XXVII.

Altri studii generali sulle equazioni differenziali lineari

Serie generali per le rappresentazioni degli integrali delle equazioni lineari.

515. — I processi per l'integrazione delle equazioni lineari che abbiamo dato negli studii precedenti non possono servire completamente altro che nel caso delle equazioni a coefficienti costanti e in pochi altri casi.

Quando però ci si contenti di avere gli integrali sotto forma di serie, allora si può applicare un processo generale che risulterà dagli studii che ora faremo e dal quale si trarranno poi anche conseguenze molto notevoli.

Prendiamo perciò a considerare una equazione lineare

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \mathrm{X},$$

per la quale supporremo che nell'intervallo (a, b) relativo ad x che si considera, le funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \mathrm{X}$ siano *regolari*, cioè siano finite e continue insieme alle loro derivate almeno fino a quelle che figureranno nelle nostre formole; e ricordiamo che nei §§ 495 e 496 (pag. 693-94) facendo una prima trasformazione della equazione lineare generale (1) col moltiplicarla per un fattore indeterminato z, abbiamo già notato che quando, posto per comodo $\varepsilon_s = (-1)^s$, si prende pel moltiplicatore z un integrale della equazione

$$(2) \quad (a_0 z)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z) = 0,$$

che, come già dicemmo al § 496 (pag. 694), dicesi l'equazione *aggiunta* della equazione incompleta corrispondente alla (1), e si pone

$$(3) \; p_0 = z a_0, \; p_1 = z a_1 - p'_0, \; p_2 = z a_2 - p'_1, \ldots, p_{n-1} = z a_{n-1} - p'_{n-2}, \; p_n = z a_n - p'_{n-1},$$

con chè il primo membro della equazione (2) viene ad essere $(-1)^n p_n$ e col valore scelto di z si ha $p_n = 0$, allora il primo membro della stessa equazione (1) diventa il differenziale esatto della espressione lineare

$$(4) \qquad p_0 y^{(n-1)} + p_1 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y,$$

e la integrazione della equazione data si riduce a quella dell'altra di ordine $n-1$

$$(5) \qquad p_0 y^{(n-1)} + p_1 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y = \int z \mathrm{X}\, dx + \mathrm{C},$$

dove C è una costante arbitraria.

E il primo membro di quest'ultima equazione può anche ottenersi con integrazioni per parti successive dei singoli termini del primo membro della equazione data (1) dopo di averla moltiplicata per z.

516. — Non ponendo più ora la condizione che il moltiplicatore z sia un integrale della equazione aggiunta (2) e lasciando questo moltiplicatore del tutto indeterminato, si indichi con $-\mathrm{Z}$ il valore di p_n corrispondente al valore che si sceglie per z, cioè si ponga

$$(6) \quad (a_0 z)^{(n)} + \varepsilon_1 (a_1 z)^{(n-1)} + \varepsilon_2 (a_2 z)^{(n-2)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} (a_{n-1} z)' + \varepsilon_n (a_n z) = \varepsilon_{n+1} \mathrm{Z},$$

con che $\varepsilon_{n+1} \mathrm{Z}$ viene ad essere il primo membro della equazione aggiunta e, come già si disse al ricordato § 496, chiamasi perciò ordinariamente il *polinomio aggiunto* del primo membro della (1).

Allora colle indicate integrazioni per parti successive, invece che alla (5) si giunge alla equazione seguente che è caso particolare della formola (44) del § 455 (pag. 649),

$$(7) \quad p_0 y^{(n-1)} + p_1 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-2} y' + p_{n-1} y = \int_\alpha^x (y\mathrm{Z} + z\mathrm{X})\, dx + c,$$

dove le $p_0, p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1}$ hanno ancora i valori dati dalle formole (3), per modo che il suo primo membro è precisamente il polinomio (4); e in questa c è una costante che sarà uguale al valore che prende il suo primo membro per $x = \alpha$, e dipenderà quindi dal limite inferiore α dell'integrale che figura nel secondo membro, e dai valori per $x = \alpha$ della funzione z che sarà stata scelta e delle sue derivate, oltre che dal valore per $x = \alpha$ dell'integrale y della equazione data (1) che sarà stato preso a considerare e da quelli delle sue derivate $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, sempre per $x = \alpha$.

Ripetiamo ora i procedimenti di calcolo già usati in generale nei §§ 456 e 457 (pag. 649 e seg.), mantenendo fermo cioè l'integrale y dal quale si parte e prendendo successivamente per z le n funzioni *reali o complesse* $z_1, z_2, \dots, z_n$ che potranno scegliersi ad arbitrio ma tali che il loro Wronskiano

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 & \dots & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z'_2 & z''_2 & \dots & z_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & z''_n & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nell'intervallo (a, b) sia sempre diverso da zero, con che, indicando in generale con $p_{r,s}$, Z_r e c_r i valori delle p_s, Z e c corrispondenti al valore z_r di z, dalla formola (7) avremo le n equazioni seguenti coi primi membri lineari in $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & p_{1,0}y^{(n-1)} + p_{1,1}y^{(n-2)} + \dots + p_{1,n-2}y' + p_{1,n-1}y = \int_\alpha^x (yZ_1 + z_1 X)\,dx + c_1, \\ & p_{2,0}y^{(n-1)} + p_{2,1}y^{(n-2)} + \dots + p_{2,n-2}y' + p_{2,n-1}y = \int_\alpha^x (yZ_2 + z_2 X)\,dx + c_2, \\ & \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ & p_{n,0}y^{(n-1)} + p_{n,1}y^{(n-2)} + \dots + p_{n,n-2}y' + p_{n,n-1}y = \int_\alpha^x (yZ_n + z_n X)\,dx + c_n, \end{aligned} \right.$$

per le quali il determinante P dei coefficienti con facilissime trasformazioni (§ 456) si riduce subito a $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n Q$, e sarà quindi diverso da zero in tutto l'intervallo (a, b) quando oltre alle ipotesi già fatte si introduca, come ora faremo, anche l'altra che nello stesso intervallo a_0 sia diversa da zero.

Risolvendo ora questo sistema di equazioni si trova subito $y = \frac{P_0}{P}$, essendo P_0 il determinante che viene dalla prima forma di P sostituendo agli elementi dell'ultima colonna i secondi membri di queste equazioni; e quindi cogli indicati processi del § 457, si trova subito che per l'integrale y che si considera si ha la formola seguente

$$(9)\qquad y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q}\left(Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x,x_1}\,dx_1 + \int_\alpha^x y_{x_1} \bar{q}_{x,x_1}\,dx_1\right),$$

dove

$$(10)\quad Q_c = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-2)} c_1 \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-2)} c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-2)} c_n \end{vmatrix},\ q_{x,x_1} = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-2)} (z_1)_{x_1} \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-2)} (z_2)_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-2)} (z_n)_{x_1} \end{vmatrix},\ \bar{q}_{x,x_1} = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-2)} (Z_1)_{x_1} \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-2)} (Z_2)_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-2)} (Z_n)_{x_1} \end{vmatrix},$$

le parentesi coll'indice x_1 alle z_r e Z_r stando ad indicare che in queste funzioni al posto di x è stato messo x_1, per modo cioè che questi determinanti Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ risultano tutti dal Wronskiano Q sostituendo agli elementi della ultima colonna respettivamente $c_1, c_2, \dots, c_n$ per Q_c; $(z_1)_{x_1}, (z_2)_{x_1}, \dots (z_n)_{x_1}$ per q_{x,x_1}; e $(Z_1)_{x_1}, (Z_2)_{x_1}, \dots, (Z_n)_{x_1}$ per $\bar{q}_{x,x_1}$.

517. — La formola trovata (9), la quale del resto non è che un caso particolare della (49) del § 457, lascia immensa arbitrarietà nelle funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$, perchè per esse si richiede soltanto che siano regolari e che il loro Wronskiano Q non si annulli per valori di x nell'intervallo (a, b) che si considera, nè si esclude che tutte o alcune di esse possano anche essere complesse; ed essa ha una particolare importanza specialmente perchè conduce a trovare per gli integrali delle equazioni lineari (1) quelle infinite espressioni analitiche per serie alle quali alludevamo in principio, che poi alla loro volta dànno luogo ad altri risultati notevolissimi.

Prima però di passare alla ricerca delle dette espressioni analitiche degli integrali, presentiamo le considerazioni seguenti.

Osserviamo che quando, come supponiamo, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ e X sono regolari nell'intervallo (a, b), e a_0 è diverso da zero in questo intervallo e quindi anche per $x = \alpha$, risultano senz'altro soddisfatte le condizioni per le quali — secondo quanto dicemmo in generale sulla esistenza degli integrali delle equazioni differenziali al § 336 [pag. 495-96] — è certo che ad ogni sistema di valori $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \dots, y_\alpha^{(n-1)}$ corrisponde sempre uno e un solo integrale della (1) che è regolare in quell'intervallo e pel quale $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ prendono gli indicati valori $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \dots, y_\alpha^{(n-1)}$ per $x = \alpha$; per modo che ogni integrale che si voglia considerare y può riguardarsi come definito da questo sistema iniziale $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \dots, y_\alpha^{(n-1)}$ di valori quando nell'intervallo (a, b) al quale appartiene il punto $x = \alpha$ sono soddisfatte le condizioni poste per $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ e X.

Ora, fissato un sistema di funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ in un modo qualsiasi ma colla condizione che siano regolari e che il loro Wronskiano sia diverso da zero nell'intervallo (a, b), ad ogni integrale y che si considera della (1) preso arbitrariamente o definito da un sistema iniziale di valori $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$, si può fare corrispondere un sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che risultino determinati dalle formole

$$(11) \qquad \begin{cases} c_1 = (p_{1,0}\,y^{(n-1)} + p_{1,1}\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{1,n-1}\,y)_{x=a}\,, \\ c_2 = (p_{2,0}\,y^{(n-1)} + p_{2,1}\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{2,n-1}\,y)_{x=a}\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_n = (p_{n,0}\,y^{(n-1)} + p_{n,1}\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n,n-1}\,y)_{x=a}\,, \end{cases}$$

per mezzo dei detti valori iniziali $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$; e poichè questi valori delle $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono appunto quelli che figurano nella (9), è certo che la formola stessa (9), nella quale per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'intendano presi questi valori, varrà sempre per l'integrale corrispondente y dato comunque, o definito per mezzo del sistema iniziale di valori $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$.

Inversamente, se si prende a piacere un sistema di valori per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mantenendo sempre la solita ipotesi che per le funzioni scelte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ il Wronskiano Q sia diverso da zero per $x=\alpha$, le equazioni (11), avendo il determinante P dei coefficienti diverso da zero, determinano uno e un solo sistema di valori $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$ al quale verrà a corrispondere uno e un solo integrale y, e per questo varrà la formola (9) nella quale $c_1, c_2, \ldots, c_n$ abbiano i valori dati; quindi si può affermare che, scelto un sistema qualsiasi di funzioni regolari $z_1, z_2, \ldots, z_n$ per le quali il Wronskiano sia diverso da zero, la formola (9) per ogni sistema di valori di $c_1, c_2, \ldots, c_n$ definisce un integrale y della (1), e dando in questa formola alle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tutti i sistemi di valori possibili essa conduce a qualunque integrale della stessa equazione.

E così ogni integrale y della equazione (1) potrà indifferentemente considerarsi come pienamente determinato dal sistema iniziale $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$ dei valori di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per $x=\alpha$, o dal sistema dei valori che si sceglieranno per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ per introdurli nella formola (9), e i legami fra queste costanti e i detti valori iniziali per uno stesso integrale y saranno quelli che risultano dalle equazioni lineari (11).

518. — Osserviamo poi che se si indica con y_r l'integrale corrispondente a un sistema $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots, c_{r,n}$ di valori che si scelgano per le $c_1, c_2, \ldots, c_n$, per questo sistema si avranno le equazioni (11); e considerando n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_r, \ldots, y_n$ e gli n sistemi corrispondenti di costanti e quindi di

equazioni (11), e formando il determinante

$$(12) \qquad C = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

basterà avere riguardo ai corrispondenti sistemi di equazioni (11), per veder subito che all'infuori del fattore $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ questo determinante C viene ad essere il prodotto di quello che indicammo sopra con P e dell'altro

$$(13) \qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

per $x=\alpha$, e si ha quindi $C = (a_0^n\,\mathrm{QD})_{x=a}$; e questo ci porta a dire che onde i sistemi di valori $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots, c_{r,n}$ scelti per le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ per $r=1, 2, \ldots, n$ conducano per mezzo della (9) a un sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pei quali il determinante D sia diverso da zero, sarà necessario e sufficiente che il determinante C sia diverso da zero. Ciò sempre, bene inteso, nel supposto che a_0 e il Wronskiano delle funzioni scelte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ siano finiti e diversi da zero per $x=\alpha$.

In particolare dunque nel caso in cui per essere $X=0$ la equazione lineare (1) sia omogenea, si può dire che onde la formola (9) dia luogo a un sistema fondamentale di integrali della stessa equazione sarà necessario e sufficiente che pei valori corrispondenti delle costanti $c_{r,s}$ il determinante C risulti diverso da zero.

519. — Aggiungiamo anche le considerazioni seguenti rispetto ai determinanti P, Q e D che capitano sempre in questi studii.

Osserviamo cioè che, posto colle successive scomposizioni il determinante P dei coefficienti delle (8) sotto la forma

$$P = \begin{vmatrix} a_0 z_1 & \varepsilon_1 (a_0 z_1)' & \varepsilon_2 (a_0 z_1)'' & \ldots & \varepsilon_{n-1} (a_0 z_1)^{(n-1)} \\ a_0 z_2 & \varepsilon_1 (a_0 z_2)' & \varepsilon_2 (a_0 z_2)'' & \ldots & \varepsilon_{n-1} (a_0 z_2)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 z_n & \varepsilon_1 (a_0 z_n)' & \varepsilon_2 (a_0 z_n)'' & \ldots & \varepsilon_{n-1} (a_0 z_n)^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

si vede subito che la sua derivata P' è il determinante stesso nel quale agli elementi dell'ultima colonna sono sostituite le loro derivate $\varepsilon_{n-1}(a_0 z_1)^{(n)}$, $\varepsilon_{n-1}(a_0 z_2)^{(n)}, \dots, \varepsilon_{n-1}(a_0 z_n)^{(n)}$, e quindi valendosi della formola (6), e facendo poi le solite scomposizioni, si ottiene la formola

$$P' - \frac{a_1}{a_0} P = P_Z ,$$

nella quale P_Z indica ciò che diviene P sostituendo agli elementi dell'ultima colonna i polinomi $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

Da questa poi integrando si deduce l'altra

$$(14) \qquad P = e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx} \left\{ \int_\alpha^x P_Z e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx} dx + K \right\},$$

che per essere $P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n Q$ e $P_Z = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_0^{n-1} Q_Z$, dove Q_Z si deduce da Q come P_Z si deduce da P, dà luogo alla seguente

$$(15) \qquad Q = \frac{e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n} \left\{ \varepsilon_{n+1} \int_\alpha^x Q_Z a_0^{n-1} e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx} dx + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K \right\},$$

essendo K una costante che sarà il valore di P o di $-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n Q$ per $x = \alpha$, e nel secondo membro di quest'ultima formola le funzioni a_0 e a_1 a calcoli fatti dovranno sparire perchè esse non figurano nel valore di Q.

Similmente il determinante indicato sopra con D dà luogo colla derivazione alla formola seguente

$$D' + \frac{a_1}{a_0} D = \frac{X D_0}{a_0},$$

indicando con D_0 ciò che diviene D sostituendovi l'unità al posto delle varie derivate $(n-1)^e$ nell'ultima colonna; e da questa si ottiene

$$(16) \qquad D = e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx} \left\{ \int_\alpha^x \frac{X D_0}{a_0} e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx} dx + K_1 \right\},$$

essendo K_1 una nuova costante che sarà uguale al valore di D per $x = \alpha$, per modo che il prodotto $K K_1$ all'infuori del fattore $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ corrisponderà al valore del determinante indicato sopra con C.

Naturalmente quest'ultima formola nel caso di $X = 0$ si riduce subito a quella di Liouville (§ 468 [pag. 661-62]) relativa al determinante di un sistema fondamentale d'integrali delle equazioni omogenee

520. — Premesse tutte queste osservazioni, torniamo a considerare la formola (9).

E prima osserviamo che siccome in questa formola per le solite funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ non abbiamo condizioni all'infuori di quella di essere regolari e di rendere il loro Wronskiano Q diverso da zero pei valori di x che si considerano, potremo pel resto lasciarle del tutto indeterminate, o potremo porre per esse certe condizioni speciali, come ad es. quella di costituire un sistema di funzioni speciali date, o un sistema fondamentale di integrali di una equazione lineare omogenea d'ordine n, *data* o che presenti date particolarità; o quella di fare acquistare al polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ che figura nel secondo membro della stessa formola (9) una forma fissa e determinata perfettamente conosciuta che ci venga data avanti e sia espressa direttamente per la x o per mezzo della z e delle sue derivate.

Nei primi casi i polinomii aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z_1, \varepsilon_{n+1} Z_2, \dots, \varepsilon_{n+1} Z_n$ vengono ad essere conseguenza dei valori scelti per le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ o dei coefficienti della equazione lineare omogenea di ordine n in z che sia data per determinarle; e poichè quando questa equazione non sia data e siano date invece le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ si potrà sempre costruire coi processi del § 482 [pag 676 e seg.] una equazione lineare omogenea di ordine n in z che abbia per primo coefficiente a_0 e della quale le funzioni date $z_1, z_2, \dots, z_n$ costituiscano un sistema d'integrali fondamentali, così in questi casi il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ si potrà sempre ridurre ad essere una espressione lineare e omogenea dell'ordine $n-1$ al più in z; e quando risulti zero o anche soltanto di ordine inferiore a $n-1$, evidentemente i determinanti P_Z e Q_Z delle formola (12) e (13) saranno zero, e queste formole si ridurranno più semplici.

Nell'ultimo caso invece, cioè quando sia fissato il valore, espresso per x o per la z e per le sue derivate, che dovrà avere il polimonio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$, la formola (6), a meno che non divenga identica e di ordine inferiore ad n in z, servirà a determinare le funzioni $z_1, \dots, z_n$, o altrimenti tutte o alcune di queste rimarranno indeterminate, dopo di chè quando vengano fissate anche queste, volendolo, si potrà ancora costruire la equazione lineare e omogenea della quale tutte queste quantità costituiscano un sistema fondamentale d'integrali, e si ricadrà ancora nei casi precedenti.

521. — Così in particolare quando si ponga la condizione che sia $Z = 0$, ciò che equivale a supporre che le $z_1, z_2, \dots, z_n$ costituiscano un sistema fondamentale d'integrali della equazione aggiunta (2), i valori (14) e (15) di P e Q si ridurranno ai seguenti $P = K e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}$, $Q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K \frac{e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0^n}$

e dove K all'infuori del fattore $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sarà il valore di $a_0^n\,\mathrm{Q}$ per $x=a$, la quantità $\bar{q}_{x,x_1}$ verrà zero; e questo ci mostra che « gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ « verranno tutti perfettamente conosciuti quando si conoscano tutti quelli « della equazione aggiunta », perchè, a causa della formola (9) e del valore che ora si ha per Q, essi risulteranno tutti dalla formola

$$(17) \qquad y = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{a_0^{n-1}\, e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0}dx}}{\mathrm{K}} \left\{ \mathrm{Q}_c + \int_\alpha^x \mathrm{X}_{x_1} q_{x,x_1}\, dx_1 \right\},$$

quando per le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si prendano n sistemi di valori arbitrarii $c_{r,1}, c_{r,2}, \ldots, c_{r,n}$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ tali che il loro determinante (12) risulti diverso da zero, come in particolare avverrà quando si prendano uguali alla unità tutte le $c_{r,r}$ coi due indici uguali fra loro, e le altre $c_{r,s}$ con indici r e s diversi fra loro tutte eguali a zero.

Questa formola (17) serve così ad esprimere gli integrali di qualsiasi equazione lineare (1) per mezzo di quelli della equazione aggiunta (2) della equazione omogenea corrispondente ed ha perciò una particolare importanza(*).

(*) Così nel caso della equazione del second'ordine

$$(a) \qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \mathrm{X},$$

per la quale la equazione aggiunta corrispondente è la seguente

$$(b) \qquad a_0 z'' + (2a'_0 - a_1) z' + (a''_0 - a'_1 + a_2) z = 0,$$

se si conosceranno due integrali fondamentali z_1, z_2 di questa equazione aggiunta, la formola

$$(c) \qquad y = \frac{a_0 e^{-\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0}dx}}{\mathrm{K}} \left\{ c_2 z_1 - c_1 z_2 + \int_\alpha^x \mathrm{X}_{x_1} \left(z_1 (z_2)_{x_1} - z_2 (z_1)_{x_1} \right) dx_1 \right\},$$

dove K è il valore per $x=\alpha$ di $a_0(z_1 z'_2 - z_2 z'_1)$, col porvi una volta $c_1=1$, $c_2=0$ e un'altra $c_1=0$, $c_2=1$ darà due integrali della equazione data (a).

In particolare dunque se per la equazione data (a) avremo $a''_0 - a'_1 + a_2 = 0$, essa si integrerà immediatamente per mezzo della formola (c), perchè la equazione aggiunta (b) si ridurrà alla seguente $a_0 z'' + (2a'_0 - a_1) z' = 0$, che s'integra subito dandoci prima $\log z' = \int \frac{a_1}{a_0} dx - 2 \log a_0 + \text{cost.}$, ovvero $z' = \beta \frac{e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0}dx}}{a_0^2}$, e quindi $z = \beta \int_\alpha^x \frac{e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0}dx}}{a_0^2} dx + \gamma$, con β e γ costanti arbitrarie; per modo che potremo prendere ad es.: $z_1 = 1$, $z_2 = \int_\alpha^x \frac{e^{\int_\alpha^x \frac{a_1}{a_0}dx}}{a_0^2} dx$, con che si avrà $\mathrm{K} = \frac{1}{a_0(\alpha)}$.

522. — Fuori del caso ora studiato nel quale si conoscono tutti gli integrali della equazione aggiunta, le sole considerazioni precedenti non bastano più a farci determinare gli integrali della equazione lineare (1); però con altre considerazioni è facile vedere che la (9) conduce alle serie, alle quali alludevamo in principio, che somministrano gli integrali della equazione data in tutti i casi, e sotto infinite forme; supposto sempre che pei valori che si considerano di x i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X, come le funzioni reali o complesse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ che si scelgono siano regolari, e a_0 e il Wronskiano Q delle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ siano diversi da zero.

S'indichi infatti per abbreviare con A_x la quantità $\mathrm{Q}_c + \int_\alpha^x \mathrm{X}_{x_1} q_{x,x_1} dx_1$ che possiamo riguardare come conosciuta, e che nel caso in cui la equazione data (1) sia anche omogenea si riduce al solo termine Q_c. La (9) ci darà

$$(18) \qquad y_x = \varepsilon_{n-1} \frac{\mathrm{A}_x}{(a_0 \mathrm{Q})_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 \mathrm{Q})_x} \int_\alpha^x y_{x_1} \bar{q}_{x,x_1} dx_1 ,$$

avendo posto anche a y e a $a_0\mathrm{Q}$ l'indice x per mettere in evidenza questa variabile.

Da questa cambiando, sotto l'integrale, x_1 in x_2 e poi per tutto x in x_1, avremo

$$(19) \qquad y_{x_1} = \varepsilon_{n-1} \frac{\mathrm{A}_{x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}} \int_\alpha^{x_1} y_{x_2} \bar{q}_{x_1,x_2} dx_2 ,$$

intendendo che $\bar{q}_{x_1,x_2}$ indichi ciò che diviene $\bar{q}_{x,x_1}$ quando x e x_1 si mutano respettivamente in x_1 e x_2, e così sostituendo nella precedente avremo

$$y_x = \varepsilon_{n-1} \frac{\mathrm{A}_x}{(a_0 \mathrm{Q})_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 \mathrm{Q})_x} \int_\alpha^x \frac{\mathrm{A}_{x_1} \bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}} dx_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 \mathrm{Q})_x} \int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x_1} y_{x_2} \bar{q}_{x_1,x_2} dx_2 .$$

Al modo stesso cambiando x_2 in x_3 e poi x_1 in x_2 nella (19), e quindi

Osservando che in questo caso di $a''_0 - a'_1 + a_2 = 0$ la equazione (a) è subito riducibile al prim'ordine (§ 493, pag. 690) si vede che la sua integrazione può farsi subito anche senza ricorrere alla equazione aggiunta; e s'intende come questo debba avvenire perchè le equazioni del second'ordine moltiplicate per un fattore conveniente si riducono ad altre il cui primo membro si riproduce nella aggiunta; però è sempre notevole che coll'uso della equazione aggiunta che si integra immediatamente si possa avere subito la formola che dà gli integrali della stessa equazione (a).

sostituendo nell'ultima formola trovata, avremo

$$y_x = \frac{\varepsilon_{n-1}\,A_x}{(a_0\,Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0\,Q)_x}\int_\alpha^x \frac{A_{x_1}\,\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0\,Q)_x}\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx \int_\alpha^{x_1}\frac{A_{x_2}\,\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0\,Q)_n}\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1}\frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 \int_\alpha^{x_2} y_{x_2}\,\bar{q}_{x_2,x_3}\,dx_3\,,$$

e così continuando si potrà dire evidentemente che l'integrale y è dato dalla serie d'integrali multipli

$$(20)\quad \begin{cases} y = \dfrac{\varepsilon_{n-1}\,A_x}{(a_0\,Q)_x} + \dfrac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0\,Q)_x}\displaystyle\int_\alpha^x \frac{A_{x_1}\,\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 + \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0\,Q)_x}\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1}\frac{A_{x_2}\,\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 + \\[2ex] \qquad + \dfrac{\varepsilon_{n-1}^4}{(a_0\,Q)_x}\displaystyle\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1}\frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 \int_\alpha^{x_2}\frac{A_{x_3}\,\bar{q}_{x_2,x_3}}{(a_0\,Q)_{x_3}}\,dx_3 + \ldots + \\[2ex] + \dfrac{\varepsilon_{n-1}^m}{(a_0\,Q)_x}\displaystyle\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1}\frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 \int_\alpha^{x_2}\ldots\int_\alpha^{x_{m-3}}\frac{\bar{q}_{x_{m-3},x_{m-2}}}{(a_0\,Q)_{x_{m-2}}}\,dx_{m-2}\int_\alpha^{x_{m-2}}\frac{A_{x_{m-1}}\,\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\,Q)_{x_{m-1}}}\,dx_{m-1} + \ldots \end{cases}$$

quando si riesca ad assicurarsi che l'integrale multiplo

$$\int_\alpha^x\int_\alpha^{x_1}\int_\alpha^{x_2}\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}} y_{x_m}\,\frac{\bar{q}_{x,x_1}\,\bar{q}_{x_1,x_2}\,\bar{q}_{x_2,x_3}\ldots\bar{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\,Q)_x\,(a_0\,Q)_{x_1}\,(a_0\,Q)_{x_2}\ldots(a_0\,Q)_{x_{m-1}}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_m$$

col crescere indefinito di m ha per limite zero per tutti i valori di x nell'intervallo che si considera.

Ora è facile vedere che questo in particolare avverrà quando si sappia in qualche modo che pei valori di x, e quindi anche di $x_1, x_2, \ldots, x_m$, in quell'intervallo l'integrale y si mantiene numericamente inferiore a un numero finito p, e che $\bar{q}_{x,x_1}$ in valore assoluto (o in modulo) non supera un certo numero d e $a_0 Q$ non è mai zero.

In questo caso infatti, supponendo ad es.: di considerare gli intervalli a destra di α e quindi i valori di x pei quali $x \geq \alpha$, e indicando con d_1 il minimo valore assoluto (o il minimo modulo) di $a_0 Q$ nel tratto che si considera, questo numero d_1 sarà diverso da zero perchè per le nostre ipotesi a_0 e Q oltre ad essere sempre diversi da zero sono anche continui, e l'integrale precedente in valore assoluto o in modulo si manterrà inferiore al-

l'altro

$$p\left(\frac{d}{d_1}\right)^m \int_\alpha^x dx_1 \int_\alpha^{x_1} dx_2 \int_\alpha^{x_2} dx_3 \ldots \int_\alpha^{x_{m-1}} dx_m\,,$$

che eseguendo le integrazioni successive si riduce a

$$p\left(\frac{d}{d_1}\right)^m \frac{(x-\alpha)^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\,,\quad \text{ovvero}\quad p\,\frac{\left(\dfrac{d}{d_1}(x-\alpha)\right)^m}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\,,$$

e evidentemente ha per limite zero per $m = \infty$; dunque poichè per quanto già facemmo notare nel § 517 esistono sempre dei tratti per x ai quali appartiene il punto α e nei quali tutte le condizioni precedenti sono soddisfatte per ogni sistema di valori che si scelgano delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, così si può ora affermare che la formola (20) dà l'integrale generale della equazione lineare data (1) nei tratti stessi. E a causa della tanta indeterminazione che resta per la scelta delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, si può anche asserire, come già dicemmo, che non una sola ma infinite espressioni si hanno dalla formola (20) per gli integrali delle equazioni lineari (1) di qualunque ordine. E anzi di tale indeterminazione delle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ potremmo profittare per semplicizzare la formola stessa (20) o per farle acquistare certe particolarità speciali, come poi vedremo.

523. — Il processo che abbiamo seguito per giungere alla formola (20), quando sono soddisfatte le condizioni che si posero pei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X e per le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nell'intervallo che si considera, ci assicura che la formola stessa, che può anche scriversi sotto la forma

$$(21)\qquad y = \frac{\varepsilon_{n-1}\,A_x}{(a_0\,Q)_x} +$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_{n-1}^{m-1}}{(a_0\,Q)_x}\int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1}\frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2 \int_\alpha^{x_2}\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}\frac{\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\,Q)_{x_{m-1}}}\,dx_{m-1}\int_\alpha^{x_{m-1}}\frac{A_{x_m}\,\bar{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\,Q)_{x_m}}\,dx_m\,,$$

dove s'intende che x_0 nel primo termine di $\sum\limits_1^\infty$ rappresenti x, dà sempre gli integrali della equazione data (1), della esistenza e della unicità dei quali, come dicemmo al § 517, non vi ha alcun dubbio per ogni sistema di valori iniziali $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y_\alpha^{(n-1)}$ o delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Indipendentemente però anche dalle considerazioni fatte, e senza neppure ammettere dimostrata la esistenza degli integrali della equazione data, si può dimostrare che pei valori di x che cadono nei tratti nei quali sono soddisfatte le condizioni poste per $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, X e $z_1, z_2, \dots, z_n$, inclusa quella che a_0 e Q siano diversi da zero, la serie del secondo membro della formola (21) per ogni sistema di valori finiti delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ che vi figurano è convergente e convergente in ugual grado in quei tratti, e rappresenta un integrale della equazione (1); e questo integrale lasciando indeterminate le dette costanti è l'integrale generale.

Sotto queste condizioni infatti si vede subito che nei tratti indicati il valore assoluto (o il modulo) di $a_0 \mathrm{Q}$ non scenderà mai al disotto di un certo numero diverso da zero d_1, e le quantità A_x e $\bar{q}_{x,x_1}$ non supereranno mai in valore assoluto o in modulo certi numeri finiti A e d, e quindi il termine generale della serie (21) si manterrà inferiore, in valore assoluto o in modulo, all'integrale

$$\mathrm{A}\,\frac{d^m}{d_1^{m+1}}\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \dots \int_a^{x_{m-2}} dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_m \,,$$

cioè alla quantità $\dfrac{\mathrm{A}}{d_1}\left(\dfrac{d}{d_1}\right)^m \dfrac{(x-\alpha)^m}{1\,.\,2\,.\,3 \dots m}$, che all'infuori del fattore $\dfrac{\mathrm{A}}{d_1}$ è il termine di una serie esponenziale; e si può quindi concludere intanto senz'altro che la serie (21) non solo è convergente pei suindicati valori di x ma è anche convergente in ugual grado.

La serie stessa adunque, per la quale ora ammettiamo di non sapere se sia o no l'integrale della (1), rappresenta una funzione finita e continua di x e ad essa sarà applicabile la integrazione termine a termine; quindi indicandone la somma con y, si vede subito che per essa avremo la formola

$$(22) \qquad y = \varepsilon_{n-1} \frac{\mathrm{A}_x}{(a_0 \mathrm{Q})_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 \mathrm{Q})_x} \int_a^x y_{x_1} \bar{q}_{x,x_1}\, dx_1 \,,$$

la quale col riporvi per A_x, $\bar{q}_{x,x_1}$ e $a_0 \mathrm{Q}$ i loro valori ci riconduce alla (9) e quindi anche a y sotto la forma del quoziente $\dfrac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{P}}$ di due determinanti quale si ebbe dalle (8) quando in queste già si sapeva che y rappresentava l'integrale della (1).

Non sapendosi però ancora se questa funzione y sia l'integrale della equa-

zione (1), alle equazioni (8) sostituiamo le altre del tutto simili

$$(23) \quad \begin{cases} p_{1,0}\,\eta_{n-1} + p_{1,1}\,\eta_{n-2} + \dots + p_{1,n-2}\,\eta_1 + p_{1,n-1}\,\eta_0 = \displaystyle\int_a^x (y\mathrm{Z}_1 + z_1 \mathrm{X})\, dx + c_1 \,, \\[2ex] p_{2,0}\,\eta_{n-1} + p_{2,1}\,\eta_{n-2} + \dots + p_{2,n-2}\,\eta_1 + p_{2,n-1}\,\eta_0 = \displaystyle\int_a^x (y\mathrm{Z}_2 + z_2 \mathrm{X})\, dx + c_2 \,, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex] p_{n,0}\,\eta_{n-1} + p_{n,1}\,\eta_{n-2} + \dots + p_{n,n-2}\,\eta_1 + p_{n,n-1}\,\eta_0 = \displaystyle\int_a^x (y\mathrm{Z}_n + z_n \mathrm{X})\, dx + c_n \,, \end{cases}$$

nelle quali s'intende che y sia semplicemente la funzione data dalla somma della serie (21), le $c_1, c_2, \dots, c_n$ siano quelle costanti stesse che figurano nel determinante Q_c che comparisce in y, e $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ siano n quantità da determinarsi per mezzo di queste equazioni, e che saranno effettivamente uniche e determinate perchè il determinante P dei loro coefficienti, essendo uguale a $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n \mathrm{Q}$, sarà diverso da zero; e poichè queste ci dànno subito $\eta_0 = \dfrac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{P}}$, si potrà dire intanto che sarà $\eta_0 = y$.

Immaginando ora effettivamente determinate colla risoluzione di queste equazioni oltre alla η_0, anche le altre di queste funzioni $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$, e tenendo conto delle condizioni che abbiamo posto pei coefficienti della (1) e per le funzioni scelte $z_1, z_2, \dots, z_n$, si vedrà subito che esse potranno derivarsi almeno una volta; e poichè se i valori che così si avranno per queste funzioni $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ si intenderanno posti nelle equazioni stesse (23), queste si ridurranno ad altrettante identità, lo stesso avverrà del sistema di equazioni cui esse daranno luogo facendone la derivazione.

Ora se si prende ad es. la r^a delle equazioni precedenti (23), si trova che colla derivazione essa dà luogo all'altra

$$\begin{gathered} p_{r,0}\,\eta'_{n-1} + p_{r,1}\,\eta'_{n-2} + p_{r,3}\,\eta'_{n-2} + \dots + p_{r,n-2}\,\eta'_1 + p_{r,n-1}\,\eta'_0 - y\mathrm{Z}_r - z_r \mathrm{X} + \\ + p'_{r,0}\,\eta_{n-1} + p'_{r,1}\,\eta_{n.2} + p'_{r,2}\,\eta_{n-3} + \dots + p'_{r,n-2}\,\eta_1 + p'_{r,n-1}\,\eta_0 = 0 \,, \end{gathered}$$

e questa, coll'avere riguardo alle formole (3) e (6) che definiscono le $p_{r,s}$ e le Z_r, e con tenere conto della osservazione già fatta che si ha $\eta_0 = y$, si trasforma nell'altra

$$\begin{gathered} z_r\,(a_0\,\eta'_{n-1} + a_1\,\eta'_{n-2} + a_2\,\eta'_{n-2} + \dots + a_{n-1}\,\eta'_0 + a_n\,\eta_0 - \mathrm{X}) + \\ + p'_{r,0}(\eta_{n-1} - \eta'_{n-2}) + p'_{r,1}(\eta_{n-2} - \eta'_{n-3}) + \dots + p'_{r,n-3}(\eta_2 - \eta'_1) + p'_{r,n-2}(\eta_1 - \eta'_0) = 0 \,, \end{gathered}$$

per modo che si può dire che avremo un sistema di n equazioni, delle quali la r^a avrà la forma seguente

$$(24) \qquad z_r\theta + p'_{r,0}\theta_1 + p'_{r,1}\theta_2 + p'_{r,2}\theta_3 + \dots + p'_{r,n-3}\theta_{n-2} + p'_{r,n-2}\theta_{n-1} = 0\,,$$

quando con θ si rappresenti il coefficiente di z_r nella formola precedente, e con $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$ si rappresentino le differenze

$$\eta_{n-1} - \eta'_{n-2}\,, \quad \eta_{n-2} - \eta'_{n-3}\,, \quad \eta_{n-3} - \eta'_{n-4}\,, \dots, \quad \eta_2 - \eta'_1\,, \quad \eta_1 - \eta'_0.$$

Ma se si forma il determinante dei coefficienti di questo sistema di equazioni

$$\begin{vmatrix} z_1 & p'_{1,0} & p'_{1,1} & \dots & p'_{1,n-2} \\ z_2 & p'_{2,0} & p'_{2,1} & \dots & p'_{2,n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_r & p'_{n,0} & p'_{n,} & \dots & p'_{n,n-2} \end{vmatrix},$$

basta porvi per le $p'_{r,s}$ i loro valori dedotti dalle (3) e avere riguardo al valore di P per vedere subito che esso non è altro che $(-1)^{n-1}\dfrac{P}{a_0}$ e quindi è diverso da zero: dunque evidentemente le soluzioni che si hanno per le $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$ dal sistema delle dette equazioni della forma (24) sono tutte zero, e perciò i valori $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ che insieme a quello y della η_0 dànno le soluzioni delle equazioni (23) sono appunto le derivate successive del valore η_0 cioè del valore y che è definito dalla formola (21), e esse rendono $\theta = 0$; ciò che mostra appunto che per ogni sistema comunque scelto delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ la somma y della serie (21) soddisfa alla equazione (1) e ne è quindi un integrale; e lasciando le $c_1, c_2, \dots, c_n$ indeterminate viene ad esserne l'integrale generale, perchè in seguito alle considerazioni ora esposte, le (23) si riducono precisamente alle (8) e ripetendo quindi i ragionamenti che si fecero al § 517 si vede che per valori convenienti delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ i valori iniziali di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ per $x = \alpha$ possono rendersi qualunque.

E come dicemmo al successivo § 518, se la equazione data (1) sarà omogenea, per avere dalla (21) un sistema fondamentale d'integrali basterà prendere quelli che corrispondono a n sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ per le quali il determinante C dato dalla (12) è diverso da zero; e così in particolare basterà prendere quegli integrali che corrispondono ai sistemi di costanti che si ottengono prendendo successivamente una delle stesse costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ uguale ad uno, e le altre uguali a zero.

524. — In ciò che precede abbiamo sempre supposto che α sia finito e che pei valori di x che cadono nell'intervallo che si considera, e quindi anche pel valore $x = \alpha$, le a_0 e Q non si annullino, e gli altri coefficienti della equazione data (1), e così pure la funzione X e le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$ non divengano infinite nè presentino altre singolarità nè esse nè le loro derivate almeno fino a quelle che figurano nelle nostre formole, che sono le derivate di ordine n per le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ e quelle di ordine $n-h$ pel coefficiente a_h (*).

Quando pel punto α, *che ora supporremo potere essere anche all'infinito,* tutte queste particolarità non si verifichino, continuando però a verificarsi per gli altri punti, i risultati precedenti potranno presentare delle eccezioni; però è facile vedere che « essi sussisteranno ancora pienamente, almeno fuori « del punto α, e se non per tutti almeno per alcuni sistemi dei valori delle co- « stanti $c_1, c_2, \dots, c_n$, *che allora saranno quelli da considerarsi,* quando siano « soddisfatte altre condizioni speciali per le quali *eccettuato tutt'al più il primo « termine* del secondo membro della (21), gli altri termini conservino tutti un « significato anche per $x = \alpha$, e la serie $\sum_1^\infty$ da essi formata risulti ancora con- « vergente in ugual grado nel tratto che si dovrà considerare per x che com- « prende il punto α; e al tempo stesso la funzione $\bar{q}_{x,x_1}$ sia integrabile rispetto « ad x_1 nell'intorno di α anche ridotta ai valori assoluti, e la funzione y che « verrà rappresentata dalla stessa formola (21) risulti tale che gli integrali « $\displaystyle\int_a^x (yZ_r + z_r X)\,dx$ che figurano nei secondi membri delle (23) conservino « un significato ».

Sotto queste ipotesi infatti, le singolarità nel secondo membro della (21), quando vi siano, non potranno provenire altro che dal primo termine $\dfrac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}$, e questo non potrà presentarle altro che nel punto α; talchè, indicando come abbiamo detto con y il valore del secondo membro della (21) per x diverso da α, senza ammettere per ora che questo valore y sia l'integrale della (1), è certo che indicando con ε un numero positivo ma arbitrariamente piccolo, fra $\alpha + \varepsilon$ e x potremo applicare l'integrazione per serie, e quindi cambiando successivamente ciascuna delle variabili $x, x_1, x_2, x_3 \dots$ nella seguente e integrando rispetto ad x_1 fra $\alpha + \varepsilon$ e x dopo avere moltiplicata tutta la equazione

(*) Propriamente per le funzioni X e a_0, e così per l'ultima delle derivate da considerarsi per gli altri coefficienti, cioè per la derivata d'ordine $n-h$ per a_h, basterebbe ammettere che siano finite e atte alla integrazione.

per $\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0\,Q)_x}\bar{q}_{x,x_1}$, avremo la formola

$$
(24)\qquad \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0\,Q)_x}\int_{a+\varepsilon}^{x} y_{x_1}\,\bar{q}_{x,x_1}\,dx_1 = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0\,Q)_x}\int_{a+\varepsilon}^{x}\frac{A_x\,\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1 +
$$

$$
+\sum_1^{\infty}\frac{\varepsilon_{n-1}^m}{(a_0\,Q)_x}\int_{a+\varepsilon}^{x}\frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\,Q)_{x_1}}\,dx_1\int_a^{x_1}\frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\,Q)_{x_2}}\,dx_2\int_a^{x_2}\cdots\int_a^{x_{m-1}}\frac{\bar{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\,Q)_{x_m}}\,dx_m\int_a^{x_m}\frac{A_{x_{m+1}}\,\bar{q}_{x_m,x_{m+1}}}{(a_0\,Q)_{x_{m+1}}}\,dx_{m+1}
$$

che varrà per qualunque valore positivo di ε prossimo quanto si vuole a zero.

Ma dalle prime ipotesi fatte, quella cioè che i termini della serie $\sum_1^{\infty}$ che figura nella (21) abbiano tutti un significato pei valori di x negli intervalli che si considerano che comprendono il punto α, e le altre che in questi intervalli e quindi anche in ogni intorno di α la serie stessa $\sum_1^{\infty}$ sia convergente in ugual grado, e la $\bar{q}_{x,x_1}$ sia integrabile rispetto ad x_1 nell'intorno di α anche ridotta ai valori assoluti, si deduce subito che nel secondo membro della formola precedente potremo passare al limite per $\varepsilon = 0$ termine a termine, e il limite dello stesso secondo membro, e quindi anche quello del primo, sarà la serie dei limiti che è precisamente la serie $\sum_1^{\infty}$ che figura nel secondo membro della (21) (*).

(*) Quanto si dice sopra risulta dalla applicazione di teoremi generali noti. Del resto, osservando che l'essere la serie $\sum_1^{\infty}$ convergente in ugual grado rispetto ad x in intervalli che partono da α porta naturalmente la convergenza in ugual grado rispetto ad x_1 negli intorni di α per la serie $\left(\sum_1^{\infty}\right)_{x_1}$ che viene dalla stessa $\sum_1^{\infty}$ cambiandovi a calcoli fatti la x in x_1, basta tenere conto di questo e della condizione posta che $|\bar{q}_{x,x_1}|$ sia integrabile rispetto ad x_1 negli stessi intorni di α, per dedurne che la serie $\left(\sum_1^{\infty}\right)_{x_1}$ è integrabile termine a termine rispetto ad x_1 fra α e $\alpha+\varepsilon$ anche moltiplicando i suoi termini per $\bar{q}_{x,x_1}$, e la somma della serie degli integrali è precisamente l'integrale $\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon}\bar{q}_{x,x_1}\left(\sum_1^{\infty}\right)_{x_1}dx_1$ che ha certamente un significato e che impiccolisce con ε oltre ogni limite quando x è diverso da α; e questo evidentemente conduce subito ad affermare quanto abbiamo detto sopra rispetto al limite per $\varepsilon=0$ del secondo membro della formola (24).

Da queste considerazioni risulta anche che alle condizioni poste nell'enunciato del teorema per la serie $\sum_1^{\infty}$ e per la funzione $\bar{q}_{x,x_1}$ negli intorni di α, potrà sempre sostituirsi l'altra che negli stessi intorni i termini della serie $\left(\sum_1^{\infty}\right)_{x_1}$ moltiplicati per $\bar{q}_{x,x_1}$ siano integrabili rispetto ad x_1 e la serie corrispondente sia convergente in ugual grado negli intervalli che partono da α.

D'altra parte, venendo così il primo membro della formola precedente ad avere un limite per $\varepsilon=0$, se ne deduce che anche l'integrale $\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0\,Q)_x}\int_a^x y_{x_1}\,\bar{q}_{x,x_1}\,dx_1$ ha un significato e il suo valore è appunto uguale a questo limite che, come abbiamo visto, è uguale precisamente alla serie $\sum_1^{\infty}$ che figura nel secondo membro della formola (21); quindi sostituendo si trova intanto che, sotto le fatte ipotesi, per la funzione y definita dalla stessa formola (21) sussiste ancora la formola (22) del § 523.

Ritrovata ora questa formola, basta tenere conto dell'altra ipotesi fatta intorno agli integrali $\int_a^x (y\,Z_r + z_r\,X)\,dx$ per potere scrivere le equazioni (23), dopo di che potranno evidentemente ripetersi i ragionamenti del paragrafo precedente per tutti i valori di x che si considerano *diversi da* α, (*) e si giungerà allora a concludere, come volevamo, che il valore (21) di y per quei sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che potranno considerarsi verrà a rappresentare ancora un integrale della equazione data (1); ma invece di corrispondere all'integrale generale corrisponderà soltanto a integrali particolari se le costanti non potranno essere prese tutte in un modo qualsiasi.

525. — Indicando ora con $|a_0\,Q|_x$ il valore assoluto, o il modulo di $(a_0Q)_x$, osserviamo che pel valore assoluto $|y|$ della funzione y rappresentata dalla (21) si ha $|y| \leq \frac{|A_x|}{|a_0Q|_x} + \left|\sum_1^{\infty}\right|$; e questo ci mostra che per assicurarsi che colla stessa funzione y è soddisfatta la condizione che qui si richiede che gli integrali $\int_a^x (yZ_r + z_r X)\,dx$ abbiano un significato basterà assicurarsi che lo abbiano i tre $\int_a^x \frac{|A_x Z_r|}{|a_0 Q|_x}\,dx$, $\int_a^x |Z_r|\,dx$ e $\int_a^x z_r\,X\,dx$ pei varii valori di r; e ora se si ha riguardo al valore di $\bar{q}_{x,x_1}$, si vede subito che quando i varii integrali $\int_a^x |Z_r|\,dx$ abbiano un significato verrà ad averlo di necessità anche

*) Per $x=\alpha$ i primi membri delle equazioni (23), che qui si costruiscono per comodo di dimostrazione, potranno presentare qualche singolarità, ed è per questo che anche ora consideriamo solo i valori di x diversi da α

l'altro $\int_\alpha^x |\bar{q}_{x,x_1}|$ pei valori di x diversi da α, e quindi in questo caso la condizione posta nell'enunciato del teorema per l'integrabilità di $|\bar{q}_{x,x_1}|$ rispetto ad x_1 negli intorni di α potrà tralasciarsi senz'altro.

E quando il prodotto $a_0 Q$ si mantenga discosto da zero più di un certo numero anche al tendere di x ad α se α è finito o al crescere indefinito di x se α è infinito, allora al primo dei tre integrali sopra indicati potrà sostituirsi l'altro $\int_\alpha^x \frac{A_x Z_r}{(a_0 Q)_x} dx$; e nel caso di α finito se, oltre ad essere $a_0 Q$ sempre discosto da zero, la A_x si manterrà finita anche per $x=\alpha$, basterà che siano integrabili $|Z_r|$ e $z_r X$ fra α e x; e se anche Z_r e $z_r X$ si manterranno finiti per $x=\alpha$, tutti gli integrali sopra indicati saranno necessariamente determinati e finiti, e quindi sarà del tutto inutile di occuparsene, e così « in questo « caso, di tutte le condizioni poste nell'enunciato del teorema del paragrafo « precedente rimarrà soltanto quella della convergenza in ugual grado della « solita serie $\sum_1^\infty$ negli intervalli che partono da α ».

Quando poi la condizione posta sopra per gli integrali $\int_\alpha^x (y Z_r + z_r X)\, dx$ o quella per $\bar{q}_{x,x_1}$ non risulterà soddisfatta, ma almeno pei valori di x diversi da α in un certo tratto che parte da questo punto, la formola (21) conserverà ancora un significato, non è escluso che essa possa ancora rappresentare un integrale della equazione data; però allora se altri processi non si presenteranno, per decidere la questione converrà verificare se la funzione y che essa determina soddisfa o no alla equazione stessa.

Aggiungiamo che, nel caso in cui il prodotto $a_0 Q$ si accosta indefinitamente a zero col tendere di x ad α se α è finito o col crescere indefinito di x se $\alpha=\infty$, se avverrà che per questa ragione i varii termini della solita serie $\sum_1^\infty$, o almeno alcuni di essi, perdano il significato per $x=\alpha$ o si sia incerti, ma soppresso in ogni termine il divisore $(a_0 Q)_x$ la serie che ne risulta si manterrà convergente in ugual grado in intervalli che partono da α, allora i risultati precedenti continueranno ancora a sussistere quando, ferme restando le altre condizioni, a quella della integrabilità di $|\bar{q}_{x,x_1}|$ rispetto ad x_1 o delle $|Z_r|$ rispetto ad x negli intorni di α si sostituisca l'altra della integrabilità di $\frac{|\bar{q}_{x,x_1}|}{|a_0 Q|_{x_1}}$ rispetto a x_1 o delle $\frac{Z_r}{|a_0 Q|_x}$ rispetto ad x negli stessi intorni.

526. — Tutto questo in generale. Se poi si riscontrerà anche che col tendere di x ad α quando α è finito o col crescere indefinito di x quando $\alpha=\infty$ *il prodotto $a_0^n Q$ non prenderà anche valori al di là di qualsiasi numero*, e se le condizioni poste nei due paragrafi precedenti risulteranno soddisfatte per *n sistemi* di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ come quelli del § 518 pei quali cioè il determinante C dato dalla (12) venga ad essere diverso da zero, allora si potrà anche affermare che gli integrali corrispondenti (21) in intervalli sufficientemente piccoli che partono da α (α al più escluso) quando α è finito, e in intervalli comunque grandi ma finiti presi al di là di un certo numero quando α è infinito, costituiranno un sistema di n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ il determinante dei quali D sarà diverso da zero; e quindi daranno luogo ad un sistema d'integrali fondamentali quando la equazione data sarà omogenea.

Osserviamo infatti che le (23) nelle quali sia fatto $\eta_0=y$, $\eta_1=y'$, $\eta_2=y''$, ..., $\eta_{n-1}=y^{(n-1)}$ riducendole così alle (8), se non sussistono anche per $x=\alpha$ (perchè, come abbiamo detto in nota, potrà darsi che per $x=\alpha$ le quantità che vi figurano presentino qualche singolarità), sussistono ancora però per ogni valore di x prossimo quanto si vuole ad α se α è finito, e per x al di là di un certo numero quando α è infinito; e quindi ponendo per abbreviare $\int_\alpha^x (y_r Z_s + z_s X)\, dx = \alpha_{r,s}$, si vede che, *per quei valori di x*, il prodotto dei soliti determinanti P e D, ovvero $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n QD$, a causa delle (8) sarà il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}+c_{1,1} & \alpha_{1,2}+c_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n}+c_{1,n} \\ \alpha_{2,1}+c_{2,1} & \alpha_{2,2}+c_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n}+c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1}+c_{n,1} & \alpha_{n,2}+c_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n}+c_{n,n} \end{vmatrix},$$

e potrà rendersi vicino quanto si vuole a C, perchè, prendendo opportunamente i detti intervalli per x, le $\alpha_{r,s}$ potranno supporsi piccole quanto si vuole in valore assoluto o in modulo; e quindi D sarà certamente diverso da zero per quei valori di x.

S'intende poi che non si avranno singolarità negli integrali sopra indicati neppure per $x=\alpha$ se per questo valore di x le singolarità oltre a non presentarsi nella serie (21) non si presenteranno neppure nelle sue derivate, o se non si avranno singolarità nelle quantità $p_{r,s}$, y, z_r, Z_r e X che figurano nelle (23).

527. — Ammettendo ora appunto di trovarsi in uno dei casi eccezionali

dei §§ 524 e 525 — e presentandosi o no anche le particolarità di cui nel successivo § 526 —, accenniamo a due casi speciali molto notevoli nei quali si può senz'altro assicurare che i risultati enunciati negli stessi §§ 524 e 525 sussistono pienamente.

Supponiamo perciò dapprima che si abbia ad es. $\alpha = \infty$, e che pei valori *finiti* di x non inferiori a un certo numero c (che potrà del resto, secondo i casi, essere qualunque) a_0 e Q non siano zero, pure potendo uno o tutti e due tendere a zero al crescere indefinito di x; e i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ della equazione data (1) e così pure la funzione X e le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non presentino singolarità per gli stessi valori *finiti* di x.

Sotto queste ipotesi, un caso particolare nel quale la serie $\sum_1^\infty$ della (21) resta ancora convergente per qualunque valore finito di x non inferiore a c, e in ogni intervallo da c a un altro numero maggiore qualsiasi a distanza finita, e talvolta anche all'infinito, è convergente in egual grado, è quello nel quale per qualsiasi valore di x non inferiore a c e pei valori di x_1 compresi fra x e ∞ i rapporti $\frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}}$, in valore assoluto o in modulo, si mantengono sempre inferiori a $\frac{\mathrm{K}}{x_1^\nu}$ essendo K e ν numeri finiti e fissi e $\nu > 1$; e al tempo stesso la funzione $\frac{\mathrm{A}_{x_1} \bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}}$ per tutti o almeno per alcuni sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che allora saranno quelli che dovremo considerare, è integrabile rispetto a x_1 fra x e ∞, e si ha sempre in valore assoluto o in modulo $\int_x^\infty \frac{\mathrm{A}_{x_1} \bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}} dx_1 < \mathrm{K}_1$, essendo K_1 un altro numero finito e fisso; ciò che in particolare avverrà certamente senz'altro quando, essendo soddisfatta la condizione suindicata rispetto a $\frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 \mathrm{Q})_{x_1}}$, la A_x per gli indicati sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ in valore assoluto o in modulo non supererà mai un certo numero finito neppure al crescere indefinito di x.

In questo caso infatti si vede che il termine generale della serie $\sum_1^\infty$ della (21) in valore assoluto o in modulo è inferiore a

$$\frac{\mathrm{K}_1 \mathrm{K}^{m-1}}{|a_0 \mathrm{Q}|_x} \int_x^\infty \frac{dx_1}{x_1^\nu} \int_{x_1}^\infty \frac{dx_2}{x_2^\nu} \int_{x_2}^\infty \cdots \int_{x_{m-2}}^\infty \frac{dx_{m-1}}{x_{m-1}^\nu},$$

cioè al termine

$$\frac{\mathrm{K}_1}{|a_0 \mathrm{Q}|_x \, \pi(m-1)} \left(\frac{\mathrm{K} x^{1-\nu}}{\nu - 1}\right)^{m-1},$$

che all'infuori del fattore $\frac{\mathrm{K}_1}{|a_0 \mathrm{Q}|_x}$ è quello della serie esponenziale relativa a $\frac{\mathrm{K} x^{1-\nu}}{\nu - 1}$, e questo evidentemente basta ad assicurarci della convergenza e convergenza in ugual grado della detta serie $\sum_1^\infty$ della (21) negli intervalli indicati da c ad un numero maggiore e finito qualsiasi, e talvolta anche all'infinito, come in particolare avverrà quando $a_0 \mathrm{Q}$ non si accosterà indefinitamente a zero al crescere indefinito di x; mentre la serie che si avrà sopprimendo nei varii termini il divisore $(a_0 \mathrm{Q})_x$ sarà sempre convergente in ugual grado anche fra c e ∞.

Così, volendo comprendere anche il caso in cui $a_0 \mathrm{Q}$ si accosterà indefinitamente a zero al crescere indefinito di x, per quanto dicemmo nei §§ 524 e 525, onde essere sicuri che per gli indicati sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ il valore y dato dalla formola (21) è ancora un integrale della (1), rimarrà solo ad assicurarsi che collo stesso valore di y gli integrali $\int_x^\infty \frac{|\bar{q}_{x,x_1}|}{|a_0 \mathrm{Q}|_{y_1}} dx_1$ e $\int_x^\infty (y \mathrm{Z}_r + z_r \mathrm{X}) dx$ hanno un significato per ogni valore di x non inferiore a c; e per questo basterà assicurarsi (§ 525 in fine) che lo abbiano i tre integrali $\int_x^\infty \frac{|\mathrm{A}_x \mathrm{Z}_r|}{|a_0 \mathrm{Q}|_x} dx$, $\int_x^\infty \frac{|\mathrm{Z}_r|}{|a_0 \mathrm{Q}|_x} dx$ e $\int_x^\infty z_r \mathrm{X} \, dx$. E quando anche al crescere indefinito di x il prodotto $a_0 \mathrm{Q}$ non si accosti a zero più di un certo numero, allora ai due primi di questi ultimi integrali potranno sostituirsi gli altri $\int_x^\infty \frac{\mathrm{A}_x \mathrm{Z}_r}{(a_0 \mathrm{Q})_x} dx$ e $\int_x^\infty |\mathrm{Z}_r| \, dx$.

In questo ultimo caso poi anche le altre condizioni che qui abbiamo poste potranno presentarsi sotto una forma più semplice; e così *in particolare* si può ora evidentemente affermare che in tutti quei casi nei quali, pei valori di x superiori a un certo numero finito c, siano soddisfatte le condizioni seguenti:

a) che a_0 e Q siano finiti e diversi da zero finchè x è finito, e al crescere indefinito di x il loro prodotto $a_0 \mathrm{Q}$ si mantenga discosto da zero più di un certo numero;

b) la funzione $\overline{q}_{x,x_1}$ per x_1 compreso fra x e ∞ sia sempre numericamente (*) inferiore a $\frac{K}{x_1^\nu}$, con K e ν finiti e fissi e $\nu > 1$;

c) la A_x per tutti o almeno per alcuni sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si mantenga numericamente inferiore a un numero finito; e

d) le funzioni $z_r X$ e Z_r per tutti i valori di r siano atte alla integrazione fra c e ∞, quest'ultime Z_r mantenendosi tali anche ridotte ai loro valori assoluti;

allora la formola (21) per gli indicati sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rappresenterà sempre un integrale della equazione data (1) fra c e ∞.

528. — Supponiamo poi in secondo luogo che restando invece α finito, pei coefficienti della equazione data e per le funzioni X e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ come per a_0 e Q non siano più soddisfatte tutte le solite condizioni del § 522 per $x = \alpha$, ma lo siano ancora in ogni altro punto dell'intervallo che si considera.

Allora un caso particolare (del tutto analogo al precedente) nel quale la serie $\sum\limits_1^\infty$ della (21) si mantiene convergente e convergente in egual grado in ogni intervallo che parta dai punti vicini ad α quanto si vuole, e anche dal punto α quando $a_0 Q$ non si accosterà indefinitamente a zero col tendere di x ad α, è quello nel quale i rapporti $\frac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$ per ogni valore di x diverso da α in questi intervalli, e per x_1 fra α e x si mantengono numericamente inferiori a $\frac{K}{(x_1-\alpha)^\nu}$ con K e ν numeri finiti e fissi e $\nu < 1$, e al tempo stesso la funzione $\frac{A_{x_1} \overline{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$ è integrabile rispetto a x_1 fra α e x, e il suo integrale è sempre inferiore a un numero K_1; come in particolare avverrà sempre senz'altro quando, essendo soddisfatta la condizione testè indicata pel rapporto $\frac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, la funzione A_x si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero finito anche col tendere di x ad α.

In questo caso infatti si vede subito, come nel caso precedente, che il

(*) A scanso di equivoci diciamo una volta per tutte che qui per brevità di linguaggio colle parole «valore numerico» o «valore assoluto ecc.» per le quantità che contengono le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e le loro derivate, s'intende parlare anche dei loro «moduli» quando alcune o tutte queste quantità siano complesse.

termine generale della serie $\sum\limits_1^\infty$ della (21) è numericamente inferiore a

$$\frac{K_1 K^m}{|a_0 Q|_x} \int_\alpha^x \frac{dx_1}{(x_1-\alpha)^\nu} \int_\alpha^{x_1} \frac{dx_2}{(x_2-\alpha)^\nu} \int_\alpha^{x_2} \cdots \int_\alpha^{x_{m-2}} \frac{dx_{m-1}}{(x_{m-1}-\alpha)^\nu},$$

cioè a

$$\frac{K_1}{|a_0 Q|_x \pi(m-1)} \left(\frac{K(x-\alpha)^{1-\nu}}{1-\nu}\right)^{m-1},$$

e quindi, come dicevamo, la serie stessa è convergente per ogni valore di x negli intervalli suddetti, e in questi intervalli è anche convergente in ugual grado; talchè in questo caso, quando si ammetta anche che $a_0 Q$ possa accostarsi indefinitamente a zero al tendere indefinito di x ad α, per essere certi che la formola (21) rappresenta ancora un integrale della equazione data (1) rimarrà solo ad assicurarsi che gli integrali $\int_\alpha^x \frac{|\overline{q}_{x,x_1}|}{|a Q|_{x_1}} dx_1$ e $\int_\alpha^x (y Z_r + z_r X) dx$ dove y è la funzione determinata dalla stessa formola (21) hanno un significato; ciò che avverrà sempre quando fra α e x siano integrabili le funzioni $\frac{|A_x Z_r|}{|a_0 Q|_x}$, $\frac{|Z_r|}{|a_0 Q|_x}$ e $z_r X$, alle due prime delle quali quando il prodotto $a_0 Q$ al tendere di x ad α non si accosta a zero più di un certo numero potranno sostituirsi le altre $\frac{A_x Z_r}{(a_0 Q)_x}$ e $|Z_r|$.

E così nel caso particolare in cui oltre a verificarsi quest'ultima condizione rispetto al prodotto $a_0 Q$, è soddisfatta anche l'altra che la A_x si mantenga sempre numericamente inferiore a un certo numero finito se non per tutti almeno per alcuni dei sistemi di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, allora per essere certi che la formola (21) considerata per questi valori delle stesse costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rappresenta ancora un integrale della equazione (1), basterà assicurarsi che la funzione $\overline{q}_{x,x_1}$ negli intervalli relativi ad x che si considerano che non comprendono il punto α ma che vanno vicini a questo punto quanto si vuole, e per ogni valore di x_1 fra α e x si mantenga sempre in valore assoluto inferiore a $\frac{K}{(x_1-\alpha)^\nu}$ con K e ν numeri finiti e fissi e $\nu < 1$; e al tempo stesso le funzioni $z_r X$ e Z_r per ogni valore di r siano atte alla integrazione fra α e x, queste ultime Z_r mantenendosi tali anche riducendole ai valori assoluti.

529. — I risultati esposti nei paragrafi precedenti risolvono in modo ge-

nerale il problema della effettiva integrazione delle equazioni lineari, complete o no, anche a coefficienti variabili, dandoci, insieme a una dimostrazione speciale della esistenza dei loro integrali, anche le espressioni analitiche degli integrali medesimi.

Queste espressioni analitiche sono per serie, è vero; ma sono date in infiniti modi e sotto forme esplicite, e coi termini che sono perfettamente determinabili ciascuno dal precedente con una semplice quadratura dopo calcolato il primo termine $u_0 = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}$, al modo stesso che nella serie di Taylor ogni termine si deduce con una derivazione dalle formole che hanno condotto al termine precedente; giacchè se $u_{n-1}(x)$ è il termine n^0 (supposto già calcolato), l'$(n+1)^0$ si determina con un'altra quadratura perchè viene ad essere $\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x u_n(x_1) \bar{q}_{x, x_1} dx_1$, per modo cioè che si ha

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

essendo

$$u_0 = \frac{\varepsilon_{n-1} A_x}{(a_0 Q)_x}, \qquad u_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x u_{n-1}(x_1) \bar{q}_{x, x_1} dx_1;$$

e ciò sotto le condizioni poste nel § 522 o nei successivi.

E si può notare che le prime delle condizioni qui indicate, cioè quelle del § 522, ordinariamente si verificano sempre tutte in intervalli convenienti, conducendoci allora all'integrale generale, e nel caso delle equazioni omogenee dandoci con tutta facilità anche i sistemi d'integrali fondamentali. Solo in speciali intervalli, nei quali, — a causa di particolarità che presentino in qualche punto i coefficienti della equazione, o in seguito a scelte troppo speciali che per date circostanze debbano farsi delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$, o per essere $\alpha = \infty$ —, non risultino verificate tutte le dette condizioni del § 522, ma si verifichino le condizioni dei §§ 524 e 525, o in particolare quelle dei paragrafi successivi, verranno talvolta ad aversi integrali particolari invece dell'integrale generale.

530. — Ed è altresì da osservare che quando ci si contenti di avere valori approssimati degli integrali delle equazioni lineari (1), basterà calcolare successivamente nel modo testè indicato, a partire dal primo, alcuni termini di quella che si sarà scelta fra le infinite serie che servono per rappresentare gli integrali; e allora la somma dei termini calcolati, qualunque ne sia il loro numero, darà l'integrale con una approssimazione che potrà calcolarsi determinando un limite superiore del valore assoluto o modulo dell'errore che si commetterà arrestandosi ad un termine qualsiasi.

Tale determinazione gioverà farla caso per caso con processi che potranno variarsi a seconda della serie che sarà stata scelta; ma anche in modo generale potrà trovarsi un limite superiore del valore assoluto o modulo del detto errore.

Supponendo infatti ad es. di essere nel caso del § 522, — cioè nel caso in cui, nell'intervallo che si considera, il valore assoluto o il modulo del prodotto $a_0 Q$ si mantiene discosto da zero più di un certo numero d_1, e quelli di $\bar{q}_{x, x_1}$ e A_x non superano i numeri d e A —, dall'esame del secondo membro della formola (21) si vede che pel valore x l'integrale y, in valore assoluto o in modulo, non supererà mai $\frac{A}{d_1} e^{\frac{d}{d_1}(x-\alpha)}$ cioè sarà sempre $|y_x| \leq \frac{A}{d_1} e^{\frac{d}{d_1}(x-\alpha)}$; e poichè *in ogni caso* col processo del § 524 si trova che la differenza fra l'integrale y e la somma dei primi m termini del secondo membro della (21), cioè l'errore che si cerca, è data dall'integrale

$$\frac{\varepsilon_{n-1}}{(a_0 Q)_x} \int_\alpha^x \frac{\bar{q}_{x, x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{\bar{q}_{x_1, x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 \int_\alpha^{x_2} \dots \int_\alpha^{x_{m-2}} \frac{\bar{q}_{x_{m-2}, x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} dx_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} y_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1}, x_m} dx_m,$$

così, nel caso del § 522, un limite superiore del valore assoluto o del modulo di questo errore sarà

$$\frac{A}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^m \int_\alpha^x dx_1 \int_\alpha^{x_1} dx_2 \int_\alpha^{x_2} \dots \int_\alpha^{x_{m-2}} dx_{m-1} \int_\alpha^{x_{m-1}} e^{\frac{d}{d_1}(x_m - \alpha)} dx_m;$$

e quindi evidentemente pel detto limite superiore si potrà prendere $\frac{A}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^m e^{\frac{d}{d_1}(x-\alpha)} \frac{(x-\alpha)^m}{\pi(m)}$; e questo limite superiore per lo stesso valore di m sarà tanto più piccolo quanto più sarà vicino al punto iniziale α il punto x nel quale l'integrale si vorrà determinare.

E osservando anche che il detto errore in valore assoluto o in modulo, sempre nel caso del § 522, non supera il resto R_m della serie esponenziale $\sum_0^\infty \frac{A}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^m \frac{(x-\alpha)^m}{\pi(m)}$, e questo resto è eguale a

$$\frac{A}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^m \frac{(x-\alpha)^m}{\pi(m)} \left\{ 1 + \frac{\frac{d}{d_1}(x-\alpha)}{m+1} + \frac{\left(\frac{d}{d_1}(x-\alpha)\right)^2}{(m+1)(m+2)} + \dots \right\},$$

si vede che quando sia $\frac{d}{d_1}(x-\alpha) < m+1$, un altro limite superiore del valore assoluto o del modulo del detto errore è $\frac{A}{d_1}\frac{\left(\frac{d}{d_1}(x-\alpha)\right)^m}{\pi(m)}\frac{m+1}{(m+1)-\frac{d}{d_1}(x-\alpha)}$.

In modo simile si troverebbero limiti superiori pel valore assoluto o pel modulo dell'errore nei casi considerati ai §§ 524 e seg., ma sì in questi casi come anche in quello qui considerato del § 522, tenendo conto dei valori speciali che avranno A_x, $\bar{q}_{x,x_1}$ e $a_0 Q$, potranno aversi caso per caso anche altri limiti superiori, che saranno ordinariamente più bassi, pel valore assoluto o pel modulo dei detti errori.

531. — Aggiungiamo poi che, come risolvendo il sistema di equazioni (8) rispetto ad y e valendosi della loro formola di risoluzione $y=\frac{P_0}{P}$ che trovammo al § 516, siamo giunti alla espressione per serie (21) dell'integrale della nostra equazione lineare (1), così risolvendo le stesse equazioni rispetto a una derivata qualsiasi $y^{(s)}$ e operando al modo stesso, potremmo giungere a espressioni simili delle derivate dell'integrale pei varii ordini fino all'$(n-1)^o$, e quindi poi, per la (1), anche alle derivate n^e.

Del resto poi quando, come avviene nei casi più comuni, siano soddisfatte le condizioni del § 522, allora le serie delle derivate del valore (21) di y finchè le derivazioni possono farsi, sono tutte convergenti in ugual grado, e quindi rappresentano le derivate della serie; talchè le derivate dell'integrale potranno anche ottenersi colla derivazione per serie dell'integrale medesimo (21), e risulteranno così determinate finite e continue nel solito intervallo anche per qualunque ordine se tali saranno quelle delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$ e dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ e X della equazione data.

È poi da osservare, pel calcolo di queste derivate, che le espressioni q_{x,x_1} per $x_1 = x$ si annullano, e le $\bar{q}_{x,x_1}$ si riducono a

$$\bar{q}_{x,x} = \varepsilon_{n+1}\{(na'_0+\varepsilon_1 a_1)Q + a_0 Q'\},$$

indicando con apici le derivazioni relative ad x; e così dalla (21) con semplici derivazioni e riduzioni avremo ad esempio

$$(25)\quad y' = \left\{(n-1)\frac{a'_0}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\right\} y + \frac{\varepsilon_{n-1} A'_x}{(a_0 Q)_x} + \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{(a_0 Q)_x}\int_\alpha^x \frac{A_{x_1}\bar{q}'_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{n-1}^3}{(a_0 Q)_x}\int_\alpha^x \frac{\bar{q}'_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}} dx_1 \int_\alpha^{x_1} \frac{A_{x_2}\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0 Q)_{x_2}} dx_2 + \dots$$

Questa formola poi vale anche pei casi eccezionali di cui ai §§ 527 e 528 quando per le quantità sotto gli integrali, e così pei rapporti $\frac{\bar{q}'_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, e $\frac{A_{x_1}\bar{q}'_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, oltre che per gli altri $\frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, $\frac{A_{x_1}\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_{x_1}}$, si abbiano le stesse particolarità che allora si richiedevano soltanto per queste ultime due quantità; e vale anche nel caso più generale dei §§ 524 e 525 quando si riscontri che in essa la serie d'integrali che vi figura è convergente anche in egual grado in intervalli che comprendono il punto α, ecc.

532. — Aggiungiamo inoltre che tutti questi risultati, oltre che pel caso di quantità e di variabili reali, valgono evidentemente anche pel caso di quantità e di variabili complesse, quando invece di parlare di valori reali di x in intervalli reali e di valori assoluti delle quantità sotto gli integrali, si parli di valori complessi o dei loro moduli ecc., e salvo a supporre di essere in campi speciali nei quali i coefficienti della equazione data e le $z_1, z_2, \dots, z_n$ non presentino singolarità, e i valori degli integrali risultino indipendenti dal cammino d'integrazione ecc.

533. — Quello poi che più specialmente è notevole nei risultati che precedono è la tanta arbitrarietà che resta nelle nostre funzioni ausiliarie, reali o complesse, $z_1, z_2, \dots, z_n$, per le quali (come già più volte notammo ma che giova ancora di ricordare) si richiede soltanto che siano regolari (cioè che siano finite e continue insieme alle loro derivate finchè ce ne è bisogno, cioè fino alle n^e al più) e che non annullino il loro Wronskiano Q nell'intervallo che si considera, salvo tutt'al più per $x=\alpha$ nei casi considerati nei §§ 524 e seg. e in altri casi simili. In forza di questa arbitrarietà si vengono ad avere infinite forme per l'integrale della equazione data (1), le quali, come dicemmo nel § 530, potranno anche servire per la determinazione approssimata degli integrali; e s'intende che quando queste funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ si determinino in modo speciale in relazione alla equazione data, o si determinino in modo che vengano ad avere forme speciali, o vengano a soddisfare a speciali condizioni le quantità A_x, Q, q_{x,x_1}, $\bar{q}_{x,x_1}$ e Z_x che figurano nelle nostre formole, l'integrale y dato dalla (21) e le sue derivate verranno ad acquistare forme speciali più o meno notevoli dalle quali risulteranno ora alcune, ora altre delle loro proprietà.

534. — Tutto questo sarà messo in piena evidenza dalle applicazioni che poi faremo di questi risultati, per le quali ne otterremo anche altri essi pure assai notevoli. All'oggetto però di procedere più speditamente nel fare le dette applicazioni, giova fermarsi un momento sulla forma e su alcune particolarità dei polinomii aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z$ e dei determinanti Q_x, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ che compariscono sempre nelle nostre formole.

Riprendiamo perciò il valore (6) di $\varepsilon_{n+1} Z$, e in questo sviluppiamo le derivate $(a_0 z)^{(n)}, (a_1 z)^{(n-1)}, \ldots$ colla solita formola di Leibnitz. Il polinomio stesso prenderà la forma

$$(26) \qquad \varepsilon_{n+1} Z = q_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} z' + q_n z ,$$

dove sarà $q_0 = n_0 a_0 = a_0$, e in generale

$$(27) \qquad q_s = n_s a_0^{(s)} + (n-1)_{s-1} \varepsilon_1 a_1^{(s-1)} + (n-2)_{s-2} \varepsilon_2 a_2^{(s-2)} + \ldots + (n-s)_0 \varepsilon_s a_s ,$$

con $s = 1, 2, \ldots, n$, per modo che sarà

$$(28) \qquad q_n = a_0^{(n)} - a_1^{(n-1)} + a_2^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{(n)} a_n ;$$

e così in particolare quando siano soddisfatte le condizioni

$$(29) \; a_1 = \frac{na'}{2}, \; 2a_3 = n_3 a_0''' - (n-1)_2 a''_1 + (n-2)_1 a'_2 = (n-2) \left\{ -\frac{n(n-1)}{12} a_0''' + a'_2 \right\}, \ldots,$$

il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ tornerà ad essere precisamente cogli stessi coefficienti del primo membro della equazione data.

Nel caso speciale dunque delle equazioni del second'ordine, perchè il polinomio aggiunto $-Z$ torni ad essere come il primo membro della equazione data, cioè $a_0 z'' + a_1 z' + a_2 z$, basterà che sia $a_1 = a_0'$; talchè, ricordando che con una semplice moltiplicazione della equazione per $\frac{1}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ questa condizione per le equazioni del second'ordine viene subito soddisfatta, si vede che la riduzione, della quale parlammo in generale al § 521, della integrazione delle equazioni lineari a quella della loro aggiunta, non può portare alcun vantaggio nel caso delle equazioni del second'ordine; ma non ostante questo, la formola che allora si dette per esprimere gli integrali di una equazione lineare per mezzo di quelli dell'aggiunta può essere ancora utile, come mostrammo nella nota allo stesso § 521.

Quanto poi alle equazioni di ordine superiore al secondo, perchè il polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z$ riproduca nei coefficienti il primo membro della equazione data bisognerà che oltre alla prima delle equazioni (29) si abbiano anche le altre; e quando si abbia soltanto la prima delle stesse equazioni, allora si riprodurranno soltanto i primi tre coefficienti della equazione (1).

Del resto poi data la equazione (1), con opportune trasformazioni e in particolare con quelle sulle quali ci trattenemmo nei §§ 495 e seg. [pag. 693 e seg.], potremo mutarne assai i coefficienti, e così in molti casi sì essi che quelli del polinomio aggiunto potranno ridursi ad acquistare particolarità speciali.

535. — Fermandoci infine per un momento, come già dicemmo di fare, anche sui determinanti Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$, osserviamo che essi rientrano tutti nell'altro

$$(30) \qquad \Theta_n = \begin{vmatrix} z_1 & z_1' & \ldots & z_1^{(n-2)} & \theta_1 \\ z_2 & z_2' & \ldots & z_2^{(n-2)} & \theta_2 \\ . & . & . & . & . \\ z_n & z_n' & \ldots & z_n^{(n-2)} & \theta_n \end{vmatrix},$$

bastando per ottenerli da questo di farvi respettivamente $\theta_1 = c_1$, $\theta_2 = c_2$, $\ldots, \theta_n = c_n$ per il Q_c; $\theta_1 = (z_1)_{x_1}$, $\theta_2 = (z_2)_{x_1}, \ldots, \theta_n = (z_n)_{x_1}$ per q_{x,x_1}; e $\theta_1 = (Z_1)_{x_1}$, $\theta_2 = (Z_2)_{x_1}, \ldots, \theta_n = (Z_n)_{x_1}$ per $\bar{q}_{x,x_1}$.

Sviluppando Θ_n per gli elementi dell'ultima colonna, e indicando in generale con Q_{z_r} il determinante che viene da Q sopprimendovi la linea r^a e l'ultima colonna, cioè il Wronskiano delle $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_n$, si vede che si avrà

$$\Theta_n = \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} \theta_1 + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} \theta_2 + \ldots + \varepsilon_0 Q_{z_n} \theta_n ,$$

e quindi sarà

$$(31) \qquad \begin{cases} Q_c = \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} c_1 + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} c_2 + \ldots + \varepsilon_0 Q_{z_n} c_n , \\ q_{x,x_1} = \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} (z_1)_{x_1} + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} (z_2)_{x_1} + \ldots + \varepsilon_0 Q_{z_n} (z_n)_{x_1} , \\ \bar{q}_{x,x_1} = \varepsilon_{n-1} Q_{z_1} (Z_1)_{x_1} + \varepsilon_{n-2} Q_{z_2} (Z_2)_{x_1} + \ldots + \varepsilon_0 Q_{z_n} (Z_n)_{x_1} , \end{cases}$$

per modo che se, dipendentemente da relazioni che avessero luogo fra le funzioni ausiliarie scelte $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ognuno dei determinanti Q_{z_r} potrà ridursi a dipendere dalla sola z_r che figura nel suo indice (e non nel determinante stesso) e da altre quantità conosciute, allora nelle nostre funzioni Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ le funzioni $z_1, \ldots, z_n$ risulteranno separate.

In q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ poi la variabile x_1 figurerà sempre soltanto nei secondi fattori dei loro termini; e oltre a ciò siccome in Q_c, e quindi anche nella espressione di A_x che figura nella nostra formola generale (21), le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ risultano tutte al primo grado e separate, la espressione (21) di y come quelle delle sue derivate si ridurranno alla forma $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n + \mu$ essendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e μ funzioni conosciute; cioè nell'integrale y le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vi figureranno ancora al primo grado e separate. E prendendo successivamente una di queste costanti uguale a uno e le altre uguali a zero quando questo possa farsi, come sarà ad es. nei casi considerati al § 522, allora le Q_c si ridurranno ciascuna ad un termine solo, e i valori corrispondenti di y daranno n integrali distinti che nel caso di $X = 0$, cioè per le equazioni omogenee, daranno un sistema d'integrali fondamentali (§ 523) che saranno appunto le funzioni ora indicate con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

536. — Aggiungiamo che pel determinante Θ_n (che comprende i tre Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$) e per la sua derivata Θ'_n si hanno altre formole notevolissime che qui giova di dare.

Osserviamo perciò che le prime $n-1$ funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ potranno essere state date subito come integrali fondamentali di una equazione omogenea in z di ordine $n-1$, e se anche saranno state date altrimenti, questa equazione potremo sempre intenderla costruita coi processi del § 482 [pag. 676 e seg.] come dicemmo al § 520; e noi introducendo ora questa equazione, ammetteremo che essa sia la seguente

$$\Psi(z) = b_0 z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + b_2 z^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z' + b_{n-1} z = 0, \tag{32}$$

indicando con $\Psi(z)$ il suo primo membro.

Derivando rispetto ad x il determinante Θ_n, coll'osservare che nei nostri casi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sono indipendenti da x, si troverà un nuovo determinante che sarà quello che risulta da Θ_n sostituendovi agli elementi della penultima colonna le derivate $z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)} \dots z_{n-1}^{(n-1)}, z_n^{(n-1)}$; e poichè per ipotesi le $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ sono integrali della equazione precedente (32), i primi $n-1$ degli stessi elementi potranno esprimersi per le derivate degli ordini precedenti per mezzo della stessa equazione; e così scrivendo l'ultimo elemento $z_n^{(n-1)}$ sotto la forma $-\frac{b_1}{b_0} z_n^{(n-2)} + \left(z_n^{(n-1)} + \frac{b_1}{b_0} z_n^{(n-2)}\right)$, il determinante Θ'_n verrà a prendere la forma seguente

$$\Theta'_n = -\frac{1}{b_0}\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-3)} & b_1 z_1^{(n-2)} + (b_2 z_1^{(n-3)} + \dots + b_{n-} z'_1 + b_{n-1} z_1) & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-3)} & b_1 z_2^{(n-2)} + (b_2 z_2^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_2 + b_{n-1} z_2) & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{(n-3)} & b_1 z_{n-1}^{(n-2)} + (b_2 z_{n-1}^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_{n-1} + b_{n-1} z_{n-1}) & \theta_{n-1} \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-3)} & b_1 z_n^{(n-2)} - (b_0 z_n^{(n-1)} + b_1 z_n^{(n-2)}) & \theta_n \end{vmatrix}.$$

Spezzando ora in due parti ogni elemento della penultima colonna come è indicato dalle parentesi, e scomponendo il determinante in due si potrà scrivere subito intanto

$$\Theta'_n = -\frac{b_1}{b_0}\Theta_n - \frac{1}{b_0}\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \dots & z_1^{(n-3)} & b_2 z_1^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_1 + b_{n-1} z_1 & \theta_1 \\ z_2 & z'_2 & \dots & z_2^{(n-3)} & b_2 z_2^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_2 + b_{n-1} z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-1} & z'_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{(n-3)} & b_2 z_{n-1}^{(n-3)} + \dots + b_{n-2} z'_{n-1} + b_{n-1} z_{n-1} & \theta_{n-1} \\ z_n & z'_n & \dots & z_n^{(n-3)} & -(b_0 z_n^{(n-1)} + b_1 z_n^{(n-2)}) & \theta_n \end{vmatrix},$$

e ora sottraendo dagli elementi della penultima colonna i corrispondenti delle colonne precedenti moltiplicati respettivamente per $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2$, si trova subito la formola seguente

$$\Theta'_n = -\frac{b_1}{b_0}\Theta_n - \frac{\Psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}, \tag{33}$$

essendo $\Psi(z_n)$ ciò che diviene per $z = z_n$ il primo membro della equazione (32) in z che ha per integrali le funzioni precedenti $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, e Θ_{n-1} essendo il determinante analogo a Θ_n relativo al caso di queste sole $n-1$ funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$; e ora da questa formola colla integrazione si ha subito l'altra

$$\Theta_n = -e^{-\int_\beta^x \frac{b_1}{b_0}dx}\left\{\int_\beta^x \frac{\Psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1} e^{\int_\beta^x \frac{b_1}{b_0}dx} dx - \gamma_n\right\}, \tag{34}$$

essendo γ_n il valore che prende Θ_n pel valore particolare β di x; e questo γ_n conterrà θ_n al primo grado e potrà pure contenere le $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$, e anche queste linearmente perchè Θ_n è sempre lineare e omogeneo rispetto a tutte queste quantità $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n$.

Queste formole (33) e (34) sono quelle che volevamo trovare. Da esse nel caso di $b_1 = b'_0$ si hanno le due

$$(b_0\Theta_n)' = -\Psi(z_n)\Theta_{n-1}, \qquad \Theta_n = -\frac{1}{b_0}\int_\beta^x \Psi(z_n)\Theta_{n-1}dx + \gamma_n, \tag{35}$$

e nel caso invece di $b_1 = 0$ si hanno le altre

$$\Theta'_n = -\frac{\Psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}, \qquad \Theta_n = -\int_\beta^x \frac{\Psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}dx + \gamma_n, \tag{36}$$

essendo ancora γ_n il valore di Θ_n per $x = \beta$.

Applicazioni delle formole generali precedenti alla determinazione dei valori asintotici degli integrali di alcune classi di equazioni lineari.

537. — I risultati generali che abbiamo ottenuto dànno luogo ad altri molto notevoli quando si particolarizzano le funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$ per le quali, come dicemmo, si ha tanta arbitrarietà.

Prendendo perciò sempre a considerare la solita equazione lineare

$$(1)\qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \mathrm{X}\,,$$

e mantenendo ancora tutte le notazioni dei paragrafi precedenti, ricordiamo la formola (21) del § 523 [pag. 725] che deve dare l'integrale, e che può scriversi sotto la forma

$$(2)\qquad y = \frac{\varepsilon_{n-1}\mathrm{A}_x}{(a_0\mathrm{Q})_x} +$$

$$+\sum_1^\infty \frac{\varepsilon_{n-1}^{m-1}}{(a_0\mathrm{Q})_x}\int_a^x \frac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_1}}dx_1\int_a^{x_1}\frac{\overline{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_2}}dx_2\int_a^{x_2}\ldots\int_a^{x_{m-2}}\frac{\overline{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_{m-1}}}dx_{m-1}\int_a^{x_{m-1}}\frac{\mathrm{A}_{x_m}\overline{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_m}}dx_m,$$

intendendo che x_0 nel termine di $\sum\limits_1^\infty$ che corrisponde a $m=1$ rappresenti x, e scegliamo in primo luogo per le solite funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le n esponenziali distinte $e^{\omega_1 x}, e^{\omega_2 x}, \ldots, e^{\omega_n x}$, essendo $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ quantità costanti (reali o complesse) delle quali indicheremo con σ la somma $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$, mentre per abbreviare indicheremo con σ_r la somma $\sigma-\omega_r$ di tutte le stesse quantità meno la ω_r.

Allora pel Wronskiano Q di queste funzioni avremo $\mathrm{Q}=q\,e^{\sigma x}$, essendo q il prodotto $\prod\limits_{r,s}(\omega_r-\omega_s)$ con $r>s$ delle differenze delle $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; e se indicheremo con

$$(3)\qquad \varphi(\omega) = \alpha_0\omega^n + \varepsilon_1\alpha_1\omega^{n-1} + \varepsilon_2\alpha_2\omega^{n-2} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\alpha_{n-1}\omega + \varepsilon_n\alpha_n = 0\,,$$

dove $\varepsilon_s = (-1)^s$, la equazione che avrà per radici le quantità $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, avremo $\sigma = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, e le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ verranno ad essere un sistema fondamentale d'integrali della equazione lineare a coefficienti costanti

$$(4)\qquad \alpha_0 z^{(n)} + \varepsilon_1\alpha_1 z^{(n-1)} + \varepsilon_2\alpha_2 z^{(n-2)} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\alpha_{n-1}z' + \varepsilon_n\alpha_n z = 0\,,$$

e per le quantità Q_{z_r} del § 535 coi processi seguiti nel § 485 [pag. 682-83] troveremo $\varepsilon_{n-r}\mathrm{Q}_{z_r} = \frac{\alpha_0\mathrm{Q}}{\varphi'(\omega_r)}e^{-\omega_r x} = \frac{\alpha_0 q}{\varphi'(\omega_r)}e^{\sigma_r x}$.

Per questo le formole (31) dello stesso § 535 ci daranno ora

$$(5)\quad \mathrm{Q}_c = \alpha_0 q\sum_1^n \frac{1}{\varphi'(\omega_r)}e^{\sigma_r x}c_r\,,\quad q_{x,x_1} = \alpha_0 q\sum_1^n\frac{1}{\varphi'(\omega_r)}e^{\sigma_r x+\omega_r x_1}\,,\quad \overline{q}_{x,x_1} = \alpha_0 q\sum_1^n\frac{1}{\varphi'(\omega_r)}e^{\sigma_r x}(\mathrm{Z}_r)_{x_1}$$

e se per abbreviare indichiamo con $\overline{\mathrm{A}}_x$ e v_{x,x_1} i rapporti $\frac{\mathrm{A}_x}{q}$ e $\varepsilon_{n-1}\frac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_1}}$, e con a_{0,x_1} il valore di a_0 quando per x vi si pone x_1, e al tempo stesso osserviamo che a causa della (3) la espressione generale di Z_r data dalla (6) del § 516 può scriversi

$$(6)\quad \varepsilon_{n+1}\mathrm{Z}_r = \sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i(a_i z_r)^{(n-i)} = \sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i[(a_i-\alpha_i)z_r]^{(n-i)} = e^{\omega_r x}\sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i\frac{\left[(a_i-\alpha_i)e^{\omega_r x}\right]^{(n-i)}}{e^{\omega_r x}}\,,$$

avremo

$$(7)\quad \begin{cases} \overline{\mathrm{A}}_x = \dfrac{\mathrm{A}_x}{q} = \alpha_0\sum\limits_1^n{}_r\dfrac{1}{\varphi'(\omega_r)}e^{\sigma_r x}\left(c_r+\displaystyle\int_a^x \mathrm{X}_{x_1}e^{\omega_r x_1}dx_1\right), \\[2ex] v_{x,x_1} = \varepsilon_{n-1}\dfrac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_1}} = \dfrac{\alpha_0}{a_{0,x_1}}\sum\limits_1^n{}_s\dfrac{e^{\sigma_s(x-x_1)}}{\varphi'(\omega_s)}\sum\limits_0^n{}_i\dfrac{\varepsilon_i\left[(a_i-\alpha_i)e^{\omega_s x}\right]_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}}\,, \end{cases}$$

e così, sostituendo nella formola (2) si troverà per l'integrale y della nostra equazione (1)

$$(8)\quad y = \varepsilon_{n-1}\frac{e^{-\sigma x}}{a_{0,x}}\Big\{\overline{\mathrm{A}}_x + \int_a^x\overline{\mathrm{A}}_{x_1}v_{x,x_1}dx_1 + \int_a^x v_{x,x_1}dx_1\int_a^{x_1}\overline{\mathrm{A}}_{x_2}v_{x_1,x_2}dx_2 + \ldots +$$

$$+\int_a^x v_{x,x_1}dx_1\int_a^{x_1}v_{x_1,x_2}dx_2\int_a^{x_2}\ldots\int_a^{x_{m-2}}v_{x_{m-2},x_{m-1}}dx_{m-1}\int_a^{x_{m-1}}\overline{\mathrm{A}}_{x_m}v_{x_{m-1},x_m}dx_m + \ldots\Big\},$$

essendo $\overline{\mathrm{A}}_x$ e v_{x,x_1} e quindi in generale $\overline{\mathrm{A}}_{x_m}$ e v_{x_{m-1},x_m} determinati dalle formole precedenti (7); e quando X è diverso da zero, supponendo in questa le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (che figurano in A_x) tutte eguali a zero, si avrà un integrale particolare della equazione completa (1); mentre se $\mathrm{X}=0$ per ogni sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si avrà un integrale della equazione omogenea

$$(9)\qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0\,;$$

e in particolare prendendo successivamente, sempre quando $\mathrm{X}=0$, una delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ uguale ad uno e le altre uguali a zero, si avranno (§ 523) n integrali che costituiranno un sistema fondamentale della equazione stessa (9) pei valori di x in tutti gli intervalli nei quali i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono finiti e continui insieme alle loro derivate sino a quelle degli ordini $n, n-1, n-2, \ldots$ respettivamente, e a_0 è diverso da zero.

E si può notare che queste formole sono generali, e valgono comunque si prendano le costanti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ purchè diverse fra loro; talchè prendendo queste, e quindi anche le σ e σ_r, in modo particolare, si avranno espressioni speciali — sempre per l'integrale generale della (1) — che potranno dare luogo a conseguenze notevoli.

538. — Invece però di darsi avanti le costanti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, gioverà darsi i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che figurano nella equazione (3) della quale le stesse $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sono radici, o quelli della equazione (4) della quale la (3) viene ad essere la equazione caratteristica, e le $z_1, z_2, \dots, z_n$ vengono ad esserne integrali fondamentali; e gioverà scegliere i coefficienti stessi opportunamente in relazione colla equazione data (1) prendendoli cioè in modo che la equazione caratteristica (4) venga ad avere tutte le radici diseguali, e in modo anche che colla formola (8) si possano fare facilmente studii speciali intorno agli integrali della equazione data (1).

Così, considerando in particolare il caso delle equazioni (1) per le quali i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ al crescere indefinito di x, ad es. per valori positivi, tendano verso limiti determinati e finiti dei quali il primo (quello di a_0) sia anche diverso da zero, prendiamo questi limiti come valori dei coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che figurano nelle (3) e (4), nel supposto dapprima che per essi la equazione (3) venga ad avere le radici tutte diseguali, e indichiamo con $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ le loro differenze dai coefficienti corrispondenti, cioè poniamo

$$(10) \qquad a_0 = \alpha_0 + \bar{a}_0 \ , \ a_1 = \alpha_1 + \bar{a}_1 \ , \ a_2 = \alpha_2 + \bar{a}_2 , \ \dots , \ a_n = \alpha_n + \bar{a}_n ,$$

essendo $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ funzioni di x che tendono a zero col crescere indefinito di x, e che per ogni valore finito di x al di là di un certo numero c sono derivabili come le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ almeno fino agli ordini $n, n-1, n-2, \dots$ respettivamente, e ammettiamo che *anche queste derivate tendano a zero al crescere indefinito di n.*

In altri termini ammettiamo che il primo membro della equazione data (1) o la sua corrispondente omogenea (9) dia luogo a una *equazione limite* d'ordine n per $x = +\infty$

$$(11) \qquad \alpha_0 y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \alpha_2 y^{(n-2)} + \dots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = 0 ,$$

(che abbia cioè per coefficienti i limiti, che supponiamo esistere, di quelli del primo membro della equazione data), e le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ *siano un sistema d'integrali fondamentali* $e^{\omega_1 x}, e^{\omega_2 x}, \dots, e^{\omega_n x}$ *della equazione aggiunta* di questa equazione limite (11), che verrà ad essere appunto la (4), supposto

dapprima che per questa aggiunta la equazione caratteristica (3) venga ad avere le radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ tutte diseguali, e supposto inoltre che le funzioni $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ che rappresentano le differenze $a_0 - \alpha_0, a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2, \dots, a_n - \alpha_n$ abbiano le proprietà indicate sopra.

Allora, considerando nella (8) il caso di $\alpha = +\infty$, con che dovranno esser soddisfatte le condizioni dei §§ 524 e seg. o altre simili, potremo colla formola stessa studiare il modo di comportarsi al crescere indefinito di x degli integrali di quelle classi di equazioni (1) per le quali i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ soddisfano alle condizioni anzidette, o come si dice trovare i *valori asintotici* di quegli integrali per x crescente all'infinito (*).

539. — Incominciamo infatti, per semplicità, a considerare il caso delle equazioni omogenee (9), cioè supponiamo che sia $X = 0$ nella equazione data (1).

Osservando che nelle somme

$$(12) \qquad \sum_0^n{}_i \frac{\varepsilon_i \left[(a_i - \alpha_i) e^{\omega_s x}\right]_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}} , \quad \text{o} \quad \sum_1^n \frac{\varepsilon_i (\bar{a}_i e^{\omega_s x})_{x_1}^{(n-i)}}{e^{\omega_s x_1}} ,$$

che figurano nelle espressioni (7) di v_{x, x_1}, le esponenziali $e^{\omega_s x_1}$, a calcoli fatti vengono a sparire, si vede che al crescere indefinito di x queste somme tenderanno a zero come vi tendono le $\bar{a}_i$ e le loro derivate; e quindi, fatta astra-

---

(*) Invece di studiare il modo di comportarsi degli integrali della equazione data (1) al crescere indefinito della variabile x, potremmo, lasciando α finito, studiare il loro modo di comportarsi coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α, e per questo basterebbe supporre che i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ della (1) fossero finiti continui e derivabili anche per $x = \alpha$, e a_0 non fosse zero e che i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ delle (3) e (4) fossero i valori degli stessi coefficienti per $x = \alpha$.

E con queste condizioni, volendo ancora ammettere dapprima che le radici della equazione (3) dovessero risultare disuguali, il punto $x = \alpha$ potrebbe essere uno qualunque di quei punti x pei quali, oltre ad essere regolari i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ nell'intorno dei punti stessi, e all'essere, in essi e nel loro intorno, a_0 diverso da zero, si ha altresì che la equazione

$$\Phi(x, \omega) = a_0 \omega^n + \varepsilon_1 a_1 \omega^{n-1} + \varepsilon_2 a_2 \omega^{n-2} + \dots + \varepsilon_{n-1} a_{n-1} \omega + \varepsilon_n a_n = 0$$

che è la caratteristica di quella che viene dalla (1) cambiandovi i segni alternativamente nel primo membro, e rendendola omogenea se già non lo è col farvi il secondo membro uguale a zero, non ha radici uguali, cioè non si ha $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = 0$; o in altri termini sono esclusi quei punti che in Analisi si chiamano i *punti critici* della funzione ω di x definita da questa equazione, quando si considerino oltre ai valori reali anche i valori complessi di x e ω, ed escludendo sempre anche i punti x pei quali $a_0 = 0$, salvo per questi a tenere conto delle considerazioni fatte nei §§ 524 e successivi.

zione da alcuni fattori sempre finiti, si può dire che i varii termini delle v_{x_{m-1}, x_m} si comporteranno come le esponenziali $e^{\sigma_s(x_{m-1}-x_m)}$ moltiplicate per le somme stesse (12), mentre i singoli termini delle $\overline{A}_{x_m}$ si comporteranno come quelle esponenziali $e^{\omega_r x_m}$ che figurano nei termini stessi (*); e per conseguenza infine i varii termini dei prodotti $A_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}$ che figurano sotto gli integrali nei varii termini della (8) si comporteranno come le esponenziali $e^{\sigma_s x_{m-1}} e^{(\omega_s - \omega_r) x_m}$ moltiplicate per le somme (12) nelle quali sia cambiato x_1 in x_m.

E siccome le radici $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ della (4) potranno essere reali o complesse, evidentemente nelle esponenziali qui indicate le radici reali e così le parti reali di quelle complesse, quando non si distruggano nelle quantità σ_s o nelle differenze $\omega_r - \omega_s$ figureranno in esponenziali reali della forma $e^{\lambda x}$ con λ reale, e quindi a seconda dei segni delle quantità λ daranno luogo a esponenziali che crescono all'infinito o che tendono a zero al crescere indefinito di x, mentre le parti immaginarie moltiplicate per la variabile verranno a figurare soltanto sotto seni e coseni.

540. — Queste considerazioni fanno già comprendere che il verificarsi o no delle condizioni generali dei §§ 524 e 525 o di quelle più particolari del § 527, e l'applicabilità quindi della formola (8) per la determinazione dell'integrale y della (9) anche nel caso di $\alpha = \infty$, dipenderà dal modo di tendere a zero delle quantità $\overline{a}_i$ e delle loro derivate fino a quelle di ordine $n-i$ col crescere indefinito di x, e anche dalla natura delle radici $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ della (4), e più specialmente da queste radici stesse quando sono reali, e dalle loro parti reali quando sono complesse.

Ciò premesso, s'indichino in generale con $\mu_r + i\nu_r$ le radici ω_r della (4), comprendendo in questa espressione anche le radici reali (per le quali sarà $\nu_r = 0$); e distinguiamo il caso in cui tutte le radici hanno la stessa parte reale, come avverrà in particolare quando le radici saranno tutte puramente immaginarie (una potendo anche essere nulla); e il caso in cui questa parte reale non è la stessa per tutte le radici.

Prendendo ora a considerare il primo caso, e indicando con μ la parte reale comune delle varie radici, si osserverà per prima cosa che allora nelle esponenziali $e^{(\omega_s - \omega_r) x_m}$ che compariscono nei varii termini delle v_{x_{m-1}, x_m} gli esponenti $(\omega_s - \omega_r) x_m$ saranno nulli per $r = s$, e saranno puramente immaginarii pei valori di r e s diversi fra loro; e quindi queste esponenziali

(*) Naturalmente nel valore di A_{x_m} mancheranno i termini corrispondenti a quei valori di r pei quali sia preso $c_r = 0$.

non porteranno in campo che quantità finite, non essendo esse altro che $\cos \frac{\omega_s - \omega_r}{i} x_m + i \operatorname{sen} \frac{\omega_s - \omega_r}{i} x_m$, e il loro modulo sarà l'unità.

S'indichi poi con Ω il massimo modulo dei coefficienti $\frac{c_r}{\varphi'(\omega_r)}$ che figurano nei termini delle $\overline{A}_{x_m}$ e che saranno al più in numero di n (*), e si supponga che le funzioni $\overline{a}_i$ e le loro derivate al crescere indefinito di x tendano a zero di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ una funzione *diversa da zero* e positiva di x, come ad esempio (§ 112 e seg. [pag. 73]) una delle funzioni $\frac{1}{x^\nu}$, $\frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}$, $\frac{1}{\log x (\log^2 x)^{1+\nu}}, \dots$ con $\nu > 0$, per le quali la funzione $\frac{\tau(x)}{x}$ viene integrabile fino all'infinito; con chè posto $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx = \tau_1(x)$, la $\tau_1(x)$ è una funzione positiva di x che col crescere indefinito di x tende a zero decrescendo continuamente.

Allora, considerando come costituenti ciascuna un termine solo le varie somme (12) nelle quali sia cambiato x_1 in x_m, e indicando con Ω_1 un altro numero positivo che sarà certamente finito, dalla seconda delle (7) si vede che il valore di v_{x_{m-1}, x_m} sarà composto di n termini ciascuno dei quali, quando si faccia astrazione dal fattore $e^{\sigma_s(x_{m-1}-x_m)}$ che vi figura, avrà un modulo che sarà inferiore a $\Omega_1 \frac{\tau(x_m)}{x_m}$; e quindi considerando ora i varii termini di $\overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}$ si vede che essi saranno al più n^2 e ciascuno avrà un modulo inferiore a quello di $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_s x_{m-1}} \frac{\tau(x_m)}{x_m}$, ciò che porta che il modulo dell'integrale $\int_{a_{m-1}}^\infty \overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m} dx_m$ sarà inferiore a quello di $n^2 \Omega\Omega_1 e^{\sigma_0 x_{m-1}} \tau_1(x_{m-1})$ essendo σ_0 una qualunque delle somme $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ le quali evidentemente hanno tutte la stessa parte reale $(n-1)\mu$.

Di qui risulta subito che il modulo dell'integrale doppio

$$\int_{x_{m-2}}^\infty v_{x_{m-2}, x_{m-1}} dx_{m-1} \int_{x_{m-1}}^\infty \overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m} dx_m$$

(*) Nel caso che ora consideriamo le costanti c_r potranno essere prese comunque e l'integrale potrà essere l'integrale generale, e quindi il numero dei termini di A_{x_m} potrà anche essere appunto n.

non sarà superiore a quello di $n^3\Omega\Omega_1^2 e^{\sigma_0 x_{m-2}}\int_{x_{m-2}}^{\infty}\frac{\tau(x_{m-1})\,\tau_1(x_{m-1})}{x_{m-1}}\,dx_{m-1}$; e così continuando, si vede infine che il modulo del termine generale del secondo membro della formola (8) nella quale sia fatto $X = 0$, sarà inferiore a quello di

$$n^{m+1}\Omega\Omega_1^m e^{(\sigma_0-\sigma)x}\int_x^{\infty}\frac{\tau(x_1)}{x_1}dx_1\int_{x_1}^{\infty}\frac{\tau(x_2)}{x_2}dx_2\int_{x_2}^{\infty}\cdots\int_{x_{m-1}}^{\infty}\frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}}dx_{m-1}\int_{x_{m-1}}^{\infty}\frac{\tau(x_m)}{x_m}dx_m\,.$$

Ne segue che fatta astrazione dal fattore reale comune $e^{-\mu x}$, se ad es. $\tau(x)$, come spesso avverrà, sarà una delle funzioni $\frac{1}{x^{\nu}}, \frac{1}{(\log x)^{1+\nu}}, \frac{1}{\log x\,(\log^2 x)^{1+\nu}},\dots,$ il modulo del detto termine generale sarà inferiore a quello del termine di una serie esponenziale, mentre in generale, indipendentemente dall'aversi o no per $\tau(x)$ queste particolarità, si vede che in ogni caso il modulo dello stesso termine generale sarà inferiore al numero $n^{m+1}\Omega\Omega_1^m\tau_1(x)^m$ ovvero a $n\Omega\,(n\Omega_1\tau_1(x))^m$ che per x superiore a un certo numero sufficientemente grande c è sempre inferiore a quello di una progressione geometrica colla ragione minore di uno; e quindi sotto le attuali ipotesi, astrazione fatta sempre dal fattore comune $e^{-\mu x}$, la serie che figura nella espressione (8) viene ad essere convergente in ugual grado rispetto ad x in ogni intervallo finito al di là del punto c.

Tenendo dunque conto ora anche del detto fattore $e^{-\mu x}$ e moltiplicando tutto per Z_r essendo Z_r dato dalla (6), si vede che la esponenziale reale $e^{-\mu x}$ viene a sparire nel prodotto yZ_r e la serie corrispondente conserva la convergenza in ugual grado e ad essa può applicarsi la integrazione fra c e ∞, e quindi l'integrale $\int_x^{\infty} yZ_r\,dx$ ha un significato per ogni valore di x non inferiore a c; e similmente nei singoli termini della serie (8) nei quali a calcoli fatti sia cambiato x in x_1 sparisce l'esponenziale $e^{-\mu x_1}$ quando si moltiplicano per $\bar{q}_{x,x_1}$, e la serie corrispondente è convergente in ugual grado rispetto ad x_1; e tutto questo, combinato con quello che si disse in fine della nota a pag. 730, basta ora evidentemente per assicurarci che il teorema del § 524 rimane applicabile.

