A. Conti
Firenze 17.12.45

ROBERTO BONOLA

LA
GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

ESPOSIZIONE STORICO-CRITICA
DEL SUO SVILUPPO

CON 69 FIGURE

BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1906

INDICE

CAPITOLO V.

I successivi sviluppi della Geometria non-euclidea.

Indirizzo metrico-differenziale.

Indirizzo proiettivo.

NOTA I.

I principi fondamentali della Statica e il postulato d' Euclide.

NOTA II.

Le parallele e la superficie di Clifford. Cenni sul problema di Clifford-Klein.

PREFAZIONE

Il materiale da tempo raccolto intorno alle origini e allo sviluppo della *Geometria non-euclidea*, l' interesse che hanno acquistato le esposizioni storico-critiche dei fondamenti delle discipline scientifiche mi hanno indotto ad allargare i confini della prima parte del mio articolo: « *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee.* » comparso, or sono sei anni, fra le « *Questioni riguardanti la geometria elementare* » (1), raccolte e coordinate dal prof. F. ENRIQUES.

L' articolo, completamente rifatto per la versione tedesca di quell' opera, tratta prevalentemente la parte costruttiva del tema; questo libro è dedicato invece a una diffusa esposizione della storia delle parallele ed allo sviluppo storico delle geometrie di LOBACEFSKI-BOLYAI e di RIEMANN.

Nel I CAPITOLO, prendendo le mosse da EUCLIDE e dai più antichi commentatori del *V postulato*, ho riprodotto i ragionamenti più caratteristici con cui i greci, gli arabi, i geometri della Rinascenza pretesero stabilire su basi più solide la teoria delle paral-

(1) Bologna, Zanichelli, 1900.

lele. Nel II Capitolo, principalmente con l'opera di Saccheri, Lambert, Legendre, ho cercato di lumeggiare il trapasso dalle antiche alle nuove idee, sorte sul principio del XIX secolo; nel III e IV Capitolo, attraverso le ricerche di Gauss, Schweikart, Taurinus e l'opera costruttiva di Lobacefski e Bolyai, ho esposto i fondamenti del primo dei sistemi geometrici edificati sulla negazione della V ipotesi di Euclide. Nel V Capitolo ho delineato sinteticamente i successivi sviluppi della Geometria non-euclidea, che sorsero dalle indagini di Riemann ed Helmholtz sulla struttura dello spazio, e dalla estensione proiettiva di Cayley del concetto di *proprietà metrica*.

In tutto il corso della esposizione mi sono studiato di presentare i vari argomenti secondo il loro ordine storico: quando però tale ordine mi avrebbe troppo allontanato dalla semplicità espositiva che mi ero prefissa, l'ho sacrificato volentieri, pur di mantenere al libro un carattere strettamente elementare.

Fra i tanti postulati equivalenti al V euclideo, di cui i più notevoli sono riportati in fine al IV capitolo, ve n'è uno d'indole *statica*, che, verificato sperimentalmente, potrebbe fornire una base empirica alla teoria delle parallele. Da ciò un importante legame fra la *Geometria* e la *Statica* [Genocchi], al quale, non avendo trovato un posto adatto nei precedenti capitoli, ho dedicato la prima delle due Note con cui termina il libro.

La II Nota si riferisce ad un argomento non meno interessante. Le ricerche di Gauss, Lobacefski, Bolyai sulla teoria delle parallele hanno la loro origine nella estensione d'uno dei concetti fondamentali della Geometria classica. Ma un concetto si può estendere generalmente in varie direzioni.

Nel nostro caso, il parallelismo ordinario, fondato sull' ipotesi di rette non secantisi, coplanari ed equidistanti, fu esteso dai predetti geometri lasciando cadere il *V postulato* di EUCLIDE [equidistanza], e in seguito da CLIFFORD, abbandonando l' *ipotesi della coplanarità*.

Delle parallele di CLIFFORD, studiate prima con metodo proiettivo [CLIFFORD-KLEIN], poi col sussidio della Geometria differenziale [BIANCHI, FUBINI], mancava una trattazione elementare: la II NOTA è dedicata, in gran parte, alla esposizione sintetico-elementare delle più semplici ed eleganti proprietà che loro competono. La nota termina con un rapido cenno del problema di CLIFFORD-KLEIN, che storicamente si riattacca al parallelismo di CLIFFORD, e che mira a caratterizzare la struttura geometrica dello spazio in base al più ristretto sistema di postulati compatibili coi dati sperimentali e col principio d' omogeneità dello spazio.

Ecco, brevemente, il contenuto del libro.

Prima di affidare la modesta opera al giudizio dei benevoli lettori, sento il dovere di ringraziare vivamente il mio amato maestro, prof. FEDERIGO ENRIQUES, per i preziosi consigli con cui mi ha soccorso per la disposizione e pel contenuto critico della materia; il prof. CORRADO SEGRE, che gentilmente ha posto a mia disposizione il manoscritto di un *Corso di lezioni* sulla Geometria non-euclidea, da lui dettato, or son tre anni, nell' Università di Torino; il caro amico prof. GIOVANNI VAILATI, per le preziose indicazioni fornitemi intorno alla

Geometria greca e l'aiuto prestatomi nella revisione delle bozze.

Finalmente anche all'ottimo Comm. CESARE ZANICHELLI, che ha sollecitamente accolto il mio lavoro nella sua collezione di opere scientifiche, vadano pure i miei più sentiti ringraziamenti.

Pavia, marzo 1906.

ROBERTO BONOLA.

LA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

CAPITOLO I.

I dimostratori del V postulato euclideo.

IL POSTULATO DELLE PARALLELE PRESSO I GEOMETRI GRECI

§ 1. EUCLIDE [330-275 circa a. C.] chiama parallele due rette coplanari che prolungate comunque non s' incontrano [Def. XXIII] [1]. Dimostra [Prop. XXVII, XXVIII] che due rette che formano con una loro trasversale angoli alterni interni uguali, ovvero angoli corrispondenti uguali, od angoli interni da una stessa parte supplementari sono parallele. Per dimostrare poi le inverse di queste proposizioni EUCLIDE si giova del seguente *postulato* [V]:

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due prolungate da questa parte si incontrano.

La teoria euclidea delle parallele è poi completata dai seguenti teoremi:

Linee rette parallele ad una stessa retta sono parallele fra loro [Prop. XXX].

Per un punto dato si può tracciare una sola retta parallela ad una retta data [Prop. XXXI].

Segmenti compresi fra segmenti uguali e paralleli sono uguali e paralleli [Prop. XXXII].

(1) Per quanto riguarda il testo euclideo ci riferiremo sempre all' edizione critica di J. L. HEIBERG [Lipsia, Teubner, 1883].

Dall' ultimo teorema si deduce l' equidistanza di due parallele. Fra le conseguenze più notevoli di questa teoria si trovano il noto teorema sulla somma degli angoli d' un triangolo e le proprietà delle figure simili.

§ 2. Fino i più antichi commentatori del testo euclideo ritennero che il *V postulato* non fosse abbastanza evidente per accettarlo senza dimostrazione, per cui essi cercarono di dedurlo come conseguenza di altre proposizioni. Per raggiungere lo scopo sostituirono talvolta la definizione euclidea di parallele, di forma *grammaticale* negativa, con altre definizioni, che non presentano detta forma, ritenuta difettosa.

Proclo [410-485], nel suo *Commento al I libro di Euclide* (1), ci trasmette preziose notizie circa i primi tentativi fatti in proposito. Riferisce, ad esempio, che Posidonio [I° secolo a. C.] aveva proposto di chiamare parallele due rette coplanari ed equidistanti. Questa definizione e quella euclidea corrispondono però a due fatti che possono presentarsi separatamente, e Proclo [pag. 177], riferendosi ad una trattazione di Gemino [1° sec. a. C.] adduce in proposito gli esempi dell' iperbole, della concoide e del loro comportarsi rispetto ai relativi asintoti, per far vedere che vi potrebbero essere linee parallele nel senso euclideo, cioè linee che prolungate all' infinito non s' incontrano, e tuttavia non parallele nel senso di Posidonio, cioè non equidistanti.

Tale fatto è qualificato da Gemino, sempre al dire di Proclo, come *il più paradossale* [παραδοξότατον] di tutta la geometria.

Volendo poi accordare la definizione euclidea con quella di Posidonio è necessario dimostrare che due rette coplanari

(1) Per quanto riguarda il testo di Proclo ci riferiremo all' edizione curata da G. Friedlein: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii* [Lipsia, Teubner, 1873].

che non s' incontrano sono equidistanti; ovvero che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta. Per tale dimostrazione Euclide si giova appunto del suo postulato.

Proclo [pag. 364] si rifiuta però di annoverarlo fra i postulati, osservando, a conferma di tale sua opinione, il fatto che la sua inversa [« *La somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti* »], è un teorema dimostrato da Euclide [Prop. XVII], non sembrandogli possibile che una proposizione, la cui inversa è dimostrabile, non sia alla sua volta dimostrabile. Mette anche in guardia contro gli abusivi appelli all' evidenza ed insiste sulla possibile [ipotetica] esistenza di rette asintotiche [pag. 191-2].

Tolomeo [2° sec. d. C.], sempre al dire di Proclo [p. 362-5], tentò di risolvere la questione con questo curioso ragiona-

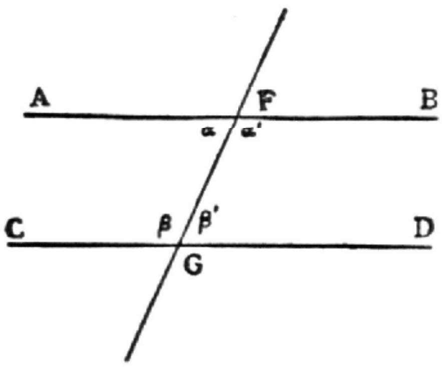

Fig. 1.

mento. Siano AB, CD due parallele, FG una trasversale, α e β i due angoli interni a sinistra di FG, ed α' e β' i due angoli interni a destra. Ciò posto la somma $\alpha + \beta$ sarà o maggiore o minore ovvero uguale a due angoli retti. Si *ammetta* che se per una coppia di parallele si verifica, ad es., il 1° caso [$\alpha + \beta > 2\ \widehat{retti}$], altrettanto avvenga per ogni altra coppia. Allora poichè le rette FB, GD sono fra loro parallele, come sono parallele le rette FA, GC, così da: $\alpha + \beta > 2\ \widehat{retti}$, si deduce: $\alpha' + \beta' > 2\ \widehat{retti}$. Seguirebbe: $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4\ \widehat{retti}$, il che è manifestamente assurdo. Dunque non può essere $\alpha + \beta > 2\ \widehat{retti}$. Nello stesso modo si dimostra che non può essere $\alpha + \beta < 2\ \widehat{retti}$, quindi sarà $\alpha + \beta = 2\ \widehat{retti}$ [PROCLO, pag. 365].

Da questo risultato si trae facilmente il *postulato euclideo.*

§ 3. PROCLO [pag. 371], dopo aver criticato il ragionamento di TOLOMEO, tenta raggiungere lo stesso scopo per altra via. La dimostrazione di PROCLO riposa sulla seguente proposizione, che egli assume come evidente. *La distanza fra due punti situati su due rette che si tagliano può rendersi grande quanto si vuole, prolungando sufficientemente le due rette* ([1]). Da questa deduce il lemma:

Una retta che incontra una di due parallele incontra necessariamente anche l' altra.

Ecco la dimostrazione del lemma data da PROCLO. Siano AB, CD due parallele ed EG una trasversale, incidente in F

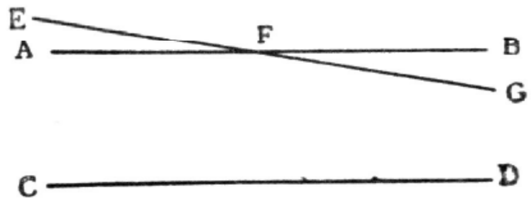

Fig. 2.

alla prima. La distanza di un punto variabile sul raggio FG dalla retta AB cresce oltre ogni limite quando il punto si allontana indefinitamente da F; *e poichè la distanza di due parallele è finita,* la retta EG dovrà necessariamente incontrare CD.

PROCLO introdusse dunque l' ipotesi che la distanza di due parallele si mantenga finita, ipotesi da cui logicamente si deduce quella d' Euclide.

([1]) Questa proposizione, assunta come evidente, è da PROCLO appoggiata coll' autorità di ARISTOTILE: cfr. « *De Coelo,* I, 5 ». Una rigorosa dimostrazione della prop. in discorso fu data dal Padre G. SACCHERI, nell' opera citata a p. 20.

§ 4. Che il *postulato d' Euclide* fosse oggetto di discussioni e ricerche presso i greci risulta ancora dalla seguente paradossale argomentazione, con cui, al dire di Proclo [pag. 369], si pretendeva dimostrare che due rette tagliate da una terza non s' incontrano, anche quando la somma degli angoli interni da una stessa parte è minore di due angoli retti.

Sia AC una trasversale delle due rette AB, CD ed E il punto medio di AC. Da quella parte di AC, in cui la somma degli angoli interni è minore di due angoli retti, si prendano su AB e CD i segmenti AF, CG uguali ad AE. Le due rette AB, CD non possono incontrarsi fra i punti A, F e C, G, perchè in un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due.

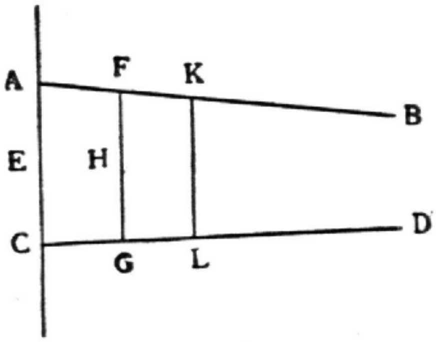

Fig. 3.

Congiunti poi i punti F, G, a partire dal segmento FG, si ripeta la precedente costruzione, cioè si determinino su AB, CD i due segmenti FK, GL, ciascuno eguale alla metà di FG. Le due rette AB, CD non potranno incontrarsi fra i punti F, K e G, L. E poichè questa operazione può ripetersi indefinitamente, si volle concludere che le due rette AB, CD non si sarebbero mai incontrate.

Il vizio principale dell' argomentazione risiede nell' uso dell' infinito, poichè i segmenti AF, FK,... potrebbero, per successive diminuzioni, tendere a zero e la loro *serie* essere finita. L' autore del paradosso ha fatto uso dello stesso principio con cui Zenone [495-435 a. C.] pretendeva dimostrare che Achille non raggiungerebbe la testuggine, pur muovendosi con velocità doppia della velocità di quest' ultima.

Ciò è notato, sotto altra forma, da Proclo [pag. 369-70] dicendo che ciò che così si dimostra è che, col suddetto processo non si può raggiungere il punto d'incontro [determinare: ὁρίζειν], non che esso non esista.

PROCLO osserva inoltre che, « poichè la somma di due angoli d'un triangolo è minore di due angoli retti [EUCLIDE, XVII], esistono delle rette che tagliate da una terza s'incontrano da quella parte in cui la somma degli angoli interni è minore di due angoli retti; così a chi asserisce che per una *qualunque* differenza fra detta somma e due angoli retti le due rette non s'incontrano, si può rispondere che per differenze minori le rette s'incontrano ».

« Ma se per *alcune* coppie di rette formanti con una terza angoli interni da una stessa parte la cui somma è minore di due angoli retti, esiste un punto d'incontro, resta a vedere se ciò accade per *tutte* le coppie. *Poichè alcuno potrebbe osservare che vi fosse una certa deficienza* [da due angoli retti] *per la quale esse* [rette] *non s'incontrano, incontrandosi invece tutte le altre per le quali tale deficienza fosse ulteriore,* [PROCLO, pag. 371] ». Dal seguito risulterà che il dubbio quì affacciato da PROCLO ha fondamento soltanto nel caso in cui il segmento A C della trasversale [Fig. 3] rimane invariabile, mentre le due rette della coppia, ruotando intorno ai punti A e C, fanno variare la loro *deficienza.*

§ 5. Un'altra dimostrazione assai antica del *V postulato*, riportata nel Commento arabo di AL-NIRIZI (¹) [IX secolo], pervenutoci ancora attraverso la traduzione latina di GHERARDO DA CREMONA (²) [XII secolo], è attribuita ad AGANIS (³).

(¹) Cfr. R.-O. BESTHORN ed J.-L. HEIBERG. « *Codex Leidensis 399, 1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii* ». [Copenhague, F. Hegel, 1893-97].

(²) Cfr. M. CURTZE: « *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii.* Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata. [Lipsia, Teubner, 1899].

(³) A proposito di AGANIS è bene notare che è da CURTZE ed HEIBERG identificato con GEMINO. Invece P. TANNERY, rigetta tale

La parte di questo commento, relativa alle definizioni, postulati, assiomi, contiene frequenti riferimenti al nome di SAMBELICHIUS, che s' identifica facilmente con SIMPLICIUS, il celebre commentatore di ARISTOTILE, vissuto nel VI secolo. SIMPLICIUS avrebbe adunque scritto una *Introduzione* al *I libro di Euclide,* esprimendo in essa idee simili a quelle di GEMINO e POSIDONIO, affermando che il *V postulato* non è evidente e riportando la dimostrazione del *suo compagno* AGANIS.

Questa dimostrazione è fondata sull' ipotesi che esistano rette equidistanti, rette che AGANIS, come già POSIDONIO, chiama parallele. Da tale ipotesi egli deduce che la minima distanza di due parallele è un segmento perpendicolare comune alle due rette; che due rette perpendicolari ad una terza sono fra loro parallele; che due parallele tagliate da una terza formano angoli interni da una stessa parte supplementari e reciprocamente.

La semplicità con cui si dimostrano queste proposizioni ci dispensa dal riportare i ragionamenti di AGANIS. Dopo aver notato che da esse seguono le Prop. XXX, XXXII di EUCLIDE [cfr. p. 1], indichiamo come AGANIS costruisca il punto d' incontro di due rette non equidistanti.

Siano AB, GD due rette intersecate dalla trasversale EZ e tali che la somma degli angoli interni $\widehat{AEZ}$, $\widehat{EZD}$ sia minore di due retti. Senza togliere nulla alla generalità della figura si può supporre che $\widehat{AEZ}$ sia retto.

Si fissi allora su ZD un punto arbitrario T, dal quale si conduca TL perpendicolare a ZE; poi si divida, col punto P, il segmento EZ in due parti uguali, indi, col punto M, il segmento PZ in due parti uguali, successivamente MZ in due parti uguali, ecc.... fino a che uno dei punti medi P, M,... cada nel segmento LZ. Se questo, ad es., è il punto M, si

---

identificazione. Cfr. TANNERY: « *Le philosophe Aganis est il identique a Geminus?* » Biblioteca Math. (3), t. 2, p. 9-11 [1901].

tracci in M la retta perpendicolare ad EZ, che incontrerà in N la ZD. Si costruisca finalmente su ZD il segmento ZC,

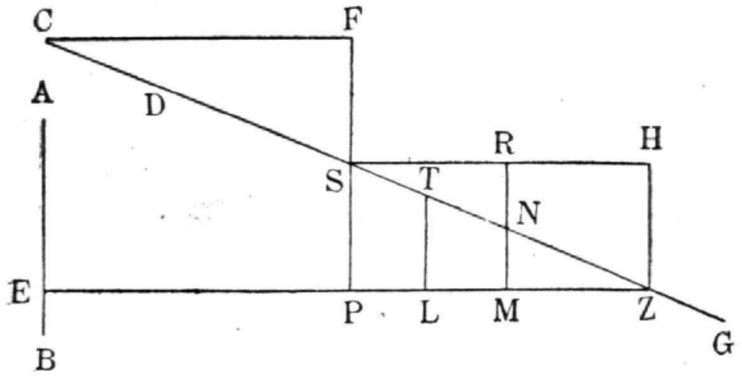

Fig. 4.

multiplo di ZN come ZE è multiplo di ZM. Nel nostro caso è: ZC = 4. ZN. *Il punto C così ottenuto è il punto d' incontro delle due rette AB e GD.*

Per provare ciò bisognerebbe dimostrare che i segmenti consecutivi ed uguali ZN, NS,... della retta ZD, hanno proiezioni uguali sulla ZE. Non ci fermiamo su questo fatto perchè dovremo tornarvi in seguito [p. 10]. Del resto il ragionamento è suggerito dalla figura stessa di AGANIS.

Rileviamo la caratteristica della precedente costruzione: essa risiede nell'uso [implicito] del cosidetto *postulato di Archimede, necessario* per assegnare il segmento MZ, sottomultiplo di EZ e minore di LZ.

Il postulato delle parallele presso gli arabi.

§ 6. Gli arabi, successori dei greci nel primato delle matematiche, si occuparono come questi del *V postulato.* Alcuni però accettarono senz'altro le idee e le dimostrazioni dei loro maestri, come, ad es., AL-NIRIZI [IX secolo], il cui commento alle definizioni, postulati, ed assiomi del *I libro* è modellato, sulla introduzione agli « *Elementi* » dovuta a SIMPLICIUS, e la cui dimostrazione della *V ipotesi euclidea* è quella sopra accennata [§ 5] di AGANIS.

Altri portarono un contributo personale alla questione. NASÎR-EDDIN [1201-1274], ad es., benchè dimostri il *V postulato*, informandosi al criterio seguito da AGANIS, merita di essere ricordato, per la veduta originale di premettere esplicitamente il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, e per la forma esauriente del suo ragionamento [1].

Ecco la parte essenziale dell'ipotesi ch'egli ammette. *Se due rette* r *ed* s *sono la prima perpendicolare, l'altra obliqua al segmento AB, i segmenti di perpendicolare calati da* s *su* r *sono minori di AB dalla banda in cui AB forma con* s *angolo acuto, maggiori di AB dalla banda di cui AB forma con* s *angolo ottuso.* Segue immediatamente che se due segmenti uguali AB, A′B′ cadono da una stessa banda e perpendicolarmente su la retta BB′, la retta AA′ sarà perpendicolare essa pure ai due segmenti dati. Inoltre si avrà: AA′ = BB′, vale a dire la figura AA′B′B è un quadrilatero con gli angoli retti e i lati opposti uguali, cioè un *rettangolo.*

Da questo risultato NASÎR-EDDIN ricava facilmente che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti. Per il triangolo rettangolo la cosa è manifesta, essendo esso metà di un rettangolo; per il triangolo qualunque si ottiene lo scopo mediante la decomposizione del triangolo in due triangoli rettangoli.

Ciò posto ecco rapidamente come il geometra arabo dimostra il *postulato euclideo* [cfr. AGANIS].

Siano AB, CD due raggi, l'uno obliquo l'altro perpendicolare alla retta AC. Su AB si fissi il segmento AH e da H

---

(1) Cfr. « *Euclidis elementorum libri XII studio Nassiredini* » [Roma, 1594]. Quest'opera, scritta in lingua araba, fu riprodotta nel 1657, 1801. Non ne esiste alcuna traduzione in altra lingua.

si cali la perpendicolare HH′ su AC. Se il punto H′ cade in C, ovvero da banda opposta di A rispetto e C, i due raggi AB, CD s' incontrano senz' altro. Se poi H′ cade fra A e C si tracci il segmento AL, perpendicolare ad AC ed uguale ad HH′. Allora, per quanto sopra si disse sarà: HL = AH′. Consecutivamente ad AH si prenda HK uguale ad AH e da K si cali la perpendicolare KK′ su AC. Essendo KK′ > HH′, si formi K′L′ = H′H e si congiunga H con L′. Essendo i due

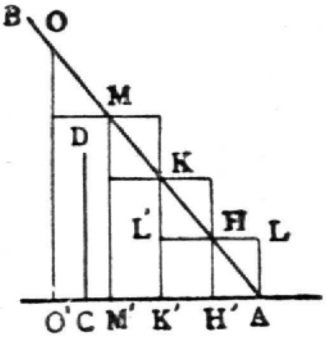

Fig. 5.

quadrilateri K′H′HL′, H′ALH entrambi rettangoli i tre punti L′, H, L sono in linea retta. Segue: $L'\widehat{H}K = A\widehat{H}L$ e conseguentemente l' uguaglianza dei due triangoli AHL, HL′K. Quindi: L′H = HL, e per le proprietà dei rettangoli: K′H′ = H′A.

Prendasi ora KM uguale e consecutivo ad HK e da M si cali MM′ perpendicolare ad AC. Con un ragionamento uguale a quello ora svolto si dimostra:

$$M'K' = K'H' = H'A.$$

Ottenuto questo primo risultato si prenda un multiplo di AH′ maggiore di AC [*postulato di* ARCHIMEDE]. Sia, ad esempio, AO′ = 4. AH′ > AC. Allora su AB si costruisca AO = 4. AH e da O si cali la perpendicolare ad AC. Questa perpendicolare sarà evidentemente OO′. Allora nel triangolo rettangolo AO′O la retta CD, perpendicolare al cateto O′A, non potendo incontrare l' altro cateto OO′, incontrerà necessariamente l' ipotenusa OA. Con ciò rimane dimostrato che due rette AB, CD, l' una perpendicolare e l' altra obbliqua alla trasversale AC, si incontrano. In altre parole si è dimostrato il *postulato euclideo* nel caso in cui uno degli angoli interni sia retto. Facendo poi uso del teorema sulla somma degli angoli d' un triangolo, NASÌR-EDDIN riconduce il caso generale a questo caso particolare. Non riproduciamo il ragionamento perchè nel seguito dovremo riportarne uno uguale [cfr. p. 33] (1).

Il postulato delle parallele durante il Rinascimento ed il XVII secolo.

§ 7. Tanto le prime versioni degli « *Elementi* », fatte nel XII e XIII secolo sui testi arabi, quanto le successive compilate sui testi greci alla fine del XV e nella prima metà del XVI non portano in generale alcuna annotazione critica al *V postulato*. La critica rinasce dopo il 1550, prinpalmente per impulso del *Commento* di PROCLO (2). Per meglio seguirla citiamo brevemente le vedute dei più autorevoli commentatori dei secoli XVI e XVII.

F. COMMANDINO [1509-1575] nella definizione euclidea di parallele aggiunge, senza giustificazione, il concetto di equidistanza; intorno al *V postutato* riporta il giudizio e la dimostrazione di PROCLO (3).

C. CLAVIO [1537-1612], nella sua traduzione latina del testo euclideo (4), riporta e critica la dimostrazione di PROCLO. Porge poi una nuova dimostrazione dell' ipotesi euclidea

---

(1) La dimostrazione di NASÎR-EDDIN del *V postulato* è riportata per disteso del geometra inglese J. WALLIS, nel II volume delle sue opere (cfr. nota a p. 14), e da G. CASTILLON, in un suo scritto pubblicato nei « *Mém. de l'Académie Royale de Sciences et Belles-lettres* » di Berlino, T. XVIII, p. 175-183 [1788-89]. Inoltre di essa fanno cenno parecchi altri scrittori, fra cui rammenteremo principalmente G. S. KLÜGEL (cfr. nota (3), p. 38), J. HOFFMAN [*Critik der Parallelen-Theorie,* Jena 1807]; V. FLAUTI [*Nuova dimostrazione del postulato quinto....,* Napoli 1818].

(2) Il *Commento* di PROCLO fu stampato per la prima volta a Basilea [1533] nel testo originale; poi a Padova [1560] nella traduzione latina del BAROZZI.

(3) *Elementorum libri XV* [Pesaro, 1572].

(4) *Euclidis elementorum libri XV* [Roma, 1574].

basandosi sul teorema: « *La linea equidistante da una retta è una retta* », ch'egli cerca di giustificare con ragionamenti analogici. La dimostrazione di CLAVIO ha molti punti di contatto con quella di NASÌR-EDDIN.

P. A. CATALDI [?-1626] è il primo geometra moderno che pubblica un lavoro esclusivamente dedicato alla questione delle parallele [1]. Il CATALDI muove dal concetto di rette equidistanti e non equidistanti, ma per provare l'effettiva esistenza di rette equidistanti ricorre all'ipotesi che « *rette non equidistanti in un verso convergono e nell'altro divergono* ». [cfr. NASÌR-EDDIN] [2].

G. A. BORELLI [1608-1679] ammette, cercando di giustificarlo, il seguente *assioma* [XIV]: « *Se sopra una retta linea trasportata lateralmente nello stesso piano sopra d'un'altra retta linea, la tocchi sempre mai con l'estremo suo punto, et in tutto il suo corso sia a quella perpendicolarmente elevata: l'altro suo punto estremo descriverà col suo moto una retta linea* ».

