geometry.* »; The Academy, t. I, p. 123-81 [1870]. — Revue des cours scientifiques, t. VII, p. 498-501 [1870].

« *Ueber die Axiome der Geometrie* »; Populäre wissenschaftliche Vortrage. 3. Heft. p. 21-54. [Braunschweig, 1876]. — Trad. inglese: Mind, t. I, p. 301-21. — Trad. francese: Revue scient. de la France et de l'Etranger, (2) t. XII, p. 1197-1207 [1877].

« *Ueber den Ursprung und Sinn Bedentung der geometrischen Sätze.* »; Wissenschaftliche Abhandlungen von H. HELMHOLTZ, t. II. p. 640-60. — Trad. inglese: Mind, t. II, p. 212-24 [1878].

come espressione della distanza elementare, egli ha fatto vedere che questa espressione, nella forma datale da RIEMANN per gli spazi di curvatura costante, è la sola possibile, quando alle ipotesi di RIEMANN si aggiunga, fin da principio, quella riguardante la sovrapponibilità delle figure, in modo conforme al movimento dei *corpi rigidi*. Il *problema* di RIEMANN-HELMHOLTZ è stato sottoposto ad una profonda critica da S. LIE [1842-1899]. Il quale è partito dall' idea fondamentale, ravvisata da KLEIN nelle ricerche di HELMHOLTZ, che *essere due figure congruenti significa potersi trasformare l' una nell' altra mediante una certa trasformazione puntuale dello spazio e che le proprietà per cui la congruenza assume l' aspetto logico di uguaglianza sono inerenti al fatto che i movimenti formano un gruppo di trasformazioni* (1).

Pertanto il problema di RIEMANN-HELMHOLTZ venne messo dal LIE sotto la forma seguente:

Determinare tutti i gruppi continui dello spàzio che, entro una regione limitata, godono delle proprietà dei movimenti.

Postulate convenientemente tali proprietà, in relazione al concetto di *libera mobilità* degli elementi lineari e superficiali uscenti da un punto, si trovano *tre tipi di gruppi*, i quali caratterizzano le tre geometrie di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN (2).

(1) Cfr. KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* », [Erlangen, 1782] — Trad. italiana di G. FANO. Annali di Matem., (2), t. XVII, p. 301-43 [1899].

(2) Cfr. LIE: « *Theorie der Transformationsgruppen.* », t. III, p. 437-543. [Leipzig, Teubner 1893]. — Nello stesso ordine di idee, H. POINCARÉ, nel suo scritto « *Sur les hypothèses fondamentaux de la Géométrie.* » [Bull. de la Société Math. de France, t. XV, p. 203-16, 1887], risolveva il problema di assegnare *tutte le ipotesi* che caratterizzano, fra i vari gruppi di trasformazioni, il gruppo fondamentale della geometria piana euclidea.

Indirizzo proiettivo

Subordinazione della Geometria metrica alla proiettiva.

§. 79. Finalmente anche la *geometria proiettiva* sta in un'elegante relazione coi tre sistemi geometrici di Euclide, di Lobacefski-Bolyai, di Riemann.

Per dare un'idea anche di quest'ultimo modo di trattare il problema rammentiamo che la geometria proiettiva, secondo il sistema di G. C. Staudt [1798-1867], riposa esclusivamente sopra le *nozione grafiche* relative ai punti, alle rette, ai piani e bandisce sistematicamente ogni concetto *di congruenza e di movimento* [quindi di *misura* etc.]. Per la qual cosa la geometria proiettiva, prescindendo da un certo gruppo di postulati, comprenderà un numero più ristretto di proprietà generali, le quali, per quanto concerne le figure piane, sono le proprietà [*proiettive*] che restano invariate per proiezioni e sezioni.

Non di meno, fondata nello spazio la geometria proiettiva, *possono introdursi nell' organismo di essa i concetti metrici, come relazioni delle figure con certi enti* [*metrici*] *particolari.*

Restringendoci al caso del piano euclideo vediamo di quale interpretazione *grafica* siano suscettibili *i concetti metrici fondamentali di parallelismo e di ortogonalità.*

Giova, a tale scopo, considerare in modo speciale *la retta all' infinito* del piano e *l' involuzione assoluta* che su di essa determinano le coppie di raggi ortogonali di un fascio. I punti doppi di tale involuzione, immaginari coniugati, vengono denominati *punti ciclici*, per la loro proprietà di appartenere a tutti i cerchi del piano [Poncelet, 1822 (1)].

---

(1) « *Traité des propriétés projectives des figures* », 2ª ed., t. I, n.° 94, p. 48 [Paris, G. Villars, 1865].

Ciò posto, il *parallelismo* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà che esse hanno di concorrere in un punto della retta all' infinito; l'ortogonalità* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà dei loro punti all' infinito, di essere coniugati nella involuzione assoluta, cioè di separare armonicamente i punti ciclici* [CHASLES, 1850 (1)].

Altre proprietà metriche, che possono esprimersi graficamente, sono quelle inerenti alle grandezze angolari, imperocchè ogni relazione:

$$\mathbf{F}\,(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \ldots.) = 0,$$

fra gli angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots.$, può sostituirsi con l'altra:

$$\mathbf{F}\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i}, \ldots\right) = 0,$$

in cui $a, b, c, \ldots.$ sono i *birapporti* formati dai lati degli angoli con le rette [immaginarie] che dal loro vertice proiettano i punti ciclici [LAGUERRE, 1853 (2)].

Più in generale si dimostra che la congruenza tra due figure piane qualunque può esprimersi con una relazione grafica di esse colla retta all' infinito e l' involuzione assoluta (3) e poichè la congruenza è il fondamento di tutte le proprietà metriche, segue che la retta all'infinito e l' invo-

---

(1) « *Traité de Géométrie supérieure.* », 2ª ed., n° 660, p. 425 [Paris, G. Villars, 1880].

(2) « *Sur la theorie des foyers.* », Nouv. Ann., t. XII, p. 57 — Oeuvres de LAGUERRE, t. II, p. 12-3, [Paris, G. Villars, 1902].

(3) Vedi, ad es., le « *Lezioni di Geometria proiettiva.* » di F. ENRIQUES, p. 177-88. [Bologna, Zanichelli, 2ª ed., 1904].

luzione assoluta permettono di subordinare alla geometria proiettiva tutte le proprietà della geometria metrica euclidea. *Le proprietà metriche compariscono dunque nella geometria proiettiva non come proprietà grafiche delle figure considerate in sè stesse, ma come proprietà grafiche in relazione agli enti metrici fondamentali, costituiti dalla retta all' infinito e dalla involuzione assoluta.*

L' insieme degli enti metrici fondamentali si denomina brevemente *assoluto del piano* [CAYLEY].

Quanto abbiamo detto per il piano si estende naturalmente allo spazio. Nello spazio gli enti metrici fondamentali, che permettono di subordinare le proprietà metriche alle grafiche, sono *il piano all' infinito ed una certa polarità* [*polarità assoluta*] su questo piano, segata dalla polarità della stella che ad ogni retta fa corrispondere il piano ortogonale [cfr. § 71]. La conica fondamentale di detta polarità è *immaginaria*, perchè nella stella non esistono rette reali che giaciano sul rispettivo piano perpendicolare. Si vede poi facilmente ch' essa contiene tutte le coppie di punti ciclici appartenenti ai vari piani dello spazio e che perciò risulta comune a tutte le sfere. Da ciò la denominazione di *cerchio ciclico* per l' ente metrico fondamentale dello spazio.

§. 80. Sorgono ora spontanee le due domande seguenti.

1.° *Nelle ipotesi non-euclidee è possibile la fondazione della geometria proiettiva?*

2.° *Data la possibilità di tale fondazione, le proprietà metriche potranno, come nel caso euclideo, subordinarsi alle proiettive?*

La risposta è affermativa per entrambe. Se nello spazio è valido il sistema di RIEMANN la fondazione della geometria proiettiva non offre difficoltà alcuna, pel fatto che si trovano senz' altro verificate le proprietà grafiche che stanno a base dell' ordinaria proiettiva dopo l' introduzione degli *enti impropri*. Se nello spazio è valido il sistema di Lobacefski-Bolyai si può ancora fondare la geometria proiettiva introducendo, con opportune convenzioni, dei *punti*, *rette* e *piani impropri o ideali*, per mezzo dello stesso criterio che ordinariamente si segue nel caso euclideo per completare lo spazio con gli elementi all' infinito. Basterebbe, per ciò, considerare, accanto alla *stella propria* [insieme delle rette passanti per un punto], due *stelle improprie*, formate l' una da tutte le rette parallele in uno stesso senso ad una retta data, l' altra da tutte le perpendicolari ad un piano dato, ed introdurre dei *punti impropri* da riguardarsi come *centri* di queste stelle.

Senonchè i punti impropri appartenenti ad un piano non possono, in questo caso, come nell' euclideo, assegnarsi ad una retta [*retta all' infinito*]: essi costituiscono una intera regione, separata dalla regione dei punti effettivi [punti *propri*] da una conica [*conica limite o all' infinito*]. Questa conica è il luogo dei punti *impropri* determinati dai fasci di rette parallele.

Nello spazio poi i punti *impropri* sono separati dai punti propri da una *quadrica non rigata* [*quadrica limite o all' infinito*], luogo dei punti impropri secondo cui s' intersecano le rette parallele. Stabilita la validità della geometria proiettiva anche nelle ipotesi non-euclidee [Klein [1]], per ottenere la subordinazione della metrica alla proiettiva basta considerare, come nel caso euclideo, gli *enti metrici fondamentali* [*assoluto*] ed interpretare le proprietà metriche delle

---

(1) La questione dell' indipendenza della geometria proiettiva dalla teoria delle parallele è rapidamente toccata da Klein nella sua prima pubblicazione « *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* »; Math. Ann., t. IV, p. 573-625 [1871]. Un più ampio sviluppo della questione si può vedere nella seconda pubblicazione di Klein sullo stesso argomento: Math. Ann., t. VI, p. 112-145 [1873].

figure come relazioni grafiche di esse rispetto a questi enti. Sul piano di LOBACEFSKI-BOLYAI l'ente metrico fondamentale è la conica limite che separa la regione dei punti propri da quella dei punti impropri; sul piano di RIEMANN è una *conica immaginaria*, definita dalla *polarità assoluta* del piano [cfr. p. 135].

Tanto nell'uno quanto nell'altro caso le *proprietà metriche delle figure sono tutte le proprietà grafiche che rimangono inalterate nelle trasformazioni proiettive* (1) *che lasciano fisso l'assoluto.*

Queste trasformazioni proiettive costituiscono poi gli ∞^3 *movimenti* del piano non-euclideo.

Nel caso euclideo le nominate trasformazioni [che non alterano l'assoluto] sono le ∞^4 similitudini, fra cui, in particolare, si trovano gli ∞^3 movimenti.

Nello spazio la subordinazione della metrica alla proiettiva si fa per mezzo della quadrica limite [*assoluto dello spazio*]. Se questa è reale si ottiene la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI, se è immaginaria si ottiene quella di RIEMANN, tipo ellittico.

Le proprietà metriche delle figure sono dunque le proprietà grafiche dello spazio in relazione al suo assoluto, cioè *le proprietà grafiche che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni proiettive che lasciano fisso l'assoluto dello spazio.*

§ 81. Come si esprimono, rispetto all'assoluto, i concetti di distanza e di angolo?

Introdotto sul piano proiettivo un sistema qualunque di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3), che permetta di rappre-

---

(1) È noto che per *trasformazioni proiettive* s'intendono quelle trasformazioni che fanno corrispondere ad un punto un punto, ad una retta una retta, a punto e retta che si appartengono punto e retta che si appartengono.

sentare la retta con equazioni lineari, l'equazione della conica assoluto sarà del tipo:

$$\Omega_{xx} = \Sigma \; a_{ij} \; x_i \; x_j = 0.$$

Allora, la distanza dei due punti $X(x_1, x_1, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$ viene espressa, a meno d'un fattore costante, dal *logaritmo del birapporto del gruppo ch' essi formano coi punti M, N in cui la loro congiungente incontra l'assoluto.*

Ponendo poi:

$$\Omega_{xy} = \Sigma a_{ij} \; x_i \; y_j$$

e rammentando, dalla geometria analitica, che il birapporto dei quattro punti X, Y, M, N è dato da:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

l'espressione D_{xy} della distanza sarà dunque:

(1) $$D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}};$$

ovvero, introducendo le funzioni inverse delle funzioni circolari ed iperboliche [1]:

(2) $$\begin{cases} D_{xy} = ik \text{ arc. cos } \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \\[2ex] D_{ay} = k \textbf{ Arc. Ch } \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \end{cases}$$

---

[1] Le relazioni fra le funzioni circolari, iperboliche e la funzione logaritmica sono contenute nelle seguenti identità:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] \text{sen}\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{1}{i} \; \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \textbf{Ch}\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] \textbf{Sh}\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} D_{xy} = ik \text{ arc. sen } \dfrac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}} \\ D_{xy} = k \textbf{ Arc. Sh } \dfrac{\sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}. \end{cases}$$

La costante k, che comparisce in queste formule, è poi legata alla curvatura K di RIEMANN dalla seguente relazione:

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{k^2}.$$

Per l'interpretazione proiettiva del concetto di angolo valgono considerazioni analoghe. *L'angolo di due rette è proporzionale al logaritmo del birapporto del gruppo ch' esse formano con le tangenti condotte all' assoluto pel loro punto comune.*

Se si vuole poi che la misura dell' intero fascio sia data da 2π, come nell' ordinaria metrica, è necessario assumere per fattore di proporzionalità la frazione $\frac{1}{2i}$. Per esprimere poi analiticamente l'angolo di due rette $u\,(u_1, u_2\, u_3)$, $v\,(v_1, v_2, v_3)$, poniamo:

$$\Psi_{uu} = \Sigma b_{ij}\, u_i\, u_j\ .$$

Se b_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} del discriminante di Ω_{xx}, l' equazione tangenziale dell' assoluto è data da:

$$\Psi_{uu} = o$$

e l' angolo di due rette dalle seguenti formule:

$$(1')\quad \widehat{uv} = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}$$

$$(2')\quad \begin{cases} \widehat{uv} = \text{arc. cos } \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}} \\ \widehat{uv} = \dfrac{1}{i} \textbf{ Arc. Ch } \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}} \end{cases}$$

$$(3') \begin{cases} \widehat{uv} = \text{arc. sen} \dfrac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi^2_{uv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \\ \widehat{uv} = \dfrac{1}{i} \textbf{Arc. Sh} \dfrac{\sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} . \end{cases}$$

Una espressione identica vale per la distanza di due punti e l' angolo di due piani nella geometria dello spazio: basterebbe supporre che:

$$\Omega_{xx} = O, \quad \Psi_{uu} = O$$

rappresentassero le equazioni [puntuale e tangenziale] dell' assoluto dello spazio, anzichè dell' assoluto del piano. A seconda che $\Omega_{xx} = O$ è l' equazione di una quadrica reale a punti ellittici ovvero di una quadrica immaginaria le formule si riferiranno alla geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI od alla geometria di RIEMANN.