Da ciò risulta che, sotto le condizioni poste, la formola (8) nella quale sia fatto $X=0$, considerata anche per $\alpha=\infty$, rappresenta l'integrale y della equazione omogenea (9) pei valori di x superiori a un numero sufficientemente grande c; e siccome $a_{0,x}$ al crescere indefinito di x tende verso α_0, e si ha $\frac{\alpha_0}{a_{0,x}}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \frac{\bar{a}_0}{\alpha_0+\bar{a}_0}\bar{A}_x$, e $\bar{a}_0$ diviene infinitesima di ordine non

inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x}$ e quindi neppure a quello dell'integrale $\int_x^{\infty}\frac{\tau(x)}{x}dx$ (*) che può considerarsi come fattore in tutti i termini dopo il primo della formola (8), si conclude che, sotto le fatte ipotesi, pei valori di x al di là di un certo numero c si ha

$$y = c'_1 e^{-\omega_1 x} + c'_2 e^{-\omega_2 x} + \dots + c'_n e^{-\omega_n x} + \theta\,,$$

(*) Se $f(x)$ è una funzione che al crescere indefinito di x tende a zero e almeno da un certo valore di x in poi ammette una derivata determinata, indicando con ν un numero diverso da zero e positivo e con x' un numero superiore ad x, avremo per una formola nota

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'^{-\nu}-x^{-\nu}} = -\frac{f'(p)}{\nu p^{-\nu-1}}\,,$$

essendo p un numero compreso fra x e x', e quindi *ammettendo inoltre che $f(x)$ per x grandissimo non passi mai per zero* avremo anche

$$x^{\nu}f(x)\left\{\frac{f(x')}{f(x)}-1\right\} = \frac{1}{\nu}p^{\nu+1}f'(p)\left\{1-\left(\frac{x'}{x}\right)^{-\nu}\right\},$$

e se x' sarà molto grande in confronto ad x si potrà scrivere

$$(a)\qquad x^{\nu}f(x) = -\frac{(1+\omega)}{\nu}p^{\nu+1}f'(p)\,,$$

essendo ω un numero piccolo in valore assoluto quanto si vuole.

Inoltre per la formola degli accrescimenti finiti avremo anche

$$f(x')-f(x) = (x'-x)\,f'(p_1) = \left(1-\frac{x}{x'}\right)x'f'(p_1)\,,$$

e da questa sotto le stesse condizioni per $f(x)$ trarremo l'altra

$$(b)\qquad f(x) = -(1+\omega_1)\,x'f'(p_1)\,,$$

con ω_1 piccolo quanto si vuole, e p_1 numero compreso fra x e x'.

Dalla prima di queste formole, cioè dalla (a), si vede che se al crescere indefinito di x la $f'(x)$ diviene infinitesima precisamente dell'ordine $\nu+1$, la funzione primitiva $f(x)$ lo diviene dell'ordine ν inferiore di una unità; e per la seconda, cioè per la (b), si può dire soltanto in modo più generale che *l'ordine d'infinitesimo di $f'(x)$ non sarà inferiore a quello di $f(x)$*; ed è per questo appunto che affermiamo nel testo che l'ordine d'infinitesimo di $\frac{\tau(x)}{x}$ non è inferiore a quello dell'integrale $\int_x^{\infty}\frac{\tau(x)}{x}dx$.

Tutto questo però per le funzioni $f(x)$ che (come abbiamo supposto) al crescere indefinito di x tendono a zero senza passare mai per zero; che altrimenti l'ordine d'infinitesimo di $f'(x)$ potrebbe essere inferiore a quello di $f(x)$, come accade ad esempio per la funzione $\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{3/2}}$.

dove in generale abbiamo indicato con c'_r i rapporti $\varepsilon_{n-1}\dfrac{c_r}{\varphi'(\omega_r)}$, e con θ una somma di termini simili agli altri, ma coi coefficienti variabili e tendenti tutti a zero di un ordine non inferiore a quello di $\tau_1(x)=\displaystyle\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\,dx$, per modo cioè che si può scrivere $\theta=\varepsilon\, e^{-\mu x}$ con $\varepsilon=g\displaystyle\int_x^\infty\frac{\tau(x)}{x}\,dx$, essendo g una quantità sempre numericamente inferiore a un numero finito (che potrà anche tendere a zero) e μ la parte reale comune delle varie radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ della equazione (4).

E si può notare che, come fermandosi a fare uno studio particolareggiato del primo termine della formola (8) siamo giunti alla formola precedente che dà completamente il primo termine $c'e^{-\omega_1 x}+c'_2 e^{-\omega_2 x}+\dots+c'_n e^{-\omega_n x}$ o un primo valore approssimato dell'integrale generale della nostra equazione (9), così facendo cogli stessi processi uno studio particolareggiato anche di uno o più dei termini seguenti della stessa formola (8) si potrebbero facilmente calcolare anche altri termini e quindi anche altri valori approssimati quanti si vuole dello stesso integrale.

541. — Passiamo ora a considerare il caso in cui le radici $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ della (4) non hanno tutte la stessa parte reale; e indicando allora con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$ (con $1\leq h<n$) quelle (reali o no) che hanno per parte reale la massima delle parti reali stesse che indicheremo pure con μ, limitiamoci a cercare un integrale particolare della (9), col supporre cioè ora che le costanti $c_{h+1}, c_{h+2}, \dots, c_n$ siano tutte nulle e le altre $c_1, c_2, \dots, c_h$ restino arbitrarie.

Allora nelle somme che compongono le $\overline{A}_{x_m}$ vi saranno solo gli h termini corrispondenti ai valori $1, 2, \dots, h$ di r, e nei prodotti $\overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}$ compariranno soltanto nh esponenziali della forma $e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\sigma_r-\sigma_s)x_m}$ ovvero $e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\omega_s-\omega_r)x_m}$; e poichè nella seconda esponenziale $e^{(\omega_s-\omega_r)x_m}$ pei valori $1, 2, \dots, h$ di s un esponente sarà nullo e gli altri avranno nulla la parte reale, così questa esponenziale per gli indicati valori $1, 2, \dots, h$ di s si manterrà sempre finita come nel caso precedente, e avrà per modulo l'unità. Considerata invece pei valori $h+1, h+2, \dots, n$ di s, la stessa esponenziale al crescere indefinito di x per valori positivi tenderà a zero d'ordine esponenziale perchè in essa l'esponente avrà la parte reale negativa che crescerà indefinitamente con x in valore assoluto.

Poste dunque per le $\bar{a}_i$ e per le loro derivate le stesse condizioni che si

avevano nel caso precedente, e conservati ancora gli stessi significati a Ω e a Ω_1, si vede subito che nell'integrale $\displaystyle\int_{x_{m-1}}^\infty \overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}\, dx_m$ i termini corrispondenti a $s=1, 2, \dots, h$ che sono in numero di h^2 avranno un modulo non superiore a quello di $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_r x_{m-1}}\tau_1(x_{m-1})$ e *a fortiori* non superiore a quello di $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_r x_{m-1}}\tau_1(x)$ perchè essendo $x_{m-1}\geq x$ si ha $\tau_1(x_{m-1})\leq\tau_1(x)$; mentre per quelli corrispondenti agli altri valori $h+1, h+2, \dots, n$ di s che sono in numero di $h(n-h)$, coll'osservare che allora il modulo della esponenziale $e^{(\sigma_r-\sigma_s)x_m}$ o $e^{(\omega_s-\omega_r)x_m}$ và continuamente diminuendo coll'andare di x_m da x_{m-1} a ∞, perchè la parte reale di $\omega_s-\omega_r$ è negativa, si vede che essi avranno un modulo inferiore a quello di $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_s x_{m-1}}\, e^{(\sigma_r-\sigma_s)x_{m-1}}\displaystyle\int_{x_{m-1}}^\infty\frac{\tau(x_m)}{x_m}\,dx$ ovvero $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_r x_{m-1}}\tau_1(x_{m-1})$, e anche a fortiori, per essere $\tau_1(x_{m-1})\leq\tau_1(x)$, inferiore a quello di $\Omega\Omega_1 e^{\sigma_r x_{m-1}}\tau_1(x)$: e quindi evidentemente quell'integrale si potrà intendere posto sotto la stessa forma $\displaystyle\sum_1^h \gamma_{r,1}\, e^{\sigma_r x_{m-1}}$ che si ha per $\overline{A}_{x_{m-1}}$, essendo il modulo di $\gamma_{r,1}$ non superiore a $n\Omega\Omega_1\tau_1(x)$.

Ne segue che per l'integrale doppio $\displaystyle\int_{x_{m-2}}^\infty v_{x_{m-2}, x_{m-1}}\,dx_{m-1}\int_{x_{m-1}}^\infty \overline{A}_{x_m} v_{x_{m-1}, x_m}\,dx_m$ potranno ora ripetersi le stesse considerazioni, e si troverà così che esso può intendersi posto sotto la forma $\displaystyle\sum_1^h\gamma_{r,2}\, e^{\sigma_r x_{m-2}}$, essendo i moduli della $\gamma_{r,2}$ inferiori a $n\ (n\Omega\Omega_1\tau_1(x))\,\Omega_1\tau_1(x)$ ovvero a $\Omega(n\Omega_1\tau_1(x))^2$, e così continuando si giunge a trovare che il termine generale del secondo membro della (8) nel quale sia fatto $X=0$ si potrà intendere posto sotto la forma $e^{-\sigma x}\displaystyle\sum_1^h\gamma_{r,m}\, e^{\sigma_r x}$, ovvero $\displaystyle\sum_1^h\gamma_{r,m}\, e^{-\omega_r x}$ o anche infine $e^{-\mu x}\displaystyle\sum_1^h\gamma_{r,m}\, e^{-i\nu_r x}$, essendo i moduli delle $\gamma_{r,m}$ non superiori a $\Omega(n\,\Omega_1\tau_1(x))^m$.

Di qui si vede che, astrazione fatta dal fattore comune $e^{-\mu x}$, i moduli dei termini della stessa serie (8) pei valori di x superiori a un certo numero c saranno inferiori a quelli di una progressione geometrica colla ragione minore della unità, e quando $\tau(x)$ fosse una delle funzioni $\dfrac{1}{x^\nu}$, $\dfrac{1}{(\log x)^{1+\nu}}$, $\dfrac{1}{\log x\,(\log^2 x)^{1+\nu}}$ ... si potrebbe anche vedere, come nel caso precedente, che sono inferiori a quelli di una serie esponenziale; e ora ripetendo i ragionamenti fatti pel caso precedente si conclude che sotto le fatte ipotesi rispetto alle quantità $\bar{a}_i$, se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ con $(1 \leq h < n)$ saranno le radici della equazione che hanno la parte reale massima μ, vi sarà sempre un integrale particolare della (9) con h costanti arbitrarie che per valori sufficientemente grandi di x prenderà la forma

$$y = c'_1 e^{-\omega_1 x} + c'_2 e^{-\omega_2 x} + \ldots + c'_h e^{-\omega_h x} + \eta e^{-\mu x},$$

essendo $\eta = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$, con g quantità il cui modulo è sempre inferiore a un numero finito, e le $c'_1, c'_2, \ldots, c'_h$ essendo h costanti arbitrarie.

D'altra parte è da osservare che se si cambia ω in $-\omega$ nella (3) essa si trasforma subito nella equazione caratteristica della equazione limite (11) della (9) o, come diremo per abbreviare, nella *equazione caratteristica limite* della equazione stessa data (9), e le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vengono ad essere $-\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_n$ per modo che le funzioni

$$y_0 = c'_1 e^{-\omega_1 x} + c'_2 e^{-\omega_2 x} + \ldots + c'_h e^{-\omega_h x},$$

con $h = n$ nel primo dei casi considerati sopra, e $1 \leq h < n$ nel secondo corrispondono respettivamente all'integrale generale, o a un integrale particolare, con h costanti arbitrarie, della equazione limite (11); e per questo riassumendo si può enunciare ora il teorema generale seguente:

« Se la equazione lineare omogenea data (9) d'ordine n ha una equa-« zione limite (11) per $x = \infty$ pure di ordine n, e se le differenze $\bar{a}_i = a_i - \alpha_i$ « e le loro derivate fino a quelle dell'ordine $n - i$ al crescere indefinito di x « tendono a zero di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ « una funzione diversa da zero e positiva tale che l'integrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$ venga « ad avere un significato, e se al tempo stesso le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della equa-« zione caratteristica limite della stessa equazione *sono tutte diseguali*, allora

« *a)* se queste radici avranno tutte la stessa parte reale λ (come avviene « ad es. quando sono tutte puramente immaginarie e una al più di essa è « uguale a zero), l'integrale generale y della equazione data (9) pei valori « di x superiori a un certo numero sufficientemente grande c prenderà la « forma

$$y = y_0 + \eta e^{\lambda x}$$

« dove y_0 è l'integrale generale della equazione limite, e $\eta = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$ « essendo g una quantità il cui modulo è sempre inferiore a un numero « finito.

« *b)* se le radici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della stessa equazione caratteristica limite « della (9) non avranno tutte la stessa parte reale, e di esse le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ « (con $1 \leq h < n$) saranno quelle che hanno la parte reale *minima* λ, vi « sarà un integrale particolare y della (9) con h costanti arbitrarie che pei « valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma

$$y = y_0 + \eta e^{\lambda x},$$

« dove η ha lo stesso significato che sopra, e y_0 è l'integrale particolare « $c'_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c'_h e^{\lambda_h x}$ della equazione limite ».

La funzione y_0 nei due casi sarà il *valore asintotico* cercato dell'integrale generale o particolare corrispondente della equazione data, talchè noi possiamo dire ora che nei casi considerati il valore asintotico dell'integrale « generale o particolare y della equazione data per x crescente all'infinito « sarà precisamente l'integrale generale o particolare corrispondente y_0 della « equazione limite ».

E anche qui si può osservare, come osservammo in fine del paragrafo precedente, che facendo un esame particolareggiato anche di uno o più termini successivi della (8) dopo il primo, si potrebbero calcolare nuovi termini e quindi nuovi valori approssimati dell'integrale generale o particolare y che qui si considera della equazione (9).

542. — Osservando poi che negli esponenti delle esponenziali che figurano nella y_0 la parte reale è sempre uguale a λx, e delle parti immaginarie $i\nu_r x$ se, come abbiamo sempre supposto, la equazione data è a coefficienti reali, una soltanto può essere zero (perchè le radici devono essere tutte diseguali) e le altre sono due a due uguali e di segno contrario, si vede subito che, prendendo complesse e coniugate le costanti che moltiplicano le esponenziali coniugate corrispondenti per avere integrali reali, la y_0 nei due casi *a)* e *b)* testè indicati si porrà sotto la forma $\sum e^{\lambda x}(\gamma_r \cos \nu_r x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r x)$ essendo le γ_r e δ_r costanti reali arbitrarie; e per l'integrale corrispondente y della (9) avremo

$$\frac{y}{e^{\lambda x}} = \sum (\gamma_r \cos \nu_r x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r x) + \eta,$$

essendo ancora $\eta_1 = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$; cioè il rapporto $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ per valori grandissimi di x si comporterà come una somma di seni e coseni nella quale però un termine potrà talvolta ridursi a una costante, perchè una delle ν_r potrà essere zero. E per le osservazioni che abbiamo fatte in fine dei due paragrafi precedenti, valendosi della formola (8) si potranno determinare anche tanti termini quanti si vorranno della parte η_1 che tende a zero al crescere indefinito di x.

543. — Osservando poi che, come si disse al § 531, alla serie (8) può anche applicarsi la derivazione termine a termine, si vede che sarà $y' = y'_0 + \eta'_1 e^{\lambda x}$, essendo η'_1 un'altra quantità che come η_1 al crescere indefinito di x tende essa pure a zero di un ordine non inferiore a quello di $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$. E la derivata di $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ per valori grandissimi di x si comporterà essa pure come una somma di *seni* e *coseni*.

E siccome ogni termine $\gamma_r \cos \nu_r x + \delta_r \operatorname{sen} \nu_r x$ può porsi sotto la forma $\gamma'_r \cos(\nu_r x + \delta'_r)$ essendo γ'_r e δ'_r nuove costanti arbitrarie si potrà anche scrivere

$$\frac{y}{e^{\lambda x}} = \sum \gamma'_r \cos(\nu_r x + \delta'_r) + \eta_1, \quad \left(\frac{y}{e^{\lambda x}}\right)' = -\sum \gamma'_r \nu_r \operatorname{sen}(\nu_r x + \delta'_r) + \eta'_1,$$

per modo quindi che, col crescere indefinito di x, ogni integrale particolare $y_k = e^{\lambda x} \{ \gamma'_k \cos(\nu_k x + \delta'_k) + \eta_{1k} \}$ che si ottenga col prendere zero tutte le costanti γ'_r uguali a zero all'infuori di una γ_k, si annullerà infinite volte oscillando continuamente col passare dal positivo al negativo e viceversa, precisamente come le funzioni $\cos(\nu_k x + \delta'_k)$, e le distanze fra gli zeri successivi tenderanno verso $\frac{\pi}{\nu_k}$, e lo stesso accadrà per la derivata del rapporto corrispondente $\frac{y_k}{e^{\lambda x}}$, tendendo inoltre gli zeri di questa derivata a venire a cadere nei punti medii fra gli zeri dell'integrale.

Particolarità simili potrebbero trovarsi per le derivate di ordine superiore.

E nel caso particolare che la equazione caratteristica limite della equazione data (9) abbia tutte le radici puramente immaginarie e una al più uguale a zero, o almeno ne abbia alcune puramente immaginarie e una al più eguale a zero e le altre abbiano la parte reale positiva e la parte immaginaria zero o no, allora siccome in questo caso sarà $\lambda = 0$, i risultati precedenti, anzichè pei rapporti $\frac{y}{e^{\lambda x}}$ e per le loro derivate, varranno senz'altro per gli integrali corrispondenti della equazione data e per le loro derivate.

I risultati qui esposti, limitatamente al caso delle equazioni lineari e omogenee del second'ordine, furono dati dal sig. Kneser nei vol. 116 e 117 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik di Crelle*.

544. — Questi risultati generali dànno il modo di comportarsi, per valori grandissimi della variabile, degli integrali di quelle classi di equazioni differenziali lineari e omogenee (9) di ordine n che per $x = \infty$ hanno una equazione limite (11) che è pure di ordine n e per le quali, oltre ad essere soddisfatta la condizione che la loro equazione caratteristica limite ha tutte le sue radici diseguali, è soddisfatta anche l'altra che i loro coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tendono verso i loro limiti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in modo che le loro differenze $\bar{a}_i = a_i - \alpha_i$ da questi limiti e le loro derivate tendano a zero di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x}$, essendo $\tau(x)$ una funzione diversa da zero e positiva tale che l'integrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$ abbia un significato. E ciò per gli integrali generali delle stesse equazioni (9), o soltanto per loro integrali particolari secondochè saremo nel caso *a)* o nel caso *b)* di quelli dei quali è parola nel teorema enunciato in fine del § 541.

Questi risultati poi nel caso *a)* si estendono con tutta facilità e con leggiere modificazioni anche alle equazioni non omogenee (1) quando la funzione X è tale che gli integrali $\int_x^\infty X e^{-\lambda_r x} dx$ hanno un significato per ogni radice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della equazione caratteristica limite relativa alla equazione omogenea corrispondente.

545. — Bene spesso però le due condizioni qui indicate, quella cioè di essere tutte diseguali le radici della equazione caratteristica limite, e l'altra che le differenze $\bar{a}_i$ tendano a zero insieme alle loro derivate al crescere indefinito di x almeno come una delle funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, non saranno soddisfatte; e allora per potere dire se e in quanto i risultati precedenti siano applicabili, converrà evidentemente fare altre considerazioni.

Tratteremo poi in modo speciale il caso in cui la equazione caratteristica limite ha anche radici eguali; e intanto osserveremo che quando l'una o l'altra delle due condizioni suindicate o tutte e due non sieno soddisfatte, alla equazione data con opportune trasformazioni potranno in molti casi sostituirsene altre per le quali le condizioni medesime vengono a verificarsi, e allora a queste nuove equazioni saranno applicabili i risultati precedenti.

Fra queste trasformazioni quelle che più naturalmente si presentano sono le due considerate ai §§ 497 e seg. [pag. 695 e seg.], l'una delle quali consiste nel cambiare la funzione y in un'altra u colla formola $y=tu$ prendendo per t una funzione conveniente di x, e l'altra consiste nel fare un cambiamento adattato della variabile indipendente x.

Così ad es. se, essendo o no soddisfatta la condizione che la equazione caratteristica limite abbia le sue radici diseguali, si troverà che la condizione relativa ai coefficienti a_i non è soddisfatta altro che per alcuni di essi, allora si potrà osservare prima di tutto che ponendo $y=tu$, e calcolando le varie derivate di y, la equazione data (9) si trasformerà nell'altra

$$l_0u^{(n)}+l_1u^{(n-1)}+l_2u^{(n-2)}+\ldots+l_{n-1}u'+l_nu=0,$$

nella quale si avrà $l_0=a_0t$, e in generale sarà

$$l_i=n_ia_0t^{(i)}+(n-1)_{i-1}a_1t^{(i-1)}+(n-2)_{i-2}a_2t^{(i-2)}+\ldots+(n-i+1)_1a_{i-1}t'+(n-i)_0a_it;$$

e se ad es. si determinerà t in modo che si annulli il coefficiente l_1 di $u^{(n-1)}$, cioè se si prenderà per t la funzione che soddisfa alla equazione $l_1=na_0t'+a_1t=0$ la quale ci dà $t'=-\frac{a_1}{na_0}t$, o $t=e^{-\int\frac{a_1}{na_0}dx}$, basterà intendere che siano calcolate successivamente le varie derivate di t colle formole

$$t'=-\frac{a_1}{na_0}t,\quad t''=\left\{\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^2-\left(\frac{a_1}{na_0}\right)'\right\}t,\quad t'''=\left\{-\left(\frac{a_1}{na_0}\right)^3+3\frac{a_1}{na_0}\left(\frac{a_1}{na_0}\right)'-\left(\frac{a_1}{na_0}\right)''\right\}t,\ \ldots$$

per vedere subito che la equazione precedente in u viene tutta divisibile per t; e effettuata questa divisione i coefficienti della stessa equazione vengono tutti espressi sotto forma intera per quelli della equazione data e pel rapporto $\frac{a_1}{na_0}$ e per le derivate di questo rapporto.

E quindi se ad es. sarà soltanto pel coefficiente a_1 della (9) o pel rapporto $\frac{a_1}{a_0}$ che non si trovi soddisfatta la condizione voluta, perchè si abbia

$$\frac{a_1}{na_0}=\frac{\alpha_1}{n\alpha_0}+\frac{\mu}{x^\nu},$$

essendo ν un numero fisso e positivo non superiore ad uno, e μ una quantità che è una costante diversa da zero o che per $x=\infty$ ha un limite determinato μ_0 pure diverso da zero e ha una derivata che per $x=\infty$ diviene infinitesima almeno del prim'ordine, allora *se sarà* $\alpha_1=0$ *e al tempo stesso si avrà* $\nu>\frac{1}{2}$, evidentemente tutte le derivate di t dopo la prima oltre al fattore t porteranno nei varii termini il divisore x^{1+p} con p diverso da zero e positivo, mentre la prima porterà soltanto il divisore x^ν, e quindi i coefficienti della nuova equazione in u soddisfaranno tutti alle condizioni volute; e allora per potere applicare i risultati precedenti resterà solo a vedersi se la equazione caratteristica limite relativa a questa equazione in u avrà o no tutte le radici diseguali.

Se poi α_1 sarà diverso da zero, allora per le derivate di t non si avranno più queste particolarità, e queste conclusioni non potranno più trarsi; però in casi speciali anche quando α_1 sia diverso da zero potranno venire soddisfatte le condizioni volute pei coefficienti della nuova equazione in u.

Così ad es. per la equazione del second'ordine $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, siccome calcolando il valore di l_2 si trova $l_2=\left\{\frac{a_2}{a_0}-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)'\right\}a_0$, si vede che la nuova equazione in u

$$(13)\qquad u''+\left\{\frac{a_2}{a_0}-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)'\right\}u=0$$

non soddisfarà alle condizioni volute, quando vi soddisfino a_0 e a_2 o $\frac{a_2}{a_0}$ e sia $\frac{1}{2}<\nu\leq1$, a meno che non si abbia ancora $\alpha_1=0$; ma se a_0 e a_2 o $\frac{a_2}{a_0}$ non soddisfaranno alle dette condizioni, allora basterà ad es. che sia $\frac{a_2}{a_0}-\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2=\frac{\tau(x)}{x}+k$ essendo k una costante qualsiasi diversa da zero, per essere certi che la equazione in u soddisfa alle condizioni che si richiedono per l'applicabilità dei processi precedenti compresa quella che la sua equazione caratteristica limite abbia le due radici diseguali; e questo anche senza richiedere che sia $\nu>\frac{1}{2}$, ma ammettendo semplicemente che ν sia un numero diverso da zero e positivo qualsiasi.

546. — E così nel caso di $\alpha_1=0$, cioè di $\frac{a_1}{na_0}=\frac{\mu}{x^\nu}$ e quindi $t=e^{-\int\frac{\mu dx}{x^\nu}}$, mentre gli altri coefficienti $a_0, a_2, a_3, \ldots, a_n$ della equazione data (9) soddisfano tutti alle solite condizioni, se avverrà che ponendo $y=e^{-\int\frac{\mu dx}{x^\nu}}u$ la nuova equazione in u abbia una equazione caratteristica limite per $x=\infty$

le cui radici siano tutte diseguali, allora l'integrale generale o alcuni integrali particolari della equazione (9) stessa potranno porsi sotto la forma

$$e^{\lambda x - \int \frac{\mu}{x^\nu} dx} \left\{ \sum \gamma_r \cos(\nu_r x + \delta_r) + \eta \right\},$$

avendo λ e ν_r i soliti significati dei paragrafi precedenti relativi alle radici della equazione caratteristica limite della equazione in u, e η essendo come precedentemente una quantità che al crescere indefinito di x tende a zero di un ordine non inferiore a quello di $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$.

In particolare se i coefficienti a_0 e a_1 della equazione data (9) saranno polinomii in x dei gradi m e $m-1$ nei quali b_0 e b_1 siano i coefficienti delle potenze di x di grado più alto, e se gli altri coefficienti $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ saranno polinomii di grado non superiore ad m (*) e divisi per a_0 soddisfaranno tutti alle solite condizioni, allora, avendosi $\frac{a_1}{na_0} = \frac{b_1}{nb_0 x} + \frac{\mu_1}{x^2}$ con μ_1 quantità che al crescere indefinito di x si mantiene finita, quando si riscontri che col porre $y = x^{-\frac{b_1}{nb_0}} e^{-\int \frac{\mu_1}{x^2} dx} u$ la equazione caratteristica limite della nuova equazione in u ha tutte le radici disuguali, si potrà affermare che l'integrale generale o alcuni integrali particolari della equazione data (9) si potranno porre sotto la forma

$$x^{\frac{b_1}{nb_0}} e^{\lambda x} \left\{ \sum \gamma_r \cos(\nu_r x + \delta_r) + \eta \right\},$$

essendo le γ_r e δ_r costanti arbitrarie.

Così più particolarmente ancora, per le equazioni di second'ordine della forma

$$(14)\quad (x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots) y'' + (x^{m-1} + hx^{m-2} + \ldots) y' + (px^m + qx^{m-1} + \ldots) y = 0,$$

dove p è diverso da zero, i coefficienti della equazione corrispondente in u che si avrà subito dalla (13) soddisfaranno alle condizioni volute, e la sua equazione caratteristica limite sarà la $\lambda^2 + p = 0$ e avrà le sue radici diseguali; quindi in questo caso quando p sarà un numero positivo μ^2 l'integrale

---

(*) Alcuni però dei coefficienti $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ dovranno essere di grado m, perchè se fossero tutti come a_1 di grado inferiore ad m, la equazione caratteristica limite della equazione in u avrebbe necessariamente le radici tutte uguali a zero.

generale della stessa equazione pei valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma

$$\frac{\gamma \cos(\mu x + \delta) + \eta}{\sqrt{x}},$$

e quando p è un numero negativo $-\mu^2$ uno degli integrali prenderà la forma

$$\frac{\gamma e^{-\mu x} + \eta e^{-\mu x}}{\sqrt{x}}$$

con γ e δ costanti arbitrarie, essendo η in ambedue i casi una quantità che col crescere indefinito di x diviene infinitesima almeno del prim'ordine.

Della equazione (14) è caso particolare la seguente

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \text{o} \quad xy'' + y' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0,$$

che è quella delle funzioni che si rappresentano con I_ν e sono conosciute sotto il nome di funzioni di Bessel, per le quali resta così dimostrato che i loro valori asintotici hanno la forma $\frac{\gamma \cos(x + \delta)}{\sqrt{x}}$.

547. — Talvolta poi, come già dicemmo, quando per una equazione data (9) non siano soddisfatte le solite condizioni rispetto a tutti i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ o rispetto alle radici della equazione caratteristica limite, potrà avvenire che trasformando la equazione con un cambiamento di variabile adattato coi ricordati processi dei §§ 498 e seg. [pag. 696 e seg.], la nuova equazione in y venga a soddisfare alle condizioni medesime, o vi soddisfi la nuova equazione in u che si otterrà col fare al tempo stesso anche la trasformazione precedente $y = tu$.

Che questo in dati casi possa avvenire, bene si comprende quando si osservi quali sensibili cambiamenti producono queste trasformazioni nei coefficienti delle equazioni; e ciò del resto apparisce chiaramente da applicazioni che di questi processi si facciano a equazioni del secondo e del terz'ordine.

Così nel caso della equazione del second'ordine

$$(15)\qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

se il cambiamento di variabile si farà come nel § 499 mediante la formola $dx = f(\xi)\, d\xi$ o $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost.}$, la equazione trasformata sarà evidentemente

$$a_0 \frac{d^2y\, dx - dy\, d^2x}{dx^3} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

ovvero

$$a_0 f y'' + (a_1 f^2 - a_0 f')\, y' + a_2 f^3 y = 0\,, \tag{16}$$

dove le derivate ora s'intendono prese rispetto a ξ, e nei coefficienti si intende introdotta questa nuova variabile ξ colla formola $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost}$;

e ora profittando della arbitrarietà della funzione $f(\xi)$ si intende subito come possa avvenire che scegliendo convenientemente questa funzione, la nuova equazione soddisfi già a tutte le condizioni volute, o almeno possa venire a soddisfarvi la equazione in u quando si faccia anche la trasformazione precedente $y = tu$.

Così ad es. se si parte dalla equazione,

$$y'' + \{p + \varphi(x) + \theta(x)\}\, y = 0 \tag{17}$$

dove p è una costante diversa da zero, e $\varphi(x)$ e $\theta(x)$ sono due funzioni regolari di x che tendono a zero al crescere indefinito di x, allora se ambedue queste funzioni per valori grandissimi di x si comporteranno come le solite funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, tutte le condizioni solite saranno già soddisfatte e i risultati precedenti saranno pienamente applicabili. Ma se delle due funzioni $\varphi(x)$ e $\theta(x)$, al crescere indefinito di x la sola funzione $\theta(x)$ si comporterà come una $\frac{\tau(x)}{x}$ e l'altra tenderà a zero soltanto di ordine inferiore a quello di una delle funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, non rientreremo nei casi precedenti e converrà tentare di rientrarci coll'applicare le trasformazioni sopra indicate.

Cambiando intanto la variabile colla formola $dx = f(\xi)\, d\xi$, la nuova equazione diverrà

$$y'' - \frac{f'}{f} y' + \{p + \varphi(x) + \theta(x)\}_\xi\, f^2 y = 0\,,$$

le derivate ora intendendosi prese rispetto a ξ, e se si applicherà a questa la trasformazione del § 545 facendo $y = tu$ con $t = e^{\int \frac{f'}{2f} d\xi} = \sqrt{f}$, o $y = \sqrt{f}\, u$, che nel caso delle equazioni generali lineari del second'ordine condusse alla (13), si vedrà subito che si passerà all'altra equazione in u

$$u'' + \left\{\{p + \varphi(x) + \theta(x)\}_\xi\, f^2 - \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \left(\frac{f'}{2f}\right)'\right\} u = 0\,; \tag{18}$$

e ora se colla funzione scelta $f(\xi)$, le x e ξ cresceranno all'infinito insieme, e se in questa equazione il coefficiente $\overline{l}_2$ di u verrà della forma $\pm \nu^2 + \theta_1(\xi)$ con ν diverso da zero e $\theta_1(\xi)$ quantità che al crescere indefinito di ξ diventa infinitesima almeno come una funzione $\frac{\tau(\xi)}{\xi}$, potremo applicare a questa i risultati precedenti; e quindi nel caso di $\overline{l}_2 = \nu^2 + \theta_1(\xi)$ avremo per l'integrale generale della (17)

$$y = \sqrt{f}\, \{\gamma \cos(\nu\xi + \delta) + \eta\}\,,$$

e nel caso di $\overline{l}_2 = -\nu^2 + \theta_1(\xi)$ ci sarà un integrale particolare della forma

$$y = \sqrt{f}\, (\gamma + \eta)\, e^{-\nu\xi}\,,$$

essendo η la solita quantità che tende a zero almeno dell'ordine di $\int_\xi^\infty \frac{\tau(\xi)}{\xi} d\xi$ col crescere indefinito di ξ; e intendendo che per ξ sia posto il suo valore espresso per x quando si voglia l'integrale in funzione di x.

Per questo però bisognerà avere anche la formola $\xi = \xi(x)$ che esprime la nuova variabile ξ per x, o almeno dovremo cercare di avere ξ sotto la forma $\xi = \psi(x) + \sigma$, essendo $\psi(x)$ una funzione conosciuta di x, e σ una quantità per la quale basterà che si sappia che essa tende a zero al crescere indefinito di x; e poi sostituendo nelle precedenti espressioni degli integrali y, dovremo conservare soltanto i termini principali.

Per trovare questa funzione $\xi(x)$ o la $\psi(x)$, si può anche osservare che, essendo $f = x'(\xi)$, il coefficiente $\overline{l}_2$ di u nella (18) può anche scriversi sotto la forma

$$\overline{l}_2 = \{p + \varphi(x) + \theta(x)\}_\xi\, x'^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)'\,,$$

le derivate qui essendo prese rispetto a ξ, e introducendo la funzione inversa $\xi(x)$ si trasformerà nell'altra

$$\overline{l}_2 = \{p + \varphi(x) + \theta(x)\}\, \frac{1}{\xi'^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'^2}\right)' \frac{1}{\xi'}\,,$$

nella quale le derivate dovranno intendersi prese rispetto ad x; e se si porrà

$$\frac{1}{\xi'} = \zeta(x), \quad \text{o} \quad \xi = \int \frac{dx}{\zeta(x)} + \text{cost.}\,,$$

lo stesso coefficiente $\overline{l}_2$ diverrà

$$\overline{l}_2 = \{p + \varphi(x) + \theta(x)\}\, \zeta^2 - \frac{1}{4}\zeta'^2 + \frac{1}{2}\zeta\zeta''\,,$$

donde apparisce che prendendo ζ opportunamente potremmo fare acquistare a $\bar{l}_2$ quel valore che più ci piacesse.

Prendendo ad es. $\zeta = a + b\varphi(x)$ con a e b costanti da determinarsi e a diverso da zero, siccome se ne deduce

$$\xi = \int \frac{dx}{a + b\varphi(x)} + \text{cost.} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{\varphi(x)\,dx}{a + b\varphi(x)} + \text{cost.}$$

e l'ultimo integrale per essere $\varphi(x)$ una funzione che tende a zero al crescere indefinito di x non può divenire infinito altro che di ordine inferiore al primo, si vede subito intanto che ξ e x vengono a crescere insieme indefinitamente e dello stesso ordine.

Ne segue che quando al crescere indefinito di x la $\varphi(x)$, pure divenendo infinitesima di ordine inferiore a quello di una delle funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, divenga infinitesima di ordine uguale o superiore a un numero $\frac{1}{2} + i$ superiore a $\frac{1}{2}$, e al tempo stesso (come il più spesso avverrà nei casi ordinarii) $\varphi'^2(x)$ e $\varphi''(x)$ divengano infinitesime di un ordine non inferiore a quello di una delle funzioni $\frac{\tau(x)}{x}$, allora onde il valore precedente di $\bar{l}_2$ in funzione di ξ soddisfi alle condizioni volute basterà che nel prodotto $\{p + \varphi(x) + \theta(x)\}(a + b\varphi(x))^2$ manchi il termine $(a^2 + 2abp)\varphi(x)$ che diverrebbe infinitesimo come $\varphi(x)$, cioè basterà che a e b siano presi in modo che si abbia $a^2 + 2abp = 0$, o $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2p}$.

Allora il coefficiente stesso $\bar{l}_2$ col crescere all'infinito di x o di ξ tenderà verso $a^2 p$, e si avrà $f = x' = \frac{1}{\xi'} = a + b\varphi(x)$, $\xi = \frac{1}{a}\left\{x + \int \frac{\varphi(x)\,dx}{2p - \varphi(x)} + \text{cost.}\right\}$, e quindi

$$\sqrt{f} = \sqrt{a}(1 + \sigma_1), \quad a\xi = x + \frac{1}{2p}\int \varphi(x)\,dx + \sigma + \text{cost.}$$

essendo

$$\sigma_1 = -\binom{\frac{1}{2}}{1}\frac{1}{2p}\varphi(x) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{1}{(2p)^2}\varphi^2(x) + \dots,$$

$$\sigma = \frac{1}{(2p)^2}\int \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{(2p)^3}\int \varphi^3(x)\,dx + \dots,$$

talchè, per quanto dicemmo sopra, si può ora osservare che se p è positivo

e $= \nu^2$, cioè per la equazione

$$y'' + \{\nu^2 + \varphi(x) + \theta(x)\}y = 0, \tag{19}$$

dove le funzioni $\varphi(x)$ e $\theta(x)$ hanno i significati stabiliti sopra, l'integrale generale pei valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma

$$y = \gamma\cos\left(\nu x + \frac{1}{2\nu}\int \varphi(x)\,dx + \delta\right) + \eta_1 + \eta, \tag{20}$$

essendo η_1 e η quantità che col crescere indefinito di x diventano infinitesime, la prima almeno dell'ordine di $\varphi(x)$ e la seconda almeno dell'ordine di $\int \frac{\tau(x)}{x}dx$, e γ e δ essendo due costanti arbitrarie.

E se p è negativo e $= -\nu^2$, cioè per la equazione

$$y'' + \{-\nu^2 + \varphi(x) + \theta(x)\}y = 0, \tag{21}$$

vi sarà un integrale particolare che per valori di x superiori a un certo numero c prenderà la forma

$$e^{-\nu x - \frac{1}{2\nu}\int \varphi(x)\,dx}\{\gamma + \eta_1 + \eta\}, \tag{22}$$

dove η_1 e η hanno ancora gli stessi significati. E, volendo, di queste quantità η e η_1 si potranno costruire tanti termini quanti si vorranno.

Più particolarmente ancora, supponendo che sia $\varphi(x) = \frac{\mu}{x}$ con μ costante, cioè supponendo che le equazioni date siano della forma

$$y'' + \left\{\nu^2 + \frac{\mu}{x} + \theta(x)\right\}y = 0, \quad \text{o} \quad y'' + \left\{-\nu^2 + \frac{\mu}{x} + \theta(x)\right\}y = 0, \tag{23}$$

i precedenti valori dell'integrale y, generale per la prima, e particolare per la seconda, pei valori di x superiori a c prenderanno respettivamente le forme

$$y = \gamma\cos\left(\nu x + \frac{\mu}{2\nu}\log x + \delta\right) + \eta_1 + \eta, \quad \text{e} \quad y = e^{-\nu x}x^{-\frac{2\nu}{\mu}}(\gamma + \eta_1 + \eta), \tag{24}$$

dove η_1 in questo caso al crescere indefinito di x diverrà infinitesimo almeno del primo ordine.

Questi valori asintotici per gli integrali delle equazioni (23), furono dati dal sig. Kneser nel vol. 120 del *Journal für die reine ecc.* di Crelle.

E supponendo invece $\varphi(x)=\frac{\mu}{x^\varrho}$ con $\frac{1}{2}<\rho<1$, gli integrali precedenti prenderanno la forma

$$y=\gamma\cos\left(\nu x+\frac{\mu}{2\nu(1-\rho)}x^{1-\varrho}+\delta\right)+\eta_1+\eta,\ \text{o}\ y=e^{-\nu x-\frac{\mu}{2\nu(1-\varrho)}x1-\nu_0}(\gamma+\eta_1+\eta),$$

dove ora η col crescere indefinito di x diverrà infinitesimo almeno dell'ordine di $\frac{1}{x^\varrho}$.

548. — Per dare un altro esempio, consideriamo anche l'altra equazione di second'ordine

$$(a_0+b_0x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_2+b_2x)y=0, \tag{25}$$

nella quale le $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sono costanti e b_0 è diverso da zero, che è caso particolare di quella di ordine n coi coefficienti pure di primo grado che fu considerata da *Laplace*.

Essa sotto questa forma e anche quando si divide per a_0+b_0x non rientra in nessuno dei casi qui considerati; ma se si fa la solita trasformazione

$$y=tu\quad \text{con}\ t=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{a_1+b_1x}{a_0+b_0x}dx},\ \text{cioè}\ y=e^{-\frac{b_1}{2b_0}x}(a_0+b_0x)^{\frac{a_0b_1-a_1b_0}{2b_0^2}}u,$$

si trova colla (13) che la equazione corrispondente in u è la seguente

$$u''+\left\{\frac{a_2+b_2x}{a_0+b_0x}-\frac{(a_1+b_1x)^2}{4(a_0+b_0x)^2}-\frac{a_0b_1-a_1b_0}{2(a_0+b_0x)^2}\right\}u=0,$$

che pei valori sufficientemente grandi di x può scriversi

$$u''+\left\{\frac{4b_0b_2-b_1^2}{4b_0^2}+\frac{\mu}{x}+\frac{\theta_0(x)}{x^2}\right\}u=0,$$

dove

$$\mu=\frac{2b_0(a_2b_0-a_0b_2)+b_1(a_0b_1-a_1b_0)}{2b_0^3},$$

e $\theta_0(x)$ è una funzione che resta finita anche al crescere indefinito di x; e questa, quando si escluda il caso di $4b_0b_2-b_1^2=0$, rientra nelle (23) del paragrafo precedente, e si hanno quindi così anche per la (25) i valori asintotici dell'integrale generale quando $4b_0b_2-b_1^2>0$ e di un integrale particolare quando $4b_0b_2-b_1^2<0$; e propriamente nel primo caso, se si pone $\frac{4b_0b_2-b_1^2}{4b_0^2}=\nu^2$ per l'integrale generale della (25) per valori sufficientemente grandi di x

avremo

$$y=e^{-\frac{b_1}{2b_0}x}x^{\frac{a_0b_1-a_1b_0}{2b_0^2}}\left\{\gamma\cos\left(\nu x+\frac{\mu}{2\nu}\log x+\delta\right)+\eta_1+\eta\right\},$$

e nel secondo caso se si pone $\frac{4b_0b_2-b_1^2}{4b_0^2}=-\nu^2$ avremo per un integrale particolare della stessa equazione

$$y=e^{-\left(\frac{b_1}{2b_0}+\nu\right)x}x^{\frac{a_0b_1-a_1b_0}{2b_0^2}}(\gamma+\eta_1+\eta),$$

essendo ora η_1 quantità che al crescere indefinito di x divengono infinitesime almeno del prim'ordine.

549. — Tornando ora alle equazioni lineari generali omogenee (9) che ammettono una equazione limite per $x=\infty$, consideriamo il caso in cui la equazione caratteristica limite, e quindi anche la equazione caratteristica (4) della aggiunta della equazione limite, hanno radici uguali (*).

Indichiamo perciò con $a, b, c, \ldots, h, k, l$ le radici di questa equazione caratteristica (4) coi respettivi gradi di multiplicità $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta, \chi, \lambda$, essendo $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\eta+\chi+\lambda=n$, e prendiamo in questo caso, per le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ il sistema seguente

$$\begin{array}{llll}
z_1=e^{ax}, & z_2=xe^{ax}, & z_3=x^2e^{ax}, \ldots, & z_a=x^{a-1}e^{ax},\\
z_{a+1}=e^{bx}, & z_{a+2}=xe^{bx}, & z_{a+3}=x^2e^{bx}, \ldots, & z_{a+\beta}=x^{\beta-1}e^{bx},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
z_{n-\lambda+1}=e^{lx}, & z_{n-\lambda+2}=xe^{lx}, & z_{n-\lambda+3}=x^2e^{lx}, \ldots, & z_n=x^{\lambda-1}e^{lx},
\end{array}$$

che costituiscono un sistema fondamentale d'integrali della equazione aggiunta della equazione limite della (9), e hanno perciò ancora il loro Wronskiano Q diverso da zero (§ 473 [pag. 666]).

Dovendo ora con questo nuovo sistema di funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ determinare i valori corrispondenti di Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ ci varremo delle formole dei §§ 535 e 536 colle notazioni dei paragrafi stessi, indicando cioè con Θ_n ciò che diviene il Wronskiano delle $z_1, z_2, \ldots, z_n$ quando agli elementi della

(*) Gli studii di questo capitolo sono estratti dalle mie memorie «Studii sulle equazioni differenziali lineari» pubblicate negli «Annali di matematica di Milano» e principalmente da quelle dei Tomi II e III della serie III. In questo paragrafo però e nei seguenti introduciamo alcune modificazioni sia per semplicizzare le dimostrazioni e i risultati, sia per correggere piccole sviste che incorsero in quelle memorie.

ultima colonna si sostituiscono delle quantità fisse $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, e indicando inoltre con

$$\psi(z) = b_0 z^{(n-1)} + b_1 z^{(n-2)} + \dots + b_{n-2} z' + b_{n-1} z = 0$$

la equazione che ha per integrali le $n-1$ funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ nella quale potremo prendere $b_0 = \alpha_0$; e ricordando che al § 536 si trovò la formola (33) cioè

$$\Theta'_n + \frac{b_1}{b_0}\Theta_n = -\frac{\psi(z_n)}{b_0}\Theta_{n-1}, \tag{26}$$

essendo Θ_{n-1} il determinante analogo a Θ_n nel quale figurano soltanto le $n-2$ funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-2}$.

Indichiamo ora con

$$\varphi_{n-1}(\omega) = 0,\ \varphi_{n-2}(\omega) = 0, \dots, \varphi_{n-\lambda}(\omega) = 0,\ \varphi_{n-\lambda-1}(\omega) = 0, \dots,\ \varphi_{n-\lambda-\chi}(\omega) = 0, \dots,$$

le equazioni che si hanno dalla prima equazione caratteristica

$$\varphi(\omega) = \alpha_0(\omega - l)^\lambda (\omega - k)^\chi (\omega - h)^\eta \dots (\omega - c)^\gamma (\omega - b)^\beta (\omega - a)^\alpha = 0$$

togliendovi successivamente una alla volta le varie radici l, poi le varie radici k, ecc. e conservando sempre lo stesso coefficiente α_0 nel primo termine.

La equazione caratteristica

$$b_0 \omega^{n-1} + b_1 \omega^{n-2} + \dots + b_{n-2}\omega + b_{n-1} = 0$$

della $\psi(z) = 0$ sarà la $\varphi_{n-1}(\omega) = 0$, che ha tutte le radici della $\varphi(\omega) = 0$ meno una radice l, e quindi indicando ancora con σ le somme di tutte le radici della $\varphi(\omega) = 0$ avremo $b_0 = \alpha_0$ e $-\frac{b_1}{b_0} = \sigma - l$, e conseguentemente la formola (26) darà luogo all'altra

$$(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)' = -\frac{\psi(z_n)}{\alpha_0} e^{-(\sigma-l)x}\Theta_{n-1}. \tag{27}$$

Ma in generale se $f(\omega)$ è il primo membro della equazione caratteristica di una equazione lineare omogenea qualsiasi

$$F(y) = \beta_0 y^{(m)} + \beta_1 y^{(m-1)} + \dots + \beta_{m-1} y' + \beta_m = 0,$$

per quanto trovammo al § 474 [pag. 667] si ha l'identità

$$F(x^\gamma e^{\theta x}) = e^{\theta x}\left\{\gamma_0 x^\gamma f(\theta) + \gamma_1 x^{\gamma-1} f'(\theta) + \gamma_2 x^{\gamma-2} f''(\theta) + \dots + \gamma_{\gamma-1} x f^{(\gamma-1)}(\theta) + \gamma_\gamma f^{(\gamma)}(\theta)\right\},$$

dove θ è una costante qualunque e $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\gamma-1}, \gamma_\gamma$ sono i soliti coefficienti binomiali, quindi prendendo per $F(y)$ la $\psi(z)$ e applicando questa

formola per la determinazione di $\psi(z_n)$ coll'osservare che $z_n = x^{\lambda-1}e^{lx}$ e che $\varphi_{n-1}(l) = \varphi'_{n-1}(l) = \dots = \varphi_{n-1}^{(\lambda-2)}(l) = 0$, si vede che sarà $\psi(z_n) = e^{lx}\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l)$, e quindi sostituendo nella (27) avremo intanto

$$(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)' = -\frac{\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l)}{\alpha_0} e^{-(\sigma-2l)x}\Theta_{n-1};$$

e poichè si ha $\varphi_{n-1}(\omega) = (\omega - l)^{\lambda-1}\varphi_{n-\lambda}(\omega)$, e questa, derivata $\lambda - 1$ volte colla formola di Leibnitz, ci dà l'altra $\varphi_{n-1}^{(\lambda-1)}(l) = \pi(\lambda-1)\varphi_{n-\lambda}(l)$, potremo scrivere

$$(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)' = -\frac{\pi(\lambda-1)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-2l)x}\Theta_{n-1}, \tag{28}$$

e questa formola varrà naturalmente anche per $\lambda = 1$ intendendo che sia $\pi(0) = 1$.

Trovata ora questa formola, basta cambiarvi n in $n-1$, λ in $\lambda - 1$ e σ in $\sigma - l$ per applicarla al caso in cui si considerino soltanto le funzioni $z_1, z_2, \dots z_{n-2}$, e si giunge allora all'altra formola

$$(e^{-(\sigma-2l)x}\Theta_{n-1})' = -\frac{\pi(\lambda-2)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-3l)x}\Theta_{n-2}; \tag{29}$$

e così continuando, col fare cambiamenti simili giungeremo successivamente alle altre

$$\left\{\begin{array}{lll}
(e^{-(\sigma-3l)x}\Theta_{n-2})' & = -\dfrac{\pi(\lambda-3)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-4l)x}\Theta_{n-3} & , \\
\dots & \dots & , \\
(e^{-(\sigma-sl)x}\Theta_{n-s+1})' & = -\dfrac{\pi(\lambda-s)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-(s+1)l)x}\Theta_{n-s} & , \\
\dots & \dots & , \\
(e^{-(\sigma-(\lambda-1)l)x}\Theta_{n-\lambda+2})' & = -\dfrac{\pi(1)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-\lambda l)x}\Theta_{n-\lambda+1} & , \\
(e^{-(\sigma-\lambda l)x}\Theta_{n-\lambda+1})' & = -\dfrac{\pi(0)}{\alpha_0}\varphi_{n-\lambda}(l) e^{-(\sigma-\lambda l-l)x}\Theta_{n-\lambda} & ,
\end{array}\right. \tag{30}$$

e considerando le prime s di queste equazioni insieme alle due precedenti (28) e (29), con derivazioni e sostituzioni successive giungeremo alla formola seguente

$$(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(s)} = (-1)^s \frac{\pi(\lambda-s)\,\pi(\lambda-s+1)\dots\pi(\lambda-1)}{\alpha_0^s}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^s e^{-(\sigma-(s+1)l)x}\Theta_{n-s}, \tag{31}$$

che darà le derivate s^e di $e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n$ espresse per le Θ_{n-s} per $s=1,2,3,\ldots,\lambda-1,\lambda$; e così in particolare per $s=\lambda-1$ avremo la formola

$$(32)\quad (e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(\lambda-1)}=(-1)^{\lambda-1}\frac{\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(\lambda-1)}{\alpha_0^{\lambda-1}}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^{\lambda-1}e^{-(\sigma-\lambda l)x}\Theta_{n-\lambda+1},$$

e per $s=\lambda$ avremo invece l'altra

$$(33)\quad (e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(\lambda)}=(-1)^{\lambda}\frac{\pi(0)\,\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(\lambda-1)}{\alpha_0^{\lambda}}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^{\lambda}e^{-(\sigma-\lambda l-l)x}\Theta_{n-\lambda},$$

Ora se $\lambda=n$, cioè se la equazione caratteristica $\varphi(\omega)=0$ ha tutte le sue radici uguali ad l e quindi $\sigma=nl$ e $\varphi_{n-\lambda}(\omega)=\alpha_0$, dalla (32) avremo la formola seguente

$$(34)\qquad (e^{-(n-1)lx}\Theta_n)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(n-1)\,\Theta_1$$

essendo evidentemente $\Theta_1=\theta_1$, e in questo caso altre trasformazioni non saranno da farsi.

Se poi, avendo la equazione $\varphi(\omega)=0$ altre radici $k,h,\ldots$ oltre alla l, sarà $\lambda<n$, scriveremo la (33) sotto la forma

$$(35)\quad e^{(k-l)x}(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(\lambda)}=(-1)^{\lambda}\frac{\pi(0)\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(\lambda-1)}{\alpha_0^{\lambda}}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^{\lambda}e^{-(\sigma-\lambda l-k)x}\Theta_{n-\lambda};$$

ed ora, partendo dalla equazione $\varphi_{n-\lambda}(\omega)=0$ che ha soltanto le radici $k,h,\ldots,c,b,a$ della equazione caratteristica primitiva $\varphi(\omega)=0$ cogli stessi gradi di multiplicità, ed è la equazione caratteristica della equazione differenziale omogenea che ha per integrali $z_1,z_2,\ldots,z_{n-\lambda}$, osserveremo che per essa la somma delle radici sarà $\sigma-\lambda l$ e, salvo le debite variazioni nelle notazioni, alle derivate del secondo membro della formola trovata potremo applicare le formole precedenti (34) o (35) secondochè la equazione $\varphi(\omega)=0$ oltre alla radice l avrà soltanto la radice k e sarà $\chi=n-\lambda$, o ne avrà anche altre $h,\ldots,c,b,a$.

Ammettendo di essere in quest'ultimo caso e ponendo in generale per semplicità di scrittura $\pi_{s-1}=\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(s-1)$, e valendosi della formola (35) giungeremo alla nuova formola

$$e^{(h-k)x}\Big(e^{(k-l)x}(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(\lambda)}\Big)^{(\chi)}=(-1)^{\lambda+\chi}\frac{\pi_{\lambda-1}\pi_{\chi-1}}{\alpha_0^{\lambda+\chi}}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^{\lambda}[\varphi_{n-\lambda-\chi}(k)]^{\chi}e^{-(\sigma-\lambda l-\chi k-h)x}\Theta_{n-\lambda-\chi}$$

e altre simili e più generali potremmo averne applicando invece la (31); e ora continuando ad applicare questi processi, partendo prima dalla equazione $\varphi_{n-\lambda-\chi}(\omega)=0$ e poi dalle successive $\varphi_{n-\lambda-\chi-\eta}(\omega)=0,\ldots$, e infine dalla $\varphi_{\alpha}(\omega)=0$ che avrà solo la radice a multipla dell'ordine α e allora la formola da applicarsi coi debiti cambiamenti nelle notazioni sarà la (32), si vede chiaramente che giungeremo in fine alla formola seguente

$$(36)\quad \Bigg(e^{(a-b)x}\Big(e^{(b-c)x}\Big(\ldots\big(e^{(h-k)x}(e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n)^{(\lambda)}\big)^{(\chi)}\ldots\Big)^{(\gamma)}\Big)^{(\beta)}\Bigg)^{(\alpha-1)}=T_0\Theta_1,$$

dove $\Theta_1=\theta_1$ e

$$T_0=(-1)^{n-1}\frac{\pi_{\alpha-1}\pi_{\beta-1}\ldots\pi_{\chi-1}\pi_{\lambda-1}}{\alpha_0^{n-1}}[\varphi_0(a)]^{\alpha-1}[\varphi_\alpha(b)]^{\beta}[\varphi_{\alpha+\beta}(c)]^{\gamma}\ldots[\varphi_{n-\lambda-\chi}(k)]^{\chi}[\varphi_{n-\lambda}(l)]^{\lambda},$$

ovvero

$$T_0=(-1)^{n-1}\pi_{\alpha-1}\pi_{\beta-1}\ldots\pi_{\chi-1}\pi_{\lambda-1}[(b-a)^{\alpha}]^{\beta}[(c-a)^{\alpha}(c-b)^{\beta}]^{\gamma}[(d-a)^{\alpha}(d-b)^{\beta}(d-c)^{\gamma}]^{\delta}\ldots$$
$$\ldots[(k-a)^{\alpha}(k-b)^{\beta}\ldots(k-h)^{\eta}]^{\chi}[(l-a)^{\alpha}(l-b)^{\beta}\ldots(l-h)^{\eta}(l-k)^{\chi}]^{\lambda},$$

quando la equazione caratteristica $\varphi(\omega)=0$ non ha tutte le radici uguali fra loro, mentre quando le ha tutte eguali ad l la formola precedente (36) si riduce senz'altro alla (34), ma può dirsi che si abbia ancora la (36) con $T_0=(-1)^{n-1}\pi_{n-1}=(-1)^{n-1}\pi(1)\,\pi(2)\ldots\pi(n-1)$.

Di qui integrando successivamente $\alpha-1$ volte e poi dividendo per $e^{(a-b)x}$, e integrando quindi di nuovo altre β volte e poi dividendo per $e^{(b-c)x}$ e integrando dopo altre γ volte e poi dividendo per $e^{(c-d)x}$, e così continuando per integrare in ultimo λ volte e dividere dopo per $e^{-(\sigma-l)x}$, si trova per Θ_n una espressione della forma

$$(37)\quad \Theta_n=P_{a,\alpha-1}e^{(\sigma-a)x}+P_{b,\beta-1}e^{(\sigma-b)x}+\ldots+P_{k,\chi-1}e^{(\sigma-k)x}+P_{l,\lambda-1}e^{(\sigma-l)x},$$

essendo $P_{a,\alpha-1}$, $P_{b,\beta-1}$, $P_{c,\gamma-1},\ldots,P_{k,\chi-1}$, $P_{l,\lambda-1}$ polinomi interi in x dei respettivi gradi $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1,\ldots,\chi-1$, $\lambda-1$ i cui coefficienti sono costanti che si introducono colle successive integrazioni o che dipendono dalle costanti così introdotte e che necessariamente conterranno le radici $a,b,c,\ldots,h,k,l$ e anche (linearmente) le quantità $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$.

550. — Con questo processo è evidente che arrestandosi a una qualunque delle successive integrazioni che così dovranno farsi e tenendo conto delle successive formole simili alla (36) alle quali giungeremmo per mezzo della (31), si avrebbero facilmente i valori delle successive espressioni in funzioni delle Θ_n che verrebbero a figurare nei primi membri delle dette formole simili alla (36), determinando ciascuna delle espressioni medesime per mezzo della precedente e dei valori iniziali per $x=0$ delle $\Theta_1,\Theta_2,\ldots,\Theta_n$; e rimarrebbero così successivamente determinati i coefficienti dei polinomii $P_{a,\alpha-1},P_{b,\beta-1},\ldots$; ma

i calcoli ai quali si va incontro seguendo questi processi saranno sempre molto laboriosi, e noi perciò non ci fermeremo su essi nel caso generale.

Li faremo invece soltanto nel caso particolare in cui la equazione caratteristica $\varphi(\omega)=0$ ha tutte le radici uguali fra loro, indicando con l come facevamo sopra, il valore comune di queste radici, e con n il grado di multiplicità.

Allora il valore precedente di Θ_n si ridurrà al solo termine $P_{l,n-1} e^{(\sigma-l)x}$ con $\sigma=nl$, e potremo scrivere

$$e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n = g_{l,n-1}x^{n-1}+g_{l,n-2}x^{n-2}+\dots+g_{l,1}x+g_{l,0}$$

per modo che i coefficienti $g_{l,0}, g_{l,1},\dots, g_{l,n-1}$ di $P_{l,n-1}$ non saranno altro che i valori della funzione $e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n$ e delle sue derivate per $x=0$ divisi respettivamente per $\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n-1)$.

Ora in generale per la (31) si vede che in questo caso il valore della derivata s^a di $e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n$ per $x=0$ è $(-1)^s \pi(n-s)\,\pi(n-s+1)\dots\pi(n-1)(\Theta_{n-s})_{x=0}$, perchè ora $\varphi_{n-\lambda}(l)=\varphi_0(l)=\alpha_0$, mentre il valore di $e^{-(\sigma-l)x}\Theta_n$ per $x=0$ è $(\Theta_n)_{x=0}$; quindi poichè avendo riguardo alle espressioni attuali per determinanti di $\Theta_1, \Theta_2,\dots,\Theta_{n-s},\dots\Theta_n$ si vede subito che i loro valori per $x=0$ sono respettivamente

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \pi(1)\theta_3;\ \pi(1)\pi(2)\theta_4;\dots;\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-s-2)\theta_{n-s};\dots;\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-2)\theta_n,$$

così avremo in generale $g_{l,s}=(-1)^s\dfrac{\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-1)}{\pi(s)\pi(n-s-1)}\theta_{n,s}=(-1)^s\dfrac{\pi_{n-1}}{\pi(s)\pi(n-s-1)}\theta_{n-s}$,

e $g_{l,0}=\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-2)\theta_n=\dfrac{\pi_{n-1}}{\pi(0)\pi(n-1)}\theta_n$, e potremo scrivere in conseguenza

$$(38)\quad \Theta_n=\pi_{n-1}e^{(n-1)lx}\sum_0^{n-1}(-1)^s\frac{\theta_{n-s}}{\pi(s)\pi(n-s-1)}x^s,\quad \text{o}\quad \Theta_n=\pi_{n-1}e^{(n-1)lx}\sum_1^{n}(-1)^{n-s}\frac{\theta_s}{\pi(s-1)\pi(n-s)}x^{n-s},$$

551. — Cambiando in questa formola l in a e n in α e l'esponenziale $e^{(n-1)lx}$ nell'altra $e^{(b-a)x}$ si avrebbe la formola alla quale si giunge applicando alla (36) le prime $\alpha-1$ integrazioni fra 0 e x delle quali parlavamo più sopra.

Per questo facendo poi le successive β integrazioni e dividendo per $e^{(c-b)x}$, si troverà che la funzione ancora di grado $\alpha-1$ che moltiplicherà la nuova esponenziale $e^{(c-a)x}$ dipenderà da quella trovata e conterrà quindi anch'essa in modo lineare e omogeneo le stesse quantità $\theta_1, \theta_2,\dots,\theta_\alpha$, mentre la funzione di grado $\beta-1$ che moltiplicherà la nuova esponenziale $e^{(c-b)x}$ conterrà

le β quantità θ successive $\theta_{\alpha+1}, \theta_{\alpha+2},\dots,\theta_{\alpha+\beta}$, potendo o no contenere ancora le precedenti. Da questa continuando si vede che nella formola generale (37) che dà il Θ_n, il polinomio $P_{a,\alpha-1}$ che moltiplica la esponenziale $e^{(\sigma-a)x}$ conterrà soltanto le α quantità $\theta_1, \theta_2,\dots,\theta_\alpha$; e poichè è naturale che quello che accade per la radice a accada per tutte le altre (*), si può dire ora evidentemente che le funzioni $P_{a,\alpha-1}, P_{b,\beta-1}, P_{c,\gamma-1},\dots$ saranno funzioni lineari e omogenee la prima delle sole $\theta_1, \theta_2,\dots,\theta_\alpha$, la seconda delle θ seguenti $\theta_{\alpha+1}, \theta_{\alpha+2},\dots,\theta_{\alpha+\beta}$, la terza delle θ seguenti $\theta_{\alpha+\beta+1}, \theta_{\alpha+\beta+2},\dots,\theta_{\alpha+\beta+\gamma}$, ecc., come facilmente si riscontra che debba essere anche facendo lo sviluppo del determinante Θ_n per gli elementi $\theta_1, \theta_2,\dots,\theta_n$ dell'ultima colonna.

E si può scrivere quindi in ogni caso

$$(39)\quad \Theta_n=e^{(\sigma-a)x}\sum_1^{\alpha}h_{a,s}\theta_s+e^{(\sigma-b)x}\sum_1^{\beta}h_{b,s}\theta_{\alpha+s}+e^{(\sigma-c)x}\sum_1^{\gamma}h_{c,s}\theta_{\alpha+\beta+s}+\dots+e^{(\sigma-l)x}\sum_1^{\lambda}h_{l,s}\theta_{n-\lambda+s},$$

essendo le $h_{a,s}, h_{b,s}, h_{c,s},\dots, h_{l,s}$ funzioni intere di x che sono al più dei gradi $\alpha-1$ le prime, $\beta-1$ le seconde, $\gamma-1$ le terze,... e $\lambda-1$ le ultime.

552. — Questa espressione (39) di Θ_n, della quale la (38), data sopra in modo pienamente determinato, corrisponde al caso in cui la equazione caratteristica $\varphi(\omega)=0$ ha tutte le sue n radici uguali l, ci dà Q_c col porvi

$$\theta_1=c_1,\ \theta_2=c_2,\dots,\ \theta_n=c_n;$$

ci dà q_{x,x_1} col porvi

$$\theta_1=e^{ax_1},\ \theta_2=x_1e^{ax_1},\dots,\ \theta_\alpha=x_1^{\alpha-1}e^{ax_1},\ \theta_{\alpha+1}=e^{bx_1},\ \theta_{\alpha+2}=x_1e^{bx_1},\dots,\theta_{\alpha+\beta}=x_1^{\beta-1}e^{bx_1},$$
$$\dots,\theta_{n-\lambda+1}=e^{lx_1},\theta_{n-\lambda+2}=x_1e^{lx_1},\dots,\theta_n=x_1^{\lambda-1}e^{lx_1};$$

e ci dà $\bar{q}_{x,x_1}$ col porvi

$$\theta_1=(Z_1)_{x_1},\ \theta_2=(Z_2)_{x_1},\dots,\ \theta_n=(Z_n)_{x_1},$$

essendo ancora

$$\varepsilon_{n+1}Z_r=\sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i(\alpha_i\,\chi_r)^{(n-i)}=\sum_0^n{}_i\,\varepsilon_i(\bar{\alpha}_i\,\chi_r)^{(n-i)},$$

(*) Senza fare la considerazione che quello che accade per la radice a deve naturalmente accadere per tutte le altre, si può osservare che, venendo Θ_n ad essere una espressione lineare per esponenziali, questa espressione, per le considerazioni che facemmo nel § 473 (pag. 666), deve essere unica; e quindi poichè, fatta astrazione da cambiamenti di segno che possono aversi, devono ottenersi sempre gli stessi risultati per Θ_n quando le operazioni fatte sopra invece che incominciarle dalla radice a si incomincino da un'altra radice qualsiasi, si comprende bene anche da questo come i coefficienti $P_{a,\alpha-1}$, $P_{b,\beta-1}$, $P_{c,\gamma-1},\dots$ di Θ_n nella (37) debbano presentare le particolarità indicate sopra.

per modo che se ad es. $z_r = x^{t-1} e^{gx}$ essendo g una radice della (3) dell'ordine ρ di multiplicità, e t uno dei numeri $1, 2, \ldots, \rho$ si potrà scrivere

$$\varepsilon_{n+1} Z_r = e^{gx} \sum_0^n {}_i \, \varepsilon_i \frac{(\bar{a}_i x^{t-1} e^{gx})^{(n-i)}}{e^{gx}},$$

e in questa formola a calcoli eseguiti l'esponenziale e^{gx} nelle $\sum_0^n {}_i$ verrà del tutto a sparire.

Osservando poi che per la nota formola di Liouville si ha $Q = Q_0 e^{\sigma x}$, essendo Q_0 il valore di Q per $x = 0$, e ricordando che per le equazioni omogenee si ha $A_x = Q_x$, basta avere riguardo alla formola (39) che abbiamo trovato per potere dire che i termini che compongono i prodotti $\frac{A_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1}}, x_m}{(a_0 Q)_{x_m}}$ che figurano negli integrali della solita formola (2) che serve alla determinazione degli integrali delle equazioni lineari saranno in numero finito e, astrazione fatta dai coefficienti, saranno della forma

$$(40) \qquad e^{(\sigma-g)x_{m-1}} x_{m-1}^{\rho-r} e^{(g-g_1)x_m} x_m^{\rho_1-s} \sum_0^n \frac{\left((\bar{a}_i)_{x_m} x_m^{t-1} e^{gx_m}\right)^{(n-i)}}{e^{gx_m}},$$

intendendo che g_1 sia una radice della (3) dell'ordine ρ_1 di multiplicità diversa o no dalla g, e r sia come t uno dei numeri $1, 2, \ldots, \rho$, e s uno dei numeri $1, 2, \ldots, \rho_1$; e quindi se anche ora consideriamo separatamente il caso in cui le radici $a, b, c, \ldots, h, k, l$ della (3) hanno tutte la stessa parte reale, e quello in cui non l'hanno tutte uguale, si vede che nel primo di questi casi l'esponente della esponenziale $e^{(g-g_1)x_m}$ o sarà zero o sarà puramente immaginario, e quindi questa esponenziale avrà sempre per modulo l'unità.

S'indichi ora con p il massimo fra i varii gradi di multiplicità delle radici della equazione caratteristica $\varphi(\omega) = 0$, e si osservi che astrazione fatta dalle esponenziali e dai fattori $\bar{a}_i$ e dalle loro derivate, le potenze di x_m nei termini precedenti (40) non supereranno la $(2p-2)^a$. Ne seguirà che se col crescere indefinito di x le $\bar{a}_i$ tenderanno tutte a zero almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{2p-1}}$ essendo $\tau(x)$ al solito una funzione tale che $\frac{\tau(x)}{x}$ sia integrabile fra x e ∞, e se nella derivazione il loro ordine d'infinitesimo non andrà diminuendo (*), allora il modulo dell'integrale $I_m = \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{A_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1}}, x_m}{(a_0 Q)_{x_m}} dx_m$

(*) Già osservammo in fine della nota della pag. 753 che questo può non avvenire per le funzioni che al crescere indefinito di x, facendo continue oscillazioni, passano continuamente per zero.

che figura nella formola (2) sarà inferiore a quello di $\Omega e^{(\sigma-g)x_{m-1}} x_{m-1}^{\rho-r} \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x)}{x} dx$, essendo Ω un numero finito; e ora passando all'integrale successivo $\int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\bar{q}_{x_{m-2}}, x_{m-1}}{(a_0 Q)_{x_{m-2}}} I_m dx_{m-1}$ della stessa formola, e poi continuando come al § 540 si giunge a concludere che sotto le fatte ipotesi la formola (2) è applicabile per ogni sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ quando x è al di là di un certo numero finito c.

Passando poi al caso in cui le radici $a, b, c, \ldots, h, k, l$ non hanno tutte la stessa parte reale, se s'indica con μ, come nel § 541, la massima fra queste parti reali, con ragionamenti del tutto simili a quelli usati nello stesso paragrafo si vede che conservando le condizioni poste ora rispetto alle quantità $\bar{a}_i$, la formola (2) sussiste ancora per quegli integrali particolari che si ottengono quando si suppongono zero le costanti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ che corrispondono in Q_c a quelle linee nelle quali figurano le radici che non hanno per parte reale μ; quindi introducendo ancora in campo le radici della equazione limite col cambiare ω in $-\omega$, si può affermare che i teoremi del § 541 restano così estesi anche al caso in cui questa equazione limite ha radici multiple, purchè se il massimo grado di multiplicità è p, le quantità $\bar{a}_i$ tendano a zero di un ordine non inferiore a $\frac{\tau(x)}{x^{2p-1}}$, e nella derivazione il loro ordine d'infinitesimo non vada diminuendo.

E così in questi casi se $\lambda + i\nu_r$ sono le varie radici della equazione caratteristica limite della (9) o quelle fra queste radici che hanno la parte reale minima λ, e λ_r è il loro grado di multiplicità, allora pei valori di x superiori a un certo numero c si avrà, per l'integrale generale della (9) o per un integrale particolare secondo i casi,

$$y = y_0 + \eta x^{p-1} e^{\lambda x},$$

essendo p il massimo dei gradi λ_r di multiplicità, e essendo y_0 l'integrale corrispondente della equazione limite, cioè avendosi

$$y_0 = e^{\lambda x} \sum_r \left\{ c_{1,r} \cos(\nu_r x + \delta_1) + c_{2,r} x \cos(\nu_r x + \delta_2) + c_{3,r} x^2 \cos(\nu_r x + \delta_3) + \ldots + c_{\lambda_r, r} x^{\lambda_r - 1} \cos(\nu_r x + \delta_r) \right\},$$

la somma essendo estesa a tutte le radici qui indicate che hanno per parte reale λ, e η essendo una quantità che col crescere indefinito di x diviene infinitesima almeno dell'ordine di $\int_x^{\infty} \frac{\tau(x)}{x} dx$.

553. — S'intende che nei casi particolari le condizioni che abbiamo poste per le quantità $\bar{a}_i$ potranno rendersi spesso meno restrittive. Di questi casi particolari però qui considereremo soltanto quello nel quale tutti i coefficienti della equazione omogenea data (9) all'infuori del primo tendono a zero al crescere indefinito di x; per modo che la equazione caratteristica limite (10) si riduce alla $\omega^n = 0$, cioè ha una sola radice multipla dell'ordine n che è lo zero, e le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono respettivamente $1 . x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Allora, supposto $a_0 = 1$, se i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ della equazione data al crescere indefinito di x tenderanno tutti a zero di ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x^{2n-1}}$, i risultati precedenti sussisteranno certamente; ma anche quando questo non accade è facile ora di vedere che essi continuano a sussistere in molti altri casi.

Si osservi intanto che ora siamo in uno di quei casi nei quali si ha la (38) cioè

$$\Theta_n = \pi_{n-1} \sum_1^n (-1)^{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s)}\, x^{n-s} \tag{41}$$

e si ha inoltre $a_0 Q = \pi_{n-1}$, e con queste le Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ e la formola (2) che darà poi l'integrale y prenderanno forme più semplici che, volendolo, potrebbero essere subito scritte.

Quanto poi ai termini che compongono quelli $\frac{A_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1}, x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}}$ che figurano sotto gli integrali della formola (2), osserviamo che ora, sempre all'infuori di certi coefficienti, essi invece che ai termini (40) si riducono agli altri più semplici

$$x_{m-1}^{n-t}\, x_m^{n-s} \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_i \left((a_i)_{x_m} x_m^{t-1} \right)^{(n-i)}, \tag{42}$$

perchè ora le $\bar{a}_i$ saranno precisamente le a_i; e in questi t prenderà certamente tutti i valori $1, 2, \ldots, n$ mentre s potrà prendere esso pure questi valori, ma lascierà certamente quelli pei quali la costante c_s collo stesso indice s sarà zero, per modo che se $c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}$ saranno nulle e c_l sarà la prima costante diversa da zero, s incomincierà da l.

Se dunque a_i al crescere indefinito di x diviene infinitesimo di un ordine non inferiore a r_i, *e per ogni derivazione quest'ordine cresce di una unità*, è evidente che l'ordine d'infinitesimo rispetto a x_m degli stessi termini (42) non sarà inferiore a $r_i - t + 1 - i + s$, o anche a $r_i - t + 1 - i + l$ se, come supponiamo, c_l sarà la prima delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}, c_l, \ldots, c_n$ diverse

da zero; e siccome il massimo valore di t è n, per essere sicuri che questi varii termini al crescere indefinito di x_m divengono infinitesimi in modo da restare integrabili bisognerà intanto che $r_i - n + 1 - i + l$ sia positivo e non inferiore ad uno, e che le a_i divengano infinitesime di un ordine non inferiore a quello di $\frac{\tau(x)}{x^{n+i-l}}$ essendo $\tau(x)$ una delle solite funzioni dei paragrafi precedenti tali che $\frac{\tau(x)}{x}$ sia integrabile col crescere indefinito di x.

Ora quando tutte queste condizioni per le a_i risultino soddisfatte, tenendo conto che $s \geq l$, si vede subito che ogni termine di quelli che compongono il termine (42) diviene infinitesimo rispetto ad x_m di un ordine non inferiore a quello di $\frac{1}{x_m^{n-t}} \frac{\tau(x_m)}{x_m}$; quindi, avendo riguardo ora anche all'altro fattore x_{m-1}^{n-t} che per ogni valore di t figura nella (42) e all'essere $x_m \geq x_{m-1}$ e quindi $\frac{x_{m-1}^{n-t}}{x_m^{n-t}} \leq 1$ in tutto il corso della integrazione, si vede che l'integrale $I_m = \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{A_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1}, x_m}}{(a_0 Q)_{x_m}} dx_m$ prenderà la forma $\Omega\Omega_1 \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m} dx_m$ essendo Ω e Ω_1 quantità dipendenti respettivamente dai termini di A_{x_m} e di $\bar{q}_{x_{m-1}, x_m}$ i cui moduli non superano un numero finito quando x sarà superiore a un certo numero c.

Passando quindi all'integrale successivo $\int_{x_{m-2}}^{\infty} \frac{\bar{q}_{x_{m-2}, x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} I_m \, dx_{m-1}$ nella solita formola (2), e osservando che i termini di $\frac{\bar{q}_{x_{m-2}, x_{m-1}}}{(a_0 Q)_{x_{m-1}}} I_m$ sono della forma $x_{m-2}^{n-t} \sum_0^n {}_i\, \varepsilon_i \left((a_i)_{x_{m-1}} x_{m-1}^{t-1} \right)^{(n-i)} I_m$, si riscontra che essi divengono infinitesimi rispetto a x_{m-1} di ordine non inferiore a quello di $\Omega\Omega_1 \frac{x_{m-2}^{n-t}}{x_{m-1}^{n-t}} \frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}} \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m} dx_m$, e quindi l'integrale stesso avrà un modulo non superiore a quello di $\int_{x_{m-2}} \frac{\tau(x_{m-1})}{x_{m-1}} dx_{m-1} \int_{x_{m-1}}^{\infty} \frac{\tau(x_m)}{x_m} dx$; e ora continuando con questi processi come si fece nei casi precedenti, si vede che sotto le fatte ipotesi rispetto ai coefficienti a_i, la formola (2) resta completamente applicabile per le nostre equazioni pei valori di x superiori a un certo numero finito c, e quindi per l'integrale considerato si ha

$$y = c_l x^{n-l} + c_{l+1} x^{n-l-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n + \eta,$$

essendo η una quantità che al crescere indefinito di x tende a zero almeno dell'ordine di $\int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x} dx$.

Questo integrale sarà l'integrale generale quando si possa prendere $l = 1$, ciò che avverrà quando i coefficienti a_i tendano tutti a zero col crescere indefinito di x almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{i+n-1}}$. Quando tendano a zero di ordine minore gli integrali da considerarsi saranno soltanto integrali particolari; e così ad es. quando tendano a zero almeno dell'ordine di $\frac{\tau(x)}{x^{n+\mu}}$ con $\mu \geq 1$ e sia $\bar{\mu}$ il massimo intero contenuto in μ, allora esso sarà l'integrale particolare pel quale $l = n - \bar{\mu}$ che conterrà quindi $\bar{\mu} + 1$ costanti arbitrarie. E ciò sempre, bene inteso, quando le a_i oltre a tendere a zero almeno degli ordini indicati, siano tali altresì che ad ogni derivazione i loro ordini d'infinitesimo crescano sempre (come nei casi ordinarii) di una unità.

In particolare dunque se nella equazione del second'ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

i coefficienti a_1, a_2 al crescere indefinito di x diverranno infinitesimi di ordini non inferiori a quelli di $\frac{1}{x^{2+\nu}}$ e $\frac{1}{x^{3+\nu_1}}$ con ν e ν_1 positivi e diversi da zero, e a_0 rimarrà sempre diverso da zero, i suoi integrali al crescere indefinito di x si ridurranno alla forma $c_1 x + c_2 + \eta$ essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie e η un infinitesimo.

Facendo poi anche in questi casi le trasformazioni dei §§ 545 e seg. si intende che potremmo giungere anche ad altri risultati molto notevoli.

Altre applicazioni delle formole generali.

554. — Lasciando ora di fare applicazioni delle nostre formole generali alla ricerca del modo di comportarsi degli integrali delle solite equazioni lineari

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = \mathrm{X} \tag{1}$$

al crescere indefinito della variabile x, o come si dice alla ricerca dei valori asintotici degli integrali per $x = \infty$, passiamo a farne altre conservando ancora tutte le notazioni dei paragrafi precedenti, ma scegliendo altri sistemi particolari di funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Riprendiamo perciò la solita formola (21) del § 523 che deve rappresentare l'integrale, cioè

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1} \mathrm{A}_x}{(a_0 \mathrm{Q})_x} + \tag{2}$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{\varepsilon_{n-1}^{m+1}}{(a_0\mathrm{Q})_x} \int_a^x \frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_1}} dx_1 \int_a^{x_1} \frac{\bar{q}_{x_1,x_2}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_2}} dx_2 \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{m-2}} \frac{\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_{m-1}}} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \frac{\mathrm{A}_{x_m} \bar{q}_{x_{m-1},x_m}}{(a_0\mathrm{Q})_{x_m}} dx_m,$$

intendendo al solito che nel primo termine della somma $\sum_1^\infty$ la x_0 rappresenti x; e per le prime $n-1$ delle funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ continuiamo a prendere, come nell'ultimo caso, $z_1 = 1, z_2 = x, z_3 = x^2, \dots, z_{n-1} = x^{n-2}$, lasciando per ora indeterminata la z_n.

In questo caso la equazione $\psi(z) = 0$ del § 536 (pag. 744) che avrà per integrali queste funzioni sarà la $z^{(n-1)} = 0$, e la formola (33) del paragrafo stesso si ridurrà all'altra semplicissima

$$\Theta'_n = - z_n^{(n-1)} \Theta_{n-1},$$

e siccome la (41) del paragrafo precedente 553 si applica evidentemente al caso delle attuali funzioni $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ col solo cambiamento di n in $n-1$, avremo

$$\Theta_{n-1} = \pi_{n-2} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} x^{n-s-1},$$

e sarà quindi per la precedente

$$\Theta_n = \pi_{n-2} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} \int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx + k_n,$$

essendo al solito $\pi_s = \pi(1)\,\pi(2) \dots \pi(s)$, e essendo k_n una costante rispetto ad x; e questa costante k_n conterrà certamente la θ_n, perchè dallo sviluppo del determinante che rappresenta Θ_n si vede che θ_n deve figurarvi col termine $\pi_{n-2}\theta_n$, e potrà contenere linearmente anche le altre quantità $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ a seconda delle costanti d'integrazione che provengono dagli integrali che qui figurano.

D'altra parte, siccome per questi integrali si ha in generale

$$(3)\quad \int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx = x^{n-s-1} z_n^{(n-2)} - (n-s-1) x^{n-s-2} z_n^{(n-3)} + (n-s-1)(n-s-2) x^{n-s-3} z_n^{(n-4)} - \\ - \ldots + \varepsilon_{n-s-1}\, \pi(n-s-1)\, z_n^{(s-1)} + h_s\,,$$

con $s = 1, 2, \ldots, n-1$, essendo le $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ quantità costanti che potranno essere prese comunque, basta sostituire questi valori nella formola precedente per ottenere

$$\Theta_n = \pi_{n-2} \Big\{ z_n^{(n-2)} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} x^{n-s-1} + z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{n-s-1} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-2)} x^{n-s-2} + \\ + z_n^{(n-4)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{n-s-2} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-3)} x^{n-s-3} + \ldots + z'_n \sum_1^{2} \varepsilon_{3-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(2-s)} x^{2-s} + \varepsilon_1 z_n \frac{\theta_1}{\pi(0)\,\pi(1)} \Big\} + \\ + \pi_{n-2} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} h_s + k_n\,;$$

e siccome avendo riguardo alla espressione di Θ_n quale risulta dallo sviluppo del determinante che la rappresenta, si vede che in Θ_n le $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ non possono comparirvi altro che moltiplicate per una delle quantità $z_n, z'_n, z''_n, \ldots, z_n^{(n-2)}$, e si vede anche che la θ_n nel caso attuale vi comparisce solo col termine $\pi_{n-2}\theta_n$, così la somma degli ultimi due termini della formola ora ottenuta per Θ_n dovrà ridursi precisamente a $\pi_{n-2}\theta_n$, ciò che porta che dovremo prendere $k_n = \pi_{n-2}\theta_n - \pi_{n-2} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} h_s$.

Ne segue che se negli integrali precedenti (3) le $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ saranno prese tutte eguali allo zero o, più generalmente saranno prese in modo che si abbia $\sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} h_s = 0$, si dovrà prendere $k_n = \pi_{n-2}\theta_n$; e quindi possiamo ora affermare che per Θ_n avremo sempre le due espressioni seguenti

$$(4)\quad \begin{cases} \Theta_n = \pi_{n-2} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \dfrac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} \displaystyle\int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx + \pi_{n-2}\theta_n\,, \\ \Theta_n = \pi_{n-2} \Big\{ z_n^{(n-2)} \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \dfrac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} x^{n-s-1} + z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-2} \varepsilon_{n-s-1} \dfrac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-2)} x^{n-s-2} + \\ + z_n^{(n-3)} \sum_1^{n-3} \varepsilon_{n-s-2} \dfrac{\theta s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-3)} x^{n-s-3} + \ldots + z'_n \sum_1^{2} \varepsilon_{3-s} \dfrac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(2-s)} x^{2-s} + \varepsilon_1 z_n \dfrac{\theta_1}{\pi(0)\,\pi(0)} + \theta_n \Big\}, \end{cases}$$

quando nella prima s'intenda che col valore che si sceglierà per z_n gli integrali che vi figurano siano determinati dalla formola (3) nella quale le

costanti $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ siano tutte zero, cioè si prenda

$$(5)\quad \int x^{n-s-1} z_n^{(n-1)} dx = x^{n-s-1} z_n^{(n-2)} - (n-s-1) x^{n-s-2} z_n^{(n-3)} + (n-s-1)(n-s-2) x^{n-s-3} z_n^{(n-4)} + \\ + \ldots + \varepsilon_{n-s-1}\, \pi(n-s-1)\, z_n^{(s-1)},$$

o più generalmente, le $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ nelle formole che si hanno dalla (3) siano prese in modo che venga zero la somma $\sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} h_s$.

Con queste espressioni di Θ_n quando sarà stata scelta come vorremo la funzione z_n, avremo al solito i valori di Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ col porvi per le $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ respettivamente $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e i valori di $z_1, z_2, \ldots z_n$ e di $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ per $x = x_1$; e dopo, sostituendo nella formola (2), si troverà che, per ogni funzione che sarà stata scelta per z_n, avremo una espressione dell'integrale della (1) in quei tratti (α, x) relativi ad x nei quali la z_n e i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ si mantengono regolari e a_0 è diverso da zero, e anche in quei tratti nei quali pure non verificandosi tutte queste particolarità si venga a rientrare in uno dei casi considerati ai §§ 524 e seg. (pag. 729 e seg.)

555. — Noi applicheremo questi risultati col prendere z_n in modo da avere $a_0 Q = 1$, ciò che avverrà quando sia $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2}\, a_0}$, giacchè evidentemente in questo caso in cui $z_1 = 1$, $z_2 = x$, $z_3 = x^2, \ldots, z_{n-1} = x^{n-2}$ si ha $Q = \pi_{n-2} z_n^{(n-1)}$ (*).

(*) Ricordiamo che avendosi una equazione lineare e omogenea qualsiasi

$$l_0 z^{(n)} + l_1 z^{(n-1)} + l_2 z^{(n-2)} + \ldots + l_{n-1} z' + l_n z = 0,$$

pel Wronskiano Q di un suo sistema fondamentale qualunque di integrali si ha la formola di Liouville $Q = \text{cost.}\, e^{-\int \frac{l_1}{l_0} dx}$, e quindi se si vuole che per questi integrali si abbia $a_0 Q = \text{cost.}$ bisognerà che sia $a_0 e^{-\int \frac{l_1}{l_0} dx} = \text{cost.}$, ovvero $\int \frac{l_1}{l_0} dx = \log a_0 + \text{cost.}$, o anche $\frac{l_1}{l_0} = \frac{a'_0}{a_0}$, e viceversa.

Da questo si deduce che per ogni equazione lineare (1) omogenea o no d'ordine n che si consideri nella quale il coefficiente del primo termine sia a_0, i sistemi di funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pei quali si ha $a_0 Q = \text{cost.}$ sono tutti e soli i sistemi fondamentali d'integrali della equazione lineare omogenea

$$a_0 z^{(n)} + a'_0 z^{(n-1)} + l_2 z^{(n-2)} + l_3 z^{(n-3)} + \ldots + l_{n-1} z' + l_n z = 0,$$

nella quale le $l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}, l_n$ restano arbitrarie.

Prendendo $l_2 = l_3 = \ldots = l_{n-1} = l_n = 0$, questa equazione si riduce all'altra

Prenderemo cioè $z_n^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2}\, a_0}$, e allora sarà $z_n^{(n-2)} = \frac{1}{\pi_{n-2}} \int \frac{dx}{a_0}$,

$z_n^{(n-3)} = \frac{1}{\pi_{n-2}} \int dx \int \frac{dx}{a_0}, \dots, z_n = \frac{1}{\pi_{n-2}} \int dx \int dx \int dx \dots \int \frac{dx}{a_0}$, le costanti in questi integrali potendo venire determinate come meglio si crederà: e sostituendo ora questo valore di z_n nelle espressioni precedenti (4) di Θ_n, per es. nella prima, si troverà

$$(6) \qquad \Theta_n = \sum_1^{n-1} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} \int \frac{x^{n-s-1}}{a_0}\, dx + \pi_{n-2}\, \theta_n ,$$

intendendo ora che in questa formola gli integrali possano senz'altro determinarsi colla formola (5) nella quale per le $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-2)}$ devono prendersi i valori precedenti.

Avuto così questo valore di Θ_n, basterà farvi le solite sostituzioni per calcolare i valori di Q_c, q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$; e dopo sostituendo nella formola (2) avremo una espressione in serie dell'integrale della (1), per la quale si può dire intanto che saremo certi che essa varrà in tutti quei tratti nei quali $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ e X sono regolari e a_0 è diverso da zero, supposto, bene inteso, che anche il numero α che figura nella formola (2) sia preso nei tratti che si considerano.

In questi casi poi i primi $n-1$ dei polinomî aggiunti cioè $\varepsilon_{n+1} Z_1$, $\varepsilon_{n+1} Z_2$, $\dots, \varepsilon_{n+1} Z_{n-1}$ si semplicizzano assai, e anche l'ultimo $\varepsilon_{n+1} Z_n$ si semplicizza pure, perchè, col valore scelto di z_n, avendosi $a_0 z^{(n-1)} = \frac{1}{\pi_{n-2}} =$ cost. e quindi $(a_0 z^{(n-1)})' = 0$ o $a_0 z^{(n)} = -a'_0 z^{(n-1)}$, basterà sviluppare colla formola di Leibnitz i primi termini di quel polinomio aggiunto $\varepsilon_{n+1} Z_n$ per trovare che nel caso attuale esso non conterrà affatto la derivata n^a di z_n, e i termini in $z_n^{(n-1)}$ e $z_n^{(n-2)}$ verranno ad essere i due $\left((n-1)a'_0 - a_1\right) z_n^{(n-1)}$ e $\left(\frac{n(n-1)}{2} a''_0 - (n-1)a'_1 + a_2\right) z_n^{(n-2)}$, il primo dei quali si riduce anche a $\frac{(n-1)a'_0 - a_1}{\pi_{n-2}\, a_0}$ e viene a mancare del tutto nel caso particolare di $a_1 = (n-1)a'_0$, nel qual caso l'altro termine si riduce a $\left(a_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} a''_0\right) z_n^{(n-2)}$, e quindi in particolare per quelle equazioni del second'ordine nelle quali si abbia $a_1 = a'_0$ si riduce ad $a_2 z_2$ essendo allora $z_2 = \int \frac{dx}{a_0}$.

semplicissima $(a_0 z^{(n-1)})' = 0$ che dà il sistema $z_1 = 1$, $z_2 = x$, $z_3 = x^2, \dots, z_{n-1} = x^{n-2}$, $z_n =$ cost. $\int dx \int dx \dots \int \frac{dx}{a_0}$ del quale ci occupiamo sopra.

E se sarà $a_0 = 1$ e $l_2, l_3, \dots, l_{n-1}$ e l_n si prenderanno tutte costanti, la equazione che allora determinerà le $z_1, z_2, \dots, z_n$ avrà la equazione caratteristica

$$\omega^n + l_2 \omega^{n-2} + l_3 \omega^{n-3} + \dots + l_{n-1} \omega + l_n = 0 ,$$

le cui radici potranno anche essere tutte o in parte eguali fra loro; e riferendosi ai casi considerati nei paragrafi precedenti saremo in quelli degli stessi casi nei quali la somma σ delle dette radici è uguale a zero.

556. — Se poi si ha riguardo ai valori precedenti di Θ_n, e a quelli che si avranno ora pei varii polinomii aggiunti $\varepsilon_{n+1} Z_1$, $\varepsilon_{n+1} Z_2, \dots, \varepsilon_{n+1} Z_{n-1}$, $\varepsilon_{n+1} Z_n$ che verranno a figurare nella formola (2) che dà l'integrale, si vede di qui in particolare che per quelle equazioni speciali (1) per le quali il coefficiente a_0 sarà *una potenza positiva* di x, e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ e X saranno polinomi razionali interi pure di x, la espressione che si avrà per l'integrale della stessa formola, quando in essa α non sia presa uguale a zero, pure potendo però essere prossima a zero quanto si vuole, verrà data in serie di somme di potenze intere positive e negative di x e di potenze intere e positive di $\log x$; e questa espressione varrà in tutti quei tratti che non comprendono il punto $x = 0$ neppure agli estremi, pure potendo con uno di questi estremi avvicinarsi a zero quanto si vuole.

E mutando x in $x - k$ nelle formole precedenti, cioè prendendo

$$z_1 = 1,\ z_2 = x - k,\ z_3 = (x-k)^2, \dots, z_{n-1} = (x-k)^{n-2},\ z_n = \frac{1}{\pi_{n-2}} \int dx \int dx \int \dots \int \frac{dx}{a_0},$$

ciò che evidentemente potrà sempre farsi, si avranno sviluppi dello stesso genere per l'integrale della (1) validi per altri tratti che non terminino al punto $x = k$, pure potendo un estremo essere vicino quanto si vuole a questo punto (*).

557. — Come abbiamo detto, le espressioni dell'integrale della equazione (1) delle quali è parola nei paragrafi precedenti son dimostrate ora soltanto pel caso che nei tratti che si considerano non si trovino neppure agli estremi dei punti nei quali il primo coefficiente sia zero; ma valendosi delle considerazioni fatte ai §§ 524 e seg. o di altre simili, è facile vedere che i risultati stessi

(*) Questi risultati, come ebbi a notare nel § 17 della mia memoria citata al § 549 sotto certe condizioni continuano a valere anche quando si suppone che x sia una variabile complessa.

continuano in certi casi a sussistere anche quando questa condizione non è soddisfatta.

Supponiamo senz'altro per semplicità che la equazione data (1) sia omogenea, cioè sia $X=0$, e che il punto nel quale ora ammetteremo che a_0 possa anche annullarsi sia il punto $x=0$, restando però sempre a_0 e gli altri coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ regolari in tratti che comprendono questo punto $x=0$ come punto interno o come estremo; e in questi tratti, a_0 *non si annulli mai* salvo tutt'al più come abbiamo detto nel punto $x=0$ che ora prenderemo come punto α nella solita formola (2), venendo così a considerare soltanto tratti che partono da questo punto $x=0$.

Allora, a causa della continuità, a_0 in questi tratti non cambierà mai di segno, e quando per $x=0$ si annulli, a seconda del suo modo di tendere a zero gli integrali indefiniti $\int \frac{dx}{a_0}, \int dx \int \frac{dx}{a_0}, \int dx \int dx \int \frac{dx}{a_0}, \dots$, e gli altri $\int \frac{dx}{a_0}, \int \frac{x\,dx}{a_0}, \int \frac{x^2\,dx}{a_0}, \dots$ che figurano nelle $z_n^{(n-2)}, z_n^{(n-3)}, z_n^{(n-4)}, \dots$, e nella espressione (6) di Θ_n e quindi anche nella $\varepsilon_{n+1} Z_n$ potranno, tutti o alcuni, divenire infiniti per $x=0$; e propriamente se a_0 per $x=0$ diverrà infinitesimo di ordine uguale o superiore al numero intero h, i primi h sì degli uni che degli altri degli stessi integrali saranno tutti infiniti per $x=0$, e se al tempo stesso l'ordine d'infinitesimo di a_0 non supererà ad es. il numero $h+\mu$ con $0<\mu<1$, l'$(h+1)^0$ di questi integrali sarà certamente determinato e finito (*).

(*) Se a_0 per $x=0$ diviene infinitesima di ordine uguale o superiore al numero ν, e nell'intorno che si considera del punto $x=0$ (per es. l'intorno a destra) è sempre positiva, allora in questo intorno avremo sempre $\frac{a_0}{x^\nu}<p$ e $\frac{1}{a_0}>\frac{1}{p\,x^\nu}$ essendo p un certo numero positivo finito e diverso da zero, e quindi indicando con x e b, con $x<b$, due numeri in quell'intorno, avremo $\int_x^b \frac{dx}{a_0} > \frac{1}{p(\nu-1)}\left(\frac{1}{x^{\nu-1}}-\frac{1}{b^{\nu-1}}\right)$ per $\nu>1$, e $\int_x^b \frac{dx}{a_0} > \frac{1}{p}(\log b-\log x)$ per $\nu=1$.

Per questo avremo anche evidentemente

$\int_x^b dx \int_x^b \frac{dx}{a_0} > \frac{1}{p(\nu-1)(\nu-2)}\left(\frac{1}{x^{\nu-2}}-\frac{\nu-2}{b^{\nu-1}}(b-x)-\frac{1}{b^{\nu-2}}\right)$ per $\nu>2$ e similmente avremo $\int_x^b dx \int_x^b \frac{dx}{a_0} > \frac{1}{p}\left(\log b-\log x-\frac{b-x}{b}\right)$ per $\nu=2$; e quindi così continuando

Di questi integrali in Θ_n e nel valore di $\varepsilon_{n+1} Z_n$ ne figurano $n-1$, e oltre a ciò in $\varepsilon_{n+1} Z_n$ per quanto si disse in fine del § 555 vi figura il termine $\frac{(n-1)\,a'_0 - a_1}{a_0}$ del quale però spesso potremo anche fare astrazione, perchè, salvo qualche altra singolarità che talvolta potrà allora venire a comparire negli altri coefficienti, potremo sempre farlo sparire colla trasformazione del § 495 [pag. 693] cioè col moltiplicare tutta la equazione per un coefficiente adattato; quindi, salva tutt'al più la presenza di questo termine, nel caso delle equazioni del second'ordine qualunque sia l'ordine d'infinitesimo di a_0 per $x=0$, in Θ_n e in $\varepsilon_{n+1} Z_n$ vi figurerà *un solo* integrale, cioè $\int \frac{dx}{a_0}$ o z_2, che potrà essere infinito per $x=0$; e nel caso delle equazioni di ordine superiore al secondo sì in Θ_n che in $\varepsilon_{n+1} Z_n$, salvo il caso di relazioni speciali fra i coefficienti ve ne figurerà sempre *più d'uno* a meno che a_0 non divenga infinitesimo per $x=0$ soltanto di ordine inferiore al secondo e per modo che gli integrali $\int \frac{x\,dx}{a_0}$, e $\int dx \int \frac{dx}{a_0}$ siano *entrambi* determinati e finiti (*).

---

si vede che i primi h degli integrali $\int \frac{dx}{a_0}, \int dx \int \frac{dx}{a_0}, \int dx \int dx \int \frac{dx}{a_0} \dots$ saranno tutti infiniti per $x=0$, se a_0 per $x=0$ diverrà infinitesimo di ordine uguale o superiore al numero intero h.

Risultati simili si avranno per gli integrali $\int \frac{dx}{a_0}, \int \frac{x\,dx}{a_0}, \int \frac{x^2\,dx}{a_0}, \dots$ precisamente come è detto nel testo.

Se poi, essendo h un numero intero, a_0 per $x=0$ diverrà infinitesimo di ordine uguale o inferiore a $h+\mu$ con $0<\mu<1$, allora avendosi, nell'intorno di a_0, $\frac{a_0}{x^{h+\mu}}>q$ con q numero positivo finito e diverso da zero, con considerazioni simili si giungerà a trovare che l'$(h+1)^0$ sì dei primi che dei secondi degli integrali precedenti è finito.

Tutto questo però quando, come si suppone nel testo, a_0 fuori del punto $x=0$ sia sempre diverso da zero e dello stesso segno.

(*) Osserviamo in modo generale che se $f(x)$ è una funzione di x finita, continua e positiva nell'intorno di $x=0$, che in questo punto $x=0$ si annulla e nello stesso intorno ha una derivata $f'(x)$ che non cangia mai di segno e al tendere di x a zero cresce continuamente (o almeno non decresce) e ha per limite l'infinito, pel teorema degli accrescimenti finiti avremo $\frac{f(x)}{x}=f'(\bar{x})$ essendo $\bar{x}$ un numero compreso fra 0 e x (0 e x escl.), e quindi sarà $f(x)\geq x f(x)$.

558. — Per semplicizzare dunque questi studii, porremo ora la condizione che la equazione data o sia del second'ordine, o quando sia invece di ordine superiore al secondo il suo primo coefficiente a_0, oltre a non cambiare mai di segno nell'intervallo che si considera a partire da $x=0$, non divenga infinitesimo per $x=0$ altro che di ordine inferiore al secondo e per modo che la funzione $\frac{x}{a_0}$ sia atta alla integrazione per $x=0$, con che per la ipotesi fatta su a_0 lo stesso avverrà anche per l'altra $\int \frac{dx}{a_0}$; pure osservando che, volendolo, si potrebbero trattare con facilità anche altri casi.

Di qui risulta che quando una funzione continua e positiva $\varphi(x)$ al tendere di x a zero tende all'infinito crescendo sempre, o almeno non decrescendo, ed è integrabile nell'intorno dello stesso punto $x=0$, avremo $\int_0^x \varphi(x)dx \geq x\varphi(x)$, dal che apparisce che, sotto le fatte ipotesi, per x sufficientemente piccolo dovremo avere $x\varphi(x) < \sigma$, essendo σ un numero positivo piccolo ad arbitrio; cioè $\varphi(x)$ dovrà divenire infinitesima di ordine inferiore al primo.

Per questo, considerando l'integrale $\int_\delta^x dx \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ e osservando che colla integrazione per parti si ha

$$(\alpha) \qquad \int_\delta^x dx \int_x^b \frac{dx}{a_0} = \left(x \int_x^b \frac{dx}{a_0}\right)_\delta^x + \int_\delta^x \frac{x\,dx}{a_0} = x \int_x^b \frac{dx}{a_0} - \delta \int_\delta^b \frac{dx}{a_0} + \int_\delta^x x \frac{dx}{a_0},$$

si vede subito che se l'integrale $\int_0^x dx \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ che figura nel primo membro ha un significato lo stesso accadrà dell'altro $\int_0^x x \frac{dx}{a_0}$ quando a_0, pure annullandosi per $x=0$, fuori di questo punto nell'intorno che si considera sia continuo e diverso da zero, perchè per l'osservazione fatta il termine $\delta \int_\delta^b \frac{dx}{a_0}$ tenderà a zero con δ. e si avrà quindi $\lim_{\delta=0} \int_\delta^x \frac{x\,dx}{a_0} = \int_0^x dx \int_x^b \frac{dx}{a_0} - x \int_x^b \frac{dx}{a_0}$.

Viceversa se, sempre sotto le stesse condizioni per a_0, la funzione $\frac{x}{a_0}$ sarà integrabile nello stesso intorno del punto $x=0$, siccome per $x<b$ e a_0 positivo si avrà $\int_x^b \frac{x\,dx}{a_0} = \bar{x} \int_x^b \frac{dx}{a_0} > x \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ e a fortiori $\int_0^b \frac{x\,dx}{a_0} > x \int_x^b \frac{dx}{a_0}$, dalla formola precedente (α) si dedurrà intanto che anche al tendere di δ a zero l'integrale del primo membro della precedente (α) sarà sempre inferiore al numero finito $3 \int_0^b \frac{x\,dx}{a_0}$.

Con queste limitazioni, se indichiamo per semplicità con $\varphi(x)$ l'integrale $\int \frac{dx}{a_0}$, questa funzione $\varphi(x)$ potrà ancora divenire infinita per $x=0$ e varierà sempre crescendo in valore assoluto coll'avvicinarsi di x a zero perchè a_0 nel tratto che si considera ha sempre lo stesso segno (*); e nel caso di $n=2$ avremo $z_2=\varphi(x)$, mentre per $n>2$ avremo $z_n^{(n-2)}=\varphi(x)$ e potremo intendere che le $z_n, z_n', z_n'', \ldots, z^{(n-3)}$ siano determinate colle formole $z_n^{(n-3)} = \int_0^x \varphi(x)\,dx$, $z_n^{(n-4)} = \int_0^x dx \int_0^x \varphi(x)\,dx, \ldots, z_n = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \ldots \int_0^x \varphi(x)\,dx$, nelle quali gli integrali, per le ipotesi fatte, avranno tutti un significato.

Osservando dunque che coll'impiccolire di δ l'integrale $\int_\delta^b dx \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ (supposto a_0 positivo) va sempre crescendo mentre come abbiamo osservato si mantiene sempre inferiore al numero finito $3 \int_0^b \frac{x\,dx}{a_0}$, si conclude che esso ha un limite determinato per $\delta=0$ e quindi anche la funzione $\int_x^b \frac{dx}{a_0}$ è integrabile nell'intorno di $x=0$; talchè si può ora evidentemente affermare che « sotto la fatta ipotesi che a_0, « pure annullandosi per $x=0$, fuori di questo punto nell'intorno che si considera « sia continua e diversa da zero, le due funzioni $\int \frac{dx}{a_0}$ e $\frac{x}{a_0}$ saranno sempre inte- « grabili insieme ».

Tutto questo però sotto la condizione qui ricordata che a_0 nell'intorno che si considera di $x=0$ sia continua e diversa da zero (o almeno non cangi mai segno), che altrimenti, se questo non fosse, dalla (α) si vede che dalla piccolezza di uno dei due integrali $\int_\delta \frac{x\,dx}{a_0}$ e $\int_\delta^\varepsilon dx \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ non se ne può dedurre quella dell'altro a meno che non si sappia che anche $\left(x \int_x^b \frac{dx}{a_0}\right)_\delta^\varepsilon$ è piccolo quanto si vuole, cioè che il prodotto $x \int_x^b \frac{dx}{a_0}$ ha un limite determinato e finito per $x=0$.

(*) Supposto, come ordinariamente sarà, che il tratto che si considera per x sia quello dalla parte positiva e che a_0 sia zero per $x=0$, ma fuori di questo punto sia sempre positivo, l'integrale indefinito $\int \frac{dx}{a_0}$ o $\varphi(x)$, quando al tendere di x a zero cresce indefinitamente, andrà verso $-\infty$. È per questo che sopra si parla sempre di valore assoluto di $\varphi(x)$.

