ULISSE DINI
PROFESSORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

ANALISI INFINITESIMALE

Vol. II. – Calcolo Integrale.
(2.ª PARTE).

PISA
STAB. TIPOGRAFICO SUCC. FF. NISTRI
1915

XVIII.

Equazioni differenziali ordinarie. Generalità

315. — Com'è noto dal *Calcolo differenziale* si chiama *equazione differenziale* ogni equazione che contiene le derivate o i differenziali di uno o più ordini di una o più funzioni, sia che essa contenga o no le funzioni stesse e le variabili indipendenti.

Nel caso poi che di variabili indipendenti non ve ne sia che una, l'equazione viene detta *equazione differenziale ordinaria*, e nel caso che le variabili indipendenti siano più di una l'equazione viene detta a *derivate parziali* o a *differenziali totali* secondo che contiene le derivate parziali o i differenziali totali delle quantità che si considerano come funzioni delle variabili indipendenti; e in ogni caso l'ordine della derivata o del differenziale più alto si dice *l'ordine* della equazione differenziale.

L'equazioni differenziali che ordinariamente si considerano sono nello stesso numero delle funzioni che vi entrano, e quando vi è più di una funzione, il sistema di equazioni differenziali che allora si ha vien detto sistema di *equazioni differenziali simultanee*.

L'equazioni differenziali sì ordinarie che a derivate parziali si presentano continuamente nelle questioni di geometria, di meccanica, fisica, ecc. S'intende subito per es. che quando si abbiano da trovare curve piane o gobbe che abbiano date proprietà relative alle tangenti o alle normali, o ai raggi di curvatura o al piano osculatore ecc. bisognerà trovare le equazioni in termini finiti che dànno origine a certe equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, o del secondo ecc., e quando si abbiano da trovare superficie dotate di proprietà speciali relative ai piani tangenti o alle normali, o alle linee o ai raggi di curvatura ecc. ... bisognerà trovare le equazioni che dànno origine a certe equazioni a derivate parziali del primo, o del secondo ordine ecc..., talchè anche tenendo conto soltanto delle applicazioni geometriche, chiaro

apparisce come lo studio delle equazioni differenziali sì ordinarie che a derivate parziali, specialmente dal lato della ricerca delle equazioni in termini finiti che loro dànno origine colla differenziazione, presenta una importanza grandissima.

Noi prenderemo perciò ad esporre le parti principalissime della teoria della integrazione delle equazioni differenziali, occupandoci però, almeno per ora, soltanto delle equazioni differenziali ordinarie, e fra queste più specialmente di quelle che contengono una sola funzione per modo che si abbia da considerare una sola equazione.

316. — Incominciamo perciò dal ricordare che per quanto si vide nel calcolo differenziale una equazione differenziale ordinaria dell'ordine n

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \quad \text{o} \quad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0,$$

dove x è la variabile indipendente e y è la funzione, può provenire dalla eliminazione di n costanti arbitrarie fra la equazione primitiva $F(x,y)=0$, che lega x ed y, e le prime n equazioni che si deducono da questa colla derivazione immediata; e per questo (tenendo conto anche di quanto si disse ai §§ 179 e seg. [pag. 244 e seg.] del *Calcolo differenziale*, e volendo fissare qualche cosa per la natura e pel modo di figurare delle costanti nell'integrale) si dice inversamente che una equazione

$$(2) \qquad F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0,$$

che contiene n costanti arbitrarie, è *l'integrale generale* di una equazione differenziale data (1) quando per qualunque sistema di valori di queste costanti definisce una funzione y che soddisfa alla equazione (1) stessa, e le costanti vi figurano in modo che si possano sempre assegnare loro valori tali che la funzione y ora indicata e le sue prime $n-1$ derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ prendano valori dati ad arbitrio $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ quando si dà un valore x_0 qualunque alla variabile indipendente x; ammettendo però che questa arbitrarietà di $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ possa avere una limitazione nel senso che queste quantità considerate come variabili indipendenti possano prendersi arbitrariamente sì, ma soltanto in certi campi determinati ad $n+1$ dimensioni.

Più propriamente si dice *integrale generale* di una equazione differenziale (1) una funzione y che, pei valori di x in un certo intervallo nel quale viene preso arbitrariamente un punto x_0, soddisfa alla equazione stessa (1), e per $x=x_0$ sì essa che le sue derivate prendono i valori dati arbitrariamente $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$; ma — intendendo che col dare il nome d'integrale generale anche a una equazione come la (2) non si debba avere riguardo altro che al fatto che il valore di y da essa definito soddisfa a tutte queste condizioni —, può benissimo, come poc'anzi dicemmo, chiamarsi integrale generale della equazione (1) anche la equazione (2).

Con questa definizione, la dimostrazione della esistenza e della unicità dell'integrale generale di una equazione differenziale (1) si fa in modo perfettamente rigoroso tutte le volte che sono soddisfatte certe condizioni speciali pochissimo restrittive, rispetto alla equazione stessa; e noi riservandoci di fare questa dimostrazione nel capitolo seguente, l'ammetteremo intanto come fatta senz'altro.

Osserveremo quindi, per quanto in sostanza questo pure sia già stato detto nel § 182 (pag. 249 e seg.) del *Calcolo differenziale*, che quando si sia trovata una equazione come la (2) che definisca una funzione y della x e delle costanti arbitrarie $C_1, C_2, \dots, C_n$ in un dato campo a $n+1$ dimensioni relativo a queste quantità, e sia tale inoltre che il valore di y da essa definito soddisfi alla equazione data (1) qualunque siano le costanti, allora la stessa equazione (2) si potrà considerare come l'integrale generale della (1) tutte le volte che essa e le sue prime $n-1$ equazioni derivate totali $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, $\frac{d^2F}{dx^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$, $\frac{d^3F}{dx^3} = 0, \dots, \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}} = 0$ determinino le costanti $C_1, C_2, \dots, C_n$ in funzione di $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ per mezzo di equazioni della forma

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1, \\ \varphi_2(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_n, \end{cases}$$

e ciò per qualunque sistema di valori di queste quantità $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ in un dato campo ad $n+1$ dimensioni.

In questo caso infatti attribuendo valori speciali qualsiansi $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ alle quantità $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ in questo campo, se ne dedurranno sempre dei valori corrispondenti per $C_1, C_2, \dots, C_n$, e ponendo nella equazione (2) per $C_1, C_2, \dots, C_n$ i valori così trovati espressi per $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, la (2) stessa prenderà la forma

$$(4) \qquad F_1(x, y, x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}) = 0,$$

e questa almeno ordinariamente — come ad esempio quando siano soddisfatte (il che appunto il più spesso avverrà) le solite condizioni della teoria delle

funzioni implicite del Cap. XIII (§§ 149 e seg. [pag. 200 e seg.]) del *Calcolo differenziale* — darà $y = \psi(x, x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)})$, essendo ψ una funzione speciale che godrà della proprietà che il valore di y e quelli che da essa, come dalle (3) (*), se ne dedurranno per $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ si ridurranno a $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ per $x = x_0$; e questa funzione y, a causa della unicità che, come abbiamo detto, dimostreremo fra breve per l'integrale generale, sarà appunto questo integrale.

In particolare dunque se la equazione data (1) è quella del prim'ordine $f(x, y, y') = 0$, ogni equazione $F(x, y, C) = 0$ contenente una costante arbitraria e tale che il valore y che essa definisce soddisfi alla equazione data qualunque sia la costante C, corrisponderà all'integrale generale quando essa possa considerarsi anche come una equazione che definisce la costante C in funzione di x e y con una equazione della forma $\varphi(x, y) = C$, e la equazione $F(x, y, \varphi(x_0, y_0)) = 0$ che ne conseguirà definisca una funzione y della x che per $x = x_0$ diviene uguale a y_0 ecc.

E in questo caso anche la equazione $\varphi(x, y) = C$ o $\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0)$ potrà considerarsi come l'integrale generale quando, per essere $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ diverso da zero nel punto (x_0, y_0) ecc., definisca una funzione y della x che per $x = x_0$ diviene uguale a y_0.

317. — Inoltre osserveremo che, secondo quanto si disse ai citati §§ 182 e seg. del *Calcolo differenziale*, se la (2) è l'integrale generale della (1), l'eliminazione delle costanti $C_1, C_2, \dots, C_n$ fra essa e le sue prime n equazioni derivate $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \dots, \frac{d^nF}{dx^n} = 0$ riprodurrà l'equazione differenziale data (1) o una equazione che ne sia conseguenza, e ciò in qualunque modo questa eliminazione si faccia; e quando dalla equazione integrale (2) non si vogliano eliminare che i costanti $C_1, C_2, \dots, C_i$, allora basterà fare l'eliminazione fra la (2) stessa e le equazioni che si ottengono da questa colle prime i derivazioni $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \dots, \frac{d^iF}{dx^i} = 0$, e qualunque sia la via che si tiene per giungere a fare l'eliminazione si arriverà sempre ad una stessa equazione

(*) Il caso in cui la formola (4) e quindi il valore $\psi(x, x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ che se ne ricaverà per y non contengano una o più delle quantità $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ non potrà presentarsi, perchè altrimenti il valore di y che si dedurrebbe da queste formole e quelli di $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ che si dedurrebbero dalle equazioni ottenute colla derivazione, per $x = x_0$, invece di ridursi a $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ senz'altro, risulterebbero perfettamente fissi e determinati o espressi per quelli fra essi che non mancassero nella (4), e quindi non sarebbero più del tutto arbitrarii e indipendenti.

$\varphi(x, y, y', y'', ..., y^{(i)}, C_{i+1}, C_{i+2}, ..., C_n)$, che conterrà le rimanenti $n-i$ costanti arbitrarie $C_{i+1}, C_{i+2}, ..., C_n$, o almeno ad equazioni che saranno conseguenza l'una dell'altra.

318. — Essendo ora la equazione (2) l'integrale generale della equazione data (1), se (come dicemmo pure nel *Calcolo differenziale* ai paragrafi citati) colla differenziazione ripetuta $n-1$ volte si eliminano $n-1$ costanti arbitrarie in modo che resti una volta la costante C_1, una volta la costante $C_2 ...$, e una volta la costante C_n, si otterranno così n equazioni della forma

$$\varphi_1(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0, \ \varphi_2(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_2) = 0, ..., \varphi_n(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_n) = 0. \tag{5}$$

Queste n equazioni differenziali che contengono ciascuna una costante sola, e contengono ciascuna la derivata di ordine $n-1$ (*), pur potendo o no contenere anche le funzioni e le derivate di ordine inferiore, e che in sostanza corrispondono alle (3), si dicono *integrali primi* o di *primo ordine* dell'equazione data, ed il loro insieme costituisce il *sistema degli integrali primi*.

Similmente se fra la (2) e le sue prime $n-2$ equazioni derivate si eliminano $n-2$ costanti, si otterranno evidentemente $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni differenziali tutte dell'ordine $n-2$ che conterranno ciascuna due costanti arbitrarie e che si diranno *integrali secondi o del secondo ordine* della equazione data; ed in generale se fra la (2) e le prime sue $n-i$ equazioni derivate si eliminano $n-i$ costanti, si otterranno $\frac{n(n-1)...(n-i+1)}{1.2...i}$ equazioni differenziali tutte di ordine $n-i$ che conterranno ciascuna i costanti arbitrarie e che si diranno *integrali di ordine* i dell'equazione data, per modo che si avranno n integrali primi o del prim'ordine, $\frac{n(n-1)}{2}$ integrali del secondo ordine, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ del terzo,..., $\frac{n(n-1)...(n-i+1)}{1.2...i}$ dell'ordine i^0, ed uno dell'ordine n^0, il quale non sarà altro che l'integrale generale stesso.

(*) Ciascuna delle equazioni (5) che ha una sola costante arbitraria dovrà contenere la derivata di ordine $n-1$, cioè dovrà essere necessariamente di ordine $n-1$, perchè altrimenti se risultasse di ordine inferiore, essa darebbe luogo a un suo integrale generale con meno di n costanti arbitrarie che non potrebbe combinare coll'integrale generale della (1) che deve avere n costanti arbitrarie.

Così gli integrali secondi devono necessariamente contenere tutti la derivata d'ordine $n-2$, quelli del terz'ordine dovranno contenere tutti la derivata d'ordine $n-3$, ecc.

319. — Si deve poi osservare in generale che se con un processo qualunque si giunge ad una equazione differenziale dell'ordine $n-i$

$$\theta(x, y, y', y'', ..., y^{(n-i)}, C_1, C_2, ..., C_i) = 0 \tag{6}$$

che contenga i costanti arbitrarie, e per la quale la (1) sia soddisfatta, potremo riguardarla come un integrale dell'ordine i tutte le volte che questa equazione, unita alle $i-1$ che se ne deducono con $i-1$ derivazioni successive, determini le costanti $C_1, C_2, ..., C_i$ in funzione di $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ per mezzo di i equazioni della forma delle prime i delle (3).

In questo caso infatti, valendosi di queste i equazioni le indicate i costanti $C_1, C_2, ..., C_i$ possono esser determinate in modo che per $x = x_0$ le quantità $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ prendano valori qualunque $y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$; e poichè se $F_1(x, y, C'_1, C'_2, ..., C'_{n-i}, C_1, C_2, ..., C_i) = 0$ è l'integrale generale della (6), si possono determinare tutte le costanti $C'_1, C'_2, ..., C'_{n-i}$ in modo che per $x = x_0$ le $y, y', y'', ..., y^{(n-i-1)}$ abbiano ancora i valori $y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-i-1)}$, si vede chiaramente che questa equazione $F_1(x, y, C'_1, C'_2, ..., C'_{n-i}, C_1, C_2, ..., C_i) = 0$ sarà anche l'integrale generale della (1) e perciò la (6) sarà un integrale dell'ordine i della stessa equazione.

320. — Osservando dunque che se di una equazione differenziale data (1) si hanno k integrali primi

$$\varphi_1(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0, \varphi_2(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_2) = 0, ..., \varphi_k(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, C_k) = 0$$

e fra questi si eliminano le $k-1$ derivate di ordine più alto $y^{(n-1)}, y^{(n-2)} ... y^{(n-k+1)}$, si giunge a una equazione della forma $\theta_1(x, y, y', y'', ..., y^{(n-k)}, C_1, C_2, ..., C_k) = 0$, si può ora evidentemente concludere che, se fra k integrali primi di un'equazione differenziale dell'ordine n si eliminano le $k-1$ derivate di ordine più alto $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y^{(n-k+1)}$ si giungerà sempre ad un integrale dell'ordine k; ed in particolare quindi *se si arriverà a conoscere gli* n *integrali primi di un'equazione differenziale dell'ordine* n, *eliminando fra essi le* $n-1$ *derivate che vi compariscono si otterrà l'integrale generale.*

Similmente se per la (1) si conosceranno $n-1$ integrali di second'ordine distinti, eliminando fra essi le $n-2$ derivate $y', y'', ..., y^{(n-2)}$ che vi compariscono si otterrà l'integrale generale; e in generale *per ottenere l'integrale generale di una equazione differenziale basterà arrivare a conoscere* $n-i+1$ *suoi integrali distinti di ordine* i *e eliminare fra essi le derivate che vi compariscono* $y', y'', ..., y^{(n-i)}$.

In particolare quindi si può affermare che conoscendo due integrali primi distinti di una equazione differenziale del second'ordine, basta eliminare fra essi la derivata prima per avere l'integrale generale; e conoscendo i tre integrali primi o due integrali secondi di una equazione differenziale del terzo ordine, basta eliminare fra i tre primi le derivate prima e seconda, o fra i due secondi la derivata prima per ottenere il suo integrale generale, ecc.

321. — Aggiungiamo infine che ogni equazione speciale $F_1(x, y) = 0$ comunque trovata, — che sia un integrale di una equazione differenziale (1) in quanto definisce una funzione y che soddisfa a questa equazione (1), ma *non sia* l'integrale generale —, quando si possa ricavare anche da questo integrale dando valori particolari a tutte o ad alcune delle n costanti che in essa figurano si chiama *integrale particolare*.

E quando, come pure talvolta avviene, una tale equazione $F_1(x, y) = 0$ non corrisponda nè all'integrale generale nè a un integrale particolare, pure essendo ancora un integrale della equazione data (1) in quanto soddisfa a questa equazione, allora essa si dirà una *soluzione singolare* della stessa equazione (1). Queste soluzioni singolari però non sempre esistono.

XIX.

Esistenza e unicità dell'integrale generale delle equazioni differenziali

Caso della equazione $y' = f(x, y)$.

322. – Esposte le considerazioni generali del Capitolo precedente, passiamo a trattare una questione che è fondamentale per la teoria delle equazioni differenziali, quella cioè dei casi di esistenza e al tempo stesso di unicità dell'integrale generale delle equazioni differenziali, incominciando da quelle del prim'ordine.

Prenderemo perciò a considerare la equazione differenziale

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

per la quale ci limiteremo ad esaminare il caso in cui la funzione $f(x, y)$ soddisfi alle due condizioni seguenti:

1.° sia finita e continua in ogni punto di un certo campo C a due variabili x e y, nell'interno del quale, o anche, in determinati casi, sul contorno, sceglieremo ad arbitrio un punto qualsiasi (x_0, y_0).

2.° sia tale che, per ogni valore speciale di x corrispondente a punti di quel campo e pei valori y e $y+k$ di y comunque presi, ma tali che i punti (x, y) e $(x, y+i)$ con i compreso fra 0 e k (k incl.) appartengono al campo stesso, il rapporto incrementale $\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$ relativo alla variabile y sia sempre numericamente inferiore a un numero finito e positivo A; ciò che, nei casi ordinarii della esistenza della derivata parziale rispetto ad y di $f(x, y)$, avverrà sempre quando questa derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$, oltre ad esistere in ogni punto di C, sarà anche sempre numericamente inferiore ad A.

E ammettendo che nel campo C la funzione $f(x,y)$ soddisfi a queste due condizioni, osserveremo per prima cosa che a causa della prima condizione la funzione stessa in quel campo rimarrà sempre numericamente inferiore a un certo numero positivo e finito L, e per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo dato σ sarà possibile determinare un piccolo rettangolo di lati ε_σ e ε'_σ tale che, dovunque si ponga questo rettangolo nel campo C coi lati ε_σ e ε'_σ paralleli agli assi x e y, le oscillazioni della funzione nello stesso rettangolo, o nella parte di esso che sarà contenuta in C, siano sempre inferiori a σ.

Prenderemo poi un campo rettangolare C_1 *tutto contenuto in* C e coi lati paralleli agli assi x e y, che abbia il punto (x_0, y_0) su uno dei suoi lati verticali o nell'interno e situato sulla retta parallela all'asse delle x che divide per metà il rettangolo, per modo che se $2a$ è la lunghezza dei lati orizzontali e $2b$ quella dei lati verticali, pei punti (x, y) di questo rettangolo la y sia compresa fra y_0-b e y_0+b cioè sia sempre $|y-y_0| \leq b$, e la x sia compresa fra x_0-a_1 e x_0+a_2, essendo a_1 e a_2 numeri positivi dei quali uno potrà anche essere zero e la cui somma sia $2a$ (*).

E supporremo che questo rettangolo C_1 o i numeri a_1, a_2 e b siano presi in modo che i prodotti a_1 L e a_2 L siano ambedue inferiori a b; e questo potrà sempre farsi ingrandendo sufficientemente, quando sia possibile, il rettangolo C_1 nel senso parallelo all'asse delle y (cioè ingrandendo b), o altrimenti restringendolo nel senso dell'asse delle x, cioè impiccolendo a_1 o a_2, tanto da far sì che i prodotti a_1L e a_2L siano ambedue inferiori a b.

Poste le indicate condizioni per $f(x,y)$ nel campo C e determinati così i numeri a_1, a_2 e b, noi dimostreremo che esiste sempre *una e una sola* funzione y della x nell'intervallo (x_0-a_1, x_0+a_2) che è finita e continua insieme alla sua derivata prima y', soddisfa alla equazione data (1) e per $x=x_0$ prende il valore y_0, ciò che equivale appunto a dire che *sotto le indicate condizioni esiste sempre l'integrale generale della equazione stessa* (1) *e questo integrale è unico;* o in altri termini che *gli integrali y di una equazione data* (1) *che soddisfa alle condizioni indicate esistono e sono perfettamente individuati dal loro valore iniziale y_0 in un punto x_0*.

323. — Per giungere alla dimostrazione di questo teorema che è fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali esporremo prima le considerazioni seguenti che sono relative al caso in cui l'esistenza dell'integrale è nota, e corrispondono in fondo a proprietà fondamentali di questi integrali.

(*) La condizione che il campo rettangolare C_1 *sia tutto contenuto* in C porterà ordinariamente che il punto (x_0, y_0) debba essere preso *nell' interno* di C; ma potendo avvenire che i contorni di C e di C_1 abbiano alcuni punti o parti comuni, non resta escluso che in certi casi, *a seconda della forma del contorno di* C, il punto stesso (x_0, y_0) possa anche essere preso su parti di questo contorno (di C). E quando così si faccia uno dei due numeri a_1 o a_2 dovrà essere zero.

Intendendo perciò che x debba variare nell'intervallo da x_0-a_1 a x_0+a_2, e ammettendo che in questo intervallo (x_0-a_1, x_0+a_2), o in una porzione di esso $(x_0-a'_1, x_0+a'_2)$ che comprende il punto x_0, sia nota la esistenza di un integrale $y=y(x)$ della equazione data (1), che prende il valore y_0 per $x=x_0$ ed è tale che pei valori di x compresi nell'intervallo che si considera i punti $(x, y(x))$ vengano a cadere sempre nel campo C_1 o almeno nel campo C, osserviamo che la derivata di questo integrale sarà la funzione $f(x, y(x))$ che sarà finita e continua; e quindi indicando con ξ un punto generico dell'intervallo nel quale l'integrale è conosciuto, avremo la formola

$$y(\xi) - y_0 = \int_{x_0}^{\xi} f(x, y(x))\, dx. \tag{2}$$

Ne segue che se immaginiamo scomposto l'intervallo (x_0, ξ) da x_0 a ξ in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ coi punti di divisione $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, \ldots, x_{n-1}, \xi$, intendendo che la scomposizione sia fatta con una legge qualsiasi, e che il loro numero debba poi crescere oltre ogni limite impiccolendo al tempo stesso ciascuno di essi indefinitamente e sempre con leggi qualsiansi, avremo anche

$$y(\xi) - y_0 = \lim \sum \delta_s f(\bar{x}_s, \bar{y}_s),$$

essendo $\bar{x}_s$ un valore qualsiasi compreso fra x_{s-1} e x_s (questi estr. incl.) e $\bar{y}_s$ il valore di $y(x)$ nel punto $\bar{x}_s$; e prendendo per semplicità $\bar{x}_s = x_{s-1}$ potremo scrivere anche

$$y(\xi) - y_0 = \lim \sum \delta_s f(x_{s-1}, y_{s-1}), \tag{3}$$

indicando in generale con y_h il valore di $y(x)$ nel punto x_h.

324. — È questa una formola che, nel caso della esistenza dell'integrale, viene in certo modo spontaneamente dalla definizione degli integrali definiti che abbiamo data al Cap. I, ed è appunto e solo per questo che abbiamo voluto darla, giacchè per quello che segue avremmo anche potuto tralasciare di trovarla con questo processo, e del resto la ritroveremo anche fra breve (*);

(*) Il processo che ci ha condotto alla formola (3) mostra che essa vale anche nel caso in cui $f(x,y)$ non sia continua, bastando che $f(x, y(x))$, risulti finita e atta alla integrazione da x_0 a ξ. Lo stesso poi potrebbe farsi risultare anche dal processo col quale ritroveremo la stessa formola (3) fra breve, bastando per questo osservare che la somma $\Sigma \delta_s |f(\bar{x}_s, \bar{y}_s) - f(x_{s-1}, y_{s-1})|$ diverrà sempre arbitrariamente piccola all'impiccolire indefinito delle δ_s anche se $f(x,y)$ non sarà continua, quando $f(x, y(x))$ sia finita e atta alla integrazione fra x_0 e ξ.

ma essa non potrebbe servire al calcolo dell'integrale quando – pur sapendosi che esiste – questo non è già conosciuto, perchè nel suo secondo membro figurano i valori y_{s-1} che allora sono ignoti alla pari dell'integrale.

Conviene perciò alla formola stessa sostituirne un'altra, e per questo, facendo del tutto astrazione dalle considerazioni precedenti, ma ammettendo sempre per ora di sapere che l'integrale esiste ed è una funzione $y(x)$ per la quale, come supponemmo sopra, il punto $(x, y(x))$ cade nel campo C_1, o almeno nel campo C, finchè x è nell'intervallo che si considera, osserviamo prima che per la formola degli accrescimenti finiti si ha $y_s - y_{s-1} = \delta_s \bar{y}'_s = \delta_s f(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$, indicando ora con $\bar{x}_s$ un punto intermedio *determinato* fra x_{s-1} e x_s e con $\bar{y}_s$ e $\bar{y}'_s$ i valori corrispondenti di $y(x)$ e $y'(x)$ in questo punto $\bar{x}_s$; e quindi si potrà anche scrivere intanto

$$y_s - y_{s-1} = \delta_s f(x_{s-1}, y_{s-1}) + \delta_s \{f(\bar{x}_s, \bar{y}_s) - f(x_{s-1}, y_{s-1})\}.$$

Osservando ora che $\bar{x}_s - x_{s-1} < \delta_s$ e $\bar{y}_s - y_{s-1} = y(\bar{x}_s) - y(x_{s-1})$, e che $y(x)$ deve essere finita e continua in tutto l'intervallo (x_0, ξ) (perchè deve ammettere la derivata), si vede subito che, quando le δ_s siano già tutte sufficientemente piccole, potremo avere ad un tempo $\delta_s < \varepsilon_\sigma$ e $\bar{y}_s - y_{s-1} < \varepsilon'_\sigma$, e quindi anche $f(\bar{x}_s, \bar{y}_s) - f(x_{s-1}, y_{s-1}) < \sigma$, e questo per ogni valore di s contemporaneamente; dunque si può ora evidentemente affermare che quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ siano già ridotte sufficientemente piccole si avrà sempre la formola seguente

$$y_s - y_{s-1} = \delta_s f(x_{s-1}, y_{s-1}) + \theta_s \delta_s \sigma, \tag{4}$$

essendo θ_s un numero compreso fra -1 e 1.

Facendo in questa formola successivamente $s = 1, 2, \ldots, n$ e sommando si ottiene subito l'altra

$$y(\xi) - y_0 = \sum \delta_s f(x_{s-1}, y_{s-1}) + \theta(\xi - x_0)\sigma,$$

essendo θ un altro numero compreso fra -1 e 1; e questa, coll'osservare che il σ può prendersi arbitrariamente piccolo e allora le δ_s vanno sempre più impiccolendo, ricondurrebbe subito alla formola

$$y(\xi) - y_0 = \lim \sum \delta_s f(x_{s-1}, y_{s-1}), \tag{5}$$

che è precisamente la formola (3).

325. — Indipendentemente da questo, la formola (4) conduce con tutta facilità a quella che ora cerchiamo per sostituirla alla (3).

S'indichino perciò con $g_1, g_2, \ldots, g_{s-1}, g_s, \ldots, g_{n-1}, g_n$ n valori che si po-

tranno effettivamente determinare successivamente e indipendentemente dalla conoscenza dell'integrale, colle formole

$$\tag{6} \left\{\begin{array}{ll} g_1 - g_0 & = \delta_1 f(x_0, g_0), \\ g_2 - g_1 & = \delta_2 f(x_1, g_1), \\ g_3 - g_2 & = \delta_3 f(x_2, g_2), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ g_s - g_{s-1} & = \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ g_n - g_{n-1} & = \delta_n f(x_{n-1}, g_{n-1}), \end{array}\right.$$

nelle quali si intende che sia $g_0 = y_0$; sarà facile vedere che sotto le due ipotesi fatte in principio sulla funzione $f(x, y)$, e sempre nel supposto che fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ o fra $x_0 - a'_1$ e $x_0 + a'_2$ l'integrale della (1) esista, alla formola (3) si può sostituire l'altra

$$y(\xi) - y_0 = \lim \sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}); \tag{7}$$

e questa, quando si voglia, potra effettivamente servire anche alla determinazione dell'integrale, perchè in essa i termini del secondo membro verranno successivamente tutti conosciuti [(*)].

326. — Si supponga perciò, per fissare le idee, che sia $\xi > x_0$, con che le δ_s saranno tutte positive: e si osservi prima di tutto che considerando la prima delle (6) si vede subito che il punto (x_1, g_1) appartiene al campo C_1 perchè si ha $|g_1 - g_0| < \delta_1 L < a_2 L < b$; e a causa di questo, sommando le due prime delle stesse formole (6) e osservando che si viene così ad avere anche $|g_2 - g_0| < (\delta_1 + \delta_2) L < a_2 L < b$, si vede che anche il punto seguente (x_2, g_2) appartiene esso pure a C_1; poi sommando le prime tre si trova che lo stesso avviene pel punto (x_3, g_3), e così continuando si giunge a trovare che tuttti i punti (x_s, g_s) per $s = 1, 2, \ldots, n$ cadono nel campo C_1.

Similmente considerando successivamente al modo stesso le equazioni che si hanno dalla (4) facendovi $s = 1, 2, \ldots, n$ si vede che, quando σ sia sufficientemente piccolo, anche i punti (x_s, y_s), che sopra ammettevamo che po-

(*) Con questo procedimento alla linea ignota $y = y(x)$ che corrisponde all'integrale si viene in sostanza a sostituire una linea limite di una poligonale che incomincia come la linea integrale dal punto (x_0, y_0) e ha i vertici nei punti che successivamente si costruiscono (x_1, g_1), (x_2, g_2), ..., (x_n, g_n) dando ai lati i coefficienti angolari successivi $f(x_0, y_0)$, $f(x_1, g_1)$, $f(x_2, g_2)$, ..., $f(x_{n-1}, g_{n-1})$; e si tratta di mostrare che sotto le condizioni poste il limite di questa linea poligonale è appunto la linea integrale $y = y(x)$.

tessero cadere anche fuori di C_1 ma sempre nel campo C, cadranno tutti essi pure nel campo C_1; quindi, se si osserva che ora colla introduzione delle quantità $g_1, g_2, \dots, g_n$ la formola (5) può scriversi sotto la forma

$$(8) \quad y(\xi) - y_0 = \lim \left[\sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) + \sum \delta_s \{ f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) \} \right],$$

si potrà dire intanto che la formola (7) che vogliamo dimostrare sussisterà certamente quando la somma

$$(9) \qquad \Delta = \sum \delta_s \left\{ f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) \right\}$$

avrà per limite lo zero.

E in questo caso verrà ad esistere anche il limite di $\sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ e questo limite G sarà unico qualunque sia il modo di fare la divisione dell'intervallo (x_0, ξ) in intervalli parziali δ_s e qualunque sia il modo di tendere a zero di questi intervalli perchè, essendo $y(x)$ l'integrale dal quale si parte, il detto limite sarà sempre uguale a $y(\xi) - y_0$; quindi evidentemente *sarà unico anche l'integrale* se per ogni integrale $y(x)$ che possa esistere sarà soddisfatta la condizione $\lim \Delta = 0$, perchè per esso la differenza $y(\xi) - y_0$ risulterà sempre uguale a G.

327. — Poichè per quanto abbiamo visto i varii punti (x_{s-1}, y_{s-1}) e gli altri (x_{s-1}, g_{s-1}) sono tutti compresi nel campo C_1, la somma Δ in valore assoluto sarà sempre inferiore a $2L \sum \delta_s$ o a $2L(\xi - x_0)$, e questo permette intanto di dire che la somma stessa sarà sempre finita.

È facile poi di vedere che un caso in cui, per qualunque integrale $y(x)$ della (1) che possa esistere, il limite di questa somma Δ sarà appunto lo zero, si ha appunto quando la funzione $f(x, y)$ nel campo C, o anche soltanto in C_1, oltre che alla prima soddisfa anche alla seconda delle condizioni che abbiamo poste in principio.

Si osservi infatti che combinando la s^a delle (6) colla (4), si trova la formola

$$(10) \quad y_s - g_s = y_{s-1} - g_{s-1} + \delta_s \{ f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) \} + \theta_s \delta_s \sigma,$$

la quale, coll'osservare che in forza della seconda condizione si avrà

$$f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) = \eta_s A (y_{s-1} - g_{s-1}),$$

essendo le η_s quantità comprese fra -1 e 1, conduce subito all'altra

$$y_s - g_s = (y_{s-1} - g_{s-1})(1 + \delta_s \eta_s A) + \theta_s \delta_s \sigma,$$

ovvero

$$(11) \qquad y_s - g_s = \lambda_{s-1}(y_{s-1} - g_{s-1}) + \theta_s \delta_s \sigma,$$

quando si ponga $\lambda_{s-1} = 1 + \delta_s \eta_s A$.

Per questa scrivendo anche le equazioni analoghe che corrispondono ai valori precedenti di s, cioè formando il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
y_s - g_s &= \lambda_{s-1}(y_{s-1} - g_{s-1}) + \theta_s \delta_s \sigma, \\
y_{s-1} - g_{s-1} &= \lambda_{s-2}(y_{s-2} - g_{s-2}) + \theta_{s-1} \delta_{s-1} \sigma, \\
y_{s-2} - g_{s-2} &= \lambda_{s-3}(y_{s-3} - g_{s-3}) + \theta_{s-2} \delta_{s-2} \sigma, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
y_2 - g_2 &= \lambda_1(y_1 - g_1) \qquad + \theta_2 \delta_2 \sigma, \\
y_1 - g_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad \theta_1 \delta_1 \sigma,
\end{aligned}$$

si vede subito che si ha in generale

$$y_s - g_s = (\theta_s \delta_s + \theta_{s-1} \lambda_{s-1} \delta_{s-1} + \theta_{s-2} \lambda_{s-1} \lambda_{s-2} \delta_{s-2} + \dots + \theta_2 \lambda_{s-1} \lambda_{s-2} \dots \lambda_2 \delta_2 + \theta_1 \lambda_{s-1} \lambda_{s-2} \dots \lambda_2 \lambda_1 \delta_1) \sigma,$$

e poichè per ogni valore di p si ha $\lambda_{p-1} = 1 + \delta_p \eta_p A \leq 1 + \delta_p A < e^{\delta_p A}$, sarà evidentemente $|y_s - g_s| < e^{(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s) A} (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s) \sigma$, e quindi anche $y_s - g_s = \bar{\eta}_s (\xi - x_0) e^{(\xi - x_0) A} \sigma$, essendo $\bar{\eta}_s$ un altro numero compreso fra -1 e 1.

D'altra parte cambiando nella (10) s in $s-1, s-2, \dots, 2, 1$ e sommando coll'osservare che $y_0 = g_0$ si trova l'altra

$$(12) \qquad y_s - g_s = \sum \delta_s \left\{ f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) \right\} + \eta (\xi - x_0) \sigma,$$

essendo η un nuovo numero compreso fra -1 e 1; e questa, tenendo conto del valore testè trovato per $y_s - g_s$, conduce alla seguente

$$\sum \delta_s \left\{ f(x_{s-1}, y_{s-1}) - f(x_{s-1}, g_{s-1}) \right\} = \bar{\eta} (\xi - x_0) \sigma (1 + e^{(\xi - x_0) A}),$$

per la quale si ha $\Delta = \bar{\eta} (\xi - x_0) \sigma (1 + e^{(\xi - x_0) A})$, essendo $\bar{\eta}$ un altro numero compreso fra -1 e 1.

A un risultato simile si giungerebbe se, supponendo $\xi < x_0$, le δ_s fossero tutte negative; e da questo coll'osservare che, essendo σ arbitrariamente piccolo, per quanto piccolo sia stato preso potremo poi prenderlo sempre più piccolo, si conclude evidentemente che quando l'integrale della equazione data (1) esiste, e per $f(x, y)$ sono soddisfatte le due condizioni poste in principio, per l'integrale stesso y si ha la formola (7) per tutti i valori di ξ fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ o fra $x_0 - a'_1$ e $x_0 + a''_2$, come volevamo dimostrare; e l'integrale viene ad essere unico (*).

(*) Dalla dimostrazione fatta apparisce chiaramente che quando l'integrale della equazione (1) esiste, le due condizioni poste in principio del § 322 per la funzione $f(x, y)$ portano che per l'integrale si ha la formola (7) e che esso è unico, ma queste condizioni si presentano qui soltanto come condizioni sufficienti; e eviden-

328. — Giunti così in modo perfettamente rigoroso a questo risultato, viene naturale la seguente dimostrazione della esistenza e della unicità dell'integrale della equazione (1) quando sono soddisfatte le due condizioni poste in principio del § 322; quale dimostrazione è del tutto simile a quella che si fece nel primo capitolo per trovare i casi di integrabilità delle funzioni di una variabile.

Supponendo perciò ancora che sia $\xi > x_0$, s'immagini fatta una scomposizione qualsiasi dell'intervallo (x_0, ξ) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ coi punti di divisione $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, \ldots, x_{n-1}, \xi$, e questi intervalli parziali si suppongano già ridotti sufficientemente piccoli come indicammo sopra, tali cioè che per ogni valore di s sia $\delta_s < \varepsilon_\sigma$; e si formino le equazioni (6) che serviranno alla determinazione successiva delle quantità $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_n$, essendo ancora $g_0 = y_0$.

Per quanto abbiamo detto, *sotto le ipotesi fatte*, l'integrale se esisterà sarà unico e dovrà essere il limite della somma $S_\delta = \sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$, i cui termini potranno formarsi per mezzo delle quantità già determinate $g_1, g_2, \ldots, g_n$, e che sarà certamente sempre numericamente inferiore al numero finito $a_2 L$, perchè per quanto vedemmo sopra i punti (x_{s-1}, g_{s-1}) saranno tutti compresi nel campo C_1; quindi per la dimostrazione che vogliamo fare converrà pren-

---

temente la stessa formola (7) e l'unicità dell'integrale potranno aversi anche in altri casi, bastando per questo che per $f(x, y)$ si abbiano condizioni, anche diverse da quelle del § 322, per le quali la somma (9) venga ad avere per limite zero all'impiccolire indefinitamente delle δ_s con leggi qualsiansi, per qualunque integrale $y(x)$ che si ammetta che possa esistere.

Quando poi, sempre nel supposto che un integrale della equazione (1) esista, la somma (9) corrispondente a questo integrale ha un limite determinato Λ uguale o diverso da zero (che per quanto abbiamo detto sarà certo finito), allora, per la (8) come per la (12), anche la somma $\Sigma \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ avrà un limite determinato e finito $g(\xi)$, e la differenza $y(\xi) - g(\xi)$ sarà precisamente Λ; e poichè si può dimostrare che quando questo limite $g(\xi)$ esiste, esso pure è un integrale della equazione data (1) perche si ha $g'(\xi) = f(\xi, g(\xi))$, così in questo caso se Λ non sarà zero la equazione stessa (1) avrà più integrali distinti che per $x = x_0$ prendono il valore y_0. Questo però naturalmente non potrà avvenire altro che quando la funzione $f(x, y)$ non soddisfi alle condizioni del § 322; e difatti si dimostra in particolare che quando la stessa funzione è finita e continua e non si pone affatto la seconda di quelle condizioni gli integrali continuano ad esistere, ma non sempre si ha l'unicità. (V. per questo una memoria di Volterra nel vol. XIX del Giorn. di Matem. di Battaglini (1881), una del Peano nel vol. XXI degli Atti dell'Accad. di Torino pel 1886, quella di W. F. Osgood nei Monatsh. für Math. und Phys. Wien IX Iahrg. 1898, e altre pure di Peano e Volterra, di Ch. De la Vallée-Poussin, di Arzelà e di altri che completano e estendono gli stessi resultati).

dere a considerare questa somma S_δ e per prima cosa bisognerà fare vedere che il suo limite esiste ed è sempre lo stesso qualunque siano la legge tenuta per scomporre l'intervallo (x_0, ξ) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ e quella che si seguirà per far tendere questi singoli intervalli a zero. Dopo bisognerà mostrare che questo limite è una funzione di ξ la cui derivata esiste e soddisfa alla equazione (1) e quindi è effettivamente l'integrale di questa equazione.

Ora per fare la prima parte di questa dimostrazione, s'immagini un'altra divisione dello stesso intervallo (x_0, ξ) in altri intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'}$ coi nuovi punti di divisione $x_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'-1}, \xi$, e si calcoli la nuova somma corrispondente $S_{\delta'} = \sum \delta'_s f(x'_{s-1}, g'_{s-1})$; e poi colle due divisioni insieme si formi una divisione composta, i cui intervalli indicheremo con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ e i cui punti di divisione (che saranno tutti quelli delle due prime divisioni) indicheremo ora con $x_0, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}, \xi$.

L'antico intervallo δ_s corrisponderà a uno o a più dei nuovi intervalli $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_p$ della divisione composta, per es. agli intervalli $\rho_{i+1}, \rho_{i+2}, \ldots, \rho_{i+t}$ con $t \geq 1$, e si avrà $x_{s-1} = r_i$, $x_s = r_{i+t}$ e $\delta_s = \rho_{i+1} + \rho_{i+2} + \ldots + \rho_{i+t}$; e quindi aggiungendo e togliendo a $\delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ alcuni termini si potrà scrivere

$$(13)\quad \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) = \rho_{i+1} f(r_i, \gamma_i) + \rho_{i+2} f(r_{i+1}, \gamma_{i+1}) + \ldots + \rho_{i+t} f(r_{i+t-1}, \gamma_{i+t-1}) + P_s,$$

e quindi

$$\sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) = \sum \rho_k f(r_{k-1}, \gamma_{k-1}) + \sum P_s,$$

ovvero $S_\delta = S_\varrho + \sum P_s$, con

$$(14)\quad P_s = \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) - \{\rho_{i+1} f(r_i, \gamma_i) + \rho_{i+2} f(r_{i+1}, \gamma_{i+1}) + \ldots + \rho_{i+t} f(r_{i+t-1}, \gamma_{i+t-1})\}$$

quando s'indichino ora con γ_s le quantità, analoghe alle g_s, che corrispondono alla divisione composta, per modo che per quelle corrispondenti ai punti di divisione fra x_{s-1} e x_s o fra r_i e r_{i+t} sarà

$$(15)\quad \begin{cases} \gamma_{i+1} - \gamma_i = \rho_{i+1} f(r_i, \gamma_i), \\ \gamma_{i+2} - \gamma_{i+1} = \rho_{i+2} f(r_{i+1}, \gamma_{i+1}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \gamma_{i+t} - \gamma_{i+t-1} = \rho_{i+t} f(r_{i+t-1}, \gamma_{i+t-1}), \end{cases}$$

al modo stesso che si ha per la s^a delle (6)

$$(16)\quad g_s - g_{s-1} = \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1});$$

e operando successivamente su queste equazioni come si fece sulle (6) non solo si vede che i punti (r_p, γ_p) cadranno come gli altri (x_s, g_s) nel campo C_1, ma si vede inoltre che le differenze $\gamma_{i+1} - \gamma_i, \gamma_{i+2} - \gamma_i, \ldots, \gamma_{i+t} - \gamma_i$ saranno tutte numericamente inferiori a $\delta_s \mathrm{L}$ e quindi anche a ε'_σ se le δ_s oltre che già ridotte inferiori a ε_σ si suppongono anche inferiori a $\dfrac{\varepsilon'_\sigma}{\mathrm{L}}$.

Sommando ora le (15) e togliendo la somma dalla (16) si vede subito che il valore (14) di P_s può scriversi sotto la forma

$$(17) \qquad \mathrm{P}_s = g_s - \gamma_{i+t} - (g_{s-1} - \gamma_i) = \Delta_{s-1} - \Delta_s,$$

indicando con Δ_s le differenze successive $\gamma_{i+t} - g_s$ fra le γ_{i+t} e g_s corrispondenti ai varii punti x_s; quindi per determinare P_s converrà determinare queste differenze Δ_s.

Ora dalla (14), aggiungendo e togliendo $\delta_s f(r_i, \gamma_i)$ con osservare che $\delta_s = \rho_{i+1} + \rho_{i+2} + \ldots + \rho_{i+t}$, si ha subito

$$\begin{aligned} -\mathrm{P}_s = \delta_s \{f(r_i, \gamma_i) - f(x_{s-1}, g_{s-1})\} + \rho_{i+1}\{f(r_i, \gamma_i) - f(r_i, \gamma_i)\} \quad + \\ + \rho_{i+2}\{f(r_{i+1}, \gamma_{i+1}) - f(r_i, \gamma_i)\} + \rho_{i+3}\{f(r_{i+2}, \gamma_{i+2}) - f(r_i, \gamma_i)\} + \\ + \ldots + \rho_{i+t}\{f(r_{i+t-1}, \gamma_{i+t-1}) - f(r_i, \gamma_i)\}, \end{aligned}$$

e poichè, come abbiamo osservato sopra, le differenze $\gamma_{i+1} - \gamma_i, \gamma_{i+2} - \gamma_i, \ldots, \gamma_{i+t-1} - \gamma_i$ sono tutte inferiori a ε'_σ, e d'altra parte le differenze $r_{i+1} - r_i$, $r_{i+2} - r_i, \ldots, r_{i+t-1} - r_i$ non superano δ_s e quindi sono inferiori a ε_σ, si deduce subito da questo che le differenze che figurano nei termini dopo il primo nell'ultima formola saranno tutte numericamente inferiori a σ, e la somma di questi termini sarà inferiore a $\delta_s \sigma$, e potrà quindi rappresentarsi con $\overline{\theta}_s \delta_s \sigma$ essendo $-1 \leq \overline{\theta}_s \leq 1$; e per questo e per essere $r_i = x_{s-1}$ si potrà scrivere

$$(18) \qquad -\mathrm{P}_s = \Delta_s - \Delta_{s-1} = \delta_s \{f(x_{s-1}, \gamma_i) - f(x_{s-1}, g_{s-1})\} + \overline{\theta}_s \delta_s \sigma,$$

o anche tenendo conto della seconda delle condizioni alle quali soddisfa $f(x,y)$

$$\Delta_s - \Delta_{s-1} = \overline{\eta}_s \mathrm{A} \delta_s \Delta_{s-1} + \overline{\theta}_s \delta_s \sigma,$$

essendo $-1 \leq \overline{\eta}_s \leq 1$; e quindi ponendo $1 + \overline{\eta}_s \mathrm{A} \delta_s = \overline{\lambda}_{s-1}$, avremo la formola $\Delta_s = \overline{\lambda}_{s-1} \Delta_{s-1} + \overline{\theta}_s \delta_s \sigma$ che è del tutto simile alla (11), per modo che, operando su questa come già si operò sulla (11) coll'osservare che $\Delta_0 = 0$, si giungerà infine alla formola seguente

$$\Delta_s = \eta'_s (\xi - x_0) e^{(\xi - x_0)\mathrm{A}} \sigma,$$

con $-1 \leq \eta'_s \leq 1$; e ora, osservando che per la (17) si ha $\sum \mathrm{P}_s = -\Delta_n$, e

ricordando che si trovò già $\mathrm{S}_\delta = \mathrm{S}_\varrho + \sum \mathrm{P}_s$, si otterrà subito la formola seguente

$$(19) \qquad \mathrm{S}_\delta = \mathrm{S}_\varrho + \overline{\eta}\, e^{(\xi - x_0)\mathrm{A}} (\xi - x_0) \sigma,$$

con $-1 \leq \overline{\eta} \leq 1$, che esprime la somma $\mathrm{S}_\delta = \sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ corrispondente alla divisione primitiva per quella simile S_ϱ corrispondente alla divisione composta.

Analogamente, indicando ora con σ' un numero piccolissimo come σ (che potrà anche prendersi uguale a σ) e supponendo che le δ'_s siano già inferiori oltre che a $\varepsilon_{\sigma'}$ anche a $\dfrac{\varepsilon'_{\sigma'}}{\mathrm{L}}$, si avrà per la somma $\mathrm{S}_{\delta'}$ corrispondente alla seconda divisione

$$\mathrm{S}_{\delta'} = \mathrm{S}_\varrho + \overline{\eta}'\, e^{(\xi - x_0)\mathrm{A}} (\xi - x_0) \sigma'.$$

con $-1 \leq \overline{\eta}' \leq 1$, e quindi sottraendo si troverà

$$(20) \qquad \mathrm{S}_\delta - \mathrm{S}_{\delta'} = e^{(\xi - x_0)\mathrm{A}} (\xi - x_0) (\overline{\eta}\sigma - \overline{\eta}'\sigma');$$

e ora di qui coll'osservare che σ e σ' si possono supporre arbitrariamente piccoli, si conclude subito senz'altro che se una delle due somme S_δ e $\mathrm{S}_{\delta'}$ avrà un limite all'impiccolire indefinito delle δ_s o δ'_s, l'altra avrà lo stesso limite.

D'altra parte, poichè nulla impedisce di supporre che la seconda divisione corrispondente agli intervalli δ'_s non sia altro che la divisione corrispondente ai primi intervalli δ_s protratta più oltre a un punto qualsiasi, la stessa formola (20), pel noto teorema di Cauchy sulla esistenza dei limiti, dimostra che per ogni divisione la somma S_δ corrispondente ha un limite; quindi resta ora completamente dimostrato che sotto le due condizioni poste in principio per la funzione $f(x,y)$ le somme $\mathrm{S}_\delta = \sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ hanno un limite determinato e finito, che è sempre lo stesso qualunque sia il modo di fare la divisione dell'intervallo (x_0, ξ) in intervalli parziali, e qualunque sia la legge secondo la quale si fanno tendere a zero questi intervalli.

329. — Dimostrata così l'esistenza del limite unico e determinato della somma $\sum \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})$ per ogni valore di ξ fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$, si comprende subito come questo limite sarà una funzione di ξ che si annulla per $\xi = x_0$. Aggiungendovi y_0 noi la rappresenteremo con $y(\xi)$, e dimostreremo che essa ammette una derivata che sarà appunto $f(\xi, y(\xi))$, con che rimarrà pienamente dimostrato che questa funzione $y(\xi)$ è l'integrale della equazione data (1) che per $x = x_0$ prende il valore y_0, cioè è l'integrale generale.

Si supponga infatti di avere calcolato coi processi precedenti questa funzione $y(\xi)$ pel valore α della variabile scomponendo l'intervallo (x_0, α) in p intervalli parziali δ_s con una legge qualsiasi e passando al limite per $p=\infty$, per modo che si abbia

$$y(\alpha) = y_0 + \lim_{p=\infty} \sum_{x_0}^{\alpha} \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1})\,; \tag{21}$$

e per calcolare al modo stesso $y(\alpha+h)$ nel supposto dapprima che h sia positivo, si estenda la divisione all'intervallo $(x_0, \alpha+h)$ scomponendolo in $p+t$ intervalli parziali dei quali i primi p siano quelli che servono al calcolo di $y(\alpha)$ (per modo cioè che la divisione corrispondente all'estremo superiore di δ_p venga sempre a cadere in α_p), con che avremo

$$y(\alpha+h) = y_0 + \lim_{\substack{p=\infty\\ t=\infty}} \left\{ \sum_{x_0}^{\alpha} \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) + \sum_{\alpha}^{\alpha+h} \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) \right\}.$$

Si supponga ora che h sia già sufficientemente piccolo per modo da essere inferiore a ε_σ e a $\frac{\varepsilon'_\sigma}{L}$; e ammesso questo, si osservi che quando, avanti di passare al limite, in una prima divisione i t intervalli parziali da α a $\alpha+h$ che seguono δ_p fossero ridotti ad uno solo $\overline{\delta}_{p+1}$ che allora sarebbe uguale ad h, al caso di questo intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ o $\overline{\delta}_{p+1}=(\alpha+h)-\alpha$ considerato come se costituisse una prima divisione e a quello degli intervalli $\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_{p+t}$ nei quali s'intende effettivamente diviso lo stesso intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ (che verrebbero così considerati come costituenti una seconda divisione) si potrebbe applicare la formola (20) che trovammo sopra cambiandovi opportunamente le notazioni; dunque evidentemente supponendo ora senz'altro $\sigma'=\sigma$ si avrà

$$\sum_{\alpha}^{\alpha+h} \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) = \delta_{p+1} f(\alpha, g_p) + \delta_{p+2} f(x_{p+1}, g_{p+1}) + \ldots +$$
$$+ \delta_{p+t} f(x_{p+t-1}, g_{p+t-1}) = h f(\alpha, g_p) + 2\eta''_p e^{hA} h\sigma,$$

con $-1 \leq \eta''_p \leq 1$, e quindi la precedente si potrà scrivere

$$y(\alpha+h) = y_0 + \lim_{\substack{p=\infty\\ t=\infty}} \left\{ \sum_{x}^{\alpha} \delta_s f(x_{s-1}, g_{s-1}) + h f(\alpha, g_p) + 2\eta''_p h e^{hA}\sigma \right\},$$

e così, avendo riguardo alla (21) e all'essere $\lim_{p=\infty} g_p = y(\alpha)$ e quindi

$\lim_{p=\infty} f(\alpha, g_p) = f(\alpha, y(\alpha))$, si troverà la formola seguente

$$y(\alpha+h) - y(\alpha) = h f(\alpha, y(\alpha)) + 2he^{hA}\sigma \lim_{\substack{p=\infty\\ t=\infty}} \eta''_p,$$

dalla quale, osservando che σ può supporsi piccola quanto si vuole, si dedurrà che al tendere di h a zero il rapporto incrementale $\frac{y(\alpha+h)-y(\alpha)}{h}$ ha per limite appunto $f(\alpha, y(\alpha))$; e questo, coll'osservare che, con leggerissime modificazioni di parole nella dimostrazione che abbiamo fatta, h può anche supporsi negativo, ci mostra appunto come volevamo che la derivata di $y(\xi)$ per $\xi=\alpha$ esiste ed è $f(\alpha, y(\alpha))$.

330. — Così quando per la funzione $f(x,y)$ che figura nella equazione differenziale data (1) sono soddisfatte le due condizioni poste in principio del § 322 (la seconda delle quali viene detta la condizione di *Lipschitz* perchè fu posta sotto quella forma da Lipschitz (*)), l'esistenza dell'integrale $y(x)$ che prende un valore qualsiasi y_0 per $x=x_0$ è dimostrata pei valori di x nell'intervallo da x_0-a_1 a x_0+a_2 determinato nel modo indicato al § 322; e in forza di quanto dicemmo in fine del § 326 e nel § 327, si può dire dimostrata al tempo stesso anche la unicità dell'integrale medesimo.

In particolare quindi per ogni punto (x_0, y_0) in un intorno del quale la funzione $f(x,y)$ che figura nella equazione differenziale data $y'=f(x,y)$, oltre essere sempre finita e continua, ha una derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$ sempre finita, vi sarà sempre un intervallo, relativo ad x (x_0-a_1, x_0+a_2), con a_1 e a_2 numeri positivi dei quali uno almeno è diverso da zero, pel quale esisterà un integrale della equazione data che per $x=x_0$ prende il valore y_0 e questo integrale sarà unico.

331. — Aggiungiamo che i processi di dimostrazione che qui abbiamo tenuti — oltre ad assicurare, come abbiamo detto, l'esistenza e la unicità dell'integrale $y(x)$ della equazione (1) nell'intervallo da x_0-a_1 a x_0+a_2 quando è dato il suo valore iniziale y_0 per $x=x_0$ e il punto (x_0, y_0) è preso comunque nel campo C pel quale sono soddisfatte le condizioni da noi indi-

(*) Annali di matem. di Milano 1868 pag. 288. Bull. de Darboux 10-1876, pag. 149. La prima dimostrazione della esistenza e della unicità dell'integrale fu data da Cauchy nelle sue lezioni à l'École polytechnique fra il 1820 e il 1830, e in queste Cauchy invece della seconda delle condizioni del § 322 posta poi da Lipschitz poneva l'altra più restrittiva che la funzione $f(x,y)$ avesse la derivata parziale rispetto a y finita e continua.

cate nel § 322 — dànno anche un processo per la determinazione dell'integrale per mezzo di un limite.

Essi in sostanza estendono al caso delle equazioni differenziali la definizione e i processi stessi dati da Cauchy e da Riemann per trovare i casi di esistenza degli integrali definiti, e possono servire in ogni caso alla determinazione approssimata degli integrali delle equazioni differenziali, e a trovare funzioni fra le quali l'integrale è compreso per ogni valore della variabile, ecc.

Avendo infatti riguardo alla formola (20), e supponendo in questa che gli intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots, \delta'_{n'}$ corrispondano a una divisione dell'intervallo totale (x_0, ξ) spinta talmente oltre che la somma corrispondente $y_0 + S_{\delta'}$ sia prossima quanto si vuole al suo limite che è l'integrale $y(\xi)$ della equazione differenziale data (1), dalla formola stessa (20) si vede che, fissato il numero σ e quindi i numeri ε_σ e ε'_σ di cui al § 322 e supposte le divisioni in intervalli parziali δ_s già portate a un punto che questi intervalli siano tutti inferiori ai due numeri ε_σ e $\frac{\varepsilon'_\sigma}{L}$, la differenza $y_0 + S_\delta - y(\xi)$ non potrà mai superare la quantità $e^{(\xi - x_0)A}(\xi - x_0)\sigma$ perchè, comunque sia stato fissato il σ, il σ' potrà sempre supporsi piccolo ad arbitrio; e questo ci permette di dire che il valore $y_0 + S_\delta$ calcolato coi valori scelti $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ darà un valore approssimato dell'integrale $y(\xi)$ della equazione data (1) con un errore non superiore numericamente alla quantità stessa $e^{(\xi - x_0)A}(\xi - x_0)\sigma$, e quindi anche a $e^{a_2 A} a_2 \sigma$ o a $e^{a_1 A} a_1 \sigma$, secondochè $\xi > x_0$ o $\xi < x_0$.

332. — E così pure se si avranno due funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ che soddisfino alle stesse condizioni di $f(x, y)$ e siano tali che per ogni valore singolo α di x fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ e per y compresa fra $y_0 - b$ e $y_0 + b$ i valori $f(\alpha, y)$ di $f(x, y)$ non siano mai minori del limite superiore $L_{\varphi, y}(\alpha)$ di $\varphi(\alpha, y)$ nè maggiori del limite inferiore $l_{\psi, y}(\alpha)$ di $\psi(\alpha, y)$ per gli stessi valori di y, supposto $L_{\varphi, y}(\alpha) \leq l_{\psi, y}(\alpha)$, allora indicando con $y_\varphi(\xi)$ e $y_\psi(\xi)$ gli integrali delle equazioni $y' = \varphi(x, y)$ e $y' = \psi(x, y)$ che prendono il valore iniziale y_0 per $x = x_0$ avremo sempre

$$y_\varphi(\xi) \leq y(\xi) \leq y_\psi(\xi) \tag{22}$$

per tutti i valori di ξ diversi da x_0 compresi fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$.

In particolare dunque se $f(x, y)$ per ogni valore di y compreso fra $y_0 - b$ e $y_0 + b$ è sempre compreso per ogni valore di x da $x_0 - a_1$ a $x_0 + a_2$ fra le due funzioni di x finite e continue $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ essendo $\varphi(x) \leq f(x, y) \leq \psi(x)$, come avverrà ad es. se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno le funzioni costituite dai minimi e dai massimi valori di $f(x, y)$ lungo le verticali corrispondenti ai singoli valori di x da $x_0 - a_1$ a $x_0 + a_2$, allora per l'integrale $y(\xi)$ della equazione (1) che

ha il valore iniziale y_0 avremo sempre

$$y_0 + \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx \leq y(\xi) \leq y_0 + \int_{x_0}^{\xi} \psi(x)\, dx .$$

Caso dei sistemi di equazioni differenziali del prim'ordine. Equazioni di ordine superiore.

333. — Il processo che abbiamo dato pel caso di una sola equazione differenziale $y' = f(x, y)$ si estende al caso di un sistema di m equazioni della forma

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{array} \right. \tag{1}$$

quando le varie funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ soddisfino a condizioni perfettamente analoghe a quelle che si avevano per $f(x, y)$ nel caso già trattato, cioè:

1.° siano finite e continue in un certo campo C a $m+1$ dimensioni, relativo alle quantità $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ considerate come variabili indipendenti, che comprende il punto $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0})$.

2.° per ogni valore speciale della variabile x i rapporti incrementali $\frac{f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_s + k_s, \ldots, y_m) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots, y_m)}{k_s}$ delle singole funzioni relativi a ciascuna delle altre variabili $y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots, y_m$ quando i punti $(x, y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots, y_m)$, $(x, y_1, y_2, \ldots, y_s + k_s, \ldots, y_m)$ sono punti qualsiansi del campo stesso C, siano sempre numericamente inferiori a numeri finiti $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,s}, \ldots, A_{i,m}$; ciò che equivale a dire che qualunque siano i punti $(x, y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots, y_m)$ e $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s, \ldots, \bar{y}_m)$ del campo C, corrispondenti allo stesso valore di x ma diversi pei valori di una o più delle $y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots, y_m$, la differenza

$$f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m), \tag{2}$$

che evidentemente può scriversi

$$\begin{array}{l} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) \quad + \\ + f_i(x, y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) \quad + \\ + f_i(x, y_1, y_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, y_3, \bar{y}_4, \ldots, \bar{y}_m) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + f_i(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{m-1}, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m), \end{array}$$

potrà sempre porsi sotto la forma

$$\gamma_1|\bar{y}_1 - y_1| + \gamma_2|\bar{y}_2 - y_2| + \gamma_3|\bar{y}_3 - y_3| + \dots + \gamma_m|\bar{y}_m - y_m|,$$

essendo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m$ quantità sempre numericamente inferiori ai numeri $A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}, \dots, A_{i,m}$ (condizione di Lipschitz); e questa condizione rispetto agli indicati rapporti incrementali delle varie funzioni f_i o alle differenze (2) risulterà in particolare sempre soddisfatta quando per ogni funzione f_i le varie derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_m}$ saranno numericamente inferiori a $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$ in ogni punto di C.