§ 82. Le formule precedenti, relative all' angolo di due rette o due piani, contengono, come caso particolare, quelle dell' ordinaria metrica. Infatti, riferendoci per semplicità al piano e ad un sistema ortogonale di assi coordinati, l' equazione tangenziale dell' assoluto euclideo [*punti ciclici*, § 79] è

$$u_1^2 + u_2^2 = o.$$

La formula (2'), ponendo in essa:

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2 \quad , \quad \Psi_{vv} = v_1^2 + v_2^2 \quad , \quad \Psi_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

diventa:

$$\widehat{uv} = \text{arc. cos} \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}},$$

da cui:

$$\cos \widehat{uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}}.$$

Se ora si tien conto che i coseni direttori della retta $u(u_1, u_2, u_3)$ sono:

$$\cos\widehat{ux} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \quad , \quad \cos\widehat{uy} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}},$$

l' ultima relazione diventa:

$$\cos\widehat{uv} = \cos\widehat{ux}\cos\widehat{vx} + \cos\widehat{uy}\cos\widehat{vy},$$

cioè l' ordinaria espressione che da l' angolo di due rette nel piano euclideo.

Per la distanza di due punti X, Y le cose non procedono così semplicemente quando l' assoluto degenera nei punti ciclici. Infatti le due intersezioni M, N della retta XY con l' assoluto coincidono allora nell' unico punto all' infinito di questa retta e la formula (1) da costantemente:

$$D_{xy} = \frac{k}{2}\log(M_\infty N_\infty XY) = \frac{k}{2}\log.\,1 = 0.$$

Tuttavia un opportuno artifizio permette di ottenere l' ordinaria formula della distanza come caso limite della (3).

Per raggiungere più facilmente lo scopo immaginiamo le equazioni dell' assoluto [non degenere], in coordinate di punti e di rette, ridotte alla forma:

$$\begin{aligned}\Omega_{xx} &= \varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2 = o\\ \Psi_{uu} &= u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = o\end{aligned}$$

Allora, ponendo:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\varepsilon(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2}\sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + y_3^2}},$$

la (3) del precedente § da:

$$D_{xy} = ik \text{ arc. sen } \sqrt{\varepsilon}\,\Delta.$$

Sia ε infinitamente piccolo: trascurando infinitesimi di ordine superiore al 2° potremo, nella formula precedente, sostituire all' *arco* il *seno*. Se poi scegliamo k^2 infinitamente grande, in modo che il prodotto $ik\sqrt{\varepsilon}$ si mantenga finito ed uguale all' unità per ogni valore di ε, la formula in discorso diventa:

$$D_{xy} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2}}{\sqrt{\varepsilon x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + x_3^2}\,\sqrt{\varepsilon y_1^2 + \varepsilon y_2^2 + y_3^2}}.$$

Passiamo ora al limite per $\varepsilon = o$. L' equazione tangenziale dell' assoluto diventa:

$$u_1^2 + u_2^2 = o;$$

corrispondentemente la conica degenera in due punti immaginari coniugati posti sulla retta $u_3 = o$. La formula della distanza, introducendo le coordinate non omogenee:

$$X_i = \frac{x_i}{x_3}, \quad Y_i = \frac{y_i}{y_3},$$

assume la forma,

$$D_{xy} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2},$$

la quale è caratteristica per la geometria euclidea. Con ciò è raggiunto il nostro scopo.

Richiamiamo l' attenzione sul fatto che per ricavare dalla formula generale della distanza quella speciale del caso euclideo, dovemmo far tendere k^2 all' infinito. E poichè la curvatura di Riemann è data da

$$-\frac{1}{k^2},$$

si ottiene, anche per questa via, una conferma del risultato che assegna allo spazio euclideo una curvatura riemanniana nulla.

§ 83. Le proprietà delle figure piane in relazione ad una conica e quelle dello spazio in relazione ad una quadrica, costituiscono, nel loro insieme, la *metrica proiettiva*. La metrica proiettiva fu studiata da CAYLEY (¹), indipendentemente dalle relazioni ch' essa ha con le geometrie non euclidee, relazioni che furono scoperte ed illustrate qualche anno dopo da F. KLEIN (²).

A KLEIN è pure dovuta una nomenclatura molto usata per le metriche-proiettive. Egli chiama *geometria iperbolica* la geometria di CAYLEY relativa ad un assoluto reale non degenere, *geometria ellittica* quella relativa ad un assoluto immaginario non degenere, *geometria parabolica* il caso limite delle due precedenti. Sicchè, nel seguito, potremo usare questa nomenclatura per denotare i tre sistemi geometrici di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN [tipo ellittico] di EUCLIDE.

RAPPRESENTAZIONE DELLA GEOMETRIA DI LOBACEFSKI-BOLYAI SUL PIANO EUCLIDEO.

§ 84. Alla interpretazione proiettiva delle metriche non-euclidee, di cui sopra abbiamo discorso, si collega una interessante rappresentazione che può darsi della *geometria iperbolica* sul piano euclideo. Per ottenerla fissiamo sul piano una conica reale non degenere, per es. un cerchio, e relativamente a questo cerchio poniamo le seguenti definizioni:

Piano = Regione dei punti interni al cerchio.
Punto = Punto interno al cerchio.
Retta = Corda del cerchio.

(¹) Cfr.: « *Sixth Memoir upon Quantics.* »; Philosophical Transactions, t. CXLIX, p. 61-90 [1859]; ovvero: Math. Papers di CAYLEY, t. II, p. 561-92.

(²) Cfr. « *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* »; Math. Ann., t. IV, p. 573-625 [1871].

Si può allora verificare immediatamente che i postulati relativi alla determinazione della retta, alle proprietà segmentarie ed angolari si traducono in proporzioni che sono sempre valide anche quando si adottino le predette significazioni degli enti.

Ma nel successivo sviluppo della geometria ai detti postulati si aggiungono i postulati della congruenza, contenuti nel seguente *principio del movimento.*

Dati nel piano due punti A, A' e per essi rispettivamente le rette a, a', esistono quattro maniere di sovrapporre il piano a se stesso, in modo che A ed a coincidano rispettivamente con A' ed a'. Più precisamente *una* maniera di sovrapposizione resta definita se si fissano come corrispondenti un raggio di a ed un raggio di a', una banda del piano rispetto ad a ed una banda del piano rispetto ad a'. Di questi quattro movimenti due sono *congruenze dirette,* due *congruenze inverse.*

Quando si adottino le precedenti interpretazioni degli enti *punto, retta, piano,* il principio quì espresso si traduce nella seguente proposizione:

Data nel piano una conica [ad es. un cerchio] *e fissati due punti interni A, A' e per essi rispettivamente le corde a, a', esistono quattro trasformazioni proiettive del piano che mutano in se stessa la regione dei punti interni alla conica e che fanno corrispondere A ed a rispettivamente ad A' ed a'.* Per fissarne *una* basta richiedere che un dato estremo di a corrisponda ad un dato estremo di a' e che ad una determinata banda del piano rispetto ad a, una determinata banda del piano rispetto ad a'. Di queste quattro trasformazioni due subordinano sulla conica *proiettività concordi,* le altre due *proiettività discordi.*

§ 85. Dimostriamo il contenuto di questa proposizione, riferendoci per semplicità a due coniche distinte τ, τ', giacenti o no sullo stesso piano.

Siano M, N gli estremi della corda a; M′, N′ quelli della corda a' e P, P′ i *poli* di a ed a' rispetto alle relative coniche τ, τ'.

Ciò posto la retta PA interseca la conica τ in due punti

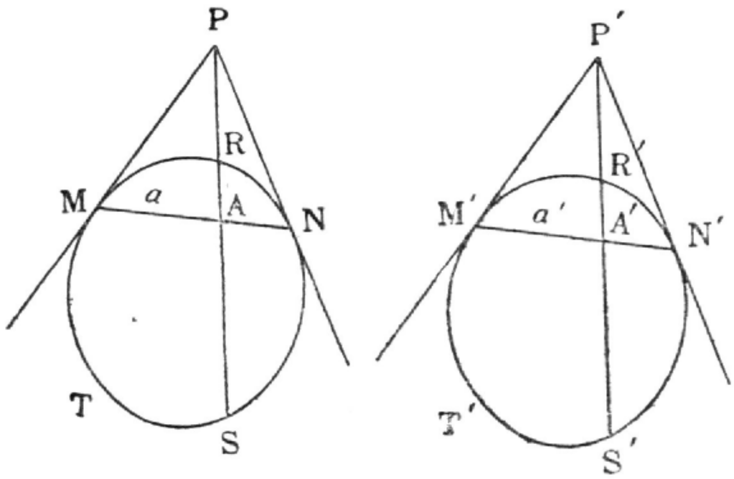


Fig. 51.

reali e distinti R, S e la retta P′A′ la conica τ' nei due punti reali e distinti R′, S′.

Una trasformazione proiettiva che muti τ in τ', la retta a nella retta a', il punto A nel punto A′, fa corrispondere al punto P punto P′, alla retta PA la retta P′A′. Questa trasformazione subordina poi fra le due coniche una corrispondenza proiettiva in cui ai punti della coppia M, N corrispondono quelli della coppia M′, N′, ed a quelli della coppia R, S quelli della coppia R′, S′.

Viceversa una trasformazione proiettiva fra le due coniche che goda di queste proprietà è subordinata da una trasformazione proiettiva fra i due piani, come quella sopra descritta [1].

Ma considerando le due coniche τ, τ' vediamo che ai

---

[1] Per questa dimostrazione ed i teoremi di geometria proiettiva su cui essa è fondata cfr., ad es., le « *Lezioni di geometria proiettiva.* » di F. Enriques, Cap. X, p. 251-3.

punti della quaterna MNRS di τ si possono ordinatamente fare corrispondere i punti di una qualunque delle seguenti quaterne di τ':

$$\begin{array}{cccc} M' & N' & R' & S' \\ N' & M' & S' & R' \\ M' & N' & S' & R' \\ N' & M' & R' & S', \end{array}$$

percui rimane provata l'esistanza delle quattro proiettità, di cui si parla nell'enunciata proposizione.

Se ora supponiamo che le due coniche coincidano nulla dobbiamo mutare nel precedente ragionamento. Aggiungeremo però che delle quattro proiettività in discorso una ed una sola fa corrispondere il segmento AM al segmento A'M',

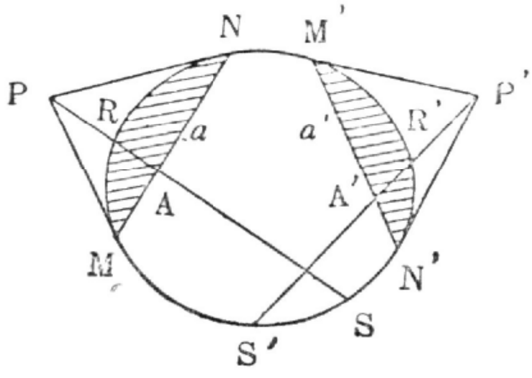


Fig. 52.

mentre si corrispondono fra loro le due regioni tratteggiate nella figura.

Inoltre le due proiettività definite dalle quaterne:

$$\begin{pmatrix} M & N & R & S \\ M' & N' & R' & S' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M & N & R & S \\ N' & M' & S' & R' \end{pmatrix}$$

subordinano sulla conica proiettività concordi, le altre due, definite dalle quaterne:

$$\begin{pmatrix} M & N & R & S \\ M' & N' & S' & R' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M & N & R & S \\ N' & M' & R' & S' \end{pmatrix},$$

subordinano proiettività discordi.

§ 86. Ciò posto, riprendiamo, completando, le definizioni del § 84, relativamente ad un cerchio dato sul piano.

Piano	= Regione dei punti interni al cerchio.
Punto	= Punto interno al cerchio.
Retta	= Corda del cerchio
Movimenti	= Trasformazioni proiettive del piano che mutano in se stessa la regione dei punti interni al cerchio.
Ribaltamenti	= Trasformazioni omologiche del cerchio.
Figure congruenti	= Figure trasformabili l' una nell' altra mediante una delle nominate proiettività.

I precedenti sviluppi permettono senz' altro di affermare che tutte le proposizioni della geometria piana elementare, legate ai concetti di retta, angolo, congruenza, possono convenientemente tradursi in proprietà relative al sistema dei punti interni al cerchio, sistema che indicheremo $\{S\}$.

In particolare vediamo che cosa corrisponda nel sistema $\{S\}$ a due rette ortogonali del piano ordinario.

Osserviamo perciò che se r ed s sono due rette ortogonali, un ribaltamento del piano intorno ad s sovrappone a se stessa la retta r, scambiando però i due raggi in cui essa è divisa da s.

Secondo le definizioni poste un *ribaltamento* in $\{S\}$ è una omologia che ha per *asse* una corda s del cerchio e per *centro* il polo della corda. Le rette unite in questa omologia sono, all' infuori di s, tutte le rette passanti per il centro di omologia; talchè *nel sistema* $\{S\}$ *dovranno chiamarsi perpendicolari due rette coniugate rispetto al cerchio fondamentale.*

Si potrebbero facilmente verificare in $\{S\}$ tutte le proposizioni relative alle rette perpendicolari; in particolare che se dal punto comune di due corde coniugate in $\{S\}$ si tracciano le tangenti [immaginarie coniugate] al cerchio fondamentale, queste tangenti sono separate armonicamente dalle due rette ortogonali [cfr. p. 146].

§ 87. Vediamo ancora come nella metrica convenzionale, stabilita nell'interno del cerchio, possa esprimersi la *distanza* di due punti.