Quanto poi al valore (6) di Θ_n osserviamo che si potrà scrivere sotto la forma

$$\Theta_n = \sum_1^{n-2} \varepsilon_{n-s} \frac{\theta_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} \int_0^x \frac{x^{n-s-1}}{a_0}\,dx - \frac{\theta_{n-1}}{\pi(n-2)}\,\varphi(x) + \pi_{n-2}\,\theta_n,$$

nella quale la somma $\sum\limits_1^{n-2}$ vi sarà soltanto nel caso delle equazioni di ordine superiore al secondo; e allora in essa gli integrali per le ipotesi fatte avranno un significato, e dovranno intendersi limitati, come abbiamo fatto, fra 0 e x come quelli di $z_n, z'_n, z''_n, \dots, z_n^{(n-3)}$, dovendo sempre essere soddisfatta la (5).

Segue di qui che i valori di $\varepsilon_{n-1} A_x$ e $\bar q_{x_1 x_1}$ che figurano nella solita formola (2) che dà l'integrale prenderanno ora la forma seguente

$$(7)\quad \varepsilon_{n-1} A_x = \sum_1^{n-2} \varepsilon_{s-1} \frac{c_s}{\pi(s-1)\,\pi(n-s-1)} \int_0^x \frac{x^{n-s-1}}{a_0}\,dx + \varepsilon_{n-2}\frac{c_{n-1}}{\pi(n-2)}\,\varphi(x) + \varepsilon_{n-1}\,\pi_{n-2}\,c_n,$$

$$(8)\quad \bar q_{x,x_1} = \sum_1^{n-2} \varepsilon_{h-1} \frac{\sum\limits_0^n \varepsilon_i\,(a_i\,x^{h-1})_{x_1}^{(n-i)}}{\pi(h-1)\,\pi(n-h-1)} \int_0^x \frac{x^{n-h-1}}{a_0}\,dx +$$

$$+ \varepsilon_{n-2}\frac{\varphi(x)}{\pi(n-2)} \sum_0^n \varepsilon_i\,(a_i\,x^{n-2})_{x_1}^{(n-i)} + \varepsilon_{n-1}\,\pi_{n-2} \sum_0^n \varepsilon_i\,(a_0\,z_n)_{x_1}^{(n-i)},$$

e in questa espressione di $\bar q_{x,x_1}$ l'ultimo termine, che all'infuori del fattore π_{n-2} rappresenta anche $(Z_n)_{x_1}$, per quanto dicemmo in fine del § 555 si potrà scrivere sotto la forma

$$\varepsilon_{n-1}\left[\frac{(n-1)\,a'_0 - a_1}{a_0} + \left(\frac{n(n-1)}{2}\,a''_0 - (n-1)\,a'_1 + a_2\right)\varphi(x)\right]_{x_1} + \varepsilon_{n-1}\,\pi_{n-2}\left(q_3\,z^{(n-3)} + q_4\,z^{(n-4)} + \dots\right)_{x_1},$$

essendo le $q_3, q_4, \dots$ quantità che si determineranno coll'applicazione della solita formola di Leibnitz come dicemmo al § 534, e oltre a ciò il penultimo termine dello stesso valore scritto sopra di $\bar q_{x,x_1}$, sempre coll'applicazione della formola di Leibnitz potrà scriversi

$$\varepsilon_{n-2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\,a''_0 - (n-1)\,a'_1 + a_2\right)_{x_1}\varphi(x) + \varepsilon_{n-2}\left(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{n-2}\,x^{n-2}\right)_{x_1}\varphi(x),$$

essendo anche le $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$ quantità finite composte coi coefficienti della equazione data e colle loro derivate; e queste come le $q_3, q_4, \dots$ mancheranno tutte nel caso delle equazioni di secondo ordine, come mancheranno

allora le somme $\sum\limits_1^{n-2}$ nei valori precedenti di $\varepsilon_{n-1} A_x$ e $\bar q_{x,x_1}$, le quali somme del resto, per le equazioni di ordine superiore al secondo, nei tratti che si considerano saranno sempre numericamente inferiori a numeri finiti.

Ponendo dunque per abbreviare

$$(9)\quad \begin{cases} P_{x,x_1} = \sum\limits_1^{n-2} \varepsilon_{h-1} \dfrac{\sum\limits_0^n \varepsilon_i\,(a_i\,x^{h-1})_{x_1}^{(n-i)}}{\pi(h-1)\,\pi(n-h-1)} \displaystyle\int_0^x \frac{x^{n-h-1}}{a_0}\,dx + \varepsilon_{n-1}\,\pi_{n-2}\left(q_3\,z^{(n-3)} + q_4\,z^{(n-4)} + \dots\right)_{x_1}, \\ p(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{n-2}\,x^{n-2}, \end{cases}$$

potremo scrivere

$$(10)\quad \begin{cases} \bar q_{x,x_1} = P_{x,x_1} + \varepsilon_{n-2}\,p(x_1)\,\varphi(x) + \varepsilon_{n-2}\left[\dfrac{n(n-1)}{2}\,a''_0 - (n-1)\,a'_1 + a_2\right]_{x_1}\{\varphi(x) - \varphi(x_1)\} + \\ \qquad\qquad + \varepsilon_{n-1}\left[\dfrac{(n-1)\,a'_0 - a_1}{a_0}\right]_{x_1}, \end{cases}$$

e in questa le quantità P_{x,x_1} e $p(x_1)$, nei tratti che si considerano, per le equazioni di ordine superiore al secondo saranno sempre numericamente inferiori a numeri finiti e si annulleranno per $x=0$ o $x_1=0$, mentre mancheranno senz'altro nel caso delle equazioni del second'ordine.

Però, all'infuori di P_{x,x_1}, i varii termini di $\bar q_{x,x_1}$ come il penultimo di $\varepsilon_{n-1} A_x$, per la presenza di $\varphi(x)$ o del divisore a_0 potranno divenire infiniti per $x=0$ o $x_1=0$, e anzi l'ultimo termine di $\bar q_{x,x_1}$ lo diverrà sempre se a_0 si annulla per $x=0$, a meno che non sia $a_1 = (n-1)\,a'_0$ che allora il termine stesso mancherà senz'altro, o che la quantità $(n-1)\,a'_0 - a_1$ tenda a zero con x di un ordine non inferiore a quello di a_0: quindi, per la presenza di questi termini o di quelli corrispondenti in x_{m-1} e x_m nelle quantità $A_{x_m}\,\bar q_{x_{m-1}, x_m}$ che figurano negli integrali della solita formola (2), potranno aversi degli inconvenienti in questa formola quando vi si supponga $x=0$.

Però, come già osservammo, la difficoltà proveniente dalla presenza dell'ultimo termine in $\bar q_{x,x_1}$ potrà togliersi col processo del § 495 (pag. 693) cioè col moltiplicare la equazione data per un fattore conveniente, perchè con questa moltiplicazione l'equazione potrà ridursi a soddisfare alla condizione $a_1 = (n-1)\,a'_0$, salvo però allora ad assicurarsi che non cessino di essere regolari i varii coefficienti della nuova equazione; e anzi allora il penultimo termine di $\bar q_{x,x_1}$ prenderà la forma più semplice $\varepsilon_{n-2}\left(a_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,a''_0\right)_{x_1}\{\varphi(x) - \varphi(x_1)\}$;

e quanto al penultimo termine di $\varepsilon_{n-1} A_x$ quando porti inconvenienti si potrà sempre farlo sparire prendendo $c_{n-1}=0$, cioè limitandosi a considerare integrali particolari invece dell'integrale generale.

559. — Ciò posto, limitiamoci ora, anche per le equazioni del second'ordine, al caso in cui $\varphi(x)$ se non si mantiene finito si mantiene però integrabile per $x=0$, e supponiamo che l'ultimo termine nel valore (10) di $\bar{q}_{x,x_1}$ manchi per essere $a_1=(n-1)a'_0$, o almeno sia integrabile anche ridotto ai valori assoluti nell'intorno di $x_1=0$; allora sarà facile vedere che, salvo a prendere $c_{n-1}=0$ per non fare comparire più il $\varphi(x)$ in A_x quando $\varphi(x)$ non sia finita per $x=0$, la presenza di $\varphi(x_{m-1})$ e $\varphi(x_m)$ in $\bar{q}_{x_{m-1},x_m}$ non porterà affatto inconvenienti, e la formola (2) in questi casi rappresenterà sempre l'integrale particolare corrispondente a $c_{n-1}=0$ o l'integrale generale della nostra equazione.

Poste infatti queste condizioni si osservi che, per essere ora $a_0 Q=1$, il termine generale della serie $\sum_1^\infty$ che figura nella formola (2) diviene

$$(11)\quad \varepsilon_{n-1}^{m+1}\int_0^x \bar{q}_{x,x_1}dx_1\int_0^{x_1}\bar{q}_{x_1x_2}dx_2\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_{m-2}}\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}dx_{m-1}\int_0^{x_{m-1}}A_{x_m}\bar{q}_{x_{m-1},x_m}dx_m\,;$$

e intanto nel caso in cui a_0 non si annulli mai nei tratti che si considerano uscenti dal punto $x=0$ o quando, pure annullandosi a_0 per $x=0$ (ma non in altri punti dell'intervallo che si considera) l'integrale $\varphi(x)=\int\frac{dx}{a_0}$ si mantenga finito, le A_x e $\bar{q}_{x,x_1}$ pei valori di x nel tratto che si considera saranno sempre inferiori a numeri finiti, e allora saremo in uno dei casi in cui questo termine si comporta come quello di una serie esponenziale, e quindi, per quanto dicemmo al § 525, la formola (2) rappresenterà l'integrale della nostra equazione; e questo sarà l'integrale generale perchè ora non occorrerà prendere $c_{n-1}=0$.

Quando poi $\varphi(x)$ diventi infinita per $x=0$, si osserverà che, per essere a_0 sempre dello stesso segno nel tratto che si considera, la funzione $\varphi(x)$ diminuirà in valore assoluto coll'allontanarsi di x da zero, e quindi, nei termini che compariscono negli integrali relativi a x_m che qui figurano, per essere $x_m\leq x_{m-1}$, si avrà sempre $|\varphi(x_{m-1})|\leq|\varphi(x_m)|$ e $|\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)|<2|\varphi(x_m)|$; e quindi, poichè supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ sia atta alla integrazione negli intorni di $x=0$, l'integrale $\int_0^{x_{m-1}}|\bar{q}_{x_{m-1},x_m}|\,dx_m$ sarà certamente inferiore a un numero finito g per tutti i valori di x_{m-1} fra 0 e x, e questo numero g

potrà prendersi tanto più piccolo quanto più x e quindi x_{m-1} saranno prossimi a zero.

Supponendo dunque dapprima $c_{n-1}=0$, con che A_x si manterrà sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito A per tutti i valori di x nel tratto che si considera, è certo che il valore assoluto dell'integrale $\int_0^{x_{m-1}}A_{x_m}\bar{q}_{x_{m-1},x_m}dx$ sarà inferiore ad Ag.

Da ciò segue immediatamente che in questo caso di $c_{n-1}=0$ l'integrale doppio $\int_0^{x_{m-2}}\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}dx_{m-1}\int_0^{x_{m-1}}A_{x_m}\bar{q}_{x_{m-1},x_m}dx_m$ sarà numericamente inferiore a Ag^2, e infine l'integrale multiplo (11) che è il termine generale della serie $\sum_1^\infty$ che figura nella (2) sarà numericamente inferiore ad Ag^m: quindi se, come potrà sempre farsi, l'intervallo da considerarsi che parte dal punto $x=0$ sarà preso talmente piccolo che per tutti i valori di $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ che cadono in esso il numero g venga ad essere inferiore ad 1, la stessa serie $\sum_1^\infty$ della (2) avrà i suoi termini numericamente inferiori a quelli di una progressione geometrica colla ragione minore di 1, e quindi essa sarà ancora convergente e convergente in ugual grado nello stesso intervallo; e per questo e perchè, sotto le attuali ipotesi, le funzioni $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ sono sempre finite e la Z_n è atta alla integrazione anche ridotta a valori assoluti, ricordando quanto si disse nel § 525 si conclude subito che nel caso attuale la stessa formola (2) ci darà l'integrale particolare della nostra equazione corrispondente a $c_{n-1}=0$.

560. — Se poi c_{n-1} non sarà zero, A_{x_m} avrà una parte sempre numericamente inferiore a un numero finito A, e un'altra $\varepsilon_{n-1}c_{n-1}\varphi(x_m)$ che crescerà indefinitamente coll'avvicinarsi di x_m a zero, e la serie $\sum_1^\infty$ che figura nella formola (2) si spezzerà in due serie l'una delle quali sarà convergente e convergente in ugual grado perchè sarà precisamente quella che si aveva nel caso precedente di $c_{n-1}=0$, e l'altra avrà per termine generale

$$\varepsilon_{n-1}^m c_{n-1}\int_0^x \bar{q}_{x,x_1}dx_1\int_0^{x_1}\bar{q}_{x_1,x_2}dx_2\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_{m-2}}\bar{q}_{x_{m-2},x_{m-1}}dx_{m-1}\int_0^{x_{m-1}}\varphi(x_m)\,\bar{q}_{x_{m-1},x_m}dx_m\,,$$

e in questo nell'ultimo integrale verranno a comparire i quadrati di $\varphi(x_m)$: talchè se si aggiunge ora la condizione che anche il quadrato di $\varphi(x)$ sia integrabile fra 0 e x, il medesimo integrale per ogni valore di x_{m-1} fra 0 e x sarà numericamente inferiore a un numero finito A_1, e tutto l'integrale multiplo sarà numericamente inferiore a $A_1 g^{m-1}$, e anche questa seconda serie sarà convergente e convergente in ugual grado in intervalli convenienti che partono da $x=0$. E così, osservando anche che sotto le nostre ipotesi attuali rispetto a $\varphi(x)$ e a $\varphi^2(x)$ non solo le Z_r, ma anche i prodotti $A_x Z_r$ sono integrabili fra 0 e x, per quanto mostrammo nel § 525, si può dire che negli stessi intervalli (il punto $x=0$ al più escluso) quando anche il quadrato di $\varphi(x)$ è integrabile fra 0 e x, la formola (2) rappresenterà ancora l'integrale generale della nostra equazione.

561. — Così dunque, nei casi in cui risultino soddisfatte le varie condizioni enunciate nei due paragrafi precedenti si può essere certi che la formola (2) dove A_x e $\bar{q}_{x,x_1}$ sono dati dalle formole (7) e (10) del § 558 rappresenta l'integrale, generale o particolare secondo i casi, della equazione omogenea data, in intervalli che partono dal punto $x=0$, anche quando a_0 si annulla in questo punto senza annullarsi però in altri punti di quegli intervalli.

Avendo poi riguardo ai detti valori di A_x e $\bar{q}_{x,x_1}$, e tenendo conto dei fattori $p(x_1)$ e $\frac{n(n-1)}{2}a''_0-(n-1)a'_1+a_2$ che in $\bar{q}_{x,x_1}$ moltiplicano $\varphi(x)$ e $\varphi(x_1)$, si vede anche come non sia da escludere che, in seguito a speciali particolarità che presentino i coefficienti della equazione data, vi siano altri casi nei quali la (2) rappresenterà ancora l'integrale della stessa equazione.

Così ad es. nel caso delle equazioni del second'ordine non occorrerà che risulti soddisfatta la condizione che l'ordine d'infinitesimo di a_0 per $x=0$ sia tale che $\varphi(x)$ risulti integrabile per $x=0$, se la espressione $a''_0-a'_1+a_2$ che figura nel coefficiente di $\varphi(x)-\varphi(x_1)$ in $\bar{q}_{x,x_1}$ tenderà a zero con x e di un ordine sufficientemente grande per modo che risulti integrabile il prodotto di essa per $\varphi(x)$ o secondo i casi anche per $\varphi^2(x)$, come avviene ad esempio per la equazione

$$x^{\mu}y''+(a+\mu x^{\mu-1})y'+x\ \ y=0$$

nella quale μ sia un numero positivo comunque grande e ν sia un altro numero superiore a $\mu-2$ o a $2\mu-3$.

562. — Fermiamoci ora più specialmente sulle equazioni lineari del second'ordine applicandovi i risultati ottenuti; e pı ndiamole senz'altro omogenee e sotto la forma

$$(12)\qquad \frac{d\left(a_0\frac{dy}{dx}\right)}{dx}+a_2=0, \qquad \text{o} \qquad a_0y''+a'_0y'+a_2y=0,$$

alla quale, come più volte abbiamo detto, possono sempre ridursi moltiplicandole per un fattore conveniente.

Per queste equazioni i valori (7) e (10) di $\varepsilon_{n-1}A_x$ e $\bar{q}_{x,x_1}$, quando per comodo vi si cambii c_2 in $-c_2$ diverranno respettivamente $c_1\varphi(x)+c_2$ e $a_{2,x_1}\}\varphi(x)-\varphi(x_1)\{$, e la formola (2) che deve dare l'integrale y diverrà

$$(13)\qquad y=c_1\varphi(x)+c_2+\sum_1^{\infty}\varepsilon_m\int_0^x a_{2,x_1}\}\varphi(x)-\varphi(x_1)\{dx_1\int_0^{x_1}a_{2,x_2}\}\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\{dx_2\int_0^{x_2}\dots$$
$$\dots\int_0^{x_{m-1}}a_{2,x_m}\}c_1\varphi(x_m)+c_2\{\}\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\{dx_m,$$

essendo $\varphi(x)=\int\frac{dx}{a_0}$, e questa formola varrà sempre, anche se a_0 si annullerà per $x=0$ senza però annullarsi mai in altri punti dell'intervallo che si considera nel quale si a_0 che a_2 dovranno essere regolari, purchè nell'intorno del punto $x=0$ la funzione $\varphi(x)$ sia finita o almeno sia atta alla integrazione o lo sia il prodotto $a_{2,x}\varphi(x)$; con questo però che nei casi nei quali $\varphi(x)$ diviene infinita per $x=0$, volendo essere certi che non si abbiano singolarità converrà limitarsi a considerare soltanto l'integrale particolare che corrisponde a $c_1=0$, se non si saprà che anche $\varphi^2(x)$ o almeno il prodotto $a_{2,x}\varphi^2(x)$ è atto alla integrazione nell'intorno di $x=0$.

E in tutti i varii casi qui indicati se $\varphi(x)$ diviene infinita per $x=0$, l'integrale corrispondente a c_1 diverso da zero avrà in principio il termine $c_1\varphi(x)$ e quindi diverrà infinito come $c_1\varphi(x)$ col tendere di x a zero.

563. — Nel caso poi in cui $\varphi(x)$ e $a_{2,x}\varphi(x)$ sono finiti o almeno sono atti alla integrazione nell'intorno di $x=0$, quando si ponga $\int_0^x a_{2,x}\,dx=\psi(x)$ e $\int_0^x a_{2,x}\varphi(x)\,dx=\pi(x)$, queste funzioni $\psi(x)$ e $\pi(x)$ tenderanno a zero certamente con x; e se in ogni termine della serie che figura nella (13) applicheremo l'integrazione per parti all'ultimo integrale, basterà assicurarsi che $\varphi(x)$ sia finito per $x=0$ o che se diviene infinito lo diviene in modo che il prodotto $\}c_1\pi(x)+c_2\psi(x)\{\varphi(x)$ ha per limite zero per $x=0$, per potere dire che la formola (13) si trasforma nell'altra

$$(14)\qquad y=c_1\varphi(x)+c_2+\sum_1^{\infty}\varepsilon_m\int_0^x a_{2,x_1}\}\varphi(x)-\varphi(x_1)\{dx_1\int_0^{x_1}a_{2,x_2}\}\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\{dx_2\int_0^{x_2}\dots$$
$$\dots\int_0^{x_{m-2}}a_{2,x_{m-1}}\}\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\{dx_{m-1}\int_0^{x_{m-1}}\frac{c_1\pi(x_m)+c_2\psi(x_m)}{a_{0,x_m}}dx_m,$$

nella quale $\varphi(x)$, $\psi(x)$ e $\pi(x)$ rappresentano gli integrali $\int \frac{dx}{a_0}$, $\int_0^x a_2 dx$ e $\int^x a_2\varphi(x)\,dx$, salvo in certi casi a doversi limitare a considerare soltanto l'integrale particolare che corrisponde a $c_1=0$, come dicemmo sopra.

S'intende poi che la integrazione per parti che abbiamo fatto sull'ultimo integrale del termine generale della serie (13) potrà farsi al modo stesso anche sull'integrale relativo alla variabile x_{m-1} che figurerà nel termine generale della formola precedente dopo di avere eseguita la integrazione relativa alla variabile x_m; e dopo poi potranno continuare a farsi nello stesso modo successive integrazioni per parti per gli integrali relativi alle variabili rimanenti.

564. — Per quanto poi si riferisce alla condizione posta sopra pel prodotto $\{c_1\pi(x)+c_2\psi(x)\}\varphi(x)$, si può osservare che avendosi $\psi(x)=x\bar{a}_2$, dove $\bar{a}_2$ indica un certo numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di a_2, fra 0 e x, sarà $\psi(x)\varphi(x)=\bar{a}_2 x\varphi(x)$; e poichè, per quanto si disse nella nota in fine del § 557 (Pag. 787-88), quando l'infinitesimo di a_0 per $x=0$ sia tale che $\varphi(x)$ risulti finito o almeno atto all'integrazione nell'intorno di $x=0$, il prodotto $x\varphi(x)$ tenderà certamente a zero con x, così in questi casi la indicata condizione relativa al prodotto $\{c_1\pi(x)+c_2\psi(x)\}\varphi(x)$ può ridursi all'altra che il prodotto $\pi(x)\varphi(x)$ tenda a zero con x; e quando ci si limiti a considerare l'integrale particolare corrispondente a $c_1=0$ non sarà neppure il caso di occuparsene.

Quando poi, pure essendo $\varphi(x)$ infinito per $x=0$, si voglia ciò non ostante considerare anche l'integrale pel quale c_1 è diverso da zero (come già sappiamo che potrà farsi in certi casi), allora osservando che per le nostre ipotesi si ha (§ 185 pag. 287) $\pi(x)=\bar{\bar{a}}_2\int_0^x \varphi(x)\,dx$ dove con $\bar{\bar{a}}_2$ si indica ancora un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di a_2 fra 0 e x, si vede che sarà $\pi(x)\varphi(x)=\bar{\bar{a}}_2\varphi(x)\int_0^x\varphi(x)\,dx$; e per questa, quando oltre a $\varphi(x)$ anche il suo quadrato $\varphi^2(x)$ sia integrabile per $x=0$ si vede subito che risulterà soddisfatta senz'altro la condizione che il prodotto $\pi(x)\varphi(x)$ tenda a zero con x, e non sarà quindi più il caso di occuparsi di questa condizione, perchè allora per quanto osservammo nella ricordata nota del § 557, indicando con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo, per x

sufficientemente piccolo avremo sempre $x\varphi^2(x)<\sigma$ e quindi $|\varphi(x)|<\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{x}}$, e $\int_0^x|\varphi(x)|\,dx<2\sqrt{\sigma}\sqrt{x}$, e $\varphi(x)\int_0^x\varphi(x)dx<2\sigma$ (*).

565. — Alle osservazioni che abbiamo fatto aggiungiamo le seguenti.

Osserviamo che nei varii integrali che figurano nel termine generale della serie (13) i fattori $\varphi(x_{s-1})-\varphi(x_s)$ non mutano mai di segno nelle successive integrazioni (**), e se si ammette che nell'intervallo che si considera anche a_2 non cambii mai di segno e s'indicano con λ e Λ i suoi limiti inferiore e

---

(*) Senza ricorrere alle considerazioni fatte nella nota al § 557, si può osservare *in generale* che quando due funzioni $f(x)$ e $f_1(x)$ divengono infinite per $x=a$, e sono sempre positive nell'intorno che si considera di a (per es. in quello a destra), e in questo intorno sono anche integrabili insieme al loro prodotto, e una almeno di esse, per ès. $f(x)$, non và mai decrescendo al tendere di x ad a, allora dall'essere

$$\int_{a+\delta}^x f(x)f_1(x)\,dx=\bar{f}\int_{a+\delta}^x f_1(x)\,dx\,,$$

essendo $a+\delta$ e x, con $a+\delta<x$, due numeri compresi in quell'intorno e $\bar{f}$ un numero determinato compreso fra $f(x)$ e $f(a+\delta)$, si deduce che si avrà

$$\int_{a+\delta}^x f(x)f_1(x)\,dx>f(x)\int_{a+\delta}^x f_1(x)\,dx$$

e a fortiori sarà

$$\int_a^x f(x)f_1(x)\,dx>f(x)\int_{a+\delta}^x f_1(x)\,dx$$

ovvero

$$f(x)\int_a^x f_1(x)\,dx<\int_a^x f(x)f_1(x)\,dx+f(x)\int_a^{a+\delta}f_1(x)\,dx\,;$$

e poichè col prendere δ piccolissimo lasciando fermo x, l'ultimo termine del secondo membro si rende piccolo quanto si vuole, potremo anche scrivere

$$f(x)\int_a^x f_1(x)\,dx\leq\int_a^x f(x)f_1(x)\,dx\,,$$

e di qui risulta che, sotto le fatte ipotesi, il prodotto $f(x)\int_a^x f_1(x)\,dx$ col tendere di x ad a tenderà a zero.

Supponendo $a=0$ e $f(x)=f_1(x)=|\varphi(x)|$, si ha di qui, come dicemmo sopra, che il prodotto $\varphi(x)\int_0^x\varphi(x)dx$ tenderà a zero col tendere di x a zero.

(**) Si può aggiungere che questi fattori $\varphi(x_{s-1})-\varphi(x_s)$ sono anche sempre positivi se, come potremo sempre supporre, a_0 sarà positivo fra 0 e x.

superiore il termine generale della serie stessa nel caso di $c_1=0$, $c_2=1$, quando $\varphi(x)$ sia sempre finita o almeno sia integrabile nell'intorno di $x=0$ sarà compreso fra le due quantità

$$\varepsilon_m \lambda^m \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{m-2}} \{\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \{\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\} dx_m,$$

e

$$\varepsilon_m \Lambda^m \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{m-2}} \{\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \{\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\} dx_m:$$

e quindi indicando con $\bar{a}_{2,m}$ un valore di a_2 compreso fra i detti limiti λ e Λ che dipenderà anche da m, lo stesso termine generale potrà rappresentarsi con

$$\varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{m-2}} \{\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \{\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\} dx_m,$$

e perciò in questo caso l'integrale particolare della nostra equazione corrispondente a $c_1=0$ e $c_2=1$ potrà rappresentarsi colla formola

$$y=1+\sum_1^\infty \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \dots \tag{15}$$

$$\dots \int_0^{x_{m-2}} \{\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \{\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\} dx_m .$$

Al modo stesso, quando $\varphi(x)$ sia sempre finita o se diventa infinita per $x=0$ resta atta alla integrazione insieme al suo quadrato, per l'altro integrale corrispondente a $c_1=1$, $c_2=0$ si avrà la formola simile

$$y=\varphi(x)+\sum_1^\infty \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 \int_0^{x_2} \dots \tag{16}$$

$$\dots \int_0^{x_{m-2}} \{\varphi(x_{m-2})-\varphi(x_{m-1})\} dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} \varphi(x_m)\{\varphi(x_{m-1})-\varphi(x_m)\} dx_m .$$

566. — Osservando poi che con successive integrazioni per parti, quando $\frac{x}{a_0}$ e $\varphi(x)$ sono finite per $x=0$ o almeno sono atte alla integrazione, si hanno

le formole

$$\int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 = \Big[x_1 \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} \Big]_0^x + \int_0^x \frac{x_1}{a_{0,x_1}} dx_1 = \int_0^x \frac{x_1}{a_{0,x_1}} dx_1 ,$$

$$\int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\} dx_2 = \int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_1} \frac{x_2}{a_{0,x_2}} dx_2 =$$

$$= \Big[\{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{x_3}{a_{0,x_3}} dx_3 \Big]_0^x + \int_0^x \frac{dx_1}{a_{0,x_1}} \int_0^{x_1} dx_3 \int_0^{x_2} \frac{x_3}{a_{0,x_3}} dx_3 = \int_0^x \frac{dx_1}{a_{0,x_1}} \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{x_3}{a_{0,x_3}} dx_3,$$

$$\int_0^x \{\varphi(x)-\varphi(x_1)\} dx_1 \int_0^{x_2} \{\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\} dx_2 \int_0^{x_3} \{\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\} dx_3 =$$

$$= \int_0^x \frac{dx_1}{a_{0,x_1}} \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{x_3}{a_{0,x_3}} dx_3 \int_0^{x_3} dx_4 \int_0^{x_4} \frac{x_5}{a_{0,x_5}} dx_5$$

. . . .

si troverà subito per l'integrale y che corrisponde a $c_1=0$, $c_2=1$ anche la formola seguente

$$y=1+\sum_1^\infty \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \int_0^x \frac{dx_1}{a_{0,x_1}} \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{dx_3}{a_{0,x_3}} \int_0^{x_3} dx_4 \int_0^{x_4} \frac{dx_5}{a_{0,x_5}} \int_0^{x_5} \dots \int_0^{x_{2m-3}} dx_{2m-2} \int_0^{x_{2m-2}} \frac{x_{2m-1}}{a_{0,x_{2m-1}}} dx_{2m-1} . \tag{17}$$

e nel caso in cui $\varphi(x)$ per $x=0$ è finita, o se è infinita è atta alla integrazione insieme al suo quadrato $\varphi^2(x)$, allora per l'altro integrale che corrisponde a $c_1=1$, $c_2=0$ con un processo simile si trova la formola seguente

$$y=\varphi(x)+\sum_1^\infty \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \int_0^x \frac{dx_1}{a_{0,x_1}} \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{dx_3}{a_{0,x_3}} \int_0^{x_3} dx_4 \int_0^{x_4} \frac{dx_5}{a_{0,x_5}} \int_0^{x_5} \dots \int_0^{x_{2m-2}} \frac{dx_{2m-1}}{a_{0,x_{2m-1}}} \int_0^{x_{2m-1}} \frac{x_{2m}}{a_{0,x_{2m}}} dx_{2m} : \tag{18}$$

e con nuove integrazioni per parti queste formole potrebbero porsi anche sotto altre forme.

Cambiando in tutte queste formole x in $x-\alpha$, gli integrali verranno estesi da α ad x e le formole stesse varranno in intervalli che partono dal punto α.

567. — S'intende poi che quando invece della (11) sia data la equazione lineare omogenea del second'ordine sotto la forma generale

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{19}$$

nella quale non sia $a_1 = a'_0$, siccome moltiplicandola per $\dfrac{e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{a_0}$ si riduce all'altra

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, y'\right) + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, y\,, = 0$$

che rientra appunto nella forma (12), così le formole precedenti si ridurranno relative alla equazione (19) col sostituire in esse ai coefficienti a_0 e a_2 respettivamente $e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ e $\dfrac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$. Bisognerà però avere riguardo alle singolarità che potranno presentare per $x = 0$ queste quantità che nelle formole precedenti prenderanno il posto di a_0 e a_2, onde essere certi che siano soddisfatte le condizioni che nei varii casi respettivamente abbiamo poste.

568. — Considerando poi il caso delle equazioni

$$(20) \qquad y'' + a_2 y = 0$$

che rientrano evidentemente nella (12) col supporvi $a_0 = 1$, e alle quali del resto tutte le equazioni omogenee del second'ordine possono sempre ridursi e in infiniti modi colle trasformazioni dei §§ 495 e seg. (pag. 693 e seg.), la formola (13) si ridurrà all'altra notevolissima

$$(21) \qquad y = c_1 x + c_2 + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m \int_0^x a_{2,x_1}(x - x_1)\, dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2}(x_1 - x_2)\, dx_2 \int_0^{x_2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{x_{m-2}} a_{2,x_{m-1}}(x_{m-2} - x_{m-1})\, dx_{m-1} \int_0^{x_{m-1}} a_{2,x_m}(c_1 x_m + c_2)(x_{m-1} - x_m)\, dx_m\,,$$

che varrà sempre per l'integrale generale della (20) senz'altra condizione che quella che a_2 sia regolare nell'intervallo che si considera a partire da $x = 0$.

E quando a_2 presenti qualche singolarità nel punto $x = 0$ ma non negli altri punti di quell'intervallo la formola stessa varrà ancora nei casi nei quali i suoi termini conserveranno tutti un significato e al tempo stesso la serie sarà convergente in ugual grado in quell'intervallo e a_2 sarà atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti (§§ 524 e 525).

Nella formola precedente poi all'ultimo integrale (relativo ad x_m) colla

integrazione per parti potremo sostituire l'altro $\int_0^{x_{m-1}} (c_1 \pi(x_m) + c_2 \psi(x_m))\, dx_m$ essendo $\psi(x_m) = \int_0^x a_{2,x}\, dx$ e $\pi(x) = \int_0^x x a_{2,x}\, dx = x\psi(x) - \int_0^x \psi(x)\, dx$.

569. — Servendoci invece delle formole (17) e (18), troveremo per la (20) i due integrali

$$(22) \qquad y = 1 + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \frac{x^{2m}}{\pi(2m)}\,, \qquad y = x + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \frac{x^{2m+1}}{\pi(2m+1)}\,,$$

che varranno sempre negli intervalli che partono da $x = 0$ e nei quali la funzione a_2 non cambia mai segno; intendendo in queste formole che i valori $\bar{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,2}, \ldots, \bar{a}_{2,m}, \ldots$ siano valori determinati, variabili ordinariamente da termine a termine e compresi fra i limiti inferiore e superiore di a_2 nell'intervallo da 0 ad x.

570. — Mutando x in $x - \alpha$ in tutte queste formole, gli intervalli invece di partire dal punto $x = 0$ partiranno dal punto α, e in particolare le formole (22) si trasformeranno nelle altre

$$(23) \qquad y = 1 + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \frac{(x-\alpha)^{2m}}{\pi(2m)}\,, \qquad y = x - \alpha + \sum_1^{\infty} \varepsilon_m \bar{a}_{2,m}^m \frac{(x-\alpha)^{2m+1}}{\pi(2m+1)}\,,$$

che hanno molta analogia con quelle delle funzioni circolari (o iperboliche); e anzi supponendo che nella equazione data (20) il coefficiente a_2 al crescere indefinito di x tenda in un modo qualsiasi verso un valore determinato e finito λ positivo o negativo, siccome allora per α sufficientemente grande le $a_{2,m}$ saranno tutte prossime a λ quanto si vorrà, si vede che le serie stesse e quindi gli integrali della equazione data, per λ positivo al crescere di x tenderanno a comportarsi come le funzioni circolari $\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-\alpha)\right)$ e $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(x-\alpha)$, e per λ negativo tenderanno a comportarsi come le funzioni iperboliche $\cosh\left(\sqrt{-\lambda}(x-\alpha)\right)$ e $\operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}(x-\alpha)\right)$, o come esponenziali reali $e^{\sqrt{-\lambda}(x-\alpha)}$.

Così restano estesi i risultati del § 547, non avendo più qui le condizioni che allora si avevano pel modo di tendere di a_2 verso λ al crescere indefinito di x, e restano generalizzati alcuni teoremi dati dal sig. Kneser nella memoria citata al paragrafo stesso.

571. — Volendo ora fare anche qualche applicazione dei risultati precedenti ci fermeremo un momento a considerare alcune equazioni speciali.

1.° Prendiamo perciò per prima cosa a considerare la equazione

$$(24)\qquad x\mathrm{I}''+\mathrm{I}'+x\mathrm{I}=0\,,$$

cioè quella della funzione I (o I_0) conosciuta sotto il nome di funzione di Bessel.

Per questa equazione che rientra subito fra le equazioni (12), si ha

$$\varphi(x)=\int\frac{dx}{x}=\log x\,,\ \psi(x)=\int_0^x x\,dx=\frac{x^2}{2},\ \pi(x)=\int_0^x x\log x=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\,,$$

e tutte le condizioni che si avevano nei §§ 562 e 563 risultano soddisfatte, talchè volendo potremo avere per mezzo della (14) anche la formola che dà l'integrale generale di questa equazione.

Fermandoci al caso dell'integrale particolare che corrisponda a $c_1=0$, $c_2=1$ che è il più semplice si trova subito la formola

$$(25)\qquad \mathrm{I}=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\dots$$

che dà appunto lo sviluppo notissimo della funzione di Bessel in serie ordinata per le potenze intere e positive di x.

L'altro integrale poi potrebbe pure ottenersi dalla formola (14) supponendovi $c_1=1$, $c_2=0$; ma può ottenersi più semplicemente anche col processo del § 494 (pag. 690-92) deducendolo dall'integrale I che ora si conosce.

2.° Prendendo in secondo luogo a considerare la equazione più generale

$$(26)\qquad xy''+(2\nu+1)\,y'+xy=0$$

con ν costante, si osserverà che questa non rientra nel caso delle equazioni (12) altro che quando sia $\nu=0$ cioè nel caso già trattato della equazione precedente (24), però si porta in ogni caso a rientrare fra le stesse equazioni (12) moltiplicandola per $x^{2\nu}$ con che si ha allora $a_0=x^{2\nu+1}$ e $a_2=x^{2\nu+1}$; e evidentemente quando si voglia che a_0 e a_2 siano finiti anche per $x=0$ bisognerà supporre che sia $2\nu+1\geq 0$.

Ora per la nuova equazione si troverà $\varphi(x)=-\dfrac{1}{2\nu x^{2\nu}}$, $\psi(x)=\dfrac{x^{2\nu}}{2\nu+2}$,

$\pi(x)=-\dfrac{1}{2\nu}\displaystyle\int_0^x x\,dx=-\frac{x^2}{4\nu}$ quando non sia $\nu=0$, e limitandoci ancora al caso di $c_1=0$, $c_2=1$ le condizioni dei §§ 562 e 563, quando come ora

supponiamo sia $2\nu+1\geq 0$ e non sia $\nu=0$, saranno soddisfatte e basterà calcolare successivamente gli integrali della (14) per giungere subito alla formola seguente

$$(27)\ y=1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\dots$$

che darà un integrale della (26) quando sia $2\nu+1\geq 0$ e varrà anche per $\nu=0$ perchè allora si riduce alla (25).

È facile poi di vedere che essa varrà anche per qualunque valore di ν che non sia un numero intero negativo, e quindi, fuori di questo caso, anche quando $2\nu+1$ sia negativo, perchè quando ν non è intero e negativo i termini di questa serie hanno sempre un significato, e la serie è convergente in ugual grado in qualunque intervallo, e sebbene allora non risultino sempre soddisfatte tutte le condizioni dei §§ 524 e 525, calcolando le derivate y' e y'' si trova che la (26) viene sempre soddisfatta da questa funzione y.

Al modo stesso quando $-\dfrac{1}{2}\leq\nu<1$ si potrebbe trovare anche l'altro integrale corrispondente a $c_1=1$, $c_2=0$ che però per ν positivo diviene infinito per $x=0$; ma è più semplice dedurlo per tutti i valori non interi e negativi di ν dall'integrale già trovato (27) col processo testè ricordato del § 494.

La funzione (27) moltiplicata per x^ν dà la funzione, conosciuta pure sotto il nome di funzione di Bessel, che si indica con I_ν, giacchè se si pone $y=x^{-\nu}u$ la equazione precedente (26) si riduce all'altra $xu''+u'+\left(x-\dfrac{\nu^2}{x}\right)u=0$ che è appunto quella delle funzioni I_ν, delle quali la I o I_0 considerata sopra è un caso particolare, ecc.

3.° Similmente prendendo la equazione

$$(28)\qquad k(1-k^2)\,\mathrm{K}''+(1-3k^2)\,\mathrm{K}'-k=0\,,$$

che si incontra nella teoria delle funzioni ellittiche per le quali k è il modulo e K stà a rappresentare uno dei periodi, si potrà applicare la formola (14) coll'osservare che in questo caso sarà

$$\varphi(x)=\log\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \psi(x)=-\frac{x^2}{2}\,,\ \pi(x)=\frac{1}{4}\log(1-x^2)+\frac{x^2}{2}\log\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

E così in particolare per l'integrale corrispondente a $c_1=0$, $c_2=1$

avremo la formola

$$(29)\quad \mathrm{K}=1+\frac{1}{2}\log\sqrt{1-k^2}+\frac{1}{2}\int_0^k x_1\log\frac{k\sqrt{1-x_1^2}}{x_1\sqrt{1-k^2}}\log\sqrt{1-x_1^2}\,dx_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x x_1\log\frac{k\sqrt{1-x_1^2}}{x\sqrt{1-k^2}}\,dx_1\int_0^{x_1} x_2\log\frac{x_1\sqrt{1-x_2^2}}{x_2\sqrt{1-x_1^2}}\log\sqrt{1-x_2^2}\,dx_2+\ldots$$

nella quale gli integrali si calcoleranno successivamente con bastante facilità; ed essa potrà servire a dare valori molto approssimati di K per piccoli valori del modulo k.

572. — Sempre restando nel caso delle equazioni del second'ordine che supporremo ridotte alla forma più semplice (20), noi ora invece di prendere per le funzioni ausiliarie z_1 e z_2 le funzioni $z_1=1$, $z_2=x$ che ci condussero alle formole (21) e (22) pei valori degli integrali, prendiamo $z_1=\mathrm{sen}\,px$ e $z_2=\cos px$ con p cost., il che per quanto si disse nella nota al § 555, e come anche si verifica subito, dà ancora $a_0\mathrm{Q}=$ cost.

Allora introducendo, per comodo, due altre costanti λ e μ invece della solite c_1 e c_2 col porre $c_1=\lambda p\,\mathrm{sen}\,p\mu$, $c_2=\lambda p\cos p\mu$, e osservando che sarà $\mathrm{Q}=-p$, $\mathrm{Q}_c=\lambda p\,\mathrm{sen}\,p(x-\mu)$, $q_{x,x_1}=\mathrm{sen}\,p(x-x_1)$, $\overline{q}_{x,x_1}=(p^2-a_{2,x_1})\,\mathrm{sen}\,p(x-x_1)$, troveremo che gli integrali della equazione

$$(30)\qquad y''+a_2y=\mathrm{X}$$

sono dati dalla formola seguente

$$(31)\qquad y=\lambda\,\mathrm{sen}\,p(x-\mu)+\frac{1}{p}\int_\alpha^x \mathrm{X}_\xi\,\mathrm{sen}\,p(x-\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{p}\int_\alpha^x\left\{\lambda\,\mathrm{sen}\,p(x_1-\mu)+\frac{1}{p}\int_\alpha^{x_1}\mathrm{X}_\xi\,\mathrm{sen}\,p(x_1-\xi)\,d\xi\right\}(p^2-a_{2,x_1})\,\mathrm{sen}\,p(x-x_1)\,dx_1+$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$

$$+\frac{1}{p^m}\int_\alpha^x(p^2-a_{2,x_1})\,\mathrm{sen}\,p(x-x_1)\,dx_1\int_\alpha^{x_1}(p^2-a_{2,x_2})\,\mathrm{sen}\,p(x_1-x_2)\,dx_2\int_\alpha^{x_2}\ldots$$

$$\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}\left\{\lambda\,\mathrm{sen}\,p(x_m-\mu)+\frac{1}{p}\int_\alpha^{x_m}\mathrm{X}_\xi\,\mathrm{sen}\,p(x_m-\xi)\,d\xi\right\}(p^2-a_{2,x_m})\,\mathrm{sen}\,p(x_{m-1}-x_m)\,dx_m+\ldots,$$

e nel caso di $\mathrm{X}=0$ cioè per le equazioni omogenee avremo

$$(32)\quad y=\lambda\,\mathrm{sen}\,p(x-\mu)+\frac{\lambda}{p}\int_\alpha^x(p^2-a_{2,x_1})\,\mathrm{sen}\,p(x_1-\mu)\,\mathrm{sen}\,p(x-x_1)\,dx_1+\ldots+$$

$$+\frac{\lambda}{p^m}\int_\alpha^x(p^2-a_{2,x_1})\,\mathrm{sen}\,p(x-x_1)\,dx_1\int_\alpha^{x_1}(p^2-a_{2,x_2})\,\mathrm{sen}\,p(x_1-x_2)\,dx_2\int_\alpha^{x_2}\ldots$$

$$\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}(p^2-a_{2,x_m})\,\mathrm{sen}\,p(x_m-\mu)\,\mathrm{sen}\,p(x_{m-1}-x_m)\,dx_m+\ldots$$

e al solito queste formole varranno in tutti i tratti nei quali a_2 e X sono regolari e nei quali si trova compreso il punto α, e anche più generalmente quando, pure presentando a_2 e X qualche singolarità nel punto α ma non negli altri punti, si riscontrerà che i termini della serie hanno tutti un significato in intervalli che partono da α e la serie è convergente in ugual grado in questi intervalli, e $|a_2|$ e X sono integrabili fra α e x (§§ 524 e 525).

573. — Facciamo anche qui alcune applicazioni di queste formole a casi di equazioni particolari che si presentano spesso nell'Analisi.

Volendo applicarle al caso delle funzioni sferiche di Legendre X_n per le quali si ha la equazione

$$(33)\qquad \frac{d\left\{(1-x^2)\dfrac{d\mathrm{X}_n}{dx}\right\}}{dx}+n(n+1)\,\mathrm{X}_n=0\,,$$

si ridurrà prima questa equazione alla solita forma (20) facendo la trasformazione del § 501 [pag. 698-99] col prendere ora $f(\xi)=\sqrt{a_0}=\sqrt{1-x^2}$, o $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\xi$, cioè ponendo $x=\cos\xi$ e $\mathrm{X}_n=\dfrac{u}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\xi}}$, con chè bisognerà escludere i punti $\xi=0$ e $\xi=\pi$ o $x=\pm1$, e la equazione in u per la formola (17) del ricordato § 501 sarà la seguente

$$u''+\left\{n(n+1)-(\mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\xi)''\,\mathrm{sen}^{-\frac{1}{2}}\xi\right\}u=0\,,$$

ovvero

$$(34)\qquad u''+\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2\xi}\right\}u=0\,.$$

Applicando quindi la formola (32) a questa equazione col prendere per semplicità $p=n+\dfrac{1}{2}$ e $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, avremo la formola seguente data per la prima volta dal Bonnet

$$(35)\qquad u=\sqrt{\operatorname{sen}\xi}\,X_n(\cos\xi)=\lambda\operatorname{sen}p(\xi-\mu)-\frac{\lambda}{4n+2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi}\frac{\operatorname{sen}p(\xi_1-\mu)\operatorname{sen}p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}d\xi_1+$$

$$+\frac{\lambda}{(4n+2)^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi}\frac{\operatorname{sen}p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}d\xi_1\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_1}\frac{\operatorname{sen}p(\xi_2-\mu)\operatorname{sen}p(\xi_1-\xi_2)}{\operatorname{sen}^2\xi_2}d\xi_2+\ldots+$$

$$+(-1)^m\frac{\lambda}{(4n+2)^m}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi}\frac{\operatorname{sen}p(\xi-\xi_1)}{\operatorname{sen}^2\xi_1}d\xi_1\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_1}\frac{\operatorname{sen}p(\xi_1-\xi_2)}{\operatorname{sen}^2\xi_2}d\xi_2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_2}\ldots\int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_{m-1}}\frac{\operatorname{sen}p(\xi_m-\mu)\operatorname{sen}p(\xi_{m-1}-\xi_m)}{\operatorname{sen}^2\xi_m}d\xi_m+\ldots,$$

dove $p=n+\frac{1}{2}$, e in queste le costanti λ e μ dovranno determinarsi opportunamente col far sì che il secondo membro venga ad essere precisamente la funzione $\sqrt{\operatorname{sen}\xi}\,X_n(\cos\xi)$ nella quale X_n sia la vera funzione di Legendre.

Per questo si ricaverà da questa formola colla derivazione il valore di u', il che può farsi sempre, come dicemmo al § 531, e poi servendosi dei valori della funzione di Legendre $X_n(x)$ e della sua derivata $X'_n(x)$ per $x=0$, o di u e u' per $\xi=\frac{\pi}{2}$ si otterranno due equazioni che determineranno le stesse costanti λ e μ. Si troverà allora che λ è della forma $\frac{a}{\sqrt{n}}$, essendo a una quantità che al crescere indefinito di n tende verso $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ e $\mu=-\frac{\pi}{4p}$, con chè sostituendo si conclude che la $X_n(\cos\xi)$ per ξ diverso da zero e da π al crescere indefinito di n tende a comportarsi come la funzione

$$\frac{2\operatorname{sen}\left(p\xi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\operatorname{sen}\xi}}\quad\text{essendo }p=\frac{2n+1}{2}.$$

574. — Volendo invece applicare la (32) al caso delle funzioni I_ν di Bessel considerate sopra al § 571 per le quali si ha la equazione

$$(36)\qquad \frac{d\left(x\frac{dI_\nu}{dx}\right)}{dx}+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)I_\nu=0,$$

trasformeremo ancora per prima cosa questa equazione col solito processo del § 501 prendendo $x=f(\xi)=\xi$, $I_\nu=\frac{u}{\sqrt{x}}$, con che bisognerà escludere

il punto $x=0$; e poichè allora la equazione in u risulterà la seguente

$$(37)\quad u''+\left\{1-\frac{\nu^2}{x^2}-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)''x^{-\frac{1}{2}}\right\}u=0,\quad\text{ovvero}\quad u''+\left\{1-\frac{4\nu^2-1}{4x^2}\right\}u=0,$$

prendendo per semplicità nella (32) $p=1$ e ponendo per abbreviare $\beta_\nu=\frac{4\nu^2-1}{4}=\frac{(2\nu-1)(2\nu+1)}{4}$, e intendendo che α e x siano numeri qualunque diversi da zero e dello stesso segno, avremo la formola

$$u=\sqrt{x}\,I_\nu=\lambda\operatorname{sen}(x-\mu)+\lambda\beta_\nu\int_\alpha^x\frac{\operatorname{sen}(x_1-\mu)\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1+$$

$$+\lambda\beta_\nu^2\int_\alpha^x\frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1\int_\alpha^{x_1}\frac{\operatorname{sen}(x_2-\mu)\operatorname{sen}(x_1-x_2)}{x_2^2}dx_2+\ldots+$$

$$+\lambda\beta_\nu^m\int_\alpha^x\frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1\int_\alpha^{x_1}\frac{\operatorname{sen}(x_1-x_2)}{x_2^2}dx_2\int_\alpha^{x_2}\ldots\int_\alpha^{x_{m-1}}\frac{\operatorname{sen}(x_m-\mu)\operatorname{sen}(x_{m-1}-x_m)}{x_m^2}dx_m+\ldots$$

essendo ancora λ e μ quantità da determinarsi: e in questa il limite α degli integrali nel caso che α sia positiva può anche supporsi infinito perchè i termini conservano un significato e la serie resta convergente in ugual grado fra x e ∞, e al tempo stesso risultano soddisfatte le condizioni dei §§ 524 e 525; e così avremo

$$u=\sqrt{x}\,I_\nu=\lambda\operatorname{sen}(x-\mu)+\varepsilon_1\lambda\beta_\nu\int_x^\infty\frac{\operatorname{sen}(x_1-\mu)\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1+$$

$$+\varepsilon_2\lambda\beta_\nu^2\int_x^\infty\frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1\int_{x_1}^\infty\frac{\operatorname{sen}(x_2-\mu)\operatorname{sen}(x_1-x_2)}{x_2^2}dx_2+\ldots+$$

$$+\varepsilon_m\lambda\beta_\nu^m\int_x^\infty\frac{\operatorname{sen}(x-x_1)}{x_1^2}dx_1\int_{x_1}^\infty\frac{\operatorname{sen}(x_1-x_2)}{x_2^2}dx_2\int_{x_2}^\infty\ldots\int_{x_{m-1}}^\infty\frac{\operatorname{sen}(x_m-\mu)\operatorname{sen}(x_{m-1}-x_m)}{x_m^2}dx_m+\ldots,$$

e questa varrà per qualunque valore diverso da zero e positivo di x.

Questa formola evidentemente torna a darci il modo di comportarsi di I_ν al crescere indefinito di x (§ 546).

575. — Altre applicazioni di tutti i risultati ottenuti in questo capitolo potremmo fare sia per altre equazioni speciali di second'ordine che si pre-

sentano nell'Analisi, sia per equazioni lineari di ordine superiore, e in particolare per quelle del terz'ordine per le quali, come mostrammo ai §§ 506 e seg. [pag. 703 e seg.] colla integrazione di una equazione di Riccati è sempre possibile la riduzione alla forma semplice

$$y''' + a_3 y = X;$$

ma le applicazioni che qui abbiamo fatto ci sembrano sufficienti sia per mostrare la importanza dei risultati generali ottenuti, sia per dare una idea del modo di valersene nei casi particolari.

XXVIII.

Integrazione per serie delle equazioni differenziali ordinarie. Altri metodi particolari d'integrazione.

Integrazione per serie di Taylor.

576. — Gli studii che abbiamo fatto nell'ultimo Capitolo dànno il modo di trovare infinite espressioni analitiche per serie degli integrali di qualsiasi equazione lineare.

Queste serie sono per integrali multipli che si ottengono successivamente con una legge semplice e determinata; e, oltre che a dare valori approssimati degli integrali possono anche servire a darne alcune proprietà in relazione alla equazione alla quale si riferiscono, come chiaramente apparisce dalle applicazioni che qui ne abbiamo fatte e dalle altre che trovansi nelle varie memorie sulle equazioni lineari da me pubblicate negli *Annali di Matematica di Milano* (ser. III, vol. II. III. XI. XII. XVII. XVIII).

Le infinite forme però sotto le quali gli integrali vengono dati sono legate alla scelta delle funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ che in esse figurano e che comportano tanta arbitrarietà, e non apparisce affatto come bisogni sceglierle e quali trasformazioni debbano farsi per arrivare ad avere l'integrale sotto una forma determinata data.

577. — Nelle applicazioni la forma sotto la quale, quando è possibile, si cerca bene spesso di avere l'integrale, è quella dello sviluppo in serie di potenze che corrisponde allo sviluppo di Taylor o a quello di Maclaurin; e meno in casi specialissimi, quali furono ad es.: quelli delle funzioni di Bessel $I_0(x)$ e $I_r(x)$ al §. 571. 1.° e 2.° (pag. 802-803), le formole che abbiamo trovato non ci dànno gli integrali sotto questa forma.

In molti casi però si riscontra che, considerandovi x come variabile complessa (§§ 532 e 556 [pag. 741 e 785]), gli integrali sotto le forme trovate risultano funzioni monodrome finite e continue di questa variabile nell'intorno di un dato punto pel quale potrà prendersi il più spesso il punto α che figura come limite inferiore dei varii integrali, e allora, per le proprietà fondamentali delle funzioni di variabile complessa, si potrà intanto senz'altro assicurare che lo sviluppo cercato per potenze di $x-\alpha$ è possibile in un intorno circolare del punto α. Per quanto poi si riferisce alla determinazione effettiva di questo sviluppo si osserverà che se non potrà aversi dalle formole generali col particolarizzare opportunamente le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ o col fare convenienti trasformazioni delle formole stesse, è certo però che esso potrà sempre dedursi da quelle formole, perchè i suoi coefficienti — che, all'infuori dei fattori numerici dovuti ai fattoriali che devono figurare nei divisori, sono le successive derivate dell'integrale prese nel punto α —, si potranno determinare colle formole che si ottengono applicando le derivazioni successive termine a termine alle serie trovate, e poi facendo $x=\alpha$, tutte le volte che queste derivazioni per serie saranno possibili; o anche potranno determinarsi per mezzo della formola (18) del § 522 (pag. 723) che è quella che servì di base ai nostri studii e condusse alle dette formole generali per serie d'integrali multipli (*).

(*) Le formole alle quali si accenna possono aversi nel modo seguente.

Conserviamo le notazioni del Capitolo precedente, e per abbreviare sopprimiamo gli indici alle varie funzioni quando senza ambiguità si comprende che la variabile che vi figura è la x, e poniamo

$$z_{n-1}\frac{A_x}{(a_0 Q)_x}=\bar{A}, \quad z_{n-1}\frac{\bar{q}_{x,x_1}}{(a_0 Q)_x}=t_{x,x_1}.$$

Indicando allora, per semplicità di scrittura, con *apici* le derivazioni relative ad x anche quando applicandola ad es. a funzioni come la t_{x,x_1} siano soltanto derivate parziali e rappresentino quindi $\frac{\partial t_{x,x_1}}{\partial x}, \frac{\partial^2 t_{x,x_1}}{\partial x^2}, \ldots$, dalla ricordata formola (18) del § 522, colla regola di Leibnitz della derivazione sotto il segno, avremo subito le formole seguenti

$$y=\bar{A}+\int_a^x t_{x,x_1} y_{x_1}\,dx_1,$$

$$y'=\bar{A}'+(t_{x,x_1})_{x_1=x}\,y+\int_a^x t'_{x,x_1} y_{x_1}\,dx_1,$$

$$y''=\bar{A}''+\left[(t_{x,x_1})_{x_1=x}\,y\right]'+(t'_{x,x_1})_{x_1=x}\,y+\int_a^x t''_{x,x_1} y_{x_1}\,dx_1,$$

$$y'''=\bar{A}'''+\left[(t_{x,x_1})_{x_1=x}\,y\right]''+\left[(t'_{x,x_1})_{x_1=x}\,y\right]'+(t''_{x,x_1})_{x_1=x}\,y+\int_a^x t'''_{x_1,x} y_{x_1}\,dx_1$$

. . . .

$$y^{(n)}=\bar{A}^{(n)}+\left[(t_{x,x_1})_{x_1=x}\,y\right]^{(n-1)}+\left[(t'_{x,x_1})_{x_1=x}\,y\right]^{(n-2)}+\ldots+(t^{(n-1)}_{x,x_1})_{x_1=x}\,y+\int_a^x t^{(n)}_{x,x_1} y_{x_1}\,dx_1,$$

In questi casi i coefficienti così determinati condurranno certamente alle serie per potenze intere e positive di $x-\alpha$, che corrisponderanno all'integrale cercato, generale o particolare secondochè le costanti $c_1, c_2, c, \ldots, c_n$ che vi figureranno saranno rimaste indeterminate o no; ma i valori iniziali di questi integrali e delle loro prime $n-1$ derivate anzichè essere dati anticipatamente risulteranno determinati dalle formole stesse in relazione ai valori che saranno stati scelti per le dette costanti. Queste costanti però, quando si voglia, potranno anche prendersi subito in modo che i valori corrispondenti di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per $x=\alpha$ siano appunto quelli che si vorranno, determinandole prima colle formole (11) del § 517 (pag. 718): quindi si può dire che, volendo, il problema della determinazione delle serie di potenze che nei casi indicati serviranno alla rappresentazione degli integrali delle equazioni lineari in serie di Taylor o di Maclaurin, potrà risolversi anche col processo indicato, per quanto venga ad essere questo un processo oltre che lungo anche del tutto indiretto.

578. — Però, anche senza ricorrere a questo processo, potremo spesso valerci di un altro processo generale che, astrazion fatta dalle difficoltà pratiche che può presentare, vale anche per le equazioni non lineari.

Questo processo che, quando alla integrazione per serie delle equazioni differenziali conviene di ricorrere, è appunto quello al quale ordinariamente ci si riferisce, si basa sulle considerazioni seguenti.

Abbiasi una equazione differenziale dell'ordine n

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0, \tag{1}$$

e si supponga dapprima di sapere già che essa ammette un integrale $y=\varphi(x)$ che è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di un punto α, e che in questo punto esso e le sue prime $n-1$ derivate prendono valori dati $y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$, e la sua derivata n^a prenda un valore finito $y_a^{(n)}$ che insieme coi valori stessi $\alpha, y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$ di $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ soddisfa alla stessa equazione (1).

Si ammetta inoltre che il primo membro di questa equazione sia una funzione finita e continua delle $n+2$ variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, considerate come indipendenti, in un campo di $n+2$ dimensioni, che potremo

finchè la detta regola di Leibnitz si mantiene applicabile; e in queste quando vi si faccia $x=\alpha$, spariranno tutti gli ultimi termini, e si otterranno le formole che determinano successivamente i valori di $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}, \ldots$ per $x=\alpha$, ciascuno linearmente per mezzo dei precedenti. Questi valori dipendono naturalmente da quelli delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

anche supporre reale, che racchiuda il punto $M(\alpha, y_a, y_a', y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_a^{(n)})$, e la stessa funzione ammetta le derivate parziali finite e continue di qualunque ordine in questo campo, e inoltre $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ nel punto stesso M sia diverso da zero.

Allora la equazione (1), quando s'intenda che in essa y sia un suo integrale, con derivazioni successive condurrà alle infinite equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''+\dots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n+1)}=0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)2}}y^{(n+1)2}+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n+2)}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^m f}{\partial x^m}+m\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}y'+\dots\dots\dots\dots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n+m)}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

e queste col fare $x=\alpha$ determineranno successivamente e in modo unico i valori $y_a^{(n+1)}, y_a^{(n+2)}, \dots, y_a^{(n+m)}, \dots$ delle successive derivate $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots, y^{(n+m)}, \dots$, dell'integrale nel punto α espressi per $\alpha, y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_a^{(n)}$, per modo che verremo così a conoscere tutti i termini della serie di Taylor corrispondente all'integrale.

Questo perciò risulterà rappresentato dalla formola

$$(3)\quad y=y_a+\frac{y'_a}{1}(x-\alpha)+\frac{y''_a}{\pi(2)}(x-\alpha)^2+\frac{y'''_a}{\pi(3)}(x-\alpha)^3+\dots+\frac{y_a^{(n-1)}}{\pi(n-1)}(x-\alpha)^{n-1}+\frac{y_a^{(n)}}{\pi(n)}(x-\alpha)^n+\dots;$$

e se i valori $y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}$ potranno restare arbitrarii, nel senso che essi come il punto α possano essere scelti a piacere in un certo campo, questa formola ci darà l'integrale generale della equazione (1) almeno per quella soluzione di essa relativa a $y^{(n)}$ che ci darà $y^{(n)}=y_a^{(n)}$ quando $x=\alpha, y=y_a, y'=y'_a, y''=y''_a, \dots, y^{(n-1)}=y_a^{(n-1)}$.

579. — Tutto questo però quando si sappia che sussistono tutte le varie ipotesi che abbiamo fatto. Ma bene spesso queste ipotesi non saranno tutte soddisfatte, o almeno non saremo sicuri, in precedenza, che lo siano; e in particolare, spesso non si saprà avanti se lo sviluppo di Taylor (3) per l'integrale y della equazione data (1) è possibile, o avverrà che non sia possibile di soddisfare la stessa equazione (1) con valori dati tutti arbitrarii e finiti di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ e con un valore conveniente di $y^{(n)}$ per $x=\alpha$, o pei valori

che la soddisfino il $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ risulterà zero (*), ecc.; e allora il processo indicato potrà non condurci più nè all'integrale generale nè a un integrale particolare.

Potrà però avvenire, ed è questo il caso che qui ci preme di considerare, che considerando l'insieme delle equazioni (1) e (2) nelle quali sia stato fatto $x=\alpha$, si riesca a soddisfarle con valori determinati e finiti $y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}$ di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ (che siano ancora tutti arbitrarii, o non lo siano che alcuni di essi o anche nessuno), e con valori speciali $y_a^{(n)}, y_a^{(n+1)}, y_a^{(n+2)}, \dots$ delle derivate seguenti $y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots$; ma anche in questo caso non potrà ancora affermarsi senz'altro che la formola (3) nella quale $y_a, y'_a, \dots$ abbiano i valori ora indicati rappresenti un integrale generale o particolare della (1), perchè potrà avvenire che la serie del secondo membro non risulti neppure convergente, o che essendolo non rappresenti l'integrale.

In ogni modo però sarà allora il caso di studiare se la serie del secondo membro della (3) coi valori trovati per $y_a, y'_a, y''_a, \dots$ risulti convergente e rappresenti quindi una funzione finita e continua y di x il cui valore e le cui derivate pel valore α di x verranno allora appunto ad essere i valori indicati $y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_a^{(n)}, \dots$ che figurano nei coefficienti; e quando questo riscontro sia fatto, allora bene spesso la stessa funzione y corrisponderà appunto a un integrale della equazione (1), e per assicurarsene basterà verificare se ricavando dalla stessa formola (3), che dà il valore di y, anche quelli di $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ e sostituendoli nella (1) questa risulti soddisfatta o no; e così in ogni caso, quando la (1) risulti effettivamente soddisfatta in seguito a questa verifica, e talvolta, per circostanze speciali risultanti dalla natura della equazione data, anche indipendentemente dalla verifica stessa (**), potremo

---

(*) Nel caso delle equazioni lineari

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n y=X,$$

l'essere $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}=0$ per $x=\alpha$ corrisponde all'essere $a_0=0$ per questo valore di x, caso questo che anche negli studii del Capitolo precedente vedemmo potere dare luogo a qualche singolarità dell'integrale.

(**) In particolare quando la equazione data (1) sarà una equazione lineare e i suoi coefficienti saranno funzioni razionali intere di x e quindi anche di $x-\alpha$, *potremo sempre tralasciare di fare la indicata verifica*, perchè la equazione data verrà certamente soddisfatta dalla funzione trovata y per tutti i valori di x entro il cerchio di convergenza della serie.

Si comprende subito infatti che ponendovi per $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ i valori che si traggono dalla formola (3), il primo membro della equazione data (1) verrà ad essere la somma di un numero *finito* di serie ordinate ancora per le potenze di $x-\alpha$ e collo stesso cerchio di convergenza, e potrà quindi ridursi ad una unica serie ordinata al modo stesso e convergente nello stesso cerchio; e questa serie senz'altro affermare che la funzione trovata y è un integrale generale o parti colare della equazione (1); talchè il problema della integrazione per serie della equazione stessa rimarrà ancora risoluto col processo che scaturisce naturalmente da queste considerazioni.

580. — Questo processo del resto rimarrà perfettamente chiarito coi seguenti esempi:

1.° Sia da integrare la equazione lineare

$$xy'' + 2y' + m^2xy = 0\,, \tag{4}$$

dove m è una quantità costante.

Le equazioni derivate corrispondenti alle equazioni (2) saranno le seguenti

$$\begin{aligned} &xy''' + 3y'' + m^2xy' + m^2y = 0\,,\\ &xy^{\mathrm{IV}} + 4y''' + m^2xy'' + 2m^2y' = 0\,,\\ &xy^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}} + m^2xy''' + 3m^2y'' = 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dalle quali si vede subito la legge secondo cui esse si formano successivamente; ma se si vorrà avere uno sviluppo dell'integrale per mezzo della serie di Maclaurin col prendere cioè pel solito punto $x = \alpha$ il punto $x = 0$, allora, dovendo soddisfare alla equazione (4) per $x = 0$, si vede che non potremo lasciare arbitrarii i valori iniziali di y e y' per $x = 0$, ma dovremo prendere $y'_0 = 0$ onde y o y'' non siano infiniti.

Ora con $y'_0 = 0$ le equazioni precedenti risulteranno tutte soddisfatte

---

verrà quindi naturalmente a corrispondere allo sviluppo di TAYLOR relativo al primo membro della equazione data nella quale s'intenda che y sia la funzione (3) (*Calc. diff.* § 81, pag. 110). I coefficienti di questa serie, astrazion fatta dai soliti divisori, saranno dunque le derivate del primo membro della stessa equazione per $x = \alpha$, e pel modo con cui le $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha \ldots$ saranno state determinate saranno tutti zero, e quindi il primo membro della equazione (1) verrà ad essere reso identicamente zero dalla funzione y data dalla (3).

Più generalmente anche, quando per la natura della funzione f che figura nel primo membro delle (1) si possa inferirne che riducendola funzione della x per mezzo della (3) e considerandola anche pei valori complessi di x nell'intorno del punto $x = \alpha$ risulta una funzione monodroma finita e continua della stessa variabile complessa x, allora siccome questa funzione f verrà ad essere zero insieme a tutte le sue derivate pel valore α di x, essa per le proprietà generali delle funzioni monodrome finite e continue di variabile complessa sarà sempre zero in tutto l'intorno (complesso) di α nel quale la serie della (3) è convergente e al tempo stesso la f si mantiene monodroma finita e continua; e questo mostra appunto che allora la funzione y data dalla (3) soddisfarà alla (1) per tutti i valori reali e complessi di x nello stesso intorno, e ne sarà quindi un integrale.

quando si prendano

$$y''_0 = -\frac{m^2y_0}{3}\,,\; y'''_0 = 0\,,\; y_0^{\mathrm{IV}} = \frac{m^4y_0}{5}\,, \ldots,\; y_0^{(2n)} = (-1)^n\frac{m^{2n}y_0}{2n+1}\,,\; y_0^{(2n+1)} = 0\,, \ldots,$$

e allora la formola (3) si ridurrà alla segnente

$$y = y_0\left(1 - \frac{m^2x^2}{\pi(3)} + \frac{m^4x^4}{\pi(5)} - \frac{m^6x^6}{\pi(7)} + \ldots\right), \tag{5}$$

e poichè si riscontra subito che la serie del secondo membro è convergente qualunque sia x, e anzi si vede che ha per somma $y_0\dfrac{\operatorname{sen} mx}{mx}$, così, per quanto dicemmo in nota al paragrafo precedente, anche senza stare a verificare che questa funzione $y = y_0\dfrac{\operatorname{sen} mx}{mx}$ soddisfa alla equazione data (4), si conclude senz'altro che essa è un integrale particolare di questa equazione.

Trovato ora così un integrale particolare $y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$, basta scrivere $y = C_1\dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$ e fare variare la costante C_1 per trovare l'altro integrale particolare per mezzo di una equazione lineare del prim'ordine col processo del § 478 (pag. 671 e seg.), o basta valersi delle formole del § 494 (pag. 691 e seg.) che dànno subito pel secondo integrale

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{y_1^2}\,dx = \frac{\operatorname{sen} mx}{x}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 mx} = -\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\cot mx = -\frac{\cos mx}{mx}\,,$$

e si conclude quindi che l'integrale generale della equazione (4) è dato dalla formola

$$y = \frac{C_1 \operatorname{sen} mx + C_2 \cos mx}{x}\,.$$

2.° Vogliasi in serie di Maclaurin col processo precedente un integrale della equazione lineare

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{6}$$

che è quella di Bessel che già considerammo al § 571, 1.° (pag. 802) giungendo appunto allo sviluppo che ora cerchiamo e che allora indicammo con $I_0(x)$ o $I(x)$.

Osservando che le equazioni derivate corrispondenti alle (2) saranno ora le seguenti

$$\begin{aligned} xy''' + 2y'' + xy' + y &= 0\,, \\ xy^{\mathrm{IV}} + 3y''' + xy'' + 2y' &= 0\,, \\ xy^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + xy''' + 3y'' &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

la cui legge di formazione è evidente, si vede che anche in questo caso per soddisfare a queste equazioni e alla (6) bisogna prendere lo zero pel valore iniziale y'_0 di y' per $x=0$, e quindi prendere

$$y''_0 = -\frac{y_0}{2}\,,\quad y'''_0 = 0\,,\quad y_0^{\mathrm{IV}} = \frac{1\,.\,3\,y_0}{2\,.\,4}\,,\quad y_0^{\mathrm{V}} = 0\,,\quad y_0^{\mathrm{VI}} = -\frac{1\,.\,3\,.\,5\,y_0}{2\,.\,4\,.\,6}\,,\ldots,$$

e perciò la formola (3) si riduce ora alla seguente

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\,.\,4^2} - \frac{x^6}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2} + \ldots\right) \tag{7}$$

e poichè si riscontra subito che la serie del secondo membro è convergente qualunque sia x e, o tenendo conto della osservazione fatta in nota al paragrafo precedente, o anche calcolando effettivamente y' e y'' e sostituendoli insieme ad y nella (6) si vede anche che la funzione y così definita soddisfa alla equazione data (6), si conclude senz'altro che essa è un integrale particolare della stessa equazione.

581. — Consideriamo ora in generale la equazione lineare di ordine n

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = \mathrm{X}\,, \tag{8}$$

e cerchiamo se e come possa aversi un integrale in serie di Taylor (o di Maclaurin) partendo dal punto $x=\alpha$, nel supposto che nell'intorno di α i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e X abbiano le derivate dei varii ordini fino all'infinito tutte determinate e finite, e ammettendo anche dapprima che il primo coefficiente a_0 nel punto α sia diverso da zero.

Sotto queste ipotesi, quando siano dati a piacere tutti i valori iniziali $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y_\alpha^{(n-1)}$ di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ per $x=\alpha$, la (8) ci darà subito il valore corrispondente $y_\alpha^{(n)}$ di $y^{(n)}$, e poi derivandola successivamente, con l'applicazione della nota formola di Leibnitz per le derivate di un prodotto, darà luogo a un sistema di infinite equazioni che rientreranno tutte nella

forma seguente

$$p_0a_0y^{(n+p)} + \begin{array}{l|} p_1a'_0 \\ +p_0a_1 \end{array}\; y^{(n+p-1)} + \begin{array}{l|} p_2a''_0 \\ +p_1a'_1 \\ +p_0a_2 \end{array}\; y^{(n+p-2)} + \ldots + \begin{array}{l|} p_pa_0^{(p)} \\ +p_{p-1}a_1^{(p-1)} \\ +p_{p-2}a_2^{(p-2)} \\ +\ldots \\ +p_0a_p \end{array}\; y^{(n)} \begin{array}{l|} +p_pa_1^{(p)} \\ +p_{p-1}a_2^{(p-1)} \\ +\ldots \\ +p_1a'_p \\ +p_0a_{p+1} \end{array}\; y^{(n-1)} \begin{array}{l} \\ +\ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$
$$\begin{array}{l|} +p_pa_{n-2}^{(p)} \\ +p_{p-1}a_{n-1}^{(p-1)} \\ +p_{p-2}a_n^{(p-2)} \end{array}\; y'' \begin{array}{l|} \\ +p_pa_{n-1}^{(p)} \\ +a_{p-1}d_n^{(p-1)} \end{array}\; y' \; +p_pa_n^{(p)}y = \mathrm{X}^{(p)}, \tag{9}$$

per $p=1, 2, 3, \ldots$, intendendo che debbano porsi uguali a zero tutti quei coefficienti a_t il cui indice t in queste formole risultasse superiore ad n; e queste equazioni col farvi $x=\alpha$ determineranno successivamente i valori (tutti finiti) $y_\alpha^{(n+1)}, y_\alpha^{(n+2)}, y_\alpha^{(n+3)} \ldots$ delle derivate $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, y^{(n+3)}, \ldots$ per $x=\alpha$.

Trovati questi valori si costruirà la serie $\sum_0^\infty \frac{y_\alpha^{(m)}}{\pi(m)}(x-\alpha)^m$, dopo di che, fatte le solite ricerche per determinare il suo cerchio di convergenza, basterà assicurarsi che la funzione y da essa definita soddisfa alla equazione data (8) per potere dire che essa ne è effettivamente un integrale, che sarà l'integrale generale se le $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y_\alpha^{(n-1)}$ saranno rimaste tutte arbitrarie, o altrimenti sarà soltanto un integrale particolare.

Il più spesso poi potremo anche fare a meno di questa verifica per assicurarsi che la funzione y è un integrale della equazione data (8); come — per quanto dicemmo in nota al § 579 — avverrà ad es.: in particolare quando i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e X saranno funzioni razionali intere di x.

582. — Naturalmente quando i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ saranno funzioni razionali intere della x, nelle equazioni (9) a partire da un certo valore di p finiranno per mancare gli ultimi termini, e il calcolo delle derivate successive di y per $x=\alpha$ verrà ad abbreviarsi.

Anche in altri casi poi i calcoli diverranno più semplici, e in particolare uno dei casi nei quali il calcolo di queste derivate finisce per farsi immediatamente è quello nel quale la equazione data è omogenea, e a causa dei valori iniziali $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \ldots, y_\alpha^{(n-1)}$ e dei valori speciali dei coefficienti e delle loro derivate, in ciascuna delle equazioni (9), a partire da una di esse per $x=\alpha$ restano soltanto i primi termini e quelli distanti di uno stesso numero s di posti da questi, cioè restano solo i termini che contengono $y^{(n+p)}$ e $y^{(n+p-s)}$;

per modo che da quel punto in poi le equazioni stesse per $x=\alpha$ si riducano tutte alla forma seguente

$$(10)\quad p_0 a_0 y^{(n+p)} = -(p_s a_0^{(s)} + p_{s-1} a_1^{(s-1)} + p_{s-2} a_2^{(s-2)} + \dots + p_1 a'_{s-1} + p_0 a_s) y^{(n+p-s)},$$

e determinano così successivamente i valori $y_\alpha^{(n+p)}$ o $y_\alpha^{(m)}$ espressi per quello che lo precede di s posti $y_\alpha^{(n+p-s)}$ o $y_\alpha^{(m-s)}$, e si ha

$$y_\alpha^{(m)} = -\frac{1}{a_0}\Big\{(m-n)_s a_0^{(s)} + (m-n)_{s-1} a_1^{(s-1)} + (m-n)_{s-2} a_2^{(s-2)} + \dots + \\ + (m-n)_1 a'_{s-1} + (m-n)_0 a_s\Big\} y_\alpha^{(m-s)}$$

per $m \geqq n$ (*).

Allora la serie $\sum_0^\infty \frac{y_\alpha^{(m)}}{\pi(m)}(x-\alpha)^m$ potrà intendersi scomposta in s serie distinte tutte della forma $\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{y_\alpha^{(hs+t)}}{\pi(hs+t)}(x-\alpha)^{hs+t}$ con $t=0, 1, 2, \dots, s-1$, e in queste serie il rapporto di un termine al precedente sarà

$$\frac{y_\alpha^{(hs+t)}}{y_\alpha^{(h-1)s+t}} \frac{(x-\alpha)^s}{[(h-1)s+t+1][(h-1)s+t+2]\dots[hs+t]},$$

ovvero per la precedente, e a partire da un certo valore di h,

$$-\frac{(x-\alpha)^s}{a_0} \frac{(hs+t-n)_s a_0^{(s)} + (hs+t-n)_{s-1} a_1^{(s-1)} + (hs+t-n)_{s-2} a_2^{(s-2)} + \dots (hs+t-n)_1 a'_{s-1} (hs+t-n)_0 a_s}{[(h-1)s+t+1][(h-1)s+t+2]\dots[hs+t]}$$

talchè si vede subito che se $a_0^{(s)}$ per $x=\alpha$ sarà zero le serie stesse saranno convergenti in tutto il piano, mentre se per $x=\alpha$ sarà $a_0^{(s)}=\lambda$ con λ diverso da zero le serie stesse saranno convergenti soltanto entro il cerchio di centro α e di raggio $\left(\frac{a_0}{\lambda}\right)^{\frac{1}{s}} \pi(s)^{\frac{1}{s}}$.

Evidentemente poi quelle fra le stesse serie per le quali per certi valori di h si avrà

$$(11)\quad (hs+t-n)_s a_0^{(s)} + (hs+t-n)_{s-1} a_1^{(s-1)} + (hs+t-n)_{s-2} a_2^{(s-2)} + \dots + (hs+t-n)_1 a'_{s-1} + (hs+t-n)_0 a_s = 0$$

si ridurranno a un polinomio che sarà al più di grado $(\bar{h}-1)s+t$ essendo $\bar{h}$ il più piccolo valore intero e positivo di h pel quale questa condizione è soddisfatta; e in particolare quindi se $s=1$, avendosi allora $t=0$ la equa-

(*) S'intende che pei valori di p o di $m-n$ che fossero inferiori ad s, al posto dei coefficienti binomiali $p_s, p_{s-1}, \dots$ o $(m-n)_s, (m-n)_{s-1}, \dots$ con indici superiori a p o a $m-n$ dovrà mettersi zero.

zione data verrà ad avere per *integrale generale* un polinomio che sarà al più di grado $\tau+n-1$ quando il rapporto $\frac{a_1}{a'_0}$ sia un numero intero e negativo $-\tau$.

Se poi essendo $s>1$ vi saranno, *per ogni valore* di t, dei valori di h pei quali la condizione (11) verrà soddisfatta, anche in questo caso gli integrali della equazione data (8) saranno *tutti* polinomi dei gradi $(h-1)s+t$; e se per alcuni dei valori $0, 1, 2, \dots, s-1$ di t la (11) non potrà essere soddisfatta da valori interi e positivi di h, ma le serie corrispondenti a tutti o ad alcuni di questi valori di t si ridurranno ancora a polinomii, e questo perchè per un certo valore di h si avrà ancora $y_\alpha^{(hs+t)}=0$ quando si prendano opportunamente i valori iniziali $y_\alpha, y'_\alpha, y''_\alpha, \dots, y_\alpha^{(n-1)}$, allora la equazione data avrà ancora *polinomi integrali*, ma questi saranno soltanto integrali particolari.

583. — S'intende poi che onde le equazioni derivate della (8) finiscano per ridursi tutte della forma (10) per $x=\alpha$ con $a_0(\alpha)$ diverso da zero, bisognerà che per $x=\alpha$ i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s, \dots, a_{n-1}, a_n$ della equazione data, meno a_0 e al più anche a_s, siano tutti zero e abbiano anche tutte le loro derivate zero per $x=\alpha$, meno la derivata s^a per a_0, la $(s-1)^a$ per a_1, la $(s-2)^a$ per $a_2, \dots$ delle quali tutte o almeno alcune dovranno essere diverse da zero; e quindi quando gli stessi coefficienti siano funzioni razionali intere di x, o più generalmente siano funzioni sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di $x=\alpha$, essi dovranno essere delle forme seguenti

$$a_0 = h_0(x-\alpha)^s + k, \quad a_1 = h_1(x-\alpha)^{s-1}, \quad a_2 = h_2(x-\alpha)^{s-2}, \dots$$
$$a_{s-1} = h_{s-1}(x-\alpha), \quad a_s = h_s, \quad a_{s+1} = a_{s+2} = \dots = a_n = 0,$$

con $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{s-1}, h_s$ quantità costanti, alcune delle quali possono anche essere zero, mentre k è una quantità costante che deve supporsi diversa da zero; e si intende che se $s \geq n$ dovremo arrestarci in queste formole a a_n.

584. — In particolare dunque per le equazioni lineari e omogenee del second'ordine che rientrano nei casi considerati, cioè per quelle delle forme seguenti

$$(12)\quad \begin{cases} \{h_0(x-\alpha) + k\} y'' + h_1 y' = 0, \\ \{h_0(x-\alpha)^2 + k\} y'' + h_1(x-\alpha) y' + h_2 y = 0, \\ \{h_0(x-\alpha)^3 + k\} y'' + h_1(x-\alpha)^2 y' + h_2(x-\alpha) y = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

gli integrali si troveranno subito coi processi precedenti; e di queste, la prima avrà sempre l'integrale $y=\text{cost.}$, e quando $\frac{h_1}{h_0}$ sia un numero intero e negativo $-\tau$ avrà per secondo integrale un polinomio intero di grado $\tau+1$; mentre la seconda avrà per integrali uno o due polinomii interi dei gradi $2h-2$ o $2h-1$ secondochè con valori interi e positivi di h saranno soddisfatte una o tutte e due le condizioni

$$(13)\qquad \begin{cases} (2h-2)(2h-3)h_0+(2h-2)h_1+h_2=0\,, \\ (2h-1)(2h-2)h_0+(2h-1)h_1+h_2=0\,; \end{cases}$$

e la terza delle stesse equazioni (12) avrà per integrali uno o due polinomii interi dei gradi $3h-3$, $3h-2$ o $3h-1$ secondochè con valori interi e positivi di h saranno soddisfatte una sola o due o tutte e tre (*) le condizioni seguenti

$$(14)\qquad \begin{cases} (3h-3)(3h-4)h_0+(3h-3)h_1+h_2=0\,, \\ (3h-2)(3h-3)h_0+(3h-2)h_1+h_2=0\,, \\ (3h-1)(3h-2)h_0+(3h-1)h_2+h_2=0\,; \end{cases}$$

per modo che variando il coefficiente h_2 nelle equazioni precedenti, come avverrà se esso conterrà linearmente una variabile ausiliaria z che non figura negli altri coefficienti h_0 e h_1, le equazioni stesse verranno ad ammettere sempre *polinomii integrali* di tutti i gradi.

585. — Questa osservazione vale anche per le equazioni lineari omogenee d'ordine superiore al secondo delle forme considerate nei precedenti §§ 582 e 583 nelle quali il coefficiente a_n nel caso di $s\geq n$ o il coefficiente a_s per $s>n$ contengono una variabile ausiliaria z che non figura però negli altri coefficienti.

In questi casi dunque, l'integrale, che, come anche per le equazioni lineari *generali* (8), è ordinariamente una serie *coi coefficienti funzioni razionali intere di z* (**), si ridurrà a polinomii in x dei varii gradi per quei valori particolari di z pei quali le equazioni (11), (13), (14),... saranno soddisfatte.

(*) Però, siccome qualunque sia h il determinante delle equazioni (14) è uguale a -2, le condizioni stesse (14) non possono essere soddisfatte tutte e tre insieme altro che quando sia $h_0=h_1=h_2=0$, e in questo caso la equazione corrispondente è la $y''=0$ e ha l'integrale $y=cx+c_1$ con c e c_1 costanti arbitrarie.

(**) Tenendo conto delle equazioni (9) che si hanno in generale per la determinazione di $y_a^{(n+p)}$, si vede che la particolarità ora indicata, cioè che i coefficienti delle serie integrali *siano funzioni razionali intere di z,* vale per tutte le equazioni lineari (8) nelle quali non solo uno, ma anche più dei coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e X (dopo il primo) contengono in forma razionale e intera la stessa variabile z.

Così nel caso di $\alpha=0$, $k=1$, $h_0=-1$, $h_1=-2$, $h_2=z(z+1)$, cioè per la equazione

$$(15)\qquad (1-x^2)y''-2xy'+z(z+1)y=0\,,$$

si potranno avere polinomii integrali razionali interi di tutti i gradi, e coi termini tutti di grado pari o tutti di grado dispari, che sono le ordinarie funzioni di Legendre X_n all'infuori di un fattore costante; e questi si otterranno, quando z varia da $-\infty$ a ∞, ogni volta che z passa per un numero intero positivo o negativo o per zero.

586. — Tutto questo nel caso che per $x=\alpha$ il coefficiente a_0 del primo termine della equazione lineare (8) che si considera sia diverso da zero; ma si comprende che si può considerare anche il caso in cui a_0 si annulla per $x=\alpha$, e anche allora, sempre valendosi delle formole (9) possono aversi in molti casi serie che rappresentino integrali della equazione data, e siano convergenti in tutto il piano o almeno pei valori reali e complessi di x entro un certo cerchio di convergenza.

In particolare dunque quando la equazione data sia omogenea e ci si trovi in un caso analogo a quello del § 582, pel quale cioè in ciascuna delle equazioni (9) corrispondenti, a partire da una di esse, per $x=\alpha$ vi restino soltanto due termini che siano sempre alla stessa distanza dal primo $a_0y^{(n+p)}$, come ad es., quando vi restino i due che contengono $y^{(n+p-h)}$ e $y^{(n+p-h-s)}$ con h e s numeri interi fissi diversi da zero e positivi, allora potranno farsi considerazioni e studii del tutto simili a quelli dello stesso § 582, e si troveranno ancora dei casi nei quali le equazioni che si considerano ammettono polinomii integrali (*).

587. — Così avendosi la equazione del second'ordine

$$(16)\qquad (x-\alpha)y''+(\mu+\nu x)y'+a_2y=0\,,$$

nella quale μ, ν e a_2 sono quantità costanti, siccome per essa le equazioni (9) vengono tutte della forma

$$(x-\alpha)y^{(p+2)}+\{p+\mu+\nu x\}y^{(p+1)}+(p\nu+a_2)y^{(p)}=0\,,$$

e questa per $x=\alpha$ si riduce all'altra con due soli termini

$$(p+\mu+\nu\alpha)y_\alpha^{(p+1)}+(p\nu+a_2)y^{(p)}=0\,,$$

(*) Il caso delle equazioni lineari del second'ordine il lettore potrà trovarlo studiato assai diffusamente nell'ultima delle mie Memorie *Sulle equazioni differenziali lineari* pubblicata negli *Annali di Milano* (Tomo XVII, ser. III, pag. 135 e seg.)

si vede subito che se $\mu+\nu\alpha$ non sarà zero e non sarà un numero intero e negativo, questa equazione col farvi $p=1,2,3,\ldots$ determinerà i valori delle successive derivate $y'', y''', y^{\mathrm{IV}},\ldots$ e condurrà quindi a un integrale particolare della nostra equazione in serie che si riscontrerà subito che è convergente in tutto il piano. E quando $\mu+\nu\alpha$ sia zero o un numero intero negativo $-p$, senza che sieno zero respettivamente a_2 o $p\lambda+a_2$, allora y_a o $y_a^{(p)}$ dovranno essere zero, e in quest'ultimo caso lo saranno anche le derivate precedenti $y_a^{(p-1)},\ldots, y''_a, y'_a$, e si avrà ancora la serie integrale valida in tutto il piano; ma questa incomincierà dal termine che contiene y'_a o $y_a^{(p+1)}$, cioè dalla potenza *prima* o $(p+1)^a$ di $x-\alpha$.

Quando poi si abbia $p\lambda+a_2=0$ per un valore intero e positivo di p, l'integrale si ridurrà a un polinomio razionale intero di grado p: talchè se a_2 conterrà un parametro variabile ε che non sia contenuto in ν, la nostra equazione col mutare di ε verrà ad avere polinomii integrali di tutti i gradi.

588. — I polinomii integrali che si hanno nel caso della seconda delle equazioni (12) del § 584 quando h_0 non è zero sono quelli che diconsi *polinomii di Jacobi* perchè trovansi per la prima volta considerati in una memoria postuma di lui sulle *serie ipergeometriche*, pubblicata nel vol. 56 del *Journal für die reine und angewandte Math. pag. 149 e seg.*, e questi si riducono alle ordinarie funzioni di Legendre X_n per $\alpha=0$, $k=1$, $h_0=-1$, $h_1=-2$, $h_2=n(n+1)$; essi poi e quelli che si hanno dalla stessa equazione quando $h_0=0$ come quelli che provengono dalla (15) sono stati tutti chiamati *polinomii o funzioni di Tchebicheff* da *Stekloff* in una sua memoria del vol. 127 dello stesso giornale (pag. 207 e seg.).

Tutti questi polinomii integrali possono aversi con facilità anche sotto forma d'integrali multipli o di derivate dell'ordine n (uguale al grado del polinomio) di una funzione razionale intera, come può vedersi nella mia memoria degli *Annali di Matematica* ricordata nella ultima nota.

Integrazione delle equazioni col metodo dei coefficienti e esponenti indeterminati.

589. — Quando la ricerca dell'integrale di una equazione

$$f(x, y, y', y'',\ldots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

per serie di Taylor (o di Maclaurin) presenta delle incompatibilità, o dà luogo a calcoli troppo complicati, per trovarlo si cerca di usare un altro metodo che è detto dei *coefficienti e esponenti indeterminati* e che talvolta riesce.

Consiste questo metodo nel porre

$$y=A_1x^{a_1}+A_2x^{a_2}+A_3x^{a_3}+\ldots \tag{2}$$

essendo $A_1, A_2, A_3,\ldots, a_1, a_2, a_3,\ldots$ quantità costanti da determinarsi; e poi, ammettendo dapprima che al secondo membro di questa formola, anche se è una serie, siano applicabili successivamente le derivazioni, si calcolano le derivate $y', y'', y''',\ldots, y^{(n)}$ per sostituirle nella equazione data (1), e si cerca poi di determinare le varie costanti A_s e a_s in modo che la equazione stessa resti soddisfatta.

Fatta poi questa determinazione (quando pure si riesca a farla), se si troverà che il secondo membro della formola (2) viene ad essere una serie e non un polinomio, onde essere sicuri che la stessa formola dia effettivamente un integrale della (1) basterà verificare se la serie stessa sia effettivamente convergente e derivabile come abbiamo supposto.

590. — Tutto questo del resto apparirà chiaramente dai due esempii seguenti.

1.° Volendo l'integrale della equazione

$$x^2y''=y, \tag{3}$$

si scriverà la formola (2), e si osserverà che, ammessa la convergenza del secondo membro (quando debba essere una serie) e la possibilità delle derivazioni prima e seconda, si avrà

$$y''=A_1a_1(a_1-1)x^{a_1-2}+A_2a_2(a_2-1)x^{a_2-2}+A_3a_3(a_3-1)x^{a_3-2}+\ldots,$$

e onde la equazione data (3) risulti soddisfatta dovrà essere evidentemente

$$A_1\big(a_1(a_1-1)-1\big)x^{a_1}+A_2\big(a_2(a_2-1)-1\big)x^{a_2}+A_3\big(a_3(a_3-1)-1\big)x^{a_3}+\ldots=0.$$

Questa equazione per essere soddisfatta identicamente richiederà che per a_1 si abbia $a_1(a_1-1)-1=0$ e al tempo stesso sia $A_2=0$, $A_3=0\ldots$, o che con $a_1(a_1-1)-1=0$ sia anche $a_2(a_2-1)-1=0$ con $A_3=0$, $A_4=0,\ldots$ ciò che mostra che a_1 e a_2 dovranno essere radici delle equazioni di secondo grado $\omega^2-\omega-1=0$, cioè dovrà essere sempre $a_1=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, prendendo poi nel secondo caso $a_2=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}=-\dfrac{1}{a_1}$; e quindi

$$y=Ax^{a_1}+Bx^{-\frac{1}{a_1}}, \tag{4}$$

con A e B costanti arbitrarie e $a_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, sarà l'integrale generale della nostra equazione.

Questo integrale evidentemente non poteva aversi colla formola di Maclaurin perchè in esso gli esponenti di x sono irrazionali, e uno è anche negativo.

2.° Vogliasi ora l'integrale della equazione

$$y'' = x^m y \tag{5}$$

nella quale supporremo m diverso da -2 per non ricadere nel caso precedente.

Ammettendo ancora che il suo integrale y debba presentarsi sotto la forma (2) nella quale il primo termine dovrà naturalmente supporsi diverso da zero, e seguendo il processo indicato, si troverà che deve essere

$$A_1a_1(a_1-1)x^{a_1-2}+A_2a_2(a_2-1)x^{a_2-2}+A_3a_3(a_3-1)x^{a_3-2}+\ldots=A_1x^{a_1+m}+A_2x^{a_2+m}+A_3x^{a_3+m}+\ldots,$$

e quindi fissando che gli esponenti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in y debbano essere tutti in ordine crescente, o tutti in ordine decrescente, e osservando che a_1-2 deve supporsi diverso da a_1+m perchè si ammette che non sia $m=-2$, si vede subito intanto che onde la eguaglianza precedente possa poi aversi termine a termine, bisognerà che nel primo membro il primo termine manchi e quindi o sia $a_1=0$ o sia $a_1=1$; e allora la eguaglianza si avrà quando gli esponenti degli altri termini del primo membro siano successivamente eguali a quelli del secondo, e lo stesso sia dei loro coefficienti.

Ne segue dunque che con $a_1=0$ o con $a_1=1$ converrà prendere

$$a_2-2=a_1+m, \quad a_3-2=a_2+m, \quad a_4-2=a_3+m, \ldots,$$

e al tempo stesso.

$$A_2a_2(a_2-1)=A_1, \quad A_3a_3(a_3-1)=A_2, \quad A_4a_4(a_4-1)A_3, \ldots, A_na_n(a_n-1)=A_{n-1}, \ldots,$$

cioè ponendo $m+2=\nu$, con che ν sarà diverso da zero, dovremo prendere intanto

con $a_1=0$

$$a_2=\nu, \quad a_3=2\nu, \quad a_4=3\nu, \ldots, a_n=(n-1)\nu, \ldots,$$

$$A_2=\frac{A_1}{\nu(\nu-1)}, \; A_3=\frac{A_1}{\nu(\nu-1)2\nu(2\nu-1)}, \ldots, A_n=\frac{A_1}{\nu(\nu-1)2\nu(2\nu-1)\ldots n\nu(n\nu-1)}, \ldots$$

e con $a_1=1$

$$a_2=\nu+1, \quad a_3=2\nu+1, \quad a_4=3\nu+1, \ldots, a_n=(n-1)\nu+1, \ldots,$$

$$A_2=\frac{A_1}{\nu(\nu+1)}, \; A_3=\frac{A_1}{\nu(\nu+1)2\nu(2\nu+1)}, \ldots, A_n=\frac{A_1}{\nu(\nu+1)2\nu(2\nu+1)\ldots n\nu(n\nu+1)}, \ldots$$

ammettendo che nessuno dei fattori $\nu-1$, $2\nu-1$, $3\nu-1, \ldots, n\nu-1, \ldots$ dei denominatori nel primo caso, e nessuno dei fattori $\nu+1$, $2\nu+1$, $3\nu+1$, $\ldots$, $n\nu+1, \ldots$ nel secondo caso sia zero.

Questo porta che, oltre al caso di $m=-2$ (o $\nu=0$), che si intende sempre escluso in ambedue i casi di $a_1=0$ e $a_1=1$, nel caso di $a_1=0$ si debbano escludere i valori di m pei quali si ha in generale $n(m+2)=1$ cioè si debbano escludere per m i numeri del gruppo

$$\tag{6} \left\{\begin{array}{l} -1,\; -2+\frac{1}{2},\; -2+\frac{1}{3},\; -2+\frac{1}{4}, \ldots,\; -2+\frac{1}{n}, \ldots, \\ \text{ovvero} \\ -1,\; -\frac{3}{2},\; -\frac{5}{3},\; -\frac{7}{4}, \ldots,\; -\frac{2n-1}{n}, \ldots, \end{array}\right.$$

e nel caso di $a_1=1$ si debbano escludere per m i numeri del gruppo

$$\tag{7} \left\{\begin{array}{l} -3,\; -2-\frac{1}{2},\; -2-\frac{1}{3},\; -2-\frac{1}{4}, \ldots,\; -2-\frac{1}{n}, \ldots, \\ \text{ovvero} \\ -3,\; -\frac{5}{2},\; -\frac{7}{3},\; -\frac{9}{4}, \ldots,\; -\frac{2n+1}{n}, \ldots; \end{array}\right.$$

e così evidentemente prendendo $A_1=1$, con $\nu=m+2$ e m diverso da -2, si avrà una prima formola

$$\tag{8} y=1+\frac{x^\nu}{\nu(\nu-1)}+\frac{x^{2\nu}}{\nu(\nu-1)2\nu(2\nu-1)}+\ldots+\frac{x^{n\nu}}{\nu(\nu-1)2\nu(2\nu-1)\ldots n\nu(n\nu-1)}+\ldots$$

corrispondente al caso di $a_1=0$ per tutti i valori positivi e negativi di m, esclusi però, oltre al valore -2, i valori del gruppo (6); e avremo una seconda formola

$$\tag{9} y=x+\frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}+\frac{x^{2\nu+1}}{\nu(\nu+1)2\nu(2\nu+1)}+\ldots+\frac{x^{n\nu+1}}{\nu(\nu+1)2\nu(2\nu+1)\ldots n\nu(n\nu+1)}+\ldots$$

corrispondente al caso di $a_1=1$ per tutti i valori positivi e negativi di m esclusi, oltre al valore -2, i valori del gruppo (7); e ora osservando che fuori dei casi respettivamente esclusi le due serie che qui figurano sono convergentissime e ad esse possono applicarsi le derivazioni termine a termine per tutti i valori di x ad eccezione del valore $x=0$ quando ν è negativo, si conclude che le formole stesse (8) e (9) dànno ciascuna nei casi respettivamente indicati un integrale particolare della equazione (5).

E così pei valori di m diversi da -2 e dai valori (6) e (7) avremo anche l'integrale generale della equazione (5), e questo sarà

$$(10)\qquad y=\mathrm{A}\left\{1+\frac{x^{\nu}}{\nu(\nu-1)}+\frac{x^{2\nu}}{\nu(\nu-1)2\nu(2\nu-1)}+\dots\right\}+\mathrm{B}x\left\{1+\frac{x^{\nu}}{\nu(\nu+1)}+\frac{x^{2\nu}}{\nu(\nu+1)2\nu(2\nu+1)}+\dots\right\},$$

dove A e B sono costanti arbitrarie; mentre pei valori di m del gruppo (6) avremo soltanto l'integrale particolare (9) e per quelli del gruppo (7) avremo soltanto l'integrale particolare (8), mentre per $m=-2$ si ha l'integrale generale (4) che trovammo sopra.

Si può osservare che nel caso di ν negativo, e anche nel caso di ν positivo ma fratto questi integrali non potevano aversi colla formola di Maclaurin; e si può osservare anche che la equazione (5) che ora abbiamo integrata è quella del second'ordine alla quale si riduce la equazione di Riccati (§ 381 [pag. 550 e seg.]) $z'+az^2=bx^m$ facendovi $z=\frac{y'}{ay}$ e cambiando x in $\frac{x}{(ab)^{\frac{1}{m+2}}}$.

Integrazione delle equazioni per integrali definiti.

591. — Quando non riuscendo ad ottenere l'integrale di una equazione sotto forma finita si è costretti a ricorrere con un processo o con un altro a una integrazione per serie, se poi non si può trasformare la serie in modo da averne la somma sotto una forma semplice, bene spesso difficilmente col semplice studio della serie si possono scorgere le proprietà principali dell'integrale medesimo.

Una delle forme perciò nelle quali si cerca di trasformare la serie che rappresenta l'integrale di una data equazione, o sotto la quale anche senza passare per le serie si cerca di avere l'integrale, è quella per integrali definiti (*), e di questi processi d'integrazione troviamo ora opportuno di dare qualche esempio.

Riprendiamo perciò la equazione del § 580, 2.° della funzione di Bessel, cioè

$$(1)\qquad xy''+y'+xy=0,$$

(*) Il problema della trasformazione delle serie in integrali definiti non è determinato, potendo infiniti integrali definiti avere lo stesso valore.

Di queste trasformazioni già demmo alcuni esempi nel Cap. VIII (§§ 107 e seg. [pag. 158 e seg.]). Processi poi per queste trasformazioni si hanno dalla teoria delle funzioni di variabile complessa (V. ad es. i §§ 62 e seg. a pag. 140 e seg. del mio libro sulla «*Serie di* Fourier *e altre rappres. analit. delle funzioni di variab. reale*. Pisa. Nistri 1880).

per la quale trovammo che un integrale $y=\mathrm{I}(x)$ è dato dalla serie

$$(2)\qquad \mathrm{I}(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\dots,$$

e ricordiamo la formola

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\omega\,d\omega=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots2n}\pi=\frac{\pi(2n)}{2^2.4^2.6^2\dots(2n)^2}\pi$$

che deducemmo al § 53 (pag. 94) dalle formole relative agli integrali

$$\int \mathrm{sen}^m x\cos^n x\,dx.$$

Avendosi dalla formola stessa

$$\frac{1}{2^2.4^2.6^2\dots(2n)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\pi(2n)}\int_0^{\pi}\cos^{2n}\omega\,d\omega,$$

si vede subito che la serie che rappresenta $\mathrm{I}(x)$ può porsi sotto la forma

$$\mathrm{I}(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}d\omega-\int_0^{\pi}\frac{x^2\cos^2\omega}{\pi(2)}d\omega+\int_0^{\pi}\frac{x^4\cos^4\omega}{\pi(4)}d\omega-\dots\right\};$$

e di qui osservando che la serie fra parentesi è quella che si deduce dalla integrazione termine a termine rispetto ad ω della serie convergente in ugual grado

$$1-\frac{(x\cos\omega)^2}{\pi(2)}+\frac{(x\cos\omega)^4}{\pi(4)}-\dots$$

che rappresenta $\cos(x\cos\omega)$, si trova subito la formola seguente

$$(3)\qquad \mathrm{I}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\omega)\,d\omega,$$

che ci dà l'integrale della nostra equazione (1) sotto forma d'integrale definito.

Derivando questo integrale e applicandovi alcune integrazioni per parti si torna subito a riscontrare che esso soddisfa effettivamente alla equazione (1).

592. — Una osservazione, fatta già da Eulero e ripresa poi da Jacobi nella memoria ricordata al § 588, conduce a un integrale della equazione del se-

cond'ordine

$$(x-a)(b-x)y''+(\mu+\nu x)y'+a_2 y=0, \tag{4}$$

espresso per integrali definiti, intendendo che a, b, μ, ν e a_2 siano tutte costanti.

Posto

$$\mathrm{V}=u^p(1-u)^q(1-xu)^r, \tag{5}$$

con p, q e r numeri costanti e r diverso da zero e da 1, Eulero osservò che la espressione

$$u^{p+1}(1-u)^{q+1}(1-xu)^{r-1}$$

derivata rispetto ad u porta ad un'altra espressione nella quale il fattore $1-xu$ vi è alle potenze $r-1$ e $r-2$ precisamente come nelle derivate prima e seconda di V prese rispetto ad x, e quindi viene naturale di scrivere

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{p+1}(1-u)^{q+1}(1-xu)^{r-1}\right\}=\mathrm{A}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}+\mathrm{B}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+\mathrm{CV}, \tag{6}$$

e vedere se e come si possono determinare A, B e C in funzione della sola x per modo che questa equazione sussista.

Eseguendo la derivazione indicata nel primo membro si giunge subito alla espressione seguente

$$u^p(1-u)^q(1-xu)^{r-2}\left\{(p+1)(1-u)(1-xu)-(q+1)u(1-xu)-(r-1)xu(1-u)\right\}=,$$
$$=u^p(1-u)^q(1-xu)^{r-2}\left\{p+1-[p+q+2+(p+r)x]u+(p+q+r+1)xu^2\right\},$$

mentre eseguendo le derivazioni del secondo membro si giunge all'altra espressione

$$u^p(1-u)^q(1-xu)^{r-2}\left\{\mathrm{A}r(r-1)u^2-\mathrm{B}ru(1-xu)+\mathrm{C}(1-xu)^2\right\}=$$
$$=u^p(1-u)^q(1-xu)^{r-2}\left\{\mathrm{C}-(\mathrm{B}r+2\mathrm{C}x)u+[\mathrm{A}r(r-1)+\mathrm{B}rx+\mathrm{C}x^2]u^2\right\},$$

e quindi si avrà identità fra queste due espressioni quando A, B, C si determinino colle formole seguenti

$$\mathrm{C}=p+1,\quad \mathrm{B}r+2\mathrm{C}x=p+q+2+(p+r)x,\quad \mathrm{A}r(r-1)+\mathrm{B}rx+\mathrm{C}x^2=(p+q+r+1)x,$$

cioè quando, intendendo sempre che non sia nè $r=0$ nè $r=1$, si prendano

$$\mathrm{C}=p+1,\quad \mathrm{B}=\frac{p+q+2-(p+2-r)x}{r},\quad \mathrm{A}=\frac{x(1-x)}{r};$$

dunque si potrà scrivere con Eulero

$$r\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{p+1}(1-u)^{q+1}(1-xu)^{r-1}\right\}=x(1-x)\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2}+[p+q+2-(p+2-r)]\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+r(p+1)\mathrm{V}. \tag{7}$$

Prendendo ora

$$y=\int_g^h \mathrm{V}\,du=\int_g^h u^p(1-u)^q(1-xu)^r\,du,$$

con g e h quantità indipendenti da u e da x, o che se contengono x sono tali che V e $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$ si annullino al limite corrispondente, e in ogni caso sono tali che gli integrali $\int_g^h \mathrm{V}\,du$, $\int_g^h \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}du$ e $\int_g^h \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}du$ pei valori che si hanno per p, q, r e per quelli di x che si considerano abbiano un significato, colla derivazione sotto il segno avremo

$$x(1-x)y''+[p+q+2-(p+2-r)x]y'+r(p+1)y=r\int_g^h\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{p+1}(1-u)^{q+1}(1-xu)^{r-1}\right\}du=$$
$$=r\left\{u^{p+1}(1-u)^{q+1}(1-xu)^{r-1}\right\}_h^g,$$

e quindi se p e q saranno superiori a -1 e r sarà >1, o se essendo r inferiore ad uno e diverso da zero si supporrà x inferiore ad uno, è certo che

$$y=\int_0^1 u^p(1-u)^q(1-xu)^r\,du \tag{8}$$

sarà un integrale della equazione

$$x(1-x)y''+[p+q+2-(p+2-r)x]y'+r(p+1)y=0; \tag{9}$$

e con altre condizioni che si pongano pei numeri p, q, r e pei valori di x da considerarsi onde gli integrali corrispondenti abbiano un significato nei varii casi, anche gli integrali definiti

$$\int_0^{-\infty}\mathrm{V}\,du,\quad \int_1^{\infty}\mathrm{V}\,du,\quad \int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{V}\,du,\quad \int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\mathrm{V}\,du,\quad \int_1^{\frac{1}{x}}\mathrm{V}\,du \tag{10}$$

saranno integrali della (9) come rilevò Jacobi nella memoria citata nella quale però egli prese pei numeri p, q, r gli altri $\beta-1, \gamma-\beta-1, -\alpha$ per riportare la (9) alla equazione delle funzioni ipergeometriche

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0.$$

E si può notare che ora propriamente non vi è più bisogno di escludere il caso di $r=0$, perchè in questo caso quelli fra i precedenti integrali che hanno i limiti 0 e 1 o 0 e $-\infty$ e 1 e ∞ che hanno un significato si riducono a quantità costanti, e la equazione (9) ammette appunto anche l'integrale $y=\text{cost.}$; e neppure è da escludere il caso di $r=1$, perchè gli stessi integrali quando hanno un significato sono della forma $cx+d$ (con c e d cost.), e per $r=1$ la equazione (9) ha appunto sempre un integrale di questa forma.