Successivamente dimostra che due rette perpendicolari ad una terza sono equidistanti e definisce le parallele come rette equidistanti. Segue la teoria delle parallele [3].

§ 8. GIORDANO VITALE [1633-1711], riattaccandosi al concetto di equidistanza formulato da POSIDONIO, sente con PROCLO la necessità di escludere che le parallele di EUCLIDE possano avere un comportamento asintotico. Allo scopo definisce parallele due rette equidistanti e cerca di pro-

---

(1) « *Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti* » [Bologna, 1603].

(2) Ulteriori osservazioni sull'argomento furono fatte dal CATALDI nell'« *Aggiunta all'operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti* » [Bologna, 1604].

(3) BORELLI: « *Euclides restitutus* » [Pisa, 1658].

vare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta ([1]).

La dimostrazione riposa sostanzialmente su questo lemma: *Se fra due punti A, C, presi in qualunque linea curva, il cui concavo sia verso X, sia tirata la retta AC e se dagli infiniti punti dell' arco AC cadono delle perpendicolari a qualche retta, dico essere impossibile che quelle perpendicolari siano fra loro uguali.*

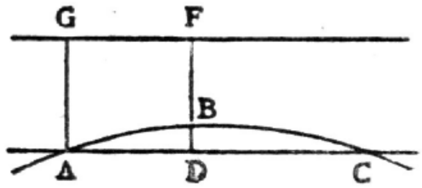

Fig. 6.

La « *qualche retta* » di cui si parla nell' enunciato, non è una retta *qualunque* del piano, ma una retta costruita nel seguente modo: Dal punto B dell' arco AC si cali BD, perpendicolarmente alla corda AC; poi in A si innalzi AG, pure perpendicolarmente ad AC; finalmente presi i due segmenti uguali AG e DF sulle due perpendicolari costruite, si congiungano gli estremi G, F. La GF è la retta che GIORDANO considera nella sua dimostrazione, retta rispetto alla quale l' arco AB non è certamente una linea equidistante.

Ma quando l' autore vuol dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è pure una retta, applica il precedente lemma ad una figura in cui non sono verificate le relazioni che intercedono fra l' arco ABC e la retta GF, onde le conseguenze ch' egli deduce sulla esistenza di rette equidistanti non sono affatto lecite.

Sotto questo aspetto la dimostrazione di GIORDANO non offre alcun vantaggio sulle precedenti; essa però contiene una notevolissima proposizione, il cui concetto acquisterà nel seguito un maggiore sviluppo.

Sia ABCD un quadrilatero con gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ retti ed i lati AD, BC uguali; sia inoltre HK una perpendicolare

([1]) GIORDANO VITALE: *Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati, e facilitati. Libri XV* [Roma, 1680].

calata da un punto H del segmento DC sulla base AB del quadrilatero. GIORDANO dimostra: 1°) che gli angoli $\widehat{D}, \widehat{C}$ sono uguali, 2°) che ove il segmento HK sia uguale al segmento AD i due angoli $\widehat{D}, \widehat{C}$ sono retti e che CD è equidistante da AB.

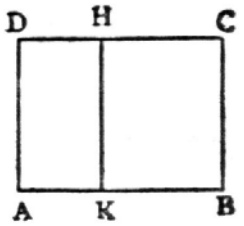

Fig. 7.

Con questo teorema GIORDANO riconduce la questione delle rette equidistanti a dimostrare l'esistenza di *un punto* H su DC, la cui distanza da AB sia uguale ai due segmenti AD, CB. Questo ci sembra uno dei risultati più notevoli ottenuto fino a quell'epoca, intorno alla teoria delle parallele [1].

§ 9. J. WALLIS [1616-1703], abbandonando il concetto di equidistanza, sfruttato inutilmente dai precedenti geometri, diede una nuova dimostrazione del *V postulato*, fondandosi sulla nozione comune: *Di ogni figura ne esiste una simile di grandezza arbitraria.* Ecco rapidamente come procede il WALLIS [2].

Siano a, b due rette intersecate in A, B dalla trasversale c; ed α, β gli angoli interni da una stessa parte di c, tali che $\alpha + \beta$ sia minore di due angoli retti. Tracciata

---

(1) Cfr. BONOLA: « *Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti* », Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Mat. [1905].

(2) Cfr. WALLIS: « *De Postulato Quinto; et Definizione Quinta — Lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica* »; in Opera Math. t. II, p. 669-678. [Oxford, 1693]. Questo scritto di WALLIS contiene due conferenze ch'egli tenne all'Università di Oxford, la prima nel 1651, la seconda nel 1663. In esse viene riportata anche la dimostrazione di NASÎR-EDDIN. La parte che riguarda la dimostrazione di WALLIS fu tradotta in tedesco dai SS. ENGEL ed STÄCKEL nella *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, p. 21-36 [Leipzig, Teubner, 1895]. Quest'opera sarà nel seguito indicata con: *Th. d. P.*

per A la retta b' in modo che b e b' formino con c angoli corrispondenti uguali è chiaro che b' cadrà nell' angolo adiacente ad α. Se ora spostiamo con continuità la retta b. in modo che B percorra il segmento AB e che l' angolo ch' essa forma con c si mantenga costantemente uguale a β la retta b, prima di raggiungere la posizione finale b', dovrà necessariamente incontrare a. Resta così determinato un triangolo AB_1C_1 con gli angoli in A e B_1 rispettivamente uguali ad α e β. Ma per l' ipotesi di WALLIS sull' esistenza delle figure simili, su AB, come lato omologo di AB_1, si potrà costruire un triangolo ABC simile al triangolo AB_1C_1, il che significa che le rette a, b debbono concorrere in un punto, cioè nel terzo vertice C del triangolo ABC. Dunque ecc....

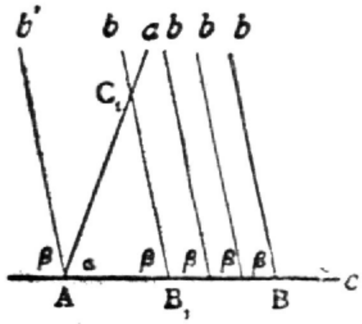

Fig. 8.

WALLIS cerca poi di giustificare la sua originale veduta osservando che EUCLIDE, postulando l' esistenza di un cerchio di dato centro e dato raggio [*III postulato*], ammette in sostanza il principio di similitudine pei cerchi. Ma per quanto l' intuizione appoggi favorevolmente questa veduta il concetto di forma indipendente dall' estensione d' una figura costituisce una ipotesi, non certo più evidente di quella postulata da EUCLIDE.

Osserviamo ancora che WALLIS poteva più semplicemente ammettere l' esistenza di triangoli con angoli uguali o, come vedremo nel seguito, di due soli triangoli disuguali, con gli angoli a due a due uguali [cfr. p. 26, nota (1)].

§ 10. L' opera critica dei precedenti geometri è sufficiente per mettere in luce l' evoluzione storica del nostro quesito nei secoli XVI e XVII, onde giudichiamo superfluo parlare di altri insigni ricercatori, quali furono, ad es., OLIVIERO DI

BURY [1604], LUCA VALERIO [1613], H. SAVILE [1621], A. TAQUET [1654], A. ARNAULD [1667] (¹). Stimiamo piuttosto necessario dire qualche parola sul posto che nell'organismo geometrico occupa *l'ipotesi euclidea* presso i vari commentatori degli « *Elementi* ».

Nell'edizione latina degli « *Elementi* » [1482], eseguita sui testi arabi dal CAMPANO [XIII secolo], l'ipotesi in discorso figura fra i postulati. Altrettanto dicasi nella traduzione latina fatta sul greco da B. ZAMBERTI [1505], nelle edizioni di LUCA PACIOLO [1509], di N. TARTAGLIA [1543], di F. COMMANDINO [1572], di A. BORELLI [1658].

Invece la prima impressione degli « *Elementi* » in lingua greca [Basilea, 1533], contiene l'ipotesi fra gli assiomi [*assioma XI*]. Successivamente la riportano fra gli assiomi F. CANDALLA [1556], C. CLAVIO [1574], GIORDANO VITALE [1680] ed anche il GREGORY [1703], nella sua classica versione latina delle opere d'EUCLIDE.

Per tentare di rendersi conto di queste differenze, le quali, più che ai predetti autori, risalgono ai codici tramandati dai greci, gioverà sapere quale significato attribuissero questi ultimi alle parole « *postulati* » [αἰτήματα] ed « *assiomi* » [ἀξιώματα] (²). Notiamo anzitutto che la parola *assiomi* quì sta a significare ciò che EUCLIDE, nel suo testo, chiama « *nozioni comuni* » [κοιναὶ ἔννοιαι].

In PROCLO sono indicati tre diversi modi di intendere la differenza che passa fra gli assiomi e i postulati.

(¹) Per qualche indicazione in proposito vedere: RICCARDI, « *Saggio di una bibliografia Euclidea* ». Mem. di Bologna, serie 5, T. I, p. 27-34 [1890].

(²) Per quanto segue cfr. PROCLO, nel capitolo portante il titolo « *Petita et axiomata* ». Recentemente G. VAILATI, in una sua comunicazione al terzo Congresso Mat. [Heidelberg, 1904], ha richiamato l'attenzione degli studiosi sul significato di queste parole presso i greci. Cfr.: « *Intorno al significato della distinzione tra gli assiomi ed i postulati nella geometria greca* », Ver. des dritten Math. Kongresses, p. 575-581, [Leipzig, Teubner, 1905].

Il primo modo si riattacca alla differenza che passa fra *problema* e *teorema*. Il *postulato* differisce dall' *assioma*, come il *problema* differisce dal *teorema*, dice PROCLO. Con questo si deve intendere che *il postulato afferma la possibilità di una costruzione.*

Il secondo modo consiste nel dire che *il postulato è una proposizione di contenuto geometrico, dove l' assioma è una proposizione comune tanto alla geometria quanto all' aritmetica.*

Finalmente il terzo modo di intendere la differenza fra le due parole e riportato da PROCLO, è appoggiato all' autorità di ARISTOTILE [384-322]. Le parole *assioma* e *postulato* in ARISTOTILE non sembrano usate in senso esclusivamente matematico. *Assioma è ciò che è vero per se stesso*, in forza cioè del significato delle parole che contiene, *postulato è ciò che, pur non essendo un assioma*, nel senso sopradetto, *si ammette senza dimostrazione.*

Talchè la parola *assioma*, come appare anche meglio da un esempio portato da ARISTOTILE [*sottraendo da cose uguali cose uguali i resti sono uguali*], è usata in un senso che corrisponde, presso a poco, a quello delle *nozioni comuni* di EUCLIDE, mentre la parola *postulato* ha in ARISTOTILE un senso diverso da ciascuno dei due sopra accennati (1).

Ora a seconda che si adotta l' una o l' altra di queste distinzioni fra le due parole, una certa proposizione potrà classificarsi o fra i *postulati* o fra gli *assiomi*. Adottando la

---

(1) Cfr. ARISTOTILE: *Analytica Posteriora*, I. 10. Riportiamo integralmente il passo, un po' oscuro, in cui questo filosofo parla del postulato.

"Οσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αυτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα. ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ.

prima, dei cinque postulati euclidei solo i tre primi, secondo PROCLO, meriterebbero questo nome, in quanto in essi soltanto è domandato di poter fare una costruzione [congiungere due punti, prolungare una retta, descrivere un cerchio di centro e raggio arbitrarî]. Il IV [gli angoli retti sono uguali] ed il V dovrebbero invece classificarsi fra gli assiomi [1].

Accettando invece la seconda o la terza distinzione, i postulati euclidei sono tutti cinque da noverarsi fra i postulati.

Con ciò l'origine delle divergenze fra i varî codici è facilmente spiegabile. Ad avvalorare questa spiegazione possiamo aggiungere l'incertezza in cui si trovano gli storici nell'attribuire ad EUCLIDE i *postulati*, le *nozioni comuni*, le *definizioni* del primo libro. Per quanto riguarda i postulati, i dubbi più forti si elevano contro i due ultimi: la presenza dei primi tre concorda abbastanza con l'intero piano dell'opera [2].

---

[1] È opportuno osservare che il *V postulato* può enunciarsi così: *Si può costruire il punto comune a due rette, quando queste rette tagliate da una trasversale formano due angoli interni da una stessa parte la cui somma è minore di due angoli retti.* Da ciò risulta ch'esso, afferma, come i tre primi, la possibilità di una costruzione. Questo carattere scompare però totalmente se lo si enuncia, ad. es., così: *per un punto passa una sola parallela ad una retta,* ovvero: *due rette parallele ad una terza sono parellele fra loro.* Parrebbe adunque che la su accennata distinzione fosse soltanto formale. Non bisogna però lasciarsi illudere dalle apparenze: il *V postulato*, comunque lo si enunci, permette, in sostanza, di *costruire* il punto d'incontro di tutte le rette d'un fascio, ad eccezione di una, con una retta assegnata sul piano del fascio. Tuttavia fra questo postulato ed i tre postulati di costruzione una certa differenza esiste: in questi i dati sono completamente indipendenti, in quello i dati (le due rette tagliate dalla trasversale) sono assoggettati ad una condizione. Sicchè più che ai *postulati* od agli *assiomi*, *l'ipotesi euclidea* appartiene ad un genere intermedio fra gli uni e gli altri.

[2] Cfr. P. TANNERY: « *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide* » — Bull. Sciences Math. (2), t. XVIV, p. 162-175 [1884].

Ammettendo, sia pure contro l'autorità di GEMINO e PROCLO, l'ipotesi che il IV e V postulato non siano d'EUCLIDE, il rigore estremo degli « *Elementi* » dovè condurre i successivi geometri a ricercare nel seno dell'opera tutte quelle proposizioni ammesse senza dimostrazione. Ora quella che ci interessa si trova, sotto una forma molto concisa, espressa nella dimostrazione della prop. XXIX. Da questa potè adunque essere tratto il contenuto del *V postulato* ed aggiunto ai postulati di costruzione od agli assiomi, a seconda dell'opinione professata dal trascrittore dell'opera d'EUCLIDE.

Il suo posto naturale sarebbe del resto, anche secondo il GREGORY, dopo la prop. XVII, di cui enuncia l'inversa.

Notiamo infine che, qualunque sia il modo di risolvere la questione di parole qui sollevata, la moderna filosofia matematica tende generalmente a sopprimere la distinzione fra postulato ed assioma, intesa nel secondo e terzo dei modi sopra ricordati, perchè prevale la veduta di attribuire alle proposizioni fondamentali della geometria un carattere di ipotesi appoggiate ad una base empirica, mentre sembra superfluo porre fra queste proposizioni delle affermazioni, che sieno semplici conseguenze delle definizioni date.

CAPITOLO II.

I precursori della Geometria non-euclidea.

GEROLAMO SACCHERI [1667-1733]

§. 11 L'opera del Padre GEROLAMO SACCHERI: « *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia.* » [Milano, 1733], nella sua parte maggiore è dedicata alla dimostrazione del *V postulato*. L'idea direttiva delle ricerche geometriche di SACCHERI si trova nella sua « *Logica demonstrativa* » [Torino, 1697], precisamente in un tipo speciale di ragionamento, già usato da EUCLIDE [Lib. IX, Prop. XII], per il quale, *anche assumendo come ipotesi la falsità della proposizione che si vuol dimostrare, si giunge ugualmente a concludere che essa è vera* (1).

Uniformandosi a questa idea l'autore prende come date le prime ventisei proposizioni d'EUCLIDE ed assunta come ipotesi la falsità del *V postulato* cerca, fra le conseguenze di questa ipotesi, una qualche proposizione che lo autorizzi ad affermare la verità del postulato stesso.

Prima di esporre l'opera saccheriana rammentiamo che EUCLIDE, per dimostrare la sua Prop. 16ª [l'angolo esterno d'un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti], ammette implicitamente che la retta sia *infinita*,

---

(1) Cfr. G. VAILATI « *Di un' opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri* », Rivista Filosofica [1903].

essendo il suo ragionamento sostanzialmente fondato sulla esistenza d'un segmento doppio d'un segmento assegnato.

Della possibilità di lasciare cadere questa ipotesi parleremo nel seguito: per ora notiamo che SACCHERI tacitamente l'ammette, poichè, nel corso della sua opera, fa uso della *proposizione dell' angolo esterno.*

Notiamo infine che egli si giova ancora del *postulato di Archimede* e dell' *ipotesi della continuità della retta* [1], per estendere, a tutte le figure di un dato tipo, certe proposizioni ammesse come vere soltanto per una figura di quel tipo.

§ 12. La figura fondamentale di SACCHERI è il quadrilatero *birettangolo isoscele*, cioè il quadrilatero con due lati opposti uguali e perpendicolari alla base. Le proprietà di tale figura si deducono dal seguente 1° *lemma*, di facile dimostrazione:

Se in un quadrilatero ABCD, con gli angoli consecutivi $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ retti, i lati AD e BC sono uguali anche l' angolo $\widehat{C}$ è uguale all' angolo $\widehat{D}$ [prop. I.] *se i lati AD e BC sono disuguali, dei due angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ è maggiore quello adiacente al lato minore e viceversa.*

Sia ora ABCD un quadrilatero birettangolo [$\widehat{A} = \widehat{B} =$ 1 $\widehat{\textit{retto}}$] ed isoscele [AD = BC]: nell' ipotesi euclidea anche gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ sono retti, talchè ammettendo che questi angoli possano essere entrambi *ottusi* od entrambi *acuti* si nega implicitamente il *V postulato.* SACCHERI discute appunto le tre ipotesi relative agli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, ch' egli, denominava rispettivamente *ipotesi dell' angolo retto* [$\widehat{C} = \widehat{D} =$ 1 $\widehat{\textit{retto}}$], *ipotesi dell' angolo ottuso* [$\widehat{C} = \widehat{D} >$ 1 $\widehat{\textit{retto}}$], *ipotesi dell' angolo acuto* [$\widehat{C} = \widehat{D} <$ 1 $\widehat{\textit{retto}}$].

---

[1] Quest' ipotesi è usata da SACCHERI nella sua forma intuitiva, cioè: un segmento, che passa con continuità dalla lunghezza a alla lunghezza b, diversa da a, acquista, durante la variazione, una qualsiasi lunghezza compresa tra a e b.

Un primo notevole risultato è il seguente: *A seconda che nel quadrilatero birettangolo isoscele ABCD è verificata l' ip. ang. retto, l' ip. ang. ottuso, l' ip. ang. acuto si ha rispettivamente:* $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$ [prop. III]. Infatti, nell' *ip. ang. retto*, dal lemma precedente si deduce subito $AB = CD$. Nell' *ip. ang. ottuso* la perpendicolare OO' sul mezzo del segmento AB divide il quadrilatero fondamentale in due quadrilateri uguali e rettangoli in O ed O'. Essendo poi $\widehat{D} > \widehat{A}$, per il citato lemma sarà $AO > DO'$, quindi $AB > CD$. Nell' *ip. ang. acuto* queste disuguaglianze cambiano di senso, quindi: $AB < CD$.

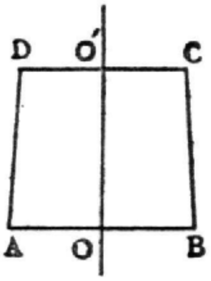

Fig. 9.

Il teorema dimostrato s' inverte ragionando per assurdo [prop. IV].

Se in un solo caso è vera l' ipotesi dell' angolo retto, è vera in ogni altro caso. [prop. V]

Sia nel quadrilatero birettangolo isoscele ABCD verificata l' *ip. ang. retto.* Presi in AD, e BC i punti H e K equidistanti da AB si formi il quadrilatero ABKH. Se HK è perpendicolare ad AH e BK anche nel nuovo quadrilatero sarebbe vera l' *ip. ang. retto.* Altrimenti si supponga $\widehat{AHK}$ acuto, e conseguentemente il suo adiacente $\widehat{DHK}$ ottuso. Allora nel quadrilatero ABKH, per l' *ip. ang. acuto*, sarebbe $AB < HK$, mentre nel quadrilatero HKCD, per l' *ip. ang. ottuso*, sarebbe $HK < DC$. Ma queste due disuguaglianze sono contraddittorie, essendo $AB = DC$ [*ip. ang. retto* in ABCD]. Dunque $\widehat{AHK}$ non può essere acuto; e poichè con lo stesso ragionamento si proverebbe che $\widehat{AHK}$ non può essere ottuso, si conclude che anche nel quadrilatero ABKH vale l' *ip. ang. retto.*

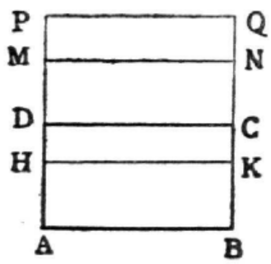

Fig. 10.

Sui prolungamenti di AD e BC si prendano i punti M, N equidistanti dalla base AB. Dico che anche nel quadrilatero ABNM vale l' *ip. ang. retto.* Infatti se AM è multiplo di AD la proposizione è immediata; altrimenti si prenda un multiplo di AD maggiore di AM [*post. Archimede*] e sui raggi AD...., BC... i due segmenti AP, BQ uguali a questo multiplo. Per quanto si disse sopra nel quadrilatero ABQP vale l'*ip. ang. retto*, e conseguentemente la stessa ipotesi vale ancora nel quadrilatero ABNM.

Finalmente l'ipotesi in discorso vale per un quadrilatero di base qualunque, poichè, nella fig. 10, può assumersi per base uno dei lati perpendicolari ad AB.

Osservazione. Questo teorema di Saccheri è sostanzialmente contenuto in quello di Giordano Vitale, riportato a pag. 14. Infatti, riferendoci alla fig. 7, l'ipotesi:

$$DA = HK = CB,$$

è equivalente all'altra:

$$\widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{C} = 1 \textit{ retto}.$$

Ma dalla prima discende l'equidistanza delle due rette DC, AB, [1] quindi la validità dell'*ip. ang. retto* in tutti i quadrilateri birettangoli isosceli di altezza uguale al segmento DA. La stessa ipotesi vale poi anche in un quadrilatero di altezza qualunque, perchè in esso può invertirsi l'ufficio dei due segmenti base ed altezza.

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, essa è vera in ogni altro caso. [prop. VI].

Riferiamoci al solito quadrilatero ABCD, supponendo che gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ siano ottusi. Presi su AD e BC i punti H, K, equidistanti da AB, si osservi in primo luogo che il segmento HK non può essere perpendicolare ai due lati

---

(1) Veramente Giordano, nel suo ragionamento, si riferisce esplicitamente ai punti del segmento DC, che dimostra equidistanti dalla base AB del quadrilatero. Però lo stesso ragionamento è applicabile a tutti i punti della retta DC. — Cfr. la nota di R. Bonola, citata a pag. 14.

AD, BC, inquantochè nel quadrilatero ABKH, e conseguentemente nel quadrilatero fondamentale, sarebbe verificata l'*ip. ang. retto.* Suppongasi allora che $\widehat{KHA}$ sia acuto. Allora, per l'*ip. ang. acuto,* sarebbe HK > AB, mentre, valendo in ABCD l'*ip. ang. ottuso*, è AB > CD. Segue: HK > AB > CD. Muovendo ora con *continuità* la retta HK, in modo ch'essa rimanga perpendicolare alla mediana OO' del quadrilatero fondamentale, il segmento HK, compreso fra i lati opposti AD, BC, maggiore di AB nella posizione iniziale, diverrebbe minore di AB nella posizione finale CD. In base al postulato della continuità esisterebbe allora una posizione intermedia H'K', per cui H'K' = AB. Conseguentemente nel quadrilatero ABK'H' varrebbe l'*ip. ang. retto* [prop. III], la quale, pel teorema precedente, non lascierebbe sussistere in ABCD l'*ip. ang. ottuso.* Il ragionamento vale anche se i segmenti AH, BK sono maggiori di AD, quindi non è possibile che l'angolo $\widehat{AHK}$ sia acuto. Dunque in ABKH vale l'*ip. ang. ottuso*, come in ABCD.

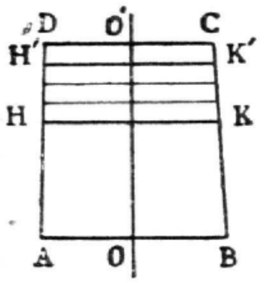

Fig. 11.

Passiamo ora a dimostrare il teorema per un quadrilatero di base qualunque, ad es. di base BK.

Essendo gli angoli $\widehat{K}$, $\widehat{H}$ ottusi, la perpendicolare in K a KB incontrerà il segmento AH nel punto M, formando l'angolo $\widehat{AMK}$ ottuso [teor. angolo esterno]. Allora in ABKM sarà [1° lemma] AB > KM. Preso allora su AB il segmento BN uguale ad MK, può costruirsi il quadrilatero birettangolo isoscele BKMN, con l'angolo $\widehat{MNB}$ ottuso, perchè esterno al triangolo ANM. Allora anche nel nuovo quadrilatero vale l'*ip. ang. ottuso.*

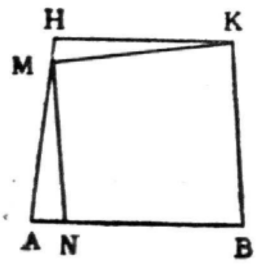

Fig. 12.

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo acuto, è vera in ogni caso [prop. VII].

Il teorema si dimostra subito per assurdo.

§ 13. Da questi ultimi teoremi SACCHERI ricava facilmente una importante conseguenza, relativa ai triangoli. *A seconda che si trova verificata l' ipotesi dell' angolo retto, l' ipotesi dell' angolo ottuso, l' ipotesi dell' angolo acuto, la somma degli angoli d' un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore, minore di due angoli retti* [prop. IX].

Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Si completi il quadrilatero tracciando AD uguale a BC e perpendicolare ad AB, indi congiungendo D con C.

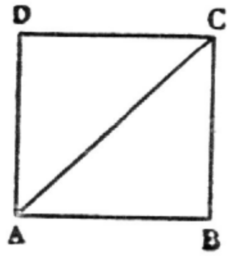

Fig. 13.

Nell'*ip. ang. retto* i due triangoli ABC, ACD sono uguali, per cui: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$. Segue immediatamente, nel triangolo ABC:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \ \widehat{retti}.$$

Nell' *ip. ang. ottuso*, essendo AB > DC, sarà: ACB > DAC [1], per cui nel triangolo in discorso avremo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 2 \ \widehat{retti}.$$

Nell' *ip. ang. acuto*, essendo AB < DC, segue: $\widehat{ACB} < \widehat{DAC}$, quindi, nel solito triangolo:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2 \ \widehat{retti}.$$

Il teorema dimostrato, che si estende facilmente ad un triangolo qualunque, con la decomposizione della figura gura in due triangoli rettangoli, viene invertito da SACCHERI nella prop. XV, mediante un ragionamento per assurdo.

Una facile conseguenza di questi risultati è il seguente teorema:

Se in un solo triangolo la somma degli angoli è uguale, maggiore, minore di due angoli retti, in ogni altro trian-

---

[1] Questa disuguaglianza vien dimostrata da SACCHERI nella sua *VIII proposizione* e serve di lemma alla *prop. IX*. Abbiamo ommessa la facile dimostrazione, perchè essa si trova spessissimo nei testi elementari, avanti la teoria delle parallele.

golo la somma in discorso è rispettivamente uguale, maggiore, minore di due angoli retti (1).

Questo teorema, che SACCHERI non enuncia esplicitamente, nella prima e terza ipotesi fu ritrovato e reso noto da LEGENDRE, circa un secolo dopo. Esso dovrà quindi chiamarsi teorema di SACCHERI e non teorema di LEGENDRE, come ordinariamente si fà.

§ 14. I precedenti teoremi sul quadrilatero birettangolo isoscele furono dimostrati da SACCHERI, e successivamente da altri geometri, col sussidio del *postulato di Archimede* e *del principio della continuità* [Cfr. prop., V, VI]. Il Sig. M. Dehn (2) ha però dimostrato ch' essi ne sono indipendenti. Possiamo stabilire la cosa per via elementare, nel modo seguente (3).