Si introduca perciò un sistema di coordinate ortogonali (x, y) con l'origine nel centro del cerchio. La *distanza* di due punti A (x, y), B (x', y'), nel piano convenzionale, non può rappresentarsi col solito radicale:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

giacchè esso *non è invariante* per le trasformazioni proiettive sopra chiamate movimenti; la *distanza* sarà una funzione delle loro coordinate, invariantiva rispetto alle predette trasformazioni, che sulla retta gode della proprietà distributiva, espressa dalla formula:

$$\text{dist. (AB)} = \text{dist. (AC)} + \text{dist. (CB)}.$$

Ora una espressione delle coordinate (x, y), (x', y'), di A e B, che rimanga invariata per tutte le trasformazioni proiettive che lasciano fisso il cerchio limite, è il birapporto dei quattro punti A, B, M, N, dove M N sono gli estremi della corda AB: la espressione più generale che gode della richiesta proprietà invariantiva è una funzione arbitraria di tale birapporto.

Richiedendo poi che la detta funzione riesca distributiva, nel senso sopra indicato, bisogna assumerla, a meno d'un fattore di proporzionalità, uguale al logaritmo di

$$(\mathrm{ABMN}) = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} : \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{BN}}.$$

Avremo dunque:

$$\text{dist. } (\mathrm{AB}) = \frac{k}{2} \log. (\mathrm{ABMN}).$$

Analogamente si procede per valutare l'angolo di due rette. In questo caso bisogna osservare che volendo che l'angolo retto sia espresso da $\frac{\pi}{2}$, è necessario assumere per costante moltiplicatrice del logaritmo il fattore $\frac{1}{2i}$.

Avremo così:

$$\widehat{ab} = \frac{1}{2i} \log. (abmn),$$

ove con m, n s'indicano le tangenti immaginarie coniugate condotte pel vertice dell' angolo al cerchio e con $(abmn)$ il birapporto delle quattro rette, a, b, m, n, espresso analiticamente da:

$$\frac{\operatorname{sen}\,(am)}{\operatorname{sen}\,(bm)} : \frac{\operatorname{sen}\,(an)}{\operatorname{sen}\,(bn)}.$$

§ 88. Riferendoci a quanto si disse intorno alla subordinazione della geometria metrica alla proiettiva [§ 81] è chiaro che le formule precedenti, relative alla *distanza* ed all' *angolo*, coincidono con quelle che si avrebbero sul piano non euclideo, il cui assoluto fosse un cerchio. Questo basterebbe per farci concludere che la geometria del sistema $\{S\}$ fornisce una rappresentazione concreta della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI. Però, volendo renderci conto in modo più approfondito di questo fatto, cerchiamo come si traducano in $\{ S \}$ la definizione e le proprietà delle rette parallele.

Siano $r(u_1, u_2, u_3)$ e $r'(v_1, v_2, v_3)$ due corde distinte del cerchio fondamentale. Riferendo il cerchio ad un sistema cartesiano ortogonale, con l'origine nel centro, e prendendo per unità di misura il raggio avremo:

$$x^2 + y^2 - 1 = o,$$
$$u^2 + v^2 - 1 = o,$$

per equazione puntuale e tangenziale del cerchio.

Rendendo omogenee queste equazioni otteniamo:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$
$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0.$$

L'angolo $\widehat{rr'}$ delle due rette può calcolarsi per mezzo delle formule (3') del § 81, ponendo in esse:

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$$
$$\Psi_{vv} = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2$$
$$\Psi_{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3.$$

Otterremo, ad es.:

$$\operatorname{sen} \widehat{rr'} = \frac{\sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 - (u_2v_3 - u_3v_2)^2 - (u_3v_1 - u_1v_3)^2}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}$$

Se ora si osserva che le rette r e r' hanno rispettivamente per equazione:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0,$$
$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0,$$

e che queste rette concorrono nel punto di coordinate:

$$x_1 = u_2v_3 - u_3v_2,$$
$$x_2 = u_3v_1 - u_1v_3,$$
$$x_3 = u_1v_2 - u_2v_1,$$

la precedente espressione dell'angolo $\widehat{rr'}$ assume la forma:

$$(4) \qquad \operatorname{sen} \widehat{rr'} = \frac{\sqrt{(x_3^2 - x_2^2 - x_1^2)}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}.$$

Da questa si vede che la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'angolo $\widehat{rr'}$ sia nullo è data dall'annullarsi del numeratore della frazione ottenuta.

Ma perchè si annulli questo numeratore il punto (x_1, x_2, x_3), in cui s'intersecano le due corde, deve appartenere alla circonferenza del cerchio fondamentale e viceversa; percui:

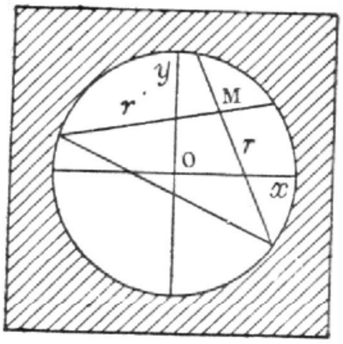


Fig. 53.

Nella interpretazione convenzionale delle proposizioni geometriche, per mezzo del sistema $\{S\}$, *dovremo chiamare parallele due corde che s'incontrano in un punto della circonferenza fondamentale, perchè l'angolo di tali corde è nullo.*

E poichè per un punto interno ad un cerchio passano due corde che congiungono quel punto con gli estremi di un'altra corda arbitraria, nel sistema $\{S\}$ sarà verificata la proposizione fondamentale della geometria iperbolica.

§ 89. Per ritrovare in $\{S\}$ la formula relativa all'angolo di parallelismo calcoliamo anzitutto l'angolo $\widehat{OMN}$, compreso fra l'asse y e la retta MN che congiunge un punto M di y con l'estremo N dell'asse x. Indicando con a la distanza ordinaria dei due punti M ed O, le coordinate omogenee della retta MN e della retta OM sono rispettivamente $(a, 1, -a)$, $(1, 0, 0)$ e le coordinate del punto d'incontro di queste rette sono $(0, a, 1)$. Allora la formula (4) del precedente § da:

$$\text{sen}\ \widehat{OMN} = \sqrt{1 - a^2}.$$

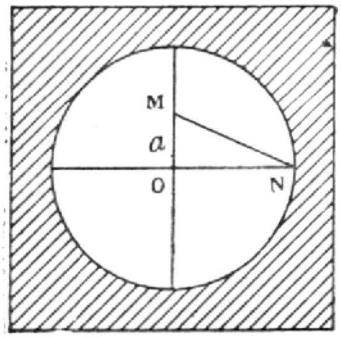


Fig. 54.

D'altra parte, la distanza convenzionale fra i due punti O ed M, per le (2) del § 81, è data da:

$$OM = k\ \textbf{Arc. Ch}\ \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

da cui:

$$\textbf{Ch}\ \frac{OM}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Confrontando questa formula con quella relativa al seno dell'angolo $\widehat{OMN}$ si deduce:

$$\textbf{Ch}\ \frac{OM}{k} = \frac{1}{\text{sen}\ \widehat{OMN}},$$

relazione che coincide con quella data da TAURINUS, LOBACEFSKI, BOLYAI per l'angolo di parallelismo [cfr. p. 80].

§ 90. Vediamo finalmente come si esprima in $\{S\}$ la distanza di due punti infinitamente vicini [*distanza elementare*], per riavvicinare l'attuale rappresentazione della geometria iperbolica con quella di BELTRAMI [cfr. § 69].

Siano (x, y), $(x + dx, y + dy)$ due punti infinitamente vicini. La loro distanza ds si calcola per mezzo della (2) del § 81, ponendo in essa:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 1,$$

$$\Omega_{yy} = (x + dx)^2 + (y + dy)^2 - 1,$$

$$\Omega_{xy} = x(x + dx) + y(y + dy) - 1.$$

Se poi si sostituisce all'*arco* il *seno* e si eleva al quadrato, dopo alcune riduzioni si ricava:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (x\,dx + y\,dy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2(1 - 2x dx - 2y dy - dx^2 - dy^2)}.$$

Trascurando finalmente gli infinitesimi di ordine superiore al secondo:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (x\,dx + y\,dy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

ovvero:

$$(5)\quad ds^2 = k^2 \frac{(1 - y^2)\,dx^2 + 2\,xy\,dx\,dy + (1 - x^2)\,dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Rammentiamo ora che BELTRAMI, nel 1868, interpretava la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI con quella delle superficie di curvatura costante negativa. Lo studio della geometria di tali superficie si effettua muovendo da un sistema (u, v) di coordinate assunto sulla superficie e dalla legge secondo cui si misurano le *distanze elementari* [ds]. La scelta di un opportuno sistema (u, v) permise a BELTRAMI

[1866] di rappresentare il quadrato del ds nella forma seguente:

$$k^2 \frac{(1-v^2)\,du^2 + 2\,uv\,du\,dv + (1-u^2)\,dv^2}{(1-u^2-v^2)^2},$$

dove la costante k^2 è l'inversa, con segno mutato, della curvatura della superficie [1].

Per studiare le proprietà delle superficie in discorso e metterle a confronto con quelle della metrica di Lobacefski-Bolyai, il Beltrami, nel suo « *Saggio* » citato a p. 129, si giovò del seguente artifizio. Su di un piano ausiliario rappresentò i punti della superficie, in modo che al punto (u, v) di questa corrispondesse su quello il punto di coordinate cartesiane

$$x = u \quad , \quad y = v.$$

I punti della superficie vennero così rappresentati sul piano in punti interni al cerchio

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

i punti all'infinito della superficie in punti della circonferenza di questo cerchio, le geodetiche in corde, le geodetiche parallele in corde incidenti in un punto della nominata circonferenza, etc. L'espressione del ds^2 si tradusse poi nell'espressione (5), secondo cui si misurano le distanze elementari nel sistema $\{S\}$. Da ciò risulta che Beltrami, con la sua rappresentazione piana delle superficie di curvatura costante, fu condotto ad una delle metriche proiettive di

---

(1) « *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.* »; Ann. di Mat., t. VII, p. 185-204 [1866]. — Opere Mat., t. I, p. 262-80 [Milano, Hoepli, 1902].

Cayley, e precisamente alla metrica relativa ad un cerchio fondamentale, da noi esposta nei §§ 80, 81.

§ 91. La rappresentazione della geometria piana iperbolica sul piano euclideo è suscettibile di essere estesa al caso dello spazio. Per rappresentare la geometria dello spazio di Lobacefski-Bolyai nello spazio ordinario basterebbe porre in quest' ultimo le definizioni seguenti:

Spazio	=	Regione dei punti interni ad una sfera.
Punto	=	Punto interno alla sfera.
Retta	=	Corda della sfera.
Piano	=	Punti di un piano secante interni alla sfera.
Movimenti	=	Trasformazioni proiettive dello spazio che mutano in se stessa la regione dei punti interni alla sfera, etc....

Con questa specie di *dizionario* si potrebbero tradurre le proposizioni della stereometria iperbolica in altrettante proprietà dello spazio euclideo relative al sistema dei punti interni alla sfera [1].

Rappresentazione della geometria ellittica di Riemann nello spazio euclideo.

§ 92. Per quanto riguarda la geometria piana già dicemmo altrove [p. 133-34] che la geometria dell' ordinaria

(1) Della interpretazione della stereometria non-euclidea ed in generale della interpretazione della geometria delle varietà di curvatura costante a più dimensioni, si occupò pure il Beltrami, nella memoria: « *Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante.* »; Annali di Matem., (2), t. II, p. 232-55 [1868]. — Opere Mat., t. I, p. 406-29 [Milano, Hoepli, 1902].

stella di rette offre una interpretazione concreta del sistema ellittico di RIEMANN. Se poi si sega la stella col piano ordinario, completato dalla retta all' infinito, si ottiene una rappresentazione sul piano euclideo del piano riemanniano in discorso.

Volendo una rappresentazione dello spazio ellittico sullo spazio euclideo basterebbe assumere in questo una polarità uniforme, *cui corrisponde una quadrica fondamentale immaginaria non degenere*, e porre, rispetto a questa quadrica, un sistema di definizioni analogo a quello precedentemente indicato nel caso iperbolico. Non insistiamo però sulla cosa, perchè non offre alcuna nuova difficoltà.

Notiamo però che in questa rappresentazione *tutti i punti dello spazio euclideo, compresi i punti del piano all' infinito, verrebbero a corrispondere biunivocamente a punti dello spazio riemanniano.*

FONDAZIONE DELLA GEOMETRIA PARTENDO DAI CONCETTI GRAFICI.

§ 93. I principi esposti nei precedenti §§ conducono ad un nuovo ordine di idee, nel quale si pongono a primo fondamento della geometria le *proprietà grafiche*, anzichè le proprietà della congruenza e del movimento, di cui si servirono RIEMANN ed HELMHOLTZ. Si noti che, non volendo sin da principio introdurre veruna ipotesi sulla intersezione di rette coplanari, conviene partire da un opportuno sistema di postulati, valido in una *regione limitata* di spazio, e completare successivamente la regione iniziale per mezzo di *punti, rette, piani impropri* [cfr. p. 148] [1].

---

[1] Per gli sviluppi relativi vedi: KLEIN, opere citate a p. 148; PASCH: « *Vorlesungen über neuere Geometrie.* » [Leipzig, Teubner, 1882]; SCHUR: « *Über die Einführung der sogenannten idealen Ele-*

Sviluppata la geometria proiettiva si possono introdurre nello spazio le proprietà metriche aggiungendo ai postulati iniziali quelli che caratterizzano i movimenti o la congruenza. Così facendo si trova che una certa polarità dello spazio, legata ai concetti metrici, viene trasformata in se stessa da tutti i movimenti. Si dimostra poi che la quadrica fondamentale di questa polarità non può essere che:

a) *una Quadrica reale non rigata*,

b) *una Quadrica immaginaria* [ad equazione reale],

c) *una Quadrica degenere come luogo.*

Si ritrovano dunque, anche per questa via, I TRE SISTEMI GEOMETRICI, cui giunsero RIEMANN ed HELMHOLTZ partendo dal concetto di distanza elementare [1].

SULLA INDIMOSTRABILITÀ DEL POSTULATO D'EUCLIDE.

§ 94. Avanti di porre fine a questa esposizione storica, ci sembra utile dire qualche parola sulla indimostrabilità del postulato d'EUCLIDE.