593. — Così alcuni o tutti gl'integrali della equazione (9) vengono sempre espressi, a seconda dei valori di p, q, r e x, per l'integrale definito $\int_0^1 V\,du$ o per uno degli integrali (10), essendo sempre V la funzione (5); e con facilità si vede che questa equazione (9) con valori opportuni di p, q, e r, che possono però essere anche complessi, comprendono tutte le equazioni della forma (4).

Se si cambia infatti nella (9), e quindi anche in V, la variabile x nella variabile t colla formola $x=\frac{t-a}{b-a}$, e poi si torna a scrivere x al posto di t, in V il fattore $(1-xu)^r$ si cambia nell'altro $\left(1-\frac{x-a}{b-a}u\right)^r$, e la equazione (9) si trasforma nell'altra

$$(x-a)(b-x)y''+\{(p+q+2)b-(q+r)a-(p+2-r)x\}y'+r(p+1)y=0;$$

e perchè questa concordi colla (4) basta prendere p, q, r in modo che si abbiano le equazioni

$$(p+q+2)b-(q+r)a=\mu\,, \quad r-p-2=\nu\,, \quad r(p+1)=a_2\,,$$

ciò che è sempre possibile in due modi se $(\nu+1)^2+4a^2 \gtrless 0$, e in un sol modo se $(\nu+1)^2+4a_2=0$; perchè, come si vede subito, basterà prendere per r una radice della equazione $r(r-(\nu+1))=a_2$ cioè

$$r=\frac{\nu+1\pm\sqrt{(\nu+1)^2+4a_2}}{2}$$

e poi col valore che si sceglierà per r prendere $p=r-\nu-2$, $q=-r+\frac{\mu+\nu b}{b-a}$.

In particolare nel caso della equazione

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

con n intero e positivo che è quella delle funzioni di Legendre X_n, essendo $a=-1$, $b=1$, $\mu=0$, $\nu=-2$ $a_2=n(n+1)$, avremo

$$p=r,\ q=-r-1, \quad \text{con} \quad r=n \quad \text{o} \quad r=-(n+1),$$

e quindi per la stessa equazione si avranno gli integrali

$$\int_0^{\frac{2}{x+1}} \frac{u^n}{(1-u)^{n+1}}\left(1-\frac{x+1}{2}u\right)^n du\,, \quad \int_1^{\infty} \frac{(1-u)^n}{u^{n+1}\left(1-\frac{x+1}{2}u\right)^{n+1}}\,du$$

ambedue per x fuori dell'intervallo $(-1, 1)$ con esclusione anche dei valori estremi $x=-1$ e $x=1$; essi però non corrisponderanno all'integrale di Legendre X_n, ma ad altri integrali.

594. — Si può anche osservare che quando per la equazione data (4) il valore r risulti un numero intero e positivo, e p e q risultino positivi l'integrale $\int_0^1 u^p(1-u)^q\left(1-\frac{x-a}{b-a}u\right)^r du$ che rappresenterà un integrale della equazione data sarà evidentemente un suo polinomio integrale di grado r.

E quando i numeri p, q e r risultino tutti numeri interi positivi o negativi o anche se alcuno di essi (ma non però r) sia uguale a zero, allora l'integrale

$$\int_g^h u^p(1-u)^q(1-xu)^r du\,,$$

nel quale i limiti g e h a seconda dei valori di p, q, r e x dovranno essere 0 e 1 o essere quelli fra gli integrali (10) pei quali l'integrale stesso ha ancora un significato, sarà un integrale della equazione data che si potrà sempre ottenere sotto forma finita espresso per funzioni razionali di x o per logaritmi o per archi tangenti (*).

595. — Vogliamo ora accennare anche ad una estensione che può farsi delle formole di Eulero (6) o (7) per giungere alla determinazione di integrali di altre equazioni anche di ordine superiore per mezzo d'integrali definiti.

Si prenda perciò invece della funzione V data dalla (5) l'altra più generale

(11) $$V=(u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_n)^{p_n}(xu-1)^r,$$

nella quale, in confronto alla V che considerammo sopra, abbiamo introdotto dei

(*) Per quanto dicemmo nel Capitolo IV relativo agli integrali delle funzioni irrazionali, questa particolarità si avrà anche nel caso in cui dei numeri p, q, r uno solo sia fratto, e anche nel caso che ve ne siano due fratti purchè allora ciascuno sia della forma $\frac{2i+1}{2}$, ecc....

cangiamenti di segno solo per semplicizzare le formole che poi se ne traggono.

Con un ragionamento simile a quello che facemmo per giungere alla (6), in corrispondenza a questa scriveremo ora l'altra equazione

$$(12)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{(u-a_1)^{p_1+1}(u-a_2)^{p_2+1}\dots(u-a_n)^{p_n+1}(xu-1)^{r-k+1}\right\}=A_0\frac{\partial^k V}{\partial x^k}+A_1\frac{\partial^{k-1}V}{\partial x^{k-1}}+\dots+A_{k-1}\frac{\partial V}{\partial x}+A_k V,$$

nella quale potremo sempre intendere che r sia diverso da $k-1$, perchè il caso di $r=k-1$ ci darebbe $\frac{\partial^k V}{\partial x^k}=0$, e questo equivarrebbe a prendere k inferiore di una unità.

Posto poi per semplicizzare

$$(13)\qquad \varphi(u,x)=(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n)(xu-1),$$

si vedrà subito che il primo membro della formola (12) può scriversi sotto la forma

$$(14)\quad (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}\dots(u-a_n)^{p_n}(xu-1)^{r-k}\left\{(p_1+1)\frac{\varphi(u,x)}{u-a_1}+(p_2+1)\frac{\varphi(u,x)}{u-a_2}+\dots+\right.$$
$$\left.+(p_n+1)\frac{\varphi(u,x)}{u-a_n}+(r-k+1)\frac{\varphi(u,x)}{xu-1}x\right\},$$

nella quale i rapporti $\frac{\varphi(u,x)}{u-a_1}$, $\frac{\varphi(u,x)}{u-a_2}$, ..., $\frac{\varphi(u,x)}{u-a_n}$, $\frac{\varphi(u,x)}{ux-1}$ sono le funzioni intere di u

$$(u-a_2)(u-a_3)\dots(u-a_n)(xu-1),\quad (u-a_1)(u-a_3)\dots(u-a_n)(xu-1),\dots$$
$$(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{n-1})(xu-1),\quad (u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n),$$

mentre il secondo membro della stessa (12) può scriversi

$$(15)\ (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}\dots(u-a_n)^{p_n}(xu-1)^{r-k}\left\{A_k(xu-1)^k+A_{k-1}r(xu-1)^{k-1}u+\right.$$
$$+A_{k-2}r(r-1)(xu-1)^{k-2}u^2+\dots+A_1 r(r-1)\dots(r-k+2)(xu-1)u^{k-1}+$$
$$\left.+A_0 r(r-1)\dots(r-k+1)u^k\right\};$$

quindi, ordinando per le potenze crescenti di u le due espressioni fra parentesi che figurano in queste formole, e uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di u, se $n\leq k$ si otterranno $k+1$ equazioni che determineranno subito *successivamente*, a incominciare dal coefficiente A_k che verrà dato dalla formola

$$(16)\qquad A_k=(-1)^{n-k}\left\{(p_1+1)a_2a_3\dots a_n+(p_2+1)a_1a_3\dots a_n+\dots+\right.$$
$$\left.+(p_n+1)a_1a_2\dots a_{n-1}+(r-k+1)a_1a_2\dots a_n x\right\},$$

tutti i coefficienti $A_k, A_{k-1}, A_{k-2}\dots A_1, A_0$ in funzioni razionali intere di x di grado k al più, senza che vi sia bisogno di porre condizioni pei numeri $p_1, p_2,\dots,p_r, r, a_1, a_2,\dots,a_n$; mentre se $n>k$ si avranno sempre le $k+1$ equazioni che determinano ancora successivamente $A_k, A_{k-1}, A_{k-2}\dots A_1, A_0$, e più si avranno altre $n-k$ equazioni che proverranno dall'eguagliare a zero i coefficienti di $u^{k+1}, u^{k+2},\dots, u^n$ nella prima delle due espressioni fra parentesi testè indicate, e quindi non conterranno altro che le $p_1, p_2,\dots,p_n, r, a_1, a_2, \dots, a_n$ e x, e per essere x variabile si scinderanno ordinariamente in più altre equazioni, alle quali dovranno soddisfare le $p_1, p_2,\dots,p_n, r, a_1, a_2,\dots,a_n$ onde la equazione (12) sia possibile.

Ammesso dunque o che sia $n\leq k$, o che se $n>k$ i numeri $p_1, p_2,\dots,p_n, r$ e $a_1, a_2,\dots,a_n$ soddisfino alle condizioni ora indicate, poniamo ora $y=\int_g^h V\,du$, essendo V data dalla formola (11) e g e h essendo presi fra i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ e ∞, o anche talvolta uno di essi essendo uguale a $\frac{1}{x}$, e sempre prendendoli in modo che gli integrali $\int_g^h V\,du$, $\int_g^h \frac{\partial V}{\partial x}du$, $\int_g^h \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}du$, ..., $\int_g^h \frac{\partial^k V}{\partial x^k}du$ abbiano un significato, e nel caso che uno dei detti limiti g e h sia uguale a $\frac{1}{x}$ l'esponente r di $(xu-1)$ in V sia tale che V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, ..., $\frac{\partial^{k-1}V}{\partial x^{k-1}}$ si annullino per $u=\frac{1}{x}$ cioè r sia positivo e superiore a $k-1$.

Allora si vedrà subito che l'integrale definito

$$(17)\qquad y=\int_g^h V\,du=\int_g^h (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}\dots(u-a_n)^{p_n}(xu-1)^r du,$$

sarà un integrale della equazione

$$(18)\qquad A_0 y^{(k)}+A_1 y^{(k-1)}+A_2 y^{(k-2)}+\dots+A_{k-1}y'+A_k y=0,$$

dove $A_0, A_1, A_2,\dots, A_{k-1}, A_k$ hanno i valori che si suppongono determinati come dicemmo sopra, e se i limiti g e h potranno prendersi in più modi gli integrali definiti corrispondenti saranno sempre integrali della equazione (18) che potranno però corrispondere anche tutti ad uno stesso integrale posto sotto forme diverse.

596. — I coefficienti $A_0, A_1, A_2,\dots, A_k$ della equazione (18) e al tempo stesso, nel caso di $n>k$, le equazioni alle quali dovranno soddisfare i nu-

meri $p_1, p_2, \ldots, p_n$, r e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ potranno sempre determinarsi nel modo testè indicato: ma queste determinazioni potranno farsi anche con altri sistemi di equazioni in base alle considerazioni seguenti.

Osservando perciò che nella espressione fra parentesi nella (14) il termine $(p_s+1)\dfrac{\varphi(u,x)}{u-a_s}$ $(s=1,2,\ldots,n)$ per $u=a_s$, e il termine $(r-k+1)\dfrac{\varphi(u,x)}{ux-1}x$ per $u=\dfrac{1}{x}$ si riducono respettivamente ai due $(p_s+1)[\varphi'_u(u_n,x)]_{u=a_s}$ e $(r-k+1)[\varphi'_u(u,x)]_{u=\frac{1}{x}}$ e gli altri allora sono tutti zero; si vedrà subito allora che uguagliando le espressioni fra parentesi della (14) e (15), e poi facendo $u=a_1$, $u=a_2, \ldots, u=a_n$, $u=\dfrac{1}{x}$ si ottengono $n+1$ equazioni delle quali le prime n rientrano tutte nella forma generale seguente

$$
\begin{aligned}
(19)\quad & A_k(xa_s-1)^k+A_{k-1}r(xa_s-1)^{k-1}a_s+A_{k-2}r(r-1)(xa_s-1)^{k-2}a_s^2+\ldots+A_1r(r-1)\ldots(r-k+2)(xa_s-1)\,a_s^{k-2}+\\
&+A_0r(r-1)\ldots(r-k+2)(r-k+1)a_s^k=(p_s+1)\varphi'_u(a_s,x)
\end{aligned}
$$

con $s=1,2,\ldots,n$, intendendo che $\varphi'_u(a_s,x)$ indichi qui la derivata $\varphi'_u(u,x)$ per $u=a_s$; e l'ultima equazione, quando come supponiamo r è diverso da $k-1$, è la seguente semplicissima

$$
(20)\qquad A_0=\frac{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)x^{k-n+1}}{r(r-1)\ldots(r-k+2)}
$$

che determinerà subito intanto il valore del primo coefficiente A_0 della equazione (18).

Queste $n+1$ equazioni nel caso di $n>k$ determineranno i coefficienti $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ e condurranno alle relazioni delle quali parlammo sopra fra le $p_1, p_2, \ldots, p_n$, r e $a_1, a_2, \ldots, a_n$; mentre nel caso di $n=k$ determineranno completamente tutti i coefficienti $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$, e nel caso di $n<k$ determineranno soltanto $n+1$ di questi coefficienti, e gli altri si otterranno dalle equazioni che risulteranno dall'uguagliare a zero i coefficienti di $u^{n+1}, u^{n+2}, \ldots, u^k$ nella espressione fra parentesi della (15) ordinata per le potenze di u. E tutto questo, ben s'intende, quando alcune di queste equazioni non rientrino l'una nell'altra o non presentino delle incompatibilità.

597. — Così si hanno dunque infinite equazioni differenziali lineari (18) per le quali si ottengono integrali per mezzo degli integrali definiti

$$
y=\int_g^h (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}\ldots(u-a_n)^{p_n}(xu-1)^r\,du,
$$

nei quali i limiti g e h devono essere presi nel modo da noi indicato sopra.

E si può anche qui notare, come già facemmo pel caso della equazione di Eulero al § 594, che questi integrali quando $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e r siano tutti numeri interi positivi o negativi potranno anche determinarsi sotto forma finita per mezzo di funzioni razionali, e di logaritmi o archi tangenti; e quando dei due limiti g e h nè l'uno nè l'altro sia uguale ad $\dfrac{1}{x}$, e r sia un numero intero e positivo, comunque siano allora le $p_1, p_2, \ldots, p_n$ l'integrale sarà un polinomio razionale intero di grado r al più.

598. — Particolarizzando i valori di $p_1, p_2, \ldots, p_n, r$, n e k si hanno equazioni speciali (18) delle quali si trovano integrali con questi processi.

Così ad. es. supponendo $n=1$, $k=2$ con r diverso da 1, e cambiando a_1 e p_1 in a e p, si osserverà prima che le formole (16) e (20) ci daranno ora

$$
A_2=-(p+1)-(r-1)ax,\qquad rA_0=(1-ax)x^2,
$$

e poi coi processi precedenti troveremo

$$
rA_1=(p-r+2)x+2(r-1)ax^2,
$$

e si potrà quindi affermare che la equazione

$$
(1-ax)x^2y''+\{(p-r+2)x+2(r-1)ax^2\}y'-r\{p+1+(r-1)ax\}y=0
$$

ammette l'integrale

$$
y=\int_g^h (u-a)^p(ux-1)^r\,du,
$$

dove g e h andranno presi nel modo da noi indicato sopra a seconda dei valori di p e r; e nel caso di $r>1$ e p positivo o anche soltanto $p>-1$, potremo prendere $y=\displaystyle\int_a^{\frac{1}{x}}(u-a)^p(ux-1)^r\,du$, come nel caso di p positivo e r inferiore a $-(p+1)$ potremo prendere

$$
y=\int_a^{\infty}(u-a)^p(ux-1)^r\,du,\quad \text{o}\quad y=\int_{-\infty}^{a}(u-a)^p(ux-1)^r\,du,
$$

secondochè $\dfrac{1}{x}$ è compreso fra $-\infty$ e $\dfrac{1}{a}$ o fra $\dfrac{1}{a}$ e ∞, ecc.

Così per $a=0$, $r=2$ avremo per p positivo e anche per $p>-1$ $y=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}u^p(ux-1)^2\,du$, e per p negativo e inferiore a -3 avremo invece

$y = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^p (ux - 1)^2 du$; talchè osservando che le integrazioni possono farsi immediatamente si trova che per qualunque valore di p non compreso fra -3 e -1, la equazione

$$x^2 y'' + pxy' - 2(p+1)y = 0$$

ammette sempre l'integrale $y = Cx^{-(p+1)}$ con C costante arbitraria come si verifica immediatamente, riscontrando allora che questo integrale si ha anche pei valori di p da -3 a -1 per quanto per questi valori di p da -3 a -1 non possa rappresentarsi cogli integrali precedenti.

Prendendo anche ad es. $n=3$, $k=2$, coi processi precedenti quando r è diverso da 1 si trova subito

$$rA_0 = (1-a_1 x)(1-a_2 x)(1-a_3 x),$$

$$A_2 = -\{(p_1+1)a_2 a_3 + (p_2+1)a_3 a_1 + (p_3+1)a_1 a_2 + (r-1)a_1 a_2 a_3 x\},$$

$$rA_1 = -(p_1+1)(a_2+a_3) - (p_2+1)(a_3+a_1) - (p_3+1)(a_1+a_2) +$$
$$+([p_1+2-r)a_2 a_3 + (p_2+2-r)a_3 a_1 + (p_3+2-r)a_1 a_2]x - 2(r-1)a_1 a_2 a_3 x^2,$$

insieme alla relazione

$$p_1 + p_2 + p_3 + r = -2$$

che ora deve sussistere fra le p_1, p_2, p_3 e r; e si può quindi senz'altro affermare che la equazione

$$(21)\quad (1-a_1 x)(1-a_2 x)(1-a_3 x)y'' -$$
$$-\{(p_1+1)(a_2+a_3) + (p_2+1)(a_3+a_1) + (p_2+1)(a_1+a_2) - [(p_1+2-r)a_2 a_3 +$$
$$+(p_2+2-r)a_3 a_1 + (p_3+2-r)a_1 a_2]x + 2(r-1)a_1 a_2 a_3 x^2\}y' -$$
$$-r\{(p_1+1)a_2 a_3 + (p_2+1)a_3 a_1 + (p_3+1)a_1 a_2 + (r-1)a_1 a_2 a_3 x\}y = 0$$

ha un integrale rappresentato dalla formola

$$y = \int_g^h (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2}(u-a_3)^{p_3}(xu-1)^r du.$$

dove p_1, p_2, p_3, r sono legati fra loro dalla relazione $p_1+p_2+p_3+r=-2$, con r diverso da 1, e g e h devono essere scelti opportunamente nel modo indicato sopra a seconda dei valori che avranno p_1, p_2, p_3 e r.

In particolare, supponendo $a_3=0$ la equazione precedente si riduce all'altra più semplice

$$(22)\quad (1-a_1 x)(1-a_2 x)y' - \{(p_1+1)a_2 + (p_2+1)a_1 + (p_3+1)(a_1+a_2) -$$
$$-(p_3+2-r)a_1 a_2 x\}y' - r(p_3+1)a_1 a_2 y = 0,$$

e l'integrale si riduce all'altro

$$y = \int_g^h (u-a_1)^{p_1}(u-a_2)^{p_2} u^{p_3} (xu-1)^r du,$$

sempre con $p_1+p_2+p_3+r=-2$, e r diverso da 1, e g e h scelti ancora opportunamente a seconda dei valori di a_1, a_2, p_1, p_2, p_3 e r.

599. — Col cambiare r in z e prendere $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $p_1 = p_2$ e $p_3 = z$ con che dovendo essere $p_1+p_2+p_3+r = -2$ sarà $p_1 = p_2 = -(z+1)$, la equazione (22) si riduce all'altra

$$(23)\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + z(z+1)y = 0,$$

che già si presentò al § 585 e che per $z = n$ e per $z = -(n+1)$, con n numero intero e positivo o anche zero, diviene la solita equazione delle funzioni di Legendre X_n.

Questa equazione (23) dunque ha l'integrale

$$y = \int_g^h \frac{u^2 (xu-1)^z}{(u^2-1)^{1+z}} du,$$

nel quale g e h devono ancora essere scelti opportunamente a seconda dei valori di z e di x, e questa vale anche per $z = 1$; e in particolare quindi quando z è intero e positivo, cioè nel caso della equazione delle funzioni X_n se x sarà negativo e compreso fra -1 e 0 (-1 e 0 escl.) potremo prendere $g = -\infty$, $h = \frac{1}{x}$, e se x sarà positivo e compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) potremo prendere $g = \frac{1}{x}$, $h = \infty$; e in questi casi l'integrazione si effettuerà sotto forma finita.

Caso inverso d'integrali definiti che si calcolano colla integrazione di equazioni differenziali.

600. — Qui poi si presenta l'occasione di fare rilevare che come gli integrali definiti servono talvolta alla determinazione degli integrali di date equazioni differenziali, così inversamente le equazioni differenziali servono talvolta al calcolo degli integrali definiti.

Dato infatti un integrale definito nel quale la funzione da integrarsi, oltre alla variabile d'integrazione, contenga un altro parametro θ che possa riguardarsi come variabile, se si considera quell'integrale come una funzione y di questo parametro θ, e si determinano le sue derivate colle regole della derivazione sotto il segno quando questa possa farsi, s'intende subito come si possa talvolta giungere a equazioni differenziali fra $\theta, y, \frac{dy}{d\theta}, \ldots$ integrando le quali si potrà poi ottenere il valore dell'integrale.

Ciò del resto risulterà chiaramente dai seguenti esempii.

1.° Si voglia determinare l'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx$ per θ positivo.

S'indichi con y questo integrale che certo ha un valore determinato e finito e si osservi che pei teoremi della derivazione sotto il segno (§ 127-28, [pag. 188 e seg.]) si ha

$$y=\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx,\quad \frac{dy}{d\theta}=-\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}\frac{dx}{x^2},$$

e cambiando in $\frac{dy}{d\theta}$ l'x in $\frac{\sqrt{\theta}}{x}$, con supporre per questo che θ sia diverso da zero, pure potendo essere prossimo a zero quanto si vuole, si ha anche $\frac{dy}{d\theta}=-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx$; talchè l'integrale y soddisfa alla equazione differenziale $\frac{dy}{d\theta}=-\frac{y}{\sqrt{\theta}}$.

Questa equazione integrata ci dà subito $\log y=-2\sqrt{\theta}+\log C$, ovvero $y=Ce^{-2\sqrt{\theta}}$, essendo C una costante indipendente da θ; e ora poichè il nostro integrale $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx$ per quanto dicemmo in generale sulla continuità degli integrali (§ 120 e seg. [pag. 176 e seg.]) è una funzione continua di θ anche per $\theta=0$, la formola

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx=Ce^{-2\sqrt{\theta}}$$

varrà anche per $\theta=0$ e si avrà quindi $C=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Ricordando dunque che alla pag. 219 si trovò che il valore dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ è $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, se ne trae che $C=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, e quindi si ha per l'integrale cercato

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\theta}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{\theta}}.$$

In particolare dunque per $\theta=1$ avremo

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2}.$$

2.° Vogliasi l'integrale $y=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\theta x\,dx$ che è certamente determinato e finito per qualunque valore di θ.

Derivandolo rispetto a θ, il che può farsi (§ 127 [Pag. 188-90]), avremo

$$\frac{dy}{d\theta}=-\int_0^\infty e^{-x^2}2x\operatorname{sen}2\theta x\,dx=(e^{-x^2}\operatorname{sen}2\theta x)_0^\infty-2\theta\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\theta x\,dx=$$

$$=-2\theta\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\theta x\,dx,$$

e perciò y soddisfarà alla equazione differenziale $\frac{dy}{d\theta}+2\theta y=0$, la quale integrata ci darà subito $y=Ce^{-\theta^2}$, essendo C una costante; ed ora osservando che per $\theta=0$ si ha $y=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, e quindi $C=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, se ne dedurrà subito che

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\theta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\theta^2}.$$

3.° Vogliasi determinare l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}\frac{dx}{x}$ nella ipotesi che θ e k siano diversi da zero.

Derivando sotto il segno si troverà $\frac{dy}{d\theta} = \int_0^\infty \frac{\cos\theta x}{k^2+x^2}dx$, e applicando l'integrazione per parti si troverà anche $\frac{dy}{d\theta} = \frac{2}{\theta}\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{(k^2+x^2)^2}dx$.

Applicando ora di nuovo la derivazione sotto il segno (cosa che non avremmo potuto fare con tutto il rigore, in ordine a quanto si disse ai §§ 127-28 (pag. 188 e seg.), se non avessimo fatta prima la integrazione per parti) si troverà

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\frac{2}{\theta^2}\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{(k^2+x^2)^2}dx + \frac{2}{\theta}\int_0^\infty \frac{x^2\cos\theta x}{(k^2+x^2)^2}dx,$$

e poichè con una nuova integrazione per parti si ha

$$2\int_0^\infty \frac{x^2\cos\theta x}{(k^2+x^2)^2}dx = -\left(\frac{x\cos\theta x}{k^2+x^2}\right)_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\frac{d}{dx}(x\cos\theta x)}{k^2+x^2}dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos\theta x}{k^2+x^2}dx - \theta\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}dx,$$

sostituendo ed osservando che già trovammo sopra colla integrazione per parti $\int_0^\infty \frac{\cos\theta x}{k^2+x^2}dx = \frac{2}{\theta}\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{(k^2+x^2)^2}dx$, si troverà anche

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}dx.$$

Ma supponendo θ diverso da zero e positivo si ha

$$-\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{x}\left(\frac{k^2}{k^2+x} - 1\right)dx = k^2y - \frac{\pi}{2},$$

perchè come già trovammo varie volte (ad es. al § 112 [pag. 164 e seg.]) per θ diverso da zero e positivo si ha $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$; quindi si può ora senz'altro affermare che l'integrale cercato y quando θ è diverso da zero e positivo

dovrà soddisfare alla equazione lineare del second'ordine $\frac{d^2y}{d\theta^2} - k^2y + \frac{\pi}{2} = 0$, la quale col porre $y = y_1 + \frac{\pi}{2k^2}$ si trasforma nell'altra senza secondo membro $\frac{d^2y_1}{d\theta^2} - k^2y_1 = 0$.

Questa ha per integrale $y_1 = C_1e^{k\theta} + C_2e^{-k\theta}$ con C_1 e C_2 costanti arbitrarie, quindi per l'integrale cercato quando θ è diverso da zero e positivo avremo la formola

$$y = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k^2} + C_1e^{k\theta} + C_2{}^{-k\theta},$$

nella quale però restano da determinarsi le costanti C_1 e C_2.

Per determinarle si osservi che insieme a questa formola colla derivazione si ha l'altra

$$\frac{dy}{d\theta} = \int_0^\infty \frac{\cos\theta x}{k^2+x^2}dx = k(C_1e^{k\theta} - C_2e^{-k\theta}),$$

e quindi facendo tendere θ a zero in y e in $\frac{dy}{d\theta}$ coll'osservare che allora y tende a zero e $\frac{dy}{d\theta}$ tende verso l'integrale $\int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2}$ che per k positivo è uguale a $\frac{\pi}{2k}$, si ottengono le due equazioni

$$\frac{\pi}{2k^2} + C_1 + C_2 = 0, \quad -\frac{\pi}{2k^2} + C_1 - C_2 = 0,$$

le quali ci dànno subito $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{\pi}{2k^2}$, e quindi per l'integrale cercato si ha la formola seguente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k^2}(1 - e^{-k\theta}),$$

la quale oltre a valere per θ diverso da zero e positivo come lo abbiamo supposto, vale anche per $\theta = 0$.

Per θ negativo poi, essendo allora $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}$, si troverebbe invece

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta x}{k^2+x^2}\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2k^2}(1 - e^{k\theta}).$$

XXIX.

Breve studio sui sistemi di equazioni differenziali simultanee.

601. — Già dicemmo al § 315 (pag. 471) che si chiamano sistemi di equazioni differenziali simultanee quei sistemi di equazioni nelle quali figurano le derivate o i differenziali di più funzioni di una o più variabili indipendenti, e il numero delle equazioni che compongono il sistema è ordinariamente eguale a quello delle funzioni incognite; e, pel caso di una sola variabile indipendente, già trattammo un poco anche di questi sistemi di equazioni nel capitolo XIX (pag. 478 e seg.) sulla esistenza degli integrali.

Volendo ora fare uno studio ulteriore, per quanto breve, su questi sistemi di equazioni, sempre però pel caso di una sola variabile indipendente, incominceremo col prendere a considerare il sistema di due equazioni

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m)}, z, z', z'', \dots, z^{(n)}) = 0 , \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(q)}) = 0 , \tag{2}$$

nelle quali x è la variabile indipendente, e y e z sono le due funzioni incognite, e ammetteremo che siano soddisfatte le condizioni che rendono applicabile la regola di derivazione delle funzioni composte almeno fino a quell'ordine di derivazione che sarà necessario di considerare.

E sotto questa ipotesi, senza soffermarsi sulla questione della esistenza degli integrali per y e z che qui ammetteremo senz'altro perchè questa risulta già da quanto dicemmo ai § § 335-36-37 (Pag. 495-96) (*), esporremo ora un metodo generale per la determinazione delle due funzioni y e z; per

(*) Le considerazioni dei ricordati §§ 335-36-37, per quanto succintamente esposte, dimostrano appunto la esistenza degli integrali. Del resto noi le svolgeremo anche ulteriormente fra breve ai §§ 605-606

quanto questo metodo debba piuttosto considerarsi come un metodo puramente teorico, inquantochè, basandosi tutto su un processo di eliminazione, le difficoltà pratiche che ordinariamente presenta lo rendono il più delle volte inapplicabile.

Questo metodo consiste nel cercare di costruire per mezzo delle equazioni date anche altre equazioni che insieme con questa debbano necessariamente essere soddisfatte, e che vengano ad essere in numero sufficiente per poter eliminare fra esse una delle due funzioni incognite y e z e tutte le sue derivate, per modo da ricavarne una equazione differenziale relativa all'altra funzione soltanto; chè allora questa funzione, astrazione fatta dalle difficoltà pratiche, potrà ottenersi colla integrazione della equazione differenziale trovata; dopo di che l'altra funzione si determinerà con altre eliminazioni senza alcuna nuova integrazione, o colla integrazione di una seconda equazione differenziale nella quale essa figuri come incognita, come meglio ora vedremo.

602. — Ora per giungere al sistema indicato di equazioni fra le quali si possano eliminare una delle due funzioni y e z, p. es. z, e le sue derivate, deriveremo rispetto a x ciascuna delle equazioni date (1) e (2) un numero di volte eguale all'ordine della più alta derivata di z che figura nell'altra equazione; e così facendo, otterremo dalla equazione (1) altre q equazioni differenziali tutte di ordine più alto, delle forme seguenti

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y, y', y'', \dots y^{(m+1)}, z, z', z'', \dots, z^{(n+1)}) = 0 , \\ f_2(x, y, y', y'', \dots y^{(m+2)}, z, z', z'', \dots, z^{(n+2)}) = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ f_q(x, y, y', y'', \dots y^{(m+q)}, z, z', z'', \dots z^{(n+q)}) = 0 , \end{array}\right. \tag{3}$$

e dalla equazione (2) otterremo le altre n equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(p+1)}, z, z', z'', \dots, z^{(q+1)}) = 0 , \\ \varphi_2(x, y, y', y'', \dots, y^{(p+2)}, z, z', z'', \dots, z^{(q+2)}) = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ \varphi_n(x, y, y', y'', \dots y^{(p+n)}, z, z', z'', \dots, z^{(q+n)}) = 0 , \end{array}\right. \tag{4}$$

talchè con queste e colle (1) e (2) avremo un sistema di $n+q+2$ equazioni fra le $n+q+1$ quantità

$$z, z', z'', \dots, z^{(n+q)}, \tag{5}$$

e nelle quali figureranno anche l'altra funzione y e le sue derivate fino a quelle di ordine i eguale al più alto dei due numeri $m+q$ e $n+p$.

Almeno per regola generale dunque, le $n+q+2$ equazioni (1), (2), (3) e (4) costituiranno un sistema di tante equazioni quante appunto ordinariamente ne occorrono per potere da esse eliminare le $n+q+1$ quantità (5), giungendo così a una equazione differenziale nella sola y

$$f(x, y, y', y'', \ldots)=0, \tag{6}$$

che in generale sarà dell'ordine i eguale, come abbiamo detto, al più alto dei due numeri $m+q$ e $n+p$; e poichè questa equazione dovrà essere evidentemente verificata anche dal valore di y che soddisfa al sistema delle equazioni date (1) e (2) — e che, come abbiamo detto, deve certamente esistere —, così per trovare questo valore di y occorrerà integrare la equazione trovata (6), salvo a dovere poi, dietro opportune verificazioni, attribuire valori particolari ad alcune delle costanti che compariranno nell'integrale.

Trovato poi così il valore di y se, tralasciando ad es. una delle equazioni (1), (2), (3) e (4), elimineremo dalle altre tutte le derivate $z', z'', \ldots$ di z per modo da giungere a una equazione della forma

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots, z)=0, \tag{7}$$

nella quale ora la y e le sue derivate potranno riguardarsi come conosciute, allora senza alcuna nuova integrazione potremo avere anche il valore dell'altra funzione z.

Se poi per fare queste eliminazioni si troveranno difficoltà gravissime, o se nell'eliminare le derivate $z', z'', \ldots$ di z verrà ad eliminarsi anche z (*), potremo fare altre combinazioni delle equazioni (1), (2) (3) e (4), o anche prendere a considerare una di queste equazioni, come ad es. quella delle (1) e (2) che contiene la derivata d'ordine più basso in z, considerando così una equazione differenziale in z della forma

$$\theta(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'' \ldots)=0,$$

nella quale la y potrà intendersi come conosciuta insieme alle sue derivate; e questa pure servirà alla determinazione di z mediante la integrazione, ma introdurrà nuove costanti che dovranno essere poi determinate convenientemente, perchè come vedremo fra breve, il numero delle costanti arbitrarie che proverrà dalla integrazione del sistema di equazioni date (1) e (2) non potrà mai superare il più alto i dei due numeri $m+q$ e $n+p$.

(*) Però quando questo accada, ciò vorrà dire che si potrà giungere, come effettivamente talvolta avverrà, alla equazione (6) che serve alla determinazione di y anche senza tenere conto di tutte le equazioni (1), (2), (3) e (4).

603. — Tutto questo in modo generale. S'intende però, come del resto già abbiamo osservato anche nella nota precedente, che in casi particolari potrà anche darsi che per giungere alla equazione differenziale (6) nella sola y non occorra tenere conto di tutte le equazioni (1), (2), (3) e (4), e allora quando ad es. possano tralasciarsi le ultime delle stesse equazioni (3) e (4), la equazione differenziale (6) in y verrà di ordine inferiore al più alto dei due numeri $m+q$ e $n+p$.

E anche in altri casi potrà darsi che nel fare le eliminazioni vengano a sparire le derivate di y di ordine più alto, e talvolta potranno sparire anche tutte le derivate di y, e in questo caso y si otterrà senza integrazioni restando poi a determinarsi l'altra funzione z nel modo sopra indicato.

Talvolta poi, per rendere i calcoli più semplici, prima di fare successivamente le varie derivazioni per giungere alle equazioni (3) e (4), potrà tornare comodo di fare opportune trasformazioni o combinazioni delle equazioni date e di quelle che già fossero state ottenute.

604. — Supponendo ora che si abbia un sistema di r equazioni differenziali fra la variabile indipendente x e r funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_r$, è chiaro che considerando p. es. gli $r-1$ sistemi, ciascuno di due equazioni, formati dalla prima di queste equazioni e da una qualunque delle altre, e applicando a ciascuno di questi sistemi il processo precedente onde eliminare una funzione per es. la y_r, giungeremo a formare un sistema di $r-1$ equazioni che non conterranno più la y_r e conterranno tutt'al più le altre $r-1$ funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ e le loro derivate; e ripetendo poi per questo nuovo sistema lo stesso processo di eliminazione si giungerà ad un altro sistema di $r-2$ equazioni che non conterrà più neppure la y_{r-1}; talchè evidentemente, almeno in generale, ripetendo successivamente questo processo di eliminazione si giungerà in fine ad una equazione differenziale ordinaria che non conterrà più altro che la funzione incognita y_1 e le sue derivate, e questa equazione colla integrazione determinerà la funzione stessa y_1.

Trovata questa funzione y_1, s'intende subito come con nuove eliminazioni, come nel caso già trattato di due funzioni, potranno ottenersi successivamente anche le altre funzioni $y_2, y_3, \ldots y_r$ senza nuove integrazioni o colla integrazione di una o più equazioni differenziali ordinarie fra x e una soltanto delle stesse funzioni; per modo che, astrazione fatta dalla difficoltà delle varie eliminazioni che vi saranno da fare, si può ora evidentemente affermare che *la integrazione dei sistemi di due o più equazioni differenziali simultanee di ordini qualsiansi si riduce sempre a quella di una o più equazioni differenziali ordinarie ciascuna delle quali non contenga che la variabile indipendente x e una sola delle varie funzioni.*

605. — Mentre i risultati precedenti ci mostrano che per ogni sistema di equazioni differenziali d'ordini qualsiansi la integrazione può farsi dipendere da quella di singole equazioni differenziali che contengono ciascuna una sola funzione incognita, giova ricordare che per quanto si disse ai §§ 335-36-37 (pag. 495-96) si ha anche, inversamente, la particolarità che per ogni equazione differenziale di ordine superiore con una sola funzione incognita la integrazione può ridursi a quella di un sistema di equazioni differenziali che sono inoltre del prim'ordine.

Lo stesso allora mostrammo pure che avviene per ogni sistema di equazioni differenziali di ordini qualsiansi quando per queste equazioni sono soddisfatte le condizioni di Lipschitz, e in particolare quindi quando siano applicabili i teoremi delle funzioni implicite, talchè si può anche affermare che per qualsiasi equazione differenziale e anche pei sistemi di equazioni differenziali di ordini qualsiansi, quando per esse siano soddisfatte le condizioni della teoria delle funzioni implicite, la loro integrazione si ridurrà sempre a quella di sistemi di equazioni differenziali di prim'ordine, e potrà farsi coi processi del cap. XIX (pag. 478 e seg.); e per ognuno di questi ultimi sistemi esisterà sempre un sistema d'integrali quando siano fissate le condizioni iniziali; e questo sistema d'integrali sarà unico e apparterrà sempre anche alle equazioni date.

606. — Sviluppando maggiormente queste considerazioni, fermiamoci in particolare sul caso dei sistemi di due sole equazioni (1) e (2).

Supponiamo perciò dapprima che in queste equazioni i numeri m e p siano diversi fra loro, e così i due n e q, e m sia il maggiore dei due primi m e p, e q il maggiore degli altri due n e q.

Indichiamo poi, secondo il processo dei ricordati §§ 335-36-37, le varie derivate $y', y'', \dots y^{(m-2)}, y^{(m-1)}$ di y con $y_1, y_2, \dots, y_{m-2}, y_{m-1}$, e le derivate $z', z'', \dots, z^{(q-2)}, z^{(q-1)}$ di z con $z_1, z_2, \dots, z_{q-2}, z_{q-1}$, e ammettiamo che le funzioni f e φ dei primi membri delle stesse equazioni (1) e (2) siano tali che, quando per la prima vi si considerino $y^{(m)}$ come funzione incognita e le $x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, z, z'', \dots z^{(n)}$ come variabili indipendenti, e per la seconda vi si considerino $z^{(q)}$ come funzione incognita e le altre quantità come variabili indipendenti, alle stesse equazioni $f=0$ e $\varphi=0$ siano applicabili i teoremi delle funzioni implicite.

Allora il sistema delle stesse equazioni (1) e (2) ammetterà uno o più sistemi di soluzioni

$$y^{(m)}=\theta(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, z, z', z'', \dots, z^{(n)}),$$
$$z^{(q)}=\tau(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(q-1)}),$$

che saranno ciascuno perfettamente determinati dalle condizioni iniziali, e al sistema delle medesime equazioni (1) e (2) potrà sostituirsene un altro di $m+q$ equazioni del primo ordine

$$y'=y_1, y'_1=y_2, y'_2=y_3, \dots, y'_{m-2}=y_{m-1}, y'_{m-1}=\theta(r, y, y_1, y_2, \dots y_{m-1}, z, z_1, z_2 \dots, z_n),$$
$$z'=z_1, z'_1=z_2, z'_2=z_3, \dots z'_{q-2}=z_{q-1}, z'_{q-1}=\tau(x, y, y_1, y_2, \dots y_p, z_1, z_2, \dots z_{q-1}),$$

pel quale il sistema degli integrali potrà trovarsi coi processi del detto cap. XIX, e sarà unico *per ogni sistema delle soluzioni indicate* $y^{(m)}=\theta$ e $z^{(q)}=\tau$ delle (1) e (2) quando sia fissato il sistema iniziale dei valori da attribuirsi arbitrariamente (ma sempre nel campo delle variabili indipendenti suddette) alle quantità $y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, z, z', z'', \dots, z^{(q-1)}$ per $x=x_0$, per modo che questo sistema d'integrali verrà a contenere $m+q$ costanti arbitrarie.

Nel caso poi in cui sia $m=p$ e $n=q$ si vede subito che il processo è lo stesso, salvo a mutare allora le condizioni che dovranno verificarsi in ordine alla teoria delle funzioni implicite perchè allora le (1) e (2) invece di potersi riguardare ciascuna come una equazione a una sola funzione incognita, cioè $y^{(m)}$ la prima e $z^{(q)}$ la seconda, dovranno riguardarsi come un sistema di due equazioni a due funzioni incognite $y^{(m)}$ e $z^{(n)}$; e anche gli altri casi che potranno presentarsi pei numeri m, n, p e q si tratteranno quasi del tutto al modo stesso.

Così quando i due numeri m ed n siano ambedue minori di p e q rispettivamente, supposto ad es. che sia $m+q \geq n+p$, potremo ad es. procedere nel modo seguente.

Deriveremo cioè prima di tutto $p-m$ volte la equazione (1) per ottenerne un'altra che ne sarà conseguenza

$$f_{p-m}(x, y, y', y'', \dots y^{(p)}, z, z', z'', \dots z^{n+p-m})=0$$

che contenga la derivata $y^{(p)}$, e al sistema di equazioni (1) e (2) sostituiremo l'altro

$$f_{p-m}(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(n+p-m)})=0,$$
$$\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', z'', \dots, z^{(q)})=0,$$

con che il sistema di equazioni del prim'ordine al quale si ridurrà sarà il seguente

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} y'=y_1, y'_1=y_2, \dots, y'_{p-2}=y_{p-1},\ y'_{p-1}=\overline{\varphi}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, z, z_1, z_2, \dots, z_{n+p-m}), \\ z'=z_1, z'_1=z_2, \dots, z'_{q-2}=z_{q-1},\ z'_{q-1}=\tau(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, z, z_1, z_2, \dots z_{q-1}), \end{array} \right.$$

che darà luogo a un sistema d'integrali con $p+q$ valori iniziali arbitrarii che però ordinariamente si ridurranno a $m+q$ quando si tenga conto della circostanza che onde siano soddisfatte le (1) bisognerà che oltre alle equazioni precedenti (8) vengano soddisfatte le altre $f=0, f_1=0, f_2=0, \ldots f_{p-m-1}=0$, cioè la (1) e le prime $p-m-1$ che se ne deducono colla derivazione, e queste condizioni determineranno $p-m$ dei detti valori iniziali in funzione degli altri che rimarranno indeterminati e che saranno quindi in numero di $p+q-(p-m)$ cioè di $m+q$ al più, potendo darsi talvolta che si riducano a un numero minore nel fare le eliminazioni.

E invece di giungere con derivazioni successive della equazione (1) e poi con eliminazioni alle equazioni (8), potremo considerare la (1) come una equazione in termini finiti che lega le $y, y_1, y_2 \ldots, y_{m-1}, y_m, z, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$, e quindi, se ad es. $m \leq p$, potremo determinare la y_m o $\frac{d\,y_{m-1}}{dx}$ in funzione delle altre delle stesse quantità $y, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}, z, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, z_n$, dopo di che, quando sia $m<p$, con $p-m$ derivazioni di y_m e con successive eliminazioni si otterranno le $y^{(m+1)}, y^{(m+2)} \ldots y^{(p)}$ espresse per le $y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, z, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \ldots z_{n+p-m}$, e queste si sostituiranno nella (2). E allora osservando che $n+p-m \leq q$, e insieme alla (1) tenendo conto della nuova equazione che così si otterrà, potremo avere un sistema di equazioni differenziali di prim'ordine in $y, y_1, y_2 \ldots y_{m-1}, z, z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$ che colla integrazione introdurranno ancora $m+q$ costanti arbitrarie al più.

Coi processi stessi poi si tratteranno anche gli altri casi, coll'osservazione sempre però che in casi particolari il numero delle costanti arbitrarie potrà risultare minore, perchè potrà darsi che onde restino soddisfatte tutte le equazioni intermedie che nei varii casi serviranno a fare le eliminazioni si renda necessario di stabilire fra le costanti stesse alcune relazioni, o potrà darsi, come già notammo, che con opportune combinazioni delle equazioni date (1) e (2) e di alcune delle loro equazioni derivate si giunga a una equazione nella quale non figurino più alcune delle derivate di ordine superiore di una delle funzioni incognite (*), e allora sostituendo questa nuova equazione a una delle equazioni date (1) o (2) si giungerà ad avere un numero minore di costanti arbitrarie.

Tutto questo evidentemente giustifica quanto dicemmo in fine del § 602, sul numero delle costanti arbitrarie che provengono dalla integrazione dei sistemi di due equazioni differenziali, mentre al tempo stesso mette sempre più in evidenza la esistenza e la unicità degli integrali per ogni sistema di

(*) Questo p. es. avviene pel secondo degli esempi che considereremo più avanti al § 614.

soluzioni delle equazioni differenziali date (1) e (2). Similmente poi potrebbe trattarsi il caso dei sistemi di un maggiore numero di equazioni differenziali.

Sistemi di equazioni simultanee del prim'ordine.

607. — Le varie considerazioni che precedono come quelle dei ricordati §§ 335-36-37 portano dunque a dire che, astrazione fatta dalle difficoltà di eliminazione, la integrazione delle equazioni e così quella dei loro sistemi può sempre ridursi alla integrazione di sistemi di equazioni di prim'ordine risolute rispetto alle derivate delle funzioni incognite che ora indicheremo con $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ridotte cioè alla forma

$$(1)\quad \frac{dx_1}{dx}=f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{dx_2}{dx}=f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dx}=f_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ovvero incluse nelle altre

$$(2)\qquad \frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n},$$

dove $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono funzioni conosciute di $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; e essendo x la variabile indipendente s'intende che X non possa essere zero altro che per sistemi di valori speciali di $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ che qui intenderemo sempre esclusi, mentre quando per sistemi di valori di queste quantità $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, costituenti o no un certo campo a più variabili, sia zero una delle altre funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ per es. X_r *si intenderà che anche dx_r debba essere zero.*

Ora partendo da queste equazioni (1) o (2), che in sostanza sotto altra forma non sono che quelle dei §§ 333 e seg., ricordiamo che finchè si resta in un campo C delle variabili $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ considerate come indipendenti nel quale X è sempre diverso da zero, e sì questa X che le altre funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono finite e continue e hanno le derivate parziali del prim'ordine determinate e finite (*), esiste sempre uno e un solo sistema di funzioni che soddisfano alle (2)

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=F_1(x, x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ x_2=F_2(x, x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=F_n(x, x_0, x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0), \end{cases}$$

(*) Propriamente per quanto si disse ai ricordati §§ 333 e seg., basterebbe supporre che le funzioni $X, X_1, X_2, \ldots X_n$, o anche soltanto i rapporti $\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{X_n}{X}$, soddisfacessero alle condizioni di Lipschitz, quella cioè di avere i loro rapporti incrementali sempre numericamente inferiori a un numero finito nel campo C.

essendo $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ i valori iniziali di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per $x=x_0$ che, insieme a x_0, devono corrispondere a un punto $(x_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ che può essere scelto arbitrariamente nel campo C; e queste funzioni anche considerate come funzioni dei loro valori iniziali $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ hanno le proprietà relative alla continuità ecc. che per esse trovammo nel cap. XX (pag. 508 e seg.)

608. — Queste funzioni, noi già lo dicemmo ai citati §§ 333 e seg. costituiscono il sistema degli *integrali generali* delle equazioni (1) o (2) o il *sistema integrale* di quelle equazioni, e possono determinarsi coi processi che allora si dettero.

Ora però è da aggiungere che se, valendosi del processo di eliminazione dei §§ 601-602 o con un altro mezzo qualunque, si riuscirà a trovare un sistema di n equazioni tra le variabili $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ e n costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ della forma

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \\ \varphi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0, \end{cases}$$

che definiscano un sistema di valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in funzione di x e delle costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, che verifichino le equazioni (1) o (2) qualunque siano i valori di queste costanti in certi campi, allora questo sistema (4) di equazioni potrà considerarsi come non distinto dal sistema integrale (3) tutte le volte che si potranno attribuire alle costanti valori tali che per $x=x_0$ le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si riducano respettivamente ai valori $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$; perchè allora — essendo unico il sistema di funzioni (1), che con dati valori iniziali di $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ soddisfano alle (1) o (2) — le equazioni (4) definiranno appunto il sistema di funzioni (3).

E osserveremo che questo avverrà sempre quando le stesse equazioni (4), oltre a dare un sistema di valori per le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che verifichino le (1) o (2), definiscano per le $C_1, C_2, \ldots, C_n$ un sistema di valori determinati in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per modo cioè che sia

$$(5)\quad \begin{cases} \Psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_1, \\ \Psi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_n, \end{cases}$$

perchè allora indicando con $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ i valori che prenderanno queste costanti per $x=x_0, x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$, le equazioni (4) nelle quali per $C_1, C_2, \ldots, C_n$ siano posti questi valori $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ ammetteranno per $x=x_0$ le soluzioni iniziali $x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$, e le funzioni da esse definite saranno appunto le funzioni (3) del sistema integrale (*).

609. — Dalle considerazioni fatte risulta dunque che quando le equazioni (4) soddisfino alle condizioni indicate o siano tali da condurre alle (5) o siano già date sotto questa stessa forma, sì esse che queste ultime potranno riguardarsi come il sistema integrale posto sotto una forma speciale e potremo sempre prenderle in luogo di questo sistema.

Fermandoci ora sui sistemi integrali posti sotto la forma (5) — che esisteranno sempre perchè anche dalle (3) potrebbero sempre dedursene equazioni di questa forma —, osserveremo che ognuna delle equazioni $\Psi_s=C_s$ che la compongono gode della proprietà che il differenziale totale $d\Psi_s$ del suo primo membro dovrà essere nullo in forza delle equazioni date (1) o (2), cioè quando per $dx, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ vi si pongono i valori $dx, f_1dx, f_2dx, \ldots, f_ndx$, o i valori proporzionali $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$, la equazione che ne risulterà dovrà essere una identità, altrimenti essa verrebbe a stabilire una relazione $\theta(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ tra $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ priva di costanti arbitrarie, e non potrebbe essere soddisfatta dalle funzioni integrali.

Viceversa, se si troveranno in qualsiasi modo n funzioni $\Psi_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Psi_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Psi_n(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, i cui differenziali divengano identicamente zero in forza delle equazioni (1) o (2), e queste funzioni saranno tutte distinte, cioè non legate fra loro da nessuna relazione della forma $F(\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n)=0$, per modo quindi che il loro determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

(*) Si suppone sempre qui che se con dati valori delle $C_1, C_2, \ldots, C_n$ per $x=x^0$ le (4) sono soddisfatte da $x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$, le soluzioni che esse dànno allora per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si riducano appunto a $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ per $x=x_0$; e in particolare questa e l'altra condizione posta di definire per le $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funzioni determinate di $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ saranno sempre soddisfatte quando, considerando nelle equazioni stesse come incognite le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o le $C_1, C_2, \ldots, C_n$, risulteranno soddisfatte le condizioni della teoria delle funzioni implicite.

sia diverso da zero, allora le equazioni

$$\Psi_1=C_1,\ \Psi_2=C_2,\ldots,\ \Psi_n=C_n$$

costituiranno un sistema integrale delle (2) perchè, per la teoria delle funzioni implicite, definiranno certamente un sistema di funzioni $x_1, x_2,\ldots, x_n$ le cui derivate soddisfaranno alle equazioni (1) o (2), e col prendere opportunamente le costanti $C_1, C_2,\ldots, C_n$ verranno ad avere per $x=x_0$ i valori arbitrarii $x_1^0, x_2^0,\ldots, x_n^0$.

610. — Per questo ogni equazione $\Psi_i=C_i$ che così si trovi viene detta *un integrale* del sistema di equazioni date; e così una combinazione qualsiasi $F(\Psi_1, \Psi_2,\ldots \Psi_n)=$cost. di integrali sarà essa pure un integrale perchè, essendo $dF=\frac{\partial F}{\partial \Psi_1}d\Psi_1+\frac{\partial F}{\partial \Psi_2}d\Psi_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial \Psi_n}d\Psi_n$, anche per essa si avrà $dF=0$ in forza delle equazioni (1) o (2).

Quando però siano trovati n integrali *distinti* delle stesse (1) o (2)

$$\Psi_1=C_1,\ \Psi_2=C_2,\ldots,\ \Psi_n=C_n,$$

che costituiscano un loro sistema integrale, si può affermare che ogni altro integrale $\pi(x, x_1, x_2,\ldots, x_n)=$ cost. che si trovi per queste equazioni non potrà essere che una combinazione di questi, perchè posto

$$\Psi_1(x, x_1, x_2,\ldots,x_n)=\Psi_1,\ \Psi_2(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Psi_2,\ \ldots,\ \Psi_n(x,x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Psi_n,$$

queste equazioni definiranno un sistema di valori per $x_1, x_2,\ldots x_n$ come funzioni di x, $\Psi_1, \Psi_2,\ldots, \Psi_n$, pei quali la $\pi(x, x_1, x_2,\ldots, x_n)$ si ridurrà all'altra $\theta(x, \Psi_1, \Psi_2,\ldots, \Psi_n)$; e dovendo il suo differenziale e quindi quello di θ, cioè $\frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial\Psi_1}d\Psi_1+\frac{\partial\theta}{\partial\Psi_2}d\Psi_2+\ldots+\frac{\partial\theta}{\partial\Psi_n}d\Psi_n$, essere identicamente nullo in forza delle (4) o (5), dovrà essere anche identicamente $\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$, ciò che prova che θ non conterrà la x, e quindi π sarà una funzione composta colle sole funzioni $\Psi_1, \Psi_2,\ldots, \Psi_n$.

611. — Intendendo dunque che le equazioni differenziali date, se già non lo sono, vengano ridotte alla forma (2) e, come ordinariamente si fa, partendo da queste, per quanto abbiamo dimostrato si può ora affermare che *se* $\Psi(x, x_1, x_2,\ldots, x_n)=$*cost. è un integrale del sistema di equazioni*

$$\frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n},\tag{6}$$

la funzione $\Psi(x, x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *considerata come funzione delle* $n+1$ *variabili* $x, x_1, x_2,\ldots, x_n$ *riguardate come indipendenti, soddisfarà alla equazione a derivate parziali*

$$X\frac{\partial\Psi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}=0;\tag{7}$$

e viceversa *se* $\Psi(x,x_1,x_2,\ldots x_n)$ *è una funzione delle* $n+1$ *variabili* $x, x_1, x_2,\ldots, x_n$ *considerate come indipendenti che soddisfa a questa equazione, la equazione* $\Psi(x, x_1, x_2,\ldots, x_n)=$ cost. *darà sempre un integrale del sistema di equazioni* (6), perchè il differenziale di Ψ diverrà identicamente nullo in forza delle equazioni (6).

612. — Per questo teorema la ricerca degli integrali delle equazioni (6) potrebbe dirsi ridotta alla integrazione della equazione a derivate parziali (7); però dal lato pratico questa riduzione ordinariamente non presenterebbe alcun vantaggio, dovendo i problemi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali riguardarsi, almeno in generale, come di un ordine più elevato di quelli della integrazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, e anzi riducendosi essi, come poi vedremo, alla integrazione di tali sistemi; talchè, ove artifizî speciali adattati non si presentino, la ricerca effettiva degli integrali del sistema di equazioni (6), nonostante il teorema enunciato sopra, ordinariamente dovrà farsi coi processi generali dei §§ 333 e seg., o cercando di applicare il metodo generale dei §§ 601 e seg., per quanto anche questo metodo presenti esso pure gravissime difficoltà pratiche il più spesso insormontabili.

Però il teorema precedente potrà talvolta essere utile perchè in certi casi, può darsi che circostanze speciali portino a conoscere n integrali particolari $\Psi_1, \Psi_2,\ldots, \Psi_n$ della equazione (7), e allora quando questi siano distinti le equazioni $\Psi_1=C_1, \Psi_2=C_2,\ldots, \Psi_n=C_n$ daranno subito il sistema integrale delle equazioni (6).

Del resto poi, trovati questi n integrali particolari, o integrate le equazioni (6), rimarrà completamente integrata anche la equazione (7) perchè, per la osservazione fatta sopra, ogni altra sua soluzione $\Psi(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ sarà una funzione degli integrali particolari trovati $\Psi_1, \Psi_2,\ldots, \Psi_n$, e viceversa ogni funzione (arbitraria ma derivabile) di questi integrali sarà una soluzione della stessa equazione (7).

Moltiplicatori di Jacobi.

613. — Nel caso di una sola equazione differenziale di prim'ordine a due variabili $Mdx+Ndy=0$ o $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, abbiamo veduto ai §§ 396 e seg.

(pag. 570 e seg.) che esistono sempre infiniti fattori integranti, cioè infiniti fattori v tali che moltiplicando per essi la espressione differenziale $Ydx - Xdy$ la riducono un differenziale esatto, e questi fattori soddisfano alla equazione a derivate parziali $\frac{\partial(vX)}{\partial x} + \frac{\partial(vY)}{\partial y} = 0$, e godono della proprietà che il quoziente di due qualunque fra essi, che non differiscano solo per un fattore costante, uguagliato a una costante dà l'integrale della equazione data.

La teoria di questi fattori, che Eulero introdusse per primo nell'analisi pel caso di una equazione $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, fu poi estesa da Jacobi al caso dei soliti sistemi di equazioni

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

dando luogo alla teoria dei *moltiplicatori di Jacobi.*

Volendo dare un brevissimo cenno di questi moltiplicatori, osserveremo che se $\Psi = \text{cost.}$ è un integrale del sistema di equazioni (1), la funzione Ψ potrà in infiniti modi porsi sotto la forma $\Psi = \frac{M_1}{M}$, essendo M e M_1 due funzioni di $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, e evidentemente una di queste due funzioni potrà prendersi sempre arbitrariamente.

Dovendo ora Ψ soddisfare alla equazione (7) del § 611, avremo la equazione

$$X\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x} + X_1\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_n} = 0,$$

e quindi, osservando che si ha

$$X_s\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_s} = \frac{X_s}{M^2}\left(M\frac{\partial M_1}{\partial x_s} - M_1\frac{\partial M}{\partial x_s}\right) = \frac{1}{M^2}\left\{M\frac{\partial(X_s M_1)}{\partial x_s} - M_1\frac{\partial(X_s M)}{\partial x_s}\right\},$$

si troverà subito anche

$$M\left\{\frac{\partial(XM_1)}{\partial x} + \frac{\partial(X_1M_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(X_2M_1)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(X_nM_1)}{\partial x_n}\right\} =$$
$$= M_1\left\{\frac{\partial(XM)}{\partial x} + \frac{\partial(X_1M)}{\partial x_1} + \frac{\partial(X_2M)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(X_nM)}{\partial x_n}\right\},$$

e si concluderà di qui che se la somma fra parentesi in uno dei due membri è nulla lo sarà pure quella fra parentesi dell'altro membro.

Chiamando dunque con Jacobi *moltiplicatore del sistema di equazioni* (1) ogni funzione M che goda della proprietà che moltiplicando per $\frac{1}{M}$ tutte le equazioni stesse, i divisori $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ di $dx, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ si riducono ad altre funzioni $\overline{X}, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$ che soddisfano alla equazione

$$\frac{\partial\overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{X}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\overline{X}_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial\overline{X}_n}{\partial x_n} = 0,$$

o anche se vuolsi chiamando moltiplicatore dello stesso sistema ogni funzione M che soddisfi alla equazione a derivate parziali

$$(2) \qquad \frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

e osservando che nel porre la formola $\Psi = \frac{M}{M_1}$ si può sempre prendere per uno dei due termini M, M_1 un moltiplicatore del sistema di equazioni (1), si potrà evidentemente concludere che *ogni integrale di un sistema di equazioni differenziali* (1) *è sempre il quoziente di due moltiplicatori di Jacobi.*

Viceversa poi è facile vedere che *il quoziente di due moltiplicatori* M *e* M_1 *del sistema di equazioni* (1), *che non differiscono solo per un fattore costante, uguagliato a una costante dà un integrale dello stesso sistema di equazioni*, perchè soddisfacendo essi alle due equazioni

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$
$$\frac{\partial(M_1X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_1X_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_1X_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(M_1X_n)}{\partial x_n} = 0,$$

basta moltiplicare la prima di queste equazioni per $\frac{M_1}{M^2}$ e la seconda per $\frac{M}{M^2}$ e poi sottrarle per dedurne subito l'altra

$$X\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x} + X_1\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{d x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\frac{M_1}{M}}{\partial x_n} = 0,$$

la quale mostra appunto che la equazione $\frac{M_1}{M} = \text{cost.}$ è un integrale del sistema di equazioni (1); e resta così generalizzata la proprietà indicata sopra che dette Eulero pei fattori integranti delle equazioni $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$.

I moltiplicatori di Jacobi hanno una parte importante nella teoria delle equazioni differenziali, ma noi non possiamo ora fermarci su essi, e ci limitiamo così ad averli soltanto accennati.

Sistemi di equazioni simultanee lineari.

614. — Le considerazioni precedenti sono generali. Nel caso poi dei sistemi di equazioni lineari simultanee è da osservare che quando si applichi a queste equazioni il metodo generale di eliminazione dei §§ 601 e 602, le equazioni differenziali finali fra la variabile indipendente e una funzione soltanto, dalle quali viene a dipendere la ricerca di queste funzioni, saranno sempre lineari, e quindi per la loro integrazione potremo applicare i processi che si dettero al Cap. XXVI (pag. 653 e seg.) trattando delle equazioni lineari.

Così p. es. se si avranno le due equazioni simultanee

(1) $$y'+3y+z=0,\ z'-y+z=0,$$

si osserverà prima che la seconda ci dà

$$y=z'+z,\quad y'=z''+z',$$

e quindi sostituendo nella prima si ottiene subito l'altra nella sola z

$$z''+4z'+4z=0,$$

che essendo del secondo ordine e lineare, e avendo la equazione caratteristica $\alpha^2+4\alpha+4=0$, o $(\alpha+2)^2=0$, ha per integrale generale $z=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$ con C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

Determinato così il valore di z, dalla seconda delle equazioni date si ha subito, senza nuove integrazioni, $y=(C_2-C_1-C_2x)\,e^{-2x}$, e si conclude così che gli integrali delle due equazioni (1) sono dati dalle formole

$$y=(C_2-C_1+C_2x)\,e^{-2x},\quad z=(C_1+C_2x)\,e^{-2x},$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie.

Se avessimo avuto invece le due equazioni lineari e del prim'ordine,

$$y'+z'-x=0,\quad xy'+xz'+y+x^2=0,$$

si vede subito che queste combinate fra loro danno luogo all'altra in termini finiti $y+2x^2=0$, per modo che a queste equazioni possono sostituirsi le due

$$y+2x^2=0,\quad y'+z'-x=0,$$

la prima delle quali ci dà subito $y=-2x^2$; e in seguito a questa la seconda diviene $z'=5x$, e si ha quindi con $y=-2x^2$, $z=\frac{5x^2}{2}+C$ con una sola costante arbitraria.

615. — Aggiungiamo che nel caso speciale dei sistemi di equazioni lineari del prim'ordine si ha un metodo dovuto a D'Alembert, col quale senza ricorrere al processo generale di eliminazione dei §§ 601 e 602, la determinazione delle funzioni incognite, qualunque sia il loro numero, viene sempre ridotta alla integrazione di alcune equazioni lineari del primo ordine.

Qui però, pure osservando, come ora abbiamo detto, che il metodo si applica anche al caso di un numero qualunque di funzioni, per semplicità ci limiteremo ad esporlo pel caso di due sole funzioni, ammettendo senz'altro che le due equazioni siano ridotte alla forma (*)

(2) $$\begin{cases} y'+Py+Qz=V, \\ z'+P_1y+Q_1z=V_1, \end{cases}$$

dove P, Q, V, P_1, Q_1, V_1 sono quantità costanti o funzioni conosciute della x.

Moltiplicando la seconda di queste equazioni per una indeterminata λ e poi sommandola colla prima si giungerà alla equazione

$$(y'+\lambda z')+(P+\lambda P_1)y+(Q+\lambda Q_1)z=V+\lambda V_1,$$

e se si introduce una nuova funzione incognita t col porre

$$y+\lambda z=t,\ \text{o}\ y=t-\lambda z,$$

allora la equazione precedente si trasforma subito nell'altra

$$t'+(P+\lambda P_1)t-z[\lambda'+(P+\lambda P_1)\lambda-(Q+\lambda Q_1)]=V+\lambda V_1,$$

talchè, quando si riesca a determinare un valore costante o funzione di x per la quantità indeterminata λ pel quale si abbia

(3) $$\lambda'+P_1\lambda^2+(P-Q_1)\lambda-Q=0,$$

(*) La riduzione a questa forma delle due equazioni lineari e del prim'ordine che si avranno da considerare potrà sempre farsi, a meno che non avvenga, come nel secondo esempio del paragrafo precedente, che combinando opportunamente le due equazioni si giunga a una equazione in termini finiti fra x e le due funzioni incognite, nel qual caso però il problema si riduce subito alla integrazione di una equazione lineare del primo ordine con una sola funzione incognita.

con questo valore di λ la equazione precedente in t si ridurrà subito all'altra

$$(4) \qquad t'+(P+\lambda P_1)t=V+\lambda V_1,$$

che si sa integrare e ci dà

$$(5) \qquad t=e^{-\int(P+\lambda P_1)dx}\left\{\int(V+\lambda V_1)e^{\int(P+\lambda P_1)dx}dx+C\right\},$$

dove C è una costante arbitraria.

Trovato ora il t e quindi il valore di $y+\lambda z$, è evidente che valendosi della formola $y+\lambda z=t$, le equazioni date (2) potranno ridursi subito la prima a contenere la sola funzione y e la seconda a contenere la sola z, restando lineari e del prim'ordine; e allora integrandone una, per es. quella in z, ciò che potrà farsi con sole quadrature per mezzo delle formole note colle quali già abbiamo integrato sopra la (4), troveremo subito il valore di z, dopo di che colla formola $y=t-\lambda z$ avremo anche il valore di y senz'altre integrazioni.

616. — Così tutta la difficoltà si ridurrà a trovare un integrale particolare della equazione (3) che è di quelle considerate ai §§ 375 e seg. (pag. 544 e seg.) che chiamammo *equazioni di Riccati*, per le quali quando si conosce un integrale particolare si ha subito anche l'integrale generale con sole quadrature, dal quale allora possono naturalmente aversi tante soluzioni quante se ne vogliono.

Tenuto conto di questo, si può osservare che, prese due di queste soluzioni λ o λ_1 (che talvolta potranno anche essere due integrali particolari trovati indipendentemente dall'integrale generale), allora insieme alla (5) che dà il valore di t che corrisponde alla soluzione λ della (3), si avrà il valore t_1 di t corrispondente all'altra soluzione λ_1 colla formola

$$(6) \qquad t_1=e^{-\int(P+\lambda_1 P_1)dx}\left\{\int(V+\lambda_1 V_1)e^{\int(P+\lambda_1 P_1)dx}dx+C_1\right\}$$

analoga alla (5); e allora avendosi le due equazioni

$$y+\lambda z=t, \quad y+\lambda_1 z=t_1,$$

avremo subito da queste i valori di y e z colle formole

$$(7) \qquad y=\frac{\lambda_1 t-\lambda t_1}{\lambda_1-\lambda}, \quad z=\frac{t_1-t}{\lambda_1-\lambda},$$

senz'altre quadrature, e senza bisogno di ricorrere alla integrazione di una delle due equazioni che si possono avere dalle (2) nel modo indicato in fine del paragrafo precedente.

617. — In particolare dunque nel caso in cui i coefficienti P, Q, P_1 e Q_1 dei primi membri delle equazioni date (2) siano costanti, o anche più generalmente siano costanti quelli della (3) o si riducano costanti dividendoli tutti per una stessa funzione della x, allora, siccome questa equazione (3) è soddisfatta quando per λ vi si pongono i valori costanti che sono radici della equazione

$$(8) \qquad P_1\lambda^2+(P-Q_1)\lambda-Q=0,$$

si vede che se questa equazione non ha le due radici uguali, si possono prendere queste radici pei valori testè indicati di λ e λ_1.

Se poi queste radici saranno uguali fra loro, indicando con μ il loro valore comune, potremo prendere questo valore μ per una delle quantità λ e λ_1 delle quali si ha bisogno nel metodo precedente, prendendo poi per l'altra delle stesse quantità λ e λ_1 una delle soluzioni che si avranno dall'integrale generale della (3) col particolarizzare in qualche modo la costante arbitraria. Del resto, poichè allora la equazione (3) si riduce alla forma $\lambda'+P(\lambda-\mu)^2=0$ ovvero $\frac{\lambda'}{(\lambda-\mu)^2}=-P$, e si ha subito pel suo integrale $\frac{1}{\lambda-\mu}=Px+K$ ovvero $\lambda=\mu+\frac{1}{Px+K}$ (con K cost. arbitr.), basterà prendere pel secondo valore λ_1 di λ per es. il valore $\mu+\frac{1}{Px}$ che corrisponde a $K=0$: talchè si può ora evidentemente concludere che quando siano costanti i coefficienti dei primi membri delle equazioni date (2) o anche più generalmente siano costanti quelli della equazione (8) o si riducano costanti dividendoli per una stessa funzione della x, la determinazione degli integrali delle stesse equazioni (2) si fa sempre colla massima facilità colla applicazione del metodo che abbiamo esposto.

Così per es. se le equazioni date fossero le due

$$(9) \qquad y'+3y-z=V, \quad z'+y+z=V_1,$$

siccome i loro primi membri sono a coefficienti costanti, si costruirà la equazione corrispondente alla (8), cioè $\lambda^2+2\lambda+1=0$, che ha le due radici uguali a -1, e allora pei due valori di λ e λ_1 potremo prendere $\lambda=-1$, $\lambda_1=-1+\frac{1}{3x}$; e così per le formole (5) e (6) i valori corrispondenti di t e t_1 verranno ad essere i seguenti

$$t=e^{-2x}\left\{\int(\mathrm{V}-\mathrm{V}_1)e^{2x}dx+\mathrm{C}\right\},\quad t_1=x^{-\frac{1}{3}}e^{-2x}\left\{\int(\mathrm{V}-\mathrm{V}_1-\frac{1}{3x}\mathrm{V}_1)x^{\frac{1}{3}}e^{2x}dx+\mathrm{C}_1\right\},$$

e quindi per le (7) i valori di y e z che daranno gli integrali delle due equazioni (9) saranno i seguenti

$$y=(-3x+1)t+3xt_1,\quad z=3x(t_1-t),$$

essendo t e t_1 dati dalle due formole precedenti.

618. — Infine faremo rilevare che, in casi speciali, particolari artifizî potranno condurre a integrare sistemi di equazioni differenziali anche senza che vi sia bisogno di ricorrere ai metodi generali che abbiamo dato.

Così ad es. quando si abbiano da cercare i valori di x, y e z che soddisfano alle tre equazioni

$$ax'-(b-c)yz=0,\quad by'-(c-a)xz=0,\quad cz'-(a-b)xy=0,$$

che si presentano in Meccanica, e nelle quali a, b, c, sono quantità costanti e x, y, z sono funzioni incognite di una variabile indipendente t, si potrà procedere nel modo seguente.

S'introduca una nuova funzione incognita φ colla formola $\varphi=\int_k^t xyzdt$, o $\frac{d\varphi}{dt}=xyz$ essendo k una costante, e si moltiplichino le equazioni precedenti respettivamente per $2xdt$, $2ydt$, $2zdt$ e s'integri fra k e t.

Si troveranno con ciò le equazioni

$$x^2=\frac{2(b-c)}{a}\varphi+\alpha,\quad y^2=\frac{2(c-a)}{b}\varphi+\beta,\quad z^2=\frac{2(a-b)}{c}\varphi+\gamma,$$

essendo α, β e γ costanti arbitrarie, e quindi per determinare il φ avremo la equazione

$$xyz=\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\left\{\frac{2(b-c)}{a}\varphi+\alpha\right\}\left\{\frac{2(c-a)}{b}\varphi+\beta\right\}\left\{\frac{2(a-b)}{c}\varphi+\gamma\right\}},$$

ovvero

$$t=k+\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\left\{\frac{2(b-c}{a}\varphi+\alpha\right\}\left\{\frac{2(b-a)}{b}\varphi+\beta\right\}\left\{\frac{2(a-b)}{c}\varphi+\gamma\right\}}},$$

e trovato il φ con questa integrazione, che richiederà ordinariamente gli integrali ellittici, le formole precedenti daranno subito i valori cercati di x, y, z.

619. — Farò infine notare esplicitamente, per quanto possa anche apparire superfluo, che tutte le equazioni differenziali che abbiamo considerato finora sono state prese ordinariamente come relazioni fra la variabile indipendente le funzioni e alcune loro derivate, ma potranno anche (come pure talvolta fu fatto) essere date invece come relazioni fra la variabile indipendente, le funzioni e i differenziali di queste quantità, cioè come equazioni tutte della forma

$$f(x,y,z,\ldots dx,dy,\ dz,\ldots,\ d^2x,d^2y,d^2z,\ldots)=0;$$

non dimenticando però allora che quando si tratta di una equazione fra i differenziali di prim'ordine la variabile indipendente può essere lasciata indeterminata, ma quando si tratta di equazioni di ordine superiore bisogna sapere quale è la variabile indipendente, cioè la variabile i cui differenziali di ordine superiore al primo sono tutti zero, ecc.

XXX.

Equazioni a differenziali totali.

620. — Fin qui abbiamo considerato una o più equazioni differenziali nelle quali una sola era la variabile indipendente, e le funzioni erano nello stesso numero delle equazioni, talchè allora il numero dei differenziali che figuravano nelle equazioni, incluso il differenziale della variabile indipendente, poteva superare soltanto di una unità il numero delle equazioni.

Ora tratteremo brevemente del caso in cui si abbia una equazione del prim'ordine

(1) $$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

nella quale vi siano tre differenziali dx, dy e dz, e X, Y, Z siano tre funzioni note di x, y, z, che ci limiteremo a supporre che siano finite e continue insieme alle loro derivate prime nel campo che si considera delle stesse variabili x, y e z (*).

Ripensando a quegli studi del calcolo differenziale nei quali si sono presentate equazioni differenziali (superficie ad es. o curve nello spazio), si intende subito come, avendosi una equazione differenziale come la (1), questa in certi casi potrà provenire dalla differenziazione immediata di una equazione $\varphi(x,y,z)=0$ o da operazioni fatte sulla equazione ottenuta con questa differenziazione, per modo quindi che ad essa invece di una sola variabile indipendente — come si aveva sempre per le equazioni differenziali considerate finora — ne corrispondono due pure indipendenti; ma in altri casi potrà

(*) Ci fermiamo qui a considerare le equazioni a differenziali totali a tre sole variabili, perchè è questo il caso che più comunemente si presenta, ma potrebbe trattarsi con facilità anche il caso di più di tre variabili.

darsi invece che la stessa equazione (1) non possa affatto provenire da una unica equazione nel modo indicato, ma possa soltanto riguardarsi come una equazione che fa parte di un sistema, conosciuto o no, di due equazioni, delle quali una sia la equazione stessa e l'altra sia una equazione qualsiasi in termini finiti $\Psi(x,y,z)=0$, o un'altra equazione differenziale qualsiasi, come ad es. una equazione lineare e del prim'ordine

$$X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz = 0,$$

colla quale la equazione data (1) costituisca un sistema di due equazioni differenziali simultanee, per modo che vi resti una sola variabile indipendente.

621. — In altri termini la equazione data (1) in certi casi può avere un significato anche quando si lascino come indipendenti due delle tre quantità x, y, z, per es. x e y, e la terza z si consideri come una loro funzione determinata da una equazione $z=z(x,y)$ o $\varphi(x,y,z)=0$ che risulterà poi definita dalla equazione (1) stessa; e in altri casi invece, la equazione (1) può non avere un significato finchè si voglia conservare la indipendenza fra due delle tre quantità x, y, z, non potendo essa venire mai soddisfatta da una relazione unica fra x, y, z che conservi questa indipendenza; ma anche in questi ultimi casi la equazione stessa (1) verrà ad acquistare ancora un significato quando si intenda associata ad un'altra equazione qualsiasi in termini finiti o a una equazione differenziale pure qualsiasi, perchè considerandola allora come relativa ad un problema al quale corrisponda non già una sola equazione differenziale ma un sistema di due equazioni delle quali la prima sia sempre quella data (1), se la seconda sarà una equazione in termini finiti qualsiasi $\varphi(x,y,z)=0$, basterà tenere conto di questa per eliminare ad es. z e dz, e la (1) si ridurrà allora ad una equazione differenziale della forma $M\,dx + N\,dy = 0$ per la quale vi sarà sempre un integrale; e se la seconda equazione sarà una equazione differenziale, il problema si ridurrà a quello della integrazione di due equazioni differenziali simultanee, del quale già trattammo nel capitolo precedente (*).

Geometricamente parlando adunque (quando i nostri studii si riferiscano a superficie o a linee nello spazio) la equazione data (1) può in certi casi appartenere a tutti i punti di una superficie di equazione $\varphi(x,y,z)=0$ ed essere soddisfatta quando il punto si muove su questa superficie in un modo qualsiasi, esprimendo così una proprietà di questa superficie e di qualsiasi

(*) S'intende che, come per le X, Y e Z della (1), noi ammettiamo sempre che anche tutte le altre funzioni (esplicite o implicite) che qui vengono a figurare siano finite e continue insieme a quelle delle loro derivate che occorre di considerare, ecc.

linea tracciata su di essa; mentre in altri casi invece la equazione stessa (1) può non appartenere a nessuna superficie ma essere soddisfatta soltanto quando il punto (x,y,z) si muove su certe linee speciali nello spazio in numero infinito che abbiano tutte una proprietà comune espressa dalla equazione stessa (1); e *sistemi determinati* di queste linee esisteranno su qualsiasi superficie $\varphi(x,y,z)=0$, ma per ogni superficie il movimento del punto (x,y,z) non potrà farsi che restando su queste linee determinate.

Queste osservazioni generali, dalle quali apparisce che le equazioni differenziali (1) hanno sempre un significato salvo però ad appartenere, nel caso geometrico, ora ad una superficie ora ad un numero infinito di linee, furono fatte da *Monge*. Prima di lui si riteneva che le equazioni (1) non avessero significato — e si chiamavano perciò equazioni *assurde* — tutte le volte che i loro coefficienti non verificavano quella equazione che troveremo fra poco come la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) stessa possa essere soddisfatta da una relazione unica fra x, y e z.

622. — Noi non ci occuperemo del caso in cui la equazione (1) non può essere considerata altro che associandola ad una relazione in termini finiti o differenziali in x, y e z, poichè si ricadrebbe nei casi già trattati che comportano una sola variabile indipendente.

Ci occuperemo invece del caso in cui la equazione (1) può essere soddisfatta da una relazione unica $\varphi(x,y,z)=0$ fra x, y e z, nel qual caso più specialmente la (1) viene detta equazione a *differenziali totali*, e cercheremo la condizione necessaria e sufficiente perchè questo accada, dando al tempo stesso il processo da seguirsi per trovare effettivamente l'integrale quando questa condizione, che si dirà la *condizione d'integrabilità* della (1), è soddisfatta.

623. — Osserviamo perciò dapprima che se alla equazione (1) deve corrispondere una equazione in termini finiti $\varphi(x,y,z)=0$ che definisca una funzione $z=z(x,y)$ delle due variabili indipendenti x e y finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine p e q nel campo che si considera, allora, avendosi da questa $dz=pdx+qdy$, dovrà essere, qualunque siano dx e dy,

$$(X+pZ)dx+(Y+qZ)dy=0;$$

e poichè questa equazione, per essere in essa dx e dy qualsiansi, si scinde nelle due

$$X+pZ=0, \quad Y+qZ=0, \tag{2}$$

che devono essere soddisfatte contemporaneamente dalla funzione integrale

$z(x,y)$, si comprende subito anche di qui come in molti casi possa non esistere una funzione $z(x,y)$ di due variabili indipendenti x e y che soddisfi alla equazione data (1); perchè questa nel fatto corrisponde non a una sola equazione ma a due, e per essa non può quindi aversi un integrale $z(x,y)$ altro che in quei casi nei quali queste due equazioni ammettono una soluzione comune.

Quando una tale funzione $z(x,y)$ integrale della equazione (1) esiste, a meno che per essa non sia $Z=0$, il che — quando, come supponiamo, p e q non possano essere infiniti — porterebbe allora in forza delle (2) che per la stessa funzione si avesse anche $X=0$, $Y=0$, dovremo avere $p=-\frac{X}{Z}$, $q=-\frac{Y}{Z}$, e derivando la prima di queste equazioni rispetto ad y e la seconda rispetto ad x si giungerà subito alla equazione

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{Z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{Z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{X}{Z}\right)q-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Y}{Z}\right)p=0,$$

la quale coll'eseguire le derivazioni e sostituire per p e q i valori precedenti conduce subito all'altra

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0; \tag{3}$$

e questa condizione — che dovrà essere soddisfatta identicamente o almeno dalla funzione particolare $z(x, y)$ che si ammette che soddisfi alla (1) — si presenta dunque intanto come la condizione necessaria per l'esistenza di una funzione $z(x, y)$ delle due variabili indipendenti x e y che soddisfi alla equazione stessa (1).

Essa poi evidentemente varrà anche pel caso in cui per questa funzione $z(x, y)$, quando esiste come integrale della (1), si abbia $Z=0$, perchè allora, come abbiamo già notato, a causa delle (2) e come anche si vede subito dalla (1) che si suppone soddisfatta qualunque siano x e y, di necessità dovremo avere anche $X=0$ e $Y=0$, e quindi la stessa condizione risulterà subito soddisfatta.

S'intende poi che quando l'integrale $\varphi(x,y,z)=0$ della equazione (1) non dia luogo a una funzione $z(x,y)$ che soddisfi la equazione stessa, ciò che avverrà quando esso non contenga la z ma sia una equazione della forma $f(x, y)=0$, allora invece che da z potremo partire da x o da y considerate come funzioni delle altre due variabili y e z, o x e z, e giungeremo ancora alla formola (3) che si presenta quindi sempre come condizione necessaria per l'esistenza dell'integrale della (1), potendo ancora darsi in ogni caso che anzichè essere soddisfatta identicamente essa risulti soddisfatta soltanto in forza della relazione fra le variabili che viene stabilita dall'integrale.

624. — Per mostrare ora che la condizione trovata (3), *quando è identicamente soddisfatta*, è anche sufficiente per l'esistenza dell'integrale della equazione (1), osserviamo intanto per prima cosa che se il primo membro della stessa equazione fosse un differenziale esatto rapporto alle tre variabili x, y, z considerate come indipendenti, la (3) sarebbe subito soddisfatta, e allora determinando l'integrale $\varphi(x,y,z)=\int (\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$ del suo primo membro coi processi del cap. XVII (pag. 440 e seg.) si avrebbe subito anche l'integrale della (1) che verrebbe dato dalla equazione $\varphi(x,y,z)=\text{cost.}$

Quando poi il primo membro della equazione data (1) non è un differenziale esatto, ma ciò non ostante la (3) è ancora soddisfatta identicamente qualunque siano i valori di x, y e z almeno in certi campi (*), ci è facile di dimostrare che allora esiste sempre un fattore λ che rende il primo membro della (1) un differenziale esatto, e così per la stessa equazione si viene a ricadere nel caso ora indicato e pel suo integrale si ha allora la equazione $\int \lambda(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)=\text{cost.}$, per modo che resta così assicurato che in ogni caso la equazione (3), quando sia identica, è sempre condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale della equazione (1).

Ora per mostrare che, quando la condizione (3) è soddisfatta identicamente, esiste sempre un fattore integrante del primo membro della (1), consideriamo la espressione differenziale $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy$ senza curarci della variabile z che in essa potrà figurare, e che pel momento dovrà essere considerata come un parametro costante; e escludendo il caso in cui X o Y siano identicamente nulle, osserviamo che la espressione stessa per quanto dicemmo al cap. XXII (pag. 570 e seg.) ammetterà sempre infiniti fattori integranti; e quando si supponga determinato l'integrale della equazione $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy=0$ sotto la forma $u(x,y,z)=\text{cost.}$, per uno di questi fattori μ potremo prendere

(4) $$\mu=\frac{1}{\mathrm{X}}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Y}}\frac{\partial u}{\partial y};$$

e per questa funzione μ avremo naturalmente

(*) **Questi campi sono quelli nei quali X, Y, Z sono finite e continue insieme alle loro derivate prime.**

$$\frac{\partial(\mu\mathrm{X})}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\mathrm{Y})}{\partial x}\text{, cioè }\mu\left(\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}\right)=\mathrm{Y}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\mathrm{X}\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Perchè la stessa funzione μ fosse anche un fattore integrante dell'intiero primo membro $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$ della (1) bisognerebbe che avessimo anche $\frac{\partial(\mu\mathrm{Y})}{\partial z}=\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial y}$ e $\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial x}=\frac{\partial(\mu\mathrm{X})}{\partial z}$; ma poichè questo in generale non sarà, indicheremo con g e h le differenze $\frac{\partial(\mu\mathrm{Y})}{\partial z}-\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial y}$ e $\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial x}-\frac{\partial(\mu\mathrm{X})}{\partial z}$, cioè porremo

$$\frac{\partial(\mu\mathrm{Y})}{\partial z}-\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial y}=g,\quad \frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial x}-\frac{\partial(\mu\mathrm{X})}{\partial z}=h,$$

e g e h almeno in generale saranno diversi da zero.

Queste due formole, a causa delle (4), potranno anche scriversi sotto la forma

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial y}=g,\quad \frac{\partial(\mu\mathrm{Z})}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=h,$$

e derivando la prima di queste rapporto ad x e la seconda rapporto ad y ne dedurremo subito la formola $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial h}{\partial y}$, la quale ci mostra che la espressione $h\,dx-g\,dy$ sarà il differenziale esatto di una funzione $\theta(x,y,z)$ che potrà trovarsi coi processi del ricordato cap. XXII, e trovata questa funzione θ si avrà $h=\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $g=-\frac{\partial\theta}{\partial y}$.

Ora avendosi le tre equazioni

$$\mu\left(\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}\right)=\mathrm{Y}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\mathrm{X}\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

$$\mu\left(\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y}\right)=\mathrm{Z}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\mathrm{Y}\frac{\partial\mu}{\partial z}+g,$$

$$\mu\left(\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x}-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z}\right)=\mathrm{X}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\mathrm{Z}\frac{\partial\mu}{\partial x}+h,$$

moltiplicando la prima per Z, la seconda per X e la terza per Y e tenendo conto della (3) che si suppone soddisfatta identicamente, avremo $\mathrm{X}g+\mathrm{Y}h=0$, e quindi $\mathrm{X}\frac{\partial\theta}{\partial y}-\mathrm{Y}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$.

Ma per quanto dicemmo al § 611 (pag 852-53), essendo, come supponiamo, $u=$cost. l'integrale della equazione differenziale $X\,dx+Y\,dy=0$, la funzione θ chesoddisfa alla equazione precedente $X\frac{\partial\theta}{\partial y}-Y\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$ verrà ad essere necessariamente una funzione di u, cioè col valersi della formola $u=u(x,y,z)$ la funzione $\theta(x,y,z)$ per mezzo di eliminazioni dovrà ridursi ad una funzione $f(u)$ della sola u; e per questo avendosi allora $h=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$, $g=-f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$, le due equazioni (5) si trasformeranno subito nelle altre

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+f(u)-\mu Z\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+f(u)-\mu Z\right)=0,$$

le quali ci mostrano che quando la condizione (3) è identicamente soddisfatta, la espressione $\frac{\partial u}{\partial z}+f(u)-\mu Z$ non potrà contenere x e y, e quindi dovrà essere una funzione della sola z che potremo indicare con $-\pi(z)$.

Per questo dunque si avrà la formola

$$\mu Z=\frac{\partial u}{\partial z}+f(u)+\pi(z),$$

la quale ci permette di dire che, sotto la ipotesi che la equazione (3) sia identicamente soddisfatta, la differenza $\mu Z-\frac{\partial u}{\partial z}$ colla eliminazione di x o y per mezzo della formola $u=u(x,y,z)$ si ridurrà alla somma $f(u)+\pi(z)$ di due funzioni una della sola u e l'altra della sola z che, volendo, potranno anche trovarsi coi processi seguiti per arrivare a questa formola; e per conseguenza il primo membro della nostra equazione (1) dopo moltiplicato per μ si ridurrà alla espressione differenziale $du+[f(u)+\pi(z)]dz$ che, essendo nelle due sole variabili u e z, ammetterà un fattore integrante funzione di queste variabili che potremo indicare con $\frac{\lambda}{\mu}$; quindi si può ora evidentemente affermare che esisterà sempre una funzione λ tale che moltiplicando per essa il primo membro della equazione (1), questo primo membro si ridurrà ad un differenziale esatto in u e z, $\frac{\lambda}{\mu}\left\{du+[f(u)+\pi(z)]dz\right\}$, ciò che, oltre a dimostrare quanto volevamo, ci dà subito al tempo stesso anche l'integrale della equazione data (1) perchè evidentemente questo integrale verrà ad essere dato dalla formola

$$\int\frac{\lambda}{\mu}\left\{du+[f(u)+\pi(z)]dz\right\}=\text{cost.},\ \text{o}\int\frac{\lambda}{\mu}\left\{du+\left(\mu Z-\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz\right\}=\text{cost.},$$

nella quale l'integrale che vi figura si determinerà coi soliti processi del cap. XXII più volte ricordato.

E si può notare che per la determinazione dell'indicato fattore integrante λ e quindi anche dell'integrale della (1) basterà sapere trovare il fattore integrante μ di $X\,dx+Y\,dy$ in x,y e z (z però allora considerato come costante), e l'altro $\frac{\lambda}{\mu}$ di $du+[f(u)+\pi(z)]dz$ in μ e z, essendo $f(u)+\pi(z)$ la differenza $\mu Z-\frac{\partial u}{\partial z}$ che risulterà di questa forma in seguito ad una eliminazione dopo che sarà stato determinato l'integrale $u(x,y,z)=$cost. della equazione $X\,dx+Y\,dy=0$, dal quale si avrà pure il fattore μ colle formole (4).

625. — Le considerazioni che abbiamo esposto mentre ci mostrano che la equazione (3), *quando è identicamente soddisfatta* (*), ci dà la condizione necessaria e sufficiente per la esistenza dell'integrale della equazione a differenziali totali (1), ci dànno dunque anche un processo per la determinazione di questo integrale; però questo processo sarà il più spesso puramente teorico a causa delle difficoltà che ordinariamente presenterà la determinazione dei due fattori integranti μ e $\frac{\lambda}{\mu}$, e quindi converrà valersi di artifizî speciali per trovare lo stesso integrale.

S'intende però che come siamo partiti dalla espressione $X\,dx+Y\,dy$ ammettendone trovato un fattore integrante μ, potremo partire invece dall'altra $Y\,dy+Z\,dz$ o anche dall'altra $Z\,dz+X\,dx$, e converrà sempre naturalmente partire da quella di queste tre espressioni differenziali che darà luogo a minori difficoltà.

626. — Tutto questo nei casi nei quali due dei tre coefficienti X,Y,Z non siano identicamente zero, non essendo naturalmente neppure da parlare del caso in cui fossero *identicamente* zero tutti e tre.

Quando poi due di questi coefficienti p. es. X e Y siano *identicamente* zero, la condizione (3) sarà ancora soddisfatta perchè allora sarà anche certamente $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=0$, e l'integrale della equazione (1) esisterà pure e questo integrale sarà $z=$cost. Però in questo caso potrà riguardarsi come integrale

(*) Considerando ora la equazione (3) quando è identicamente soddisfatta, e dicendo che allora è condizione *necessaria* per la esistenza dell'integrale della (1) s'intende che si tralascia di parlare di quegli integrali che quando la (3) non è identica possono corrispondere alle funzioni che risultino definite da questa equazione e che talvolta (ma non sempre) soddisfano effettivamente alla (1), come faremo rilevare fra breve al § 627.

anche la relazione fra x, y e z che si avrà dalla equazione $Z=0$ che non potrà essere una identità, per quanto propriamente il resultare allora soddisfatta la equazione (1) da queste relazioni non provenga dai legami che essa stabilisce fra i differenziali come equazione differenziale, ma dalla natura e forma speciale che avranno i suoi coefficienti X, Y e Z.

E se X e Y saranno zero soltanto in forza di relazioni speciali che si abbiano fra x, y e z, allora la $z=$cost. sarà sempre integrale della equazione data per quei valori speciali della costante pei quali X e Y restino zero *per valori qualsiasi* di x e y, e la condizione (3) rimarrà ancora soddisfatta perchè allora per gli stessi valori costanti di z avremo $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}=0$.

E nello stesso caso, se in forza di quelle relazioni speciali fra x, y e z per le quali fossero zero X e Y risulterà anche $Z=0$ le, relazioni stesse potranno esse pure considerarsi come integrali della stessa equazione (1), e anche in questo caso di $Z=0$ la relazione (3) sarà sempre soddisfatta.

627. — Infine aggiungiamo che mentre dalle considerazioni esposte risulta che la condizione (3) quando sia identica dà sempre la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale della (1), e allora questo integrale contiene una costante arbitraria, *quando invece la stessa equazione (3) non sia una identità la equazione* (1) *potrà avere ancora un integrale, ma questo non conterrà costante arbitraria,* e non potrà essere dato che dalla equazione stessa (3) la quale, non essendo una identità, darà luogo appunto a una relazione della forma $\Psi(x,y,z)=0$ e definirà una delle tre variabili x, y, z in funzione delle altre due; però per assicurarsi che la (3) sia effettivamente un integrale della stessa equazione (1) converrà fare le opportune verificazioni, e lo stesso integrale non conterrà alcuna costante arbitraria.

S'intende poi che in tutti questi studî vengono escluse quelle soluzioni della equazione (1), che pure talvolta potrebbero esservi, per le quali alcune delle funzioni o delle formole che vengono a figurare negli studî stessi presentano qualche singolarità, come ad es. quelle soluzioni per le quali i fattori integranti μ o $\frac{\lambda}{\mu}$ diventassero infiniti ecc.; e per tali soluzioni bisognerà fare studî e considerazioni a parte.

628. — Per dare un esempio semplice di integrazione di equazioni a differenziali totali, cerchiamo l'integrale della equazione

$$a(by-cz)dx+b(cz-ax)dy+c(ax-by)dz=0. \tag{6}$$

Seguendo per questo il processo indicato nel § 624, prenderemo prima a considerare la espressione differenziale $a(by-cz)dx+b(cz-ax)dy$ considerandovi in essa z come un parametro costante; e osservando che l'integrale della equazione $a(by-cz)dx+b(cz-ax)dy=0$ è $\frac{cz-ax}{by-cz}=$ cost., si vedrà subito che ora sarà $u=\frac{cz-ax}{by-cz}$, $\mu=-\frac{1}{(by-cz)^2}$; e avendosi quindi ora $\mu Z-\frac{\partial u}{\partial z}=0$, la espressione $du+\left(\mu Z-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dz$ si ridurrà a du, e per quanto dicemmo in fine del § 624 l'integrale cercato della equazione (6) sarà $u=$cost. o $\frac{az-bx}{by-cz}=$ cost., la costante del secondo membro restando arbitraria.

Osservando poi che il fattore integrante μ diviene infinito quando sia $by-cz=0$, sarà anche da vedere per l'osservazione che facemmo in fine del paragrafo precedente se questa relazione possa corrispondere a un integrale della (6), e difatti si trova che vi corrisponde. Essa del resto si ha come caso limite anche dall'integrale $\frac{az-bx}{by-cz}=$cost. perchè corrisponde al caso in cui la costante del secondo membro è infinita.

629. — Le difficoltà più gravi per la integrazione della equazione a differenziali totali (1) col processo generale del § 624 quando la condizione d'integrabilità (3) è identicamente soddisfatta, si avranno, come abbiamo già notato, per la determinazione che occorre di fare dei fattori integranti di due espressioni differenziali a due variabili e per una eliminazione che pure è necessaria.

È utile perciò di presentare anche l'osservazione seguente, per la quale in dati casi, si giungerà subito alla integrazione della equazione data (1).

Osserviamo cioè che facendo un cambiamento di variabili colle formole

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w), \tag{7}$$

la equazione (1) si ridurrà all'altra

$$A\,du+B\,dv+C\,dw=0,$$

nella quale sarà

$$A=X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}+Z\frac{\partial z}{\partial u},\quad B=X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v},\quad C=X\frac{\partial x}{\partial w}+Y\frac{\partial y}{\partial w}+Z\frac{\partial z}{\partial w},$$

e poichè quando per la equazione (1) sia soddisfatta la condizione d'integrabilità (3), esisterà un fattore integrante λ del suo primo membro, anche la nuova espressione $A\,du+B\,dv+C\,dw$ ammetterà un fattore integrante che sarà lo stesso λ espresso ora per u, v, w per mezzo delle (7), e invece della (1) potremo prendere a integrare la nuova equazione (8) che in certi casi potrà essere più facilmente integrata.

In particolare quindi questa equazione s'integrerà immediatamente quando il suo primo membro venga ad essere della forma

$$\theta(u)f(v,w)du+\theta_1(u)\{f_1(v,w)dv+f_2(v,w)dw\},$$

perchè allora questo ammetterà il fattore integrante $\frac{1}{\theta_1(u)f(v,w)}$ (*), e l'integrale della equazione (8) sarà dato dalla formola

$$\int\frac{\theta(u)}{\theta_1(u)}du+\int\left\{\frac{f_1(v,w)}{f(v,w)}dv+\frac{f_2(v,w)}{f(v,w)}dw\right\}=\text{cost.},$$

salvo a dovere considerare come integrali anche quelli corrispondenti ai valori costanti di u che annulleranno $\theta_1(u)$, e quelli in v e w pei quali si abbia $f(v,w)=0$ quando per questi si abbia anche $f_1(v,w)dv+f_2(v,w)dw=0$.

630. — Questa osservazione in casi particolari può tornare utilissima.

Così ad es. se la equazione data (1) sarà omogenea rispetto ad x,y,z, cioè se X,Y,Z saranno funzioni omogenee dello stesso grado n rispetto alle variabili, fatta la trasformazione

$$x=u,\ y=uv,\ z=uw,$$

avremo

$$X=u^nX_1,\ Y=u^nY_1,\ Z=u^nZ_1,$$

essendo X_1,Y_1,Z_1 le funzioni delle sole v e w che si avranno dalle X,Y,Z sostituendovi per x,y e z respettivamente $1,v$ e w; e quindi la espressione data $Xdx+Ydy+Zdz$ si trasformerà nell'altra

$$u^n(X_1+Y_1v+Z_1w)du+u^{n+1}Y_1dv+u^{n+1}Z_1dw,$$

e così per la osservazione precedente si potrà senz'altro affermare che l'integrale della nostra equazione omogenea sarà dato dalla formola

(*) Questo può affermarsi perchè quando si ha una espressione differenziale

$$\varphi(u)du+\Psi(v,w)dv+\pi(v,w)dw$$

per la quale siamo sicuri che ammette un fattore integrante G, dovremo avere le formole

$$\varphi\frac{\partial G}{\partial v}=\Psi\frac{\partial G}{\partial u},\quad \varphi\frac{\partial G}{\partial w}=\pi\frac{\partial G}{\partial u},\quad G\frac{\partial\Psi}{\partial w}+\Psi\frac{\partial G}{\partial w}=G\frac{\partial\pi}{\partial v}+\pi\frac{\partial G}{\partial v},$$

e l'ultima di queste a causa delle due prime, ci darà subito $\frac{\partial\Psi}{\partial w}=\frac{\partial\pi}{\partial v}$, ciò che prova che la espressione stessa sarà già un differenziale esatto.

$$\log u+\int\frac{Y_1dv+Z_1dw}{X_1+Y_1v+Z_1w}=\text{cost.}$$

Oltre a questo poi si avrà anche l'integrale $x=0$ quando per $x=0$ le Y e Z si annullino e la X non presenti singolarità, e si avrà pure come integrale la equazione in v e w $X_1+Y_1v+Z_1w=0$ quando insieme a questa si abbia $Y_1dv+Z_1dw=0$.

E questi integrali si avranno subito espressi per x, y e z sostituendo ad u, v e w respettivamente x, $\frac{y}{x}$ e $\frac{z}{x}$.

XXXI.

Brevi studi sulle equazioni a derivate parziali

Considerazioni generali.

631. — Come abbiamo detto altre volte, le equazioni a derivate parziali sono quelle nelle quali figurano derivate parziali di funzioni di due o più variabili indipendenti, sia del resto che anche queste funzioni vi compariscano effettivamente o no.

Nel caso dunque di una sola funzione z di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la forma generale delle equazioni a derivate parziali sarà la seguente

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots}, \ldots\right) = 0,$$

e l'ordine di questa equazione sarà dato da quello delle derivate di ordine più alto che vi compariscono; e nel caso poi di più funzioni $z, t, u, \ldots$ invece di una sola di queste equazioni se ne avranno pel solito tante quante sono le funzioni, e ciascuna di esse potrà nello stesso tempo contenere più funzioni e le loro derivate.

Sistemi inoltre di più equazioni a derivate parziali potranno aversi, in certi problemi, anche quando si abbia una sola funzione incognita; come ad es. nel caso in cui si abbiano da trovare funzioni che siano integrali comuni a più equazioni, o superficie che abbiano ad un tempo varie particolarità dipendenti da equazioni a derivate parziali, ecc.

632. — Il problema di calcolo integrale che le equazioni a derivate parziali conducono a proporsi quando si ha una o più di tali equazioni con una o più funzioni incognite, sarebbe naturalmente quello di trovare le equazioni

in termini finiti che loro dànno origine, o in altri termini trovare le funzioni che insieme alle loro derivate parziali soddisfano alle equazioni stesse; però malgrado gli studî estesi che si sono fatti, il numero dei casi nei quali il problema, posto in questo modo, della integrazione delle equazioni a derivate parziali ha potuto effettivamente risolversi, anche quando si tratta di una sola equazione, è limitatissimo. Inoltre, anche in quei pochi casi i metodi che si sono dati per risolvere i detti problemi sono il più spesso accompagnati da difficoltà pratiche tali da farli restare non di rado puramente teorici; talchè la teoria della integrazione delle equazioni a derivate parziali, anche tenuto conto dei più moderni resultati che si sono ottenuti, specialmente dal lato pratico può dirsi finora incompletissima.

Si aggiunge poi che, posto il problema nel modo testè indicato, quando coi metodi che si conoscono si è giunti a trovare l'integrale più generale di una data equazione a derivate parziali, bene spesso la conoscenza di questa integrale (che, invece di contenere costanti arbitrarie come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, contiene funzioni arbitrarie) non riesce quasi di alcun vantaggio in quei problemi di Analisi, di Geometria, di Meccanica, di Fisica matematica ecc. nei quali si presentano equazioni a derivate parziali, quando le funzioni che allora sono da determinarsi, oltre a soddisfare a quelle equazioni devono soddisfare al tempo stesso ad altre condizioni, come p. es. a speciali condizioni ai limiti; poichè in questi casi la determinazione, che pure converrebbe fare, delle funzioni arbitrarie portate dalla integrazione onde rendere soddisfatte tutte le condizioni proprie della questione che si tratta, presenta essa pure il più spesso difficoltà che l'Analisi non ci dà il modo di superare.

633. — È perciò che, — pure attribuendo sempre una importanza grandissima al problema d'integrazione delle equazioni a derivate parziali anche sotto il punto di vista sopra indicato, specialmente per quelle questioni nelle quali non si richiede poi la determinazione delle funzioni arbitrarie portate dalla integrazione —, si è presa a trattare l'integrazione delle equazioni a derivate parziali anche sotto un secondo punto di vista interessantissimo.

Anzichè proporsi cioè di determinare prima tutta la categoria di funzioni che soddisfano a date equazioni a derivate parziali senza alcuna limitazione a *priori*, riservandosi di togliere dopo mediante le ulteriori condizioni delle quali sopra si è detto la tanta generalità che le soluzioni ottenute comportano, per giungere così alle funzioni che corrispondono alla questione speciale che si deve trattare, si sono posti altrimenti i problemi d'integrazione delle equazioni a derivate parziali; cercando cioè di determinare — indipendentemente dalla conoscenza di tutte le grandi classi di funzioni che soddisfano a quelle equazioni — *soltanto* quelle funzioni speciali o classi di funzioni che oltre a soddisfare alle equazioni medesime soddisfano nello stesso tempo ad altre condizioni date, per modo così da escludere fino da principio tutte quelle soluzioni integrali che fossero estranee alla questione che si ha da trattare; ed è ponendosi in questa via che si sono potuti risolvere molti problemi interessantissimi dell'Analisi, della Geometria, della Meccanica e della Fisica matematica.