Sotto queste condizioni, rappresentando ora con L un numero finito e positivo del quale siano sempre numericamente inferiori tutte le m funzioni $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ nel campo C, e facendo considerazioni analoghe a quelle del § 322 si determinerà un campo C_1 tutto contenuto in C e pel quale si verifichino particolarità del tutto simili a quelle in base alle quali fu determinato il campo C_1 nello stesso § 322, cioè colla condizione che nei punti di questo campo C_1 la x varii soltanto da $x_0 - a_1$ a $x_0 + a_2$ e le y_i variino tutte fra $y_{i,0} - b_i$ e $y_{i,0} + b_i$, essendo le a_1, a_2 e b_i numeri positivi presi in modo che i prodotti $a_1 L$ e $a_2 L$ siano inferiori alla più piccola delle b_i. E dopo, ripetendo punto per punto le considerazioni dei paragrafi precedenti, ma facendole — invece che per una sola funzione y e per un solo sistema di equazioni come le (6) della pag. 480 — per le m funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ e per m sistemi di equazioni simili al detto sistema (6) e relativi ad ognuna di queste funzioni, si giungerà ugualmente alla dimostrazione della esistenza e della unicità di un sistema di funzioni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ che soddisfino alle equazioni date (1) e per $x = x_0$ prendano i valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$ che possono scegliersi arbitrariamente fra quelli che, quando per x è fissato di prendere il valore x_0, le $y_1, y_2, \dots, y_m$, considerate come variabili indipendenti, possono prendere nel campo C.

334. — Aggiungiamo che in ciò che precede abbiamo supposto che la equazione o il sistema di equazioni differenziali date fossero risolute rispetto alle derivate, mentre questo spesso non sarà, e invece di una equazione come la (1) del § 322 ne sarà data una della forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

e invece delle (1) del paragrafo precedente sarà dato un sistema di m equazioni

$$F_1 = 0, \ F_2 = 0, \dots, F_i = 0, \dots, F_m = 0, \tag{4}$$

tutte della forma

$$F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) = 0, \tag{5}$$

con $i = 1, 2, \dots, m$.

Ammesso di essere nell'uno o nell'altro di questi casi, noi, considerando ora le x e y, o le $x, y_1, y_2, \dots, y_m$ e le varie derivate del prim'ordine di y o di $y_1, y_2, \dots, y_m$ come altrettante variabili indipendenti in un campo a 3 o a $2m+1$ dimensioni, supporremo (come di solito avverrà) che nell'intorno di un punto (x_0, y_0, y'_0) o di un punto $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}, y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{m,0})$ pel quale la equazione (3) o le (4) sono soddisfatte, si verifichino quelle condizioni che secondo la teoria delle funzioni implicite esposta nel Cap. XIII del *Calcolo differenziale* bastano ad assicurare che le equazioni stesse (3) o (4) definiscono la derivata y' di y nel primo caso o le derivate $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ delle $y_1, y_2, \dots, y_m$ nel secondo mediante equazioni della forma (1) del § 322 o (1) del paragrafo precedente, cioè colla equazione

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

nel primo caso, e colle altre

$$\left\{\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ y'_m &= f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

nel secondo caso.

Allora, sempre secondo la indicata teoria delle funzioni implicite, per queste nuove equazioni (6) o (7) alle quali la (3) o le (4) daranno luogo risulteranno sempre soddisfatte tutte le condizioni che si posero per le corrispondenti dei §§ 322 e 333, e quindi anche in questo caso si potrà affermare che l'integrale della (3) o quelli delle (4) (che si considereranno come gli integrali generali di queste) esistono in intervalli convenienti $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$ coi valori iniziali dati y_0, o $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$.

Soltanto se avverrà che con questi valori iniziali la (3) o le (4) ammettano più soluzioni per y', o per $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$, cioè diano luogo a più valori iniziali y'_0 per y', o a più sistemi di valori iniziali $y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{m,0}$ per $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$, allora naturalmente si giungerà a più equazioni (6) o a più sistemi di equazioni (7), e quindi la (3) o le (4) daranno luogo a più integrali generali o a più sistemi di integrali generali cogli stessi valori iniziali, sempre però essendo unici gli integrali corrispondenti a ogni soluzione speciale della (3) o delle (4).

335. — Aggiungiamo che colle dimostrazioni che abbiamo fatto rispetto alla esistenza e alla unicità degli integrali generali dei sistemi di equazioni differenziali del prim'ordine, si può dire di avere già dimostrato il teorema generale anche pel caso che si abbia da integrare una equazione differenziale di ordine superiore, perchè, come ci è facile vedere, si ha il fatto notevole che *le equazioni di ordine superiore si riducono sempre a un sistema di equazioni differenziali tutte del prim'ordine,* e quindi rientrano sempre nel caso che ora abbiamo trattato.

Si supponga infatti di avere una equazione differenziale dell'ordine m

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)}, y^{(m)}) = 0. \tag{8}$$

Indicando le prime $m-1$ derivate $y', y'', ..., y^{(m-1)}$ della funzione incognita y con $y_1, y_2, ..., y_{m-1}$, e considerando queste varie quantità $y, y_1, y_2, ..., y_{m-1}$ come funzioni speciali da determinarsi, si vede subito che alla equazione data (8) si può sostituire il sistema delle m equazioni differenziali seguenti

$$F(x, y, y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y'_{m-1}) = 0, \; y' = y_1, \; y'_1 = y_2, \; y'_2 = y_3, ..., y'_{m-2} = y_{m-1}, \tag{9}$$

che sono tutte del prim'ordine fra le m funzioni $y, y_1, y_2, ..., y_{m-1}$, e rientrano tutte nella forma generale

$$F_i(x, y, y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y', y'_1, y'_2, ..., y'_{m-1}) = 0$$

di quelle dei sistemi di equazioni (1) o (4); e questo dimostra la particolarità enunciata sopra rispetto alla riducibilità delle equazioni differenziali di ordine superiore (8) a sistemi di equazioni differenziali tutte del prim'ordine, che può evidentemente estendersi anche al caso dei sistemi di equazioni differenziali considerando separatamente ciascuna equazione differenziale del sistema.

336. — Riducendosi così ogni equazione differenziale d'ordine superiore (8) al caso di un sistema di equazioni differenziali (9) e quindi a quello già trattato, si può dunque senz'altro affermare che se la equazione data (8) sarà già risoluta rispetto alla derivata m^a di y, cioè se sarà della forma

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)}), \tag{10}$$

e in essa la funzione $f(x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)})$ nel campo a $m+1$ variabili, relativo alle quantità $x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)}$ considerate tutte come variabili indipendenti, nel quale si trovi il punto $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(m-1)})$, soddisfarà alle condizioni prima e seconda del § 333 cioè di essere finita e continua e di avere i rapporti incrementali relativi ad y, ad y', ad y'',... e ad $y^{(m-1)}$ sempre

numericamente inferiori a numeri finiti, allora esisterà sempre un integrale y della stessa equazione (8) tale che per $x = x_0$ sì esso che le sue prime $m-1$ derivate $y', y'', ..., y^{(m-1)}$ prendano i valori arbitrarii $y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(m-1)}$, e questo integrale sarà unico.

E se la equazione data (8) non sarà risoluta rispetto alla derivata m^a, ma pel valore x_0 di x essa sarà soddisfatta da un sistema di m valori arbitrarii $y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(m-1)}$ di $y, y', y'', ..., y^{(m-1)}$ e da un valore adattato $y_0^{(m)}$ di $y^{(m)}$, e al tempo stesso in un campo a $m+2$ dimensioni relativo alle $m+2$ quantità $x, y, y', ..., y^{(m-1)}, y^{(m)}$ considerate come variabili indipendenti e che contenga il punto $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(m-1)}, y_0^{(m)})$ soddisfarà alle solite condizioni della teoria delle funzioni implicite, per modo da essere certi che essa definisca una funzione $y^{(m)}$ di $x, y', y'', ..., y^{(m-1)}$ per la quale si abbia una equazione della forma (10) e che nel punto $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(m-1)})$ prenda il valore $y_0^{(m)}$, allora esisterà ancora un integrale y della equazione (8) che per $x = x_0$ prenda insieme alle sue prime $m-1$ derivate i valori dati ad arbitrio $y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(m-1)}$; e per ogni valore $y_0^{(m)}$ cui dia luogo la (8) in corrispondenza ai valori $x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(m-1)}$ di $x, y, y', y'', ..., y^{(m-1)}$, si avrà un unico integrale.

337. — Queste considerazioni col complemento di poche altre di eliminazione di funzioni fra più equazioni differenziali si estendono anche al caso dei sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore, che, come già abbiamo detto, si riducono essi pure a sistemi di equazioni del prim'ordine e quindi possono poi trattarsi al modo stesso; ma noi non possiamo ora fermarci anche su questo.

Metodo di Picard delle approssimazioni successive per la dimostrazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali.

338. — I processi precedenti coi quali, sotto le condizioni poste, abbiamo dimostrato la esistenza e al tempo stesso anche la unicità degli integrali delle equazioni differenziali, senza essere precisamente quelli di Cauchy-Lipschitz che primi fecero tali dimostrazioni, di poco ne differiscono. Così ridotti però hanno su quelli di Cauchy-Lipschitz il vantaggio di presentarsi, come già rilevammo, come una estensione naturalissima di quelli di Cauchy e Riemann sulla esistenza degli integrali definiti delle funzioni di una sola variabile che si dettero nel Cap. I, e mettono bene in evidenza come altri casi di esistenza e di unicità degli integrali o almeno della semplice esistenza possano esservi (*).

(*) W. F. Osgood nella mem. cit. in nota a pag. 485 ha dato altri casi più estesi per la esistenza e l'unicità degli integrali.

Un altro processo per la dimostrazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali fu dato dal Picard nel 1890 (*), e anche questo è molto notevole sia per la sua semplicità, sia perchè si basa su un metodo detto *delle approssimazioni successive* che si applica anche in altre ricerche importanti.

Esporremo perciò anche questo processo, modificando però leggermente la dimostrazione data dapprima dal Picard e portandola a quella data poi dal Bendixson e dal Lindelöf (**), con che si ha il vantaggio di togliere alcune limitazioni all'intervallo di validità dell'integrale che sono richieste dalla prima dimostrazione del Picard, e l'intervallo stesso viene ad essere precisamente quello che abbiamo trovato coi processi dei paragrafi precedenti (***).

339. — Trattiamo subito senz'altro, come Picard, il caso generale di un sistema di m equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{cases}$$

come le (1) del § 333, e pel quale siano soddisfatte le due condizioni stesse prima e seconda (condizione di Lipschitz) che allora si posero per i punti di un campo C a $m+1$ dimensioni che è relativo alle quantità $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ considerate come variabili indipendenti e nel quale cade il solito punto iniziale $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}$; e indicando ancora con L un numero finito e positivo del quale siano sempre numericamente minori tutte le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ nel campo C, si formi ancora il campo C_1 tutto contenuto in C e pei punti del quale la x sia sempre compresa fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ e le y_i siano comprese fra $y_{i,0} - b_i$ e $y_{i,0} + b_i$, respettivamente, essendo le a_1, a_2 e $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m$ quantità positive delle quali *tutte le* b_i e una almeno delle due prime a_1 e a_2

(*) Picard, Journ. de math. tome 6, 1890, pag. 145 e *Traité d'Analyse*, Tome II, 1893, pag. 303-304, ecc.

(**) Bendixson, Stockh. Ofv. 1893. Lindelöf, Journ. de math. tome 10, 1894, pag. 117, e Picard, *Traité d'Analyse*, Tome III, 1893 pag. 88. Nella nuova edizione del suo *Traité d'Analyse* il Picard ha riunito i risultati che nella prima edizione aveva esposti in parte nel tomo II e in parte nel tomo III alle pagine qui indicate.

(***) Lindelöf nella mem. cit. e Painlevé nel Bull. de la soc. math. tome 27, 1899 p. 150, il primo pel metodo di Picard e il secondo per quello di Cauchy-Lipschitz hanno dato altri limiti per l'intervallo di validità dell'integrale che in certi casi sono più ampii; e pei risultati del Lindelöf può vedersi il tomo di detta nuova edizione (1905) testè ricordata del Picard, pag. 344-45.

sono diverse da zero, e tali altresì che i prodotti $a_1 L$ e $a_2 L$ siano inferiori alla più piccola b delle b_i.

Partendo ora dal sistema iniziale di valori $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{i,0}, \ldots, y_{m,0}$ costruiamo un sistema speciale di funzioni $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{i,1}, \ldots, y_{m,1}$ determinandole per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} y'_{1,1} &= f_1(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}), \\ y'_{2,1} &= f_2(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_{i,1} &= f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y'_{m,1} &= f_m(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}), \end{aligned}$$

e colla condizione che per $x = x_0$ prendano i valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{i,0}, \ldots, y_{m,0}$.

Queste funzioni si otterranno con una semplice integrazione, e in generale per la i^a sarà

$$y_{i,1}(x) = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0})\, dx,$$

per ogni valore del limite superiore x fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$; per modo che indicando con $M_{i,0}$ un valore medio determinato di $f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0})$ fra x_0 e x o anche fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ si avrà

$$y_{i,1}(x) - y_{i,0} = M_{i,0}(x - x_0);$$

e poichè $M_{i,0}$ sarà numericamente inferiore al numero fissato sopra L avremo $|y_{i,1}(x) - y_{i,0}| < L|x - x_0| \leq b$, ciò che mostra che pei valori di x fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ i punti $(x, y_1, y_2, \ldots, y_{m,1})$ corrispondenti a questi valori di x e ai valori $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1}$ delle nuove funzioni ora determinate $y_{1,1}(x), y_{2,1}(x), \ldots, y_{m,1}(x)$ sono tutti compresi nel campo C_1, e si ha in generale $|y_{i,1}(x) - y_{i,0}| < L|x - x_0|$.

Partendo poi dai valori trovati $y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{i,1}, \ldots, y_{m,1}$ costruiamo al modo stesso un secondo sistema di funzioni $y_{1,2}, y_{2,2}, \ldots, y_{i,2}, \ldots, y_{m,2}$ che nel punto x_0 prendano ancora i valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{i,0}, \ldots, y_{m,0}$ e per le quali si abbia in generale

$$y_{i,2} = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1})\, dx;$$

e siccome pei soliti valori di x fra $x_0 - a_1$ e $x_0 + a_2$ i punti $(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1})$ sono tutti compresi nel campo C_1, la funzione $f_i(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,1})$ durante tutta l'integrazione sarà sempre numericamente inferiore ad L e si avrà ancora $|y_{i,2}-y_{i,0}|<L|x-x_0|$, ciò che mostra che per gli stessi valori di x fra x_0-a_1 e x_0+a_2 anche i nuovi punti $(x, y_{1,2}, y_{2,2}, \dots, y_{m,2})$ apparterranno essi pure al campo C_1.

Così continuando, dopo n di queste operazioni successive giungeremo alla formola

$$(2) \qquad y_{i,n}=y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1})\, dx,$$

dalla quale si vede che i nuovi punti che successivamente si otterranno $(x, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n})$ saranno compresi nel campo C_1 perchè per questi punti si avrà sempre $|y_{i,n}-y_{i,0}|<L|x-x_0|$; e ora sarà facile vedere che sotto le ipotesi fatte le funzioni $y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n}$, che così si determinano successivamente, per ogni valore di x fra x_0-a_1 e x_0+a_2 avranno ciascuna un limite al crescere indefinito di n, e questi limiti saranno appunto gl'integrali cercati $y_1, y_2, \dots, y_m$ per gli stessi valori di x da x_0-a_1 a x_0+a_2; e i punti limiti $(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ saranno ancora compresi nel campo C_1.

Si consideri per questo la serie indefinita

$$(3) \qquad y_{i,0}+(y_{i,1}-y_{i,0})+(y_{i,2}-y_{i,1})+\dots+(y_{i,n}-y_{i,n-1})+\dots$$

la cui somma, se sarà convergente, sarà appunto il limite di $y_{i,n}$ (*), e si osservi che pei termini di questa si ha

$$(4) \quad y_{i,n}-y_{i,n-1}=\int_{x_0}^{x}\left\{f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1})-f_i(x, y_{1,n-2}, y_{2,n-2}, \dots, y_{m,n-2})\right\} dx,$$

e poichè si suppone soddisfatta la condizione seconda del § 333 sui rapporti incrementali delle f_i relativi alle $y_1, y_2, \dots, y_m$, cioè la condizione di Lipschitz, avremo in valore assoluto

$$(5) \quad |y_{i,n}(x)-y_{i,n-1}(x)|<\int_{x_0}^{x}\left\{A_{i,1}|y_{1,n-1}-y_{1,n-2}|+A_{i,2}|y_{2,n-1}-y_{2,n-2}|+\dots+\right.$$
$$\left.+A_{i,m}|y_{m,n-1}-y_{m,n-2}|\right\} dx.$$

(*) Questa osservazione per la quale la ricerca del limite di $y_{i,n}$ si riduce a quella della somma della serie (3) è generale e può usarsi in qualunque altro caso nel quale si abbia da determinare un limite di una successione congruente a quella dei numeri naturali.

Ora, come già abbiamo detto, per tutti i valori di x fra x_0-a_1 e x_0+a_2 si ha sempre $|y_{i,1}-y_{i,0}|<L\frac{|x-x_0|}{1}$, per tutti i valori $1, 2, \dots, m$ di i, quindi, supponendo per comodo che il limite superiore x dell'integrale sia fra x_0 e x_0+a_2 cioè sia $x>x_0$, e facendo $n=2$ nella precedente si troverà

$$|y_{i,2}(x)-y_{i,1}(x)|<L(A_{i,1}+A_{i,2}+\dots+A_{i,m})\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)}{1}dx,$$

ovvero

$$|y_{i,2}(x)-y_{i,1}(x)|<L(A_{i,1}+A_{i,2}+\dots+A_{i,m})\frac{(x-x_0)^2}{1.2}.$$

per tutti i valori di x fra x_0 e x_0+a_2, e indicando con A la massima delle somme $A_{i,1}+A_{i,2}+\dots+A_{i,m}$ pei varii valori $1, 2, \dots, m$ di i si potrà anche scrivere

$$|y_{i,2}(x)-y_{i,1}(x)|<LA\frac{(x-x_0)^2}{1.2}$$

per tutti i valori di x fra x_0 e x_0+a_2 e per tutti i valori $1, 2, \dots, m$ di i.

Facendo poi $n=3$ nella precedente (5), si troverà

$$|y_{i,3}(x)-y_{i,2}(x)|<LA^2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^2}{1.2}dx,$$

ovvero

$$|y_{i,3}(x)-y_{i,2}(x)|<LA^2\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3};$$

per tutti i valori di x fra x_0 e x_0+a_2, e per tutti i valori $1, 2, \dots, m$ di i; e così continuando si avrà

$$|y_{i,n}(x)-y_{i,n-1}(x)|<L\frac{A^{n-1}(x-x_0)^n}{\pi(n)},$$

ciò che mostra che la serie (3) per tutti i valori di x fra x_0 e x_0+a_2 ha i suoi termini inferiori a quelli di una serie esponenziale, e quindi essa è sempre convergente e anche convergente in ugual grado pei valori di x nello stesso intervallo.

Allo stesso risultato giungeremmo quando x fosse compreso fra x_0-a_1 e x_0; quindi si può ora evidentemente affermare che la espressione

$$(6) \qquad y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1})\, dx$$

che per la (2) rappresenta $y_{i,n}$ ha effettivamente un limite che rappresenterà una funzione y_i di x per tutti i valori di x nell'intervallo da x_0-a_1 a x_0+a_2 e verso il quale essa convergerà in ugual grado nello stesso intervallo, e questo avverrà per tutti i valori $1,2,\ldots,m$ di i.

Inoltre queste funzioni y_i saranno funzioni continue di x perchè se si muta x in $x+h$ nel limite superiore dell'integrale che figura nelle somme (6), le somme stesse e quindi anche i loro limiti vengono a variare meno di Lh e questo per ogni valore di i; conseguentemente anche le funzioni limiti $f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ saranno tutte esse pure finite e continue pei valori di x fra x_0-a_1 e x_0+a_2.

Ne segue che la espressione stessa (6) può anche scriversi sotto la forma

$$y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)\,dx+\int_{x_0}^{x}\left\{f_i(x,y_{i,n-1},y_{2,n-1},\ldots,y_{m,n-1})-f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)\right\}dx,$$

e in essa, per la convergenza in ugual grado delle $y_{i,n}$ verso i loro limiti y_i e per la continuità di f_i nel campo C_i, l'ultimo termine convergerà verso lo zero al crescere indefinito di n; e quindi avremo la formola

$$y_i=y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)\,dx,$$

dalla quale risulta subito che $y'_i=f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ per tutti i valori $1,2,\ldots,m$ di i; e questo prova appunto che le funzioni così determinate sono gli integrali cercati delle equazioni (1).

340. — Il processo di Picard che ora abbiamo esposto, mentre vale a dimostrare la esistenza dell'integrale delle equazioni differenziali ordinarie e dei loro sistemi quando sono soddisfatte le condizioni di Lipschitz non ne dimostra la unicità; ma poichè questa è messa in evidenza dalle considezioni generali fatte ai §§ 326 e 327, potremmo anche fare a meno di tornare a dimostrarla in altro modo.

Noi ne daremo però anche la dimostrazione seguente di Goursat (*), sia perchè è semplicissima, sia perchè ci dà l'occasione di fare anche un'altra osservazione che ha una particolare importanza.

Sempre perciò sotto l'ipotesi che siano soddisfatte le condizioni di Lipschitz, si ammetta momentaneamente che possano esistere più sistemi di

(*) Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique* Tome II, 1905 pag. 372. Per un'altra dimostrazione della unicità dell'integrale vedasi per es. Picard, *Traité d'Analyse*, Tome II, 1893 pag. 299-300, e Tome II 1895 (2ª ediz.) pag. 355-358.

funzioni integrali delle equazioni date (1), che prendano gli stessi valori iniziali $y_{1,0},y_{2,0},\ldots,y_{i,0},\ldots,y_{m,0}$ nel punto x_0; e s'indichino con $y_1,y,\ldots,y_i,\ldots,y_m$ le funzioni che costituiscono uno di questi sistemi pei quali si suppone naturalmente che i punti $(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ cadano sempre nel solito campo C_1.

Considerando una qualsiasi y_i delle stesse funzioni integrali, osserveremo che dalla i^a delle equazioni date (1) avremo sempre la formola seguente

$$(7)\qquad y_i=y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)\,dx,$$

e se col processo di Picard avremo costruite successivamente le funzioni $y_{i,1},y_{i,2},\ldots,y_{i,n}\ldots$ per le quali si ha in generale

$$y_{i,n}=y_{i,0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1},\ldots,y_{m,n-1})\,dx,$$

se ne dedurrà subito l'altra

$$(8)\ y_i-y_{i,n}=\int_{x_0}^{x}\left\{f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)-f_i(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1},\ldots,y_{m,n-1})\right\}dx,$$

e questa, coll'osservare che le funzioni $f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ soddisfano alla condizione di Lipschitz, dà subito luogo alla formola, in valore assoluto

$$(9)\ |y_i-y_{i,n}|<\int_{x_0}^{x}\left\{A_{i,1}|y_1-y_{1,n-1}|+A_{i,2}|y_2-y_{2,n-1}|+\ldots+A_{i,m}|y_m-y_{m,n-1}|\right\}dx,$$

nella quale le $A_{i,1},A_{i,2},\ldots,A_{i,m}$ hanno i significati stabiliti nei paragrafi precedenti.

Valendosi ora di questa formola con farvi $n=1,2,3,\ldots$, e ripetendo i ragionamenti che facemmo sopra sulla (5) dopo di avere osservato che per la (7) si ha $|y_i-y_{i,0}|<L|x-x_0|$, si trova subito che le differenze successive

$$y_i-y_{i,n} \text{ o gli integrali } \int_{x_0}^{x}\left\{f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_m)-f_i(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1},\ldots,y_{m,n-1})\right\}dx$$

pei respettivi valori $1,2,3,\ldots,n\ldots$ di n sono numericamente inferiori ai termini

$$L\frac{A|x-x_0|^2}{1\,.\,2},\quad L\frac{A^2|x-x_0|^3}{1\,.\,2\,.\,3},\quad L\frac{A^3|x-x_0|^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},\ldots,\quad L\frac{A^n|x-x_0|^{n+1}}{\pi(n+1)},\ldots$$

nei quali come nel paragrafo precedente A indica la massima delle somme

$A_{i,1}+A_{i,2}+\ldots+A_{i,m}$ pei varii valori $1, 2, \ldots, m$ di i; e questo basta evidentemente per potere dire che le stesse differenze $y_i - y_{i,n}$ al crescere indefinito di n hanno per limite lo zero.

Di qui chiaro apparisce che y_i sarà il limite di $y_{i,n}$ per $n=\infty$, e questo dimostra che gli integrali y_i da noi considerati combinano precisamente con quelli ai quali si giunge col processo di Picard che sono appunto i limiti delle $y_{i,n}$ per $n=\infty$; e così, sotto le condizioni poste, l'unicità degli integrali delle equazioni date (1) è nuovamente dimostrata.

341. — Aggiungiamo che siccome le funzioni $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,n} \ldots$ che si determinano successivamente col processo di Picard possono riguardarsi come valori approssimati della funzione integrale corrispondente y_i, le differenze $y_i - y_{i,n}$ corrispondono precisamente all'errore che si commette prendendo $y_{i,n}$ come valore della funzione y_i; e quindi per quanto ora abbiamo dimostrato può affermare che *questo errore è sempre numericamente inferiore al termine* $\frac{L}{A}\frac{|A(x-x_0)|^{n+1}}{\pi(n+1)}$, *cioè al termine* $(n+2)^0$ *della serie esponenziale*

$$\frac{L}{A}\sum_0^\infty \frac{|A(x-x_0)|^n}{\pi(n)}. \tag{10}$$

È questa la osservazione importante alla quale accennavamo sopra, perchè essa ci dà un modo semplicissimo di determinare il grado di approssimazione che si ha col processo di Picard nel calcolo delle funzioni integrali delle equazioni date (1) quando in questo calcolo ci si arresta a un punto qualsiasi; e l'approssimazione si presenta la stessa per tutte le funzioni integrali $y_1, y_2, \ldots, y_m$. La stessa osservazione poi ci mostra anche che il processo di Picard approssima con grande rapidità alle funzioni integrali, specialmente quando il prodotto $A(x-x_0)$ è alquanto piccolo in valore assoluto.

342. — E si può notare che anche tenendo conto della dimostrazione fatta nel § 339 nell'esporre il processo di Picard, si aveva un modo di determinare il grado di approssimazione degli integrali per ogni valore di x nel solito intervallo (x_0-a_1, x_0+a_2), perchè presentandosi questi integrali come somma della serie (3), le somme finite successive $y_{i,n}$ dei termini di queste serie dànno valori approssimati delle funzioni integrali per ogni valore di x nello stesso intervallo con un errore numericamente inferiore ai resti delle serie medesime i quali sono numericamente inferiori ai resti corrispondenti della serie esponenziale (10); ma questi resti, pei quali un limite superiore si determinerebbe pure con tutta facilità, sono tutti superiori al numero trovato sopra come limite superiore dello stesso errore che è soltanto il primo termine dei resti medesimi.

Altri modi di determinare l'errore nel calcolo degli integrali delle equazioni differenziali — ma di questo assai meno semplici — si hanno pure; e fra questi sono da segnalarsi quelli indicati dal sig. Em. Cotton nella memoria pubblicata nel tomo XXXVI del *Bullet. de la Soc. Mathém. de France*, pag. 225, 1908.

343. — Prima di lasciare questi studii sul processo di Picard vogliamo fare anche le osservazioni seguenti che mettono bene in evidenza la genesi del processo medesimo.

Indipendentemente perciò dalle considerazioni di questo processo, osserviamo che, ammessa dapprima la esistenza degli integrali che prendono i valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}$ per $x=x_0$, e considerando ad es. la i^a delle equazioni date (1) per le quali supporremo ancora soddisfatta la condizione di Lipschitz, se ne dedurrà subito la formola (7) cioè

$$y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)\,dx, \tag{11}$$

nella quale s'intende che le $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ siano appunto le funzioni integrali delle (1); e si può dire quindi che si ha in generale

$$y_i = y_{i,0} + \eta_{i,0}, \tag{12}$$

essendo $\eta_{i,0}$ l'integrale $\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)\,dx$, per modo che $y_{i,0}$ si può considerare come parte conosciuta dell'integrale y_i, e $\eta_{i,0}$ come parte ancora incognita.

Sostituendo nella (11) per le $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sotto l'integrale le somme che si hanno dalla (12) per $i=1, 2, \ldots, m$, avremo

$$y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}+\eta_{1,0}, y_{2,0}+\eta_{2,0}, \ldots, y_{m,0}+\eta_{m,0})\,dx,$$

e se alla funzione f_i sotto l'integrale fosse applicabile la formola di Taylor, considerandovi le $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \ldots, \eta_{m,0}$ come accrescimenti, nella stessa funzione f_i si separerebbe subito una parte conosciuta $f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0})$ da un'altra parte sconosciuta ordinata per polinomii omogenei nelle $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \ldots, \eta_{m,0}$.

Indipendentemente da questo, la stessa parte conosciuta può separarsi aggiungendola e togliendola, e allora si ha

$$(13)\qquad y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}) \right\} dx,$$

e ora la parte conosciuta dell'integrale y_i viene a comporsi dei due primi termini, cioè è la $y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})\, dx$ che è la $y_{i,1}$ del processo di Picard, e si può quindi scrivere

$$(14)\qquad y_i = y_{i,1} + \eta_{i,1},$$

essendo $\eta_{i,1}$ la parte ancora sconosciuta dell'integrale y_i che è costituita dall'ultimo integrale della formola precedente (13).

Sostituendo di nuovo nella (11) o nella (13) per le $y_1, y_2, \dots, y_m$ i valori che ora si hanno dalla (14) per $i = 1, 2, \dots, m$, si ottiene

$$(15)\qquad y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{1,1} + \eta_{1,1}, y_{2,1} + \eta_{2,1}, \dots, y_{m,1} + \eta_{m,1})\, dx,$$

e separando ancora in $f_i(x, y_{1,1} + \eta_{1,1}, y_{2,1} + \eta_{2,1}, \dots, y^{m}{}_{,1} + \eta_{m,1})$ sotto l'integrale la parte $f_i(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1})$ che ora può dirsi conosciuta, si giungerà subito all'altra

$$(16)\qquad y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1})dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1}) \right\} dx,$$

nella quale la parte conosciuta diventa ora la $y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1})\, dx$ che è la $y_{i,2}$ del processo di Picard, e si può quindi scrivere

$$(17)\qquad y_i = y_{i,2} + \eta_{i,2},$$

essendo $\eta_{i,2}$ la parte ancora sconosciuta di y_i che è costituita dall'ultimo integrale della formola precedente (16).

Sostituendo così successivamente si giunge alla formola

$$(18)\qquad y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1})\, dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1}) \right\} dx,$$

nella quale la parte conosciuta è la $y_{i,n}$ del processo di Picard, e si ha quindi la formola seguente

$$(19)\quad y_i = y_{i,n} + \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,n-1} y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1}) \right\} dx$$

che non è che la (8) del § 340 mentre le $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}$ pei varii valori $1, 2, \dots, m$ di i sono quelle appunto del processo di Picard che, volendo, si presentano qui naturalmente anche come le somme successive della serie (3), e quindi per quanto vedemmo hanno un limite determinato e finito.

Questo limite noi trovammo già nel § 339 che è appunto l'integrale y_i, ma noi indipendentemente da questo lo indicheremo ora con $\bar{y}_i$, e così per l'integrale y_i avremo ora la formola seguente

$$(20)\ y_i = \bar{y}_i + \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, \dots, y_{m,n-1}) \right\} dx,$$

nella quale $\bar{y}_i = \lim y_{i,n}$.

344. — Tutto questo quando si ammetta già nota l'esistenza degl'integrali, nel qual caso colle considerazioni stesse del § 340 si dimostra anche che l'ultimo termine della precedente è zero, e si ha quindi $y_i = \bar{y}_i$.

Ora però, senza più partire dall'ipotesi della esistenza degli integrali, si osservi che i secondi membri delle formole successive (13), (15), (16),... non sono che successive trasformazioni identiche della espressione

$$(21)\qquad y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\, dx,$$

per modo che questa espressione può dirsi identica al secondo membro della (20) qualunque siano le funzioni che vi si intendano poste per le funzioni incognite $y_1, y_2, \dots, y_m$.

D'altra parte, essendo $\bar{y}_i$ il limite di $y_{i,n}$ per $n=\infty$ si ha $\bar{y}_i = y_{i,n}+\sigma_{i,n}$, dove, a causa della convergenza in ugual grado della serie (3) o delle $y_{i,n}$ verso il loro limite $\bar{y}_i$, le $\sigma_{i,n}$ da un certo valore di n in poi sono sempre numericamente inferiori ad un numero arbitrariamente piccolo dato σ; e quindi, quando nella (21) per le y_i si prendano le $\bar{y}_i$ così definite, le differenze $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m) - f_i(x, y_{1,n-1}, y_{2,n-1}, ..., y_{m,n-1})$ sotto l'integrale che figura nella (20) sono sempre numericamente inferiori a qualunque numero piccolo quanto si vuole per ogni valore di x fra x_0 e x e conseguentemente l'integrale stesso ha per limite zero al crescere indefinito di n; dunque la espressione (21), quando in essa per le $y_1, y_2, ..., y_m$ vi si intendano poste le $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m$, colle trasformazioni precedenti viene a ridursi appunto a $\bar{y}_i$, e questo dimostra appunto che la funzione trovata $\bar{y}_i$ corrisponde all'integrale; talchè così, oltre a ritrovare colle considerazioni precedenti il risultato di Picard, si vede anche che il suo processo corrisponde a un processo di sostituzioni successive o di reiterazione sulla stessa formola (11).

In fine si può osservare che in tutti questi studii noi abbiamo sempre ammesso che le funzioni f_i che figurano nei secondi membri delle (1) soddisfino alla condizione di Lipschitz; ma i risultati ottenuti valgono evidentemente anche in casi nei quali questa condizione non sia soddisfatta, bastando ammettere che gli accrescimenti delle stesse funzioni f_i rispetto alle $y_1, y_2, ..., y_m$ tendano a zero di ordini inferiori al primo ma in modo sempre da potere ancora assicurare che le quantità $y_{i,n}$ convergono in ugual grado verso i loro limiti, o che la serie (3) converge in ugual grado, ecc.

XXI.

Gli integrali delle equazioni differenziali considerati come funzioni dei loro valori iniziali

345. — Vogliamo ora studiare le proprietà degli integrali $y_1, y_2, ..., y_m$ delle solite equazioni differenziali (1) del § 339, in relazione ai valori iniziali $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{m,0}$ della variabile x e degli integrali $y_1, y_2, ..., y_m$, quando questi valori iniziali si fanno variare nel solito campo C nel quale le funzioni $f_1, f_2, ..., f_i, ..., f_m$ dei secondi membri delle equazioni differenziali sono finite e continue, e inoltre soddisfano alla solita condizione di Lipschitz rispetto alle $y_1, y_2, ..., y_m$; nel qual caso già sappiamo che gli integrali stessi esistono certamente e sono unici.

Prima però conviene premettere alcune considerazioni intorno alle equazioni della forma

$$\theta(x) = \mathrm{B}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}(x)\,\theta(x)\,dx, \tag{1}$$

e più generalmente intorno ai sistemi di m equazioni della forma

$$\left\{\begin{array}{l}
\theta_1 = \mathrm{B}_1 + \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{1,1}\theta_1 + \mathrm{A}_{1,2}\theta_2 + \dots + \mathrm{A}_{1,m}\theta_m\}\,dx, \\
\theta_2 = \mathrm{B}_2 + \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{2,1}\theta_1 + \mathrm{A}_{2,2}\theta_2 + \dots + \mathrm{A}_{2,m}\theta_m\}\,dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\theta_i = \mathrm{B}_i + \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{i,1}\theta_1 + \mathrm{A}_{i,2}\theta_2 + \dots + \mathrm{A}_{i,m}\theta_m\}\,dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\theta_m = \mathrm{B}_m + \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{m,1}\theta_1 + \mathrm{A}_{m,2}\theta_2 + \dots + \mathrm{A}_{m,m}\theta_m\}\,dx,
\end{array}\right. \tag{2}$$

dove le θ_i sono funzioni della x per le quali anche se sono incognite si ammette però di sapere che esistono e che sono tutte sempre numericamente inferiori a un numero finito $\overline{\Theta}$ pei valori di x che si considerano; e le $A_{r,s}$ e B_s sono funzioni date di x e talvolta anche delle stesse $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ e di altri parametri indipendenti da x, e sono sempre tutte numericamente inferiori a numeri finiti $\overline{A}$ e $\overline{B}$ pei valori che si considerano di x e delle θ_i e dei parametri che contenessero; e tutte le θ_i come le $A_{r,s}$ e B_s sono anche continue o almeno sono atte alla integrazione rispetto ad x quando per le θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_m$ che figurassero nelle $A_{r,s}$ e B_s vi si intendano posti i loro valori.

Cambiamo per comodo in queste formole, sotto gli integrali, la variabile d'integrazione x in x_1 e poi, considerando per es. la i^a di queste equazioni, nell'integrale che vi comparisce sostituiamo alle $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ che compariscono a moltiplicare le $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,m}$ i valori dati dalle formole stesse quando in esse la variabile x si muta in x_1 e quella sotto gl'integrali per comodo si muta in x_2. Giungeremo così a una formola della forma

$$\theta_i = B_i + B_{i,1} + C_{i,1},$$

dove

$$B_{i,1} = \int_{x_0}^{x} (A_{i,1} B_1 + A_{i,2} B_2 + \ldots + A_{i,m} B_m)_{x_1} \, dx_1,$$

$$C_{i,1} = \sum_{s=1}^{s=m} \int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} \, dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,1}\theta_1 + A_{s,2}\theta_2 + \ldots + A_{s,m}\theta_m)_{x_2} \, dx_2,$$

per modo che θ_i si comporrà, oltre che di B_i, degli m integrali semplici che costituiscono $B_{i,1}$, ciascuno della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s} B_s)_{x_1} \, dx_1, \tag{3}$$

e degli m^2 integrali doppii che costituiscono $C_{i,1}$ ciascuno della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} \, dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,s_1} \theta_{s_1})_{x_2} \, dx_2; \tag{4}$$

gli indici x_1 o x_2 alle parentesi stando a indicare che nelle quantità in esse contenute alla variabile x viene sostituita x_1 o x_2.

Ognuno di questi m^2 integrali doppii (4) alla sua volta colla stessa sostituzione per le $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ darà luogo in modo simile a un integrale doppio

della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} \, dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,s_1} B_{s_1})_{x_2} \, dx_2, \tag{5}$$

e a m integrali tripli ciascuno della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} \, dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,s_1})_{x_2} \, dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (A_{s_1,s_2} \theta_{s_2})_{x_3} \, dx_3, \tag{6}$$

e quindi si avrà ora

$$\theta_i = B_i + B_{i,1} + B_{i,2} + C_{i,2},$$

dove $B_{i,2}$ sarà la somma di m^2 integrali doppii della forma (5), e $C_{i,2}$ la somma di m^3 integrali tripli tutti della forma (6).

Ripetendo dunque successivamente queste operazioni si giungerà alla formola seguente

$$\theta_i = B_i + B_{i,1} + B_{i,2} + \ldots + B_{i,p} + C_{i,p}, \tag{7}$$

dove in generale le $B_{i,t}$ saranno le somme di m^t integrali dell'ordine t tutti della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,s_1})_{x_2} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (A_{s_1,s_2})_{x_3} dx_3 \int_{x_0}^{x_3} \ldots \int_{x_0}^{x_{t-1}} (A_{s_{t-2},s_{t-1}} B_{s_{t-1}})_{x_t} \, dx_t \tag{8}$$

e le $C_{i,p}$ saranno la somma di m^{p+1} integrali d'ordine $p+1$, tutti della forma

$$\int_{x_0}^{x} (A_{i,s})_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (A_{s,s_1})_{x_2} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (A_{s_1,s_2})_{x_3} dx_3 \int_{x_0}^{x_3} \ldots \int_{x_0}^{x_{p-1}} (A_{s_{p-2},s_{p-1}})_{x_p} dx_p \int_{x_0}^{x_p} (A_{s_{p-1},s_p} \theta_{s_p})_{x_{p+1}} dx_{p+1}; \tag{9}$$

dove $s, s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s_p$ sono numeri presi comunque fra i numeri $1, 2, 3, \ldots, m$; e ora si giungerà subito alla formola che cerchiamo.

Si osservi infatti che siccome, per le nostre ipotesi, tutte le θ_i, $A_{r,s}$ e B_s saranno numericamente inferiori ai numeri $\overline{\Theta}$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$, se si suppone per es. $x > x_0$ si vede subito che l'integrale multiplo (9) sarà numericamente inferiore al termine $\overline{\Theta}\,\overline{A}^{p+1} \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{x_0}^{x_p} dx_{p+1}$ cioè a $\dfrac{\overline{\Theta}\,\overline{A}^{p+1} (x - x_0)^{p+1}}{\pi(p+1)}$, e quindi $C_{i,p}$ sarà numericamente inferiore al termine $\dfrac{\overline{\Theta}\, \{m \overline{A} (x - x_0)\}^{p+1}}{\pi(p+1)}$ che è quello di una serie esponenziale, e tende a zero al crescere indefinito di p. Al modo stesso poi si trova che gli integrali (8) sono numericamente inferiori a $\frac{\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{A}}^t (x-x_0)^t}{\pi(t)}$, e quindi le $\mathrm{B}_{i,t}$ sono numericamente inferiori a $\frac{\overline{\mathrm{B}}\{m\overline{\mathrm{A}}(x-x_0)\}^t}{\pi(t)}$ o anche, come si vede facilmente, a $\frac{\overline{\mathrm{B}}\{\mathrm{A}(x-x_0)\}^t}{\pi(t)}$, essendo A la massima delle somme $|\mathrm{A}_{i,1}|+|\mathrm{A}_{i,2}|+\ldots+|\mathrm{A}_{i,m}|$ dei valori assoluti delle $\mathrm{A}_{i,1}, \mathrm{A}_{i,2} \ldots \mathrm{A}_{i,m}$ per $i=1,2,\ldots,m$; quindi si può ora evidentemente concludere che le funzioni θ_i che soddisfano alle equazioni date (2) sono espresse tutte per mezzo delle serie convergenti

$$\theta_i = \mathrm{B}_i + \mathrm{B}_{i,1} + \mathrm{B}_{i,2} + \ldots + \mathrm{B}_{i,p} + \ldots \tag{10}$$

per $i=1,2,\ldots,m$, dove in generale le $\mathrm{B}_{i,t}$ sono le somme di m^t integrali multipli di ordine t, ciascuno della forma dell'integrale (8); e queste serie (10) convergono tutte come la serie esponenziale $\overline{\mathrm{B}}\sum_0^\infty \frac{\{\mathrm{A}(x-x_0)\}^t}{\pi(t)}$, e quindi sono anche convergenti in ugual grado rispetto a tutte le quantità che contengono; e il loro valore cioè *il valore delle θ_i è sempre numericamente inferiore a* $\overline{\mathrm{B}}\,e^{\mathrm{A}(x-x_0)}$, e quindi se $\overline{\mathrm{B}}$ sarà piccolissimo, le stesse Θ_i saranno dell'ordine di piccolezza di $\overline{\mathrm{B}}$.

In particolare se le B_i sono tutte zero, e le A_i soddisfano ancora a tutte le condizioni che abbiamo poste, le formole precedenti ci mostrano che le funzioni θ_i che soddisfano alle (2) sono necessariamente tutte zero anch'esse.

346. — È da osservare però che quando nelle (2) tutte o alcune della quantità B_s e $\mathrm{A}_{r,s}$ contengono una o più delle funzioni $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ e queste sono incognite, la formola (10) non può servire alla determinazione delle θ_i, perchè i termini della serie del secondo membro vengono a contenere le stesse incognite θ_i sotto gli integrali che figurano nei termini stessi; ma in ogni modo la stessa formola (10) per $i=1,2,\ldots,m$ dà relazioni notevoli che servono per dimostrare proprietà speciali delle nostre funzioni, come vedremo fra breve.

Invece nel caso particolare in cui le stesse quantità B_s e $\mathrm{A}_{r,s}$ non contengono le θ_i, i termini del secondo membro della (10) sono perfettamente conosciuti, e quindi allora la formola stessa per $i=1,2,\ldots,m$ dà le espressioni analitiche delle funzioni $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ che soddisfano alle (2), e mostra anche che queste funzioni sono uniche.

E così nel caso più semplice di una sola equazione, cioè quando si ha

$$\theta(x) = \mathrm{B}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}(x)\,\theta(x)\,dx, \tag{11}$$

poichè allora la formola (10) diviene la seguente

$$\theta(x) = \mathrm{B}(x) + \int_{x_0}^{x} (\mathrm{AB})_{x_1} dx_1 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{AB})_{x_2} dx_2 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{A}_{x_2} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (\mathrm{AB})_{x_3} dx_3 + \ldots, \tag{12}$$

questa, quando $\mathrm{A}(x)$ e $\mathrm{B}(x)$ non contengono θ dà una espressione analitica $\theta(x)$ della funzione che soddisfa alla (11). E quando $\mathrm{B}(x)$ sia anche finita e continua e derivabile, questa espressione (12) si riduce con tutta facilità alla formola che ordinariamente si dà per l'integrale della equazione lineare del prim'ordine $\theta' = \mathrm{B}'(x) + \mathrm{A}(x)\theta$, che noi studieremo più avanti.

Se poi si osserva che questa formola (12) a causa della convergenza in ugual grado della serie ci dà

$$\theta(x) = \mathrm{B}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}_{x_1} \left\{ \mathrm{B}_{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{AB})_{x_2} dx_2 + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{A}_{x_2} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (\mathrm{AB})_{x_3} dx_3 + \ldots \right\} dx_1,$$

e quindi si ha la formola $\theta(x) = \mathrm{B}(x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{A}(x_1)\,\theta(x_1)\,dx_1$, e in questa $\theta(x_1)$ è la funzione stessa del primo membro, data dalla (12), nella quale è soltanto cambiato x in x_1, si deduce di qui che la funzione medesima (12) soddisfa effettivamente alla (11), e questo, nel supposto sempre che $\mathrm{A}(x)$ e $\mathrm{B}(x)$ siano indipendenti da θ, basta anche a dimostrarci l'esistenza (che sopra avevamo dovuto ammettere come dimostrata avanti in qualche modo) della funzione $\theta(x)$ che soddisfa alla equazione (11).

In modo simile, sebbene più complicato, quando le B_s e $\mathrm{A}_{r,s}$ non contengono le θ_i si verificherebbe che le funzioni determinate dalle (10) per $i=1,2,\ldots,m$ soddisfano alle (2), restando così dimostrata la esistenza di queste funzioni anche in questo caso, senza bisogno di ammetterla in precedenza.

347. — È poi da notare che cambiando θ_i in $z_i + \mathrm{B}_i$ le (2) si trasformano nelle altre

$$z_i = \overline{\mathrm{B}}_i + \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{i,1} z_1 + \mathrm{A}_{i,2} z_2 + \ldots + \mathrm{A}_{i,m} z_m\}\,dx, \tag{13}$$

per $i=1,2,\ldots,m$ con $\overline{\mathrm{B}}_i = \int_{x_0}^{x} \{\mathrm{A}_{i,1}\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_{i,2}\mathrm{B}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{i,m}\mathrm{B}_m\}\,dx$, e ora evidentemente si possono eseguire le derivazioni rispetto ad x quand'anche le B_s e $\mathrm{A}_{r,s}$ per essere soltanto atte alla integrazione non siano derivabili; e per questo e perchè per $x = x_0$ si ha $z_i = 0$, la ricerca delle soluzioni di queste equazioni (13) o di quelle θ_i delle (2) corrisponde a quella degli integrali delle m equazioni che si hanno dalla formola

$$(14)\quad z'_i = A_{i,1}B_1 + A_{i,2}B_2 + \dots + A_{i,m}B_m + A_{i,1}z_1 + A_{i,2}z_2 + \dots + A_{i,m}z_m,$$

con farvi $i = 1, 2, \dots, m$, quando si fissi che i valori iniziali di questi integrali per $x = x_0$ devono essere zero.

E allora se le B_s e $A_{r,s}$ non contengono le $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, ciò che corrisponde al caso in cui queste equazioni differenziali (14) in $z_1, z_2, \dots, z_m$ sono un sistema (qualunque) di equazioni lineari, si vede subito che il metodo e le formole precedenti *dànno sotto forma perfettamente conosciuta gl'integrali delle stesse equazioni lineari*, e corrispondono precisamente al metodo e alle formole di Picard; e quindi se avessimo potuto limitarci a considerare questo caso, avremmo anche potuto valerci del processo di Picard per giungere alle (10) senza bisogno di ricorrere al processo precedente di sostituzioni successive.

E si può anche aggiungere che se le B_s saranno finite e continue e derivabili, e si esse che le $A_{r,s}$ conterranno soltanto la x, allora, senza stare a introdurre le z_i, potremo dire senz'altro che la ricerca delle soluzioni delle equazioni (2) corrisponde a quella degli integrali delle equazioni lineari che si hanno dalla formola

$$\theta'_i = B'_i + A_{i,1}\theta_1 + A_{i,2}\theta_2 + \dots + A_{i,m}\theta_m$$

con farvi $i = 1, 2, \dots, m$, quando si fissi che i valori iniziali di questi integrali debbano essere i valori delle $B_1, B_2, \dots, B_m$ per $x = x_0$ che potranno anche essere dati arbitrariamente.

348. – Tenendo conto ora dei risultati generali che qui abbiamo ottenuti, lo studio che vogliamo fare degli integrali delle solite equazioni (1) del § 339 considerati come funzioni dei valori iniziali $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$ si fa con tutta facilità.

Indichiamo infatti con $y_1, y_2, \dots, y_m$ gli integrali che già sappiamo esistere corrispondenti ai valori iniziali $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$, e con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$, quelli corrispondenti agli altri valori iniziali $x_0+\varepsilon, y_{1,0}+\delta_1, y_{2,0}+\delta_2, \dots, y_{m,0}+\delta_m$ considerandoli sempre finchè restano nel solito campo C.

Per gli integrali corrispondenti all'indice i avremo

$$y_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\, dx,$$

$$\bar{y}_i = y_{i,0} + \delta_i + \int_{x_0+\varepsilon}^{x} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)\, dx = y_{i,0} + \delta_i - \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)\, dx + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)\, dx,$$

e quindi sarà

$$\bar{y}_i - y_i = \delta_i + \eta_i L_i \varepsilon + \int_{x_0}^{x} \{ f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \}\, dx,$$

essendo η_i un numero compreso fra -1 e 1, e L_i un numero del quale sia sempre numericamente inferiore la funzione f_i nel campo C; e per la condizione di Lipschitz potremo scrivere

$$(15)\quad \bar{y}_i - y_i = \delta_i + \eta_i L_i \varepsilon + \int_{x_0}^{x} \{ A_{i,1}(\bar{y}_1 - y_1) + A_{i,2}(\bar{y}_2 - y_2) + \dots + A_{i,m}(\bar{y}_m - y_m) \}\, dx,$$

per $i = 1, 2, \dots, m$, e avremo così m formole del tutto simili alle (2) nelle quali le quantità corrispondenti alle B_i sono quelle arbitrariamente piccole $\delta_i + \eta_i L_i \varepsilon$ e le quantità corrispondenti alle θ_i sono le $\bar{y}_i - y_i$; e questo, pei risultati ottenuti sopra, porta evidentemente a dire che *le differenze $\bar{y}_i - y_i$ sono dell'ordine di piccolezza della massima delle quantità $|\delta_r| + L_r|\varepsilon|$ per $r = 1, 2, \dots, m$, e che gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_m$ sono continui anche rispetto ai valori iniziali $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$.*

349. — Se poi si ammette che le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ abbiano le derivate parziali di prim'ordine rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_m$ sempre finite e continue nel solito campo C, e si suppone che siano nulli ε e tutte le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ all'infuori di una di esse, per es. δ_t, allora le formole precedenti (15) dànno luogo alle m che risultano dalla seguente

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\delta_t} = g_i + \int_{x_0}^{x} \left\{ A_{i,1}\frac{\bar{y}_1 - y_1}{\delta_t} + A_{i,2}\frac{\bar{y}_2 - y_2}{\delta_t} + \dots + A_{i,m}\frac{\bar{y}_m - y_m}{\delta_t} \right\} dx,$$

col farvi $i = 1, 2, \dots, m$, e nelle quali si ha $g_i = 0$ per i diverso da t e $g_i = 1$ per $i = t$, e le $A_{i,s}$ sono le derivate di $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ rispetto a y_s in punti che, a causa della continuità già dimostrata delle $y_1, y_2, \dots, y_m$ rispetto ai valori iniziali, all'impiccolire indefinito della δ_t convergono, e in modo uniforme per tutti i valori di x durante la integrazione, verso il punto $(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$, per modo che al limite divengono le derivate parziali in questo punto.

Si hanno così m equazioni come le (2) nelle quali alle θ_s corrispondono ora i rapporti incrementali $\frac{\bar{y}_s - y_s}{\delta_t}$ e le $B_1, B_2, \dots, B_m$ sono tutte zero all'infuori della B_t che è uguale ad uno, e in queste, per quanto osservammo sopra sulle differenze $\bar{y}_i - y_i$, i rapporti incrementali $\frac{\bar{y}_s - y_s}{\delta_t}$ esistono e sono, come le θ_s delle formole (2), sempre numericamente inferiori a una quantità finita; quindi pei risultati generali del § 345, cioè per la formola (10), si conclude che i rapporti incrementali $\frac{\bar{y}_1 - y_1}{\delta_t}$, $\frac{\bar{y}_2 - y_2}{\delta_t}$, ..., $\frac{\bar{y}_m - y_m}{\delta_t}$ sono dati da serie convergenti in egual grado anche rispetto a δ_t negli intorni del valore $\delta_t = 0$.

Questo, per un teorema generale noto, basta per potere affermare che *esistono le derivate parziali di prim'ordine degli integrali $y_1, y_2, ..., y_m$ delle equazioni date rispetto ai valori iniziali $y_{1.0}, y_{2.0}, ..., y_{m.0}$ quando le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m)$ sono finite e continue insieme alle loro derivate prime rispetto a $y_1, y_2, ..., y^m$ nel solito campo* C; e per ciascuna di queste derivate se ne può avere anche una espressione in serie per mezzo della (10) pei varii valori $1, 2, ..., m$ di i, poichè per es. per la derivata rispetto a $y_{t.0}$ basterà fare nella stessa (10) le $B_1, B_2, ..., B_m$ tutte uguali a zero all'infuori della B_t che sarà fatta uguale ad uno, e passare al limite in ogni termine per $\delta_t = 0$, ciò che porta che si debba intendere che nella formola stessa le $A_{i,s}$ siano le derivate della $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m)$ rispetto a y_s nel punto $(x, y_1, y_2, ..., y_m)$.

350. — In particolare quindi nel caso semplice della equazione

$$y' = f(x, y),$$

per le derivate dell'integrale rispetto a y_0 si ha la formola

$$D_{y_0} y = 1 + \int_{x_0}^{x} (f'_y)_{x_1} dx_1 + \int_{x_0}^{x} (f'_y)_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (f'_y)_{x_2} dx_2 + \int_{x_0}^{x} (f'_y)_{x_1} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} (f'_y)_{x_2} dx_2 \int_{x_0}^{x_2} (f'_y)_{x_3} dx_3 + \cdots$$

e in questo caso, per quanto dicemmo sopra, questa formola varrà anche se la derivata f'_y di $f(x, y)$ nel solito campo C pure essendo ancora sempre determinata e finita sarà soltanto atta alla integrazione rispetto ad x quando in essa si pone per y la funzione integrale, se i rapporti incrementali che servono a determinarla convergeranno verso di essa in ugual grado pei varii valori di x durante l'integrazione, o se saranno soddisfatte altre condizioni che potrebbero facilmente trovarsi. E in certi casi la formola stessa varrà anche quando la derivata f'_y sia infinita per alcuni valori di x.

Da questa formola poi a causa della convergenza in ugual grado della serie si dedurrà subito la formola

$$D_{y_0} y = 1 + \int_{x_0}^{x} f'_y(x_1, y_1) D_{y_0} y_1 \, dx_1 = 1 + \int_{x_0}^{x} f'_y(x, y) D_{y_0} y \, dx,$$

che resta così dimostrata anche pel caso testè indicato in cui $f'_y(x, y)$ non

sia finita e continua, senza bisogno di ricorrere al teorema della derivazione sotto il segno nella formola $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y) \, dx$.

351. — Tornando al caso generale di m funzioni, e supponendo senz'altro che le derivate prime rispetto alle $y_1, y_2, ..., y_m$ delle $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m)$ siano finite e continue, e indicando per semplicità di scrittura con $y'_{k,t}$ la derivata $\frac{\partial y_k}{\partial y_{t.0}}$ di y_k rispetto a $y_{t.0}$, il teorema della derivazione sotto il segno integrale ci darà subito la formola

$$y'_{i,t} = g_{i,t} + \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial y_1} y'_{1,t} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} y'_{2,t} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} y'_{m,t} \right\} dx,$$

dove $g_{i,t} = 0$ per i diverso da t ed è uguale a 1 per $i = t$; e ora considerando anche i valori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m$ degli integrali corrispondenti a un punto iniziale nel quale siano variati uno o più dei valori iniziali $y_{1.0}, y_{2.0}, ..., y_{m.0}$, per es. soltanto il valore $y_{s,0}$, colla formola ora trovata avremo subito anche la derivata corrispondente $\bar{y}'_{i,t}$ di $\bar{y}_i$ rispetto a $y_{t.0}$.

Senza difficoltà quindi si determineranno anche le formole per le m differenze $\bar{y}'_{1,t} - y'_{1.t}, \bar{y}'_{2.t} - y'_{2.t}, ..., \bar{y}'_{m,t} - y'_{m,t}$ le quali ci daranno poi anche quelle pei rapporti incrementali $\frac{\bar{y}'_{1,t} - y'_{1,t}}{\delta_s}$, $\frac{\bar{y}'_{2.t} - y'_{2.t}}{\delta_s}$, ..., $\frac{\bar{y}'_{m,t} - y'_{m,t}}{\delta_s}$; e nelle prime di queste formole ogni termine sotto l'integrale, come per es. l'r_0, sarà l'accrescimento $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_r} \bar{y}'_{r,t} - \frac{\partial f_i}{\partial y_r} y'_{r,t}$ ovvero $\left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_r} - \frac{\partial f_i}{\partial y_r}\right) \bar{y}'_{r,t} + \frac{\partial f_i}{\partial y_r} (\bar{y}'_{r,t} - y'_{r,t})$; quindi pei risultati del § 345 se ne dedurrà subito che le differenze $\bar{y}'_{i,t} - y'_{i,t}$ sono dell'ordine di piccolezza della massima fra le altre differenze $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_r} - \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_r}$, e questo permetterà intanto di dire che le derivate $y'_{i,t}$ sono anche funzioni continue dei valori iniziali (il che risulta anche dalle loro espressioni analitiche essendo date in serie convergenti in ugual grado rispetto a tutte le quantità che contengono).

Ammettendo poi che per le $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_m)$ esistano anche le derivate parziali del second'ordine rispetto alle $y_1, y_2, ..., y_m$ e siano finite e continue, le formole stesse, sempre pei risultati del § 345, porteranno a dire che le differenze $\bar{y}'_{t,i} - y'_{i,t}$ sono dell'ordine di piccolezza delle altre differenze $\bar{y}_r - y_r$ e quindi della δ_s, per modo che i rapporti incrementali $\frac{\bar{y}'_{i,t} - y'_{i,t}}{\delta_s}$ sono tutti sempre numericamente inferiori a un numero finito; e così avendosi ora formole simili alle (2) che al posto delle θ_r contengono i rapporti incrementali $\frac{\bar{y}'_{r.t} - y'_{r.t}}{\delta_s}$ delle derivate prime $y'_{r.t}$, si concluderà nel solito modo che, sotto le condizioni poste, esistono anche le derivate parziali del second'ordine degli integrali rispetto ai soliti valori iniziali.

Considerando poi ad es. la derivata seconda $\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_{t.0} \partial y_{\tau.0}}$ degli integrali y_i presa rispetto a $y_{t.0}$ e a $y_{\tau.0}$, e partendo dalla formola che si ottiene da quella scritta sopra per $y'_{i.t}$ con applicarvi la derivazione sotto il segno integrale rispetto a $y_{t.0}$, con ragionamenti simili potremo dimostrare prima la continuità delle stesse derivate seconde degli integrali rispetto ai loro valori iniziali, e poi si dimostrerà l'esistenza delle derivate terze quando le $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ abbiano anche le derivate parziali del terz'ordine rispetto alle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ e queste siano finite e continue; e ora così continuando si giungerà a concludere in generale che, *quando*, nelle solite equazioni differenziali date, *le* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *ammettono le derivate parziali rispetto alle* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *finite e continue almeno fino a quelle dell'ordine* k, *altrettanto avviene delle derivate degli integrali rispetto ai valori iniziali* $y_{1.0}, y_{2.0}, \ldots, y_{m.0}$ *fino a quelle dell'ordine* k.

E nel caso in cui le equazioni differenziali date si riducono alla unica $y' = f(x, y)$, allora per le ultime derivate d'ordine k rispetto ad y di $f(x, y)$ che si considerano non importerà neppure richiedere che siano finite e continue, ma basterà che siano finite e atte alla integrazione quando i rapporti incrementali che servono a determinarle convergano in ugual grado verso i valori delle derivate stesse, ecc. (*).

352. — Vogliamo infine considerare anche il caso in cui le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ contengono altre quantità *(parametri)* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ che restano costanti durante l'integrazione, ma alle quali possono attribuirsi valori arbitrarii in un campo Γ ad esse relativo come se fossero altre variabili, mentre le f_i per tutti questi valori di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ continuano a soddisfare alla condizione di Lipschitz rispetto alle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nel campo C;

(*) Il prof. Nicoletti, che il primo ebbe a studiare «*gli integrali delle equazioni differenziali considerati come funzioni dei loro valori iniziali*» nei Rendiconti dell'Accad. dei Lincei del 15 dicembre 1895, si limitò a considerare il caso in cui le derivate di ordine più alto delle funzioni f_i che occorre di considerare soddisfano ancora alle condizioni di Lipschitz rispetto alle $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Dopo, altri geometri, fra i quali Peano, Lindelöf, Escherich, Darboux, Lichtenstein e altri, considerarono il caso in cui questa condizione non viene posta e si richiede soltanto la continuità delle stesse derivate.

e vogliamo studiare come si comportino gli integrali rispetto a queste quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ quando le funzioni f_i, che ora indicheremo con $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)$, considerate come funzioni di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ sono sempre finite e continue rispetto a queste quantità per tutti i valori di esse nel campo Γ e per tutti i valori delle $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ nel campo C.