Il fatto stesso che gli innumerevoli tentativi fatti per la sua dimostrazione non condussero al risultato atteso, può far sorgere il dubbio *ch'esso sia indimostrabile*, giacchè l'istinto geometrico sembra attestarci che una proposizione così semplice, se è dimostrabile, debba esserlo per via di ragionamenti del pari semplici. Ma tale considerazione non può in verun modo tenersi in conto di una *prova* della indimostrabilità in questione.

---

mente in die projective Geometrie. », Math. Ann., t. XXXIX, p 113-124, [1891]; BONOLA: « *Sulla introduzione degli elementi improprii in geometria proiettiva.* », Giornale di Matem. t. XXXVIII, p. 105-116 [1900].

(1) Per la deduzione di questo risultato vedi: BONOLA; « *Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, ellittico.* »; Circolo Mat. Palermo, t. XV, p. 56-65, [1901].

Prescindendo dal postulato d'EUCLIDE, per seguire gli sviluppi di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI, si costruisce un edifizio geometrico, nel quale non s'incontrano contraddizioni logiche e che perciò appunto sembra attestare la possibilità logica dell'ipotesi non-euclidea, che è quanto dire l'*indipendenza* del postulato d'EUCLIDE dai primi principi della geometria e quindi la sua *indimostrabilità*. Tuttavia il fatto che non si siano incontrate contraddizioni non basta ad assicurarci di ciò; occorre accertarci che proseguendo negli indicati sviluppi mai tali contraddizioni potranno incontrarsi. Tale convinzione si può fare scaturire, in modo sicuro, dalla considerazione delle formule della trigonometria non-euclidea. Se infatti ci riferiamo al sistema di tutte le terne di numeri (x, y, z) e consideriamo convenzionalmente ogni terna come un *punto analitico*, possiamo definire la *distanza* di due punti analitici partendo dalle formule della suddetta trigonometria non-euclidea. Costruiamo così un sistema analitico, il quale, offrendo una convenzionale interpretazione della geometria non-euclidea, dimostra la possibilità logica di essa.

In questo senso le formule della trigonometria non-euclidea di Lobacefski-Bolyai danno la prova dell'indipendenza del postulato d'Euclide dai primi principii della geometria [relativi alla retta, al piano e alla congruenza].

Si può cercare una *prova geometrica* dell'indipendenza stessa riattaccandosi agli sviluppi ulteriori, di cui abbiamo fatto menzione. Per ciò conviene partire dal principio che i concetti costruiti dalla nostra intuizione, indipendentemente dalla rispondenza che essi trovano nel mondo esterno, sono a priori *logicamente possibili*, e così è logicamente possibile la geometria euclidea ed ogni serie di deduzioni su di essa fondata.

Ora, l'interpretazione che la geometria piana non-euclidea iperbolica riceve nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa offre, *fino ad un certo punto*, una prima prova della indimostrabilità del postulato euclideo. Precisamente resta così stabilito che *il postulato suddetto non può dimostrarsi fondandosi sui primi principi della geometria, validi in una regione limitata del piano.* Infatti, ogni contraddizione logica che scaturisse dall' ipotesi opposta si tradurrebbe in una contraddizione nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa.

Tuttavia, poichè il confronto tra il piano iperbolico e le superficie a curvatura negativa sussiste, come abbiam detto, soltanto *per regioni limitate*, non resta così escluso che il postulato euclideo possa dimostrarsi nel *piano completo*.

A togliere questo dubbio converrebbe riferirsi alla *varietà* astratta di curvatura costante, imperocchè non esiste alcuna superficie concreta dello spazio ordinario sulla quale valga la geometria iperbolica *integrale* [cfr. § 73].

Ma anche dopo di ciò l' indimostrabilità del postulato d' EUCLIDE riuscirebbe provata soltanto *nella geometria piana*. Resterebbe dunque da discutere la possibilità di dimostrare il postulato stesso con *considerazioni stereometriche*.

La fondazione della geometria, secondo le vedute di RIEMANN, estendenti ad un campo a 3 dimensioni le idee della geometria sopra le superficie, offre la prova completa dell' indimostrabilità, basata sull' esistenza d' un *sistema analitico non-euclideo*. Si tratta dunque di un' altra prova analitica. Lo stesso può dirsi per gli sviluppi di HELMHOLTZ, LIE; ma questi ultimi offrono, si può dire, anche una prova geometrica, desunta dall' esistenza di *gruppi di trasformazioni dello spazio euclideo, simili ai gruppi di movimenti della geometria non-euclidea.* Beninteso bisogna qui aver riguardo alla considerazione della geometria nella sua interezza.

Più semplice e geometricamente luminosa, è la *prova dell' indimostrabilità del postulato d' Euclide, desunta dalle metriche-proiettive di Cayley.*

Questa prova si riattacca alla rappresentazione della geometria non-euclidea con la metrica convenzionale relativa ad un cerchio o ad una sfera, interpretazione che abbiamo largamente sviluppato nel caso del piano [cfr. §§ 84-92].

Dalle anzidette metriche proiettive scaturisce pure e con altrettanta semplicità, la prova della possibilità logica dell'ipotesi ellittica di RIEMANN, per la quale, limitatamente al caso del piano, servirebbe ancora la interpretazione che ne abbiamo dato come *geometria della stella* [§ 71].

NOTA I.

I principi fondamentali della statica e il postulato d'Euclide.

SUL PRINCIPIO DELLA LEVA.

§ 1. Per dimostrare il principio della leva ARCHIMEDE [287-212] si giova di certe ipotesi, alcune enunciate, altre sottintese. Fra le ipotesi passate sotto silenzio, oltre quella che con linguaggio moderno si chiama *ipotesi del rinforzo dei vincoli* (¹), vi è uno degli stessi casi d'equilibrio della leva, che potrebbe enunciarsi così:

Una leva, sospesa per il suo punto di mezzo, è in equilibrio quando ad un estremo si applichi il peso 2P ed all'altro estremo si appenda, per il punto di mezzo, una nuova leva, portante a ciascun estremo un peso uguale a P (²).

Senza quì fare la storia delle critiche mosse ad ARCHIMEDE per l'uso di tale ipotesi, e dei vari tentativi fatti per dimostrarla (³), riporteremo in proposito le argomentazioni di LA-

---

(¹) Questa ipotesi può enunciarsi così: *Se dei corpi, soggetti a vincoli, sono in equilibrio sotto l'azione di forze date, saranno pure in equilibrio se ai vincoli già esistenti se ne aggiungono dei nuovi* ». Cfr., ad es., J. ANDRADE: « *Leçons de Mécanique Physique.* », p. 59 [Paris, 1898].

(²) Cfr.: « *Archimedis opera Omnia.* », nell'edizione critica di J. L. HEIBERG, t. II, p. 142 e successive. [Lipsia, Teubner, 1881].

(³) Cfr., ad es., E. MACH: « *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement.* », trad. par E. BERTRAND; p. 21 e succ.

GRANGE, perchè da esse può farsi scaturire in modo semplice e chiaro un importantissimo legame fra l'ipotesi in discorso ed il postulato delle paralle.

§ 2. Sia ABD un triangolo isoscele [AD = BD], i cui vertici A e B sopportino due pesi uguali a P ed il vertice D un peso uguale a 2P. Questo triangolo sarà in equilibrio intorno alla retta MN, che congiunge i punti medi dei lati uguali del triangolo, perchè ciascuno di questi lati può riguardarsi come una leva, i cui estremi sopportino pesi uguali.

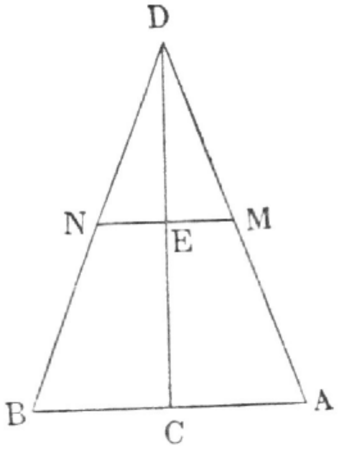


Fig. 55.

Ma l'equilibrio della figura si può ottenere anche appoggiando il triangolo su una retta che passi pel vertice D e pel punto di mezzo [C] del lato AB, per la qual cosa, denotando con E il punto d'incontro dei due assi MN, CD, il nostro triangolo sarà in equilibrio se lo si sospende per il punto E.

« Or, continua LAGRANGE, comme l'axe [MN] passe par le milieu des deux côté du triangle, il passerà aussi nécessairement par le mileu de la droite menée du sommet du triangle au milieu [C] de sa base; donc le levier transversal [CD] aura le point d'appui [E] dans le milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts [C, D]: donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double

[Paris, Hermann, 1901]. — Intorno alle varie ipotesi su cui può fondarsi la dimostrazione del principio della leva rimandiamo al recente volume di P. DUHEM: « *Les origines de la Statique.* » [Paris, Hermann, 1905], segnatamente alla nota C [p. 356-58], *Sur les divers axiomes d'où se peut déduire la théorie du levier.*

du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids. » [1].

§ 3. Il ragionamento di LAGRANGE, oltre contenere implicitamente talune *ipotesi d'indole statica*, relative alle simmetrie, al rinforzo dei vincoli, etc. [2], utilizza una proprietà geometrica del triangolo euclideo. Ma se si vuole prescindere da questa, il che, sotto un certo aspetto, appare naturale, le precedenti conclusioni vanno modificate.

Infatti, fermo restando il principio che il triangolo ABD sia in equilibrio intorno al punto [E] in cui s'incontrano i due assi MN, CD, non si può asserire che E sia punto di mezzo di CD, perchè ciò equivarrebbe ad ammettere il postulato d'EUCLIDE.

Conseguentemente *non si potrà asserire che i due pesi applicati in A e B possano sostituirsi con l'unico peso 2P, applicato in C*, poichè, se tale sostituzione potesse aver luogo, dovrebbe sussistere l'equilibrio d'una leva con pesi uguali agli estremi, intorno ad un punto che *può non essere* il suo punto di mezzo.

Viceversa, se si concede, con ARCHIMEDE, che a due pesi uguali possa sostituirsi un unico peso applicato al punto medio della leva, si deduce facilmente che E è il punto di mezzo di CD e successivamente che ABD è un triangolo euclideo.

Con ciò resta stabilita l'equivalenza fra il V postulato d'Euclide e la suddetta ipotesi d'Archimede. Una tale equivalenza, beninteso, è *relativa* al sistema di ipotesi formato dalle ipotesi statiche sopra accennate e dalle ipotesi geometriche ordinarie.

---

(1) « *Oeuvres de Lagrange.* », t. XI, p. 4-5.

(2) Per l'analisi dei *principi fisici* su cui si fonda la statica ordinaria si vegga il Cap. V dell'opera in corso di stampa di F. ENRIQUES: « *Problemi della Scienza.* » [Bologna, Zanichelli, 1906].

Adottando il linguaggio moderno potremo parlare di *forze*, di *composizione di forze*, di *risultante*, invece che di pesi, di leve, etc.

Allora l' ipotesi in discorso assume la forma seguente:

Due forze d' uguale intensità, giacenti in uno stesso piano, applicate perpendicolarmente agli estremi di un segmento e dalla stessa banda di esso, si compongono in un unica forza, d' intensità uguale alla somma delle intensità delle forze date ed applicata al punto medio del segmento.

In forza di quanto sopra si disse, l' applicabilità di questa legge di composizione richiede che nello spazio si verifichi l' ordinaria teoria delle parallele.

SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE CONCORRENTI.

§ 4. Anche l' altro principio fondamentale della statica, cioè la *legge del parallelogramma delle forze*, nell' usuale interpretazione geometrica che ad esso si accompagna, è in stretta connessione con la natura euclidea dello spazio. Tuttavia se si esamina la parte essenziale di detto principio, vale a dire l' espressione analitica della risultante [R] di due forze [P] uguali e concorrenti, è facile stabilire ch' esso sussiste *indipendentemente* da qualunque ipotesi sulle parallele. Ciò può mettersi in evidenza deducendo la formula

$$R = 2P. \cos \alpha,$$

ove 2α è l' angolo formato dalle due forze concorrenti, dai seguenti principi.

1. Due o più forze applicate ad uno stesso punto ammettono una determinata risultante.

2. La risultante di due forze uguali e contrarie è nulla.

3. La risultante di due o più forze applicate ad uno stesso punto ed aventi la stessa linea d' azione ha per inten-

sità la somma delle intensità delle forze date, ha lo stesso punto di applicazione e linea d' azione.

4. La risultante di due forze uguali applicate ad uno stesso punto è diretta secondo la bisettrice dell' angolo formato dalle due forze.

5. L' intensità della risultante è funzione continua della intensità delle componenti.

Vediamo rapidamente come possa ottenersi lo scopo. Il valore [R] della risultante di due forze d' uguale intensità [P], formanti fra loro l' angolo 2α, è funzione solo di P e di α, talchè potremo scrivere:

$$R = 2 f(P, \alpha).$$

Una prima applicazione degli enumerati principi conduce a stabilire la proporzionalità fra R e P, e ciò indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulle parallele [cfr. la nota di p. 188]: allora la precedente relazione può scriversi più semplicemente così:

$$R = 2 P . f(\alpha).$$

Si tratta di assegnare la forma di $f(\alpha)$.

§ 5. Calcoliamo $f(\alpha)$ per alcuni particolari valori dell' argomento.

1°) Sia $\alpha = 45°$.

Nel punto O, in cui concorrono le due forze P_1, P_2, d' uguale intensità P, immaginiamo applicate due forze uguali e contrarie, perpendicolari ad R e d' intensità $\frac{1}{2}$ R. Nello stesso tempo immaginiamo decomposta R in due altre, dirette secondo R e d' intensità $\frac{1}{2}$ R: potremo allora riguardare ciascuna P

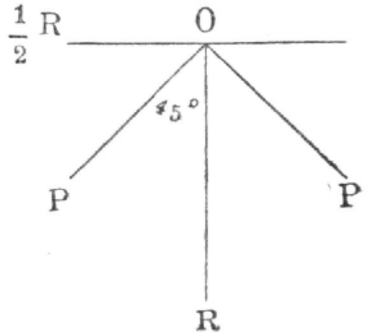


Fig. 56.

come la risultante di due forze ad angolo retto, d'intensità $\frac{1}{2}$ R. Avremo allora:

$$P = 2\, \frac{1}{2}\, R . f(45^\circ).$$

D'altra parte, essendo R la risultante di P_1 e P_2, sarà:

$$R = 2P . f(45^\circ).$$

Da queste due relazioni si ricava:

$$f(45^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

2°) Sia $\alpha = 60^\circ$.