Gli studî rivolti in questo senso però appartengono più specialmente all'alta Analisi, come propriamente all'alta Analisi può dirsi che appartengono anche la maggior parte di quelli pure estesissimi che già si hanno intorno alla integrazione delle equazioni a derivate parziali anche pel caso in cui ci si attiene al primo punto di vista indicato sopra; e noi, rimandando per tutti questi studî ai trattati e memorie speciali, ci limiteremo qui ad esporre soltanto pochi risultati d'ordine generale che, per quanto possano dirsi ormai vecchi, non cessano però di avere ancora una particolare importanza; e sono tutti relativi soltanto al caso in cui si ha una sola equazione a derivate parziali e si tratta d'integrarla attenendosi al primo dei punti di vista sopra indicati, quello cioè della determinazione di tutta la categoria di funzioni che soddisfano a quella equazione.

Equazioni che contengono soltanto derivate relative a una stessa variabile o che si riducono a queste.

634. — Avendosi una equazione della forma

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_r}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_r^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x_r^m}\right)=0$$

che, oltre alle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ e alla funzione z (che possono anche mancare), contenga alcune derivate parziali di z prese però tutte rispetto *a una stessa* variabile x_r, s'intende subito che la sua integrazione potrà farsi come se fosse una equazione differenziale ordinaria, considerandovi come parametri costanti tutte le variabili all'infuori della x_r, perchè allora è appunto in questo concetto che le derivazioni parziali rispetto ad x_r devono intendersi eseguite nella funzione integrale.

Le costanti però che dovranno comparire nell'integrale così determinato basterà che figurino come costanti nella derivazione rispetto ad x_r, e quindi, onde l'integrale stesso abbia tutta la generalità che può comportare, al posto delle costanti arbitrarie bisognerà porre altrettante funzioni arbitrarie delle altre variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_n$.

Così p. es. trattandosi della equazione a due variabili x e y

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,$$

ovvero $xr+yp=0$ quando si usino le solite caratteristiche di Monge p, q, r, s e t per rappresentare le derivate prime e seconde di z, si osserverà che quando si consideri y come costante si ha con una prima integrazione

$$\log p=\log\frac{\partial z}{\partial x}=-y\log x+\log\varphi(y),\ \text{ovvero}\ p=\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(y)x^{-y},$$

essendo $\varphi(y)$ il simbolo di una funzione arbitraria di y; e di qui, considerando sempre y come costante, per y diverso da 1 si trova

$$z=\frac{\varphi(y)}{y-1}x^{-y+1}+\Psi(y),$$

essendo $\Psi(y)$ il simbolo di un'altra funzione arbitraria; e da questa si avrà z anche quando $y=1$ sostituendo però allora $\log x$ a $\dfrac{x^{-y+1}}{y-1}$.

635. — Vi sono poi anche dei casi in cui le equazioni date sebbene contengano derivate prese rispetto a più variabili si riducono facilmente al caso precedente con più integrazioni successive, ciascuna relativa ad una sola variabile, come apparisce chiaramente dai seguenti esempî.

1.° Se si avrà la equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,\ \text{ovvero}\ s+xp=0, \tag{1}$$

si osserverà che ponendola sotto la forma $\dfrac{\partial p}{\partial y}+px=0$, si cade subito nel caso precedente, e quindi con una integrazione rispetto ad y si avrà intanto

$$\log p=\log\frac{\partial z}{\partial x}=-xy+\log\varphi(x)\,,\ \text{ovvero}\ p=\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x)\,e^{-xy}\,,$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione arbitraria di x: ed ora, essendo ancora tornati nel caso precedente, con un'altra integrazione rispetto ad x si troverà

$$z=\Psi(y)+\int\varphi(x)e^{-xy}dx,$$

essendo $\varphi(x)$ e $\Psi(y)$ i simboli di due funzioni arbitrarie; talchè l'integrazione della equazione data (1), essendo ora ridotta alle quadrature, può dirsi effettuata, per quanto l'integrale che comparisce in z non potrà determinarsi altro che volta per volta dopo di avere assegnato un valore speciale (qualsiasi) alla funzione arbitraria $\varphi(x)$.

2.° Similmente se si avrà ad es. la equazione a derivate parziali del quart'ordine

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x, \tag{2}$$

per ricadere nel caso del paragrafo precedente basterà osservare che questa può porsi sotto la forma

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 3\frac{\partial r}{\partial y} + 2r = 2x,$$

dove $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; e allora, osservando che questa equazione può anche scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial^2 (r-x)}{\partial y^2} - 3\frac{\partial (r-x)}{\partial y} + 2(r-x) = 0,$$

e prendendo $r-x$ come funzione incognita, si vede che siamo nel caso di una equazione differenziale ordinaria lineare e senza secondo membro, la cui equazione caratteristica $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ ha per radici 1 e 2; e si conclude perciò subito che

$$r - x = \varphi(x)\, e^y + \Psi(x)\, e^{2y}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x + \varphi(x)\, e^y + \Psi(x)\, e^{2y},$$

essendo $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ i simboli di due funzioni arbitrarie.

Di qui allora si trae subito

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + e^y \int \varphi(x)dx + e^{2y} \int \Psi(x)dx + \theta(y),$$

e quindi

$$z = \frac{x^3}{6} + e^y \int dx \int \varphi(x)dx + e^{2y} \int dx \int \psi(x)dx + \theta(y)x + \pi(y),$$

essendo $\theta(y)$ e $\pi(y)$ nuove funzioni arbitrarie, e si può anche scrivere

$$z = \frac{x^3}{6} + \lambda(x)\, e^y + \mu(x)\, e^{2y} + \theta(y)x + \pi(y),$$

rappresentando coi simboli $\lambda(x)$ e $\mu(x)$ le funzioni arbitrarie $\int dx \int \varphi(x)dx$ e $\int dx \int \Psi(x)dx$; talchè si ha così l'integrale della (2) con quattro funzioni arbitrarie.

Equazioni a derivate parziali del prim'ordine in generale. Integrale generale. Integrale completo.

636. — Ricordando che, come si vide nel calcolo differenziale al § 189 [pag. 259 e seg.], la eliminazione di una funzione arbitraria fra una equazione in termini finiti a due o più variabili indipendenti e le sue equazioni a derivate parziali immediate del prim'ordine dava origine a una equazione a derivate parziali pure del prim'ordine

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{7}$$

diremo ora inversamente che una relazione in termini finiti

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \tag{2}$$

fra le variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e la funzione z costituisce *l'integrale generale* di una equazione data (1) quando la funzione $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che s'intende che possa dedursene, oltre a verificare identicamente la equazione stessa (1) è tale che attribuendo ad una delle variabili indipendenti, p. es. alla x_n, un valore determinato α_n scelto a piacere, il valore che ne risulta per z è uguale ad una funzione data ad arbitrio $G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ delle altre $n-1$ variabili indipendenti; e si dimostra che, almeno finchè si resta in dati campi colle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e z, questo integrale esiste ed è unico (*).

E quelle soluzioni speciali della (1), quando vi siano, che non possano provenire dall'integrale generale si dicono *soluzioni singolari* della stessa equazione (1).

637. — Ricordando poi che si trovò pure che anche colla eliminazione di n costanti arbitrarie fra una equazione in termini finiti a n variabili

(*) Nel caso della equazione $f(x, y, z, p, q) = 0$, quando si considera come relativa ad una superficie, si viene a dire che si può dare arbitrariamente su un piano $x = \alpha$ o $y = \beta$ parallelo ai piani coordinati yz o xz una curva arbitraria $z = G(y)$, o $z = G(x)$ per la quale la superficie deve passare, e allora la superficie o l'integrale esistono e sono perfettamente determinati.

indipendenti e le sue n equazioni a derivate parziali del prim'ordine che se ne deducono colla derivazione immediata, si giunge ad una equazione a derivate parziali del prim'ordine, chiameremo con Lagrange *integrale completo* di una equazione a derivate parziali del prim'ordine (1) ogni relazione in termini finiti

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 0 \tag{3}$$

fra le variabili indipendenti, la funzione e n costanti arbitrarie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, quando la funzione z da essa definita soddisfi alla equazione data qualunque siano le costanti, per modo quindi che eliminando queste costanti fra la equazione stessa (3) e le sue n equazioni a derivate parziali immediate del prim'ordine

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{4}$$

si torni ad ottenere la equazione data (1).

638. — Questa distinzione fra l'integrale generale e l'integrale completo di una equazione a derivate parziali del prim'ordine era naturalissimo di farla in vista dei due modi differenti coi quali può darsi origine alle equazioni a derivate parziali del prim'ordine, colla eliminazione cioè della funzione arbitraria, e colla eliminazione delle costanti arbitrarie.

È poi degno di nota che, come dall'integrale generale che contiene una funzione arbitraria si possono sempre evidentemente dedurre infiniti integrali completi della stessa equazione (1), così inversamente dall'integrale completo di questa equazione, che contiene soltanto n costanti arbitrarie, si può sempre dedurre un integrale che contiene invece una funzione arbitraria e che come vedremo, coincide, almeno ordinariamente, coll'integrale generale.

Questa proprietà importantissima, in forza della quale dalla conoscenza di un integrale particolare con n costanti arbitrarie di una equazione a derivate parziali del prim'ordine (1) si passa ordinariamente e con sole eliminazioni all'integrale generale con una funzione arbitraria, si dimostra con un metodo dovuto a Lagrange che fu già esposto da noi nel calcolo differenziale nel ricordato § 189 [pag. 259 e seg.], e che in sostanza non è che un metodo di *variazioni di costanti arbitrarie*.

Nella formola (3) cioè, che si suppone essere un integrale completo della equazione data (1), secondo il processo che allora esponemmo si ammette che una delle costanti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, p. es. la a_n, divenga una funzione arbitraria φ delle altre $n-1$, cioè si pone

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}); \tag{5}$$

e dopo, ammettendo che le quantità stesse $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ cessino di essere costanti e diventino anch'esse funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e z, s'intende che queste funzioni vengano determinate — in relazione colla funzione che via via verrà scelta per $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ — in modo che le equazioni a derivate parziali immediate della (3) restino ancora le equazioni (4), con che allora avviene appunto naturalmente che la formola (3) anche in questa nuova ipotesi continui a darci, almeno ordinariamente, un integrale della (1) il quale invece delle n costanti arbitrarie conterrà una funzione arbitraria.

E precisamente, siccome quando le $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sono variabili e a_n è dato dalla (5), le equazioni che si ottengono derivando parzialmente la (3) rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rientrano tutte nella forma seguente

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_r}\right) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_r}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_r}\right) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove abbiamo posto le derivate fra parentesi per indicare che esse sono derivate complete, per modo cioè che si ha in generale

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_s}\right) = \frac{\partial\Psi}{\partial a_s} + \frac{\partial\Psi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_s}, \quad \left(\frac{\partial a_s}{\partial x_r}\right) = \frac{\partial a_s}{\partial x_r} + \frac{\partial a_s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r},$$

essendo ora le derivate dei secondi membri le solite derivate parziali, così le condizioni perchè queste equazioni siano ancora le (4) sono date dalle $n-1$ equazioni

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\right) = 0 \quad , \ldots, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_{n-1}}\right) = 0, \tag{6}$$

e quindi « quando la formola (3) ci dà un integrale completo della (1), la equazione che risulta dalla eliminazione delle $n-1$ quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ fra « le n equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})) = 0, \\ &\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\right) = 0 \quad , \ldots, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_{n-1}}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

« dove in generale si ha $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial a_s}\right) = \frac{\partial\Psi}{\partial a_s} + \frac{\partial\Psi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_s}$, per ogni forma speciale « che si attribuisca alla funzione $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ per la quale queste « formole non presentino qualche incompatibilità, darà l'integrale cercato « della equazione (1) »; e per quanto le eliminazioni non possano propriamente effettuarsi altro che dopo fissata volta per volta la funzione φ, pure, essendo questa del tutto arbitraria, è evidente che l'insieme degli integrali che così si otterranno avrà la generalità corrispondente alla presenza di una funzione arbitraria. Del resto poi quando, senza esigere che l'integrale venga dato da una equazione unica fra x, y, z, ci si contenti di riguardare l'integrale stesso come dato dal sistema di equazioni (7) nelle quali $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ figureranno come quantità ausiliarie, la funzione arbitraria vi comparirà sempre coi simboli ordinarii.

È da notare poi che, in certi casi, per quanto le eliminazioni nelle formole (7) non possano farsi altro che dopo di avere particolarizzato la funzione φ, pure artifizî speciali permettono di dedurne l'integrale della equazione data rappresentato da una sola equazione che contiene una funzione arbitraria, come risulterà chiaramente dal primo degli esempi che daremo fra breve.

Ed è da notare inoltre, come del resto già dicemmo anche nel calcolo differenziale, che talvolta per la funzione $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ certe funzioni speciali dovranno essere escluse onde resti possibile di determinare effettivamente le funzioni $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ colle $n-1$ equazioni (6), il che per la teoria delle funzioni implicite porta sempre alcune restrizioni, nè per fare questa determinazione potrebbe sostituirsi a una delle (6) l'altra equazione che figura nel sistema (7), cioè la $\Psi=0$, perchè allora i valori di $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ridurrebbero questa una identità ed essa non corrisponderebbe più a un integrale.

639. — In particolare dunque nel caso, che è il più comune, delle equazioni a derivate parziali del prim'ordine $f(x, y, z, p, q)=0$ con due sole variabili indipendenti x e y, trovato un integrale completo

$$\Psi(x, y, z, a, b)=0$$

con due costanti arbitrarie a e b, si porrà $b=\varphi(a)$, essendo $\varphi(a)$ una funzione arbitraria; e allora l'integrale corrispondente alle (7) verrà dato dal sistema delle due equazioni

$$(8) \qquad \begin{cases} \Psi(x, y, z, a, \varphi(a))=0, \\ \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial a}\right)=\dfrac{\partial \Psi}{\partial a}+\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\varphi'(a)=0, \end{cases}$$

le quali nel caso delle superficie, ci mostrano che per ogni forma particolare $\varphi_0(a)$ della funzione $\varphi(a)$ la superficie integrale rappresentata da queste due equazioni si potrà riguardare come la superficie inviluppo delle infinite superficie integrali rappresentate dalla prima equazione $\Psi(x, y, z, a, \varphi_0(a))=0$ e corrispondenti ai varii valori di a considerati allora come costanti.

E s'intende, come già notammo in generale in fine del paragrafo precedente, che dovranno escludersi quelle funzioni particolari per $\varphi(a)$ per le quali la seconda equazione $\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial a}\right)=0$ risultasse indipendente da a.

640. — È poi da osservare che, o seguendo un processo che nasce spontaneo dalla considerazione delle equazioni (8) ma richiede la integrazione di una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine per la determinazione di $\varphi(a)$, o seguendo un altro processo che richiede soltanto alcune eliminazioni, salvo nell'un caso e nell'altro a fare opportune verifiche, l'integrale rappresentato dal sistema di equazioni (8) condurrà ordinariamente all'*integrale generale* definito al § 636.

Pel primo di questi processi, volendo per es. che per $x=\alpha$ si abbia $z=G(y)$, si osserverà che le $\dfrac{\partial \Psi}{\partial a}$ e $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$ nella seconda delle (8) stesse sono due funzioni della forma $\Psi_1(x, y, z, a, \varphi(a))$ e $\Psi_2(x, y, z, a, \varphi(a))$, e si vedrà subito che in questo caso dovranno aversi le due equazioni

$$(9) \quad \Psi(\alpha, y, G(y), a, \varphi(a))=0, \quad \Psi_1(\alpha, y, G(y), a, \varphi(a))+\Psi_2(\alpha, y, G(y), a, \varphi(a))\varphi'(a)=0;$$

e eliminando fra queste la y, si giungerà ad una equazione della forma

$$(10) \qquad \theta[a, \varphi(a), \varphi'(a)]=0,$$

che integrata determinerà la funzione $\varphi(a)$ che soddisfa a questa equazione; dopo di che posta nelle (8) per $\varphi(a)$ questa funzione per la quale s'intenda allora che a debba poi avere il valore in x, y, z che per la seconda delle (8) stesse corrisponderà alla funzione medesima, si avranno due equazioni (8) tali che eliminando fra esse a si giungerà a una equazione in x, y, z che, salvo il caso eccezionale di singolarità che vengano ad incontrarsi nei calcoli, e salvo anche le opportune verifiche (*), ci darà un integrale pel quale si avrà $z=G(y)$ per $x=\alpha$.

Pel secondo processo poi, sempre ammettendo che per $x=\alpha$ le equazioni (8) debbano darci $z=G(y)$, si osserverà che quando queste equazioni (8) con una conveniente funzione $\varphi(a)$ diano luogo ad un valore per a che non presenti singolarità, la prima di esse differenziata ci darà

(*) Queste verifiche saranno necessarie perchè, essendo la equazione (10) soltanto una combinazione delle due equazioni (9), non si può assicurare che colle funzioni $\varphi(a)$ che soddisfaranno alla stessa (10) risulteranno soddisfatte separatamente anche le (9); e si comprende anzi che per questo si richiederanno ordinariamente alcune condizioni per le quali risulterà determinata la costante arbitraria portata dalla integrazione, della quale non si ha traccia nel secondo processo.

$$\left\{\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial G}G'(y)\right\}dy+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)da=0, \tag{11}$$

e da questa, a causa della seconda delle stesse (8) che non è altro che la $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)=0$, si vede che avremo l'altra

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial G}G'(y)=0, \tag{12}$$

la quale ci mostra che la funzione $\varphi(a)$ dovrà essere tale che, insieme alla equazione

$$\Psi(\alpha,\ y,\ G(y),\ a,\ \varphi(a))=0, \tag{13}$$

si abbia anche quest'ultima equazione (12).

Eliminando dunque y fra queste equazioni (12) e (13) si giungerà a una equazione della forma $\theta(a, \varphi(a))=0$ che ordinariamente conterrà $\varphi(a)$, e servirà quindi a determinare senza alcuna integrazione i valori che potrà avere questa funzione $\varphi(a)$. E ora quando si verifichi (*) che effettivamente con questi valori di $\varphi(a)$ possono sussistere le due equazioni (8) nelle quali sia fatto $z=G(y)$ senza che il valore di a al quale queste daranno luogo presenti singolarità, è certo che le (8) stesse nelle quali per $\varphi(a)$ si ponga uno dei valori così determinati daranno luogo a un integrale che per $x=\alpha$ ci darà $z=G(y)$.

Questo processo, non richiedendo alcuna integrazione ma soltanto delle eliminazioni, sarà certo ordinariamente più comodo del primo; ma non è

(*) Anche in questo secondo processo le verificazioni sono necessarie per la ragione stessa per la quale le abbiamo richieste pel primo; nè si può d'altra parte senz'altro affermare che risultando soddisfatte con una data funzione $\varphi(a)$ le due equazioni (12) e (13) si avrà necessariamente la (11) e con questa anche $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)=0$, a meno che non si sia prima sicuri che col valore preso per $\varphi(a)$ le equazioni (12) e (13) dànno luogo a un valore per a che non presenta singolarità; e ciò tanto più che coll'essere ad un tempo $\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi}{\partial G}G'(y)=0$ e $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right)=0$, la (13) non potrà servire per la determinazione nè di a nè di y, e per questa determinazione converrà valersi della (12), e tener conto quindi anche delle derivate seconde quando si voglia applicare la teoria delle funzioni implicite.

Questo secondo processo da servire per la determinazione di $\varphi(a)$ senza bisogno di alcuna integrazione, mi è stato suggerito dal Prof. E. E. Levi della Università di Genova che, come il Prof. Nicoletti della Università di Pisa, rivede con tanta cura le bozze di questo libro; per il che, poichè l'occasione mi si presenta, io esprimo qui ad entrambi la mia viva gratitudine.

escluso che in certi casi presentino maggiori facilità le eliminazioni e la integrazione che sono richieste dal primo processo; ed è per questo che abbiamo trovato opportuno di darli tutti e due.

Queste considerazioni, per le quali l'integrale che si deduce da un integrale completo coi processi indicati sopra dà luogo all'integrale generale, possono farsi anche nel caso del paragrafo precedente in cui le variabili sono più di due; ma allora la equazione che col primo processo deve servire a determinare la funzione $\varphi(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ per far sì che si abbia $z=G(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ per $x_n=\alpha_n$ non sarà una equazione differenziale ordinaria, ma sarà una equazione a derivate parziali che si troverà in modo simile. Col secondo processo invece la equazione che determina $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ sarà ancora una equazione in termini finiti che si otterrà con sole eliminazioni.

641. — Per mostrare subito l'utilità dei risultati precedenti, daremo gli esempi che seguono.

1.° Abbiasi da integrare la equazione

$$z=px+qy, \tag{14}$$

che ricordando la equazione del piano tangente alle superficie si vede subito che è quella delle superficie per le quali i piani tangenti passano tutti per un punto fisso che è stato preso come origine delle coordinate.

Osservando che fra queste superficie ci sono evidentemente tutti i piani che passano per l'origine, si può senz'altro affermare (come del resto si verifica subito) che la nostra equazione ammette l'integrale $z=ax+by$(*) che è un integrale completo perchè in esso le costanti a e b possono prendersi arbitrariamente; quindi potremo dire subito per le (7) che il sistema delle due equazioni

$$z=ax+\varphi(a)y, \quad x+\varphi'(a)y=0, \tag{15}$$

dove φ è il simbolo di una funzione arbitraria darà l'integrale cercato della (9), dovendo però escludere il caso di $\varphi(a)=\alpha a+\beta$ con α e β costanti qualsiasi, perchè in questo caso nella seconda equazione non verrebbe a figurare a.

E siccome anche senza eseguire propriamente la eliminazione di a fra queste due equazioni, dalla seconda di esse — quando sia escluso, come abbiamo detto il caso di $\varphi(a)=\alpha a+\beta$ con α e β costanti —, si vede subito che a e $\varphi(a)$ sono funzioni di $\frac{x}{y}$ o di $\frac{y}{x}$, mentre la prima ci dà $z=x\left\{a+\varphi(a)\frac{y}{x}\right\}$,

(*) S'intendono esclusi i piani yz e xz, o $x=0$ e $y=0$, che corrisponderebbero a valori infiniti di a e b respettivamente, e non lasciano x e y indipendenti.

si conclude che per qualunque forma di φ, esclusa quella testè indicata di $\varphi(a)=\alpha a+\beta$, si avrà sempre $z=x\pi\left(\frac{y}{x}\right)$, essendo π il simbolo di una funzione arbitraria; e sotto questa forma si vede che essa ci dà subito l'integrale generale senz'altro.

2.° Vogliansi ora le superficie nelle quali la normale fà un angolo costante con una retta fissa che per semplicità prenderemo per asse delle z.

Ricordando le formole che dànno i coseni degli angoli della normale a una superficie cogli assi coordinati, si trova subito che la equazione a derivate parziali delle superficie cercate sarà la seguente

$$p^2+q^2=\alpha^2, \tag{16}$$

essendo α una costante; talchè per avere le superficie stesse bisognerà integrare questa equazione.

Incominceremo perciò col cercare un suo integrale completo, e per questo osserveremo che fra le superficie stesse vi sono evidentemente infiniti sistemi di piani, e quindi la equazione (16) dovrà essere soddisfatta da alcune equazioni di primo grado che conterranno anche delle costanti arbitrarie.

Si dedurrà subito da ciò che la equazione

$$z=ax+\sqrt{\alpha^2-a^2}\,y+b,$$

dove a e b sono costanti arbitrarie è un integrale completo della (11), e quindi, secondo la teoria generale esposta sopra, si può dire che il sistema di equazioni

$$z=ax+\sqrt{\alpha^2-a^2}\,y+\varphi(a),\quad 0=x-\frac{a}{\sqrt{\alpha^2-a^2}}\,y+\varphi'(a) \tag{17}$$

dove φ è una funzione arbitraria darà l'integrale cercato della (11) che, per quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, potrà considerarsi come l'integrale generale della stessa equazione.

Le superficie cercate dunque, all'infuori di quelle che corrispondessero a soluzioni singolari (non comprese cioè nell'integrale generale), per le quali converrebbe fare una ricerca a parte, sono le superficie sviluppabili che per ogni forma speciale $\varphi_0(a)$ della funzione $\varphi(a)$ sono l'inviluppo del piano variabile $z=ax+\sqrt{\alpha^2-a^2}\,y+\varphi_0(a)$, talchè la questione che ci siamo proposti può dirsi completamente risoluta.

3.° Vogliansi anche le superficie le cui linee di curvatura di un sistema sono tutte in piani paralleli fra loro.

Prenderemo, per semplicizzare, il piano xz parallelo ai piani di queste linee di curvatura, e allora lungo ciascuna di queste linee dovrà essere $dy=0$, talchè ricordando che nel calcolo differenziale al cap. XXXIV (§ 487, pag. 644-46) si trovò che la equazione differenziale delle linee di curvatura di ogni superficie $z=z(x,y)$ è la seguente

$$\{(1+q^2)s-pqt\}\,dy^2+\{(1+q^2)r-(1+p^2)t\}\,dx\,dy+\{pqr-(1+p^2)s\}\,dx^2=0,$$

dove p,q,r,s,t sono le solite derivate parziali di primo e second'ordine di z, basta stabilire che questa equazione deve essere soddisfatta da $dy=0$ per concludere subito che la equazione a derivate parziali delle superficie cercate è la seguente

$$pqr-(1+p^2)s=0. \tag{18}$$

Questa equazione è del second'ordine, ma se si osserva che essa può porsi sotto la forma $\frac{pr}{1+p^2}=\frac{s}{q}$ ovvero $\frac{1}{2}\frac{\partial\log(1+p^2)}{\partial x}=\frac{\partial\log q}{\partial x}$, si riduce subito al prim'ordine con una integrazione rispetto ad x, e si avrà quindi

$$\sqrt{1+p^2}=q\,\Psi(y), \tag{19}$$

essendo Ψ il simbolo di una funzione arbitraria.

Ora per applicare il processo dei paragrafi precedenti, bisognerà incominciare dal trovare un integrale completo di questa equazione; e per questo osserveremo che, dovendo essere sempre $dz=pdx+qdy$, se si potrà soddisfare alla (19) con un valore costante o funzione della sola x per p e con un valore costante o funzione della sola y per q, il secondo membro di quest'ultima equazione $dz=pdx+qdy$ con questi valori di p e q sarà un differenziale esatto e ci darà subito z con una integrazione che porterà un altra costante e che sarà quindi un integrale particolare della (19).

Ora se il primo membro di questa equazione (19) non deve contenere y e il secondo non deve contenere x, non si potrà evidentemente renderla soddisfatta altro che prendendo $p=a$, $q=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\Psi(y)}$, pure restando a una costante arbitraria, e questo potrà sempre farsi; quindi, integrando la equazione $dz=pdx+qdy$, avremo subito un integrale particolare della (19) che sarà $z=ax+\sqrt{1+a^2}\int\frac{dy}{\Psi(y)}+b$, nel quale b sarà un'altra costante arbitraria; e questo, contenendo due costanti arbitrarie a e b, sarà appunto anche un integrale completo della stessa equazione (19).

Applicando quindi ora i risultati del § 639, e indicando con $\theta(y)$ l'integrale $\int \frac{dy}{\Psi(y)}$, si trova subito che l'integrale cercato della (19) è dato dal sistema delle due equazioni

$$(20) \qquad z = ax + \sqrt{1+a^2}\,\theta(y) + \varphi(a), \quad 0 = x + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\theta(y) + \varphi'(a),$$

e per quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente si può affermare che esso corrisponde all'integrale generale.

E così il sistema delle stesse equazioni (20) dove θ e φ sono funzioni arbitrarie e fra le quali dovrà essere eliminata a ci dà le superficie che cercavamo nelle quali le linee di curvatura di un sistema sono tutte piane e situate in piani paralleli al piano xz, salvo ad esserci anche alcune altre di queste superficie che corrispondano a soluzioni singolari della (19), non comprese cioè nell'integrale dato dal sistema di equazioni (20), e per le quali occorrerebbe fare studî più dettagliati.

Equazioni del prim'ordine lineari rispetto alle derivate.

642. — Continuando gli studî intorno alle equazioni generali a derivate parziali del prim'ordine a due o più variabili, noi potremmo fare vedere come il problema della loro integrazione, almeno teoricamente, può considerarsi risoluto in generale, inquantochè con differenti metodi che dimostrano al tempo stesso l'esistenza e l'unicità degli integrali generali, l'integrazione di quelle equazioni si riduce alla integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Non faremo però questi studî generali che ci porterebbero troppo in lungo, e ci limiteremo ad esporre il metodo speciale d'integrazione che si ha per le equazioni del prim'ordine che sono lineari rispetto alle derivate della funzione.

643. — Ricordiamo perciò che se $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono n funzioni *determinate* delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ e di z, e z è una funzione di queste variabili che per ogni forma speciale di una funzione arbitraria φ risulti determinata dalla equazione $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$, nel calcolo differenziale ai §§ 197 e seg. (pag. 272 e seg.) dimostrammo che se fra le n equazioni che si ottengono da questa colla derivazione immediata rispetto alle singole variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ si eliminano le derivate parziali $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$ di φ, si giunge a una equazione in z a derivate parziali, pure del prim'ordine e lineare rispetto alle derivate di z, nella quale della funzione φ non ci è più traccia; cioè si giunge ad una equazione della forma

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

dove $X_1, X_2, \dots X_n$ e Z sono funzioni determinate di $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, che dipendono soltanto dalle $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Da ciò segue naturale la domanda se inversamente ogni equazione a derivate parziali del prim'ordine e lineare rispetto alle derivate

$$(1) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

dove $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$ sono funzioni date delle $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, possa sempre essere soddisfatta da una relazione fra $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ della forma

$$(2) \qquad \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

dove φ è il simbolo di una funzione arbitraria, e $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono funzioni determinate che dipendono dalla natura delle $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$, o in altri termini se la equazione (1) ammette sempre un integrale della forma (2); e a questa domanda si risponde affermativamente procedendo come segue.

644. — Si osservi perciò che quando si abbia la (2), colla derivazione se ne deducono subito le formole seguenti

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0; \end{array} \right.$$

e quindi moltiplicandole respettivamente per $X_1, X_2, \dots, X_n$, se la (1) dovrà essere soddisfatta dal valore di z che si suppone definito dalla (2) dovremo anche avere l'altra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(X_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(X_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+$$
$$+\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\left(X_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)=0,$$

dalla quale risulta subito che onde essa possa sussistere qualunque sia la funzione φ che figura nella (2), le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dovranno essere tali che per esse si abbiano le equazioni seguenti

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}&X_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_1}{\partial z}=0,\\&X_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_2}{\partial z}=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&X_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+Z\frac{\partial u_n}{\partial z}=0.\end{aligned}\right.$$

Ora dalla teoria delle equazioni differenziali simultanee si ha (§§ 609 a 612) [Pag. 851-53] che quando per $u_1, u_2, \ldots, u_n$ si prendono n funzioni *indipendenti* che eguagliate ciascuna ad una costante diano un sistema integrale del sistema di equazioni del prim'ordine

$$(5)\qquad\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z},$$

considerate come equazioni differenziali simultanee ordinarie, e nelle quali una qualunque delle $n+1$ variabili sia presa come variabile indipendente, queste funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soddisfaranno alle condizioni (4) e viceversa; talchè si può ora affermare che se, qualunque sia la funzione φ, la funzione z che si suppone definita dalla (2) soddisfa alla equazione a derivate parziali (1), le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dovranno soddisfare alle equazioni (4) o, il che è lo stesso, dovranno essere n integrali indipendenti delle equazioni differenziali simultanee (5).

Viceversa, se nella equazione (2) le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ saranno determinate nel modo ora indicato, e se con queste funzioni essa definirà una

funzione z di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, allora questa funzione z, a meno che pel valore che per essa si avrà dalla (2) non venga ad aversi $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$, soddisfarà alla equazione (1); perchè, avendosi per essa necessariamente le (3), moltiplicando queste respettivamente per $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e sommandole, con avere riguardo alle (5) che ora si suppongono soddisfatte e coll'osservare che sarà

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

se ne dedurrà subito la formola seguente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left\{X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}-Z\right\}=0,$$

la quale quando non sia $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$ (*), ci mostra appunto come volevamo che questa funzione z soddisfarà alla equazione (1).

645. — Si aggiunga ora che, fatta eccezione (quando vi siano) delle relazioni fra $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ che annullino contemporaneamente $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ (le quali relazioni propriamente non sono da considerarsi come integrali della (1)), ogni soluzione di questa equazione sarà compresa nella formola (2) se in questa le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono n integrali indipendenti del sistema di equazioni (5) e delle equazioni (4).

Supposto infatti che $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$ sia un integrale qualsiasi della equazione (1), siccome per la funzione z che essa definirà si avranno le equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,\quad\frac{\partial F}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,\quad\ldots,\quad\frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

e z soddisfarà anche alla equazione (1), se ne deduce subito che $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ soddisfarà alla equazione

$$X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}+Z\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

(*) Se $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ fosse zero identicamente la (2) non conterrebbe z e quindi non potrebbe definire questa funzione; ma $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ può venire zero anche in conseguenza del valore di z che fosse definito dalla stessa equazione (2) e qui, oltre al primo di questi casi che è naturalmente da escludersi, noi escludiamo anche il secondo, pure potendo darsi che la funzione z definita allora dalla (2) sia ancora un integrale della equazione (1).

e quindi la formola $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) =$ cost. darà un altro integrale delle equazioni simultanee (5) e, per quanto dicemmo al § 610 (Pag. 852), a meno che $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ non divengano tutte nulle insieme, ciò che noi escludiamo, la funzione F stessa si esprimerà per $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

646. — Da tutto questo segue dunque che, fatta astrazione dalle relazioni fra $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ che annullassero contemporaneamente tutte le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ e dalle funzioni speciali φ per le quali la $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ risultasse indipendente da z, o definisse una funzione z per la quale insieme a $\varphi=0$ si avesse anche $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$, la formola (2) darà sempre l'integrale più generale della equazione (1), e si può quindi ora affermare che: « avendosi una equazione a derivate parziali del prim'ordine lineare rispetto « alle derivate

(6)
$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

« se si troveranno n integrali indipendenti $u_1=$cost., $u_2=$cost., ... , $u_n=$cost. « del sistema di equazioni differenziali del prim'ordine

(7)
$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$$

« considerate come equazioni differenziali ordinarie simultanee nelle quali « può essere presa per variabile indipendente una qualunque delle $n+1$ « variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, o anche, il che è lo stesso, se si troveranno n « integrali particolari indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_n$ della equazione a derivate « parziali

(8)
$$X_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial U}{\partial x_n} + Z \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

« a $n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, ogni integrale della equa- « zione data (6) sarà compreso nella formola

(9)
$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

« dove φ è una funzione arbitraria; e questa formola qualunque sia la fun- « zione φ darà sempre un integrale della stessa equazione (6), fatta solo « eccezione per quelle funzioni speciali φ che coi valori trovati per $u_1, u_2, \ldots, u_n$ « risultassero indipendenti da z o definissero una funzione z per la quale

« insieme a $\varphi=0$ si avesse $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$, essendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial z}.$$

S'intende che quando uno o più dei coefficienti $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ per es. $X_r, X_s \ldots$ fossero zero, per gli integrali delle equazioni corrispondenti (7) bisognerebbe prendere $x_r=$ cost., $x_s=$ cost. ecc., e delle funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ una sarebbe uguale ad x_r, una uguale ad x_s, ecc.

E in particolare quando il secondo membro Z della (1) sarà zero, uno degli integrali delle equazioni (7) sarà $z=$ cost. e allora z potrà riguardarsi come costante in tutte le stesse equazioni, e una delle funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sarà z.

647. — In particolare dunque, trattandosi di una equazione lineare a due variabili indipendenti x e y, che allora si rappresenta ordinariamente con

(10)
$$Pp + Qq = R,$$

essendo P, Q, R funzioni date di x, y, z, bisognerà trovare due integrali indipendenti $u=$ cost., e $v=$ cost. delle equazioni simultanee

(11)
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

o due integrali particolari indipendenti u e v della equazione a derivate parziali a tre variabili indipendenti x, y, z

(12)
$$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + R\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

e poi stabilire fra u e v la relazione

(13)
$$\varphi(u, v) = 0, \text{ o } u = \Psi(v),$$

essendo φ e Ψ i simboli di due funzioni arbitrarie, colla esclusione al solito di quelle funzioni φ o Ψ per le quali queste equazioni venissero indipendenti da z o definissero funzioni z tali che insieme ad esse si avesse anche $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, o $\frac{\partial u}{\partial z} = \Psi'(v)\frac{\partial v}{\partial z}$.

648. — Si deve infine aggiungere che nell'integrale (9) la funzione arbitraria φ può in generale venire sempre determinata, almeno teoricamente,

in modo che il valore di z dedotto dalla equazione stessa si riduca ad una funzione arbitraria $G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ di $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ quando si fa $x_n = \alpha_n$, e perciò la formola stessa dà l'integrale generale quale è stato definito al § 636.

Si osservi infatti che se per $x_n = \alpha_n$ si deve avere $z = G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ che sono funzioni determinate di $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, z$ si ridurranno funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, cioè si avranno le n equazioni

$$u_1 = \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),\ u_2 = \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \ldots, u_n = \Psi_n(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}),$$

e eliminando fra queste le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ si giungerà, almeno ordinariamente, a una equazione speciale della forma $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ la quale, quando sia presa in luogo della (9) lasciandovi allora per $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i loro valori trovati per mezzo delle (7) in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, godrà della proprietà di essere soddisfatta da $z = G(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ quando $x_n = \alpha_n$, ciò che dimostra appunto quanto abbiamo enunciato; dovendo però anche ora avere riguardo al caso speciale in cui la $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ risultasse indipendente da z o insieme a $\Psi = 0$ venisse ad aversi $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$, o si presentassero delle incompatibilità nelle eliminazioni.

649. — Diamo ora alcuni esempî della teoria che precede.

1.° Vogliasi ancora l'integrale della equazione lineare $px + qy = z$, che noi abbiamo già considerata al § 641.

Il sistema di equazioni differenziali simultanee (11) corrispondente sarà il seguente

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

del quale due integrali saranno evidentemente i due $\frac{y}{x} = \text{cost.}$ e $\frac{z}{x} = \text{cost.}$ che sono respettivamente integrali delle due equazioni $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ e $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$; quindi secondo la teoria generale del § 647 l'integrale generale della nostra equazione sarà dato dalla formola $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ o $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, come trovammo anche al ricordato § 641.

2.° Vogliasi l'integrale generale della equazione $p + 2xq = z^2$.

Il sistema di equazioni simultanee corrispondenti sarà il seguente

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} = \frac{dz}{z^2},$$

del quale due integrali sono $y - x^2 = \text{cost.}$ e $\frac{1}{z} + x = \text{cost.}$; quindi l'integrale generale sarà dato dalla formola

$$\frac{1}{z} + x = \varphi(y - x^2), \quad \text{o} \quad z = \frac{1}{\varphi(y - x^2) - x}.$$

3.° Vogliasi l'integrale generale della equazione $pz^2 + qy = 0$.

Il sistema di equazioni simultanee corrispondenti sarà il seguente

$$\frac{dx}{z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

del quale un integrale sarà $z = \text{cost.}$ e l'altro verrà dalla equazione $\frac{dx}{z^2} = \frac{dy}{y}$, nella quale z si dovrà considerare come una quantità costante, e sarà quindi $\frac{x}{z^2} - \log y = \text{cost}$; e l'integrale generale cercato della equazione data $pz^2 + qy = 0$ verrà dato dalla formola $\frac{x}{z^2} - \log y = \varphi(z)$, con φ funzione arbitraria.

4.° Vogliansi le superficie nelle quali la normale incontra sempre una retta fissa che per semplicità prenderemo come asse delle z.

Ricordando che le equazioni della normale a una superficie sono le seguenti

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

ed osservando che per le superficie cercate queste equazioni devono essere soddisfatte da $X = 0$, $Y = 0$, si trova che la equazione a derivate parziali delle superficie stesse è la $py - qx = 0$; e quindi basterà integrare questa equazione per ottenere le superficie che si cercano.

Ora le equazioni simultanee corrispondenti a questa equazione sono le seguenti $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$; quindi poichè un loro integrale è $z = \text{cost.}$ e l'altro dovendo soddisfare alla equazione $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$ ovvero $x\,dx + y\,dy = 0$ è $x^2 + y^2 = \text{cost.}$, si conclude subito che le superficie cercate sono quelle per le quali $z = \varphi(x^2 + y^2)$, cioè sono le superficie di rivoluzione attorno all'asse z.

Processi speciali per la integrazione di alcune equazioni a derivate parziali del second'ordine. Equazioni di Eulero-Laplace. Altre equazioni.

650. — Fra gli artifizî che talvolta si usano per giungere più facilmente ad integrare certe equazioni a derivate parziali, quello che più spesso viene adottato consiste nel fare un opportuno cangiamento sia di tutte o di alcune delle variabili indipendenti, sia anche della funzione per modo che la equazione data venga a ridursi ad un'altra che si sappia già o si possa più facilmente integrare. E a tale scopo talvolta si lasciano indeterminate le formole di trasformazione, per determinarle poi in modo che la equazione trasformata venga ad assumere una forma che più si presti all'integrazione.

Nel caso p. es. di una funzione z di due variabili indipendenti x e y, se si ha una equazione a derivate parziali di un ordine qualsiasi p. es. del secondo

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t)=0, \tag{1}$$

volendo cangiare soltanto le variabili indipendenti x e y e introdurne due nuove u e v, si osserverà che se

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v) \tag{2}$$

sono le due formole note o ignote che servono a fare questo cangiamento, le derivate parziali della funzione incognita z prese nella primitiva ipotesi di x e y variabili indipendenti, cioè le p, q, r, s, t, si esprimeranno per quelle prese nella ipotesi di u e v variabili indipendenti, colle formole che si dettero anche nel calcolo differenziale

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

dove $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ devono essere tratte dalle (2) supposte risolute rispetto ad u e a v, o devono trarsi dalle equazioni

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

ecc., talchè evidentemente la equazione data si ridurrà ad un'altra della forma

$$f\left(u, v, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0,$$

e se le funzioni trasformatrici $x(u, v), y(u, v)$ che figurano nella (2) saranno date a priori potrà avvenire che la nuova equazione nella quale compariscono le incognite $z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \dots$ sia più facilmente integrabile, e se invece le stesse funzioni $x(u, v)$ e $y(u, v)$ saranno rimaste indeterminate s'intende come abbiano talvolta a potersi determinare in modo che la nuova equazione riesca più facilmente a integrarsi.

651. — Così ad es. volendo integrare la equazione del second'ordine $r-a^2t=0$ che si presenta nel problema delle corde vibranti, prenderemo le formole di trasformazione (2) sotto la forma

$$x=\frac{u-v}{2a}, \quad y=\frac{u+v}{2}, \quad \text{o} \quad u=y+ax, \quad v=y-ax,$$

e allora si troverà subito

$$p=a\frac{\partial z}{\partial u}-a\frac{\partial z}{\partial v}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$r=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

e quindi la equazione data si trasformerà nell'altra $4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, ovvero $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$; e ora siccome questa può scriversi sotto la forma $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0$, con una prima integrazione si trova subito $\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi(u)$, essendo $\varphi(u)$ il simbolo di una funzione arbitraria; e da questa integrando di nuovo, e cambiando $\int \varphi(u)\,du$ in $\varphi(u)$ si ottiene l'altra $z=\varphi(u)+\Psi(v)$ dove anche $\Psi(v)$ è come $\varphi(u)$ una funzione arbitraria; ed ora riponendo per u e v i loro valori si trova subito pel valore di z espresso per x e per y, cioè per l'integrale della equazione $r-a^2t=0$ delle corde vibranti, $z=\varphi(y+ax)+\Psi(y-ax)$, con φ e Ψ funzioni arbitrarie.

652. — Come già abbiamo detto, talvolta per giungere ad integrare date equazioni a derivate parziali, oltre a cangiare le variabili indipendenti si cangia anche la funzione, e una delle trasformazioni più utili e più adottate è quella di *Legendre* che già abbiamo data nel calcolo differenziale ai §§ 218 e seg. (pag. 301 e seg.), e che consiste nel porre $u=px+qy-z$, e prendere poi per variabili indipendenti p e q invece di x e y, e per funzione u invece di z.

Questa trasformazione, come già dicemmo anche nel calcolo differenziale, non può usarsi quando z deve soddisfare alla equazione del second'ordine $rt-s^2=0$ o all'una o all'altra delle due che se ne deducono del prim'ordine $q=$cost. e $p=\varphi(q)$, perchè allora p e q non restano indipendenti; ma, a parte questa difficoltà, alla quale del resto poi si rimedia cercando separatamente le soluzioni che corrispondessero a questi casi, con questa trasformazione equazioni assai complicate si riducono talvolta ad altre più semplici, e in particolare alcune che contengono il binomio $rt-s^2$ relativo alla funzione incognita z si riducono ad altre relative ad u che non contengono il binomio corrispondente $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$.

Così p. es., come già notammo nel calcolo differenziale al § 220, se si avrà la equazione del second'ordine

$$Rr+Ss+Tt+M(rt-s^2)=0,$$

dove R, S, T e M sono funzioni di x, y, z, p, q, siccome colla trasformazione di Legendre si ha come trovammo nel calcolo differenziale

$$x=\frac{\partial u}{\partial p},\quad y=\frac{\partial u}{\partial q},\quad z=px+qy-u=p\frac{\partial u}{\partial p}+q\frac{\partial u}{\partial q}-u,$$

$$r=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2},\quad s=-\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2},\quad t=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2},$$

è $rt-s^2=\frac{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}$, la equazione stessa si ridurrà all'altra

$$R_1\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-S_1\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}+T_1\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+M_1=0,$$

nella quale R_1, S_1, T_1 e M_1 rappresentano ciò che divengono R, S, T e M quando in esse in luogo di x, y, z vi si pongono $\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial q}, p\frac{\partial u}{\partial p}+q\frac{\partial u}{\partial q}-u$, essendo ora p e q le variabili indipendenti e u la funzione incognita: e questa equazione trasformata ha appunto sulla equazione data il vantaggio che non contiene il binomio $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$ corrispondente all'antico binomio $rt-s^2$.

Oltre a questo poi si può aggiungere che se i coefficienti primitivi R, S, T e M non contenevano x, y, z, questi coefficienti rimarranno inalterati nella trasformazione, e la equazione trasformata oltre a non contenere l'indicato binomio non conterrà neppure le derivate parziali del prim'ordine della nuova funzione incognita u, e conterrà soltanto le nuove variabili indipendenti p e q e le derivate del second'ordine della funzione u, talchè la equazione stessa oltre a mancare dell'indicato binomio, sarà anche lineare rispetto alle derivate seconde di u.

Anche soltanto da questo si comprende dunque come la trasformazione di Legendre potrà in alcuni casi essere effettivamente utile per la integrazione delle equazioni a derivate parziali in due variabili indipendenti; e quando valendosi di questa trasformazione si sia potuto trovare l'integrale $u=\theta(p, q)$ della equazione trasformata, l'integrale corrispondente della equazione primitiva si avrà sia eliminando p e q fra le tre equazioni

$$x=\frac{\partial\theta}{\partial p},\quad y=\frac{\partial\theta}{\partial q},\quad z=px+qy-\theta(p, q),$$

sia considerandolo come dato da queste tre equazioni nelle quali p e q figureranno soltanto come variabili indipendenti. Dopo bisognerà cercare a parte le soluzioni speciali che potessero soddisfare ad un tempo alla equazione data e alla equazione $rt-s^2=0$ o alle altre $q=$cost. o $p=\varphi(q)$, perchè, come abbiamo detto, queste soluzioni non possono ottenersi quando si applica la trasformazione di Legendre.

Gli studii importantissimi del *Lie* sulle equazioni a derivate parziali hanno condotto ad altre trasformazioni molto notevoli, fra le quali quelle dette *trasformazioni di contatto* che sono una larga estensione della trasformazione di Legendre; ma anche per queste noi dobbiamo rimandare ai trattati e memorie speciali che ne trattano diffusamente.

653. — Fermandoci ancora sulla trasformazione di Legendre, per mostrarne la utilità con un esempio l'applicheremo ora per la integrazione della equazione

$$s+pq(rt-s^2)=0. \tag{3}$$

Valendosi delle formole precedenti, questa equazione colla trasformazione di Legendre si riduce subito all'altra più semplice $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q}=pq$, la quale, potendo scriversi sotto la forma $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial u}{\partial q}\right)=p$, perchè ora p e q sono le variabili indipendenti, con una prima integrazione relativa a p conduce subito all'altra $\frac{1}{q}\frac{\partial u}{\partial q}=\frac{p^2}{2}+\varphi(q)$, essendo $\varphi(q)$ una funzione arbitraria; e questa, con una nuova integrazione relativa ora a q e col cambiare $\int q\varphi(q)dq$ in $\theta(q)$, ci dà subito $u=\frac{p^2q^2}{4}+\pi(p)+\theta(q)$, essendo $\pi(p)$ una funzione arbitraria di p come $\theta(q)$ lo è di q.

Di qui si deduce dunque senz'altro che, quando si faccia per ora astrazione dagli integrali che diano $rt-s^2=0$ dei quali ci occuperemo poi a parte, l'integrale della equazione data (3) può considerarsi come dato dal sistema delle tre equazioni

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{pq^2}{2}+\pi'(p),\\ y&=\frac{p^2q}{2}+\theta'(q),\\ z&=px+qy-\frac{p^2q^2}{4}-\pi(p)-\theta(q)=\frac{3}{4}p^2q^2+p\pi'(p)+q\theta'(q)-\pi(p)-\theta(q),\end{aligned}\right. \tag{4}$$

dove p e q devono riguardarsi come variabili indipendenti che dovranno eliminarsi quando si voglia l'integrale sotto la solita forma $\varphi(x,y,z)=0$.

Gli integrali poi della equazione (3) pei quali si abbia $rt-s^2=0$ si trovano con tutta facilità perchè, osservando che questi a causa della stessa equazione (3) devono dare $s=0$, si vede che dovranno essere compresi nella

formola $z=\varphi(x)+\Psi(y)$ essendo $\varphi(x)$ e $\Psi(y)$ due funzioni da determinarsi, e siccome da questa si ha $r=\varphi''(x)$ e $t=\Psi''(y)$, e dovrà essere ora $rt=0$, si conclude che delle due funzioni $\varphi(x)$ e $\Psi(y)$ una dovrà essere lineare l'altra restando arbitraria, e quindi gli integrali ora cercati saranno quelli dati dalla formola $z=ax+\Psi(y)$, e quelli dati dall'altra formola $z=by+\varphi(x)$ dove $\varphi(x)$ e $\Psi(y)$ sono due funzioni arbitrarie, e a e b sono due costanti arbitrarie esse pure.

654. — Fra le equazioni a derivate parziali del second'ordine a due variabili indipendenti, meritano uno speciale esame quelle studiate da *Eulero* e da *Laplace* che non contengono r e t e sono lineari rispetto ad s, p, q e z, cioè quelle della forma

$$s+Pp+Qq+Nz=M, \tag{5}$$

dove P, Q, N e M sono funzioni di x e y soltanto; perchè in casi molto estesi la integrazione di queste equazioni si riduce a quella di due equazioni differenziali ordinarie lineari e del prim'ordine, le quali s'integrano completamente.

Avendosi infatti la equazione (5), questa evidentemente potrà porsi sotto la forma

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}+Pz\right)}{\partial x}+Q\left(\frac{\partial z}{\partial y}+Pz\right)+\left(N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}\right)z=M,$$

e questa ponendo

$$\frac{\partial z}{\partial y}+Pz=Z, \tag{6}$$

si trasformerà nell'altra

$$\frac{\partial Z}{\partial x}+QZ+\left(N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}\right)z=M; \tag{7}$$

talchè se le funzioni N, P e Q saranno tali che fra esse sussista la relazione

$$N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}=0, \tag{8}$$

la funzione Z dovrà soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial Z}{\partial x}+QZ=M, \tag{9}$$

che potrà integrarsi subito consderandola come una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine e lineare, e ci darà quindi subito

$$z = e^{-\int Q dx} \left\{ \int M e^{\int Q dx} dx + \varphi(y) \right\}, \tag{10}$$

essendo $\varphi(y)$ una funzione arbitraria.

Conosciuto poi così Z, colla integrazione della equazione (6) che lega z a Z e che può essa pure considerarsi come una equazione differenziale ordinaria lineare e del prim'ordine, avremo

$$Z = e^{-\int P dy} \left\{ \int Z e^{\int P dy} dy + \Psi(x) \right\}, \tag{11}$$

essendo $\Psi(x)$ un'altra funzione arbitraria, e così l'integrazione della equazione (5) in questo caso di $N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ sarà completamente effettuata.

Similmente se si osserva che la equazione (5) può anche porsi sotto la forma

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x} + Qz\right)}{\partial y} + P\left(\frac{\partial z}{\partial x} + Qy\right) + \left(N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) z = M, \tag{12}$$

si vede subito come precedentemente che quando si ponga

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Qz = Z_1, \tag{13}$$

essendo Z_1 una funzione incognita, se sarà soddisfatta la condizione

$$N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

analoga alla (8), l'integrazione della nostra equazione (5) si ridurrà prima a quella della equazione $\frac{\partial Z_1}{\partial y} + PZ_1 = M$ e poi a quella della (13); e così avremo prima

$$Z_1 = e^{-\int P dy} \left\{ \int M e^{\int P dy} dy + \Psi(x) \right\}, \tag{15}$$

e poi per l'integrale z della equazione (5) avremo

$$z = e^{-\int Q dx} \left\{ \int Z_1 e^{\int Q dx} dx + \varphi(y) \right\}, \tag{16}$$

essendo $\Psi(x)$ e $\varphi(y)$ due funzioni arbitrarie.

Questo processo per la integrazione della equazione del second'ordine (5) è dovuto ad Eulero, e serve nel caso in cui è soddisfatta una almeno delle due condizioni (8) e (14).

655. — Pel caso poi che nessuna di queste due condizioni sia soddisfatta, il processo precedente non può più servire; però *Laplace*, completando il processo medesimo, ha mostrato che anche allora, con altri artifizî, si può ancora in alcuni casi ridurre la integrazione della equazione (5) a quella di due equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine e lineari, come nel processo di Eulero.

S'indichi perciò con α la quantità $N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x}$ che ora si suppone diversa da zero, e si osservi che siccome la (5) conduce in ogni caso alla equazione (7), quando si faccia la posizione (6) avremo le due equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} + QZ + \alpha z = M, \\ \frac{\partial z}{\partial y} + Pz = Z, \end{cases} \tag{17}$$

con

$$\alpha = N - PQ - \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{18}$$

Ora, se da queste equazioni (17) si elimina z ricavando dalla prima

$$z = \frac{M}{\alpha} - \frac{Q}{\alpha} Z - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial Z}{\partial x}, \tag{19}$$

e quindi anche

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{M}{\alpha}\right)}{\partial y} - \frac{\partial \frac{Q}{\alpha}}{\partial y} Z - \frac{Q}{\alpha}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha}}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y},$$

sostituendo nella seconda, si ottiene subito l'altra equazione

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \left(P + \alpha \frac{\partial \frac{1}{\alpha}}{\partial y}\right)\frac{\partial Z}{\partial x} + Q\frac{\partial Z}{\partial y} + \left(PQ + \frac{\partial \frac{Q}{\alpha}}{\partial y}\alpha + \alpha\right) Z = MP + \alpha \frac{\partial \frac{M}{\alpha}}{\partial y},$$

che quando si indichino con P_1, Q_1, N_1 e M_1 i suoi coefficienti, cioè si ponga

$$P_1 = P - \frac{\partial \log \alpha}{\partial y},\ Q_1 = Q,\ N_1 = PQ + \frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial \log \alpha}{\partial y} + \alpha,\ M_1 = MP + \frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial \log \alpha}{\partial y}, \tag{20}$$

diviene

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + P_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial Z}{\partial y} + N_1 Z = M_1, \tag{21}$$

cioè è anch'essa della forma (5); quindi quando per questa nuova equazione risulti soddisfatta la condizione $N_1 - P_1 Q_1 - \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0$ che corrisponde alla (8) e che a causa delle (20) può anche scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha - \frac{\partial^2 \log \alpha}{\partial x \partial y} = 0, \tag{22}$$

alla equazione stessa (21) verrà applicabile il metodo di Eulero del paragrafo precedente e avremo quindi Z colla applicazione successiva delle formole (10) e (11) al caso della equazione (21), dopo di che otterremo subito z dalla (19).

Quando poi questa condizione (22) non risulti soddisfatta, non essendolo mai neppure quella corrispondente alla (14) perchè si ha $N_1 - P_1 Q_1 - \frac{\partial Q_1}{\partial y} = \alpha$, il processo di Eulero non risulterà in nessun modo applicabile alla equazione (21); però allora potremo cercare se sia o no soddisfatta la condizione analoga alla (14) corrispondente alla equazione

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x \partial y} + (P)_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + (Q)_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} + (N)_1 Z_1 = (M)_1 \tag{23}$$

che si troverebbe in modo analogo alla (21) quando invece di ridurre la (5) alla forma (7) si riducesse alla forma (12) e si ponesse $N - PQ - \frac{\partial Q}{\partial y} = \beta$, ecc.; e se neppure la nuova condizione verrà soddisfatta, allora potrà ripetersi di nuovo il processo di Laplace ora indicato applicandolo alle nuove equazioni (21) o (23); e ben s'intende che in alcuni casi potrà avvenire che si giunga infine ad una equazione trasformata alla quale sia applicabile il metodo di Eulero.

Così in questi casi, cioè quando nelle operazioni successive si finisce per trovare soddisfatta la condizione corrispondente alla (8) o quella corrispondente alla (14), la integrazione della equazione data (5) si ridurrà sempre a quella di due equazioni lineari semplici del prim'ordine che contengono una sola derivata parziale.

In ogni modo quando non si arrivi ad una equazione del second'ordine (21) o (23) per la quale risulti soddisfatta una almeno delle due solite condizioni corrispondenti alla (8) o alla (14), la integrazione verrà ridotta a quella di un'altra equazione del second'ordine (21) o (23) pure della stessa forma della (5), e questa nuova equazione potrà talvolta presentare particolarità speciali che la rendano più facilmente integrabile; e dopo, integrata questa, si avrà subito l'integrale della equazione data senz'altre integrazioni.

656. — È appunto colla applicazione ripetuta di questi processi che il Darboux e altri, partendo da equazioni a derivate parziali della forma (5) pel caso di due variabili indipendenti, e di forme simili pel caso di un numero qualsiasi di variabili, sono giunti a risultati interessantissimi, mettendo così in particolare evidenza la importanza di quelle equazioni e delle traformazioni di Eulero-Laplace (*).

657. — Per dare qualche applicazione dei processi precedenti, prenderemo a integrare la equazione

$$s = -\frac{p+q}{x+y}, \tag{24}$$

e l'altra

$$s = \frac{p+q}{x+y}. \tag{25}$$

Confrontata la prima di queste equazioni cioè la (24) colla (5), si vede che avremo $P = \frac{1}{x+y}$, $Q = \frac{1}{x+y}$, $N = 0$, $M = 0$, e quindi la condizione (8) verrà subito soddisfatta, come è pure soddisfatta la (14), e così per la (10) avremo $Z = \frac{\varphi(y)}{x+y}$, e per la (11) avremo subito per l'integrale cercato della stessa (24)

$$z = \frac{\Psi(x) + \varphi(y)}{x+y}, \tag{26}$$

avendo cambiato per semplicità $\int \varphi(y)\,dy$ in $\varphi(y)$, e intendendo che $\Psi(x)$ e $\varphi(y)$ siano due funzioni arbitrarie.

(*) V. ad es. Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Deuxième partie*. Chap. II, III, VI, VII e VIII.

Può vedersi anche la mia memoria. *Sopra una classe di equazioni a derivate parziali di second'ordine con un numero qualunque di variabili* nelle Memor. della R. Accad. dei Lincei serie 5.ª vol. IV-1901.

Confrontando invece la (25) colla (5), si vede che per questa equazione avremo $P=-\frac{1}{x+y}$, $Q=-\frac{1}{x+y}$, $N=0$, $M=0$, e quindi per essa non saranno soddisfatte nè la condizione (8) nè la condizione (14); però la quantità indicata con α nel processo di Laplace del paragrafo precedente sarà $-\frac{2}{(x+y)^2}$, e risulterà quindi soddisfatta la condizione (22).

Ne segue che alla equazione (25) è applicabile soltanto il processo di Eulero-Laplace del paragrafo precedente, e quindi per averne l'integrale basterà prima integrare col metodo di Eulero del § 654 la equazione

$$(26)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{x+y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)-\frac{2}{(x+y)^2}Z=0$$

cui ora si riduce la (21), e poi valersi della formola

$$(27)\qquad z=-\frac{(x+y)}{2}Z+\frac{(x+y)^2}{2}\frac{\partial Z}{\partial x}$$

cui si riduce ora la (19), per avere z.

Col metodo di Eulero del § 654 la integrazione della equazione (26) si riduce a quella delle due

$$\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x}-\frac{1}{x+y}\overline{Z}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{1}{x+y}Z=\overline{Z},$$

che corrispondono respettivamente alle (9) e (6) avendo cambiato z in Z e Z in $\overline{Z}$; e si avrà quindi dalla prima $\overline{Z}=(x+y)\varphi(y)$ e poi dalla seconda $Z=\frac{1}{x+y}\left\{\int(x+y)^2\varphi(y)dy+\Psi(x)\right\}$ essendo $\Psi(x)$ e $\varphi(y)$ due funzioni arbitrarie, e così sostituendo nella (27) si avrà subito per l'integrale cercato della (25)

$$z=-\left\{\int(x+y)^2\varphi(y)dy+\Psi(x)\right\}+(x+y)\left\{\int(x+y)\varphi(y)dy+\frac{1}{2}\Psi'(x)\right\},$$

e cambiando per semplicizzare $\varphi(y)$ in $-\frac{1}{2}\varphi'''(y)$ e $\Psi(x)$ in $-\Psi(x)$, e eseguendo alcune integrazioni per parti, si troverà sotto forma più semplice per l'integrale della (25)

$$(28)\qquad z=\Psi(x)+\varphi(y)-\frac{x+y}{2}\left\{\Psi'(x)+\varphi'(y)\right\},$$

essendo $\Psi(x)$ e $\varphi(y)$ due funzioni arbitrarie.

658. Aggiungerò che il metodo di Eulero-Laplace può essere utile anche per la integrazione di equazioni che non abbiano la forma (5) ma abbiano invece l'altra

$$(29)\qquad Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Nz=M,$$

dove R, S, T, P, Q, N e M sono funzioni di x e y soltanto, perchè può darsi che si conosca un cangiamento di variabili adattato col quale la equazione stessa si riduca alla forma (5), dopo di che si potrà vedere se l'integrazione può farsi applicando il metodo indicato.

Così p. es. se si avrà la equazione

$$(30)\qquad r-a^2t+Pp+Qq+Nz=M,$$

dove a è una costante, ponendo come al § 651 $x=\frac{u-v}{2a}$, $y=\frac{u+v}{2}$, o $u=y+ax$, $v=y-ax$, questa equazione si trasformerà nell'altra

$$(31)\qquad s-\frac{1}{4a^2}(aP_1+Q_1)\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{4a^2}(aP_1-Q_1)\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{N_1}{4a^2}z=-\frac{M_1}{4a^2},$$

dove M_1, N_1, P_1, Q_1 sono i valori trasformati di M, N, P, Q; e dipendentemente da questi valori il metodo di Eulero-Laplace potrà condurci a trovare l'integrale z di questa equazione (31) e quindi anche quello della equazione data (30).

È con questo processo che si trova che la equazione

$$r-t+px+qy+\left(1-\frac{y^2-x^2}{4}\right)z=0$$

ha per integrale $z=e^{\frac{y^2-x^2}{4}}\left\{\varphi(x+y)+\Psi(x-y)\right\}$, essendo φ e Ψ i simboli di due funzioni arbitrarie.

659. — Oltre al metodo di Eulero-Laplace che, come abbiamo veduto, serve in molti casi per la integrazione di equazioni della forma (5) o che si riducono a questa forma con un cangiamento di variabili adattato, si ha anche un processo più generale dovuto a Legendre che nel caso delle equazioni già ridotte alla forma (5) è ancora quello di Eulero-Laplace, e nel caso delle equazioni più generali (29) ha il vantaggio che non richiede la loro preventiva riduzione alla forma (5); ma in sostanza non è che una semplice estensione di quella di Eulero-Laplace al caso delle stesse equazioni (29).

Mediante questo processo la integrazione della equazione data (29) viene riportata o almeno si cerca di riportarla a quella di due equazioni a derivate parziali del prim'ordine

$$(32)\qquad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial z}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial z}{\partial y}+\gamma z=Z,\\[2mm] \alpha_1\dfrac{\partial Z}{\partial x}+\beta_1\dfrac{\partial Z}{\partial y}+\gamma_1 Z=\mu z+\nu,\end{cases}$$

che sono ancora lineari come nel processo di Eulero-Laplace, ma sono complete nel senso che, invece di contenere ciascuna una sola delle derivate parziali del prim'ordine di z o di Z, le contengono, o possono contenerle tutte e due.

La determinazione dei coefficienti $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\mu$ e ν delle equazioni lineari (32) alle quali si vuole ridurre la integrazione della equazione data (29), deve naturalmente essere fatta in modo che questa equazione (29) risulti dalle (32) colla eliminazione della funzione ausiliaria Z; e perchè questo accada bisognerà che ricavando dalla prima di queste equazioni (32) i valori di $\frac{\partial Z}{\partial x}$ e $\frac{\partial Z}{\partial y}$ e sostituendoli insieme a Z nella seconda si ritrovi la equazione (29) o questa equazione moltiplicata per una funzione λ di x e y.

Questo evidentemente porta che quei coefficienti debbano determinarsi mediante le equazioni

$$(33)\quad \begin{cases} \alpha\alpha_1=\lambda R,\ \beta\beta_1=\lambda T,\ \alpha_1\beta+\alpha\beta_1=\lambda S,\ \alpha\gamma_1+\alpha_1\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}+\beta_1\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\alpha_1\gamma=\lambda P,\\[2mm] \beta\gamma_1+\alpha_1\dfrac{\partial\beta}{\partial x}+\beta_1\dfrac{\partial\beta}{\partial y}+\beta_1\gamma=\lambda Q,\ \gamma\gamma_1+\alpha_1\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}+\beta_1\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}-\mu=\lambda N,\ \nu=\lambda M,\end{cases}$$

nelle quali potrà anche prendersi $\lambda=1$; e poichè evidentemente quando, supponendo che la equazione data contenga r o t p. es. r (cioè R sia diversa da zero) (*), si prendano p. es. $\lambda=1$, e $\alpha=1$ o $\alpha_1=1$, potremo determinare subito successivamente le altre quantità $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1,\gamma,\gamma_1,\mu$ e ν con semplici risoluzioni di una equazione di secondo grado (per la determinazione di β e β_1) e di altre tutte del primo grado, così — salvo qualche rara in-

(*) Si esclude con questo che la equazione (29) possa essere della forma (5); ma questo può farsi senz'altro perchè quando essa fosse della forma (5) e si avesse quindi $R=T=0$ con S diverso da zero, per le prime delle (33) α e β_1 o α_1 e β dovrebbero essere zero e α_1 e β o α e β_1 dovrebbero essere diverse da zero, e si ricadrebbe subito nel metodo di Eulero-Laplace.

compatibilità che potrà provenire dalla quarta e quinta delle stesse equazioni per la determinazione di γ e γ_1 — la equazione (29) potrà riguardarsi come risultante dalla eliminazione di z fra le due equazioni del prim'ordine (33), quando in esse i coefficienti siano presi come saranno stati così determinati.

Così essendo, s'intende subito che quando il valore di μ risulterà uguale allo zero, per effettuare la integrazione della equazione (29) basterà eseguire prima la integrazione della seconda delle equazioni (32) che sarà appunto lineare e del prim'ordine e non conterrà che la funzione ausiliaria Z, e dopo di avere trovato colla integrazione questa funzione Z basterà eseguire la integrazione della prima delle stesse equazioni (32), che sarà pure lineare e del prim'ordine e darà appunto colla integrazione l'integrale cercato z della equazione data (29); talchè nel caso in cui risulti $\mu=0$ il problema della integrazione della equazione stessa (29) potrà riguardarsi come risoluto colla integrazione delle due equazioni lineari (32).

Se poi nella indicata riduzione delle equazioni (29) alle due equazioni (32) il valore di μ non risulterà uguale allo zero, allora seguendo un processo del tutto simile a quella di Laplace del § 655, dalla seconda delle (32) ricaveremo il valore di z espresso per Z, cioè

$$(34)\qquad z=\frac{\alpha_1}{\mu}\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\beta_1}{\mu}\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\gamma_1}{\mu}Z-\frac{\nu}{\mu},$$

e con questa derivando calcoleremo i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ che poi sostituiremo insieme a z nella prima delle equazioni (32), giungendo così ad un'altra equazione in Z

$$(35)\qquad R_1\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+S_1\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}+T_1\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+P_1\frac{\partial Z}{\partial x}+Q_1\frac{\partial Z}{\partial y}+N_1 Z=M_1,$$

che sarà ancora della forma della (29), e potrà darsi che questa si sappia subito integrare, dopo di che col valore trovato per Z si potrà subito calcolare l'integrale z della (29) per mezzo della (34).

Se poi questa equazione (35) non si saprà subito integrare, potremo applicarle ancora il processo precedente, riducendola cioè a due equazioni del prim'ordine simili alla (32) coll'introduzione di una nuova funzione ausiliaria Z_1, e potrà darsi allora che si trovi che il valore corrispondente di μ viene ad essere zero, e si riesca quindi a determinare il valore di Z_1 e poi quello di Z, e infine per mezzo della (34) quella di z. Invece quando il nuovo valore di μ non sia zero, potrà essere opportuno di tornare ancora ad applicare il processo precedente che ci condurrà ad una nuova equazione come la (35) ecc.

660. — Il metodo esposto potrà applicarsi anche alle equazioni della forma

$$\mathrm{R}r+\mathrm{S}s+\mathrm{T}t=(\mathrm{M}+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{N}z)(rt-s^2), \tag{36}$$

dove R, S, T, M, A, B e N sono funzioni di p e q soltanto invece che di x e y, perchè colla trasformazione di Legendre (§ 652) queste equazioni si riducono subito alla forma

$$\mathrm{R}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\mathrm{S}\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}+\mathrm{T}\frac{\partial^2 u}{\partial p_2}-\left(\mathrm{A}+\mathrm{N}p\right)\frac{\partial u}{\partial p}-\left(\mathrm{B}+\mathrm{N}q\right)\frac{\partial u}{\partial q}+\mathrm{N}u=\mathrm{M}, \tag{37}$$

che rientra appunto nella forma (29) perchè ora p e q figurano come variabili indipendenti.

In questo caso però bisognerà trovare a parte, quando vi siano, le soluzioni della equazione data (36) per le quali si avesse anche $rt-s^2=0$.

661. — Diamo un esempio del metodo d'integrazione esposto nel § 659 prendendo a integrare la equazione

$$x^2r-y^2t+xp-yq=y. \tag{38}$$

Osserviamo perciò che in questo caso le equazioni (33) vengono subito soddisfatte prendendo, con $\lambda=1$, $\alpha=\alpha_1=x$, $\beta=y$, $\beta_1=-y$, $\gamma=\gamma_1=0$, $\mu=0$, $\nu=y$, e quindi le equazioni (32) si riducono alle seguenti

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{Z},\quad x\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}-y\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}=y,$$

e la integrazione della (38) si farà subito per mezzo di queste.

Osservando che coi metodi del § 647 la seconda di queste ci dà subito pel suo integrale $\mathrm{Z}=-y+\varphi(xy)$, che per comodo può anche prendersi sotto la forma $\mathrm{Z}=-y+2\varphi'(xy)xy$, si vede che allora la prima ci dà cogli stessi metodi

$$z=-y+\varphi(xy)+\Psi\left(\frac{x}{y}\right), \tag{39}$$

dove φ e Ψ sono i simboli di due funzioni arbitrarie, e quindi si conclude subito che questo valore (39) di z ci dà l'integrale cercato della equazione data (38).

662. — Avendosi poi la equazione

$$q^2r-p^2t+(q-px+qy)(rt-s^2)=0, \tag{40}$$

si vede subito che colla trasformazione di Legendre si riduce all'altra

$$p^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}-q^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial p}=q,$$

che, per essere ora p e q le variabili indipendenti e u la funzione, combina precisamente colla (38), e ha quindi per integrale $u=-q+\varphi(pq)+\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$, per modo che si può senz'altro affermare che, fatta astrazione dalle soluzioni della equazione (40) per le quali si avesse anche $rt-s^2=0$ e che dovranno determinarsi a parte, tutti gli altri integrali della stessa equazione (40) saranno dati dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} x&=q\varphi'(pq)+\frac{1}{q}\Psi'\left(\frac{p}{q}\right),\\ y&=-1+p\varphi'(pq)-\frac{1}{q^2}\Psi'\left(\frac{p}{q}\right),\\ z&=px+qy+q-\varphi(pq)-\Psi\left(\frac{p}{q}\right),\end{aligned}\right. \tag{41}$$

dove φ e Ψ sono i simboli di due funzioni arbitrarie, e p e q figurano ora come variabili indipendenti.

La determinazione poi delle altre soluzioni della equazione (40), cioè di quelle che soddisfano alla equazione $rt-s^2=0$, le troveremo subito nel seguente § 665 come applicazione di quello che allora esporremo.

663. — In tutti questi studî sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali, pei problemi che abbiamo potuto risolvere o almeno trattare più facilmente, abbiamo dovuto quasi sempre ricorrere ad opportune trasformazioni o ad opportuni artifizî, e questo in sostanza è quello che il più spesso abbiamo dovuto fare anche per le altre parti del calcolo integrale.

Lo stesso avviene anche per altri casi di integrazione di equazioni a derivate parziali, e noi ne daremo ancora un esempio prendendo ad integrare la equazione

$$rt-s^2=0, \tag{42}$$

alla quale, come dicemmo al § 652, non si applica la trasformazione di Legendre, e che come sappiamo dal calcolo differenziale (§§ 478 e seg.

[Pag. 635 e seg.]) è la equazione cui soddisfano tutte le equazioni $z=z(x,y)$ delle superficie sviluppabili; e con ciò noi verremo anche a dimostrare inversamente che le superficie per le quali si ha questa equazione (42) a derivate parziali sono soltanto le superficie sviluppabili.

Per giungere a fare questa integrazione osserviamo prima che la equazione (42) può scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}=0\,,$$

e questa per un teorema noto ci mostra che o deve essere $q=a$, con a costante arbitraria, o deve essere $p=\varphi(q)$, dove la funzione $\varphi(q)$ può supporsi arbitraria perchè qualunque essa sia la equazione precedente risulterà soddisfatta.

Ora nel primo caso di $q=a$ si avrà subito evidentemente

$$z=ay+\Psi(x)\,, \tag{43}$$

e qualunque sia la funzione $\Psi(x)$ questa formola ci darà intanto un integrale della (42).

Nell'altro caso poi, quello cioè di $p=\varphi(q)$, si osserverà che se si pone come nella trasformazione di Legendre $u=px+qy-z$, differenziando si avrà $du=x\,dp+y\,dq=\left\{y+x\varphi'(q)\right\}dq$, e questo porterà subito che u sia una funzione $\Psi(q)$ di q, e $y+x\varphi'(q)$ sia la derivata $\Psi'(q)$ di questa funzione (*), cioè avremo le due equazioni

$$\left\{\begin{aligned} z&=\varphi(q)x+qy-\Psi(q)\\ 0&=\varphi'(q)x+y-\Psi'(q)\end{aligned}\right. \tag{44}$$

nelle quali anche la $\Psi(q)$ resta arbitraria perchè la prima di queste equazioni, a causa della seconda che ne è la derivata rispetto a q, colla derivazione rispetto ad x ci dà sempre $p=\varphi(q)$ qualunque sia $\Psi(q)$; escludendo però il

(*) Quando per due funzioni f e θ, di due o più variabili si ha $df=\mathrm{W}d\theta$, la f dovrà sempre essere una funzione $\pi(\theta)$ di θ, e W dovrà essere la derivata $\pi'(\theta)$ di questa funzione, perchè supposto ad es. che le variabili indipendenti siano le due x e y avremo $\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{W}\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{W}\frac{\partial\theta}{\partial y}$, e da queste trarremo subito la equazione $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$, la quale mostra che f è una funzione $\pi(\theta)$ di θ; e allora avendosi da questa $df=\pi'(\theta)d\theta$ se ne deduce subito $\mathrm{W}=\pi'(\theta)$.

caso che $\varphi'(q)$ e $\Psi'(q)$ divengano insieme due quantità costanti, perchè allora, a causa della seconda equazione, x e y non sarebbero più indipendenti, come è necessario che siano perchè valgano le varie considerazioni che abbiamo fatto.

Così sono trovati tutti gl'integrali della equazione (42); e questi vengono dati alcuni dalla equazione (43), e i rimanenti dal sistema delle due equazioni (44).

Essi poi corrispondono tutti a superficie sviluppabili, perchè per essere, come abbiamo già notato, la seconda della (44) la derivata rispetto a q della prima, le superficie rappresentate dalle stesse equazioni (44) sono l'inviluppo del piano mobile $z=\varphi(q)x+qy-\Psi(q)$ che, quando sono fissate (arbitrariamente) le funzioni $\varphi(q)$ e $\Psi(q)$, varia continuamente al variare di q, ed è sempre un piano per ogni valore (costante) che si dia a q.

Le superficie (43) poi per ogni valore che si dia alla costante a e per ogni funzione $\Psi(x)$ che si prenda per $\Psi(x)$ sono esse pure superficie sviluppabili, e sono precisamente superficie cilindriche perchè tutti i piani paralleli al piano yz (corrispondenti cioè ai varii valori di x) tagliano la superficie secondo la retta $z=ay+\text{cost.}$ che è sempre parallela alla retta fissa di equazioni $x=0$, $z=ay$ del piano yz.

664. — Pel caso poi che non si sappia trovare l'integrale generale di una equazione data a derivate parziali, ma per la questione che si tratta basti avere soltanto degli integrali particolari, o anche quando avendo trovati tutti gli integrali di una data equazione si vogliano avere quelli fra questi che appartengono anche ad altre equazioni, trovo opportuno di mostrare come talvolta questi integrali particolari possano ottenersi con facili considerazioni.

Così p. es. se si avrà una equazione della forma

$$\mathrm{P}=(rt-s^2)^n\mathrm{Q}, \tag{45}$$

dove n è un numero diverso da zero e positivo, P è una funzione soltanto di p,q,r,s e t che è omogenea di un certo grado m rispetto alle tre ultime derivate, e Q è una funzione che non diviene infinita quando $rt-s^2=0$, si potranno ordinariamente trovare con facilità, come osservò Poisson, gli integrali particolari della equazione data (45) pei quali si ha al tempo stesso $rt-s^2=0$, e che evidentemente saranno pure gli integrali della equazione $\mathrm{P}=0$ che soddisfano alla stessa condizione; o il che è lo stesso si potranno trovare quelle, fra le superficie alle quali potrà intendersi che corrispondano la equazione (45) o anche l'altra $\mathrm{P}=0$, che sono superficie sviluppabili.

Si osserverà per questo che, secondo quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, o dovrà essere $p=\varphi(q)$ o essere $z=ay+\Psi(x)$, essendo a una costante e $\varphi(q)$ e $\Psi(x)$ funzioni da determinarsi, e bisognerà considerare separatamente questi due casi.

Ora nel caso di $p=\varphi(q)$ avremo

$$s=\varphi'(q)t,\quad r=s\varphi'(q)=t[\varphi'(q)]^2,$$

quindi sostituendo questi valori di p, r e s nella funzione P, che noi supponiamo omogenea e di grado m rispetto alle quantità r, s, t, essa si ridurrà ad un prodotto t^m di t per una funzione P_1 di q, $\varphi(q)$ e $\varphi'(q)$; e onde avere le soluzioni comprese nella formola $p=\varphi(q)$ che soddisfano al tempo stesso alla equazione (45) (e all'altra $P=0$) bisognerà che si abbia $t^m P_1^n=0$.

Escludiamo ora il caso di $t^m=0$ perchè con m negativo o nullo e t finito sarebbe impossibile, e con m positivo dandoci $t=0$ richiederebbe che anche r e s fossero zero, e quindi cadremmo nel caso di $z=ay+bx+c$ che è un caso particolare di quello di $z=ay+\Psi(x)$ che abbiamo detto di considerare a parte.

Allora, per avere, fra le soluzioni contenute nella formola $p=\varphi(q)$, quelle che cerchiamo, bisognerà determinare le funzioni $\varphi(q)$ per le quali si ha $P_1=0$; quindi, tolto il caso in cui questa equazione presenti qualche incompatibilità, la funzione $\varphi(q)$ risulterà determinata pienamente o all'infuori di una costante arbitraria, da questa equazione che sarà tutt'al più una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine in $\varphi(q)$.

E trovato così il valore di $\varphi(q)$ si otterrà subito l'integrale della equazione (45) (o dell'altra $P=0$) corrispondente a questa funzione $\varphi(q)$ valendosi delle formole (44) del paragrafo precedente col sostituirvi per $\varphi(q)$ la funzione trovata; e in queste formole $\Psi(q)$ resterà ancora arbitraria.

Pel caso poi di $z=ay+\Psi(x)$, si osserverà che da questa formola si ha $p=\Psi'(x)$, $q=a$, $r=\Psi''(x)$, $s=t=0$; e quindi sostituendo questi valori nella espressione di P che figura nella (45), e valendosi della equazione $\overline{P}=0$ che ne risulterà, quando non presenti incompatibilitá potremo determinare la funzione $\Psi(x)$ e occorrendo anche la costante a, e avremo così anche gli integrali della forma $z=ay+\Psi(x)$ che soddisfano alla equazione data (45) e al tempo stesso all'altra $P=0$.

Questa equazione $\overline{P}=0$ sarà tutt'al più una equazione differenziale del second'ordine rispetto alla funzione da determinarsi $\Psi(x)$, ma in certi casi sarà identica o diverrà tale per valori speciali di a qualunque sia $\Psi(x)$, e non conterrà affatto questa funzione nè le sue derivate $\Psi'(x)$ e $\Psi''(x)$, per modo che talvolta $\Psi(x)$ negli integrali $z=ay+\Psi(x)$ rimarrà del tutto arbitraria.

665. — Non si deve poi lasciare di notare in particolare che le equazioni del § 652 alle quali si applica spesso utilmente la trasformazione di Legendre, quando non contengono x, y, z nei coefficienti sono precisamente nel caso della equazione (45); e il metodo che ora abbiamo dato per trovare gli integrali di questa equazione che soddisfano alla equazione $rt-s^2=0$ serve a trovare appunto quegli integrali che applicando la trasformazione di Legendre bisogna lasciare da parte.

Così appunto nell'integrare al § 662, valendosi anche della trasformazione di Legendre, la equazione (40), noi lasciammo da parte le soluzioni di questa equazione che soddisfano alla equazione $rt-s^2=0$ riservandoci di trovarle più tardi; e ora valendoci delle ultime considerazioni potremo trovare subito anche queste soluzioni, le quali verranno ad essere al tempo stesso anche le soluzioni della equazione $q^2r-p^2t=0$ che soddisfano alla stessa equazione $rt-s^2=0$.

Osserveremo perciò che la equazione (40) rientra fra quelle della forma (45) considerate nel paragrafo precedente, e potremo quindi applicare il processo del paragrafo stesso determinando gli integrali pei quali si ha $p=\varphi(q)$ e gli altri pei quali si ha $z=ay+\Psi(x)$.

Venendo ora nel primo caso ad aversi $P_1=q^2\varphi'^2(q)-\varphi^2(q)$, si vede subito che la funzione $\varphi(q)$ corrispondente agli integrali che cerchiamo deve essere determinata dalla formola $q^2\varphi'^2(q)-\varphi^2(q)=0$ ovvero, se $\varphi(q)$ non sarà zero, $\frac{\varphi'(q)}{\varphi(q)}=\pm\frac{1}{q}$, e perciò $\log\varphi(q)=\pm\log q+\log c$, ovvero $\varphi(q)=cq$ o $\varphi(q)=\frac{c}{q}$, essendo c una costante arbitraria, e venendo ora per $c=0$ a comprendersi anche il caso testè escluso di $\varphi(q)=0$.

Supponendo ora dapprima $\varphi(q)=cq$, le (44) ci daranno subito per l'integrale corrispondente

$$z=(cx+y)q-\Psi(q),\ \text{con}\ 0=cx+y-\Psi'(q),$$

e poichè quando $\Psi'(q)$ non sia una costante, il che è da escludere, la seconda di queste ci mostra che q deve essere una funzione di $cx+y$, si conclude che per l'integrale cercato della (40) o della $q^2r-p^2t=0$ che corrisponde a $\varphi(q)=cq$ si può prendere

$$z=\pi(cx+y), \tag{46}$$

essendo π il simbolo di una funzione arbitraria.

Supponendo poi $\varphi(q)=\frac{c}{q}$, l'integrale corrispondente della (40) o della

$q^2r-p^2t=0$, a causa sempre delle (44) sarà dato dal sistema delle due equazioni

$$(47)\qquad \begin{cases} z=\dfrac{c}{q}x+qy-\Psi(q), \\ 0=-\dfrac{c}{q^2}x+\ y-\Psi'(q), \end{cases}$$

dove Ψ è una funzione che resta del tutto arbitraria.

Infine poi per gli integrali della forma $z=ay+\Psi(x)$, coll'osservare che allora si ha $p=\Psi'(x)$, $q=a$, $r=\Psi''(x)$, $t=0$, si vede che dovrà essere $a\Psi''(x)=0$; e perciò col prendere $a=0$ si avranno gli integrali della forma

$$(48)\qquad z=\Psi(x)$$

dove $\Psi(x)$ resta una funzione arbitraria; mentre con a diversa da zero, dovendo essere allora $\Psi''(x)=0$ si avranno gli integrali della forma

$$(49)\qquad z=ay+bx+c,$$

dove a, b e c sono costanti arbitrarie; talchè si può ora affermare che gli integrali della equazione (40) o della $q^2r-p^2t=0$ pei quali si ha anche $rt-s^2=0$, sono quelli dati dalle formole (46), (47), (48) e (49) nelle quali le funzioni π e Ψ dove compariscono sono funzioni arbitrarie, e le a, b e c sono costanti arbitrarie.

XXXII.

Equazioni integrali.

Generalità. — Equazioni integrali di seconda specie.

666. — Già da molto tempo in vari studii di celebri analisti si presentarono equazioni funzionali nelle quali la funzione incognita di una o più variabili figura sotto segni integrali; e già casi di risoluzione di queste equazioni erano stati trattati fino da Abel nel 1823.

Ma tali studi corrispondevano ordinariamente a speciali problemi d'inversione d'integrali definiti e come tali erano soltanto considerati, perchè si limitavano alla ricerca di funzioni per le quali un integrale definito che le conteneva doveva prendere un valore dato; e se talvolta era capitato di studiare casi di equazioni nei quali la funzione incognita, oltre che sotto l'integrale, compariva anche fuori dell'integrale, fosse questo a limiti fissi o a limiti variabili, gli studî erano stati fatti sempre caso per caso, senza fare rilevare espressamente che essi non erano in sostanza che l'applicazione di un processo generale valido per tutta una categoria di equazioni funzionali del genere indicato.

Tali sono ad es., oltre al lavoro di Abel del 1823 e agli altri pure di Abel sulle funzioni generatrici, quelli di Liouville collegati coi suoi studii sul calcolo, che egli cercava d'introdurre nell'analisi, delle derivate d'indice fratto, e i lavori di Joachimstal, di Schlömilch, di Beltrami e di altri e anche alcuni miei pubblicati nel 1880 nel vol. 17.° degli *Annali delle Università Toscane,* come anche quelli che trovansi nel cap. XX (pag. 508 e seg.) di questo volume sugli integrali considerati come funzioni anche dei loro valori iniziali, e quelli delle mie memorie sulle equazioni differenziali lineari pubblicati nei vol. II, III, XI, XII, XVII, XVIII, serie III degli « *Annali di Matematica di Milano* » e ora qui riportati al cap. XXVII (pag. 714 e seg.) sugli integrali delle equazioni lineari, e in sostanza anche gli studii di Picard sulla integrazione per approssimazioni successive delle equazioni differenziali.

667. — Lo studio sistematico in modo generale e approfondito di tali categorie di equazioni funzionali incominciò propriamente solo coi lavori del *Volterra* che egli designò ancora col titolo di « *inversione degli integrali definiti* » pubblicati negli *Atti dell'Accademia di Torino* e poi nei *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* e nel vol. 26. II.ª serie degli *Annali di matematica di Milano*, e più specialmente colla memoria di *Fredholm* del 1900 pubblicata negli *Atti dell'Accademia di Stocolma*, e con le altre pure di *Fredholm* pubblicate negli *Acta mathematica* e nei *Comptes rendus* nel 1902, e colle sei memorie di *Hilbert* pubblicate negli *Atti dell'Accademia di Gottinga*, nelle quali Hilbert riprendendo un suggerimento dato da *Du Bois-Reymond* nel 1888 (*Crelle's Journal für die reine u. andg. Mathematik* vol. 103, pag. 228), introdusse il nome di « *equazioni integrali* » per le equazioni funzionali che in questi varî lavori erano state prese a studiare.

I risultati importanti contenuti in questi lavori, e, diciamolo pure, anche la fortuna del nome veramente indovinato, e la circostanza che equazioni integrali già si erano presentate in parecchi studii importanti, senza però che avessero fermato l'attenzione in modo speciale per trarne una teoria generale, e con queste altre circostanze insieme, aprirono il campo ad una serie interminabile di lavori che misero sempre più in evidenza la importanza degli studii generali su quelle equazioni; ed è per tutto questo che noi — pure rimandando, per uno studio esteso e approfondito di tali equazioni e dei problemi che vi si connettono, alle numerose memorie speciali, e alle monografie che già ne sono state fatte (*) — non possiamo fare a meno di dare in questo libro anche di esse un breve cenno, limitandoci alle equazioni integrali lineari.

668. — Ciò premesso, indichiamo con $\varphi(x)$ una funzione incognita di x, e con $f(x)$ una funzione conosciuta pure di x che supporremo senz'altro finita e continua pei valori di x compresi fra due numeri finiti a e b (a e b inclusi) e con $K(x, y)$ una funzione che pei punti (x, y) pei quali x e y sono compresi fra gli stessi numeri a e b, può anche avere punti o linee di discontinuità o anche prendere valori infiniti, soddisfacendo però sempre a quelle condizioni dei §§ 130 e seg. (pag. 192 e seg.) e §§ 278 e seg. (pag. 420

(*) V. ad es. *An introduction to the study of integral equations by* Maxime Bôcher *B. A. Ph. D. Professor of Mathematics in Harward University «Cambridge. of the University Press 1909,* » e la *Introduction à la théorie des équations intégrales par* Traian Lalesco « Paris. A. Hermann et fils 1912 » e Goursat. *Cours d'Analye Mathématique.* Tomo III. Deux.^{me} édit. Paris. Gauthier Villors et C.^{ie}.

e seg.) o ad altre per le quali siamo sicuri che la funzione stessa $K(x, y)$ e il prodotto $K(x, y)\varphi(x)$ sono integrabili, e per esse negli integrali doppi o multipli che si abbiano sono invertibili le integrazioni, salvo a dovere cambiare i limiti quando questi non sono fissi. E qui supporremo sempre senz'altro per es. $a < b$.

Le equazioni integrali lineari sono le seguenti

$$(1) \qquad f(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)\, dy,$$

$$(2) \qquad \varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)\varphi(y)\, dy,$$

con uno dei limiti degli integrali variabile e delle quali fece pel primo il Volterra uno studio approfondito e generale dando di esse la soluzione generale nelle memorie ricordate sopra; e sono pure equazioni integrali le altre considerate da Fredholm

$$(3) \qquad f(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy,$$

$$(4) \qquad \varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy,$$

nelle quali i due limiti degli integrali sono costanti; e queste ultime comprendono quelle del Volterra perchè si riducono a queste quando si supponga che la funzione $K(x, y)$ per $y > x$ sia sempre zero, come anche possono ridursi a quelle del Volterra quando a $K(x, y)$ si sostituisca $IK(x, y)$, essendo I il fattore discontinuo di Dirichlet $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xz \cos yz}{z}\, dz$ da noi considerato al § 215 (pag. 241-42), che per $y < x$ è sempre uguale ad 1, per $y > x$ è uguale a zero, e per $y = x$ è uguale a $\frac{1}{2}$, e si suppone che a e b, o x e y siano positivi.

Di queste equazioni le (1) e (3) si dicono equazioni integrali di *prima specie*, e le (2) e (4) si dicono equazioni integrali di *seconda specie;* ed è su queste ultime specialmente (cioè sulle equazioni di seconda specie) che si sono fatti maggiori studî, ottenendo per esse risultati notevoli.

669. — Noi incominceremo questi nostri studî sulle equazioni integrali da quelle di seconda specie; ma prima è il caso di fare osservare che le

equazioni di prima specie possono riguardarsi come un caso limite di quelle di seconda, in quanto che, cambiando in queste ultime $K(x, y)$ e $f(x)$ in $\lambda K(x, y)$ e $-\lambda f(x)$, le equazioni di seconda specie (2) o (4) si cambiano nell'altra

$$\frac{1}{\lambda}\varphi(x) = -f(x) + \int K(x, y)\varphi(y)dy,$$

che per $\lambda = \infty$ si riduce alla (1) o alla (3) a seconda dei limiti che si pongono all'integrale.

Del resto poi intorno alle equazioni di prima specie (1) si può osservare che quando pei valori di x e y fra a e b (a e b incl.) la funzione $K(x, y)$ sia sempre finita e continua e ammetta almeno la derivata parziale $\frac{\partial K}{\partial x}$, e questa derivata per gli stessi valori di x e y si comporti come sopra ammettemmo potersi comportare $K(x, y)$ nel caso della equazione di seconda specie, e all'integrale $\int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$ sia applicabile la derivazione sotto il segno, allora se anche $f(x)$ sarà derivabile, la stessa equazione (1) colla derivazione darà luogo all'altra

$$f'(x) = K(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x}\varphi(y)\,dy,$$

e quindi sotto queste condizioni quando $K(x, x)$ sia diverso da zero per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.), la (1) stessa conduce alla equazione di seconda specie

(5) $$\varphi(x) = \bar{f}(x) + \int_a^x \bar{K}(x, y)\varphi(y)\,dy,$$

nella quale

$$\bar{K}(x, y) = -\frac{1}{K(x, x)}\frac{\partial K(x, y)}{\partial x}, \quad \bar{f}(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

Anche in altro modo poi la stessa (1) dà luogo a una equazione integrale di seconda specie, poichè colla integrazione per parti si ottiene la formola seguente

$$K(x, x)\int_a^x \varphi(y)\,dy - \int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial y}\left(\int_a^y \varphi(y)\,dy\right)dy = f(x),$$

la quale ci mostra che sotto le precedenti ipotesi rispetto a $K(x, y)$, inclusa

quella che $K(x, x)$ sia sempre diversa da zero pei valori di x da a a b (a e b inclusi), si ha la equazione integrale di seconda specie

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + \int_a^x K_1(x, y)\varphi_1(y)\,dy,$$

nella quale

$$\varphi_1(x) = \int_a^x \varphi(x)dx, \qquad K_1(x, y) = \frac{1}{K(x, x)}\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}, \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{K(x, x)}.$$

670. — La funzione $K(x, y)$ che figura nelle equazioni integrali e che da Hilbert fu chiamata « *das Kern* » è stata da noi, come in Francia, denominata il *nucleo* della equazione; e questa funzione ha naturalmente una particolare importanza in questi studii. Essa, come già abbiamo ammesso, può anche essere discontinua o diventare infinita, ma con discontinuità o infiniti tali da restare atta alla integrazione e da permettere che, negli integrali multipli nei quali venga a figurare, le integrazioni (coi debiti cambiamenti nei limiti ove occorrano) possano invertirsi; e in particolare deve spesso prendersi infinita per $y = x$ di un ordine inferiore al primo, come avviene appunto nel caso delle varie formole di Abel, e anche più in generale in quello che noi pure studieremo di $K(x, y) = \frac{G(x, y)}{(y-x)^\lambda}$, con $\lambda < 1$ e $G(x, y)$ sempre diversa da zero e numericamente inferiore a un numero finito finchè x e y sono compresi fra a e b (a e b incl.).

671. — Premesse queste nozioni generali, prendiamo a studiare le equazioni integrali di seconda specie (2) o (4) che, cambiando y in x_1, scriveremo sotto la forma

(6) $$\varphi(x) = f(x) + \int K(x, x_1)\varphi(x_1)\,dx_1,$$

senza segnare ora i limiti dell'integrale per potere intendere che questi limiti possano essere a e x come nella (2) o a e b come nella (4); e ammettiamo dapprima che il nucleo $K(x, y)$, pure potendo essere anche discontinuo in punti o linee come già dicemmo, sia però sempre numericamente inferiore a un numero finito K pei valori di x o y fra a e b.

Ammettendo dapprima l'esistenza di una soluzione sempre finita della equazione (6), il processo stesso di approssimazioni successive che noi seguimmo nei §§ 522 e seg. (pag. 723 e seg.) per trovare l'integrale delle equazioni lineari generali, come quello dei §§ 345 e seg. a pag. 508 e seg., *che* *in sostanza risolve un sistema di equazioni integrali lineari di seconda specie*, nel caso della equazione (2) ci condurrà subito alla formola seguente

$$(7)\qquad \varphi(x)=f(x)+\int_a^x \mathrm{K}(x,\,x_1)f(x_1)dx_1+\int_a^x \mathrm{K}(x,\,x_1)dx_1\int_a^{x_1}\mathrm{K}(x_1,\,x_2)f(x_2)dx_2+\ldots+$$

$$+\int_a^x \mathrm{K}(x,\,x_1)\,dx_1\int_a^{x_1}\mathrm{K}(x_1,\,x_2)\,dx_2\int_a^{x_2}\ldots\int_a^{x_{n-2}}\mathrm{K}(x_{n-2},x_{n-1})\,dx_{n-1}\int_a^{x_{n-1}}\mathrm{K}(x_{n-1},x_n)f(x_n)dx_n+\ldots$$

mentre nel caso della equazione (4) si avrà questa stessa formola colla sola differenza che in essa i limiti di tutti gli integrali saranno a e b; e colle stesse considerazioni dei paragrafi indicati si vedrà che la serie del secondo membro nel caso della equazione (2) converge in egual grado come una serie esponenziale per qualunque valore di x fra a e b comunque grandi vengano presi questi numeri, e nel caso della equazione (4) converge, e ancora in ugual grado, come una progressione geometrica per ogni valore di x fra a e b quando sia $\mathrm{K}(b-a)<1$; e così, sotto la ipotesi fatta della esistenza di una soluzione sempre finita della (6), si vede che questa soluzione è data dalla (7) nei casi ora indicati, e in generale quando la serie stessa (7) è convergente in ugual grado; e questa soluzione è unica.

A causa poi della convergenza in ugual grado della serie (7), indicandone la somma con $\varphi(x)$ e facendo astrazione dalla ipotesi ammessa della esistenza di una soluzione sempre finita della (6), coll'osservare che la (7) può porsi sotto la forma

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x \mathrm{K}(x,\,x_1)\Big\{f(x_1)+\int_a^{x_1}\mathrm{K}(x_1,\,x_2)f(x_2)\,dx_2+\ldots+$$

$$+\int_a^{x_1}\mathrm{K}(x_1,\,x_2)\,dx_2\int_a^{x_2}\ldots\int_a^{x_{n-2}}\mathrm{K}(x_{n-2},\,x_{n-1})\,dx_{n-1}\int_a^{x_{n-1}}\mathrm{K}(x_{n-1},\,x_n)\,f(x_n)\,dx_n+\ldots\Big\}dx_1,$$

si verifica subito che la funzione $\varphi(x)$ definita dalla serie stessa (7) soddisfa alla equazione (6), e quindi essa è sempre effettivamente la soluzione di questa, che come già abbiamo detto viene ad essere unica.

E posto quindi

$$(8)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_a \mathrm{K}(x,\,y)f(y)\;dy=u_1(x),\;\int_a \mathrm{K}(x,y)\;u_1(y)\;dy=u_2\,(x),\\ \displaystyle\int_a \mathrm{K}(x,y)\;u_2\,(y)\;dy=u_3(x),\ldots,\;\int_a \mathrm{K}(x,y)\,u_{n-1}\,(y)\,dy=u_n\,(x),\ldots,\end{cases}$$

i limiti superiori negli integrali essendo x o b secondochè si tratterà delle (2) o delle (4), per la soluzione della (2) o (4) avremo la formola

$$(9)\qquad \varphi(x)=f(x)+u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$$

i cui termini si calcolano con successive quadrature, come dicemmo al § 529 (pag. 736-37) pel caso degli integrali delle equazioni lineari (*).

---

*) È da notare che le formole (7), (8), (9) che abbiamo dato sopra, in sostanza sono quelle stesse delle mie memorie sulle equazioni differenziali lineari pubblicate nei vol. II serie III degli *Annali di Matematica* di Milano, e ora riportate in questo volume nel Cap. XXVII. Ne differiscono solo per le notazioni diverse e pel significato speciale che là fu naturalmente attribuito alle funzioni che nel capitolo stesso rappresentammo con $\dfrac{\mathrm{A}_x}{(a_0\mathrm{Q})_x}$ e $\dfrac{\overline{q}_{x,x_1}}{(a_0\mathrm{Q})_x}$, ma che, come ora si vede, possono avere un significato generale.

Per le formole date nel detto capitolo, gli integrali delle equazioni differenziali lineari di ordine n sono dunque soluzioni di quelle equazioni integrali per le quali il nucleo $\mathrm{K}(x,y)$ e la funzione $f(x)$ colle notazioni dello stesso capitolo vengono ad essere respettivamente le funzioni $\dfrac{\overline{q}_{x,y}}{(a_0\mathrm{Q})_x}$ e $\dfrac{\mathrm{A}_x}{(a_0\mathrm{Q})_x}$.

In seguito a questa osservazione è qui il caso di fare rilevare esplicitamente come da questo già apparisca chiaramente che vi è un intimo legame fra le equazioni differenziali lineari ordinarie e le equazioni integrali, perchè gli integrali di quelle equazioni sono soluzioni di equazioni integrali speciali che dipendono dalle equazioni medesime.

Anche in altro modo poi si può fare risultare questo legame, poichè data una equazione differenziale lineare d'ordine n

$$(\alpha)\qquad a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n\,y=\mathrm{X},$$

se si pone $a_0y^{(n)}=\theta$, e inoltre, per abbreviare, si indica in generale colla notazione $\int_a^x\varphi(\omega)d\omega^k$ l'integrale multiplo d'ordine k $\int_a^x d\omega\int_a^\omega d\omega\ldots\int_a^\omega\varphi(\omega)d\omega$, con integrazioni successive si troverà

$$y^{(n-1)}=\int_a^x\left(\frac{\theta}{a_0}\right)_\omega d\omega+y_a^{(n-1)},$$

$$y^{(n-2)}=\int_a^x\left(\frac{\theta}{a_0}\right)_\omega d\omega^2+y_a^{(n-1)}(x-a)+y_a^{(n-2)},$$

$$y^{(n-p)}=\int_a^x\left(\frac{\theta}{a_0}\right)_\omega d\omega^p+y_a^{(n-1)}\frac{(x-a)^{p-1}}{\pi(p-1)}+y_a^{(n-2)}\frac{(x-a)^{p-2}}{\pi(p-2)}+\ldots+y_a^{(n-p+1)}\frac{(x-a)}{1}+y_a^{(n-p)},$$

. . . . , Questo risultato poi, colle considerazioni dei §§ 524 e seg. (pag. 729 e seg.) si estende anche a casi nei quali $K(x, y)$ o $f(x)$ divengono infiniti.

672. — Per giungere ora alle formole che si hanno nella teoria delle equazioni integrali, ricordiamo la formola di Dirichlet

---

essendo $y_a, y'_a, y''_a, \dots y_a^{(n-2)}, y_a^{(n-1)}$ i valori per $x=a$ dell'integrale y della (α) e delle sue derivate $y', y'', \dots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}$, che possono prendersi arbitrariamente se i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ e X non presentano singolarità e a_0 è diversa da zero per $x=a$.

Osservando quindi in generale che con successive integrazioni per parti si ha

$$\int_a^x \varphi(\omega)d\omega^p = \int_a^x (x-\omega)d\omega \int_a^\omega \varphi(\omega)d\omega^{p-1} = \int_a^x \frac{(x-\omega)^2}{\pi(2)}\, d\omega \int_a^\omega \varphi(\omega)d\omega^{p-2} = \dots = \int_a^x \frac{(x-\omega)^p}{\pi(p)} \varphi(\omega)d\omega,$$

e con questa formola trasformando i valori precedenti di $y^{(n-1)}, y^{(n-2)} \dots, y^{(n-p)}, \dots y', y$ dopo di avere fatto $\varphi(\omega) = \dfrac{\theta(\omega)}{a_0(\omega)}$, e poi sostituendo nella equazione (α), si trova che questa si trasformerà nella equazione integrale seguente

$$(\beta) \quad y^{(n)}(x) = \overline{f}(x) - \int_a^x \left\{ \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}(x-\omega) + \frac{a_3}{a_0}\frac{(x-\omega)^2}{\pi(2)} + \dots + \frac{a_n}{a_0}\frac{(x-\omega)^{n-1}}{\pi(n-1)} \right\} y^{(n)}(\omega)d\omega,$$

dove s'intende che $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ siano i coefficienti della equazione data espressi ancora per x e

$$(\gamma) \quad \overline{f}(x) = \frac{X}{a_0} - \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \frac{a_p}{a_0} + \frac{a_{p+1}}{a_0}(x-a) + \frac{a_{p+2}}{a_0}\frac{(x-a)^2}{\pi(2)} + \dots + \frac{a_n}{a_0}\frac{(x-a)^{n-p}}{\pi(n-p)} \right\} y_a^{(n-p)};$$

e così trovando per $y^{(n)}(x)$ la soluzione di questa equazione integrale (β), si avrà poi y con n integrazioni successive; e questo per ogni sistema di valori iniziali $y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}$ di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, cioè per ogni integrale della equazione data.

È da notare che la equazione integrale (β) anzichè col processo precedente che abbiamo riportato dal Lalesco, avremmo potuto trovarla anche scrivendo la equazione (α) sotto la forma

$$y^{(n)} + \int_a^x \frac{\partial}{\partial\omega} \left\{ \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{(n-1)}_{(\omega)} + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y^{(n-2)}_{(\omega)} + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} y'(\omega) + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y(\omega) \right\} d\omega =$$

$$= \frac{X}{a_0} - \left\{ \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_a^{(n-1)} + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y_a^{(n-2)} + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} y'_a + \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y_a \right\},$$

e poi nell'integrale del primo membro applicando successive integrazioni per parti.

E notiamo anche che come le equazioni (8) del § 516 (pag. 716) risolute rispetto ad y condussero alla equazione integrale (18) del § 522 (pag. 723) che dette

$$(10) \qquad \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$$

che noi abbiamo data ai §§ 282-83 (Pag. 424) anche per casi in cui la funzione $f(x, y)$ abbia dei punti o linee d'infinito, pure restando sempre atta alla integrazione nel campo d'integrazione.