Sulla retta r si fissino due punti B, D, dai quali si elevino i due segmenti perpendicolari ed uguali fra loro BA, DC, poscia si congiungano i due punti A e C per mezzo della retta s. La figura ottenuta, in cui evidentemente si ha $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$, è fondamentale per le nostre considerazioni, e ad essa ci riferiremo costantemente. Ciò posto siano E ed

---

(1) Un' altra proposizione di SACCHERI, che non ci interessa direttamente, afferma che *se in un solo quadrilatero la somma degli angoli è uguale, maggiore, minore di quattro angoli retti, si deduce rispettivamente l' ip. ang. retto, l' ip. ang. ottuso, l' ip. ang. acuto.* A questa proposizione si riattacca una osservazione di SACCHERI sul postulato di WALLIS [cfr. § 9]. WALLIS poteva semplicemente ammettere l' esistenza di due soli triangoli con angoli uguali e lati disuguali per dedurre l' esistenza di un quadrilatero in cui la somma degli angoli è uguale a quattro angoli retti, quindi la validità dell' *ip. ang. retto* e successivamente il *V postulato.*

(2) Cfr. Math. Ann. t. 53, p. 405-439: « *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* ».

(3) Cfr. BONOLA: « *I teoremi del Padre Gerolamo Sacchieri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn.* ». Rend. Istituto Lombardo, serie II, Vol. XXXXIII [1905].

E′ due punti di s, il primo situato fra A e C, il secondo no; siano inoltre F ed F′ i piedi delle perpendicolari calate da E ed E′ sulla retta r. Valgono allora i seguenti teoremi:

1°) *Se:* $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{EF} = \mathrm{AB}, \\ \textit{ovvero:} \\ \mathrm{E'F'} = \mathrm{AB} \end{array}\right\}$, *gli angoli* $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{DCA}}$ *sono retti.*

2°) *Se:* $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{EF} > \mathrm{AB}, \\ \textit{ovvero:} \\ \mathrm{E'F'} < \mathrm{AB} \end{array}\right\}$, *gli angoli* $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{DCA}}$ *sono ottusi.*

3°) *Se:* $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{EF} < \mathrm{AB}, \\ \textit{ovvero:} \\ \mathrm{E'F'} > \mathrm{AB} \end{array}\right\}$, *gli angoli* $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{DCA}}$ *sono acuti.*

Dimostriamo il 1° teorema.

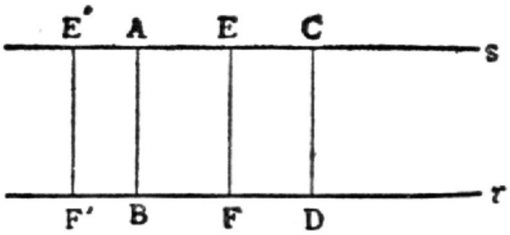

Fig. 14.

Dall'ipotesi EF = AB si deducono le seguenti relazioni:

$$\widehat{\mathrm{BAE}} = \widehat{\mathrm{FEA}}; \qquad \widehat{\mathrm{FEC}} = \widehat{\mathrm{DCE}};$$

le quali, insieme alla relazione fondamentale:

$$\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{DCA}},$$

conducono a stabilire l'uguaglianza dei due angoli $\widehat{\mathrm{FEA}}$, $\widehat{\mathrm{FEC}}$. I quali, essendo adiacenti, saranno entrambi retti e conseguentemente retti i due angoli $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{DCA}}$.

Lo stesso ragionamento è applicabile nell' ipotesi

$$E'F' = AB.$$

Dimostriamo il 2° teorema.

Supponiamo in primo luogo EF > AB. Allora su EF prendiamo EI = AB e congiungiamo I con A e C.

Valgono allora le seguenti relazioni.

$$\widehat{BAI} = \widehat{FIA},\ \widehat{DCI} = \widehat{FIC}$$

Inoltre, pel teorema dell' angolo esterno [Euclide, XVII], avremo pure:

$$\widehat{FIA} + \widehat{FICF} > \widehat{EA} + \widehat{FEC} = 2\ \widehat{retti}$$

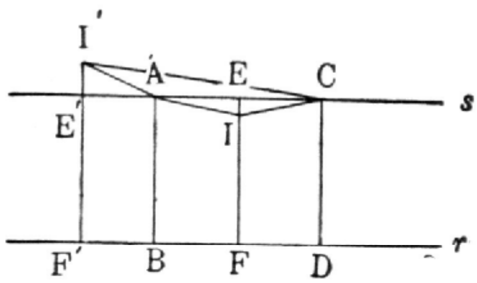

Fig. 15.

E poichè si ha:

$$\widehat{BAC} + \widehat{DCA} > \widehat{BAI} + \widehat{DCI},$$

si deduce:

$$\widehat{BAC} + \widehat{DCA} > \widehat{FIA} + \widehat{FIC} > 2\ \widehat{retti}$$

Allora, per l' uguaglianza dei due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$, si ricava:

$$\widehat{BAC} > 1\ \widehat{retto} \qquad \text{c. d. d.}$$

Supponiamo in secondo luogo E'F' < AB. Allora prolunghiamo F'E' fino ad ottenenere il segmento F'I' = AB e congiungiamo I' con C ed A.

Valgono al solito le seguenti relazioni:

$$\widehat{F'I'A} = \widehat{BAI'}; \qquad \widehat{F'I'C} = \widehat{DCI'};$$
$$\widehat{I'AE'} > \widehat{I'CE'}; \qquad \widehat{F'I'A} < \widehat{F'I'C}$$

Combinando queste relazioni si deduce in primo luogo

$$\widehat{BAI'} < \widehat{DCI'},$$

dalla quale, sottraendo membro a membro la penultima delle precedenti, otteniamo:

$$\widehat{BAE'} < \widehat{DCE'} = \widehat{BAC}.$$

Ma i due angoli $\widehat{BAE'}$, $\widehat{BAC}$ sono adiacenti, quindi $\widehat{BAC}$ risulta ottuso, c. d. d.

In modo perfettamente analogo si dimostra il 3° teorema.

Questi teoremi s' invertono poi facilmente ragionando per assurdo. In particolare, se M ed N sono i punti medi dei due segmenti AC, BD, per il segmento MN di perpendicolare comune alle due rette AC, BD, avremo che:

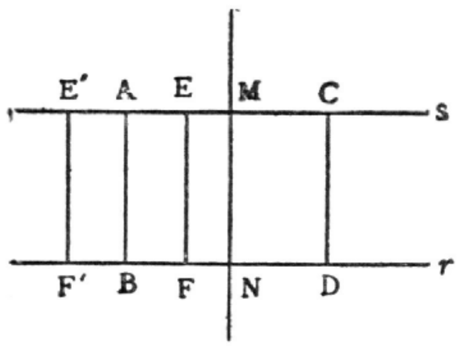

Fig. 16.

se: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 1$ *retto, allora:* $MN = AB$;

se: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} > 1$ *retto, allora:* $MN > AB$;

se: $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} < 1$ *retto, allora:* $MN < AB$.

Inoltre è facile vedere che:

1°) *se:* $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 1$ *retto, anche:* $\left\{ \begin{matrix} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{matrix} \right\} = 1$ *retto*;

2°) *se:* $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} > 1$ *retto, anche:* $\left\{ \begin{matrix} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{matrix} \right\} > 1$ *retto*;

3°) *se:* $\widehat{BAC} = \widehat{DCA} < 1$ *retto, anche:* $\left\{ \begin{matrix} \widehat{FEM} \\ \widehat{F'E'M} \end{matrix} \right\} < 1$ *retto*.

Infatti, nel 1° caso, essendo le rette *r, s* equidistanti, valgono le seguenti relazioni:

$$\widehat{NMA} = \widehat{FEM} = \widehat{BAC} = \widehat{F'E'M} = 1 \text{ retto}.$$

Per dimostrare il 2° ed il 3° caso basta ragionare per assurdo, tenendo presenti i risultati sopra ottenuti.

Sia ora P un punto della retta MN, non compreso fra i punti M ed N. Sia PR la perpendicolare ad MN ed RK la

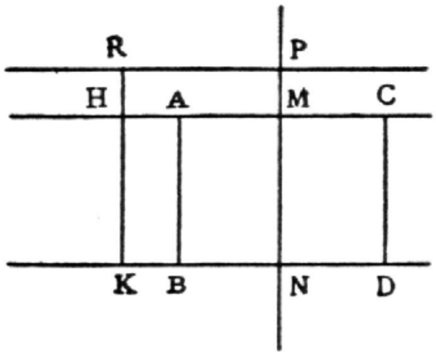

Fig. 17.

perpendicolare a BC in K. Quest' ultima perpendicolare incontrerà AC in un punto H. Ciò posto i precedenti teoremi permettono senz' altro di affermare che:

$$\textit{se: } \widehat{BAM} = 1 \textit{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{array} \right\} = 1 \textit{ retto};$$

$$\textit{se: } \widehat{BAM} > 1 \textit{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{array} \right\} > 1 \textit{ retto};$$

$$\textit{se: } \widehat{BAM} < 1 \textit{ retto, anche: } \left\{ \begin{array}{c} \widehat{KHM} \\ \widehat{KRP} \end{array} \right\} < 1 \textit{ retto}.$$

Queste proprietà, come facilmente si scorge, valgono anche se il punto P cade fra M, N.

Concludendo, i tre ultimi teoremi, che manifestamente coincidono con quelli di SACCHERI relativi ai quadrilateri birettangoli isosceli, vale a dire: *se in un solo caso è vera* *rispettivamente l' ipotesi dell' angolo retto, dell' angolo ottuso, dell' angolo acuto essa è vera in ogni altro caso;* sono dimostrati indipendentemente dal *postulato di Archimede.*

Volendo ora passare dai teoremi sui quadrilateri ai teoremi sui triangoli, enunciati sul principio di questo paragrafo, possiamo senz' altro riferirci ai ragionamenti di SACCHERI [cfr. p. 25], poichè quei ragionamenti non dipendono affatto dal postulato in discorso. Con ciò è ottenuto il risultato che ci eravamo proposto.

§ 15. Per rendere più breve l' esposizione dell' opera saccheriana, stacchiamo dalle prop. XI, XII il contenuto del seguente 2° *lemma.*

Sia ABC un triangolo rettangolo in C, siano H il punto di mezzo di AB, e K il piede della perpendicolare calata da H su AC.

Allora avremo:

$$\begin{aligned} AK &= KC, && \textit{nell' ip. ang. retto;} \\ AK &< KC, && \textit{nell' ip. ang. ottuso;} \\ AK &> KC, && \textit{nell' ip. ang. acuto.} \end{aligned}$$

La parte che riguarda l' *ip. ang. retto* è immediata. Nell' *ip. ang. ottuso*, essendo la somma degli angoli d' un quadrilatero maggiore di quattro angoli retti, sarà: $\widehat{AHK} < \widehat{HBC}$. Calata poi da H la HL, perpendicolare a BC, i due triangoli AHK, HBL, con le ipotenuse uguali, in forza della precedente relazione danno luogo alla seguente disuguaglianza: AK < HL. Ma nel quadrilatero trirettangolo HKCL l' angolo $\widehat{H}$ è ottuso [*ip. ang. ottuso*], per cui sarà: HL < KC, quindi: AK < KC.

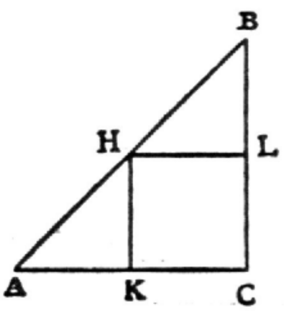

Fig. 18.

Nello stesso modo si dimostra la terza parte del lemma.

Una facile estensione di questo lemma è la seguente proposizione:

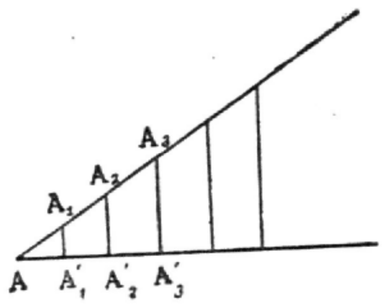

Fig. 19.

Se sul primo lato d' un angolo di vertice A si prendono consecutivamente i segmenti uguali AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... e si costruiscono le rispettive proiezioni AA'_1, $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$... sul secondo lato dell' angolo, valgono le seguenti relazioni.

$AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = ...,$ *nell' ip. ang. retto;*

$AA'_1 < A'_1A'_2 < A'_2A'_3 < ....,$ *nell' ip. ang. ottuso;*

$AA'_1 > A'_1A'_2 > A'_2A'_3 > ....,$ *nell' ip. ang. acuto.*

Ommettiamo per brevità la facile dimostrazione.

Vediamo piuttosto quali importanti conseguenze possono dedursi da questa proposizione nell' *ip. ang. retto* e nell' *ip. ang. ottuso.*

Siano AC e BD due rette, la prima obliqua, la seconda perpendicolare alla retta AB. Su AC, dalla banda dell' angolo acuto $\widehat{CAB}$ e della perpendicolare BD, si prenda il segmento arbitrario AA_1 e se ne costruisca la proiezione AA'_1 su AB. Si fissi poi un numero n abbastanza grande, tale che l' ennesimo multiplo di AA'_1 sia maggiore di AB; poi su AC, dalla banda di A_1, si costruisca il segmento AA_n, multiplo di AA_1 secondo il numero n [1]. Calata poi da A_n la perpendicolare $A_nA'_n$ su AB, avremo:

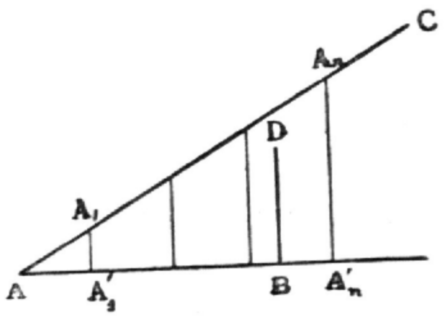

Fig. 20.

$AA'_n = (AA'_1) . n > AB,$ nell' *ip. ang. retto;*

$AA'_n > (AA'_1) . n > AB,$ nell' *ip. ang. ottuso.*

[1] Il postulato di Archimede, di cui quì si fa uso, comparisce in una tale forma da includere implicitamente l' infinità della retta.

Perciò la BD, perpendicolare al lato AA'_n del triangolo rettangolo $AA_nA'_n$, incontrerà necessariamente l'ipotenusa AA_n; cioè:

Nell' ip. ang. retto e nell' ip. ang. ottuso, una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta si incontrano. [prop. XI, XII] (1).

Di qui si deduce il teorema seguente:

Nell' ipotesi dell' angolo retto ed in quella dell' angolo ottuso è vero il V postulato di Euclide [prop. XIII].

Siano AB, CD due rette intersecate dalla retta AC. Supponiamo che sia:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACD} < 2 \text{ retti}.$$

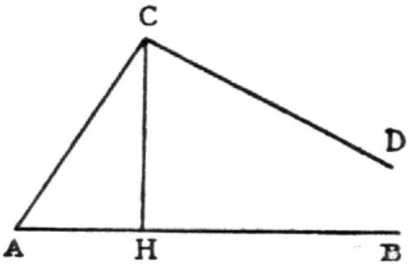

Fig. 21.

Allora uno degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACD}$, ad esempio il primo, sarà acuto. Da C si cali la perpendicolare CH su AB. Nel triangolo ACH, in forza a delle ipotesi fatte, sarà:

$$\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{H} \overline{>} 2 \text{ retti}.$$

Ma per ipotesi abbiamo ancora:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACD} < 2 \text{ retti}.$$

Combinando queste due relazioni si ottiene:

$$\widehat{H} > \widehat{HCD}.$$

E poichè $\widehat{H}$ è retto, l'angolo $\widehat{HCD}$ risulta acuto. Allora,

---

(1) Il metodo seguito da SACCHERI per dimostrare questa proposizione è sostanzialmente identico a quello di NASÎR-EDDIN. NASÎR-EDDIN però si riferisce soltanto all' *ip. ang. retto*, avendo egli dimostrato in antecedenza che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti. — È opportuno notare che SACCHERI conobbe e criticò l'opera del geometra arabo.

in forza delle prop. XI, XII, le rette CD ed AB s'incontrano [1].

Questo risultato permette a SACCHERI di concludere che *l'ip. angolo ottuso è falsa* [prop. XIV]. Infatti, in questa ipotesi vale il *postulato euclideo* [prop. XIII] e conseguentemente valgono gli ordinari teoremi che da questo postulato si deducono. Ma allora nel quadrilatero fondamentale la somma degli angoli è uguale a quattro angoli retti, cioè è vera l'*ip. ang. retto* [2].

§. 16. Volendo SACCHERI provare che il *V postulato* è valido incondizionatamente, si accinge a distruggere anche l'*ip. ang. acuto.*

Intanto è bene notare che *in questa ipotesi esistono una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta che non s'incontrano* [prop. XVII]. Per costruirle, dal vertice B del triangolo ABC, rettangolo in C, si tracci la retta BD, in modo che sia: $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. Allora, per l'*ip. ang. acuto*, l'angolo $\widehat{CBD}$ è acuto e le due rette CA, BD, che non incontrano [EUCLIDE, XXVII], sono l'una obliqua e l'altra perpendicolare alla BC.

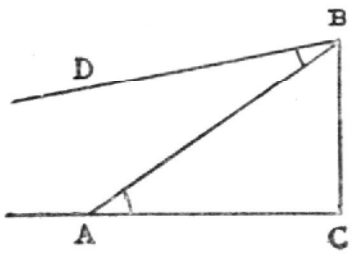

Fig. 22.

D'ora innanzi ci riferiremo esclusivamente all'*ip. ang. acuto.*

---

(1) Anche questa dimostrazione si trova nell'opera di NASÎR-EDDIN, alla quale evidentemente SACCHERI si è ispirato nelle sue ricerche.

(2) È opportuno notare che in questa dimostrazione SACCHERI fa uso di quel tipo speciale di ragionamento, di cui parlammo nel §. 11. Infatti: *anche ammettendo che sia vera l'ip. ang. ottuso, si arriva a concludere che è vera l'ip. ang. retto.* È questa una forma caratteristica, che in taluni casi può assumere l'ordinario ragionamento per assurdo.

Siano a, b due rette coplanari non incidenti. Dai punti A_1, A_2 di a si calino le perpendicolari A_1B_1, A_2B_2 su b. Gli angoli $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$ del quadrilatero ottenuto, possono essere: 1°) uno retto ed uno acuto: 2°) entrambi acuti; 3°) uno acuto e l'altro ottuso. Nel primo caso esiste senz'altro la perpendicolare comune alle due rette a, b. Nel secondo caso si prova l'esistenza della perpendicolare comune ragionando per continuità [SACCHERI, prop. XXII]. Infatti, se si muove con continuità la retta A_1B_1, mantenendola perpendicolare a b, fino a portarla su A_2B_2, l'angolo $B_1\widehat{A_1}A_2$, acuto nella posizione iniziale, cresce fino a diventare ottuso: segue l'esistenza d'una posizione intermedia AB, in cui l'angolo $B\widehat{A_1}A_2$ è retto. Allora AB è la perpendicolare comune alle due rette a, b.

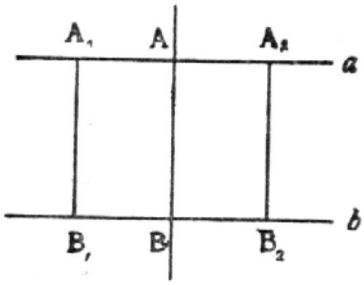

Fig. 23.

Nel 3° caso, o le rette ab non ammettono una perpendicolare comune, ovvero, la perpendicolare comune, se esiste, non cade fra B_1 e B_2.

Data, come *ipotesi*, l'esistenza di due rette coplanari non incidenti e prive di perpendicolare comune, SACCHERI dimostra che tali rette vanno sempre più accostandosi [prop. XXIII] e che la loro distanza finisce per diventare minore di un segmento piccolo a piacere [prop. XXV]. In altre parole, se esistono due rette coplanari non incidenti, prive di perpendicolare comune, esse debbono comportarsi *asintoticamente* fra loro [1].

Per provare l'effettiva esistenza di rette asintotiche, SACCHERI ragiona presso a poco così. Le rette d'un fascio di centro A possono, rispetto ad una retta b, coplanare al fascio e non passante per A, ripartirsi in due gruppi:

[1] Questo risultato giustifica il dubbio affacciato dai greci circa la possibile esistenza di rette coplanari asintotiche [cfr. p. 2].

1°) *rette del fascio incidenti a* b *; 2°) rette del fascio che ammettono con* b *una perpendicolare comune.* In forza del principio della continuità esistono due rette p, q che dividono il fascio in due parti. Alla prima parte appartengono le rette incidenti a b, alla seconda parte le rette non inci-

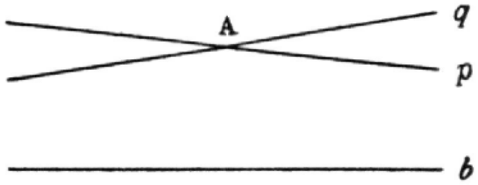

Fig. 24.

denti a b, ed aventi con b una perpendicolare comune. Quanto alle rette p, q si dimostra che non appartengono nè all' una nè all' altra parte. Infatti, che p non sia incidente a b è manifesto. Per provare che p non ammette perpendicolare comune con b ragioniamo per assurdo. Sia PB l'ipotetica perpendicolare alle due rette p e b. Calata da A la

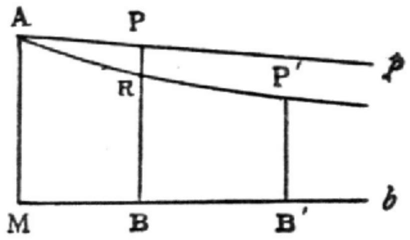

Fig. 25.

perpendicolare AM su b e preso su b il punto B′, da banda opposta di M rispetto a B, si elevi la B′P′, perpendicolarmente a b, poi si cali la perpendicolare AP′ su B′P′. La retta AP′ non è incidente a b, perchè ammette con b una perpendicolare comune ed incontra la PB in un punto R. L'angolo $\widehat{ARB}$, supplementare dell' angolo acuto $\widehat{BRP'}$, è ottuso, perciò il raggio AR cadrà nell'angolo $\widehat{MAP}$. Ma allora AR sarebbe ad un tempo secante e non secante rispetto a b. Questa contraddizione fa cadere l' ipotesi d' una perpendicolare comune a b e p. Concluderemo pertanto che le due rette p e q sono asintotiche alla retta b [1].

§ 17. A questo punto SACCHERI cerca di concludere, affidandosi, più che alla logica, alla intuizione ed alla fede nella validità del *V postulato*. Per dimostrare che *l' ip. ang. acuto è assolutamente falsa, perchè ripugna alla natura della linea retta* [prop. XXXIII], si appoggia su cinque lemmi, distesi in ben 16 pagine: in sostanza però si riduce ad *affermare* che « *se essa fosse vera, la retta AP'* [fig. 25] *avrebbe con MB una perpendicolare comune in un punto comune all' infinito, ciò che è contrario alla natura della linea retta.* » La pretesa dimostrazione di SACCHERI è dunque fondata sull' *estensione all' infinito* di certe proprietà, valide per figure situate a distanza finita.

SACCHERI però non è soddisfatto del suo ragionamento e tenta di raggiungere la desiderata prova ripigliando l' antico concetto di equidistanza. Non vale la pena di riportare la nuova discussione inquantochè non rappresenta nulla di meglio di quanto fecero i suoi predecessori.

Pur mancando allo scopo l' opera saccheriana è di grande importanza: oltre porgerci il massimo tentativo in favore *V postulato*, essa, pel fatto stesso di non aver scoperto delle delle contraddizioni fra le conseguenze dell' *ip. ang. acuto*, non poteva a meno che suggerire il dubbio che su questa

(1) Nell' opera di SACCHERI, prima di questo risultato, si trovano molte altre proposizioni interessanti, fra le quali è degna di nota la seguente: *Se due rette si avvicinano sempre più, e la loro distanza si mantiene sempre superiore ad un certo segmento assegnabile, l' ipotesi dell' angolo acuto viene distrutta* Talchè, postulare l' assenza di rette asintotiche equivale ad ammettere il postulato euclideo.

ipotesi potesse edificarsi un sistema geometrico logicamente conseguente e che il postulato euclideo fosse indimostrabile [1].

GIOVANNI ENRICO LAMBERT [1728-1777]

§ 18. Quale influenza esercitasse l'opera di SACCHERI sui geometri del XVIII secolo non si può precisare: tuttavia è probabile che il geometra svizzero LAMBERT la conoscesse [2], imperocchè nella sua « *Theorie der Parallellinien* » [1766] egli cita una dissertazione di G. S. KLÜGEL [1739-1812] [3], ov'è minutamente analizzata l'opera del geometra italiano.

La « *Theorie der Parallellinien* » di LAMBERT, pubblicata nel 1786, dopo la morte dell'autore, per cura di G. BERNOUILLI e C. F. HINDENBURG [4], è divisa in tre parti. La

---

(1) L'opera del P. SACCHERI fu abbastanza diffusa dopo la sua pubblicazione e di essa parlarono due storie delle matematiche: quella di J. C. HEILBRONNER [Lipsia, 1742] e quella del MONTUCLA [Parigi, 1758]. Inoltre è minutamente analizzata da G. S. KLÜGEL, nella sua dissertazione quì sotto citata [(3)]. Non di meno cadde in dimenticanza. Solo nel 1889 E. BELTRAMI, con la sua nota: « *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky.* » [Rend. Acc. Lincei, (4), V, p. 441-448], richiamò su di essa l'attenzione dei geometri. In seguito l'opera di SACCHERI fu tradotta in inglese da G. B. HALSTED [Am. Math. Montly, I, 1894 e successivi], in tedesco dai SS. STÄCKEL ed ENGEL [*Th. der P.*, 1895], in italiano da G. BOCCARDINI [Milano, Hoepli, 1904].

(2) Cfr. SEGRE: « *Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea* », Atti Acc. Scienze di Torino, t. XXXVIII, [1903].

(3) « *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel* » [Gottinga, 1763].

(4) cfr.: Magazin für reine und angewandte Math., 2 Stüch, p. 137-164, 3 Stüch, p. 325-358, [1786]. — L'opera di LAMBERT fu ripubblicata dai SS. STÄCKEL ed ENGEL nella loro « *Th. der P.* », p. 135-208, preceduta da notizie storiche riguardanti l'autore.

prima, di natura critica e filosofica, fa cenno della duplice questione che possiamo proporci sul *V postulato*, cioè se esso possa dimostrarsi col semplice aiuto dei precedenti o se invece a ciò non si richieda l'impiego di qualche altra ipotesi. La seconda parte è dedicata all'esposizione di vari tentativi, in cui il postulato euclideo è ricondotto a proposizioni semplicissime, le quali però alla loro volta dovrebbero essere dimostrate. La terza, la più importante, contiene un sistema di ricerche simili a quelle del padre SACCHERI, che rapidamente riassumiamo.

§ 19. La figura fondamentale di LAMBERT è un *quadrilatero trirettangolo* e le tre ipotesi sono fatte sulla natura del 4° angolo. La prima è l'*ip. ang. retto*, la seconda è l'*ip. ang. ottuso*, la terza è l'*ip. ang. acuto*. Anche nella trattazione di queste ipotesi l'autore si accosta al metodo saccheriano.

La *prima ipotesi* conduce facilmente al sistema euclideo.

Per rigettare la *seconda ipotesi* LAMBERT ricorre ad una figura formata con due rette a, b perpendicolari alla terza

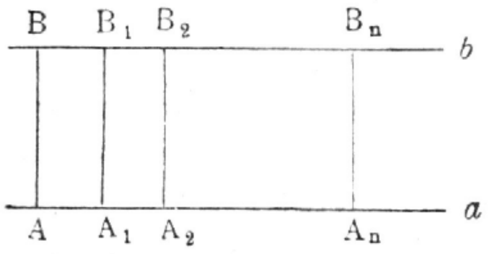

Fig. 26.

retta AB. Dai punti susseguentisi B, B_1, B_2,... B_n della b cala le perpendicolari BA, B_1A_1,... B_nA_n su a e dimostra, in primo luogo, che i segmenti di perpendicolare compresi fra a e b vanno decrescendo a partire dalla perpendicolare AB; poi che la differenza fra ciascuna di esse e la successiva va crescendo. Talchè risulta:

$$BA - B_n A_n > (BA - B_1A_1) \, . \, n$$

Ma, per n abbastanza grande, il secondo membro della disuguaglianza è grande quanto si vuole [*post. Archimede*], mentre il primo membro è sempre minore di BA. Questa contraddizione permette a Lambert di dichiarare falsa la *seconda ipotesi*.