Allora in O e in direzione opposta ad R, applichiamo una forza R', d'intensità R.

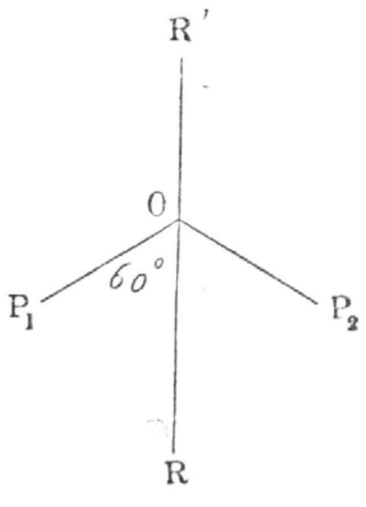


Fig. 57.

Il sistema formato dalle due forze P e dalla R' è un sistema in equilibrio. Allora, per la simmetria della figura, risulta R' = P, quindi R = P. D'altra parte, essendo:

$$R = 2\, P . f(60^\circ),$$

avremo:

$$f(60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

3°) Sia $\alpha = 36^\circ$.

Se in O si applicano 5 forze P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, d'intensità P e tali che ciascuna di esse formi con la successiva un angolo di 72°, si ottiene un sistema in equilibrio. Per la risultante R di P_2, P_3 avremo allora;

$$R = 2\, P . f(36^\circ);$$

per la risultante R′ di P_1, P_4 avremo invece:

$$R' = 2\,P \,.\, f\,(72^\circ).$$

D'altra parte R′ ha la stessa direzione di P_5, cioè direzione uguale e contraria a quella di R, per cui:

$$2\,P\,.\,f\,(36^\circ) = 2\,P\,.\,f\,(72^\circ) + P,$$

quindi:

$$(1) \qquad f\,(36^\circ) = 2\,f\,(72^\circ) + 1.$$

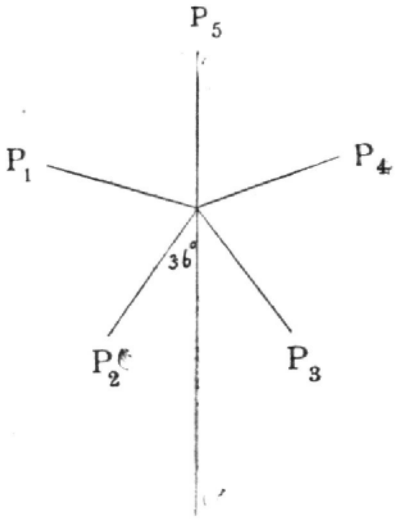


Fig. 59.

Se invece componiamo P_1 con P_2, e P_3 con P_4 otteniamo due forze d'intensità $2\,P\,.\,f\,(36^\circ)$, formanti fra loro un angolo di 144°: componendo le due forze ottenute ricaveremo una nuova forza R″, d'intensità:

$$4\,P\,.\,f\,(36^\circ)\,.\,f\,(72^\circ).$$

Ma R″, per la simmetria della figura, ha la stessa direzione di P_5 e senso contrario, perciò, dovendo sussistere l'equilibrio, potremo scrivere:

$$P = 4\,P\,.\,f\,(36^\circ)\,.\,f\,(72^\circ),$$

ovvero:

$$(2) \qquad 1 = 4\,f\,(36^\circ)\,.\,f\,(72^\circ).$$

Dalle relazioni (1) e (2), risolvendo rispetto ad $f\,(36^\circ)$ ed $f\,(72^\circ)$, si ricava:

$$f\,(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad , \quad f\,(72^\circ) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

§ 6. Con procedimenti analoghi a quelli del precedente § si potrebbero dedurre altri valori per $f\,(\alpha)$. Arrestandoci però a quelli calcolati e mettendoli a confronto coi corrispondenti valori della funzione $\cos \alpha$, otteniamo il seguente specchietto:

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad f(0^\circ) = 1$$

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \qquad f(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad f(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad f(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \qquad f(72^\circ) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 90^\circ = 0 \qquad f(90^\circ) = 0.$$

Lo specchietto ci fa prevedere l' identità delle due funzioni $f(\alpha)$ e $\cos \alpha$. Per avere un' ulteriore conferma di questo fatto determiniamo l' *equazione funzionale* a cui soddisfa $f(\alpha)$.

Perciò immaginiamo applicate in un punto 0 quattro forze P_1, P_2, P_3, P_4, d' intensità P e formanti fra loro i seguenti angoli.

$$\widehat{P_1P_2} = \widehat{P_3P_4} = 2\beta,$$

$$\widehat{P_2P_3} = 2(\alpha - \beta),$$

$$\widehat{P_1P_4} = 2(\alpha + \beta).$$

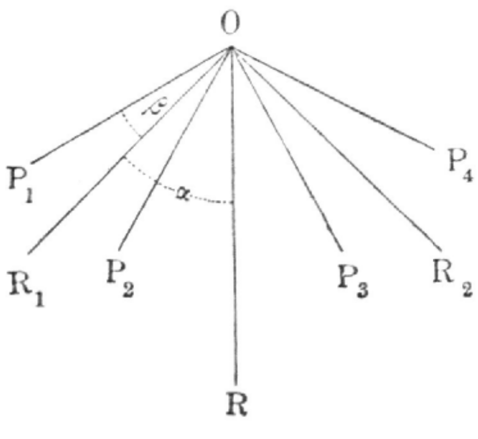


Fig. 60.

Determineremo la risultante R di queste 4 forze procedendo in due modi diversi.

Se componiamo P_1 con P_2 e P_3 con P_4, otteniamo due forze R_1, R_2, d'intensità:

$$2\,P\,.\,f(\beta),$$

formanti fra loro l'angolo 2α. Componendo R_1 ed R_2 in un'unica forza R, otterremo:

$$R = 4\,P\,.\,f(\alpha)\,.\,f(\beta),$$

D'altra parte, componendo P_1 con P_4 e P_2 con P_3 si ottengono due risultanti parziali, aventi entrambe la direzione di R e rispettivamente le intensità:

$$2\,P\,.\,f(\alpha+\beta) \quad , \quad 2\,P\,.\,f(\alpha-\beta).$$

Queste due forze si compongono per somma e danno:

$$R = 2\,P\,.\,(f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)).$$

Dal paragone dei due valori di R si deduce:

$$(1) \qquad 2\,f(\alpha)\,.\,f(\beta) = f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)$$

cioè l'equazione funzionale richiesta.

Se ora ricordiamo che:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,.\,\cos\beta,$$

e teniamo presente l'identità fra i valori di $f(\alpha)$ e $\cos\alpha$, dati dalla precedente tabella, e l'ipotesi della continuità di $f(\alpha)$, senza ulteriori sviluppi potremo scrivere:

$$f(\alpha) = \cos\alpha,$$

e conseguentemente:

$$R = 2\,P\,.\,\cos\alpha.$$

La validità di questa formula dello spazio euclideo, viene così estesa anche agli spazi non-euclidei.

§ 7. La legge di composizione di due forze uguali e concorrenti permette di risolvere il problema generale della risultante, perchè si possono assegnare, senza ulteriori ipotesi, le *componenti* d'una forza R su due assi ortogonali uscenti dal suo punto di applicazione O.

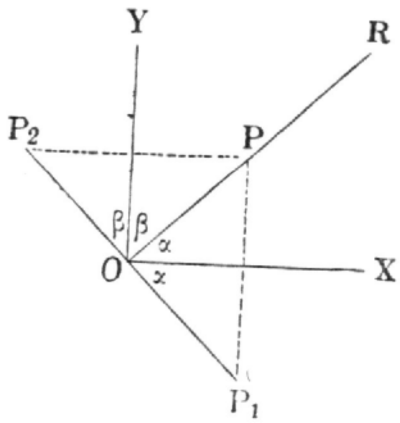


Fig. 61.

Infatti siano x, y questi assi ed α, β gli angoli che formano con R. Se per O si traccia la perpendicolare ad OR, essa forma con x l'angolo α, e con y l'angolo β. Su questa retta ed uscenti da O, si immaginino due forze P_1, P_2 uguali e contrarie, d'intensità $\frac{1}{2}$ R e si decomponga R in due forze $P = \frac{1}{2}$ R, dirette entrambe secondo R. Il sistema P_1, P_2, P, P ha per risultante R.

Ora, componiamo P_1 e P, poi P_2 e P: otteniamo due forze X, Y, l'una diretta secondo x, l'altra secondo y, d'intensità:

$$X = R \, . \cos \alpha,$$
$$Y = R \, . \cos \beta.$$

Queste due forze sono le componenti di R nei due assi assegnati. Per quanto si riferisce alla loro intensità esse coincidono con quelle che si incontrano nell'ordinaria teoria fondata sul principio del parallelogramma delle forze: ma i segmenti OX ed OY che le rappresentano su gli assi *non sono necessariamente*, come nel caso euclideo, le *proiezioni* di R. Infatti, è facile vedere che ove i detti segmenti fossero le proiezioni ortogonali di R su x ed y, varrebbe nel piano l'ipotesi euclidea.

§ 8. Il metodo funzionale usato al § 6, nella composizione delle forze concorrenti, risale in sostanza a D. DE FONCENEX [1734-1799]. Con un procedimento analogo a quello che ci condusse all'equazione cui soddisfa la $f(\alpha)$ [$= y$], FONCENEX pervenne all'equazione differenziale [1]:

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + k^2 y = o,$$

dalla quale, integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali del problema, ricavò la nota espressione di $f(\alpha)$.

L'applicazione dei principi del calcolo infinitesimale richiede però la continuità e derivabilità di $f(\alpha)$, condizioni, osserva FONCENEX, insiste nella stessa natura [fisica] del problema: ma volendo prevenire « jusqu'aux difficultés les moins fondées » egli ricorre al calcolo delle *differenze finite* e ad un *equazioni alle differenze*, che gli permette di ottenere $f(\alpha)$ per tutti i valori di α commensurabili con π. Il caso degli α incommensurabili con π si tratta « par une méthode familière au Géomètres et frequent surtont dans

---

[1] L'equazione potrebbe ottenersi dalla (1) di p. 181, nel modo seguente. Posto $\beta = d\alpha$ e supponendo $f(\alpha)$ sviluppabile in serie di TAYLOR per ogni valore di α, si ricava:

$$2 f(\alpha) \cdot \left(f(o) + d\alpha \,.\, f'(o) + \frac{d\alpha^2}{2} f''(o) + \ldots\right) =$$
$$= 2 f(\alpha) + 2 \frac{d\alpha^2}{2} f''(\alpha) + \ldots$$

Uguagliando i coefficienti di $d\alpha^2$ e ponendo $y = f(\alpha)$ e $k^2 = -f''(o)$, si ottiene:

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} + k^2 y = o, \qquad \text{c. d. d.}$$

les ecrits des Anciens », vale a dire col metodo d'esaustione [1].

Tutto il procedimento di FONCENEX, e così quello svolto al § 6, è indipendente dal postulato d'EUCLIDE: tuttavia va notato che FONCENEX non aveva lo scopo di liberare la legge di composizione delle forze concorrenti dalla teoria delle parallele, ma piuttosto quello di *dimostrare* la legge in discorso, ritenendo forse, come altri geometri [D. BERNOULLI, D'ALEMBERT], ch'essa fosse una verità indipendente da qualsiasi esperienza.

LA STATICA NON EUCLIDEA.

§ 9. Dimostrato così che la legge analitica per la composizione delle forze concorrenti non dipende dal V postu-

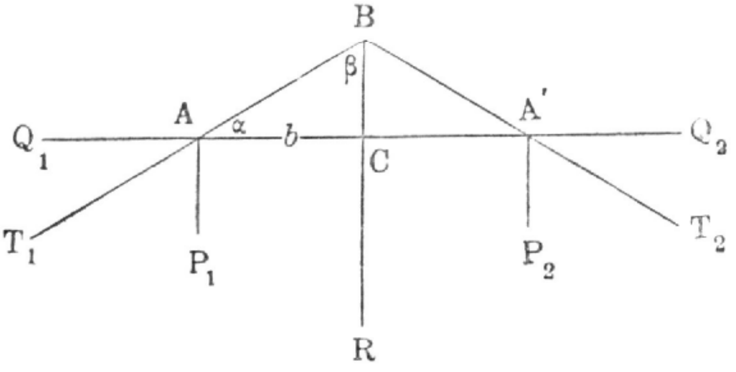


Fig. 62.

lato di EUCLIDE, passiamo a dedurre la legge secondo cui si compongono le forze perpendicolari ad una retta.

Siano A ed A' i punti di applicazione delle due forze P_1, P_2, d'intensità P; sia C il punto di mezzo del segmento

---

[1] Cfr. FONCENEX: « *Sur les principes fondamentaux de la Mechanique.* »; Miscellanea Taurinensia, t. II, p. 305-315, [1760-61]. I ragionamenti di FONCENEX sono riprodotti e illustrati da A. GENOCCHI, nello scritto: « *Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes.* »; Torino, Memorie, (2), t. XXIX, p. 366-71, [1877].

AA' e B un punto della perpendicolare CB ad AA'. Congiunto A con B e posto:

$$\beta = \widehat{ABC}, \qquad \alpha = \widehat{BAC},$$

è chiaro che la forza P_1 potrà riguardarsi come la componente d'una forza T_1, applicata in A e diretta secondo BA. L'intensità T di questa forza è data da:

$$T = \frac{P}{\text{sen } \alpha}.$$

L'altra componente Q_1 di T_1, diretta normalmente a P_1, ha per intensità:

$$Q = T \,.\, \cos \alpha = P \,.\, \text{ctg } \alpha.$$

Ripetendo le stesse considerazioni sulla forza P_2 otterremo sul piano i seguenti sistemi di forze:

1°) sistema P_1, P_2;
2°) sistema P_1, P_2, Q_1, Q_2;
3°) sistema T_1, T_2.

Ammettendo di potere trasportare il punto di applicazione di una forza lungo la sua linea di azione è chiaro che i due primi sistemi risultano equivalenti, e poichè il 2° è equivalente al 3° potremo sostituire le due forze P_1, P_2 con le due altre T_1, T_2. Le quali ultime, potendo trasportarsi, lungo la loro linea d'azione, in B, si comporranno nel l'unica forza

$$R = 2\,T \,.\, \cos \beta = 2\,P \,.\, \frac{\cos \beta}{\text{sen } \alpha},$$

trasportabile alla sua volta in C, mantenendone fissa la direzione perpendicolare ad AA'.