Osserviamo perciò che, per ogni sistema di valori particolari $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, per l'integrale stesso y_i avremo

$$y_i = y_{i.0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m\ , a_1, a_2, \ldots, a_\mu)\, dx\,,$$

e indicando con $\bar{y}_i$ il valore dell'integrale stesso che corrisponde ai valori cambiati $a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_\mu+h_\mu$ di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ avremo

$$\bar{y}_i = y_{i.0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m\ , a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_\mu+h_\mu)\, dx\,,$$

e per la nostra ipotesi tanto i punti $(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ corrispondenti ai primi integrali quanto gli altri $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ corrispondenti ai nuovi integrali saranno compresi nel campo C.

Facendo la differenza di questi valori potremo scrivere

$$\bar{y}_i - y_i = \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m, a_1+h_1, \ldots, a_\mu+h_\mu) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_\mu+h_\mu) dx + \right.$$
$$\left. + \int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_\mu+h_\mu) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1, a_2, \ldots, a_\mu) \right\} dx\,, \right.$$

e tenendo conto della condizione di Lipschitz per trasformare il primo integrale e indicando con B_i il secondo, avremo subito una formola della forma

$$(16)\quad \bar{y}_i - y_i = B_i + \int_{x_0}^{x} \left\{ A_{i.1} |\bar{y}_1 - y_1| + A_{i.2} |\bar{y}_2 - y_2| + \ldots + A_{i.m} |\bar{y}_m - y_m| \right\} dx\,,$$

che varrà per $i = 1, 2, \ldots, m$ e nella quale, per la ipotesi fatta che le f_i siano finite e continue anche rispetto ai parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, le B_i saranno tutte numericamente inferiori a un numero arbitrariamente piccolo dato quando le $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ saranno prese sufficientemente piccole.

Così evidentemente per le $\bar{y}_i - y_i$ avremo ancora un sistema di m equazioni come le (2) nelle quali le B_i saranno arbitrariamente piccole quando siano prese sufficientemente piccole le $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$, e questo pei risultati generali ottenuti nel § 345 mostra intanto che sotto le nostre ipotesi *gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_m$ saranno funzioni finite e continue anche rispetto ai parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ nel loro campo Γ.*

353. — Ammettiamo ora che per le funzioni $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)$ esistano le derivate parziali di prim'ordine rispetto alle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ e quelle rispetto a alcuni o a tutti i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$; e tutte queste derivate siano finite e continue rispetto alle variabili $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ e al parametro rapporto al quale le ultime di esse sono prese.

Allora, supposto ad es. che le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s}$ che potremo indicare con f_{i,α_s} siano fra quelle che esistono per tutte le funzioni f_i, basterà prendere uguali a zero tutte le $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ all'infuori della h_s per ottenere subito dalla (16) la formola seguente

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{h_s} = \bar{B} + \int_{x_0}^{x} \left\{ A_{i,1} \left| \frac{\bar{y}_1 - y_1}{h_s} \right| + A_{i,2} \left| \frac{\bar{y}_2 - y_2}{h_s} \right| + \ldots + A_{i,m} \left| \frac{\bar{y}_m - y_m}{h_s} \right| \right\} dx,$$

nella quale avremo

$$\bar{B} = \int_{x_0}^{x} f_{i,\alpha_s}(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1, a_2, \ldots, a_s + \eta_s h_s, \ldots, a_\mu)\, dx,$$

con η_s numero compreso fra 0 e 1; e le $A_{i,t}$ per $t = 1, 2, \ldots, m$ saranno le derivate di f_i rispetto a y_t in punti vicinissimi al punto $(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1, a_2, \ldots, a_\mu)$, e a causa della supposta continuità in queste derivate e nelle altre $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s}$ rispetto al parametro α_s, le stesse $A_{i,t}$, come la f_{i,α_s} nell'integrale che figura in $\bar{B}$, al tendere di h_s a zero convergeranno in modo uniforme pei varii valori di x durante la integrazione verso le derivate corrispondenti nello stesso punto $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_\mu)$; quindi sempre pei risultati generali ottenuti nel § 345 la derivata di y_i rispetto ad α_s esisterà e inoltre avremo

$$\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_s} = \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \alpha_s} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_s} \right\} dx,$$

le derivate venendo tutte prese nel punto $(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1, a_2, \ldots, a_\mu)$.

Con procedimenti simili si trova che per gli integrali y_i e per le loro

derivate rispetto ai valori iniziali esistono anche le derivate degli ordini superiori rispetto ai parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ quando le f_i ammettano le derivate rispetto alle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ e alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ fino a quegli ordini pei quali occorre di considerarle, supponendo che anche le ultime di queste derivate siano finite e continue.

E propriamente per le derivate di ordine più alto relativo alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ la continuità non è neppure sempre necessaria bastando che siano finite e integrabili, e che i rapporti incrementali che servono a determinarle convergano in modo uniforme verso le derivate medesime pei varii valori di x durante le integrazioni.

354. — Aggiungiamo che i risultati dei §§ 348 e 352 uniti a quelli generali del § 345 conducono con tutta facilità anche a determinare i limiti superiori delle variazioni che ricevono gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_m$ quando si mutano i loro valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}$ o quelli dei parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$.

Così ad es. fermandoci sul caso in cui si mutino soltanto i parametri, quando le funzioni f_i per $i = 1, 2, \ldots, m$ hanno le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_m}$ sempre numericamente inferiori a un numero finito, si può osservare che se, lasciando fermi i valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}$, si mutano di $h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, si vede subito che le variazioni corrispondenti di ciascuno degli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sono tutte numericamente inferiori o al più uguali a $\bar{B}\, e^{A(x-x_0)}$, essendo $\bar{B}$ il massimo valore assoluto degli integrali

$$\int_{x_0}^{x} \left\{ f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_\mu + h_\mu) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, a_1, a_2, \ldots, a_\mu) \right\} dx$$

per $i = 1, 2, \ldots, m$, e essendo A la massima delle somme $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_m}\right|$ dei valori assoluti delle derivate $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_m}$ per $i = 1, 2, \ldots, m$ quando le $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sono sempre comprese nel campo C, e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono comprese nel campo Γ.

E in questo caso se le f_i ammetteranno anche le derivate rispetto ai parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, e queste derivate nei soliti campi C e Γ saranno tutte numericamente inferiori a un certo numero finito Λ, allora pel numero $\bar{B}$ potremo prendere $\Lambda \{ |h_1| + |h_2| + \ldots + |h_m| \} (x - x_0)$.

Questa osservazione potrà riuscire utilissima pei casi nei quali per valori particolari $a_1, a_2, \dots, a_\mu$ dei parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ le equazioni date (*) si presentino sotto forme tali che per esse gli integrali corrispondenti $y_1, y_2, \dots, y_m$ si determinino con facilità; perchè allora determinati questi ultimi integrali si avranno dei limiti fra i quali sono compresi i valori degli integrali di quelle equazioni che corrispondono agli altri valori $a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_\mu+h_\mu$ degli stessi parametri.

355. — Prima di lasciare questi studii osserviamo anche che i risultati generali ottenuti nel § 345 dànno immediatamente un'altra dimostrazione semplicissima della unicità degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_m$ delle equazioni differenziali che corrispondono a un dato sistema dei loro valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$ per $x=x_0$, quando per le stesse equazioni è soddisfatta la solita condizione di Lipschitz, e i punti $(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ cadono sempre nel solito campo C.

Ammesso infatti che esistessero due di tali sistemi di funzioni integrali $y_1, y_2, \dots, y_m$ e $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$ corrispondenti agli stessi sistemi di valori iniziali $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$, allora avendosi le due formole

$$\bar{y}_i = y_{i,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)\, dx\,, \quad \text{e} \quad y_i = y_{1,0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\, dx\,,$$

per $i=1, 2, \dots, m$, se ne dedurrebbe l'altra

$$\bar{y}_i - y_i = \int_{x_0}^{x} \Big\{ f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \Big\}\, dx\,,$$

che per la condizione di Lipschitz si trasforma nella seguente

$$\bar{y}_i - y_i = \int_{x_0}^{x} \Big\{ A_{i,1}|\bar{y}_1 - y_1| + A_{i,2}|\bar{y}_2 - y_2| + \dots + A_{i,m}|\bar{y}_m - y_m| \Big\}\, dx\,,$$

e questa col farvi $i=1, 2, \dots, m$ dà luogo a un sistema di equazioni come le (2) per le quali le B_i vengono ad essere tutte zero, e quindi, per quanto dicemmo in fine del § 345, si ha $\bar{y}_i - y_i = 0$, cioè $\bar{y}_i = y_i$, il che dimostra appunto la unicità degli integrali.

(*) Così quando si abbia ad es. una equazione di Riccati $y' + ay^2 = bx^m$, con a e b costanti, della quale tratteremo in seguito a *pag.* 551, *e seg.* e il cui integrale si determina subito quando a o b sono zero, per la osservazione fatta sopra gli integrali corrispondenti a ciascuno di questi due casi ci condurranno subito a due limiti che comprendono l'integrale della equazione data pel caso di a e b diversi da zero.

356. — Infine osserviamo anche che avendosi in generale per $i=1, 2, \dots, m$

$$y_i - y_{i,0} = \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})\, dx + \int_{x_0}^{x} \Big\{ f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_m) - f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}) \Big\}\, dx\,,$$

e quindi

$$y_i - y_{i,0} = \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})\, dx + \int_{x_0}^{x} \Big\{ \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_1}(y_1 - y_{1,0}) + \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_2}(y_2 - y_{2,0}) + \dots + \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_m}(y_m - y_{m,0}) \Big\}\, dx\,,$$

essendo $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$ i soliti valori iniziali degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_m$ e $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_1}, \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_m}$ le derivate di f_i rispetto a $y_1, y_2, \dots, y_m$ in punti intermedii determinati dipendenti dalla funzione f_i e dai punti $(x, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0})$ e $(x, y_1, \dots, y_m)$, basterà valersi dei risultati generali del § 345, cioè applicare la formola (10), per giungere ad una formola generale che dà gli integrali y_i in serie d'integrali multipli.

A meno però che le equazioni differenziali date non siano lineari per modo che le $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial y_r}$ non contengano le $y_1, y_2, \dots, y_m$, i termini di queste serie saranno determinati soltanto di forma, e mentre le serie potranno servire per dare alcune proprietà degli integrali, non potranno però servire per la loro effettiva determinazione perchè conterranno nei singoli termini gli integrali stessi incogniti. Ma nel caso che le equazioni differenziali date siano lineari daranno vere e proprie espressioni analitiche in serie degli integrali medesimi in funzione della sola variabile indipendente x e dei valori iniziali $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}$, e potranno quindi riguardarsi come perfettamente conosciute. Queste espressioni analitiche per quanto dicemmo al § 347, concordano pienamente con quelle che si hanno dal metodo delle approssimazioni successive di Picard.

XXII.

Equazioni differenziali del prim' ordine

Caso delle equazioni risolute rispetto alla derivata.

357. — Gli studî che abbiamo fatto nei Capitoli precedenti, mentre mettono in evidenza l'esistenza e l'unicità dell'integrale generale delle equazioni differenziali ordinarie quando sono soddisfatte le condizioni che allora si posero, dànno in sostanza anche due processi per la determinazione approssimata dell' integrale.

Questi processi però, mentre come processi di approssimazione possono sempre applicarsi perchè permettono di calcolare valori approssimati quanto si vuole dell' integrale dando in pari tempo il grado di approssimazione corrispondente, in generale non servono a determinare la espressione analitica dell' integrale neppure sotto forma di serie, della quale si abbia o possa calcolarsi con facilità la espressione analitica del termine generale.

Questa espressione analitica però non si riesce a averla neppure con altri processi altro che in un numero limitato – ma pur sempre assai esteso – di casi nei quali, per le particolarità che presenta la equazione data, particolari considerazioni e particolari artifizî permettono di determinare l' integrale o almeno fanno scorgere la via da seguirsi per arrivare a determinarlo.

E anche in questi casi i processi che allora si hanno presentano bene spesso difficoltà grandissime per la loro applicazione pratica e restano quindi processi puramente teorici, inquantochè essi richiedono operazioni per le quali ben di sovente o non si hanno metodi pratici per compierle o si hanno soltanto metodi di approssimazione; ma, malgrado questo, i principali fra gli stessi casi presentano ancora un interesse grandissimo, anche perchè mettono in evidenza varii artifizî speciali che nella pratica possono usarsi per giungere a integrare una equazione; e la conoscenza di questi è utile perchè

in ogni parte del Calcolo integrale il più spesso bisogna appunto procedere per artifizî.

In vista di questo noi esporremo ora i principali di quei casi e i processi relativi d' integrazione, incominciando dal trattare le equazioni differenziali del prim'ordine $f(x, y, y') = 0$.

358. — Per queste equazioni quando, indicando con C una costante che possa prendersi arbitrariamente almeno entro dati limiti, si giunga a trovare con un processo qualsiasi una equazione della forma $\varphi(x, y, C) = 0$ che definisca una funzione y della x per la quale si verifichi che essa insieme alla sua derivata soddisfa identicamente alla equazione data $f(x, y, y') = 0$ qualunque sia la costante C, e sia tale inoltre che dando un valore conveniente alla costante C essa prenda un valore arbitrario y_0 per $x = x_0$, essendo il punto (x_0, y_0) compreso in un certo campo, allora la equazione trovata $\varphi(x, y, C) = 0$ sarà sempre presa da noi come l' *integrale generale* della equazione data. E ciò perchè, come dimostrammo nel capitolo precedente, l' integrale generale quale fu da noi definito nel § 316 sarà unico per ogni funzione y' definita dalla equazione data $f(x, y, y') = 0$, e quindi coinciderà colla funzione y definita dalla equazione trovata $\varphi(x, y, C) = 0$ la quale perciò potrà sempre sostituirsi all' integrale generale.

359. — Ciò premesso, prendiamo dapprima a considerare il caso in cui la equazione data $f(x, y, y') = 0$ può risolversi rispetto a y' e può ridursi quindi alla forma $M + Ny' = 0$, o all'altra coi differenziali, e relativa perciò a qualunque variabile indipendente,

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{1}$$

essendo M e N funzioni conosciute di x e y; e indichiamo i casi più comuni nei quali l' integrazione di questa equazione può effettuarsi, avvertendo che — tenendo il sistema di considerare un problema di calcolo integrale come risoluto quando sia ridotto a uno dei problemi già trattati senza far conto delle difficoltà che poi questi alla lor volta possono presentare — l' integrazione di una equazione differenziale si considererà come effettuata quando sia ridotta a fare una o più quadrature, o a un problema d'algebra.

360. — Il caso più semplice, e al quale si cerca di ridurre quasi tutti gli altri, è quello delle equazioni (1) che diconsi *a variabili separate*, cioè delle equazioni della forma

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \tag{2}$$

nelle quali la X e la Y sono funzioni respettivamente della sola x e della sola y.

Per queste evidentemente l'integrale generale è dato dalla equazione

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C\,,$$

dove C è una costante arbitraria, perchè questa colla differenziazione riconduce subito alla (2) qualunque sia la costante C, e volendo che per $x = x_0$ ci dia $y = y_0$ basta prendere $C = \left(\int X\,dx\right)_{x=x_0} + \left(\int Y\,dy\right)_{y=y_0}$, ciò che corrisponde a scrivere la equazione stessa sotto la forma

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y\,dy = 0\,.$$

361. — A questo caso poi si riduce subito l'altro della equazione

$$X\,Y\,dx + X_1\,Y_1\,dy = 0\,, \tag{3}$$

nella quale le X e X_1 e le Y e Y_1 sono funzioni della sola x e della sola y respettivamente, e le variabili non sono separate, ma *si riducono subito ad esserlo* colla divisione pel prodotto $X_1 Y$ o colla moltiplicazione pel fattore $\dfrac{1}{X_1\,Y}$.

Si giunge così alla equazione $\dfrac{X}{X_1}\,dx + \dfrac{Y_1}{Y}\,dy = 0$ che ha per integrale generale l'altra

$$\int \frac{X}{X_1}\,dx + \int \frac{Y_1}{Y}\,dy = C\,, \text{ ovvero } \int_{x_0}^{x} \frac{X}{X_1}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0\,.$$

In questo caso però quando vi siano valori particolari di x e di y che annullano X_1 e Y, col dividere pel prodotto $X_1 Y$ si vengono a togliere le soluzioni $x =$ cost. e $y =$ cost. che corrispondono a questi valori, e che soddisfano alla equazione data (3) perchè per esse si ha respettivamente $dx = 0$ e $dy = 0$. Queste soluzioni corrispondono ordinariamente a soluzioni singolari della equazione data.

362. — Diamo ora alcuni esempi di equazioni differenziali che rientrano nei casi considerati e di problemi geometrici che portano a tali equazioni.

1.° Se si ha la equazione $x\,dx + \dfrac{1}{\operatorname{sen} y}\,dy = 0$, le variabili sono separate e l'integrale generale è dato dalla equazione $\int x\,dx + \int \dfrac{dy}{\operatorname{sen} y} = C$, ovvero

$\dfrac{x^2}{2} + \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2}\,y = C$, che può anche trasformarsi nell'altra $\operatorname{tang} \dfrac{1}{2}y = C\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, cambiando e^C in C.

2.° Se si ha la equazione $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, ovvero $\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\,dx + dy = 0$, le variabili non sono separate ma si separano subito dividendo la equazione per $\sqrt{1-y^2}$, e ponendola quindi sotto la forma $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$.

Si ha così pel suo integrale generale $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} y = C$, o anche prendendo i seni dei due membri, e cambiando sen C in C

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C\,.$$

In questo caso le soluzioni che vengono escluse colla divisione sono quelle che corrispondono alle due $y = 1$ e $y = -1$ che annullano $\sqrt{1-y^2}$; e sono soluzioni singolari, come lo sono anche le due $x = 1$ e $x = -1$ alle quali corrisponde $y' = \infty$.

3.° Si vogliano le curve nelle quali il rapporto fra la normale geometrica N e la tangente geometrica T è uguale al rapporto $\dfrac{x}{y}$ fra l'ascissa e la ordinata del punto corrispondente.

Osservando che nelle curve $y = f(x)$ riferite ad assi ortogonali il *rapporto* $\dfrac{N}{T}$ *fra la normale e la tangente geometrica è sempre uguale alla derivata* y' *della* y, si può dire in generale che le curve nelle quali il detto rapporto è una funzione data $f(x, y)$ delle coordinate del punto corrispondente sono quelle che hanno la equazione differenziale $y' = f(x, y)$ che corrisponde alla equazione generale differenziale del prim'ordine risoluta rispetto alla derivata y'.

Per le curve dunque che ora cerchiamo avremo $y' = \dfrac{x}{y}$ o $dy - \dfrac{x}{y}\,dx = 0$, e in questa equazione le variabili si riducono subito separate e si giunge all'integrale $y^2 - x^2 = C$ dal quale risulta che le curve cercate sono tutte le iperbole equilatere col centro all'origine e cogli assi disposti secondo gli assi coordinati.

4.° Vogliansi le linee nelle quali la lunghezza della normale geometrica è una costante a.

Poichè, cogli assi ortogonali, la normale geometrica in una linea qualsiasi è $y\sqrt{1+y'^2}$, per la equazione differenziale delle linee cercate si avrà la seguente $y\sqrt{1+y'^2} = a$ ovvero $y^2 y'^2 = a^2 - y^2$ o $y\,dy - \sqrt{a^2 - y^2}\,dx = 0$ che divisa per

$\sqrt{a^2-y^2}$ si riduce subito all'altra $\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}dy-dx=0$ che ha le variabili separate e conduce quindi all'integrale generale $\sqrt{a^2-y^2}+x=\mathrm{C}$ ovvero $(x-\mathrm{C})^2+y^2=a^2$ che rappresenta i cerchi di raggio a col centro in un punto qualsiasi dell'asse delle x.

Vi sono poi le soluzioni che abbiamo escluse col dividere per $\sqrt{a^2-y^2}$, e queste corrispondono alle due rette $y=a$ e $y=-a$ parallele all'asse delle x che effettivamente hanno esse pure la lunghezza della normale uguale ad a in ogni punto e costituiscono l'inviluppo dei cerchi trovati; e queste soluzioni $y=a$ e $y=-a$ sono soluzioni singolari.

5.° Vogliasi anche la curva *(trattrice)* nella quale le porzioni di tangente comprese fra la curva e l'asse delle y hanno tutte una lunghezza costante a.

Essendo x l'ascissa e α l'angolo che la tangente fa coll'asse delle x e il cui coseno, cogli assi ortogonali, è $\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, sarà $x=\pm a\cos\alpha$, e quindi avremo $x=\pm\dfrac{a\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ovvero $a^2=x^2(1+y'^2)$ e $xy'-\sqrt{a^2-x^2}=0$; o anche $x\,dy-\sqrt{a^2-x^2}\,dx=0$, dove, supponendo per semplicità x positivo, al radicale $\sqrt{a^2-x^2}$ potranno attribuirsi i due segni $+$ e $-$.

In questa le variabili si separano subito dividendola per x con che si esclude la soluzione $x=0$ (asse delle y), che pel problema geometrico non è da considerarsi; e quindi integrando si avrà subito $y=\mathrm{C}+\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$.

Per eseguire la quadratura che figura in questa equazione porrèmo $x=a\,\mathrm{sen}\,t$ con $\cos t=\sqrt{a^2-x^2}$, con chè, mentre x và da 0 ad a, t andrà da 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ o da π a $\dfrac{\pi}{2}$ secondochè per $\sqrt{a^2-x^2}$ si prenderà il valore positivo o il valore negativo; e così troveremo

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=a\int\frac{\cos^2 t}{\mathrm{sen}\,t}dt=a\int\frac{dt}{\mathrm{sen}\,t}-a\int\mathrm{sen}\,t\,dt=a\log\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}t+a\cos t+\mathrm{C}_1,$$

e poichè $\mathrm{tang}\,\dfrac{1}{2}t=\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}=\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{2\cos^2\frac{1}{2}t}=\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{1+\cos t}=\dfrac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$, sarà

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=a\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}+\mathrm{C}_1,$$

e quindi la equazione della curva cercata risulterà la seguente

$$y=a\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}+\mathrm{C},$$

nella quale al variare della costante C la curva non fa che spostarsi parallelamente all'asse delle x col cambiare y in $y+\mathrm{C}$. E poichè facendo questo cambiamento di y in $\bar{y}+\mathrm{C}$, o supponendo $\mathrm{C}=0$, e osservando che per essere $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ si vede subito che il valore trovato per y nel passare di x da 0 ad a è sempre crescente o decrescente secondochè pel radicale $\sqrt{a^2-x^2}$ si prende il valore positivo o il valore negativo, e in questi casi per $x=0$ è respettivamente $-\infty$ o $+\infty$ e per $x=a$ è sempre zero, così basterà cambiare in queste formole il segno di $\sqrt{a^2-x^2}$ per avere y positivo quando, con x positivo come lo supponiamo, il radicale $\sqrt{a^2-x^2}$ è preso positivamente; e allora la equazione della curva prenderà la forma

$$y=a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2},$$

e questa rappresenterà la parte della curva a destra dell'asse delle y che è sopra o sotto all'asse delle x secondochè il radicale $\sqrt{a^2-x^2}$ è preso positivamente o negativamente.

Questa curva, alla quale già accennammo nel *Calc. diff.* a pag. 397, chiamasi *trattrice* ed ha una importanza grandissima. Osservando che per essa coi segni ora fissati per x e per $\sqrt{a^2-x^2}$ si ha la equazione differenziale $x\sqrt{1+y'^2}=a$ insieme all'altra $xy'=-\sqrt{a^2-x^2}$ la quale ci dà $xy''+y'=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ovvero $x^2y''=\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-xy'=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{a^2}{xy'}$, si vede subito che la curva è sempre convessa rispetto all'asse delle x, come lo è rispetto a quello delle y, e pel *valore assoluto* R del suo raggio di curvatura si ha $\mathrm{R}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\dfrac{a^3}{x^3y''}=-ay'$; talchè osservando che se N_1 è la lunghezza della normale compresa fra la curva e l'asse delle y si ha $a=\mathrm{N}_1\,tg\,(\widehat{\mathrm{N}_1 y})=-\mathrm{N}_1 y'$, si conclude che in valore assoluto si ha $\mathrm{R}=\dfrac{a^2}{\mathrm{N}_1}$, cioè il prodotto RN_1 è una quantità costante a^2.

Osservando dunque che nelle superficie di rivoluzione i meridiani e i paralleli sono le linee di curvatura, e i due raggi di curvatura sono il raggio di curvatura della linea meridiana e la porzione di normale della superficie compresa fra la superficie e l'asse di rotazione, presi questi raggi collo stesso segno o con segni diversi secondochè vanno nello stesso senso o in senso opposto, si vede ora che facendo ruotare la trattrice attorno all'asse delle y si ha una superficie di rivoluzione nella quale il prodotto dei raggi di curvatura è la quantità negativa $-a^2$.

E poichè nelle superficie il prodotto inverso dei raggi di curvatura presi coi loro segni è quell'elemento che si chiama *curvatura della superficie*, così si può dire che la superficie di rivoluzione ora indicata ha in ogni suo punto la curvatura costante e negativa e uguale a $-\frac{1}{a^2}$. A questa superficie è stato attribuito il nome di *pseudosfera*, tenendo conto della circostanza che nella sfera di raggio a la curvatura è pure costante in ogni punto, ma è sempre positiva e uguale ad $\frac{1}{a^2}$; ed essa ha una estrema importanza per gli studii geometrici a causa delle tante particolarità che ha che la collegano al piano e alla sfera. È appoggiandosi su queste proprietà della pseudosfera che il Beltrami nel 1868 mise in evidenza la impossibilità di dimostrare nella geometria elementare il 5.° postulato di Euclide valendosi solo degli altri postulati.

363. — Un altro caso notevole di equazioni differenziali del prim'ordine la cui equazione si riduce alle quadrature è quello delle *equazioni omogenee*, cioè delle equazioni $M\,dx + N\,dy = 0$ nelle quali M e N sono funzioni omogenee dello stesso grado in x e y.

In questo caso infatti se m è il grado di omogeneità di M e N, indicando con t una quantità qualsiasi avremo

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y), \qquad N(tx, ty) = t^m N(x, y);$$

e escludendo la soluzione $x = 0$ quando vi sia, e facendo $t = \frac{1}{x}$, si troverà

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

e quindi la equazione data potrà ridursi alla forma

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Ponendo ora $\frac{y}{x} = z$ e prendendo z come incognita, avremo $dy = z\,dx + x\,dz$, e quindi, indicando con $\overline{M}$ e $\overline{N}$ le funzioni M e N nelle quali ad x e y siano

sostituiti 1 e z, la equazione differenziale data si trasformerà subito nell'altra $(\overline{M} + \overline{N}z)\,dx + \overline{N}x\,dz = 0$, nella quale le variabili si possono separare immediatamente, e si ha quindi integrando

$$\log x + \int \frac{\overline{N}\,dz}{\overline{M} + \overline{N}z} = C; \tag{4}$$

e ora quando in qualche modo sia trovato l'integrale $\int \frac{\overline{N}\,dz}{\overline{M} + \overline{N}z}$, indicandolo con $\varphi(z)$ si avrà subito per l'integrale generale della equazione data la equazione $\log x + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C$; restando ora escluse, oltre alla soluzione $x=0$ che vi sarà quando N si annulla per $x = 0$, anche le altre $\frac{y}{x} = \alpha$ corrispondenti ai valori *costanti* α di z che annullassero la espressione $\overline{M} + \overline{N}z$.

364. — Diamo ora anche qualche esempio d'integrazione di equazioni differenziali omogenee.

1.° Debbasi integrare l'equazione omogenea del primo grado

$$x\,dx + y\,dy = 2\,n\,y\,dx, \tag{5}$$

dove n è una costante.

Applicando il processo precedente si trova subito che l'integrale generale è dato dalla equazione

$$\log x + \int \frac{z\,dz}{1 - 2\,n\,z + z^2} = C, \tag{6}$$

dove C è la solita costante, e per z dopo fatta l'integrazione dovrà essere posto $\frac{y}{x}$.

Osservando ora che si ha

$$\int \frac{z\,dz}{1-2\,n\,z+z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2z-2n)\,dz}{1-2\,n\,z+z^2} + n\int \frac{dz}{1-n^2+(z-n)^2},$$

si vede subito che per $n^2 < 1$ si può prendere sotto forma reale

$$\int \frac{z\,dz}{1-2\,n\,z+z^2} = \frac{1}{2}\log(1-2\,n\,z+z^2) + \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-n}{\sqrt{1-n^2}};$$

per $n^2 = 1$ si può prendere invece

$$\int \frac{z\,dz}{1 \pm 2\,z + z^2} = \frac{1}{2}\log(1 \pm 2\,z + z^2) \pm \frac{1}{z \pm 1},$$

e per $n^2 > 1$

$$\int \frac{z\,dz}{1-2nz+z^2} = \frac{1}{2}\log(1-2nz+z^2) + \frac{n}{2\sqrt{n^2-1}}\log\frac{z-n-\sqrt{n^2-1}}{z-n+\sqrt{n^2-1}},$$

e ora non c'è che da sostituire questi valori di $\int \frac{z\,dz}{1-2nz+z^2}$ nella (6) pei varii casi di $n^2 < 1$, $n^2 = 1$ e $n^2 > 1$, e poi al posto di z scrivere $\frac{y}{x}$ per avere l'integrale generale della (5) sempre sotto forma reale.

Le soluzioni escluse in questo caso sono soltanto le due $y = \alpha x$ e $y = \beta x$, essendo α e β le radici della equazione $1 - 2nz + z^2 = 0$ che si riducono all'unica 1 o -1 quando $n^2 = 1$, e sono reali e distinte quando $n^2 > 1$, mentre sono immaginarie quando $n^2 < 1$.

2.° Avendosi da integrare la equazione omogenea generale di primo grado

$$(ax + by)\,dx + (a'x + b'y)\,dy = 0,$$

dove a, b, a', b' sono quantità costanti, col processo precedente si troverà subito che l'integrale generale è dato dalla equazione

$$\log x + \int \frac{(a' + b'z)\,dz}{a + (b + a')z + b'z^2} = \mathrm{C},$$

dove C è la solita costante arbitraria, e dopo calcolato l'integrale in z che vi figura bisognerà porre $\frac{y}{x}$ al posto di z. Questo integrale si calcola subito con processi simili a quelli tenuti pel calcolo dell'integrale che figurava nelle formole del caso precedente.

I casi esclusi ora sono quelli di $y = \alpha x$ e $y = \beta x$, essendo α e β le radici reali o complesse della equazione $a + (b + a')z + b'z^2 = 0$ che si riducono a una sola quando $(b + a')^2 - 4ab' = 0$. E quando sia $b' = 0$ uno dei casi così esclusi si riduce a quello di $x = 0$.

3.° Vogliansi le curve per le quali il raggio vettore condotto dall'origine delle coordinate a uno qualunque dei loro punti è uguale alla porzione dell'asse delle y compresa fra l'origine e la tangente (ordinata all'origine della tangente).

Nel supposto che gli assi siano ortogonali, facendo la figura si vede subito che per queste curve deve essere soddisfatta la equazione differenziale omogenea $y\,dx - x\,dy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$, e quindi applicando il processo del paragrafo precedente si trova subito che oltre alla retta $x = 0$ (asse delle y) si hanno le curve per le quali si ha la equazione $\log x + \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \mathrm{C}$, ovvero $\log x + \log(z + \sqrt{1+z^2}) = \mathrm{C}$, nelle quali per z va posto $\frac{y}{x}$ e C è la solita costante arbitraria.

Facendo la sostituzione per z e cambiando C in log C si passa subito alla equazione $y + \sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{C}$ ovvero $x^2 = 2\mathrm{C}\left(\frac{\mathrm{C}}{2} - y\right)$, la quale dimostra che le curve cercate sono tutte parabole che hanno per asse l'asse delle y e per fuoco il punto $(x = 0, y = 0)$ dal quale partono i raggi vettori.

In questo caso poi oltre alla retta $x = 0$ (asse delle y) restano escluse le rette immaginarie $y = x\sqrt{-1}$ e $y = -x\sqrt{-1}$ per le quali è zero la solita espressione $(\mathrm{M} + \mathrm{N}z)_{z=\frac{y}{x}}$ che ora si riduce a $x^2 + y^2 = 0$.

4.° Aggiungiamo che al caso delle equazioni omogenee dell'esempio 2.° si riducono anche le equazioni non omogenee

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

quando non sia $ab' - a'b = 0$, perchè allora per ridurle omogenee basta cambiarvi x in $\alpha + x_1$ e y in $\beta + y_1$, essendo α e β due costanti determinate dalle equazioni

$$a\alpha + b\beta + c = 0,\quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Quando poi sia $ab' - a'b = 0$, allora escludendo il caso in cui manchino ambedue i binomii $ax + by$ e $a'x + b'y$ (per essere $a = b = a' = b' = 0$) nel qual caso la equazione sarebbe subito integrabile, e supponendo che uno almeno di essi per es. il primo $ax + by$ sia diverso da zero per essere diverso da zero uno almeno dei due coefficienti a e b, per es. a, allora avendosi $b' = \frac{a'b}{a}$ la equazione data si trasformerà subito nell'altra

$$(ax + by + c)\,dx + \left\{\frac{a'}{a}(ax + by) + c'\right\}dy = 0;$$

e questa se b sarà zero si ridurrà subito ad avere le variabili separate, e se b non sarà zero basterà porre $ax + by = z$ e prendere z per nuova funzione incognita per ridurre la equazione ad un'altra nella quale le variabili si separano immediatamente.

5.° Vogliansi infine le curve per le quali il rapporto fra le lunghezze della normale e della tangente geometrica è una funzione omogenea di grado zero delle coordinate.

La equazione differenziale di queste curve in coordinate ortogonali sarà $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, ovvero

$$f\left(\frac{y}{x}\right) dx - dy = 0\,,$$

e poichè questa è omogenea, per l'integrale generale e quindi per la equazione della curva avremo la equazione

$$\log x + \int \frac{dz}{z - f(z)} = \mathrm{C}\,,$$

dove C è la solita costante arbitraria, e nell'integrale in z dopo averlo eseguito si dovrà porre $\frac{y}{x}$ al posto di z.

Le soluzioni escluse saranno le rette $y = \alpha x$ essendo α i valori particolari di z pei quali $z - f(z) = 0$.

365. — Un altro caso di equazioni differenziali la integrazione delle quali si riduce alle quadrature è quello delle equazioni

(7) $$\mathrm{M}(x+y)\,dx + \mathrm{N}(x+y)\,dy = 0\,,$$

nelle quali cioè M e N sono funzioni di $x + y$.

Per queste ponendo $x + y = z$ si passa subito all'altra equazione in x e z $\{\mathrm{M}(z) - \mathrm{N}(z)\}\,dx + \mathrm{N}(z)\,dz = 0$ nella quale le variabili si separano immediatamente, e si giunge così alla equazione

$$x + \int \frac{\mathrm{N}(z)}{\mathrm{M}(z) - \mathrm{N}(z)}\,dz = \mathrm{C}$$

che dà l'integrale generale della equazione data (7) quando calcolato l'integrale in z vi si sostituisce $x + y$ al posto di z; restando però escluse le soluzioni $x + y = \alpha$ corrispondenti ai valori costanti α di z pei quali si abbia $\mathrm{M}(z) = \mathrm{N}(z)$.

Così avendo per es. la equazione

$$dx + \operatorname{sen}^2(x+y)\,dy = 0\,,$$

si troverà $x + \int \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}\,dz = \mathrm{C}$ ovvero $x - z + \operatorname{tang} z = \mathrm{C}$, e quindi l'integrale generale sarà $-y + \operatorname{tang}(x+y) = \mathrm{C}$, restando escluse le soluzioni per le

quali $x + y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con k numero intero qualsiasi, che possono anche considerarsi come casi limiti dell'integrale generale.

Equazioni lineari del prim'ordine o che si riducono a queste.

366. — Una classe interessantissima di equazioni del prim'ordine, che possono comprendersi fra quelle risolute rispetto alla derivata ma per le quali non si ha riguardo a questa particolarità, è quello delle *equazioni lineari* cioè delle equazioni nelle quali la funzione y e la sua derivata y' vi entrano soltanto al primo grado e non moltiplicate fra loro, mentre la variabile x può entrarci in un modo qualsiasi.

Tali equazioni si riducono sempre alla forma

(1) $$y' + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}\,,$$

dove P e Q sono funzioni qualsiansi di x; e per integrarle si introducono due funzioni ausiliarie θ e z ponendo $y = \theta z$ e determinandole poi convenientemente per mezzo di equazioni, lineari esse pure come la (1) ma che si possono subito integrare perchè mancano del termine corrispondente a $\mathrm{P}y$, cioè di quello che contiene la funzione, o mancano del termine noto Q.

Con questa posizione indicando con θ' e z' le derivate di θ e di z si ha $y' = \theta' z + \theta z'$ e la equazione data si trasforma nell'altra

$$\theta z' + (\theta' + \mathrm{P}\theta)\,z = \mathrm{Q}\,,$$

dalla quale si vede che volendo fare sparire il termine che contiene la funzione z, basterà determinare θ colla condizione che sia $\theta' + \mathrm{P}\theta = 0$.

Di qui si vede che θ dovrà soddisfare alla equazione $d\theta + \mathrm{P}\theta\,dx = 0$, ovvero $\frac{d\theta}{\theta} + \mathrm{P}\,dx = 0$, la quale dà subito $\log\theta = -\int \mathrm{P}\,dx + \log k$, ovvero $\theta = k e^{-\int \mathrm{P}dx}$ essendo k una costante qualsiasi diversa da zero che potrà anche prendersi uguale ad uno senz'altro; e allora determinato così il θ, la equazione precedente si riduce all'altra $z' = \frac{\mathrm{Q}}{\theta}$, che determina subito anche la z dandoci $z = \int \frac{\mathrm{Q}}{\theta}\,dx + \mathrm{C}$.

E determinate così le funzioni θ e z, si trova subito per l'integrale cercato $y = \theta\left(\int \frac{\mathrm{Q}}{\theta}\,dx + \mathrm{C}\right)$ dove $\theta = k e^{-\int \mathrm{P}dx}$; cioè si ha, cambiando la costante kC in C,

$$y = e^{-\int \mathrm{P}dx}\left\{\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx + \mathrm{C}\right\}, \tag{2}$$

dove C è la solita costante arbitraria, e l'integrale $\int \mathrm{P}dx$ è un integrale indefinito qualsiasi (cioè colla costante arbitraria presa come si vuole), e si intende che sia lo stesso (cioè colla stessa costante) tanto nel primo fattore del secondo membro quanto sotto l'integrale del secondo fattore, come era lo stesso il θ nei due fattori della espressione precedente di y.

Questa formola (2) dà l'integrale generale cercato della equazione lineare del prim'ordine (1). Ricavandone il valore di y' si trova la formola

$$y' = -e^{-\int \mathrm{P}dx}\mathrm{P}\left\{\int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx + \mathrm{C}\right\} + \mathrm{Q} = -\mathrm{P}y + \mathrm{Q},$$

e così resta anche verificato che la stessa formola (2) dà l'integrale della (1).

Notiamo che la formola (2) che dà l'integrale della (1) poteva trovarsi anche col processo detto della *variazione della costante arbitraria,* cioè osservando che per la equazione $y' + \mathrm{P}y = 0$ che manca del secondo membro l'integrale si trova subito (come si trovò sopra per la $\theta' + \mathrm{P}\theta = 0$) ed è $y = \mathrm{C}e^{-\int \mathrm{P}dx}$, dove C è la costante arbitraria; e volendo avere sotto questa stessa forma, ma allora con C variabile e scelta opportunamente, anche l'integrale della (1), cioè volendo che questa espressione di y soddisfi alla equazione data (1) si vede subito che bisogna prendere C in modo che si abbia $\frac{d\mathrm{C}}{dx}e^{-\int \mathrm{P}dx} = \mathrm{Q}$, cioè $\mathrm{C} = \int \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}dx}dx + \mathrm{C}_1$, essendo C_1 una costante arbitraria, e si ritrova così immediatamente la formola (2).

367. — Aggiungiamo che la formola (2) trovata sopra per l'integrale della equazione lineare (1) può ridursi con tutta facilità alla formola (12) del § 346 (pag. 512) che già allora dicemmo potersi riguardare come l'integrale della equazione lineare $y' = \mathrm{A}y + \mathrm{B}'$, essendo A una funzione della sola x e B' la derivata di un'altra funzione B pure della sola x.

Scriviamo infatti la (2) sotto la forma

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx} + e^{-\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}\int_{x_0}^{x}\mathrm{Q}e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}dx,$$

coll'introdurre il valore y_0 di y per $x = x_0$; e indicando con B l'integrale $\int_{x_0}^{x}\mathrm{Q}\,dx + y_0$, ciò che darà $\mathrm{Q} = \mathrm{B}'$, osserviamo che con successive integrazioni per parti, e col cambiare successivamente la variabile x in x_1, in $x_2, \ldots$ si trovano le formole seguenti

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{Q}\,e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}dx = \mathrm{B}e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx} - y_0 - \int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1}(\mathrm{BP})_{x_1}dx_1,$$

$$\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1}(\mathrm{BP})_{x_1}dx_1 = e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}\int_{x_0}^{x}(\mathrm{BP})_{x_1}dx_1 - \int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}\,dx_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{BP})_{x_2}dx_2,$$

$$\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{BP})_{x_2}dx_2 = e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{BP})_{x_2}dx_2 -$$

$$-\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_2}dx_2\int_{x_0}^{x_2}(\mathrm{BP})_{x_3}dx_3,$$

. . . . ,

le quali col sostituire successivamente nel valore scritto sopra di y, ci danno subito in serie convergente

$$y = \mathrm{B} - \int_{x_0}^{x}(\mathrm{BP})_{x_1}dx_1 + \int_{x_0}^{x}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{BP})_{x_2}dx_2 - \int_{x_0}^{x}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_2}dx_2\int_{x_0}^{x_2}(\mathrm{BP})_{x_3}dx_3 + \ldots, \tag{3}$$

perchè, se $\overline{\mathrm{B}}$ e $\overline{\mathrm{P}}$ sono i massimi valori assoluti di B e P nell'intervallo che si considera per x, il termine

$$\pm\, e^{-\int_{x_0}^{x}\mathrm{P}\,dx}\int_{x_0}^{x}e^{\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1}\mathrm{P}_{x_1}dx_1\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{P}_{x_2}dx_2\int_{x_0}^{x_2}\mathrm{P}_{x_3}dx_3 \ldots \int_{x_0}^{x_{n-1}}(\mathrm{BP})_{x_n}dx_n,$$

che per le formole precedenti dà la differenza fra y e la somma dei primi n termini di questa serie, è evidentemente inferiore in valore assoluto alla quantità $\frac{\overline{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{P}}\,|x - x_0|)^n}{\pi(n)}e^{\overline{\mathrm{P}}\,|x - x_0|}$ che col crescere indefinito di n ha per limite zero; e questo valore (3) di y dove $B = \int_{x_0}^{x} Q\,dx + y_0$ mentre ci dà un'altra forma dell'integrale della equazione lineare data (1), combina pienamente con quello dato dalla formola (12) del § 346 ricordata sopra, quando in questa si faccia $A = -P$, e s'intenda che sia $B = \int_{x_0}^{x} Q\,dx + y_0$.

368. — Per dare anche alcuni esempî di integrazione di equazioni lineari prendiamo a considerare i casi seguenti:

1.° Vogliasi l'integrale della equazione lineare

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^3. \tag{4}$$

Confrontando questa equazione colla (1) si vede che si ha $P = -\frac{2}{x}$, $Q = x^3$, e quindi si può prendere $\int P\,dx = -2\log x = -\log x^2$, $\int Q e^{\int P dx} dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, e così per la (2) l'integrale cercato della equazione data (4) viene ad essere $y = x^2\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

2.° Vogliasi l'integrale della equazione lineare

$$(1 + x^2)\,y' - xy = a, \tag{5}$$

dove a è una costante.

In questo caso si avrà $P = -\frac{x}{1+x^2}$, $Q = \frac{a}{1+x^2}$, e potremo prendere

$$\int P\,dx = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) = -\log\sqrt{1+x^2}\,,\quad \int Q e^{\int P dx} dx = a\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e poichè si ha $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ e all'ultimo integrale può applicarsi una integrazione per parti, sarà $\int Q e^{\int P dx} dx = \frac{a\,x}{\sqrt{1+x^2}}$ e così per l'integrale cercato della equazione (5) si avrà $y = ax + C\sqrt{1+x^2}$.

3.° Vogliasi l'integrale della equazione

$$y' + xy = x^2. \tag{6}$$

Col solito processo osservando che ora si ha $P = x$, $Q = x^2$, si trova per l'integrale cercato

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left\{\int e^{\frac{x^2}{2}} x^2\,dx + C\right\};$$

e se si vorrà calcolare anche l'integrale $\int e^{\frac{x^2}{2}} x^2\,dx$, pel quale i soliti processi della integrazione per parti o per sostituzione ecc. non servono, bisognerà ricorrere alla integrazione per serie.

Osservando perciò che si ha in serie convergente in ugual grado per qualunque valore di x

$$e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2\,.\,1} + \frac{x^4}{2^2.\,1\,.\,2} + \frac{x^6}{2^3.\,1\,.\,2\,.\,3} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^n\,\pi(n)} + \dots,$$

si vede subito che l'integrale $\int e^{\frac{x^2}{2}} x^2\,dx$ all'infuori di una costante è

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2\,.\,5\,.\,1} + \frac{x^7}{2^2.\,7\,.\,1\,.\,2} + \frac{x^9}{2^3.\,9\,.\,1\;\;2\,.\,3} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{2^n(2n+3)\,\pi(n)} + \dots,$$

e quindi l'integrale della equazione data (6) può scriversi sotto la forma

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left\{C + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2\,.\,5\,.\,1} + \frac{x^7}{2^2.\,7\,.\,1\,.\,2} + \frac{x^9}{2^3.\,9\,.\,1\,.\,2\,.\,3} + \dots + \frac{x^{2n+3}}{2^n(2n+3)\,\pi(n)} + \dots\right\},$$

369. — Alle equazioni lineari si possono ridurre altre equazioni, conosciute sotto il nome di *equazioni di Giov. Giac. Bernoulli,* che sono della forma

$$y' + Py = Qy^n, \tag{7}$$

dove n è diverso da zero e da uno (perchè altrimenti si ricadrebbe nel caso delle equazioni lineari), e P e Q sono funzioni qualsiansi della sola x.

Moltiplicando questa equazione per $(1-n)\,y^{-n}$ si vede subito che basta porre $y^{1-n} = z$ per ridurre la equazione stessa all'altra lineare in z

$$z' + (1-n)\,Pz = (1-n)\,Q,$$

il cui integrale è

$$z = e^{-(1-n)\int P dx}\left\{(1-n)\int Q e^{(1-n)\int P dx}\,dx + C\right\},$$

e di qui si deduce senz'altro che l'integrale generale della equazione data (7) è dato dalla formola

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int P dx} \left\{ (1-n) \int Q e^{(1-n)\int P dx} dx + C \right\},$$

o anche dall'altra

(8) $$y^{1-n} = (1-n)\, e^{-(1-n)\int P dx} \left\{ \int Q e^{(1-n)\int P dx} dx + C \right\},$$

quando si muti $\frac{C}{1-n}$ in C.

Così per es. se si avrà la equazione $y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2} y^4$, l'integrale generale sarà $y^{-3} = x^{\frac{3}{2}} \left\{ 3\, x^{-\frac{1}{2}} + C \right\} = 3x + Cx^{\frac{3}{2}}$, ovvero $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + Cx^{\frac{3}{2}}}}$.

Equazioni per le quali si conosce un integrale speciale. Equazioni di Riccati.

370. – Data una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$, o $M dx + N dy = 0$, quando essa non rientra in uno dei casi precedentemente considerati, o non si trova opportuno di valersi dei processi precedenti per integrarla, allora per vedere di trovare il suo integrale generale giova ricorrere ad artifizii speciali.

Di tali artifizii, in questa e nelle parti che seguono del presente capitolo, indicheremo i principali, che varranno però, ora gli uni ora gli altri, soltanto in casi determinati.

Incominceremo perciò dall'osservare che non è raro il caso in cui di una equazione differenziale data si giunge in qualche modo — con considerazioni speciali o anche soltanto con prove o tentativi — a conoscere uno o più suoi integrali speciali $y = y_0(x)$; come avverrà ad es. quando proponendosi di determinare curve che abbiano date particolarità relative alla tangente o alla normale per le quali alle curve stesse venga a corrispondere una certa equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$, sia già conosciuta, o con considerazioni geometriche si riesca a determinare qualche curva speciale $y = y_0(x)$ che abbia quelle date particolarità, nel qual caso si conoscerà un integrale particolare o una soluzione singolare di quella equazione.

Ora quando si conosca per es. un integrale speciale y_0, si può osservare in modo generale che ogni funzione y che debba essere un integrale di una equazione $f(x, y, y') = 0$ si potrà ordinariamente rappresentarla con una espressione data qualsiasi $\varphi(x, y_0, z)$ composta con x, y_0 e z, essendo z una certa funzione di x da scegliersi opportunamente, perchè ordinariamente, qualunque poi sia la funzione y che rappresenterà l'integrale, si potrà soddisfare alla equazione $y = \varphi(x, y_0, z)$ con una funzione conveniente z. E se y dovrà essere l'integrale della equazione data, questa funzione z verrà naturalmente ad essere l'integrale di una equazione $\psi(x, z, z') = 0$ che risulterà dalla equazione data ponendovi per y e y' i valori dedotti dalla formola precedente $y = \varphi(x, y_0, z)$ col tenere conto che y_0 è una funzione conosciuta di x per la quale si ha $f(x, y_0, y'_0) = 0$; e potrà darsi che la nuova equazione $\psi(x, z, z') = 0$ rientri in uno dei casi considerati nei paragrafi precedenti o almeno sia più facilmente integrabile di quella data.

371. — Caso per caso gioverà scegliere in un modo piuttosto che in un altro la funzione $\varphi(x, y_0, z)$ che col porre $y = \varphi(x, y_0, z)$ servirà alla trasformazione della equazione data nell'altra $\psi(x, z, z') = 0$, e le trasformazioni che prima si presentano alla mente come le più semplici sono quelle che vengono dal prendere per $\varphi(x, y_0, z)$ le funzioni di primo grado $y_0 + z$ o $y_0 z$, col porre cioè $y = y_0 + z$, o $y = y_0 z$.

Con la prima di queste trasformazioni $y = y_0 + z$, la nuova funzione incognita z corrisponde alla differenza fra l'integrale generale cercato y e quello conosciuto y_0, e noi ci fermeremo a considerare appunto questo caso di $y = y_0 + z$.

Ammesso allora che la equazione data sia posta sotto la forma $y' + M = 0$ o

(1) $$dy + M\, dx = 0,$$

dove M è una funzione $M(x, y)$ di x e y, si può osservare che per la nuova equazione in z verremo ad avere $dy_0 + dz + M(x, y_0 + z) dx = 0$, e poichè essendo y_0 un integrale della (1) sarà $dy_0 + M(x, y_0)\, dx = 0$, essa si ridurrà subito alla forma seguente

(2) $$dz + P\, dx = 0,$$

dove

(3) $$P = M(x, y_0 + z) - M(x, y_0);$$

e se questa nuova equazione in x e z rientrerà in uno dei casi considerati nei paragrafi precedenti, la sua integrazione verrà ridotta alle quadrature; dopo di che dalla formola che si troverà per l'integrale di questa equazione si dedurrà l'integrale della equazione data cambiandovi z in $y - y_0$.

372. — Così, limitandoci al caso in cui nella funzione $M(x, y)$ le variabili x e y sono separate e si ha $M(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, siccome allora sarà $P = \psi(y_0 + z) - \psi(y_0)$, si può osservare ad es. che si rientrerà subito nel caso del § 361 e l'integrazione si effettuerà con quadrature se P risulterà il prodotto di una funzione X della sola x per una funzione Z della sola z, cioè se sarà $\psi(y_0 + z) - \psi(y_0) = XZ$ (*).

Questa colla derivazione rispetto a z porterà che debba aversi la formola seguente $\psi'(y_0 + z) = XZ'$, che derivata rispetto ad x dà luogo all'altra $\psi''(y_0 + z)\, y'_0 = X'Z'$; quindi se X o Z' o y'_0 non saranno zero, avremo la formola

$$\frac{\psi''(y_0 + z)}{\psi'(y_0 + z)} = \frac{X'}{Xy'_0},$$

e poichè in questa, per la presenza di z, la $y_0 + z$ nel primo membro si può fare variare come si vuole o lasciarla invariata indipendentemente da x, si vede subito che onde essa sussista bisognerà che il rapporto $\frac{\psi''(y_0+z)}{\psi'(y_0+z)}$ sia una costante k alla quale dovranno ridursi i due membri di questa equazione.

Non fermandoci dunque sul caso di $y'_0 = 0$ nè sugli altri ai quali testè accennammo di X o Z' zero, perchè in questi casi $\varphi(x)$ o $\psi(y)$ dovrebbero essere costanti, e le variabili nella (1) o nella (2) si ridurrebbero subito separate; e negli altri casi cambiando per semplicità $y_0 + z$ in t, si vede che dovrà essere $\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} = k$, e potrà escludersi senz'altro il caso di $k = 0$ che darebbe $\psi'(t) = c$ e $\psi(t) = ct + c_1$, e quindi $\psi(y) = cy + c_1$ con c e c_1 costanti, e ci porterebbe a quello già considerato al § 366 delle equazioni lineari o a quello delle variabili già separate; quindi supponendo k diversa da zero e facendo una prima integrazione, avremo $\log \psi'(t) = kt + \log c$, ovvero $\psi'(t) = ce^{kt}$; e con una nuova integrazione otterremo $\psi(t) = \frac{c}{k} e^{kt} + c_1$, essendo c e c_1 due costanti qualsiansi, la prima delle quali dovrà essere diversa da zero.

L'equazione da integrarsi verrà quindi ad essere la seguente

$$dy + \left\{\varphi(x) + \frac{c}{k} e^{ky} + c_1\right\} dx = 0, \tag{4}$$

e la equazione (2) in z sarà l'altra

$$dz + \frac{c}{k} e^{ky_0} (e^{kz} - 1)\, dx = 0,$$

(*) **Si tratterebbe ugualmente il caso in cui fosse $M = \varphi(x) + \theta(x)\psi(y)$, essendo $\theta(x)$ un'altra funzione qualsiasi di x.**

che s'integra subito colle quadrature e dà la formola

$$k \int \frac{dz}{e^{kz} - 1} + c \int e^{ky_0}\, dx = C,$$

essendo C una costante arbitraria; e poichè si può prendere

$$k \int \frac{dz}{e^{kz} - 1} = -k \int \left(1 - \frac{e^{kz}}{e^{kz} - 1}\right) dz = -kz + \log(e^{kz} - 1),$$

l'integrale della equazione (4) sarà dato dalla formola

$$-k(y - y_0) + \log(e^{k(y - y_0)} - 1) + c \int e^{ky_0}\, dx = C,$$

essendo y_0 l'integrale conosciuto della stessa equazione (4).

In particolare se sarà $\varphi(x) = -e^{-kc_1 x}$ con c_1 diverso da zero, si potrà prendere $y_0 = -c_1 x + \frac{1}{k} \log \frac{k}{c}$, talchè si può dire ora che l'integrale della equazione

$$dy + \left\{\frac{c}{k} e^{ky} - e^{-kc_1 x} + c_1\right\} dx = 0$$

sarà dato dalla formola

$$-k(y + c_1 x) + \log\left\{\frac{c}{k} e^{k(y + c_1 x)} - 1\right\} - \frac{e^{-c_1 kx}}{c_1} = C.$$

È da osservare però che la equazione (4) e così l'ultima che ne è un caso particolare, avrebbero potuto integrarsi anche con un altro processo, perchè ponendo $e^{ky} = \theta$ e prendendo θ come funzione incognita, la (4) si riduce a una equazione di Bernoulli (§ 369).

373. — Se invece, sempre nel supposto di $M = \varphi(x) + \psi(y)$, il valore $P = \psi(y_0 + z) - \psi(y_0)$ che figura nella equazione (2) risulterà una funzione omogenea di grado zero in x e z, cioè se sarà soddisfatta la condizione $x \frac{\partial P}{\partial x} + z \frac{\partial P}{\partial z} = 0$, allora rientreremo nel caso considerato al § 363 e la integrazione della equazione data potrà ancora ridursi subito alle quadrature.

Ora in questo caso dovrà essere

$$xy'_0 [\psi'(y_0 + z) - \psi'(y_0)] + z\psi'(y_0 + z) = 0,$$

ovvero

$$(xy'_0 + z)\psi'(y_0 + z) - xy'_0 \psi'(y_0) = 0,$$

e quindi derivando rispetto a z e ponendo per semplicità $y_0+z=t$, con osservare che $\psi'(t)$ può supporsi senz'altro diverso da zero perchè, come già osservammo nel caso precedente, quando $\psi(t)$ fosse costante le variabili nella equazione data sarebbero già separate, si troverà che deve essere

$$\frac{\psi''(t)}{\psi'(t)} = -\frac{1}{xy'_0 - y_0 + t}, \tag{5}$$

dal che risulta che $xy'_0 - y_0$ dovrà essere una quantità costante k perchè nel primo membro non figura la x.

Osservando quindi che $xy'_0 - y_0$ è il numeratore della derivata di $\frac{y_0}{x}$, si vede che dovrà essere $\left(\frac{y_0}{x}\right)' = \frac{k}{x^2}$ e quindi $y_0 = -k + cx$, essendo c una costante qualsiasi che potrà supporsi diversa da zero, altrimenti si avrebbe $y_0 = -k$ e allora, come osservammo anche nel paragrafo precedente, nella equazione data che ora ha la forma $y' + \{\varphi(x) + \psi(y)\}dx = 0$, la $\varphi(x)$ dovrebbe essere una costante e la equazione sarebbe subito integrabile.

Allora con $y_0 = -k + cx$, la (5) ci dà, integrando, $\log\psi'(t) = -\log(k+t) + \log c_1$, ovvero $\psi'(t) = \frac{c_1}{k+t}$, essendo c_1 una costante qualsiasi ma diversa da zero, e da questa avremo $\psi(t) = c_1 \log(k+t) + c_2$, con c_2 nuova costante pure arbitraria.

Ne segue che per la equazione data (1) dovremo avere

$$dy + \{\varphi(x) + c_1 \log(k+y) + c_2\}dx = 0,$$

e in questa dovrà essere $\varphi(x) + c_2 = -c - c_1 \log cx$ perchè $y_0 = -k + cx$ possa esserne un integrale; quindi ora la nostra equazione sarà la seguente

$$dy + \{c_1 \log(k+y) - c_1 \log cx - c\}dx = 0, \tag{6}$$

e per integrarla basterà integrare la equazione omogenea in x e z

$$dz + c_1\{\log(cx+z) - \log cx\}dx = 0, \quad \text{ovvero} \quad dz + c_1 \log\left(1 + \frac{z}{cx}\right)dx = 0,$$

e poi porre nell'integrale $y - y_0$ o $y + k - cx$ al posto di z.

Ponendo $\frac{z}{x} = c\theta$ con che $z = c\theta x$, questa ultima equazione si riduce all'altra

$$cx d\theta + \{c\theta + c_1 \log(1+\theta)\}dx = 0,$$

la quale s'integra immediatamente con quadrature, e ci dà

$$c\int \frac{d\theta}{c\theta + c_1 \log(1+\theta)} + \log x = \mathrm{C},$$

essendo C una costante arbitraria; quindi se $\mathrm{F}(\theta)$ sarà il valore dell'integrale $c\int \frac{d\theta}{c\theta + c_1 \log(1+\theta)}$ che potrà ottenersi colla integrazione per serie, per l'integrale della equazione (6) avremo la formola $\mathrm{F}\left(\frac{y-y_0}{cx}\right) + \log x = \mathrm{C}$, ovvero $\mathrm{F}\left(\frac{y+k}{cx} - 1\right) + \log x = \mathrm{C}$.

374. — Più generalmente osserviamo che quando la equazione differenziale è data sotto la forma $f(x, y, y') = 0$, la equazione corrispondente in z sarà la seguente $f(x, y_0 + z, y_0 + z') = 0$; e quindi se la funzione $f(x, y, y')$, considerata come funzione delle due quantità y e y' come se fossero due variabili indipendenti, sarà sviluppabile colla formola di Taylor relativa al caso di più variabili, allora considerando in $f(x, y_0+z, y'_0+z')$ la z e z' come accrescimenti di y e y' a partire da y_0 e y'_0, e osservando che $f(x, y_0, y'_0) = 0$, avremo la formola

$$\frac{\partial f}{\partial y_0}z + \frac{\partial f}{\partial y'_0}z' + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial y'_0}zz' + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0'^2}z'^2\right\} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial y_0^3}z^3 + \ldots\right\} + \ldots = 0, \tag{7}$$

nella quale le derivate di f s'intenderanno ricavate dalla $f(x, y_0, y'_0)$; e la nuova equazione da integrare in z potrà prendersi sotto questa nuova forma.

Naturalmente questa equazione cesserà di essere una serie e si ridurrà ad un polinomio razionale intero in z e z', se $f(x, y, y')$ sarà una funzione razionale intera rispetto a y e a y'.