Per trattare la *terza ipotesi* Lambert si giova ancora della precedente figura, sulla quale dimostra che i segmenti BA, B_1A_1, B_2A_2.... B_nA_n vanno crescendo e che in pari tempo crescono le differenze fra ciascuno di essi e il precedente. Questo risultato però non lo conduce a contraddizioni, percui, come già Saccheri, è costretto a proseguire nelle deduzioni. Allora, nella *terza ipotesi*, trova che la somma degli angoli di un triangolo è minore di due angoli retti, e, oltrepassando Saccheri, scopre che la *deficienza d'un poligono*, cioè la differenza fra $2(n-2)$ angoli retti e la somma degli angoli d'un poligono, *è proporzionale all'area dello stesso poligono*. Questo risultato si ottiene più facilmente osservando che tanto l'area, quanto la deficienza d'un poligono somma di più altri, sono rispettivamente la somma delle aree e delle deficienze dei poligoni che lo compongono (²).

§ 20. Un'altra notevole scoperta di Lambert si riferisce alla misura delle grandezze geometriche. Essa consiste precisamente in ciò che, mentre nella geometria ordinaria, alla misura dei segmenti compete soltanto un significato *rela-*

(¹) Il *postulato d' Archimede* anche qui è usato sotto tale forma da includere l' infinità della retta [cfr. Saccheri, nota a p. 32].

(²) Conviene notare che Saccheri aveva già riscontrato, nell'*ip. ang. acuto,* la deficienza di cui si parla, ed anche implicitamente notato che un quadrilatero somma di più altri ha per deficienza la somma delle deficienze [prop. XXV]. Tuttavia non ne aveva tratto alcuna conseguenza circa la proporzionalità fra l'area e la deficienza.

tivo alla scelta di una particolare *unità*, nella geometria fondata sulla *terza ipotesi* si può invece conferirle un significato *assoluto*.

È necessario anzitutto chiarire la distinzione che qui si presenta tra *assoluto* e *relativo*. In molte questioni accade che gli elementi che si suppongono dati si possano dividere in due gruppi, per modo che quelli del *primo gruppo* restino fissi in tutto il campo delle nostre considerazioni, mentre quelli del *secondo gruppo* possano variare in una molteplicità di casi possibili. Quando ciò accade si suole spesso trascurare l'esplicita menzione dei dati del primo gruppo e considerare come *relativo* tutto ciò che dipende dai dati variabili, come *assoluto* tutto ciò che dipende soltanto dai dati fissi.

Così ad esempio, nella teoria dei *campi di razionalità* si prendono come dati del *secondo gruppo* [dati variabili] certi irrazionali elementari [costituenti una *base*] e come dati del *primo gruppo* l'unità [1], che spesso si tace perchè comune a tutti i campi. Allora, parlando di un numero si dice che esso è *razionale relativamente* ad una data base, se appartiene al campo di razionalità definito da quella base; si dice invece che è *razionale assolutamente* se risulta razionale rispetto alla base 1, comune a tutti i campi.

Venendo ora alla geometria notiamo che, in ogni studio concreto, generalmente si suppongono date certe figure e quindi le grandezze dei loro elementi; ma oltre questi dati variabili [del *secondo gruppo*], che possono essere scelti in modo arbitrario, è sempre implicitamente presupposta l'aggiunta delle figure fondamentali: *rette*, *piani*, *fasci* ecc. [dati fissi o del *primo gruppo*]. Allora, ogni costruzione, ogni misura, ogni proprietà d'una figura qualsiasi dovrà ritenersi come *relativa* se è essenzialmente relativa ai dati variabili; dovrà invece dirsi *assoluta* se è relativa soltanto ai dati fissi [figure fondamentali], oppure, se venendo enunciata in rapporto ai dati variabili, ne dipende soltanto in modo apparente, sicchè rimanga fissa al variare di questi.

In questo senso è chiaro che, nell'ordinaria geometria, la misura dei segmenti ha necessariamente un significato relativo. Infatti, l'esistenza delle trasformazioni per similitudine non ci permette in alcun modo di individuare la grandezza di un segmento rispetto alle figure fondamentali [retta, fascio, ecc.]. Per l'angolo invece si può scegliere un modo di misura, che ne esprima una proprietà assoluta: basta infatti prendere il suo rapporto all'angolo di un giro, cioè all'intero fascio, che è una delle figure fondamentali.

Ritorniamo ora a LAMBERT ed alla sua geometria corrispondente alla *terza ipotesi*. Egli ha osservato che ad ogni segmento può farsi corrispondere un determinato angolo, facilmente costruibile. Segue da ciò che ogni segmento è in relazione con la figura fondamentale *fascio* e quindi che, nella nuova [ipotetica] geometria, anche alla misura dei segmenti dovrebbe potersi attribuire un significato assoluto.

Per vedere poi nel modo più semplice come ad ogni segmento possa coordinarsi un angolo ed ottenere così una rappresentazione numerica assoluta dei segmenti, immaginiamo di costruire sopra ogni segmento un triangolo equilatero. Possiamo associare ad ogni segmento l'angolo del relativo triangolo e successivamente la misura di quest'angolo, attesochè esiste una corrispondenza biunivoca fra i segmenti e gli angoli compresi entro certi limiti.

L'ottenuta rappresentazione numerica dei segmenti non gode però della *proprietà distributiva* che compete alle *lunghezze*, perchè sommando due segmenti non vengono sommati gli angoli corrispondenti. Si può tuttavia determinare una funzione dell'angolo che goda di questa proprietà ed associare ad un segmento non l'angolo in discorso, ma questa funzione dell'angolo. Tale funzione, per ogni valore dell'angolo compreso entro certi limiti, ci dà una *misura assoluta* dei segmenti. L'*unità assoluta* è quel segmento per cui la funzione assume il valore 1.

Se si osserva poi che ove una certa funzione dell'angolo sia distributiva nel senso sopra indicato, anche il prodotto di questa funzione per una costante arbitraria gode della stessa proprietà, è chiaro che si potrà sempre disporre di questa costante in modo che l'unità assoluta dei segmenti sia quel tale segmento che corrisponde ad un angolo assegnato, ad es. all'angolo di 45°. La possibilità di costruire, dato l'angolo, l'unità assoluta dei segmenti è legata alla risoluzione del seguente problema: *Costruire, nell'ip. ang. acuto, un triangolo equilatero di assegnata deficienza.*

Per quanto riguarda la misura assoluta delle aree poligonali osserviamo che essa è data senz'altro dalla deficenza dei poligoni. Anche pei poliedri potrebbe istituirsi una misura assoluta.

Ma secondo la nostra intuizione spaziale la misura assoluta di tutte queste grandezze geometriche non ci sembra possibile, onde, *negando l'esistenza e l'una unità assoluta pei segmenti, si potrebbe*, con LAMBERT, *rigettare la terza ipotesi.*

§ 21. Non si creda che LAMBERT ritenga d'aver così dimostrato il *V postulato*, poichè egli comprende quanto sia arbitraria la precedente affermazione!

Per ottenere la desiderata prova procede nella ricerca delle conseguenze della *terza ipotesi*, ma non riesce che a trasformare la sua questione in altre ugualmente difficili da risolversi.

Altre cose molto interessanti sono contenute nella « *Theorie der Parallellinien* », ad es., il riavvicinamento della geometria che varrebbe sul piano se fosse lecita la *seconda* *ipotesi*, con la geometria sferica ([1]), e l'osservazione relativa all'*indipendenza* di quest'ultima dal postulato delle parallele. Riferendosi poi alla *terza ipotesi* esprimeva la seguente acuta ed originale veduta: *Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.*

A questo modo di concepire le cose forse fu condotto dalla formula: $r^2(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi)$, che esprime l'area di un triangolo sferico, perchè, mutando in essa il raggio r nel raggio immaginario $r\sqrt{-1}$, diventa:

$$r^2(\pi-\widehat{A}-\widehat{B}-\widehat{C}),$$

cioè la formula dell'area d'un triangolo piano, nella *terza ipotesi* di LAMBERT ([2]).

§ 22. LAMBERT lascia dunque la questione sospesa; anzi non avendo pubblicato le sue ricerche fa supporre d'aver intravvisto qualche nuovo orizzonte.

Intanto è bene notare che, pel generale insuccesso di siffatte ricerche, nella seconda metà del XVIII secolo andava formandosi la convinzione che fosse necessario ammettere senza dimostrazione il postulato euclideo o qualche altro postulato equivalente.

In Germania, ove con frequenza si succedevano gli studi sull'argomento, la convinzione aveva già assunto una forma abbastanza precisa. La ritroviamo in A. G. KAESTNER [1719-1800], grande cultore delle ricerche sulle parallele ([3]),

([1]) Infatti in geometria sferica la somma degli angoli di un quadrilatero è maggiore di quattro angoli retti, ecc.

([2]) Cfr. STÄCKEL ed ENGEL: « *Th. der P.* », p. 146.

([3]) Per qualche notizia intorno a KAESTNER cfr. STÄCKEL ed ENGEL: « *Th. der P.* », p. 139-141.

nel suo discepolo G. S. KLÜGEL, autore della pregevole critica sui più celebri tentativi per la dimostrazione del *V postulato*, citata a p. 38 [nota (3)]. In questo lavoro KLÜGEL, trovata insufficiente ciascuna delle dimostrazioni proposte, affaccia la possibilità che rette non incontrantisi siano divergenti [« *Möglich wäre es freilich dass Gerade die sich nicht schneiden, von einander abweichen.* »], ed aggiunge che l'apparenza di controsenso che questo presenta non è il risultato di una prova rigorosa, nè una conseguenza dei concetti determinati delle linee rette o curve, ma piuttosto qualche cosa che si deduce dall' esperienza e dal giudizio dei nostri sensi. [« *Dass so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht in Folge strenger Schlusse oder vermöge deutlicher Begriffe von der gereden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch dass Urteil unsrer Augen.* »].

Le ricerche di SACCHERI e LAMBERT propendono ad appoggiare l' opinione di KLÜGEL, ma non possono ritenersi come prove dell' indimostrabilità dell' ipotesi euclidea. E nemmeno si raggiungerebbe una prova ove, proseguendo nella via aperta dai due nominati geometri, si deducessero quante altre proposizioni si vogliano, non contradditorie coi principi della geometria.

Nondimeno, l' avventurarsi in quest' ultimo campo, senza la preoccupazione saccheriana di scoprirvi delle contraddizioni, costituisce, in linea storica, il passo decisivo per conquistare l' indimostrabilità del *postulato d' Euclide* e scoprire le *geometrie non-euclidee*.

Ma dall' opera di SACCHERI e LAMBERT a quella di LOBACEFSKI e BOLYAI, che all' idea qui espressa s' informano, deve passare ancora più di mezzo secolo !...

I geometri francesi della fine del XVIII secolo

§ 23. La critica sulle parallele, che già in Italia ed in Germania aveva condotto a risultati di grande interesse, verso la fine del XVIII secolo e sul principio del XIX ebbe, anche in Francia un notevole impulso.

D' Alembert [1717-1783], in un suo articolo sulla geometria [1759] dichiara che: « La definition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l' écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie (1) ». Ritiene che con una buona definizione di linea retta si dovrebbero evitare entrambe le difficoltà. Propone di chiamare parallela ad una retta data una qualsiasi altra retta coplanare, che congiunge due punti equidistanti e situati da una stessa banda di quella. Questa definizione permette di costruire immediatamente le parallele: però sarebbe necessario dimostrare che queste parallele sono equidistanti. Questo teorema fu proposto dal D' Alembert, quasi per sfida, ai suoi contemporanei.

§ 24. de Morgan, nella sua raccolta di paradossi, racconta che Lagrange [1736-1813], verso la fine di sua vita, scrisse una memoria sulle parallele. Presentata all' Accademia di Francia ne interruppe la lettura esclamando: « Il faut que j' y songe encore! » e ritirò il manoscritto (2).

Inoltre Hoüel riporta che Lagrange, conversando con Biot, affermava l' indipendenza della trigonometria sferica

---

(1) Cfr. D' Alembert: « *Mélanges de Litterature, d' Histoire et de Philosophie* », t. V, § XI [1759]. — Cfr. ancora: « *Encyclopedie Méthodique Mathématique* », t. II, p. 519, articolo: *Parallèles*, [1785].

(2) A. de Morgan: « *Budget of Paradoxes* », p. 173 [Londra, 1872].

dal *postulato d' Euclide* [1]. Ad avvalorare questa affermazione può aggiungersi che Lagrange si occupò con speciale interesse della trigonometria sferica [2] e che egli fu ispiratore, se non autore, d'una memoria « *Sur les principes fondamentaux de la Mécanique* » [1760-61] [3], in cui D. Foncenex svolge una questione di indipendenza analoga a quella sopra accennata della trigonometria sferica. Precisamente Foncenex dimostra che la legge analitica per la composizione delle forze concorrenti non dipende nè dal V *postulato*, nè da qualsiasi altro equivalente [4].

§ 25. Il concetto di similitudine, come concetto fondamentale, già usato da Wallis nel 1663 [cfr. § 8], ricompare sul principio del XIX secolo, con l'autorevole appoggio di due grandi geometri: L. N. M. Carnot [1753-1823] e Laplace [1749-1827].

In una nota [p. 481] alla sua « *Géométrie de Position* » [1803] Carnot afferma che la teoria delle parallele si riattacca alla nozione di similitudine, il cui grado d'evidenza corrisponde, presso a poco, a quello dell'*uguaglianza* e che una volta ammessa questa nozione è facile stabilire con rigore la teoria in discorso.

Laplace [1824], dopo aver osservato che la legge di Newton [legge dell'attrazione universale], per la sua semplicità, per la sua generalità e per la rispondenza che trova nei fenomeni fisici, deve riguardarsi come rigorosa, nota che una delle sue proprietà più notevoli è che ove le dimensioni di tutti i corpi dell'universo, le loro mutue di-

---

[1] Cfr. J. Hoüel: « *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* », p. 84, nota. [Paris, G. Villars, 1883].

[2] Miscellanea Taurinensia, t. II, p. 299-322 [1760-61].

[3] Cfr. Lagrange: *Oeuvres*, t. VII, p. 331-363.

[4] Cfr. Cap. VI.

stanze e le loro velocità decrescessero proporzionalmente, i corpi celesti descriverebbero delle linee interamente simili a quelle che descrivono, in modo che l'universo, ridotto successivamente fino al più piccolo spazio immaginabile, offrirebbe sempre le stesse apparenze ai suoi osservatori. Queste apparenze, continua, sono dunque indipendenti dalle dimensioni dell'universo, talchè la semplicità delle leggi naturali non permette all'osservatore che di conoscere dei rapporti. Riattaccandosi a questa concezione astronomica dello spazio, aggiunge in nota: « I tentativi dei geometri per dimostrare il *postulato d'Euclide* sulle parallele sono stati finora inutili. Tuttavia nessuno pone in dubbio questo postulato ed i teoremi che Euclide dedùsse. La percezione dello spazio racchiude dunque una proprietà speciale, evidente per sè stessa, senza la quale non si possono rigorosamente stabilire le proprietà delle parallele. L'idea dell'estensione limitata, per esempio, del cerchio, non contiene nulla che dipenda dalla sua grandezza assoluta. Ma se noi diminuiamo col pensiero il suo raggio siamo portati invincibilmente a diminuire nello stesso rapporto la sua circonferenza ed i lati di tutte le figure iscritte. Questa proporzionalità mi pare essere un postulato più naturale di quello di Euclide ed è notevole il ritrovarlo nei risultati della gravitazione universale » (1).

§ 26. Insieme ai precedenti geometri si suole ricordare anche J. B. FOURIER [1768-1830], per una discussione sulla linea retta da lui sostenuta insieme a MONGE (2). Volendo riattaccare questa discussione alle ricerche sulle parallele basta riferirsi all'idea espressa da D'ALEMBERT, che la di-

---

(1) Cfr. LAPLACE: « *Oeuvres* », t. VI. Livre V, Ch. V, p. 472.

(2) Cfr.: Séances de l'École normale; Débats, t. I, p. 28-33 [1795]. — La discussione fu ristampata in *Mathésis*, t. IX, p. 139-141 [1883].

mostrazione del postulato possa connettersi con la definizione di retta [cfr. § 23].

Fourier, assumendo come *primitivo* il concetto di distanza fra due punti, propose di definire prima la sfera, indi il piano, come luogo dei punti equidistanti da due punti dati (1), poi la retta, come luogo dei punti equidistanti da tre punti dati. Questo modo di presentare il problema dei fondamenti della geometria concorda con le idee professate in seguito da altri geometri che si occuparono espressamente della questione delle parallele [W. Bolyai, N. Lobacefski, De Tilly]. In questo senso la discussione tra Fourier e Monge trova il suo posto fra i primi documenti che si riferiscono alla *geometria non-euclidea* (2).

Adriano Maria Legendre [1752-1833]

§ 27. I precedenti geometri si limitarono a rilevare le difficoltà e ad emettere giudizi intorno al postulato: chi invece tentò di trasformarlo in teorema fu Legendre, le cui ricerche, sparse nelle varie edizioni dei suoi « *Éléments de Géométrie.* » [1794-1823], sono riassunte nelle « *Refléxions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.* » [Mém. Academie Sciences, Paris, t. XIII, 1833].

Nei più interessanti tentativi Legendre, come già Saccheri, affronta la questione dal lato della somma degli an-

---

(1) Questa definizione del piano fu data da Leibniz circa un secolo prima. Cfr., ad es., gli « *Opuscules et frangements inedits.* », pubblicati da L. Couturat; p. 554-5 [Paris, Alcan, 1903].

(2) Aggiungiamo che studi e ricerche successive dimostrarono che anche la definizione di Fourier non permette di creare la teoria euclidea delle parallele senza il sussidio del *V postulato* o di qualche altro postulato equivalente.

goli d'un triangolo, somma ch'ei vuole dimostrare uguale a due angoli retti.

Allo scopo riesce, fin da principio, a scartare l'ipotesi saccheriana dell'angolo ottuso, stabilendo che « *in qualsiasi triangolo la somma degli angoli è minore* [ip. ang. acuto] *od uguale* [ip. ang. retto] *a due angoli retti.*

Riportiamone una semplice ed elegante dimostrazione di LEGENDRE.

Siano sopra una retta n segmenti uguali e consecutivi $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,.... $A_n A_{n+1}$, sui quali, da una stessa banda della retta, siano costruiti n triangoli uguali, aventi per terzi vertici i punti B_1, B_2,.... B_n.

I segmenti $B_1 B_2$, $B_2 B_3$,.... $B_{n-1} B_n$, che congiungono questi ultimi vertici, sono uguali e possono considerarsi come basi di altri n triangoli uguali: $B_1 A_2 B_2$, $B_2 A_3 B_3$,.... $B_{n-1} A_n B_n$. Si completi la figura con il trangolo $B_n A_{n+1} B_{n+1}$, uguale ai precedenti.

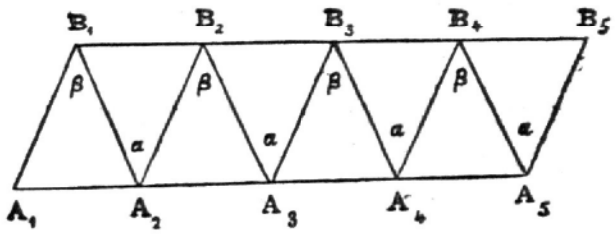

Fig. 27.

Denotando con β l'angolo in B_1 del triangolo $A_1B_1A_2$ e con α l'angolo in A_2 del triangolo consecutivo, dico essere $\beta \leq \alpha$. Infatti, se fosse $\beta > \alpha$, dal paragone dei due triangoli $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$, che hanno due lati uguali, si dedurrebbe $A_1A_2 > B_1B_2$.

Inoltre, essendo la spezzata $A_1B_1B_2$.... $B_{n+1} A_{n+1}$ maggiore del segmento $A_1 A_{n+1}$, si avrebbe:

$$A_1B_1 + (B_1B_2) \cdot n + A_{n+1} B_{n+1} > (A_1A_2) \cdot n,$$

cioè:

$$2\ A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2) \cdot n.$$

Ma questa disuguaglianza, per n abbastanza grande, contraddice il *postulato di Archimede*, perciò non può essere $A_1A_2 > B_1B_2$ e conseguentemente è assurdo supporre $\beta > \alpha$. Segue $\beta \leqq \alpha$, da cui si ricava subito che la somma dei tre angoli del triangolo $A_1B_1A_2$ è minore od uguale a due angoli retti.

Questo teorema suole impropriamente chiamarsi *1° teorema di Legendre*. Diciamo impropriamente perchè SACCHERI, dimostrando falsa l'*ip. ang. ottuso*, aveva già stabilito, quasi un secolo prima, questo teorema [cfr. p. 34].

Il così detto *2° teorema di Legendre*, dato anch' esso da SACCHERI e sotto forma più generale [cfr. p. 25-6], è il seguente:

« *Se in un solo triangolo la somma degli angoli è minore od uguale a due angoli retti, è rispettivamente minore od uguale a due angoli retti in ciascun altro triangolo.* ».

Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema perchè non sostanzialmente diversa da quella di SACCHERI.

Ecco piuttosto come LEGENDRE dimostra che *la somma dei tre angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti*

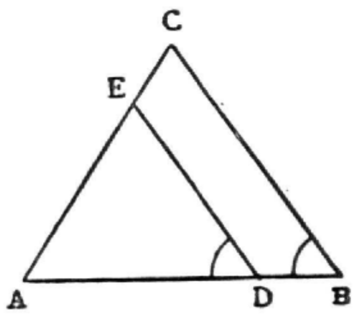

Fig. 28.

Nel triangolo ABC suppongasi $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2$ *retti*. Fissato il punto D sul lato AB, si tracci la trasversale DE in modo che l' angolo $\widehat{ADE}$ sia uguale all' angolo $\widehat{B}$. Nel quadrilatero DBCE la somma degli angoli è minore di quattro retti, onde $\widehat{AED} > \widehat{ACB}$. L' angolo in $\widehat{E}$ del triangolo ADE è dunque una ben determinata funziene [decrescente] del lato AD, o, ciò che fa lo stesso, la lunghezza del lato AD è pienamente determinata quando si conosca la misura [in angoli retti] dell' angolo $\widehat{E}$ e dei due angoli fissi, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$. Ma questo risultato, secondo LEGENDRE, è assurdo, perchè la lunghezza d' un segmento non ha significato se non si conosce l'unità di misura cui è riferita e la natura della questione non indica in alcun modo questa unità.

Quindi cade l'ipotesi $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 2 \widehat{retti}$ e conseguentemente si avrà: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2 \widehat{retti}$.

Ma da questa uguaglianza segue facilmente la dimostrazione del *postulato euclideo.*

Il metodo di LEGENDRE si basa quindi sul postulato di LAMBERT, che nega l'esistenza d'una *unità assoluta* pei segmenti.

§ 28. In un'altra dimostrazione LEGENDRE fa uso dell'ipotesi: *Da un punto qualunque preso nell'interno di un angolo si può sempre condurre una retta che incontra i due lati dell'angolo* (1). Ecco come procede.

Sia ABC un triangolo, in cui, se è possibile, la somma degli angoli sia minore di due angoli retti.

Posto: $2 \widehat{retti} - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} = \alpha$ [*deficienza*], si co-

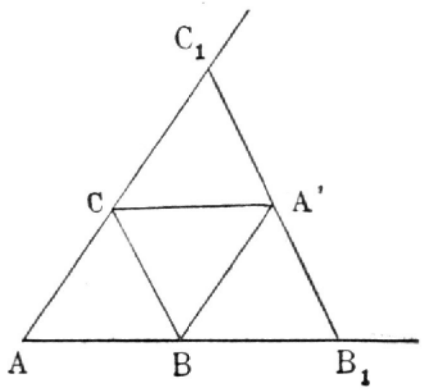

Fig. 29.

struisca il punto A', simmetrico di A rispetto al lato BC. La deficienza del nuovo triangolo CBA' è pure α. Poi, in forza

(1) Di questa ipotesi già si era servito J. F. LORENZ, per lo stesso scopo: cfr. « *Grundriss der reinen und angewandten Mathematik.* » [Helmstedt, 1791].

dell' ipotesi sopra enunciata, si conduca per A' una trasversale che incontri in B_1 e C_1 i lati dell' angolo $\widehat{A}$. La deficienza del triangolo AB_1C_1, come facilmente si verifica, è la somma delle deficienze dei quattro triangoli che lo compongono [cfr. anche LAMBERT, p. 40], quindi maggiore di 2α. Ripetendo, a partire dal triangolo AB_1C_1, la precedente costruzione, si otterrà un nuovo triangolo, di deficienza maggiore di 4α. Dopo n operazioni di tale natura si sarà costruito un triangolo di deficienza maggiore di $2^n\alpha$. Ma, per n abbastanza grande, è $2^n\alpha > 2$ retti [*post. Archimede*], il che è assurdo. Segue: $\alpha = 0$, quindi: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2$ *retti*.

Questa dimostrazione è appoggiata sul *postulato di Archimede*. Ecco come si potrebbe evitare l' uso di tale postulato. Siano AB ed HK una obliqua ed una perpendicolare ad AH. Si costruisca la retta AB′, simmetrica di AB rispetto

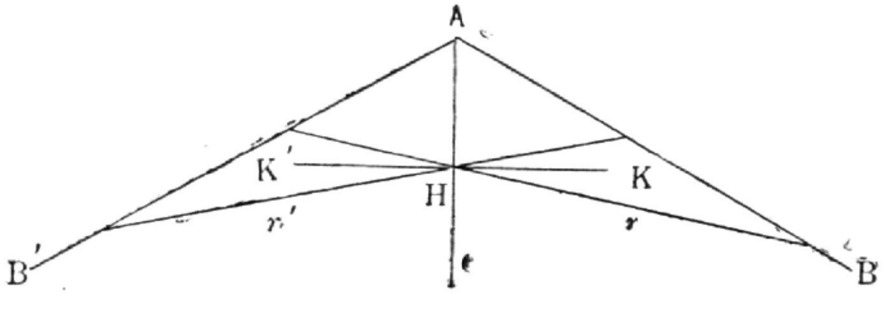

Fig. 30.

ad AH. Pel punto H, in forza dell' ipotesi di LEGENDRE, passa una retta r che incontra i due lati dell' angolo BAB′. Se questa retta è diversa dalla HK anche la sua simmetrica r', rispetto ad AH, gode della medesima proprietà e conseguentemente anche la HK. Dunque, una perpendicolare ed un' obliqua alla retta AH s' incontrano sempre. Da questo risultato segue la teoria ordinaria delle parallele, quindi $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2$ *retti*.

In altre dimostrazioni LEGENDRE fa uso di ragionamenti analitici ed anche erroneamente di grandezze infinite.

Con quest' opera così svariata LEGENDRE credè finalmente risolta l' inestricabile difficoltà annidata sul principio della geometria. In sostanza però non aggiunse nulla di veramente nuovo al materiale ed alle convinzioni guadagnate dai suoi predecessori. Il suo maggior merito sta nella forma piana ed elegante che seppe dare a talune sue ricerche, ond' esse raggiunsero quella diffusione che tanto contribuì ad allargare la cerchia dei cultori delle nuove idee, che allora andava formandosi.

WOLFGANG BOLYAI [1775-1856].

§ 29. In questo capitolo va ricordato anche il geometra ungherese W. BOLYAI, che si occupò delle parallele fin dall' epoca in cui studiava a Gottinga [1796-1799], probabilmente per consiglio di KAESTNER e del giovane professore di astronomia K. F. SEYFFER [1762-1822], col quale aveva relazioni amichevoli.

Nel 1804 spedì a GAUSS, suo compagno di studio a Gottinga, una « *Theoria Parallelarum* », contenente un tentativo per dimostrare l' esistenza di rette equidistanti (1). GAUSS confutò questa dimostrazione. BOLYAI non cessò per questo di occuparsi dell' *assioma XI*, riuscendo soltanto a sostituire l' assioma con altri di maggiore o minore evidenza. Giunse così a dubitare della sua dimostrabilità e ad intuire l' impossibilità di *ridurre l' ipotesi euclidea*, perchè [egli afferma] le conseguenze derivanti dalla negazione dell' *assioma XI* non possono contraddire i principi della geo-

(1) La « *Theoria Parallelarum.* » fu pubblicata in latino e versione tedesca dai SS. STÄCKEL ed ENGEL nel t. XLIX dei Math. Ann., p. 168-205 [1897].

metria, in quanto la legge della intersezione di due rette, comunque ammessa, rappresenta un nuovo dato, indipendente dagli altri che lo precedono (1).

WOLGANG raccolse le sue vedute intorno ai principi delle matematiche nell'opera: « *Tentamen juventutem studiosa in elementa Matheseos.* » [1832-33] e in particolare le sue ricerche sull'*assioma XI*, ponendo in evidenza, in ciascun tentativo, la nuova ipotesi da introdurre, per rendere rigorosa la dimostrazione.