Il risultato sopra ottenuto, la cui *indipendenza* dal postulato di EUCLIDE è manifesta, può applicarsi ai tre tipi di geometria.

GEOMETRIA DI EUCLIDE. Nel triangolo ABC, si ha:

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha.$$

Segue:

$$R = 2 P.$$

GEOMETRIA DI LOBACEFSKI-BOLYAI. Nel triangolo ABC, denotando con $2b$ il segmento AA′, si ha [p. 108]:

$$\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

Segue:

$$R = 2 P . \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

GEOMETRIA DI RIEMANN. Sempre nello stesso triangolo si ha:

$$\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \cos \frac{b}{k},$$

per cui:

$$R = 2 P . \cos \frac{b}{k}.$$

CONCLUSIONE. Nel solo spazio euclideo l'intensità della risultante di due forze uguali e perpendicolari ad una retta è uguale alla somma delle intensità delle due forze date. Negli spazi non-euclidei la risultante dipende, nel modo sopra indicato, dalla distanza dei punti d'applicazione delle due componenti (1).

(1) Per ulteriori sviluppi di statica non euclidea rimandiamo il lettore agli autori seguenti. J. M. DE TILLY: « *Études de Mécanique abstraite* », Mém. Couronnés et autres mém., t. XXI [1870]. — J. ANDRADE: « « *La Statique et les Géométries de Lobatchewsky, d' Euclide et de Riemann.* », Nota II dell' Op. citata a p 173.

§ 10. Il caso di due forze disuguali P, Q, perpendicolari ad una stessa retta, si tratta in modo analogo al precedente. Nella geometria euclidea si perverrebbe alle note relazioni:

$$R = P + Q,$$
$$\frac{R}{p+q} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p};$$

nella geometria di Lobacefski-Bolyai, il problema della risultante condurrebbe alle formule seguenti:

$$R = P \,.\, \mathbf{Ch}\,\frac{p}{k} + Q \,.\, \mathbf{Ch}\,\frac{q}{k},$$
$$\frac{R}{\mathbf{Sh}\,\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\mathbf{Sh}\,\frac{q}{k}} = \frac{Q}{\mathbf{Sh}\,\frac{q}{k}};$$

dalle quali, con la solita sostituzione delle funzioni circolari alle iperboliche, si passa immediatamente alle corrispondenti della geometria riemanniana:

$$R = P \,.\, \cos\frac{p}{k} + Q \,.\, \cos\frac{q}{k},$$
$$\frac{R}{\operatorname{sen}\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\operatorname{sen}\frac{q}{k}} = \frac{Q}{\operatorname{sen}\frac{p}{k}}.$$

In queste formule p, q indicano le distanze dei punti di applicazione di P e Q da quello di R.

Questi risultati possono raccogliersi sotto un unica forma, valida per la geometria assoluta.

$$R = P \,.\, E_p + Q \,.\, E_q,$$
$$\frac{R}{\bigcirc_{(p+q)}} = \frac{P}{\bigcirc_q} = \frac{Q}{\bigcirc_p}.$$

Per dedurli direttamente bastava far uso, nei ragionamenti sopra accennati, della trigonometria assoluta, in luogo di quella euclidea e non-euclidea.

Deduzione statica della trigonometria piana.

§ 11. Vediamo finalmente come sia possibile invertire la questione: *data cioè la legge di composizione delle forze dedurre le relazioni fondamentali della trigonometria.*

Perciò osserviamo che la intensità R della risultante di due forze [P] uguali e perpendicolari ad un asse $AA' = 2b$, sarà in generale funzione di P e b: denotando con $\varphi(P, b)$ questa funzione, avremo:

$$R = \varphi(P, b),$$

o, più semplicemente [1]:

$$R = P \, . \, \varphi(b).$$

D' altra parte nel § 9 [p. 185] fummo condotti alla seguente espressione di R:

$$R = 2P \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

---

[1] La proporzionalità fra R e P discende dalla *legge associativa*, che sta a fondamento della composizione dolle forze. Infatti, immaginiamo di decomporre ciascuna forza P, applicata in A ed A', nella somma di n forze, d' intensità $\frac{P}{n}$: componendo, otterremo per R la seguente espressione:

$$R = n \, . \, \varphi\left(\frac{P}{n}, b\right)$$

Paragonando questa con l' altra data nel testo, si ricava:

$$\varphi\left(\frac{P}{n}, b\right) = \frac{1}{n} \varphi(P, b).$$

In modo analogo si dimostra la formula:

$$\varphi(k P, b) = k \varphi(P, b)$$

per ogni k razionale, e la si estende poi ai k irrazionali. Sicchè, se poniamo $P = 1$, $k = P$, avremo:

$$\varphi(P, b) = P \, . \, \varphi(b), \qquad \text{c. d. d.}$$

Eliminando fra questa e la precedente R e P, si ricava:

$$\varphi(b) = 2\,\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Nota dunque l' espressione analitica di $\varphi(b)$, la formula ottenuta porgerà una relazione fra lati ed angoli di un triangolo rettangolo.

Per determinare $\varphi(b)$ è necessario stabilire la relativa equazione funzionale. Perciò si applichino perpendicolarmente alla retta AA′ quattro forze uguali P_1, P_2, P_3, P_4, in modo che i punti di applicazione di P_1, P_4 distino fra loro di $2(a+b)$ e quelli di P_2 e P_3 di $2(b-a)$.

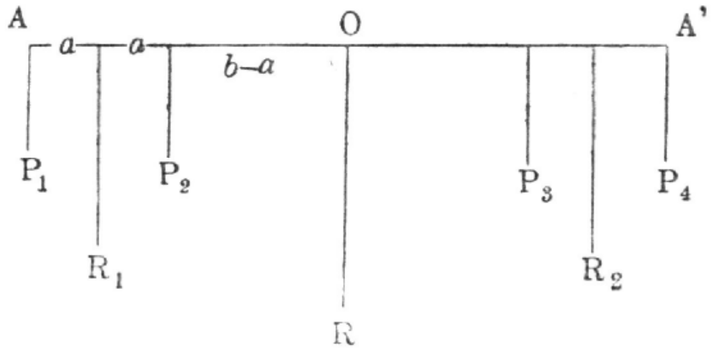


Fig. 63.

Potremo determinare la risultante R di queste quattro forze in due modi diversi.

1°) Componendo P_1 con P_2 e P_3 con P_4 si ottengono due forze R_1, R_2, d' intensità:

$$P \,.\, \varphi(a);$$

componendo R_1 con R_2 otterremo:

$$R = P \,.\, \varphi(a) \,.\, \varphi(b).$$

2°) Componendo P_1 con P_4 si ottiene una forza d' intensità:

$$P \,.\, \varphi(b+a);$$

componendo P_2 con P_3 si ottiene un'altra forza d'intensità:

$$P \, . \, \varphi(b-a).$$

Componendo finalmente queste due risultanti parziali si ottiene:

$$R = P \, . \, \varphi(b+a) + P \, . \, \varphi(b-a).$$

Dalle due espressioni di R si ricava l'equazione funzionale a cui soddisfa $\varphi(b)$:

$$(2) \qquad \varphi(b) \, . \, \varphi(a) = \varphi(b+a) + \varphi(b-a).$$

Questa equazione, ponendo $\varphi(b) = 2f(b)$, s'idenfica con quella incontrata al § 6 [p. 181] trattando la composizione delle forze concorrenti.

Il metodo seguito per ottenere la (2) è dovuto a D'ALEMBERT (¹): se però si suppongono a e b uguali fra loro e si osserva che $\varphi(o) = 2$, si ricade in un'altra equazione:

$$(3) \qquad [\varphi(x)]^2 = \varphi(2x) + 2,$$

incontrata anteriormente da FONCENEX, trattando il problema dell'equilibrio della leva (²).

§ 12. Il problema statico della composizione delle forze è ridotto all'*integrazione* di un'equazione funzionale.

FONCENEX, che fu il primo a trattarlo così (³), ritenne es-

(¹) « *Opuscules mathématiques.* », t. VI, p. 371 [1779].

(²) Cfr. la citata memoria di FONCENEX, p 319-22.

(³) Altrove [p. 47], parlando dello scritto sulla meccanica di FONCENEX, si disse che LAGRANGE ne fu l'ispiratore, se non l'autore. Questa opinione, accolta da GENOCCHI e da altri geometri, risale a DELAMBRE. Ecco come si espresse l'illustre biografo di LAGRANGE. « Il [LAGRANGE] fournissait à FONCENEX la partie analytique des ses mémoires en lui laissant le soin de développer les raisonsere $\varphi(x) = costante$ l'unica soluzione della (3), avendo la *costante*, come facilmente si verifica, il valore numerico 2. Successivamente LAPLACE e D'ALEMBERT integrarono la (3), ottenendo:

$$\varphi(x) = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

dove c è una costante oppure una funzione qualsiasi, che assume lo stesso valore mutando x in $2x$ [1].

La soluzione di LAPLACE e D'ALEMBERT, applicata al problema statico del precedente §, conduce poi ad escludere il caso in cui c sia funzione di x; inoltre, essendo inamissibili per c i valori del tipo $a + ib$, con a e b diversi da zero, avremo tre casi possibili, a seconda che c è reale, immaginario puro, infinito [2]. Corrispondentemente a questi tre casi abbiamo tre leggi possibili per la composizione delle forze e conseguentemente tre tipi distinti di relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo. Questi risultati possono raccogliersi nella seguente tabella, ove

---

nemens sur lesquels portaient ses formules. En effet, on remarque déja dan ces mémoires [di FONCENEX] cette marche purement analytique, qui depuis a fait le caractère des grandes productions de LAGRANGE. Il avait trouvé une nouvelle théorie du levier. » — *Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte Lagrange;* Mém. Inst. de France, classe Math. et Phy., t. XIII, p. XXXVj [1812].

(1) Cfr. D'ALEMBERT: « *Sur les principes de la Mécanique* »; Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris [1769]. — LAPLACE: « *Recherches sur l'intégration des équations differentielles, etc.* »; Mém. Ac. Sciences de Paris (Savants étrangers), t. VII [1773]. — Oeuvres de Laplace, t. VIII, p. 106-107.

(2) A questo risultato si può giungere direttamente integrando la (2), o, ciò che fa lo stesso, la (1) del § 6. Si vegga, in proposito, il metodo elementare usato da CAUCHY per determinare la $f(a)$ soddisfacente alla (1): *Oeuvres de Cauchy*, II^e serie, t. III, p. 106-113.

con k s' indica un numero essenzialmente reale e positivo.

valore di c	forma di $\varphi(x)$	Relazioni trigonometriche	tipo di piano
$c = k$	$e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} = 2\,\mathbf{Ch}\,\frac{x}{k}$	$\mathbf{Ch}\,\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$	iperbolico
$c = ik$	$e^{\frac{ix}{k}} + e^{-\frac{ix}{k}} = 2\cos\frac{x}{k}$	$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$	ellittico
$c = \infty$	$e^{\frac{x}{\infty}} + e^{-\frac{x}{\infty}} = 2$	$1 = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$	parabolico

Conclusione. La legge di composizione delle forze perpendicolari ad una retta caratterizza dunque, in un certo senso, le relazioni che intercedono fra i lati e gli angoli d'un triangolo e perciò le proprietà geometriche del piano e dello spazio.

Questo fatto fu segnalato e messo in evidenza da A. Genocchi [1817-1889] in alcuni scritti importantissimi [1], ai quali rimandiamo il lettore per tutte le notizie storiche e bibliografiche che interessano l' argomento.

---

[1] Uno di essi è la memoria citata a p. 184, l' altro, che risale al 1869, ha per titolo: « *Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d' Euclide.* »; Annali della Società italiana delle Scienze, (3), t. II, p. 153-89.

NOTA II.

Le parallele e la superficie di Clifford. Cenni sul problema di Clifford-Klein.

LE PARALLELE DI CLIFFORD.

§ 1. Le parallele d' EUCLIDE sono rette che posseggono i seguenti requisiti:

a) *appartenere ad un piano,*

b) *non avere punti in comune,*

c) *essere equidistanti.*

Lasciando cadere il requisito *c*) e seguendo le vedute di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI si ottiene una prima estensione del concetto di parallelismo, ma le parallele che ad essa rispondono hanno pochissime proprietà in comune con le parallele ordinarie. Ciò si deve al fatto che le più eleganti proprietà che s'incontrano studiando queste ultime dipendono sostanzialmente dal requisito *c*). Si può quindi cercare di estendere il concetto di parallelismo, in modo da conservare, ove sia possibile, alle *nuove parallele* i caratteri che dipendono dalla equidistanza euclidea. Perciò, seguendo W. K. CLIFFORD [1845-1879], lasciamo cadere, nella definizione di parallele, *il requisito della coplanarità*, fermi restando gli altri due. La nuova definizione di parallele sarà dunque la seguente: *due rette, coplanari o sghembe, si dicono parallele quando i punti dell' una sono equidistanti dall' altra.*

§ 2. Si presentano allora due casi, a seconda che sifatte parallele appartengano o no allo stesso piano.

Il caso in cui le rette equidistanti siano coplanari è senz'altro esaurito, inquantochè i precedenti sviluppi [§ 8] ci permettono di asserire che lo spazio corrispondente è l'ordinario euclideo. Supporremo perciò che le due rette equidistanti r, s siano sghembe e che i segmenti di perpendicolare calati dai punti di r su s siano uguali: questi segmenti saranno evidentemente perpendicolari anche ad r. Siano AA', BB' due sifatti segmenti. Il quadrilatero sghembo ABB'A', che così ne risulta, ha i quattro angoli retti e due lati opposti uguali. È facile vedere che anche gli altri due lati opposti AB, A'B' sono uguali e che ciascuna diagonale, ad es AB', forma con le due parallele angoli alterni interni uguali. Ciò risulta dalla congruenza dei due triangoli rettangoli AA'B', AB'B.

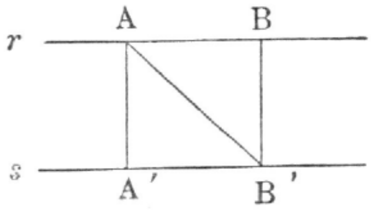


Fig. 64.