375. — In particolare dunque se l'equazione data sarà di quelle conosciute sotto il nome di *equazioni di Riccati*, cioè se sarà della forma

$$y' + \mathrm{L}y^2 + \mathrm{M}y + \mathrm{N} = 0, \tag{8}$$

dove L, M e N sono costanti o funzioni di x qualsiansi, e di essa si conoscerà un integrale speciale y_0, per le considerazioni precedenti e per la formola (7) la sua integrazione si ridurrà a quella dell'altra in z

$$z' + (2\,\mathrm{L}y_0 + \mathrm{M})z = -\mathrm{L}z^2\ (*)$$

(*) Quando non avessimo fatto le considerazioni generali precedenti, questa equazione poteva ottenersi subito ponendo nella (8) $y = y_0 + z$ e poi sottraendo dai che rientra fra quelle di Bernoulli considerate nel § 369 a pag. 538 e ha quindi l'integrale generale z determinato dalla formola

$$z^{-1}=e^{\int(2\mathrm{L}y_0+\mathrm{M})dx}\left\{\int \mathrm{L}\,e^{-\int(2\mathrm{L}y_0+\mathrm{M})\,dx}dx+\mathrm{C}\right\},$$

per modo che allora l'integrale generale della equazione di Riccati (8) viene dato dall'altra

$$(9)\qquad y=y_0+\frac{e^{-\int(2\mathrm{L}y_0+\mathrm{M})\,dx}}{\int \mathrm{L}\,e^{-\int(2\mathrm{L}y_0+\mathrm{M})\,dx}dx+\mathrm{C}},$$

dalla quale risulta che l'integrale y_0 dal quale si parte può considerarsi come un integrale particolare perchè viene a corrispondere a quello che si ha da questa formola per $\mathrm{C}=\infty$.

Così per es. avendo la equazione

$$y'-2\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-1=0$$

che rientra nella forma (8) e che ammette l'integrale particolare $y_0=x$, basta valersi della (9), osservando che in questo caso è $\mathrm{L}=-\frac{2}{x^2}$, $\mathrm{M}=\frac{2}{x}$, $\mathrm{N}=-1$, per trovare subito che il suo integrale generale è dato dalla formola

$$y=x+\frac{x^2}{\mathrm{C}-2x}=\frac{\mathrm{C}-x}{\mathrm{C}-2x}\,x.$$

376. — Le equazioni di Riccati ora considerate hanno una importanza grandissima perchè si presentano in moltissime questioni; per questo noi ci fermeremo un poco su di esse.

Osserveremo prima che, come dalla formola (9) apparisce subito che quando per una equazione di Riccati si conosce un integrale particolare y_0 l'integrale generale si trova per mezzo di due quadrature, così è facile anche di vedere che se gli integrali particolari che si conoscono sono due, l'integrazione generale si effettua con una sola quadratura, e se sono tre si effettua senza quadrature affatto e in modo semplicissimo.

Supposto infatti che della equazione data (8) si conoscano due integrali

---

due membri della equazione ottenuta quelli dell'altra

$$y'_0+\mathrm{L}y^2_0+\mathrm{M}y_0+\mathrm{N}=0$$

che esprime che y_0 è un integrale della (8).

y e y_1, si hanno le due equazioni

$$y'_0+\mathrm{L}y_0^2+\mathrm{M}y_0+\mathrm{N}=0\ ,\quad y'_1+\mathrm{L}y_1^2+\mathrm{M}y_1+\mathrm{N}=0\,,$$

e basta sottrarre una volta la prima, e una volta la seconda di queste dalla (8) per dedurne subito le altre

$$\frac{d}{dx}\log(y-y_0)+\mathrm{L}\,(y+y_0)+\mathrm{M}=0\ ,\quad \frac{d}{dx}\log(y-y_1)+\mathrm{L}\,(y+y_1)+\mathrm{M}=0\,,$$

dalle quali sottraendo l'una dall'altra si ottiene la seguente

$$\frac{d}{dx}\log\frac{y-y_0}{y-y_1}+\mathrm{L}(y_0-y_1)=0\,,$$

che s'integra immediatamente e ci dà la formola

$$(10)\qquad \frac{y-y_0}{y-y_1}=\mathrm{C}e^{-\int\mathrm{L}(y_0-y_1)\,dx},$$

dove C è una costante arbitraria; e questa dimostra appunto che l'integrale generale y della (8) si ottiene mediante una sola quadratura quando si conoscono i due integrali y_0 e y_1.

Ammesso poi che si conosca anche un terzo integrale y_2, basta osservare che la formola trovata (10) ci dà l'altra $\frac{y_2-y_0}{y_2-y_1}=\mathrm{C}_1e^{\int\mathrm{L}(y_0-y_1)\,dx}$, per dedurne subito la seguente

$$(11)\qquad \frac{y-y_0}{y-y_1}=\overline{\mathrm{C}}\,\frac{y_2-y_0}{y_2-y_1}\,,\quad\text{ovvero}\quad \frac{y-y_0}{y-y_1}:\frac{y_2-y_0}{y_2-y_1}=\overline{\mathrm{C}}$$

essendo $\overline{\mathrm{C}}$ un'altra costante che resta arbitraria; e questa mostra appunto come volevamo che l'integrale generale y della equazione di Riccati (8) si ottiene in modo semplicissimo e senza quadrature quando della stessa equazione si conoscono tre integrali particolari y_0, y_1, y_2, e mostra anche che *il rapporto anarmonico di quattro integrali qualunque y_0, y_1, y_2, y delle equazioni di Riccati è costante.*

Si riscontra poi che *questa proprietà è caratteristica delle equazioni di Riccati,* perchè quando si abbia la formola (11), prendendo i logaritmi e poi derivando per fare sparire la costante $\overline{\mathrm{C}}$ si giunge appunto a una equazione differenziale di prim'ordine in y che ha precisamente la forma di quelle di Riccati (8).

377. — Aggiungiamo che facendo sulla funzione incognita y una trasformazione lineare col sostituirle un'altra funzione incognita η che sia le-

gata ad y per mezzo della equazione

$$y=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}, \tag{12}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti o funzioni di x il cui determinante $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma$ è diverso da zero, la equazione di Riccati (8) in y si trasforma in un' altra che è anch'essa una equazione di Riccati in η, poichè calcolando y' colla precedente e sostituendo nella (8) si trova che la equazione trasformata è la seguente

$$\eta'+\mathrm{L}_1\eta^2+\mathrm{M}_1\eta+\mathrm{N}=0, \tag{13}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \mathrm{L}_1 &= \alpha'\gamma-\alpha\gamma'+\mathrm{L}\alpha^2+\mathrm{M}\alpha\gamma+\mathrm{N}\gamma^2, \\ \Delta \mathrm{M}_1 &= \alpha'\delta-\alpha\delta'+\beta'\gamma-\beta\gamma'+2\,\mathrm{L}\alpha\beta+\mathrm{M}(\alpha\delta+\beta\gamma)+2\mathrm{N}\gamma\delta, \\ \Delta \mathrm{N}_1 &= \delta\beta'-\beta\delta'+\mathrm{L}\,\beta^2+\mathrm{M}\,\beta\delta+\mathrm{N}\,\delta^2; \end{aligned}\right. \tag{14}$$

e poichè fra le funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vi è la sola condizione che il loro determinante Δ sia diverso da zero, si comprende che qualunque sia la equazione di Riccati data (8), essa con sostituzioni lineari come la (12) potrà trasformarsi in infinite altre equazioni di Riccati.

378. — Così in particolare si potrà sempre trasformare la equazione data in un' altra che sia pure una equazione di Riccati e nella quale manchi il termine che contiene l' incognita al primo grado, poichè per la seconda delle (14) basterà per questo che le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nella (12) siano prese in modo che si abbia

$$\alpha'\delta-\alpha\delta'+\beta'\gamma-\beta\gamma'+2\,\mathrm{L}\alpha\beta+\mathrm{M}\,(\alpha\delta+\beta\gamma)+2\,\mathrm{N}\gamma\delta=0. \tag{15}$$

E così ad es. con $\gamma=0$, $\delta=1$ e α diverso da zero, cioè con

$$y=\alpha\eta+\beta, \tag{16}$$

basterà che α e β siano presi in modo che si abbia

$$\alpha'+2\,\mathrm{L}\alpha\beta+\mathrm{M}\,\alpha=0, \tag{17}$$

cioè basterà prendere $\beta=-\frac{\alpha'+\mathrm{M}\,\alpha}{2\,\mathrm{L}\alpha}$ lasciando α indeterminata ma diversa da zero, o prendere per α il valore $\alpha=e^{-\int(\mathrm{M}+2\mathrm{L}\beta)dx}$ che si ottiene dalla (17) colla integrazione quando si lasci invece indeterminato il β; e in questi casi si avrà

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta=\alpha, \ \mathrm{L}_1=\mathrm{L}\alpha, \\ &\alpha \mathrm{N}_1=\beta'+\mathrm{L}\beta^2+\mathrm{M}\beta+\mathrm{N}=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha}-\mathrm{L}\beta^2+\mathrm{N}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

E se invece si prenderà $\beta=1$, $\delta=0$ con γ diverso da zero, cioè se la formola di trasformazione sarà la seguente

$$y=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{1}{\gamma\eta}, \tag{19}$$

allora basterà che α e γ siano presi in modo che si abbia

$$-\gamma'+2\,\mathrm{L}\alpha+\mathrm{M}\gamma=0, \tag{20}$$

cioè basterà prendere $\alpha=\frac{\gamma'-\mathrm{M}\gamma}{2\,\mathrm{L}}$ lasciando il γ indeterminato ma sempre diverso da zero, o prendere per γ il valore $\gamma=2\,e^{\int \mathrm{M}dx}\left\{\int \mathrm{L}\alpha e^{-\int \mathrm{M}dx}dx+\text{cost.}\right\}$ che si ottiene dalla (20) colla integrazione (§ 366 [pag. 534-35]) lasciando l'α indeterminato; e in questi casi si avrà

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta=-\gamma, \ -\gamma \mathrm{L}_1=\alpha'\gamma-\alpha\gamma'+\mathrm{L}\alpha^2+\mathrm{M}\,\alpha\gamma+\mathrm{N}\gamma^2=\alpha'\gamma-\mathrm{L}\alpha^2+\mathrm{N}\gamma^2, \\ &\qquad -\gamma \mathrm{N}_1=\mathrm{L}; \end{aligned}\right. \tag{21}$$

e se fra α e γ oltre alla (20) si farà sussistere anche la relazione

$$\alpha'\gamma-\mathrm{L}\alpha^2=0, \tag{22}$$

con che α e γ risulteranno entrambi determinati, avremo

$$\Delta=-\gamma, \ \mathrm{L}_1=-\mathrm{N}\gamma, \ \mathrm{N}_1=-\frac{\mathrm{L}}{\gamma}. \tag{23}$$

E così se nella equazione (8) dalla quale si parte sarà già $\mathrm{M}=0$, riducendosi allora le (20) e (22) alle due $\gamma'=2\,\mathrm{L}\alpha$ e $\alpha'\gamma=\mathrm{L}\alpha^2$, le quali danno subito $\frac{\gamma'}{\gamma}=2\,\frac{\alpha'}{\alpha}$ e quindi colla integrazione $\log\gamma=2\log\alpha+\text{cost}$, si vede che basta prendere $\gamma=\alpha^2$; e allora venendo ad essere per la (22) $\alpha'=\mathrm{L}$, $\alpha=\int \mathrm{L}dx$, e $\gamma=\left(\int \mathrm{L}dx\right)^2$, e perciò infine per le (23) $\mathrm{L}_1=-\mathrm{N}\left(\int \mathrm{L}dx\right)^2$, $\mathrm{N}_1=-\frac{\mathrm{L}}{\left(\int \mathrm{L}dx\right)^2}$ si può concludere che quando si parta dalla equazione

$$y'+\mathrm{L}y^2+\mathrm{N}=0, \tag{24}$$

colla formola di trasformazione

$$y=\frac{1}{\left(\int \mathrm{L}\,dx\right)^2}\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\int \mathrm{L}\,dx} \tag{25}$$

alla quale si riduce ora la (19), la equazione stessa si trasformerà nell'altra

$$\eta' - N\left(\int L\,dx\right)^2 \eta^2 - \frac{L}{\left(\int L\,dx\right)^2} = 0 . \tag{26}$$

379. — Trasformata poi con uno di questi due processi, — o con altri che corrispondano ad altri sistemi convenienti di valori delle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pei quali risulti soddisfatta la condizione (15) —, la equazione (8) di Riccati sarà dunque ridotta alla forma

$$\eta' + L_1\eta^2 + N_1 = 0 , \tag{27}$$

nella quale manca il termine di primo grado in η; e se avremo seguito il primo processo, facendo cioè la trasformazione (16) con α e β legate fra loro dalla condizione (17), allora avendo riguardo alla seconda delle (18) si vede che se a è una costante qualsiasi diversa da zero, basterà fare sulla (8) la trasformazione

$$y = \alpha\eta + \beta , \tag{28}$$

con

$$\alpha = \frac{a}{L} , \text{ e } \beta = -\frac{\alpha' + M\alpha}{2L\alpha} = -\frac{M}{2L} - \left(\frac{1}{2L}\right)' , \tag{29}$$

perchè la equazione stessa (8) prenda la forma anche più semplice

$$\eta' + a\eta^2 + N_1 = 0 , \tag{30}$$

nella quale come abbiamo supposto a è una costante qualsiasi diversa da zero, e

$$\alpha N_1 = -\left(\frac{M}{2L}\right)' - \left(\frac{1}{2L}\right)'' + L\left\{\frac{M}{2L} + \left(\frac{1}{2L}\right)'\right\}^2 - M\left\{\frac{M}{2L} + \left(\frac{1}{2L}\right)'\right\} + N ,$$

ovvero

$$N_1 = -\frac{M'}{2a} - \frac{M^2}{4a} + \frac{ML'}{2aL} + \frac{2LL'' - 3L'^2}{4aL^2} + \frac{NL}{a} . \tag{31}$$

Seguendo invece il secondo processo, cioè facendo la trasformazione (19) e avendo riguardo alla seconda delle (21) si vede che per giungere ancora a una equazione della forma (30) bisognerebbe determinare α e γ in modo da rendere soddisfatte le due equazioni

$$-\gamma' + 2L\alpha + M\gamma = 0 \quad , \quad -a\gamma = \alpha'\gamma - \alpha\gamma' + L\alpha^2 + M\alpha\gamma + N\gamma^2 ,$$

alla seconda delle quali può anche sostituirsi l'altra

$$(a + \alpha')\gamma - L\alpha^2 + N\gamma^2 = 0 .$$

Però questo modo di determinazione di α e γ presenta difficoltà grandissima, e quindi quando per ridurre la (8) alla forma (30), si voglia passare per la trasformazione (19) converrà meglio dopo di avere ottenuto la equazione trasformata (27), applicare ad essa una nuova trasformazione per mezzo delle formole (28) e (29), cioè facendo sulla stessa equazione (27) la trasformazione

$$\eta = \alpha_1\eta_1 + \beta_1 , \text{ con } \alpha_1 = \frac{a}{L_1} \text{ e } \beta_1 = \frac{L'_1}{2L^2} , \tag{32}$$

che ridurrà la (27) appunto a una equazione come la (30) in η_1, e precisamente alla seguente

$$\eta'_1 + a\eta_1^2 + N_2 = 0 , \tag{33}$$

dove

$$N_2 = \frac{2L_1L''_1 - 3L'^2_1}{4aL_1^2} + \frac{N_1L_1}{a} . \tag{34}$$

380. — Del resto poi quando si abbia una equazione di Riccati sotto la forma generale (8) o sotto la forma (27) si potrà sempre ridurla ad un'altra nella quale sia costante ed uguale ad a il coefficiente del quadrato della funzione incognita anche senza fare il cambiamento di questa funzione con una delle trasformazioni precedenti, ma facendo invece un semplice cambiamento della variabile indipendente.

Fermandoci infatti sulla (8), che comprende il caso della equazione (27) e osservando che essa può porsi sotto la forma

$$dy + Ly^2dx + (My + N)\,dx = 0 ,$$

e così è relativa a qualunque variabile indipendente, si vede subito che se s'introduce una nuova variabile ξ legata ad x dalla formola $L\,dx = a\,d\xi$ o $a\xi = \int L\,dx$, la equazione stessa si riduce immediatamente all'altra

$$\frac{dy}{d\xi} + ay^2 + a\left(\frac{My + N}{L}\right)_\xi = 0 , \tag{35}$$

nella quale è costante il coefficiente a di y^2; e questa quando nella equazione (8) dalla quale si parte sia già $M = 0$, o sia già stata fatta una trasformazione per la quale M sia ridotto zero, viene ad essere appunto della forma (30).

381. — Tornando dunque a chiamare x la variabile indipendente, noi possiamo ora affermare che con uno qualunque dei processi ora indicati, e quindi in infiniti modi, tutte le equazioni di Riccati (8) potranno sempre ridursi

alla forma più semplice seguente

$$y' + ay^2 = f(x) \tag{36}$$

dove a è una costante diversa da zero che, volendolo, può anche ridursi sempre uguale ad 1.

E appunto sotto questa forma, ma soltanto in corrispondenza al caso particolare di $f(x) = bx^m$ con b costante diversa da zero e m numero reale qualsiasi, si trova quella equazione

$$y' + ay^2 = bx^m \tag{37}$$

che fu studiata da Riccati, e dalla quale per estensione hanno ora preso il nome di equazioni di Riccati tutte quelle della forma ridotta precedente (36) o della forma (8).

382. — Aggiungiamo che quest'ultima equazione (37) presenta la particolarità notevole di essere integrabile sotto forma finita, e indipendentemente dalla conoscenza dell'integrale particolare, per infiniti valori razionali di m; e l'integrazione porta soltanto funzioni algebriche, e circolari o logaritmiche, e si effettua applicando successivamente un certo numero (finito) di volte quelle trasformazioni lineari dei paragrafi precedenti per le quali la equazione trasformata si mantiene sempre priva del termine che contiene linearmente l'incognita.

Si osservi infatti che applicando alla equazione (37) la trasformazione (25) che nel caso attuale quando s'indichi con η_1 la nuova funzione viene ad essere la seguente

$$y = \frac{1}{a^2 x^2} \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{ax},$$

la equazione stessa si trasforma nell'altra

$$\eta'_1 + a^2 b x^{m+2} \eta_1^2 = \frac{1}{ax^2}; \tag{38}$$

e applicando ora il processo del § 380 per ridurla di nuovo alla forma (36) con fare cioè il cambiamento della variabile x in un altra ξ_1 mediante la formola $a_1 \xi_1 = \int \mathrm{L}\, dx$, per la quale nel caso nostro si può prendere

$$a_1 \xi_1 = \frac{a^2 b}{m+3} x^{m+3} \quad \text{o} \quad x = \left(\frac{a_1(m+3)}{a^2 b}\right)^{\frac{1}{m+3}} \xi_1^{\frac{1}{m+3}},$$

con a_1 nuova costante, la equazione stessa (38) si trasforma nell'altra

$$\eta'_1 + a_1 \eta_1^2 = b_1 \xi_1^{m_1}, \tag{39}$$

dove

$$b_1 = \frac{1}{a(m+3)} \left(\frac{a_1(m+3)}{a^2 b}\right)^{-\frac{1}{m+3}}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3}.$$

Ora avendosi

$$m_1 = -1 - \frac{1}{m+3} = -1 - \frac{(m+3)-(m+2)}{m+3} = -2 + \frac{m+2}{m+3}$$

e quindi anche $m_1 + 2 = \frac{m+2}{m+3}$, e $\frac{1}{m_1+2} = \frac{m+3}{m+2} = 1 + \frac{1}{m+2}$, si vede che colle trasformazioni che abbiamo fatto il rapporto $\frac{1}{m_1+2}$ corrispondente alla equazione trasformata (39) risulta da quello $\frac{1}{m+2}$ corrispondente alla prima equazione colla semplice aggiunta di una unità.

Ne segue che se si fanno successivamente p delle stesse trasformazioni si giungerà in fine ancora a una equazione

$$\eta'_p + a_p \eta_p^2 = b_p \xi_p^{m_p}$$

della stessa forma della equazione data nella quale per l'esponente corrispondente m_p si avrà

$$\frac{1}{m_p+2} = p + \frac{1}{m+2}, \tag{40}$$

e se con un numero finito p di queste operazioni si giungerà a una equazione nella quale l'esponente m_p sia zero, allora potendo questa equazione mettersi sotto la forma $d\eta_p + (a_p \eta_p^2 - b_p) d\xi_p = 0$, e in questa le variabili potendo separarsi immediatamente, l'integrazione di essa e quindi anche quella della equazione data si effettuerà sotto forma finita per mezzo di funzioni algebriche e circolari o logaritmiche.

Ora perchè uno m_p dei numeri $m_1, m_2, m_3 \ldots$ che successivamente si trovano venga zero, osservando che allora dalla (40) si avrà $\frac{1}{2} = p + \frac{1}{m+2}$, si vede intanto che basterà che la differenza $\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$ o il rapporto $\frac{m}{2m+4}$ sia un numero intero e positivo qualsiasi.

D'altra parte si può osservare in generale che se per la equazione data (37) il rapporto $\frac{m}{2m+4}$ è negativo e m non è uguale a -1, facendo su essa prima la trasformazione $y = \frac{1}{\eta}$ che la riduce all'altra $d\eta + (bx^m \eta^2 - a) dx = 0$, e poi sostituendo alla variabile x un'altra variabile ξ colla formola $x^m dx = d\xi$, o $\frac{x^{m+1}}{m+1} = \xi$, o anche $x = [(m+1)\xi]^{\frac{1}{m+1}}$ si giunge alla equazione della stessa forma $\eta' + b\eta^2 = a(m+1)^{-\frac{m}{m+1}} \xi^{-\frac{m}{m+1}}$ per la quale il solito rapporto viene ad essere $-\frac{m}{2m+4}$ ed è positivo, quindi evidentemente si può ora affermare che la equazione data (37) sarà sempre integrabile sotto forma finita per mezzo di funzioni algebriche e circolari o logaritmiche quando il rapporto $\frac{m}{2m+4}$ sia un numero intero positivo o negativo qualsiasi, cioè quando sia $m = -\frac{4i}{2i-1}$ essendo i zero o un numero intero positivo o negativo qualunque.

Equazioni di prim'ordine $f(x, y, y') = 0$ non risolute rispetto alla derivata y'.

383. — In ciò che precede noi abbiamo considerato equazioni differenziali di prim'ordine che erano risolute rispetto alla derivata y', o la risoluzione delle quali poteva farsi immediatamente.

Non sempre però quando si ha una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ è possibile di risolverla rispetto a y', e se anche può risolversi, spesso dà luogo a formole molto complicate che rendono inapplicabili i processi precedenti; e noi indicheremo perciò anche alcuni casi nei quali tali equazioni si possono integrare senza bisogno di fare quella risoluzione.

Il primo caso da considerarsi è quello in cui la equazione data non contiene nè x nè y, cioè è della forma $f(y') = 0$.

In questo caso l'equazione data esprime che $y' = \alpha$, essendo α una costante radice della equazione $f(\alpha) = 0$; e poichè l'essere $y' = \alpha$ porta che sia $y = \alpha x + C$ e perciò $\frac{y - C}{x} = \alpha$, essendo C una costante arbitraria, s'intende subito che in questo caso geometricamente l'integrale corrisponderà a tanti sistemi di rette parallele $y = \alpha x + C$ corrispondenti ciascuno alle varie radici α della equazione $f(\alpha) = 0$; e potrà anche intendersi come rappresentato dalla equazione $f\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ che si ottiene dalla equazione data col sostituirvi $\frac{y-C}{x}$ al posto di y'.

384. — Il secondo caso da considerarsi è quello in cui nella equazione data oltre alla derivata y' vi figura soltanto una delle due quantità x e y per es. x; cioè la equazione è della forma $f(x, y') = 0$.

In questo caso se si può fare la risoluzione rispetto a y' si ricadrà subito in uno dei casi più semplici nei quali le variabili sono separate, poichè si avrà $y' = \varphi(x)$ o $dy = \varphi(x)\, dx$; ma se questa risoluzione non si può o non si vuol fare, allora, ammesso che si possa fare la risoluzione della equazione stessa rispetto alla variabile x, la sua integrazione si ridurrà alle quadrature con tutta facilità, facendo un cambiamento di variabile col prendere per variabile y' invece di x.

Si chiami infatti p questa nuova variabile, e si osservi per prima cosa che se invece di scrivere $y' = p$, si scrive $\frac{dy}{dx} = p$ o $dy = p dx$, questa formola viene relativa a qualunque variabile indipendente, per modo che in essa x e y potranno anche considerarsi come funzioni di p o di qualsiasi altra variabile.

Si ammetta poi che la equazione data $f(x, y') = 0$ o $f(x, p) = 0$ risoluta rispetto ad x ci dia la formola $x = \varphi(p)$ che esprime x per la p che ora prendiamo come nuova variabile; si comprende allora che quando si riesca a trovare anche l'espressione di y per mezzo di p mediante una formola simile $y = \psi(p)$, il nostro problema della integrazione della equazione data si potrà dire risoluto perchè l'integrale potra intendersi rappresentato dal sistema delle due equazioni $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, o da quella $F(x, y) = 0$ in x e y che risulterebbe da queste quando si giungesse a fare fra esse la eliminazione di p.

Ora avendo la formola $x = \varphi(p)$ insieme all'altra $dy = p dx$ relativa a qualunque variabile indipendente, si vede che colla variabile p sarà $dx = \varphi'(p)\, dp$ e quindi $dy = p\varphi'(p)\, dp$, e di qui si avrà y con una semplice quadratura, poichè sarà

$$y = \int p\varphi'(p)\, dp + C = p\varphi(p) - \int \varphi(p)\, dp + C,$$

con C costante arbitraria; e così l'integrale della equazione data sarà rappresentato dal sistema delle due equazioni

$$(1) \qquad x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)\, dp + C = p\varphi(p) - \int \varphi(p)\, dp + C,$$

o dalla equazione in x e y che viene da queste colla eliminazione di p, quando questa eliminazione possa e voglia farsi.

385. — Se invece nella equazione data figura la y e non la x, cioè se essa è della forma $f(y, y') = 0$, allora considerandovi come funzione la x in-

vece della y col cambiarvi y' in $\frac{1}{x'}$, s'intende che si ricadrebbe subito nel caso precedente, e potrebbe quindi trattarsi al modo stesso.

Del resto, quando la equazione data $f(y, y') = 0$ possa risolversi rispetto ad y e ci dia $y = \psi(y')$, allora prendendo ancora per variabile indipendente y' e chiamandola p, con che $y = \psi(p)$ e $dx = \frac{dy}{p}$, si vede che avendosi ora la formola $y = \psi(p)$ occorre trovare una formola simile per x; e poichè da questa si ha $dy = \psi'(p)\, dp$, la formola che darà x si otterrà subito dall'altra $dx = \frac{\psi'(p)\, dp}{p}$ con una quadratura, e si avrà

$$(2) \qquad x = \int \frac{\psi'(p)}{p} dp + C = \frac{\psi(p)}{p} + \int \frac{\psi(p)}{p^2} dp + C,$$

con C costante arbitraria; e l'integrale cercato risulterà dall'insieme di questa equazione e dell'altra $y = \psi(p)$, e potrà anche aversi con una sola equazione in x e y quando fra le due equazioni trovate si riesca ad eliminare la nuova variabile p.

386. — Notiamo che negli ultimi due casi quando la equazione differenziale data si riferisce a curve, si può dire che in ciascuno dei casi stessi le curve che vi corrispondono propriamente si riducono a una sola veramente distinta, le altre non differendo da questa che per la loro posizione nel piano, poichè basta spostare parallelamente gli assi x o y (il che corrisponde a far muovere la curva parallelamente a sè stessa) per ridurre una qualunque delle infinite curve rappresentate dall'integrale generale a un'altra di esse qualsiasi.

Ciò risulta anche dalle stesse equazioni differenziali $f(x, y') = 0$ e $f(y, y') = 0$ coll'osservare che esse non mutano cambiandovi respettivamente y e x in $y + C$ e $x + C$, per modo che nel caso di queste equazioni conoscendo un integrale particolare si hanno subito tutti gli altri — nei quali figura la costante arbitraria — col cambiarvi y o x in $y+C$ o $x+C$ respettivamente (*).

(*) Questa osservazione è generale, poichè quando si abbia una equazione differenziale, anche di ordine superiore, che non contenga la variabile x o la variabile y, la equazione stessa non muterà quando alla variabile mancante si intenda aggiunta una costante arbitraria; e quindi se sarà trovato un integrale particolare di quella equazione, questo rimarrà un integrale anche quando in esso alla variabile che manca nella equazione differenziale si aggiunga una costante arbitraria.

E se mancheranno nella equazione differenziale ambedue le variabili x e y, le costanti arbitrarie nell'integrale potranno aggiungersi a tutte e due le variabili, ma in certi casi, come appunto avviene in quello della equazione $f(y') = 0$, si potranno ridurre ad una sola costante veramente distinta.

E notiamo anche che nel caso delle curve l'avere l'integrale rappresentato dall'insieme delle due formole $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$ corrisponde all'avere rappresentate le curve integrali per mezzo di due equazioni

$$x = \varphi(p), \quad y = \psi(p),$$

colla introduzione di una variabile ausiliaria p che rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva.

387. — È ora da osservare che il procedimento usato — quello cioè di introdurre come nuova variabile p la derivata prima y' della funzione incognita y, rappresentando poi l'integrale con un sistema di due equazioni nelle quali figura questa nuova variabile p, o colla equazione in x e y che risulta da queste colla eliminazione di p — può talvolta usarsi anche quando la equazione data $f(x, y, y') = 0$ contiene ambedue le variabili x e y.

Se si osserva infatti che, col porre $y' = p$ o $dy = p\,dx$, la equazione data si trasforma nell'altra $f(x, y, p) = 0$, e questa colla differenziazione dà la seguente $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$, si vede subito che eliminando da questa dx o dy, p. es. dy si ottiene la equazione

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0,$$

e se avverrà che eliminandovi y per mezzo della equazione precedente $f(x, y, p) = 0$ si giunga ad un'altra della forma

$$(4) \qquad M(x, p)\, dx + N(x, p)\, dp = 0$$

che rientri in uno dei casi trattati nei capi precedenti si potrà trovarne l'integrale con sole quadrature che sarà della forma $\theta(x, p, C) = 0$ con C costante arbitraria; e allora questa equazione insieme all'altra $f(x, y, p) = 0$ rappresenterà l'integrale della equazione data; e eliminando p fra queste, quando sia possibile, si avrà questo integrale anche con una equazione della forma $f(x, y, C) = 0$.

In particolare dunque se la equazione data $f(x, y, y') = 0$ sarà già risoluta o potrà risolversi rispetto ad y, per modo che essa si riduca alla forma

$$(5) \qquad y = f(x, y'),$$

e quindi per $y' = p$ si abbia $y = \varphi(x, p)$, allora, avendosi per la sua equazione differenziale $dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp$, invece della (3) avremo l'altra

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = 0;$$

e poichè questa conterrà, come la (4), soltanto x e p, essa sarà integrabile subito per quadrature quando rientri in uno dei casi trattati nei capi precedenti.

Ciò però a meno che venendo ad essere $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$, la equazione (6) non si riduca all'altra $\frac{\partial \varphi}{\partial p}\, dp = 0$, la quale per essere soddisfatta richiederà che sia $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$ o $dp = 0$, e il caso di $dp = 0$ dandoci $p = \text{cost.}$ porterebbe che p non potesse prendersi come variabile indipendente. Questo caso però, che si presenterebbe anche per la (3) quando in questa il coefficiente di dx risultasse zero in seguito alla eliminazione di y, sarà da noi studiato nel paragrafo seguente non essendo quello altro che il caso della equazione di *Clairaut*.

388. — Un caso che merita particolarmente di essere segnalato è quello delle *equazioni dette di D'Alembert*, o anche *di Lagrange*, cioè delle equazioni differenziali della forma

$$y = \varphi(y')\, x + \psi(y'), \tag{7}$$

che senza essere lineari rispetto a y', sono però lineari rispetto ad x e ad y contemporaneamente.

In questo caso che rientra fra quelli della equazione precedente (5), la equazione corrispondente (6) prende la forma

$$[\varphi(p) - p]\, dx + [\varphi'(p)\, x + \psi'(p)]\, dp = 0, \tag{8}$$

e questa, se non è $\varphi(p) = p$, si riduce subito all'altra

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\, x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p},$$

che è lineare in x e che per quanto dicemmo al § 366 [pag. 534-35] ha per integrale

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} \left\{ -\int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p} dp} dp + C \right\}, \tag{9}$$

o anche

$$x = \frac{1}{\varphi(p) - p} e^{-\int \frac{dp}{\varphi(p)-p}} \left\{ -\int \psi'(p) e^{\int \frac{dp}{\varphi(p)-p}} dp + C \right\}, \tag{10}$$

perchè $\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp = \log[\varphi(p) - p] + \int \frac{dp}{\varphi(p) - p}$; e così l'integrale della

equazione di D'Alembert (7) quando non è $\varphi(y') = y'$ risulterà dall'insieme della equazione (9) o (10) coll'altra $y = \varphi(p)\, x + \psi(p)$; e quando fra queste si riesca ad eliminare p, l'integrale potrà aversi con una sola equazione fra x e y.

Se poi sarà $\varphi(p) = p$, cioè se la equazione di D'Alembert sarà della forma

$$y = y'x + \psi(y'), \tag{11}$$

nel qual caso è detta ordinariamente l'*equazione di Clairaut*, allora la equazione (8) si ridurrà all'altra $[x + \psi'(p)]\, dp = 0$, e sarà soddisfatta quando sia $x + \psi'(p) = 0$, e quando sia $dp = 0$.

In questo caso dunque avremo un integrale rappresentato dal sistema delle due equazioni

$$x = -\psi'(p) \quad , \quad y = px + \psi(p) = \psi(p) - p\psi'(p)\,; \tag{12}$$

e siccome, indipendentemente dal supporre che p sia stato scelto come variabile indipendente, la (8) viene sempre dalla (7) colla semplice differenziazione quando vi si pone $y' = p$, e nel caso presente della equazione (11) essa è soddisfatta quando sia $p = \text{cost}$ o $y' = C$ e quindi $y = Cx + C_1$ con C costante arbitraria e C_1 altra costante, così anche questa formola $y = Cx + C_1$ potrà dare un integrale e lo darà effettivamente, e anzi corrisponderà all'integrale generale, quando si prenda $C_1 = \psi(C)$, perchè allora avendosi $y = Cx + \psi(C)$ colla derivazione otterremo $y' = C$, e quindi $y = y'x + \psi(y')$.

L'altro integrale rappresentato dalle due equazioni (12) mancando della costante arbitraria dovrà corrispondere a un integrale particolare o a una soluzione singolare; e se non corrisponderà appunto alla soluzione limite relativa al caso di $C = \infty$ cioè ad $x = -\lim_{C=\infty} \frac{\psi(C)}{C}$, che allora potrà considerarsi come l'integrale particolare corrispondente a $C = \infty$, è facile vedere che esso sarà sempre una soluzione singolare della equazione data (11).

Se infatti esso fosse un integrale particolare che risultasse dall'integrale generale $y = Cx + \psi(C)$ per un valore *finito* speciale $\overline{C}$ della costante C, allora per esso avremmo $dy = \overline{C}\, dx$; e poichè la seconda delle (12) dà $dy = p dx$, ne verrebbe $p = \overline{C}$, e per le stesse (12) la x e la y risulterebbero costanti entrambe, ciò che è assurdo perchè una almeno di queste due quantità deve essere variabile.

Nel caso geometrico dunque all'integrale generale della equazione di Clairaut (11) corrisponderà il sistema infinito di rette $y = Cx + \psi(C)$, e inoltre fra le linee che soddisfano alla stessa equazione vi sarà anche quella rappresentata dalle due

$$y = Cx + \psi(C)\ ,\quad 0 = x + \psi'(C)\ ,$$

che evidentemente è la curva inviluppo delle stesse rette.

E si può osservare che anche senza ricorrere ai procedimenti generali del paragrafo precedente, la equazione (11) colla derivazione rispetto ad x avrebbe condotto ugualmente a questi risultati, perchè derivandola ci avrebbe condotto alla equazione $[x+\psi'(y')]y''=0$, e questa avrebbe dato luogo alle due

$$x + \psi'(y') = 0\ ,\quad y'' = 0\ ,$$

delle quali la prima insieme alla (11) avrebbe dato l' integrale rappresentato sopra colle (12), e la seconda dandoci prima $y'=C$ e poi $y=Cx+C_1$, avrebbe ricondotto all' integrale generale $y=Cx+\psi(C)$.

389. — Diamo ora alcuni esempi d'integrazione di equazioni differenziali del prim'ordine che rientrano fra quelle considerate nei cinque paragrafi che precedono.

1.° Se si ha la equazione $y'^2 - a^2 = 0$, il suo integrale per quanto dicemmo al § 383 sarà dato dalla equazione $(y-C)^2 - a^2x^2 = 0$, essendo C la costante arbitraria.

2.° Se si ha la equazione

$$y'^2 + y' - x = 0\ , \tag{13}$$

saremo nel caso delle equazioni considerate nel § 384, e siccome ponendo $y'=p$ si avrà ora $x=p+p^2$, a causa delle (1) l'integrale della equazione data sarà rappresentato dall'insieme delle due

$$x = p + p^2\ ,\quad y = \frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{3}p^3 + C\ ;$$

e poichè la prima di esse ci dà $p^2 = x - p$ e per questa la seconda diviene

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}p + \frac{2}{3}px - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}p + C = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}p + \frac{2}{3}px + C\ ,$$

e ci dà $p = \dfrac{6y+x-6C}{1+4x}$, si potrà subito eliminare il p e così cambiando la costante $6C$ in C si troverà l'equazione

$$x = \frac{6y+x-C}{1+4x} + \left(\frac{6y+x-C}{1+4x}\right)^2$$

per l' integrale della equazione data (13) espresso per x e y.

3.° Vogliasi la curva nella quale la tangente geometrica T è media proporzionale fra la sotto-tangente e una retta di lunghezza data a.

Osservando che per la tangente si ha $T = \dfrac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$ e la sotto-tangente è $\dfrac{y}{y'}$, si vede subito che per la curva cercata si avrà la equazione differenziale $y = \dfrac{ay'}{1+y'^2}$ che rientra fra quelle considerate al § 385, e quindi col porre $y'=p$ si trova per la (2) che le curve stesse sono quelle rappresentate dalle due equazioni

$$y = \frac{ap}{1+p^2}\ ,\quad x = \frac{a}{1+p^2} + a\int\frac{dp}{p(1+p^2)} + C\ ,$$

le quali, per essere

$$\int\frac{dp}{p(1+p^2)} = \int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2}\right)dp = \log p - \frac{1}{2}\log(1+p^2) + C_1 = \log\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C_1\ ,$$

possono scriversi sotto la forma

$$x = \frac{a}{1+p^2} + a\log\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C\ ,\quad y = \frac{ap}{1+p^2}\ ,$$

quando si muti in C la costante $C + aC_1$.

Fra queste si può eliminare il p con tutta facilità, e allora si giunge alla equazione in x e y della curva cercata, che si presenta però sotto forma assai complicata.

4.° Vogliasi l' integrale della equazione

$$y = x^2 + xy' + ay'^2\ , \tag{14}$$

dove a è una costante, che rientra fra quelle considerate in fine del § 387.

Per questa colla introduzione della solita variabile p, una delle equazioni dell'integrale sarà la seguente $y = x^2 + px + ap^2$, e l'altra risulterà dall'integrare la equazione $2x\,dx + (x + 2ap)\,dp = 0$ alla quale si riduce la (6).

Questa equazione essendo omogenea fra le variabili che vi figurano x e p rientra fra quelle del § 363 [pag. 529] che s'integrano subito col porre $p = xz$, dandoci la seguente

$$\log x + \int\frac{1+2az}{2+z+2az^2}dz = C,$$

con C costante arbitraria; e poichè si ha

$$\int \frac{1+2az}{2+z+2az^2}dz = \frac{1}{2}\int \frac{1+4az}{2+z+2az^2}dz + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{2+z+2az^2} =$$

$$= \log\sqrt{2+z+2az^2} + \frac{1}{4a}\int \frac{dz}{\frac{16a-1}{16a^2}+\left(z+\frac{1}{4a}\right)^2} = \log\sqrt{2+z+2az^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{16a-1}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{4az+1}{\sqrt{16a-1}} + C_1,$$

sostituendo, e riponendo $\frac{p}{x}$ al posto di z si troverà che l'integrale della equazione (14) è rappresentato dalle due

$$y = x^2 + px + p^2\,, \quad \log\sqrt{2x^2+px+2ap^2} + \frac{1}{\sqrt{16a-1}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{4ap+x}{x\sqrt{16a-1}} = C\,,$$

fra le quali eliminando il p si ottiene facilmente anche l'integrale in x e y della stessa equazione (14).

5.° Vogliasi infine l'integrale della equazione $y = \frac{1}{2}xy' + y'^3$ che rientra come caso particolare fra quelle di D'Alembert del paragrafo precedente.

Confrontandola colle formole corrispondenti si vede che si ha ora $\varphi(p) = \frac{1}{2}p$ $\psi(p) = p^3$ e quindi per la (10) si ha subito $x = 6\,p\,(p+C)$ e l'integrale della equazione data viene rappresentato dall'insieme delle due equazioni

$$x = 6\,p\,(p+C)\,, \quad y = \frac{1}{2}px + p^3$$

nelle quali C è la costante arbitraria. Fra queste eliminando il p si trova subito l'equazione in x e y che per $C=0$ si riduce a quella semplicissima $y^2 = \frac{2}{27}x^3$ che rappresenta una curva del terz'ordine.

390. — Osserviamo in fine che i processi d'integrazione dati negli ultimi paragrafi in sostanza sono tutti basati sulla introduzione di una nuova variabile (la y' o p) scelta opportunamente in relazione colla equazione data; e questi processi riescono effettivamente utili quando riducono la integrazione della equazione data a quella di un'altra che si sa integrare.

Si comprende ora come questi processi possano essere estesi facendo un diverso cambiamento di variabile, o cambiando invece la funzione, o anche

cambiando ad un tempo sì la variabile che la funzione, e i cambiamenti facendoli sempre convenientemente e in relazione colla equazione data.

Così ad es. quando nella equazione data $f(x, y, y') = 0$ voglia farsi il cambiamento della funzione y coll'introduzione di un'altra funzione t che sia legata ad x e y, per es. con una equazione della forma $\varphi(x, y, t) = 0$, allora poichè da questa colla derivazione avremo l'altra $\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial t}t' = 0$, potrà darsi che eliminando fra queste due equazioni e la equazione data le due quantità y e y' si giunga a una equazione della forma $F(x, t, t') = 0$ che sia facilmente integrabile dando luogo così a un integrale della forma $\theta(x, t, C) = 0$; e allora l'integrale della equazione data potrà considerarsi come rappresentato dalle due $\varphi(x, y, t) = 0$ e $\theta(x, t, C) = 0$ o dalla relazione in x e y che si possa ottenere colla eliminazione di t fra queste equazioni.

Così ad es. se la equazione da integrare sarà la seguente

$$x + yy' + \frac{1}{x}e^{1-x^2-y^2} = 0\,,$$

introducendo una nuova funzione t colla formola $x^2 + y^2 + t = 1$, che colla derivazione ci dà $x + yy' + \frac{1}{2}t' = 0$, potremo eliminare y e y' fra queste tre equazioni giungendo così all'altra $\frac{1}{x}e^t - \frac{1}{2}t' = 0$, che è subito integrabile e ci dà $e^{-t} = -2\log x + \log C = \log\frac{C}{x^2}$, e ci permette perciò di dire che l'integrale della equazione data è rappresentato dalle due equazioni

$$x^2 + y^2 + t = 1\,, \quad e^{-t} = \log\frac{C}{x^2}\,,$$

ovvero dall'altra $e^{x^2+y^2-1} = \log\frac{C}{x^2}$ che si ottiene subito da queste colla eliminazione di t.

391. – E quando abbiasi ancora la solita equazione $f(x, y, y') = 0$, che si può scrivere sotto la forma $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ per considerarvi poi $\frac{dy}{dx}$ come un quoziente onde renderla relativa a qualsiasi variabile indipendente, se si cambieranno ambedue le variabili x e y in altre u e v mediante due relazioni della forma

(15) $$x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,,$$

le quali danno

(16) $$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\,, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\,,$$

la equazione data si trasformerà nell'altra

$$f\left(x(u,v)\ ,\ y(u,v)\ ,\ \frac{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv}{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv}\right)=0\ ,$$

cioè in una equazione della forma $F(u, v, du, dv) = 0$, e quando le (15) siano scelte convenientemente potrà darsi che questa nuova equazione si sappia integrare dando luogo così a una relazione della forma

(17) $$\theta(u, v, C) = 0\ ,$$

dove C è una costante arbitraria, e allora l'integrale della equazione data potrà intendersi come rappresentato dall'insieme delle tre equazioni (15) e (17), o da quella in x e y che si ottenga colla eliminazione di u e v.

In alcuni casi poi per fare queste trasformazioni invece delle due relazioni (15) potranno essere date le altre

(18) $$u = u(x, y)\ ,\ v = v(x, y)$$

o anche più generalmente le altre due della forma

(19) $$\varphi(x, y, u, v) = 0\ ,\ \ \psi(x, y, u, v) = 0\ ;$$

e queste formole di trasformazione daranno luogo a due equazioni differenziali che, insieme alle formole stesse e alla equazione data, colla eliminazione di dx e dy potranno talvolta condurre ad una equazione della forma $F(u, v, du, dv) = 0$ facilmente integrabile, ecc.

Così quando la equazione data sia già ridotta alla forma

(20) $$M\,dx + N\,dy = 0\ ,$$

allora per mezzo delle (16) nel caso che siano date le (15), e nel caso delle (18) per mezzo delle altre

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\ ,\ dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\ ,$$

le quali danno

(21) $$dx = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial y}du - \frac{\partial u}{\partial y}dv\right),\ \ dy = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}du + \frac{\partial u}{\partial x}\partial v\right),$$

essendo Δ il determinante funzionale delle funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ che deve naturalmente supporsi diverso da zero, si giungerà sempre, nel primo

caso alla equazione

(22) $$\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(M\frac{\partial x}{\partial v} + N\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = 0\ ,$$

e nel secondo caso all'altra

(23) $$\left(M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x}\right)du + \left(-M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial x}\right)dv = 0\ ,$$

cioè sempre a una equazione della forma

(24) $$P\,du + Q\,dv = 0\ ,$$

dove P e Q per mezzo delle (15) o delle (18) dovranno ridursi funzioni di u e v; e quando questa equazione venga a rientrare fra quelle considerate nei casi precedenti, se ne potrà effettuare subito la integrazione, con che rimarrà integrata anche la (20).

In particolare dunque l'integrazione potrà sempre effettuarsi quando il rapporto dei coefficienti di du e dv nella equazione trasformata (24) si ridurrà a quello di due funzioni una della sola u e una della sola v, o a quello di due funzioni in u e v omogenee e dello stesso grado, ecc.

392. — E così partendo da una equazione (20) che non si veda subito come possa integrarsi, potrà darsi che con adattate considerazioni si riesca a determinare formole di trasformazioni come le (15) o le (18) tali che per esse la equazione trasformata corrispondente (22) o (23) rientri in una di quelle che si sanno integrare, e allora rimarrà subito integrata anche la equazione data; come partendo da una equazione (24) in u e v che rientri fra quelle che si sanno integrare, con qualsiasi trasformazione (15) o (18) si giungerà sempre a equazioni (20) il cui integrale rimarrà subito conosciuto e nelle quali i coefficienti M e N saranno determinati dalle equazioni di primo grado

$$M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial y}{\partial u} = P\ ,\quad M\frac{\partial x}{\partial v} + N\frac{\partial y}{\partial v} = Q\ ,$$

o dalle altre

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = P\ ,\ -M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial x} = Q\ ,$$

tenendo conto sempre delle formole di trasformazione (15) o (18) per eliminare u e v.

393. — Un caso notevolissimo è quello in cui nella equazione data (20) i coefficienti M ed N sono funzioni razionali di x e y che possono quindi supporsi sempre anche intere.

In questo caso, supponendo che le formole di trasformazione (15) o (18) siano esse pure razionali e per di più anche lineari, la equazione trasformata corrispondente (22) o (23) a calcoli fatti si ridurrà essa pure razionale intera rispetto ad u e v; e se la equazione data sarà di grado m in x e y (nel senso cioè che uno dei due polinomii razionali interi M e N sia di grado m in x e y e l'altro sia di grado uguale o inferiore ad m), allora quando le formole che trasformano x e y in u e v abbiano uno stesso denominatore, il grado della equazione trasformata in u e v quando sia ridotta intera sarà $m+1$ al più. E in molti casi profittando della indeterminazione che si avrà nei coefficienti delle formole di trasformazione e determinando questi convenientemente, si potrà abbassare il grado della equazione trasformata o ridurre i suoi coefficienti P e Q o il loro rapporto a forme speciali date in u e v, per modo da avere una equazione facilmente integrabile.

394. — Naturalmente poi nei casi particolari, per la forma speciale che potrà avere la equazione data (20), e per essere le formole di trasformazioni (15) o (18) razionali e di primo grado, si potranno seguire talvolta metodi speciali di determinazione dei coefficienti di queste formole di trasformazione e di quelli della equazione finale (24), per giungere con maggiore facilità a questa equazione finale.

Così nel caso della equazione di secondo grado studiata *da Jacobi*

$$\mathrm{L}(x\,dy - y\,dx) - \mathrm{M}\,dy + \mathrm{N}\,dx = 0 \tag{25}$$

nella quale L, M e N sono le funzioni di primo grado

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}'x + \mathrm{A}''y\ ,\quad \mathrm{B} + \mathrm{B}'x + \mathrm{B}''y\ ,\quad \mathrm{C} + \mathrm{C}'x + \mathrm{C}''y\ ^{(*)}\ ,$$

partendo dalle formole di trasformazione (18) col prendere

$$u = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y}{\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y}\ ,\quad v = \frac{\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y}{\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y}, \tag{26}$$

e indicando con Γ il denominatore comune di queste formole, avremo

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma^2 du &= \mathrm{B}_1(x\,dy - y\,dx) - \mathrm{B}_2\,dy + \mathrm{B}_3\,dx\ ,\\ \Gamma^2 dv &= -\mathrm{A}_1(x\,dy - y\,dx) + \mathrm{A}_2\,dy - \mathrm{A}_3\,dx\ , \end{aligned}\right. \tag{27}$$

(*) JACOBI studiò la equazione (25) nel vol. 24° del « Journal für die reine und angewandte Mathematik von A. L. Crelle », facendo così una estensione del caso della equazione

$$nx(x\,dy - y\,dx) - (y + a + bx)\,dy + cy\,dx = 0$$

integrata da EULERO nelle *Istit. di Calc. integr.* vol. I, pag. 345.

essendo $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ gli elementi reciproci di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, nel determinante

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \tag{28}$$

che deve supporsi diverso da zero, altrimenti u e v non sarebbero fra loro indipendenti.

Valendosi ora delle (26) e (27) per eliminare x, y, dx e dy, potremmo trovare la equazione finale in u e v

$$\mathrm{P}\,du + \mathrm{Q}\,dv = 0\ , \tag{29}$$

nella quale quando sia ridotta intera, P e Q dovrebbero essere al più di terzo grado in u e v; ma è più semplice procedere con Jacobi nel modo seguente.

Si osservi che se la (29) deve essere la equazione finale, moltiplicando questa per Γ^2, e valendosi delle (27), la equazione che se ne deduce

$$(\mathrm{PB}_1 - \mathrm{QA}_1)(x\,dy - y\,dx) - (\mathrm{PB}_2 - \mathrm{QA}_2)\,dy + (\mathrm{PB}_3 - \mathrm{QA}_3)\,dx = 0\ ,$$

quando in essa per u e v nei valori di P e Q si intendano posti i valori (26) dovrà ritornare la (25) all'infuori di un fattore μ, e quindi se s'indica con λ la differenza fra i coefficienti L e $\mu(\mathrm{PB}_1 - \mathrm{QA}_1)$ di $x\,dy - y\,dx$ per modo da avere

$$\mu(\mathrm{PB}_1 - \mathrm{QA}_1) + \lambda = \mathrm{L}\ ,$$

si vede subito che dovrà essere

$$\mu(\mathrm{PB}_2 - \mathrm{QA}_2) + \lambda x = \mathrm{M}\ ,\quad \mu(\mathrm{PB}_3 - \mathrm{QA}_3) + \lambda y = \mathrm{N}.$$

Moltiplicando ora queste tre equazioni per gli elementi di ciascuna linea del determinante (28), e sommandole ogni volta con tener conto di note proprietà dei determinanti, giungeremo alle formole

$$\left\{\begin{aligned} -\mu\Lambda\mathrm{Q} + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y) &= \alpha_1\mathrm{L} + \alpha_2\mathrm{M} + \alpha_3\mathrm{N}\ ,\\ \mu\Lambda\mathrm{P} + \lambda(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y) &= \beta_1\mathrm{L} + \beta_2\mathrm{M} + \beta_3\mathrm{N}\ ,\\ \lambda(\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y) &= \gamma_1\mathrm{L} + \gamma_2\mathrm{M} + \gamma_3\mathrm{N}\ ; \end{aligned}\right. \tag{30}$$

e poichè i secondi membri di queste formole sono funzioni di primo grado, l'ultima di esse ci mostra che λ dovrà essere una costante, o dovrà essere il rapporto di due funzioni di primo grado, delle quali quella del denominatore sarà il denominatore comune $\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y$ di u e v (*); e se si vorrà che λ risulti una costante, sempre per la ultima di queste equazioni bisognerà che le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ siano determinate insieme a λ in modo che si abbiano le tre equazioni

$$(31) \qquad \begin{cases} (A-\lambda)\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3 = 0\,, \\ A'\gamma_1 + (B'-\lambda)\gamma_2 + C'\gamma_3 = 0\,, \\ A''\gamma_1 + B''\gamma_2 + (C''-\lambda)\gamma_3 = 0\,, \end{cases}$$

ciò che porta che λ debba essere una radice della equazione di terzo grado

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} A-\lambda & B & C \\ A' & B'-\lambda & C' \\ A'' & B'' & C''-\lambda \end{vmatrix} = 0\,;$$

dopo di che le stesse equazioni precedenti (31) determinano i rapporti di due delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ alla terza.

D'altra parte se s'indica con λ_1 una radice della equazione (32) e nelle formole di trasformazione (26) le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s'intendono determinate all'infuori di un fattore colle formole corrispondenti alle (31)

$$(33) \qquad \begin{cases} (A-\lambda_1)\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3 = 0\,, \\ A'\gamma_1 + (B'-\lambda_1)\gamma_2 + C'\gamma_3 = 0\,, \\ A''\gamma_1 + B''\gamma_2 + (C''-\lambda_1)\gamma_3 = 0\,, \end{cases}$$

la terza delle (30) porterà che il valore di λ che in essa figura debba essere appunto λ_1 perchè essa si ridurrà alla equazione $(\lambda - \lambda_1)(\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y) = 0$; quindi fissate così le γ_1, γ_2 e γ_3 o il denominatore Γ delle formole di trasformazione (26) (nelle quali un fattore costante arbitrario evidentemente può sempre introdursi), dalle due prime della (30) si vede subito che, comunque siano prese poi le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e le $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nelle stesse formole di trasformazione, le μP e μQ quando siano ridotte funzioni di x e y dovranno essere intere e di primo grado, e quindi come funzioni di u e v dovranno avere la forma seguente

$$\mu\, P = \frac{a_1 + a_2 u + a_3 v}{c_1 + c_2 u + c_3 v}\,, \quad \mu\, Q = \frac{b_1 + b_2 u + b_3 v}{c_1 + c_2 u + c_3 v}\,,$$

essendo le a, b, c quantità costanti.

(*) Ci scostiamo ora un poco dal processo di JACOBI, e così possiamo considerare anche il caso, tralasciato da lui ma esaminato poi dal SERRET, nel quale la equazione (32) non ha le radici tutte diseguali.

La (29) quindi potrà scriversi sotto la forma

$$(34) \qquad (a_1 + a_2 u + a_3 v)\, du + (b_1 + b_2 u + b_3 v)\, dv = 0\,,$$

che rientra fra quelle del § 364 (es. 4.°) [pag. 532] che già insegnammo a integrare; quindi si può dire evidentemente che, scelta una radice λ_1 della equazione di terzo grado (32) e determinate colle (33) all'infuori di un fattore le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ nelle formole (26), qualunque siano i valori che si prenderanno poi in queste formole per le altre costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, la equazione data (25) colla trasformazione (26) si potrà subito integrare.

395. — Così la integrazione della equazione (25) può farsi facilmente e in infiniti modi in ogni caso, cioè qualunque siano i coefficienti che figurano in L, M, N. Se poi, come il più comunemente avverrà, questi coefficienti di L, M e N saranno tali che la equazione (32) abbia le sue tre radici diseguali, allora indicando queste radici con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e, dopo di avere determinando $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ colle formole (33) in corrispondenza alla radice λ_1, determinano all'infuori di un fattore le altre costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e così le $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ colle formole del tutto simili alle (33) che vengono dal sistema (31) ponendovi per λ una volta λ_2 e in altra λ_3, e mutandovi le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e in $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, cioè colle formole

$$(35) \begin{cases} (A-\lambda_2)\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0\,, \\ A'\alpha_1 + (B'-\lambda_2)\alpha_2 + C'\alpha_3 = 0\,, \\ A''\alpha_1 + B''\alpha_2 + (C''-\lambda_2)\alpha_3 = 0\,, \end{cases} \quad (36) \begin{cases} (A-\lambda_3)\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 = 0\,, \\ A'\beta_1 + (B'-\lambda_3)\beta_2 + C'\beta_3 = 0\,, \\ A''\beta_1 + B''\beta_2 + (C''-\lambda_3)\beta_3 = 0\,, \end{cases}$$

per le due prime delle (30) si vede che sarà

$$\mu\, P = (\lambda_3 - \lambda_1)(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y) = (\lambda_3 - \lambda_1)\Gamma v\,, \quad \mu\, Q = -(\lambda_2 - \lambda_1)\Gamma u\,,$$

e quindi la equazione trasformata (29) della equazione data si ridurrà alla seguente $(\lambda_3 - \lambda_1)\, v\, du + (\lambda_1 - \lambda_2)\, u\, dv = 0$, ovvero $(\lambda_3 - \lambda_1)\dfrac{du}{u} + (\lambda_1 - \lambda_2)\dfrac{dv}{v} = 0$, che è subito integrabile e dà pel suo integrale la equazione $u^{\lambda_3 - \lambda_1} v^{\lambda_1 - \lambda_2} = \text{cost}$; ciò che porta per le (26) che l'integrale della equazione data (25) avrà la forma notevolissima trovata da Jacobi nella memoria citata

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y)^{\lambda_3 - \lambda_1} (\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y)^{\lambda_1 - \lambda_2} (\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y)^{\lambda_2 - \lambda_3} = \text{cost.}$$

nella quale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le tre radici — che si suppongono tutte differenti — della equazione di terzo grado (32), e le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s'intendono determinate coi sistemi di equazioni (35), (36) e (33).

Nel caso poi che la equazione (32) abbia radici uguali, allora le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ potranno ancora intendersi determinate colle (33) colla introduzione della radice λ_1 della (32), ma per le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ non potranno prendersi le equazioni (35) o (36) che porterebbero a valori proporzionali alle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ma dovranno scegliersi altri sistemi di valori qualsiansi che condurranno alla equazione (34) che si sà pure integrare; talchè anche in questo caso l'integrazione della equazione data (25) potrà pure effettuarsi.

Si comprende poi che *in certi casi* il processo usato potrà servire alla integrazione della equazione (25) anche quando le funzioni L, M, N sono *funzioni speciali* di grado superiore al primo.

XXII.

Fattore integrante delle espressioni differenziali $M\,dx + N\,dy$.

396. — Avendosi una equazione differenziale della forma

$$M\,dx + N\,dy = 0\,, \tag{1}$$

il più semplice dei casi nei quali la sua integrazione si riduce alle quadrature è quello in cui, essendo M funzione soltanto di x e N funzione soltanto di y, le variabili x e y sono separate; e allora l'integrale è dato dalla formola $\int M\,dx + \int N\,dy = C$, (C cost. arb.), e il primo membro della equazione, cioè la espressione $M\,dx + N\,dy$, è il differenziale esatto di una funzione determinata θ di x e y che è il primo membro $\int M\,dx + \int N\,dy$ della equazione che ci dà l'integrale.

Quando poi M ed N sono funzioni della forma $X\,Y$, $X_1 Y_1$ essendo X e X_1 funzioni soltanto di x, e Y e Y_1 funzioni soltanto di y, la equazione data (1) si riporta subito al caso precedente (§ 361 [pag. 525]) moltiplicandola pel fattore $\frac{1}{X_1 Y}$, e quindi il suo primo membro, cioè la espressione $M\,dx + N\,dy$, senza essere dapprima un differenziale esatto, lo diviene dopo essere stata moltiplicata per un fattore conveniente $\frac{1}{X_1\,Y}$, e la integrazione della equazione data si effettua allora con quadrature.

Nel caso generale poi potrà darsi che il primo membro $M\,dx + N\,dy$ della equazione data, senza rientrare nei due casi ora indicati, sia ancora un differenziale esatto di una certa funzione $f(x, y)$, e per assicurarsi di questo, quando M e N sono finite e continue insieme alle loro derivate $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$, basterà come è noto (§ 295 [pag. 440 e seg.]) accertarsi che si abbia $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$; e quando questo accada e sia trovata la funzione $f(x,y)$ (la quale si determinerà con sole quadrature con uno dei processi indicati nel Cap. XVII (pag. 442 e seg.), l'integrale della equazione data sarà subito conosciuto, poichè sarà dato senz'altro dalla formola $f(x,y)=C$, essendo C una costante arbitraria.

Si ha dunque così un altro caso nel quale la integrazione di una equazione data (1) si riduce subito alle quadrature, ed è quello nel quale si riscontri che il suo primo membro è un differenziale esatto perchè risulta soddisfatta la condizione $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$; e si comprende quindi che quando questo non sia, sarà molto utile se, come pel caso testè ricordato del § 361, si potrà trovare una funzione v tale che, moltiplicando per essa la equazione data, il primo membro di questa venga ad essere un differenziale esatto(*).