Un notevole *postulato* cui WOLFGANG riconduce quello d'EUCLIDE è il seguente: *Tre punti non in linea retta giaciono sempre sopra una sfera*, o, ciò che fa lo stesso: *tre punti non in linea retta appartengono sempre ad una circonferenza* (2).

Ecco come può dedursi il postulato euclideo.

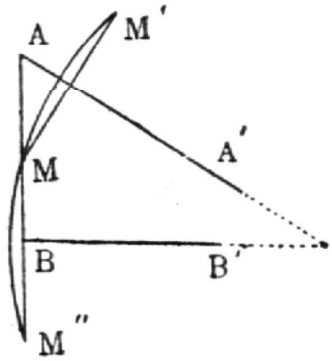

Fig. 31.

Siano AA′, BB′ due rette l'una perpendicolare, l'altra obbliqua ad AB. Preso il punto M nel segmento AB ed i simmetrici di M rispetto alle rette AA′, BB′, si otterranno

(1) Cfr. STÄCKEL: « *Die Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie durch J. Bolyai* ». Math. u. Naturwissenschaf. Berich. aus Ungarn, t. XVII, [1901].

(2) Cfr. W. BOLYAI: « *Kurzer Grundriss eines Versuchs*, etc. » p. 46 [Maros Vásárhely, 1851].

due punti M′, M″ non in linea retta con M. Questi tre punti M, M′, M″ appartengono ad una circonferenza, ed allora le due rette AA′, BB′, dovendo entrambe passare pel centro del cerchio, s' incontrano.

Ma dal fatto che una perpendicolare ed una obbliqua ad una stessa retta s' incontrano segue senz' altro l' unicità della parallela.

Federico Lodovico Wachter [1792-1817].

§ 30. Visto come il postulato euclideo dipenda dalla possibilità di tracciare un cerchio per tre punti qualsiansi non collineari, si presenta spontanea l' idea di stabilire l' esistenza di un sifatto cerchio, antecedentemente ad ogni ricerca sulle parallele.

Un tentativo in questa direzione fu fatto da F. L. Wachter.

Wachter, scolaro di Gauss e Gottinga [1809] e professore di matematica al ginnasio di Danzica, si occupò a più riprese della dimostrazione del *postulato* e credè aver raggiunto lo scopo prima in una lettera a Gauss [dicembre 1816], poi in un opuscoletto, stampato a Danzica nel 1817 (1).

È in questa pubblicazione ch' egli cerca di stabilire che per quattro punti arbitrari dello spazio [non appartenenti ad un piano] passa una sfera, giovandosi del seguente postulato: *Quattro punti arbitrari dello spazio determinano pienamente una superficie* [superficie dei quattro punti] *e due sifatte superficie s' intersecano in una sola linea, completamente determinata da tre punti.*

È inutile seguire il ragionamento con cui Wachter cerca di dimostrare che la *superficie dei 4 punti* è una sfera, perchè, mancando nel suo opuscolo una precisa definizione di quella superficie, le sue deduzioni hanno soltanto carattere intuitivo.

---

(1) « *Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi.* »

Merita invece speciale attenzione un passo della sua lettera del 1816, scritta dopo un colloquio con GAUSS, in cui s' era parlato d' una *geometria anti-euclidea.*

In questa lettera WACHTER, riferendosi alla superficie limite d' una sfera il cui raggio tende all' infinito, che nell' ipotesi euclidea s' identifica col piano, afferma che *su di essa, anche nel caso della falsità del V postulato, varrebbe una geometria identica a quella del piano ordinario.*

L' affermazione è della massima importanza perchè ci porge uno dei più notevoli risultati validi nel sistema geometrico corrispondente all' ipotesi saccheriana dell' angolo acuto [cfr. Lobacefski, § 40] (1).

---

(1) Per quanto riguarda WACHTER Cfr. P. STÄCKEL: *Friederich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie;* Math. Ann., t. LIV, p. 49-85 [1901]. In questo articolo sono riportate le lettere di WACHTER sull' argomento e l' opuscolo del 1817 sopra citato.

CAPITOLO III.

I fondatori della Geometria non-euclidea.

CARLO FEDERICO GAUSS [1777-1855].

§ 31. Venti secoli d'inutili sforzi e segnatamente le ultime infruttuose ricerche sul *V postulato*, indussero molti geometri, fiorenti sul principio del secolo scorso, nella convinzione che l'assetto definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema irresolubile. La scuola di Gottinga, fin dal 1763, aveva ufficialmente dichiarato la necessità di rassegnarsi all'ipotesi euclidea, e questa idea, espressa da KLÜGEL nel suo « *Conatuum* » [cfr. p. 45], fu condivisa e sostenuta dal suo maestro A. G. KAESTNER, allora professore all'Università di Gottinga [1].

Nondimeno, l'interesse pel nostro argomento fu sempre vivo e, pur non cessando di affaticare inutilmente i ricercatori della presunta dimostrazione del *postulato*, guidò finalmente alla scoperta di nuovi sistemi geometrtci, i quali, fondati anch'essi sulla intuizione, si svolgono in un campo più vasto, astraendo dal principio contenuto nel postulato euclideo.

Tutta la difficoltà di entrare nel nuovo ordine di idee appare manifesto a chi, riportandosi a quel tempo, rifletta alla concezione allora dominante della filosofia kantiana.

---

(1) Cfr. STÄCKEL ed ENGEL: « *Th. der P.* » p. 139-142.

§ 32. Fu GAUSS il primo ad avere chiara la visione d'una geometria indipendente dal *V postulato*, visione che per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra e che venne in luce soltanto dopo le opere di LOBACEFSKI [1829-30] e G. BOLYAI [1832].

I documenti che permettono una approssimata ricostruzione delle ricerche gaussiane sulle parallele sono la corrispondenza di GAUSS con W. BOLYAI, OLBERS, SCHUMACHER, GERLING, TAURINUS, BESSEL [1799-1844]; due piccole note nei « *Gött. gelehrte Anzigen* » [1816, 1822]; e alcuni appunti trovati fra le sue carte [1831] (¹).

Mettendo a confronto vari passi delle lettere di GAUSS è possibile fissare come punto di partenza delle sue *meditazioni* l'anno 1792.

Il seguente brano di una lettera a W. BOLLYAI [17 dicembre 1799] prova che GAUSS, come già SACCHERI e LAMBERT, ha tentato di dimostrare il *V postulato* prendendo come ipotesi la sua falsità.

« Quanto a me, i miei lavori sono già molto avanzati;
« ma la via nella quale sono entrato non conduce al fine
« che si cerca, e che tu affermi avere raggiunto (²), ma
« conduce piuttosto a mettere in dubbio l'esattezza della
« geometria.

« Sono, è vero, arrivato a parecchie cose, che dalla
« maggior parte degli uomini sarebbero ritenute come una
« valida dimostrazione, ma che, ai miei occhi, non provano,
« per così dire, NULLA; per esempio, se si potesse dimo-
« strare l'esistenza possibile d'un triangolo rettilineo, la
« cui area fosse più grande d'ogni area data, allora sarei in
« grado di dimostrare con rigore perfetto tutta la geo-
« metria.

(¹) Cfr.: GAUSS « *Opere* », t. VIII, p. 159-270.

(²) Si ricordi che W. BOLYAI, a Gottinga, si occupava dell'argomento e credeva di avere superato l'ostacolo. Cfr. § 29.

« Quasi tutti, è vero, vorrebbero dare a ciò il titolo di « assioma, io no; potrebbe infatti accadere che, per quanto « lontani fossero fra loro i vertici di un triangolo nello « spazio, la sua area fosse non di meno sempre inferiore « (*infra*) a un limite assegnato. »

Nel 1804, rispondendo a W. BOLYAI in merito alla « *Theoria Parallelarum* », esprime poi la speranza che gli scogli, contro cui hanno cozzato le sue ricerche, finiscano per lasciargli libero il passo.

Da tutto questo i SS. STÄCKEL ed ENGEL, che raccolsero e documentarono la suddetta corrispondenza di GAUSS, deducono che non per intuizione geniale il sommo geometra riconobbe l'esistenza d'una *geometria non euclidea*, logicamente inattaccabile, ma che dovè, al contrario, dedicarsi ad un lungo e faticoso lavoro, prima di vincere l'antico pregiudizio!

Conobbe GAUSS, nel primo periodo delle sue ricerche, le opere di SACCHERI e LAMBERT? Quale influenza esercitarono sulla sua attività? Il prof. SEGRE, nelle sue « *Congetture* » altrove citate [p. 38, (2)], nota che tanto GAUSS, quanto W. BOLYAI, durante il loro soggiorno a Gottinga [il primo dal 1795 al 98, il secondo dal 1796 al 99], si occuparono delle parallele. È quindi possibile ch'essi, per mezzo di KAESTNER e SEYFFER, entrambi conoscitori profondi di questo argomento, venissero a conoscenza dell'« *Euclides ab omni naevo vindicatus.* » e della « *Theorie der Parallellinien.* », ma i dati storici che si posseggono, senza infirmare questa congettura, non sono tali da avvalorarla pienamente.

§ 33. A questo primo periodo dell'opera gaussiana ne segue un secondo, dopo il 1813, illustrato principalmente da alcune lettere, una di WACHTER [1816], altre dirette a GERLIN [1819], TAURINUS [1824], SCHUMACHER [1831], e dagli appunti ritrovati fra le carte di GAUSS.

Tali documenti ci mostrano che GAUSS, in questo secondo periodo, vinta ogni esitazione, procedè nello sviluppo dei teoremi fondamentali d'una nuova geometria, ch'egli chiama prima *anti-euclidea* [cfr. lettera di WACHTER citata a p. 56] poi *geometria astrale* [seguendo SCHWEIKART, cfr. p. 65], finalmente *non-euclidea* [cfr. lettera a SCHUMACHER]. Giunse così ad acquistare la certezza che la geometria *non-euclidea* non ha in se stessa nulla di contradditorio, benchè a prima vista parecchi de' suoi risultati abbiano l'aria di paradossi [lettera a SCHUMACHER, 12 giugno 1831].

Tuttavia GAUSS nulla lasciò trapelare di queste idee, per la certezza di non essere compreso [temeva « *das Geschrei der Böotier* »; lettera a BESSEL, 27 gennaio 1829]: solo ad alcuni provati amici confida qualche cosa delle sue ricerche e quando per necessità di cose è costretto di scrivere a TAURINUS [1824], lo prega di conservare il silenzio sulle comunicazioni fattegli.

Gli appunti trovati fra i manoscritti di GAUSS contengono un rapido cenno della nuova teoria delle parallele e dovevano fare parte di una progettata esposizione della *geometria non-euclidea*, a proposito della quale egli scriveva [maggio 1831] a SCHUMACHER:

« Da qualche settimana ho cominciato a mettere per « iscritto qualche risultato delle mie meditazioni su questo « soggetto, che risalgono in parte a quarant'anni, e di cui « non avevo mai nulla redatto, ciò che mi ha costretto tre « o quattro volte a ricominciare tutto il lavoro nella mia « testa. Non vorrei pertanto che tutto ciò perisse con me ».

§ 34. Ecco come GAUSS definisce le parallele.

Se la retta AM, coplanare e non incidente a BN, è tale che ogni retta per A, compresa nell'angolo $\widehat{BAM}$, incontri la BN, allora AM si dice parallela a BN.

Si noti la differenza fra questa definizione e quella di EUCLIDE. Infatti, prescindendo dal *V postulato,* per A potrebbero passare rette diverse da AM, non incidenti a BN, le quali sarebbero parallele a BN soltanto con l'antica definizione.

Nella definizione gaussiana il punto A sembra avere un ufficio speciale, ond'è necessario stabilire che la parallela

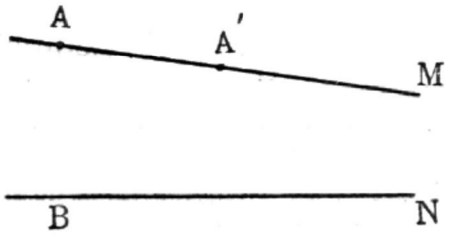

Fig. 32.

AM è indipendente da A. Perciò GAUSS dimostra che se A' è un punto qualunque di AM, la retta AM è parallela a BN anche *attraverso* il punto A'.

Dalla definizione di parallela non risulta poi evidente la *reciprocità* del parallelismo, vale a dire che anche BN è parallela ad AM. Questa proprietà forma oggetto di un altra elegante dimostrazione di GAUSS.

Infine egli dimostra che due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro [*transitività* del parallelismo].

Qui bisogna osservare che GAUSS si riferisce implicitamente al *parallelismo in un dato verso*. Infatti, la sua definizione di parallela considera i raggi uscenti da A e da una determinata banda della trasversale AB, ad es. a destra, cosicchè la retta AM dovrebbe dirsi la parallela a BN *verso destra*. La parallela a BN *verso sinistra* non è necessariamente AM, perchè il supporre ciò equivarrebbe a fare una ipotesi equivalente al postulato euclideo.

Ritornando alla proposizione sopra enunciata è chiaro che le due rette parallele ad una terza debbono supporsi parallele in uno stesso verso.

Finalmente Gauss pone il concetto di punti *corrispondenti* su due parallele AA', BB'. I punti A e B sono *corrispondenti* quando la retta AB forma con le due parallele angoli interni da una stessa parte uguali [Fig. 33].

Allora se CC′ è una terza parallela, nel verso cui sono parallele le prime due, e se C è corrispondente di B, anche A e C sono corrispondenti.

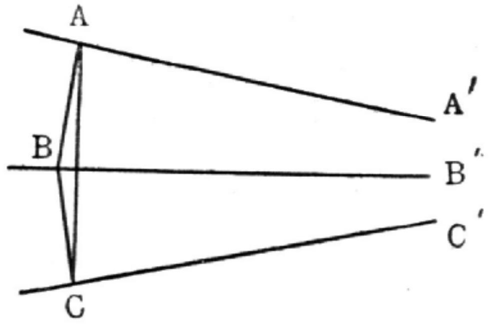

Fig. 33.

Benchè quì si arrestino gli appunti di GAUSS, notiamo l'importante significato delle ultime considerazioni.

Il concetto di punti corrispondenti, trasportato al caso in cui le rette AA′, BB′, CC′ appartengono ad un fascio [cioè

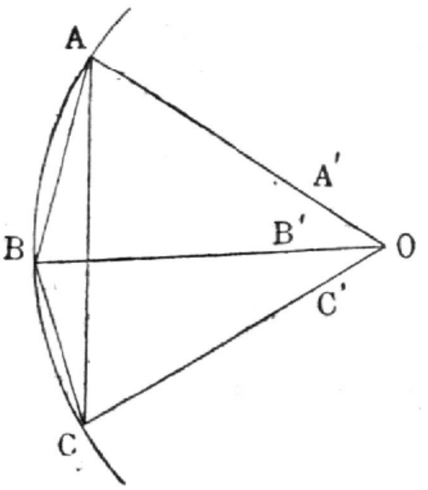

Fig. 34.

passino per un punto], ci permette di definire la circonferenza come *luogo dei punti corrispondenti d' un punto dato sulle rette di un fascio.* Ma questo *luogo* può costruirsi anche quando le rette del fascio sono parallele. Nel caso euclideo si ottiene una retta; scartando l' *ipotesi euclidea* il luogo in discorso è una linea, che, pur avendo molte proprietà comuni con la circonferenza, non è una circonferenza.

Anzi *tre dei suoi punti non appartengono mai ad una circonferenza*. Sifatta linea può concepirsi come *limite* d'una circonferenza, il cui raggio tenda all' infinito.

GAUSS non proseguì la sua redazione perchè nel 1832 conobbe l' opera di GIOVANNI BOLYAI, sulla *geometria assoluta*.

Da lettere anteriori e posteriori alla interrotta redazione, sappiamo ancora che GAUSS aveva scoperto, nella sua geometria, una unità assoluta pei segmenti [cfr. LAMBERT, LEGENDRE] e che nelle sue formule compariva una costante k, nota la quale si può risolvere qualunque problema [lettera a GERLING].

Più precisamente nel 1831 [lettera a SCHUMACHER] assegnava la lunghezza della circonferenza di raggio r sotto la forma:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right).$$

A proposito di k egli dice che, ove si voglia mettere d' accordo la nuova geometria con l' esperienza, bisogna supporla infinitamente grande rispetto a tutte le grandezze misurabili.

Per $k = \infty$ l' espressione gaussiana diventa l' ordinaria lunghezza della circonferenza [1]. Questa osservazione può estendersi a tutto il sistema scoperto da GAUSS, sistema che, per $k = \infty$, contiene, come caso limite, quello di EUCLIDE.

---

[1] Per vederlo si sostituisca a ciascun' esponenziale lo sviluppo in serie. Allora avremo:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k \left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k^3\, 3!} + \frac{r^5}{k^5\, 5!} \cdots\right) =$$

$$= 2\pi r \left(1 + \frac{r^2}{k^2\, 3!} + \frac{r^4}{k^4\, 5!} + \ldots\right)$$

Passando al limite, per $k = \infty$, si ottiene: $2\pi r$.

Ferdinando Carlo Schweikart [1780-1857].

§ 35. Contemporanee ed indipendenti da quelle di Gauss sono le ricerche del professore di giurisprudenza F. K. Schweikart [1], che nel 1807 stampava « *Die Theorie der Parallellinien, nebst Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie.* ». La quale, contrariamente a quanto lascia supporre il titolo, non contiene una trattazione indipendente dal *V postulato,* ma una trattazione basata sul concetto di parallelogramma.

In seguito però Schweikart, entrato in un nuovo ordine di idee, sviluppava una geometria indipendente dall' *ipotesi di Euclide.* A Marburg, nel dicembre del 1818, consegnava a Gerling un foglio per Gauss, contenente le seguenti indicazioni.

[notizia]

« Esistono due tipi di geometria, — una geometria in « senso ristretto — la euclidea; ed una geometria astrale « [astralische Grössenlehre].

« I triangoli, in quest' ultima, hanno la particolarità che « la somma dei loro tre angoli non è uguale a due angoli « retti.

« Ciò posto, si può rigorosamente dimostrare:

« *a*) che la somma dei tre angoli di un triangolo è minore « di due angoli retti;

« *b*) che questa somma è tanto più piccola quanto più « grande è l' area del triangolo;

« *c*) che l' altezza di un triangolo rettangolo isoscele, pur

---

(1) Studiò diritto all' università di Marburg e seguì dal 1796 al 1798 le lezioni di matematica tenute in quell' università dal prof. J. K. F. Hauff, autore di vari scritti sulle parallele. Cfr. « *Th. der P.* », p. 243.

« crescendo col crescere dei lati, tuttavia non può superare « un certo segmento, che io chiamo COSTANTE.

« Il quadrato, in conseguenza, ha la seguente forma:

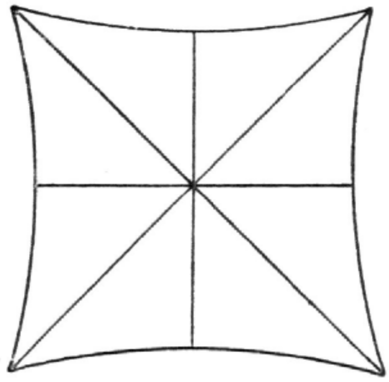

Fig. 35.

« Se questa costante fosse per noi il semiasse terrestre « (e in conseguenza di ciò ogni linea retta, tirata fra due « stelle fisse che distano fra loro di 90°, sarebbe tangente « alla sfera terrestre) essa sarebbe infinitamente grande, ri- « spetto alle dimensioni che si presentano nella vita quo- « tidiana.

« La geometria euclidea vale nell' ipotesi che la costante « sia infinitamente grande. Solo allora è vero che la somma « dei tre angoli d' ogni triangolo è uguale a due retti, e « ciò si lascia dimostrare facilmente soltanto se si ammette « per dato che la costante sia infinitamente grande. » (1).

La *geometria astrale* di SCHWEIKART e la *non-euclidea* di GAUSS corrispondono pienamente al sistema di SACCHERI e LAMBERT, nell' *ip. ang. acuto.* Anzi il contenuto della precedente notizia deriva immediatamente dalle proposizioni di SACCHERI riportate nel « *Conatuum* » di KLÜGEL e dal teorema di LAMBERT sull' area del triangolo. E poichè SCHWEIKART, nella sua « *Theorie* » del 1807 cita le opere di questi due ultimi autori, così rimane accertata l' influenza diretta

(1) Cfr. il t. VIII delle opere di GAUSS, p. 180-81.

di LAMBERT, indiretta [almeno] di SACCHERI sulle ricerche di SCHWEIKART [1].

Nel marzo del 1819 Gauss, rispondendo a GERLING in merito alla *geometria astrale*, loda SCHWEIKART e dichiara di concordare in tutto quanto contiene il foglietto inviatogli. Aggiunge che egli ha svolto la *geometria astrale* in modo da poter risolvere qualsiasi questione, data che sia la costante di SCHWEIKART. Termina assegnando il limite superiore dell'area d'un triangolo sotto la forma [2]:

$$\frac{\pi \, CC}{\{\log. \text{hyp.} (1 + \sqrt{2})\}^2}.$$

SCHWEIKART non pubblicò le sue ricerche.

FRANCESCO ADOLFO TAURINUS [1794-1874].

§ 36. Oltre essersi occupato personalmente delle parallele, SCHWEIKART indusse [1820] il nipote TAURINUS a dedicarvisi, richiamando la di lui attenzione sulla *geometria astrale* e sul favorevole giudizo di GAUSS.

Solo nel 1824 pare che TAURINUS si occupasse seriamente della cosa, ma non certo con le vedute dello zio. Egli era e fu sempre persuaso della verità assoluta del V *postulato* e nutrì la speranza di poterlo dimostrare. Fallito nei primi tentativi e sotto l'influenza di SCHWEIKART e GAUSS, riprese lo studio della questione. Nel 1825 pubblicò una « *Theorie der Parallellinien.* », contenente sviluppi non euclidei, il

---

(1) Cfr. le « *Congetture* » di SEGRE, citate a p. 38.

(2) La costante C che figura in questa espressione è la costante di SCHWEIKART, non quella che GAUSS denotò con k e a mezzo della quale espresse la lunghezza della circonferenza [cfr. p. 64]. Le due costanti sono legate dalla seguente relazione: $k = \frac{C}{\log(1+\sqrt{2})}$.

rigetto dell' *ip. ang. ottuso* e ricerche simili a quelle di SACCHERI e LAMBERT, nell' *ip. ang. acuto*. Ritrovò così la costante di SCHWEIKART, che chiamò *parametro*, e, incapace di rappresentarsi lo spazio come un concetto suscettibile di varie determinazioni, concluse che dovrebbero contemporaneamente valere tutti i sistemi corrispondenti agli infiniti valori assegnati al parametro. Questo modo di interpretare il significato del parametro condusse TAURINUS a rigettare anche l' *ip. ang. acuto*, pur riconoscendo la *compatibilità logica* delle proposizioni che da essa conseguono.

Nell' anno successivo TAURINUS pubblicò i suoi « *Geometriae prima elementa.* » [Colonia, 1826] ove riespose migliorate le ricerche del 1825. Lo scritto è poi chiuso da una importantissima appendice, in cui l' autore mostra come si possa effettivamente costruire un sistema geometrico [analitico] corrispondente all' *ip. ang. acuto* (¹).

Allo scopo TAURINUS parte dalla formula fondamentale della trigonometria sferica:

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k} + \operatorname{sen}\frac{b}{k}\operatorname{sen}\frac{c}{k}\cos\alpha,$$

e vi muta il raggio reale k nel raggio immaginario ik [dove $i = \sqrt{-1}$]. La formula ottenuta da TAURINUS può scriversi, mediante l' uso delle *funzioni iperboliche* (²), nella seguente forma:

$$(1) \qquad \mathbf{Ch}\,\frac{a}{k} = \mathbf{Ch}\,\frac{b}{k}\,\mathbf{Ch}\,\frac{c}{k} - \mathbf{Sh}\,\frac{b}{k}\,\mathbf{Sh}\,\frac{c}{k}\cos\alpha.$$

(¹) Per quanto riguarda l' eventuale influenza di SACCHERI e LAMBERT su TAURINUS cfr. le « *Congetture* » di SEGRE, citate a p. 38.

(²) Per comodità del lettore rammentiamo la definizione analitica e le proprietà principali delle *funzioni iperboliche*.

Questa è la formula fondamentale della *geometria logaritmico-sferica* [« *logarithmisch-sphärischen Geometrie* »] di TAURINUS.

È facile dimostrare che nella *geometria log.-sferica* la

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} \mathbf{Sh}\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots, \\[2ex] \mathbf{Ch}\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots, \\[2ex] \mathbf{Th}\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}; \quad \mathbf{Cth}\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}. \end{cases}
$$

Notando poi che le funzioni circolari sen x, cos x, tg x ...., sono suscettibili anch' esse d' una definizione analitica, e precisamente che:

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots, \\[2ex] \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots, \\[2ex] \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{i}\, \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}; \quad \operatorname{ctg} x = i\, \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \end{cases}
$$

è facile vedere che le funzioni circolari e le funzioni iperboliche sono legate dalle seguenti relazioni:

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} i\ \mathbf{Sh}\ x = \operatorname{sen}(ix) \quad ; \quad i\ \mathbf{Th}\ x = \operatorname{tg}(ix) \\ \mathbf{Ch}\ x = \cos(ix) \quad ; \quad -i\ \mathbf{Cth}\ x = \operatorname{ctg}(ix). \end{cases}
$$

Queste ultime permettono di trasformare le formule fondamentali della goniometria, nelle corrispondenti formule per le funzioni iperboliche. Le quali sono le seguenti:

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases} \mathbf{Ch}^2 x - \mathbf{Sh}^2 x = 1 \\ \mathbf{Sh}\,(x \pm y) = \mathbf{Sh}\ x\ \mathbf{Ch}\ y \pm \mathbf{Sh}\ y\ \mathbf{Ch}\ x \\ \mathbf{Ch}\,(x \pm y) = \mathbf{Ch}\ x\ \mathbf{Ch}\ y \pm \mathbf{Sh}\ x\ \mathbf{Sh}\ y. \end{cases}
$$

somma degli angoli d' un triangolo è minore di 180°. Riferiamoci per semplicità al triangolo equilatero, ponendo nella (1) $a = b = c$. Risolvendo poi rispetto a cos α, avremo:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{Ch}^2 \frac{a}{k} - \mathbf{Ch} \frac{a}{k}}{\mathbf{Sh}^2 \frac{a}{k}} = \frac{\mathbf{Ch} \frac{a}{k}}{1 + \mathbf{Ch} \frac{a}{k}}.$$

Ma:

$$\mathbf{Ch} \frac{a}{k} = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots,$$

quindi:

$$(*) \qquad \cos \alpha = \frac{1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots}{2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{a}{k}\right)^4 + \ldots}.$$

Questa frazione evidentemente è maggiore di $\frac{1}{2}$, perciò sarà $\alpha < 60°$, quindi la somma degli angoli del triangolo minore di 180°.

Inoltre è opportuno notare che:

$$\lim_{a = 0} \cos \alpha = \frac{1}{2};$$

vale a dire: il limite di α, per a tendente a zero, è 60°. Perciò nella *geometria log.-sferica* la somma degli angoli di un triangolo tende a 180° quando i lati tendono a zero.

Sulla (*) possiamo fare anche la seguente osservazione:

$$\lim_{k = \infty} \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

ovvero: per k tendente all'infinito α tende a 60°. Cioè: se si suppone la costante k infinitamente grande, l'angolo del triangolo equilatero è di 60°, come nell' ordinaria geometria.

Più generalmente si potrebbe vedere che la (1), per $k = \infty$, diventa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

cioè la formula fondamentale della trigonometria piana euclidea. Questo risultato può utilmente riavvicinarsi alle affermazioni di GAUSS e SCHWEIKART.