Se ora si esamina il triedro A (A'B'B), in forza d'un teorema sulle faccie, valido ad un tempo nei tre sistemi geometrici, potremo scrivere:

$$\widehat{A'AB'} + \widehat{B'AB} > \widehat{A'AB} = 1 \text{ retto}.$$

Questa relazione, stante l'uguaglianza dei due angoli $\widehat{AB'A'}$, $\widehat{B'AB}$, può scriversi così:

$$\widehat{A'AB'} + \widehat{AB'A'} > 1 \text{ retto}.$$

Sotto la nuova forma essa ci dice che nel triangolo rettangolo AA'B' la somma degli angoli acuti è maggiore di un angolo retto. Ciò significa che nel triangolo in discorso è verificata l'*ip. ang. ottuso* e conseguentemente che le *parallele sghembe possono sussistere solo nello spazio di* RIEMANN.

§ 3. Per dimostrare poi che nello spazio *ellittico* di RIEMANN esistono effettivamente delle coppie di rette sghembe equidistanti, consideriamo una retta arbitraria r e gli infiniti piani ad essa perpendicolari: questi piani passano tutti per un'altra retta r', la polare di r nella polarità assoluta dello spazio ellittico. Un qualsiasi segmento che congiunga un punto di r con un punto di r' è perpendicolare tanto ad r quanto ad r' ed ha una lunghezza costantemente uguale alla semiretta. Da ciò risulta che r ed r' sono rette sghembe equidistanti.

Ma due sifatte equidistanti offrono un caso particolarissimo, inquantochè tutti i punti di r hanno la stessa distanza non solo da r, ma *da tutti i punti* di r'.

Per mettere in luce l'esistenza di rette equidistanti, in cui l'ultima particolarità non abbia luogo, consideriamo ancora

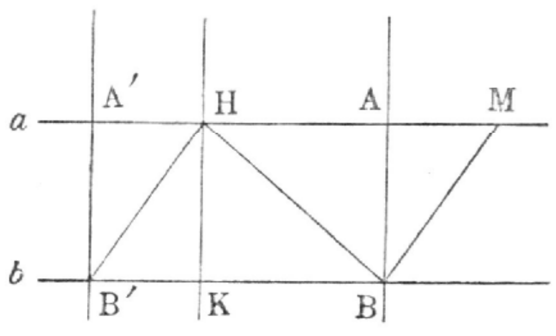


Fig. 65.

due rette r ed r', l'una polare dell'altra e su di esse i rispettivi segmenti AB, A'B' uguali ad un segmento dato, minore della semiretta (1). Congiungendo A con A' e B con B' si ottengono due rette a, b, non polari l'una dell'altra e perpendicolari entrambe alle due rette r, r'. Si può facilmente dimostrare che a e b sono equidistanti. Perciò si fissi su AA' un segmento A'H, poi sul segmento supplementare (2) di A'HA si fissi il segmento AM uguale ad A'H.

(1) Nella fig. 65, mancano le due lettere r, r', corrispondenti alle due rette AB, A'B'.

(2) I due segmenti che due punti determinano sopra una retta si dicono supplementari.

Congiunti i punti H ed M rispettivamente con B′ e B si ottengono due triangoli rettangoli A′B′H, ABM, che, in forza delle costruzioni fatte, risultano congruenti. Si avrà perciò la seguente uguaglianza:

$$HB' = BM$$

Se ora si congiunge H con B e si paragonano i due triangoli HB′B, HBM, si vede immediatamente ch' essi sono uguali, avendo il lato HB in comune, i lati HB′, MB uguali in forza della precedente relazione, i lati B′B e HM pure uguali perchè ciascuno di essi è una semiretta. I due triangoli in discorso avranno perciò uguali anche le altezze HK, BA corrispondenti ai lati uguali BB′ e HM′. Ciò esprime, in altre parole, che i vari punti della retta a sono equidistanti dalla retta b. E poichè il ragionamento può ripetersi partendo dalla retta b, calando le perpendicolari sulla a, si conclude che il segmento HK, oltre essere perpendicolare a b è anche perpendicolare ad a.

Si osservi poi che dall' uguaglianza dei vari segmenti AB, HK, A′B′... si deduce l' uguaglianza dei rispettivi segmenti supplementari, per cui le due rette a, b possono riguardarsi equidistanti l' una dall' altra in due modi diversi. Quando poi avvenisse che il segmento AB fosse uguale al suo supplementare, allora si presenterebbe il caso eccezionale precedente notato, in cui a e b sono polari l' una dell' altra e conseguentemente tutti i punti di a avrebbero uguale distanza dai vari punti di b.

§ 4. Le parallele sghembe dello spazio ellittico furono scoperte da Clifford nel 1873 (1). Ecco le loro proprietà più notevoli.

---

(1) « *Preliminary Sketch on Biquaternions.* »; Proceedings of the London Math. Society, t. IV p. 381-95 [1873] — Math. Papers di Clifford; p. 181-200.

1). *Due parallele formano con ogni loro trasversale angoli corrispondenti uguali, angoli alterni interni uguali, etc.*

2). *Se in un quadrilatero sghembo i lati opposti sono uguali e gli angoli adiacenti supplementari, i lati opposti sono paralleli.*

Un sifatto quadrilatero potrà quindi chiamarsi *parallelogramma sgembo.*

Delle due enunciate proprietà la prima si verifica immediatamente, la 2) potrebbe dimostrasi con un ragionamento dello stesso tipo di quello del § 3.

3). *Se due segmenti sono uguali e paralleli, congiungendo opportunamente i loro estremi si ottiene un parallelogramma sghembo.*

Questa proprietà, che può considerarsi, in un certo senso, come inversa della 2), è pure essa di immediata verificazione.

4). *Per un punto qualunque* [M] *dello spazio, che non appartenga alla polare di una retta* [r], *passano due parallele a quella retta.*

Infatti, dal punto M si cali la perpendicolare MN su r e sia N' il punto in cui la polare di MN interseca la r. Su

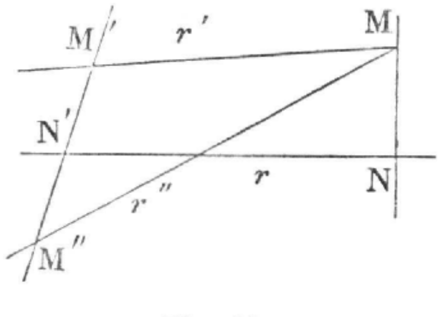


Fig. 66.

questa polare si fissino poi i due segmenti N'M', N'M'' uguali ad NM e si congiungano i punti M', M'' con M. Le due rette r', r'', così ottenute, sono le parallele richieste.

Se poi M appartenesse alla polare di r, sarebbe MN uguale alla semiretta ed i due punti M'', M' coinciderebbero.

Conseguentemente verrebbero a coincidere anche le due parallele r', r''.

L'angolo compreso fra le due parallele r' r'' può misurarsi col segmento M'M'' che i suoi lati intercettano sulla polare del vertice: allora potremo dire che la metà dell'angolo $r'r''$, cioè *l'angolo di parallelismo*, è uguale alla *distanza di parallelismo*.

Per distinguere le due parallele r', r'' consideriamo un movimento *elicoidale* dello spazio, di asse MN, nel quale evidentemente resta fisso il fascio dei piani perpendicolari ad MN e l'asse M'M'' di questo fascio. Un tale movimento si può considerare come risultante da una traslazione lungo MN, accompagnata da una rotazione intorno alla stessa retta; oppure da due traslazioni, l'una lungo MN, l'altra lungo M'M''. Se le due traslazioni hanno uguale *ampiezza* si ottiene uno *scorrimento* dello spazio.

Gli scorrimenti possono essere *destrorsi* o *sinistrorsi*. Allora, riferendoci alle due parallele r', r'', è chiaro che una di esse potrà sovrapporsi ad r con uno scorrimento destorso di ampiezza MN, mentre l'altra si sovrapporrebbe ad r con uno scorrimento sinistrorso della stessa ampiezza. Perciò le due rette r', r'' si dovranno dire l'una *parallela destrorsa*, l'altra *parallela sinistrorsa* ad r.

5) *Due parallele destrorse* [*sinistrorse*] *ad una stessa retta sono parallele destrorse* [*sinistrorse*] *fra loro.*

Siano b, c parallele destrorse ad a. Dai due punti A, A'

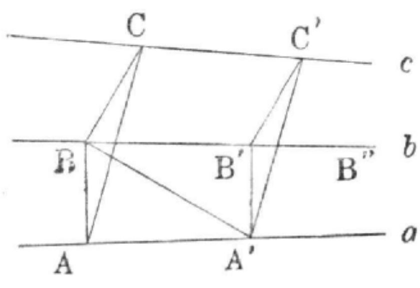


Fig. 67.

di a, distanti fra loro della semiretta, caliamo le perpendicolari AB, A'B' su b e le perpendicolari AC, A'C' su c. Le rette A'B', A'C' sono le polari di AB ed AC, perciò l'angolo $\widehat{BAC}$ è uguale all'angolo $\widehat{B'A'C'}$. Inoltre, per le proprietà delle parallele, sussistono le seguenti uguaglianze segmentarie:

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C',$$

per cui i due triangoli ABC, A'B'C' sono uguali. Segue l'uguaglianza dei due segmenti BC, B'C'. Inoltre essendo:

$$BB' = AA' = CC',$$

il quadrilatero sghembo BB'C'C ha i lati opposti uguali.

Ma per stabilire che b, c sono parallele occorre anche dimostrare che gli angoli adiacenti del quadrilatero in discorso sono supplementari [cfr. 2)]. Per ciò paragoniamo i due triedri B (AB'C), B' (A'B''C'). In essi sussistono intanto le seguenti uguaglianze tra faccie:

$$\widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B''} = 1 \text{ retto}.$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Inoltre i due diedri di spigolo BA e B'A' sono entrambi uguali ad un diedro retto, diminuito [od aumentato] del diedro che ha per sezione normale l'angolo $\widehat{A'BB'}$: segue l'uguaglianza dei due triedri in discorso, quindi l'uguaglianza delle due faccie $\widehat{B'BC}$, $\widehat{B''B'C'}$. Da ciò si deduce che gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$ del quadrilatero BB'C'C sono supplementari e successivamente [tracciando le diagonali del quadrilatero, etc.] che $\widehat{B}$ è supplementare di $\widehat{C}$, che $\widehat{C}$ è supplementare di $\widehat{C'}$, etc.

Potremo dunque asserire che b e c sono parallele. Che il parallelismo fra b e c sia destrorso, se tale è il parallelismo fra le due rette in discorso e la retta a, si verifica intuitivamente esaminando la figura.

La quadrica di Clifford.

§ 5. Dalle precedenti considerazioni risulta che *tutte le rette che si appoggiano a tre parallele destrorse sono fra loro parallele sinistrorse*. Infatti, se ABC è una secante comune alle tre rette a, b, c e se si prendono su queste rette, in uno stesso verso [1], tre segmenti uguali AA′, BB′, CC′, i punti A′, B′, C′ appartengono ad una retta parallela ad ABC. Il parallelismo fra ABC ed A′B′C′ è poi sinistrorso.

Da ciò si deduce che tre parallele a, b, c definiscono una superficie rigata del 2° ordine [*quadrica di Clifford*], di cui le rette incidenti ad a, b, c costituiscono un primo sistema di generatrici [g_s]: il 2° sistema di generatrici [g_d] è costituito dalle infinite rette che, come a, b, c, si appoggiano alle g_s.

Alla quadrica di Clifford competono le seguenti proprietà caratteristiche:

a) *due generatrici d'uno stesso sistema sono fra loro parallele;*

b) *due generatrici di sistema diverso s'incontrano sotto un angolo costante.*

§ 6. Passiamo a dimostrare che *la superficie di* Clifford *ammette due assi distinti di rotazione*. Perciò da un punto qualunque M tracciamo le parallele d [destrorsa], s [sinistrorsa] ad una retta r, e indichiamo con δ la distanza MN di ciascuna parallela da r. Tenuta fissa la d facciamo ruotare s intorno ad r e siano s', s'', s''',... le successive posizioni che acquista s in questa rotazione. È chiaro che s, s', s'',... sono tutte parallele sinistrorse ad r e che si appog-

---

(1) È chiaro che fissato *un verso* sopra una retta, resta pure fissato un verso sopra ogni altra retta ad essa parallela.

giano tutte alla retta d: sicchè s, nella sua rotazione intorno ad r, genera una superficie di Clifford.

Viceversa se d ed s sono due generatrici d'una superficie di Clifford, passanti per un punto M della superficie, e 2δ l'angolo fra esse compreso, possiamo elevare in

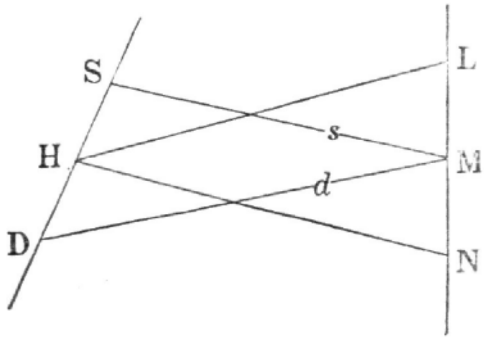


Fig. 63,

M la perpendicolare al piano sd e su essa fissare i due segmenti $MN = ML = \delta$. Denotando poi con D ed S i punti in cui la polare di LN incontra rispettivamente le rette d, s e con H il punto di mezzo di $DS = 2\delta$, le rette HL, HN sono parallele tanto ad s quanto a d. Delle due rette HL, HN scegliamo quella che risulta parallela destrorsa a d e sinistrorsa ad s: sia, ad es., HN. Allora la data superficie di Clifford si può generare con la rotazione di s o d intorno ad HN. Con ciò è provato che ogni superficie di Clifford ammette *un asse di rotazione* e che tutti i punti della superficie sono equidistanti da esso.

L'esistenza di un altro asse di rotazione risulta immediatamente dall'osservare che tutti i punti dello spazio equidistanti da HN sono pure equidistanti dalla retta polare di HN, la quale sarà perciò il *2° asse di rotazione* della superficie di Clifford.

§ 7. L'equidistanza dei punti della superficie di Clifford da ciascun asse di rotazione conduce ad un'altra notevolissima proprietà della superficie. Infatti, ogni piano passante per un asse [r] la interseca in una linea equidistante dall' asse: i punti di tal linea, avendo anche uguali distanze dal punto [O] in cui il piano secante incontra l' altro asse della superficie, appartengono ad un cerchio, il cui centro [O] è il polo di r rispetto alla linea in discorso. I *meridiani* ed i *paralleli* della superficie sono dunque cerchi.