In seguito a ciò, viene a porsi naturalmente il problema di ricercare i fattori v tali che, moltiplicando per essi una equazione come la (1), il suo primo membro diviene un differenziale esatto; cioè, indipendentemente anche dalle questioni di integrazione delle equazioni differenziali, si tratta di cercare i fattori v pei quali moltiplicando una espressione differenziale data $Mdx+Ndy$ (che nel caso di una equazione differenziale (1) sarà il suo primo membro) la nuova espressione differenziale $v(Mdx+Ndy)$ risulta un differenziale esatto; o come si dice cercare *i fattori integranti* della stessa espressione.

397. — Che questi fattori integranti per le espressioni differenziali $Mdx+Ndy$ esistano, almeno nei casi ordinarii, risulta facilmente dalle considerazioni seguenti.

Osserviamo che per la dimostrazione che facemmo al cap. XIX della esistenza e della unicità degli integrali delle equazioni differenziali, si può affermare che, almeno in determinate porzioni di ogni campo a due variabili nel quale per semplicità supporremo senz'altro che il rapporto $\frac{M}{N}$ sia finito e continuo insieme alla sua derivata prima rispetto ad y, per ogni equazione differenziale della forma della (1) esiste sempre un integrale che contiene una

(*) Moltiplicando la equazione data (1) pel fattore v essa, come equazione differenziale, non verrà ad alterarsi; solo potrà darsi che vengano ad aggiungersi o a togliersi alcune soluzioni della equazione stessa, che saranno tutte o parte di quelle per le quali $v=0$ o $\frac{1}{v}=0$; e per queste potrà farsi poi un esame speciale a parte.

costante arbitraria C e che potremo rappresentare colla equazione $F(x,y,C)=0$, la quale potrà sempre immaginarsi risoluta rispetto alla costante C(*).

Così questo integrale prenderà la forma $\theta(x,y)=C$; e nel valore di y' o $\frac{dy}{dx}$ che si trarrà da questa equazione e che sarà $-\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial y}}$ non figurerà la costante arbitraria C, e esso dovrà soddisfare alla equazione differenziale data (1), il che porta che dovremo avere la formola

$$\frac{1}{M}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{N}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

la quale dovrà essere una identità, perchè altrimenti, non contenendo la costante arbitraria C, costituirebbe una nuova relazione fra x e y distinta dall'integrale che contiene invece C e col quale dovrebbe coesistere, e questo è inammissibile.

Ne segue che i due rapporti $\frac{1}{M}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ e $\frac{1}{N}\frac{\partial\theta}{\partial y}$ rappresenteranno una stessa

(*) Propriamente per quanto è stato dimostrato nel cap. XIX si può dire che esiste uno e un solo integrale

$$(\alpha)\qquad y=\varphi(x,y,x_0,y_0)$$

della equazione (1) che per $x=x_0$ diventa uguale a y_0 quando il rapporto $\frac{M}{N}$ è una funzione di x e y che in un certo campo nel quale è preso ad arbitrio il punto (x_0,y_0) è finita e continua e soddisfa alla condizione di Lipschitz, e per quanto fu detto nello stesso capitolo al § 349 (p. 514) se il detto rapporto $\frac{M}{N}$ avrà anche la derivata prima rispetto ad y finita e continua, l'integrale stesso anche considerato come funzione di y_0 sarà finito e continuo insieme alla sua derivata prima rispetto a y_0.

Scritta perciò la equazione (α) sotto la forma $y-\varphi(x,y,x_0,y_0)=0$, e in essa intendendo fissato il valore x_0 per modo da poterne fare del tutto astrazione, questa equazione terrà luogo della $F(x,y,C)=0$ scritta sopra per l'integrale, al posto della C venendo a figurare y_0; e la derivata del suo primo membro rispetto a y_0 non potrà essere sempre zero per ogni sistema di valori di x e y, perchè altrimenti l'integrale sarebbe indipendente da y_0.

Per la teoria quindi delle funzioni implicite essa definirà una funzione y_0 di x e y, che potremo indicare con $\theta(x,y)$, che per $x=x_0$, $y=y_0$ prende il valore y_0, cioè si avrà la equazione $\theta(x,y)=y_0$; e questa corrisponderà alla $\theta(x,y)=C$ del testo, per modo che si può dire assicurato che, sotto le condizioni poste pel rapporto $\frac{M}{N}$, ad ogni equazione differenziale come la (1) corrisponde una equazione della forma $\theta(x,y)=C$ che rappresenta essa pure il suo integrale.

funzione delle due variabili x, y e indicandola con v avremo $\frac{\partial\theta}{\partial x} = v\mathrm{M}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y} = v\mathrm{N}$ e quindi la espressione $v(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy)$ sarà il differenziale esatto della funzione $\theta(x, y)$; e questo, dimostra appunto come volevamo, la esistenza del fattore v che rende un differenziale esatto la espressione data $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ quando si moltiplica per v, cioè dimostra la esistenza di un fattore integrante.

398. — Aggiungiamo che trovato un fattore integrante v di una espressione differenziale $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$, se sarà $\theta(x, y)$(*) la funzione della quale il prodotto $v(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$ sarà il differenziale, avremo $v(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = d\theta$, e se indicheremo con $\varphi(\theta)$ una funzione qualsiasi finita e continua di θ avremo anche

$$v\varphi(\theta)\,(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \varphi(\theta)\,d\theta = d\int \varphi(\theta)\,d\theta,$$

ciò che mostra che $v\varphi(\theta)$ sarà un altro fattore integrante della espressione differenziale data; quindi, a causa dell'arbitrarietà di $\varphi(\theta)$, si può ora affermare che quando sia data una espressione differenziale $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ per la quale il rapporto $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ sia finito e continuo insieme alla sua derivata prima rispetto ad y in un certo campo, *esistono sempre in questo campo infiniti fattori integranti della stessa espressione; e se v è uno di questi fattori, e $\theta(x, y)$ è la funzione corrispondente di x e y, della quale la espressione $v(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy)$ è il differenziale esatto, anche $v\varphi(\theta)$ sarà un fattore integrante della espressione data, e ciò qualunque sia la funzione $\varphi(\theta)$ purchè finita e continua* (derivabile o no).

399. — Per quanto abbiamo detto sopra, quando sia data una espressione differenziale $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$, se con un processo qualsiasi si riuscirà a trovare l'integrale della equazione corrispondente

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}\,dy = 0 \tag{2}$$

sotto la forma $\theta(x, y) = \mathrm{C}$, si avrà subito un fattore integrante v della espressione data prendendo $v = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial\theta}{\partial x}$ o $v = \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial\theta}{\partial y}$ (**); ma così la ricerca del fattore integrante viene a dipendere da quella dell'integrale della equazione

(*) Essendo $v(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$ un differenziale esatto, la funzione $\theta(x, y)$ si troverà con semplici quadrature mediante i processi del cap. XVII.

(**) Quando l'integrale della equazione (2) non si abbia sotto la forma $\theta(x, y) = \mathrm{C}$ ma sia invece sotto la forma $\mathrm{F}(x, y, \mathrm{C}) = 0$, allora, siccome la funzione $\theta(x, y)$ corrispondente sarebbe quella che risulterebbe definita come funzione C di x e y da questa

corrispondente (2) che bisogna supporre determinato, e quindi quando non si riesca a trovare in altri modi i fattori integranti, non è possibile valersi di essi per la integrazione delle equazioni differenziali (2).

D'altra parte la ricerca dei fattori integranti di una espressione differenziale $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ quando deve farsi indipendentemente dalla conoscenza dell'integrale della equazione corrispondente $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$ presenta il più spesso difficoltà insormontabili; talchè è ben raro il caso in cui l'integrazione delle equazioni differenziali può farsi coll'uso dei fattori integranti.

Malgrado questo però anche il fatto solo della esistenza di tali fattori ha già una importanza grandissima, perchè, in altri studii, basandosi appunto su quella esistenza si ottengono risultati notevolissimi; e quindi anche indipendentemente dalle questioni d'integrazione delle equazioni differenziali, e dalla possibilità o meno di determinare effettivamente i fattori integranti, era sempre opportuno di mettere in luce la esistenza di essi; come ora troviamo anche opportuno di dare la equazione a derivate parziali alla quale soddisfano — per modo che da essa, volendo, può anche farsi dipendere la loro determinazione —, e di indicare le proprietà principali dei fattori medesimi, almeno quando si richiede che essi oltre essere finiti e continui siano anche derivabili.

400. — La equazione a derivate parziali alla quale deve soddisfare ogni fattore integrante finito continuo e derivabile di una espressione differenziale $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ si trova subito coll'osservare che se v è uno di questi fattori la espressione $v\mathrm{M}dx + v\mathrm{N}dy$ sarà un differenziale esatto, e quindi per lo stesso fattore v dovremo avere la equazione

$$\frac{\partial(v\mathrm{M})}{\partial y} = \frac{\partial(v\mathrm{N})}{\partial x} \tag{3}$$

che è appunto quella cercata, e che eseguendo le derivazioni può anche ri-

equazione e sarebbe quindi identicamente $\mathrm{F}(x, y, \theta(x, y)) = 0$, è evidente che si avrebbero le formole

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}}}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}}},$$

nelle quali dove comparisce il C s'intende che debba porsi la indicata funzione θ e $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}}$ deve supporsi diverso da zero; quindi si può evidentemente affermare che in questo caso il fattore integrante sarà la funzione che così viene dall'una o dall'altra delle due espressioni $\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}}}$ e $\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}}}$ eliminandovi il C per mezzo dell'integrale $\mathrm{F}(x, y, \mathrm{C}) = 0$.

dursi alla forma

(4) $$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right);$$

e inversamente ogni funzione v che soddisfi a questa equazione sarà un fattore integrante della espressione data, perchè per essa verrà appunto ad essere soddisfatta la condizione d'integrabilità della espressione $v\,(Mdx + Ndy)$.

401. — La equazione a derivate parziali che abbiamo trovata mette in evidenza le due proprietà dei fattori integranti che qui ci siamo prefissi di indicare.

La prima di queste proprietà è l'inversa di quella che dimostrammo al § 398 in quanto ci dice che *se v è uno degli indicati fattori integranti (finiti continui e derivabili) della solita espressione $Mdx + Ndy$, e $\theta(x, y)$ è l'integrale corrispondente della espressione $v(Mdx + Ndy)$, ogni altro di tali fattori integranti w della stessa espressione sarà della forma $v\,\varphi(\theta)$, essendo $\varphi(\theta)$ finita continua e derivabile* (*).

Si osservi infatti che se, come supponiamo, v e w sono due fattori integranti della espressione $Mdx + Ndy$, dovendo aversi insieme alla (3) anche l'altra $\frac{\partial(wM)}{\partial y} = \frac{\partial(wN)}{\partial x}$, che può anche scriversi sotto la forma $\frac{\partial\left(\frac{w}{v}\cdot vM\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{w}{v}\cdot vN\right)}{\partial x}$, si vede che sarà

$$vM\frac{\partial\frac{w}{v}}{\partial y} - vN\frac{\partial\frac{w}{v}}{\partial x} = 0;$$

e per essere $vM = \frac{\partial\theta}{\partial x}$, $vN = \frac{\partial\theta}{\partial y}$ avremo la formola

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\frac{w}{v}}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\frac{w}{v}}{\partial x} = 0,$$

(*) Notiamo che mentre nel § 398 abbiamo posto per condizione che la funzione $\varphi(\theta)$ sia soltanto finita e continua (e avremmo anche potuto limitarci a richiedere che fosse finita e integrabile), qui si pone la condizione più restrittiva che essa sia anche derivabile. Questo però non deve meravigliare perchè nel caso attuale, cercando la equazione a derivate parziali alla quale deve soddisfare il fattore integrante si viene naturalmente a richiedere che questo fattore oltre ad essere finito e continuo sia anche derivabile, e d'altra parte la condizione d'integrabilità (3) della espressione differenziale $Mdx + Ndy$ dopo moltiplicata pel fattore integrante v è quella che trovammo nel Cap. XVII supponendo allora che i coefficienti nella espressione differenziale avessero le derivate che si considerano finite e continue; mentre nel § 398 le cose si presentano in modo che si richiede soltanto che esista l'integrale della stessa espressione differenziale, il che è meno restrittivo.

per la quale risulta zero lo Iacobiano delle funzioni $\frac{w}{v}$ e θ, e se ne deduce perciò *(Calc. differ.* pag. 264-265 in nota) che queste due funzioni devono essere legate da una relazione della forma $\psi\left(\frac{w}{v}, \theta\right) = 0$, e quindi deve essere $\frac{w}{v} = \varphi(\theta)$ e $w = v\varphi(\theta)$.

Notiamo che in forza di questo risultato si può anche affermare che quando con un processo qualsiasi sia stato trovato un integrale particolare v della equazione a derivate parziali (4), ogni altro suo integrale w si otterrà immediatamente, perchè per esso si avrà $w = v\varphi(\theta)$, essendo θ l'integrale del differenziale esatto $v(Mdx + Ndy)$ che si potrà trovare con sole quadrature, e $\varphi(\theta)$ una funzione arbitraria finita e continua e derivabile di θ.

402. — L'altra proprietà dei fattori integranti alla quale alludevamo sopra discende immediatamente da quella dimostrata ora.

Si osservi infatti che dalla proprietà dimostrata risulta che se v e w sono due fattori integranti della solita espressione differenziale $Mdx + Ndy$, e questi fattori sono *distinti* fra loro, cioè sono tali che il loro rapporto non è una costante, si deve avere di necessità $\frac{w}{v} = \varphi(\theta)$, essendo θ l'integrale della espressione $v(Mdx + Ndy)$, il che porta che $\theta = \text{cost.}$ o $\varphi(\theta) = \text{cost.}$ sia l'integrale della equazione differenziale corrispondente $Mdx + Ndy = 0$; e di qui si conclude subito che *quando con un processo qualsiasi siano trovati due fattori integranti distinti (finiti continui e derivabili) v e w della espressione differenziale $Mdx + Ndy$, si avrà subito l'integrale della equazione differenziale corrispondente $Mdx + Ndy = 0$, uguagliando a una costante arbitraria il rapporto $\frac{w}{v}$ di questi due fattori.*

403. — Fermandoci ancora sulla equazione a derivate parziali (3) o (4), rileviamo come già dicemmo che ogni suo integrale v rappresenta un fattore integrante della espressione differenziale $Mdx + Ndy$; e poichè, come già nel capitolo precedente si potè dimostrare la esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, si dimostra anche quella degli integrali delle equazioni a derivate parziali, così possiamo dire che anche di qui risulta l'esistenza dei fattori integranti delle espressioni differenziali almeno limitatamente a quelli che sono finiti continui e derivabili, e ne risulta al tempo stesso un processo per la ricerca di questi fattori che consiste nella ricerca degli integrali delle equazioni stesse (3) o (4).

Questo processo però, in generale, è a dirsi puramente teorico, perchè nella teoria delle equazioni a derivate parziali del prim'ordine la integrazione della equazione (4) torna a dipendere da quella della equazione differenziale $Mdx+Ndy=0$ che spesso non si sà integrare; però, siccome basta conoscere un fattore integrante particolare per poterne poi dedurre tutti gli altri e per potere integrare completamente la equazione $Mdx+Ndy=0$ e le equazioni (3) e (4), si comprende che l'avere ridotta la ricerca dei fattori integranti a quella degli integrali di queste ultime equazioni riuscirà utilissima in tutti quei casi nei quali con un processo qualsiasi o con particolari considerazioni o tentativi si riesca a trovare un integrale particolare delle stesse equazioni (3) o (4).

404. — Naturalmente però questi casi si presenteranno soltanto quando si avranno espressioni differenziali particolari $Mdx+Ndy$ o equazioni differenziali speciali $Mdx+Ndy=0$; e alcuni degli stessi casi si troveranno cercando quali siano le espressioni differenziali per le quali vi sono fattori integranti che hanno particolarità speciali.

Indicheremo ora alcuni di questi casi, incominciando da quello in cui si richiede che esista un fattore integrante v che sia funzione di una sola delle variabili x o y per es. della x.

In questo caso per questo fattore v dovrà essere $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, e perciò la equazione (4) si ridurrà all'altra

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

nella quale abbiamo rappresentato con $\frac{dv}{dx}$ la derivata di v perchè ora si richiede che v contenga una sola variabile, la x; quindi da questa si vede che il caso attuale non potrà presentarsi altro che quando la espressione $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ sia essa pure una funzione della sola x, e allora pel fattore integrante cercato v si avrà, integrando, $\log v=\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx+\log C$, ovvero $v=Ce^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$ con C costante arbitraria che potrà prendersi uguale ad uno; e così poichè un risultato simile si ha anche quando si richiede che il fattore v sia funzione della sola y, si può ora affermare che quando, avendosi la solita espressione differenziale $Mdx+Ndy$, si riscontrerà che formando le due espressioni

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right), \quad \text{e} \quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

la prima di queste contiene soltanto la x o la seconda contiene soltanto la y, allora si avrà un fattore integrante v funzione della sola x nel primo caso che sarà dato dalla formola $v=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$, e se ne avrà uno v_1 funzione della sola y nel secondo caso che sarà dato dalla formola $v_1=e^{\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$.

Così per es. avendo la espressione differenziale

$$[1+xy+x\cos(x+y)]\,dx+\left[x^2+\frac{x}{y}+x\cos(x+y)\right]dy,$$

siccome si trova che in questo caso si ha $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{1}{x}$, si vede subito che un fattore integrante della stessa espressione è $\frac{1}{x}$.

405. — Un secondo caso in cui si trova con facilità un fattore integrante di $Mdx+Ndy$ è quello in cui M ed N sono tali che uno v di questi fattori possa essere della forma XY essendo X una funzione soltanto di x e Y una funzione soltanto di y.

In questo caso infatti per la equazione (4) si vede che X e Y devono soddisfare alla condizione

$$N\frac{X'}{X}-M\frac{Y'}{Y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x},$$

e quindi onde la cosa sia possibile è necessario e sufficiente che la differenza $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ risulti della forma $N\varphi(x)-M\psi(y)$; e quando questo avvenga basterà prendere evidentemente X e Y in modo che si abbia $\frac{X'}{X}=\varphi(x)$, $\frac{Y'}{Y}=\psi(y)$ ovvero $X=Ce^{\int\varphi(x)dx}$, $Y=C_1e^{\int\psi(y)dy}$ con C e C_1 costanti; cioè si potrà prendere $v=ke^{\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(y)\,dy}$, essendo k una costante.

E così in particolare quando si abbia la equazione studiata da Abel (*)

(5) $$y\,dy+(p+qy)\,dx=0,$$

(*) Abel (*Oeuvres*, tome second, pag. 26) studia la equazione

(α) $$(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0,$$

dove p, q, r e s sono funzioni della sola x, e dimostra che col porre $y=\alpha+\beta z$ basta prendere $\alpha=-s$, $\beta=e^{-\int r\,dx}$ perchè la equazione stessa si riduca sempre all'altra

$$z\,dz+(P+Qz)\,dx=0,$$

nella quale p e q sono funzioni della sola x, osservando che allora si ha $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = q$ si vede che onde il suo primo membro abbia un fattore integrante della forma XY o $k e^{\int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy}$, bisogna che p e q siano tali che si possano trovare due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ per le quali si abbia la equazione

$$(6) \qquad q = y\varphi(x) - (p + qy)\psi(y),$$

la quale con una prima derivazione rispetto ad y dà luogo alla seguente

$$\varphi(x) - p\psi'(y) - q\,[y\psi(y)]' = 0,$$

e con altre due derivazioni pure relative ad y conduce alle altre

$$(7) \qquad p\psi''(y) - q\,[y\psi(y)]'' = 0, \quad p\psi'''(y) - q\,[y\psi(y)]''' = 0;$$

e queste quando, come qui naturalmente si suppone, p e q non siano zero ambedue e neppure una sola di esse (*), richiedono che si abbiano le due

$$\psi'''(y) = a\psi''(y), \quad [y\psi(y)]''' = a\,[y\psi(y)]'',$$

ovvero

$$(8) \qquad \psi'''(y) = a\,\psi''(y), \; y\psi'''(y) + 3\psi''(y) = a\,y\psi''(y) + 2a\,\psi'(y),$$

---

dove

$$P = (p - qs + rs^2)\,e^{2\int r\,dx}, \quad Q = \left\{q - 2rs - \frac{ds}{dx}\right\} e^{\int r\,dx},$$

dal che risulta che quando $p - qs + rs^2 = 0$, come quando $q - 2rs - \frac{ds}{dx} = 0$ la equazione data (α) è subito integrabile per sole quadrature.

Considerando poi la equazione della forma ridotta

$$(\beta) \qquad y\,dy + (p + qy)\,dx = 0,$$

Abel studia i casi nei quali esiste un fattore integrante del primo membro della forma e^r, con

$$r = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_n y^n,$$

essendo le $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ funzioni della sola x, e trova la relazione che deve sussistere fra p e q nella equazione data perché ci sia effettivamente un fattore integrante della forma indicata.

Nel caso particolare in cui deve essere $r = \alpha + \alpha_1 y$ Abel trova che deve sussistere fra p e q la relazione $cp + q = 0$ con c costante, e allora $\alpha_1 = c$, e $\alpha = c\int q\,dx$, come anche noi abbiamo trovato sopra.

Avuti i fattori integranti per la equazione considerata, naturalmente se ne deduce subito l'integrale con sole quadrature.

(*) Ove le p e q fossero nulle una o tutte e due, la equazione (5) sarebbe o si ridurrebbe subito ad avere le variabili separate, o sarebbe la $dy = 0$, ed è naturale che non si considerino ora questi casi.

essendo a una costante, a meno che non sia $\psi''(y) = 0$ con $[y\psi(y)]'' = 0$, ciò che richiederà che sia anche $\psi'(y) = 0$.

Ma la seconda delle equazioni (8) tenendo conto della prima ci mostra che dovrebbe essere $\psi''(y) = \frac{2}{3}a\psi'(y)$ e quindi anche $\psi'''(y) = \frac{2}{3}a\psi''(y)$, e questa non può coesistere colla prima delle (8) stesse altro che quando si abbia $\psi'(y) = 0$, o si abbia $a = 0$ con $\psi''(y) = 0$ che per la prima delle (7) richiederebbe che fosse $[y\psi(y)]'' = 0$ e perciò ancora $\psi'(y) = 0$; quindi si può senz'altro concludere che dovrà essere $\psi(y) = c$, essendo c una costante.

La (6) stessa diverrà quindi

$$y\{\varphi(x) - cq\} - cp - q = 0,$$

e perchè sia soddisfatta bisognerà che nella equazione data (5) p e q siano legate fra loro dalla relazione lineare $cp + q = 0$ come appunto trovò Abel, e si dovrà prendere $\varphi(x) = cq$, e quindi il fattore integrante sarà

$$k e^{c\int q\,dx + cy} = k e^{c\left(y + \int q\,dx\right)}.$$

406. — Un terzo caso molto interessante è quello in cui, essendo nella solita espressione $M\,dx + N\,dy$ le funzioni M ed N omogenee e dello stesso grado m, si cerca se vi sia un fattore integrante v che sia esso pure omogeneo e del grado n.

In questo caso se un tale fattore omogeneo v esiste. le funzioni vM e vN dovranno essere anch'esse funzioni omogenee e del grado $m+n$, e quindi oltre a soddisfare alla equazione (3), ciascuna di esse dovrà soddisfare alla equazione di Eulero, cioè si avranno le formole

$$x\frac{\partial(vM)}{\partial x} + y\frac{\partial(vM)}{\partial y} = (m+n)\,vM, \quad x\frac{\partial(vN)}{\partial x} + y\frac{\partial(vN)}{\partial y} = (m+n)\,vN,$$

Trasformando la prima di questa formola per mezzo della (3) si ottiene subito l'altra

$$x\frac{\partial(vM)}{\partial x} + y\frac{\partial(vN)}{\partial x} = (m+n)\,vM,$$

che può scriversi sotto la forma $\frac{\partial(xvM)}{\partial x} + \frac{\partial(yvN)}{\partial x} = (m+n+1)\,vM$, ovvero $\frac{\partial v\{Mx + Ny\}}{\partial x} = (m+n+1)\,vM$; mentre operando al modo stesso sulla seconda delle precedenti si avrà l'altra $\frac{\partial\{v(Mx+Ny)\}}{\partial y} = (m+n+1)\,vN$; quindi se n sarà preso in modo che si abbia $m+n+1 = 0$, cioè se sarà $n = -(m+1)$, si vede che dovrà essere $v\,(Mx+Ny)=$ cost.; e perciò se non sarà $Mx+Ny=0$ dovremo avere $v=\frac{C}{Mx+Ny}$, essendo C una costante che può prendersi uguale ad 1; ed ora poichè si riscontra che effettivamente questo valore di v risulta omogeneo e del grado $-(m+1)$ ed evidentemente soddisfa alla equazione (3), si conclude che quando M e N sono funzioni omogenee dello stesso grado e non è $Mx+Ny=0$ l'espressione $\frac{C}{Mx+Ny}$ sarà sempre un fattore integrante della espressione $Mdx+Ndy$.

Nel caso poi di $Mx+Ny=0$ o $\frac{M}{N}=-\frac{y}{x}$ si riscontra subito che un fattore integrante è $\frac{1}{Ny}$.

Così dunque si può dire ad es. che la espressione omogenea $ydx+xdy$ ha un fattore integrante uguale a $\frac{1}{xy}$, l'altra $(x+y)\,dx+\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ ha un fattore integrante uguale a $\frac{1}{x(x+y)+y\sqrt{x^2+y^2}}$, ecc.

407. — E si può aggiungere che siccome per quanto dicemmo al § 363 (pag. 529-30), l'integrazione delle equazioni differenziali $Mdx+Ndy=0$ omogenee rispetto ad x e y può sempre ridursi alle quadrature, e l'integrale si presenta sotto la forma $\theta\,(x,y)=C$, sarà facile in ogni caso trovare anche per altra via un fattore integrante w della espressione omogenea $Mdx+Ndy$; e quando non sia $Mx+Ny=0$ e questo nuovo fattore integrante w sia trovato e sia *distinto* da quello determinato sopra $\frac{1}{Mx+Ny}$, pel teorema del § 402 si può asserire che $w\,(Mx+Ny)=$ cost. sarà l'integrale generale della equazione differenziale omogenea corrispondente $Mdx+Ndy=0$.

In particolare quindi se $Mdx+Ndy$ sarà già un differenziale esatto e sarà omogeneo, potendo una quantità costante diversa da zero qualsiasi considerarsi come un suo fattore integrante w, si può dire che in questo caso l'integrale generale della equazione $Mdx+Ndy=0$ sarà sempre dato dalla formola $Mx+Ny=$ cost. a meno che la espressione $Mx+Ny$ non sia già identicamente una quantità costante.

XXIII.

Sulle soluzioni singolari delle equazioni differenziali del prim' ordine

408. — Abbiamo già detto in altra occasione che, oltre alle soluzioni di una equazione differenziale date dal loro integrale generale, vi sono talvolta altre soluzioni speciali, dette *soluzioni singolari,* che soddisfano ancora alla equazione differenziale data, ma non contengono il numero di costanti necessarie per potere corrispondere all'integrale generale, e neppure possono dedursi da questo integrale particolarizzando convenientemente tutte o alcune delle costanti contenute in esso; e noi fermandoci al caso delle equazioni differenziali del prim' ordine, vogliamo indicare anche il modo di trovare le loro soluzioni singolari quando esistono.

Sia perciò

$$f(x,y,y')=0 \tag{1}$$

una equazione differenziale del prim' ordine, e ammettiamo che si sia trovata la equazione

$$\varphi\,(x,y,C)=0, \tag{2}$$

dove C è la costante arbitraria, come suo integrale generale, pel quale supporremo naturalmente che, almeno in un certo campo relativo a x, y e C, la funzione $\varphi\,(x,y,C)$ sia finita continua e a un sol valore insieme a quelle delle sue derivate che occorrerà di considerare, e che per ogni sistema di valori x_0 e y_0 di x e y si possa avere almeno un valore C_0 di C pel quale si abbia $\varphi\,(x_0,y_0,C_0)=0$; e inoltre la stessa equazione (2) quando vi sia fatto $C=C_0$ definisca una funzione y di x che per $x=x_0$ prende il valore (qualsiasi) y_0, e oltre essere finita e continua e ammettere la derivata pei valori di x in un certo tratto al quale appartiene x_0 (*), soddisfa alla equazione differenziale data (1).

(*) Questo per la teoria delle funzioni implicite avverrà certamente quando per $C=C_0$ la derivata $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sia diversa da zero nel punto (x_0, y_0)

Il valore di y' dedotto da questa equazione, cioè $-\dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$, quando, valendosi della equazione stessa (2), vi si elimini la costante C dovrà ridursi uguale al valore di y' che sarà definito dalla (1); e se oltre all'integrale generale (2) esisterà anche una soluzione singolare

$$\psi(x, y) = 0 \tag{3}$$

della stessa equazione data (1), il valore di y' dedotto da quest'ultima equazione (3) e combinato o no con questa stessa equazione dovrà essere ancora uguale a quello che sarà definito dalla equazione (1).

Questa soluzione singolare (3) non potrà risultare dalla equazione (2) dando in questa un valore costante particolare a C, perchè altrimenti la soluzione stessa sarebbe un integrale particolare; però almeno in generale essa si otterrà ancora dall'integrale generale (2) ponendovi per C invece di un valore costante una funzione speciale determinata, che sarà quella funzione $C(x, y)$ che almeno in generale soddisfarà alla equazione $\varphi(x, y, C) = \psi(x, y)$.

409. — Per vedere bene questo prendiamo a considerare una soluzione qualsiasi (singolare o no) $\psi(x, y) = 0$ della nostra equazione (1), e ammettiamo che i sistemi di valori (x, y) che la soddisfano e la y' corrispondente siano in un campo Γ nel quale la equazione data $f(x, y, y') = 0$ soddisfa alle condizioni generali per le quali secondo quanto dicemmo nel § 334 (pag. 494 in fine) è certa la esistenza di un integrale generale in quel campo, e questo per ciascuna di quelle che vogliono considerarsi fra le soluzioni — o *rami* — in y' alle quali la $f(x, y, y') = 0$ dà luogo; cioè siano soddisfatte le condizioni per le quali è certo che la equazione stessa definisce una o più funzioni $y'(x, y)$ di x e y che sono finite e continue e ammettono le derivate parziali di primo ordine rispetto ad x e y finite e continue, o più generalmente sono funzioni che soddisfano alle condizioni di Lipschitz.

In un punto qualsiasi (x_0, y_0) pel quale è soddisfatta la equazione integrale $\psi(x, y) = 0$ e dove $\dfrac{d\psi}{dy}$ è diversa da zero, la y' corrispondente a questo integrale prende un valore y'_0 determinato dalla formola $\left(\dfrac{d\psi}{dx} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} y'\right)_{x_0, y_0} = 0$; e poichè $\psi(x, y) = 0$ è un integrale, questo valore y'_0 dovrà combinare con uno dei valori che si hanno per y' dalla formola $f(x_0, y_0, y') = 0$, cioè col valore che avrà per $x = x_0, y = y_0$ uno dei rami $y' = y'(x, y)$ della funzione determinata dalla equazione data $f(x, y, y') = 0$.

Si supponga ora che per la stessa equazione $f(x, y, y') = 0$ sia stato possibile di trovare l'integrale generale $\varphi(x, y, C) = 0$ del quale parlavamo sopra, dove C è una costante arbitraria, e per un valore C_0 di questa costante C esso definisca quello che per $x = x_0$ prende il valore y_0 fra gli integrali corrispondenti al ramo $y' = y'(x, y)$ che noi consideriamo (*); allora formando la equazione $\varphi(x, y, C) - \psi(x, y) = 0$ si vede che essa sarà soddisfatta dal

(*) A rendere più chiare queste considerazioni, e togliere di mezzo dubbi e incertezze che altrimenti potrebbero nascere, presentiamo le osservazioni seguenti che completano quelle che esponemmo succintamente al § 316 (pag. 473-474)

Osserviamo che se $f(x, y, y') = 0$ è una equazione differenziale data, nella quale $f(x, y, y')$ si suppone finita continua e a un sol valore almeno in un certo campo Γ relativo a x, y e y', e in questo campo ammette le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, se avverrà che la stessa equazione per un punto generico (x_0, y_0) venga soddisfatta da più valori *(reali)* $y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{s,0}, \dots$ per y', e se pei valori $x_0, y_0, y'_{s,0}$ di x, y e y' che supporremo in quel campo Γ si avrà $\dfrac{\partial f}{\partial y'} \neq 0$, essa definirà altrettante funzioni $y'_1(x, y), y'_2(x, y), \dots, y'_s(x, y), \dots$ che per $x = x_0, y = y_0$ prenderanno respettivamente i valori $y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{s,0}, \dots$ e queste funzioni saranno uniche e determinate entro un certo campo relativo a x e y nel quale saranno anche finite e continue e ammetteranno le derivate parziali del prim'ordine determinate e finite.

E se in un punto (x_0, y_0) per uno o più dei valori $y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{s,0}, \dots$ di y' pei quali si ha $f(x_0, y_0, y'_{s,0}) = 0$ la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ sarà zero, allora per regola generale la equazione data $f(x, y, y') = 0$ definirà ancora più funzioni distinte y' alcune delle quali però pure potendo essere distinte negli altri punti prenderanno lo stesso valore y'_0 in quel punto (x_0, y_0) riunendosi in questo punto.

In ogni caso per quanto dicemmo in generale nel Cap. XIX e segnatamente al § 334, (pag. 494-95) a ciascuna di queste funzioni $y'(x, y)$ corrisponderà un integrale y che per $x = x_0$ prenderà ancora il valore y_0, e per questi integrali i valori corrispondenti delle derivate y saranno distinti fra loro quando per essi il $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ sia diverso da zero, mentre quando nel punto (x_0, y_0) si abbia $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ alcuni dei valori di y' nello stesso punto (x_0, y_0) saranno uguali, e quindi le curve integrali corrispondenti quando risultino distinte negli altri punti avranno la stessa tangente in quel punto dando quindi luogo, almeno ordinariamente, ad un punto di regresso.

In particolare quindi se la equazione data $f(x, y, y') = 0$ sarà algebrica e razionale intera di grado n in y', avremo al più n integrali reali (rami dell'integrale) o curve integrali che passano per un punto qualsiasi (x_0, y_0), alcune delle quali però, pure potendo essere distinte, potranno unirsi e avere la tangente comune nello stesso punto (x_0, y_0) che sarà allora, almeno ordinariamente, un punto di regresso.

Si ammetta ora di avere potuto trovare un integrale $\varphi(x, y, C) = 0$, con C costante arbitraria, nel quale la funzione $\varphi(x, y, C)$ sia finita continua e a un sol valore e ammetta le derivate prime rispetto ad x, y e C determinate e finite almeno in un certo campo che rispetto a x e y fa parte di quello Γ del quale parlavamo sopra; e questo integrale col particolarizzare convenientemente la costante C dia luogo a tutti gli integrali ai quali accennavamo testè.

sistema speciale di valori (x_0, y_0, C_0) di x, y, C, essendo C_0 il valore di C indicato sopra.

Per la teoria delle funzioni implicite adunque se avverrà che per questo sistema di valori di x, y, C la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ sia diversa da zero, questa equazione definirà una funzione $C(x, y)$ di x e y che per $x = x_0$, $y = y_0$ diverrà

La equazione $\varphi(x, y, C) = 0$ per ogni punto (x_0, y_0) dovrà dar luogo a uno o più valori $C_{1,0}, C_{2,0}, \ldots, C_{r,0}, \ldots$ di C che la soddisfino, e per ciascuno dei sistemi di valori $x_0, y_0, C_{r,0}$ di x, y, C pei quali si abbia $\varphi(x_0, y_0, C_{r,0}) = 0$ se $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ risulterà diversa da zero, essa definirà una funzione y di x che per $x = x_0$ prenderà il valore y_0 e la cui derivata y' sarà determinata dalla formola $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$, e questa funzione y sarà unica come sarà unico il valore corrispondente di y', e potrà mutare soltanto al mutare del valore che si considera di $C_{r,0}$.

Alcune però delle singole funzioni che così si otterranno potranno non corrispondere a integrali della equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$ perchè la equazione $\varphi(x, y, C) = 0$ non di rado darà luogo anche a soluzioni estranee, ma altre delle medesime funzioni quando, come supponiamo, la $\varphi(x, y, C) = 0$ sia l'integrale della stessa equazione $f(x, y, y') = 0$ dovranno combinare precisamente cogli integrali dei quali parlammo sopra, e quindi per ognuno di questi integrali y_s che per $x = x_0$ prende il valore y_0 e pel quale la y' nel punto (x_0, y_0) ha il valore $y'_{s,0}$ dovrà esservi almeno un valore $C_{s,0}$ della costante C pel quale oltre ad aversi $\varphi(x_0, y_0, C_{s,0}) = 0$ si abbia anche $-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = y'_{s,0}$ pei valori $x_0, y_0, C_{s,0}$ di x, y, C, a meno che per questi valori non risulti appunto $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. E poichè per ogni valore C_0 di C che dia $\varphi(x_0, y_0, C_0) = 0$, quando, come supponiamo, non sia $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ per gli stessi valori x_0, y_0, C_0 di x, y, C, si ha sempre una unica funzione y che soddisfa alla equazione $\varphi(x, y, C_0) = 0$ che per $x = x_0$ prende il valore y_0 e si ha un solo valore $-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ per y', così nel caso che vi siano due o più integrali distinti $y_s, y_t, \ldots$ della $f(x, y, y') = 0$ che si uniscano nel punto (x_0, y_0) dando luogo allo stesso valore di y' in quel punto, se non risulterà $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ vi dovranno essere due o più valori distinti $C_{s,0}, C_{t,0}, \ldots$ di C che oltre a dare $\varphi(x_0, y_0, C_{s,0}) = 0$, $\varphi(x_0, y_0, C_{t,0}) = 0, \ldots$ rendano uguali i valori di $\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ per gli stessi valori x_0, y_0 di x e y e pei valori distinti $C_{s,0}, C_{t,0}, \ldots$ di C.

Inoltre da queste considerazioni risulta che la equazione integrale $\varphi(x, y, C) = 0$ per $x = x_0$, $y = y_0$ dovrà dare per C almeno tanti valori distinti quanti valori reali

uguale a C_0, e per la quale qualunque siano x e y, in un certo intorno (che potrà essere anche assai grande) del punto (x_0, y_0), avremo $\varphi(x, y, C(x, y)) = \psi(x, y)$, e nello stesso intorno questa funzione $C(x, y)$ avrà anche le derivate parziali $\frac{\partial C}{\partial x}$ e $\frac{\partial C}{\partial y}$; e quindi pei sistemi di valori di x e y che corrispondono all'integrale $\psi(x, y) = 0$ della nostra equazione avremo $\varphi(x, y, C(x, y)) = 0$, e lo

---

si hanno per y' nello stesso punto (x_0, y_0) dalla equazione differenziale data $f((x, y, y') = 0$, e quindi inparticolare se la $f(x, y, y')) = 0$ sarà razionale intera e di grado n in y' e avrà tutte le radici reali e distinte per $x = x_0$, $y = y_0$ la equazione integrale $\varphi(x, y, C) = 0$ dovrà avere anch'essa almeno n soluzioni in C per $x = x_0$ e $y = y_0$.

Del resto anche partendo da una equazione $\varphi(x, y, C) = 0$ razionale intera e di grado n in C e eliminando C fra essa e la sua equazione derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ che è di primo grado in y', basta riferirsi alla ordinaria teoria della eliminazione quale si espone nell'algebra per dedurne che la equazione risultante dalla eliminazione di C fra le due equazioni è al più del grado n rispetto a y'.

Aggiungiamo infine che data una equazione in termini finiti $\varphi(x, y, C) = 0$ contenente una costante arbitraria che per un sistema di valori x_0, y_0 di x e y dia luogo a uno o più valori di C che la soddisfano e per la quale non venga ad essere $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ per gli stessi valori di x, y e C, allora, poichè verremo ad avere la equazione differenziale $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$, colla eliminazione di C fra queste due equazioni si giungerà sempre a una equazione differenziale della forma $f(x, y, y') = 0$ della quale la equazione data potrà considerarsi come l'integrale. E la eliminazione di C potrà farsi intendendo sostituito nella prima equazione $\varphi(x, y, C) = 0$ il valore di C che risulterà sempre determinato dalla seconda $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ quando la derivata rispetto a C del suo primo membro, cioè $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial C} y'$, che per la stessa equazione si riduce a $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial C} \end{vmatrix}$, sia diversa da zero.

Invece data una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ si può sempre affermare che esistono i varii rami d'integrali che si determinano nel modo indicato in principio di questa nota, ma non può dirsi egualmente (questo almeno dalle dimostrazioni e ragionamenti fatti non risulta) che essa dia sempre luogo a una equazione della forma $\varphi(x, y, C) = 0$, con C costante arbitraria, che possa riguardarsi come l'integrale generale della equazione data nel senso indicato sopra e che comprenda ad un tempo i varii rami dell'integrale. Nè d'altra parte l'avere dimostrato nella nota al § 397 pag. 572 come possa intendersi che questo sempre avvenga per l'integrale generale della equazione $M\,dx + N\,dy = 0$, trovasi in contradizione con quanto ora affermiamo, inquantochè non si trattava allora di una equazione generale, ma di una equazione che si supponeva già data o ridotta alla forma speciale $y' = f(x, y)$ alla quale corrisponde un solo ramo integrale.

stesso integrale potrà anche riguardarsi come rappresentato da questa ultima equazione nel senso che fra i valori di y da essa definiti dovranno trovarsi anche quelli definiti dalla equazione $\psi(x, y) = 0$.

Ne segue che per questo integrale si avrà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy\right) = 0,$$

e quindi quando $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ non sia zero sarà

$$y' = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial C}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right);$$

e poichè il rapporto $-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ quando si tiene conto della equazione integrale $\varphi(x, y, C) = 0$ viene a soddisfare alla equazione data $f(x, y, y') = 0$ per ogni valore di C e quindi anche pei valori che vengono da $C(x, y)$ nell'intorno di (x_0, y_0), così è certo che pei valori di x e y che soddisfano all'integrale speciale $\psi(x, y) = 0$ che abbiamo preso a considerare, dovrà essere

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial C}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right) = 0,$$

a meno che pel valore indicato $C(x, y)$ di C non risulti $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

Ma se, come per ora abbiamo supposto, $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ non sarà zero o $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ non sarà infinito nel punto (x_0, y_0), il che allora a causa della continuità non avverrà neppure nei punti vicini, questa condizione per essere soddisfatta richiederà che sia $\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy = 0$ pei valori di x e y che soddisfano allo stesso integrale $\psi(x, y) = 0$, ciò che equivale a dire che per questi valori di x e y C avrà sempre lo stesso valore e l'integrale considerato $\psi(x, y) = 0$ sarà un'integrale particolare; quindi si può ora affermare che la equazione integrale $\varphi(x, y, C) = 0$ non potrà dare luogo a un integrale singolare nei campi indicati altro che per quelle funzioni C di x e y per le quali, contrariamente a quanto supponevamo, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sia zero o infinito, o sia $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$; e noi dovremo quindi prendere a considerare questi casi e limitarci a questi.

Ora se insieme alla $\varphi(x, y, C) = 0$ si ha $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ e questa seconda equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ determina un valore per C (che ordinariamente sarà una funzione di x e y), la equazione integrale corrispondente $\varphi(x, y, C) = 0$ dove C ha questo valore, se definirà ancora una funzione y della x, darà luogo a una equazione per la quale si ha appunto $y' = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ quando non ne risulti $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$; e poichè questo riporta alla teoria delle curve inviluppi considerate nel calcolo differenziale (Cap. XXIII pag. 461 e seg.), così si può dire che quando per una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ siamo nel campo nel quale si ha un integrale generale della forma $\varphi(x, y, C) = 0$, se l'insieme degli integrali particolari corrispondenti agli infiniti valori di C dà luogo a un sistema di curve che ammettono una curva inviluppo questa, quando non venga a corrispondere a un integrale particolare (*), corrisponderà però sempre a un integrale che sarà un integrale singolare.

410. — Segue da ciò che quando di una equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ è trovato l'integrale generale $\varphi(x, y, C) = 0$, le soluzioni singolari della stessa equazione si otterranno eliminando C fra le due equazioni $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$, e fra le due $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0$, quando queste eliminazioni siano possibili e conducano effettivamente a funzioni determinate y della x che ammettono una derivata; e potranno esservene altre per le quali insieme a $\varphi(x, y, C) = 0$ sia $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ essendo al tempo stesso anche $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ o no, o per le quali il valore di y' che può trarsi dalla equazione differenziale stessa sia infinito o presenti qualche altra singolarità o indeterminazione; e in questi ultimi casi, come anche in quelli nei quali soddisfacendo alle due $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ o alle altre $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0$, i valori di C corrispondenti ci portassero a cadere in uno degli ultimi casi, converrà fare considerazioni speciali per decidere se si tratta o no di vere soluzioni singolari, potendo

(*) In casi eccezionali limiti la curva inviluppo può essere una delle curve del sistema; e questo avverrà nel caso in cui la equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ darà per C un valore costante.

allora anche avvenire che non si tratti neppure di integrali della equazione data; e ciò tanto più quando insieme alle due $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ risulti anche $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, perchè allora neppure potrà più assicurarsi che sia sodisfatta la condizione $\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial C}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0$ che trovammo sopra, e inoltre a causa della equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ che si ha per gli integrali ordinarii la y' corrispondente non potrebbe essere che infinita o indeterminata.

Ed è sempre da ricordare che gli integrali che così si trovassero potranno anche talvolta venire a corrispondere a valori costanti di C e essere quindi soltanto integrali particolari invece che soluzioni singolari; e quegli integrali (singolari o no) che corrispondessero a $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ senza che fosse anche $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ dando luogo a $y' = \infty$ corrisponderebbero a rette parallele all'asse delle y.

411. — Fermandoci in particolare sulle soluzioni singolari che vengono dalla eliminazione di C fra le due equazioni $\varphi(x, y, C) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$, osserviamo come già notammo che esse corrispondono alle curve inviluppo del sistema di curve integrali $\varphi(x, y, C) = 0$ quando queste curve inviluppo esistono, e viceversa le curve inviluppo delle curve integrali fuori di punti e di casi eccezionali corrispondono a soluzioni singolari perchè nei punti corrispondenti sono tangenti fra loro e hanno le stesse x, y e y'; e potremo quindi, quando si conosca l'integrale generale, riportarci alle condizioni di esistenza degli inviluppi che furono date nel Calcolo differenziale §§ 339-340 (pag. 463 e seg.) per decidere in quali casi queste soluzioni singolari (inviluppi) effettivamente esistono.

Ora sempre per quelle soluzioni singolari della equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$ che possono considerarsi come corrispondenti a inviluppi delle curve integrali $\varphi(x, y, C) = 0$, è facile di dimostrare che si avrà sempre $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ in tutti i punti nei quali la tangente non presenterà singolarità; senza però che possa dirsi per questo che le curve per le quali insieme a $f(x, y, y') = 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ (che risultano cioè dalla eliminazione di y' fra queste due equazioni) siano sempre soluzioni singolari.

Si osservi infatti che se (x, y) è un punto qualsiasi m della linea corrispondente all'integrale singolare e in quel punto la tangente non presenta singolarità, e y'_m è il valore corrispondente di y' comune a questa curva e a quella (C_m) dell'integrale particolare proveniente dall'integrale generale $\varphi(x, y, C) = 0$ alla quale lo stesso punto m appartiene, avremo $f(x_m, y_m, y'_m) = 0$.

Questo punto m per la definizione delle curve inviluppo sarà il limite di un punto d'incontro m_1 della curva stessa (C_m) colle curve vicinissime corrispondenti ai valori di C vicinissimi a C_m, e chiamando x_{m_1}, y_{m_1} le coordinate del punto m_1, e y'_{m_1} e $y'_{m_1} + \delta$ i valori di y' corrispondenti a questo punto m_1 sulla curva integrale (C_m) e sull'altra vicinissima che si considera, dovremo avere evidentemente $f(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1}) = 0$ e $f(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1} + \delta) = 0$ perchè i due sistemi $(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1})$ e $(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1} + \delta)$ corrispondendo a due curve integrali devono soddisfare entrambi alla equazione differenziale; e in queste formole x_{m_1}, y_{m_1} e y'_{m_1} tenderanno a x_m, y_m e y'_m, e δ tenderà a zero coll'avvicinarsi indefinito della seconda curva integrale alla prima o col tendere di m_1 ad m.

Avendosi ora da queste equazioni

$$f(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1} + \delta) - f(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1}) = 0,$$

pel teorema degli accrescimenti finiti avremo anche $f'_{y'}(x_{m_1}, y_{m_1}, y'_{m_1} + \theta\delta) = 0$ con $0 < \theta < 1$; talchè ammesso che $f'_{y'}$ sia continua rispetto a x, y, y' nell'intorno dei valori x_m, y_m, y'_m si vede subito che nel punto m dovremo avere $f'_{y'}(x_m, y_m, y'_m) = 0$, ciò che dimostra appunto quanto abbiamo enunciato.

412. — Questo risultato, che si presenta qui come una particolarità delle soluzioni singolari che le pone in relazione colla equazione differenziale corrispondente, porta naturalmente a domandarsi se siavi modo di avere le soluzioni medesime deducendole dalla equazione differenziale stessa la quale è data, invece che dall'integrale generale; con che le dette soluzioni verrebbero ad aversi indipendentemente dalla conoscenza, che è richiesta dalle considerazioni precedenti, del detto integrale generale che il più spesso riesce ben difficile se non impossibile a trovarsi, e pel quale anche si esige che si abbia sotto la forma $\varphi(x, y, C) = 0$ con C costante arbitraria e che $\varphi(x, y, C)$ sia una funzione che soddisfa alle condizioni più volte indicate, mentre questo, come dicemmo esplicitamente in fine della lunga nota al § 409 a pag. 584 e seg., non sempre può affermarsi che sia.

E difatti partendo dalla equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$, quando si consideri solo in un campo Γ relativo ai valori di x, y e y' nel quale la funzione $f(x, y, y')$ è finita continua e a un sol valore e ammette le derivate parziali del prim'ordine determinate e finite, ci sarà facile vedere che i punti

(x, y) il cui insieme può dare luogo a funzioni y di x che costituiscono integrali singolari non possono essere che punti pei quali insieme al corrispondente y' si abbia anche $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$; e dovremo quindi limitarci a cercarli fra i punti (x, y) pei quali la funzione y corrispondente con opportuni valori di y' viene a soddisfare alle due equazioni $f(x, y, y') = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$.

Si osservi perciò che se (x_0, y_0) è un punto pel quale la equazione $f(x_0, y_0, y') = 0$ dà luogo a uno o più valori $y'_{1.0}, y'_{2.0}, \dots, y'_{s.0}, \dots$ per y', come dicemmo nella nota testè ricordata, per quelli $x_0, y_0, y'_{s.0}$ fra questi valori di x, y e y' pei quali $\frac{\partial f}{\partial y'}$ risulterà diversa da zero la equazione data $f(x, y, y') = 0$ definirà *una e una sola* funzione $y'_s(x, y)$ che per $x = x_0$, $y = y_0$ prende il valore $y'_{s.0}$, e la equazione $y'_s = y'_s(x, y)$ per quanto dicemmo nel Cap. XIX darà luogo sempre a *uno e a un solo* integrale $y_s(x)$ che per $x = x_0$ prende il valore y_0, e la cui derivata per $x = x_0$ è $y'_{s.0}$, e questo sarà l'integrale ordinario e non sarà un integrale singolare.

Integrali singolari quindi non potranno aversi altro che dall'insieme di tutti o di alcuni dei punti (x_0, y_0) pei quali insieme ai corrispondenti valori $y'_{s.0}$ che soddisfano alla equazione $f(x_0, y_0, y'_{s.0}) = 0$ si abbia anche $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$; e quindi, precisamente come enunciammo testè, gli integrali singolari non potranno trovarsi che fra le funzioni y della x corrispondenti a questi sistemi di valori di x e y, cioè — in altri termini — fra le funzioni y della x che vengano definite dall'insieme della equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$ e della sua derivata $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, senza però che possa dirsi che queste funzioni quando esistono corrispondano sempre a integrali (singolari o no) della stessa equazione, nulla potendo, almeno *a priori*, assicurarci che la derivata della funzione y così definita risulti appunto quel valore y' che insieme a x e y soddisfa alle due equazioni precedenti $f = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, e quindi alla equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$; e anzi, tutto facendo presumere che questo appunto non sarà (*).

(*) Essendo data una equazione differenziale dell'ordine n $f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, prendiamo a considerarla in quei campi delle quantità $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ riguardate come variabili indipendenti nei quali la funzione $f(x, y, y', y, \dots, y^{(n)})$ è finita e continua insieme a quelle fra le sue derivate che occorrerà di considerare.

Per quanto dicemmo nel Cap. XIX e segnatamente ai §§ 335-336 (pag. 495-96), partendo da sistemi iniziali $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ di valori di $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$

413. — Ora per mettere bene in evidenza questa ultima circostanza, e al tempo stesso dare il modo di trovare se e in quali tratti le funzioni (o curve) così definite corrispondano a integrali singolari, esporremo le considerazioni seguenti che sono dovute sostanzialmente a Darboux (*).

Si osservi che per ogni funzione o curva integrale la equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ dà luogo all'altra

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0 ,$$

e fuori del caso in cui sia $y'' = \infty$, che ordinariamente corrisponderà a punti di regresso della curva integrale corrispondente, l'essere $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ porterà che si abbia anche $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$.

Ora quando, come ordinariamente avverrà, le due equazioni $f(x, y, y') = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ definiscono una curva A la cui equazione risulterà dalla eliminazione di y' fra le equazioni medesime, questa curva sarà l'inviluppo del sistema di curve definite dalla equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$ quando in esse y' anzichè come la derivata di y si considera semplicemente come un parametro variabile che, a scanso di equivoci, potrà essere indicato con a, venendo così ad essere il detto sistema di curve rappresentato dalla equazione $f(x, y, a) = 0$, e l'inviluppo loro dato dall'insieme delle due equazioni $f(x, y, a) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$; e questo inviluppo A quando esisterà potrà

---

pei quali, dei valori corrispondenti della $y^{(n)}$ che soddisfano alla equazione data $f(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, quello $y_0^{(n)}$ che si considererà è tale che nel punto $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)})$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ risulterà finita, continua e diversa da zero, si avrà sempre un integrale che non presenta alcuna singolarità almeno in un certo intervallo che comprende il punto x_0; e si può quindi affermare, come nel caso delle equazioni di prim'ordine che noi trattiamo, che *essendo data una equazione differenziale di ordine superiore* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, *per le sue soluzioni singolari, quando esistono, insieme alla equazione stessa dovrà aversi anche l'altra* $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$; e quindi le dette soluzioni dovranno essere integrali della equazione di ordine $n-1$ $\psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ che risulterà dalla eliminazione di $y^{(n)}$ fra le due $f = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$, senza potere però affermare che gli integrali di questa equazione $\psi = 0$ siano sempre e tutti soluzioni singolari della equazione data $f = 0$.

(*) *Bulletin des Sciences mathémat. et astronom.*, tome 4.me — Année 1873, pag. 158 et suiv.

anche essere rappresentato dalle due equazioni $x = x(a)$ e $y = y(a)$ che determineranno i suoi punti (x, y) per ogni valore di a e risulteranno dalle precedenti; e in tutti i punti nei quali $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ sarà diverso da zero esso avrà anche una tangente determinata (Calc. diff. §§ 339 e 340 pag. 463 e seg.).

Non sempre però avverrà che questo inviluppo A sia integrale della equazione data, perchè bene spesso l'y' relativo alla funzione y che corrisponde alla curva inviluppo A, e che per ogni valore di a pel quale non sia $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ verrà dato dalla equazione $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, non combinerà col valore a pel quale si hanno ad un tempo per l'inviluppo le due equazioni $f(x, y, a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, e non potremo quindi assicurare che per l'inviluppo medesimo resti sempre soddisfatta la equazione differenziale data $f(x, y, y') = 0$, e anzi ordinariamente non risulterà soddisfatta.

D'altra parte, fermandoci invece sulle due equazioni $f(x, y, y') = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, e in esse considerandovi la y' come un parametro variabile che a scanso di equivoci potremo indicare con b per modo che si abbiano le due $f(x, y, b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} b = 0$ nella seconda delle quali in $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ si intende pure che ad y' sia sostituito b, anche queste equazioni definiranno ordinariamente una curva B (*) i cui punti (x, y) potranno determinarsi per

(*) Per essere sicuri che la curva B esiste, per la solita teoria delle funzioni implicite basterà assicurarsi che si ha un sistema di valori x_0, y_0, b_0 di x, y, b che soddisfano le due equazioni

$$f(x, y, b) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} b = 0\,,$$

e che per questi valori x_0, y_0, b_0 di x, y, b lo Iacobiano corrispondente

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} b & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} b \end{vmatrix},$$

che per la seconda delle stesse equazioni si riduce alla espressione

$$-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \right\},$$

sia diverso da zero. Questo esclude il caso che sulla curva $f(x, y, b) = 0$ che corrisponde a $b = b_0$, il punto (x_0, y_0) sia un punto d'inflessione.

ogni valore di b per mezzo di due equazioni della forma $x = x(b)$, $y = y(b)$ che risulteranno dalle precedenti; ma questa curva bene spesso non coinciderà nè in tutto nè in parte colla curva A sopra indicata.

414. — Quando però queste curve A e B verranno ad avere una parte (finita) comune che indicheremo con (A B) *e i punti comuni delle due curve corrisponderanno agli stessi valori di a e b*, allora per tutti i punti della parte comune (A B) considerata come curva A avremo le due equazioni $f(x, y, a) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, le quali per la y' corrispondente alla stessa curva A daranno $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$; e per gli stessi punti della stessa curva (A B) considerata come curva B avremo anche l'altra $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} a = 0$ (perchè ora $b = a$); quindi se si esclude il caso che sia $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si deduce subito che pei punti di (A B) dovremo avere $y' = a$, ciò che porta che per ogni punto della curva (A B) avremo sempre $f(x, y, y') = 0$, cioè la curva stessa corrisponderà a un integrale, che sarà ordinariamente un integrale singolare, della nostra equazione; e ciò purchè, come abbiamo detto, non si abbia $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\left(\text{e quindi anche, se } a \text{ e } b \text{ sono finiti, } \frac{\partial f}{\partial x} = 0\right)$, nel qual caso il tratto (A B) potrà non corrispondere a un integrale e occorrerà fare un esame speciale a parte per decidere la questione.

415. — Considerando invece un punto $p(x, y)$ della curva A che non appartenga anche alla curva B e pel quale a abbia il valore (finito) a, osserviamo che in questo punto p mentre avremo le due equazioni $f(x, y, a) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ non avremo anche $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} a = 0$ perchè altrimenti il punto stesso p apparterrebbe anche alla curva B.

E siccome per le curve integrali dovremo avere sempre la equazione $f(x, y, y') = 0$ con y' derivata di y rispetto ad x e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0\,,$$

se ne deduce che per quell'integrale che passa pel punto p e al quale corrisponde pel punto stesso il valore a di y' il prodotto $\frac{\partial f}{\partial y'} y''$ non potrà essere zero non essendo zero la espressione $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$ (che per essere $a = y'$ non è altro che $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}a\Big)$, e quindi essendo $\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$ dovrà per lo stesso integrale essere di necessità $y''=\infty$, cioè il punto p su questo integrale, almeno ordinariamente, dovrà essere un punto di regresso; talchè, a parte la considerazione dei punti pei quali insieme a $\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$ si avesse anche $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, si può dire che la curva A in tutti quei tratti che non ha comuni colla curva B sarà luogo di punti pei quali $y''=\infty$ sui rami corrispondenti degli integrali cioè, almeno ordinariamente, sarà luogo dei punti di regresso di questi integrali (*).

(*) Nelle curve integrali $\varphi(x, y, C)=0$ a causa delle equazioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y''=0$$

alle quali la loro equazione dà luogo, l'essere $y''=\infty$ con y' finito porta che sia $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ e quindi anche $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, e ciò è ben naturale trattandosi di punti singolari della curva.

E si può anche osservare in generale che partendo dalle curve integrali $\varphi(x, y, C)=0$ per le quali differenziando si ha $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$, la eliminazione di C fra queste due equazioni porta a una equazione differenziale $\theta(x, y, y')=0$ che sarà conseguenza di quella data $f(x, y, y')=0$, e la funzione $\theta(x, y, y')$ si potrà riguardare come quella che risulta dal sostituire nella prima equazione $\varphi(x, y, C)=0$ il valore $C(x, y, y')$ di C che potrà intendersi tratto dalla seconda $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$, cioè sarà $\theta(x, y, y')=\varphi(x, y, C(x, y, y'))$.

Ne segue che si avrà $\dfrac{\partial\theta}{\partial y'}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial C}\dfrac{\partial C}{\partial y'}$, essendo in questa $\dfrac{\partial C}{\partial y'}$ tratto dall'altra equazione $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$, la quale dà $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}y'\right)\dfrac{\partial C}{\partial y'}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, e quindi

$$\frac{\partial C}{\partial y'}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}y'}=-\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}},$$

quando il denominatore non sia zero, il che appunto non sarà quando saranno soddisfatte le condizioni della teoria delle funzioni implicite per le quali è certo che la equazione $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0$ definisce una funzione $C(x, y, y')$ di x, y, y'; quindi sostituendo si avrà

$$\frac{\partial\theta}{\partial y'}=-\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}\frac{\partial\varphi}{\partial C},$$

dal che si vede che $\dfrac{\partial\theta}{\partial y'}$ non potrà essere zero altro che quando sia $\dfrac{\partial\varphi}{\partial C}=0$ o quando

Essa poi, almeno quando insieme a $\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$ non sia anche $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ non sia zero, e al tempo stesso non si presenti un'altra circostanza eccezionalissima che qui sotto indicheremo, non sarà certamente un integrale della nostra equazione; perchè quando si hanno le due $f(x, y, a)=0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$, determinandosi a colla equazione $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$, se non sarà $\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0$ i valori di $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial a}{\partial y}$, per la teoria delle funzioni implicite, risulteranno certamente determinati e finiti, e quindi per la funzione y definita dalla equazione $f(x, y, a)=0$ con a che deve soddisfare all'altra $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$, il valore corrispondente di y' verrà determinato dalla formola $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'=0$ nella quale a è la funzione di x e y determinata dalla $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$; e esso sarà diverso da questa funzione a per la quale si ha $f(x, y, a)=0$, perchè $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}a$ è diverso da zero. E così con questo valore di y' non si avrà $f(x, y, y')=0$, e quindi y non sarà un integrale della nostra equazione, salvo nel caso eccezionalissimo che questa equazione $f(x, y, y')=0$, nella quale y' sia considerata come una incognita e non come una derivata, per ogni punto (x, y) della curva A, oltre ad avere per y' la soluzione $y'=a$ che la soddisfa, ne abbia anche altre e una di queste sia appunto il valore testè indicato $-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$ che si ha per y' dalla equazione $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'=0$ nella quale a è la funzione sopra indicata.