§ 37. La seconda formula fondamentale della trigonometria sferica:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \frac{a}{k},$$

col semplice mutamento del *coseno circolare* nel *coseno iperbolico*, diventa la seconda formula fondamentale della *geometria log.-sferica:*

$$(2) \qquad \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \,\mathbf{Ch}\, \frac{a}{k}.$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = 90°$ si ricava:

$$(3) \qquad \mathbf{Ch}\, \frac{a}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Il triangolo corrispondente a questa formula ha un an-

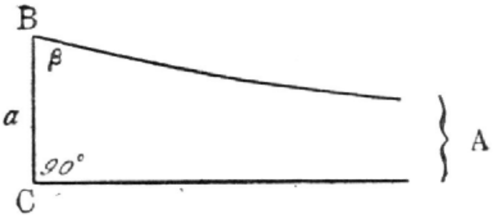

Fig. 36.

golo nullo e i due lati che lo comprendono di lunghezza infinita e paralleli [asintotici]. L'angolo β, compreso fra il lato parallelo ed il lato perpendicolare a CA, come risulta dalla (3), è funzione di a: potremo fin d'ora chiamarlo *angolo di parallelismo* corrispondente alla distanza a [cfr. LOBACEFSKI, p. 78].

Per $\beta = 45°$ il segmento BC, la cui lunghezza è calcolabile mediante la (3), è la *costante* di SCHWEIKART [cfr. p. 66] Denotando con P tale costante, avremo:

$$\mathbf{Ch}\ \frac{\mathrm{P}}{k} = \sqrt{2},$$

da cui, risolvendo rispetto a k:

$$k = \frac{\mathrm{P}}{\log\,(1+\sqrt{2})}.$$

Questa relazione, che lega le due costanti k e P, fu dedotta da TAURINUS. La costante k è quella stessa usata da GAUSS [cfr. p. 64] per esprimere la lunghezza della circonferenza.

§ 38. Sempre trasformando le formule della trigonometria sferica, mutando il raggio reale nel raggio immaginario, TAURINUS dedusse altri importanti teoremi della *geometria log.-sferica*, ad es., che l'area d'un triangolo è proporzionale alla sua *deficienza* [LAMBERT, p. 40], che il limite superiore dell'area in discorso è:

$$\frac{\pi \mathrm{P}^2}{\left\{\log\,(1+\sqrt{2})\right\}^2} \qquad \text{[GAUSS, p. 67]},$$

che la lunghezza della circonferenza di raggio r è:

$$2\pi k\ \mathbf{Sh}\ \frac{r}{k} \qquad \text{[GAUSS, p. 64]},$$

che l'area del cerchio è data da:

$$2\pi k^2\,(\mathbf{Ch}\ \frac{r}{k} - 1),$$

che l'area della superficie sferica ed il volume della sfera sono dati rispettivamente da:

$$4\pi k^2\ \mathbf{Sh}^2\ \frac{r}{k},$$

$$4\pi k^3\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{Sh}\ \frac{r}{k}\ \mathbf{Ch}\ \frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right).$$

Non ci tratterremo sui relativi sviluppi analitici perchè nulla si aggiungerebbe per illuminare il metodo. Notiamo piuttosto che i risultati di TAURINUS confermano la previsione di LAMBERT circa la sua *terza ipotesi* [cfr. p. 42], imperocchè le formule della *geometria log.-sferica*, analiticamente interpretate, danno le relazioni fondamentali fra gli elementi d'un triangolo tracciato sopra una sfera di raggio immaginario (1).

Aggiungeremo che TAURINUS riconobbe, come LAMBERT, che la geometria sferica corrisponde pienamente al sistema valido nell'*ip. ang. ottuso;* inoltre che l'ordinaria geometria forma un anello di congiunzione fra la geometria sferica e la *geometria log.-sferica.*

Infatti, se il raggio k varia con continuità dal campo reale al campo puramente immaginario, attraverso l'infinito, si passa dal sistema sferico al sistema *log.-sferico*, attraverso quello d'EUCLIDE.

Benchè TAURINUS, come già si disse, escluda la possibilità d'una *geometria log.-sferica* valida sul piano, non disconosce l'interesse teorico ch'essa può offrire, e, richiamando sulle sue formule l'attenzione dei geometri, sembra

---

(1) A questo punto conviene notare che LAMBERT, contemporaneamente alle ricerche sulle parallele, si è occupato delle funzioni trigonometriche con argomento immaginario, il cui legame con la geometria non-euclidea è messo in evidenza da TAURINUS. Potrebbe darsi che LAMBERT avesse riconosciuto che le formule della trigonometria sferica conservano una *forma reale* anche mutando in esse il raggio reale nel raggio immaginario puro. Con ciò la previsione di LAMBERT, relativa all'*ip. ang. acuto* [cfr. p. 44], avrebbe un fondamento indiscutibile. Nulla però ci autorizza a credere che LAMBERT abbia effettivamente riavvicinato le sue ricerche sulle funzioni trigonometriche alla teoria delle parallele — cfr. P. STÄCKEL: « *Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien.* » — Bibliotheca Math, p. 107-110 [1899].

prevedere l'esistenza di qualche caso concreto, in cui trovino una interpretazione [1].

---

[1] L'importanza di SCHWEIKART e TAURINUS, nella scoperta della geometria non-euclidea, fu rilevata e messa in luce dai SS. STÄCKEL ed ENGEL, che nella « *Th. der P.* » dedicarono loro un intero capitolo [p. 237-286], riportando i passi più importanti delle opere di TAURINUS e alcune lettere fra questi, GAUSS e SCHWEIKART. Vedi pure l'articolo di STÄCKEL su « *Franz Adolph Taurinus* », Abhandlungen Z. Gheschichte d. Math., t. IX, p. 397-427 [1899].

CAPITOLO IV.

I fondatori della geometria non-euclidea.

[*Seguito*]

NICOLA IVANOVIC LOBACEFSKI [1793-1856] (1).

§ 39. LOBACEFSKI studiò matematiche all'Università di Kasan, sotto la direzione del tedesco J. M. C. BARTELS [1769-1836], amico e compaesano di GAUSS; si laureò nel 1813 e rimase all'Università prima come assistente, poi come professore, insegnandovi tutti i rami della matematica ed anche la fisica e l'astronomia.

Nel 1815 LOBACEFSKI già si occupava delle parallele e in un suo manoscritto, relativo alle lezioni del 1815-17, si trovano alcuni tentativi per la dimostrazione del *V postulato* e ricerche simili a quelle di LEGENDRE. Però solo dopo il 1823 concepì la *Geometria immaginaria*. Ciò risulta da un suo trattato manoscritto sulla geometria elementare, ove è detto che non si possiede alcuna dimostrazione del *V postulato*, ma che una tale dimostrazione non dev' essese impossibile.

Fra il 1823 ed il 1825 le idee di LOBACEFSKI si orientarono verso una geometria indipendente dall'*ipotesi d' Euclide*.

---

(1) Per quanto riguarda le notizie storiche e critiche intorno a LOBACEFSKI rimandiamo, una volta per sempre, al volume di F. ENGEL: « *N. J. Lobatschefskij -- Zwei geometrische Abhandlungen aus dem russichen uebersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers.* » [Leipzig, Teubner, 1899].

ed il primo frutto dei nuovi studi è l' « *Exposition succinte des principes de la géométrie, avec une demonstration rigoureuse du théorème des parallèles.* », presentata il 12 [24] febbraio 1826 alla sezione fisico-matematica dell' Università di Kasan. In questa « *Lettura* », il cui manoscritto non fu rinvenuto, LOBACEFSKI espone i fondamenti d' una geometria più generale dell' ordinaria, ove per un punto passano due parallele ad una retta ed in cui la somma degli angoli d' un triangolo è minore di due angoli retti [*ip. ang. acuto* di SACCHERI e LAMBERT].

Nel 1829-30 affidò poi alla stampa una memoria « *Sui fondamenti della geometria.* » (1), contenente la parte essenziale della precedente « *Lettura* » ed ulteriori applicazioni della nuova teoria all' analisi. Successivamente uscirono la « *Geometria immaginaria.* » [1835] (2), i « *Nuovi fondamenti della geometria con una completa teoria delle parallele.* » [1835-38] (3), le « *Applicazioni della geometria immaginaria a qualche integrale.* » [1836] (4); poi la « *Géométrie imaginaire.* » [1837] (5) e nel 1840 l' opuscolo riassuntivo: « *Geometrische Untersuschungen zur Theorie der Parallellinien.* » (6), scritto in lingua tedesca e destinato da LOBA-

(1) Bollettino di Kasan [1829-30]. — *Opere Geometriche* di LOBACEFSKI [Kasan, 1883-86], t. I, p. 1-67. — Traduzione tedesca di F. ENGEL a p. 1-66 del volume citato a p. 75.

(2) Scritti scientifici dell' Università di Kasan [1835]. — *Op. Geom.*, t. I, p. 71-120.

(3) Scritti scient. Un. Kasan [1835-38]. — *Op. Geom.*, t. I, p. 219-486. — Trad. tedesca di F. ENGEL, p. 67-235 del vol. citato a p. 75.

(4) Scritti scient. Un. Kasan [1836]. — *Op. Geom*, t. I, p. 121-218.

(5) Giornale di CRELLE, t. XVII, p. 295-320. — *Op. Geom.*, t. II, p. 581-613.

(6) Berlin [1840]. — *Op. Geom.*, t. II, p. 553-578. — Trad. francese di J. HOÜEL, contenuta nelle Mém. de Bordeaux t. IV [1866], od anche nelle: « *Recherches géométriqués sur la theorie des parallèles.* », [Paris, Hermann, 1900].

CEFSKI a richiamare l'attenzione dei geometri sulle sue ricerche. Finalmente nel 1855, un anno avanti la morte, egli, già cieco, dettò e pubblicò in lingua russa e francese una completa esposizione del suo sistema geometrico, sotto il titolo « *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.* » (1).

§ 40. La geometria non-euclidea, quella stessa concepita da GAUSS e SCHWEIKART intorno al 1816, studiata da TAURINUS sotto forma d'un sistema astratto nel 1826, entrava nel 1829-30 a far parte del pubblico patrimonio scientifico.

Per accennare nel modo più rapido il metodo seguito da LOBACEFSKI nella costruzione della « *Geometria immaginaria* » o « *Pangeometria* », riferiamoci alle sue « *Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele* » del 1840.

In esse LOBACEFSKI, dopo aver premesso un gruppo di teoremi indipendenti dalla teoria delle parallele, considera

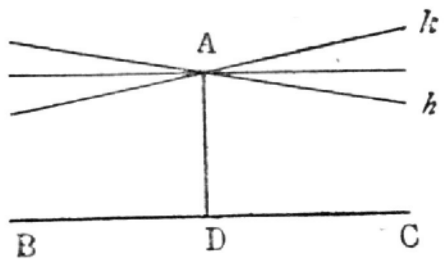

Fig. 37.

sul piano un fascio di centro A ed una retta BC che non gli appartenga. Sia AD la retta del fascio perpendicolare a BC ed AE la retta perpendicolare ad AD. Questa retta, nel sistema euclideo, è *l'unica* che non interseca BC. Nella geometria di LOBACEFSKI *esistono nel fascio A altre rette non*

(1) Raccolta di dissertazioni scientifiche scritte dai professori della reale Università di Kasan nel cinquantesimo anniversario della sua esistenza, t. I, p. 279-340, [1856]. — *Op. Geom.*, t. II, p. 617-80. — Trad. italiana di G. BATTAGLINI nel Giornale di Mat., t. V, p. 273-336.

secanti BC: le *non secanti* sono separate dalle *secanti* da due rette *h*, *k*, che alla loro volta non incontrano BC [cfr. SACCHERI, p. 36].

Queste rette, che l'autore chiama *parallele*, hanno ciascuna un determinato *verso di parallismo*: la *h* della nostra figura corrisponde al verso destro, la *k* al verso sinistro. L'angolo formato dalla perpendicolare AD con una delle parallele è *l'angolo di parallelismo* corrispondente alla distanza AD. LOBACEFSKI usa il simbolo $\Pi(a)$ per denotare l'angolo di parallelismo corrispondente alla distanza *a*. Nell'ordinaria geometria si ha costantemente: $\Pi(a) = 90^\circ$; in quella di LOBACEFSKI $\Pi(a)$ è una ben determinata funzione di *a*, che tende a 90° quando *a* tende a zero, che tende a zero quando *a* tende all'infinito.

Dalla definizione di parallele l'autore deduce poi le loro principali proprietà, cioè la *conservazione*, la *reciprocità*, la *transitività* del carattere di parallelismo [cfr. GAUSS, p. 62] e il comportamento *asintotico* delle parallele.

La dimostrazione di queste proprietà è preceduta dai teoremi sulla somma degli angoli d'un triangolo, quegli stessi già dati da LEGENDRE e prima ancora da SACCHERI. Può quindi supporsi che LOBACEFSKI conoscesse le ricerche di questi geometri, segnatamente del primo.

Ma la parte più importante della « *Geometria immaginaria* » è la costruzione della formule trigonometriche.

Per dedurle l'autore introduce due nuove figure: l'*oriciclo* [cerchio di raggio infinito; cfr. GAUSS, p. 63-4] e l'*orisfera* [sfera di raggio infinito], che nell'ordinaria geometria sono rispettivamente la retta ed il piano. E poichè sulla orisfera, cui appartengono ∞^2 oricicli, può istituirsi una geometria analoga alla ordinaria, in cui gli oricicli sostituiscono le rette, così LOBACEFSKI ottiene questo primo notevole risultato: *Sulla orisfera è valida la geometria euclidea* [cfr. WACHTER, p. 57] *e in particolare l'ordinaria trigonometria piana.*

Di questa notevole proprietà e di un' altra relativa agli *oricicli coassiali* [cerchi concentrici di raggio infinito] LOBACEFKI si giova per dedurre le formule della nuova trigonometria piana e della trigonometria sferica. Queste ultime coincidono con le ordinarie formule della sfera, quando però gli elementi del triangolo siano misurati in angoli retti.

§ 41. Giova notare la forma data da LOBACEFSKI alle sue formule. Se nel triangolo piano ABC denotiamo con a, b, c i lati opposti ad A, B, C; con $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ gli angoli di parallelismo corrispondenti ai lati, la formula fondamentale di LOBACEFSKI è:

$$(4) \qquad \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a)} = 1.$$

È facile vedere che questa formula e quella di TAURINUS [(1), p. 68] sono trasformabili l' una nell' altra.

Per passare da quella di TAURINUS a quella di LOBACEFSKI basta far uso della (3) di p. 71, osservando però che l' angolo β che in essa compare è $\Pi(a)$. Per il passaggio inverso serve anche la seguente relazione, data da LOBACEFSKI:

$$(5) \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = \mathbf{a}^{-x},$$

che è la stessa (3) di TAURINUS, sotto forma un po' diversa.

La costante **a** che figura nella (5) è indeterminata: rappresenta il rapporto costante di due archi di oricicli coas-

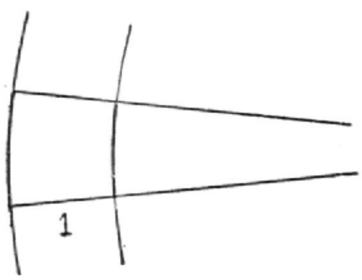

Fig. 38.

siali, compresi fra i medesimi raggi, distanti l' uno dall' altro dell' unità di misura. Scegliendo, con LOBACEFSKI, una conveniente unità, potremo prendere **a** uguale ad e, cioè alla base dei logaritmi naturali. Volendo invece riavvicinare i risultati di LOBACEFSKI alla *Geometria log.-sferica* di TAURINUS, ovvero alla geometria *non-euclidea* di GAUSS, porremo:

$$\mathbf{a} = e^{\frac{1}{k}}.$$

Allora la (5) diventa:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}} \tag{5'}$$

o ciò che fa lo stesso:

$$\operatorname{Ch} \frac{x}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(x)}. \tag{6}$$

Con questa relazione si trasforma immediatamente la formula (4) di LOBACESKI nella (1) di TAURINUS. Quindi:

La geometria log.-sferica di TAURINUS *è identica alla geometria immaginaria [Pangeometria] di* LOBACEFSKI.

§ 42. Ecco i più notevoli risultati che LOBACEFSKI deduce dalle sue formule:

a) Per triangoli con lati piccolissimi [infinitesimi] alle formule della *trigonometria immaginaria* possono sostituirsi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, le ordinarie formule trigonometriche.

b) Il cambiamento dei lati a, b, c nei lati puramente immaginari ia, ib, ic trasforma le formole della *trigonometria immaginaria* nelle formule della trigometria sferica [1].

d) Istituendo sul piano e nello spazio un sistema di coordinate simile all' ordinario cartesiano è possibile, coi metodi

---

[1] Quesfo risultato giustifica il metodo seguito da TAURINUS nella costruzione della sua *geometria log.-sferica*.

della geometria analitica, calcolare le lunghezze delle linee, le aree delle superficie, i volumi dei solidi.

§ 43. Come mai LOBACEFSKI fu condotto ad occuparsi delle parallele ed a scoprire la geometria immaginaria?

Si disse che BARTELS, maestro di LOBACEFSKI a Kasan, era legato in amicizia con GAUSS [p. 75]: se ora si aggiunge che quegli passò a Brunsvich, con GAUSS, i due anni che precedettero la sua chiamate a Kasan [1807] e che si mantenne poi con GAUSS in relazione epistolare, si presenta spontanea l' ipotesi che questi non sia estraneo alle ricerche di LOBACEFSKI.

Già vedemmo che GAUSS, prima del 1807, aveva tentato di risolvere la questione delle parallele e che i suoi sforzi fino a quell' epoca non avevano fruttato che la speranza di superare gli scogli contro cui avevano urtato le sue ricerche. Quindi tutto ciò che BARTELS può avere appreso da GAUSS prima del 1807 si ridurrebbe a qualche risultato negativo. Per quanto riguarda le successive vedute di GAUSS, pare assodato che BARTELS non ne avesse comunicazione, talchè possiamo ritenere che LOBACEFSKI creasse la sua geometria indipendentemente da qualsiasi influenza gaussiana [1]. Altre influenze potrebbero supporsi, ad. es. quelle dovute alle opere di SACCHERI e LAMBERT, che il geometra russo, o direttamente o attraverso KLÜGEL e MONTUCLA, potrebbe aver conosciuto. Ma nulla di preciso si può formulare intorno a questa supposizione [2]. Ad ogni modo o le mancate dimostrazioni de' suoi predecessori o l' inutilità delle sue prime ricerche [1815-17] indussero LOBACEFSKI, come già GAUSS, a pensare che la difficoltà da superarsi avesse un fondamento diverso di quello fino allora supposto. LOBACEF-

---

(1) Cfr. F. ENGEL, op. citata a p. 75: Zweiter Theil; *Lobatschefskij Leben und Schriften.* », Cap. VI, p. 373-383.

(2) Cfr. le « *Congetture* » di SEGRE citate a p. 38.

SKI esprime chiaramente questa idea nei « *Nuovi fondamenti della geometria.* » del 1835, ove dice:

« L'infruttuosità dei tentativi, fatti dal tempo di Euclide, « per lo spazio di due millenì, svegliò in me il sospetto « che nei dati stessi non fosse contenuta ancora la verità « che si era voluto dimostrare e che alla conferma sua « potessero servire, come pel caso di altre leggi naturali, « delle esperienze, ad esempio delle osservazioni astrono- « miche. Essendomi convinto finalmente della giustezza « della mia congettura ed avendo acquistata l'opinione di « aver completamente risolto il difficile quesito, scrissi, nel- « l'anno 1826, una memoria su questo soggetto [*Exposition « succinte des principes de la Géométrie.*] » (1).

Le parole di LOBACEFSKI mettono in luce una concezione filosofica dello spazio, opposta a quella kantiana, che allora godeva il massimo favore. La dottrina kantiana considera lo spazio come una intuizione subbiettiva, necessario presupposto di ogni esperienza; quella di LOBACEFSKI, riattaccandosi piuttosto al sensualismo ed alla corrente empirista, fa rientrare la geometria nel campo delle scienze sperimentali (2).

§ 44. Resta ora a mettere in relazione la *Pangeometria* di LOBACEFSKI con la questione suscitata dal *postulato euclideo.* La quale, come si è visto, mirava a costruire la teoria delle parallele col solo sussidio delle prime 28 proposizioni di EUCLIDE.

Rispettando questa richiesta LOBACEFSKI definisce il parallelismo e ne assegna i caratteri salienti di reciprocità e transitività. Il carattere d'equidistanza si presenta poi a LOBA-

---

(1) P. 67 della citata opera di ENGEL.

(2) Cfr. il discorso di A. VASILIEV su LOBACEFSKI [Kasan, 1893]. — Trad. tedesca di ENGEL, Zeits. f. Math. u. Phy. t. XI, p. 205-44 [1895].

CEFSKI nella sua vera essenza. Ben lungi dall' essere legato indissolubilmente alle prime 28 proposizioni euclidee, esso racchiude invece un nuovo elemento.

La verità di questa asserzione risulta direttamente dall' esistenza della *Pangeometria* [scienza logica deduttiva, fondata sulle 28 prop. in discorso e sulla negazione del V *postulato*], in cui le parallele *non sono equidistanti*, ma asintotiche. Che la *Pangeometria* sia poi una scienza logicamente conseguente, cioè priva di contraddizioni interne, si spiega, con LOBACEFSKI, riferendosi alla formulazione analitica di cui essa è suscettibile.

Ecco come si esprime in proposito LOBACEESKI alle fine della sua opera:

« Avendo mostrato in ciò che precede in qual modo bisogna calcolare la lunghezza delle linee curve, l' area delle superficie ed il volume dei corpi, ci è permesso d' affermare che la Pangeometria è una dottrina completa. Un semplice colpo d' occhio sulle equazioni (4), che esprimono la dipendenza esistente tra i lati e gli angoli dei triangoli rettilinei, è sufficiente per dimostrare che a partire di là la Pangeometria diviene un metodo analitico, che rimpiazza e generalizza i metodi analitici della geometria ordinaria. Si potrebbe incominciare l' esposizione della Pangeometria dalle suddette equazioni ed anche cercare di sostituire a queste equazioni altre che esprimerebbero le dipendenze tra gli angoli e i lati di ogni triangolo rettilineo; ma in quest' ultimo caso bisognerebbe dimostrare che queste nuove equazioni si accordano con le nozioni fondamentali della geometria. Le equazioni (4), essendo state dedotte da queste nozioni fondamentali, si accordano necessariamente con esse, e tutte le equazioni che si volessero loro sostituire, se queste equazioni non sono una conseguenza delle equazioni (4), debbono condurre a risultati contrari a queste nozioni. Così le equazioni (4) sono la base della geometria più generale, poichè esse non dipendono dalla supposizione che la somma dei tre angoli d'ogni triangolo rettilineo sia uguale a due angoli retti. » (¹).

§ 45. Per stabilire qualche cosa intorno alla costante k contenuta implicitamente nelle formule di LOBACEFSKI ed

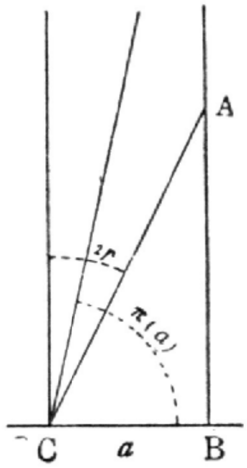

Fig. 39.

esplicitamente in quelle di TAURINUS, è necessario applicare la nuova trigonometria a qualche caso pratico. Allo scopo LOBACEFSKI si giova d'un triangolo rettangolo ABC, in cui il lato BC $= a$ è il diametro dell'orbita terrestre ed A una stella fissa in direzione perpendicolare a BC. Indichiamo con $2p$ la *parallesse* massima della stella A. Avremo:

$$\Pi(a) > \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - 2p\,;$$

da cui:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi(a) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p}.$$

Ma:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}} \qquad \text{[Cfr. p. 79, (5')]}$$

quindi:

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p}.$$

(¹) Cfr. la « *Pangeometria* », nella trad. italiana di G. BATTAGLINI, Gior. di Matematiche, t. V, p. 334.

Allora, nell' ipotesi $p < \frac{\pi}{4}$, abbiamo:

$$\frac{a}{k} = \log \frac{1 + \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p} = 2\left(\operatorname{tg} p + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 p + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 p + ...\right).$$

Inoltre, essendo:

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = 2\,(\operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \operatorname{tg}^5 p + ...),$$

sarà finalmente:

$$\frac{a}{k} < \operatorname{tg} 2p.$$

Sostituendo con LOBACEFSKI a $2p$ la parallasse di *Sirio*, che è di $1'',24$ ed effettuando i calcoli si ottiene:

$$\frac{a}{k} < 0{,}000006012.$$

Questo risultato non ci permette di assegnare un valore per k, ma di asserire che esso è molto grande rispetto al diametro terrestre. Si potrebbe ripetere il calcolo con parallassi molto minori, ad es. di $0'',1$, trovando k maggiore di un milione di volte il diametro dell' orbita terrestre.

Perchè nello spazio fisico fosse valida la geometria euclidea e conseguentemente il *V postulato*, dovrebbe k essere infinito, o, ciò che fa lo stesso, dovrebbero esistere stelle con parallasse piccola quanto si vuole,

Ora, una risposta all' ultima questione si capisce che non potremo mai dirla, inquantochè le osservazioni astronomiche saranno sempre limitate. Comunque, data l' enorme grandezza di k rispetto alle linee direttamente misurabili, dovremmo, con LOBACEFSKI, ritenere nel campo sperimentale valida l' ipotesi euclidea.

Alla stessa conclusione potremmo giungere considerando la cosa dal lato della somma degli angoli di un triangolo. Le osservazioni astronomiche portano che la deficienza d' un triangolo, coi lati pressochè uguali alla distanza della terra dal sole, non può superare 0",0003. Ora, se in luogo d'un triangolo astronomico considerassimo un triangolo terrestre, con gli angoli accessibili alle misure dirette, in forza del principio di proporzionalità fra l'area e la deficienza, l'eventuale deficienza di sifatto triangolo rientrerebbe necessariamente nei limiti degli errori sperimentali, sicchè, sperimentalmente, potremo ritenere che la deficienza in discorso sia nulla e conseguentemente sia valido nel campo sperimentale il *postulato euclideo* (1).

GIOVANNI BOLYAI [1802-1860].

§ 46. Insieme a LOBACEFSKI divide la gloria della scoperta della *geometria non-euclidea* l'ungherese G. BOLYAI, figlio di WOLFGANG BOLYAI [cfr. p. 54], ufficiale nell'esercito austriaco. Fin da giovinetto egli mostrò una meravigliosa attitudine per le matematiche, in cui lo istruì lo stesso genitore. Le lezioni di WOLFGANG attirarono presto l'attenzione di GIOVANNI sull'*assioma XI*, alla cui dimostrazione volle poi accingersi, trascurando i consigli paterni, che miravano a distoglierlo da tale impresa. La teoria delle parallele formò così l'occupazione favorita del giovane matematico, durante il suo soggiorno [1817-22] alla R. Accademia del Genio in Vienna.

In quel tempo GIOVANNI ebbe relazioni di amicizia con CARLO SZÀSZ [1798-1853] e nelle conversazioni dei due valenti studiosi germogliarono alcune di quelle idee che condussero poi BOLYAI a creare la « *Scienza assoluta dello spazio* ».

---

(1) Per il contenuto di questo § cfr. LOBACEFSKI: « *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie.* », a p. 22-24 dell'opera di ENGEL citata a p. 75. Vedi pure le osservazioni di ENGEL a p. 248-252 della stessa opera.

Pare che al Szàsz si debba l'idea esplicita di considerare la parallela ad AM condotta per B come la posizione li-

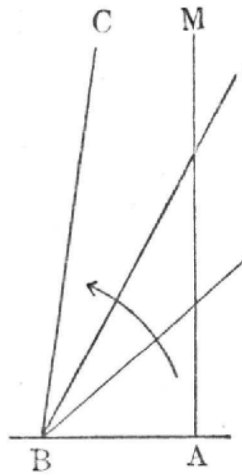

Fig. 40.

mite di una secante BC, che ruota intorno a B in un senso determinato; cioè di considerare BC parallela ad AM, quando BC, secondo una espressione di Szàsz, si *stacca* [abspringe] da AM. Bolyai chiamava questa parallela col nome di *parallela asintotica o asintoto* [cfr. Saccheri]. Nei colloqui dei due amici si presentarono il concetto di *linea di equidistanza da una retta;* l'altro importantissimo di *paraciclo* [*oriciclo* di Lobacefski] e si riconobbe che si sarebbe ottenuta la dimostrazione dell'*assioma XI* se si potesse stabilire che il *paraciclo* è una retta.

Avendo sul principio del 1821 lo Szàsz lasciato Vienna, per assumere l'insegnamento del Diritto al Collegio di Nagy-Enyed [Ungheria], Giovanni rimase solo a proseguire nelle sue speculazioni. Fino al 1820 egli fu dominato dall'idea di trovare una dimostrazione per l'*assioma XI*, seguendo una via analoga a quella di Saccheri e Lambert. Anzi credè d'aver raggiunto lo scopo, come risulta dalla sua corrispondenza col padre.