La superficie allora potrà generarsi facendo ruotare un cerchio intorno alla polare del suo centro ovvero facendo scorrere un cerchio in modo che il suo centro descriva una retta ed il suo piano si mantenga costantemente ad essa perpendicolare [BIANCHI (1)].

L' ultimo modo di generazione, appartenendo anche al cilindro euclideo, mette in evidenza l' analogia fra la superficie di CLIFFORD e l' ordinario cilindro circolare. Questa analogia potrebbe svilupparsi ulteriormente considerando le proprietà delle traiettorie [eliche] dei punti della superficie, generate con un movimento elicoidale dello spazio intorno ad uno qualunque degli assi della quadrica.

§ 8. Vediamo finalmente come la geometria sulla superficie di CLIFFORD, intesa nel senso da noi dichiarato nei §§ 67, 68, coincida con quella d' EUCLIDE. Perciò determiniamo la legge secondo cui si misurano, sulla superficie, le distanze elementari [ds].

Siano u, v un parallelo ed un meridiano uscenti da un punto O della superficie ed M un punto arbitrario di essa: il meridiano ed il parallelo passanti per M intersecano rispettivamente su u e v due archi OP, OQ, le cui lunghezze u, v saranno le coordinate di M. È manifesta l' analogia fra l' adottato sistema di coordinate e il sistema cartesiano ortogonale.

---

(1) « *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* »; Annali di Mat, (2), XXIV, pag. 107 [1896]. — « *Lezioni di Geometria differenziale.* », p. 454.

Sia M' un punto infinitamente vicino ad M: se u, v sono le coordinate di M, quelle di M' potranno indicarsi con

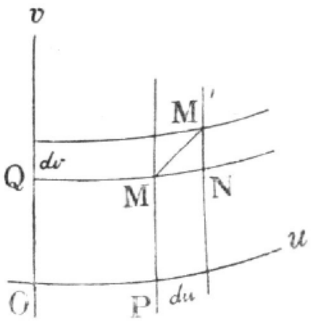


Fig. 69.

$u + du$, $v + dv$. Se ora si considera il triangoletto infinitesimo MM'N, il cui terzo vertice N è il punto in cui s' incontrano il parallelo di M col meridiano di M', è chiaro che l' angolo $\widehat{MNM'}$ è retto e che le lunghezze MN, NM' dei cateti sono precisamente du, dv.

D' altra parte, il triangolo in discorso può riguardarsi come rettilineo [giacente sul piano tangente in M], sicchè, per le proprietà infinitesimali dei triangoli piani, la sua ipotenusa ds è legata ai cateti du, dv dal teorema di PITAGORA:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Ma questa forma pel ds^2 è caratteristica della geometria ordinaria, sicchè potremo senz' altro affermare che *in ogni regione normale della superficie di* CLIFFORD *sono verificate le proprietà del piano euclideo.*

Un' importante applicazione di questo fatto conduce al calcolo dell' *area* della quadrica in discorso. Infatti, decomponiamo quest' ultima in tanti parallelogrammi congruenti infinitesimi per mezzo delle sue generatrici: l' area di uno di sifatti parallelogrammi avrà l' ordinaria espressione:

$$dx \,.\, dy \,.\, sen\ \theta,$$

ove dx, dy rappresentano le lunghezze dei lati e θ l' angolo costante fra essi compreso [ang. di due generatrici].

L'area della quadrica sarà allora:

$$\Sigma\, dx \,.\, dy \,.\, sen\, \theta = sen\, \theta \,.\, \Sigma\, dx \,.\, \Sigma\, dy.$$

Ma entrambe le sommatorie: Σdx, Σdy rappresentano la lunghezza l della retta, per cui l'area Δ della superficie di CLIFFORD acquista la semplicissima espressione:

$$\Delta = l^2 \,.\, sen\, \theta,$$

identica a quella che esprime l'area d'un parallelogramma euclideo [CLIFFORD (1)].

CENNI SUL PROBLEMA DI CLIFFORD-KLEIN.

§ 9. Le idee di CLIFFORD, illustrate nei precedenti §§, condussero KLEIN a un nuovo modo di formulare il problema fondamentale della geometria. Volendo dare un rapido cenno delle vedute di KLEIN riferiamoci ai risultati del § 68, relativi alla possibilità di interpretare la geometria piana con quella delle superficie di curvatura costante. Il raffronto fra le proprietà dei piani euclideo e non-euclidei e quelle delle superficie in discorso fu allora ristretto a regioni convenientemente limitate: allargando il confronto alle *forme complete* si incontreranno in generale delle differenze, imputabili talvolta alla presenza di *punti singolari* delle superficie [es. vertice di un cono], tal'altra alla *connessione* di esse.

Prescindiamo dai punti singolari e come esempio di superficie a curvatura costante, *ovunque regolare*, dotata di

(1) « *Preliminary Sketch....* », citato a p. 196. — Le proprietà della quadrica in discorso, rapidamente accennate da CLIFFORD nel 1873, trovarono un maggiore sviluppo nello scritto di KLEIN: « *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.* » [Math. Ann. t. XXXVII, p. 544-72, 1890],

una connessione diversa da quella del piano euclideo, consideriamo l' ordinario cilindro.

La differenza fra la geometria piana e quella cilindrica, intese l' una e l' altra in senso integrale, fu già rilevata [p. 132] osservando che il postulato della congruenza fra due rette arbitrarie cessa di essere vero sul cilindro. Non di meno esistono numerose proprietà comuni alle due geometrie, traenti origine dal duplice carattere di avere tanto il piano quanto il cilindro la stessa curvatura e di essere entrambi regolari.

Queste proprietà possono riassumersi dicendo:

1) la geometria d' *una* regione normale di cilindro è identica alla geometria d' *una* regione normale di piano;

2) la geometria d' una *qualsiasi* regione normale di cilindro, fissata intorno ad un punto *arbitrario* di esso, è identica alla geometria d' una *qualsiasi* regione normale di piano.

L' importanza di un raffronto fra la geometria del piano e quella d' una superficie, fondato sulle proprietà 1) e 2), emerge dalle seguenti considerazioni.

Una geometria del piano, edificata con criteri sperimentali, dipende da due gruppi distinti di ipotesi. Il primo gruppo esprime la validità di certi fatti, direttamente osservati in un interno accessibile alle esperienze [*postulati della regione normale*]; il secondo gruppo estende a regioni inaccessibili alcune proprietà della regione iniziale [*postulati d' estensione*].

I postulati d' estensione potrebbero richiedere, ad es., che sull' intero piano fossero valide le proprietà della regione accessibile: saremmo allora condotti alle due forme di piano parabolica ed iperbolica; se invece i detti postulati richiedessero l' estensione delle proprietà in discorso, con eventuale riserva per quella che attribuisce alla retta i caratteri della linea aperta, insieme ai due piani indicati dovremmo annoverare anche il piano ellittico.

Ma le precedenti considerazioni sulle superficie regolari di curvatura costante suggeriscono un modo più generale di enunciare i postulati d'estensione: potremmo infatti semplicemente richiedere che intorno a ciascun punto del piano fossero verificate le proprietà della regione iniziale. Allora la classe delle possibili forme di piano si allarga notevolmente: si potrebbe, ad es., concepire una forma a curvatura nulla, doppiamente connessa e rappresentabile completamente sul cilindro dello spazio euclideo.

La ricerca di tutte le varietà a due dimensioni, di curvatura costante, ovunque regolari, forma oggetto del problema di CLIFFORD-KLEIN.

§ 10. È possibile realizzare con opportune superficie regolari a curvatura costante dello spazio euclideo, tutte le *forme di* CLIFFORD-KLEIN?

La risposta è negativa, come risulta chiaramente dal seguente esempio. La sola superficie regolare *sviluppabile* dello spazio euclideo, la cui geometria non sia identica a quella del piano è il cilindro a sezione chiusa: d'altra parte la quadrica di CLIFFORD dello spazio ellittico è una superficie regolare, di curvatura nulla, essenzialmente diversa dal piano e dal cilindro.

Però con opportune *convenzioni* si può *rappresentare* nello spazio ordinario anche la quadrica di CLIFFORD.

Riferiamoci in primo luogo al cilindro. Volendo *sviluppare* il cilindro è necessario renderlo *semplicemente connesso* con un taglio lungo una generatrice [g]: dopo, con flessione senza estensione, lo si adagia sul piano, ricoprendone una *striscia* compresa fra due parallele [g_1, g_2].

Fra i punti del cilindro e quelli della striscia intercede una corrispondenza *biunivoca*: fanno solo eccezione i punti della generatrice g, a ciascuno dei quali corrispondono due punti, situati l'uno su g_1, l'altro su g_2. Però se si *conviene* di riguardare questi due punti come *identici*, cioè come un unico punto, allora la corrispondenza diventa biunivoca senza eccezione, e *la geometria della striscia è integralmente la stessa di quella del cilindro.*

Una rappresentazione analoga alla descritta si può istituire anche per la quadrica di CLIFFORD. Prima si rende la superficie semplicemente connessa con due tagli lungo le generatrici $[g, g']$ uscenti da un suo punto, ottenendo, nello spazio ellittico, un parallelogramma sghembo, i cui lati hanno ciascuno la lunghezza della retta e i cui angoli θ e θ' $[\theta + \theta' = 2$ retti$]$ sono gli angoli formati da g e g'.

Ciò posto fissiamo sul piano euclideo un rombo, i cui lati abbiano la lunghezza della retta ellittica ed i cui angoli siano θ e θ'. Su questo rombo può rappresentarsi *congruentemente* [svilupparsi] la quadrica di CLIFFORD. La corrispondenza fa i punti della superficie e quelli del rombo è biunivoca, con eccezione per i punti di g e g', a ciascuno dei quali ne cosrispondono due, situati su lati opposti del rombo. Però, se si conviene di riguardare come a due a due identici questi punti, allora la corrispondenza risulta biunivoca senza eccezione e *la geometria del rombo è integralmente identica a quella della quadrica di* CLIFFORD (1).

§ 11. Le indicate rappresentazioni del cilindro e della superficie di CLIFFORD ci mostrano come, per il caso della curvatura nulla, la ricerca delle forme di CLIFFORD-KLEIN possa ricondursi alla determinazione di convenienti poligoni euclidei, eventualmente degeneri in striscie, i cui lati sono a due a due trasformabili l'uno nell'altro con opportuni movimenti del piano, ed i cui angoli hanno per somma quattro angoli retti [KLEIN (2)]. Dopo non rimarrà che a riguardare a due a due come identici i punti dei lati predetti, per

(1) Cfr.: « *Preliminary Sketch....* ». — Vedi pure il citato [p. 204] scritto di KLEIN: « *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* ».

(2) Opera citata.

avere sul piano ordinario le immagini delle forme richieste.

In modo analogo si presenta la ricerca delle forme di Clifford-Klein, per il valore positivo e negativo della curvatura e la successiva estensione allo spazio di sifatto problema (1).

(1) Una trattazione sistematica del problema di Clifford-Klein si trova nell'opera di W. Killing: « *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* », Bd. I, p. 271-349 [Paderborn, 1893].

ELENCO DEGLI AUTORI CITATI

ELENCO DEGLI AUTORI CITATI

BIBLIOTECA DI OPERE SCIENTIFICHE

Bonola Roberto — La Geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo — 1906 — un vol. in-8 . L. 5 —

Donati Luigi — Introduzione elementare all'elettrotecnica — 1902 — un volume in-8 con 115 figure . . . . . . L. 10 —

Enriques Federigo — Lezioni di geometria proiettiva — Seconda edizione — 1904 — un volume in-8 con figure intercalate L. 10 —

Detto — Lezioni di geometria descrittiva — 1902 — un volume in-8 con tavole . . . . L. 12 —

Detto — Problemi della scienza — 1906 — un vol. in-8. L. 10 —

S. Pincherle e Ugo Amaldi — Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi — 1901 — un vol. in-8 L. 15 —

Pizzetti Paolo — Trattato di Geodesia teoretica — 1905 — un vol. in-8 con 71 figure intercalate nel testo . . . . L. 12 —

Questioni riguardanti la geometria elementare trattate da U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali — Raccolte e coordinate da Federigo Enriques — 1900 — un volume in-8 con 10 tavole e 40 figure . . . . L. 12 —

Righi Augusto — L'ottica delle oscillazioni elettriche — 1897 — un volume in-8 con 38 figure . . . . L. 5 —

Detto e Bernardo Dessau — La telegrafia senza filo — Seconda edizione largamente ampliata con 293 figure intercalate nel testo — 1905 — un volume in-8 . . . . L. 12 —

Rouse Ball W. W. — Breve compendio di Storia delle Matematiche — Versione dall'inglese di D. Gambioli e G. Puliti — 1903 — due volumi in-8. . . . . L. 20 —

Severi Francesco — Complementi di Geom. proiettiva — Raccolta di oltre 300 problemi colle relat. soluz. — un vol. in-8. L. 10 —

ATTUALITÀ SCIENTIFICHE

1. **Righi Augusto** — Il moto dei ioni nelle scariche elettriche — Seconda edizione con aggiunte — in-8 . . . . . . L. 3 —
2. **Ciamician Giacomo** — I problemi chimici del nuovo secolo — Seconda edizione con aggiunte — in-8 . . . . . . L. 2 —
3. **Righi Augusto** — La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni, elettroni) — Seconda edizione con numerose aggiunte — in-8, con figure . . . . L. 3 —
4. **Ducceschi Virgilio** — Evoluzione morfologica ed evoluzione chimica — in-8 . . . . L. 2 —
5. **Emery Carlo** — La determinazione del sesso dal punto di vista biologico — in-8, con tavole . . . . L. 2 —
6. **Righi Augusto** — Il Radio — in-8, con 13 incisioni e 3 tavole fotozincografiche . . . . . , ... L. 3 —
7. **Amaduzzi Lavoro** — Il Selenio — in-8, con 19 figure. L. 3 —
8. **Giorgi Giovanni** — Le ferrovie a trazione elettrica — 1905 — in-8, con 13 figure . . . . L. 3 —

Di imminente pubblicazione:

9. **Amaduzzi Lavoro** — Le scariche elettriche nei gas.