---

sia $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, o che il denominatore sia infinito ciò che nei casi attuali potrà escludersi.

E se — come ordinariamente avverrà quando la equazione data $f(x, y, y')=0$ sia algebrica — sarà $\theta(x, y, y')=\omega(x, y, y')\,f(x, y, y')$, essendo $\omega(x, y, y')$ un fattore estraneo introdotto dalla eliminazione, allora, avendosi $\dfrac{\partial\theta}{\partial y'}=f\dfrac{\partial\omega}{\partial y'}+\omega\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, pei valori di x, y, y' che soddisfano alla equazione differenziale sarà

$$\omega\frac{\partial f}{\partial y'}=-\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}\frac{\partial\varphi}{\partial C},$$

dal che risulta ancora che nei punti nei quali $\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$ dovrà essere necessariamente o $\dfrac{\partial\varphi}{\partial C}=0$, o $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ e quindi anche $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ quando non è $y'=\infty$, come già trovammo.

Se poi insieme a $\frac{\partial f}{\partial y'}$ si avrà anche $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=0$, allora, poichè in tal caso anche la corrispondente funzione a definita dalla equazione $\frac{\partial f}{\partial a}=0$ potrà avere qualche singolarità o le derivate di a potranno divenire infinite, il luogo dei corrispondenti punti di regresso delle curve integrali potrà talvolta corrispondere a un integrale, e per decidere la questione converrà fare un esame speciale a parte.

416. — Considerando invece un punto $q\,(x,y)$ della curva B che non appartenga alla curva A e pel quale quindi, se b è il valore (finito) corrispondente di b, insieme alle due $f\,(x,y,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}b=0$ non si avrà anche $\frac{\partial f}{\partial b}=0$, allora pel ramo dell'integrale che passa pel punto q e pel quale si ha $y'=b$, a causa della solita equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=0$, avremo anche $\frac{\partial f}{\partial y'}y''=0$, e quindi non essendo ora $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ dovrà essere $y''=0$, cioè il punto q pel ramo corrispondente dell'integrale dovrà essere almeno ordinariamente (*) un punto d'inflessione; talchè, a parte sempre la considerazione dei punti pei quali fosse $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ che corrispondono a valori infiniti di y' o richiederebbero che fosse anche $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, si può dire che i tratti della curve B che non siano comuni alla curva A saranno, almeno ordinariamente, il luogo dei punti d'inflessione dei varii rami dell'integrale.

(*) Soltanto quando sia anche $y'''=0$ il punto q potrà *non* essere un punto d'inflessione delle curve integrali, dipendendo allora la cosa dalla derivata quarta di y e talvolta anche dalle derivate successive.

E poichè in seguito alla equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=0$, che si ha dalla $f(x,y,y')=0$ con una prima derivazione, e che per $y''=0$ si riduce a $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$, derivando ancora si trova che, nei punti q pei quali $y''=0$ e quindi $y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, si ha

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right\}+\frac{\partial f}{\partial y'}y'''=0,$$

si vede subito che, quando, come supponiamo, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ sia diverso da zero e le varie derivate prime e seconde di f siano finite, y''' non sarà zero altro che pei punti q pei quali si abbia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0,$$

ciò che porta che in questi casi anche sulle curve $f(x,y,b)=0$ del sistema differenziale il punto q debba essere un punto d'inflessione almeno ordinariamente.

E il luogo di questi punti q non corrisponderà a un integrale della nostra equazione altro che nel caso eccezionale nel quale la seconda delle due equazioni che definiscono la curva B, cioè la equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}b=0$ ci dia per $b\,(x,y)$ un valore tale che la sua derivata completa $\frac{db}{dx}$ $\left(\text{cioè } \frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}y'\right)$ sia zero per tutti i punti stessi $q\,(x,y)$, perchè allora, avendosi, dalla prima equazione $f\,(x,y,b)=0$ della curva B, $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{dx}=0$, se ne dedurrà che per tutti i punti $q\,(x,y)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$ e quindi $y'=b$ sempre quando con $f\,(x,y,y')=0$ non sia anche $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. E in questo caso per la curva luogo dei punti q venendo ad essere $y'=b=\text{cost.}$, la curva stessa sarà una linea retta (*).

417. — E così ora riassumendo noi possiamo dunque affermare che le soluzioni singolari di una equazione differenziale del prim'ordine $f\,(x,y,y')=0$ che soddisfa alle condizioni più volte indicate possono aversi, quando esistono, sia partendo dalla equazione integrale che si supponga trovata sotto

(*) Poichè dalla equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}b=0$ si ha l'altra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)b+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial b}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial b}b+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{db}{dx}=0,$$

si vede di qui che nei punti nei quali $\frac{db}{dx}=0$, tutto mantenendosi finito, dovrà essere $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'\right)b=0$; e poichè, avendosi $y'=b$ e non essendo $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, si ha dalla prima equazione $b=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, si conclude che dovrà essere $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)=0$, ciò che, come nel caso di $y'''=0$ studiato nella nota precedente, porta che in questi casi anche sulle curve $f(x,y,b)=0$ del sistema differenziale i punti $q\,(x,y)$ vengono ad essere almeno ordinariamente punti d'inflessione e si trovano, come già osservammo, situati tutti su una stessa linea retta.

la solita forma $\varphi(x, y, \mathrm{C}) = 0$, sia partendo dalla equazione differenziale stessa e precisamente:

a) Partendo dalla equazione integrale $\varphi(x, y, \mathrm{C}) = 0$ le dette soluzioni singolari risulteranno come già dicemmo:

1.° dall'insieme delle due equazioni $\varphi(x, y, \mathrm{C}) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{C}} = 0$ (curva inviluppo delle curve integrali $\varphi(x, y, \mathrm{C}) = 0$), nel supposto che non ne risulti anche $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, e quando non vengano a corrispondere (il che eccezionalmente potrà essere) a integrali particolari.

2.° dalla equazione $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ senza che sia $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ che corrisponderà a rette parallele all'asse delle y, o dall'insieme delle due equazioni $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, astrazione fatta dal caso in cui $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \infty$ o da singolarità che potrà presentare la equazione differenziale data; e ciò quando si riscontri che effettivamente anche le soluzioni che così si abbiano corrispondano a integrali della nostra equazione (*) e non siano integrali particolari.

b) Partendo invece dalla equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ le sue soluzioni singolari, astrazione fatta da quelle che corrispondessero a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$,

(*) Queste seconde soluzioni singolari, quando esistono, potranno aversi in particolare quando la equazione integrale si presenti sotto la forma $u(x, y) = \mathrm{C}$, nel qual caso non si avranno certamente le prime.

E così nel caso in cui la equazione differenziale sia data sotto la forma $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$, siccome per quanto dicemmo al § 397 (pag. 571-72) se $u(x, y) = \mathrm{C}$ è il suo integrale generale il rapporto $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\mathrm{N}}$ viene ad essere un fattore integrante v della espressione differenziale del primo membro, si può dire che nel caso di queste equazioni $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0$, all'infuori di quelle soluzioni singolari che possono provenire da singolarità che presenti il valore $-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ di y' o dalla equazione $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ sola o insieme all'altra $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, le altre soluzioni singolari proverranno dalla equazione che si ottiene uguagliando a zero l'inversa del prodotto $\mathrm{N}v$ del coefficiente di dy per un fattore integrante della espressione $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$, o l'inversa del fattore integrante senz'altro quando la equazione data sia già ridotta alla forma $dy = \mathrm{P}\,dx$ con P funzione di x e y; e ciò, ben s'intende, quando le funzioni y di x definite da tale equazione risultino effettivamente integrali della equazione data. A causa però della tanta indeterminazione che vi è nei fattori integranti, si comprende che queste soluzioni quando esistono possono spesso comprendere o anche essere tutte soltanto integrali particolari.

risulteranno dall'insieme delle due equazioni $f(x, y, y') = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ quando queste definiscano una curva A (che sarà l'inviluppo del sistema di curve $f(x, y, a) = 0$ che sono rappresentate dalla equazione differenziale stessa considerandovi y' semplicemente, anzichè come una derivata, come un parametro variabile *a)*, *ma questo solo pei tratti della stessa curva* A, *quando esistano, che siano comuni alla curva* B *rappresentata dall'insieme delle due equazioni* $f(x, y, y') = 0$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$ *e i cui punti* (di A e B) *corrispondano agli stessi valori di* y', e purchè in questi tratti non si venga a cadere nei casi di $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, con $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ o no, nei quali casi converrà fare sempre indagini e verificazioni speciali a parte.

Invece la curva A nei suoi tratti non comuni alla curva B sarà luogo di punti di regresso o più generalmente di punti nei quali $y'' = \infty$ sui rami corrispondenti delle curve integrali; e la curva B nei tratti non comuni alla curva A sarà luogo dei punti d'inflessione o più generalmente dei punti pei quali $y'' = 0$ per le curve integrali; e salvo i casi eccezionalissimi indicati in fine di ciascuno dei due paragrafi precedenti le curve A e B nei tratti non comuni non corrisponderanno a integrali della equazione data; talchè quando queste curve A e B non abbiano tratti comuni non esisteranno integrali singolari, salvo il caso che si rientri nei casi eccezionalissimi ora ricordati, o che si abbiano soluzioni integrali corrispondenti a rette parallele all'asse delle y $\left(\text{che darebbero}\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ con } \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0\right)$ o altre soluzioni per le quali insieme a $f(x, y, y') = 0$ si abbiano ad un tempo le due equazioni $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, o per le quali la equazione differenziale data presenti qualche singolarità; riservandosi per tutti questi ultimi casi di fare studii e verificazioni speciali a parte per riconoscere se corrispondano o no a integrali della equazione data.

S'intende poi che quando nella equazione differenziale data si prenda y come variabile indipendente invece di x, i casi speciali che abbiamo detto di dovere considerare di $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si cambiano in quelli di $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ o $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ecc.

418. — A meglio schiarire i risultati che qui abbiamo esposto daremo ora alcuni esempii, e cercheremo le soluzioni singolari di alcune equazioni diffe-

renziali partendo talvolta dalle curve integrali e tal altra dalla equazione differenziale stessa.

1.° Si abbia la equazione differenziale $y' + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, che dovrà essere considerata nel campo relativo a x e y pel quale $|x| < 1$ e $|y| \leq 1$ o in quello pel quale $|x| > 1$ e $|y| \geq 1$ per avere formole reali e finite e a un sol valore.

Poichè la espressione $dy + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ha il fattore integrante $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, per quanto dicemmo nella nota alla pag. 599 si ha da esaminare la soluzione $y = \pm 1$ che effettivamente soddisfa alla equazione come si ha da esaminare anche l'altra $x = \pm 1$ che corrisponde a $y' = \infty$ e che pure soddisfa alla equazione data.

E poichè per l'integrale generale si ha la equazione

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \mathrm{C} = 0,$$

queste soluzioni $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$ sono vere e proprie soluzioni singolari.

Posta la equazione sotto la forma $(1 - x^2)\, y'^2 - (1 - y^2) = 0$ per non avere in campo quantità infinite si trovano gli stessi risultati anche partendo dalla equazione differenziale, e applicando il metodo generale che abbiamo dato.

2.° Si consideri la equazione (Serret. Cours de calc. diff. et intégr. 1868 tom. II pag. 383)

$$(4) \qquad f(x, y, y') = y - 2\, xy' - y'^2 = 0$$

che rientra fra quelle di D'Alembert considerate in generale al § 388 pag. 557.

Pel suo integrale generale coi processi del paragrafo stesso si trova facilmente la equazione

$$(5) \qquad \varphi(x, y, \mathrm{C}) = (3\, xy + 2\, x^3 + \mathrm{C})^2 - 4\, (y + x^2)^3 = 0,$$

e partendo da questa si vede che per la soluzione singolare dovrebbe essere $3\, xy + 2\, x^3 + \mathrm{C} = 0$, e questo condurrebbe alla equazione $y + x^2 = 0$, per la quale la equazione data non è soddisfatta, e non corrisponderebbe quindi ad alcuna soluzione.

Questo però non può recare meraviglia, perchè le equazioni ora trovate mostrano subito che si rientra nel caso in cui si hanno le due $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ che possono appunto fare sì che la soluzione non sia affatto un integrale.

Partendo invece dalla equazione differenziale, coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2y', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = -2x - 2y'$$

e quindi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = -y'$ si trova che per le curve indicate nei paragrafi precedenti con A e B si hanno le equazioni

$$\mathrm{A} = y + x^2 = 0, \qquad \mathrm{B} = y = 0,$$

e non avendo queste curve parti comuni non si ha alcuna soluzione singolare.

La linea $y + x^2 = 0$ per quanto dicemmo in generale deve essere luogo dei punti di regresso dell'integrale e la linea $y = 0$ deve essere luogo dei punti d'inflessione, e questo risulta appunto anche dallo studio delle curve rappresentate dall'integrale generale.

La retta $y = 0$ luogo dei punti d'inflessione viene anche dall'integrale generale (5) per $\mathrm{C} = 0$ per modo che corrisponde anche a un integrale particolare, e questo concorda con quanto dicemmo in fine del § 416.

3.° Si consideri la equazione (Boole. A Treatise on differential Equations 1872 pag. 169)

$$f(x, y, y') = y'^2 - 2\sqrt{y}\,(xy' - 2y) = 0,$$

e si cerchino le sue soluzioni singolari se esistono.

Cercando gli integrali razionali interi di questa equazione, o anche osservando che essa rientra fra quelle studiate al § 387 pag. 556, si giunge con tutta facilità al suo integrale generale che viene dato dalla equazione

$$\varphi(x, y, \mathrm{C}) = y - \mathrm{C}^2 (x - \mathrm{C})^2 = 0;$$

quindi partendo dall'integrale generale si trova che per le soluzioni singolari deve aversi la equazione $2\,\mathrm{C}\,(x - \mathrm{C})\,(x - 2\mathrm{C}) = 0$, e questa dà luogo intanto alle soluzioni $\mathrm{C} = 0$ e $\mathrm{C} = x$ che conducono ambedue all'integrale $y = 0$ che viene perciò a figurare ad un tempo come integrale particolare e come soluzione singolare.

La stessa equazione poi ammette anche la soluzione $\mathrm{C} = \frac{x}{2}$ che dà $y = \frac{x^4}{16}$ e questa è una vera soluzione singolare.

Partendo invece dalla equazione differenziale coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sqrt{y}\, y', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 6\sqrt{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' - 2x\sqrt{y},$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=-\frac{y'}{\sqrt{y}}(xy'-4y),$$

per le equazioni delle solite curve A e B si trovano subito le due

$$A=y^2(x^4-16y)=0\,,\qquad B=y^3(x^4-16y)=0\,,$$

avendo lasciato da parte il caso di $y'=0$ nella ricerca della equazione della curva B che avrebbe riportato a $y=0$; e queste conducono ancora alle stesse soluzioni singolari $y=\frac{x^4}{16}$ e $y=0$, per la seconda delle quali però è da osservare che sebbene ci faccia cadere nel caso di $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ si riscontra subito però che corrisponde anch'essa a un integrale della equazione data.

4.° Si prenda infine a considerare la equazione (Houel. Cours de Calc. infinit. II.^{me} partie, pag. 62)

$$f(x,y,y')=(xy'-y)^2-2xy(1+y'^2)=0\,.$$

Partendo da questa equazione coll'osservare che si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(xy'-y)y'-2y(1+y'^2)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2(xy'-y)-2x(1+y'^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=2(xy'-y)x-4xyy'=2x\{y'(x-2y)-y\}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=-2(xy'+y)(1+y'^2),$$

si trova che la $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ quando si escluda il caso di $x-2y=0$ che non può affatto presentarsi perchè non soddisfa alla equazione data, e si escluda pure quello di $x=0$ del quale parleremo poi, oltre a darci la formola $xy'-y=2yy'$, ci dà anche l'altra $y'=\frac{y}{x-2y}$, e conduce quindi per la curva $A=0$ alla equazione

$$A=y(y-x)^2=0\,.$$

Osservando poi che si ha $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=-2(1+y'^2)(xy'+y)$, e quindi che per la curva B deve essere $y'=-\frac{y}{x}$ quando si escluda ancora il caso di $x=0$, si trova che per la curva stessa B si ha la equazione

$$B=4xy^2-2y(x^2+y^2)=-2y(y-x)^2=0\,,$$

e quindi per parti comuni alle linee A e B si hanno le linee $y=0$ e $y=x$ alle quali potremo aggiungere la linea $x=0$ finora esclusa, perchè col prendere per variabile indipendente y invece che x si vede che essa pure dà un integrale della equazione.

Ora mentre le due soluzioni $x=0$ e $y=0$ sono da considerarsi come integrali perchè soddisfano entrambe alla equazione data, per la soluzione $y=x$ invece, è da osservare che essa ci darebbe $y'=1$, mentre i valori di y' precedentemente trovati per le curve A e B sono $y'=\frac{y}{x-2y}$ e $y'=-\frac{y}{x}$ e ci danno invece $y'=-1$ per $y=x$; e d'altra parte questa soluzione $y=x$ non soddisfa alla equazione data; quindi, avendosi così delle contradizioni, siamo da tutto questo avvertiti che dobbiamo ora trovarci in uno di quei casi di eccezione pei quali il teorema generale non può sempre applicarsi.

E difatti, avendo riguardo ai valori dati sopra per $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ si vede che mentre per $y=x$ e $y'=-1$ tutte le equazioni $f(x,y,y')=0$ $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$ riescono soddisfatte si ha però al tempo stesso $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e appunto al presentarsi di questi casi noi abbiamo detto in generale che il metodo può benissimo non corrispondere affatto.

XXIV.

Sulla integrazione di alcune equazioni differenziali di ordine superiore

Equazioni differenziali che contengono soltanto una derivata.

419. — Per le equazioni differenziali di ordine superiore, se si eccettua il caso delle equazioni lineari che sarà da noi considerato diffusamente a parte in seguito, non si ha alcun metodo generale d'integrazione, non potendo dirsi che siano, almeno per la maggior parte dei casi, di pratica utilità per la ricerca degli integrali i processi che nel cap. XIX ci condussero alla dimostrazione della esistenza degli integrali medesimi; e quindi ciò che potremo dire ora sulla integrazione delle equazioni differenziali di ordine superiore sarà necessariamente limitato all'esame di alcuni casi particolari.

Il primo dei casi che considereremo è quello delle equazioni che contengono la variabile indipendente x e una derivata soltanto $\frac{d^n y}{dx^n}$ o $y^{(n)}$ rapporto alla quale sono anche risolute, per modo cioè che siano della forma

$$y^{(n)} = \mathrm{X}\,, \tag{1}$$

essendo X una funzione della sola x finita e atta alla integrazione nell'intervallo nel quale verrà considerata.

In questo caso, indicando con $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ i valori che nell'integrale generale devono prendere y e le sue prime $n-1$ derivate per $x=x_0$ si vede subito che con una prima integrazione la (1) ci dà $y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx + y_0^{(n-1)}$, e così la integrazione della equazione data è ridotta a quella di un altra della stessa forma ma di ordine $n-1$.

Una nuova integrazione ci condurrà all'altra equazione dell'ordine $n-2$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx + y_0^{(n-1)}(x-x_0) + y_0^{(n-2)},$$

e così continuando, con integrazioni successive si giungerà infine all'integrale generale richiesto che risulterà della forma

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx + y_0^{(n-1)} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{\pi(n-1)} + y_0^{(n-2)} \frac{(x-x_0)^{n-2}}{\pi(n-2)} + \ldots y''_0 \frac{(x-x_0)^2}{\pi(2)} + \\ + y'_0 (x-x_0) + y_0\,, \tag{2}$$

dove l'integrale multiplo si compone di n integrali.

420. — La integrazione della equazione (1) è così ridotta alle quadrature, e richiede n integrazioni semplici successive. È facile però di vedere che queste n integrazioni successive possono ridursi ad altre integrazioni semplici ed anche ad una sola integrazione.

Poniamo perciò per abbreviare

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx = \mathrm{X}_1\,, \quad \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}_1\,dx = \mathrm{X}_2\,, \quad \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}_2\,dx = \mathrm{X}_3\,, \ldots, \quad \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}_{n-1}\,dx = \mathrm{X}_n\,.$$

Colla integrazione per parti avremo

$$\mathrm{X}_2 = x\,\mathrm{X}_1 - \int_{x_0}^{x} x \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x} dx = x\,\mathrm{X}_1 - \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}\,dx = x \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx - \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}\,dx\,,$$

$$\mathrm{X}_3 = x\,\mathrm{X}_2 - \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}_1\,dx = x\,\mathrm{X}_2 - \frac{x^2}{2}\mathrm{X}_1 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} x^2\,\mathrm{X}\,dx =$$

$$= \frac{1}{1\,.\,2} \left\{ x^2 \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx - 2x \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}\,dx + \int_{x_0}^{x} x^2\,\mathrm{X}\,dx \right\},$$

e poichè similmente si troverebbe

$$\mathrm{X}_4 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \left\{ x^3 \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx - 3\,x^2 \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}\,dx + 3\,x \int_{x_0}^{x} x^2\,\mathrm{X}\,dx - \int_{x_0}^{x} x^3\,\mathrm{X}\,dx \right\},$$

e in tutte queste formole i coefficienti sono quelli binomiali di $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3, \ldots$, viene fatto naturalmente di pensare che in generale si abbia la formola

$$\mathrm{X}_i = \frac{1}{\pi(i-1)} \left\{ x^{i-1} \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx - (i-1)_1\, x^{i-2} \int_{x_0}^{x} x\,\mathrm{X}\,dx + (i-1)_2\, x^{i-3} \int_{x_0}^{x} x^2\,\mathrm{X}\,dx \ldots \pm \\ \pm (i-1)_{i-1} \int_{x_0}^{x} x^{i-1}\,\mathrm{X}\,dx \right\}, \tag{3}$$

e per dimostrare che essa sussiste effettivamente basterà fare vedere che ammettendola vera per X_i, essa vale anche per X_{i+1}.

Ora moltiplicando i due membri di questa formola per dx e poi ad ogni termine del secondo membro applicando una integrazione per parti, coll'osservare che il termine s^0 fra parentesi $(-1)^{s-1}(i-1)_{s-1}x^{i-s}\int_{x_0}^x x^{s-1}X\,dx$ dà luogo agli altri

$$(-1)^{s-1}(i-1)_{s-1}\left\{\frac{x^{i-s+1}}{i-s+1}\int_{x_0}^x x^{s-1}X\,dx-\frac{1}{i-s+1}\int_{x_0}^x x^i X\,dx\right\},$$

o

$$(-1)^{s-1}\frac{i_{s-1}}{i}\left\{x^{i-s+1}\int_{x_0}^x x^{s-1}X\,dx-\int_{x_0}^x x^i X\,dx\right\},$$

si vede subito che si avrà

$$X_{i+1}=\frac{1}{\pi(i)}\left\{x^i\int_{x_0}^x X\,dx-i_1x^{i-1}\int_{x_0}^x xX\,dx+i_2x^{i-2}\int_{x_0}^x x^2X\,dx-\ldots\mp i_i\int_{x_0}^x x^iX\,dx-\right.$$
$$\left.-(1-i_1+i_2-i_3+\ldots\pm i_{i-1})\int_{x_0}^x x^iX\,dx\right\},$$

e perciò sarà come volevamo dimostrare

$$X_{i+1}=\frac{1}{\pi(i)}\left\{x^i\int_{x_0}^x X\,dx-i_1x^{i-1}\int_{x_0}^x xX\,dx+i_2x^{i-2}\int_{x_0}^x x^2X\,dx-\ldots\mp i_i\int_{x_0}^x x^iX\,dx\right\},$$

perchè $1-i_1+i_2-i_3+\ldots\pm i_{i-1}=(1-1)^{i-1}=0$

Cambiando dunque in questa i in $n-1$ o nella (3) i in n, si trova subito che l'integrale generale (2) della nostra equazione differenziale (1) verrà espresso per $n+1$ integrali semplici mediante la formola

$$(4)\quad y=\frac{1}{\pi(n-1)}\left\{x^{n-1}\int_{x_0}^x X\,dx-(n-1)_1x^{n-2}\int_{x_0}^x xX\,dx+(n-1)_2x^{n-3}\int_{x_0}^x x^2X\,dx-\ldots+(-1)^{n-1}(n-1)_{n-1}\int_{x_0}^x x^nX\,dx\right\}+$$
$$+y_0+\frac{y'_0}{\pi(1)}(x-x_0)+\frac{y''_0}{\pi(2)}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{\pi(n-1)}(x-x_0)^{n-1}.$$

Se poi si osserva che, quando nella formola (3) sotto gli integrali si cambi la variabile d'integrazione x in z e s'indichi allora con X_z ciò che diviene X per questo cambiamento, potremo portare sotto i segni integrali anche i fattori x^{i-1}, $-(i-1)_1x^{i-2}$, ... che li moltiplicano, si otterrà così anche la formola seguente

$$(5)\qquad X_i=\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\ldots\int_{x_0}^x X\,dx=\frac{1}{\pi(i-1)}\int_{x_0}^x (x-z)^{i-1}X_z\,dz,$$

e l'integrale y della equazione (1) potrà porsi sotto la forma

$$(6)\qquad y=\frac{1}{\pi(n-1)}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1}X_z\,dz+y_0+\frac{y'_0}{\pi(1)}(x-x_0)+$$
$$+\frac{y''_0}{\pi(2)}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{\pi(n-1)}(x-x_0)^{n-1},$$

e verrà così espresso per un unico integrale semplice.

421. — Notiamo di passaggio che le formole (3) e (5) sono formole generali che valgono per qualunque funzione X atta alla integrazione in qualunque intervallo del quale facciano parte il punto x_0 e il punto x; e notiamo anche che la formola (6) conduce ad una nuova dimostrazione della formola di Taylor abbreviata per le funzioni $f(x)$ che sono finite e continue nel tratto da x_0 a x_0+h insieme alle loro derivate fino a quelle dell'ordine $n-1$, e colle derivate n^e finite e atte alla integrazione; col resto dato, per mezzo di un integrale, sotto quella forma stessa che trovammo al § 197 (pag. 300-301).

Osservando infatti che la funzione

$$f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{\pi(1)}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{\pi(2)}(x-x_0)^2-\ldots-\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{\pi(n-1)}(x-x_0)^{n-1}$$

è quell'integrale della equazione $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ che per $x=x_0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate, è certo (a causa della unicità degli integrali) che esso dovrà aversi anche dalla formola (6) facendovi le $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ tutte eguali a zero e al tempo stesso $X=f^{(n)}(x)$, e questa porta a dire che si ha la formola

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x_0)}{\pi(1)}(x-x_0)+\frac{\pi(2)}{f''(x_0)}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{\pi(n-1)}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1}f^{(n)}(z)\,dz,$$

che col cambiare x in x_0+h si muta nell'altra

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{\pi(2)}+\ldots+f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}+$$
$$+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_{x_0}^{x_0+h}(x_0+h-z)^{n-1}f^{(n)}(z)\,dz.$$

che non è altro che la formola di Taylor dimostrata così per le funzioni $f(x)$ che soddisfano alle condizioni poste.

Il resto R_n viene qui sotto la forma d'integrale come già lo trovammo al ricordato § 197, e pel primo teorema del valore medio può anche scriversi sotto la forma $\frac{M}{\pi(n-1)}\int_{x_0}^{x_0+h}(x_0+h-z)^{n-1}dz$ o $\frac{M h^n}{\pi(n)}$ essendo M un numero compreso fra il limite inferiore e superiore di $f^{(n)}(x)$ pei valori di x fra x_0 e x_0+h; e poichè per le nostre ipotesi queste derivate esistono sempre e sono determinate e finite in ogni punto fra x_0 e x_0+h (gli estr. incl.), pel teorema del § 43 (pag. 54-55) del Calcolo differenziale, anche M sarà il valore della derivata di $f^{(n)}(x)$ in un punto $x_0+\theta_n h$ fra x_0 e x_0+h e quindi il resto R_n si potrà porre sotto la solita forma $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$.

422. — Al caso considerato può anche aggiungersi l'altro delle equazioni $f(x, y^{(n)})=0$ che non possono o non vogliono risolversi rispetto a $y^{(n)}$ ma si risolvono rispetto ad x dandoci così $x=\varphi(y^{(n)})$.

In questo caso infatti escludendo la soluzione $y^{(n)}=\text{cost.}$ che talvolta la equazione data potrebbe avere (*), e ponendo $y^{(n)}=p$ con che $x=\varphi(p)$, se si prenderà p come variabile ausiliaria basterà osservare che si ha $y^{(n)}=p=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ per dedurne subito $dy^{(n-1)}=p\,dx=p\varphi'(p)\,dp$, e quindi

$$y^{(n-1)}=\int p\varphi'(p)dp+C_1,$$

con C_1 costante arbitraria; e indicando con P_{n-1} il secondo membro, e osservando che $y^{(n-1)}=\frac{dy^{(n-2)}}{dx}$ se ne dedurrà $dy^{(n-2)}=P_{n-1}\,dx=P_{n-1}\varphi'(p)\,dp$, e quindi

$$(7)\qquad y^{(n-2)}=\int P_{n-1}\varphi'(p)\,dp+C_2,$$

e così continuando, con n integrazioni successive giungeremo a trovare

$$(8)\qquad y=\theta(p, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

con $C_1, C_2, \dots, C_n$ costanti arbitrarie; e questa insieme all'altra $x=\varphi(p)$ darà l'integrale cercato della equazione $f(x, y^{(n)})=0$, che potrà aversi anche sotto la forma $f(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0$ quando si possa eliminare p fra le due equazioni $x=\varphi(p)$ e $y=\theta(p, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

(*) A questa soluzione $y^{(n)}=k=\text{cost.}$ corrisponderebbe l'integrale $y=C_0+C_1x+C_2x^2+\dots+C_{n-1}x^{n-1}+\frac{k}{\pi(n)}x^n$ con $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ costanti arbitrarie.

E si può notare che con successive integrazioni per parti applicate alle espressioni differenziali $p\varphi'(p)dp$, $P_{n-1}\varphi'(p)dp$, $P_{n-2}\varphi'(p)dp, \dots$ analogamente a quanto si fece nel § 420, si può avere il valore (8) di y espresso per un unico integrale con una formola del tutto simile alla (6), cioè

$$(9)\qquad y=\frac{1}{\pi(n-1)}\int_{p_0}^{p}\left\{\varphi(z)-\varphi(p)\right\}^{n-1}z\varphi'(z)dz+y_0+\frac{y'_0}{\pi(1)}\left\{\varphi(p)-\varphi(p_0)\right\}+\frac{y''_0}{\pi(2)}\left\{\varphi(p)-\varphi(p_0)\right\}^2+$$
$$+\frac{y_0^{(n-1)}}{\pi(n-1)}\left\{\varphi(p)-\varphi(p_0)\right\}^{n-1},$$

essendo p_0 il valore di p o di $y^{(n)}$ che corrisponde al valore x_0 di x pel quale cioè si ha $\varphi(p_0)=x_0$, o $f(x_0, p_0)=0$, e $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ essendo i soliti valori di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ per $x=x_0$ che si suppongono dati arbitrariamente.

Equazioni differenziali che contengono soltanto due derivate consecutive.

423. — Un altro caso notevole è quello delle equazioni nelle quali figurano soltanto due derivate consecutive della funzione incognita y.

Consideriamo dapprima una equazione del second'ordine

$$(1)\qquad f(y', y'')=0,$$

nella quale non compariscono che la derivata prima e la seconda di y e non vi comparisce la variabile indipendente x.

Ponendo $y'=p$ con che $y''=\frac{dp}{dx}=p'$, questa equazione si ridurrà all'altra del prim'ordine in p

$$(2)\qquad f(p, p')=0$$

che è del genere di quelle che abbiamo già studiato ai §§ 359 e seg. (pag. 524 e seg.) e più specialmente al § 385 (pag. 554-55), per modo che ora come allora converrà fermarsi sul caso in cui essa si risolve rispetto a p' e su quello in cui si risolve invece rispetto a p, che corrispondono ai casi nei quali la equazione data (1) si può risolvere o rispetto a y'' o rispetto a y'.

a) Quando la (1) si risolve rispetto a y'' o, il che è lo stesso, la (2) si risolve rispetto a p' dandoci $p'=\varphi(p)$ ovvero $\frac{dp}{dx}=\varphi(p)$, essendo $\varphi(p)$ una funzione della sola p che viene dalla risoluzione della stessa (2), allora avendosi $dx = \frac{dp}{\varphi(p)}$, si troverà subito intanto con una sola quadratura

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C, \tag{3}$$

essendo C una costante arbitraria, e poi osservando che la $y' = p$ ci dà $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{\varphi(p)}$, se ne dedurrà subito con un'altra quadratura

$$y = \int \frac{p\,dp}{\varphi(p)} + C_1 = p \int \frac{dp}{\varphi(p)} - \int dp \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C_1, \tag{4}$$

essendo C_1 un'altra costante arbitraria; e così in questo caso l'integrale della equazione data (1) verrà dato dal sistema delle due equazioni (3) e (4) per mezzo della variabile p considerata come indipendente, e potrà aversi in x e y sotto la forma $\psi(x - C, y - C_1) = 0$ quando si riesca ad eliminare il p fra le stesse equazioni (3) e (4).

Del resto se si riescirà a risolvere la equazione (3) rispetto a p per modo da avere $p = \theta(x - C)$, siccome $dy = p\,dx$ avremo subito per l'integrale in x e y $y = \int \theta(x - C)\,dx + C_1$.

b) Quando poi la equazione data (1) si risolva rispetto a y' o, il che è lo stesso, la (2) si risolva rispetto a p, per modo che, posto $p' = q$ o $\frac{dp}{dx} = q$, si abbia $p = \psi(q)$, allora osservando che questa ci darà $dp = \psi'(q)dq$, e che per la formola $\frac{dp}{dx} = q$ avremo $dx = \frac{dp}{q} = \frac{\psi'(q)}{q}dq$ e quindi $dy = p\,dx = \frac{\psi(q)\psi'(q)}{q}dq$, troveremo subito le due

$$x = \int \frac{\psi'(q)}{q}dq + C \ , \quad y = \int \frac{\psi(q)\psi'(q)}{q}dq + C_1, \tag{5}$$

con C e C_1 costanti arbitrarie, e queste ci daranno ancora l'integrale della (1) per mezzo della variabile ausiliaria indipendente q, e condurranno all'integrale fra la x e y quando da queste si riesca ad eliminare il q.

Del resto poi se potremo risolvere la prima delle (5) rispetto a q in modo da avere $q = \tau(x - C)$ e quindi $p = \psi[\tau(x - C)]$, allora, per essere $dy = p\,dx$, avremo subito la formola $y = \int \psi[\tau(x - C)]\,dx + C_1$ che darà l'integrale espresso per le variabili x e y.

S'intende che nel primo *a)* di questi casi si deve escludere la soluzione $y' = \text{cost.}$, che potrebbe talvolta soddisfare la equazione data (1), perchè allora p non sarebbe più variabile e p' e $\varphi(p)$ sarebbero nulle; e nel caso *b)* si esclude la soluzione $y'' = \text{cost.}$, che pure talvolta potrebbe soddisfare alla equazione data, perchè q non sarebbe più variabile.

Questi casi $y' = \text{cost.}$ o $y'' = \text{cost.}$ darebbero naturalmente per y funzioni di primo e secondo grado respettivamente che dovrebbero soddisfare alla equazione data (1).

424. — Quando poi si abbia da integrare una equazione sempre con due sole derivate consecutive, ma di ordine superiore al secondo $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, ponendo $y^{(n-1)} = p$ con che $y^{(n)} = \frac{dp}{dx} = p'$, si passerà ancora ad una equazione $f(p, p') = 0$ come la (2) che si tratterà al modo stesso, dando luogo ancora così ai due casi *a)* e *b)* che si ebbero poc'anzi.

a) Così se la equazione stessa si risolverà rispetto a p' dandoci $p' = \varphi(p)$, essa condurrà subito alla formola

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + C; \tag{6}$$

e se questa equazione si potrà risolvere rispetto a p, dandoci allora $p = \theta(x - C)$ o $y^{(n-1)} = \theta(x - C)$ ci riporterà subito al caso delle equazioni considerate nel § 419, e avremo quindi l'integrale y con altre $n - 1$ integrazioni successive che potranno ridursi ad una sola integrazione colle formole del § 420.

E quando invece la (6) non si voglia o non si possa risolvere rispetto a p, allora verremo ad essere nel caso considerato al § 422, e così osservando che per essere $\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)} = p$ si ha $dy^{(n-2)} = p\,dx = \frac{p\,dp}{\varphi(p)}$, si troverà subito $y^{(n-2)} = \int \frac{p\,dp}{\varphi(p)} + C_1$, e similmente indicando con P_{n-2} l'espressione in p del secondo membro, e osservando che $dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx = \frac{P_{n-2}\,dp}{\varphi(p)}$, si troverà $y^{(n-3)} = \int \frac{P_{n-2}\,dp}{\varphi(p)} + C_2$, e così ripetendo lo stesso processo col porre $\int \frac{P_{n-2}\,dp}{\varphi(p)} + C_2 = P_{n-3}, \ldots$, giungeremo infine, con $n - 1$ successive integrazioni che introdurranno ciascuna una costante arbitraria, alla formola $y = \theta(p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, e l'integrale della equazione data risulterà dall'insieme di questa equazione e della (6) e avrà il debito numero di costanti arbitrarie. E questa fonzione y potrà ottenersi anche con una sola quadratura valendosi della formola (9) del detto § 422.

b) E quando la solita equazione $f(p,p')=0$ si risolva rispetto a p invece che rispetto a p' e si abbia $p=\psi(p')$, ponendo ancora $p'=y^{(n)}=q$, con che $dp=q\,dx$, $p=\psi(q)$, $dp=\psi'(q)\,dq$ e quindi $dx=\frac{\psi'(q)}{q}dq$, e $dy^{(n-2)}=p\,dx=\frac{\psi(q)\psi'(q)\,dq}{q}$, si troverà subito

$$x=\int\frac{\psi'(q)}{q}dq+\mathrm{C}\ ,\ y^{(n-2)}=\int\frac{\psi(q)\psi'(q)}{q}dq+\mathrm{C}_1\,,$$

e poi, indicando con Q_{n-2} la espressione che figura nel secondo membro di $y^{(n-2)}$ e osservando che $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\frac{\mathrm{Q}_{n-2}\psi'(q)}{q}dq$, si troverà $y^{(n-3)}=\int\frac{\mathrm{Q}_{n-2}\psi'(q)}{q}dq+\mathrm{C}_2$, e così continuando, con $n-1$ integrazioni successive si giungerà ad avere per la funzione cercata y una espressione della forma $y=\tau(q,\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\ldots,\mathrm{C}_{n-1})$ che insieme al valore precedente $x=\int\frac{\psi'(q)}{q}dq+\mathrm{C}$ di x ci darà l'integrale della equazione data. E anche in questo caso col processo accennato in fine del § 422 avremmo y con una sola integrazione.

S'intende che qui pure si escludono le soluzioni della equazione data $f(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ che ci dessero $y^{(n-1)}=$ cost. pel caso *a)* e $y^{(n)}=$ cost. pel caso *b)*.

E si comprende pure che quando le equazioni date $f(y',y'')=0$ o $f(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ non possano o non vogliano risolversi nè rispetto all'una nè rispetto all'altra delle due derivate che vi figurano, converrà cercare altri artifizii per vedere di giungere a integrare le equazioni stesse. E del resto, anche negli stessi casi qui considerati, artifizii speciali che la pratica suggerisce possono talvolta condurre anche più sollecitamente a integrare la equazione data.

425. — In certi casi potrà trattarsi anche la equazione più generale $f(x,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ che oltre alle due derivate consecutive $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$ contiene anche la variabile indipendente x, perchè col porre ancora $y^{(n-1)}=p$ essa si traforma nell'altra $f(x,p,p')=0$ che rientra fra quelle studiate nel Cap. XXI, per le quali in parecchi casi abbiamo dato dei processi speciali d'integrazione.

426. — Per dare un'applicazione dei processi precedenti, proponiamoci di trovare la curva piana nella quale il raggio di curvatura ha un valore costante a.

Poichè il raggio di curvatura di una linea $y=f(x)$ ha per espressione $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ all'infuori del segno, per la curva cercata dovremo avere la equazione $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{1}{a}$ che rientra appunto fra quelle che ora abbiamo considerate, e col porre $y'=p$ dà luogo all'altra $\frac{p'}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{1}{a}$ che può subito risolversi rispetto a p' e ci dà $p'=\pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{a}$.

Per le formole (3) e (4) dunque avremo subito

$$x=\pm a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\mathrm{C}\,,\qquad y=\pm a\int\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\mathrm{C}_1\,,$$

con C e C_1 costanti arbitrarie, e poichè

$$\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}-\int\frac{p^2\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}-$$
$$-\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,,$$

sarà

$$x=\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+\mathrm{C}\,,\qquad y=\mp\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}+\mathrm{C}_1,$$

e da queste eliminando p si otterrà subito la equazione $(x-\mathrm{C})^2+(y-\mathrm{C}_1)^2=a^2$ che ci mostra che la curva richiesta è soltanto il cerchio di raggio a col centro in un punto qualsiasi.

Del resto, anche senza ricorrere al processo generale, la equazione $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{1}{a}$ che si ha nel caso attuale avremmo potuto integrarla con un artificio molto semplice.

Moltiplicando infatti i suoi due membri per $y'dx$, ne avremmo dedotto subito la equazione $-d\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{dy}{a}$ che colla integrazione avrebbe dato $\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{y-\mathrm{C}_1}{a}$ con C_1 costante arbitraria; e questa avrebbe condotto all'altra $y'=\frac{\sqrt{a^2-(y-\mathrm{C}_1)^2}}{y-\mathrm{C}_1}$ ovvero $\frac{(y-\mathrm{C}_1)\,dy}{\sqrt{a^2-(y-\mathrm{C}_1)^2}}=dx$, che è subito integrabile perchè in essa le variabili sono separate, e ci dà

$\sqrt{a^2-(y-C_1)^2}=x-C$ con C altra costante arbitraria, e quindi ancora $(x-C)^2+(y-C_1)^2=a^2$.

In modo simile potremmo determinare le curve nelle quali è costante la porzione di tangente compresa fra il punto di contatto e una retta parallela a una direzione fissa (asse delle x) condotta pel centro di curvatura, o è costante la porzione di questa retta compresa fra il centro di curvatura e la tangente, perchè per queste curve quando la direzione fissa è l'asse delle x si hanno le respettive equazioni

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'y''}=\pm k\,,\qquad \frac{(1+y'^2)^2}{y'y''}=\pm k$$

con k costante data; e queste s'integrano subito con artifizi semplicissimi anche senza ricorrere ai processi precedenti.

Equazioni nelle quali figurano soltanto due derivate i cui ordini differiscono di due unità.

427. — Un altro caso pure notevole di equazioni differenziali da considerarsi è quello delle equazioni nelle quali non figurano che due derivate i cui ordini differiscono di due unità, e si suppone che si possano risolvere rispetto all'una o all'altra di queste derivate.

Incominciando anche adesso dalle equazioni di second'ordine $f(y,y'')=0$, consideriamo separatamente il caso nel quale la risoluzione si fà rispetto a y'' e quello nel quale si fà rispetto a y.

a) Quando la risoluzione della equazione data $f(y,y'')=0$ si fà rispetto a y'' e si ha $y''=\varphi(y)$, allora moltiplicando per $2y'dx=2dy$ si otterrà subito con una prima integrazione

$$y'^2=2\int\varphi(y)\,dy+C\,,$$

essendo C una costante arbitraria.

Da questa poi si trarrà $y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C}$, ovvero separando le variabili $\frac{dy}{\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C}}=dx$; e si avrà quindi subito per l'integrale della equazione data

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\varphi(y)dy+C}}+C_1\,, \tag{1}$$

essendo C_1 la seconda costante arbitraria.

b) Quando poi la risoluzione della nostra equazione $f(y,y'')=0$ si fa rispetto a y per modo da avere $y=\psi(y'')$, allora, posto $y'=p$, $y''=q$ o $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q$, si vede che, con $y=\psi(q)$ e $dy=\psi'(q)\,dq$, avremo, anche $dy=p\,dx$, $dx=\frac{dp}{q}$, e con queste giungeremo alla equazione $\frac{p\,dp}{q}=\psi'(q)\,dq$ nella quale le variabili p e q possono subito separarsi, per modo che si otterrà immediatamente la equazione

$$p^2=2\int q\,\psi'(q)\,dq+C\,,\quad\text{o}\quad p=\sqrt{2\int q\,\psi'(q)\,dq+C}\,,$$

con C costante arbitraria; e ora, avendosi anche $dx=\frac{dy}{p}=\frac{\psi'(q)\,dq}{p}$, troveremo subito con una nuova integrazione

$$x=\int\frac{\psi'(q)\,dq}{\sqrt{2\int q\,\psi'(q)\,dq+C}}+C_1\,,$$

essendo C_1 una nuova costante arbitraria; e l'integrale della equazione data $f(y,y'')=0$ risulterà dall'insieme delle due equazioni

$$y=\psi(q)\,,\qquad x=\int\frac{\psi'(q)\,dq}{\sqrt{2\int q\,\psi'(q)\,dq+C}}+C_1\,, \tag{2}$$

e quando si riesca ad eliminare q fra queste equazioni si giungerà a trovare l'integrale anche in x e y sotto la forma $\theta(x-C_1,y,C)=0$.

S'intende bene che in questo caso in cui q deve essere presa come variabile indipendente bisogna escludere quelle soluzioni della equazione data, che talvolta potrebbero esserci, che rendessero $y''=\text{cost.}$, per le quali y risulterebbe una funzione di secondo grado.

428. — E del resto è da osservare sì pel caso *a)* che pel caso *b)* — come in generale per le equazioni differenziali della forma $f(y,y'')=0$ —, che quando si sia potuta integrare questa equazione, rimarrà integrata anche l'altra $f(y-a-bx,y'')=0$ nella quale a e b sono costanti determinate, perchè posto $y=a+bx+z$ quest'ultima equazione si riduce all'altra $f(z,z'')=0$ che non è che la precedente.

E quando si abbia una equazione della forma $f(y-a-bx-cx^2,y'')=0$ dove a,b,c sono costanti determinate, ponendo $y=a+bx+cx^2+z$ si ridurrà subito all'altra $f(z,z''+2c)=0$ che rientra ancora nei casi qui considerati.

429. — Considerando poi il caso delle equazioni $f(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$ d'ordine n superiore al secondo, osserviamo che ponendo $y^{(n-2)}=p$ si ricade nella

equazione testè considerata $f(p, p'')=0$, e con procedimenti simili a quelli seguìti nel § 427 si giungerà a ottenere l'integrale della equazione data con sole quadrature, tutte le volte che la equazione stessa si possa risolvere rispetto all'una o all'altra delle due derivate.

Così per es. se la risoluzione potrà farsi rispetto a $y^{(n)}$ per modo che sia $y^{(n)}=\varphi(y^{(n-2)})$ o, colla introduzione della variabile $p, p''=\varphi(p)$, si troverà dapprima per mezzo della (1)

$$(3) \qquad x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}}+C_1;$$

e se questa equazione si potrà risolvere rispetto a p in modo da avere $p=\psi_{n-2}(x-C_1, C)$, ci rimarrà da integrare la equazione $y^{(n-2)}=\psi_{n-2}(x-C_1, C)$ che s'integrerà con sole quadrature col processo dei §§ 419 e seg.

Se poi la (3) non si potrà risolvere rispetto a p, allora siccome si ha $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}}$, si troverà integrando

$$y^{(n-3)}=\int\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}}+C_2;$$

e poi indicando con P_{n-3} il secondo membro di questa formola e osservando che $dy^{(n-4)}=y^{(n-3)}dx=\frac{P_{n-3}\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}}$, si troverà anche

$$y^{(n-4)}=\int\frac{P_{n-3}\,dp}{\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp+C}}+C_3,$$

e così continuando si troverà infine con $n-2$ quadrature successive relative a p

$$(4) \qquad y=\theta(p, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}),$$

e l'integrale della nostra equazione risulterà dall'insieme delle due equazioni (3) e (4). E anche qui la determinazione di y potrà ridursi ad una sola quadratura col processo accennato in fine del § 422.

Quando poi la equazione data $f(y^{(n-2)}, y^{(n)})=0$ non si sappia risolvere nè rispetto a $y^{(n-2)}$ nè rispetto a $y^{(n)}$, allora solo con artifizii speciali si potrà giungere talvolta alla integrazione di questa equazione; come in ogni caso, anche quando i processi precedenti siano applicabili, artifizii speciali potranno talvolta condurre più speditamente all'integrale della equazione medesima.

430. — Diamo ora anche alcuni esempî semplici relativi al caso di equazioni del second'ordine come quelle testè considerate.

1.° Vogliasi l'integrale della equazione $y''=-ny$, dove n è una costante qualsiasi.

Moltiplicando i due membri di questa equazione per $2y'dx$ e integrando si troverà $y'^2=-ny^2+C$ con C costante arbitraria, e perciò si avrà $\frac{dy}{\sqrt{C-ny^2}}=dx$, e integrando di nuovo si troverà $x+C_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{C}{n}-y^2}}$, cioè $x+C_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arc\,sen}\left(y\sqrt{\frac{n}{C}}\right)$, ovvero $y=C\operatorname{sen}\sqrt{n}\,(x+C_1)$, quando C sia diverso da zero e s'intenda cambiato $\sqrt{\frac{n}{C}}$ in $\frac{1}{C}$; e si potrà anche scrivere evidentemente

$$(5) \qquad y=C_1\operatorname{sen}\sqrt{n}\,x+C_2\cos\sqrt{n}\,x,$$

essendo C_1 e C_2 altre costanti arbitrarie che potranno supporsi anche complesse; e i *seni* e *coseni* quando n è negativo venendo ad essere *seni* e *coseni iperbolici*.

Per $C=0$ poi, avendosi $y'^2=-ny^2$ è $y'=\pm\sqrt{-n}\,y$, si trova subito $y=k\,e^{\pm\sqrt{-n}\,x}$ con k costante arbitraria, e questo integrale viene anche dall'integrale precedente (5) per valori convenienti di C_1 e C_2.

2.° Vogliasi la curva nella quale il raggio di curvatura è proporzionale al cubo della lunghezza della normale.

Ricordando che la normale a una curva ha per espressione $y\sqrt{1+y'^2}$, mentre il raggio di curvatura è $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, si vede subito che la equazione differenziale della curva cercata è la seguente $y''=\pm\frac{a^2}{y^3}$, essendo a una costante data che rappresenterà una lunghezza.

Essendo dunque questa la equazione da integrarsi, basterà seguire il processo generale dato sopra per dedurne subito intanto

$$y'^2=\mp\frac{a^2}{y^2}+\frac{1}{n}, \quad\text{ovvero}\quad y'=\frac{\sqrt{y^2\mp na^2}}{y\sqrt{n}},$$

essendo n una costante diversa da zero ma che potrà anche essere infinita.

Da questa quando n è finito avremo l'altra $\frac{\sqrt{n}\,yy'}{\sqrt{y^2\mp na^2}}=1$, che è subito integrabile e conduce alla equazione

$$\sqrt{n}\sqrt{y^2 \mp na^2} = x + C, \quad \text{ovvero} \quad ny^2 - (x+C)^2 = \pm n^2a^2,$$

che rappresenta sempre una iperbola o una ellisse (il cerchio compreso) che si ridurrebbe però a una ellisse immaginaria quando con n negativo nel secondo membro si prendesse il segno superiore.

Per $n = \infty$ poi, prendendo il segno inferiore nella equazione differenziale onde avere una curva reale, avremo $y'^2 = \frac{a^2}{y^2}$ e $yy' = \pm a$ e quindi $y^2 = \pm 2ax + C$, talchè in questo caso la curva sarà una parabola; e così si può ora affermare che le curve nelle quali il raggio di curvatura è proporzionale al cubo della lunghezza della normale sono tutte e sole le curve del second'ordine.

Alcuni casi di equazioni differenziali il cui ordine può essere abbassato.

431. — Nei casi di equazioni differenziali di ordine superiore finora considerati i processi d'integrazione che abbiamo dato riportano sempre alla considerazione di equazioni di prim'ordine che rientrano fra quelle per le quali si erano già dati processi speciali d'integrazione.

Più generalmente si comprende come avendosi equazioni differenziali per le quali con qualche processo l'ordine di differenziazione possa essere abbassato, potrà darsi che si riducano così ad altre che si sanno integrare, e allora si integreranno anche le equazioni date; e noi ci fermeremo perciò a indicare alcuni casi di equazioni differenziali per le quali l'ordine può appunto essere abbassato facilmente.

432. — I casi più comuni sono i seguenti:

a) Le equazioni nelle quali manca la funzione incognita y, mancando inoltre o no alcune delle sue prime derivate successive, cioè le equazioni della forma

$$f(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nelle quali $m \geq 1$ e $n > m$, possono ridursi subito ad un'altra che è dell'ordine $n - m$, cioè inferiore di m unità, ponendo $y^{(m)} = p$, perchè con questa trasformazione la equazione stessa si riduce subito all'altra

$$f(x, p, p', p'', \dots, p^{(n-m)}) = 0;$$

e quando si riesca ad integrare questa giungendo a una equazione della forma $p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})$, la quale corrisponderà all'altra $y^{(m)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})$,

essendo $C_1, C_2, \dots, C_{n-m}$ $n-m$ costanti arbitrarie, si otterrà poi y con semplici quadrature e con altre m costanti arbitrarie coi processi dei §§ 419 e seg. (*).

b) Un secondo caso notevole di equazioni differenziali il cui ordine può essere abbassato è quello delle equazioni differenziali della forma

$$f(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

che non contengono la variabile indipendente x; perchè prendendo allora per variabile indipendente y invece di x, col sostituire quindi a $y', y'', y''', \dots$ respettivamente $\frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \dots$, verremo a rientrare subito nel caso precedente; e allora l'ordine della equazione potrà abbassarsi almeno di una unità ponendo col processo tenuto nel caso precedente $x' = p$, o anche, come talvolta converrà di fare, ponendo $\frac{1}{x'} = p$, e prendendo p come funzione incognita di y. Trovata poi colla integrazione questa funzione p o y' in funzione di x e y con $n-1$ costanti arbitrarie, si avrà y con una semplice quadratura che introdurrà l'altra costante arbitraria.

c) Un terzo caso, ed è il più notevole, di equazioni differenziali il cui ordine può essere abbassato è quello delle equazioni che sono omogenee rispetto alla funzione incognita y e alle sue derivate, la x entrandoci in un modo qualsiasi.

Presa infatti a considerare una equazione $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ che sia omogenea rispetto alle quantità $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, introducendo una funzione incognita ausiliaria z col porre $y = e^{\int z\,dx}$, avremo evidentemente

$$y = e^{\int z\,dx}, \; y' = e^{\int z\,dx} z, \; y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z'), \; y''' = e^{\int z\,dx}(z^3 + 3zz' + z''), \dots,$$

e in generale $y^{(i)} = e^{\int z\,dx}(z^i + \dots + z^{(i-1)})$; e quindi evidentemente sostituendo nella equazione data si troverà che questa viene a contenere come fattore la esponenziale $e^{\int z\,dx}$ a una certa potenza, e sopprimendo questo fattore rimarrà una equazione differenziale $\theta(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$ dell'ordine $n-1$ in z.

Integrata questa e trovata z con $n-1$ costanti arbitrarie, la formola $y = e^{\int z\,dx}$ darà y con una sola quadratura che introdurrà l'n^a costante arbitraria la quale, volendolo, potrà sempre farsi figurare a moltiplicare $e^{\int z\,dx}$.

(*) Evidentemente quando con un procedimento qualsiasi si sia trovato qualche integrale della equazione (1), se ne avrà sempre un altro aggiungendogli un polinomio di grado $m-1$, con coefficienti qualsiansi, $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{m-1}x^{m-1}$.

433. — Diamo ora alcuni esempii di equazioni differenziali che s'integrano facilmente abbassando il loro ordine.

1.° Vogliasi la curva nella quale il raggio di curvatura è in ragione inversa dell'ascissa.

La equazione differenziale della curva sarà la seguente $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm \frac{a^2}{2x}$, essendo a^2 una costante, e siccome questa equazione rientra fra quelle della forma (1) si ridurrà subito al prim'ordine ponendo $y'=p$ e prendendo p come funzione incognita.

Si troverà così $\frac{p'}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{2x}{a^2}$ ovvero $\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{2\,xdx}{a^2}$, e siccome in questa equazione le variabili sono già separate, integrandola, col ricordare che si ha $\int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \text{cost.}$, troveremo subito $x^2+C = \pm \frac{a^2 p}{\sqrt{1+p^2}}$, donde $p = \frac{x^2+C}{\sqrt{a^4-(x^2+C)^2}}$ essendo C una costante arbitraria; e ora poichè $p=\frac{dy}{dx}$, con una quadratura che introdurrà un'altra costante arbitraria C_1 avremo subito

$$y = \int \frac{(x^2+C)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+C)^2}} + C_1$$

per la equazione della curva cercata. Questa curva è quella conosciuta sotto il nome di *curva elastica* perchè è secondo questa curva che si dispone una lamina elastica quando una sua estremità è fissa e l'altra sopporta un dato peso.

In modo simile si tratterebbe il problema più generale della ricerca delle curve nelle quali il raggio di curvatura è una data funzione dell'ascissa.

2.° Vogliansi in secondo luogo le curve nelle quali il raggio di curvatura è proporzionale alla lunghezza della normale.

Ricordando le espressioni del raggio di curvatura e della normale nelle curve, si trova subito che la equazione del problema è la seguente $\frac{1+y'^2}{y''} = ny$, essendo n una costante diversa da zero ma che può essere positiva o negativa.

Essendo questa equazione della forma della (2), il suo ordine si abbasserà al primo prendendo come variabile indipendente y invece di x e ponendo poi $\frac{1}{x'} = p$.

Allora la equazione trasformata diverrà la seguente $\frac{npp'}{1+p^2} = \frac{1}{y}$, ovvero $\frac{np\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$, e quindi integrando si troverà subito $\log \frac{y}{C} = \log (1+p^2)^{\frac{n}{2}}$ ovvero $\frac{y}{C} = (1+p^2)^{\frac{n}{2}}$ o $p = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}$, essendo C una costante arbitraria.

Trovato ora il p, si passerà a integrare la equazione $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}$, ovvero $dx = \left\{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right\}^{-\frac{1}{2}} dy$, e si troverà quindi la formola seguente $x + C_1 = \int \left\{\left(\frac{y}{C}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right\}^{-\frac{1}{2}} dy$, con C_1 nuova costante arbitraria, per la equazione della curva cercata.

Supponendo $n=-1$ si trova la curva $x + C_1 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C^2-y^2}} = -\sqrt{C^2-y^2}$, o $y^2+(x+C_1)^2 = C^2$ che è una circonferenza di raggio arbitrario C col centro in un punto qualsiasi dell'asse della x; e supponendo invece $n=1$ si ha $x+C_1 = C\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-C^2}} = C.\ 2 \,\text{sett}\cos\text{h}\, \frac{y}{C}$ ovvero $y = \cos\text{h}\,\frac{x+C_1}{C}$, e questa è l'equazione che dà la meccanica per la curva chiamata *catenaria*, secondo la quale si dispone un filo pesante e flessibile attaccato, colle sue estremità a due punti fissi.

3.° Vogliasi l'integrale della equazione di second'ordine

$$y'' + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^4} = 0 \tag{3}$$

che è omogenea in y, y' e y'', e può quindi ridursi al prim'ordine col processo dato al caso *c)* del paragrafo precedente, cioè col porre $y = e^{\int z\,dx}$ e prendere per incognita z.

Si giunge così alla equazione del prim'ordine

$$z' + z^2 + 2\frac{z}{x} - \frac{1}{x^4} = 0$$

che rientra fra quelle dette di Riccati considerate al § 375 e seg. (pag. 544 e seg.): e poichè questa ammette l'integrale $z = \frac{1}{x^2}$, col processo dello stesso § 375 si trova che il suo integrale generale è

$$z = \frac{1}{x^2}\,\frac{Ce^{-\frac{2}{x}}+1}{Ce^{-\frac{2}{x}}-1},$$

o più semplicemente

$$z = -\frac{\coth\left(\alpha + \frac{1}{x}\right)}{x^2} = \frac{d \log \operatorname{sen h}\left(\alpha + \frac{1}{x}\right)}{dx},$$

quando si muti la costante C in $e^{-2\alpha}$, essendo α una nuova costante arbitraria; e ora sostituendo questo valore di z nella formola $y = e^{\int z\,dx}$, si trova che l'integrale della equazione data (3) è il seguente

$$y = \beta \operatorname{sen h}\left(\alpha + \frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

essendo α e β le due costanti arbitrarie (*).

434. — Fra le equazioni omogenee in y e nelle sue derivate vogliamo fermarci in particolare sopra alcune di quelle del second'ordine che conducono a un risultato che merita di essere segnalato.

Si prenda a considerare la equazione del second'ordine

$$y'' = \varphi(y, y') \tag{5}$$

dove φ è una funzione omogenea qualsiasi in y e y' del primo grado.