Il riconoscimento degli errori commessi fu per Giovanni il passo decisivo verso le future scoperte, perchè s'accorse

« che non bisogna fare nessuna violenza alla natura nè « modellarla in conformità ad alcuna chimera ciecamente « formata, ma si deve invece in modo ragionevole e natu- « rale guardare la natura stessa con la verità ed accon- « tentarsi della rappresentazione meno imperfetta possi- « bile. ».

GIOVANNI BOLYAI si propose allora di costruire una *teoria assoluta* dello spazio, seguendo il metodo classico dei greci, cioè applicando il metodo deduttivo, senza però decidere a priori sulla validità o meno del *V postulato*.

§ 47. Solo nel 1823 BOLYAI penetrò la vera natura del suo problema: nel seguito non vi aggiunse che delle condizioni relative al materiale ed alla forma. Aveva scoperto in quel tempo la formula:

$$e^{-\frac{a}{k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a),$$

che lega l'angolo di parallelismo $\Pi(a)$ al corrispondente segmento [cfr. LOBACEFSKI, p. 80], relazione che è la chiave di tutta la trigonometria non-euclidea. Ad illustrare le scoperte di GIOVANNI in questo periodo riportiamo un brano della lettera che egli scrisse, da Temesvár, al padre il 3 novembre 1823.

« Sono ormai risoluto di pubblicare un'Opera sulla teo- « ria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le « circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, « ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, « quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, « ma ho scoperto cose sì belle che ne sono rimasto abba- « liato, e si dovrebbero sempre rimpiangere se andassero « perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. « Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: *Ho dal « nulla creato un nuovo universo.* Tutto ciò che vi ho « comunicato fino ad ora non è che un palazzo di carta di

« fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi « farà onore come se ciò fosse già avvenuto. ».

WOLFGANG espresse il desiderio di accogliere subito nel « *Tentamen* » la teoria del figlio, perchè « se la cosa è « realmente riuscita è conveniente affrettarsi a renderla di « pubblica ragione per due motivi, primo perchè le idee « passano facilmente da uno in un altro, che in seguito le « può pubblicare prima; in secondo luogo perchè c' è anche « qualche verità in ciò, che parecchie cose hanno un' epoca, « nella quale esse sono trovate allo stesso tempo in più « luoghi, precisamente come in primavera le violette da « ogni parte vengono alla luce; e poichè ogni lotta scien- « tifica è solo una gran guerra, alla quale non so quando « seguirà la pace, si deve, quando si può, vincere, poichè « qui il vantaggio spetta al primo. ».

WOLFGANG BOLYAI era forse lontano dal supporre che il suo presentimento corrispondesse ad un fatto reale, cioè alla contemporanea scoperta della geometria non euclidea per opera di GAUSS, TAURINUS, LOBACEFSKI.

Nel 1826 GIOVANNI comunicò il suo lavoro a J. WALTER von ECKWEHR [1789-1857], gia suo professore all' Accademia militare e nel 1829 rimise il manoscritto al padre. WOLFGANG non fu molto soddisfatto, segnatamente perchè non riuscì a comprendere come mai nelle formule di GIOVANNI dovesse entrare una costante indeterminata. Nondimeno padre e figlio si intesero per pubblicare in appendice al primo volume del « *Tentamen* » la nuova teoria dello spazio.

Ecco il titolo dell' opera di GIOVANNI BOLYAI: « *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* » (1).

(1) Ristampata in formato di lusso, per cura dell' Accademia

L'appendice fu inviata una prima volta [giugno 1831] a Gauss senza che giungesse alla destinazione e una seconda volta nel gennaio del 1832. Sei settimane dopo [6 marzo 1832] Gauss così rispondeva a Wolfgang:

« Se comincio col dire che *non posso lodare questo la-« voro* [di Giovanni], tu certamente per un istante reste-« rai meravigliato; ma non posso dire altra cosa; lodarlo « sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto del-« l'Opera, la via spianata da tuo figlio, i risultati ai quali « egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie « meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente « da trenta a trentacinque anni a questa parte. Così ri-« masi pienamente stupefatto. In quanto al mio lavoro per-« sonale, del quale fin qui ho ben poco confidato alla carta, « era mia intenzione di non lasciare che si pubblicasse « nulla durante la mia vita. Infatti la maggioranza degli « uomini non ha idee chiare sulle questioni di cui si parla, « ed io ho trovato ben poche persone che prestassero « uno speciale interesse a ciò che loro comunicai su tale « soggetto. Per poter prendere questo interesse bisogna « prima di tutto aver sentito molto vivamente ciò che « manca essenzialmente, e su questa materia quasi tutti « sono in una completa oscurità. Al contrario era mia idea « di scrivere, col tempo, tutto ciò, perchè esso almeno non « perisse con me. È adunque per me una gradevole sor-« presa vedere che questa fatica può ora essermi rispar-« miata, e sono estremamente contento che sia proprio il « figlio del mio vecchio amico, che mi abbia preceduto in « modo così notevole ».

Ungherese di Scienze, nell'occasione del 1° centenario della nascita dell'autore. [Budapest, 1902]. Vedi la traduzione italiana di G. Battaglini, nel t. VI del Giornale di Matematiche, p. 97-115 [1868].

Wolfgang comunicò questa lettera al figlio aggiungendo: « La risposta di Gauss rispetto alla tua opera ridonda « ad onore della nostra patria e della nostra nazione. ».

Un effetto tutto diverso produsse su Giovanni la lettera di Gauss. Egli non poteva nè voleva convincersi che altri, prima ed indipendentemente da lui, fosse arrivato alla *geometria non-euclidea*. Sospettò ancora che il padre avesse comunicato a Gauss le sue scoperte prima d' inviargli l' « *Appendix* » e che questi volesse appropriarsi la priorità della scoperta. E benchè in seguito dovesse convincersi che un tale sospetto era infondato, Giovanni conservò sempre una ingiustificabile avversione per il sommo geometra (¹).

§ 48. Ecco un cenno dei più importanti risultati contenuti nell' opera di Giovanni Bolyai.

a) Definizione delle parallele e loro proprietà indipendenti dal postulato euclideo.

b) Cerchio e sfera di raggio infinito. La geometria sulla sfera di raggio infinito è identica all' ordinaria geometria piana.

c) La trigonometria sferica è indipendente dal postulato d' Euclide. Dimostrazione diretta delle formule.

d) Trigonometria piana nel caso non-euclideo. Applicazioni al calcolo delle aree e dei volumi.

e) Problemi risolubili elementarmente. Costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio, nell' ipotesi della falsità del V postulato.

(¹) Per il contenuto di questo e del precedente § cfr.: Stäckel: « *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai.* », Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVII, [1901]; Stäckel ed Engel: « *Gauss die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie.* » Math. Ann. t. IL, p. 149-167, [1897]; Bull. Sc. Math., (2), t. XXI, p. 206-228.

Benchè Lobacefski abbia dato un maggiore sviluppo alla *geometria immaginaria*, specialmente al suo contenuto analitico, Bolyai ha trattato più profondamente la questione della dipendenza o meno delle proposizioni geometriche dal postulato euclideo. Dove Lobacefski mira principalmente a costruire un sistema geometrico sulla negazione del postulato in discorso, Giovanni Bolyai mette in evidenza le proposizioni e costruzioni che nell'ordinaria geometria non dipendono da quel postulato. Sifatte proposizioni, ch'egli chiama *assolutamente vere*, appartengono alla *scienza assoluta* dello spazio. La ricerca delle proposizioni di questa scienza potrebbe effettuarsi confrontando la geometria di Euclide con quella di Lobacefski. Tutto ciò che hanno di comune le due geometrie, ad es. le formule della trigometria sferica, appartiene alla geometria assoluta. Giovanni Bolyai però non segue questa via: egli dimostra direttamente, cioè indipendentemente dal postulato euclideo, le sue proposizioni assolutamente vere.

§ 49. Un teorema assoluto di Bolyai, meraviglioso per semplicità ed eleganza, è il seguente:

In un triangolo rettilineo le circonferenze di raggio

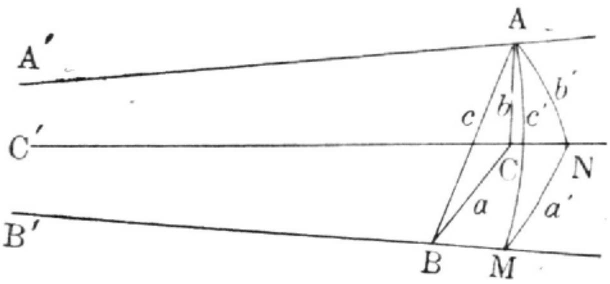

Fig. 41.

uguale ai lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C, e BB′ la perpendicolare in B al piano del triangolo. Pei vertici A, C si traccino le rette AA′, CC′, parallele in un determinato verso a BB′, poi per A si immagini descritta l'orisfera [eventualmente piana] che taglia ortogonalmente le rette AA′, BB′, CC′ rispettivamente nei punti A, M, N. Se si denotano con a', b', c' i lati del triangolo rettangolo orisferico AMN, in forza di quanto altrove si disse [ad es. al § 48, (b], si avrà:

$$\text{sen}\ \widehat{\text{AMN}} = b' : c'.$$

Ma sull'orisfera due archi d'oriciclo stanno fra loro come le circonferenze che hanno per raggi [oriciclici] quegli archi, talchè, indicando con *cirf.* x' la circonferenza di raggio oriciclico x', si potrà scrivere:

$$\text{sen}\ \widehat{\text{AMN}} = \text{cirf.}\ b' : \text{cirf.}\ c'.$$

D'altra parte, una circonferenza tracciata sull'orisfera con raggio oriciclico x', può riguardarsi come una circonferenza ordinaria, il cui raggio rettilineo x sia la metà della corda dell'arco oriciclico $2x'$. Talchè, denotando $\bigcirc x$ la circonferenza di raggio rettilineo x ed osservando che i due angoli $\widehat{\text{ABC}}$, $\widehat{\text{AMN}}$ sono uguali, la precedente relazione assume la forma:

$$\text{sen}\ \widehat{\text{ABC}} = \bigcirc b : \bigcirc c.$$

Dalla proprietà del triangolo rettangolo ABC, espresso con questa uguaglianza, si può dedurre l'enunciato teorema di Bolyai, nello stesso modo che dalla relazione euclidea:

$$\text{sen}\ \widehat{\text{ABC}} = b : c$$

si deduce la proporzionalità fra i lati d'un triangolo e i seni degli angoli opposti [*Appendix*, § 25].

Il teorema di BOLYAI si esprime poi brevemente così:

$$(1) \qquad \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta : \text{sen}\,\gamma.$$

Se ora volessimo specializzare il sistema geometrico, avremmo:

1°) nell' ip. euclidea:

$$\bigcirc x = 2\pi x,$$

e sostituendo in (1):

$$(1') \qquad a : b : c = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta : \text{sen}\,\gamma;$$

2°) nell' ip. non-euclidea [cfr. p. 64]:

$$\bigcirc x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right) = 2\pi k \ \mathbf{Sh}\,\frac{x}{k},$$

ed operando come sopra:

$$(1'') \quad \mathbf{Sh}\,\frac{a}{k} : \mathbf{Sh}\,\frac{b}{k} : \mathbf{Sh}\,\frac{c}{k} = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,\beta : \text{sen}\,\gamma.$$

Quest' ultima relazione può riguardarsi come il *teorema dei seni* della geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI.

Dalle (1), con procedimenti analoghi agli ordinari basati sulle (1'), BOLYAI deduce la *proporzionalità fra i seni degli angoli e i seni dei lati in un triangolo sferico*. Da ciò risulta l' indipendenza della trigonometria sferica, dal postulato d' EUCLIDE [*Appendix*, § 26]. Questo fatto mette ancor più in rilievo l' importanza del teorema di BOLYAI.

§ 50. Appartiene pure alla geometria assoluta la seguente costruzione di una parallela per il punto D alla retta AN [*Appendix*, § 34].

Tracciate le rette DB ed AE perpendicolarmente ad AN, si cali da D la perpendicolare DE alla retta AE. L'angolo $\widehat{EDB}$ del quadrilatero trirettangolo ABDE è retto od acuto, percui ED è uguale o maggiore ad AB. Con centro A si descriva una circonferenza di raggio ED: essa intersecherà il segmento DB in un punto O, coincidente con B ovvero compreso fra B e D. *La retta* AO *forma con* DB *un angolo* $\widehat{AOB}$ *uguale all' angolo di parallelismo corrispondente al segmento* BD [1] [*Appendix*, § 27]. Si costruirà dun-

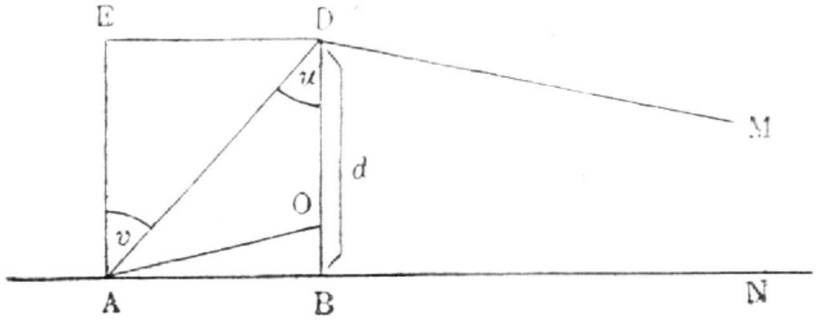

Fig. 42.

[1] Ecco rapidamente come Bolyai dimotra questa proposizione. Le circonferenze ◯AB, ◯ED, generate dai punti B, D nella loro rotazione intorno alla retta AE, possono considerarsi come appartenenti la prima al piano perpendicolare in A all'asse AE, la seconda ad una *superficie equidistante* da questo piano. L' equidistanza fra superficie e piano è data dal segmento $d =$ BD. Il rapporto fra le due circonferenze in discorso risulta perciò funzione *soltanto* di d. Questo rapporto può anche esprimersi ricorrendo al teorema di Bolyai [§ 49], il quale, applicato ai due triangoli rettangoli ADE, ADB, conduce alla relazione:

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \text{sen } u : \text{sen } v.$$

que per D una parallela ad AN tracciando la retta DM in modo che l'angolo $\widehat{BDM}$ risulti uguale all'angolo $\widehat{AOB}$.

§ 51. Fra le costruzioni non-euclidee, date da Bolyai, è molto interessante la *quadratura del cerchio.* Senza attenerci strettamente al metodo di Bolyai, cerchiamo di porgere questa costruzione nelle sue linee generali.

Premettiamo la costruzione inversa a quella del § 50, necessaria pel nostro scopo.

Costruire, nell' ip. non-euclidea, il segmento corrispondente ad un dato angolo [acuto] *di parallelismo.*

Dato che il teorema sull' *eventuale* incidenza delle tre altezze di un triangolo è valido anche nella geometria di Lobacefski-Bolyai, sul lato AB, dell'angolo acuto $\widehat{BAA'}$, [Fig. 43], si fissi un punto B tale che la parallela BB′ alla retta AA′ formi l'angolo $\widehat{B'BA}$ acuto. Le due semirette AA′..., BB′... ed il segmento AB possono riguardarsi come lati d'un triangolo, di cui un vertice è il punto C_∞, comune alle due parallele AA′, BB′. Allora, se dai vertici A e B si calano le perpendicolari AH, BK sui lati opposti, queste perpendicolari *s' incontrano* in un punto O, interno al triangolo, in

---

Da ciò si vede che il rapporto sen u : sen v non varia se, tenuto fisso d, la retta AE si sposta mantenendosi perpendicolare a BD. In particolare se il piede di AE tende all'infinito su AN, u tende a $\Pi(d)$ e v ad un angolo retto. Conseguentemente:

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \text{sen}\, \Pi(d) : 1.$$

D'altra parte, nel triangolo rettangolo AOB, vale la relazione:

$$\bigcirc AB : \bigcirc AO = \text{sen}\, \widehat{AOB} : 1,$$

la quale, insieme alla precedente, conduce a stabilire l'uguaglianza dei due angoli $\Pi(d)$ e $\widehat{AOB}$, c. d. d.

cui concorre anche la perpendicolare calata da C_∞ su AB. Dunque, se da O si abbassa la perpendicolare OL su AB, verrà

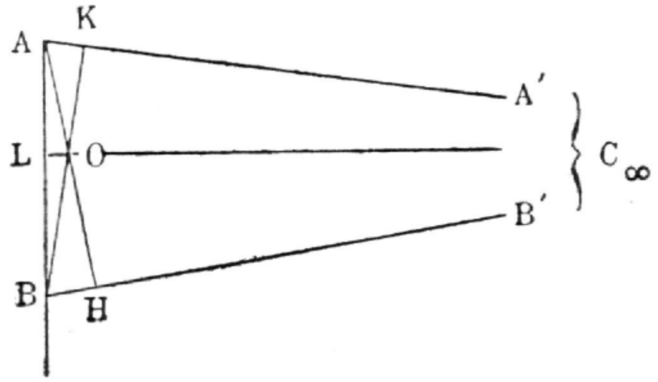

Fig. 43.

determinato il segmento AL, corrispondente all'angolo di parallelismo $\widehat{BAA'}$.

Come caso particolare l'angolo $\widehat{BAA'}$ potrebbe essere di 45°: allora AL sarebbe la costante di SCHWEIKART [cfr. pag. 66].

Notiamo che il problema risolto potrebbe enunciarsi così: *Costruire una retta parallela ad un lato di un angolo acuto e perpendicolare all' altro lato* (1).

§ 52. Ecco intanto come si utilizza il precedente risultato per *costruire un quadrato di area uguale a quella del triangolo massimo.*

L'area Δ di un triangolo essendo:

$$k^2 (\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}),$$

pel triangolo massimo, cioè pel triangolo coi tre vertici all' infinito, avremo:

$$\Delta = k^2 \pi$$

(1) La soluzione di BOLYAI [*Appendix*, § 35] è però più complicata.

Per determinare l' angolo ω di un quadrato di area $k^2\pi$ basta ricordare [LAMBERT, p. 40] che anche l' area di un poligono, come quella del triangolo, è proporzionale alla relativa deficienza, per la qual cosa dovrà sussistere la relazione:

$$k^2\pi = k^2(2\pi - 4\omega),$$

da cui:

$$\omega = \frac{1}{4}\pi = 45°;$$

Ciò posto consideriamo il triangolo rettangolo OAM, che è l' ottava parte del quadrato in discorso. Ponendo OM $= a$

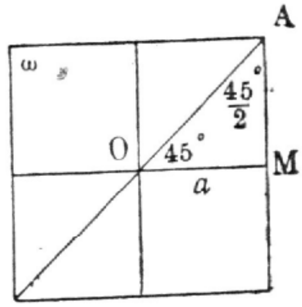

Fig. 44.

ed applicando la formula (2) di p. 71, si ricava:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{a}{k} = \cos\frac{1}{2}\,45° : \operatorname{sen} 45°,$$

od anche:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{a}{k} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\,135° : \operatorname{sen} 45°.$$

Se ora si costruiscono, secondo il § 51, i due segmenti b', c', corrispondenti agli angoli di parallelismo $\frac{1}{2}\,135°$, $45°$ e si rammenta che [p, 80, (6)]:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{x}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen}\Pi(x)},$$

fra i tre segmenti a, b', c' verrà a sussistere la relazione:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{a}{k}\;\mathbf{Ch}\,\frac{b'}{k} = \mathbf{Ch}\,\frac{c'}{k}.$$

Finalmente se si assumono b', c' quali cateto, il primo, e ipotenusa, il secondo, di un triangolo rettangolo, l'altro cateto a' di siffatto triangolo, in forza della (1) di p. 68, è determinato dall'equazione:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{a'}{k}\;\mathbf{Ch}\,\frac{b'}{k} = \mathbf{Ch}\,\frac{c'}{k}.$$

Paragonando questa uguaglianza con la precedente si ricava: $a' = a$. Costruito così a è immediatamente costruibile il quadrato d'area uguale a quella del triangolo massimo.

§ 53. Per costruire ora un cerchio d'area uguale a quella di questo quadrato o, ciò che fa lo stesso, a quella del triangolo massimo, è necessario trasformare l'espressione:

$$\bigcirc\, r = 2\,\pi\,k^2\left(\mathbf{Ch}\,\frac{r}{k} - 1\right),$$

che da l'area del cerchio di raggio r [cfr. p. 72], introducendo l'angolo di parallelismo $\Pi\left(\frac{r}{2}\right)$ corrispondente al semiraggio. Così facendo si ottiene [1]:

$$\bigcirc\, r = \frac{4\,\pi\,k^2}{\mathrm{tg}^2\,\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

---

[1] Infatti, per le proprietà delle funzioni iperboliche si ha:

$$\mathbf{Ch}\,\frac{r}{k} - 1 = 2\,\mathbf{Sh}^2\,\frac{r}{2k} = \left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}}\right)^2,$$

D' altra parte, se dagli estremi del segmento $AB = r$ si

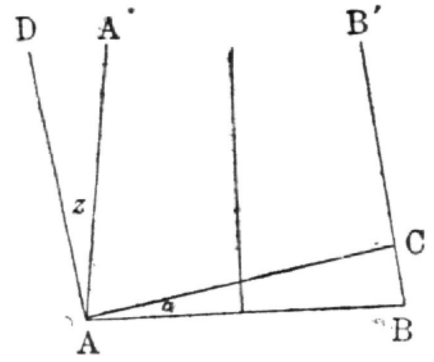

Fig. 45.

conducono le due parallele AA', BB', in modo che gli angoli ch' esse formano con AB siano uguali, sarà:

$$\widehat{A'AB} = \widehat{B'BA} = \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Calata ora la perpendicolare AC su BB' e la perpendicolare AD ad AC e posto:

$$\widehat{CAB} = \alpha \quad , \quad \widehat{DAA'} = z,$$

si ha:

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right) = \frac{\operatorname{ctg}\, \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{ctg}\, \alpha + 1}{\operatorname{ctg}\, \alpha - \operatorname{ctg}\, \Pi\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Utilizzando le formole trigonometriche nel triangolo ABC

---

e per le proprietà dell' angolo di parallelismo [cfr. p. 80]:

$$e^{-\frac{r}{2k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

è facile eliminare α dall'ultimo membro della precedente relazione ed ottenere così [1]:

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\operatorname{tg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right)},$$

dalla quale, per mezzo dell'ultima espressione di $\bigcirc\, r$, si ottiene:

$$\bigcirc\, r = \pi\, k^2 \operatorname{tg}^2 z.$$

Questa formula, dimostrata per altra via da BOLYAI [*Appendix*, § 43], permette di associare ad ogni cerchio un determinato angolo z. Se fosse $z = 45^\circ$ allora si avrebbe:

$$\bigcirc\, r = \pi\, k^2,$$

cioè: *l'area del cerchio, il cui angolo* z *è 45°, è uguale all'area del triangolo massimo* e perciò a quella del quadrato del § 52.

---

(1) Infatti, nel triangolo rettangolo ABC, si ha:

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{k}\right) \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{Ch} \frac{r}{k},$$

da cui, essendo:

$$\operatorname{Ch} \frac{r}{k} = 2 \operatorname{Sh}^2 \frac{r}{2k} + 1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

si deduce:

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

e successivamente:

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Queste due relazioni permettono di scrivere l'espressione di $\operatorname{tg} z$ nel modo richiesto.

Dato $z = \widehat{A'AD}$ [Fig. 45] si costruisce poi r tracciando: 1°) la retta AC perpendicolare ad AD; 2°) la retta BB′ parallela ad AA′ e perpendicolare ad AC [§ 51]; 3°) la *bisettrice* della *striscia* compresa fra AA′, BB′ [a mezzo del teorema sul punto d'incontro delle bisettrici in un triangolo con un vertice *improprio*]; 4°) la perpendicolare AB a questa bisettrice: il segmento AB, compreso fra AA′ e BB′, è il raggio r.

§ 54. Il problema di costruire poi un poligono equivalente ad un cerchio di area $\pi k^2 tg^2 z$ è, come nota BOLYAI, legato intimamente al valore numerico di $tg^2 z$. Esso è risolubile per ogni valore intero di $tg^2 z$ e per ogni valore frazionario, quando però il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini cada sotto la forma assegnata da GAUSS per l'iscrizione dei poligoni regolari [*Appendix*, § 43].

La possibilità di costruire un quadrato equivalente ad un cerchio conduce GIOVANNI a concludere: « *habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. ».

L'indecisione così formulata gli parve in quell'epoca [1831] irresolubile imperocchè chiuse il suo scritto con queste parole: « Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ [sistema euclideo] aut aliquod (et quodnam) S [sistema non euclideo] sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur. ».

GIOVANNI però non pubblicò mai sifatta dimostrazione.

§ 55. Dopo il 1831 Bolyai si occupò ancora della sua geometria ed in particolare dei seguenti problemi:

1°) Connessione fra la trigonometria sferica e la trigometria non-euclidea.

2°) Si può rigorosamente dimostrare che l'assioma euclideo non è una conseguenza dei precedenti?

3°) Volume del tetraedro in geometria non euclidea.

Per quanto riguarda il primo di questi problemi, BOLYAI, oltre rendersi conto della relazione analitica che lega le due trigonometrie [cfr. LOBACEFSKI, p. 80], riconobbe che nell' ipotesi non euclidea esistono tre tipi di superficie *uniformi* [1], su cui valgono rispettivamente la trigonometria non-euclidea, la trigonometria ordinaria, la trigonometria sferica. Sono del primo tipo le superficie piane ed *ipersferiche* [equidistanti da un piano], del secondo tipo le *parasferiche* [orisfere di LOBACEFSKI], del terzo tipo le *sfere*. Dalle superficie ipersferiche si passa alle sferiche attraverso il caso limite delle parasfere. Questo passaggio si realizza analiticamente facendo variare con continuità, dal campo reale al campo immaginario puro, attraverso l' infinito, un certo parametro che comparisce nelle formule [cfr. TAURINUS, p. 73].

Il secondo problema, quello relativo all' indimostrabilità dell' *assioma XI*, BOLYAI non riuscì a risolverlo, nè a formarsi una esatta convinzione intorno ad esso. Per un certo tempo credè che non si potesse in alcun modo decidere quale, fra il caso euclideo e quello non euclideo, fosse il vero, appoggiandosi, come già LOBACEFSKI, al valore analitico della nuova trigonometria. Poi si verificò in GIOVANNI un ritorno alle antiche idee, seguito da un nuovo tentativo per dimostrare l' *assioma XI*. In questo tentativo applica le formule non-euclidee ad un sistema di cinque punti completamente indipendenti. Fra le distanze di questi punti intercede necessariamente una relazione: ora, per un errore di calcolo, GIOVANNI non trovò questa relazione e per un certo tempo credè aver così dimostrata la falsità

---

(1) Con questo nome BOLYAI sembra indicare quelle superficie che, rispetto alla mobilità su se stesse, si comportano come il piano.

dell' ipotesi non-euclidea e l' assoluta verità dell' *assioma XI* (¹).

Però nel seguito s' accorse dell' errore, ma non procedè secondo questo indirizzo in ulteriori ricerche perchè il metodo, applicato ad un sistema di sei o più punti, lo avrebbe condotto a calcoli troppo lunghi.

Il terzo problema sopra indicato, relativo al tetraedro, è d' indole puramente geometrica. Le soluzioni di Bolyai furono ritrovate e messe in luce recentemente dallo Stäckel [cfr. nota (1)]. Dello stesso problema si era occupato distesamente Lobacefski fin dal 1829 (²), e Gauss, nella lettera in parte riportata a p. 90, lo proponeva a Giovanni.

Aggiungeremo in fine che G. Bolyai, venuto a conoscenza [1848] delle « *Geometrische Untersuchungen* » di Lobacefski, se ne occupò con intendimento critico (³), e che, per superare il geometra russo, si accinse a comporre una grande opera sulla riforma dei principi della matematica, concepita al tempo della pubblicazione dell' « *Appendix* », ma non riuscì a condurla a termine (⁴).

(¹) Ecco il titolo dello scritto in cui Giovanni si proponeva di esporre questa dimostrazione: « *Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum-und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der That allerhöchstwichtigsten 11. Euklid'schen Axioms. Von J. Bolyai von Bolya, k. k. Génie-Stabshauptmann in Pension.* ». Vedi in proposito lo scritto di P. Stäckel: « *Untersuchungen aus der Absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass.* ». Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XXIII, p. 280-307 [1902]. A questo scritto rimandiamo per tutto il contenuto del § 55.