---

poi luogo alle formole d'integrazione della equazione lineare data, così avremmo potuto risolverle rispetto a $y', y'', \dots y^{(n-1)}$, e avrebbero dato luogo allora a equazioni integrali in queste quantità, come la (β) lo è in $y^{(n)}$, che avrebbero condotto pure all'integrale della equazione data.

Infine osserviamo che sviluppando le potenze di $x-\omega$ nella equazione integrale (β) si vede che il nucleo di questa equazione è un polinomio di grado $n-1$ in ω della forma

$$(\delta) \qquad \lambda_0\omega^{n-1} + \lambda_1\omega^{n-2} + \lambda_2\omega^{n-3} + \dots + \lambda_{n-2}\omega + \lambda_{n-1},$$

dove le $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}$ sono funzioni della sola x.

E se si parte da una equazione integrale qualsiasi

$$(\varepsilon) \qquad \theta(x) = f_1(x) + \int_a^x K(x, \omega)\theta(\omega)d\omega$$

per la quale il nucleo $K(x, \omega)$ sia della forma (δ), valendosi delle formole (β) e (γ) si vede che si potranno sempre determinare i coefficienti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots \frac{a_{n-1}}{a_0}, \frac{a_n}{a_0}$ e $\frac{X}{a_0}$ di una equazione lineare (α) per la quale la equazione integrale corrispondente (β) venga a concordare precisamente colla (ε); e questo permette di dire che *come la ricerca degli integrali delle equazioni lineari* (α) *si riporta sempre, nei modi indicati sopra, a quella delle soluzioni delle equazioni integrali di forma* (β), *così viceversa la ricerca delle soluzioni delle equazioni integrali* (ε) *quando il nucleo è un polinomio di grado* $n-1$ *in* ω *della forma* (δ), *si riporta sempre coi processi indicati alla integrazione di una equazione lineare di ordine* n.

Questa osservazione, già notevole di per sè e che più sotto estenderemo moltissimo, potrà servire a trovare con tutta facilità le soluzioni di infinite equazioni integrali speciali riportandole alla integrazione di equazioni lineari per le quali gli integrali siano già noti.

Così in particolare quelle equazioni integrali (ε) nelle quali, per essere costanti le $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, il nucleo sia un polinomio di grado $n-1$ in ω, si ridurranno alla integrazione di equazioni lineari di ordine n coi coefficienti costanti nel primo membro, e quindi le loro soluzioni verranno date da somme di esponenziali e di prodotti di esponenziali per funzioni intere. Queste equazioni però, come in generale tutte le equazioni integrali nelle quali il nucleo $K(x, y)$ dipende soltanto dalla variabile d'integrazione y, con una derivazione si riducono subito a equazioni differenziali lineari del prim'ordine, e quindi s'integrano immediatamente senza bisogno di ricorrere alla integrazione delle dette equazioni lineari di ordine n.

Per applicarla ora a un integrale multiplo di ordine superiore

$$(11)\qquad \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \ldots \int_a^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f dx_n,$$

dove f è una funzione di $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n$, e anche se vuolsi di altre variabili, che soddisfa alle solite condizioni d'integrabilità ecc., osserveremo

---

Del resto, in modo generale si può osservare che quando il nucleo $K(x, y)$ e le sue derivate parziali, almeno fino a quelle dell'ordine n, per $y=x$ si mantengono finite, ed esso come funzione di x soddisfa ad una equazione differenziale lineare omogenea

$$(\varphi)\qquad A_0 K^{(n)} + A_1 K^{(n-1)} + A_2 K^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} K' + A_n K = 0,$$

dove le $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ sono funzioni della sola x, e $K, K', K'', \ldots, K^{(n-1)}, K^{(n)}$ sono le derivate successive rispetto ad x di $K(x,y)$, basta applicare successivamente alla equazione integrale data il teorema della derivazione sotto il segno, per trovare subito che la soluzione della stessa equazione potrà sempre aversi colla integrazione di una equazione lineare dell'ordine n, salvo a dovere poi determinare opportunamente le costanti portate dalla integrazione.

In questo caso il nucleo $K(x, y)$ viene naturalmente ad essere della forma

$$(\chi)\qquad h_1(y) K_1(x) + h_2(y) K_2(x) + \ldots + h_n(y) K_n(x)$$

dove le funzioni $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_n(x)$ costituiscono un sistema d'integrali fondamentali della equazione (φ) alla quale il nucleo $K(x,y)$ soddisfa, e le funzioni $h_1(y), h_2(y), \ldots, h_n(y)$ figurano come le costanti arbitrarie. E poichè d'altra parte, dato un sistema qualsiasi di n funzioni linearmente indipendenti $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_n(x)$ si può sempre (§§ 481-82 [pag. 676-78]) costruire una equazione lineare omogenea d'ordine n che ammetta queste funzioni come integrali fondamentali, così evidentemente, generalizzando tutte le osservazioni fatte sopra, si può ora affermare che *la ricerca delle soluzioni delle equazioni integrali* $\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y) \varphi(y)\, dy$ *nelle quali il nucleo* $K(x,y)$ *è una funzione della forma* (χ) *può sempre ridursi alla integrazione di una equazione lineare omogenea dell'ordine* n, salvo a dovere poi determinare opportunatamente le costanti arbitrarie portate dalla integrazione.

S'intende naturalmente che le n funzioni $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_n(x)$ che figurano nella (χ), oltre essere linearmente indipendenti, devono essere anche finite e continue insieme alle loro prime n derivate pei valori di x compresi fra a e b (a e b incl.).

Le indicate equazioni integrali speciali nelle quali il nucleo è una funzione della forma (χ) hanno dato già luogo a studî importanti sui quali però non potremo fermarci; e in seguito alle osservazioni che qui abbiamo fatto, noi crediamo che potranno dare luogo anche a altri studî in relazione colle equazioni differenziali lineari.

prima che per la precedente (10) l'integrale doppio $\int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f dx_n$ si trasforma nell'altro $\int_a^{x_{n-2}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-2}} f dx_{n-1}$, poi per la stessa formola l'integrale triplo $\int_a^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_a^{x_{n-2}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-2}} f dx_{n-1}$ si trasforma nell'altro $\int_a^{x_{n-3}} dx_n \int_{x_n}^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_{x_n}^{x_{n-2}} f dx_{n-1}$, e così continuando fino ad invertire tutte le integrazioni, l'integrale precedente (11) diviene $\int_a^b dx_n \int_{x_n}^b dx_1 \int_{x_n}^{x_1} dx_2 \int_{x_n}^{x_2} dx_3 \ldots \int_{x_n}^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_{x_n}^{x_{n-2}} f dx_{n-1}$, per modo che cambiando in quest'ultimo integrale la variabile x_n in y e supponendo che nell'integrale dato (11) la funzione f possa contenere anche un'altra variabile x, avremo la formola

$$(12)\quad \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} dx_3 \ldots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-} \; x_{n-1}, x_n)\, dx_n =$$

$$= \int_a^b dy \int_y^b dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \int_y^{x_2} dx_3 \ldots \int_y^{x_{n-3}} dx_{n-2} \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}; y)\, dx_{n-1},$$

nella quale il limite superiore b può supporsi anche variabile e anche uguale a x.

Questa formola (12) è una generalizzazione immediata di quella di Dirichlet.

Facendo invece per mezzo della formola originaria di Dirichlet o della precedente (12) la inversione degli integrali a gruppi per es. in due gruppi, cioè prima per l'integrale $I_{n-i} = \int_a^{x_i} dx_{i+1} \int_a^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots \int_a^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} f dx_n$ che si trasforma nell'altro $I_{n-i} = \int_a^{x_i} dx_n \int_{x_n}^{x_i} dx_{i+1} \int_{x_n}^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots \int_{x_n}^{x_{n-2}} f dx_{n-1}$, e poi facendola sull'integrale $\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_a^{x_{i-1}} I_{n-i}\, dx_i$ che si cambierà nell'altro $\int_a^b dx_i \int_{x_i}^b dx_1 \int_{x_i}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_i}^{x_{i-2}} I_{n-i} dx_{i-1}$, e cambiando poi le variabili d'integrazione x_n e x_i in y e ξ avremo la formola

$$(13)\quad \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_n} f dx_n = \int_a^b d\xi \int_\xi^x dx_1 \int_\xi^{x_1} dx_2 \ldots \int_\xi^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_a^\xi dy \int_y^\xi dx_{i+1} \int_y^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots$$
$$\ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, y)\, dx_{n-1}$$

che è un'altra estensione della formola di Dirichlet.

E prendendo invece l'integrale già trasformato del secondo membro della (12), cioè

$$\int_a^b dy \int_y^b dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \ldots \int_y^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_y^{x_{i-1}} dx_i \int_y^{x_i} dx_{i+1} \ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, y)\, dx_{n-1}$$

e l'integrale $\displaystyle\int_y^{x_i} dx_{i+1} \int_y^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, y)\, dx_{n-1}$,

e indicandolo con I_{n-i-1}, se ripetiamo la trasformazione (12) sull'integrale $\displaystyle\int_y^b dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \ldots \int_y^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_y^{x_{i-1}} I_{n-i-1} dx_i$, con che questo integrale si trasforma nell'altro $\displaystyle\int_y^b dx_i \int_{x_i}^y dx_1 \int_{x_i}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_i}^{x_{i-2}} I_{n-i-1} dx_{i-1}$, basterà poi cambiare x_i in ξ per giungere alla formola

$$(14)\quad \int_y^b dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \int_y^{x_2} dx_3 \ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, y)\, dx_{n-1} = \int_y^b d\xi \int_\xi^b dx_1 \int_\xi^{x_1} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_\xi^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_y^\xi dx_{i+1} \int_y^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots x_{n-1}, y)\, dx_{n-1},$$

e quindi all'altra

$$(15)\quad \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} f(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)\, dx_n = \int_a^b dy \int_y^b d\xi \int_\xi^b dx_1 \int_\xi^{x_1} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int_\xi^{x_{i-2}} dx_{i-1} \int_y^\xi dx_{i+1} \int_y^{x_{i+1}} dx_{i+2} \ldots \int_y^{x_{n-2}} f(x_1, x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, \xi, x_{i+1} \ldots x_{n-1}, y)\, dx_{n-1},$$

che sono pure estensioni della formola (10) di Dirichlet.

Similmente si avrebbero altre formole quando le inversioni si facessero per più di due gruppi d'integrali.

673. — Tornando ora alle equazioni integrali, e fermandoci dapprima alla considerazione della equazione integrale (2), potremo applicare la formola trovata (12) ai singoli termini della formola (7) che fu data appunto pel caso della equazione (2), e così questa formola si trasformerà subito nell'altra

$$(16)\quad \varphi(x) = f(x) + \int_a^x f(y)\, K(x,y)\, dy + \int_a^x f(y) dy \int_y^x K(x, x_1)\, K(x_1, y)\, dx_1 +$$
$$+ \int_a^x f(y)\, dy \int_y^x dx_1 \int_y^{x_1} K(x, x_1)\, K(x_1, x_2)\, K(x_2, y)\, dx_2 + \ldots +$$
$$+ \int_a^x f(y)\, dy \int_y^x dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \int_y^{x_2} dx_3 \ldots \int_y^{x_{n-1}} K(x, x_1) K(x_1, x_2) K(x_2, x_3) \ldots K(x_{n-1}, x_n) K(x_n, y) dx_n + \ldots$$

ovvero

$$(17)\quad \varphi(x) = f(x) + \int_a^x f(y)\, K(x,y)\, dy + \int_a^x f(y)\, dy \int_y^x K(x, x_1)\, K(x_1, y)\, dx_1 +$$
$$+ \int_a^x f(y)\, dy \int_y^x K(x, x_1)\, dx_1 \int_y^{x_1} K(x_1, x_2)\, K(x_2, y)\, dx_2 + \ldots + \int_a^x f(y)\, dy \int_y^x K(x, x_1)\, dx_1$$
$$\int_y^{x_1} K(x_1, x_2)\, dx_2 \int_y^{x_2} K(x_2, x_3)\, dx_3 \ldots \int_y^{x_{n-2}} K(x_{n-2}, x_{n-1})\, dx_{n-1} \int_y^{x_{n-1}} K(x_{n-1}, x_n)\, K(x_n, y)\, dx_n + \ldots$$

dalla quale si vede subito che nella serie, fatta astrazione dall'integrale relativo alla variabile y, cioè dall'ultima integrazione che dovrà eseguirsi in ogni termine quando si voglia effettivamente calcolarlo, i singoli termini vengono ciascuno dal precedente mutando le variabili d'integrazione (che servono a calcolarlo) coll'aggiungere una unità all'indice di queste variabili, e poi moltiplicandolo per $K(x, x_1) dx_1$ e integrando di nuovo da y a x.

Ne segue che se porremo

$$(18)\qquad K_1(x, y) = K(x, y), \ \text{ e } \ K_i(x, y) = \int_y^x K(x, x_1)\, K_{i-1}(x_1, y)\, dx_1,$$

avremo

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x f(y)\, K_1(x, y)\, dy + \int_a^x f(y) K_2(x, y) dy + \int_a^x f(y) K_3(x, y) dy + \ldots;$$

e poichè se si considera la serie

(19) $$K_1(x, y)+K_2(x, y)+K_3(x, y)+\ldots,$$

colle considerazioni stesse che conducono a dimostrare la convergenza e convergenza in ugual grado della serie (7), si vede che sotto le stesse condizioni per il nucleo $K(x, y)$ la serie stessa (19) è convergente e convergente in ugual grado negli stessi campi per quanto grandi essi siano, e indicandone la somma con $-k(x, y)$, cioè ponendo

(20) $$k(x, y)=-\sum_1^{\infty} K_m(x, y),$$

avremo la formola

(21) $$\varphi(x)=f(x)-\int_a^x k(x, y) f(y)\,dy,$$

che dà sotto forma notevolissima la soluzione della equazione integrale (2).

674. — La funzione $k(x, y)$ ora introdotta, da alcuni è stata chiamata il *nucleo risolvente* della equazione integrale (2), e le varie funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y), \ldots, K_n(x, y), \ldots$, che si deducono successivamente con una quadratura una dall'altra, sono state chiamate i *nuclei iterati* del nucleo primitivo.

Aggiungiamo che se si applica la formola (14) all'integrale

$$K_n(x, y)=\int_y^x dx_1 \int_y^{x_1} dx_2 \ldots \int_y^{x_{n-1}} K(x, x_1) K(x_1, x_2) \ldots K(x_{n-1}, x_n)\,dx_n,$$

si trova che essa ci dà subito l'altra

(22) $$K_n(x, y)=\int_y^x K_i(x, \xi) K_{n-i}(\xi, y)\,d\xi,$$

e questa formola che vale per tutti i valori di $1, 2, \ldots, n-1$ di i quando $n \geq 2$, generalizza la seconda delle (18) e dà una relazione notevole fra i nuclei iterati.

675. — Osserviamo poi che, sotto le condizioni poste pel nucleo $K(x, y)$, la serie (19) è convergente in ugual grado nel campo che si considera per x e y, e quindi ad essa è applicabile l'integrazione definita termine a termine tanto rispetto ad x quanto rispetto ad y.

Per questo, cambiando una prima volta nella (20) x in ξ, con che si ottiene $k(\xi, y)=-\sum_1^{\infty} K_m(\xi, y)$, potremo fare la integrazione per serie rispetto a ξ fra y e x dopo avere moltiplicato tutto per $K(x, \xi)$; e così avendo riguardo alla seconda della (18) troveremo la formola seguente

$$\int_y^x K(x, \xi)\, k(\xi, y)\, d\xi=-\sum_1^{\infty} \int_y^x K(x, \xi) K_m(\xi, y)\, d\xi=-\sum_1^{\infty} K_{m+1}(x, y)=K(x, y)+k(x, y);$$

e similmente poi cambiando nella (20) y in ξ, e integrando rispetto a ξ ancora fra y e x dopo avere moltiplicato per $K(\xi, y)$, e valendosi della (22) troveremo ancora

$$\int_y^x K(\xi, y)\, k(x, \xi)\, d\xi=-\sum_1^{\infty} \int_y^x K_m(x, \xi) K(\xi, y)\, d\xi=-\sum_1^{\infty} K_{m+1}(x, y)=K(x, y)+k(x, y),$$

e potremo quindi scrivere la formola seguente data da Volterra

(23) $$K(x, y)+k(x, y)=\int_y^x K(x, \xi)\, k(\xi, y)\, d\xi=\int_y^x k(x, \xi)\, K(\xi, y)\, d\xi.$$

Questa formola non muta scambiando fra loro $K(x,y)$ e $k(x, y)$, cioè il nucleo della equazione e il nucleo risolvente; e per questo e perchè, come la (21) dà la soluzione della equazione integrale di seconda specie (2) in $\varphi(x)$ col nucleo $K(x, y)$, così la (2) può riguardarsi come la soluzione della equazione integrale di seconda specie (21) in $f(x)$ cioè

(24) $$f(x)=\varphi(x)+\int_a^x k(x, y) f(y)\, dy$$

col nucleo $k(x, y)$, queste due funzioni K e k si dicono *reciproche*. E se il nucleo primitivo $K(x, y)$ è discontinuo, il suo reciproco, a causa della (20) che ha per primo termine $-K(x, y)$ mentre gli altri sono tutti integrali, lo è pure, ma la loro somma essendo data da un integrale è continua.

676. — Le formole che abbiamo trovato per la equazione integrale di seconda specie (2) studiata da Volterra, si trasformano in quelle della equazione (4) studiata da Fredholm col supporre che i limiti inferiori e superiori di tutti gli integrali che qui compariscono siano tutti uguali ad a e b rispettivamente; e si trovano al modo stesso senza che allora vi sia neppure bisogno di applicare la formola di Dirichlet per le inversioni delle integrazioni le quali allora, per le ipotesi che si hanno intorno al nucleo $K(x, y)$, possono farsi senz'altro senza cambiare i limiti degli integrali.

Allora però un semplice esame della serie corrispondente (16) o di quella

(19) che dà il nucleo risolvente mostra che se, come supponiamo, il nucleo $K(x, y)$ è sempre numericamente inferiore a un numero finito K e x e y sono compresi fra a e b, i termini delle stesse serie, anzichè essere, all'infuori di un fattore finito, numericamente inferiori a quelli di una serie esponenziale per quanto grandi e diversi fra loro siano a e b, sono numericamente inferiori a quelli di una progressione geometrica che ha per ragione $K(b-a)$; e quindi per essere certi della convergenza in ugual grado della serie stessa bisogna allora supporre che si abbia in modo più restrittivo $K(b-a)<1$, mentre nel caso della equazione (2) studiata dal Volterra non si aveva alcuna limitazione all'infuori di quella che $K(x, y)$ si mantenesse numericamente inferiore a un numero finito nel campo nel quale si muovono x o y oltre, s'intende, alle solite condizioni d'integrabilità ecc.

Del resto, per quanto, come già osservammo al § 668, anche le equazioni (2) possano riguardarsi come caso particolare delle equazioni (4), bene si comprende come possa aversi una condizione più restrittiva nel caso di queste equazioni integrali (4), poichè basta pensare che mentre per le equazioni (2) il nucleo $K(x, y)$, e quindi per la seconda della (18) anche tutti i suoi nuclei iterati sono sempre zero per $y>x$(*) e neppure si considerano, per le equazioni (4) invece devono essere considerati anche per $y>x$ e possono allora avere valori qualunque, e tali da influire sulla convergenza della serie.

677. — Merita ora di essere notato — anche perchè questo ci gioverà in seguito — che sotto le condizioni per le quali è convergente e convergente in ugual grado la serie (19) nella quale i nuclei iterati $K_n(x, y)$ si trovano successivamente con quadrature nei modi indicati, e hanno gli integrali limitati fra y e x o fra a e b secondochè si tratterà della equazione integrale (2) o della (4), esiste sempre la funzione reciproca $k(x, y)$ del nucleo $K(x, y)$ dal quale si parte ed è data dalla (20); e la soluzione della equazione integrale corrispondente (2) è data dalla formola (21), come quella della (4) è data dall'altra

$$\varphi(x)=f(x)-\int_a^b k(x, y)\, f(y)\, dy; \tag{25}$$

ma quando le condizioni di convergenza in ugual grado della serie (19) non sono soddisfatte o si è incerti, come ad es., nel caso della equazione (4),

(*) Per questo se si fossero trovate prima le formole relative alla equazione (4), col supporre poi nelle formole stesse che $K(x,y)$ fosse zero per $y>x$, saremmo passati senz'altro a quelle precedenti che qui abbiamo trovato partendo dalla equazione (2).

quando x esce dall'intervallo pel quale $K(b-a)<1$, nulla, almeno per ora, può più assicurarsi nè rispetto all'esistenza della funzione reciproca $k(x, y)$ nè rispetto alla esistenza della soluzione della equazione integrale che si considera.

678. — S'intende però come da queste considerazioni non resti escluso che una funzione reciproca e la soluzione della equazione integrale data possano ancora esservi; e noi vedremo poi che, almeno ordinariamente, effettivamente ci sono.

Intanto possiamo fin d'ora mostrare che quando, indipendentemente dalla considerazione della serie (19), si giunge con un procedimento qualsiasi a trovare una funzione reciproca $k(x, y)$ (che soddisfi cioè alla equazione (23)(*)), con questa funzione $k(x, y)$ la formola (21) o la (25) daranno sempre la soluzione della equazione data (2) o (4).

E difatti presa ad es. la formola (21) sarà facile vedere che la funzione $\varphi(x)$ da essa definita quando la $k(x, y)$ è legata al nucleo $K(x, y)$ dalla formola (23) soddisfa alla equazione (2); perchè cambiandovi nell'integrale del secondo membro la variabile d'integrazione y in ξ, e dopo cambiando per tutto x in y e moltiplicando per $K(x, y)$ e integrando rispetto ad y fra a e x, si trova la formola

$$\int_a^x K(x, y)\, \varphi(y)\, dy=\int_a^x K(x, y)\, f(y)\, dy-\int_a^x K(x, y) dy \int_a^y k(y, \xi) f(\xi)\, d\xi;$$

e poichè applicando nell'integrale doppio del secondo membro la solita formola di Dirichlet, esso si trasforma nell'altro $\int_a^x f(\xi)\, d\xi \int_\xi^x K(x, y)\, k(y, \xi) dy$ che per la (23) può scriversi $\int_a^x f(\xi) \left\{ K(x, \xi)+k(x, \xi) \right\} d\xi$, si vede subito che basta sostituire e tenere conto della formola (21) per giungere alla equazione

$$\int_a^x K(x, y)\, \varphi(y)\, dy=\varphi(x)-f(x),$$

(*) Propriamente in questa dimostrazione si tiene conto solo di una parte della (23), e cioè soltanto della formola $K(x, y)+k(x, y)=\int_y^x K(x, \xi)\, k(\xi, y)\, d\xi$, e quindi basterebbe che fra $K(x, y)$ e $k(x, y)$ sussistesse questa equazione per essere certi che la (21) o la (25) dànno una soluzione delle equazioni (2) o (4). Per dimostrare però anche l'unicità della soluzione come si fa nel paragrafo seguente occorre tenere conto anche dell'altra parte della stessa formola (23).

la quale ci mostra che la funzione $\varphi(x)$ definita dalla (21) soddisfa effettivamente alla equazione integrale (2).

679. — Si aggiunge che quando per un dato nucleo $K(x, y)$ di una equazione integrale (2) esiste la funzione reciproca $k(x, y)$ che soddisfa alla (23), la equazione integrale stessa mentre, come ora abbiamo visto, ha sempre la soluzione (21), non può averne altre, perchè per ogni sua soluzione avremo

$$\varphi(\xi)=f(\xi)+\int_a^\xi K(\xi,y)\,\varphi(y)\,dy;$$

e se si moltiplica questa per $k(x, \xi)$ e poi s'integra rispetto a ξ fra a e x avremo la formola

$$\int_a^x k(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=\int_a^x k(x,\xi)\,f(\xi)d\xi+\int_a^x k(x,\xi)\,d\xi\int_a^\xi K(\xi,y)\varphi(y)\,dy,$$

e poichè per la formola di Dirichlet l'integrale doppio del secondo membro si trasforma nell'altro $\int_a^x \varphi(y)\,dy\int_y^x k(x,\xi)\,K(\xi,y)d\xi$ che per la (23) può scriversi $\int_a^x \varphi(y)\left\{K(x,y)+k(x,y)\right\}dy$, basta sostituire e tenere conto della ipotesi ammessa che $\varphi(x)$ sia una soluzione della (2) per dedurne subito la formola

$$\varphi(x)=f(x)-\int_a^x k(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

la quale dimostra appunto che la soluzione considerata della (2) non può essere che quella data dalla formola (21); e questo qualunque sia il modo con cui saremo giunti alla funzione reciproca $k(x, y)$, e quindi anche fuori dei casi in cui questa funzione è data dalla formola precedente (20), nei quali casi già si sapeva che la soluzione della equazione integrale era unica.

E in tutti i casi della esistenza della funzione reciproca $k(x, y)$, come la (21) è la soluzione della equazione integrale (2) in $\varphi(x)$, così la (2) è la soluzione della equazione integrale (21) in $f(x)$.

Al modo stesso, ma senza bisogno di ricorrere alla formola di Dirichlet per la inversione delle integrazioni si vede che la funzione $\varphi(x)$ definita dalla (25) soddisfa alla equazione (4) quando $k(x, y)$ è una funzione trovata con un procedimento qualsiasi che soddisfa alla equazione (23) nella quale i limiti degli integrali sono a e b; e la stessa equazione (4) non può ammettere altre soluzioni.

E così in particolare, le equazioni integrali particolari di Volterra o di Fredholm per le quali $f(x)=0$, cioè le equazioni

$$\varphi(x)=\int_a^x K(x,y)\,\varphi(y)\,dy,\ \text{e}\ \ \varphi(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

quando il nucleo $K(x, y)$ è tale che per esso esiste una funzione reciproca $k(x, y)$, ammettono la unica soluzione $\varphi(x)=0$.

680 — Infine aggiungiamo che per uno stesso nucleo $K(x,y)$ non può esistere più di una funzione reciproca $k(x, y)$, perchè se ne esistessero due $k_1(x, y)$, e $k_2(x, y)$, dovendo per ciascuna di esse essere soddisfatta la condizione (23), sottraendo e indicando con $\tau(x, y)$ la differenza $k_1(x, y)-k_2(x, y)$, se ne dedurrebbe la formola

$$\tau(x,y)=\int_y^x K(x,\xi)\,\tau(\xi,y)d\xi,$$

che considerata per ogni valore di y separatamente (come se y fosse un parametro qualsiasi) è una equazione integrale particolare il cui nucleo è $K(x, \xi)$ e che ammette la soluzione $\tau(x, y)=0$; e poichè questo nucleo ammette per la nostra ipotesi una funzione reciproca, per la dimostrazione fatta sopra non potrà esservi altra soluzione che quella ora indicata $\tau=0$ ciò che porta che sia $k_1=k_2$.

Metodo di Fredholm per la risoluzione delle equazioni integrali di seconda specie.

681. — I risultati finora ottenuti dànno la soluzione delle equazioni integrali di seconda specie quando il loro nucleo $K(x, y)$ è finito nel campo che si considera, e soddisfa alle solite condizioni sulla integrabilità e purchè al tempo stesso — nel caso della equazione considerata da Fredholm — sia soddisfatta anche un'altra condizione speciale che in sostanza si riduce a quella dell'essere convergente e convergente in egual grado la serie (19) del § 673.

Fuori di questi casi abbiamo già rilevato come non sia escluso che esista ancora quella funzione $k(x, y)$ che abbiamo chiamato la *funzione reciproca* del nucleo $K(x, y)$, e allora trovata questa funzione reciproca si avrà subito la soluzione della equazione integrale, che nel caso della equazione di Fredholm è data dalla (25) del § 677; ma da quanto finora abbiamo esposto non apparisce se e quando, fuori degli stessi casi, quella funzione reciproca esista, e come possa trovarsi; e allora resta quindi incerta anche la esistenza della soluzione della equazione integrale, nè, quando esista, si vede come possa ottenersi.

Altri procedimenti dunque sono necessarii per potere trattare anche di questi casi; e questi procedimenti interessantissimi e estremamente ingegnosi che, mentre non sono rigorosi dapprima, si riducono poi pienamente rigorosi nel seguito, furono dati da Fredholm nella sua memoria già ricordata del 1900.

682. — Fredholm prese a considerare la equazione

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy \;^{*)} \tag{1}$$

nella quale chiamasi ancora *nucleo* la funzione $K(x,y)$, ma in confronto colle equazioni dei paragrafi precedenti al nucleo che allora si aveva viene sostituito $\lambda K(x,y)$, intendendo che λ sia un parametro variabile reale o complesso; talchè *nei casi che rientrano in quelli considerati nei paragrafi precedenti,* cioè quando $K(x,y)$ per x e y compresi fra a e b non superi mai il numero finito K e sia $|\lambda|K(b-a)<1$, la equazione stessa si risolverà colle formole dei paragrafi precedenti nelle quali sia cambiato $K(x,y)$ in $\lambda K(x,y)$ e quindi $K_n(x,y)$ in $\lambda^n K_n(x,y)$, e allora per la formola di risoluzione invece della (25) del § 677 verrà ad aversi la formola seguente

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\int_a^b k(x,y,\lambda)\,f(y)\,dy, \tag{2}$$

dove $\lambda k(x,y,\lambda)$ è la funzione reciproca di $\lambda K(x,y)$ per la quale ora si ha la formola

$$k(x,y,\lambda)=-\sum_1^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,y), \tag{3}$$

per modo che questa funzione $k(x,y,\lambda)$ — che ora chiameremo la reciproca di $K(x,y)$ —, come la espressione precedente di $\varphi(x)$ vengono ad essere certamente funzioni che hanno il carattere di funzioni intere di λ finchè $|\lambda|K(b-a)<1$; e invece della (23) del § 675 si ha ora la seguente

$$K(x,y)+k(x,y,\lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,k(\xi,y,\lambda)\,d\xi=\lambda\int_a^b k(x,\xi,\lambda)\,K(\xi,y)\,d\xi. \tag{4}$$

*) D'ora innanzi anche noi considereremo sempre come FREDHOLM, queste equazioni nelle quali i limiti dell'integrale del secondo membro sono a e b, invece di quelle di Volterra nelle quali il limite superiore è x, tanto più che per queste di Volterra, per quanto già abbiamo visto, la funzione reciproca $k(x,y)$ esiste sempre quando il nucleo è sempre finito, e d'altra parte, come già dicemmo ai §§ 668 e 676, queste equazioni corrispondono a quelle fra le equazioni (1) per le quali il nucleo $K(x,y)$ è sempre zero quando $y>x$.

683. — Fuori dei detti casi però queste formole non servono più alla risoluzione della equazione (1), e per avere le formole generali che comprendono tutti i casi giova ora esporre il metodo seguente di Fredholm.

Immaginiamo perciò diviso l'intervallo (a,b) in n parti uguali, che indicheremo ciascuna con $\delta=\dfrac{b-a}{n}$, coi punti di divisione

$$y_1=a+\delta,\; y_2=a+2\delta,\; \ldots,\; y_{n-1}=a+(n-1)\delta,\; y_n=a+n\delta=b,$$

e, nel supposto dapprima che la funzione $\varphi(x)$ che soddisfa alla (1) *esista* e sia finita e integrabile fra a e b, indichiamo i suoi valori nei punti $a+\delta$, $a+2\delta,\ldots,a+(n-1)\delta$, b con $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1},\varphi_n$, e supponiamo che il nucleo $K(x,y)$ sia ancora finito, pure essendo continuo o no, per x e y compresi fra a e b, e soddisfi alle condizioni d'integrabilità e d'invertibilità delle integrazioni che sempre abbiamo poste. E ammesso questo, ricordiamo che per la definizione di Riemann per gli integrali definiti si ha

$$\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy=\lim_{n=\infty}\delta\left\{K(x,y_1)\,\varphi_1+K(x,y_2)\,\varphi_2+\ldots+K(x,y_n)\,\varphi_n\right\};$$

e si vedrà di qui che le equazioni corrispondenti ad ogni valore di x fra a e b

$$\varphi(x)-\delta\lambda\{K(x,y_1)\,\varphi_1+K(x,y_2)\,\varphi_2+\ldots+K(x,y_n)\,\varphi_n\}=f(x)$$

saranno tanto più approssimate quanto più n sarà grande.

Considerando dunque queste equazioni pei valori $x_1=a+\delta$, $x_2=a+2\delta,\ldots$, $x_{n-1}=a+(n-1)\delta$, $x_n=a+n\delta=b$ corrispondenti ai punti di divisione dell'intervallo (a,b), e indicando con $f_1,f_2,\ldots,f_{n-1},f_n$ i valori di $f(x)$ in questi punti e in generale con $K_{p,q}$ il valore $K(x_p,y_q)$ di $K(x,y)$ nel punto (x_p,y_q), e ponendo inoltre per comodità di scrittura $-\delta\lambda=\beta$, avremo il seguente sistema di n equazioni approssimate

$$\left\{\begin{array}{lllll}
(1+\beta K_{1,1})\,\varphi_1+ & \beta K_{1,2}\;\varphi_2+ & \beta K_{1,3}\;\varphi_3+\ldots+ & \beta K_{1,n}\;\varphi_n=f_1, \\
\beta K_{2,1}\;\varphi_1+ & (1+\beta K_{2,2})\,\varphi_2+ & \beta K_{2,3}\;\varphi_3+\ldots+ & \beta K_{2,n}\;\varphi_n=f_2, \\
\beta K_{3,1}\;\varphi_1+ & \beta K_{3,2}\;\varphi_2+ & (1+\beta K_{3,3})\,\varphi_3+\ldots+ & \beta K_{3,n}\;\varphi_n=f_3, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\beta K_{n,1}\;\varphi_1+ & \beta K_{n,2}\;\varphi_2+ & \beta K_{n,3}\,\varphi_3+\ldots+ & (1+\beta K_{n,n})\,\varphi_n=f_n;
\end{array}\right. \tag{5}$$

quindi indicando con $D_n(\lambda)$ il determinante dei coefficienti, cioè ponendo

$$(6)\qquad D_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\beta K_{1.1} & \beta K_{1.2} & \beta K_{1.3}\dots & \beta K_{1.n} \\ \beta K_{2.1} & 1+\beta K_{2.2} & \beta K_{2.3}\dots & \beta K_{2.n} \\ \beta K_{3.1} & \beta K_{3.2} & 1+\beta K_{3.3}\dots & \beta K_{3.n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta K_{n.1} & \beta K_{n.2} & \beta K_{n.3}\dots & 1+\beta K_{n.n} \end{vmatrix},$$

dove $\beta=-\delta\lambda$, i valori approssimati $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ di $\varphi(x)$ nei punti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ verranno dati in modo unico e determinato per ogni valore di λ pel quale $D_n(\lambda)$ non è zero, e saranno quozienti di funzioni razionali intere di λ delle quali la funzione al denominatore sarà il determinante $D_n(\lambda)$ e sarà al più di grado n in λ, e la funzione al numeratore sarà sempre un altro determinante, per modo che *pei valori di* λ *pei quali* $D_n(\lambda)$ *non è zero*, quando la equazione data (1) sia senza il termine $f(x)$, cioè sia come si dice una *equazione omogenea,* i valori stessi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ saranno tutti zero. Invece pei valori di λ pei quali $D_n(\lambda)=0$ occorrerà o che la equazione data sia omogenea nel qual caso i detti valori di $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ potranno anche non essere tutti zero, e non risulteranno perfettamente determinati, o occorrerà che anche i determinanti dei numeratori vengano tutti zero, nel qual caso sarà da applicarsi il teorema di Capelli sui sistemi di equazioni lineari, ecc.

Supponendo poi che n cresca indefinitamente, apparisce evidentemente *probabile* che i valori di $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ che soddisfano ai successivi sistemi di equazioni approssimate (5) tendano verso i valori di $\varphi(x)$ che soddisfano alla equazione data (1) in ogni punto x fra a e b, per modo dunque che questi valori vengano così a risultare come limiti di quozienti di determinanti di un ordine n crescente all'infinito e quindi come limiti di quozienti di polinomii interi in λ di grado grande quanto si vuole; ma per quanto possa dirsi *probabile* che il risultato che così si ottiene sia giusto e che i valori che così ne risultano per $\varphi(x)$ siano quelli della funzione cercata, bene si comprende che questo non potrà sicuramente affermarsi senza che venga dimostrato rigorosamente che il passaggio al limite per $n=\infty$ è ammissibile. E rimarrà poi anche ad assicurarsi della *effettiva esistenza* della soluzione della equazione (1) che sopra è stata ammessa senz'altro, e senza che nulla ci assicurasse di questa esistenza.

684. — E questo appunto fece Fredholm sviluppando il determinante $D_n(\lambda)$ e quelli dei numeratori secondo le potenze di λ, e valendosi di un teorema sui determinanti dovuto al sig. Hadamard *); e così faremo ora noi pure, seguendo appunto il processo di *Fredholm salvo leggiere modificazioni.*

*) Il teorema relativo a un limite superiore del modulo dei determinanti che Hadamard dette nel 1893 nel *Bulletin. des sc. math. et astron.* 2.ª serie vol. 17. pag. 240,

Si osservi perciò che per la formola di Maclaurin applicata al determinante $D_n(\lambda)$ considerato come una funzione di β, si ha finchè n è finito

$$D_n(\lambda)=D_n(0)+\frac{\beta}{1}D'_n(0)+\frac{\beta^2}{1.2}D''_n(0)+\dots+\frac{\beta^n}{\pi(n)}D^n(0),$$

e che fu poi dimostrato anche da Wirtinger nel 1907 nei *Monatshefte f. math. u. physik* vol. 18 pag. 158 e nel ricordato *Bull. des sc. math. et astron.*, 2.ª ser. vol. 31. pag. 175, e da Fischer nell'*Archiv. der math. u. phys.* 3.ª serie, vol. 13 (1908) pag. 32, nel caso in cui i suoi elementi sono tutti reali può dimostrarsi nel modo seguente.

Si abbia il determinante ad elementi reali

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2}\dots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2}\dots & a_{2.n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n.1} & a_{n.2}\dots & a_{n.n} \end{vmatrix};$$

incominceremo col dimostrare che *se in questo determinante* Δ *la somma* $\sum_1^n {}_s\, a^2_{r.s}$ *dei quadrati degli elementi di ogni linea è l'unità, si avrà sempre* $|\Delta|\leq 1$.

Per questo osserviamo che considerando gli elementi del determinante come coordinate variabili dei punti di uno spazio di n^2 dimensioni limitato dalle indicate n condizioni

$$(\alpha)\qquad a^2_{r.1}+a^2_{r.2}+\dots+a^2_{r.n}=1,\ (r=1, 2\dots, n),$$

esso potrà riguardarsi come una funzione finita, continua e derivabile di quegli elementi, e esso avrà necessariamente almeno un punto di massimo e uno di minimo nello stesso spazio; e, pure non escludendo *a priori* che fra i punti di massimo e di minimo possano essercene anche di quelli pei quali il determinante sia zero, è certo però che ve ne saranno alcuni nei quali il valore assoluto del determinante sarà almeno l'unità, perchè prendendo ad es. in esso gli elementi della diagonale principale tutti uguali a ± 1 e gli altri uguali a zero, il determinante viene ad essere appunto in certi casi uguale ad 1 e in altri casi uguale a -1.

Ora nei punti di massimo e di minimo, comunque ci si muova, ma sempre però tenendo conto delle condizioni (α), il differenziale del determinante Δ sarà zero: e quindi, in particolare, facendo muovere soltanto gli elementi della linea r^a, e indicando in modo generale con $\Delta_{r.s}$ l'elemento reciproco di $a_{r.s}$, avremo la equazione

$$\Delta_{r.1}da_{r.1}+\Delta_{r.2}da_{r.2}+\dots+\Delta_{r.n}da_{r.n}=0,$$

e insieme a questa, poichè le $a_{r.1}, a_{r.2}, \dots, a_{r.n}$ devono soddisfare alla condizione (α), avremo anche l'altra

$$a_{r.1}da_{r.1}+a_{r.2}da_{r.2}+\dots+a_{r.n}da_{r.n}=0.$$

Di qui osservando che fra le $da_{r.1}, da_{r.2}, \dots, da_{r.n}$ non vi sono altri legami, si vede che nei punti di massimo o minimo dovremo avere le derivate di $D_n(\lambda)$ intendendole prese rispetto a β e fattoci poi $\beta=0$; e quindi calcolandole successivamente col derivare colonna per colonna (o linea per linea) il determinante (6) e quelli che si ottengono successivamente colle

---

$$\Delta_{r,1}=\mu a_{r,1},\ \Delta_{r,2}=\mu a_{r,2},\dots,\Delta_{r,n}=\mu a_{r,n},$$

indicando con μ un fattore che potrà dipendere da r, ma che per un dato r e per lo stesso punto, dovrà essere lo stesso per tutte queste formole e potrà variare solo da un punto di massimo o minimo ad un altro; e questo fattore non potrà essere zero, altro che in quei punti di massimo o di minimo, quando vi siano, pei quali il determinante sia zero.

Non occupandoci di questi punti, se pure potranno esserci, e certo che per gli altri punti di massimo o di minimo che già abbiamo detto che vi saranno certamente, il fattore μ sarà diverso da zero; e poichè moltiplicando queste equazioni per $a_{r,1}, a_{r,2},\dots,a_{r,n}$ e sommandole con avere riguardo alla condizione (α), si troverà che $\mu=\Delta$, se ne dedurrà intanto in generale che negli stessi punti sarà $\Delta_{r,s}=\Delta a_{r,s}$.

Formando dunque il determinante degli elementi reciproci $\Delta_{r,s}$ e ricordando che esso è sempre uguale a Δ^{n-1}, mentre per le formole trovate risulta che negli indicati punti di massimo e di minimo è Δ^{n+1}, e in questi punti Δ non è zero, se ne deduce che in quei punti sarà $\Delta^2=1$, e quindi $\Delta=\pm 1$, con che resta appunto dimostrato quanto volevamo.

Supposto ora in generale che nel determinante Δ si abbia

$$a^2_{r,1}+a^2_{r,2}+\dots+a^2_{r,n}=\sigma^2_r,$$

e che per nessuna linea tutti gli elementi siano zero, le σ_r (che intenderemo prese positivamente) saranno tutte diverse da zero, e potremo formare il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{1,1}}{\sigma_1} & \frac{a_{1,2}}{\sigma_1} & \dots & \frac{a_{1,n}}{\sigma_1} \\ \frac{a_{2,1}}{\sigma_2} & \frac{a_{2,2}}{\sigma_2} & \dots & \frac{a_{2,n}}{\sigma_2} \\ . & . & . & . \\ \frac{a_{n,1}}{\sigma_n} & \frac{a_{n,2}}{\sigma_n} & \dots & \frac{a_{n,n}}{\sigma_n} \end{vmatrix}$$

che rientrerà nel caso del determinante considerato sopra, e ci porterà quindi a concludere intanto che *per ogni determinante Δ a elementi reali si ha sempre $|\Delta|\leq\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$, essendo $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ le radici quadrate delle somme dei quadrati degli elementi delle singole linee.*

Così se gli elementi delle singole linee del determinante dato a elementi reali Δ in valore assoluto non supereranno respettivamente i numeri $M_1, M_2,\dots, M_r,\dots M_n$, allora avendosi evidentemente $\sigma_r\leq\sqrt{n}\,M_r$, sarà $|\Delta|\leq\sqrt{n^n}\,M_1 M_2\dots M_n$.

E *se M sarà il massimo valore assoluto degli elementi (supposti reali) del determinante Δ, avremo $|\Delta|\leq\sqrt{n^n}\,M^n$*; e in questo appunto consiste il teorema di HADAMARD.

derivazioni, e osservando che nei successivi determinanti che vengono così a comporre le varie derivate, nelle colonne che contengono β l'elemento che non si annulla per $\beta=0$ è un elemento principale che allora si riduce ad 1, si troverà facilmente che *)

$$(7)\qquad D_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1}\sum_1^n\delta K(x_h,x_h)+\frac{\lambda^2}{1.2}\sum_{h,i}\delta^2\begin{vmatrix} K(x_h,y_h) & K(x_h,y_i) \\ K(x_i,y_h) & K(x_i,y_i) \end{vmatrix}-$$

$$-\frac{\lambda^3}{1.2.3}\sum_{h,i,j}\delta^3\begin{vmatrix} K(x_h,y_h) & K(x_h,y_i) & K(x_h,y_j) \\ K(x_i,y_h) & K(x_i,y_i) & K(x_i,y_j) \\ K(x_j,y_h) & K(x_j,y_i) & K(x_j,y_j) \end{vmatrix}+\dots,$$

intendendo che nelle somme i numeri $h, i, j,\dots$ siano i numeri $1, 2,\dots,n-1, n$ *disposti* uno ad uno, due a due, tre a tre,... *in tutti i modi possibili* **); e di qui passando al limite per $n=\infty$ se, come poi vedremo applicando il teorema di Hadamard, la serie che ne risulta sarà convergente, si giungerà come limite alla funzione

---

*) FREDHOLM ha introdotto la notazione abbreviata $f\begin{pmatrix} x_1, x_2,\dots,x_n \\ y_1, y_2,\dots,y_n \end{pmatrix}$ per rappresentare il determinante

$$\begin{vmatrix} f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) \dots & f(x_1,y_n) \\ f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) \dots & f(x_2,y_n) \\ . & . & . \\ f(x_n,y_1) & f(x_n,y_2),\dots & f(x_n,y_n \end{vmatrix};$$

e con questa notazione le formole del testo verrebbero scritte più brevemente.

**) Per trovare lo sviluppo (7) di $D_n(\lambda)$ ci siamo valsi dello sviluppo dello stesso $D_n(\lambda)$ per mezzo della formola di MACLAURIN; però questo sviluppo è notissimo e si trova anche negli ordinarii trattati sui determinanti (V. ad es. BALTZER *Théorie et applications des déterminants* trad. par Houel pag. 31. Paris. 1861).

I denominatori che si trovano nello stesso sviluppo (7), a calcoli fatti, vengono a sparire, perchè ad es. nel termine che ha il fattore $\frac{\lambda^p}{\pi(p)}$ ogni determinante viene ad essere ripetuto tante volte quante sono le permutazioni di p lettere cioè appunto $\pi(p)$. Ed è naturale che questo avvenga perchè sviluppando al modo ordinario, come appunto fa il BALTZER, il determinante (6) che rappresenta $D_n(\lambda)$ non si presentano affatto denominatori. Qui, e anche nella espressione che segue delle quantità indicate poi con $D_{\nu,\mu}$, fa comodo la presenza dei denominatori per le formole che se ne vogliono dedurre.

$$(8)\quad D(\lambda)=1-\lambda\int_a^b K(\xi_1,\xi_1)d\xi_1+\frac{\lambda^2}{1.2}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-$$

$$-\frac{\lambda^3}{1.2.3}\int_a^b\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2) & K(\xi_1,\xi_3)\\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2) & K(\xi_2,\xi_3)\\ K(\xi_3,\xi_1) & K(\xi_3,\xi_2) & K(\xi_3,\xi_3)\end{vmatrix}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3+\dots$$

Invece pei determinanti numeratori si osserverà che quello ad es. che corrisponde a φ_μ non è che la espressione

$$f_1 D_{1,\mu}+f_2 D_{2,\mu}+\dots+f_\nu D_{\nu,\mu}+\dots+f_n D_{n,\mu}$$

dove $D_{\nu,\mu}$ si ha dal determinante (6) che rappresenta $D_n(\lambda)$ prendendo in esso l'elemento reciproco di $\beta K_{\nu,\mu}$ o di $1+\beta K_{\nu,\nu}$ secondochè ν è diverso o uguale a μ, e quindi è sempre la derivata di $D_n(\lambda)$ presa rispetto a $K_{\nu,\mu}$ e divisa per β.

Dal valore precedente (7) di $D_n(\lambda)$ si avrà dunque il valore di $D_{\nu,\mu}$ derivando rispetto a $K_{\nu,\mu}$ e poi dividendo per β; e noi per determinare questa derivata ci limiteremo, come è naturale, a considerare nei varî termini della (7) soltanto quelli che nei determinanti che vi figurano contengono l'elemento $K_{\nu,\mu}$ o $K(x_\nu, y_\mu)$.

Fra questi determinanti, quelli ad es. di ordine $p\geq 2$ potranno intendersi posti sotto la forma

$$\begin{vmatrix}K(x_\mu,y_\mu) & K(x_\mu,y_\nu)\dots\\ K(x_\nu,y_\mu) & K(x_\nu,y_\nu)\dots\\ \dots & \dots\end{vmatrix}$$

dove nelle $p-2$ linee e $p-2$ colonne non scritte figureranno $p-2$ degli indici $1,2,\dots$, diversi da μ e da ν e *disposti* nell'ordine che più ci piace; per modo che tenendo fermi così i quattro primi elementi che abbiamo scritto, ciascuno dei determinanti che così si avranno verrà ora ripetuto $\pi(p-2)$ volte invece di $\pi(p)$; e quindi per avere i termini della (7) che contengono quei determinanti di ordine p che ora sono da considerarsi, basterà prendere la somma di tutti i determinanti ora indicati moltiplicata per $\dfrac{\lambda^p\delta^p}{\pi(p-2)}$.

Colla derivazione dunque rispetto a $K(x_\nu, y_\mu)$ e poi colla divisione per β, essendo $\beta=-\lambda\delta$, questa somma darà luogo all'altra

$$\frac{\lambda^{p-1}}{\pi(p-2)}\sum\delta^{p-1}\begin{vmatrix}K(x_\mu,y_\nu) & K(x_\mu,y_i)\dots\\ K(x_i,y_\nu) & K(x_i,y_i)\dots\\ \dots & \dots\end{vmatrix}$$

quindi si può ora evidentemente affermare che *quando* μ *e* ν *sono diversi fra loro* si può scrivere

$$-\frac{1}{\beta}D_{\nu,\mu}=K(x_\mu,y_\nu)-\lambda\sum_i\delta\begin{vmatrix}K(x_\mu,y_\nu) & K(x_\mu,y_i)\\ K(x_i,y_\nu) & K(x_i,y_i)\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{\lambda^2}{1.2}\sum_{i,j}\delta^2\begin{vmatrix}K(x_\mu,y_\nu) & K(x_\mu,y_i) & Kx_\mu,y_j)\\ K(x_i,y_\nu) & K(x_i,y_i) & K(x_i,y_j)\\ K(x_j,y_\nu) & K(x_j,y_i) & K(x_j,y_j)\end{vmatrix}-\dots;$$

e ora facendo crescere n all'infinito, e intendendo che allora x_μ e y_ν tendano verso x e y, si vede subito che se (come poi si troverà applicando il teorema di Hadamard) la serie che ne risulta sarà convergente, come valore limite della espressione di $-\frac{1}{\beta}D_{\nu,\mu}$ o $\frac{D^{\nu,\mu}}{\lambda\delta}$ avremo la funzione seguente che indicheremo con $D(x,y,\lambda)$

$$(9)\quad D(x,y,\lambda)=K(x,y)-\lambda\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1)\\ K(\xi,y) & K(\xi_1,\xi_1)\end{vmatrix}d\xi_1+\frac{\lambda^2}{1.2}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1) & K(x,\xi_2)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,y) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-\dots,$$

mentre *quando si abbia* $\mu=\nu$, allora essendo $D_{\mu,\mu}$ un determinante che viene da $D_n(\lambda)$ sopprimendovi la linea e la colonna μ^e, s'intende subito che il suo limite sarà ancora precisamente la funzione limite $D(\lambda)$ superiormente trovata.

Prendiamo ora la nota formola di risoluzione del sistema di equazioni lineari (5) per φ_μ, quando il loro determinante $D_n(\lambda)$ non è zero, cioè prendiamo la formola

$$\varphi_\mu=\frac{f_1 D_{1,\mu}+f_2 D_{2,\mu}+\dots+f_\mu D_{\mu,\mu}+\dots+f_n D_{\mu,\mu}}{D_n(\lambda)},$$

e in questa nel secondo membro consideriamo separatamente dagli altri il termine $\dfrac{f_\mu D_{\mu,\mu}}{D_n(\lambda)}$, che, per quanto ora abbiamo osservato, al crescere indefinito di n tende verso il limite di f_μ cioè verso $f(x)$.

Tenendo conto di questo e anche della circostanza che dalla espressione precedente (9) di $D(x, y, \lambda)$ risulta che questa funzione si comporta come $K(x, y)$ per quanto riguarda la continuità e l'integrabilità rispetto alle variabili x, y, si vedrà subito ora che col passaggio al limite per $n = \infty$ nella formola precedente che dà φ_μ si giunge alla formola

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(\xi) \frac{D(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)} d\xi; \tag{10}$$

per la quale però, come abbiamo detto, resta ancora a dimostrarsi che le serie che figurano nei secondi membri delle (8) e (9) sono convergenti, senza di che non saremo neppure sicuri che il secondo membro della formola trovata (10) abbia un significato.

Ma anche quando avremo dimostrato questo, se è certo che, pel modo che abbiamo tenuto per giungere alla formola stessa (10), si potrà presumere che essa dia la formola di risoluzione della equazione integrale (1) per tutti i valori di λ pei quali $D(\lambda)$ non è zero, e quindi anche fuori dei casi considerati nei paragrafi precedenti, s'intende però che non potrà affatto affermarsi questo con tutta sicurezza, perchè il procedimento che abbiamo usato non presenta tutto il rigore desiderabile.

Ed invero, questo procedimento è ben lungi dall'essere rigoroso, sia perchè in esso abbiamo ammessa senz'altro l'esistenza di una soluzione della equazione (1) in ogni caso, mentre di tale esistenza a priori non si può essere certi affatto, sia perchè, anche ammesso questo, le equazioni (5), come già dicemmo, non potevano riguardarsi che come equazioni approssimate, e infine perchè abbiamo fatto alcuni passaggi al limite per $n = \infty$, dei risultati dei quali non possiamo dirci affatto sicuri; talchè, se, come testè dicemmo, può apparire probabile che la (10) ci dia, almeno in molti casi, la soluzione cercata della (1), questo però senza ulteriori studî, o senza le opportune verifiche, non può ancora affatto sicuramente affermarsi.

685. — Intanto però, che le serie (8) e (9) siano effettivamente convergenti e anche convergenti in ugual grado per tutti i valori di x e y fra a e b (a e b incl.) e qualunque sia λ (reale o complesso), e finchè a e b sono tali che per ogni sistema di valori di x e y fra a e b il nucleo $K(x, y)$ della (1) si mantiene numericamente inferiore a un numero finito K, risulta subito dal teorema di Hadamard.

Per questo teorema infatti i moduli dei termini generali delle due serie (8) e (9) sono sempre inferiori respettivamente ai termini corrispondenti delle due serie $\sum \frac{\sqrt{n^n}\, K^n (b-a)^n}{\pi(n)} |\lambda|^n$, e $\sum \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}\, K^{n+1} (b-a)^n}{\pi(n)} |\lambda|^n$ che sono

convergenti perchè il rapporto di un termine al precedente nella prima è $\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \frac{K(b-a)|\lambda|}{\sqrt{n+1}}$, e nella seconda è $\sqrt{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \frac{K(b-a)|\lambda|}{\sqrt{n+1}}$, e nell'un caso e nell'altro ha per limite zero per $n = \infty$; e questo basta evidentemente per assicurarci che le stesse serie (8) e (9) sono convergenti e convergenti in ugual grado pei valori indicati di x e y qualunque sia λ (reale o complesso).

686. — Dimostrato questo, e resi così sicuri che il secondo membro della formola (10) ha un significato per tutti i valori di λ pei quali $D(\lambda)$ non è zero, e pei valori di x fra a e b (a e b incl.), resta ad assicurarsi che la funzione $\varphi(x)$ determinata dalla stessa formola (10) soddisfa effettivamente alla equazione integrale (1) per tutti gli indicati valori di λ e di x; però, in seguito a quanto dicemmo in modo generale al § 678, per rendersi sicuri anche di questo basterà dimostrare che la funzione $-\frac{D(x, \xi, \lambda)}{D(\lambda)}$ che figura con segno cambiato sotto l'integrale della (10) è quella funzione $k(x, y, \lambda)$ che al § 682 chiamammo la reciproca di $K(x, y)$, cioè che essa soddisfa alla equazione (4) dello stesso § 682, nella quale venne trasformata la equazione (23) del § 675 dopo cambiato $K(x, y)$ in $\lambda K(x, y)$, e i limiti x e y in a e b.

In altri termini dunque basterà dimostrare che le funzioni $D(\lambda)$ e $D(x, y, \lambda)$ soddisfano alla equazione

$$D(x, y, \lambda) - K(x, y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) D(\xi, y, \lambda) d\xi = \lambda \int_a D(x, \xi, \lambda) K(\xi, y) d\xi; \tag{11}$$

e questo lo dimostreremo ora nel modo seguente.

687. — Indicando con a_n e A_n i coefficienti di $\frac{\lambda^n}{\pi(n)}$ nelle espressioni (8) e (9) che abbiamo trovate per $D(\lambda)$ e $D(x, y, \lambda)$, e scrivendo quindi semplicemente

$$D(\lambda) = a_0 + a_1 \frac{\lambda}{1} + a_2 \frac{\lambda^2}{1.2} + \ldots + a_n \frac{\lambda^n}{\pi(n)} + \ldots,$$

$$D(x, y, \lambda) = A_0 + A_1 \frac{\lambda}{1} + A_2 \frac{\lambda^2}{1.2} + \ldots + A_n \frac{\lambda^n}{\pi(n)} + \ldots,$$

osserveremo che, sviluppando secondo gli elementi della prima linea il determinante che figura sotto l'integrale in A_n quando $n \geq 1$ si trova subito intanto la formola seguente

$$A_n=(-1)^n K(x,y)\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\ldots K(\xi_1,\xi_n) \\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\ldots K(\xi_2,\xi_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ K(\xi_n,\xi_1) & K(\xi_n,\xi_2)\ldots K(\xi_n,\xi_n) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n+$$

$$+(-1)^n\sum_1^n{}_s(-1)^s\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,\xi_s) \begin{vmatrix} K(\xi_1,y)\,K(\xi_1,\xi_1)\ldots K(\xi_1,\xi_{s-1})\,K(\xi_1,\xi_{s+1})\ldots K(\xi_1,\xi_n) \\ K(\xi_2,y)\,K(\xi_2,\xi_1)\ldots K(\xi_2,\xi_{s-1})\,K(\xi_2,\xi_{s+1})\ldots K(\xi_2,\xi_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ K(\xi_n,y)\,K(\xi_n,\xi_1)\ldots K(\xi_n,\xi_{s-1})\,K(\xi_n,\xi_{s+1})\ldots K(\xi_n,\xi_n) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n,$$

nella quale il primo termine non è che $K(x,y)\ a_n$.

Osserviamo poi che cambiando in questa formola sotto gli integrali che figurano nei termini della somma $\sum_1^n$ la variabile d'integrazione ξ_s in ξ, e poi le variabili $\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \ldots, \xi_n$ in $\xi_s, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ respettivamente, e dopo spostando nei singoli determinanti la linea s^a fino a portarla al posto della prima, con che dovremo fare $s-1$ successivi cambiamenti di segno, si vede che gli n termini della stessa somma vengono tutti uguali fra loro e a $\int_a^b K(x,\xi)\,A_{n-1}\,d\xi$; quindi si conclude che sarà

$$A_n=K(x,y)\,a_n+n\int_a^b K(x,\xi)\,A_{n-1}\,d\xi,$$

e

$$A_n\frac{\lambda^n}{\pi(n)}=K(x,y)\,a_n\frac{\lambda^n}{\pi(n)}+\lambda\int_a^a K(x,\xi)\,A_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{\pi(n-1)}d\xi;$$

e ora facendo $n=1, 2, \ldots$ e sommando le formole che se ne ottengono insieme all'altra $A_0=K(x,y)$, coll'osservare che le serie (8) e (9) sono convergenti in ugual grado, si troverà intanto la formola seguente

$$D(x,y,\lambda)-K(x,y)\,D(\lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,D(\xi,y,\lambda)\,d\xi,$$

per la quale la prima parte della formola (11) rimarrà già dimostrata.

Facendo poi in A_n lo sviluppo del determinante secondo gli elementi della prima colonna, si dimostrerà al modo stesso anche la seconda parte

della stessa formola (11); e questo basta, come abbiamo detto, perchè rimanga dimostrato rigorosamente, come volevamo, che *la formola* (10) *trovata sopra dà la soluzione cercata della equazione integrale* (1) *per tutti i valori reali e complessi di* λ, *ad eccezione di quelli che annullano la funzione intera* $D(\lambda)$; *e resta pure dimostrato che fuori di questi valori di* λ *pei quali* $D(\lambda)=0$ *la funzione reciproca* $K(x,y,\lambda)$ *di* $K(x,y)$ *è sempre* $-\dfrac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}$.

La funzione intera $D(\lambda)$ che ha tanta importanza nello studio delle equazioni integrali, e per la quale potrebbero dimostrarsi anche molte particolarità interessanti, è stata detta la *funzione caratteristica o il determinante* del nucleo $\lambda K(x,y)$; e i valori (reali o complessi) di λ pei quali $D(\lambda)=0$ sono stati detti *i valori caratteristici* del nucleo.

688. — Naturalmente poi la formola (10) che abbiamo trovata ora come soluzione della equazione integrale (1), finchè $|\lambda|K(b-a)<1$ o più generalmente finchè la serie (3) del § 682 è convergente in ugual grado, non può che combinare colla soluzione che si dette nei paragrafi precedenti, cioè colla stessa (2) del § 682 che viene per serie di potenze intere e positive di λ; e questo è perchè, come già notammo al § 679 (pag. 934), quando la funzione reciproca esiste la equazione integrale ha sempre una soluzione e questa è unica, come è unica la funzione reciproca la quale perciò allora, oltre a potersi porre sotto la forma precedente $-\dfrac{D(x,y,\lambda)}{D(\lambda)}$, può porsi anche sotto la forma (3).

E a meno che insieme a $D(\lambda)=0$ non sia anche $D(x,y,\lambda)=0$, il minimo modulo di λ pel quale $D(\lambda)=0$ non può essere inferiore al numero λ_0 pel quale si ha $\lambda_0 K(b-a)=1$, cioè a $\dfrac{1}{K(b-a)}$.

689. — Aggiungiamo che siccome la (11) è stata dimostrata in modo generale e quindi anche pei valori $\bar\lambda$ di λ pei quali $D(\lambda)=0$, così per questi valori avremo la formola

$$(12)\qquad D(x,y,\bar\lambda)=\bar\lambda\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y,\bar\lambda)d\xi=\bar\lambda\int_a^b D(x,\xi,\bar\lambda)K(\xi,y)d\xi;$$

e se anche per uno di questi valori $\bar\lambda$ di λ esisterà una soluzione della (1), allora avendosi

$$\varphi(\xi)=f(\xi)+\bar\lambda\int_a^b K(\xi,y)\,\varphi(y)dy,$$

moltiplicando questa per $D(x, \xi, \bar{\lambda})\, d\xi$ e integrando rispetto a ξ fra a e b, si troverà la formola

$$\int_a^b D(x, \xi, \bar{\lambda})\, \varphi(\xi) d\xi = \int_a^b f(\xi) D(x, \xi, \bar{\lambda}) d\xi + \bar{\lambda} \int_a^b d\xi \int_a^b D(x, \xi, \bar{\lambda}) K(\xi, y) \varphi(y) dy =$$

$$= \int_a^b f(\xi) D(x, \xi, \bar{\lambda}) d\xi + \bar{\lambda} \int_a^b \varphi(y) dy \int_a^b D(x, \xi, \bar{\lambda}) K(\xi, y) d\xi,$$

dalla quale a causa della formola precedente (12) si vede subito che sotto la fatta ipotesi avremo $\int_a^b f(\xi) D(x, \xi, \bar{\lambda}) d\xi = 0$; e si conclude perciò che *onde per un valore (reale o complesso) $\bar{\lambda}$ che annulla $D(\lambda)$ la equazione integrale* (1) *ammetta una soluzione, è necessario che sia soddisfatta la condizione $\int_a^b f(\xi) D(x, \xi, \bar{\lambda}) d\xi = 0$ per tutti i valori di x fra a e b.*

Questa condizione corrisponde pienamente a quella che nel caso degli ordinarii sistemi di equazioni lineari si richiede perchè questi sistemi di equazioni possano ammettere soluzioni.

690. — Altre analogie si hanno coi sistemi di equazioni lineari, come ad es. quella che pei valori $\bar{\lambda}$ che annullano la funzione $D(\lambda)$, la equazione integrale (1) o non ammette affatto soluzioni finite o *ne ammette un numero infinito;* ma su queste ricerche che in parte richiedono la conoscenza della teoria delle funzioni di variabile complessa, e in parte si basano su quelle relative alle equazioni integrali *omogenee* $\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$, non possiamo ora fermarci, e rimandiamo per esse alle memorie e monografie relative.

Facendo $\lambda = 1$ nelle formole che abbiamo trovato, esse vengono relative al caso della prima equazione considerata da Fredholm, cioè della equazione (4) del § 668

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy,$$

per la quale quindi ora può dirsi che essa ammette sempre una soluzione e una sola data dalla formola stessa, fatta solo eccezione pei casi dei nuclei

$K(x, y)$ pei quali la funzione corrispondente $D(\lambda)$ si annulla appunto per $\lambda = 1$, cioè pei quali la serie alla quale si riduce il secondo membro della (8) col farvi $\lambda = 1$ risulta uguale allo zero.

691. — Tutto questo nel caso delle equazioni (1) considerate da Fredholm per le quali i limiti a e b degli integrali sono gli estremi dell'intervallo (a, b) nel quale si muovono x e y.

Nel caso delle equazioni corrispondenti a quelle studiate da Volterra

$$\varphi x() = f(x) + \int_a^x K(x, y)\, \varphi(y) dy,$$

siccome queste, come più volte abbiamo detto, corrispondono a quelle studiate da Fredholm pel caso in cui $K(x, y)$ è sempre zero per $y > x$, così coll'avere riguardo ai valori diversi che allora dovranno avere i limiti degli integrali semplici e multipli che figurano nelle espressioni (8) e (9) di $D(\lambda)$ e di $D(x, y, \lambda)$, e al dovere fare sempre $K(\xi_r, \xi_s) = 0$ quando $\xi_s > \xi_r$, con alcune osservazioni che quì non staremo a fare si giunge a trovare che per qualunque valore di λ si ha $D(\lambda) = e^{-c}$ essendo $c = \lambda \int_a^x K(x, x) dx$ e quindi $D(\lambda)$ non si annulla mai per valori finiti di λ; mentre $D(x, y, \lambda)$ si riduce sempre alla forma

$$D(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda K_1(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y) + \lambda^3 N_3(x, y) + \ldots$$

essendo le $K_1, K_2, K_3, \ldots$ i nuclei iterati di $K(x, y)$ dei quali parlammo al § 674 (pag. 930); talchè per le equazioni stesse si ritrovano qualunque sia λ (senza l'eccezione dei valori di λ pei quali sia $D(\lambda) = 0$ che potevano aversi nel caso di Fredholm) i risultati del § 673 nei quali soltanto sia cambiato $K(x, y)$ in $\lambda K(x, y)$, e $K_n(x, y)$ in $\lambda^n K_n(x, y)$.

692. — Aggiungiamo infine che sulle equazioni integrali di seconda specie altri e importantissimi studî sarebbero da segnalare come ad es. quelli relativi al caso dei valori di λ pei quali $D(\lambda) = 0$ nelle formole precedenti, quelli relativi alle equazioni integrali omogenee, e in particolar modo quelli fatti da molti e prima di ogni altro da Hilbert e Schmidt per le equazioni integrali per le quali il nucleo $K(x, y)$ o $\lambda K(x, y)$ è una funzione simmetrica di x e y, o per quelle per le quali il nucleo è della forma

$$h_1(y) K_1(x) + h_2(y) K_2(x) + \ldots + h_i(y) K_i(x),$$

come nei casi ai quali accennammo nella lunga nota del § 671 (pag. 923-26)

E per questi studii occorre considerare anche i sistemi di funzioni che diconsi *ortogonali*, cioè *i sistemi di funzioni, in numero finito o infinito,*

(13) $$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots ,$$

che per x compreso fra a e b sono reali e finite e continue e non sono sempre zero, mentre per esse si ha sempre $\int_a^b u_m(x)u_n(x)dx = 0$ *qualunque siano i numeri interi m e n purchè diversi fra loro;* e che, per le tante loro proprietà tengono un posto importantissimo negli studî per classi speciali di equazioni integrali, e in quelli sulla rappresentazione analitica di funzioni di una variabile x date arbitrariamente fra a e b per mezzo di serie delle stesse funzioni (13), ecc.

Per tutti questi studî però, sia perchè ci porterebbero troppo in lungo, sia perchè, per alcuni di essi, onde poterli esporre in modo rigoroso e completo si richiede anche la conoscenza di alcune parti della teoria delle funzioni di variabile complessa delle quali qui non abbiamo mai trattato, noi rimandiamo senz'altro alle memorie e monografie relative, limitandoci così negli studî sulle equazioni integrali di seconda specie a quelli che qui abbiamo esposto.

Brevi studî sulle equazioni integrali di prima specie.

693. — Trattate ora brevemente le equazioni integrali di seconda specie, è facile vedere come valendosi delle considerazioni fatte nel § 669 (Pag. 919-21) e estendendole alquanto si giunge in molti casi ad avere la soluzione anche della equazione integrale di prima specie

(1) $$f(x) = \int_a^x \mathrm{K}(x, y)\varphi(y)dy,$$

nella quale supporremo sempre che sia $f(a)=0$, onde non escludere a priori, almeno quando $\mathrm{K}(x, y)$ è integrabile rispetto ad y, che questa equazione ammetta per $\varphi(y)$ una soluzione finita e continua; e, salvo avvertenza in contrario, ci limiteremo al caso in cui il limite superiore dell'integrale è variabile.

Se si ammette infatti che la funzione $f(x)$, oltre essere finita e continua per x compreso fra a e b (a e b incl.), sia anche derivabile, e pei valori di x e y fra a e b (a e b pure incl.) la funzione $\mathrm{K}(x, y)$ ammetta la derivata parziale $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}$, e siano soddisfatte tutte le condizioni che si posero nello stesso

§ 669, allora dalla (1) colla derivazione rispetto ad x si otterrà l'altra

(2) $$f'(x) = \mathrm{K}(x, x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\varphi(y)dy,$$

la quale, quando $\mathrm{K}(x, x)$ non sia mai zero fra a e b, col porre

(3) $$\overline{\mathrm{K}}(x, y) = -\frac{1}{\mathrm{K}(x, x)}\frac{\partial \mathrm{K}(x, y)}{\partial x}, \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{\mathrm{K}(x, x)} = \bar{f}(x),$$

dà luogo alla equazione integrale di seconda specie

(4) $$\varphi(x) = \bar{f}(x) + \int_a^x \overline{\mathrm{K}}(x, y)\varphi(y)dy,$$

che si risolve sempre coi processi dei paragrafi precedenti per quanto grande possa essere il campo nel quale si muovono x e y; e risolvendo questa rimarrà risoluta anche la (1), a condizione, come appunto abbiamo ammesso, che sia $f(a)=0$, perchè colla integrazione della (2) dopo che in questa s'intenda posta per $\varphi(x)$ la soluzione trovata si vede che si ritorna alla equazione di prima specie (1), quando, come appunto abbiamo supposto, sia $f(a)=0$.

Così dunque *quando siano soddisfatte tutte le condizioni poste intorno al nucleo* $\mathrm{K}(x, y)$, *cioè:*

a) quella della esistenza della sua derivata parziale $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}$, *e della integrabilità e invertibilità delle integrazioni per questa derivata nel campo dei valori di x e y fra a e b:*

b) l'altra che all'integrale $\int_a^x \mathrm{K}(x, y)\varphi(y)dy$ *sia applicabile la derivazione sotto il segno rispetto ad x, e che* $\mathrm{K}(x, x)$ *sia sempre diverso da zero per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.);*

c) e infine che $f(x)$ sia continua e abbia una derivata finita e integrabile e sia $f(a)=0$;

allora *la equazione integrale di prima specie* (1) *ammetterà sempre una e una sola soluzione che sarà quella stessa che risolve la equazione integrale di seconda specie* (4) *nella quale* $\overline{\mathrm{K}}(x, y)$ *e* $\bar{f}(x)$ *sono date dalle formole* (3), cioè questa soluzione si avrà subito dalla formola (21) del § 673 col sostituire in essa e nella funzione reciproca $k(x, y)$ che vi figura, a $f(x)$ e $\mathrm{K}(x, y)$ le funzioni $\bar{f}(x)$ e $\overline{\mathrm{K}}(x, y)$ date dalle formole (3) scritte sopra.

694. — Quando poi la condizione che $K(x, x)$ sia sempre diversa da zero pei valori di x fra a e b non sarà soddisfatta, e anzi si avrà sempre $K(x,x)=0$ per tutti questi valori di x, allora si osserverà che la equazione (2) sarà una nuova equazione integrale di prima specie alla quale potremo applicare le considerazioni precedenti, le quali potranno poi tornare ancora a ripetersi se anche $\frac{\partial K}{\partial x}$ sarà sempre zero per $y=x$ con x compreso fra a e b, ecc....; e così evidentemente pel caso che il teorema precedente non sia applicabile perchè $K(x, x)$ è sempre zero, e al tempo stesso sono sempre zero per $y=x$, con x compreso fra a e b (a e b incl.), le prime $i-2$ derivate $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{i-2} K}{\partial x^{i-2}}$ di $K(x, y)$, mentre la $(i-1)^a$ cioè $\frac{\partial^{i-1} K}{\partial x^{i-1}}$ è diversa da zero, la soluzione della equazione (1) esisterà sempre e sarà unica; talchè completando ora il teorema precedente si può affermare che: *quando nella equazione integrale di prima specie* (1)

a) il nucleo $K(x, y)$, *oltre essere finito e continuo, ammette anche le derivate parziali* $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{i-1} K}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial^i K}{\partial x^i}$ $(i \geq 2)$, *delle quali le prime* $i-2$ *sono tutte sempre zero insieme al nucleo stesso* $K(x, y)$ *per* $y=x$ *quando* x *è compreso fra* a e b, *e la derivata seguente* $\frac{\partial^{i-1} K}{\partial x^{i-1}}$ *invece è sempre diversa da zero per* $y=x$; *e*

b) la funzione $f(x)$ *ammette anch'essa le derivate* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(i)}(x)$ *l'ultima delle quali è ancora finita e integrabile, e inoltre* $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(i-1)}(a)$ *sono tutte nulle, e del resto per* $\frac{\partial^i K}{\partial x^i}$ *sono soddisfatte le solite condizioni d'integrabilità e d'invertibilità delle integrazioni ecc.;*

allora *la equazione di prima specie* (1) *avrà sempre una e una sola soluzione che sarà quella della equazione integrale di seconda specie*

$$\varphi(x)=\bar{f}(x)+\int_a^x \bar{K}(x, y)\varphi(y)d\bar{y},$$

dove ora sarà

$$\bar{f}(x)=\frac{f^{(i)}(x)}{\left(\frac{\partial^{i-1}K}{\partial x^{i-1}}\right)_{y=x}}, \quad \text{e} \quad \bar{K}(x, y)=-\frac{1}{\left(\frac{\partial^{i-1}K}{\partial x^{i-1}}\right)_{y=x}}\frac{\partial^i K(x, y)}{\partial x^i}.$$

695. — Aggiungiamo che, come già notammo al § 669, con una integrazione per parti applicata alla equazione (1) si giunge all'altra

$$f(x)=K(x, x)\int_a^x \varphi(y)dy-\int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial y}dy\int_a^x \varphi(y)dy, \tag{5}$$

nel supposto che $K(x, y)$ abbia la derivata parziale rispetto ad y finita e atta alla integrazione per x e y compresi fra a e b; e quando $K(x, x)$ non sia mai zero per nessun valore di x fra a e b, col porre $\int_a^x \varphi(y)dy=\varphi_1(x)$ si giunge da questa all'altra equazione integrale di seconda specie

$$\varphi_1(x)=\frac{f(x)}{K(x,x)}+\int_a^x \frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}\varphi_1(y)dy,$$

che colle formole trovate nei paragrafi precedenti ci darà il valore di $\varphi_1(x)$; e quando questo risulti derivabile (ciò che per le stesse formole avverrà sempre in particolare quando lo siano $f(x)$ e $K(x, x)$), si otterrà subito per la funzione cercata $\varphi(x)=\varphi'_1(x)$.

696. — Quando poi $K(x, x)$ sia sempre zero per tutti i valori di x fra a e b, allora osservando che la (5) si ridurrà all'altra

$$f(x)=-\int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial y}\varphi_1(y)dy,$$

che è un'altra equazione integrale di prima specie come la (1), potremo applicare a questa il processo ora indicato della integrazione per parti se esisterà anche la derivata seconda $\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y^2}, \ldots$, o potremo applicare il processo dei paragrafi precedenti della derivazione se esisterà la derivata seconda $\frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x \partial y}$; e così potremo ripetere successivamente l'uno o l'altro di questi processi finchè non si giungerà ad una derivata parziale di $K(x, y)$ che sia sempre diversa da zero per $y=x$ e ancora derivabile rispetto ad x o rispetto ad y.

S'intende poi che usando il secondo processo, quello cioè che si basa sulla integrazione per parti ripetuta per es. i volte colla introduzione successiva delle funzioni $\varphi_1(x)=\int_a^x \varphi(y)dy$, $\varphi_2(x)=\int_a^x \varphi_1(y)dy, \ldots, \varphi_i(x)=\int_a^x \varphi_{i-1}(y)dy$, bisognerà che il valore che la formola finale ci darà per $\varphi_i(x)$ sia derivabile

i volte fino ad arrivare ad avere $\varphi(x)$, e sia tale altresì che ne risulti $\varphi_1(a)=\varphi_2(a)=\dots\varphi_i(a)=0$; condizioni queste che in particolare saranno soddisfatte quando esistano le derivate di $f(x)$ almeno fino a quelle dell'ordine i, e sia $f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(i-1)}(a)=0$.

697. — Torniamo ora per un momento al caso del § 694, col supporre cioè che, per $y=x$, il nucleo $K(x, y)$ e le sue prime $i-2$ derivate rispetto ad x siano zero per tutti i valori di x fra a e b e la $(i-1)^a$ derivata invece sia sempre diversa da zero, nel qual caso la equazione di prima specie (1) ammette certamente, come abbiamo detto, una soluzione e una sola.

In questo caso se il nucleo $K(x, y)$ rientrerà nella forma

$$h_1(y)\,K_1(x)+h_2(y)\,K_2(x)+\dots+h_i(y)\,K_i(x), \tag{6}$$

essendo, come può sempre supporsi, $K_1(x), K_2(x), \dots, K_i(x)$ funzioni linearmente distinte, potremo sempre coi processi dei §§ 481-82 (pag. 676-78) costruire la equazione lineare omogenea

$$A_0 u^{(i)}+A_1 u^{(i-1)}+A_2 u^{(i-2)}+\dots+A_{i-1}u'+A_i u=0 \tag{7}$$

che ammette come integrali fondamentali le funzioni $K_1(x), K_2(x),\dots, K_i(x)$ e nella quale le $A_0, A_1, A_2, \dots A_{i-1}, A_i$ sono funzioni della sola x che si determinano con semplici operazioni di derivazione cogli indicati processi; e allora, valendosi delle considerazioni generali esposte nella ricordata nota del § 671, coll'osservare cioè che ora si avranno le equazioni

$$\tag{8} \left\{\begin{aligned}
f(x) &=\int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \\
f'(x) &=\int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}\,\varphi(y)\,dy, \\
f''(x) &=\int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\,\varphi(y)\,dy, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
f^{(i-1)}(x) &=\int_a^x \frac{\partial^{i-1} K}{\partial x^{i-1}}\,\varphi(y)\,dy, \\
f^{(i)}(x) &=K^{(i-1)}(x, x)\,\varphi(x)+\int_a^x \frac{\partial^i K}{\partial x^i}\,\varphi(y)\,dy,
\end{aligned}\right.$$

dove per semplicità di scrittura indichiamo con $K^{(i-1)}(x, x)$ la derivata parziale

$\dfrac{\partial^{i-1} K(x, y)}{\partial x^{i-1}}$ per $y=x$, potremo sommare queste equazioni dopo di averle moltiplicate respettivamente per $A_i, A_{i-1}, A_{i-2}, \dots A_1, A_0$ che essendo funzioni della sola x possono passarsi sotto i segni integrali, e si giungerà così alla equazione

$$\varphi(x)=\frac{1}{A_0 K^{(i-1)}(x, x)}\left\{A_0 f^{(i)}(x)+A_1 f^{(i-1)}(x)+\dots+A_{1\,i-1}f'(x)+A_i f(x)\right\} \tag{9}$$

che dà senza alcuna integrazione la soluzione — che già sappiamo che deve esistere ed è unica — *della nostra equazione integrale di prima specie* $f(x)=\int_a^x K(x, y)\varphi(y)\,dy$ quando il nucleo $K(x, y)$ è della forma (6) ed esso e le sue prime i derivate rispetto ad x, oltre ad essere finite e continue per x e y comprese fra a e b (a e b incl.), sono tali che per $y=x$ si annullano tutte fino alla $(i-2)^a$ inclusive e la $(i-1)^a$ è diversa da zero *). E si intende che per $x=a$ le $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(i-1)}(x)$ siano tutte zero.

---

*) Il supporre che nel nucleo (6) le funzioni $K_1(x), K_2(x), \dots, K_i(x)$ siano *linearmente indipendenti*, mentre lo stesso nucleo $K(x, y)$ e le sue prime $i-2$ derivate rispetto ad x sono tutte zero per $y=x$, oltre a portare che le $K_1(x), K_2(x), \dots, K_i(x)$ possano essere integrali fondamentali di una equazione lineare omogenea che è poi la (7), porta anche di necessità che l'ultima condizione che abbiamo posta, cioè che la derivata $(i-1)^a$ di $K(x, y)$ rispetto ad x sia diversa da zero per $y=x$, verrà soddisfatta da sè, dovendo naturalmente escludere il caso che le $k_1(x), k_2(x), \dots, k_i(x)$ siano tntte zero pei valori di x fra a e b.

Indicato con $\theta(x)$ il valore di questa derivata $(i-1)^a$ di $K(x, y)$ per $y=x$, e con $\overline{K}$ il determinante del sistema fondamentale d'integrali $K_1(x), K_2(x), \dots, K_i(x)$ della (7), e scritte le equazioni

$$\begin{aligned}
&h_1(x)K_1(x) &&+h_2(x)K_2(x) &&+\dots+h_i(x)K_i(x)=0, \\
&h_1(x)K'_1(x) &&+h_2(x)K'_2(x) &&+\dots+h_i(x)K'_i(x)=0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&h_1(x)K_1^{(i-2)}(x) &&+h_2(x)K_2^{(i-2)}(x) &&+\dots+h_i(x)K_i^{(i-2)}(x)=0, \\
&h_1(x)K_1^{(i-1)}(x) &&+h_2(x)K_2^{(i-1)}(x) &&+\dots+h_i(x)K_i^{(i-1)}(x)=\theta(x),
\end{aligned}$$

se ne deducono subito le altre

$h_p(x)=\dfrac{\overline{K}_{i,p}}{\overline{K}}\,\theta(x)$ con $p=1, 2, \dots, i$, nelle quali $\overline{K}_{i,p}$ è l'elemento reciproco di $K_p^{(i-1)}(x)$ nel determinante $\overline{K}$ cioè è $\dfrac{\partial\overline{K}}{\partial K_p^{(i-1)}(x)}$, e queste ci mostrano che le $h_1(x), h_2(x), \dots, h_i(x)$ all'infuori di un fattore sono gli integrali della equazione aggiunta della (7).

698. - Se poi, essendo ancora il nucleo $K(x, y)$ della forma (6), la prima delle sue derivate rispetto ad x che non si annulla per $y=x$ sarà di un ordine p *inferiore* ad $i-1$, allora poichè invece delle (8) avremo le altre equazioni

$$f(x)=\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy,$$

$$f'(x)=\int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}\varphi(y)dy,$$

. . . .

$$f^{(p)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^p K}{\partial x^p}\varphi(y)dy,$$

$$f^{(p+1)}(x)=K^{(p)}(x, x)\varphi(x)+\int_a^x \frac{\partial^{p+1} K}{\partial x^{p+1}}\varphi(y)dy,$$

$$f^{(p+2)}(x)=\{(K^{(p)}(x, x))'+K^{(p+1)}(x, x)\}\varphi(x)+K^{(p)}(x, x)\varphi'(x)+\int_a^x \frac{\partial^{p+2} K}{\partial x^{p+2}}\varphi(y)dy,$$

. . . .

$$f^{(i)}(x)=\{(K^{(p)}(x, x))^{(i-1-p)}+(K^{(p+1)}(x, x))^{(i-2-p)}+\dots+K^{(i-1)}(x, x)\}\varphi(x)+\dots+$$
$$+K^{(p)}(x, x)\varphi^{(i-1-p)}(x)+\int_a^x \frac{\partial^i K}{\partial x^i}\varphi(y)dy,$$

dove in generale con $\left(K^{(\lambda)}(x, x)\right)^{\mu}$ indichiamo la derivata μ^a rispetto ad x di $K^{(\lambda)}(x, x)$, cioè di $\left[\frac{\partial^\lambda K(x, y)}{\partial x^\lambda}\right]_{x=y}$, si troverà col solito processo che la determinazione della soluzione della equazione integrale data si ridurrà a quella di una equazione lineare completa dell'ordine $i-1-p$.

Il caso poi in cui, essendo ancora $K(x, y)$ della forma (6), la prima delle sue derivate rispetto ad x che non si annulla per $y=x$ fosse di ordine *superiore* a $i-1$ non può presentarsi, perchè se questo caso si presentasse dovendo essere le $K_1(x), K_2(x), \dots, K_i(x)$ linearmente indipendenti fra loro, le $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ e quindi le $h_1(y), h_2(y), \dots, h_n(y)$ dovrebbero essere tutte zero per ogni valore di x o y fra a e b, e questo è naturalmente da escludersi. Ciò del resto è stato in sostanza osservato anche nella nota della pagina precedente.

Questi risultati sono notevolissimi.

Studi speciali sulle equazioni integrali di prima specie nelle quali il nucleo $K(x, y)$ può presentare singolarità per $y=x$.

699. — Quando nella solita equazione integrale di prima specie

$$f(x)=\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

il nucleo $K(x,y)$ sia zero per $y=x$, e così siano zero anche tutte le varie derivate parziali che avrà, come avverrebbe ad es. se fosse $K(x,y)=e^{-\frac{1}{(x-y)^2}}$ o quando queste derivate parziali non esistano o non soddisfino alle solite condizioni dei paragrafi precedenti, o quando $K(x, y)$ sia infinito per $y=x$, come bene spesso accade e come appunto lo è nel caso considerato da Abel, o anche infine quando $f(x)$, pure essendo ancora zero per $x=a$ e essendo finita e continua pei valori di x fra a e b (a e b incl.), non sia sempre derivabile almeno fino a quell'ordine che si richiederebbe per potersi valere dei processi dei paragrafi precedenti, allora questi processi non possono più applicarsi per la trattazione della stessa equazione (1).

In questi casi però può applicarsi spesso un altro processo del quale io mi valsi già, applicandolo ad alcuni casi speciali, in quegli studî ricordati sopra al § 666 che io pubblicai nel Vol. XVII degli *Annali delle Università Toscane* nel 1880 *).

Questo processo, che in sostanza non è che la estensione del processo seguìto da Abel per trattare il caso considerato da lui, non differisce affatto da quello che, per un caso particolare, fu poi seguìto da Volterra e da altri; quando cioè trattarono il caso della equazione (1) nella quale $K(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$, dove λ è un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e $G(x,y)$ è una funzione sempre finita e continua e derivabile parzialmente rispetto ad x, ecc., riportando allora anche quel caso alla trattazione di un'altra equazione integrale di prima specie che viene a rientrare fra quelle considerate nei paragrafi precedenti.

---

*) Di questi studî fece cenno il Volterra una prima volta in una nota annessa alla sua Memoria « *Sopra un problema di elettrostatica* » pubblicata nel *Nuovo Cimento, serie 3.ª* Vol. XVI, e poi nel § 7 della sua Memoria « *Sopra alcune questioni di inversione d'integrali definiti* » pubblicata nel Vol. XXV serie II degli *Annali di Matematica di Milano* nel 1897.

700. — Per questo ammettiamo dunque dapprima di sapere che, quand'anche per $K(x, y)$ o per $f(x)$ ci si trovi in uno dei casi eccezionali ai quali accennammo sopra, la equazione data (1) abbia ancora per $\varphi(x)$ una soluzione finita e continua, e si abbia quindi con questa funzione $\varphi(x)$

$$f(\xi) = \int_a K(\xi, y)\varphi(y)\,dy \tag{2}$$

pei valori di ξ fra a e b (a e b incl.); e allora, seguendo il ricordato processo del Vol. XVII degli *Annali delle Università Toscane,* introduciamo una nuova funzione ausiliaria $\theta(x, \xi)$ delle variabili x e ξ che sia essa pure atta alla integrazione rispetto a ξ, anche moltiplicata per $f(\xi)$ e per $K(\xi, y)$, per tutti i valori di ξ, x e y fra a e b, ma del resto sia qualsiasi, e moltiplicando la (2) per questa funzione $\theta(x, \xi)$, integriamo rispetto a ξ fra a e x; avremo la formola

$$\int_a^x f(\xi)\theta(x,\xi)\,d\xi = \int_a^x \theta(x,\xi)\,d\xi \int_a^\xi K(\xi, y)\varphi(y)\,dy\,. \tag{3}$$

Da questa colla applicazione della solita formola di Dirichlet otterremo, come nell'indicato lavoro, la formola seguente

$$\int_a^x f(\xi)\theta(x,\xi)\,d\xi = \int_a^x \varphi(y)\,dy \int_y^x K(\xi,y)\theta(x, \xi)\,d\xi\,, \tag{4}$$

che è un'altra equazione integrale di prima specie nella quale il nucleo che indicheremo con $K_1(x, y)$ è la nuova funzione $\int_y^x K(\xi,y)\theta(x,\xi)\,d\xi$, e la funzione del primo membro corrispondente alla solita $f(x)$ è l'altra funzione $F(x) = \int_a^x f(\xi)\theta(x,\xi)\,d\xi$; e quindi quando in un modo qualsiasi si riesca a trovare una funzione $\varphi(x)$ che soddisfi a questa ultima equazione (4) per tutti i valori di x fra a e b e si sappia che questa funzione è unica, allora la soluzione cercata della equazione data (1) quando esista sarà essa pure unica, e non potrà essere che questa; e per assicurarsi che lo è effettivamente basterà sostituirla nella equazione stessa (1) e verificare se essa la soddisfa effettivamente o no. E quando non la soddisfi si potrà senz'altro affermare che colle funzioni date $f(x)$ e $K(x,y)$ la equazione stessa (1) non può avere soluzioni finite e continue.

In particolare dunque quando la funzione ausiliaria ora introdotta $\theta(x, \xi)$ sia scelta in modo che per questa nuova equazione integrale (4) risultino soddisfatte le condizioni dei paragrafi precedenti (§§ 693-698), nel qual caso la sua soluzione $\varphi(x)$ si troverà, come vedemmo, passando ad una equazione integrale di seconda specie e trovando la soluzione di questa che sarà unica, allora questa soluzione ci darà anche quella cercata della equazione data (1) tutte le volte che, sostituendola in questa o in altro modo si troverà che essa risulta effettivamente soddisfatta.

701. — Nel caso particolare poi in cui per la funzione ausiliaria $\theta(x, y)$ sia stata scelta una funzione tale che si possa trovare un'altra funzione $\Psi(x, y)$ — ancora integrabile rispetto ad x e ad y per x e y compresi fra a e b e per la quale siano possibili le solite inversioni d'integrazione — dotata della proprietà che insieme colla $\theta(x,y)$ renda l'integrale $\int_\xi^x \Psi(x, z)\theta(z, \xi)\,dz$ uguale ad una costante finita e diversa da zero che potremo supporre senz'altro uguale ad uno *), per modo cioè che sia

$$\int_\xi^x \Psi(x, z)\theta(z, \xi)\,dz = 1\,, \tag{5}$$

allora è facile vedere che una soluzione che con un processo qualsiasi si riesca a trovare per la nuova equazione integrale (4) sarà certamente soluzione anche della equazione data (1), e quindi non occorrerà di fare le verificazioni alle quali accennavamo testè.

E difatti supponendo che la (4) sia soddisfatta da una certa funzione $\varphi(x)$ e cambiando x in z, per modo che si avrà la formola

$$\int_a^z f(\xi)\theta(z, \xi)\,d\xi = \int_a^z \varphi(y)\,dy \int_y^z K(\xi, y)\theta(z, \xi)\,d\xi,$$

colla introduzione di un'altra funzione $\Psi(x, y)$ se ne dedurrà l'altra

*) Perchè questa condizione possa essere soddisfatta bisognerà che delle due funzioni $\Psi(x,y)$ e $\theta(x,y)$ una almeno divenga infinita per $y=x$, perchè se questo non fosse, coll'applicazione della prima formola del valore medio si vede che l'integrale $\int_\xi^x \Psi(x,z)\,\theta(z,\xi)\,dz$ col tendere di ξ ad x tenderebbe a zero, e non sarebbe quindi uguale ad uno.

$$\int_a^x \Psi(x,z)\,dz\int_a^z f(\xi)\theta(z,\xi)\,d\xi = \int_a^x \Psi(x,z)\,dz\int_a^z \varphi(y)\,dy\int_y^z \mathrm{K}(\xi,y)\theta(z,\xi)\,d\xi;$$

e poichè coll'applicare una o più volte la solita formola di Dirichlet, il primo membro si trasforma nell'integrale $\int_a^x f(\xi)d\xi\int_\xi^x \Psi(x,z)\theta(z,\xi)dz$, e il secondo membro si cambia nell'altro

$$\int_a^x\varphi(y)dy\int_y^x\Psi(x,z)dz\int_y^z \mathrm{K}(\xi,y)\theta(z,\xi)d\xi=\int_a^x\varphi(y)dy\int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)d\xi\int_\xi^x\Psi(x,z)\theta(z,\xi)dz,$$

sostituendo si troverà la formola generale seguente

$$(6)\qquad \int_a^x f(\xi)\,d\xi\int_\xi^x\Psi(x,z)\theta(z,\xi)\,dz=\int_a^x\varphi(y)\,dy\int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi\int_\xi^x\Psi(x,z)\theta(z,\xi)\,dz$$

che sotto le solite condizioni per l'integrabilità ecc., varrà tutte le volte che sarà soddisfatta la (4), e ci sarà utile anche in appresso per gli studî ulteriori.

Intanto supponendo ora in particolare che la funzione $\Psi(x,z)$ soddisfi alla condizione (5) *), questa formola conduce subito all'altra

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi=\int_a^x\varphi(y)\,dy\int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi=\int_a^x d\xi\int_a^\xi \mathrm{K}(\xi,y)\varphi(y)\,dy;$$

e questa, derivata rispetto ad x, ci dà $f(x)=\int_a^x \mathrm{K}(x,y)\varphi(y)dy$, ciò che dimostra appunto quanto volevamo.

702. — Fermandoci al caso generale, e prendendo a considerare la equazione (6) che ora abbiamo trovato senza più stare a supporre che sia soddisfatta la condizione (5), si può anche osservare che la equazione stessa (6) è

*) Propriamente invece della (5) basterebbe che fosse soddisfatta la condizione

$$\int_\xi^x \Psi(x,z)\,\theta(z,\xi)\,dz=\mu(x),$$

essendo $\mu(x)$ una funzione sempre diversa da zero per x compreso fra a e b (a e b incl.), ma allora sostituendo a $\Psi(x,z)$ l'altra funzione $\Psi_1(x,z)=\frac{\Psi(x,z)}{\mu(x)}$, questa condizione si ridurrebbe ancora alla stessa condizione (5), e quindi basta limitarci al caso di quest'ultima condizione.

ancora una nuova equazione integrale il cui nucleo, che indicheremo con $\mathrm{K}_1(x,y)$, è l'integrale doppio $\int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi\int_\xi^x\Psi(x,z)\theta(z,\xi)dz$; e in sostanza essa non è che la equazione (4) per la quale come funzione $\theta(x,\xi)$ sia preso l'integrale $\int_\xi^x\Psi(x,z)\theta(z,\xi)dz$, che ora potremo indicare con $\theta_1(x,\xi)$; e se $\varphi(x)$ sarà soluzione della (4) lo sarà pure di questa equazione (6).

Partendo poi dalla nuova funzione $\theta_1(x,y)$, potremo introdurre un'altra funzione $\Psi_1(x,y)$, e allora giungeremo a un'altra equazione come la (6) nella quale Ψ e θ siano cambiate in Ψ_1 e θ_1, e il processo potrà ripetersi anche indefinitamente senza che la funzione $\varphi(x)$ cui avessero condotto la (4) o una delle seguenti equazioni che si fossero trovate cessi di soddisfare alle varie equazioni integrali che si troveranno dopo successivamente; e se si giungerà infine ad una funzione $\theta_n(x,y)$ per la quale con una nuova funzione conveniente $\Psi_n(x,y)$ si abbia $\int_\xi^x\Psi_n(x,z)\theta_n(z,\xi)dz=1$, allora la funzione $\varphi(x)$ che a un certo punto di questo processo si fosse trovata come soluzione di una delle dette equazioni integrali, sarà certamente soluzione anche della equazione data (1), e essa sarà certamente unica se risulterà che la equazione dalla quale proviene o una delle altre successivamente trovate ammettono una sola soluzione.

703. — Le considerazioni esposte negli ultimi paragrafi somministrano evidentemente un nuovo processo generale per determinare la soluzione della equazione integrale di prima specie (1); e questo processo sarà applicabile tutte le volte che si riuscirà a trovare una funzione adattata $\theta(x,y)$ per la quale possa trovarsi la soluzione della equazione integrale (4), e non vi sarà neppure bisogno di verificare che questa funzione soddisfa effettivamente alla equazione data (1) quando la funzione $\theta(x,y)$ risulterà fra quelle delle quali abbiamo fatto parola nei due ultimi paragrafi *).

*) Nel ricordato lavoro del vol. 17 degli *Annali delle Università Toscane*, per quanto giungessi alla formola (4) non ebbi occasione di fare cenno del processo generale qui indicato per la ricerca della funzione $\varphi(x)$ che soddisfa alla equazione integrale data (1), perchè allora non era stabilito alcun legame fra le equazioni integrali di prima e seconda specie, e anzi neppure erano stati iniziati, come campo di studî a parte, studî generali su queste equazioni; nè d'altra parte era allora il caso per me di fermarmi sulle considerazioni che ora facciamo sulla (4) perchè avevo in mira soltanto gli studî sulla rappresentazione delle funzioni di variabile reale, date arbitrariamente nell'intervallo dato (a,b), per mezzo di serie di funzioni speciali.

Noi applicheremo subito questo processo al caso, considerato prima da Volterra e poi anche da altri, delle equazioni integrali (1) nelle quali $K(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$, con $0<\lambda<1$, e $G(x,y)$ è una funzione che è sempre finita e continua e derivabile almeno rispetto ad x per x e y compresi fra a e b; e nel supposto che per x compreso fra a e b (a e b incl.) $G(x,x)$ sia sempre finita e diversa da zero.

In questo caso essendo $K(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$, se prenderemo $\theta(x,y)=\frac{1}{(x-y)^{1-\lambda}}$, si vede intanto che la condizione (5) rimarrà subito soddisfatta prendendo $\Psi(x,y)=\frac{k}{(x-y)^\lambda}$ con k quantità costante, perchè allora, osservando che si ha $\int_\xi^x \frac{dz}{(x-z)^\lambda(z-\xi)^{1-\lambda}}=\int_\xi^x\left(\frac{z-\xi}{x-z}\right)^\lambda\frac{dz}{z-\xi}$, si vede subito che se si pone $\frac{z-\xi}{x-z}=\tau$ questo integrale si trasforma nell'altro $\int_0^\infty\frac{\tau^{\lambda-1}}{1+\tau}d\tau$ pel quale, ai §§ 79 e 123 (pag. 123-124 e 181-182) e poi anche studiando gli integrali Euleriani di prima specie (pag. 395-397), trovammo che è uguale a $\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}$, e quindi perchè sia soddisfatta la condizione (5) con $\theta(x,y)=\frac{1}{(x-y)^{1-\lambda}}$, basterà prendere $\Psi(x,y)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{(x-y)^\lambda}$.

Così per quanto dicemmo al § 700, si può ora senz'altro affermare che la soluzione della equazione attuale

$$f(x)=\int_a^x\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}\varphi(y)\,dy \tag{7}$$

sarà appunto quella della equazione che corrisponde ora alla (4) cioè alla equazione

$$F(x)=\int_a^x K_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{8}$$

dove

$$F(x)=\int_a^x\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi,\quad \text{e}\quad K_1(x,y)=\int_y^x\frac{G(\xi,y)}{(\xi-y)^\lambda(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi; \tag{9}$$

e nei casi nei quali si verifichi che $F(x)$ e $K_1(x,y)$ soddisfano alle condizioni che si avevano per $f(x)$ e $K(x,y)$ nei §§ dal 693 al 698, la soluzione di questa

equazione (8) potrà subito aversi coi processi dei paragrafi stessi riducendola a una equazione integrale di seconda specie.

704. — Ora, ammettendo dapprima che nella equazione data (7) la funzione $f(x)$ abbia una derivata finita e continua e atta alla integrazione fra a e b e sia $f(a)=0$, per verificare che anche $F(x)$ soddisfa alle condizioni ora ricordate, si osserverà che applicando all'integrale che figura in $F(x)$ una integrazione per parti, la stessa funzione si ridurrà alla forma seguente

$$F(x)=\frac{1}{\lambda}\int_a^x(x-\xi)^\lambda f'(\xi)\,d\xi, \tag{10}$$

e ora derivando colle solite regole si troverà la formola notevole

$$F'(x)=\int_a^x\frac{f'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi, \tag{11}$$

la quale ci dimostra appunto che quando la $f(x)$ che figura nella equazione data (10) è zero per $x=a$, e ammette la derivata per tutti i valori di x compresi fra a e b, e questa derivata è finita e integrabile, allora anche la $F(x)$ soddisfarà alle stesse condizioni *), come appunto volevamo che fosse.

(*) Le formole (10) e (11) sono casi particolari di altre che si possono avere al modo stesso pel caso generale dell'integrale $\int_a^x f(\xi)\theta(x,\xi)\,d\xi$, quando si ammetta ancora che la funzione $f(x)$ abbia una derivata finita e atta alla integrazione fra a e b, e si abbia al solito $f(a)=0$.

Ponendo infatti

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\,\theta(x,\xi)\,d\xi, \tag{α}$$

e applicando una integrazione per parti col porre

$$\int_\xi^x\theta(x,\xi)\,d\xi=\pi(x,\xi), \tag{β}$$

con che sarà $\pi(x,x)=0$, si vede subito che per la funzione $f(x)$ definita dalla (α) si avrà la formola notevole seguente

$$F(x)=\int_a^x\pi(x,\xi)f'(\xi)\,d\xi, \tag{γ}$$

che è la corrispondente della (10); e da questa, colla derivazione, si avrà subito per la derivata della stessa funzione $F(x)$ l'altra formola

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x\pi(x,\xi)f'(\xi)\,d\xi=\int_a^x\frac{\partial\pi(x,\xi)}{\partial x}f'(\xi)\,d\xi, \tag{δ}$$

che è la corrispondente della formola (11), ammesso che la derivazione sotto il segno sia applicabile al nuovo integrale $\int_a^x\pi(x,\xi)f'(\xi)\,d\xi$ che rappresenta $F(x)$.

Se poi la $f(x)$ non ammetterà una derivata sempre finita e integrabile fra a e b, o si sarà incerti su questo, allora potrà ancora darsi che $F(x)$ abbia una derivata finita e continua, ma bisognerà in qualche modo assicurarsene con altri processi quando si vogliano applicare le considerazioni dei ricordati §§ 693 al 698.

Per quanto poi si riferisce al nuovo nucleo $K_1(x, y)$, si osserverà prima che pel primo teorema del valor medio (§ 184-185 [Pag. 286-88]) si ha

$$K_1(x,y)=G(\xi_1,y)\int_y^x \frac{d\xi}{(\xi-y)^\lambda(x-\xi)^{1-\lambda}}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}G(\xi_1,y),$$

essendo ξ_1 un numero compreso ra y e x, e quando y si accosta indefinitamente ad x lo stesso avverrà di ξ_1, e $G(\xi_1, y)$ tenderà verso $G(x, x)$ per modo che $K_1(x, y)$ tenderà verso $\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}G(x, x)$; e questo limite, che potrà prendersi come il valore $K_1(x,x)$ di $K_1(x,y)$ per $y=x$, sarà sempre diverso da zero, perchè tale abbiamo supposto che sia $G(x, x)$ per tutti i valori di x fra a e b.

Osservando poi che, cambiando in $K_1(x,y)$ la variabile ξ che figura nell'integrale col porre $\frac{\xi-y}{x-y}=\tau$, si ha

$$K_1(x,y)=\int_0^1 \frac{G[(x-y)\tau+y,y]}{\tau^\lambda(1-\tau)^{1-\lambda}}d\tau,$$

se ne dedurrà subito che $K_1(x, y)$ è finita e continua per tutti i valori di x e y fra a e b (a e b incl.), tale avendo supposto che sia $G(x, y)$ pei soliti valori di x e y fra a e b (a e b incl.), e facendo $y=x$ si troverà ancora per $K_1(x, x)$ il valore precedente $G(x,x)\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau^\lambda(1-\tau)^{1-\lambda}}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}G(x,x)$.

Avendo poi ammesso che $G(x, y)$ sia derivabile parzialmente rispetto ad x per tutti i valori di x e y fra a e b, e indicando con $G_1(x, y)$ questa derivata, si vede dalla precedente che quando non sia $y=x$ si ha

$$\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x}=\int_0^1 G_1[(x-y)\tau+y,y]\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\lambda}d\tau$$

o anche pel solito teorema del valor medio, e per le formole (7) e (13) delle pag. 396-397 sugli integrali Euleriani di prima specie

$$\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x}=G_1(\bar\xi_1,y)\int_0^1\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{1-\lambda}d\tau=G_1(\bar\xi_1,y)\frac{(1-\lambda)\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi},$$

essendo $\bar\xi_1$ un valore di ξ fra y e x; e così oltre a concludere che $\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x}$ esiste ed è finita e continua pei soliti valori di x e y fra a e b quando y non è uguale ad x, si vede che al tendere di y ad x tende verso $G_1(x,x)\frac{(1-\lambda)\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}$, supposto naturalmente che il limite di $G_1(\bar\xi_1, y)$ per $y=x$ esista e sia $G_1(x, x)$.

Così, riassumendo, noi possiamo dunque affermare che *quando si abbia la equazione integrale di prima specie*

$$f(x)=\int_a^x \frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}\varphi(y)dy \tag{12}$$

nella quale $0<\lambda<1$, *e* $G(x, y)$ *è finita e continua e ammette una derivata rispetto ad* x *per tutti i valori di* x *e* y *fra* a *e* b *(*a *e* b *incl.) e* $G(x, x)$ *per gli stessi valori di* x *non è mai zero, e al tempo stesso la* $f(x)$, *oltre ad annullarsi per* $x=a$, *ha una derivata finita e integrabile pei medesimi valori di* x *o almeno è tale che la funzione* $F(x)=\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi$ *abbia essa la derivata finita e continua,* allora *la stessa equazione data* (12) *avrà una e una sola soluzione che sarà quella della equazione ancora di prima specie*

$$F(x)=\int_a^x K_1(x,y)\varphi(y)dy \tag{13}$$

nella quale $K_1(x,y)=\int_y^x \frac{G(\xi,y)}{(\xi-y)^\lambda(x-\xi)^{1-\lambda}}d\xi$; *e questa soluzione si troverà subito applicando le formole note* (§ 673) *delle equazioni integrali di seconda specie alla equazione che si deduce dalla stessa* (13) *colla derivazione rispetto ad* x *come dicemmo al* § 693.