Coll'applicare ancora il processo del caso *c)* del § 432, cioè col porre $y = e^{\int z\,dx}$ si passerà all'altra equazione del prim'ordine in z

$$z' = \varphi(1, z) - z^2, \quad \text{o} \quad \frac{dz}{\varphi(1, z) - z^2} = dx, \tag{6}$$

(*) Se nella formola (4) si cambia la variabile x in u col porre $x = \frac{1}{u}$, si ottiene $y = \beta \operatorname{sen h}(\alpha + u)$, e allora y viene ad essere l'integrale della equazione del second'ordine $y'' - y = 0$; e di qui si vede che quando nella equazione data (3) si fosse fatto questo cambiamento di variabile, essa si sarebbe ridotta a questa ultima equazione che abbiamo già integrata al § 430, 1.°

Questo fa intendere come talvolta per la integrazione delle equazioni differenziali $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ possa giovare di sostituire alla variabile indipendente x un'altra variabile u con una trasformazione adattata $x = x(u)$, perchè allora, valendosi delle formole date nel calcolo differenziale pel cambiamento della variabile indipendente, la equazione data si cambia nell'altra $f\left(x(u), y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}, \ldots\right)$ in y e u, che sarà pure dell'ordine n, ma potrà talvolta essere più facilmente integrata, come avviene appunto per la equazione (3) quando si pone come abbiamo detto $x = \frac{1}{u}$.

Questa osservazione, del resto molto ovvia, potrà giovare in molti casi per la integrazione delle equazioni differenziali per mezzo del cambiamento della variabile indipendente.

che s'integrerà subito con una quadratura dando luogo alla formola

$$\int \frac{dz}{\varphi(1, z) - z^2} = x + C \tag{7}$$

con C costante arbitraria; e quindi eseguita la integrazione del primo membro, se si riescirà ad avere da questa equazione z espresso per x con una formola della forma $z = \psi(x + C)$ si otterrà subito l'integrale della equazione data (5) per mezzo della formola

$$y = e^{\int \psi(x+C)\,dx},$$

nella quale l'integrale dell'esponente introdurrà un'altra costante arbitraria che potrà farsi sempre figurare come un fattore C_1 che moltiplichi la esponenziale.

435. — Bene spesso però la risoluzione rispetto a z della equazione (7) non potrà farsi o non converrà di farla per le difficoltà e complicazioni che presenterà, e allora indipendentemente da tale risoluzione si può osservare che con un cambiamento di variabile l'integrale $\int z\,dx$ potrà ridursi all'altro $\int \frac{z\,dz}{z'}$ che per la (6) potrà scriversi sotto la forma $\int \frac{z\,dz}{\varphi(1, z) - z^2}$, e quindi si avrà per y la formola $y = C_1 e^{\int \frac{z\,dz}{\varphi(1, z) - z^2}}$, nella quale abbiamo posto una costante arbitraria C_1 a fattore dell'esponenziale tenendo conto della circostanza già ricordata che una costante arbitraria sarà introdotta dall'integrale che figura nell'esponente dell'esponenziale e questa potrà portarsi a fattore dell'esponenziale; e così noi abbiamo ora il risultato notevole che le equazioni del second'ordine della forma

$$y'' = \varphi(y, y'), \tag{8}$$

nelle quali $\varphi(y, y')$ è una funzione qualsiasi omogenea in y e y' del primo grado, sono sempre integrabili con due quadrature mediante le formule

$$x = \int \frac{dz}{\varphi(1, z) - z^2} + C, \quad y = C_1 e^{\int \frac{z\,dz}{\varphi(1, z) - z^2}} \tag{9}$$

che daranno x e y espresse per la quantità z che potrà considerarsi come una variabile ausiliaria, e nelle quali C e C_1 saranno due costanti arbitrarie; e l'integrale in x e y risulterà dalla eliminazione di z fra queste due equazioni (9) quando questa eliminazione possa farsi.

436. — Evidentemente poi questo risultato si estende anche ad alcuni casi delle equazioni più generali del second'ordine $f(x, y, y', y'')=0$ omogenee in y, y', y'' quando la equazione, del prim'ordine in z, $f(x, 1, z, z^2+z')=0$ alla quale esse conducono colla solita trasformazione $y=e^{\int z\,dx}$ rientra fra quelle considerate ai §§ 387 e seg. (pag. 556 e seg.) che colla introduzione di una variabile ausiliaria p dànno l'integrale per mezzo delle due equazioni

$$x=x(p, \mathrm{C}) \;, \; z=z(x, p),$$

venendo allora ad essere $y=\mathrm{C}_1 e^{\int z\left\{x(p,\mathrm{C}),\, p\right\}\frac{dx}{dp}dp}$.

Così in particolare essendo data da integrare la equazione

$$y''=\frac{y^2+y'^2}{y+y'} \tag{10}$$

che è della forma (5), il risultato ottenuto ci mostra per le (9) che il suo integrale potrà considerarsi come dato dall'insieme delle due equazioni

$$x=\int\frac{(1+z)\,dz}{1-z^3}+\mathrm{C}, \quad y=\mathrm{C}_1 e^{\int\frac{z(1+z)\,dz}{1-z^3}}$$

nelle quali, coll'osservare che

$$\frac{1+z}{1-z^3}=\frac{1+z+z^2}{1-z^3}-\frac{z^2}{1-z^3}=\frac{1}{1-z}-\frac{z^2}{1-z^3},$$

$$\frac{z(1+z)}{1-z^3}=\frac{z(1-z)+2z^2}{1-z^3}=\frac{z}{1+z+z^2}+\frac{2z^2}{1-z^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1+2z}{1+z+z^2}+\frac{2z^2}{1-z^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+z+z^2},$$

e $1+z+z^2=\frac{3}{4}+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2$, le integrazioni si effettuano immediatamente, e quindi con calcoli facilissimi si trovano le formole seguenti

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}\log\frac{1+z+z^2}{1-2z+z^2}+\mathrm{C}, \\ y&=\frac{\mathrm{C}_1}{\sqrt{(1-z)(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

che dànno l'integrale della equazione data (10).

437. — Sempre a proposito delle equazioni differenziali

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$$

che sono omogenee rispetto alla funzione incognita y e alle sue derivate, è il caso di presentare ora anche la osservazione seguente.

Osserviamo che se nel suo primo membro si pone per y la esponenziale $e^{\alpha x}$ con α quantità costante, siccome insieme a $y=e^{\alpha x}$ si ha $y'=\alpha e^{\alpha x}$, $y''=\alpha^2 e^{\alpha x}, y'''=\alpha^3 e^{\alpha x}, \ldots, y^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x}$, lo stesso primo membro si ridurrà alla funzione $f(x, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ moltiplicata per una potenza della esponenziale $e^{\alpha x}$, e se per y invece di $e^{\alpha x}$ si sostituirà $\mathrm{C}e^{\alpha x}$ essendo C una costante qualsiasi, anche questa costante elevata ad una certa potenza passerà a moltiplicare $f(x, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$; quindi si può evidentemente affermare che avendo una equazione differenziale omogenea $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, se avverrà che la equazione $f(x, 1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^n)=0$, — che si ottiene dalla equazione data sostituendo a y (considerata come una derivata di ordine zero) e alle sue derivate le potenze di una incognita ω ad un esponente uguale all'ordine di derivazione —, venga ad essere soddisfatta da alcuni valori costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, di ω, le equazioni $y=e^{\alpha_1 x}, y=e^{\alpha_2 x}, \ldots$ daranno altrettanti integrali (integrali particolari o soluzioni singolari) della equazione data, e tali rimarranno anche quando si moltiplichino ciascuno per una costante arbitraria.

438. — In particolare se, come nel caso delle equazioni del second'ordine considerate nel paragrafo precedente, la equazione omogenea differenziale data non conterrà la x, cioè sarà della forma $f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ i valori di ω (radici) che soddisfano alla equazione $f(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^n)=0$ (che saranno naturalmente tutti costanti), le esponenziali $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, e^{\alpha_3 x}\ldots$ moltiplicate ciascuna per una costante arbitraria saranno tutte integrali particolari (o soluzioni singolari) della equazione data.

Così ad es.: la equazione (10) del paragrafo precedente avrà i tre integrali $e^x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ essendo $1, \alpha$ e β le tre radici della equazione binomia $\omega^3=1$, e questi rimarranno integrali anche moltiplicandoli ciascuno per una costante arbitraria.

XXV.

Equazioni differenziali d'ordine n il cui primo membro è la derivata totale esatta di un'altra funzione d'ordine $n-1$

439. — Un altro caso notevolissimo di equazioni differenziali il cui ordine può essere sempre abbassato di una unità con sole quadrature è quello delle equazioni

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

nelle quali il primo membro oltre ad essere una funzione finita e continua delle quantità $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ considerate come variabili indipendenti in un certo campo, è la derivata totale esatta di una funzione dell'ordine $n-1$ $f_{n-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, perchè allora si trova subito per un suo integrale primo la equazione

$$f_{n-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

essendo C_1 una costante arbitraria.

440. — Ora la condizione necessaria e sufficiente, trovata già da Eulero, perchè questo avvenga si ottiene subito col processo seguente.

Si osservi che se si ha

$$(1) \qquad f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} f_{n-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

indicando con x_0 e x_1 due valori qualsiansi di x, e con y una funzione pure qualsiasi di x in un dato intervallo al quale appartengono i due punti x_0 e x_1 che sia finita continua insieme alle sue derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, integrando avremo la formola

$$\int_{x}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx = f_{n-1}(x_1, y_1, y'_1, y''_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - f_{n-1}(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

dalla quale apparisce che sotto la nostra ipotesi il valore dell'integrale del primo membro dipende soltanto dai valori della funzione y e delle sue prime $n-1$ derivate nei punti estremi, e quindi non muterà quando questa funzione y si muti in un modo qualsiasi conservando però lo stesso valore essa e le sue prime $n-1$ derivate negli estremi.

Indicando dunque con ε una costante piccola ad arbitrio, e con z una funzione che fra x_0 e x_1 sia finita e continua insieme alle sue derivate $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ e si annulli con queste derivate fino alla $(n-1)^a$ inclusive nei punti estremi, l'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z', y'' + \varepsilon z'', \ldots, y^{(n)} + \varepsilon z^{(n)})\, dx$$

avrà lo stesso valore dell'integrale precedente.

Ma se, come supponiamo, la funzione f oltre essere finita e continua ammette anche almeno le derivate parziali del prim'ordine rispetto a $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ considerate come variabili indipendenti, e queste derivate sono determinate e finite, per la formola di Taylor a più variabili avremo

$$f(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z', y'' + \varepsilon z'', \ldots, y^{(n)} + \varepsilon z^{(n)}) = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) +$$
$$+ \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' + \frac{\partial f}{\partial y''} z'' \ldots \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} z^{(n)}\right) + \omega,$$

essendo ω una quantità che diviene infinitesima con ε di ordine superiore al primo; quindi per la osservazione fatta sopra dovremo evidentemente avere

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' + \frac{\partial f}{\partial y''} z'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} z^{(n)}\right) dx = 0,$$

qualunque sia la funzione z fra x_0 e x_1 purchè soddisfi alle condizioni indicate.

Di qui applicando successive integrazioni per parti ai termini che contengono le derivate di z, ciò che porterà che si debba richiedere che le derivate parziali di f debbano esistere, essendo al tempo stesso finite e continue (o almeno integrabili), fino a quelle di ordine $n+1$, si ottiene la formola

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)\right\} z\, dz = 0;$$

quindi osservando che fra x_0 e x_1 (gli estr. esclusi) la funzione z può prendersi arbitrariamente e i punti x_0 e x_1 possono intendersi presi dovunque e vicini fra loro quanto si vuole, si conclude subito che se una funzione $f(x, y, y'; y'', \dots, y^{(n)})$ d'ordine n rispetto alle derivate di y soddisfa alle condizioni indicate ed è la derivata totale di un'altra funzione dell'ordine $n-1$ qualunque sia y, essa necessariamente dovrà soddisfare identicamente alla condizione seguente

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0,$$

dalla quale apparisce intanto che per prima cosa la funzione $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ dovrà essere di primo grado rispetto alla derivata $y^{(n)}$ di y di ordine più alto, perchè altrimenti la derivata $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ conterrebbe anche $y^{(n)}$ e nell'ultimo termine della formola precedente verrebbe a figurare anche la derivata $y^{(2n)}$ dell'ordine $2n$ che non figura negli altri termini, e quindi la equazione stessa non potrebbe risultare soddisfatta identicamente (*).

441. — La formola (2) che abbiamo trovato si presenta dunque come condizione necessaria perchè la funzione dell'ordine n rispetto alle derivate di y $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ possa essere la derivata (totale) esatta di un'altra funzione $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ dell'ordine $n-1$ qualunque sia la funzione y.

Dimostreremo ora che la stessa formola (2) è anche condizione sufficiente perchè questo avvenga, dando al tempo stesso il processo per trovare con sole quadrature la funzione $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ dell'ordine $n-1$ che ne è l'integrale; e per giungere a questo premetteremo le osservazioni seguenti, alcune delle quali hanno anche un carattere di ordine generale (**).

Osserviamo cioè dapprima che essendo data una funzione qualsiasi $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ d'ordine n, se s'indicano con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ n funzioni qualsiansi del tutto arbitrarie e che qui potremo supporre che contengano

(*) Del resto, anche coll'osservare che per la (1) dovremmo avere identicamente

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

si vede subito che il primo membro dovrà essere di primo grado rispetto a $y^{(n)}$ per potere essere la derivata esatta di una espressione differenziale f_{n-1} dell'ordine $n-1$.

(**) In queste dimostrazioni, salvo alcune modificazioni semplificative, ci atterremo in sostanza ai processi dati già da JOACHIMSTAL, (*Journal von Crelle*, tom. XXIII-1846, pag. 95) e da STOFFEL et BACH, (*Journal de Liouville*, 2e série, tome VII, année 1862, pag. 49).

esse pure y e le sue derivate, potremo sempre scrivere la formola seguente

$$(3) \qquad f\,dx = a_0\, dy^{(n-1)} + a_1\, dy^{(n-2)} + \dots + a_{n-2}\, dy' + a_{n-1}\, dy + \\ + (f - a_0 y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} y')\, dx,$$

che è una semplice identità perchè $dy = y'\,dx, dy' = y''\,dx, \dots, dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$.

442. — In questa identità, potendo scegliere le quantità $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ in un modo qualsiasi, noi ora prenderemo per esse quelle funzioni che vengono dalle considerazioni seguenti.

Si osservi che, avendosi per la derivata totale $\frac{df}{dx}$ di $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial x},$$

e quindi

$$\int \frac{df}{dx} dx = \int \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} dx + \int \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} dx + \dots + \int \frac{\partial f}{\partial y'} y'' dx + \int \frac{\partial f}{\partial y} y' dx + \int \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

applicando ai termini del secondo membro successive integrazioni per parti giungeremo subito con tutta facilità alla formola seguente

$$(4) \qquad f = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} y^{(n)} + \left\{\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'\right\} y^{(n-1)} + \left\{\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''\right\} y^{(n-2)} + \dots + \\ + \left\{\frac{\partial f}{\partial y'} - \left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y'''}\right)'' - \dots + (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n-1)}\right\} y' + \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)'' - \dots + (-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}\right\} y - \\ - \int \left[\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)'' - \dots + (-1)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}\right\}' y - \frac{\partial f}{\partial x}\right] dx + C,$$

nella quale gli apici alle parentesi stanno ad indicare derivazioni totali rispetto ad x e C indica una costante che dovrà essere scelta opportunamente; e noi nella (3) prenderemo le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ determinate dalle formole

$$(5) \qquad a_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)', \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'', \dots, \\ a_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial y'} - \left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y'''}\right)'' - \dots + (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n-1)},$$

che possono più semplicemente scriversi sotto forma ricorrente

$$(6) \qquad a_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \; a_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - a'_0, \; a_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - a'_1, \dots, a_s = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-s)}} - a'_{s-1}, \dots, a_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial y'} - a'_{n-2},$$

e così, ponendo questi valori di $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ nella (3) dopo averla divisa per dx e valendosi della (4) avremo la formola seguente

$$(7)\ \left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)''-\dots+(-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}\right\}y-\int\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)''-\dots+(-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}\right\}'y-\frac{\partial f}{\partial x}\right]dx+$$
$$+\mathrm{C}=f-a_0 y^{(n)}-a_1 y^{(n-1)}-\dots-a_{n-1}y',$$

che si avrebbe subito anche dalla (4) perchè in sostanza questa non è altro che la (4) stessa scritta in altro modo, come del resto non poteva essere altrimenti perchè la (3) è una identità.

443. — Scelte così le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ per mezzo delle (5) o (6), e a queste aggiunta l'altra

$$(8)\quad a_n=\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)''-\dots+(-1)^{(n)}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)},\quad \text{o}\quad a_n=\frac{\partial f}{\partial y}-a'_{n-1},$$

per la quale la (7) si potrà scrivere anche sotto la forma

$$(9)\quad f=a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\dots+a_n y-\int\left(a'_n y-\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\mathrm{C},$$

sarà facile vedere intanto che *quando sia soddisfatta la condizione* (2) *che corrisponde ora ad* $a_n=0$, *le quantità* $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ *e il coefficiente* $f-a_0 y^{(n)}-a_1 y^{(n-1)}-\dots-a_{n-1}y'$ *di* dx *nella* (3) *non conterranno nessuna derivata di ordine superiore a* $n-1$.

Si osservi infatti che siccome $\frac{\partial f}{\partial y}$ non contiene derivate d'ordine superiore alla $y^{(n)}$, e $a_n=0$ e quindi per la (8) $a'_{n-1}=\frac{\partial f}{\partial y}$, si dedurrà subito intanto da questa che a_{n-1} non potrà contenere derivate di ordine superiore ad $n-1$, altrimenti, colla derivazione, in a'_{n-1} verrebbero a figurare derivate di ordine superiore ad n.

Avendosi poi $a'_{n-2}=\frac{\partial f}{\partial y'}-a_{n-1}$ e il secondo membro essendo al più dell'ordine n, anche a_{n-2} sarà al più dell'ordine $n-1$; e essendo poi $a'_{n-3}=\frac{\partial f}{\partial y''}-a_{n-2}$, per la stessa ragione a_{n-3} sarà al più dell'ordine $n-1$, e così continuando si giungerà a trovare successivamente che tutti i primi n coefficienti della (3) quali vengono definiti dalle (5) o (6), quando è soddisfatta la condizione (2) o $a_n=0$ saranno tutt'al più dell'ordine $n-1$ rispetto alle derivate di y. E dimostrato questo per le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, basterà osservare che il termine che contiene $y^{(n)}$ in f è appunto $a_0 y^{(n)}$ (perchè f è di primo grado in $y^{(n)}$

e $a_0=\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$) per concludere subito che anche il coefficiente di dx nella (3) non contiene derivate di ordine superiore a $n-1$.

444. — Si aggiunga ora la osservazione generale notevole che *se* φ *è una espressione qualsiasi* $\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ *di ordine* n *che ha le derivate prime e seconde, e s'indicano ancora con apici le derivate totali rispetto ad* x, *si ha sempre la formola*

$$(10)\qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y^{(s)}}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)'+\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s-1)}}$$

per tutti i valori $1, 2, 3, \dots, n$ *di* s; *e insieme si ha l'altra*

$$(11)\qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y}=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)'$$

che corrisponde al caso di $s=0$; perchè avendosi con $s>0$

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}y''+\dots+\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s-1)}}y^{(s)}+\dots+\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}}y^{(n+1)},$$

se ne deduce

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y^{(s)}}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y^{(s)}}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\partial y^{(s)}}y'+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'\partial y^{(s)}}y''+\dots+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^{(s-1)}\partial y^{(s)}}y^{(s)}+\dots+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^{(n)}\partial y^{(s)}}y^{(n+1)}+\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s-1)}},$$

ovvero

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y^{(s)}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)y'+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)y''+\dots+\frac{\partial}{\partial y^{(s-1)}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)y^{(s)}+\dots+\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s)}}\right)y^{(n+1)}+\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s-1)}},$$

e quando si supponga invece $s=0$ mancherà in queste formole il termine $\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(s-1)}}$; e da queste evidentemente si hanno subito le (10) e (11).

445. — Tenendo conto ora di questi varii risultati ci sarà facilissimo di dimostrare che quando le quantità $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ siano quelle definite dalle formole (6) e (8) e sia soddisfatta la condizione (2) o $a_n=0$, il secondo membro della formola (3) – che rappresenta $f dx$ qualunque sia y – risulta un differenziale esatto rispetto alle quantità $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ considerate tutte come variabili indipendenti, e quindi il suo integrale si otterrà con sole quadrature con uno dei processi dati nel Cap. XVII. Questo integrale sarà quella funzione $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)})$ di ordine $n-1$ che uguagliata a una costante arbitraria C_1 darà un integrale primo $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})=\mathrm{C}_1$ della equazione $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$, e rimarrà quindi così pienamente dimostrato quanto volevamo.

Per questo incominciamo a fare vedere che sono soddisfatte tutte le condizioni $\frac{\partial a_0}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-1)}}$ per tutti i valori $1, 2, \dots, n-1$ di s.

Osserviamo che per quanto abbiamo visto, sotto la nostra ipotesi di $a_n = 0$, le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ non contengono la $y^{(n)}$ quindi e si ha sempre $\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n)}} = 0$ per tutti i valori $0, 1, 2, \dots, n$ di s, mentre per le (6) e (8) si ha $a_{s+1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-s-1)}} - a'_s$. Derivando questa rispetto a $y^{(n)}$ si vedrà subito che sarà $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-s-1)} \partial y^{(n)}} = \frac{\partial a'_s}{\partial y^{(n)}}$, ovvero per la (10) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-s-1)} \partial y^{(n)}} = \left(\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n)}}\right)' + \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-1)}}$, e quindi poichè $a_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ e $\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n)}} = 0$, si avrà subito intanto come volevamo $\frac{\partial a_0}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-1)}}$.

Considerando poi due coefficienti qualunque a_s e a_t pei quali sia ad es. $1 \leq t < s < n$, dopo la dimostrazione che ora abbiamo fatto sarà pur facile di vedere che si ha sempre $\frac{\partial a_t}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-t-1)}}$.

Supponiamo perciò che questa formola, che già abbiamo testè dimostrata pel caso di $t = 0$, si sappia che sussiste per tutte le combinazioni dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}$ di $dy^{(n-1)}, dy^{(n-2)}, dy^{(n-3)}, \dots, dy^{(n-t)}$ che precedono a_t con ciascuno dei coefficienti che seguono, per modo quindi che si sappia già in particolare che si ha per $n > s \geq t$ e $t \geq 1$

$$\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-t)}} = \frac{\partial a_{t-1}}{\partial y^{(n-s-1)}}, \quad \frac{\partial a_{s-1}}{\partial y^{(n-t)}} = \frac{\partial a_{t-1}}{\partial y^{(n-s)}}, \quad \frac{\partial a_{s+t}}{\partial y^{(n-t)}} = \frac{\partial a_{t-1}}{\partial y^{(n-s-2)}}$$

l'ultima di queste formole venendo naturalmente a mancare nel caso di $s = n - 1$.

Ora per essere $a_t = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-t)}} - a'_{t-1}$, derivando rispetto a $y^{(n-s-1)}$ e tenendo conto delle (10) e (11) si vede subito che per $s < n - 1$ si ha

$$\frac{\partial a_t}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-t)} \partial y^{(n-s-1)}} - \left(\frac{\partial a_{t-1}}{\partial y^{(n-s-1)}}\right)' - \frac{\partial a_{t-1}}{\partial y^{(n-s-2)}},$$

e per $s = n - 1$ si ha invece

$$\frac{\partial a_t}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-t)} \partial y} - \left(\frac{\partial a_{t-1}}{\partial y}\right)';$$

e quindi per le precedenti si ha per $s < n - 1$

$$\frac{\partial a_t}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-t)} \partial y^{(n-s-1)}} - \left(\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-t)}}\right)' - \frac{\partial a_{s+1}}{\partial y^{(n-t)}},$$

e per $s = n - 1$

$$\frac{\partial a_t}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n-t)} \partial y} - \left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial y^{(n-t)}}\right)'$$

e da queste, per essere sempre (cioè anche per $s = n - 1$) $a_{s+1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-s-1)}} - a'_s$, derivando quest'ultima formola rispetto a $y^{(n-t)}$, e applicando la (10), si troverà sempre $\frac{\partial a_t}{\partial y^{(n-s-1)}} = \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-t-1)}}$ quando $n > s \geq t \geq 1$; e così essendo già stata dimostrata questa formola anche per $t = 0$ con $s = 1, 2, \dots, n-1$, evidentemente resta ora dimostrata in generale; e quindi, a completare le dimostrazioni che occorrono per essere certi che il secondo membro della formola (3) è un differenziale esatto, resta solo a dimostrare che si ha anche la formola

$$\frac{\partial a_s}{\partial x} = \frac{\partial (f - a_0 y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-2} y'' - a_{n-1} y')}{\partial y^{(n-s-1)}} \tag{12}$$

per tutti i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ di s.

Ora il secondo membro di questa formola può scriversi sotto la forma

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-s-1)}} - \frac{\partial a_0}{\partial y^{(n-s-1)}} y^{(n)} - \frac{\partial a_1}{\partial y^{(n-s-1)}} y^{(n-1)} - \dots - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y^{(n-s-1)}} y' - a_{s+1},$$

dove l'ultimo termine $-a_{s+1}$ che verrebbe a mancare nel caso di $s = n - 1$ può ammettersi che vi sia anche in questo caso perchè per le nostre ipotesi $a_n = 0$; e poichè per $s = 0, 1, 2, \dots, n-1$ si ha sempre $a_{s+1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-s-1)}} - a'_s$ e $\frac{\partial a_s}{\partial y^{(n)}} = 0$, e quindi

$$a_{s+1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-s-1)}} - \frac{\partial a_s}{\partial x} - \frac{\partial a_s}{\partial y} y' - \frac{\partial a_s}{\partial y'} y'' - \dots - \frac{\partial a_s}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

sostituendo e tenendo conto delle formole già dimostrate $\frac{\partial a_t}{\partial y^{(s-1)}} = \frac{\partial a_s}{\partial y^{(t-1)}}$ si trova che la espressione precedente si riduce a $\frac{\partial a_s}{\partial x}$ come appunto deve essere perchè sussista la formola (12); e così resta completamente dimostrato tutto quello che volevamo.

446. — I risultati ottenuti adunque, mentre ci mostrano, come già abbiamo detto, che la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ di ordine n rispetto alle derivate di y sia la derivata esatta di un altra funzione $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ dell'ordine $n - 1$ o, il che

viene a dire lo stesso, *risulti integrabile anche lasciando indeterminata la funzione* y, è data dalla equazione (2) cioè

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)''-\ldots+(-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}=0\,, \tag{13}$$

ci mostrano anche che l'integrale f_{n-1} si ottiene con sole quadrature coi processi del Cap. XVII dal secondo membro della formola (3) che è un differenziale esatto; e così valendoci ad es. del processo dei §§ 298-99 (pag. 446 e seg.) e indicando per questo con $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ valori qualsiansi di $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ pei quali le funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ definite dalle (5) o (6) sono finite e continue, potremo determinare l'integrale f_{n-1} con $n+1$ quadrature mediante la formola

$$\begin{aligned}(14)\ f_{n-1}=&\int_{y_0^{(n-1)}}^{y^{(n-1)}} a_0(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-2)}, y^{(n-1)})\,dy^{(n-1)}+\int_{y_0^{(n-2)}}^{y^{(n-2)}} a_1(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-3)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})\,dy^{(n-2)}+\\ &+\int_{y_0^{(n-3)}}^{y^{(n-3)}} a_2(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-4)}, y^{(n-3)}, y^{(n-2)}, y^{(n-1)})\,dy^{(n-3)}+\ldots+\int_{y_0}^{y} a_{n-1}(x_0, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)})\,dy+\\ &+\int_{x_0}^{x}\{f-a_0 y^{(n)}-a_2 y^{(n-1)}-\ldots-a_{n-1}y'\}\,dx+\mathrm{C}_1\,,\end{aligned}$$

nella quale all'ultimo integrale a causa della (7) o (9) potrà anche essere sostituito l'altro $\displaystyle\int_{x_0}^{x} dx \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\mathrm{C}\,(x-x_0)$ essendo C una costante che deve essere scelta opportunamente; e questa formola potremo averla anche sotto altre forme variando l'ordine dei termini del secondo membro della (3).

Scrivendoli per es. in ordine inverso, e allora, quando sarà possibile, supponendo le $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ tutte nulle, e in ciascuno degli integrali corrispondenti alle variabili $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ sostituendo alle variabili successive d'integrazione un'altra variabile u moltiplicata pel limite superiore, avremo anche la formola seguente

$$\begin{aligned}(15)\ f_{n-1}=&\int_{x_0}^{x} f(x,0,0,\ldots,0,0)\,dx+\int_0^1\{a_{n-1}(x,uy,0,0,\ldots,0)y+a_{n-2}(x,y,uy',0,\ldots,0)y'+\\ &+a_{n-3}(x,y,y',uy'',0,\ldots,0)\,y''+\ldots+a_0(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)},uy^{(n-1)})\,y^{(n-1)}\}\,du+\mathrm{C}\,,\end{aligned}$$

che non combina precisamente ma è *simile* ad altra formola dovuta a Poisson.

E così, prendendo ad es. con Stoffel e Bach

$$f=2x^2+y^2+2xyy'+y'^2+yy''+xy''', \tag{16}$$

con che si avrà

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x+2yy'+y'''\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+2xy'+y''\,,\ \frac{\partial f}{\partial y'}=2xy+2y'\,,\ \frac{\partial f}{\partial y''}=y\,,\ \frac{\partial f}{\partial y'''}=x\,,$$

e quindi

$$a_0=x\,,\ a_1=y-1\,,\ a_2=2xy+y'\,,\ a_3=0\,,$$

basterà valersi della (14) o della (15) per trovare subito per l'integrale di f

$$2\frac{x^3}{3}+y^2x+yy'+y'x-y'+\text{cost}\,; \tag{17}$$

talchè si può dire senz'altro che la equazione differenziale del terz'ordine

$$2x^2+y^2+2xyy'+y'^2+yy''+xy'''=0$$

ammette l'integrale primo del second'ordine

$$2\frac{x^3}{3}+y^2x+yy'+y''x-y'=\text{cost}\,.$$

447. — La vera formola di Poisson che abbiamo ricordato sopra a proposito della (15) si ottiene nel modo seguente.

Si osservi che col cambiare y in uy essendo u una quantità indipendente da x, la solita funzione $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ si cambia in un'altra $\bar{f}_u=f(x, uy, uy', uy'', \ldots, uy^{(n)})$ che torna ad essere f per $u=1$.

Si avrà evidentemente

$$\bar{f}_u=\int_0^u\frac{\partial \bar{f}_u}{\partial u}du+f_0=\int_0^u\left\{\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial y'}y'+\frac{\partial f}{\partial y''}y''+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n)}\right\}_u du+f_0\,,$$

quando s'indichi con f_0 il valore $f(x, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ che prende $f(x, y, y' y'', \ldots, y^{(n)})$ facendovi $y=y'=y''=\ldots=y^{(n)}=0$ che si supporrà finito, e l'indice u posto alla parentesi sotto l'integrale stia ad indicare che in $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ dopo fatte le derivazioni si pongono $uy, uy', uy'', \ldots, uy^{(n)}$ al posto di $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Integrando ora rispetto ad x, e nel secondo membro invertendo le integrazioni, si troverà

$$\int\bar{f}_u\,dx=\int f(x,0,0,0,\ldots,0)\,dx+\int_0^u du\int\left\{\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial y'}y'+\frac{\partial f}{\partial y''}y''+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}y^{(n)}\right\}_u dx\,,$$

e ora facendo nell'ultimo integrale successive integrazioni per parti come le facemmo al § 442 per giungere alla formola (4), otterremo la formola generale seguente

$$(18)\quad \int \bar{f}_u dx = \int f(x,0,0,0,\ldots,0)\,dx + \int_0^u \left\{ \bar{a}_0 y^{(n-1)} + \bar{a}_1 y^{(n-2)} + \ldots \bar{a}_{n-2} y' + \bar{a}_{n-1} y + \int \bar{a}_n y\,dx \right\} du,$$

essendo le $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n$ ciò che divengono le solite $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots, a_n$ date dalle formole (6) e (8) quando vi si pongano $uy, uy', uy'', \ldots, uy^{(n)}$ al posto di $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$; e questa formola vale per qualunque funzione $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ che sia d'ordine n rispetto alle derivate della funzione y purchè si mantenga finita per $y = y' = y'' = \ldots = y^{(n)} = 0$.

Supponendo ora che per la stessa funzione f sia soddisfatta la condizione di integrabilità (2) o $a_n = 0$, e facendo $u = 1$ nel limite superiore dell'integrale relativo ad u, la formola trovata (18) darà subito luogo alla seguente

$$(19)\quad f_{n-1} = \int f(x,0,0,0,\ldots,0)\,dx + \int_0^1 \left\{ \bar{a}_0 y^{(n-1)} + \bar{a}_1 y^{(n-1)} + \bar{a}_2 y_n^{(n-3)} + \ldots + \bar{a}_{n-1} y \right\} du,$$

dove le $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ hanno il significato indicato testè; e questa è la formola di Poisson che volevamo dimostrare.

448. — Aggiungiamo che per integrare la espressione data di ordine n $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})dx$ dopo di averla posta sotto la forma (3) e nella quale le $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono determinate dalle (6) e $a_n = 0$, invece di seguire, come abbiamo fatto sopra al § 446, il processo dei §§ 298-99 (pag. 446 e seg.) possiamo seguirne anche un altro che ora esporremo, e che in sostanza non è che quello del § 296 (pag. 442 e seg.). E allora se non avremo in precedenza riscontrato che è soddisfatta la condizione d'integrabilità (2) o $a_n = 0$, saremo avvertiti durante il processo stesso se la stessa espressione $f dx$ è integrabile o no nel solito senso (cioè con y indeterminata), perchè a un qualche punto il processo verrà di suo inapplicabile; mentre se il processo potrà portarsi in fondo, la espressione medesima $f dx$ sarà integrabile, e l'integrale sarà determinato perfettamente colle $n+1$ quadrature successive che allora saranno state fatte.

Osserviamo perciò, per quanto dicemmo in fine del § 440 e anche in nota, che onde la espressione $f dx$ sia integrabile bisognerà che in f il termine che contiene $y^{(n)}$ sia della forma $a_0 y^{(n)}$, dove a_0 non contiene $y^{(n)}$; e se questo non avverrà l'integrale non potrà esserci, e il processo d'integrazione potrà abbandonarsi senz'altro.

Invece se la condizione indicata risulterà soddisfatta, allora, se si determinerà l'integrale $\int a_0 dy^{(n-1)}$ che indicheremo con k_{n-1} e che sarà dell'ordine $n-1$ rispetto alle derivate di y, la parte della derivata totale k'_{n-1} rispetto ad x di questo integrale che conterrà $y^{(n)}$ sarà $\frac{\partial k_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$, cioè sarà appunto quella $a_0 y^{(n)}$ che figura in $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$; e quindi evidentemente, perchè $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ sia integrabile basterà che lo sia la differenza $f - k'_{n-1}$ che sarà una funzione dell'ordine $n-1$ rispetto alle derivate di y.

Ridotta ora la questione alla considerazione di una funzione $f - k'_{n-1}$ dell'ordine $n-1$, si osserverà come precedentemente che in essa, se dovrà essere integrabile, il termine che contiene $y^{(n-1)}$ dovrà essere della forma $b_0 y^{(n-1)}$ dove b_0 non contiene $y^{(n-1)}$; e se questo non avverrà la differenza stessa non potrà essere integrabile e sarà inutile continuare questo processo d'integrazione; mentre nel caso contrario determinando un secondo integrale $\int b_0 dy^{(n-2)}$ e indicandolo con k_{n-2}, la parte della sua derivata totale k'_{n-2} che conterrà $y^{(n-1)}$ sarà precisamente $b_0 y^{(n-1)}$, e quindi perchè la nostra funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ sia integrabile basterà allora che lo sia l'altra $f - k'_{n-1} - k'_{n-2}$ che sarà dell'ordine $n-2$ rispetto alle derivate di y.

Per le stesse considerazioni dunque, onde questa funzione sia integrabile bisognerà che in essa il termine che contiene $y^{(n-2)}$ sia della forma $c_0 y^{(n-2)}$, essendo c_0 indipendente da $y^{(n-2)}$, e se questo avverrà il processo d'integrazione potrà continuarsi, e allora determinando l'integrale $\int c_0 dy^{(n-3)}$ e indicandolo con k_{n-3} si passerà alla funzione $f - k'_{n-1} - k'_{n-2} - k'_{n-3}$ che dovrà essere integrabile perchè possa esserlo f, e sarà dell'ordine $n-3$; mentre se il termine che contiene $y^{(n-2)}$ in $f - k'_{n-1} - k'_{n-2}$ non sarà della forma indicata $c_0 y^{(n-2)}$, la funzione data f non sarà integrabile e il processo potrà ancora abbandonarsi senz'altro.

Così continuando dunque, si vede chiaramente che se le condizioni che successivamente si trovano risulteranno soddisfatte, giungeremo infine a trovare una differenza $f - k'_{n-1} - k'_{n-1} - \ldots - k'_0$ che sarà una funzione X della sola x, e allora avremo senz'altro $\int f dx = k_{n-1} + k_{n-2} + \ldots + k_0 + \int \mathrm{X}\,dx + \mathrm{C}$, e l'integrale cercato risulterà determinato colle $n+1$ quadrature che avremo fatto; mentre se a un certo punto le condizioni successivamente indicate non si troveranno più soddisfatte la funzione f non sarà integrabile e il processo dovrà abbandonarsi senz'altro.

Applicando il processo che ora abbiamo dato alla funzione (16) si ritrova subito che un suo integrale primo è quello (17) che già trovammo.

449. — I risultati ottenuti che, come già dicemmo al § 440, sono dovuti ad Eulero che li trovò però con altri processi, portano a generalizzare le considerazioni del Cap. XXII colla introduzione nell'analisi di una funzione, che dicesi il *Moltiplicatore di Eulero*, mediante la quale — in quei casi nei quali si riesce a trovarla —, una funzione qualsiasi $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ di ordine n, con una semplice moltiplicazione viene ad essere la derivata totale esatta di una funzione dell'ordine $n-1$, e si rende quindi possibile di eseguire con sole quadrature una prima integrazione sulla equazione differenziale $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, restando qualunque la funzione y di x.

Si osservi infatti che se questa funzione $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ non è già una derivata totale di x perchè per essa non risulta soddisfatta la condizione (2), moltiplicandola per un fattore M che sia funzione di tutte o di alcune delle quantità $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, essa si cambierà nel prodotto $\mathrm{M}f$ pel quale la equazione (2) diventerà la seguente

$$(20)\qquad \frac{\partial(\mathrm{M}f)}{\partial y}-\left(\frac{\partial(\mathrm{M}f)}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial(\mathrm{M}f)}{\partial y''}\right)''-\ldots+(-1)^n\left(\frac{\partial(\mathrm{M}f)}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}=0\,,$$

che sarà una equazione a derivate parziali in M dell'ordine $n+1$ al più, con $n+2$ variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ e sarà lineare rispetto ad M e alle sue derivate parziali; e per ogni soluzione $\overline{\mathrm{M}}$ di questa equazione il prodotto $\overline{\mathrm{M}}f$ verrà ad essere la derivata totale di una funzione dell'ordine $n-1$ rispetto alle derivate di y, e per la equazione $\overline{\mathrm{M}}f=0$ sarà possibile una prima integrazione con sole quadrature.

La determinazione però di questo moltiplicatore — del quale Jacobi estese poi la considerazione anche a sistemi di equazioni —, meno casi particolari, fra i quali sono da citarsi quelli di alcune equazioni di secondo e di terz'ordine che furono considerate da Eulero e delle equazioni lineari di ordine n considerate da Lagrange, è complicatissima. E noi non ci fermeremo su questi studii, rimandando per essi alle Memorie di Jacobi nei vol. 23, 27 e 29 del *Journal von A. Crelle,* e al vol. 4.° delle opere dello stesso Jacobi.

Solo osserveremo che, mentre la equazione (20), per essere una equazione a derivate parziali, darà luogo a infinite soluzioni e quindi a infiniti moltiplicatori, quando però si abbia in mira soltanto il problema di rendere una derivata esatta il primo membro di una equazione differenziale basterà riuscire a conoscerne uno.

Data quindi una equazione differenziale $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ di ordine n, sarà naturale di cercare dapprima se vi siano moltiplicatori semplici che abbiano proprietà particolari, come ad esempio moltiplicatori che contengano una sola delle quantità $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ considerate come variabili indipendenti.

Allora la ricerca di uno di questi moltiplicatori speciali si ridurrà a trovare un integrale, anche soltanto particolare, della equazione alla quale si ridurrà la equazione (20) col supporvi che M debba contenere quella sola variabile che si vorrà che ancora vi sia; la quale equazione, sebbene nei suoi coefficienti possa continuare a contenere anche altre fra le variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, dovrà essere tale da potere ammettere un integrale che contenga soltanto quella variabile, e così naturalmente un tale moltiplicatore M non potrà esservi altro che quando la funzione $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ soddisfi a condizioni speciali per le quali la equazione (20), a calcoli fatti, o si riduca a una vera e propria equazione differenziale ordinaria che contenga cioè soltanto M e le sue derivate (ordinarie) e quella fra le variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ della quale il moltiplicatore cercato M dovrebbe essere funzione, o almeno sia una equazione che, se dovrà ancora essere considerata come una equazione a derivate parziali perchè conterrà più variabili nei suoi coeficienti, soddisfi però ancora a condizioni tali da potere essere soddisfatta almeno da un valore di M che contenga soltanto quella variabile che in M si vuole che figuri.

Queste condizioni si troveranno facilmente scrivendo prima le equazioni che risultano dall'uguagliare a zero le derivate parziali del primo membro della equazione alla quale si sarà ridotta la equazione (20), prese queste derivate rispetto alle varie variabili $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ eccetto quella della quale si vorrà che M possa restare funzione, e poi esprimendo che queste varie equazioni devono coesistere. E in quei casi particolari nei quali le condizioni che così si trovano risulteranno soddisfatte, il moltiplicatore cercato M verrà in fine a dipendere dalla integrazione di una equazione differenziale ordinaria che sarà già o potrà ridursi a una equazione di un ordine inferiore a quello della equazione (20), e quindi dell'ordine n al più; salvo poi a verificare che l'integrale che si sceglierà soddisfi anche a questa equazione (20).

Indipendentemente poi da questo, s'intende che per equazioni particolari la semplice ispezione della equazione data o considerazioni speciali potranno fare conoscere subito un moltiplicatore adattato.

Così ad esempio avendosi la equazione del second'ordine

$$(21)\qquad y''+\varphi(x)y'+\psi(y)y'^2=0\,,$$

si vede subito che un moltiplicatore adattato del suo primo membro è $\dfrac{1}{y'}$, perchè moltiplicando per $\dfrac{1}{y'}$ il suo primo membro, questo diventa subito la derivata esatta della funzione $\log y'+\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(y)\,dy$; e si ha quindi per l'integrale della stessa equazione

$$\log y' + \int \varphi(x)\,dx + \int \psi(y)\,dy = \text{cost.}, \quad \text{ovvero} \quad dy = C\,e^{\int -\varphi(x)\,dx - \int \psi(y)\,dy},$$

essendo C una costante arbitraria, per modo che con una nuova integrazione, indicando con C_1 un'altra costante, si trova subito la equazione

$$\int e^{\psi(y)\,dy}\,dy = C \int e^{-\int \varphi(x)\,dx}\,dx + C_1$$

per l'integrale della equazione data (21).

450. — Sulle funzioni o equazioni differenziali d'ordine n presenteremo ora anche alcune altre considerazioni generali che si basano specialmente su una osservazione che facemmo al § 441, quella cioè che si ha sempre la identità (3) nella quale le funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ possono prendersi arbitrariamente salvo ad essere finite e continue e finchè occorre anche derivabili; e questo ora senza supporre nulla intorno alla integrabilità della funzione data $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ o all'essere o no soddisfatta la condizione (2).

Per quella osservazione, aggiungendo sempre alle quantità $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ anche l'altra a_n e scrivendo la (3) stessa sotto la forma

$$(22)\quad f dx = a_0 dy^{(n-1)} + a_1 dy^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} dy + a_n y dx + (f - a_0 y^{(n)} - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1} y' - a_n y)\,dx,$$

noi invece di prendere le quantità stesse come definite dalle formule (6) e (8) come abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, potremo prenderle come definite anche da altre formole.

Ponendo ad es. con Joachimstal (mem. cit. al § 441) la funzione data f sotto la forma $f = p + q y^{(n)}$, limitatamente al caso in cui p e q sono funzioni di ordine $n-1$ al più, per modo che si abbia $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = q$, introduciamo collo stesso Joachimstal le funzioni seguenti

$$(23)\quad \begin{cases} q = \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \\ q_1 = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial y} y' - \dfrac{\partial q}{\partial y'} y'' - \ldots - \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - q' + \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \\ q_2 = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-2)}} - \dfrac{\partial q_1}{\partial x} - \dfrac{\partial q_1}{\partial y} y' - \dfrac{\partial q_1}{\partial y'} y'' - \ldots - \dfrac{\partial q_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-2)}} - q'_1 + \dfrac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \\ q_3 = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-3)}} - \dfrac{\partial q_2}{\partial x} - \dfrac{\partial q_2}{\partial y} y' - \dfrac{\partial q_2}{\partial y'} y'' - \ldots - \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-3)}} - q'_2 + \dfrac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n = \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y} y' - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y'} y'' - \ldots - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \dfrac{\partial p}{\partial y} - q'_{n-1} + \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \end{cases}$$

che si determinano tutte successivamente, colla derivazione ciascuna dalla precedente, e che per quanto apparisce dalle loro prime espressioni saranno tutte dell'ordine $n-1$ al più [*].

Potremo prendere queste funzioni $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ per le $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, scrivendo quindi la precedente sotto la forma

$$(24)\quad f dx = q\,dy^{(n-1)} + q_1 dy^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} dy + q_n y\,dx + (f - q y^{(n)} - q_1 y^{(n-1)} - \ldots - q_{n-1} y' - q_n y)\,dx;$$

e specialmente per alcuni studii, come ad esempio per le considerazioni che faremo nei paragrafi seguenti, potrà talvolta essere utile di partire da questa o da altre formole simili.

451. — Però, posto $f dx$ sotto questa o sotto altra forma, se anche la funzione f sarà integrabile i primi n termini della sua espressione non costituiranno un differenziale esatto rispetto alle variabili $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ (considerate come indipendenti) altro che quando i coefficienti di $dy^{(n-1)}$, $dy^{(n-2)}, \ldots, dy', dy$ saranno quelli $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ dei paragrafi precedenti definiti dalle formole (6), perchè *essi devono essere* (come appunto sono questi) *precisamente uguali alle derivate dell'integrale rispetto alle variabili* $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$; e quindi fuori dei casi in cui $f dx$ sia posto sotto la indicata forma dei paragrafi precedenti, la integrazione, quando sia possibile, non potrà farsi coi processi del Cap. XVII, ma dovrà farsi con altri processi.

Ma osservando che, per essere $f = p + q y^{(n)}$, se si aggiungono e tolgono rispettivamente $\frac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n)}, \frac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n)}, \ldots, \frac{\partial q}{\partial y} y^{(n)}$ negli ultimi membri delle formole (22) a partire dalla seconda, si ottengono le altre

$$(25)\quad \begin{cases} q = \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}, \\ q_1 = \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - q', \\ q_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - q'_1 + \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}}\right) y^{(n)}, \\ q_3 = \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - q'_2 + \left(\dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}}\right) y^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1} = \dfrac{\partial f}{\partial y'} - q'_{n-2} + \left(\dfrac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial y'}\right) y^{(n)}, \\ q_n = \dfrac{\partial f}{\partial y} - q'_{n-1} + \left(\dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial y}\right) y^{(n)}, \end{cases}$$

---

[*] Abbiamo supposto senz'altro $f = p + q y^{(n)}$ con p e q funzioni di ordine $n-1$ al più, perchè questo in particolare deve essere sempre quando si vuole che f sia integrabile qualunque sia y nel solito senso, e noi facciamo questi studii avendo appunto in mira di applicarli specialmente a questo caso.

si vede subito che delle funzioni $q, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ introdotte da Joachimstal le q_0 e q_1 combinano in ogni caso colle a_0 e a_1 dei paragrafi precedenti, mentre le altre combinano colle seguenti $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$ e a_n soltanto quando la funzione data f sia tale che per le dette funzioni risultino soddisfatte le condizioni

$$(26) \quad \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}}, \dots, \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial q}{\partial y'}, \quad \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial q}{\partial y},$$

come appunto doveva essere perchè i primi n termini del secondo membro della (24) potessero essere come allora sono un differenziale esatto rispetto alle quantità $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y$ considerate come altrettante variabili indipendenti.

E quando insieme a queste condizioni (26) risulti soddisfatta anche l'altra $q_n = 0$, allora, poichè questa corrisponderà alla $a_n = 0$ cioè alla condizione (2), la funzione data f sarà integrabile; e questa osservazione fatta da Joachimstal nella memoria citata, in alcuni casi potrà portare, più facilmente di quello che si faccia coll'esame della condizione (2), ad assicurarci della integrabilità della funzione data f, venendo allora a risultare questa integrabilità dalla determinazione successiva delle funzioni $q, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$ e di quelle fra le loro derivate prime che figurano nelle formole (26) e dall'esaminare successivamente se risultino soddisfatte le condizioni stesse (26) e in fine anche l'altra $q_n = 0$.

Però non si potrà dire inversamente che quando queste $n+1$ funzioni $q, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$ non soddisfano alle condizioni (26) e alla $q_n = 0$ la funzione data f non sarà integrabile, potendo benissimo darsi in molti casi che, pure non essendo soddisfatte tutte queste condizioni per le $q, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n$, sia però soddisfatta la condizione (2).

452. — A queste osservazioni Joachimstal ne ha aggiunta un'altra, quella cioè che quando sono soddisfatte le condizioni (26) e si ha anche $q_n = 0$, – ciò che porta, come abbiamo detto, che la funzione data f sia integrabile e che la espressione $q\,dy^{(n-1)} + q_1\,dy^{(n-2)} + \dots + q_{n-2}\,dy' + q_{n-1}\,dy$ sia il differenziale esatto di una funzione W rispetto alle quantità $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y$ considerate come variabili indipendenti –, allora la differenza $f - \frac{\partial W}{\partial x}$ che potrà subito determinarsi risulterà una funzione X della sola x, e si avrà quindi con una sola quadratura $\int f\,dx = W + \int X\,dx + C$; e di questa particolarità, che Joachimstal indica come un mezzo per determinare l'integrale $\int f\,dx$, Egli ne dà una dimostrazione speciale.

Su tale dimostrazione però non è il caso di fermarsi, perchè quella particolarità è conseguenza immediata di una proprietà di tutte le espressioni differenziali esatte (*) e vale quindi tutte le volte che f è integrabile e $f\,dx$ è posto sotto la forma (3) nella quale $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ hanno i valori dati dalle (6).

453. — In principio del paragrafo 451 abbiamo incidentalmente osservato che le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ definite dalle formole (6), quando è soddisfatta la condizione (2) o $a_n = 0$, sono necessariamente le derivate rispetto a $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \dots, y', y$ della funzione $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ che dà luogo a un integrale primo $f_{n-1}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1$ della equazione data $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, cioè si ha

$$(27) \quad a_0 = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}}, \quad a_1 = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}, \quad a_2 = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}}, \dots, a_{n-2} = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'}, \quad a_{n-1} = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}.$$

In seguito a questa osservazione, se si applicano alla nuova funzione f_{n-1} di ordine $n-1$ i risultati ottenuti per la f si potrà dire evidentemente che onde questa nuova funzione sia alla sua volta la derivata esatta di un'altra funzione $f_{n-2}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-2)})$, per modo quindi che si abbia subito anche un integrale del second'ordine $f_{n-2} = C_1 x + C_2$ della equazione data $f = 0$,

(*) La indicata particolarità si riscontra subito per tutte le espressioni

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots + X_{n-1}\,dx_{n-1} + X_n\,dx_n$$

che sono differenziali esatte di una funzione u delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ considerate come variabili indipendenti, perchè quando sia trovata la funzione φ che sia integrale della parte $X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots X_{n-1}\,dx_{n-1}$ avremo $u = \varphi + \theta$, essendo θ una funzione da determinarsi; e poichè sarà

$$du = d\varphi + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2}\,dx_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_n}\,dx_n,$$

e al tempo stesso

$$du = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots + X_{n-1}\,dx_{n-1} + X_n\,dx_n \quad \text{e} \quad d\varphi = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \dots + X_{n-1}\,dx_{n-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\,dx_n,$$

se ne trarrà la formola

$$\left(X_n - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)dx_n = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_n}\,dx_2 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}}\,dx_{n-1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_n}\,dx_n,$$

che ci darà subito $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \theta}{\partial x_{n-1}} = 0$, e $X_n - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \frac{\partial \theta}{\partial x_n}$; e quindi tanto la funzione θ che l'altra $X_n - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ verranno ad essere funzioni della sola variabile rimasta x, e per θ avremo $\theta = \int \left(X_n - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) dx_n + C$.

bisognerà che risulti soddisfatta la condizione

$$a_{n-1} - a'_{n-2} + a''_{n-3} - \ldots + (-1)^{(n-1)} a_0^{(n-1)} = 0 \tag{28}$$

che corrisponderà ora alla condizione (2) applicata alla funzione f_{n-1}.

E pei processi precedenti quando questa condizione (28) risulti soddisfatta, la nuova funzione integrale $f_{n-2}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)})$ si otterrà con sole quadrature dalla formola identica

$$\begin{aligned} f_{n-1}\,dx = b_0\,dy^{(n-2)} + b_1\,dy^{(n-3)} + b_2\,dy^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2}\,dy + (f_{n-1} - b_0 y^{(n-1)} - b_1 y^{(n-1)} - \\ - b_2 y^{(n-3)} - \ldots - b_{n-2} y')\,dx \end{aligned} \tag{29}$$

nella quale i coefficienti a causa delle (27) si determineranno successivamente colle formole

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 - b'_0,\ b_2 = a_2 - b'_1, \ldots, b_s = a_s - b'_{s-1}, \ldots, b_{n-2} = a_{n-2} - b'_{n-3}, \tag{30}$$

che corrispondono alle (6) e alle quali potrà aggiungersi l'altra $b_{n-1} = a_{n-2} - b'_{n-1}$ corrispondente alla (8); e a causa della (28) si avrà $b_{n-1} = 0$, e analogamente alle (27) avremo ora le altre

$$b_0 = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y^{(n-2)}},\ b_1 = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}}, \ldots, b_{n-3} = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y'},\ b_{n-2} = \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y}. \tag{31}$$

Similmente in seguito a queste si potrà dire che onde anche la f_{n-2} sia la derivata esatta di un'altra funzione $f_{n-3}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-3)})$ d'ordine $n-3$, nel qual caso la equazione data $f=0$ avrà anche l'integrale del terz'ordine $f_{n-3} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, bisognerà che sia soddisfatta la condizione analoga alla (28)

$$b_{n-2} - b'_{n-3} + b''_{n-4} - \ldots + (-1)^{(n-2)} b_0^{(n-2)} = 0; \tag{32}$$

e allora questa nuova funzione f_{n-3} si otterrà con sole quadrature dalla nuova formola identica

$$f_{n-2}\,dx = c_0\,dy^{(n-3)} + c_1\,dy^{(n-4)} + \ldots + c_{n-3}\,dy + (f_{n-2} - c_0 y^{(n-2)} - c_1 y^{(n-3)} - \ldots - c_{n-3} y')\,dx \tag{33}$$

nella quale i coefficienti a causa delle (31) si determineranno successivamente colle formole

$$c_0 = b_0,\ c_1 = b_1 - c'_0,\ c_2 = b_2 - c'_1, \ldots, c_s = b_s - c'_{s-1}, \ldots, c_{n-3} = b_{n-3} - c'_{n-4}, \tag{34}$$

alla quale potrà aggiungersi l'altra $c_{n-2} = b_{n-2} - c'_{n-3}$, e per la (32) sarà

$c_{n-2} = 0$, mentre avremo

$$c_0 = \frac{\partial f_{n-3}}{\partial y^{(n-3)}},\ c_1 = \frac{\partial f_{n-3}}{\partial y^{(n-4)}}, \ldots, c_{n-4} = \frac{\partial f_{n-3}}{\partial y'},\ c_{n-3} = \frac{\partial f_{n-3}}{\partial y}, \tag{35}$$

e così continuando, onde per la $f=0$ vi sia anche un integrale del quart'ordine $f_{n-4} = C_1 \frac{x^3}{\pi(3)} + C_2 \frac{x^2}{\pi(2)} + C_3 x + C_4$ bisognerà che sia soddisfatta la condizione

$$c_{n-3} - c'_{n-4} + c''_{n-5} - \ldots + (1-1)^{(n-3)} c_0^{(n-3)} = 0, \tag{36}$$

e allora f_{n-4} si avrà con quadrature dalla formola

$$\begin{aligned} f_{n-3}\,dx = d_0\,dy^{(n-4)} + d_1\,dy^{(n-5)} + d_2\,dy^{(n-6)} + \ldots + d_{n-4}\,dy + \\ + (f_{n-3} - d_0 y^{(n-3)} - d_1 y^{(n-4)} - d_2 y^{(n-5)} - \ldots - d_{n-4} y')\,dx, \end{aligned} \tag{37}$$

essendo ora

$$d_0 = c_0,\ d_1 = c_1 - d'_0,\ d_2 = c_2 - d'_1, \ldots, d_s = c_s - d'_{s-1}, \ldots, d_{n-4} = c_{n-4} - d_{n-5}, \tag{38}$$

con $d_{n-3} = c_{n-3} - d'_{n-4} = 0$, e

$$d_0 = \frac{\partial f_{n-4}}{\partial y^{(n-4)}},\ d_1 = \frac{\partial f_{n-4}}{\partial y^{(n-5)}}, \ldots, d_{n-5} = \frac{\partial f_{n-4}}{\partial y'},\ d_{n-4} = \frac{\partial f_{n-4}}{\partial y}; \tag{39}$$

e così potremo continuare successivamente.

E si può osservare che quando vengano successivamente soddisfatte le condizioni (28), (32), (36),..., le $b_s, c_s, d_s, \ldots$ si determineranno successivamente colle formole semplicissime che abbiamo dato (30), (34), (38),..., come colle (5) o (6) si determinano le a_s; e volendo si possono esprimere tutte in modo semplice anche per le derivate $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ della funzione primitiva f.

Avendosi infatti per le formole citate

$$a_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}},\ a_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)',\ a_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'',$$

$$a_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)'' - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''', \ldots$$

$$\begin{array}{llll} b_0 = a_0, & b_1 = a_1 - b'_0, & b_2 = a_2 - b'_1, & b_3 = a_3 - b'_2 \ldots, \\ c_0 = b_0, & c_1 = b_1 - c'_0, & c_2 = b_2 - c'_1, & b_3 = b_3 - c'_2, \ldots, \\ d_0 = c_0, & d_1 = c_1 - d'_0, & d_2 = c_2 - d'_1, & d_3 = c_3 - d'_2, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \end{array}$$

si vede subito che per le $a, b, c, d, \ldots$ si hanno le formole seguenti

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}},\; a_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)',\quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'',\\
& \qquad a_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)'' - \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''',\ldots\\
& b_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}},\; b_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)',\; b_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'',\\
& \qquad b_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)' + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)'' - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''',\ldots\\
& c_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}},\; c_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - 3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)',\; c_2 = \frac{\partial f}{y^{(n-2)}} - 3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + 6\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'',\\
& \qquad c_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - 3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)' + 6\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)'' - 10\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''',\ldots\\
& d_0 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}},\; d_1 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)',\; d'_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)' + 10\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)'',\\
& \qquad d_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)' + 10\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)'' - 20\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)''',\ldots\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

nelle quali formole a incominciare dalle seconde (cioè da quelle delle b) i coefficienti numerici sono i *numeri figurati* degli ordini 1.° 2.° 3.°, ... perchè si ottengono successivamente colle note regole di formazione di questi numeri, cioè formando ogni numero di un dato ordine col sommare quello che lo precede nello stesso ordine, con quello corrispondente dell'ordine precedente, e come è noto (*), si ha pel numero figurato n^o $u_{n,h}$ della serie di ordine h^o

$$u_{n,h} = \frac{n(n+1)\ldots(n+h-1)}{1.2\ldots h},$$

cioè $u_{n,h}$ è il numero delle combinazioni con ripetizione di n cose h ad h. Ed è notevole che i primi coefficienti $a_0, b_0, c_0, d_0 \ldots$ sono tutti uguali fra loro, e il loro valore comune è $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$.

454. — Tornando ora a considerare la formola (3) o la (22) senza fare alcuna ipotesi intorno ai valori da prendersi per le $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$,

(*) V. ad es. Novi, *Trattato di Algebra superiore.* (Firenze Le-Monnier 1863) a pag. 141 e seg.

che rimarranno quindi del tutto arbitrarie salvo le solite condizioni di continuità, derivabilità ecc., osserviamo che sopprimendo il fattore dx e aggiungendo e togliendo successivamente vari termini onde aggrupparli in modo da formare successive derivate totali rispetto ad x qualunque sia y, la (22) stessa si trasforma nell'altra che sarà pure una identità

$$
\begin{aligned}
(41)\quad f = {} & (a_0 y^{(n-1)})' + [(a_1 - a'_0) y^{(n-2)}]' + [(a_2 - a'_1 + a''_0) y^{(n-3)}]' + \ldots + [(a_{n-1} - a'_{n-2} + a''_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} a_0^{(n-1)}) y]\\
& + [\{a_n - a'_{n-1} + a''_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_0^{(n)}\} y + f - (a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y)];
\end{aligned}
$$

quindi, poichè i primi n termini sono subito integrabili, se la funzione f sarà integrabile per essere soddisfatta la condizione (2) o (13), anche l'ultimo termine fra le parentesi quadre dovrà essere la derivata esatta di una funzione che potrà essere di ordine superiore a n, pure dovendo però, a calcoli fatti, l'integrale del secondo membro ridursi sempre a una funzione dell'ordine $n-1$.