(²) Vedi p. 53 e succ. dell' op. citata a p. 75.

(³) Cfr. P. Stäckel und J. Kürschàk: *Johann Bolyai's Bemerkungen ueber N. Lobatschewskij's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* », Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVIII, p. 250-279 [1902].

(⁴) Cfr. P. Stäckel: « *Johann Bolyai's Raumlehre.* ». Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XIX [1903].

LA TRIGONOMETRIA ASSOLUTA

§ 56. Benchè le formule della trigonometria non-euclidea contengano, come caso limite, le ordinarie relazioni fra lati ed angoli di un triangolo [cfr. p. 70], tuttavia esse non rientrano in quella che GIOVANNI BOLYAI chiamava *geometria assoluta.* Invero, dette formule non si applicano senz' altro ai due tipi di geometria e furono dedotte supponendo la validità dell' *ip. ang. acuto.* Relazioni applicabili senz' altro al caso euclideo ed al caso non-euclideo furono da noi incontrate al § 49 e costituiscono il teorema di BOLYAI. Esse sono tre, di cui due soltanto indipendenti, e ci forniscono così un primo gruppo di formule della *trigonometria assoluta.*

Altre formule di trigonometria assoluta furono date nel 1870 dal geometra belga M. DE TILLY, nei suoi « *Études de Mécanique abstraite.* » (1).

Le formule di DE TILLY si riferiscono ai triangoli rettangoli e furono dedotte mediante considerazioni cinematiche, che utilizzano soltanto quelle proprietà di una regione limitata di piano, che sono indipendenti dal valore della somma degli angoli del triangolo.

Oltre la funzione $\bigcirc x$, che già s' incontra nelle formule di BOLYAI, in quelle di DE TILLY compare un' altra funzione $\mathbf{E}x$, definita nel modo seguente. Sia r una retta, l la *linea equidistante* da r del segmento x. Poichè gli archi di l sono proporzionali alle rispettive proiezioni su r è chiaro che il rapporto fra un arco [rettificato] di l e la sua pro-

(1) Mémoires couronnés et autres Mémoires, della Reale Accademia del Belgio, t. XXI [1870]. Vedi anche, dello stesso autore: « *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique.* », Mém. de la Societé des Sciences de Bordeaux, t. III, 1er Cahier [1878].

iezione non dipenderà dalla lunghezza dell'arco, ma soltanto dalla distanza x. La funzione che esprime questo rapporto è la funzione $\mathbf{E}x$ introdotta da DE TILLY.

Ciò posto ecco le formule della trigonometria assoluta, che si riferiscono al triangolo ABC.

$$(1)\quad \begin{cases} \bigcirc a = \bigcirc c \,.\, \operatorname{sen} \alpha \\ \bigcirc b = \bigcirc c \,.\, \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$

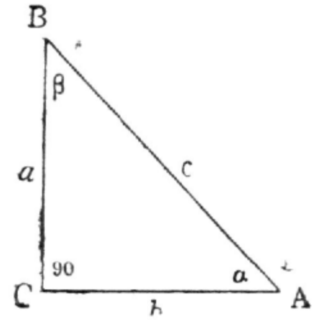

Fig. 46.

$$(2)\quad \begin{cases} \cos \alpha = \mathbf{E}a \,.\, \operatorname{sen} \beta \\ \cos \beta = \mathbf{E}b \,.\, \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

$$(3)\qquad \mathbf{E}c = \mathbf{E}a \,.\, \mathbf{E}b$$

Il gruppo (1) è il teorema di BOLYAI nel triangolo rettangolo. Tutte le formule della trigonometria assoluta si deducono combinando opportunamente questi tre gruppi. In particolare, nel triangolo rettangoto si ottiene;

$$\bigcirc^2 a \,.\, (\mathbf{E}a + \mathbf{E}b \,.\, \mathbf{E}c) + \bigcirc^2 b \,.\, (\mathbf{E}b + \mathbf{E}c \,.\, \mathbf{E}a) =$$
$$= \bigcirc^2 c \,.\, (\mathbf{E}c + \mathbf{E}a \,.\, \mathbf{E}b).$$

Questa può considerarsi come l'espressione del teorema di PITAGORA nella geometria assoluta [1].

§ 57. Vediamo ora come dalle relazioni del § precedente possano dedursi quelle della geometria euclidea e della non-euclidea.

Caso euclideo. — L'equidistante l è una retta [quindi $\mathbf{E}x = 1$], le circonferenze sono proporzionali ai raggi. Allora le (1) diventano:

$$(1')\quad \begin{cases} a = c \operatorname{sen} \alpha, \\ b = c \operatorname{sen} \beta; \end{cases}$$

---

[1] Cfr. R. BONOLA: « *La trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai.* ». Rend. Istituto Lombardo, (2), t. XXXVIII [1905].

le (2) danno:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta, \qquad \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha,$$

cioè:

$$(2') \qquad \alpha + \beta = 90^\circ;$$

infine la (3) si riduce a una identità.

Le (1′), (2′) comprendono tutta l'ordinaria trigonometria.

Caso non-euclideo. — Combinando fra loro le (1) e le (2) si ottiene:

$$(5) \qquad \frac{\bigcirc^2 a}{\mathbf{E}^2 a - 1} = \frac{\bigcirc^2 b}{\mathbf{E}^2 b - 1}.$$

Se poi applichiamo la 1ª delle (2) ad un triangolo rettangolo col vertice A tendente all'infinito, e quindi α tendente a zero, avremo:

$$\lim \cos \alpha = \lim (\mathbf{E}\, a \,.\, \operatorname{sen} \beta)$$

Ma $\mathbf{E}\, a$ è indipendente da α; l'angolo β, al limite, diventa l'angolo di parallelismo corrispondente ad a, cioè $\Pi\ (a)$. Avremo dunque:

$$\mathbf{E}\, a = \frac{1}{\operatorname{sen}\ \Pi\ (a)}.$$

Altrettanto dicasi per $\mathbf{E}\, b$. Sostituendo nella (5) otteniamo:

$$\frac{\bigcirc^2 a}{\operatorname{ctg}^2 \Pi\ (a)} = \frac{\bigcirc^2 b}{\operatorname{ctg}^2 \Pi\ (b)},$$

da cui:

$$\frac{\bigcirc a}{\operatorname{ctg} \Pi\ (a)} = \frac{\bigcirc b}{\operatorname{ctg} \Pi\ (b)}.$$

Questa relazione, insieme alla espressione di $\mathbf{E}\, x$, ci permette senz'altro di ottenere dalle (1), (2), (3) le formule della trigonometria di Lobacefski-Bolyai.

$$(1'') \qquad \begin{cases} \operatorname{ctg}\ \Pi\ (a) = \operatorname{ctg}\ \Pi\ (c)\ .\ \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{ctg}\ \Pi\ (b) = \operatorname{ctg}\ \Pi\ (c)\ .\ \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$

$$(2'') \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \,.\, \operatorname{sen} \Pi(b) \\ \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha \,.\, \operatorname{sen} \Pi(a) \end{cases}$$

$$(3'') \quad \operatorname{sen} \Pi(c) = \operatorname{sen} \Pi(a) \,.\, \operatorname{sen} \Pi(b).$$

Queste relazioni, cui soddisfano gli elementi di ogni triangolo rettangolo, sono nella forma loro data da LOBACEFSKI [1]. Se in luogo degli angoli di parallelismo $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ si volessero introdurre delle funzioni dirette dei lati, basterebbe ricordare [p. 80] che:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

ed esprimere le funzioni circolari di $\Pi(x)$ con funzioni iperboliche di x. Si otterrebbero allora le precedenti relazioni sotto la nuova forma:

$$(1''') \quad \begin{cases} \mathbf{Sh} \dfrac{a}{k} = \mathbf{Sh} \dfrac{c}{k} \operatorname{sen} \alpha. \\ \mathbf{Sh} \dfrac{b}{k} = \mathbf{Sh} \dfrac{c}{k} \operatorname{sen} \beta. \end{cases}$$

$$(2''') \quad \begin{cases} \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \, \mathbf{Ch} \dfrac{a}{k}. \\ \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{Ch} \dfrac{b}{k}. \end{cases}$$

$$(3''') \quad \mathbf{Ch} \frac{c}{k} = \mathbf{Ch} \frac{a}{k} \, \mathbf{Ch} \frac{b}{k}.$$

§ 58. Una osservazione importantissima sulla trigonometria assoluta è questa. *Interpretando gli elementi delle sue formule come elementi di un triangolo sferico, essa porge un sistema di relazioni valide anche pei triangoli sferici.*

La ragione di questa proprietà della trigonometria assoluta risiede nel fatto, già notato a p. 105, ch'essa fu dedotta

---

(1) Cfr. ad es. le « *Geometrische Untersuchungen* » di LOBACEFSKI, citate a p. 76.

utilizzando solo le relazioni pertinenti a regioni limitate di piano, che non dipendono dalle ipotesi sulla somma degli angoli di un triangolo e perciò valide anche sulla sfera.

Chi volesse ottenere direttamente il risultato potrebbe osservare:

1°) che in geometria sferica le circonferenze sono proporzionali ai seni dei raggi [sferici], per la qual cosa la prima formula dei triangoli sferici rettangoli:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \alpha,$$

si trasforma immediatamente nella 1ª delle (1);

2°) che un cerchio di raggio sferico $\frac{1}{2}\pi - b$ può considerarsi come una linea equidistante dal cerchio massimo concentrico e che il rapporto $\mathbf{E}b$ fra questi due cerchi è dato da:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - b\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi} = \cos b,$$

per cui le formule dei triangoli sferici rettangoli:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \cos a,$$
$$\cos c = \cos a \cos b,$$

si trasformano immediatamente nelle (2) e (3).

Concludendo: *Le formule della trigonometria assoluta sono valide anche sulla sfera.*

Ipotesi equivalenti al postulato euclideo.

§ 59. Prima di lasciare il campo elementare ci sembra opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul valore che, nell'organismo della geometria, hanno talune proposizioni, che in un certo senso possono ritenersi come *ipotesi equivalenti* al *V postulato.*

Per intenderci chiaramente cominciamo col rilevare il significato di questa equivalenza.

Due ipotesi sono *assolutamente equivalenti* quando ciascuna di esse si deduce dall' altra senza il sussidio di alcuna nuova ipotesi. In questo senso sono assolutamente equivalenti le due ipotesi seguenti:

a) Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.

b) Per un punto fuori d' una retta passa una sola parallela a quella retta.

Questo genere di equivalenza non ha molto interesse, perchè le due ipotesi sono semplicemente due forme diverse d' una stessa proposizione. Vediamo piuttosto come il concetto di equivalenza possa generalizzarsi. Supponiamo che una teoria deduttiva sia fondata sopra un certo sistema di ipotesi, che denoteremo con $\}A, B, C, ... H\{$. Siano poi M ed N due nuove ipotesi tali che dal sistema $\}A, B, C, ... H, M\{$ possa dedursi N, e dal sistema $\}A, B, C, ... H, N\{$ possa dedursi M. Indicheremo ciò scrivendo:

$$\}A,\ B,\ C, ...\ H,\ M\{ \,.\supset .\, N,$$

$$\}A,\ B,\ C, ...\ H,\ N\{ \,.\supset .\, M.$$

Allora, generalizzando il concetto di equivalenza, diremo che le due ipotesi M, N, sono equivalenti *relativamente al sistema fondamentale* $\}A, B, C, ... H\{$.

Insistiamo sull' importanza che il sistema fondamentale $\}A, B, C, ... H\{$ ha in questa definizione. Infatti può accadere che restringendo il sistema fondamentale, tralasciando ad esempio l' ipotesi A, *non siano contemporaneamente* possibili le due deduzioni:

$$\}B,\ C, ...\ H,\ M\{ \,.\supset .\, M,$$

$$\}B,\ C, ...\ H,\ N\{ \,.\supset .\, N.$$

Allora, rispetto al nuovo sistema fondamentale $\{$B, C,.... H$\}$, le due ipotesi M, N *non sono equivalenti.*

Dopo questi schiarimenti di ordine logico vediamo che cosa risulti dai precedenti sviluppi, circa l'equivalenza fra talune ipotesi e l'*ipotesi euclidea.*

Assumiamo in primo luogo come sistema fondamentale di ipotesi quello formato dai postulati di *associazione* [A] e di *distribuzione* [B], che caratterizzano nel modo ordinario i concetti di retta e piano; dai postulati della *congruenza* [C], dal *postulato di Archimede* [D].

Relativamente a questo sistema fondamentale, che indicheremo con $\{$A, B, C, D$\}$, le seguenti ipotesi sono fra loro equivalenti ed equivalenti a quella formulata da EUCLIDE nel suo V *postulato*:

a) Gli angoli interni da una stessa parte, formati da due parallele con una trasversale sono supplementari [TOLOMEO].

b) Due rette parallele sono equidistanti.

c) Se una retta incontra una di due parallele incontra anche l'altra [PROCLO]; oppure: due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro; od anche: per un punto fuori d'una retta passa una sola parallela a quella retta.

d) D'un triangolo qualunque può sempre costruirsi un triangolo simile di grandezza arbitraria [WALLIS].

e) Per tre punti non in linea retta passa sempre una sfera [W. BOLYAI].

f) Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell'angolo [LORENZ].

α) Se due rette *r*, *s*, sono l'una perpendicolare e l'altra obbliqua alla trasversale AB, i segmenti di perpendicolare calati dai punti di *s* su *r* sono minori di AB, dalla banda da cui AB forma con *s* un angolo acuto [NASÎR EDDÎN].

β) Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.

γ) La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti [SACCHERI].

Supponiamo ora di restringere il sistema fondamentale di ipotesi *prescindendo dall' ipotesi archimedea.* Allora le proposizioni *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), anche rispetto al nuovo siste ma fondamentale }A, B, C{, sono fra loro equivalenti ed equivalenti al *V postulato di Euclide.* Quanto alle proposizioni α), β), γ), pur essendo fra loro equivalenti rispetto al sistema }A, B, C{, *nessuna* è equivalente al *postulato euclideo.* Questo risultato, che mette in rilievo l' ufficio del postulato di ARCHIMEDE, è contenuto in una già citata memoria di M. DEHN [1900] (1). In questa memoria viene dimostrato che l' ipotesi γ) sulla somma degli angoli di un triangolo è compatibile non solo con l' ordinaria geometria elementare, ma anche con una nuova geometria, necessariamente *non archimedea,* dove non vale il *V postulato* ed in cui per un punto passano infinite non secanti rispetto ad una retta assegnata. A questa geometria l' autore diede il nome di: *Semi-Euklidische Geometrie.*

LA DIFFUSIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA.

§ 60. Le opere di LOBACEFSKI e BOLYAI non ebbero, al loro sorgere, quell' accoglienza che tanti secoli di lenta e continua preparazione sembravano promettere. Questo però non deve meravigliarci, perchè la storia della scienza c' insegna che ogni radicale mutamento nelle singole discipline non abbatte d' un tratto le convinzioni, i preconcetti su cui i pensatori e gli studiosi, attraverso un lungo periodo di tempo, edificarono le loro dottrine.

---

(1) Cfr. p 26, nota (2).

Nel nostro caso l' affermazione della geometria non-euclidea fu ritardata anche da ragioni speciali, quali la difficoltà che offrivano alla lettura le opere russe di LOBACEFSKI, l' oscurità dei nomi dei due rinnovatori, la concezione kantiana dello spazio allora dominante.

A diradare le tenebre che avvolsero nei primi anni le nuove teorie giovarono gli scritti francesi e tedeschi di LOBACEFSKI, ma sopratutto l' opera costante e indefessa di alcuni geometri, i cui nomi sono ora legati alla diffusione e al trionfo della geometria non-euclidea. Intendiamo parlare principalmente di C. L. GERLING [1788-1864], R. BALTZER [1818-1887], FR. SCHMIDT [1827-1901] in Germania; di J. HOÜEL [1823-1886], G. BATTAGLINI [1826-1894], E. BELTRAMI [1835-1900], A. FORTI in Francia ed in Italia.

§ 61. GERLING, che fin dal 1816 era in corrispondenza con GAUSS sulle parallele (¹) e che nel 1819 gli comunicava la nota di SCHWEIKART sull' « *Astralgeometrie* » [cfr. p. 65], ebbe dallo stesso GAUSS [1832] e con parole che non poterono non suscitare in lui una legittima curiosità, la notizia di un « kleine Schrift » sulla geometria non-euclidea composto da un giovane ufficiale austriaco, figlio di W. BOLYAI (²). Le successive indicazioni bibliografiche avute [1844] da GAUSS sulle opere di LOBACEFSKI e BOLYAI (³), indussero GERLING a procurarsi le « *Geometrische Untersuchungen* » e l' « *Appendix* » e a toglierle così dall' oblio, in cui sembravano confinate.

(¹) Cfr. il t. VIII delle « *Opere di Gauss* », p. 167-69.

(²) Cfr la lettera di GAUSS a GERLING, a p. 220, t. VIII, delle « *Op. Gauss* ». In questa lettera GAUSS, parlando del contenuto dell' « *Appendix* », dice: « ich alle meine eigenen Ideen und RESULTATE wiederfinde mit grösser Eleganz entwickelt », e dell' autore dello scritto: « Ich halte diesen jungen Geometer v. BOLYAI für ein Genie erster Grösse.... ».

(³) « *Op. Gauss* », t. VIII, p. 234-38.

§ 62. La corrispondenza fra GAUSS e SCHUMACHER, pubblicata fra il 1860 ed il 1863 [1], le più volte citate opere di LOBACEFSKI e BOLYAI, i tentativi di LEGENDRE per dare, anche nei testi elementari, un assetto rigoroso alla teoria delle parallele, indussero BALTZER a sostituire, nella 2. ed. dei suoi « *Elemente der Matematik* » [1867], la definizione euclidea di parallela con quella derivante dalla nuova concezione dello spazio ed a classificare, con LOBACEFSKI, fra le proprietà sperimentali la relazione: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, che caratterizza il triangolo euclideo. Per giustificare poi l'innovazione BALTZER non mancò di porgere un breve cenno della possibilità teorica d'una geometria più generale dell'ordinaria, fondata sull'ipotesi di due parallele e di mettere in giusto rilievo i nomi dei suoi fondatori. Nello stesso tempo richiamò l'attenzione di HOÜEL, il cui interessamento per le questioni riguardanti la geometria elementare era ben noto nel campo scientifico [3], sulla geometria non-euclidea, sollecitandolo a tradurre in lingua francese le « *Geometrische Untersuchungen* » e l'« *Appendix* ».

§ 63. La versione francese dell'opuscolo di LOBACEFSKI uscì nel 1866 insieme a quella di un estratto della corrispondenza fra GAUSS e SCHUMACHER [4]. Il riavvicinamento così

---

(1) « *Briefwechesel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher.* »; t. II, p. 268, 431; t. V, p. 246 [Altona, 1860-63]. Intorno alle idee di GAUSS, note in quell'epoca, vedi pure: SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN; « *Gauss zum Gedächtniss.* », p. 80-81 [Leipzig, 1856].

(2) Cfr. gli « *Elementi di Matematica* » di BALTZER, tradotti da L. CREMONA, t. IV, p. 5-7, 24-31 [Genova, 1867].

(3) HOÜEL aveva pubblicato, fin dal 1863, il suo famoso « *Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire.* »; Archiv. d. Math. u. Phy., t. XL [1863].

(4) Mémoires de la Societé des Sciences Phy. et Naturelles de Bordeaux, t. IV, p. 88-120 [1866]. Fu anche pubblicata in un opuscolo separato, col titolo: « *Études géométriques sur la théorie des*

ottenuto fra le idee di LOBACEFSKI-BOLYAI e quelle di GAUSS fu molto fecondo perchè il nome di GAUSS e la sua sanzione alle scoperte dei due allora oscuri ed ignorati geometri contribuirono nel modo più efficace e sicuro a dare credito ed importanza alle nuove dottrine.

La versione francese dell' « *Appendix* » uscì nel 1867 (1), preceduta da una « *Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai di Bolya.* », scritta dall' architetto FR. SCHMIDT per invito dello stesso HOÜEL (2), e seguita dalle osservazioni di W. BOLYAI, tratte dal 1° volume del « *Tentamen* » e da un opuscolo riassuntivo di WOLFGANG sui principi dell' Aritmetica e della Geometria (3).

I dati raccolti dallo SCHMIDT sui due BOLYAI furono contemporaneamente [1867] pubblicati nell' « *Archiv. d. Math. u. Phy.* » e nell' anno successivo A. FORTI, che già aveva

---

parallèles par N. J. LOBATSCHEWSKY, Conseiller d' Etat de l' Empire de Russie et Professeur a l' Universitè de Kasan; traduit de l' allemand par J. HOÜEL, *Suivis d' un Extrait de la correspondance de* GAUSS *et de* SCHUMACHER. » [Paris, G. Villars, 1866].

(1) Mém. Soc. Scienc. Phy. et Nat. de Bordeaux, t. V, p. 189-248. Fu anche pubblicata a parte in un opuscolo col titolo: « *La science absolue de l' espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l' Axiôme XI d' Euclide (que l' on ne pourra jamais établir a priori); suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l' Axiôme XI,* par JEAN BOLYAI, Capitaine au corps du génie dans l' armée autrichienne; *Précédé d' une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai,* par M. Fr. SCHMIDT. » [Paris, G. Villars, 1868].

(2) Cfr.: P. STÄCKEL: « *Franz Schmidt.* », Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver., t. XI, p. 141-46 [1902].

(3) Quest' opuscolo di W. BOLYAI si suole brevemente citare con le prime parole del suo titolo: « *Kurzer Grundriss* ». Fu stampato a Maros-Vásárhely nel 1851.

stampato un articolo storico-critico su LOBACEFSKI (¹), rendeva noto agli italiani il nome e le opere dei due ormai celebri geometri ungheresi (²).

A favore di HOÜEL va anche ricordato il suo interessamento pei manoscritti di GIOVANNI BOLYAI, allora conservati [1867], in forza d'una disposizione testamentaria di WOLFGANG, nella Biblioteca del Collegio Riformato di Maros Vásárhely. Per mezzo del principe B. BONCOMPAGNI [1821-1894], che interessò a sua volta il Ministro ungarico dei Culti, barone EÖTVÖS, ottenne che venissero depositati [1869] presso l'Accademia ungherese delle Scienze di Budapest (³) e potessero così formare oggetto dei pazienti ed accurati studi prima dello SCHMIDT, recentemente di STÄCKEL.

Inoltre HOÜEL non mancò di adoperarsi, nelle più varie occasioni, affinchè alla geometria non-euclidea fosse assicurato un durevole trionfo: basti citare il suo « *Essai critique sur les principes fondamentaux de la geometrie.* » (⁴), gli articoli « *Sur l'impossibilité de demontrer par une*

(¹) *Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana. Considerazioni storico-critiche.* »; Rivista Bolognese di scienze, lettere, arti e scuole, t. II, p. 171-81 [1867]. Fu stampato separatamente in un opuscolo di 16 pagine [Bologna, Fava e Garagnani, 1867]. Lo stesso scritto, con varie aggiunte e col titolo: « *Studii geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatschewsky.* », fu ristampato nel giornale politico « La Provincia di Pisa », Anno III, n. 25, 27, 29, 30 [1867] e ripubblicato a parte sotto il titolo primitivo [Pisa, Nistri, 1867].

(²) Cfr.: « *Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi.* », Bollettino di Bibliografia e di Storia delle scienze Mat. e Fisiche, t. I, p. 277-99 [1869]. Questo articolo di FORTI è arrichito con copiose note storiche e bibliografiche da B. BONCOMPAGNI.

(³) Cfr. l'articolo di STÄCKEL su FR. SCHMIDT citato precedentemente nel testo.

(⁴) 1ª ed., Paris, G. Villars, 1867; 2ª ed., 1883.

construction plane le postulatum d' Euclide. » (1), le « *Notices sur la vie et les travaux de* N. J. LOBATCHEFSKY » (2), le traduzioni francesi di vari scritti relativi alla geometria non-euclidea (3), per comprendere quale fervente apostolo abbia questa trovato nel celebre matematico francese.

§ 64. Con altrettanta fede ed attività introduceva e diffondeva in Italia le nuove speculazioni geometriche il nostro connazionale GIUSEPPE BATTAGLINI ed il « *Giornale di Matematica* », da lui fondato e diretto, dal 1867 in poi fu come l'organo ufficiale per la geometria non-euclidea.

Il primo lavoro di BATTAGLINI « *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky* » (4), scritto per stabilire direttamente il principio che serve di base alla teoria generale delle parallele ed alla trigonometria lobacefskiana, è seguito, a poche pagine di distanza, dalla traduzione italiana della « *Pangeometria* » (5) e questa, alla sua volta, nel 1868, dalla traduzione dell' « *Appendix* ». Contemporaneamente, nel sesto volume del « *Giornale di Matematica* », usciva il celebre « *Saggio di interpretazione della geometria non eucli-*

---

(1) Giornale di Matematiche, t. VII, p. 84-89; Nouvelles Annales, (2), t. IX p. 93-96.

(2) Bull. des Sciences Math, t. I, p. 66-71, 324-28, 384-88 [1870]

(3) Oltre le versioni di cui si parla nel testo HOÜEL tradusse uno scritto di BATTAGLINI [cfr. la nota (4)], due di BELTRAMI [cfr. p. 118, nota (1); p. 138, nota], uno di RIEMANN [cfr. p. 130, nota], uno di HELMHOLTZ [cfr. p. 143].

(4) Giornale di Mat., t. V, p. 217-31 [1867]. — Napoli, Rend. Acc. Science Fis. e Matem., t. VI, p. 157-73 [1867]. — Trad. francese di HOÜEL: Nouv. Annales, (2), t. VII, p. 209-21, 265-77 [1868].

(5) Fu anche stampata a parte in un opuscolo col titolo: « *Pangeometria o sunto di geometria fondato sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele.* », Napoli 1867; 2a ed., 1874.

dea. » [1], di E. BELTRAMI, « che proiettò una luce inaspettata nella controversia allora agitata intorno ai principi fondamentali della geometria ed ai concetti di GAUSS e LOBATSCHEFSKY [2] ».

Sfogliando le successive annate del « *Giornale di Matematica* » s' incontrano frequentemente scritti relativi alla geometria non-euclidea: due di BELTRAMI [1872], che si riattaccano al precitato « *Saggio* »; vari di BATTAGLINI [1874-78] e D' OVIDIO [1875-77], trattanti alcune questioni della nuova geometria coi metodi proiettivi inaugurati da CAYLEY; quella di HOÜEL [1870] sull' indimostrabilità del postulato euclideo; altre di CASSANI [1873-81], GÜNTHER [1876], DE-ZOLT [1877], FRATTINI [1878], RICORDI [1880], etc.

§ 65. L' opera di diffusione, iniziata e coraggiosamente condotta dai predetti geometri, ebbe pure un efficacissimo impulso da un altro gruppo di pubblicazioni, che, in quel torno di tempo [1868-72], affacciava il problema dei fondamenti della geometria sotto forma più generale ed elevata di quella informante le ricerche elementari di GAUSS, LOBACEFSKI, BOLYAI. Dei nuovi metodi ed indirizzi, cui sono legati i nomi di alcuni fra i più eminenti matematici e filosofi contemporanei, parleremo brevemente nel cap. V; qui ci basti notare che l' antica questione delle parallele, alla quale le ricerche di LEGENDRE, quarant' anni prima, parevano aver tolto ogni interesse, attrasse ancora e sotto un aspetto completamente nuovo, l' attenzione dei geometri e filosofi, diventando centro di un vastissimo campo di indagini. Delle quali alcune ebbero il semplice scopo di rendere meglio accessibile al gran pubblico matematico le opere dei

---

(1) Fu tradotto in francese da HOÜEL negli Annales Scient. de l' École Normale Sup., p. 251-88, t. VI, [1869].

(2) Cfr. la « *Commemorazione di E. Beltrami* » di L. CREMONA; Giornale di Mat., t. XXXVIII, p. 362 [1900].

fondatori della geometria non-euclidea, altre mirarono ad allargare i risultati, il contenuto, il significato della nuova dottrina, contribuendo in pari tempo ai progressi di certi rami speciali delle matematiche superiori (1).

(1) Cfr., ad es., E. PICARD: « *La Science Moderne et son état actuel.* », p. 75 [Paris, Flammarion, 1905].