Supponendo in queste formole $G(x, y)=1$ si ha il caso trattato da Abel da noi ricordato al § 699.

705. Come già dissi nella nota alla pag. 961, nel ricordato lavoro del volume 17.° degli Annali delle Università Toscane io detti la formola (4) ma senza trarne le conseguenze che qui ne abbiamo dedotte.

Dalla formola stessa però trarsi altri risultati che ora trovo opportuno di riprodurre — con quelle sole modificazioni che vengono naturali dalle considerazioni generali che qui abbiamo esposto —, perchè ci dànno essi pure una soluzione molto semplice della solita equazione integrale (1) di prima specie in casi ancora assai estesi, fra i quali trovasi pure quello di Abel; e la soluzione viene data sotto forma semplice ed esplicita e senza che vi sia bisogno di riportare il problema alle equazioni integrali di seconda specie.

706. Ammettiamo perciò, come nel ricordato lavoro, che il nucleo $K(x, y)$ della equazione data (1) sia tale che si possa trovare una funzione $\theta(x, y)$ per la quale si abbia

$$\int_y^x K(\xi, y)\theta(x, \xi)d\xi = \mu(x)\nu(y), \tag{14}$$

dove $\mu(x)$ *) e $\nu(y)$ siano funzioni sempre finite e diverse da zero per x e y comprese fra a e b (a e b incl.) ciò che richiederà, come già avemmo occasione di rilevare per un caso simile nella nota alla pag. 960, che delle due funzioni $K(x, y)$ e $\theta(x, y)$ una almeno divenga infinita per $y = x$; allora la equazione (4) si ridurrà all'altra

$$\int_a^x f(\xi)\theta(x, \xi)d\xi = \mu(x)\int_a^x \varphi(y)\nu(y)dy \tag{15}$$

e da questa colla derivazione **) se ne trarrà subito la seguente

$$\varphi(x) = \frac{1}{\nu(x)}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\mu(x)}\int_a^x f(\xi)\theta(x, \xi)d\xi\right\}, \tag{16}$$

che darà la soluzione cercata della (1) quando, come abbiamo ammesso, si sappia che una soluzione esiste, e questa soluzione sarà unica perchè allora la (4) non conduce che a questa; mentre quando non si sappia *a priori* della esistenza di una soluzione della (1), per vedere se la formola stessa (16) dà effettivamente questa soluzione bisognerà fare le opportune verifiche

---

*) Volendo, la funzione $\mu(x)$ che qui s'introduce può sempre intendersi ridotta alla unità, bastando per questo che alla funzione da noi introdotta $\theta(x, \xi)$ venga sostituita l'altra $\dfrac{\theta(x, \xi)}{\mu(x)}$.

**) L'operazione di derivazione che qui facciamo corrisponde in sostanza a quella che si fece nel § 693, perchè la equazione (15) che nel caso attuale siamo ridotti a considerare corrisponde al caso speciale in cui nella (1) si ha $K(x, y) = \mu(x)\nu(y)$.

assicurandosi cioè che per questo valore (16) di $\varphi(x)$ si ha effettivamente $f(x) = \displaystyle\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy$ *).

Ora nel caso in cui la funzione $f(x)$ è derivabile fra a e b e la sua derivata è atta alla integrazione, per fare la derivazione che figura nel valore precedente di $\varphi(x)$ non potremo valerci con tutta sicurezza del processo ordinario della derivazione sotto il segno perchè, come già osservammo sopra, una almeno delle due funzioni $K(x, y)$ e $\theta(x, y)$ deve divenire infinita per $y = x$; e noi perciò per applicare il detto processo dovremo prima trasformare convenientemente l'integrale che figura nella formola stessa (17) **).

707. Noi cambieremo ora nell'integrale che figura in $\varphi(x)$ la variabile d'integrazione ξ in xt col porre $\xi = xt$, riducendolo così all'altro integrale $\displaystyle\int_{\frac{a}{x}}^1 f(xt)\theta(x, xt)x\,dt$; ma anche sotto questa forma la difficoltà rimane perchè la $\theta(x, xt)$ può divenire infinita per $t = 1$, talchè le trasformazioni da farsi prima di applicare i soliti processi di derivazione sotto il segno dovrebbero essere differenti.

---

*) Naturalmente se per la funzione $\theta(x, y)$ che sarà stata scelta per rendere soddisfatta la condizione (14), si potrà trovare una funzione $\Psi(x, y)$ tale che risulti soddisfatta la condizione (5) del § 701, cioè sia $\displaystyle\int_\xi^x \Psi(x, z)\theta(z, \xi)dz = 1$, allora per quanto dicemmo nel paragrafo stesso la funzione $\varphi(x)$ data dalla (16) sarà certamente la soluzione della equazione data (1) nè occorrerà fare alcuna verifica.

**) Valendosi delle formole generali date nella nota alla pag. 963 — che in sostanza si ottennero facendo prima una trasformazione dell'integrale da derivarsi, e poi derivandolo colle regole ordinarie — si calcolerà prima l'integrale $\displaystyle\int_\xi^x \frac{\theta(x, \xi)}{\mu(x)}d\xi$ che corrisponde ora a quello della stessa nota, e indicandolo come allora si fece con $\pi(x, \xi)$ basterà valersi della formola (δ) che trovammo allora e sostituire nella (16), per potere dire che quando sia soddisfatta la condizione (14), la soluzione della equazione integrale (1) sarà data dalla formola

$$\varphi(x) = \frac{1}{\nu(x)}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f'(\xi)\pi(x, \xi)d\xi\right),$$

ovvero dall'altra

$$\varphi(x) = \frac{1}{\nu(x)}\int_a^x f'(\xi)\frac{\partial\pi(x, \xi)}{\partial x}d\xi,$$

quando all'integrale $\displaystyle\int_a^x f'(\xi)\pi(x, \xi)d\xi$ sia applicabile la derivazione sotto il segno.

Tuttavia quando, malgrado questo, *facendo momentaneamente astrazione dal rigore che dovrebbe aversi* e che in questi calcoli verrà ora a mancare, si applichi ancora il processo della derivazione sotto il segno all'integrale così trasformato, col tenere conto della condizione che abbiamo sempre che $f(x)$ sia zero per $x=a$, si trova che la derivata che figura nella (16) si presenta sotto la forma

$$\frac{1}{\mu(x)}\int_{\frac{a}{x}}^{1}\frac{df(xt)}{d(xt)}\,\theta(x,xt)xt\,dt+\int_{\frac{a}{x}}^{1}f(xt)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{\theta(x,xt)x}{\mu(x)}\right]dt;$$

e se la funzione $\frac{\theta(x,xt)\,x}{\mu(x)}$ e quindi anche l'altra $\frac{\theta(x,xt)xt}{\mu(x)}$ risulteranno funzioni della sola t, — ciò che corrisponde a dire che la funzione $\frac{\theta(x,\xi)\xi}{\mu(x)}$ sia della forma $\Psi\left(\frac{\xi}{x}\right)$, cioè sia una funzione omogenea di grado zero di x e di ξ —, la espressione precedente si ridurrà all'altra

$$\frac{1}{x\mu(x)}\int_a^x f'(\xi)\theta(x,\xi)\xi\,d\xi,$$

che non è priva di significato.

Ne segue che *se non sempre,* a causa della assoluta mancanza di rigore nel processo seguìto, *almeno però in alcuni casi* si potrà dire che la soluzione della equazione (1) verrà data dalla formola seguente

$$\varphi(x)=\frac{1}{x\mu(x)\nu(x)}\int_a^x f'(\xi)\theta(x,\xi)\xi\,d\xi,$$

che cambiando opportunamente la funzione ausiliaria $\theta(x,\xi)$ introdotta sopra si trasforma nell'altra più semplice

$$\varphi(x)=\int_a^x f'(\xi)\theta(x,\xi)\,d\xi; \tag{17}$$

e in questi casi per la funzione $\theta(x,y)$ non potrà più dirsi che debba essere tale da rendere soddisfatta la condizione (14), ma essa dovrà certamente soddisfare a condizioni speciali da determinarsi, come a condizioni speciali dovrà soddisfare il nucleo $K(x,y)$ della equazione data (1), se si vorrà che questo valore (17) di $\varphi(x)$ soddisfi effettivamente alla equazione (1).

E poichè questa formola (17) è così semplice, per quanto non dimostrata rigorosamente, sarà naturale di cercare queste condizioni speciali, per avere così dei casi nei quali potrà dirsi rigorosamente applicabile.

708. — Per trovare queste condizioni, e vedere quindi — quando sarà possibile — come questa funzione $\theta(x,y)$ e la $K(x,y)$ debbano essere scelte in relazione fra loro onde essere sicuri che la formola trovata (17) dà la soluzione della equazione (1), basterà cercare i casi nei quali presa appunto la (17) come soluzione di questa equazione, questa risulta effettivamente soddisfatta da quel valore di $\varphi(x)$.

Ora cambiando x in y nella formola (17) e moltiplicandola poi per $K(x,y)$ e integrandola rispetto ad y fra a e x, si trova la formola

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy=\int_a^x K(x,y)\,dy\int_a^y f'(\xi)\theta(y,\xi)\,d\xi,$$

la quale per la solita formola di Dirichlet si può cambiare nell'altra

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy=\int_a^x f'(\xi)\,d\xi\int_\xi^x K(x,y)\theta(y,\xi)\,dy,$$

e quindi nel caso che la funzione $K(x,y)$ sia tale che per essa si possa trovare un'altra funzione $\theta(x,y)$ per la quale si abbia

$$\int_\xi^x K(x,y)\theta(y,\xi)\,dy=1,$$

avremo subito

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy=\int_a^x f'(\xi)\,d\xi=f(x),$$

perchè noi supponiamo sempre che sia $f(a)=0$; quindi evidentemente si può ora *rigorosamente* affermare che *quando nella equazione integrale di prima specie* (1) *la funzione $f(x)$ abbia una derivata atta alla integrazione fra a e b e sia $f(a)=0$ e il nucleo $K(x,y)$ sia tale che si possa trovare una funzione $\theta(x,y)$ per la quale sia soddisfatta la condizione*

$$\int_\xi^x K(x,y)\theta(y,\xi)\,dy=1, \tag{18}$$

la equazione stessa (1) *avrà la soluzione*

$$\varphi'(x) = \int_a^x f'(\xi)\theta(x, \xi)d\xi. \tag{19}$$

709. — Questo risultato, certo non privo d'interesse, è quello appunto che detti nel ricordato lavoro del vol. 17 degli Annali delle Università Toscane, e che allora applicai ad alcuni casi che poi il Volterra con un cambiamento di variabili riportò a dipendere tutti da quello di Abel.

Fermandoci su questo caso, col supporre cioè in particolare che la equazione (1) sia la seguente cui si riduce subito quella di Abel

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^\lambda}, \tag{20}$$

con $0<\lambda<1$, per la quale il nucleo $K(x, y)$ è $\frac{1}{(x-y)^\lambda}$, si osserverà, che, come già rilevammo sopra al § 703, l'integrale $\int_\xi^x \frac{dy}{(x-y)^\lambda (y-\xi)^{1-\lambda}}$ è uguale a $\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}$, e questo ci porterà subito a dire che pel valore attuale $\frac{1}{(x-y)^\lambda}$ di $K(x, y)$ converrà prendere $\theta(y,\xi) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{(y-\xi)^{1-\lambda}}$ per fare sì che riesca soddisfatta la condizione (18); e quindi la soluzione della equazione (20) sarà data dalla formola

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\int_a^x f'(\xi)\frac{d\xi}{(x-\xi)^{1-\lambda}}, \tag{21}$$

come trovò Abel.

710. — Nello stesso lavoro del vol. 17 degli Annali osservai anche che quando invece della (1) si abbia la equazione

$$f(x) = \int_a^x H(x, y)F(x, y)dy, \tag{22}$$

sempre nel supposto che la funzione $f(x)$ sia zero per $x=a$, e abbia la derivata come nei casi precedenti, allora, osservando che scelta una funzione $K(x, y)$ per la quale sia possibile determinare una funzione $\theta(x, y)$ tale che per essa si abbia la solita formola

$$\int_\xi^x K(x, y)\theta(y, \xi)dy = 1,$$

per ciò che precede sarà

$$\int_a^x K(x, y)dy\int_a^y f'(\xi)\theta(y, \xi)d\xi = f(x),$$

talchè si vede chiaro che per soddisfare alla (22) basterà prendere

$$F(x,y) = \frac{K(x,y)}{H(x,y)}\int_a^y f'(\xi)\theta(y, \xi)d\xi,$$

quando il rapporto $\frac{K(x, y)}{H(x, y)}$ sia una funzione di x e y finita e continua pei valori di x e y fra a e b (a e b incl.)

711. — Infine aggiungiamo che ammettendo di partire da una equazione integrale di prima specie (1) il cui nucleo $K(x, y)$ sia tale che con esso si possa trovare una funzione $\theta(x, y)$ per la quale si abbia la (18), allora se si prenderà a considerare la equazione integrale

$$f(x) = \int_a^x \theta(x, y)\varphi(y)dy,$$

il cui nucleo sia $\theta(x, y)$, pel risultato ottenuto al § 708, si può dire che questa equazione avrà la soluzione

$$\varphi(x) = \int_a^x f'(\xi)K_1(x, \xi)d\xi,$$

quando per la funzione $K_1(x, y)$ che qui abbiamo introdotta si possa trovare una funzione tale chè per essa si abbia

$$\int_\xi^x \theta(x, y)K_1(y, \xi)dy = 1. \tag{23}$$

Ora considerando l'integrale $\int_\xi^x K(x, y)\theta(y, \xi)dy$ che figura nella (18), che noi supponiamo soddisfatta, e ammettendo che — come appunto accade nel caso considerato testè della equazione di Abel — le funzioni $K(x,y)$ e $\theta(y,\xi)$ siano anche tali che, col permutare fra loro le variabili tanto in $K(x,y)$ quanto in $\theta(y,\xi)$, il loro prodotto mentre diviene $K(y,x)\theta(\xi,y)$ subisca soltanto un cambiamento di segno, per modo quindi che si abbia $\int_\xi^x \theta(\xi,y)K(y,x)dy=-1$, allora, poichè permutando poi fra loro ξ e x si avrà $\int_x^\xi \theta(x,y)K(y,\xi)dy=-1$ e quindi $\int_\xi^x \theta(x,y)K(y,\xi)dy=1$, si vede subito che in questo caso per soddisfare alla (23) basterà prendere $K_1(y,\xi)=K(y,\xi)$, o $K_1(x,y)=K(x,y)$, talchè si può ora evidentemente affermare che *data la equazione integrale* (1) *il cui nucleo sia* $K(x,y)$, *se questo nucleo sarà una funzione tale che si possa trovare una funzione* $\theta(x,y)$ *per la quale si abbia la equazione* (18), *cioè*

$$\int_\xi^x K(x,y)\theta(y,\xi)dy=1; \tag{24}$$

e se inoltre queste funzioni $K(x,y)$ *e* $\theta(y,\xi)$ *saranno tali che permutando fra loro le variabili tanto nell'una che nell'altra, il loro prodotto* $K(x,y)\theta(y,\xi)$ *col divenire* $K(y,x)\theta(\xi,y)$ *subisca solo un cambiamento di segno, allora mentre la equazione integrale* (1) *di nucleo* $K(x,y)$, *cioè*

$$f(x)=\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \tag{25}$$

ha la soluzione

$$\varphi(x)=\int_a^x f'(\xi)\theta(x,\xi)d\xi, \tag{26}$$

l'altra equazione integrale

$$f(x)=\int_a^x \theta(x,y)\varphi(y)dy \tag{27}$$

di nucleo $\theta(x,y)$ *avrà la soluzione*

$$\varphi(x)=\int_a^x f'(\xi)K(x,\xi)d\xi. \tag{28}$$

Riduzione delle equazioni integrali di seconda specie a equazioni integrali di prima specie.

712. — Infine ci piace di aggiungere le osservazioni seguenti per le quali inversamente a quanto già mettemmo in evidenza nei paragrafi precedenti, anche *la ricerca delle soluzioni delle equazioni integrali di seconda specie*

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

si riduce a quella delle equazioni di prima specie, e questo non solo quando il nucleo $K(x,y)$ della equazione data si mantiene sempre numericamente inferiore a un numero finito, ma anche quando diviene infinito pei valori di x e y fra a e b, restando però sempre atto alla integrazione.

E il processo che serve a questa trasformazione è quello appunto che qui ho riportato ai §§ 700 e seg. del vol. 17 degli Annali delle Università Toscane per le equazioni di prima specie.

Si ammetta infatti che la equazione (1) abbia una soluzione per $\varphi(x)$, con che avremo

$$\varphi(\xi)=f(\xi)+\int_a^\xi K(\xi,y)\varphi(y)dy,$$

e si introduca come nel § 700 una nuova funzione conosciuta $\theta(x,y)$ per la quale richiederemo soltanto che soddisfi alle solite condizioni d'integrabilità ecc.

Col moltiplicare questa equazione per $\theta(x,\xi)$ e integrarla rispetto a ξ fra a e x, avremo la formola

$$\int_a^x \theta(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_a^x \theta(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_a^x \theta(x,\xi)d\xi\int_a^\xi K(\xi,y)\varphi(y)dy,$$

e cambiando nel primo membro la variabile d'integrazione ξ in y e applicando all'ultimo termine del secondo membro la solita formola di Dirichlet, avremo l'altra equazione

$$\int_a^x \theta(x,y)\varphi(y)dy=\int_a^x \theta(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_a^x \varphi(y)dy\int_y^x \theta(x,\xi)K(\xi,y)d\xi,$$

la quale può scriversi sotto la forma

$$(2)\qquad \int_a^x \theta(x,\xi) f(\xi)\,d\xi = \int_a^x \left\{ \theta(x,y) - \int_y^x \theta(x,\xi)\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi \right\} \varphi(y)\,dy;$$

e poichè in questa il primo membro viene ad essere una funzione conosciuta di x finita e continua che si annulla per $x=a$, essa sarà una equazione integrale di prima specie, il cui nucleo sarà $\theta(x,y)-\int_y^x \theta(x,\xi)\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi$, e avrà le stesse soluzioni della equazione di seconda specie data (1).

Ne segue che quando sia data una equazione di seconda specie (1) la cui soluzione non voglia o non possa ottenersi coi processi che si dettero studiando quelle equazioni, ma per essa si sappia che ammette effettivamente una soluzione, allora la ricerca di questa soluzione sarà ridotta a quella della precedente equazione di prima specie (2) che ammetterà certamente almeno una soluzione, e se non ne ammetterà che una, questa sarà appunto quella della equazione (1) che verrà ad essere unica essa pure. E in questa nuova equazione (2) la funzione $\theta(x,y)$ rimarrà del tutto arbitraria salvo le solite condizioni per la integrabilità e invertibilità delle integrazioni ecc. talchè con questo processo la riduzione delle equazioni di seconda specie a quelle di prima specie potrà farsi in infiniti modi.

713. — Quando poi non si sappia avanti che la equazione di seconda specie (1) ammette una soluzione, allora purchè si sappia che la equazione di prima specie che le corrisponde (2) ne ammette una o più, se la funzione ausiliaria $\theta(x,y)$ sarà stata scelta opportunamente, sarà facile vedere che anche la equazione data (1) ammette tutte e sole le stesse soluzioni.

Supposto infatti che esistano una o più funzioni $\varphi(x)$ che soddisfano alla equazione (2) e che si abbia quindi la formola

$$\int_a \theta(z,\xi) f(\xi)\,d\xi = \int_a^z \left\{ \theta(z,y) - \int_y^z \theta(z,\xi)\,\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi \right\} \varphi(y)\,dy,$$

introducendo come al § 700 una nuova funzione ausiliaria $\Psi(x,z)$ dotata delle solite proprietà, col moltiplicare questa equazione per $\Psi(x,z)$ e integrarla rispetto a z fra a e x avremo l'altra formola

$$\int_a^x \Psi(x,z)\,dz \int_a^z \theta(z,\xi) f(\xi)\,d\xi = \int_a^x \Psi(x,z)\,dz \int_a^z \theta(z,y)\varphi(y)\,dy -$$
$$- \int_a^x \Psi(x,z)\,dz \int_a^z \varphi(y)\,dy \int_y^z \theta(z,\xi)\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi,$$

la quale coll'applicare la solita formola di Dirichlet una volta al primo membro e al primo termine del secondo, e due volte al secondo termine del secondo membro dà luogo all'altra

$$(3)\qquad \int_a^x f(\xi)\,d\xi \int_\xi^x \Psi(x,z)\theta(z,\xi)\,dz = \int_a^x \varphi(y)\,dy \int_y^x \Psi(x,z)\theta(z,y)\,dz -$$
$$- \int_a^x \varphi(y)\,dy \int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi \int_\xi^x \Psi(x,z)\theta(z,\xi)\,dz,$$

quindi se le due funzioni ausiliarie $\Psi(x,y)$ e $\theta(x,y)$ saranno state scelte come al § 708, cioè in modo che sia

$$(4)\qquad \int_\xi^x \Psi(x,z)\theta(z,\xi)\,dz = 1,$$

avremo la formola seguente

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^x \varphi(y)\,dy - \int_a^x \varphi(y)\,d \int_y^x \mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi = \int_a^x \varphi(y)\,dy - \int_a^x d\xi \int_a^\xi \mathrm{K}(\xi,y)\varphi(y)\,dy,$$

che derivata rispetto ad x ci darà subito l'altra

$$f(x) = \varphi(x) - \int_a^x \mathrm{K}(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

che non è che la (1); e questa mostra appunto, come volevamo, che quando, (come potrà sempre farsi) per la funzione ausiliaria $\theta(x,y)$ si scelga una di quelle funzioni per le quali se ne possa trovare un'altra $\Psi(x,y)$ che con esse venga ad essere soddisfatta la condizione (4), le soluzioni della equazione di prima specie (2) apparterranno tutte anche a quella di seconda specie (1) e viceversa; e per determinarle potremo valerci indifferentemente dell'una o dell'altra.

714. — Pei risultati ottenuti poi si può dire in particolare che se col nucleo dato $\mathrm{K}(x,y)$, come appunto accade pel nucleo della equazione di Abel considerata al § 709, si potrà trovare una funzione $\theta(x,y)$ per la quale si abbia

$$\int_y \theta(x,\xi)\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi = 1,$$

e se al tempo stesso con questa funzione $\theta(x, y)$ si potrà trovare una funzione $\Psi(x, y)$ per la quale si abbia la (4), come avverrà in particolare quando per le funzioni $\theta(x, y)$ e $K(x, y)$ siano soddisfatte le condizioni del teorema del § 711 nel qual caso basterà prendere $\Psi(x, y)=K(x, y)$, allora le soluzioni della equazione (1) corrispondente al detto nucleo $K(x, y)$ saranno quelle della equazione di prima specie

$$\int_a^x \theta(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^x \left\{ \theta(x, y) - 1 \right\} \varphi(y) d y .$$

715. — E così in particolare se, precisamente come per la equazione di Abel, il nucleo della (1) sarà $\frac{1}{(x-y)^{\lambda}}$ con $0<\lambda<1$, cioè se la equazione di seconda specie data (1) sarà la seguente

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{\lambda}} d y ,$$

le soluzioni di essa saranno quelle della equazione di prima specie

$$\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}} d\xi = \int_a^x \frac{1-\frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda \pi}(x-y)^{1-\lambda}}{(x-y)^{1-\lambda}} \varphi(y) d y$$

che rientra fra quelle che abbiamo studiato ai §§ 703-04, e delle quali si ha subito la formola di risoluzione.

XXXIII.

Gruppi di punti o di numeri e loro misure. Funzioni misurabili. Integrale di Lebesgue.

Denominazioni principali relative ai gruppi.

716. — Già nella Introduzione al Calcolo differenziale (pag. XIV e seg.) esponemmo alcune generalità intorno ai gruppi (o *insieme*) di punti o di numeri *), e qui per maggiore chiarezza troviamo opportuno di ricordarle prima di passare ad esporre altre particolarità intorno ai gruppi stessi.

Ricordiamo perciò che riferendosi, come qui faremo ordinariamente, ai gruppi composti di un numero infinito di punti, si dissero *punti limiti* **) di un gruppo G, quei punti, appartenenti o no al gruppo, nell'intorno dei quali cadono infiniti punti del gruppo, e si disse *gruppo derivato* di un gruppo G quello G' formato dai punti limiti di esso.

Considerando poi i gruppi derivati successivi G'', G''',... che si deducono tutti nel modo ora indicato partendo dal primo gruppo derivato G' e poi dal secondo G'', ecc. e così indefinitamente a meno che non si giunga, come talvolta avviene, a un gruppo derivato che sia composto soltanto di un numero finito di punti e non dia luogo quindi ad altri gruppi derivati, si dissero *gruppi di prima specie* quelli che hanno soltanto un numero finito di gruppi derivati ***), e *gruppi di seconda specie* quelli che ne hanno un numero infinito.

*) I gruppi (o insieme) di punti si considerano anche nel caso di due o più variabili, o degli spazii a due o a più dimensioni, riportando a questi gruppi le definizioni che si hanno pel caso di una sola variabile; e anche pei gruppi così più estesi si fanno gli studî e si hanno pressochè tutte le particolarità che si hanno pei gruppi che qui ci limiteremo sempre a considerare, quelli cioè pei quali si ha soltanto una variabile.

**) I punti limiti furono detti da alcuni anche *punti di accumulazione*, ma questa denominazione non è stata comunemente accettata.

***) I gruppi di prima specie sono stati detti da alcuni autori anche *gruppi riduttibili* (V. Lebesgue, Leçons sur l'intégration pag. 11 e 135).

E come mostrammo nella introduzione al Calcolo differenziale (pag. XVIII), i punti di ciascuno dei gruppi derivati appartengono sempre ai gruppi *derivati* precedenti.

Diremo poi punti *isolati* di un gruppo quelli che nei loro intorni sufficientemente piccoli non contengono alcun punto del gruppo all'infuori di quello che si considera; e questi punti isolati di un gruppo, quando vi siano, potranno essi pure essere in numero infinito.

717. Continuando nel richiamare le denominazioni già date, ricordiamo anche che, dicendo che un gruppo G *contiene* un altro gruppo G_1 quando ogni punto di questo appartiene a G, e allora il gruppo G_1 alla sua volta dicendolo *contenuto* in G, si chiamò (pag. XIX):

a) *gruppo chiuso* ogni gruppo G che contiene il proprio gruppo derivato G';

b) *gruppo concentrato* quelli che è contenuto nel suo gruppo derivato;

c) *gruppo perfetto* quello che si riproduce completamente nel gruppo derivato;

per modo che nei gruppi chiusi col passare al gruppo derivato si riproducono *sempre e soltanto* punti del gruppo, potendo però altri punti di questo restarne fuori; o in altri termini i gruppi chiusi G hanno tutti i punti del gruppo derivato G' ma possono averne degli altri, cioè in certo modo $G \geq G'$; e invece nei gruppi concentrati G il gruppo derivato G' ha tutti i punti del gruppo ma può averne degli altri, cioè $G \leq G'$; e pei gruppi perfetti il gruppo dato G e il gruppo derivato G' coincidono perfettamente, cioè $G = G'$.

E per un gruppo perfetto i gruppi derivati naturalmente sono sempre gli stessi, e quindi *i gruppi perfetti sono tutti gruppi di seconda specie; e per qualsiasi gruppo i varii gruppi derivati sono sempre gruppi chiusi.*

La denominazione di gruppi perfetti pei gruppi che coincidono coi loro derivati fu introdotta da Cantor. Jordan invece nel suo *Cours d'Analyse* chiamò gruppi perfetti quelli che contengono il gruppo derivato, cioè quelli che noi, secondo la denominazione più comunemente adottata, abbiamo detto gruppi chiusi. Borel nella sua *Théorie des fonctions* (pag. 35) propose di chiamare *assolutamente perfetti* i gruppi detti perfetti da Cantor, e *relativamente perfetti* gli altri gruppi della denominazione di Jordan; ma le denominazioni ormai prevalse sono quelle date sopra di gruppi perfetti e gruppi chiusi.

718. — Seguitando ora a dare denominazioni introdotte nella teoria dei gruppi, diciamo che Du Bois Reymond, avuto riguardo a una proprietà delle funzioni che sono atte alla integrazione secondo il concetto di Riemann, chiamò *gruppi integrabili* i gruppi di punti di una linea retta che (come ad es. i punti dei gruppi di prima specie) possono essere racchiusi in un

numero *finito* d'intervalli talmente piccoli che la loro somma sia piccola a piacere (Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*. pag. 26 e seg.); e questi gruppi non sono che quelli che come notai alla pag. XXII della ricordata Introduzione al calcolo differenziale vengono detti talvolta *gruppi di punti rinchiudibili*.

E si dicono *gruppi densi in tutto un intervallo* quei gruppi pei quali in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo stesso cadono punti del gruppo, per modo che da quell'intervallo non si può estrarre alcuna porzione dell'intervallo stesso che non contenga infiniti punti del gruppo *).

Così in particolare il gruppo dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali in un certo intervallo sono gruppi densi in quell'intervallo.

E pei gruppi densi in *tutto* un intervallo finito (a, b) pel quale a e b siano i limiti inferiore o superiore dei punti del gruppo, si può osservare che se il gruppo non riempe già *tutto l'intervallo, questo lo riempiranno certamente tutti i gruppi derivati* (che saranno in numero infinito); perchè un punto qualsiasi p dell'intervallo (gli estremi inclusi) avendo in ogni suo intorno comunque piccolo punti del gruppo, sarà un suo punto limite, e quindi apparterrà necessariamente al primo gruppo derivato, e perciò anche a tutti gli altri.

Viceversa *se il primo gruppo derivato G' di un gruppo G riempe tutto un intervallo* (a, b) *il gruppo G è denso in questo intervallo,* perchè ogni punto p di (a, b) avrà in ogni suo intorno infiniti punti di G, e quindi in ogni porzione comunque piccola di (a, b) cadranno punti di G.

E di qui segue anche che *se un gruppo è perfetto ed è al tempo stesso denso in tutto un intervallo* (a, b) *esso riempe necessariamente tutto l'intervallo.*

719. — Dato un gruppo G in un certo intervallo finito o infinito (a, b) si chiama suo *gruppo complementare,* e si rappresenta spesso con CG o con C(G), il gruppo di punti di (a, b) che non appartengono al gruppo G, e quindi i due gruppi G e CG presi insieme riempiono tutto l'intervallo (a, b), e questi gruppi G e CG sono complementari l'uno dell'altro. E così in particolare, del gruppo dei punti razionali in un dato intervallo è gruppo complementare quello dei punti irrazionali nello stesso intervallo e viceversa.

---

*) Alcuni autori (V. per es. De La Vallée Poussin *Cours d'Analyse infinitésimale* 2^me edition (1909) Vol. I, pag. 51) dànno una defininizione un poco differente dei gruppi *densi* perchè chiamano densi quei gruppi pei quali fra due loro punti qualsiansi si può trovare sempre un punto del gruppo e quindi se ne trovano infiniti. Fra due punti però dei gruppi densi così intesi, pure cadendovi sempre infiniti punti del gruppo, possono talvolta esservi anche intervalli finiti nei quali non cadono affatto punti del gruppo, come sarà ad es. pel gruppo G composto dei numeri razionali fra 0 e $\frac{1}{3}$ e di quelli fra $\frac{1}{2}$ e 1, esclusi i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

In un gruppo poi secondo Jordan (*Cours d'Analyse* tomo 1°, 2.ª edizione pag. 20) si chiamano *punti frontiera* quei punti che sono punti limiti dello stesso gruppo G senza appartenere al gruppo, e quelli che sono punti limiti del gruppo complementare CG senza appartenere a questo gruppo CG; e così in particolare *ogni punto di un intervallo* è un punto frontiera tanto pel gruppo dei punti razionali quanto per quello dei punti irrazionali.

I punti estremi dell'intervallo (a, b) quando questi sono a distanza finita si considerano sempre come punti frontiera.

720. — Infine aggiungiamo che dicendo che un punto c è *interno* a un intervallo (a, b) s'intende *ordinariamente* che esso sia *fra* a e b (a e b escl.), per modo quindi che la distanza di c da a e da b, pure potendo essere piccola quanto si vuole, sia diversa da zero; ma poichè tavolta avviene che pure dicendo che c è interno all'intervallo s'intende semplicemente dire che fa parte dell'intervallo senza escludere cioè che possa trovarsi anche agli estremi a o b, così, quando possano nascere confusioni, in quest'ultimo caso si dice che il punto stesso c è *interno in senso largo*, mentre nel caso che c debba essere nell'intervallo (a, b) ma diverso da a e da b si dice che è *interno in senso stretto*.

Potenza di un gruppo. — Gruppi numerabili e gruppi non numerabili.

721. — Ricordiamo anche, come già dicemmo nella Introduzione al Calcolo differenziale (pag. XX), che due gruppi di punti G e G_1 si dicono *della stessa potenza* quando i punti di ciascuno di essi si possono fare corrispondere uno ad uno ai punti dell'altro.

E preso come gruppo tipo quello dei numeri naturali $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ e riferendosi a gruppi che hanno un numero infinito di punti, si chiamano *gruppi numerabili* quelli che hanno la stessa potenza del gruppo dei numeri naturali, e i cui punti possono quindi indicarsi con $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ in base alla corrispondenza che sarà stabilita fra i due gruppi, e si chiamano *gruppi non numerabili* quelli pei quali una tale corrispondenza col gruppo dei numeri naturali non può istituirsi.

Considerato poi il gruppo dei numeri reali fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) come il gruppo tipo del continuo, si dirà che un gruppo ha la *potenza del continuo* quando esso ha la potenza del detto gruppo dei numeri reali da 0 a 1.

Così il gruppo dei punti (o dei numeri) x in un intervallo finito qualsiasi (a, b) con $a<b$ o nell'intervallo (a, ∞), avrà la potenza del continuo, perchè, indicati con y i punti fra 0 e 1, basterà stabilire fra x e y la corrispondenza $x=a+(b-a)\,y$, o l'altra $x=a+\frac{y}{1-y}$ perchè i punti dell'intervallo (0, 1) vengano a corrispondere uno ad uno a quelli degli intervalli (a, b) o (a, ∞). e viceversa.

722. — Così il gruppo dei numeri razionali compresi in un dato intervallo per es. nell'intervallo (0, 1) costituisce un gruppo numerabile, perchè indicandoli con $\frac{p}{q}$, con p e q numeri interi positivi qualsiasi e $p \leq q$, potranno ordinarsi, come facemmo alla pag. XX della Introduzione al calcolo differenziale, scrivendo successivamente quello $p=0, q=1$ pel quale $p+q=1$, poi quello $p=1, q=1$ pel quale $p+q=2$, e quelli pei quali $p+q=3, \ldots, p+q=n, \ldots$ che saranno sempre in numero finito, e potremo scriverli nell'ordine che più ci piace indicandoli successivamente con $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k, \ldots$, con tralasciare via via quelli già scritti prima.

In generale, avendo un gruppo infinito G di numeri $u_{p_1, p_2, \ldots p_l}$ che dipendono da un numero finito di indici $p_1, p_2, \ldots, p_l$ e si determinano col dare a questi indici valori interi con date leggi, questo gruppo G sarà numerabile perchè potrà ordinarsi ad esempio col prendere successivamente quelli (sempre in numero finito) pei quali, pur soddisfacendo sempre alle leggi poste, si avrà $p_1+p_2+\ldots+p_l=1, p_1+p_2+\ldots+p_l=2, \ldots, p_1+p_2+\ldots+p_l=n, \ldots$ e tralasciando sempre via via quelli già scritti, e potranno quindi indicarsi ancora successivamente con $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$.

723. — E si può anche dire che *ogni gruppo* G *che risulti composto dall'insieme dei punti di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi numerabili* $G_1, G_2, G_3, \ldots G_l, \ldots$

$$
\begin{array}{l}
\eta_{1,1},\ \eta_{1,2},\ \eta_{1,3}, \ldots, \\
\eta_{2,1},\ \eta_{2,2},\ \eta_{2,3}, \ldots, \\
\eta_{3,1},\ \eta_{3,2},\ \eta_{3,3}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\eta_{l,1},\ \eta_{l,2},\ \eta_{l,3}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

e che potremo indicare con $G=G_1+G_2+G_3+\ldots+G_l+\ldots$ *sarà un gruppo numerabile,* perchè prendendo ad es. successivamente i numeri nel modo suindicato *(secondo le diagonali da destra a sinistra)*, cioè prima quello $\eta_{1,1}$ pel quale la somma degli indici è 2, poi, nell'ordine che più ci piacerà di fissare, i numeri $\eta_{1,2}$ e $\eta_{2,1}$ pei quali la somma degli indici è 3, poi i tre $\eta_{1,3}, \eta_{2,2}, \eta_{3,1}$, pei quali la somma degli indici è 4, ecc. ... il gruppo verrà ordinato nel modo seguente

$$\eta_{1,1},\ \eta_{1,2},\ \eta_{2,1},\ \eta_{1,3},\ \eta_{2,2},\ \eta_{3,1},\ \eta_{1,4},\ \eta_{2,3},\ \eta_{3,2},\ \eta_{4,1}, \ldots$$

e questi numeri potranno indicarsi successivamente con

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$$

Similmente se da un gruppo numerabile

$$\mathrm{G} = y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$$

si estrae un gruppo di punti qualsiasi

$$\mathrm{G}_1 = y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, y_{\alpha_3}, \dots$$

è evidente che il gruppo G_2 dei punti rimanenti, che potrà indicarsi con $\mathrm{G}_2 = \mathrm{G} - \mathrm{G}_1$, sarà pure numerabile perchè potrà ancora contrassegnarsi coi numeri $1, 2, 3, \dots$.

Invece se da un gruppo non numerabile G si estrae un gruppo di punti finito o un gruppo numerabile N, il gruppo rimanente G_2 sarà ancora un gruppo non numerabile, altrimenti essendo $\mathrm{G} = \mathrm{N} + \mathrm{G}_2$ se G_2 fosse numerabile anche G lo sarebbe.

724. — In generale se da un dato gruppo G si toglie (o si aggiunge) un gruppo numerabile N il gruppo rimanente G_1 avrà sempre la stessa potenza di G perchè, estratto da G_1 un altro gruppo numerabile N_1 e indicato con G_2 il nuovo gruppo rimanente, avremo insieme le due formole $\mathrm{G}_1 = \mathrm{N}_1 + \mathrm{G}_2$, $\mathrm{G} = \mathrm{N} + \mathrm{N}_1 + \mathrm{G}_2$, ed essendo N e $\mathrm{N} + \mathrm{N}_1$ ambedue numerabili potranno farsi corrispondere punto a punto e quindi lo stesso avverrà di G_1 e di G.

Lo stesso accadrà se il gruppo N che si toglie (o si aggiunge) da G è finito, perchè se N_1 è un gruppo numerabile tale sarà anche il gruppo $\mathrm{N} + \mathrm{N}_1$, e sopprimendo da G questo gruppo $\mathrm{N} + \mathrm{N}_1$ e poi aggiungendovi il gruppo N_1 è lo stesso che sopprimervi il gruppo finito N.

In particolare quindi il *gruppo dei punti irrazionali in un intervallo qualunque avrà la potenza del continuo* perchè si otterrà dal gruppo dei numeri reali nello stesso intervallo sopprimendovi il gruppo dei punti razionali che è numerabile (§ 722).

725. — E di qui risulta subito che il gruppo del *continuo è un gruppo non numerabile* perchè con tutta facilità si trova che *tale è il gruppo dei numeri irrazionali in qualsiasi intervallo.*

E difatti preso, come sempre può farsi, pel gruppo dei numeri irrazionali il gruppo di quelli fra 0 e 1, se esso fosse un gruppo numerabile, potrebbe rappresentarsi ordinatamente coi numeri $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$, e ogni numero irrazionale fra 0 e 1 dovrebbe trovarsi fra questi numeri.

Ma d'altra parte, ricordando il teorema che ogni numero irrazionale y compreso fra 0 e 1 può rappresentarsi e in un sol modo per mezzo di una frazione continua illimitata $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots)$ i cui numeratori sono tutti uguali a uno e i denominatori sono tutti numeri interi diversi da zero e positivi e viceversa, si vede che ogni numero y_n del gruppo considerato $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ potrebbe essere rappresentato con una frazione continua $(a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots, a_{n,p}, \dots)$; mentre ogni altra frazione continua $(a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_p, \dots)$ per la quale i denominatori $a'_1, a'_2, a'_3, \dots a'_p, \dots$, fossero differenti respettivamente da $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots, a_{p,p}, \dots$, pure rappresentando ancora un numero irrazionale compreso fra 0 e 1, non combinerebbe con nessuno dei numeri del gruppo $y_1, y_2, y_3, \dots y_n, \dots$ e quindi questo gruppo non sarebbe il gruppo completo dei numeri irrazionali compresi fra 0 e 1.

726. — Sempre a proposito dei gruppi numerabili, aggiungiamo che *se un gruppo infinito* G *ha dei punti* α *che non appartengono al suo gruppo derivato* G′, *il gruppo di questi punti* α *è sempre finito o numerabile.*

Si osservi infatti che se α è un punto qualsiasi che non appartiene al gruppo derivato G′, negli intorni di α quando siano ridotti sufficientemente piccoli non cadranno affatto punti del gruppo G o vi cadrà solo il punto α se esso sarà un punto di G, e quindi le distanze di α dai punti di G′ avranno un limite inferiore h_0 che dipenderà da α ma sarà certo sempre diverso da zero. E per ipotesi, di questi punti α che appartengono a G e non a G′ dovranno esservene.

Consideriamo ora un intervallo *finito qualsiasi* (a, b) con $a < b$, nel quale ammetteremo che cadano tutti o parte sia dei punti di G che dei punti di G′, e preso per h un numero qualsiasi diverso da zero e positivo scomponiamo l'intervallo (a, b) negli intervalli successivi $(a, a+h)$, $(a+h, a+2h)$, $(a+2h, a+3h), \dots$ che risulteranno certo *in numero finito* perchè (a, b) è finito. In alcuni di questi intervalli potranno non cadere affatto punti di G, ma in uno o più di essi verranno a cadere, *nell'interno o agli estremi,* punti di G′, e in altri, che certo per quanto testè dicemmo dovranno esservene quando h sia sufficientemente piccolo, e che saranno naturalmente in numero finito, cadranno *soltanto* punti di G diversi da quelli di G′; e questi punti costituiranno un gruppo di punti che potremo indicare con G_h, e che saranno in numero finito, perchè se fossero in numero infinito darebbero luogo a un punto limite che apparterrebbe per conseguenza a G′ e sarebbe all'interno o agli estremi di quegli stessi intervalli il che non può essere.

Presa ora successivamente per h una serie di numeri

$$h_1 = \frac{b-a}{2}, \quad h_2 = \frac{b-a}{2^2} \quad h_3 = \frac{b-a}{2^3}, \dots, \quad h_n = \frac{b-a}{2^n}, \dots$$

ciascuno metà del precedente, indichiamo in generale con G_{h_n} il gruppo di quei punti di G diversi da quelli di G′ che si troveranno come precedentemente considerando fra gli intervalli $(a, a+h_n)$, $(a+h_n, a+2h_n)$, $(a+2h_n, a+3h_n)$, ..., quelli che nè nell'interno nè agli estremi contengono punti di G′, e dei quali, come già abbiamo detto, certamente ce ne saranno quando, per essere n abbastanza grande, h_n venga ad essere sufficientemente piccolo.

Siccome ciascuno degli intervalli che corrispondono al numero h_n è contenuto intieramente in uno di quelli che corrispondono al numero precedente h_{n-1}, è evidente che G_{h_n} conterrà i punti di G che facevano parte di $G_{h_{n-1}}$, e per ogni valore di n soppressi questi punti comuni in G_{h_n} e in ciascuno dei gruppi successivi $G_{h_{n+1}}, G_{h_{n+2}}, \ldots$, si formeranno nuovi gruppi Γ_{h_1}, $\Gamma_{h_2}, \Gamma_{h_3}, \ldots$ che saranno in numero finito o saranno una infinità numerabile, e ciascuno contenente un numero finito di punti di G; e in questi gruppi successivi ogni punto figurerà una volta sola, e il loro insieme costituirà un gruppo finito o un gruppo numerabile Γ (§ 723).

In questo gruppo poi ogni punto α di G diverso da quelli di G′ vi sarà compreso perchè come già notammo le distanze di α dai punti di G′ avranno un limite inferiore h_0 diverso da 0, e quando sia $h_n = \frac{b-a}{2^n} < h_0$, uno degli intervalli $(a, a+h_n)$, $(a+h_n, a+2h_n)$... corrispondenti a h_n conterrà certamente il punto α senza contenere punti di G′ nè nell'interno nè agli estremi, e questo punto figurerà quindi fra quelli del gruppo Γ. Il teorema resta così pienamente dimostrato quando il gruppo dato G sia tutto contenuto in un intervallo finito.

Naturalmente poi se il gruppo dato G non sarà tutto contenuto in un intervallo finito, il teorema continuerà ancora a sussistere, perchè presi ad es. gli intervalli finiti $(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), \ldots (-n, n), \ldots$, i punti di G non appartenenti a G′ che venissero a cadere in questi intervalli successivi costituiranno altrettanti gruppi nulli, finiti o misurabili, ciascuno dei quali sarà contenuto nel seguente; e l'insieme dei gruppi che si avranno da essi sopprimendo in ciascuno i punti contenuti nei gruppi precedentemente ottenuti costituiranno ancora un gruppo finito o un gruppo numerabile (§ 723); e il teorema resta così dimostrato anche pel caso che il gruppo dato G non sia tutto contenuto in un intervallo finito.

727. — Dal teorema dimostrato segue immediatamente l'altro che dice che *se un gruppo* G *ha gruppi derivati successivi almeno fino all'ordine* i, *e alcuni dei suoi punti non appartengono al gruppo derivato* $G^{(i)}$, *il gruppo* $\overline{G}_i$ *formato da questi punti di* G *(che non appartengono a* $G^{(i)}$*) è un gruppo finito o un gruppo numerabile.*

È chiaro infatti, pel teorema dimostrato, che i punti del gruppo derivato precedente a $G^{(i)}$, cioè di $G^{(i-1)}$, che non appartengono a $G^{(i)}$ costituiscono un gruppo nullo (*) o finito o numerabile Γ_{i-1}, e similmente quando $i > 1$ i punti di $G^{(i-2)}$ che non appartengono a $G^{(i-1)}$ e quindi neppure a $G^{(i)}$ (§ 716) costituiscono un altro gruppo anch'esso nullo, o finito, o numerabile; e poichè lo stesso avverrà dei punti di $G^{(i-1)}$ che figurano in $G^{(i-2)}$ ma non in $G^{(i)}$ quando ve ne siano, perchè questi saranno parte di Γ_{i-1}, così tutti i punti di $G^{(i-2)}$ che non fanno parte di $G^{(i)}$ costituiranno essi pure un gruppo nullo, o finito o numerabile Γ_{i-2}.

Così continuando, si giungerà a dire che tutti i punti del primo gruppo derivato G′ che non fanno parte di $G^{(i)}$ costituiscono essi pure un gruppo nullo, o finito o numerabile, e quindi lo stesso sarà del gruppo $\overline{G}_i$ costituito dai punti del gruppo dato G che non appartengono a $G^{(i)}$, perchè essi saranno i punti dei due gruppi formati respettivamente dai punti di G che non fanno parte di G′ e da quelli di G′ che appartengono a G senza far parte di $G^{(i)}$, con questo però che $\overline{G}$ non potrà essere nullo se G, come è supposto nell'enunciato del teorema, avrà effettivamente punti che non appartengono a $G^{(i)}$; e così il teorema è dimostrato.

In particolare quindi si può ora affermare che *tutti i gruppi infiniti di prima specie sono gruppi numerabili*, perchè se un gruppo è di prima specie e di ordine i, il gruppo $G^{(i)}$ sarà composto di un numero finito di punti; e così il gruppo dato G si comporrà degli infiniti suoi punti che non appartengono a $G^{(i)}$ e che pel teorema dimostrato costituiscono un gruppo numerabile e avrà tutt'al più anche tutti o alcuni dei punti di $G^{(i)}$ che, come abbiamo detto sono in numero finito; e quindi lo stesso gruppo G sarà numerabile.

Così i *gruppi non numerabili sono tutti di seconda specie*, ma la proprietà inversa non sussiste perchè vi sono gruppi numerabili, come ad es. quello dei numeri razionali, che sono essi pure di seconda specie.

Punti di condensazione. — Gruppi chiusi e gruppi perfetti.

728. — Fermandoci ora più specialmente sui gruppi *non numerabili*, diciamo con Lindelof *punti di condensazione* quei punti limiti (appartenenti al gruppo o no) nell'intorno dei quali cade un gruppo di punti non nume-

(*) Cioè i punti di $G^{(i-1)}$ apparterranno tutti a $G^{(i)}$, come avverrà ad es. quando G sarà composto di un gruppo perfetto $G^{(i)}$ e di un gruppo di prima specie di ordine inferiore ad $i-1$.

rabile; e decomponendo successivamente l'intervallo o porzione dell'intervallo (supposto finito) nel quale un gruppo non numerabile è contenuto, in $2, 4, 8, \ldots 2^n \ldots$ parti successivamente uguali, come si fece nella Introduzione al Calcolo differenziale (pag. XVI) per dimostrare l'esistenza dei punti limiti, si giunge subito a dimostrare che i *gruppi non numerabili compresi in intervalli finiti hanno sempre punti di condensazione.*

Questi punti poi sono in numero infinito, perchè se α è un punto di condensazione di G, preso un intorno $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ di questo punto, e scomposto nei tre intervalli $\left(\alpha-\varepsilon, \alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}, \alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}, \alpha+\varepsilon\right)$, in uno almeno dei due intervalli $\left(\alpha-\varepsilon, \alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ e $\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}, \alpha+\varepsilon\right)$ quando ε sia sufficientemente piccolo dovrà cadere un gruppo non numerabile di punti di G il quale darà luogo a un altro punto di condensazione, perchè altrimenti prendendo successivamente ε uguale a $\varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_1}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon_1}{2^n}, \ldots$, si costruirebbero, a destra e a sinistra di α, un numero infinito d'intervalli fuori di α contigui l'uno all'altro e ciascuno metà del precedente, in ognuno dei quali cadrebbe un numero finito o una infinità numerabile di punti del gruppo l'insieme dei quali verrebbe così (§ 723) a costituire un gruppo numerabile G_1; e per questo e perchè ogni punto del gruppo dato G preso nell'intorno di α, per quanto vicino ad α possa prendersi, verrebbe a trovarsi nel gruppo G_1, si vede che tanto nell'intorno di α a destra quanto in quello a sinistra verrebbe a cadervi soltanto un gruppo numerabile di punti e α non sarebbe un punto di condensazione ma soltanto un punto limite, ciò che è contro il supposto. Necessariamente dunque negli intorni sufficientemente piccoli di α, oltre ad α, deve esistere almeno un altro punto di condensazione fuori di α; e assicurato questo si comprende come si possa giungere subito a vedere che ne esistono sempre un numero infinito, e questi anche in intorni comunque piccoli di ciascuno di essi.

729. — Risultando di qui che negli intorni di ciascuno dei punti di condensazione di un gruppo non numerabile G ne cadono infiniti altri, se ne deduce intanto che considerando il gruppo C dei punti di condensazione dello stesso gruppo, ogni suo punto α apparterrà al suo gruppo derivato C'.

D'altra parte poichè ogni punto α' del gruppo C' derivato di C ha in ogni suo intorno comunque piccolo $\left(\alpha'-\frac{\varepsilon}{2}, \alpha'+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ infiniti punti α di C, e nell'intorno $\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}, \alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ del punto α cade un gruppo non numerabile di punti di G perchè α è un suo punto di condensazione, è certo che questo

gruppo cade anche nell'intorno $(\alpha'-\varepsilon, \alpha'+\varepsilon)$ di α' e quindi anche α' è un punto di condensazione di G e appartiene perciò al gruppo C.

Così i gruppi C e C' vengono a coincidere, e per questo si può ora evidentemente affermare che *se un gruppo* G *tutto compreso in un intervallo finito non è numerabile, i suoi punti di condensazione costituiscono sempre un gruppo perfetto* C.

730. — Ora se il gruppo non numerabile dato G è un gruppo chiuso, è certo che i suoi punti di condensazione apparterranno al gruppo stesso perchè essendo chiuso esso contiene tutti i suoi punti limiti, e quindi *ogni gruppo chiuso dato non numerabile* G *si comporrà del gruppo* C *dei suoi punti di condensazione che è un gruppo perfetto, e di un altro gruppo* N *che è numerabile o è finito o che potrà anche non esservi affatto.*

Non curandoci di questi ultimi casi nei quali N sia finito o non ci sia affatto, e supponendo senz'altro che in G questo gruppo N dei punti diversi da quelli di condensazione ci sia, e sia composto di un numero infinito di punti osserveremo che, pure non essendo escluso che alcuni o anche tutti i *punti limiti* di N vengano a coincidere con punti del gruppo C, è certo però che ogni punto *speciale* di N che si prenda a considerare non coinciderà con un punto di C perchè i punti di N sono diversi da quelli di C, e neppure esso sarà un punto limite di C perchè anche i punti limiti di C appartengono a C; quindi lo stesso punto sarà a una certa distanza dai punti di C, per quanto per alcuni dei punti di N questa distanza possa anche risultare piccola quanto si vuole.

Presi ora i punti di N che sono a una distanza dai punti di C superiore a una certa lunghezza d, essi non potranno essere che in numero finito o costituire un gruppo infinito numerabile, perchè altrimenti si avrebbe per essi un punto di condensazione che sarebbe perciò al tempo stesso un punto di condensazione di G e quindi un punto di C vicino quanto si vuole ai punti che ora si considerano di N; e questo non può essere perchè questi punti di N si suppongono tutti a una distanza da quelli di C superiore a d.

Lo stesso accadrà pei punti di N distanti da quelli di C più di $\frac{d}{2}$ ma non più di d, e così pure accadrà pei punti di N distanti da quelli di C più di $\frac{d}{4}$ ma non più di $\frac{d}{2}$, e pei punti di N distanti da quelli di C più di $\frac{d}{8}$ ma non più di $\frac{d}{4}$, ecc. ...; quindi, poichè, come già osservammo, ogni punto speciale di N che si prenda a considerare trovandosi a una certa distanza dai punti di C apparterrà necessariamente a uno dei gruppi numerabili che così successivamente si formeranno, si vede chiaro di qui che i punti di N risulteranno dall'insieme di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi numerabili, e costituiranno quindi un gruppo numerabile, come appunto dicemmo che doveva essere.

731. — I gruppi perfetti hanno una particolare importanza, e noi ci fermeremo perciò a dare un teorema notevole intorno ad essi.

Supponendo che si tratti di un gruppo perfetto G contenuto in un intervallo finito (a, b), osserviamo che se esso non è il gruppo di tutti i punti (numeri reali) dello stesso intervallo, ci saranno in (a, b) punti α che non appartengono al gruppo (*). E se uno di questi punti α che non fanno parte del gruppo è interno (in senso stretto) ad (a, b), non potendo essere semplicemente un punto limite del gruppo perchè il gruppo è perfetto, dovrà esistere un intorno a destra e un intorno a sinistra di α e quindi un intervallo $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon_1)$ con ε e ε_1 diversi da zero e positivi che non contiene affatto punti del gruppo; come se α è un estremo dell'intervallo (a, b), per es. b e $b>a$, dovrà esistere un intervallo $(b-\varepsilon, b)$ con ε diverso da zero e positivo che trovasi nelle stesse condizioni, cioè di non contenere punti del gruppo.

Ammesso dunque ora che α sia un punto dell'intervallo (a, b) che non appartiene al gruppo G potremo sempre supporre che sia un punto interno (nel senso stretto), e allora si potranno sempre formare i due intervalli (a, α) e (α, b), e i gruppi che cadranno in uno o in tutti e due questi intervalli (a, α) e (α, b) saranno ancora perfetti; e preso il limite superiore α_1 dei punti del primo di questi due gruppi parziali, e il limite inferiore β_1 di quelli del secondo quando questi gruppi esistono entrambi, α_1 e β_1 saranno respettivamente il primo inferiore e il secondo superiore a α, e dovranno appartenere ciascuno al gruppo dato G perchè il gruppo è perfetto; e così l'intervallo (α_1, β_1) sarà un intervallo di ampiezza diversa da zero del quale nessun punto interno (in senso stretto) apparterrà al gruppo mentre vi apparterranno sempre i punti estremi. E un risultato simile si avrà quando in uno dei due intervalli (a, α), (α, b) per es. nel secondo non esistono punti del gruppo dato, nel qual caso l'intervallo (α_1, β_1) sarà quello da α_1 a b; e allora soltanto l'estremo α_1 apparterrà al gruppo.

Similmente nell'intervallo (a, α_1) cadrà ancora un gruppo perfetto di punti di G, se punti del gruppo esistevano nell'intervallo (a, α), e lo stesso accadrà nell'intervallo (β_1, b) se punti del gruppo esistevano nell'intervallo (α, b), e o questi nuovi gruppi riempiranno tutto l'intervallo corrispondente

(*) Se il gruppo G che si suppone perfetto riempie tutto l'intervallo (a, b) o anche se, questo non essendo, gli estremi a e b sono respettivamente i limiti inferiore e superiore dei punti del gruppo, questi estremi apparterranno sempre al gruppo, perchè, essendo perfetto, esso contiene anche i suoi punti limiti.

(a, α_1) o (β_1, b), o altrimenti da ciascuno di essi potrà estrarsi un altro intervallo (α_2, β_2) diverso da zero come l'intervallo precedente (α_1, β_1) del quale cioè ogni punto interno (in senso stretto) non apparterrà al gruppo mentre vi apparterranno i loro estremi; e così si potranno estrarre succcessivamente dall'intervallo dato (a, b) altri intervalli sempre distinti fra loro che coi loro punti interni e cogli estremi si comportino rispetto ai punti del gruppo come quelli già estratti $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots$, e neppure gli estremi di questi intervalli potranno mai essere comuni perchè altrimenti essi sarebbero punti del gruppo senza essere suoi punti limiti (cioè sarebbero punti isolati), e il gruppo non sarebbe perfetto.

Di questi intervalli dunque $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots$ i cui punti interni (in senso stretto) non appartengono al gruppo *perfetto* dato G mentre vi appartiene almeno uno dei punti estremi, ne esistono sempre quando il gruppo non riempie l'intiero intervallo (α, b) nel quale esso si trova, e li diremo con *Baire* intervalli *contigui* del gruppo stesso G. (*)

732. — Ora di questi intervalli contigui $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \ldots$ che successivamente si estrarranno e che faranno tutti parte di (a, b) ve ne potrà essere soltanto un numero finito di ampiezza superiore a un numero dato d, perchè la loro somma non potrà superare $b-a$, o non ve ne sarà nessuno; e così pure ve ne sarà soltanto un numero finito o non ve ne sarà nessuno di ampiezza superiore a $\frac{d}{2}$ ma non a d, o di ampiezza superiore a $\frac{d}{4}$ ma non a $\frac{d}{2}$, o superiore a $\frac{d}{8}$ ma non a $\frac{d}{4}, \ldots$ e così nel loro insieme questi intervalli che successivamente si estrarranno saranno in numero finito o costituiranno una infinità numerabile, mentre negli intervalli che successivamente rimarranno i gruppi saranno sempre perfetti; talchè, osservando anche che dopo tolti tutti questi intervalli contigui, ogni punto rimanente dovrà appartenere al gruppo perchè altrimenti darebbe luogo a un altro intervallo contiguo, il che non può essere, si può ora evidentemente affermare con Cantor che: *Avendo un gruppo perfetto* G *in un intervallo finito* (a, b) *questo gruppo se già non è costituito da tutti i punti di* (a, b) *si potrà ottenere sopprimendo dall'intervallo i punti interni (in senso stretto) di un*

(*) Questi intervalli *contigui*, che si considerano soltanto nel caso dei gruppi *perfetti* G che non riempiono tutto l'intervallo (a, b) nel quale i gruppi sono dati, sono dunque intervalli nessun punto dei quali appartiene al gruppo all'infuori dei loro estremi; mentre vi appartengono tutti e due gli estremi quando ambedue sono interni (in senso stretto) all'intervallo (a, b), e vi appartiene uno solo degli estremi quando l'altro è un estremo di questo intervallo (a, b).

numero finito o di una infinità numerabile d'intervalli (intervalli contigui) che non hanno fra loro punti comuni e dei quali neppure gli estremi sono comuni.

E negli intervalli che restano così successivamente, i gruppi che vi sono contenuti sono sempre perfetti; ma, *a meno che dopo di avere estratti un numero finito dei detti intervalli parziali non ve ne siano più da estrarre* i detti gruppi successivi potranno non essere mai densi nei loro respettivi intervalli perchè potrà darsi che dagli intervalli che successivamente rimarranno possano estrarsi e continuamente nuovi intervalli contigui.

733. — Viceversa *se da un intervallo finito* (a, b) *si estraggono i punti interni (in senso stretto) di un numero finito o di una infinità numerabile d'intervalli che non hanno punti nè estremità comuni, i punti non esclusi costituiscono un gruppo perfetto* G [s'intende naturalmente che si esclude il caso che si estragga l'intero intervallo (a, b)].

E difatti punti non estratti ve ne saranno sempre e costituiranno un gruppo infinito G, perchè intanto vi sarà almeno un punto estremo degli intervalli che si estraggono che sarà interno in senso stretto ad (a, b) che sarà uno di tali punti non estratti, e negli intorni da una parte di questi punti estremi, interni in senso stretto ad (a, b), dovranno cadere infiniti punti non estratti, perchè altrimenti gli intervalli soppressi verrebbero ad avere le estremità comuni ciò che è escluso, o si potrebbero sopprimere altri intervalli.

E così quei punti estremi saranno punti limiti del gruppo G; e similmente ogni altro punto di G ne sarà un punto limite perchè per la stessa ragione in ogni suo intorno dovranno cadere punti del gruppo.

Invece i punti estranei al gruppo, appartenendo ciascuno di essi a uno degli intervalli soppressi come suo punto interno in senso stretto, non saranno nessuno punti limiti di G; e così il gruppo G, coincidendo pienamente col suo derivato, sarà perfetto.

734. — Aggiungiamo che, come già dicemmo al § 718, i gruppi perfetti densi in tutto un intervallo sono soltanto quelli che riempiono tutto l'intervallo (gli estremi inclusi); e viceversa s'intende subito che i gruppi che riempiono tutto un intervallo (gli estremi inclusi) sono perfetti e densi al tempo stesso nell'intervallo; mentre se un gruppo è perfetto ma non riempie tutto un intervallo, esso, per le considerazioni precedenti, avrà degli intervalli contigui e quindi non sarà denso considerato in tutto l'intervallo; e s'intende che potrà darsi che non lo sia *in nessuna parte comunque piccola dell'intervallo stesso,* perchè può essere che in ogni parte per quanto piccola di esso ci siano punti che non appartengono al gruppo, e allora in quella parte saranno degli intervalli contigui.

735. — Così ad es. se si prende a considerare il gruppo nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ formato dai punti corrispondenti ai numeri decimali $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ che per loro cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hanno soltanto i numeri 0 e 1, intendendo che anche gli estremi 0 e $\frac{1}{9}$ facciano parte del gruppo, è facile vedere che esso sarà perfetto e non sarà denso in nessuna parte dell'intervallo.

Ed infatti ogni punto del gruppo sarà un suo punto limite perchè avrà vicini a sè punti quanti si vuole del gruppo stesso bastando, per ogni punto del gruppo che si consideri, prenderne altri che ne differiscano soltanto nelle cifre sempre più lontane; e viceversa ogni punto limite del gruppo sviluppato in frazione decimale dovrà evidentemente avere per cifre 0 e 1 soltanto e quindi sara un punto del gruppo il quale perciò sarà perfetto. Esso poi non sarà mai denso perchè in intervalli comunque piccoli limitati da due punti del gruppo ci saranno compresi sempre altri punti corrispondenti a frazioni decimali che abbiano cifre diverse dai numeri 0 e 1 e che saranno quindi punti che non appartengono al gruppo.

Misura dei gruppi secondo Borel e Lebesgue. Gruppi misurabili.

736. — Prima d'introdurre il concetto di misura dei gruppi, dimostriamo un teorema di Lebesgue, generalizzazione di altro dato prima da Borel, sugli intervalli (intervalli parziali) che contengono i punti di un dato intervallo (a, b).

Questo teorema è il seguente:

Se si ha un intervallo finito (a, b) *e ciascuno dei punti di esso (gli estremi incl.) figura come punto interno (in senso stretto) in uno o più intervalli parziali* Δ *costituenti un insieme numerabile o no d'intervalli, ognuno dei punti stessi di* (a, b) *potrà aversi anche come punto interno (sempre in senso stretto) di uno o più intervalli* in numero finito $k, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ *presi fra gli intervalli stessi* Δ (*); e questo, o intendendo — per potere enunciare, come abbiamo fatto, il teorema anche pei punti *estremi* di (a, b) —, che due o più degli intervalli parziali dati Δ escano dall'intervallo stesso (a, b), o intendendo invece che nell'enunciato del teorema la parola *interno* riferita ai punti estremi a e b dell'intervallo debba essere intesa *in senso largo.*

La dimostrazione di questo teorema può farsi nel modo seguente.

Si supponga ad es. $a < b$, e si consideri uno degli intervalli parziali Δ di (a, b) che comprenda l'estremo inferiore a, e sia questo (μ, ν) con $\nu > a$.

(*) Borel dimostrò questo teorema pel caso che gli intervalli parziali Δ fossero una infinità *numerabile*; Lebesgue lo estese al caso di una infinità *qualsiasi* d'intervalli.

Evidentemente i punti x di (a, b) da a a ν (ν escluso) si otterranno già senz'altro come punti interni (in senso stretto) da questo solo intervallo, e quindi se si considera l'intiero intervallo (a, b) è certo che, almeno fino ad un certo punto λ di esso a partire da a, si avranno sempre punti che si ottengono colla considerazione di un numero finito d'intervalli Δ come punti interni (in senso stretto) di questi intervalli, (ciò che richiederà che questi intervalli parziali in parte si sovrappongano perchè anche i loro punti estremi possano essere interni (in senso stretto) per qualcuno di essi); ma, pure potendo anche darsi che si arrivi già così a raggiungere il punto b, cioè che sia $\lambda = b$, siccome non siamo certi di questo, non può assicurarsi che non vi siano dopo di λ altri punti di (a, b) che con questo processo (cioè colla considerazione di un numero finito d'intervalli Δ soltanto) non possono ottenersi.

Ammettendo dunque che questo potesse avvenire, dividiamo per metà l'intervallo (a, b) col punto α. Potrà darsi allora che questa ultima particolarità (cioè che vi siano punti che non possono ottenersi col processo indicato) incominci già a riscontrarsi nel primo dei due intervalli (a, α) e allora prenderemo a considerare questo intervallo, come potrà darsi che si riscontri solo pel secondo intervallo (α, b), e allora prenderemo a considerare questo secondo intervallo, perchè in questo caso tutti i punti del primo intervallo, salvo tutt'al più l'estremo α, potranno ottenersi come punti interni (in senso stretto) di un numero finito d'intervalli Δ.

Sul nuovo intervallo (a, α) o (α, b) che si verrà così a considerare ripeteremo lo stesso processo, e così o con un numero finito di questi procedimenti, e quindi con un numero finito d'intervalli, raggiungeremo il punto b, o verremo a trovare una serie numerabile d'intervalli, ciascuno metà del precedente e contenuto in questo, i quali condurranno a un punto limite λ che, pel procedimento tenuto, anche se avremo dovuto considerare il primo intervallo (a, α), sarà certamente superiore ad a, e inoltre sarà tale che i punti a *sinistra* di esso si troveranno tutti come punti interni (sempre in senso stretto) di un numero finito ma sempre crescente d'intervalli Δ, mentre a meno che λ non sia appunto b, fra i punti di ogni intorno a destra di λ (λ incluso) almeno alcuni non potranno trovarsi collo stesso processo.

In questo caso però se λ non sarà appunto b, preso fra gli intervalli Δ un intervallo $\overline{\Delta}$ che contenga λ come punto interno, e indicati con λ_1 e λ_2 due punti interni ad esso (in senso stretto), il primo λ_1 inferiore a λ, e l'altro λ_2 superiore a λ e che in ogni caso potrà supporsi inferiore a b, s'intende subito che basterà aggiungere agli intervalli in numero finito $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ che avranno condotto al punto λ_1 (questo punto compreso) anche l'intervallo $\overline{\Delta}$ per avere un numero ancora finito d'intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \overline{\Delta}$ coi quali

avremo non solo anche il punto λ ma qualsiasi punto da λ a λ_2 (λ_2 compreso) ciò che è in contradizione. E se sarà $\lambda = b$, preso anche allora, come sopra, un intervallo $\overline{\Delta}$ che contenga b almeno in senso largo e un punto a sinistra λ_1 che si sarà ottenuto con un numero *finito* d'intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ basterà aggiungere a questi l'intervallo $\overline{\Delta}$ per avere anche qualunque punto da λ_1 a b e si ha quindi così ancora una contradizione; talchè, dovendo escludere questi due ulimi casi, si può ora evidentemente concludere, che con un numero *finito* d'intervalli parziali $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ si vengono ad avere tutti i punti di (a, b) come punti interni agli stessi intervalli e tutti in senso stretto, salvo tutt'al più gli estremi a e b pei quali potrà volersi intendere come abbiamo detto, che la parola « *interno* » debba intendersi in senso largo; e il teorema così è completamente dimostrato.

737. — Premesso questo teorema, si prenda a considerare un intervallo finito (a, b), e si costruisca un numero finito o una infinità numerabile qualsiasi d'intervalli parziali Δ tali *che ogni punto di* (a, b) figuri come punto interno (sempre per ora in senso stretto, e questo ora anche pei loro estremi) almeno in uno di questi intervalli Δ.

La somma $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_n + \ldots$ per ciascuno di questi sistemi d'intervalli sarà superiore o almeno uguale a quella di quel numero finito k degli intervalli stessi, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k$, che secondo il teorema precedente racchiudono pure i punti stessi, e questa alla sua volta *sarà superiore* a $b - a$, se come per ora supponiamo anche i punti estremi dei varii intervalli dovranno essere interni *in senso stretto* agli intervalli medesimi, perchè necessariamente essi dovranno in alcune parti sovrapporsi, e due di essi dovranno uscire da a e da b; però — se, come supporremo, gli intervalli potranno variarsi, sempre però in modo da continuare a racchiudere qualsiasi punto di (a, b) in senso stretto — il limite inferiore di tutte queste somme che certo esisterà (perchè come è noto i limiti inferiori e superiori dei gruppi di numeri esistono sempre) sarà precisamente $b - a$, in quanto che le parti sovrapposte e quelle uscenti da a e da b dei suddetti intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k$ (*) potranno intendersi sempre impiccolite ciascuna quanto si vuole; ad es. ridotte tutte inferiori a $\frac{\varepsilon}{k}$, essendo ε arbitrariamente piccola, e la loro somma sarà inferiore a 2ε.

738. — Prendendo dunque ora a considerare un gruppo G di punti tutti contenuti in un intervallo finito (a, b), segue da queste considerazioni che se questo gruppo riempirà tutto l'intervallo per modo cioè che ogni punto

(*) Questi intervalli potranno anche talvolta ridursi all'unico $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ con ε diverso da zero e positivo ma arbitrariamente piccolo, e il limite inferiore della sua ampiezza sarà appunto $b - a$.

di (a, b) sia punto del gruppo, le somme $\varsigma = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n + \dots$ dei varii sistemi d'intervalli (in numero finito o infinito) come sopra costruiti $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ che racchiuderanno i punti del gruppo come punti interni in senso stretto avranno per limite inferiore precisamente la lunghezza *dell'intervallo* $b-a$.

Questo poi avverrà anche quando si ammetta che gli intervalli stessi possano racchiudere i punti del gruppo, anzichè sempre come punti interni in senso stretto, come punti interni in senso largo, perchè allora, e soltanto allora, gli stessi intervalli potranno succedersi l'uno all'altro senza sovrapporsi affatto (soltanto coincidendo i loro estremi) e nessuno di essi uscirà dall'intervallo, per modo che quando questi intervalli saranno in numero finito la loro somma sarà appunto $b-a$. Lo stesso poi accadrà anche quando gli intervalli saranno in numero infinito perchè, indicata allora con $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n, \dots$ una serie di numeri diversi da zero e positivi costituenti una serie convergente $\Sigma\, \eta_n$, e indicata con ε una quantità pure diversa da zero e positiva ma arbitrariamente piccola, se ogni intervallo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ si allargherà ai due estremi di $\varepsilon\eta_1, \varepsilon\eta_2, \varepsilon\eta_3, \dots, \varepsilon\eta_n, \dots$ per modo che i nuovi intervalli vengano a racchiudere i punti di (a, b) sempre in senso stretto, la somma degli intervalli verrà accresciuta solo di $2\varepsilon\Sigma\eta_n$ cioè di una quantità arbitrariamente piccola, e perciò se questa somma dei nuovi intervalli avrà per limite inferiore precisamente $b-a$, lo stesso avverrà anche della somma $\Sigma\Delta_n$ degli intervalli che escludono i punti di (a, b) in senso largo.

Se poi il gruppo dato G non conterrà tutti i punti dell'intervallo (a, b) nel quale è contenuto, potrà darsi ad es. *(in certi casi)* che degli intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ come sopra costruiti che racchiudono i punti dell'intervallo totale (a, b) alcuni non occorrano affatto per potere racchiudere i punti del gruppo; e bene s'intende quindi che in certi casi potrà anche avvenire che la somma di quelli fra gli intervalli stessi che racchiudono i punti del gruppo risulti inferiore a $b-a$, e che lo stesso accada del loro limite inferiore. E in tali casi, questo avverrà quando i punti del gruppo vengano racchiusi come punti interni tanto in senso stretto quanto in senso largo, perchè se un intervallo Δ_n serve a racchiudere i punti del gruppo soltanto in senso largo, onde avere un intervallo Δ'_n che racchiuda anche gli estremi di Δ_n in senso stretto bisognerà che Δ'_n esca leggermente da Δ_n dalle due parti, cioè pei Δ'_n potranno prendersi come precedentemente gli intervalli $\Delta_n + 2\varepsilon\eta_n$ con ε arbitrariamente piccolo, e allora se la somma dei primi intervalli Δ è ς, quella ς' dei nuovi intervalli Δ' sarà $\varsigma + 2\varepsilon\Sigma\eta_n$, e essendo $\varsigma < b-a$ si potrà sempre prendere ε in modo che si abbia anche $\varsigma' < b-a$, come viceversa se sarà $\varsigma' < b-a$ a più forte ragione avremo $\varsigma < b-a$.

Nel caso attuale dunque (quello cioè dei gruppi G di punti che non riempiono tutto l'intervallo (a, b)) potrà darsi che il limite inferiore delle somme dei varii sistemi d'intervalli (in numero finito o infinito) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ che racchiudono, indifferentemente in senso stretto o in senso largo, i punti del gruppo risulti inferiore alla lunghezza $b-a$ dell'intervallo, come potrà darsi che risulti ancora uguale alla lunghezza $b-a$ precisamente come nel caso in cui il gruppo riempia tutto l'intervallo, ma in nessun caso lo stesso limite inferiore potrà essere superiore a $b-a$.

739. — Riassumendo dunque, noi possiamo ora affermare che *avendosi un gruppo qualsiasi* G *di punti tutti contenuti in un intervallo finito* (a, b), *esiste sempre un numero determinato nullo o positivo, e non mai superiore alla lunghezza* $b-a$ *dell'intervallo, che è il limite inferiore delle somme dei sistemi d'intervalli formati da un numero finito o da una infinità numerabile (qualsiasi) d'intervalli parziali che racchiudono, indifferentemente in senso stretto o in senso largo, i punti del gruppo*. Questo numero è quello che dicesi *misura esterna* del gruppo dato G e si indica con $m_e G$ o anche con $m_e(G)$, e si ha sempre dunque $0 \leq m_e G \leq b-a$.

Così essendo, è chiaro che il gruppo complementare CG (relativo allo stesso intervallo (a, b)), avrà alla sua volta una misura esterna $m_e(CG)$ che non supererà mai la lunghezza $b-a$ dell'intervallo, per modo che la differenza $b-a-m_e(CG)$ ci darà un nuovo numero che sarà zero o positivo ma non mai superiore a $b-a$. Questo numero è quello che dicesi la *misura interna* del gruppo dato G, e si indica con $m_i G$ o con $m_i(G)$ per modo quindi che si ha *per definizione* la eguaglianza $m_i G = b-a-m_e(CG)$.

Similmente si avrà pel gruppo complementare $m_i(CG) = b-a-m_e G$ perchè come CG è il gruppo complementare di G, così G lo è di CG; e si conclude quindi che sarà

$$m_e G - m_i G = m_e(CG) - m_i(CG),$$

dal che si vede che quando la misura esterna ed interna di un gruppo saranno uguali fra loro lo stesso avverrà pel gruppo complementare.

740. — È in questo caso appunto, *quello cioè nel quale la misura esterna e la misura interna di un gruppo* G *sono uguali che il gruppo si dice* MISURABILE, *e il valore comune delle due misure esterna e interna si dice la* MISURA *del gruppo, e si indica con* mG *o anche con* $m(G)$.

Ne segue che *quando un gruppo è misurabile anche il gruppo complementare lo è;* e poichè, avendosi sempre per definizione $m_i G = b-a-m_e(CG)$, se il gruppo è misurabile si viene ad avere $m_e G + m_e(CG) = b-a$, e viceversa se si ha questa formola si avrà pure $m_i G = m_e G$, così si può anche dire che i *gruppi misurabili sono quelli pei quali la misura esterna di essi e quella dei gruppi complementari prese insieme formano l'intero intervallo;* il chè porta anche che *lo stesso accada per le misure* mG e $m(CG)$ *del gruppo e del gruppo complementare prese insieme, cioè sia* $mG + m(CG) = b - a$.

741. — Si osservi ora che mentre i punti di un gruppo dato qualsiasi G e quelli del gruppo complementare CG presi insieme costituiscono il gruppo dei punti dell'intero intervallo che ha per misura $b-a$ (*), non si può dire però che le misure esterne dei due gruppi G e CG, che pure presi insieme compongono l'intero intervallo (a, b), facciano sempre insieme $b-a$, perchè evidentemente potrà avvenire che alcuni se non tutti gli intervalli singoli che racchiudono i punti dei due gruppi vengano a sovrapporsi, e quindi potrà essere che si abbia $m_e G + m_e(CG) > b - a$ invece di $m_e G + m_e(CG) = b - a$; dal chè s'intende anche come possa avvenire che non tutti i gruppi di punti siano misurabili.

742.— Si osservi d'altra parte in modo generale che se s'immagina costruita una serie finita o infinita ma numerabile d'intervalli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ che servano a racchiudere in senso stretto o in senso largo i punti di un gruppo qualsiasi G, sopprimendo successivamente dall'intervallo α_2 i tratti che esso avesse comuni con α_1, poi da α_3 i tratti comuni a α_1 e a α_2, da α_4 quelli comuni a α_1, α_2 e α_3, e in generale da α_n quelli comuni agli intervalli precedenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$, con che talvolta potranno venire a sopprimersi anche interi intervalli α_p, si formerà una nuova serie ancora numerabile di tratti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, che non si sovrapporranno affatto, ma potranno avere gli estremi comuni, e che racchiuderanno ugualmente tutti i punti di G alcuni però in senso largo (quelli cioè che fossero agli estremi degli intervalli stessi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$); talchè si può anche affermare che per un gruppo dato qualsiasi G si potrà sempre costruire un numero finito o una serie numerabile d'intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, *che non si sovrappongono* ma possono avere i punti estremi comuni, che racchiuderanno ogni punto del gruppo (in senso stretto o in senso largo).

743. — Ne segue che se i punti di un gruppo G, che potrà anche riempire *l'intero intervallo* (a, b), verranno tutti racchiusi dall'insieme (*) di due serie finite o infinite ma numerabili $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, e $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots$, d'intervalli come quelli ora indicati, che per ciascuna serie non si sovrappongono e solo possono avere tutti o alcuni estremi comuni, fatta la serie composta d'intervalli

$$\lambda_1, \lambda'_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda_3, \lambda'_3, \ldots,$$

nella quale verrà a trovarsi qualunque punto del gruppo, con questa potrà ancora formarsi come precedentemente un'altra serie finita o infinita ma numerabile d'intervalli $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ che siano nello stesso caso, e che racchiudano quindi ugualmente tutti i punti del gruppo G senza sovrapporsi per modo che nel caso che il gruppo G sia l'intiero intervallo (a, b) la loro somma sarà precisamente $b-a$; e le porzioni degli intervalli (o intervalli interi) λ_r e λ'_s che rimarranno soppresse per formare i nuovi intervalli $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ saranno quelle *comuni* a un λ_r e a un λ'_s che potremo perciò indicare con $(\lambda_r \lambda'_s)$, e saranno tutte distinte fra loro e prese ciascuna una volta sola, e non si sovrapporranno affatto perchè due λ_s qualsiasi non hanno punti comuni o li hanno tutt'al più agli estremi, e così due λ'_s qualsiasi.

Le somme quindi $\sum\lambda_s$ e $\sum\lambda'_s$ degli intervalli λ_s e λ'_s prese insieme equivarranno a quella $\sum\mu_s$ degli intervalli nuovamente formati μ_s con più quella $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ degli intervalli *comuni* $(\lambda_r \lambda'_s)$, cioè sarà in generale *quando il gruppo dato* G *riempia l'intiero intervallo* (a, b)

$$\sum\lambda_s + \sum\lambda'_s = b - a + \sum(\lambda_r \lambda'_s). \tag{1}$$

744. — Di qui si vede in particolare che se gli intervalli λ_s racchiuderanno i punti di un gruppo G e gli altri λ'_s racchiuderanno i punti del gruppo complementare CG, e saranno sistemi d'intervalli che conducano alle misure esterne $m_e G$ e $m_e(CG)$ degli stessi gruppi G e CG, nel senso cioè che le loro somme $\sum\lambda_s$ e $\sum\lambda'_s$ possano supporsi vicine quanto si vuole a $m_e G$ e $m_e(CG)$, passando ai limiti inferiori si avrà

$$m_e G + m_e(CG) = b - a + \text{lim inf.} \sum(\lambda_r \lambda'_s), \tag{2}$$

e quindi sarà sempre

(*) Quando un gruppo di punti G riempie completamente un intervallo (a, b), compresi o no gli estremi, il suo gruppo complementare CG non avrà punti affatto o avrà soltanto i punti estremi, e quindi mentre la misura esterna di G sarà evidentemente $b-a$ quella del gruppo complementare CG sarà zero, e perciò insieme a $m_e G = b - a$ si avrà $m_i G = b - a$, e il gruppo sarà misurabile e avrà per misura appunto $b - a$.

(*) Cioè parte dei punti del gruppo potranno trovarsi nella prima serie d'intervalli, e gli altri nella seconda, e alcuni anche potranno trovarsi contemporaneamente nelle due serie.

$$m_e G + m_e(CG) \geq b - a;$$

e con questo mentre si vede che la somma $m_e G + m_e(CG)$ non può mai essere inferiore a $b-a$, resta altresì confermato quanto dicemmo nel § 741 cioè che non è escluso che la stessa somma possa talvolta superare $b-a$; e si vede anche che *un gruppo non può essere misurabile altro che quando la somma* $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ *delle porzioni degli intervalli comuni alle due serie suindicate d'intervalli* λ_s *e* λ'_s *che racchiudono i punti del gruppo e quelli del gruppo complementare finisce per divenire piccola quanto si vuole.*

Viceversa *se dato un gruppo* G *si riscontrerà che questa condizione rispetto alla somma* $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ *è soddisfatta per due sistemi d'intervalli* λ_s *e* λ'_s *che racchiudono i punti di* G *e quelli di* CG, G *sarà un gruppo misurabile e i limiti inferiori di* $\sum\lambda_s$ *e* $\sum\lambda'_s$ *saranno respettivamente le misure* mG *e* m(CG) *di* G *e del suo gruppo complementare* CG; perchè, avendosi certamente $m_e G \leq \sum\lambda_s$ e $m_e(CG) \leq \sum\lambda'_s$ avremo per la (1)

$$m_e G + m_e(CG) \leq b - a + \sum(\lambda_s \lambda'_s),$$

e quindi poichè per la condizione posta il secondo membro, pure essendo superiore a $b-a$, può supporsi vicino a $b-a$ quanto si vuole, e $m_e G + m_e(CG)$ è un numero determinato che come testè osservammo non può essere inferiore a $b-a$, dovrà essere $m_e G + m_e(CG) = b - a$; e questo mostra intanto (§ 740) che i due gruppi G e CG sono misurabili, e quindi $m_e G$ e $m_e(CG)$ sono le loro misure mG e $m(CG.)$

Risultando ora i due gruppi G e CG misurabili, ne viene che i limiti inferiori di $\sum\lambda_s$ e $\sum\lambda'_s$ sono le loro misure, perchè osservando che ora la (1) ci dà subito l'altra

$$(\sum\lambda_s - mG) + (\sum\lambda'_s - m(CG)) = \sum(\lambda_r \lambda'_s),$$

e osservando inoltre che ora $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ è arbitrariamente piccola, e le differenze $\sum\lambda_s - mG$ e $\sum\lambda'_s - m(CG)$ sono positive, se ne deduce subito che anche queste differenze sono arbitrariamente piccole, e si ha perciò lim. inf. $\sum\lambda_s = mG$ e lim. inf. $\sum\lambda'_s = m(CG)$, come abbiamo enunciato.

E così noi possiamo ora affermare che considerando per un gruppo G i vari sistemi di serie d'intervalli λ_s e λ'_s che contengono respettivamente i punti del gruppo stesso e quelli del gruppo complementare, quando in ciascuna serie gli intervalli non si sovrappongono e non hanno punti comuni salvo tutt'al più agli estremi, *la condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo dato sia misurabile è che fra gli indicati sistemi d'intervallo* λ_s e λ'_s *ve ne siano alcuni pei quali la somma* $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ *delle porzioni comuni degli intervalli stessi* λ_s *e* λ'_s *possa ridursi piccola quanto si vuole.*

745. — Di qui risulta subito, a complemento del concetto di misurabilità dai gruppi, che *se un gruppo* G *contenuto in un intervallo* (a, b) *è misurabile, anche il gruppo* G_1 (che potrà talvolta essere lo stesso G (*)) *contenuto in una porzione qualsiasi* (a_1, b_1) *dello stesso intervallo sarà misurabile;* perchè formati ancora gli intervalli λ_r e λ'_s di cui in fine del paragrafo precedente, quando si vorrà considerare il gruppo G_1 nell'intervallo (a_1, b_1) bastera prendere soltanto quelli degli stessi intervalli che cadono nell'intervallo (a_1, b_1); e quindi evidentemente la somma $\sum(\lambda_r \lambda'_s)$ relativa alle porzioni comuni di questi intervalli non potrà superare quella relativa agli intervalli stessi per il gruppo G considerato nell'intervallo (a, b), e sarà perciò anch'essa arbitrariamente piccola; e il gruppo G_1 dell'intervallo (a_1, b_1) sarà misurabile esso pure.

Aggiungiamo anche che confrontando la formola (2) trovata sopra, cioè la

$$m_e G + m_e(CG) = b - a + \text{lim inf.} \sum(\lambda_r \lambda'_s),$$

coll'altra

$$m_i G + m_e(CG) = b - a$$

colla quale fu definita la misura interna m_i G di un gruppo, si vede che sarà sempre $m_i G \leq m_e G$, e si può quindi affermare che *per ogni gruppo la misura interna non può mai superare la misura esterna del gruppo; e per conseguenza nei gruppi non misurabili la misura interna è sempre minore della misura esterna;* e quindi in particolare si ha che *i gruppi nei quali la misura esterna è zero saranno tutti misurabili perchè per essi sarà necessariamente zero anche la misura interna.*

746. — In particolare quindi i *gruppi numerabili* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ *saranno tutti misurabili;* perchè, indicando con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n, \ldots$ una infinità numerabile d'intervalli pei quali la serie $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n + \ldots$ sia convergente, e indicando con ε un numero positivo arbitrariamento piccolo, ognuno dei numeri dati y_n potrà racchiudersi come punto di mezzo in un

(*) Se a e b sono respettivamente i limiti inferiore e superiore dei punti del gruppo G, è chiaro che il gruppo G_1 contenuto in una certa porzione (a_1, b_1) di (a, b) sarà soltanto una parte di G; ma se ad es. i detti limiti inferiore e superiore del gruppo G fossero invece a_1 e b_1 allora i gruppi G e G_1 sono evidentemente gli stessi.

intervallo $(y_n - \varepsilon\delta_n, y_n + \varepsilon\delta_n)$ la cui ampiezza sia $2\varepsilon\delta_n$, e la somma di questi intervalli (che racchiuderanno così i varî punti) sarà $2\varepsilon(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n + \ldots)$ e potrà rendersi piccola quanto si vuole, e quindi la misura esterna del gruppo e così anche la misura del gruppo sarà zero. Conseguentemente il gruppo complementare di un gruppo numerabile in un intervallo (a, b) sarà esso pure misurabile e avrà per misura $b-a$.

Così più particolarmente ancora *il gruppo dei numeri razionali sarà misurabile e avrà per misura zero, mentre il gruppo dei numeri irrazionali in un intervallo (a, b) sarà esso pure misurabile e avrà per misura $b-a$* (*)

(*) Le definizioni che qui abbiamo dato per le misure esterna ed interna di un gruppo, e quelle pei gruppi misurabili e per la loro misura sono le definizioni introdotte nella scienza da Borel e da Lebesgue, e noi sempre a queste ci atterremo.

Jordan invece nel suo *Cours d'Analyse* introdusse la definizione di *lunghezza esterna* e *lunghezza interna* dei gruppi, attribuendo a questa lunghezza significati diversi da quelli delle misure di Lebesgue e Borel introdotte sopra; e chiamò gruppi *misurabili* quelli pei quali le due lunghezze esterna ed interna sono uguali fra loro, dicendo allora *lunghezza del gruppo* il valore comune delle sue lunghezze esterna ed interna; ma, come è facile vedere, i gruppi misurabili di Jordan non sono che una classe speciale dei gruppi misurabili di Borel e Lebesgue, talchè questi ultimi costituiscono una classe ben più estesa di gruppi in confronto a quella dei gruppi chiamati pure misurabili da Jordan.

Secondo Jordan infatti intendendo scomposto con leggi qualsiasi l'intervallo (a, b) nel quale cadono i punti del gruppo in un numero sempre crescente d'intervalli successivi che si fanno impiccolire indefinitamente, la *lunghezza interna* l_i G e *esterna* l_e G di un gruppo G contenuto in un intervallo (a, b) sono respettivamente, la prima l_i G il limite della somma degli intervalli *ogni punto* dei quali è punto del gruppo, e la seconda l_e G il limite della somma degli intervalli in ciascuno dei quali cade almeno un punto del gruppo; e si dimostra che questi limiti esistono e sono indipendenti dal modo di scomposizione dell'intervallo in intervalli parziali, e dalla legge che si segue pel loro impiccolimento. E da questo si vede che si ha sempre necessariamente $l_e\, G \geq l_i\, G$, perchè evidentemente gli intervalli che conducono a $l_i G$, se ve ne sono, appartengono tutti anche a quelli che conducono a l_e G, ma in l_e G possono figurarne anche degli altri.

E poichè la misura esterna m_e G di un gruppo G secondo Borel e Lebesgue è per definizione il limite inferiore della somma degli infiniti sistemi d'intervalli che contengono almeno un punto del gruppo, è certo che sarà $m_e G \leq l_e G$.

Ora, quando costruendo tutti gli intervalli che racchiudono ciascuno almeno un punto del gruppo G, si facciano questi impiccolire indefinitamente in modo sempre però che ognuno contenga almeno un punto del gruppo, gli intervalli che potranno successivamente restare non conterranno affatto punti del gruppo, e quindi ogni punto di questi ultimi intervalli apparterrà al gruppo complementare di G. Invece nessuno dei primi intervalli conterrà soltanto punti di questo gruppo complementare; e così mentre la somma dei primi intervalli al loro successivo impic-

precisamente come il gruppo dei numeri reali in un dato intervallo (gli estremi inclusi o no).

747. — Similmente, sempre come casi particolari si può anche vedere che *avendosi una funzione sempre finita* (*) *e integrabile secondo il concetto di*

colire tenderà verso l_e G, quella dei secondi tenderà verso l_i (CG), e quindi si avrà la formola seguente

$$l_e\, G + l_i\, (CG) = b - a,$$

per la quale similmente avremo l'altra

$$l_i\, G + l_e\, (CG) = b - a,$$

e perciò anche $l_e\, G - l_i\, G = l_e\, (CG) - l_i\, (CG) \geq 0$.

Avendosi d'altra parte per le misure esterna e interna di G secondo Borel e Lebesgue

$$m_i\, G + m_e\, (CG) = b - a$$

sottraendo da questa la precedente si vede che sarà $m_i\, G - l_i\, G = l_e\, (CG) - m_e\, (CG) \geq 0$, ciò che ci permette di dire che *insieme alla particolarità data sopra, cioè che* $m_e G \leq l_e G$, si ha l'altra $m_i\, G \geq l_i\, G$.

Di qui, ricordando che si ha sempre (§ 745) $m_i\, G \leq m_e\, G$, e osservando perciò che sarà anche $l_e G \geq m_e\, G \geq m_i\, G \geq l_i\, G$, si vede subito che se sarà $l_e G = l_i G$, dovrà essere anche $m_e\, G = m_i\, G$, e questo permette di affermare che *se un gruppo è misurabile nel senso di Jordan lo è anche nel senso di Borel e Lebesgue e le misure che si hanno allora nell'un senso e nell'altro saranno uguali;* ma poichè per le formole precedenti non può dirsi che debba sempre sussistere la proprietà inversa, si comprende bene come possano esservi gruppi misurabili nel senso di Borel e Lebesgue che non sono misurabili nel senso di Jordan, venendo così i gruppi misurabili nel senso di Borel e Lebesgue a costituire una classe più estesa di quella dei gruppi misurabili nel senso di Jordan.

D'altronde se si indica con $\Psi(x)$ una funzione che sia uguale a uno nei punti di un gruppo G e uguale a zero nei punti rimanenti cioè nei punti del gruppo complementare CG, si vede subito che l_e G *sarà l'integrale* $\overline{\int_a^b} \Psi(x)dx$ che in nota al § 4 pag. 11 del calcolo integrale vedemmo che esiste sempre e lo chiamammo con Jordan *integrale per eccesso* di $\Psi(x)$, e l_i G *sarà l'integrale* $\underline{\int_a^b} \Psi(x)dx$ che pure esiste sempre e che chiamammo *integrale per difetto* della stessa funzione $\Psi(x)$.

Questa osservazione dà un significato molto notevole alla lunghezze esterna e interna di Jordan; e di qui in particolare risulta che pel gruppo G dei numeri razionali in un intervallo (a, b) si ha $l_e\, G = b - a$, $l_i\, G = 0$, e quindi esso non è misurabile nel senso di Jordan, mentre come vedemmo è misurabile nel senso di Borel e Lebesgue; e resta così messo in chiara evidenza che i gruppi misurabili di Lebesgue-Borel costituiscono veramente una classe più estesa di quella dei gruppi misurabili di Jordan.

(*) Cioè funzione sempre numericamente inferiore a un numero finito (limitata).

Riemann in un intervallo finito (a, b), *il gruppo* G *dei punti p nei quali le oscillazioni* O_p (*) *della funzione relative ai punti stessi sono superiori a un numero positivo dato comunque piccolo* ε *è sempre un gruppo misurabile e la sua misura è zero.*

Si scomponga infatti l'intervallo (a, b) negli intervalli parziali piccolissimi $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ che conducono alla determinazione dell'integrale, e si osservi che siccome l'oscillazione *in un punto* non è mai superiore alla oscillazione della funzione negli intervalli che racchiudono quel punto, così i punti del gruppo G_ε, pei quali cioè la oscillazione nei punti stessi è superiore ad ε, non potranno trovarsi che in tutti o parte degli intervalli δ_ε nei quali la oscillazione D_ε della funzione sia superiore ad ε, e la misura esterna di quel gruppo sarà inferiore o uguale alla somma degli stessi intervalli δ_ε nei quali le oscillazioni D_ε della funzione sono superiori ad ε.

Ma per la nota condizione d'integrabilità secondo Riemann la somma di questi intervalli δ_ε all'impiccolire indefinito degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ potrà rendersi piccola quanto si vuole; quindi la misura esterna del gruppo G_ε sarà zero, e conseguentemente questo gruppo per quanto dicemmo in fine del § 745 sarà misurabile e la sua misura sarà zero.

748. — Per quanto ora abbiamo detto, l'esistenza di gruppi misurabili è dunque già fuori di dubbio, perchè tali se non altro sono ad es. tutti i gruppi numerabili, e lo sono pure i gruppi dei numeri irrazionali come quelli dei numeri reali in un dato intervallo (gli estremi inclusi o no) e quelli dei quali trattammo nel paragrafo precedente, ecc., e quindi per quanto riguarda la questione della esistenza di gruppi misurabili potrebbero bastare le cose già esposte.

Ma si può anche aggiungere che partendo da gruppi misurabili dati, quali potrebbero essere ad es. quelli ai quali ora abbiamo accennato, se ne possono comporre infiniti altri più complessi; e per dimostrare questo basteranno le considerazioni seguenti.

Premettiamo perciò che avendosi più gruppi qualsiansi G, $G_1, \ldots$ in numero finito o costituenti una infinità numerabile, si chiama loro *somma*, e si indica con $G + G_1 + \ldots$ il gruppo che si compone coi punti di questi, intendendo sempre che nella somma i punti siano presi una volta sola anche se appartengono a più d'uno dei gruppi che la compongono; e avendosi due gruppi G e G_1 dei quali il secondo sia almeno in parte contenuto nel primo si chiama *differenza del primo dal secondo*, e si indica con $G - G_1$, il gruppo che si ottiene sopprimendo nel primo tutti i punti che appartengono anche al secondo; e si chiama *prodotto* di due o più gruppi G, $G_1, G_2 \ldots$ in numero finito o costituenti una infinità numerabile, e si indica con $GG_1G_2\ldots$, il gruppo costituito dai punti comuni a tutti i gruppi stessi.

(*) Mentre s'indica pel solito con D l'oscillazione di una funzione (differenza fra il limite superiore e inferiore) *in un intervallo* (a, b), indichiamo con O_p quella che chiamasi oscillazione delle funzione *nel punto p* che noi definimmo nella introduzione al Calcolo differenziale (§ 38, pag. XLVIII). E indicheremo, quando avremo da considerarle (come ad es. agli estremi a o b), con O_{p+} e O_{p-} le oscillazioni nel punto p *a destra* o *a sinistra*.

Ammesse queste denominazioni si dimostra, come ora vedremo, che partendo da gruppi misurabili, le loro somme, differenze e prodotti costituiscono nuovi gruppi misurabili; e si comprende subito quindi in particolare come partendo da gruppi misurabili molto semplici, quali sono ad es. quello dei numeri razionali, o quello dei numeri irrazionali o dei numeri reali in un dato intervallo, si possono avere infiniti gruppi composti che sono essi pure misurabili (*); e così più particolarmente ancora, si può dire che i gruppi perfetti, in quanto si ottengono (§ 732) dal gruppo formato dai punti di un intero intervallo togliendovi i punti interni (in senso stretto) di un numero finito o di una infinità numerabile d'intervalli parziali, e così i gruppi chiusi, in quanto si compongono sempre (§ 730) di un gruppo perfetto e di un gruppo finito o di un gruppo numerabile, sono tutti gruppi misurabili.

749. — La dimostrazione delle proprietà ora indicate sulle somme, differenze, e prodotti di gruppi misurabili può farsi col De La Vallée Poussin (op. cit. pag. 245 e seg.) coi processi seguenti.

Siano G e G_1 due gruppi dati nell'intervallo (a, b), ambedue misurabili e *senza punti comuni*, e incominciando dal considerare il caso della somma di questi gruppi formiamo un sistema di intervalli α che racchiudano i punti di G, un sistema analogo d'intervalli α_1 pei punti di G_1, e sistemi di intervalli analoghi β e β_1 pei gruppi complementari CG, CG_1, intendendo sempre che in ciascuno di questi quattro sistemi d'intervalli non vi siano intervalli o porzioni d'intervalli sovrapposti. E ammettiamo anche che questi intervalli siano scelti in modo e già talmente piccoli che le somme $\sum(\alpha\beta)$ e $\sum(\alpha_1\beta_1)$ delle parti (α, β) comuni agli intervalli α e β e così le somme delle parti $(\alpha_1\beta_1)$ comuni agli intervalli α_1 e β_1 siano già arbitrariamente piccoli, come sempre potrà farsi (§ 744) perchè i gruppi dati G e G_1 sono misurabili.

(*) I gruppi misurabili che si ottengono per somma, differenza o prodotto partendo dal gruppo che contiene un solo punto e da quello dei numeri reali in un dato intervallo (gli estr. inclusi o no), si chiamano *gruppi misurabili di Borel*, e dal De La Vallée Poussin e dal Lebesgue vengono designati dicendoli *gruppi misurabili* B.

Con questi dati avremo evidentemente, sempre per quanto dicemmo nello stesso § 744,

$$mG = \lim \sum \alpha, \quad mG_1 = \lim \sum \alpha_1,$$

$$m(CG) = \lim \sum \beta_1, \; m(CG_1) = \lim \sum \beta_1,$$

intendendo che nei secondi membri di queste formole debbano prendersi i limiti inferiori delle somme $\sum \alpha, \sum \alpha_1, \sum \beta, \sum \beta_1$; e poichè, non avendo i gruppi G e G_1 punti comuni, il gruppo G sarà evidentemente tutto contenuto in CG_1 e quindi anche in intervalli β_1, e il gruppo G_1 sarà contenuto in CG e quindi anche in intervalli β, così è certo che i punti di G saranno contenuti nelle parti $(\alpha\beta_1)$ comuni agli intervalli α e β_1, e i punti di G_1 saranno contenuti nelle parti $(\alpha_1\beta)$ comuni agli intervalli α_1 e β.

E poichè, non sovrapponendosi nè le α nè le β, e neppure le α_1 e le β_1, non si sovrapporranno le $(\alpha\beta_1)$ e neppure le $(\alpha_1\beta)$, così i limiti inferiori delle somme $\sum(\alpha\beta_1)$ e $\sum(\alpha_1\beta)$ saranno ancora mG e mG_1 respettivamente, cioè avremo

$$mG = \lim \text{inf.} \sum(\alpha\beta_1), \quad mG_1 = \lim \text{inf.} \sum(\alpha_1\beta).$$

Consideriamo ora il gruppo $G+G_1$ somma dei due G e G_1, e osserviamo che i suoi punti, per quanto ora abbiamo detto, appartengono agli intervalli $(\alpha\beta_1)$ e $(\alpha_1\beta)$ e quindi pel teorema del § 743 avremo

$$\sum(\alpha\beta_1) + \sum(\alpha_1\beta) = \sum \mu + \sum(\alpha\beta_1\alpha_1\beta),$$

essendo μ un sistema d'intervalli che non si sovrappongono e che racchiudono i punti del gruppo somma $G+G_1$; e in questa formola la somma $\sum(\alpha\beta_1\alpha_1\beta)$ sarà arbitrariamente piccola perchè essa sarà parte delle altre somme $\sum(\alpha\beta)$, $\sum(\alpha_1\beta_1)$ già arbitrariamente piccole per ipotesi, o combinerà pienamente con queste; e quindi sarà

$$\lim \text{inf.} \sum(\alpha\beta_1) + \lim \text{inf.} \sum(\alpha_1\beta) = \lim \text{inf.} \sum \mu,$$

ovvero

$$mG + mG_1 = \lim \text{inf.} \sum \mu.$$

Si osservi d'altra parte che il gruppo $G+G_1$ è tutto contenuto come abbiamo detto negli intervalli μ, mentre il suo gruppo complementare $C(G+G_1)$,

essendo costituito dai punti che non appartengono nè a G nè a G_1 avrà per suoi punti soltanto tutti quelli di CG che non appartengono a G_1, e tutti quelli di CG_1 che non appartengono a G; quindi questi punti saranno soltanto quelli comuni a CG e CG_1 (*) e perciò saranno tutti contenuti contemporaneamente negli intervalli β e β_1, e quindi anche nelle parti $(\beta\beta_1)$ comuni a questi intervalli.

Di qui per la formola (1) del § 743 si vede che si avrà

$$\sum \mu + \sum(\beta\beta_1) = (b-a) + \sum(\mu\beta\beta_1),$$

e in questa la somma $\sum(\mu\beta\beta_1)$ delle parti comuni agli intervalli μ e $(\beta\beta_1)$ sarà arbitrariamente piccola perchè gli intervalli μ fanno parte degli intervalli $(\alpha\beta_1)$ e $(\alpha_1\beta)$, e quindi gli intervalli $(\mu\beta\beta_1)$ sono parti di quelle comuni agli intervalli $(\alpha\beta_1)$ e $(\beta\beta_1)$ e di quelle comuni agli altri intervalli $(\alpha_1\beta)$ e $(\beta\beta_1)$ e le loro somme sono pure arbitrariamente piccole; quindi pei teoremi del § 744 anche $G+G_1$ sarà misurabile e si avrà $\lim \text{inf.} \sum \mu = m(G+G_1)$ e perciò sarà $m(G+G_1) = mG + mG_1$, concludendosi così che:

Se G *e* G_1 *sono due gruppi misurabili senza punti comuni il gruppo somma* $(G+G_1)$ *sarà esso pure misurabile, e inoltre si avrà*

$$m(G+G_1) = mG + mG_1. \tag{3}$$

750. — Con facilità pure si dimostra che:

Se G *e* G_1 *sono due gruppi misurabili dei quali il secondo* G_1 *sia contenuto in tutto o in parte nel primo* G, *la loro differenza* $G-G_1$ (cioè il gruppo dei punti di G che non appartengono a G_1) *sarà pure misurabile.*

E se G_1 *sarà tutto contenuto in* G *si avrà anche*

$$m(G-G_1) = mG - mG. \tag{4}$$

Si osservi perciò che i punti di G che non appartengono a G_1, cioè quelli di $G-G_1$, apparteranno certamente a CG_1 e quindi saranno i punti comuni a G e a CG_1, cioè colle notazioni già poste si avrà intanto

$$G - G_1 = G\,(CG_1);$$

mentre, poichè il gruppo complementare $C(G-G_1)$ di $G-G_1$ sarà costituito

(*) Cioè quando G e G_1 non hanno punti comuni, avremo colle notazioni già adottate

$$C(G+G_1) = (CG)(CG_1).$$

dai punti del gruppo complementare di G e più da quelli che vengono tolti da G in quanto appartengono a G_1 cioè da quelli comuni a G e a G_1, avremo anche

$$C(G-G_1)=CG+GG_1.$$

S'introducano ora per G e CG e così per G_1 e CG_1 quei sistemi d'intervalli α e β, e α_1 e $\beta_1$che introducemmo nel paragrafo precedente, intendendo quindi sempre che gli intervalli di uno stesso sistema non si sovrappongano, ecc.

Per la prima delle formole precedenti i punti del gruppo $G-G_1$ saranno contenuti negli intervalli $(\alpha\,\beta_1)$ formati dalle parti comuni agli intervalli α e β_1; e per la seconda delle dette formole quelli del gruppo complementare $C(G-G_1)$ saranno contenuti negli intervalli β e in quelli $(\alpha\alpha_1)$ formati dalle parti comuni agli intervalli $\alpha\alpha_1$ le quali non si sovrapporranno; ciò che, per quanto dicemmo al § 743, porta anche che i punti di questo gruppo complementare $C(G-G_1)$ saranno contenuti anche in un sistema d'intervalli μ che non si sovrappongono e che sono contenuti negli intervalli β e $(\alpha\alpha_1)$.

Ne segue che per la (1) dello stesso § 743 avremo

$$\sum(\alpha\beta_1)+\sum\mu=b-a+\sum(\alpha\beta_1\mu);$$

e poichè in questa l'ultima somma $\sum(\alpha\beta_1\mu)$ potrà rendersi piccola a piacere perchè le μ come abbiamo detto sono tutte contenute negli intervalli β e $(\alpha\alpha_1)$, così per quanto dicemmo al § 744 si potrà intanto senz'altro affermare che la differenza $G-G_1$ è sempre misurabile, e così la prima parte del teorema resta dimostrata.

Ammettendo poi che G_1 sia tutto contenuto in G, si vede subito che allora la somma dei due gruppi G_1 e $G-G_1$ riporta al gruppo G; e poichè questi due gruppi per quanto ora abbiamo dimostrato sono misurabili e non hanno evidentemente punti comuni, pel teorema del paragrafo precedente avremo $mG_1+m(G-G_1)=mG$ e quindi $m(G-G_1)=mG-mG_1$ appunto come abbiamo enunciato nella seconda parte del teorema.

751. — Nel § 749 abbiamo considerato il caso della somma di due gruppi misurabili soli G e G_1 senza punti comuni e il risultato ottenuto si estende subito naturalmente al caso di un numero *finito* di gruppi; ora resta a considerare il caso della somma $\overline{G}=G+G_1+G_2+\ldots$ di una infinità numerabile di gruppi $G, G_1, G_2, \ldots$, nel qual caso si dimostra pure che:

Se i singoli gruppi $G, G_1, G_2, \ldots$ sono misurabili, anche il gruppo $\overline{G}$ formato dalla loro somma $\overline{G}=G+G_1+G_2+\ldots$ è misurabile.

E se i varî gruppi $G, G_1, G_2, \ldots$ non hanno punti comuni, si ha anche

$$m\overline{G}=mG+mG_1+mG_2+\ldots \tag{5}$$

Supponiamo infatti dapprima di essere in questo ultimo caso, quello cioè nel quale i varî gruppi $G, G_1, G_2, \ldots$ non hanno punti comuni, e poniamo

$$S_n=G+G_1+G_2+\ldots+G_n,\quad R_n=G_{n+1}+G_{n+2}+\ldots,$$

con che $\overline{G}=S_n+R_n$; e in questo caso per l'applicazione ripetuta del teorema del § 749 il gruppo S_n sarà certamente misurabile, e al tempo stesso avremo

$$mS_n=mG+mG_1+mG_2+\ldots+mG_n.$$

Osservando ora che per essere $\overline{G}=S_n+R_n$ i punti di $\overline{G}$ comprendono quelli di S_n e quelli di R_n, si vede che la somma degli intervalli che racchiudono i punti di S_n senza sovrapporsi, e quella degli intervalli analoghi che racchiudono i punti di R_n, prese insieme non potranno essere inferiori alla somma degli intervalli analoghi che racchiudono i punti di $\overline{G}$, cioè avremo

$$m_e\overline{G}\leq mS_n+m_eR_n, \tag{6}$$

avendo potuto porre mS_n invece di m_eS_n perchè già sappiamo che S_n è misurabile.

Evidentemente poi avremo

$$m_e(C\overline{G})\leq m(CS_n)$$

perchè CS_n è misurabile come S_n, e mentre CS_n non contiene i punti di S_n, $C\overline{G}$ non contiene questi punti e neppure quelli di R_n; quindi, poichè si ha $m(CS_n)=b-a-mS_n$ perchè S_n è misurabile, sarà

$$m_e(C\overline{G})\leq b-a-mS_n;$$

e ora, sommando colla (6) avremo anche

$$m_e\overline{G}+m_e(C\overline{G})\leq b-a+m_eR_n;$$

e quindi quando, come faremo fra breve, avremo dimostrato che m_eR_n col crescere indefinito di n ha per limite zero, basterà osservare che $m_e\overline{G}+m_e(C\overline{G})$ non può essere inferiore a $b-a$ per dedurne che $m_e\overline{G}+m_e(C\overline{G})=b-a$, e da questo si concluderà subito (§ 740) che, nel caso attuale in cui $G, G_1, G_2, \ldots$ non hanno punti comuni, il gruppo somma $\overline{G}$ è misurabile e lo sarà quindi anche R_n perchè $R_n=\overline{G}-S_n$; dopo di che per essere $G=S_n+R_n$, con S_n e R_n ambedue misurabili e senza punti comuni, per quanto già dimostrammo al § 749 avremo

$$m\overline{G}=mS_n+mR_n=(mG+mG_1+mG_2+\ldots+mG_n)+mR_n,$$

e quindi

$$m\overline{G}=\lim(mG+mG_1+\ldots+mG_n),$$

cioè $m\overline{G}$ sarà la somma della serie $\sum mG_n$ e si avrà perciò

$$mG=mG+mG_1+mG_2+\ldots$$

come abbiamo enunciato nella seconda parte del teorema.

Ora che la $m_e R_n$ al crescere indefinito di n possa rendersi piccola quanto si vuole risulta subito dall'osservare che non potendo mai le singole somme $mS_n= mG+mG_1+\ldots+mG_n$ anche al crescere indefinito di n superare $b-a$ la serie $mG+mG_1+mG_2+\ldots$, i cui termini sono tutti positivi o nulli sarà convergente, e quindi le somme $mG_{n+1}+mG_{n+2}+\ldots$ al crescere indefinito di n finiranno per divenire piccole quanto si vuole, per es. inferiori ad ε.

D'altra parte poichè $G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots$ sono misurabili potremo sempre intendere racchiusi i punti di $G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots$ in intervalli le somme dei quali siano respettivamente inferiori a

$$mG_{n+1}+\frac{\varepsilon}{2},\ mG_{n+2}+\frac{\varepsilon}{2^2},\ mG_{n+3}+\frac{\varepsilon}{2^3},\ldots$$

e così poichè ogni punto di R_n verrà racchiuso in questi intervalli, avremo certamente

$$m_e R_n<\left(mG_{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(mG_{n+2}+\frac{\varepsilon}{2^2}\right)+\left(mG_{n+3}+\frac{\varepsilon}{2^3}\right)+\ldots$$

e quindi anche

$$m_e R_n<mG_{n+1}+mG_{n+2}+mG_{n+3}+\ldots+\varepsilon,$$

cioè $m_e R_n<2\varepsilon$, e questo dimostra appunto che al crescere indefinito di n

$m_e R_n$ può rendersi piccolo quanto si vuole, e così per quanto abbiamo detto resta pienamente dimostrata la seconda parte del teorema.

Tutto questo quando i gruppi $G_1, G_2, G_3, \ldots$ non hanno punti comuni. Se poi essi hanno dei punti comuni come si ammette che possa essere nell'enunciato della prima parte del teorema, allora intendendo (come è naturale) che in $\overline{G}$ ogni punto sia preso una volta sola, è chiaro che avremo

$$\overline{G}=G+(G_1-G)+(G_2-G-G_1)+(G_3-G-G_1-G_2)+\ldots$$

e i vari gruppi corrispondenti ai termini di questa serie non avranno fra loro punti comuni e per l'applicazione ripetuta del teorema del paragrafo precedente risulteranno misurabili, e quindi per quanto ora abbiamo dimostrato $\overline{G}$ sarà ancora misurabile.

In questo caso però non si potrà dire che si abbia la formola (5), ma avremo soltanto l'altra

$$m\overline{G}=mG+m(G_1-G)+m(G_2-G-G_1)+m(G_3-G-G_1-G_2)+\ldots$$

e ai singoli termini di questa serie non potrà applicarsi la formola (4).

Però *se il gruppo formato dai punti comuni ai gruppi dati* $G, G_1, G_2, \ldots$ *sarà un gruppo misurabile e di misura zero la formola (5) varrà ancora,* perchè soppressi i punti comuni in tutti i vari gruppi meno che da uno è certo che la loro misura non sarà cambiata, e poichè la formola (5) verrà ad essere applicabile alla somma dei gruppi rimanenti dopo la soppressione di quei punti è evidente che sarà applicabile anche alla somma dei gruppi primitivi.

752. — Come ora abbiamo considerato il caso in cui ad un gruppo misurabile G se ne aggiungono una infinità numerabile di altri $G_1, G_2, G_3, \ldots$ pure misurabili e tutti come G contenuti in uno stesso intervallo (a, b), così si può considerare il caso in cui dal gruppo G si tolgono gli infiniti altri $G_1, G_2, G_3, \ldots$, e si dimostra pure che:

Il nuovo gruppo $G-G_1-G_2-G_3\ldots$ *è ancora misurabile.*

E se i gruppi $G_1, G_2, G_3, \ldots$ *che si tolgono da* G *son tutti contenuti in* G *e non hanno fra loro punti comuni o ne hanno soltanto un gruppo misurabile e di misura zero, si ha ancora la solita formola*

$$(7)\qquad m(G-G_1-G_2-G_3-\ldots)=mG-mG_1-mG_2-mG_3-\ldots.$$

Se si osserva infatti che pel teorema precedente il gruppo $G_1+G_2+G_3+\ldots$ è misurabile, basta ricordare il teorema del § 750 per dedurne subito che anche il gruppo differenza $G-(G_1+G_2+G_3+\ldots)$ che è appunto il gruppo $G-G_1-G_2-G_3\ldots$ è misurabile; e questo dimostra intanto la prima parte del teorema.

Ammettendo poi di essere nel caso in cui $G_1, G_2, \dots G_n \dots$ non hanno fra loro punti a comuni o ne hanno soltanto un gruppo misurabile e di misura zero, pei teoremi dimostrati nel paragrafo precedente avremo

$$m(G_1+G_2+G_3+\dots)=mG_1+mG_2+mG_3+\dots,$$

mentre, per essere $G_1, G_2, G_3 \dots$ e quindi anche la loro somma $G_1+G_2+G_3+\dots$ tutta contenuta in G, pel teorema del § 750 avremo anche

$$m(G-G_1-G_2-G_3-\dots)=mG-m(G_1+G_2+G_3+\dots)=mG-mG_1-mG_2-mG_3-\dots,$$

con che resta dimostrata anche la seconda parte del teorema.

753. — Passando poi al caso del prodotto $GG_1G_2\dots$ di più gruppi $G, G_1, G_2, \dots$ tutti misurabili e che sono in numero finito o costituiscono una infinità numerabile di gruppi e sono tutti contenuti in uno stesso intervallo (a, b), si trova subito che il *gruppo prodotto stesso* $GG_1G_2\dots$ *è un gruppo misurabile,* perchè evidentemente il suo gruppo complementare $C(GG_1G_2\dots)$ si costituirà di tutti i punti di (a, b) che non appartengono a G, di quelli che non appartengono a G_1, di quelli che non appartengono a $G_2, \dots$, cioè si avrà

$$C(GG_1G_2\dots)=CG+CG_1+CG_2+\dots$$

potendo però i gruppi complementari $CG, CG_1, CG_2, \dots$ avere dei punti comuni, e poichè questi ultimi gruppi sono tutti misurabili, pel teorema del § 751 lo stesso accadrà della loro somma cioè di $C(GG_1G_2\dots)$ e perciò anche $GG_1G_2\dots$ sarà misurabile.

754. — A complemento poi dei teoremi dimostrati si può anche dare l'altro che dice che *avendosi una infinità numerabile di gruppi misurabili* $G, G_1, G_2, \dots$ *tutti contenuti in uno stesso intervallo* (a, b), *e ciascuno dei quali* G_h *contiene tutti i precedenti* $G, G_1, G_2, \dots, G_{h-1}$, *avremo*

$$m(G+G_1+G_2+\dots)=\lim_{n=\infty} mG_n;$$

perchè il gruppo somma $G+G_1+G_2+\dots$ che sarà misurabile si potrà anche considerare come costituito dai punti del gruppo corrispondente all'altra somma

$$G+(G_1-G)+(G_2-G_1)+(G_3-G_2)+\dots$$

nella quale i gruppi corrispondenti ai singoli termini della somma non vengono ad avere punti comuni, e quindi pel teorema del § 750 si ha

$$m(G+G_1+G_2+\dots)=mG+m(G_1-G)+m(G_2-G_1)+m(G_3-G_2)+\dots,$$

e avendosi in generale pel teorema del § 749 $m(G_h-G_{h-1})=mG_h-mG_{h-1}$, si vede subito che si ha appunto

$$m(G+G_1+G_2+\dots)=\lim_{n=\infty} mG_n.$$

755. — Invece se *ognuno dei gruppi* $G, G_1, G_2 \dots$ *anzichè contenere i precedenti vi è contenuto, essendo ancora il primo di essi* (e quindi anche tutti gli altri) *contenuto in un dato intervallo finito* (a, b), *allora avremo*

$$m(GG_1G_2\dots)=\lim_{n=\infty} mG_n;$$

perchè in questo caso i gruppi complementari saranno nel caso dei gruppi del teorema precedente, cioè ciascuno di essi CG_h conterrà i precedenti $CG, CG_1, CG_2, \dots, CG_{h-1}$, e quindi poichè si avrà

$$C(GG_1G_2,\dots)=CG+CG_1+CG_2+\dots$$

sarà per lo stesso teorema

$$mC(GG_1G_2\dots)=\lim_{n=\infty} m(CG_n),$$

e quindi avremo

$$b-a-mC(GG_1G_2,\dots)=b-a-\lim_{n=\infty} m(CG_n)=\lim \{b-a-m(CG_n)\}$$

ovvero

$$m(GG_1G_2\dots)=\lim_{n=\infty} mG_n$$

come abbiamo enunciato.

756. — E così in applicazione del teorema del § 754 si trova che *il gruppo* G *dei punti di discontinuità di una funzione* $F(x)$ *sempre finita e integrabile secondo Riemann in un intervallo finito* (a, b), *è sempre un gruppo misurabile di misura zero;* perchè indicando con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ numeri diversi da zero e positivi successivamente decrescenti che tendono a zero al crescere indefinito di n, e con $G_{\varepsilon_1}, G_{\varepsilon_2}, \dots, G_{\varepsilon_n}, \dots$, i gruppi successivi dei punti p nei quali le oscillazioni O_p della funzione relative ai punti stessi p sono superiori respettivamente a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$, il gruppo G dei punti di discontinuità della funzione sarà la somma di questi gruppi $G_{\varepsilon_1}, G_{\varepsilon_2}, \dots, G_{\varepsilon_n}, \dots$.

E siccome pel teorema del § 747 ciascuno di questi gruppi sarà misurabile e avrà per misura zero, e evidentemente ognuno di essi conterrà tutti i precedenti, così pel teorema del § 754 il gruppo somma G sarà anch'esso misurabile e avrà per misura zero.

Funzioni misurabili.

757. — Negli ultimi tempi si è fatta una generalizzazione dell'ordinario concetto di funzione di Dirichlet, considerando le funzioni anche soltanto per tutti i punti di un gruppo contenuto in un intervallo anzichè per ogni punto dell'intervallo, e chiamando cioè *funzione in un gruppo di punti dato* G ogni quantità che ha un valore unico e determinato, finito o anche infinito ma determinato di segno, in ogni punto del gruppo, abbia essa o no un valore negli altri punti dell'intervallo nel quale il gruppo G è contenuto; per modo che le funzioni ordinarie di Dirichlet vengono ad essere casi particolari di queste, corrispondendo esse al caso in cui il gruppo G riempie tutto l'intervallo.

758. — Estendendo allora i concetti che si hanno per le ordinarie funzioni di Dirichlet, si dice *oscillazione della funzione nel gruppo che si considera* G *o anche* (come per le funzioni ordinarie) *oscillazione della funzione in un intervallo nel quale i punti del gruppo siano contenuti* la differenza (finita o infinita secondo i casi) fra i limiti superiore e inferiore (che certo esisteranno) dei suoi valori nei punti del gruppo.

Considerando sempre gruppi composti di un numero infinito di punti faremo qui astrazione dai punti *isolati* che essi potranno avere e che potranno anche essere in numero infinito (§ 716), e dovendo ora considerare punti nell'intorno dei quali cadono sempre infiniti punti del gruppo, *ci fermeremo sempre a considerare soltanto i punti limiti a del gruppo,* cioè i punti del gruppo derivato, che potranno quindi anche *non* appartenere al gruppo se esso non è chiuso.

E, come per le funzioni ordinarie di Dirichlet, per ognuno di questi punti a chiameremo *oscillazione della funzione nel punto a,* e la indicheremo con O_a, il limite (che certo esisterà) delle oscillazioni della funzione negli intorni ordinarî dello stesso punto a; e chiameremo *oscillazioni della funzione nel punto stesso a a destra o a sinistra* (*), e le indicheremo con O_{a+} o O_{a-}, i limiti (che certo esisteranno) delle oscillazioni della funzione nei respettivi intorni *a destra* o *a sinistra* di a quando questi intorni impiccoliscono indefinitamente, precisamente come nel caso delle funzioni di Dirichlet (§ 38 pag. XLVIII della Introd. al Calc. diff.)

(*) Naturalmente se a fosse un limite estremo del gruppo (inferiore o superiore) non si avrà altro che l'oscillazione nel punto a a destra o quella a sinistra, la quale allora sarà la oscillazione ordinaria nel punto.

L'oscillazione O_a nel punto a sarà sempre uguale o superiore alle due O_{a+} e O_{a-} a destra e a sinistra del punto stesso; e l'essere zero O_a porterà che lo siano anche le due O_{a+} e O_{a-}, e viceversa.

759. — Una funzione si dice *continua nel punto a*, nell'intorno del quale si suppone sempre finita, quando le sue oscillazioni in quel punto sono zero; per modo che quando a sia un punto del gruppo si ricade evidentemente nella definizione che si dà ordinariamente per le funzioni di Dirichlet, cioè che pei punti a di continuità il limite dei valori della funzione nei punti del gruppo a destra e a sinistra di a è precisamente il valore della funzione nel punto.

E se una funzione è continua in ogni punto del gruppo derivato di G si dice che essa *è continua in tutto il gruppo* G. Naturalmente se il gruppo è perfetto l'essere continua una funzione in tutti i punti del gruppo derivato di G corrisponde anche a dire che è continua in tutti i punti di G e se il gruppo G è soltanto chiuso corrisponde a dire che è continua in tutti i punti *non isolati* del gruppo, questi ultimi del resto, come abbiamo già detto, essendo punti che non si prendono in considerazione trattando della continuità.

Avendo poi più funzioni sempre finite (limitate) che si considerano in uno stesso gruppo di punti G, se esse sono continue in un punto a si dimostra subito, come nel caso delle ordinarie funzioni di Dirichlet, che anche la loro somma, o differenza, il loro prodotto o il quoziente di due di esse sarà finito e continuo nello stesso punto a, purchè nel caso del quoziente la funzione denominatore non abbia per limite inferiore dei suoi valori assoluti lo zero negli intorni del punto a.

760. — Nel caso poi che preso un punto a (sempre nel supposto che si tratti di un punto del gruppo derivato di G) una funzione data in questo gruppo G sia discontinua in quel punto, allora, per quanto testè dicemmo, la sua oscillazione in quel punto non sarà zero, e quindi, indicando con d un numero sufficientemente piccolo ma diverso da zero e positivo, essa sarà superiore o uguale a d.

E se per un gruppo G *nel quale una funzione è data vi saranno infiniti punti p nei quali la oscillazione O_p della funzione è $\geqq d$, questi punti costituiranno sempre un gruppo chiuso*, perchè indicando con $\bar{p}$ un loro punto limite, in ogni intorno di $\bar{p}$ cadranno infiniti punti p nei quali l'oscillazione è $\geqq d$, e quindi lo stesso sarà anche pel punto $\bar{p}$, il quale perciò sarà uno degli stessi punti p; e perciò il gruppo di questi punti contenendo quelli del gruppo derivato sarà chiuso.

761. — Avendosi una funzione in un gruppo di punti G, se in un punto a (del gruppo derivato) essa è discontinua e ha per oscillazione d, è certo

che negli intorni (comunque piccoli) di quel punto (o almeno in uno degli intorni a destra o a sinistra) le oscillazioni della funzione corrispondenti a quegli intorni saranno $\geq d$.

Se poi per una funzione data in un gruppo di punti G vi saranno sempre intervalli, ciascuno con infiniti punti del gruppo, nei quali *per quanto piccoli essi siano le oscillazioni corrispondenti agli intervalli stessi non saranno inferiori a un certo numero diverso da zero e positivo d_0, allora esisterà sempre almeno un punto p di discontinuità della funzione nel quale essa avrà una oscillazione O_p non inferiore a d_0.*

E difatti, in questo caso presa una serie infinita di numeri positivi indefinitamente decrescenti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ si potranno sempre formare intervalli $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots$ di ampiezza respettivamente inferiori a questi numeri, e ciascuno contenente infiniti punti del gruppo, pei quali le oscillazioni corrispondenti saranno $\geq d_0$; e presi punti $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ di G, uno in ciascuno degli stessi intervalli e tutti *distinti fra loro*, come potrà sempre farsi anche se questi intervalli sono successivamente uno dentro l'altro, questi punti avranno un punto limite p.

Preso ora un intorno comunque piccolo $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ di questo punto p, è certo che nell'intorno metà di esso $\left(p-\frac{\varepsilon}{2}, p+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ verranno a cadere infiniti dei punti $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ che appartengono agli intervalli $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots$; e poichè questi intervalli finiscono per essere inferiori a $\frac{\varepsilon}{2}$, è certo che da un dato momento in poi insieme ai punti $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots$ che cadranno nell'intorno $\left(p-\frac{\varepsilon}{2}, p+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ verranno a cadere nell'intiero intorno $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ gli intervalli $g_{r_1}, g_{r_2}, g_{r_3}, \ldots$ ai quali quei punti $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots$ appartengono; e quindi, poichè ε è arbitrariamente piccolo, in p avremo certamente una oscillazione $O_p \geq d_0$.

762. — Segue da questo teorema che se una funzione è finita e continua in ogni punto di un gruppo, per ogni numero positivo comunque piccolo ε dovrà esistere un numero diverso da zero e positivo g pel quale le oscillazioni della funzione in ogni intervallo di ampiezza non superiore a g siano sempre inferiori ad ε; e questo mostra che le *funzioni sempre continue in un gruppo lo sono anche uniformemente*, venendo così esteso il noto teorema di Cantor sulla continuità uniforme delle ordinarie funzioni di Dirichlet.

Valendoci poi di questo teorema, e con considerazioni simili a quelle che furono fatte nella Introduzione al Calcolo differenziale ai §§ 44 e seg. (pag. LII e seg.) per la dimostrazione di alcune proprietà delle funzioni continue di Dirichlet, potremmo estendere molte di queste proprietà al caso delle funzioni date soltanto in un gruppo di punti quando il gruppo è chiuso,

astraendo sempre dai punti isolati; e in particolare potremmo dimostrare il teorema della effettiva esistenza del massimo e del minimo per le funzioni sempre finite e continue in un gruppo chiuso di punti.

763. — Considerando ora una funzione $f(x)$ in un gruppo G di punti per la quale il limite inferiore e superiore siano l e L (*), per modo cioè che sia (l, L) *l'intervallo di variazione delle funzione*, indichiamo con A e B $(\mathrm{A}<\mathrm{B})$ due numeri qualsiasi compresi fra l e L (questi limiti inclusi); e consideriamo in G il gruppo dei punti x pei quali si ha $\mathrm{A}<f(x)<\mathrm{B}$, o quello dei punti x pei quali si ha $f(x)=\mathrm{A}$, o si ha invece $\mathrm{A}\leq f(x)<\mathrm{B}$, o $f(x)>\mathrm{A}$, ecc.; e indichiamo respettivamente con

$$\mathrm{G}(\mathrm{A}<f(x)<\mathrm{B}),\ \text{o con}\ \mathrm{G}(f(x)=\mathrm{A}),\ \text{o con}$$
$$\mathrm{G}(\mathrm{A}\leq f(x)<\mathrm{B}),\ \text{o con}\ \mathrm{G}(f(x)>\mathrm{A}), \ldots$$

i gruppi dei punti x nei quali $f(x)$ soddisfa alle condizioni indicate nelle parentesi.

Con queste indicazioni una funzione $f(x)$ data in un gruppo G (che verrà di necessità ad essere misurabile) si dice *misurabile* quando, indicando con K un numero finito qualsiasi, il gruppo $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{K})$ risulti misurabile; e propriamente quando l sia finito potremo fare a meno di prendere $\mathrm{K}<l$, purchè allora ci si assicuri che anche il gruppo $\mathrm{G}(f(x)=l)$ è misurabile, e quando L sia finito potremo fare a meno di supporre $\mathrm{K}>\mathrm{L}$ purchè allora ci si assicuri che anche il gruppo $\mathrm{G}(f(x)=\mathrm{L})$ è misurabile; e quando l e L siano ambedue finiti potremo limitarci a prendere K fra l e L assicurandoci però al tempo stesso che sono misurabili anche i due gruppi $\mathrm{G}(f(x)=l)$ e $\mathrm{G}(f(x)=\mathrm{L})$.

764. — Si osservi poi che se i gruppi $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{K})$ sono misurabili qualunque sia K fra l e L (l e L inclusi) (**), lo stesso sarà dei gruppi $\mathrm{G}(\mathrm{A}<f(x)\leq\mathrm{B})$ e $\mathrm{G}(f(x)\leq\mathrm{A})$, perchè questi gruppi saranno respettivamente la differenza dei due $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{A})$ e $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{B})$ o dei due $\mathrm{G}(f(x)\geq l)=\mathrm{G}$ e $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{A})$ dei quali nell'un caso e nell'altro il secondo dei gruppi della differenza è contenuto nel primo; e viceversa se i gruppi $\mathrm{G}(\mathrm{A}<f(x)\leq\mathrm{B})$

(*) Poichè ora ammetteremo che $f(x)$ possa anche essere infinita in punti del gruppo purchè determinata di segno, non si escluderà che possano anche essere $l=-\infty$ e $\mathrm{L}=+\infty$.

(**) Col dire che K puó avere anche i valori estremi l o L, ne viene che quando per es. $l=-\infty$ s'intende dire che K può avere anche valori negativi grandi quanto si vuole in valore assoluto, e similmente quando $\mathrm{L}=+\infty$ s'intende che K può avere valori positivi grandi quanto si vuole.

o $G(f(x) \leq A)$ sono misurabili qualunque siano A e B fra l e L (l e L incl.) lo stesso accadrà dei gruppi $G(f(x) > K)$ qualunque sia K perchè questi ultimi gruppi corrisponderanno nel primo caso al gruppo $G(K < f(x) \leq L)$ e nel secondo alla differenza dei due $G(f(x) \leq L) = G$ e $G(f(x) < \overline{K} + \varepsilon)$ con ε arbitrariamente piccolo; e per questo e perchè i gruppi dei punti pei quali $f(x) = K$ cioè il gruppo $G(f(x) = K)$ quando K è fra l e L (l e L escl.) può riguardarsi come il gruppo prodotto degli infiniti gruppi numerabili $G_n\left(K - \frac{1}{n} < f(x) < K + \frac{1}{n}\right)$ corrispondenti a $n = 1, 2, 3, \ldots$, che è misurabile (§ 753) se tali sono i gruppi $G_1, G_2, G_3 \ldots$, e un risultato simile si ha se $K = l$ o se $K = L$, così evidentemente la definizione delle funzioni misurabili può anche cambiarsi, e una funzione può dirsi misurabile anche quando i gruppi $G(A \leq f(x) < B)$ (*) o gli altri $G(f(x) < A)$ con A e B qualunque fra l e L (l e L incl.) saranno misurabili, intendendo sempre che quando A o B abbiano i valori estremi l o L debbano considerarsi anche i gruppi $G(f(x) = l)$ o $G(f(x) = L)$. E se $f(x)$ sarà misurabile lo stesso sarà anche di $-f(x)$, ecc.

Per queste definizioni poi si vede subito che se una funzione $f(x)$ è misurabile in due o più gruppi $G_1, G_2, G_3, \ldots$, essa sarà misurabile anche nel gruppo somma di due o più di questi gruppi, ecc.

765. — Alle funzioni misurabili in un gruppo e *sempre finite* (limitate) si estendono con tutta facilità i soliti teoremi delle somme prodotti e quozienti quando in quest'ultimo caso la funzione denominatore non si accosta mai a zero più di un certo numero.

E difatti avendosi due di tali funzioni $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ misurabili in un gruppo di punti G, e prendendo a considerare la loro somma $\varphi(x) + \Psi(x)$, si osserverà che essendo ε un numero diverso da zero e positivo e K un numero qualsiasi, il gruppo $G_{n\varepsilon}$ formato dal prodotto dei due gruppi misurabili $G(\varphi(x) > n\varepsilon)$ e $G(\Psi(x) > K - n\varepsilon)$ per ogni valore $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ di n sarà un gruppo misurabile (§ 753), e darà soltanto punti x pei quali $\varphi(x) + \Psi(x) > K$; e pel teorema del § 751 anche il gruppo $\overline{G}_\varepsilon$ formato dalla somma dei varî gruppi $G_{n\varepsilon}$ corrispondenti a $n = 0, n = \pm 1, n = \pm 2, \ldots$ sarà pure misurabile e si comporrà soltanto di punti x pei quali $\varphi(x) + \Psi(x) > K$.

(*) Quando le funzioni misurabili in un gruppo G si definiscano col dire che si richiede che i gruppi $G(A \leq f(x) < B)$ siano misurabili qualunque siano i valori di A e B fra l e L (l e L incl.), si viene a dire che si richiede che siano misurabili i gruppi dei punti ai quali corrispondono i valori delle funzioni che cadono in una porzione qualsiasi, anche arbitrariamente piccola, dell' *intervallo di variazione* della funzione.

Non si può dire però che questo gruppo $\overline{G}_\varepsilon$ conterrà tutti i punti x pei quali $\varphi(x) + \Psi(x) > K$, perchè ad es. se con un dato ε per certi punti x del gruppo dato G si avranno valori di $\varphi(x)$ fra 0 e ε e valori di $\Psi(x)$ fra $K - \varepsilon$ e K la somma dei quali sia superiore a K questi punti x non saranno contenuti in G_ε, mentre vi sarebbero certamente contenuti (in corrispondenza a un certo valore di n) se fosse preso ε più piccolo sufficientemente; e per questo, dopo preso il numero ε e formato il gruppo $\overline{G}_\varepsilon$, prendendo un altro numero ε_1 inferiore ad ε e formando il gruppo $\overline{G}_{\varepsilon_1}$ come $\overline{G}_\varepsilon$, e poi prendendo un valore ε_2 inferiore a ε_1 e formando un terzo gruppo $\overline{G}_{\varepsilon_2}, \ldots$ e così continuando col considerare una infinità numerabile di numeri positivi successivamente e indefinitamente decrescenti $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ e formando i gruppi $\overline{G}_\varepsilon, \overline{G}_{\varepsilon_1}, \overline{G}_{\varepsilon_2}, \ldots, \overline{G}_{\varepsilon_m}, \ldots$ ciascuno dei quali conterrà i precedenti, è certo che il gruppo $\overline{G}_\varepsilon + \overline{G}_{\varepsilon_1} + \overline{G}_{\varepsilon_2} + \ldots + \overline{G}_{\varepsilon_m} + \ldots$ somma degli stessi gruppi, conterrà qualsiasi punto x pel quale $\varphi(x) + \Psi(x) > K$ e avrà soltanto di questi punti, e sarà anch'esso misurabile (§ 753); e così resta dimostrato che *quando due funzioni $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ date in un gruppo di punti* G *sono finite e misurabili, anche la loro somma $\varphi(x) + \Psi(x)$ sarà misurabile;* e ora naturalmente questo teorema può estendersi anche al caso di un numero finito qualsiasi di funzioni sempre finite (limitate) e misurabili.

Cambiando $\Psi(x)$ in $-\Psi(x)$ il teorema resta dimostrato anche per la differenza di due funzioni finite e misurabili.

766. — Al modo stesso considerando il prodotto dei due gruppi $G(\varphi(x) > n\varepsilon)$ e $G\left(\Psi(x) > \frac{K}{n\varepsilon}\right)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$, e ripetendo i ragionamenti del paragrafo precedente, il teorema si dimostra pel prodotto di due funzioni misurabili e finite $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ che siano sempre diverse da zero e positive in un gruppo G.

Se poi queste funzioni $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$, pure essendo sempre misurabili e finite, possono avere anche valori negativi o nulli, allora poichè indicando con λ e μ numeri superiori ai limiti superiori dei loro valori assoluti, le funzioni $\varphi(x) + \lambda$ e $\Psi(x) + \mu$ saranno ancora misurabili e sempre diverse da zero e positive, lo stesso accadrà del loro prodotto $(\varphi(x) + \lambda)(\Psi(x) + \mu)$, o $\varphi(x)\Psi(x) + \lambda\Psi(x) + \mu\varphi(x) + \lambda\mu$; e di qui pel teorema precedente si vede che anche il prodotto $\varphi(x)\Psi(x)$ sarà misurabile, e si può dire perciò che *il prodotto di due funzioni finite e misurabili $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ in un gruppo* G *è sempre misurabile.*

767. — Osservando poi che tenendo conto delle considerazioni generali del § 764 si vede subito che se $\Psi(x)$ è una funzione finita e misurabile in un gruppo G e sempre discosta da zero più di un certo numero, anche la

sua inversa $\frac{1}{\Psi(x)}$ è sempre finita e misurabile, pel teorema dimostrato si dedurrà subito anche che *il quoziente* $\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}$ $\left(\text{che può considerarsi come il prodotto delle due funzioni } \varphi(x) \text{ e } \frac{1}{\Psi(x)}\right)$, *quando $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ sono ambedue finite e misurabili nel gruppo nel quale sono date e il denominatore $\Psi(x)$ è anche sempre discosto da zero più di un certo numero, è una funzione misurabile.*

768. — Infine aggiungiamo che:

a) le funzioni $f(x)$ sempre finite e continue in un gruppo di punti chiuso G (e quindi in particolare le funzioni di Dirichlet finite e continue in un intervallo finito (a, b)) sono sempre misurabili, perchè ogni punto limite qualsiasi x_0 del gruppo $G(f(x) \geq A)$, essendo anche un punto limite di G, appartiene a G perchè G è chiuso, ed essendo al tempo stesso un punto di continuità di $f(x)$ ed avendo nei suoi intorni arbitrariamente piccoli infiniti punti di G nei quali $f(x) \geq A$, nel punto stesso x_0 sarà $f(x_0) \geq A$; e questi punti x_0 perciò saranno tutti punti anche del gruppo $G(f(x) \geq A)$ ciò che porta che anche questo gruppo sarà chiuso e quindi misurabile (§ 748). Nè farà ostacolo il potervi essere in G dei punti isolati perchè questi, se ci sono, costituiscono un gruppo finito o un gruppo numerabile e quindi misurabile esso pure e di misura zero.

b) Le funzioni di Dirichlet sempre finite e integrabili secondo il concetto di Riemann in un intervallo finito (a, b) sono tutte misurabili, perchè per esse il gruppo dei punti di discontinuità è misurabile e di misura zero (§ 756), e nel gruppo degli altri punti la funzione è continua e il gruppo è chiuso; talchè il gruppo dei punti $G(f(x) \geq A)$, componendosi di un gruppo chiuso e tutt'al più anche di un gruppo misurabile di misura zero, è esso pure misurabile.

Integrale di Lebesgue.

769. — Tutto questo ammesso, diamo la definizione dell'*integrale di Lebesgue*.

Ricordiamo che, secondo Riemann, data una funzione (di Dirichlet) sempre finita (limitata) in un certo intervallo finito (a, b) e *per la quale sia soddisfatta la solita condizione di integrabilità,* scomponendo l'intervallo dato (a, b) secondo una legge qualsiasi in intervalli parziali successivi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ e prendendo per ogni intervallo δ_s un numero f_s compreso fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ in quell'intervallo, l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ viene ad essere

il limite della solita somma $\sum \delta_s f_s$ dei prodotti $\delta_s f_s$; e allora gli integrali per eccesso e per difetto, cioè quelli che corrispondono a prendere per le f_s respettivamente il limite superiore e il limite inferiore di $f(x)$ negl'intervalli δ_s, combinano coll'integrale stesso $\int_a^b f(x)dx$.

Secondo Lebesgue, invece di considerare soltanto le funzioni finite ordinarie di Dirichlet, si considerano più in generale le funzioni *misurabili* $f(x)$, coi limiti inferiore e superiore l e L entrambi finiti, date in un gruppo di punti G (misurabile) tutto contenuto in un intervallo finito (a, b); e invece di dividere in parti piccolissime $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ l'intervallo (a, b) nel quale si muovono i valori della variabile, si divide l'intervallo (l, L) nel quale si muovono i valori della funzione (cioè l'intervallo di variazione della funzione) in intervalli parziali successivi coi punti di divisione $l, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{i-1}, y_i, \ldots, y_n$, L, e si moltiplicano i numeri y_{i-1} e y_i per le misure g_i (*) dei gruppi (tutti misurabili) $G_i(y_{i-1} \leq f(x) < y_i)$ dei punti x pei quali $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$, formando così le due somme

$$s = \sum_1^{n+1} g_i y_{i-1}, \quad \mathrm{S} = \sum_1^{n+1} g_i y_i \text{ (con } y_0 = l, \text{ e } y_{n+1} = \mathrm{L}),$$

delle quali poi si prende il limite col far tendere a zero gli intervalli $y_i - y_{i-1}$, e questo limite, come ora vedremo, oltre ad esistere, è lo stesso per le due somme ed è indipendente dal modo col quale è stata fatta la divisione dell'intervallo (l, L) negli intervalli parziali (y_{i-1}, y_i).

Questo limite comune è quello che si chiama *integrale di Lebesgue* e si indica con $(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f dx$ o con $(\mathrm{L})\int_a^b f dx$, facendo cioè precedere il segno d'integrale dalla parentesi (L) quando per evitare equivoci, è necessario, di fare apparire che si tratta di questo integrale.

770. — Ora per vedere intanto che il limite delle due somme s e S, ammesso come poi mostreremo che esista, è lo stesso per l'una e per l'altra, si osservi prima che di esse la seconda non è mai inferiore alla prima, e per la loro differenza si ha

$$\mathrm{S} - s = \sum_1^{n+1} g_i (y_i - y_{i-1}),$$

(*) Queste misure, quando colla notazione vorremo mettere in evidenza anche la divisione $(l, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_i, \ldots, y_n, \mathrm{L})$ alla quale si riferiscono, anzichè con g_i le indicheremo con g_{y_i}.

e se δ sarà la maggiore delle differenze $y_i - y_{i-1}$ avremo $S - s \leq \delta \sum_1^{n+1} g_i = \delta(mG)$ perchè i gruppi $G(y_{i-1} \leq f(x) < y_i)$ non hanno punti comuni e sono tutti misurabili e insieme costituiscono l'intero gruppo G che pel teorema del § 751 ha per misura $mG = \sum g_i$; e ora poichè δ finisce per essere piccolo quanto si vuole, la differenza $S - s$ ha per limite zero, ciò che mostra appunto che le due somme s e S hanno lo stesso limite se questo limite esiste.

771. — Si osservi ora che, fatta una divisione $l, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots y_n$, L dell'intervallo (l, L), se fra i punti di questa divisione si intercalano nuovi punti di divisione, formando così una nuova divisione $l, y'_1, y'_2, \dots y'_{n'}$, L che conterrà tutti i punti della divisione precedente, e ad es. fra i punti y_{i-1} e y_i della prima divisione che ora corrisponderanno a y'_t e y'_{t+k}, avrà i punti $y'_{t+1}, y'_{t+2}, \dots, y'_{t+k-1}$ della nuova divisione, le nuove somme S' corrispondenti a S che indicheremo con $\sum g'_p y'_p$ non andranno crescendo, e le altre $s' = \sum g'_p y'_{p-1}$ corrispondenti a s non andranno diminuendo pur mantenendosi sempre numericamente inferiori a numeri finiti, perchè sarà evidentemente

$$g_i y_i = (g'_{t+1} + g'_{t+2} + \dots + g'_{t+k}) y'_{t+k} \geq g'_{t+1} y'_{t+1} + g'_{t+2} y'_{t+2} + \dots + g'_{t+k} y'_{t+k},$$

e

$$g_i y_{i-1} = (g'_{t+1} + g'_{t+2} + \dots + g'_{t+k}) y'_t \leq g'_{t+1} y'_t + g'_{t+2} y'_{t+1} + \dots + g'_{t+k} y'_{t+k-1},$$

e questo mostra appunto che impiccolendo successivamente con questo processo gli intervalli $y_i - y_{i-1}$ anche le due somme s' e S' avranno necessariamente un limite che, per quanto già dicemmo, sarà necessariamente lo stesso per l'una e per l'altra.

Questo limite poi rimarrà lo stesso anche se la divisione dell'intervallo (l, L) si fa con altre leggi qualsiansi, perchè se, fatta la divisione $(l, y_1, y_2, \dots y_n, L)$, se ne fa un'altra qualsiasi $(l, z_1, z_2, \dots z_{n'}, L)$, dando luogo così alle due somme

$$\sum_1^{n+1} g_{y_i} y_{i-1} \text{ e } \sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_{i-1} \text{ corrispondenti alla } s, \text{ e alle due } \sum_1^{n+1} g_{y_i} y_i \text{ e } \sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_i$$

corrispondenti alla S, potremo con queste due divisioni formare una nuova divisione composta dei punti y e dei punti z (precisamente come si fece nel 1.° Cap. del *Calc. integrale* pel caso degl'integrali secondo il concetto di Riemann); e allora se indicheremo con $(l, p_1, p_2, \dots, p_{n''}, L)$ questa divisione composta, e supporremo ad es. che sia $y_{i-1} = p_t$ e $y_i = p_{t+k}$ con $k \geq 1$, avremo

$$g_{y_i} y_{i-1} = (g_{p_{t+1}} + g_{p_{t+2}} + \dots + g_{p_{t+k}}) y_{i-1} = g_{p_{t+1}} p_t + g_{p_{t+2}} p_{t+1} + \dots + g_{p_{t+k}} p_{t+k-1} -$$
$$- g_{p_{t+1}} (p_t - y_{i-1}) - g_{p_{t+2}} (p_{t+1} - y_{i-1}) - \dots - g_{p_{t+k}} (p_{t+k-1} - y_{i-1})$$

e quindi

$$\sum_1^{n+1} g_{y_i} y_{i-1} = \sum_1^{n''+1} g_{p_t} p_{t-1} - P_y,$$

con

$$P_y \leq \sum_1^{n+1} g_{y_i} (y_i - y_{i-1}) \leq \delta_y (mG),$$

essendo δ_y la massima delle differenze $y_i - y_{i-1}$ che può già supporsi minore di un numero arbitrariamente piccolo ε.

Similmente si avrà

$$\sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_{i-1} = \sum_1^{n''+1} g_{p_t} p_{t-1} - P_z$$

con

$$P_z \leq \sum_1^{n'+1} g_{z_i} (z_i - z_{i-1}) \leq \delta_z (mG),$$

essendo δ_z la massima delle differenze $z_i - z_{i-1}$ che può pure supporsi minore di ε, e sarà quindi $\sum_1^{n+1} g_{y_i} y_{i-1} - \sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_{i-1} = P_z - P_y$ ciò che mostra appunto che le due somme $\sum_1^{n+1} g_{y_i} y_{i-1}$ e $\sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_{i-1}$ hanno lo stesso limite.

Lo stesso si dimostrerebbe per le somme $\sum_1^{n+1} g_{y_i} y_i$ e $\sum_1^{n'+1} g_{z_i} z_i$ corrispondenti alla S, e così resta ora dimostrato completamente quanto abbiamo enunciato.

772. — Dalla definizione che abbiamo dato dell'integrale di Lebesgue e dalle osservazioni che abbiamo fatte intorno alle somme s e S, risulta subito che esso è compreso fra queste somme s e S, le quali sono respettivamente *non* inferiori e *non* superiori a $(mG)\, l$ e $(mG)\, L$, e si ha quindi sempre

$$(mG)\, l \leq (L) \int_G f\, dx \leq (mG)\, L,$$

i due segni di uguaglianza dovendo metterli per comprendere il caso che il gruppo G sia di misura nulla; e questo risultato quando si estende — come del resto è ben naturale — la definizione dell'integrale di Lebesgue anche al caso di $f(x) = k$ con k costante, col prendere allora $(L) \int_G k\, dx = k(mG)$, dà in ogni caso anche per l'integrale di Lebesgue il teorema della media, cioè ci dà la formola

(1) $$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f\,dx=\bar{f}\,(m\mathrm{G})$$

indicando con $\bar{f}$ un numero compreso fra i limiti inferiori e superiori della funzione $f(x)$ in G (questi limiti inclusi).

773. — Aggiungiamo ora che *se il gruppo di punti* G *nel quale è data una funzione sempre finita* $f(x)$ *è la somma di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n, \ldots$ *nei quali la funzione è misurabile, e questi gruppi non hanno punti comuni o hanno tutt'al più a comune quelli di un gruppo di misura zero, allora la stessa funzione* $f(x)$ *sarà misurabile anche nel gruppo somma* G, *e l'integrale* (di Lebesgue) *in* G *sarà la somma degli integrali nei singoli gruppi* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n, \ldots$

E difatti se si considera il gruppo di punti in G pei quali si ha $f(x)>\mathrm{A}$, cioè il gruppo $\mathrm{G}(f(x)>\mathrm{A})$, i punti di questo gruppo saranno quelli della somma dei gruppi

$$\mathrm{G}_1(f(x)>\mathrm{A}),\ \mathrm{G}_2(f(x)>\mathrm{A}), \ldots,\ \mathrm{G}_n(f(x)>\mathrm{A}), \ldots$$

che è misurabile (§ 751), e questo ci prova intanto che la funzione $f(x)$ nel gruppo G risulterà misurabile.

Avendosi poi in ciascuno degli intervalli (l_{s-1}, l_s) che servono alla determinazione dell'integrale di Lebesgue (§ 751)

$$m\mathrm{G}=m\mathrm{G}_1+m\mathrm{G}_2+\ldots+m\mathrm{G}_n+\ldots,$$

se il numero dei gruppi $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n, \ldots$ sarà finito avremo certamente

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f\,dx=(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}_1} f\,dx+(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}_2} f\,dx+\ldots+(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}_n} f\,dx+\ldots$$

e il teorema sarà già dimostrato.

Se poi il numero dei gruppi $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 \ldots, \mathrm{G}_n, \ldots$ è infinito, indicando con S_n il gruppo somma dei primi n dei gruppi $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 \ldots, \mathrm{G}_n, \ldots$ il gruppo $\mathrm{G}-\mathrm{S}_n$ sarà misurabile (§ 751), e avremo in valore assoluto pel teorema della media

$$\left|\int_{\mathrm{G}} f\,dx-\left\{\int_{\mathrm{G}_1} f\,dx+\int_{\mathrm{G}_2} f\,dx+\ldots+\int_{\mathrm{G}_n} f\,dx\right\}\right|=\left|\int_{\mathrm{G}-\mathrm{S}_n} f\,dx\right|\leq \bar{\mathrm{L}}\,m(\mathrm{G}-\mathrm{S}_n)$$

essendo $\bar{\mathrm{L}}$ il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ in G; e poichè, per quanto trovammo nel citato § 751 e nel § 750, sarà $m(\mathrm{G}-\mathrm{S}_n)=m\mathrm{G}-m\mathrm{S}_n$ e $m\mathrm{S}_n$ tende indefinitamente verso $m\mathrm{G}$ al crescere indefinito di n, il primo membro della formola precedente finirà allora per divenire e restare piccolo quanto si vuole, e avremo quindi

$$\int_{\mathrm{G}} f\,dx=\int_{\mathrm{G}_1} f\,dx+\int_{\mathrm{G}_2} f\,dx+\ldots+\int_{\mathrm{G}_n} f\,dx+\ldots,$$

con che il teorema resta dimostrato completamente.

774. — In particolare dunque spezzando l'intervallo *finito* (a, b) nel quale cade il gruppo G in un numero finito o in una infinità numerabile d'intervalli parziali $(a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{s-1}, a_s), \ldots$, e considerando separatamente i gruppi di punti di G che cadono in questi intervalli, questi gruppi potranno avere comuni soltanto i punti estremi $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s, \ldots$ (*), e ammettendo che per ciascuno degli stessi gruppi la funzione $f(x)$ sia misurabile (con che pel teorema precedente sarà certamente misurabile anche in G), avremo per l'integrale di Lebesgue

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f\,dx=(\mathrm{L})\int_{a}^{a_1} f\,dx+(\mathrm{L})\int_{a_1}^{a_2} f\,dx+\ldots+(\mathrm{L})\int_{a_{s-1}}^{s} f\,dx+\ldots$$

come per gli integrali di Riemann, intendendo in generale che l'integrale $(\mathrm{L})\int_{a_{s-1}}^{a_s} f\,dx$ rappresenti l'integrale di Lebesgue nel gruppo parziale che cade nell'intervallo (a_{s-1}, a_s).

775. — In base a questo risultato, supponendo ora che il gruppo G sia quello costituito dai punti di tutto un intervallo finito (a, b) e la funzione $f(x)$ in conseguenza sia una funzione di Dirichlet, e osservando che allora la misura del gruppo corrispondente a ciascuno intervallo è dato dalla lunghezza dell'intervallo stesso, per la formola precedente e per la (1) si vede subito che *per le funzioni di Dirichlet misurabili in ogni porzione comunque piccola di* (a, b) *avremo la formola*

$$(\mathrm{L})\int_a^b f\,dx=\sum f_s\,\delta_s \text{ e anche l'altra } (\mathrm{L})\int_a^b f\,dx=\lim_{\delta_s=0}\sum f_s\,\delta_s,$$

(*) Questi estremi saranno in numero finito o costituiranno una infinità numerabile, e quindi il loro gruppo sarà misurabile e di misura zero.

indicando con δ_s gli intervalli (a_{s-1}, a_s) e con f_s numeri *determinati* compresi fra i limiti inferiore e superiore l_s e L_s di $f(x)$ negli intervalli corrispondenti δ_s e dipendenti da questi intervalli.

E così in particolare *quando la funzione data $f(x)$ sia finita e integrabile secondo i concetti di Riemann*, osservando che allora essa è necessariamente misurabile (§ 768, *b.*) ed è indifferente (a causa della condizione d'integrabilità $\lim\limits_{\delta_s=0} \sum \delta_s D_s = 0$) il prendere i numeri f_s in un modo o in un altro fra i valori l_s e L_s (questi limiti inclusi) —, dalla formola dimostrata si vede subito intanto che *l'integrale di Lebesgue coincide allora perfettamente coll'integrale di Riemann.*

776. — I risultati ottenuti dànno luogo spontaneamente alle considerazioni generali seguenti che conducono ad infiniti altri integrali, dei quali, l'integrale ordinario di Riemann e quello di Lebesgue risultano come casi particolari, e che sono tutti collegati coi concetti di Riemann.

Osserviamo perciò che ricondotto in ciò che precede anche l'integrale di Lebesgue, per le funzioni finite di Dirichlet misurabili in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo finito (a, b) nel quale sono date, ad essere il limite di somme $\sum f_s \delta_s$ di prodotti degli intervalli parziali δ_s nei quali si può scomporre l'intervallo (a, b) per valori speciali f_s compresi fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ negli intervalli corrispondenti stessi δ_s, si vede chiaramente che lo stesso integrale è una generalizzazione di quello di Riemann.

Solo mentre negli integrali di Riemann, per essere allora soddisfatta la condizione d'integrabilità $\lim\limits_{\delta_s=0} \sum \delta_s D_s = 0$, i numeri f_s possono essere presi comunque fra i limiti l_s e L_s (questi limiti inclusi), nell'integrale di Lebesgue, non ponendosi allora la condizione d'integrabilità di Riemann, i numeri f_s devono avere valori *determinati* fra l_s e L_s (l_s e L_s ancora inclusi).

E poste le cose in questo modo, si è portati naturalmente a pensare come anche altri sistemi di valori *determinati* per f_s presi fra i limiti l_s e L_s corrispondenti ai respettivi intervalli δ_s, quando la condizione d'integrabilità di Riemann non è soddisfatta, abbiano a potere condurre ad altri integrali oltre a quello di Lebesgue, e tutti dello stesso genere di quello di Riemann; e questo anche senza introdurre la condizione di misurabilità della funzione, bastando che questa sia sempre finita (limitata) nell'intervallo finito dato d'integrazione (a, b); e difatti per queste funzioni generali si hanno sempre ad es. gli integrali per *difetto* e quello per *eccesso* di Darboux e di Volterra, e quindi anche quello medio che corrisponderebbe a prendere $f_s = \frac{l_s + L_s}{2}$, e più

generalmente quelli che corrisponderebbero a prendere $f_s = l_s + \eta(L_s - l_s)$ essendo η un numero fisso e positivo qualsiasi compreso fra 0 e 1 (0 e 1 incl.) (*).

777. — Da ciò risulta dunque che il concetto d'integrale, quando si considerino anche funzioni $f(x)$ che non soddisfano alla condizione d'integrabilità di Riemann *e senza neppure introdurre il concetto di misurabilità delle funzioni, potrà,* quando si voglia, *ancora estendersi,* dando luogo così, per funzioni che non rientrano fra quelle di Riemann, e neppure fra quelle misurabili di Lebesgue (**), a infiniti integrali che si ottengono con una semplice e naturale estensione della definizione di Riemann; poichè potranno dirsi integrali fra a e b o fra a e x i limiti, quando esistono, delle somme $\sum\limits_{(a,b)} f_s \delta_s$ e $\sum\limits_{(a,x)} f_s \delta_s$ quando per le f_s si prendono numeri *determinati* compresi fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nei respettivi intervalli δ_s, e scelti in relazione con questi intervalli; e i limiti s'intendono presi all'impiccolire indefinito di questi intervalli, e s'intende che questi limiti, oltre ad esistere per qualunque porzione dell'intervallo che si considera, debbono risultare indipendenti dai processi che si seguiranno per la formazione degli intervalli medesimi e pel loro successivo impiccolimento (***).

E questi integrali, dei quali ne esisteranno certamente un numero infinito (perchè se non altro, nel caso delle funzioni misurabili vi sarà quello di Lebesgue, e in ogni caso vi saranno gli infiniti altri indicati sopra alla fine del paragrafo precedente), saranno tutti compresi fra i due integrali per

---

(*) I valori per f_s potrebbero prendersi anche fuori dei limiti l_s e L_s, come ad es. potrebbe prendersi $f_s = \eta l_s + \mu L_s$ con $\eta \geq 0$ e $\mu > 1$; ma allora gli integrali corrispondenti non sarebbero più compresi fra quelli per difetto e per eccesso, come vi sono sempre compresi l'integrale di Lebesgue e gli altri ai quali ho sopra accennato.

(**) Questo diciamo perchè non è escluso che possano esservi funzioni di Dirichlet sempre finite (limitate) *non misurabili.* La esistenza però di tali funzioni non è dimostrata.

(***) S'intende che quando si sappia che, con una data legge per la scelta dei valori *determinati* f_s negli intervalli δ_s esistono i limiti delle somme $\sum f_s \delta_s$ *per ogni porzione dell'intervallo* (a, b), almeno quando si segue un dato processo per la formazione degli intervalli δ_s e pel loro successivo impiccolimento, se poi si troverà che *per l'intiero intervallo* (a, b) questi limiti restano gli stessi per *qualsiasi* processo di formazione degli intervalli δ_s e pel loro successivo impiccolimento, *lo stesso avverrà anche per ogni porzione* (α, β) *di questo intervallo;* perchè se, tenendo fermi gli stessi processi per gli intervalli (a, α) e (β, b) si muteranno questi soltanto nell'intervallo (α, β), allora poichè manterranno sempre lo stesso limite le somme $\sum\limits_{(a,b)} f_s \delta_s$ relative all'*intiero* intervallo, è evidente che dovranno avere e conservare sempre lo stesso limite anche le somme $\sum\limits_{(\alpha,\beta)} f_s \delta_s$ relative alla porzione (α, β) presa dovunque nell'intervallo medesimo.

difetto e per eccesso i quali saranno essi pure casi particolari di tali integrali; ed essi si ridurranno tutti a quello di Riemann, quando la condizione d'integrabilità di Riemann sarà soddisfatta.

Fra questi integrali, nel caso delle funzioni finite di Dirichlet misurabili in qualunque porzione dell'intervallo finito dato, si trova naturalmente, come abbiamo detto, quello di Lebesgue; e per questo integrale si ha in più la particolarità notevole che, oltre ad essere esso pure, come gli altri, il limite di una somma $\sum f_s \delta_s$ per valori determinati opportunamente scelti delle f_s fra l_s e L_s (l_s e L_s incl.), corrisponde precisamente anche alla quantità che il Lebesgue prese a considerare per le funzioni misurabili e che definì e introdusse come suo integrale scomponendo in parti piccolissime l'intervallo di variazione della funzione anzichè quello nel quale si muove la variabile, ecc.

E certo quando per questi integrali, più generali di quello di Riemann e di quello di Lebesgue, e che non esigono neppure l'introduzione del concetto di misurabilità delle funzioni, si riuscissero a trovare particolarità tali che permettessero di bene definire e determinare le infinite classi di numeri *determinati* f_s per le quali le somme suindicate $\sum f_s \delta_s$ hanno i limiti corrispondenti agli integrali medesimi, come appunto avviene per gli integrali per difetto o per eccesso o per quelli corrispondenti ai valori $f_s = \eta l_s + (1-\eta) L_s$ ai quali accennammo nel § 776, o almeno si potessero trovare particolarità semplici che conducessero a quegli integrali, gli integrali medesimi potrebbero acquistare una particolare importanza.

778. — Del resto che vi fossero di tali somme $\sum f_s \delta_s$ che, con valori *determinati di f_s — scelti in relazione agli intervalli δ_s e ai valori della funzione $f(x)$ in questi intervalli — conducono a limiti determinati,* e si potessero quindi avere anche gli infiniti integrali ai quali testè accennammo che comprendono l'integrale di Lebesgue oltre a quello di Riemann, non era cosa da meravigliare.

È difatti una considerazione di questo genere anche quella che condusse Riemann alla sua definizione d'integrale (*), partendo dalla osservazione che, se $F(x)$ è una funzione finita e continua fra a e b che ammette in ogni punto una derivata $f(x)$, qualunque sia questa derivata e anche se infinita purchè determinata di segno, la formola degli accrescimenti finiti conduce

* Vedansi per questo la nota al § 1 [pag. 1-3] di questo calcolo integrale e le considerazioni svolte nei §§ 178-79 (pag. 232-33-34) del mio libro « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* » pubblicato a Pisa da Nistri nel 1878, e riportate nella traduzione tedesca fattane da Lüroth e Schepp. *(Leipzig, von G. B. Teubner 1892).*

sempre all'altra

$$F(x) - F(a) = \lim \sum f(\bar{x}_s)\delta_s, \tag{2}$$

essendo in ogni termine $\bar{x}_s$ un punto *determinato* dell'intervallo (x_{s-1}, x_s) o δ_s.

Solo, volendo ritornare dalle funzioni date $f(x)$ alle loro primitive $F(x)$ quando esistessero, per conservare, almeno finchè fosse possibile, al Calcolo integrale il carattere di calcolo inverso del differenziale, era naturale che Riemann partisse dalla formola (2); ma non avendo il modo di determinare la $\bar{x}_s$ nell'intervallo δ_s dovè, pure naturalmente, essere portato a studiare la somma generale $\sum f_s \delta_s$, lasciandovi indeterminato il valore f_s da prendere fra l_s e L_s (questi limiti inclusi); venendo del resto così a comprendere già tutte le funzioni continue e altre classi estesissime di funzioni.

779. — Queste considerazioni poi potevano farsi anche per le funzioni finite e continue più generali $F(x)$ che ammettono soltanto i *numeri derivati* (*), e in sostanza già si trovano accennate alle pag. 203, 279 e 282 del ricordato mio libro « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* » perchè allora io dimostrai alcune formole generali, e in particolare dimostrai la seguente

$$F(x+h) - F(x) = \lambda_h h$$

nella quale λ_h è un numero *determinato* compreso fra i limiti inferiore e superiore dei numeri derivati di $F(x)$ fra x e $x+h$, e con questa formola,

(*) I numeri che ora chiamansi *numeri derivati* sono quelli che io introdussi nel ricordato mio libro « *Fondamenti per la teorica* ecc. », pubblicato nel 1878 e che io chiamai *estremi oscillatorii dei rapporti incrementali della funzione*; ma la denominazione di numeri derivati ha ormai prevalso.

Qui però, poichè l'occasione mi si presenta, non posso fare a meno di rilevare che per quanto si accenni, quasi da tutti gli autori che ne trattano, che la introduzione di questi numeri fu fatta da me, non si accenna mai all'avere io date su essi tante particolarità, alcune anche assai interessanti e dimostrate poi anche da altri, dedicandovi in quel libro un lungo capitolo di ben 65 pagine dal titolo « *Altre considerazioni generali riguardanti specialmente la esistenza delle derivate delle funzioni finite e continue* » e dedicandovi pure qua e là parecchie altre pagine del capitolo seguente dal titolo « *Integrali definiti* ».

E farò pure rilevare che i numeri derivati, come in particolare la derivata, quando esiste, per le funzioni $F(x)$ finite e continue in un intervallo (a, b) sono sempre funzioni misurabili, come fu dimostrato da Lebesgue, e quindi per le stesse funzioni può aversi sempre l'integrale di Lebesgue che risulta appunto uguale a $F(b) - F(a)$, come nel caso delle funzioni integrabili secondo Riemann e in quello delle formole riportate sopra dai miei « *Fondamenti per la teorica ecc.* ».

che, come allora osservai, è la generalizzazione di quella degli accrescimenti finiti, giunsi all'altra (pag. 279 e 282)

$$F(x) - F(a) = \sum \lambda_s\, \delta_s$$

dalla quale coll'impiccolire indefinito delle δ_s giunsi anche alla formola

$$F(x) - F(a) = \lim \sum \lambda_s\, \delta_s$$

cioè ancora alla formola (2) nella quale debba intendersi allora che f_s sia nu valore *determinato* λ_s compreso fra i limiti inferiore e superiore nell'intervallo δ_s del numero derivato che si considera.

E tutto questo lo notai allora esplicitamente valendomene anche per trarne conseguenze molto notevoli sui numeri derivati medesimi, sulle funzioni finite e continue che presentano infiniti massimi e minimi o infiniti tratti di invariabilità nell'intervallo nel quale si considerano, ecc.

780. — Tornando ora per un momento sull'integrale di Lebesgue per le funzioni $f(x)$ di Dirichlet finite e misurabili in ogni porzione dell'intervallo finito (a, b) nel quale si considerano, aggiungiamo che intendendo, come è naturale, che $(L)\int_a^a f dx$ sia zero, e indicando con x un punto qualsiasi fra a e b (a e b incl.), si vede subito che l'integrale $(L)\int_a^x f dx$ sarà una funzione determinata (di Dirichlet) $\varphi(x)$ che è nulla per $x = a$; e per essa si avrà

$$\varphi(x) = \lim_{\delta_s = 0} \sum_{(a,x)} f_s\, \delta_s;$$

e con h positivo o negativo (*) avremo

$$\varphi(x+h) = \lim_{\delta_s = 0} \sum_{(a,x)} f_s\, \delta_s + \lim_{\delta_s = 0} \sum_{(x,x+h)} f_s\, \delta_s = \varphi(x) + (L)\int_x^{x+h} f dx,$$

e quindi per la formola (1) del valore medio sarà

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \bar{f}\, h, \tag{3}$$

essendo $\bar{f}$ un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ fra

(*) Però se il punto x è un estremo a o b dell'intervallo (a, b), h dovrà essere preso soltanto positivo o soltanto negativo.

x e $x+h$; e di qui si vede subito che, come per gli integrali di Riemann, *l'integrale di Lebesgue è sempre una funzione finita e continua del suo limite superiore in tutto l'intervallo* (a, b); e pei suoi rapporti incrementati si ha la formola

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \bar{f}, \tag{4}$$

dalla quale risulta che in tutti i punti x di continuità di $f(x)$ l'integrale avrà sempre la derivata che sarà appunto questa funzione; mentre se in un punto x la funzione $f(x)$ sarà continua soltanto a destra o soltanto a sinistra, esisterà la derivata a destra e sarà $f(x+0)$ o la derivata a sinistra e sarà $f(x-0)$, e negli altri punti x anche le derivate a destra o a sinistra potranno mancare, esistendo allora soltanto i numeri derivati compresi fra i limiti delle oscillazioni a destra o a sinistra di $f(x)$ nei punti stessi x.

781. — Ma, oltre che per l'integrale di Lebesgue, si può notare che *questi stessi risultati si avrebbero anche per gli integrali più generali* che volessero introdursi svolgendo le considerazioni generali dei §§ 776 e 777, *corrispondenti a valori determinati f_s presi fra l_s e L_s (l_s e L_s incl)*, perchè anche per questi integrali, ove si prendano a considerare, si giunge subito e nello stesso modo alle formole (3) e (4) per modo che anch'essi dànno sempre luogo per l'integrale a funzioni finite e continue $\varphi(x)$ che sono derivabili e hanno per derivata la funzione che s'integra $f(x)$ nei punti di continuità di questa funzione; e questa circostanza giustificherebbe ancor più la estensione che in base alle considerazioni medesime volesse darsi al concetto d'integrale colla introduzione di questi nuovi integrali.

E tutti questi varii integrali $\varphi(x)$ quando siano presi relativamente a una stessa funzione $f(x)$, nei punti di continuità di questa funzione verrebbero ad avere tutti la stessa derivata cioè $f(x)$; e indicandoli ad es. con $\left(\int\right) f(x)dx$ per essi si avrebbe sempre la formola

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \left(\int_a^x\right) f(x)\, dx$$

mutando però la funzione $\varphi(x)$ da integrale a integrale.

Per questi integrali poi gli studî, almeno ordinariamente, potranno farsi contemporaneamente e al modo stesso per tutti, cioè senza stare a farli separatamente distinguendo gli uni dagli altri, come evidentemente avremmo potuto fare per gli studî del paragrafo precedente.

782. — Porremo fine a questi studî dicendo che la definizione dell'integrale di Lebesgue si estende anche al caso in cui la funzione $f(x)$ data in un gruppo G contenuto in un intervallo finito (a, b) prende anche valori infinitamente grandi positivi o negativi.

Si considerano allora le somme s e S che vengono estese agli intervalli di variazione della funzione determinati dai punti di divisione

$$\ldots y_{-m}, y_{-m+1}, y_{-m+2}, \ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

che possono essere estesi all'infinito anche soltanto da una parte, cioè le somme

$$s = \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{-m}^{n} g_i y_{i-1}, \quad S = \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{-m}^{n} g_i y_i;$$

e si dimostra subito come nel § 770 che *se una delle due serie che vengono così a corrispondere a s e S è convergente, anche l'altra lo è*, e all'impiccolire indefinito degli intervalli $y_{i+1} - y_i$ ambedue hanno lo stesso limite; e si ritrovano pure i risultati del § 771.

Anche in questo caso il limite comune di queste serie si chiama l'integrale di Lebesgue per la funzione $f(x)$; e, avuto riguardo più specialmente a queste funzioni $f(x)$ per le quali questo integrale viene ad avere un significato (cioè per le quali le serie s e S sono convergenti), si dicono con Lebesgue *funzioni sommabili* nel gruppo di punti G tutte le funzioni per le quali l'integrale di Lebesgue ha un significato, comprendendo in questa denominazione anche le funzioni sempre finite (limitate) e misurabili, per le quali propriamente questa denominazione speciale non sarebbe necessaria.

783. — Gli integrali di Lebesgue, oltre alle proprietà sulle quali ci siamo fermati, ne hanno anche molte altre, alcune delle quali sono più generali di quelle che si hanno per gli integrali di Riemann, e per esse certe difficoltà e restrizioni vengono a sparire; ed è specialmente questa la ragione per la quale ora in molti studî vengono introdotti gli integrali di Lebesgue.

Con uguale successo però potrebbero introdursi negli studî anche gli integrali più generali ai quali abbiamo accennato nei §§ 776 e 777, perchè anche per questi, come si estendono le particolarità relative alla continuità e ai casi di derivabilità come dicemmo al § 781, si estendono almeno in grandissima parte anche le altre particolarità che si hanno per l'integrale di Lebesgue.

784. — Aggiungiamo infine che una ulteriore estensione del concetto d'integrale fu data recentemente dal sig. Denjoy nei *Comptes Rendus* (Tome 154, Gennaio-Giugno 1912 pag. 859); e, più recentemente ancora, un'altra

veramente interessante, e che, come è facile a vedersi, rientra essa pure fra quelle dei §§ 776 e 777, è stata data dal sig. Oskar Perron nei *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften* (Iahrgang 1914. 14. Abhandlug); quest'ultima *indipendente anche dalla teoria dei gruppi e dal concetto di misurabilità delle funzioni* e basata tutta sulla considerazione dei numeri derivati, e su alcune loro proprietà fondamentali che trovansi pure nel ricordato mio libro « *Fondamenti per la teorica ecc.* ». Ma su queste ulteriori generalizzazioni del concetto d'integrale, come sugli integrali generali dei §§ 776, 777, 782 e 784 non possiamo fermarci, volendo ora dar fine a questa pubblicazione che già si è di troppo, anzi eccessivamente, protratta, allontanandoci sempre più dagli intendimenti che dapprima si ebbero nell'intraprenderla.

APPENDICE

I.

Complementi sulla integrazione per serie fra limiti infiniti

1. Nel cap. VIII del *Calcolo integrale* (pag. 144 e seg.) ci siamo occupati della integrazione per serie delle funzioni di una variabile, e dopo di avere dati i casi più comuni di possibilità di questa integrazione fra limiti finiti, ai §§ 101-102 (pag. 147-151) abbiamo accennato anche a qualche caso d'integrazione per serie fra limiti infiniti.

In questi casi però tali studii, per quanto pienamente rigorosi e assai utili, sono ben lungi dall'essere semplici ed esaurienti, e le condizioni che portano sono il più spesso molto difficili a verificarsi.

E quando di queste condizioni non si tenga conto in modo speciale, o quando non si rientri in questi casi, i risultati che si ottengono colla integrazione per serie fra limiti infiniti, anche se siano giusti, non possono dirsi dimostrati rigorosamente a meno che non si facciano altre considerazioni speciali; e per questo ad es. non possono dirsi rigorosamente dimostrati, per quanto siano esatti, i risultati dati nel cap. X alle pag. 208 e 209 e anche quelli dello stesso capitolo e di altri nei quali la integrazione per serie è stata senz'altro applicata fra limiti infiniti con tenere conto soltanto, oltre che della circostanza che le serie da integrarsi erano convergenti in ugual grado e quindi integrabili termine a termine in intervalli *finiti* ma arbitrariamente grandi qualsiansi, anche dell'altra che i risultati ottenuti avevano tutti un giusto significato.

A rendere perciò più completi questi studi, esponiamo ora un teorema generale pel quale la integrazione per serie fra limiti infiniti, nei casi nei quali il teorema può applicarsi, viene ad essere perfettamente rigorosa, e diventano perfettamente rigorosi anche tutti gli studii del detto cap. X e degli altri nei quali la integrazione per serie fu fatta fra limiti infiniti.

2. Al teorema in parola si giunge colle considerazioni seguenti.

Si abbia una serie reale o complessa $\sum_1^\infty u_n$, i cui termini siano funzioni della variabile reale x integrabili fra α e un numero (finito) grande quanto si vuole, e questa serie sia convergente in ugual grado in ogni intervallo *finito* da α a ∞ e abbia per somma una funzione $f(x)$ che sarà necessariamente integrabile (§ 98) negli stessi intervalli (finiti).

Indichiamo con β un numero *finito* ma grande quanto si vuole e con $\varphi(x)$ una funzione finita e integrabile almeno da α in poi, e per la quale i prodotti $\varphi(x)u_n$ siano integrabili *anche a distanza infinita;* allora il prodotto $f(x)\varphi(x)$, sempre pel teorema del § 98, verrà ad essere integrabile fra α e β e avremo la formola

(1) $$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx;$$

e noi vogliamo dare un caso nel quale il detto prodotto $f(x)\varphi(x)$ si mantiene integrabile anche all'infinito, e si ha inoltre rigorosamente

(2) $$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx;$$

cioè l'integrazione per serie può farsi anche fra limiti infiniti.

Si ammetta perciò che la serie data $\sum u_n$, oltre essere convergente in ugual grado fra α e un numero finito grande quanto si vuole, sia anche convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per ogni valore finito di x almeno al di là di un certo numero; e se u'_n sono i moduli delle u_n si indichi con $\theta(x)$ la somma della loro serie $\sum u'_n$ o una funzione sempre positiva e maggiore di questa somma; allora se, *quand'anche* $\theta(x)$ *cresca indefinitamente con* x, la funzione $\varphi(x)$ sarà tale che il prodotto $\theta(x)|\varphi(x)|$ sia atto alla integrazione fra α e ∞, sarà facile vedere che lo stesso accadrà del prodotto $f(x)\varphi(x)$ e si avrà la formola (2), cioè si avranno ambedue le particolarità indicate sopra.

Con questi dati infatti basta osservare che $|\sum u_n| \leq \sum u'_n$, e quindi anche $|\sum u_n| \leq \theta(x)$ ovvero $|f(x)| \leq \theta(x)$, per dedurne subito che il prodotto $|f(x)\,\varphi(x)|$ sarà atto alla integrazione fra α e ∞; e questo porterà intanto che lo sia anche il prodotto $f(x)\varphi(x)$ come appunto volevamo che fosse, e permetterà anche di dire che dato un numero diverso da zero e positivo ma comunque piccolo σ, si potrà sempre trovare un numero β_0 tale che per $\beta \geq \beta_0$, oltre all'integrale $\int_\beta^\infty \theta(x)|\varphi(x)|dx$, anche, e *a fortiori*, l'altro $\int_\beta^\infty |f(x)\varphi(x)|dx$ siano sempre minori di σ.

Fermandoci ora sulla serie $\sum \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx$, si prenda a studiare la somma

$\sum_1^m \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx$ di un numero *finito* qualsiasi m dei suoi primi termini; e per questo si osservi che, trattandosi di una somma finita, se si prende per β un numero finito qualsiasi superiore al numero β_0 indicato sopra potremo scrivere

$$\sum_1^m \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx = \sum_1^m \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx + \sum_1^m \int_\beta^\infty \varphi(x)u_n dx =$$
$$= \sum_1^m \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx + \int_\beta^\infty \varphi(x) \sum_1^m u_n dx,$$

e in forza della (1) indicando con $R_{m,\beta}$ il resto $\sum_{m+1}^\infty \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx$ della serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx$, potremo scrivere anche

$$\sum_1^m \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx = \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx - R_{m,\beta} + \int_\beta^\infty \varphi(x)\sum_1^m u_n dx,$$

e poichè abbiamo già dimostrato che il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è atto alla integrazione anche all'infinito a questa formola potremo sostituire l'altra

$$\sum_1^m \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx - \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx = -\int_\beta^\infty f(x)\varphi(x)dx - R_{m,\beta} + \int_\beta^\infty \varphi(x)\sum_1^m u_n dx.$$

In questa per essere $\beta > \beta_0$, il valore assoluto o il modulo del primo integrale del secondo membro non supererà σ; e il valore assoluto o il modulo dell'ultimo essendo inferiore o uguale all'altro $\int_\beta^\infty |\varphi(x)|\sum_1^m u'_n dx$ e a fortiori a $\int_\beta^\infty |\varphi(x)| \sum_1^\infty u'_n dx$ e a $\int_\beta^\infty |\varphi(x)|\theta(x)dx$, sarà esso pure inferiore o uguale a σ; quindi osservando che dopo di avere scelto per β un numero superiore a β_0, per essere convergente la serie $\sum \int_\alpha^\beta \varphi(x)u_n dx$, si potrà trovare un valore m_0 tale che per $m > m_0$ si abbia sempre $|R_{m,\beta}| < \sigma$, si conclude subito che per $m > m_0$ il valore assoluto o il modulo della differenza

$$\sum_1^m \int_\alpha^\infty \varphi(x)u_n dx - \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx$$

sarà sempre inferiore a 3σ, e questo permette di dire che la serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^\infty \varphi(x) u_n dx$

è convergente e ha per somma l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx$, cioè si ha appunto la formola (2).

3. — E così riassumendo noi possiamo ora enunciare il teorema seguente:

Se una serie reale o complessa $\sum_1^\infty u_n$ che ha per somma $f(x)$, oltre essere convergente in ugual grado in ogni intervallo finito da α a ∞, è anche convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, per ogni valore finito di x almeno al di là di un certo numero, e $\theta(x)$ è una funzione positiva uguale o superiore alla somma della serie dei moduli $\sum_1^\infty u'_n$, allora *per ogni funzione $\varphi(x)$ per la quale i prodotti $\varphi(x)\, u_n$ e l'altro $\theta(x)|\varphi(x)|$ siano atti all'integrazione fra α e ∞, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà anch'esso integrabile fino all'infinito e alla serie $\sum_1^\infty \varphi(x) u_n$ sarà applicabile l'integrazione termine a termine fino all'infinito, cioè si avrà*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta \varphi(x) u_n dx$$

per qualunque valore di β ($\beta = \infty$ incl.)

4. — Così, pel caso considerato nelle pag. 208-209 dove si applica l'integrazione per serie fra 0 e ∞ alla serie di e^{-ibx} con b positivo

$$1 - \frac{ibx}{1} + \frac{(ibx)^2}{1\,.\,2} - \frac{(ibx)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

dopo di averla moltiplicata per $x^{\lambda-1}\, e^{-ax}$ con $a > 0$, si osserverà che la serie dei moduli della serie stessa ha per somma e^{bx} e cresce indefinitamente con x, ma questa somma moltiplicata per $x^{\lambda-1}e^{-ax}$ resta atta alla integrazione anche all'infinito finchè $b < a$; e quindi valendosi del teorema dimostrato se ne dedurrà subito che l'applicazione della integrazione per serie fra 0 e ∞, sotto questa condizione di $b < a$, che è appunto quella che viene posta nella p. 209, è perfettamente rigorosa.

L'integrazione per serie poi potrà applicarsi anche per $b = a$ purchè allora sia $\lambda < 0$ e l'integrazione si faccia da α a ∞ con $\alpha > 0$.

Similmente per mezzo del teorema dimostrato si rendono subito rigorosi gli altri casi di integrazione per serie fra limiti infiniti che si trovano nel cap. X pag. 219-220 di questo calcolo integrale.

II.

Sulla invertibilità degli integrali fra limiti infiniti

1. I teoremi che abbiamo dati nel cap. IX dal § 132 al § 136 (p. 195 a 203), e specialmente quello del § 136 sulla inversione degli integrali doppii quando uno o più limiti sono infiniti, si presentano sotto forma alquanto complicata, e giova perciò riassumerli, come ora faremo, sotto una forma alquanto più semplice almeno nei loro enunciati, o trasformarli in altri pure più semplici.

Per questo diciamo per prima cosa, onde non averlo da ripetere per ogni teorema, che trattandosi d'integrazioni fra limiti infiniti e della loro invertibilità, noi intenderemo sempre che la funzione da integrarsi $f(x, y)$ sia atta alla integrazione tanto rispetto ad x quanto rispetto ad y in tutti gli intervalli *finiti* presi comunque in quelli d'integrazione, e intenderemo pure che fra limiti finiti le integrazioni siano invertibili; ciò che in particolare avverrà sempre quando la funzione in ogni porzione finita del campo che si considera sia finita e continua.

E questo ammesso, diciamo intanto quanto ai teoremi dei §§ 132 e 133 che, riassumendoli e completandoli, ciò che si fà con tutta facilità, noi possiamo enunciarli più semplicemente col dire che:

Se pei due integrali doppî $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f dy$ e $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f dx$, nei quali α, γ e δ sono finiti, si riscontra che uno di essi è determinato e finito, allora anche l'altro lo sarà e le integrazioni potranno invertirsi, se l'integrale $\int_\alpha^\infty f dx$ sarà convergente in ugual grado pei valori di y fra γ e δ.

2. Aggiungiamo che se si saprà avanti che i due integrali $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f dy$ e $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f dx$ sono determinati e finiti, ma per l'integrale $\int_\alpha^\infty f dx$ si saprà soltanto che esso pure è determinato e finito senza sapere nulla per ciò che riguarda la sua convergenza in ugual grado o di altre particolarità convenienti dell'integrale, *non si potrà senz'altro assicurare che le integrazioni possano invertirsi;* perchè dalla formola

$$\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f dy = \int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^c f dx = \int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f dx - \int_\gamma^\delta dy \int_c^\infty f dx$$

che vale per c comunque grande si deduce soltanto che quando i due integrali doppii $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f dy$ e $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f dx$ hanno un significato, venendo allora l'integrale del primo membro ad avere un limite per $c = \infty$, anche l'integrale $\int_\gamma^\delta dy \int_c^\infty f dx$ del secondo membro avrà un limite determinato e finito; ma perchè l'inversione della integrazione nei due integrali dati sia possibile bisognerà che *questo limite sia lo zero*, ciò che non sempre avverrà; mentre questo *in particolare* avverrà quando, come si è supposto nel teorema enunciato, l'integrale $\int_\alpha^\infty f dx$ sarà convergente in ugual grado pei valori di y fra γ e δ.

3. Quanto ai teoremi dei §§ 134 e 135 osserviamo che ad essi si può sostituire l'altro di enunciato più semplice che dice che:

Se dei due integrali doppi $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ e $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ si riscontra che uno di essi per es. il primo $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ è determinato e finito, allora anche l'altro lo sarà e le integrazioni potranno invertirsi, se i due integrali $\int_\alpha^\infty f dx$ e $\int_\gamma^\infty f dy$ saranno ambedue determinati e finiti e se inoltre:

a) il primo di essi $\int_\alpha^\infty f dx$ convergerà in ugual grado in ogni intervallo finito relativo ad y, e

b) il secondo $\int_\gamma^\infty f dy$ sarà tale che, per ogni numero positivo arbitrariamente piccolo σ, si potrà trovare un numero così grande d_0 tale che per $d > d_0$ e per ogni valore di x da α a ∞ si abbia $\left|\int_d^\infty f dy\right| < \sigma \varphi_1(x)$, essendo $\varphi_1(x)$ una funzione sempre positiva e atta alla integrazione fra α e ∞.

Essendo infatti l'integrale $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ determinato e finito, per ogni numero positivo arbitrariamente piccolo σ_1 si potrà trovare un numero positivo c_0 tale che per ogni valore finito di c superiore a c_0 l'integrale stesso differisca dall'altro $\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f dy$ meno di σ_1 in valore assoluto.

D'altra parte per ognuno di questi valori di c che si prenda, e per ogni valore di $d > d_0$ si può scrivere

$$(1) \quad \int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f dy = \int_\alpha^c dx \int_\gamma^d f dy + \int_\alpha^c dx \int_d^\infty f dy = \int_\gamma^d dy \int_\alpha^c f dx + \int_\alpha^c dx \int_d^\infty f dy =$$
$$= \int_\gamma^d dy \int_\alpha^\infty f dx - \int_\gamma^d dy \int_c^\infty f dx + \int_\alpha^c dx \int_d^\infty f dy,$$

e in questa l'ultimo integrale, in forza della condizione $b)$ sarà numericamente inferiore a $\sigma \int_\alpha^\infty \varphi_1(x) dx$, e quindi sarà inferiore in valore assoluto a un numero σ_2 piccolo quanto si vuole se σ sarà stato preso sufficientemente piccolo.

Si aggiunge che per *ogni* valore particolare di d superiore a d_0 che si prenda, in forza della condizione $a)$ si potrà trovare un numero c_1 tale che, per c superiore a c_0 e a c_1 e per qualunque valore di y fra γ e d, si abbia sempre $\left|\int_c^\infty f dx\right| < \frac{\sigma_3}{d-\gamma}$, essendo anche σ_3 arbitrariamente piccolo, e allora l'integrale $\int_\gamma^d dy \int_c^\infty f dx$ sarà numericamente inferiore a σ_3; quindi, poichè da tutto questo apparisce che la differenza $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy - \int_\gamma^d dy \int_\alpha^\infty f dx$ per *ogni* valore di d superiore a d_0 viene ad essere numericamente inferiore a $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, se ne conclude che l'integrale $\int_\gamma^d dy \int_\alpha^\infty f dx$ ha un limite per $d = \infty$ che è appunto l'integrale $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dx$, e questo dimostra evidentemente il teorema.

4. — Si può poi osservare che indicando sempre con $\varphi_1(x)$ una funzione sempre positiva di x atta alla integrazione fra α e ∞, alla condizione $b)$ del teorema precedente potrà sostituirsi l'altra, meno restrittiva:

b') che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si possa trovare un numero d_0 tale che per $d > d_0$ si abbia sempre $\left| \int_d^\infty f dy \right| < \sigma \varphi_1(x)$ *finchè x è compreso fra α e un numero c_0 grande quanto si vuole ma finito, ed è semplicemente* $\left| \int_d^\infty f dy \right| < A \varphi_1(x)$ *con A numero finito quando x è superiore o uguale a c_0*; perchè allora prendendo per c_0, come potrà sempre farsi, un numero tale che si abbia $\int_{c_0}^\infty \varphi_1(x) dx < \frac{\sigma_4}{A}$ con σ_4 piccolo a piacere, l'ultimo integrale della formola(1), nel quale c può supporsi superiore a c_0, potrà spezzarsi nella somma dei due $\int_\alpha^{c_0} dx \int_d^\infty f dy$, $\int_{c_0}^c dx \int_d^\infty f dy$, che saranno ambedue arbitrariamente piccoli; e dopo potremo ripetere i ragionamenti precedenti.

5. — Se poi si saprà che i due integrali doppii $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ e $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ sono entrambi determinati e finiti, e pei due $\int_\alpha^\infty f dx$ e $\int_\gamma^\infty f dy$ si saprà soltanto che sono determinati e finiti essi pure, allora non si potrà *senz'altro affermare che le integrazioni negli integrali doppii potranno invertirsi*, perchè avendosi ancora la formola (1), e in questa il primo termine dell'ultimo membro avendo per limite per $d = \infty$ l'integrale $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$, mentre il primo membro per $c = \infty$ ha per limite l'altro integrale $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ si potrà certamente affermare che la differenza

$$(2) \qquad \int_\alpha^c dx \int_d^\infty f dy - \int_\gamma^d dy \int_c^\infty f dx$$

per c e d infiniti ha un limite determinato e finito, ma non si potrà dire che i due integrali $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ e $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ sono uguali, cioè che le inversioni delle integrazioni possono farsi, altro che quando il detto limite della differenza (2) sia zero, come in particolare appunto avviene — almeno quando si prendano separatamente (come del resto basta) i limiti per $c = \infty$ e per $d = \infty$ —, tutte le volte che sono soddisfatte le due condizioni a) e b) del teorema dimostrato o la condizione a) dello stesso teorema e quella b') che nel paragrafo precedente abbiamo sostituito alla b).

6. Passando ora al caso del § 136, ammettiamo che i due integrali semplici $\int_\alpha^\infty f dx$ e $\int_\gamma^\infty f dy$ non siano più ambedue determinati e finiti, ma uno di essi almeno, per es. il primo $\int_\alpha^\infty f dx$, sia infinito per $y = \gamma$ *e soltanto per questo valore di y*, però si sappia che dei due integrali doppî $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ e $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ uno è determinato e finito e non si sappia nulla dell'altro nel quale le integrazioni sono invertite.

Allora considerando dapprima il caso nel quale si sa che è determinato e finito l'integrale $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$, osserveremo che per ogni numero diverso da zero e positivo e comunque piccolo σ_1, si potrà trovare un numero pure diverso da zero e positivo ε_0 tale che pei valori di ε inferiori a ε_0 l'integrale stesso $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ differisca dall'altro $\int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ meno di σ_1; e se a quest'ultimo integrale doppio, che ordinariamente rientrerà nei casi già trattati perchè in esso y non prende più il valore γ, sarà applicabile la inversione delle integrazioni, avremo la formola seguente

$$(3) \qquad \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx = \int_\alpha^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy = \int_\alpha^c dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy + \int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy,$$

essendo c un numero positivo e finito ma comunque grande.

Per questa, ammettendo ora che l'integrale $\int_\gamma^\infty f dy$ anche se diviene infinito per qualche valore di x fra α e ∞ resti però atto alla integrazione rispetto ad x negli intervalli *finiti* fra α e ∞, avremo

$$(4) \qquad \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx = \int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f dy + \int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy - \int_\alpha^c dx \int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy;$$

e supponendo ora che scelto a piacere un numero diverso da zero e positivo comunque piccolo σ si possa trovare un numero ε_1 tale che pei valori di ε inferiori a questo ε_1 si abbia sempre in valore assoluto $\left| \int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy \right| < \sigma \varphi_1(x)$, essendo $\varphi_1(x)$ come nei paragrafi precedenti una funzione atta alla integrazione da α a ∞, l'ultimo integrale per σ sufficientemente piccolo sarà numericamente inferiore a un numero arbitrariamente piccolo σ_2 per ogni valore di ε inferiore ai due numeri ε_0 e ε_1 e qualunque sia c.

D'altra parte poichè con ε diverso da zero l'integrale $\int_\alpha^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy$ è determinato e finito (perchè si è già supposto che sia invertibile), per ogni valore di ε si potrà trovare un valore c_ε tale che per ogni valore di c superiore a c_ε l'integrale $\int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy$ sia numericamente inferiore a un altro numero positivo σ_3 piccolo quanto si vuole; quindi prendendo ora per ε un numero positivo inferiore ad un tempo a ε_1 e a ε_0, si vede che per tutti i valori di c superiori a c_ε l'integrale $\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f dy$ differirà in valore assoluto dall'integrale $\int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ e dall'altro $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ meno di $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, e quindi anche l'integrale $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ sarà determinato e finito e il suo valore sarà precisamente quello dell'integrale $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ nel quale le integrazioni sono invertite.

Invece se, sempre nel supposto che sia infinito l'integrale $\int_\alpha^\infty f dx$ per $y=\gamma$, si riscontrerà che è determinato e finito l'integrale doppio $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ senza sapere nulla dell'altro $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$, allora mantenendo ferme tutte le altre ipotesi, e scrivendo ancora la formola (3) e quindi anche la (4), si osserverà che per ε inferiore a ε_1 l'ultimo integrale di questa formola si potrà ancora supporre numericamente inferiore a σ_2, e per ogni valore di $\varepsilon<\varepsilon_1$ si potrà trovare un numero c_ε tale che per $c>c_\varepsilon$ il secondo integrale sia numericamente inferiore a σ_3 e al tempo stesso il primo differisca da $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ in valore assoluto meno di σ_1; e così l'integrale $\int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ per $\varepsilon<\varepsilon_1$ differirà da $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ meno

di $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, e quindi anche l'integrale $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$ risulterà determinato e finito e il suo valore sarà precisamente quello dell'altro integrale a integrazioni invertite $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$; talchè riassumendo si può ora enunciare il teorema che dice che:

Se negli integrali doppii $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ *e* $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$, *uno dei due integrali* $\int_\alpha^\infty f dx$ *e* $\int_\gamma^\infty f dy$, *per es. il primo* $\int_\alpha^\infty f dx$, *diventerà infinito per* $y=\gamma$ *restando sempre finito per gli altri valori di* y *da* γ *a* ∞, *ma al tempo stesso si riscontrerà che dei due integrali doppii uno è determinato e finito, allora anche l'altro lo sarà e le integrazioni potranno invertirsi, se saranno soddisfatte le condizioni seguenti, cioè:*

a) che l'inversione possa farsi negli integrali doppii $\int_\alpha^x dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\infty f dy$ *o* $\int_{\gamma+\varepsilon}^\infty dy \int_\alpha^\infty f dx$, escludendo cioè dal campo d'integrazione la striscia da $y=\gamma$ a $y=\gamma+\varepsilon$ con ε positivo comunque piccolo;

b) che l'altro dei due integrali semplici $\int_\alpha^\infty f dx$ *e* $\int_\gamma^\infty f dy$, *cioè l'integrale* $\int_\gamma^\infty f dy$, *anche se diviene infinito per qualche valore di* x *fra* α *e* ∞ (α *incl.*) *resti però sempre atto alla integrazione da* α *a* ∞;

c) che per ogni numero diverso da zero e positivo comunque piccolo σ *si possa trovare un numero pure diverso da zero e positivo* ε_1 *tale che per* $\varepsilon<\varepsilon_1$ *l'integrale* $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy$ *in valore assoluto sia sempre inferiore a* $\sigma\varphi_1(x)$, *essendo* $\varphi_1(x)$ *una funzione sempre positiva di* x *atta alla integrazione da* α *a* ∞.

E con considerazioni del tutto simili a quelle del § 4, a questa ultima condizione *c)* si potrà anche sostituire l'altra meno restrittiva:

c') che per ogni numero diverso da zero e positivo comunque piccolo σ *si possa trovare un numero pure diverso e positivo* ε_1 *tale che per* $\varepsilon<\varepsilon_1$ *si abbia sempre* $\left|\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy\right|<\sigma\varphi_1(x)$ *finchè* x *è compreso fra* α *e un numero grande* *quanto si vuole ma finito* c_0, *ed è semplicemente* $\left|\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy\right| < A\varphi_1(x)$ *con* A *numero finito quando* x *è superiore o uguale a* c_0.

Naturalmente poi per verificare la condizione a), bisognerà il più spesso valersi dei risultati esposti nei paragrafi precedenti.

7. — Aggiungiamo anche qui che quando si sappia avanti che ambedue gli integrali doppii $\int_a^\infty dx \int_\gamma^\infty f dy$ e $\int_\gamma^\infty dy \int_a^\infty f dx$ sono determinati e finiti e si sappia pure che sono soddisfatte le altre condizioni del teorema precedente all'infuori delle condizioni c) o c') per l'integrale $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy$, *non si potrà affermare che le integrazioni nei detti integrali doppii sono invertibili;* perchè la formola (4) ci permetterà solo di dire che è determinato e finito il limite per $\varepsilon=0$ e $c=\infty$ dell'integrale $\int_a^c dx \int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy$; ma soltanto quando questo limite sia zero, come è appunto in particolare quando risulta soddisfatta l'una o l'altra delle indicate condizioni c) o c') per l'integrale $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f dy$, si potrà affermare che i due integrali doppii sono uguali.

8. — Così ora avendosi ad es. l'integrale doppio $\int_0^\infty da \int_0^\infty e^{-a(1+x^2)} dx$ considerato alla pag. 217, nel quale l'integrale $\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)} dx$ diviene infinito come $\frac{1}{\sqrt{a}}$ al tendere di a a zero, si verifica più facilmente di quello che si facesse allora che nello stesso integrale doppio le integrazioni possono invertirsi perchè si riscontra subito che le condizioni a) e b) del teorema precedente sono soddisfatte, e si verifica inoltre che è soddisfatta anche la condizione c') perchè avendosi $\int_0^\varepsilon e^{-a(1+x^2)} da = \frac{1-e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2}$, si vede che per ogni numero comunque grande ma finito c_0, si può sempre trovare un numero diverso da zero e positivo ε_1 talmente piccolo che per esso si abbia $1-e^{-\varepsilon_1(1+c_0^2)} < \sigma$, e allora per $\varepsilon < \varepsilon_1$ si avrà sempre $\int_0^\varepsilon e^{-a(1+x^2)} da < \frac{\sigma}{1+x^2}$ finchè x è compreso fra 0 e c_0, mentre si avrà $\int_0^\varepsilon e^{-a(1+x^2)} da < \frac{1}{1+x^2}$ per gli altri valori di x.

FINE.

INDICE

DELLA SECONDA PARTE DEL CALCOLO INTEGRALE

(*) Per errore questo Cap. XX e il seguente Cap. XXI nel testo sono segnati come Capitoli XXI e XXII.

riduce sempre alla integrazione di una equazione differenziale lineare omogenea d'ordine n e viceversa (in nota al § 671). Formola di Dirichlet e sue generalizzazioni per la inversione delle integrazioni negli integrali multipli, e loro applicazione per la trasformazione della formola trovata per la soluzione delle dette equazioni integrali di seconda specie. I nuclei iterati del nucleo primitivo. La funzione reciproca di questo nucleo, e la equazione fondamentale alla quale essa soddisfa (§§ 672-676). Quando si riesce a trovare con un processo qualunque una funzione reciproca del nucleo di una equazione integrale questa equazione ammette sempre una soluzione e una sola, e anche la funzione reciproca è unica (§§ 677-680).

Metodo di Fredholm per la risoluzione delle equazioni integrali di seconda specie (p. 935).

Considerazioni generali, e ricerca della soluzione della equazione integrale di seconda specie di Fredholm nella quale il nucleo è $\lambda K(x,y)$, cioè ha un fattore λ che è un parametro variabile. Il processo di Fredholm, per quanto non perfettamente rigoroso dapprima, conduce ad una soluzione, che si dimostra essere perfettamente giusta ed essere ancora unica, anche in casi più estesi di quelli dei paragrafi precedenti. La funzione caratteristica e il determinante $D(\lambda)$ del nucleo $\lambda K(x,y)$. I valori *caratteristici del nucleo*, cioè i valori reali e complessi di λ pei quali $D(\lambda)=0$, sono i soli pei quali in corrispondenza al nucleo $\lambda K(x,y)$ può non esistere una soluzione della equazione integrale (§§ 671-688). Brevi considerazioni relative ai valori caratteristici del nucleo (§§ 689-690). Cenno sul passaggio dalle equazioni di Fredholm a quelle di Volterra, e su equazioni integrali particolari per le quali sono stati fatti studi speciali, e sui sistemi di funzioni ortegonali (§§ 691-692).

Brevi studi sulle equazioni integrali di prima specie (p. 950).

Le considerazioni fatte nel § 669 (pag. 919-921) pel passaggio dalle equazioni integrali di prima specie a quelle di seconda specie si estendono anche al caso in cui il nucleo $K(x,y)$ è sempre zero per $y=x$, ma pel quale una delle derivate parziali rispetto ad x o ad y del prim'ordine o di ordine superiore al primo è sempre diversa da zero per $y=x$ (§§ 693-696). Per le equazioni integrali di prima specie per le quali il nucleo è della forma

$$h_1(y)K_1(x)+h_2(y)K_2(x)+\ldots+h_i(y)K_i(x),$$

essendo le $K_1(x)$, $K_2(x)$, ..., $K_i(x)$ funzioni linearmente distinte, la soluzione della equazione integrale si trova senza alcuna integrazione o colla integrazione di un equazione differenziale lineare completa di ordine inferiore ad $i-1$. (§§ 697-698).

Studi speciali sulle equazioni integrali di prima specie nelle quali il nucleo $K(x,y)$ può presentare singolarità per $y=x$ (p. 957).

Considerazioni generali. Si richiama un processo, da me usato nel Vol. XVII degli *Annali delle Università Toscane* nel 1880, che è una estensione del processo seguito da Abel per un caso particolare trattato da lui. In questo processo si introduce una funzione ausiliaria $\theta(x,\xi)$ di due variabili x e ξ che poi deve determinarsi in modo da soddisfare a una certa condizione speciale, e si giunge allora a una nuova equazione integrale di prima specie che in molti casi coi processi dei §§ 693-698 si riduce a una di seconda specie la cui soluzione è anche soluzione della equazione data (§§ 699-702). Applicazione del nuovo processo al caso in cui il nucleo $K(x,y)$ è della forma $\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}$ con $0<\lambda<1$ e $G(x,y)$ finita, continua ecc. (§§ 703-704). Altre considerazioni in parte esposte nel ricordato Vol. XVII degli Annali delle Università Toscane, che conducono ad una formola generale che dà sotto forma semplice la soluzione della equazione integrale di prima specie per casi notevoli (§§ 705-710). Una osservazione per la quale l'applicazione dei processi precedenti conduce in certi casi a risolvere due equazioni integrali di prima specie ad un tempo (§ 711).

Riduzione delle equazioni integrali di seconda specie a equazioni integrali di prima specie (p. 973).

Nel caso generale questa riduzione può farsi in infiniti modi valendosi dei processi dei §§ 699-702 che riportai da quelli esposti nel Vol. XVII degli Annali delle Università Toscane. Considerazioni e applicazioni particolari (§§ 712-715).

Denominazioni principali relative ai gruppi (p. 977).

Gruppi derivati. Gruppi di prima e gruppi di seconda specie. Gruppi chiusi, gruppi concentrati e gruppi perfetti. Gruppi integrabili, gruppi densi in tutto un intervallo e gruppi complementari. Punti interni in senso largo e punti interni in senso stretto (§§ 716-720).

Potenza di un gruppo. Gruppi numerabili e gruppi non numerabili (p. 980).

Gruppi della stessa potenza. Gruppi numerabili e gruppi non numerabili. Potenza del continuo (§ 721). I gruppi di numeri razionali e così quelli formati dall'insieme di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi numerabili sono numerabili. I punti di un gruppo infinito che non appartengono al gruppo derivato costituiscono un gruppo finito o un gruppo numerabile. Conseguenze di questo teorema (§§ 722-727).

Punti di condensazione. Gruppi chiusi e gruppi perfetti (p. 985).

I punti di condensazione. Un gruppo non numerabile ha infiniti punti di condensazione, e questi punti costituiscono sempre un gruppo perfetto (§§ 728-729). Un gruppo chiuso non numerabile o è anche perfetto o si compone di un gruppo perfetto costituito dai suoi punti di condensazione, e di un altro gruppo che è finito o è un gruppo numerabile (§ 730). Un teorema fondamentale di Cantor sulla costruzione dei gruppi perfetti in un intervallo finito che non riempiono tutto l'intervallo. Tale costruzione si fa mediante la soppressione dei punti interni in senso stretto di intervalli detti da Baire *intervalli cortigui*. Questi gruppi non sono mai densi considerati in tutto l'intervallo. Esempio di tali gruppi (§§ 731-735).

Misura dei gruppi secondo Borel e Lebesgue. Gruppi misurabili (p. 991).

Teorema fondamentale di Borel-Lebesgue pel quale ognuno dei punti interni in senso stretto di un insieme di intervalli Δ contenuti in un intervallo finito può aversi anche come punto interno di uno o più intervalli, in numero finito, presi fra gli intervalli stessi Δ (§ 736). Le considerazioni alle quali dà luogo questo teorema pongono in evidenza, per ogni gruppo tutto contenuto in un intervallo finito, la esistenza di due numeri determinati che vengono detti l'uno *misura esterna* e l'altro *misura interna* del gruppo. Quando queste due misure sono uguali il gruppo viene detto *misurabile* e il valore comune delle due misure è detto la *misura* del gruppo (§§ 737-740). Alcune proprietà di queste misure dei gruppi, e dei gruppi misurabili, e condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo sia misurabile. I gruppi numerabili sono tutti misurabili e di misura zero, e lo stesso è dei gruppi dei punti p nei quali una funzione sempre finita in un intervallo finito e integrabile nel senso di Riemann ha oscillazioni O_p superiori a un numero positivo dato comunque piccolo σ (§§ 741-747). Queste misure esterna e interna dei gruppi introdotte da Borel e Lebesgue non combinano ordinariamente coi numeri detti da Jordan *lunghezza esterna* e *lunghezza interna* dei gruppi; e ordinariamente neppure i gruppi misurabili di Borel-Lebesgue sono gruppi misurabili nel senso di Jordan. Però se un gruppo è misurabile nel senso di Jordan lo è anche nel senso di Borel-Lebesgue, e allora la lunghezza e la misura del gruppo sono uguali, per modo che i gruppi misurabili nel senso di Jordan sono soltanto una classe speciale di quelli misurabili nel senso di Borel-Lebesgue. Così in particolare il gruppo dei numeri razionali non è misurabile nel senso di Jordan mentre lo è in quello di Borel-Lebesgue (in nota al § 746). I gruppi costituiti dalle somme, differenze e prodotti di gruppi misurabili sono sempre nuovi gruppi misurabili. Proprietà per le misure di questi e di altri gruppi che se ne deducono. Il gruppo dei punti di discontinuità di una funzione sempre finita in un intervallo finito e integrabile nel senso di Riemann è sempre misurabile e di misura zero (§§ 748-756).

Funzioni misurabili (p. 1012).

Si generalizza l'ordinario concetto di funzione di Dirichlet estendendolo al caso in cui i valori di una quantità siano dati o si considerano soltanto nei punti di un gruppo, anche quando questo non riempie tutto l'intervallo. Estensione a queste funzioni di alcune definizioni e proprietà delle ordinarie funzioni di Dirichlet (§§ 757-762). Definizione delle funzioni misurabili (§ 763-764). Le somme i prodotti e i quozienti di funzioni sempre finite e misurabili sono sempre misurabili, supponendo però naturalmente nel caso dei quozienti che i denominatori siano sempre discosti da zero più di un certo numero. Così pure sono misurabili le funzioni sempre finite e continue in un gruppo di punti chiuso, e quindi in particolare sono misurabili anche le funzioni di Dirichlet finite e continue in un intervallo finito; e sono pure misurabili tutte le funzioni di Dirichlet sempre finite in un intervallo finito e integrabili nel senso di Riemann (§§ 765-768).

Integrale di Lebesgue (p. 1018).

Definizione dell'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili sempre finite (§ 769). Per queste funzioni l'integrale di Lebesgue esiste sempre ed è unico (§§ 770-771). Il teorema della media per l'integrale di Lebesgue (§ 772). Per una funzione che si considera in un gruppo di punti che è costituito dalla somma di un numero finito o di una infinità numerabile di gruppi in ciascuno dei quali la funzione è misurabile, l'integrale di Lebesgue è la somma degli integrali relativi alle funzioni considerate in quei gruppi, quando questi gruppi non hanno punti comuni o ne hanno soltanto un numero finito o un gruppo misurabile di misura zero (§ 773). Da questo teorema se ne deducono altri notevoli che portano a concludere che per le funzioni di Dirichlet sempre finite e misurabili in un intervallo finito (a, b), l'integrale di Lebesgue, analogamente a quello di Riemann, si presenta anche come il limite di una somma $\Sigma f_s\, \delta_s$ di prodotti degli intervalli δ_s nei quali si scompone l'intervallo totale (a, b) moltiplicati per numeri *determinati* f_s compresi fra i limiti inferiore e superiore della funzione negli intervalli stessi δ_s. Di qui risulta che per le funzioni di Dirichlet integrabili nel senso di Riemann l'integrale di Lebesgue è precisamente quello di Riemann (§§ 774-775). Queste considerazioni mettono in chiaro come si possono introdurre nell'analisi infiniti altri integrali per le funzioni di Dirichlet, sempre finite, e questo anche quando non si pone per esse la condizione della loro misurabilità; e di questi nuovi integrali tanto l'integrale di Riemann quanto quello di Lebesgue sono casi particolari. Giova per questi studî la considerazione di quei numeri che ora chiamansi *numeri derivati*, e che io nel mio libro « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* » pubblicato a Pisa nel 1878 chiamai *estremi oscillatorii dei rapporti incrementali* per le funzioni finite e continue, e giovano pure alcuni teoremi che detti allora su questi

APPENDICE