Così, scelte arbitrariamente le funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ la ricerca dell'integrale di f quando sia soddisfatta la condizione (2) o (13) verrà a farsi indipendentemente dai processi del Cap. XVII, e si ridurrà sempre a quella dell'integrale della funzione

$$(42)\quad \{a_n - a'_{n-1} + a''_{n-2} - \ldots + (-1)^n a_0^{(n)}\} y + f - (a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y)$$

che sarà pure integrabile; e questa potrà spesso risultare molto complicata e anche essere di ordine superiore ad n, ma talvolta potrà anche essere meno complicata della prima $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ e essere di ordine inferiore ad n.

Così in particolare quando la funzione f sia data o ridotta, colla moltiplicazione per qualche fattore, della forma $\mathrm{A}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) + \mathrm{B}(x) y^{(n)}$, allora prendendo per le $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e a_n funzioni della sola x con $a_0 = \mathrm{B}(x)$, la espressione (43) risulterà dell'ordine $n-1$ al più rispetto alle derivate di y e quindi la ricerca dell'integrale della funzione data di ordine n si ridurrà a quella dell'integrale di una funzione dell'ordine $n-1$ al più.

455. — Ora quando questi studii si facciano per la integrazione o per la trasformazione di una equazione differenziale dell'ordine n

$$(43)\qquad f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

per la quale sia soddisfatta o no la condizione d'integrabilità (2) o (13), allora indicando con z una funzione qualsiasi, e alle funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e f nella (41) sostituendo le altre $z a_0, z a_1, z a_2, \ldots, z a_n$ e $z f$ e intendendo che per la funzione y sia preso uno degli integrali della (43), con una integrazione della (41) stessa avremo subito l'altra

$$(44)\quad z a_0 y^{(n-1)} + \{z a_1 - (z a_0)'\} y^{(n-2)} + \{z a_2 - (z a_1)' + (z a_0)''\} y^{(n-3)} + \ldots +$$

$$+ \{z a_{n-1} - (z a_{n-2})' + (z a_{n-3})'' - \ldots + (-1)^{(n-1)} (z a_0)^{(n-1)}\} y = \int_\alpha^x (Zy + Yz)_{x_1} dx_1 + c,$$

quando si ponga per abbreviare

$$(45)\qquad (-1)^{n+1} Z = (z a_0)^{(n)} - (z a_1)^{(n-1)} + (z a_2)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n (z a_n),$$

$$(46)\quad Y = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y - f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}),$$

e s'intenda che nella funzione $Zy + Yz$ sotto l'integrale, ad x sia sostituito x_1 e sia presa x_1 come variabile d'integrazione, e c sia una costante adattata che sarà precisamente uguale al valore del primo membro di questa equazione (44) per $x = \alpha$, e dipenderà quindi dall'integrale y della (43) che considereremo e dalla funzione scelta z per la quale, volendo, potremo anche prendere uno dei moltiplicatori M di f che fossero stati determinati dalla (20). Per α poi s'intenderà preso un valore determinato qualsiasi di x nell'intervallo (a, b) nel quale si supporrà che l'integrale y sia finito e continuo e ammetta le sue prime n derivate, e tali siano pure nello stesso intervallo le funzioni scelte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e z fino a quelle delle loro derivate che occorre di considerare.

456. — Indicando ora con $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ n funzioni qualsiansi di tutte o di alcune delle quantità $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ che soddisfino alle stesse condizioni che abbiamo poste per la z, con più l'altra che il loro *Wronskiano* Q, cioè il determinante

$$(47)\qquad Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1, \ldots, z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z'_2 & z''_2, \ldots, z_2^{(n-1)} \\ z_3 & z'_3 & z''_3, \ldots, z_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n & z'_n & z''_n, \ldots, z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero pei valori di x nell'intervallo (a, b); e sostituendo queste varie funzioni al posto di z nella formola (44), *conservando però sempre lo stesso integrale y che sarà stato scelto,* e indicando con $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ i valori che ne risulteranno per la costante c, avremo un sistema di n equazioni che quando siano conosciuti o si considerino come conosciuti i loro coefficienti, saranno di primo grado rispetto a $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y', y$,

e potranno quindi risolversi rispetto a queste quantità, e in particolare rispetto all'integrale considerato y, se il loro determinante P risulterà diverso da zero.

Ora ponendo per brevità di scrittura $\varepsilon_s = (-1)^s$, questo determinante P, cioè

$$\begin{vmatrix} z_1 a_0 & z_1 a_1 + \varepsilon_1 (z_1 a_0)' & z_1 a_2 + \varepsilon_1 (z_1 a_1)' + \varepsilon_2 (z_1 a_0)'' \ldots \\ z_2 a_0 & z_2 a_1 + \varepsilon_1 (z_2 a_0)' & z_2 a_2 + \varepsilon_1 (z_2 a_1)' + \varepsilon_2 (z_2 a_0)'' \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n a_0 & z_n a_1 + \varepsilon_1 (z_n a_0)' & z_n a_2 + \varepsilon_1 (z_n a_1)' + \varepsilon_2 (z_n a_0)'' \ldots \end{vmatrix}$$

scomposto in più determinanti parziali coi processi noti si riduce all'altro

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \begin{vmatrix} z_1 a_0 & (z_1 a_0)' & (z_1 a_0)'' \ldots (z_1 a_0)^{(n-1)} \\ z_2 a_0 & (z_2 a_0)' & (z_2 a_0)'' \ldots (z_2 a_0)^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n a_0 & (z_n a_0)' & (z_n a_0)'' \ldots (z_n a_0)^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

e questo, eseguendo le varie derivazioni e poi facendo nuove scomposizioni in determinanti parziali, diviene

$$P = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n a_0^n Q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n Q,$$

talchè l'essere P diverso da zero è conseguenza della condizione già posta che lo sia il Q e dell'altra che ora giova di porre che lo sia anche a_0 pei valori di x fra a e b.

457. — Limitandoci quindi a considerare il valore dell'integrale y che si avrà dal sistema di equazioni sopra indicate, e osservando che sul determinante che verrà a figurare nel numeratore potranno farsi le stesse scomposizioni che abbiamo fatte su P fino alla colonna penultima, si vede che avremo

$$y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q} \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & z''_1 \ldots & z_1^{(n-2)} & \int_a^x (Zy + z_1 Y)_{x_1} dx_1 + c_1 \\ z_2 & z'_2 & z''_2 \ldots & z_2^{(n-2)} & \int_a^x (Z_2 y + z_2 Y)_{x_1} dx_1 + c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n & z'_n & z''_n \ldots & z_n^{(n-2)} & \int_a^x (Z_n y + z_n Y)_{x_1} dx_1 + c_n \end{vmatrix},$$

indicando in generale con Z_r ciò che diventano le Z cambiandovi z in z_r, e così infine, osservando che senza dare luogo a confusione veruna gli integrali che figurano negli elementi dell'ultima colonna possono portarsi fuori del determinante, e indicando con Q_c e Q_{x,x_1} i determinanti che vengono da Q sostituendovi agli elementi della ultima colonna respettivamente $c_1, c_2, \ldots, c_n$ e $(Z_1 y + z_1 Y)_x, (Z_2 y + z_2 Y)_{x_1}, \ldots, (Z_n y + z_n Y)_{x_1}$, cioè ponendo

$$Q_c = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{(n-2)} & c_1 \\ z_2 & z'_2 & \ldots & z_2^{(n-2)} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{(n-2)} & c_n \end{vmatrix}, \quad Q_{x,x_1} = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{(n-2)} & (Z_1 y + z_1 Y)^{x_1} \\ z_2 & z'_2 & \ldots & z_1^{(n-2)} & (Z_2 y + z_2 Y)_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{(n-2)} & (Z_n y + z_n Y)_{x_1} \end{vmatrix},$$

avremo la formola notevole seguente

$$(48) \qquad y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q}\left(Q_c + \int_a^x Q_{x,x_1}\,dx_1\right)$$

che vale per qualunque integrale di qualunque equazione (43) quando sono soddisfatte le varie condizioni che successivamente abbiamo poste per le $a_0, a_1, \ldots, a_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$, ma che conservano ancora una estrema arbitrarietà.

Quando poi s'indichino con q_{x,x_1} e $\bar{q}_{x,x_1}$ i determinanti che vengono da Q ponendo al posto degli elementi dell'ultima colonna respettivamente le quantità $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e le $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nelle quali sia sostituito x_1 alla variabile x, per modo che si avrà

$$Q_{x,x_1} = y_{x_1}\bar{q}_{x,x_1} + Y_{x_1} q_{x,x_1},$$

la formola precedente (48) potrà anche scriversi sotto la forma

$$(49) \qquad y = \frac{\varepsilon_{n-1}}{a_0 Q}\left(Q_c + \int_a^x Y_{x_1} q_{x,x_1}\,dx_1 + \int_a y_{x_1}\bar{q}_{x,x_1}\,dx_1\right),$$

e evidentemente quando le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non contengano nè l'integrale y nè le sue derivate, e lo stesso avvenga per Q_{x,x_1} nel caso della (48) e per Y nel caso della (49), e in questo ultimo caso sia anche $\bar{q}_{x,x_1} = 0$, queste formola (48) o (49) determineranno completamente gli integrali della (43) con n costanti arbitrarie, e sarebbe anche facile vedere che daranno luogo all'integrale generale.

Nel caso poi in cui, sempre supponendo che le $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e Y e $\bar{q}_{x,x_1}$ non contengano nè y nè le sue derivate, non sia però $\bar{q}_{x,x_1} = 0$, la formola (49) farà dipendere l'integrale y da una di quelle equazioni che diconsi *equazioni integrali*.

Di queste formole e di questi risultati, che evidentemente appariscono molto notevoli anche pel caso che si abbiano in vista le equazioni generali come la (43) per studii che, indipendentemente dalla determinazione degli integrali, vogliano farsi su esse, ce ne varremo più specialmente in seguito nel caso delle equazioni lineari; nel qual caso, esse condurranno appunto alla determinazione dell'integrale generale delle stesse equazioni sotto forma di serie, che saranno di infinite forme a causa della completa arbitrarietà che rimarrà nelle funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

XXVI.

Equazioni differenziali lineari

Generalità.

458. — Nel Cap. XXI ai §§ 366-67 (pag. 534 e seg.) abbiamo studiate le equazioni lineari del prim'ordine, cioè quelle della forma $y'+Py=Q$ dove P e Q sono funzioni della sola x, e ne abbiamo trovato l'integrale generale

$$y=e^{-\int P\,dx}\left\{\int Q e^{\int P\,dx}dx+C\right\},$$ dove C è una costante arbitraria.

Ora prenderemo a studiare le *equazioni differenziali lineari d'ordine qualunque n*, intendendo, come nel caso di quelle di prim'ordine, per *equazioni lineari* quelle nelle quali le funzioni incognite e le loro derivate entrano al primo grado e non moltiplicate fra loro, limitandoci però in questi studii al caso di una funzione incognita sola y e quindi di una sola equazione.

Con questa definizione le equazioni differenziali che ora studieremo avranno la forma seguente

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=X,$$

dove $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e X sono funzioni che contengono la sola variabile indipendente x e che talvolta possono anche essere tutte o in parte costanti.

Nel caso speciale poi di $X=0$ la equazione si dirà equazione lineare *senza secondo membro* o *equazione incompleta*, o anche *equazione omogenea*, dando invece il nome di equazioni *col secondo membro* o equazioni *complete* a quelle per le quali X non è zero; e poichè dimostreremo poi che la integrazione delle equazioni lineari complete si riduce sempre a quella delle equazioni senza secondo membro o omogenee, noi incominceremo ad occuparci di queste.

Equazioni lineari senza secondo membro, o equazioni incomplete o omogenee.

459. — Le equazioni lineari senza secondo membro o equazioni incomplete o omogenee, saranno della forma

$$(1)\qquad a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

ed essendo omogenee rispetto ad y e alle sue derivate una prima loro particolarità, *quella cioè che il loro ordine potrà sempre essere abbassato di una unità*, risulterà subito da quanto dicemmo in generale sulle equazioni omogenee al § 432. *c*) (pag. 620).

Basterà porre per questo, come nel paragrafo citato $y=e^{\int z\,dx}$, e prendere z come nuova funzione incognita perchè, avendosi allora

$$y'=e^{\int z\,dx}z,\ y''=e^{\int z\,dx}(z^2+z'),\ \ y'''=e^{\int z\,dx}(z^3+3zz'+z''),\ldots,$$

la sostituzione di queste quantità nella (1), dopo di avere diviso tutto per $e^{\int z\,dx}$ condurrà subito ad una equazione il cui ordine sarà inferiore di una unità.

La nuova equazione però, quando la equazione data (1) non sia del prim'ordine, cesserà di essere lineare; ma ciò non ostante la trasformazione fatta può essere utile in alcuni casi perchè potrà darsi che la nuova equazione rientri in casi già trattati o si possa integrare con facilità.

Così ad es. quando la equazione data (1) sia quella del second'ordine

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0,$$

poichè la nuova equazione sarà la seguente

$$a_0z'+a_0z^2+a_1z+a_2=0,$$

si viene a ricadere nelle equazioni considerate ai §§ 375 e seg. (pag. 544 e seg.), cioè in quelle di *Riccati* che si sanno integrare nel caso in cui di esse si conosca un integrale particolare e anche in alcuni altri casi; e quindi nel caso delle equazioni lineari del second'ordine questa riduzione al prim'ordine potrà spesso essere utile.

460. — Una seconda proprietà delle equazioni lineari senza secondo membro (1) è quella che risulta dall'osservare che se in qualche modo si riuscirà a trovare una funzione speciale $y_1(x)$ che presa come valore di y soddisfi identicamente la stessa equazione, cioè *se si troverà un suo integrale $y_1(x)$, questo anche moltiplicato per una costante arbitraria C_1 rimarrà un integrale,* perchè evidentemente sostituendo $C_1 y_1(x)$ per y nel primo membro della (1), la costante C_1 verrà a figurare come fattore in ogni termine, e quindi lo stesso primo membro rimarrà identicamente nullo.

E *se si troveranno più integrali $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ della stessa equazione* (1), *anche la somma $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ di questi integrali moltiplicati per costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sarà un integrale,* perchè si riscontra subito che quando nel primo membro delle (1) si pone per y questa espressione $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m$ esso si riduce alla somma dei valori che si hanno per lo stesso primo membro ponendovi per y le funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$ e poi moltiplicandoli rispettivamente per le costanti $C_1, C_2, \ldots, C_m$; e quindi risulta ancora identicamente nullo.

461. — Questa osservazione, pure tanto semplice, ha una importanza grandissima.

Per essa quando si conoscano n integrali della equazione data (1) (tanti cioè quante sono le unità dell'ordine della equazione), si potrà formare un integrale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

che conterrà n costanti arbitrarie $C_1, C_2, \ldots, C_n$; e questo sarà l'integrale generale tutte le volte che gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ siano scelti in modo che per un valore particolare x_0 di x, pel quale i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ non abbiano singolarità e a_0 non sia zero (per essere certi che $y^{(n)}$ non divenga infinito), le quantità $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ prendano valori dati ad arbitrio $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Ora avendosi pel detto integrale

$$\begin{aligned}
y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \\
y' &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n, \\
y'' &= C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}
\end{aligned}$$

si vede subito che sarà possibile di soddisfare alla condizione indicata tutte

le volte che il determinante (*Wronskiano delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$*)

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \ldots & y''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

per $x = x_0$ non sia zero, e allora gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ saranno altrettanti integrali particolari perchè si dedurranno dall'integrale y dando valori particolari alle costanti; dunque noi possiamo ora affermare che *quando per una equazione senza secondo membro* (1) *siano trovati n integrali particolari $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pei quali il determinante* D (cioè il loro Wronskiano) *sia diverso da zero per $x = x_0$, l'integrale generale sarà dato dalla formola*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{3}$$

dove $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono n costanti arbitrarie.

462. — I sistemi d'integrali particolari $y_1, y_2, \ldots, y_n$, che godono della proprietà indicata sono stati detti da *Fuchs sistemi fondamentali d'integrali* della equazione (1), e il determinante D corrispondente è stato detto *determinante del sistema fondamentale $y_1, y_2, \ldots, y_n$.*

Dei sistemi fondamentali d'integrali ne esisterà sempre un numero infinito, perchè evidentemente, pel teorema già dimostrato nel Cap. XX sulla esistenza degli integrali generali, si potranno sempre avere sistemi di n integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della (1) pei quali i valori di essi e delle loro prime $n-1$ derivate per $x = x_0$ siano tali che il determinante corrispondente D formato da questi valori sia diverso da zero, e di questi sistemi se ne avranno un numero infinito.

Determinando ad es.: gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ colle condizioni iniziali seguenti per le quali nel punto x_0:

y_1 abbia il valore 1, e le sue derivate $y'_1, y''_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$ siano tutte zero,

y_2 sia qualunque, y'_2 abbia il valore 1, e le altre derivate $y''_2, y'''_2, \ldots, y_2^{(n-1)}$ siano tutte zero,

y_3 e y'_3 siano qualunque, y''_3 abbia il valore 1, e le altre derivate $y'''_3, y_3^{\mathrm{IV}}, \ldots, y_3^{(n-1)}$ sieno tutte zero,

. . . . ,

$y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(n-2)}$ siano qualunque, e $y_n^{(n-1)}$ abbia il valore 1, il determinante D di questi (infiniti) sistemi d'integrali $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ per $x = x_0$ avrà il valore 1, e il sistema sarà fondamentale (*).

463. — Il teorema dimostrato sopra può anche completarsi col dimostrare che *qualunque integrale $\bar{y}$ della equazione senza secondo membro* (1), (finito e continuo insieme alle sue prime $n-1$ derivate, e colle derivate n^e anch'esse determinate e finite in un punto x_0 nel quale i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono finiti e continui e a_0 è diverso da zero) *si potrà sempre porre sotto la forma* (3) *dove $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono integrali fondamentali;* perchè se $\bar{y}_0, \bar{y}'_0, \bar{y}''_0, \ldots, \bar{y}_0^{(n-1)}$ sono i valori del detto integrale $\bar{y}$ e delle sue derivate nel punto x_0, per quanto dicemmo sopra, con valori adattati delle costanti $C_1, C_2, \ldots, C_n$ si potrà sempre costruire un integrale $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ al quale corrispondano gli stessi valori iniziali $\bar{y}_0, \bar{y}'_0, \bar{y}''_0, \ldots, \bar{y}_0^{(n-1)}$, e allora la differenza $\bar{y} - (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n)$ sarà un integrale della (1) pel quale i valori iniziali di esso e delle sue prime $n-1$ derivate sono tutti zero, e quindi per quanto dicemmo in generale sulla unicità degli integrali delle equazioni differenziali la stessa differenza sarà sempre zero (V. ad es. § 355 [pag. 521]), e si avrà $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$; e questo dimostra subito la proprietà enunciata la quale permette anche evidentemente di dire che *le equazioni lineari senza secondo membro non hanno soluzioni singolari* almeno finchè si deve trattare d'integrali che siano finiti e continui insieme alle loro derivate come supponemmo sopra.

464. — Del resto, anche senza appoggiarsi sulla considerazione generale della unicità degli integrali, la dimostrazione può farsi anche nel modo seguente basandosi sulle seguenti considerazioni che sono del tutto relative alle equazioni lineari senza secondo membro e che ci gioveranno anche in seguito.

Osserviamo che pel caso delle equazioni lineari del prim'ordine senza secondo membro $a_0 y' + a_1 y = 0$, o $y' = Py$ con $P = -\dfrac{a_1}{a_0}$ si ha $\dfrac{y'}{y} = P$, e quindi integrando si avrà per ogni loro integrale $\log y = \int P\,dx + \log C$ essendo C una costante, e di qui si avrà $y = Ce^{\int P\,dx}$ o $y = Cy_1$, quando si ponga $y_1 = e^{\int P\,dx}$, e y_1 sarà pure un integrale; quindi, poichè la particolarità indicata è così già verificata per queste equazioni lineari del prim'ordine, basterà dimostrare che ammettendola vera per quelle di ordine $n-1$, essa sussiste anche per quelle di ordine n.

Ora quando y_1 sia un integrale della equazione (1) è evidente che, per ogni altro integrale y, indicando con z il rapporto $\dfrac{y}{y_1}$ si potrà scrivere $y = y_1 z$; e poichè dalla formola di Leibnitz che dà la derivata del prodotto di due funzioni si hanno le formole seguenti

$$\begin{aligned} y &= y_1 z, \\ y' &= y'_1 z + y_1 z', \\ y'' &= y''_1 z + 2 y'_1 z' + y_1 z'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} z + n_1 y_1^{(n-1)} z' + n_2 y_1^{(n-2)} z'' + \ldots + n_{n-1} y'_1 z^{(n-1)} + y_1 z^{(n)}, \end{aligned}$$

essendo $n_1, n_2, \ldots, n_{n-1}$ i soliti coefficienti binomiali, basterà moltiplicare queste equazioni respettivamente per $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ e sommarle, per vedere subito che, se anche $y = y_1 z$ dovrà essere come y_1 un integrale della equazione (1), z dovrà soddisfare alla seguente

$$b_{n-1} z' + b_{n-2} z' + \ldots + b_1 z^{(n-1)} + b_0 z^{(n)} = 0,$$

o in ordine inverso

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1} z' = 0, \tag{4}$$

dove

$$\begin{cases} b_{n-1} = n_1 a_0 y_1^{(n-1)} + (n-1)_1 a_1 y_1^{(n-2)} + \ldots + 2_1 a_{n-2} y'_1 + a_{n-1} y_1, \\ b_{n-2} = n_2 a_0 y_1^{(n-2)} + (n-1)_2 a_1 y_1^{(n-3)} + \ldots + a_{n-2} y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 \quad = n_{n-1} a_0 y'_1 + a_1 y_1, \\ b_0 \quad = a_0 y_1, \end{cases} \tag{5}$$

e questa nuova equazione (4) è pure lineare e omogenea e dell'ordine n, ma col porre $z' = u$ si riduce subito all'altra di ordine $n-1$

$$b_0 u^{(n-1)} + b_1 u^{(n-2)} + b_2 u^{(n-3)} + \ldots + b_{n-1} u = 0; \tag{6}$$

e poichè per le equazioni dell'ordine $n-1$ la proprietà indicata sopra si ammette come già dimostrata, indicando ora con $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ un sistema fondamentale d'integrali di questa equazione, si potrà dire intanto che per

(*) Vedremo al § 468 che quando il determinante D è differente da zero in un punto x_0 esso si mantiene tale in tutto un intervallo che comprende questo punto x_0 e nel quale i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ non hanno singolarità e a_0 è diverso da zero; e quindi il costituire gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistema fondamentale non dipende essenzialmente dal punto prescelto x_0. Questo del resto apparisce anche dall'altra definizione dei sistemi fondamentali d'integrali che daremo al § 467.

ogni altro suo integrale u avremo

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{n-1} u_{n-1},$$

con $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ quantità costanti che comunque si prendano daranno sempre luogo a un integrale u.

Ne segue che per ogni valore di z pel quale la (1) verrà soddisfatta da $y = y_1 z$, avremo

$$z' = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, \quad \text{e} \quad z = c + c_1 \int u_1 dx + c_2 \int u_2 dx + \dots + c_{n-1} \int u_{n-1} dx$$

essendo c un'altra costante; e quindi per ogni integrale y della (1) sarà

$$y = c y_1 + c_1 y_1 \int u_1 dx + c_2 y_1 \int u_2 dx + \dots + c_{n-1} y_1 \int u_{n-1} dx, \tag{7}$$

ovvero

$$y = c y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + \dots + c_{n-1} y_n$$

indicando con $y_2, y_3, \dots, y_n$ le funzioni $y_1 \int u_1 dx, y_1 \int u_2 dx, \dots, y_1 \int u_{n-1} dx$ che sono altrettanti integrali della (1); talchè il teorema resta così nuovamente dimostrato quando si possa assicurare che il sistema d'integrali qui indicati $y_1, y_2, \dots, y_n$ è fondamentale, ciò che risulterà subito dalle considerazioni generali seguenti.

465. — Osserviamo a proposito dei sistemi fondamentali d'integrali che se un sistema d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ di una equazione lineare senza secondo membro (1) (che non si sappia se costituiscono un sistema fondamentale) è tale che ogni integrale della stessa equazione possa esprimersi per essi sotto la forma (3), gli integrali medesimi costituiranno sempre un sistema fondamentale; perchè allora se con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ indicheremo un sistema fondamentale qualsiasi d'integrali avremo per essi il sistema di equazioni

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_1 = a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + \dots + a_{1,n} y_n, \\ \bar{y}_1 = a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + \dots + a_{2,n} y_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \bar{y}_n = a_{n,1} y_1 + a_{n,2} y_2 + \dots + a_{n,n} y_n, \end{array} \right.$$

essendo le $a_{r,s}$ quantità costanti adattate; e ora formando il determinante $\overline{\mathrm{D}}$ del sistema fondamentale $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ si vede subito che esso sarà il pro-

dotto AD del determinante A formato colle costanti $a_{r,s}$ moltiplicato pel determinante D degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ dai quali si parte, e quindi se in un punto x_0, nel quale questi integrali e gli altri $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ sono finiti e continui insieme alle loro derivate fino a quelle dell'ordine $n-1$ inclusive, il determinante $\overline{\mathrm{D}}$ sarà diverso da zero, tale dovrà essere anche D (come dovrà essere diverso da zero A), e il sistema degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ sarà esso pure fondamentale, come appunto volevamo dimostrare; con che evidentemente, come dicemmo, resta completata anche la dimostrazione del paragrafo precedente.

466. — Aggiungiamo che dalla stessa dimostrazione che ora abbiamo fatta risulta anche che un sistema fondamentale qualsiasi d'integrali $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ si esprime linearmente per gli integrali di un altro sistema fondamentale qualunque mediante le formole (8) nelle quali il determinante A della sostituzione è diverso da zero; e quindi per determinare colla formola (3) gli integrali di una equazione senza secondo membro (1) potremo sempre partire da un sistema fondamentale qualsiasi.

467. — E aggiungiamo anche che se gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ di una equazione senza secondo membro (1) costituiscono un sistema fondamentale, essi non potranno essere legati fra loro da una equazione lineare e omogenea

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0$$

nella quale tutti o alcuni dei coefficienti (costanti) $k_1, k_2, \dots, k_n$ siano diversi da zero: perchè se questo avvenisse, colla derivazione di questa equazione fino all'ordine $n-1$ verremmo a formare un sistema di equazioni lineari e omogenee rispetto ai coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_n$ per le quali, non potendo questi coefficienti essere tutti zero, dovrebbe essere zero il determinante D corrispondente agli integrali dati e questi non sarebbero fondamentali, ciò che è contro a quanto abbiamo supposto.

Viceversa se un sistema d'integrali $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ è tale che fra essi non possa sussistere una relazione lineare omogenea come la precedente, è facile vedere che essi costituiranno un sistema fondamentale.

Qualunque infatti si fossero questi integrali, prendendo un sistema fondamentale qualsiasi d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ avremmo ancora un sistema di equazioni come le (8), e fra i determinanti $\overline{\mathrm{D}}$, A e D sussisterebbe ancora la relazione $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{AD}$ per qualunque valore di x; e quindi se gli integrali $\bar{y}, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ non costituissero un sistema fondamentale, venendo ad essere $\overline{\mathrm{D}} = 0$ ed essendo D diverso da zero, dovremmo avere $\mathrm{A} = 0$.

Da questo, in forza delle proprietà note dei sistemi di forme lineari omogenee risulta subito che i secondi membri delle equazioni (8) e così anche gli integrali $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ verrebbero sempre legati necessariamente, tutti o alcuni di essi, da equazioni lineari con coefficienti non tutti eguali a zero, e questo è in contradizione con quanto abbiamo supposto; talchè conviene ora ammettere che se gli integrali $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ di un sistema qualsiasi della equazione (1) non sono legati da una relazione lineare omogenea, cioè *se sono,* come si usa di dire, *linearmente distinti* o *indipendenti,* essi costituiscono sempre sistema fondamentale.

E così ora può anche cambiarsi la definizione dei sistemi fondamentali d'integrali, *potendo dirsi fondamentali quelli formati da sistemi di n integrali linearmente indipendenti.*

468. — A proposito poi del determinante D di un sistema fondamentale di integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della equazione data (1) (*), osserviamo che se se ne fa la derivata e si ricorda che per derivare un determinante basta fare la somma dei determinanti che si ottengono sostituendo agli elementi di ogni linea (o di ogni colonna) separatamente le derivate corrispondenti, si vede subito che si avrà

$$D' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \text{ o anche } D' = \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ a_0 y_1^{(n)} & a_0 y_2^{(n)} & \cdots & a_0 y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

quando si supponga a_0 finito e diverso da zero nell'intervallo che si considera; e aggiungendo agli elementi dell'ultima linea quelli delle linee precedenti moltiplicati respettivamente pei coefficienti $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2$ che si supporranno insieme ad a_1 sempre finiti nello stesso intervallo, e tenendo conto della circostanza che le $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono integrali della equazione (1), se ne dedurrà subito la formola seguente $D' = -\frac{a_1}{a_0} D$, la quale, integrando

(*) Invece di parlare di determinante di un sistema fondamentale d'integrali della equazione (1) si potrebbe parlare in modo generale del determinante di un sistema di funzioni, che abbiano le derivate dei primi n ordini e siano linearmente indipendenti; però siccome vedremo fra breve ai §§ 481-82 che si può sempre costruire — e con tutta facilità — una equazione lineare omogenea di ordine n che abbia per integrali di un sistema fondamentale n funzioni date arbitrariamente linearmente indipendenti, la cosa in sostanza torna perfettamente la stessa.

e indicando con c una costante, ci conduce all'altra dovuta a Liouville

$$(9) \qquad D = c\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}, \quad \text{ovvero} \quad D = D_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0} dx},$$

essendo D_0 il valore di D nel punto x_0; e da questa apparisce che *se il determinante* D *è diverso da zero in un punto x_0, esso si mantiene tale in tutto un intervallo che comprende questo punto e nel quale a_0 si mantiene finito e diverso da zero e gli altri coefficienti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ restano finiti;* e il suo valore in un punto qualsiasi dello stesso intervallo dipende soltanto da quello che esso ha nel punto x_0 e dal valore dell'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0} dx$ mediante la formola precedente (9).

Variando dunque il sistema fondamentale d'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$ che dànno luogo al determinante D restando però sempre fondamentale, i valori del determinante variano tutti proporzionalmente (*).

469. — Tutto questo premesso, si comprende bene come un processo per la determinazione dell'integrale generale delle equazioni lineari senza secondo membro (1) sia quello di ricercare alcuni dei suoi integrali; perchè quando siano trovati in numero di n e costituiscano un sistema fondamentale, essi condurranno sempre all'integrale generale per mezzo della (3).

Avendosi dunque una equazione omogenea (1) è naturale di proporsi il problema di cercare se e in quali casi essa abbia integrali di forma data; e poichè fra le funzioni più semplici per riguardo alla derivazione, sono da annoverarsi le esponenziali $e^{\alpha x}$ nelle quali α è una costante reale o complessa, perchè le loro derivate sono $\alpha e^{\alpha x}, \alpha^2 e^{\alpha x}, \alpha^3 e^{\alpha x}, \ldots$, si presenta naturalmente per prima cosa il pensiero di ricercare se e in quali casi la equazione (1) abbia integrali di questa forma esponenziale.

Ora, essendo la equazione stessa omogenea, la osservazione che facemmo già in generale al § 437 (pag. 625-26) sulle equazioni che sono omogenee rispetto alla funzione e alle derivate permette subito di dire che integrali esponenziali effettivamente ci sono sempre quando la equazione data non contenga la x esplicitamente, cioè sia a coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ tutti costanti (**), e talvolta possono esservene anche quando tutti o alcuni di questi coefficienti contengono la x.

(*) Questa particolarità risulta subito anche dalla formola $D = AD$ del paragrafo precedente.

(**) Naturalmente quando i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ apparissero funzioni delle x solo per la presenza di un fattore comune a tutti $\theta(x)$, questo fattore dovrebbe intendersi soppresso colla divisione.

470. — Fermandoci quindi dapprima *sul caso in cui i coefficienti sono tutti costanti,* per quanto si disse allora in generale, come per quanto si riscontra immediatamente anche sostituendo per y e per le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ i valori $e^{\alpha x}, \alpha e^{\alpha x}, \alpha^2 e^{\alpha x}, \dots, \alpha^{n-1} e^{\alpha x}, \alpha^n e^{\alpha x}$ che per esse si hanno nel caso di $y = e^{\alpha x}$, si vede subito che per avere questi integrali particolari basterà formare la equazione

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \tag{10}$$

che si ottiene dalla (1) sostituendo al posto di y e delle sue derivate le potenze di una incognita α ad un grado uguale all'ordine di derivazione, e poi prendere per valore della costante α nella esponenziale $e^{\alpha x}$ le radici di questa equazione.

Questa equazione (10) che risulta dalle (1) nel modo ora indicato e che giova spesso di considerare anche quando i coefficienti della equazione data non sono tutti costanti, si chiama la *equazione caratteristica* della (1).

Essa, nel caso in cui i coefficienti della (1) sono tutti costanti, se non ha radici multiple ha appunto n radici distinte (reali o complesse) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e quindi dà luogo agli n integrali $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$, e questi integrali sono fondamentali perchè per essi il determinante D si riduce subito all'altro

$$e^{(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

che è il noto determinante di Vandermonde moltiplicato per $e^{-\frac{a_1}{a_0}x}$ $\left(\text{perchè } \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}\right)$ e può scriversi quindi sotto la forma $e^{-\frac{a_1}{a_0}} \prod_{r,s} (\alpha_r - \alpha_s)$ con $r > s$, ed è diverso da zero; quindi noi possiamo dire subito intanto che *quando si ha una equazione lineare senza secondo membro* (1) *a coefficienti costanti, formando la sua equazione caratteristica* (10) *se si troverà che questa equazione ha tutte le sue radici diseguali* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, *le esponenziali*

$$e^{\alpha_1 x}, \; e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x} \tag{11}$$

costituiranno un sistema fondamentale d'integrali, e l'integrale generale

sarà dato dalla formola

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_n e^{\alpha_n x}, \tag{12}$$

dove $C_1, C_2, \dots, C_n$ *sono costanti arbitrarie.*

471. — Che gli integrali (11) costituiscono un sistema fondamentale, oltre che dalla considerazione del determinante corrispondente D, risulta anche dall'osservare che essi non possono essere legati da nessuna equazione lineare omogenea della forma

$$k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x} + k_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + k_n e^{\alpha_n x} = 0 \tag{13}$$

nella quale i coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_n$ non siano tutti uguali a zero.

Ammesso infatti che una tale relazione potesse sussistere, dividendola per $e^{\alpha_1 x}$ e poi derivandola una volta si passerebbe all'altra

$$(\alpha_2 - \alpha_1) k_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + (\alpha_3 - \alpha_1) k_3 e^{(\alpha_3-\alpha_1)x} + \dots + (\alpha_n - \alpha_1) k_n e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0$$

nella quale non figura più il k_1.

Dividendo questa per $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$, e dopo eseguendo ancora una derivazione si passerebbe ad un'altra equazione simile

$$(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) k_3 e^{(\alpha_3-\alpha_2)x} + \dots + (\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2) k_n e^{(\alpha_n-\alpha_2)x} = 0,$$

nella quale non figura più neppure il k_2; e così continuando si giungerebbe in fine alla equazione seguente

$$(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1}) k_n e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x} = 0$$

che ci dà subito $k_n = 0$; e poichè nella (13) le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono tutte disuguali e possono intendersi poste in un ordine qualunque, se ne deduce che la stessa equazione (13) non può sussistere altro che quando le $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ siano tutte zero, ciò che porta appunto che gli integrali (11) costituiscono un sistema fondamentale.

472. — Passando ora a trattare il caso in cui la equazione caratteristica (10) ha anche radici multiple, osserviamo che se per es. la radice α_1 è multipla dell'ordine m, in corrispondenza a questa radice α_1 si avrà il solo integrale esponenziale $e^{\alpha_1 x}$ e nella serie degli integrali (11) se ne verranno a perdere $m-1$; però è facile vedere che in questo caso *in corrispondenza alla stessa radice* α_1 *multipla di ordine* m, *oltre all'integrale* $e^{\alpha_1 x}$ *si avranno anche gli* $m-1$ *integrali seguenti*

$$x e^{\alpha_1 x}, \; x^2 e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{\alpha_1 x}, \tag{14}$$

e verranno così ritrovati gli integrali mancanti.

Indichiamo infatti con $\varphi(\alpha)$ il primo membro della equazione caratteristica (10), cioè poniamo

$$\varphi(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n\,, \tag{15}$$

con che per la radice α_1 avremo $\varphi(\alpha_1)=0$, $\varphi'(\alpha_1)=0$, $\varphi''(\alpha_1)=0,\ldots,\varphi^{(m-1)}(\alpha_1)=0$, con $\varphi^{(m)}(\alpha_1)\neq 0$.

Essendo $e^{\alpha_1 x}$ un integrale della (1), potremo indicare un altro integrale qualsiasi y di questa equazione con $y=e^{\alpha_1 x}z$, come facemmo nel § 464 partendo allora dall'integrale conosciuto y_1; e col processo usato nel paragrafo stesso si ritroverà che onde $e^{\alpha_1 x}z$ sia un integrale basterà che z soddisfi alla equazione (4) nella quale per essere ora $y_1=e^{\alpha_1 x}$, le $b_{n-1}, b_{n-2},\ldots, b_0$ date allora dalle (5) risulteranno ora determinate dalle formole

$$b_{n-1}=\varphi'(\alpha_1)e^{\alpha_1 x},\ b_{n-2}=\frac{\varphi''(\alpha_1)}{\pi(2)}e^{\alpha_1 x}\ ,\ldots,\ b_s=\frac{\varphi^{(n-s)}(\alpha_1)}{\pi(n-s)}e^{\alpha_1 x}\ ,\ldots,\ b_1=\frac{\varphi^{(n-1)}(\alpha_1)}{\pi(n-1)}e^{\alpha_1 x},\ b_0=\frac{\varphi^{(n)}(\alpha_1)}{\pi(n)}e^{\alpha_1 x},$$

per modo che la equazione stessa in z sarà la seguente

$$\frac{\varphi'(\alpha_1)}{\pi(1)}z'+\frac{\varphi''(\alpha_1)}{\pi(2)}z''+\ldots+\frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha_1)}{\pi(m-1)}z^{(m-1)}+\frac{\varphi^{(m)}(\alpha_1)}{\pi(m)}z^{(m)}+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(\alpha_1)}{\pi(n)}z^{(n)}=0\,,$$

e per essere ora $\varphi(\alpha_1)=\varphi'(\alpha_1)=\varphi''(\alpha_1)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(\alpha_1)=0$ con $\varphi^{(m)}(\alpha_1)\neq 0$ si riduce all'altra

$$\frac{\varphi^{(m)}(\alpha_1)}{\pi(m)}z^{(m)}+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(\alpha_1)}{\pi(n)}z^{(n)}=0\,;$$

e poichè questa è subito soddisfatta prendendo per z un polinomio qualsiasi di grado $m-1$, $C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1}$ con $C_1, C_2, C_3,\ldots, C_m$ costanti arbitrarie, se ne conclude che per la equazione (1), in corrispondenza alla radice α_1 della equazione caratteristica (10) supposta multipla dell'ordine m, avremo l'integrale

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})\,e^{\alpha_1 x}\,,$$

che col particolarizzare le costanti $C_1, C_2, C_3,\ldots, C_m$ dà subito luogo oltre che all'integrale $e^{\alpha_1 x}$ anche agli $m-1$ integrali particolari (14).

Con questa osservazione dunque — che si applicherà a ciascuna radice multipla della equazione caratteristica —, si può ora affermare che per le equazioni lineari senza secondo membro (1) a coefficienti costanti, anche se la equazione caratteristica (10) ha radici multiple, il numero degli integrali particolari che si hanno coi processi indicati in corrispondenza all'insieme delle varie

radici è ancora completo; e poichè ci sarà ora facile anche di vedere che questi integrali costituiscono un sistema fondamentale, così anche in questo caso per mezzo degli integrali stessi avremo sempre l'integrale generale colla formola (3).

473. — Che anche in questo caso gli integrali che si trovano nel modo indicato costituiscano un sistema fondamentale, la dimostrazione può farsi col processo stesso che si seguì nel § 471 pel caso in cui le radici della equazione caratteristica sono tutte disuguali.

S'indichino infatti con $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \lambda, \mu$ le varie radici distinte della equazione caratteristica (10), e con $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma,\ldots, n_\lambda, n_\mu$ i respettivi loro gradi di multiplicità, alcuni dei quali potranno anche essere uguali ad uno, per comprendere così anche il caso in cui vi siano anche radici semplici.

Se gli integrali determinati nel modo indicato sopra potessero non costituire un sistema fondamentale, è evidente che dovrebbe esistere una equazione della forma

$$e^{\alpha x}\varphi_\alpha(x)+e^{\beta x}\varphi_\beta(x)+e^{\gamma x}\varphi_\gamma(x)+\ldots+e^{\lambda x}\varphi_\lambda(x)+e^{\mu x}\varphi_\mu(x)=0\,, \tag{16}$$

essendo $\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x),\ldots, \varphi_\lambda(x), \varphi_\mu(x)$ certi polinomii interi dei gradi $n_\alpha-1$, $n_\beta-1,\ldots, n_\lambda-1, n_\mu-1$ al più respettivamente; e dividendo questa equazione per $e^{\alpha x}$ e poi derivandola n_α volte con applicare la solita formola di Leibnitz, giungeremmo a un'altra equazione nella quale il $\varphi_\alpha(x)$ non figurerebbe più e che sarebbe della forma

$$e^{(\beta-\alpha)x}\{(\beta-\alpha)^{n_\alpha}\varphi_\beta(x)+p_\beta\}+e^{(\gamma-\alpha)x}\{(\gamma-\alpha)^{n_\alpha}\varphi_\gamma(x)+p_\gamma\}+\ldots+$$
$$+e^{(\mu-\alpha)x}\{(\mu-\alpha)^{n_\alpha}\varphi_\mu(x)+p_\mu\}=0\,,$$

essendo le $p_\beta, p_\gamma,\ldots, p_\mu$ polinomii di grado inferiore a quelli di $\varphi_\beta(x), \varphi_\gamma(x),\ldots, \varphi_\mu(x)$ respettivamente.

Dividendo ora questa equazione per $e^{(\beta-\alpha)x}$ e derivandola poi n_β volte, giungeremmo a un'altra equazione della forma

$$e^{(\gamma-\beta)x}\{(\gamma-\alpha)^{n_\alpha}(\gamma-\beta)^{n_\beta}\varphi_\gamma(x)+q_\gamma\}+\ldots+e^{(\mu-\beta)x}\{(\mu-\alpha)^{n_\alpha}(\mu-\beta)^{n_\beta}\varphi_\mu(x)+q_\mu\}=0,$$

essendo le $q_\gamma,\ldots, q_\mu$ polinomii di gradi inferiori a quelli di $\varphi_\gamma(x),\ldots, \varphi_\mu(x)$ respettivamente; e così continuando giungeremmo infine alla equazione

$$(\mu-\alpha)^{n_\alpha}(\mu-\beta)^{n_\beta}\ldots(\mu-\lambda)^{n_\gamma}\varphi_\mu(x)+t_\mu=0\,,$$

nella quale t_μ dovrà essere un polinomio di grado inferiore a quello di $\varphi_\mu(x)$; e poichè questa porta a dire che il coefficiente del termine di grado più alto in $\varphi_\mu(x)$ dovrebbe essere zero, mentre, ammettendo che la (16) dovesse sussistere, dovrebbe intendersi che in $\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x), \ldots, \varphi_\mu(x)$ fossero scritti soltanto termini con coefficienti diversi da zero, si vede chiaro che si ha di qui una contradizione, e si può perciò concludere senz'altro che anche gli integrali che ora si hanno sono fondamentali.

474. — La importante proprietà dimostrata al § 472 per la quale anche nel caso in cui la equazione caratteristica ha radici multiple si trova un sistema fondamentale d'integrali della equazione lineare omogenea corrispondente a coefficienti costanti, può essere dimostrata anche nel modo seguente.

Osserviamo che se s'indica con λ una quantità qualsiasi indipendente da x, si ha $\frac{d^s(e^{\lambda x})}{dx^s} = \lambda^s e^{\lambda x}$, e $\frac{d^s(e^{\lambda x})}{d\lambda^s} = x^s e^{\lambda x}$, e quindi basterà porre nel primo membro della (1) $e^{\lambda x}$ in luogo di y per ottenere subito la identità seguente

$$a_0 \frac{d^n(e^{\lambda x})}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(e^{\lambda x})}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d(e^{\lambda x})}{dx} + a_n e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \varphi(\lambda)$$

indicando in generale, come già facemmo, con $\varphi(\alpha)$ il primo membro della equazione caratteristica.

Da questa derivando k volte rispetto a λ coll'applicare nel secondo membro la formola di Leibnitz, e nel primo membro invertendo le derivazioni, si avrà subito la formola seguente

$$a_0 \frac{d^n(x^k e^{\lambda x})}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(x^k e^{\lambda x})}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d(x^k e^{\lambda x})}{dx} + a_n x^k e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \{ x^k \varphi(\lambda) +$$
$$+ k_1 x^{k-1} \varphi'(\lambda) + k_2 x^{k-2} \varphi''(\lambda) + \ldots + k_{k-1} x \varphi^{(k-1)}(\lambda) + \varphi^{(k)}(\lambda) \},$$

che sarà essa pure una identità; e da questa se α_1 è una radice multipla dell'ordine m della equazione caratteristica, ponendovi per λ questa radice α_1 si vede subito che pei valori $1, 2, 3, \ldots, m-1$ di k si ha sempre la formola

$$a_0 \frac{d^n(x^k e^{\alpha_1 x})}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(x^k e^{\alpha_1 x})}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d(x^k e^{\alpha_1 x})}{dx} + a_n x^k e^{\alpha_1 x} = 0,$$

la quale dimostra appunto che sotto questa ipotesi $e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha_1 x}$ sono integrali particolari della nostra equazione (1).

475. — I risultati ottenuti permettono dunque di affermare che la integrazione delle equazioni lineari senza secondo membro a coefficienti costanti (1) si riduce sempre alla risoluzione della equazione algebrica (10), cioè della equazione caratteristica; perchè trovate le varie radici (reali o complesse) $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ di questa equazione dei respettivi gradi di multiplicità n_α,

$n_\beta, \ldots, n_\lambda, n_\mu$ che potranno anche essere tutti o in parte uguali ad uno (comprendendo così anche il caso delle radici semplici), l'integrale generale sarà dato dalla formola

$$(17) \qquad y = \psi_\alpha e^{\alpha x} + \psi_\beta e^{\beta x} + \ldots + \psi_\lambda e^{\lambda x} + \psi_\mu e^{\mu x},$$

essendo $\psi_\alpha, \psi_\beta, \ldots, \psi_\lambda, \psi_\mu$ polinomii interi in x dei respettivi gradi $n_\alpha - 1$, $n_\beta - 1, \ldots, n_\lambda - 1, n_\mu - 1$ e a coefficienti del tutto arbitrarii, che si riducono perciò a costanti arbitrarie pei termini che corrispondono alle radici semplici.

È però da osservare che anche nel caso (che sarà quello ordinario) in cui la equazione (1) ha tutti i coefficienti reali, la equazione caratteristica corrispondente (10) può avere alcune o anche tutte le radici complesse, e allora gli integrali trovati (17) si presentano complicati di immaginarii; ma quando la equazione data è a coefficienti reali, è facile vedere che si rimedierà a questo inconveniente sostituendo agli integrali con esponenziali immaginarie che il processo precedente introduce nel caso delle radici complesse, altri integrali reali che mantengono ancora il sistema fondamentale e nei quali figurano invece esponenziali e seni e coseni di quantità reali.

Se si osserva infatti che nel caso dei coefficienti reali nella equazione data, e quindi anche nella equazione caratteristica, ad ogni radice complessa $p+iq$ con un certo grado di multiplicità m, corrisponde sempre un'altra radice complessa e coniugata $p-iq$ collo stesso grado di multiplicità, si vede subito che, nell'integrale generale trovato (17), insieme al termine $c_k x^k e^{(p+iq)x}$ che, nell'integrale generale trovato (17), insieme al termine $c_k x^k e^{(p+iq)x}$ vi sarà anche l'altro $c'_k x^k e^{(p-iq)x}$, e evidentemente basterà prendere per le costanti c_k e c'_k che sono arbitrarie due costanti complesse e coniugate $g+ih$ e $g-ih$ con g e h arbitrarie e reali per fare sì che la somma

$$(18) \qquad c_k x^k e^{(p+iq)x} + c'_k x^k e^{(p-iq)x}$$

dei detti due termini risulti reale.

Così facendo, a questa somma (18) si verrà a sostituire la seguente

$$gx^k e^{px}(e^{iqx} + e^{-iqx}) + ih x^k e^{px}(e^{iqx} - e^{-iqx}),$$

che può scriversi sotto la forma

$$(19) \qquad gx^k e^{px} \cos qx + hx^k e^{px} \operatorname{sen} qx$$

quando si mutino $2g$ e $-2h$ in g e h, quindi si può ora evidentemente affermare che l'integrale generale (17) verrà ad aversi sotto forma reale anche nel caso di radici complesse $p+iq$ della equazione caratteristica sostituendo in esso alle somme come la (18) le altre somme (19), o prendendo invece degli integrali $x^k e^{(p+iq)x}$ e $x^k e^{(p-iq)x}$ gli altri $x^k e^{px} \cos qx$ e $x^k e^{px} \operatorname{sen} qx$, che pel modo con cui sono ottenuti manterranno il sistema ancora fondamentale (*); ciò che corrisponde a dire che nell'integrale (18) all'insieme dei termini con esponenziali complesse

$$\psi_{p+iq}\, e^{(p+iq)x} + \psi_{p-iq}\, e^{(p-iq)x}$$

corrispondenti alle due radici complesse $p+iq$ e $p-iq$ basterà sostituire gli altri con esponenziali e seni e coseni reali

$$\psi_1 e^{px} \cos qx + \psi_2 e^{px} \operatorname{sen} qx$$

nei quali ψ_1 e ψ_2 sono ancora polinomii interi in x del grado $m-1$ coi coefficienti arbitrarii ma reali.

In particolare quindi quando $p+iq$ e $p-iq$ siano radici semplici della equazione caratteristica, alla somma $ce^{(p+iq)x}+c'e^{(p-iq)x}$ dei termini corrispondenti a quelle due radici verrà sostituita l'altra $ge^{px}\cos qx + he^{px} \operatorname{sen} qx$ con g e h costanti arbitrarie reali, che potrà quindi scriversi anche sotto la forma $\rho e^{px} \cos(\omega+qx)$ con ρ e ω costanti arbitrarie reali, ponendo $g=\rho\cos\omega$, $h=-\rho\operatorname{sen}\omega$. E un risultato simile si ha anche quando $p+ip$ e $p-iq$ sono multiple dell'ordine m di multiplicità poichè allora alle somme precedenti $\psi_1 e^{px} \cos qx + \psi_2 e^{px} \operatorname{sen} qx$ si può sostituire l'altra $e^{px} \sum_0^{m-1} \rho_x x^k \cos(\omega_k + qx)$ con $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m-1}$ e $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}$ costanti arbitrarie.

476. — I risultati così completi che abbiamo ottenuto negli ultimi sei paragrafi si riferiscono tutti al caso delle equazioni lineari senza secondo membro *i cui coefficienti sono tutti costanti.*

Tornando ora ad occuparci delle equazioni lineari senza secondo membro in generale, per le quali quindi i coefficienti possano anche non essere più tutti costanti, i risultati ottenuti non saranno più tutti applicabili; però, come già rilevammo in modo generale in fine del § 469, anche quando alcuni coefficienti della equazione data contengono la x la equazione caratteristica in alcuni casi potrà avere ancora una o più radici costanti ed essere queste

(*) Gli integrali del nuovo sistema costituiranno un sistema fondamentale come quelli del primo, perchè se gli uni risultassero legati fra loro da una equazione lineare omogenea lo stesso accadrebbe anche degli altri in quantochè per ogni coppia di radici complesse le somme $gx^k e^{px} \cos qx + hx^k e^{px} \operatorname{sen} qx$ con g e h costanti corrispondono a somme $g_1 x^k e^{(p+iq)x} + h_1 x^k e^{(p-iq)x}$ con g_1 e h_1 pure costanti, e quindi se ci fosse una relazione lineare omogenea fra i nuovi integrali vi sarebbe anche fra i primi.

semplici o multiple, senza poterle avere costanti tutte (*); e allora queste radici costanti $\alpha, \beta, \dots$ daranno luogo a altrettanti integrali particolari linearmente indipendenti della equazione data, perchè coi ragionamenti stessi dei paragrafi precedenti per ciascuna di esse si trova che le esponenziali $e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \dots$ quando le radici siano semplici, e così i prodotti $xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, xe^{\beta x}, x^2 e^{\beta x}, \dots$ nel caso che esse siano multiple soddisfaranno alla equazione data e non saranno legate fra loro da relazioni lineari omogenee.

Essendo però questi integrali $y_1, y_2, \dots, y_r$ in numero minore di n essi non ci potranno condurre all'integrale generale, ma condurranno solo a un integrale particolare $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_r y_r$ che conterrà tante costanti arbitrarie $c_1, c_2, \dots, c_r$ quanti sono gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_r$ che così si conoscono, e quindi non si avrà così l'integrale generale; ma ciò non ostante la conoscenza di questi integrali potrà talvolta tornare utilissima, specialmente per una particolarità che dimostreremo fra breve (al § 478), quella cioè che quando si conoscono alcuni integrali linearmente indipendenti di una equazione lineare omogenea si può abbassare con tutta facilità l'ordine della equazione di tante unità quanti sono gli integrali che si conoscono, l'equazione restando sempre lineare e omogenea; e allora la sua integrazione si riduce a quella di questa che ordinariamente potrà farsi più facilmente.

Così in particolare in forza di questo teorema si potrà dire che quando la equazione caratteristica avrà $n-1$ radici costanti, la integrazione della equazione data si ridurrà a quella di una equazione lineare omogenea e del prim'ordine $y' + Py = 0$ che si troverà con tutta facilità e che s'integra immediatamente; e quindi rimarrà subito integrata anche la equazione data.

477. — Diamo ora alcuni esempî.

1.° Vogliasi l'integrale generale della equazione lineare del secondo ordine $y'' \pm n^2 y = 0$ già studiata al § 430, 1.° (pag. 618), dove n è una costante che supporremo reale.

La equazione caratteristica (10) sarà la $\alpha^2 \pm n^2 = 0$, e nel caso che si abbia il segno superiore per n^2 essa avrà le due radici in e $-in$, mentre nel caso che si abbia il segno inferiore avrà le radici n e $-n$.

Pel caso dunque della equazione $y'' - n^2 y = 0$ l'integrale generale sarà $y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie; e pel caso della equazione $y'' + n^2 y = 0$ l'integrale generale potrà prendersi sotto la forma $y = c_1 e^{inx} + c_2 e^{-inx}$, e per quanto si disse sopra nel § 475 potrà prendersi anche sotto l'altra

(*) Che quando la equazione data (1) non ha i coefficienti tutti costanti non possono essere costanti tutte le radici della sua equazione caratteristica mentre alcune possono esserle, risulta immediatamente dalle formole che esprimono per le radici i rapporti dei varii coefficienti di una equazione al primo.

priva d'immaginarii $y=c_1\cos nx+c_2\operatorname{sen} nx$, e volendo anche sotto la forma $y=\rho\cos(\omega+nx)$ con c_1 e c_2 o ρ e ω costanti arbitrarie reali.

2.° Vogliasi l'integrale della equazione $y'''-y'-6y=0$.

La equazione caratteristica sarà $\alpha^3-\alpha-6=0$ e avrà le tre radici $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1+i\sqrt{2}$, $\alpha_3=-1-i\sqrt{2}$, quindi l'integrale generale sarà $y=c_1e^{2x}+c_2e^{(-1+i\sqrt{2})x}+c_3e^{(-1-i\sqrt{2})x}$ e per quanto si disse nel § 475 potrà anche prendersi sotto la forma $y=c_1e^{2x}+\rho e^{-x}\cos(\omega+\sqrt{2}\,x)$ con c_1, c_2, c_3, ρ e ω costanti arbitrarie reali.

3.° Vogliasi l'integrale della equazione $y^{\text{IV}}-2y''+y=0$.

La equazione caratteristica sarà la seguente $\alpha^4-2\alpha^2+1=0$, e poichè questa può scriversi sotto la forma $(\alpha^2-1)^2=0$ ovvero $(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2=0$, si vede subito che essa ha una radice doppia uguale ad 1 e un'altra pure doppia uguale a -1, e se ne deduce quindi che l'integrale generale della equazione data sarà $y=(c+c_1x)e^x+(c'+c'_1x)e^{-x}$, dove c, c', c_1 e c'_1 sono quantità costanti arbitrarie.

4.° Abbiasi infine la equazione

$$y^{\text{IV}}-(x+3)y'''+3(x+1)y''-(3x+1)y'+xy=0\,, \tag{20}$$

e si cerchi se coi processi precedenti possano aversi alcuni suoi integrali particolari, non potendo ora aversi tutti e quattro perchè la equazione ha i suoi coefficienti variabili.

La sua equazione caratteristica sarà la seguente

$$\alpha^4-(x+3)\alpha^3+3(x+1)\alpha^2-(3x+1)\alpha+x=0\,,$$

per la quale tenendo conto anche delle prime due equazioni derivate di questa rispetto ad α, si trova subito che essa ha una radice multipla del terz'ordine che è l'unità, e la quarta radice sarà x; quindi per quanto si disse nei due paragrafi precedenti, la stessa equazione ammetterà gli integrali particolari e^x, xe^x e x^2e^x, e quindi anche l'altro $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$ con tre costanti arbitrarie c_1, c_2 e c_3.

E così in questo caso per la osservazione fatta in fine del paragrafo precedente la integrazione della nostra equazione (20) si ridurrà, come vedremo fra breve, a quella di una equazione lineare di prim'ordine $y'+\mathrm{P}y=0$ che s'integra immediatamente, e allora si troverà subito il quarto integrale che insieme coi precedenti costituisce un sistema fondamentale, conosciuto il quale si avrà senz'altro l'integrale generale per mezzo della formola (3).

478. — Dimostriamo ora il teorema al quale accennammo in fine del § 476, quello cioè che quando di una equazione lineare omogenea si cono-

scono uno o più integrali particolari linearmente indipendenti il suo ordine si può abbassare di tante unità quanti sono gli integrali conosciuti, e la nuova equazione di ordine inferiore alla integrazione della quale si riduce la equazione data è ancora lineare e omogenea, e si trova con tutta facilità.

La dimostrazione di questo teorema è contenuta in sostanza nelle formole del § 464.

Si supponga infatti di conoscere un integrale y_1 della equazione data (1). Per quanto dicemmo nel detto § 464 ogni altro suo integrale y si potrà scrivere sotto la forma $y=y_1z$, e la determinazione di esso verrà ridotta a quella della funzione z.

Ora dalle formole di quel paragrafo risulta che per questa funzione z si potrà prendere un integrale qualsiasi della equazione (4) i cui coefficienti sono dati dalle (5), e la stessa equazione (4) col porre $z'=u$ si riduce alla (6) che è ancora lineare e omogenea ma dell'ordine $n-1$, e integrata la quale si avrà subito $z=\int u\,dx+c$ essendo c una costante arbitraria; talchè di qui risulta intanto che il teorema è già dimostrato pel caso che si conosca un integrale della equazione data (1).

Se invece, degli integrali di questa equazione (1) se ne conoscono due linearmente distinti y_1 e y_2, allora avendo posto $y=y_1z$ uno dei valori z_1 di z che rendono il prodotto y_1z un integrale della (1) sarà $z_1=\frac{y_2}{y_1}$, e di questo valore z_1 si conoscerà anche la sua derivata $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ che sarà diversa da zero perchè z_1 non sarà costante, e quindi si conoscerà uno dei valori u_1 di u che soddisfano la equazione (6), cioè si conoscerà un suo integrale.

Applicando dunque anche a questa equazione il processo precedente col porre $u=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'v$, si abbasserà di una unità l'ordine della equazione (6) e quindi la integrazione della equazione data (1) si ridurrà a quella di un'altra ancora lineare ed omogenea, ma di un ordine inferiore di due unità.

Se poi si conosceranno tre integrali linearmente indipendenti y_1, y_2 e y_3 della (1), allora si avranno due valori $\frac{y_2}{y_1}$ e $\frac{y_3}{y_1}$ per z che renderanno il prodotto y_1z integrale della (1), e saranno tali che fra essi non esisterà alcuna relazione della forma $k_1+k_2\frac{y_2}{y_1}+k_3\frac{y_3}{y_1}=0$ con k_1, k_2, k_3 quantità costanti non tutte uguali a zero; e quindi si verranno a conoscere due integrali linearmente indipendenti $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ e $\left(\frac{y_3}{y_1}\right)'$ della (6), e coll'applicare a questa il processo precedente si passerà ad una equazione che sarà di un ordine inferiore di due unità rispetto a quello della (6) e quindi inferiore di tre unità rispetto a quello della (1); e così continuando si giunge a dire che quando si conoscono i integrali linearmente indipendenti della (1) il suo ordine può sempre abbassarsi di i unità senza che la equazione finale alla quale si riduce la integrazione della equazione data cessi di essere lineare e omogenea; e il processo per giungere a questa equazione non presenta alcuna difficoltà.

S'intende poi che nelle operazioni successive che devono farsi per giungere alla equazione finale di grado più basso può darsi che s'incontrino equazioni lineari per le quali l'ordine può abbassarsi anche più di una unità alla volta, e allora il processo si ridurrà più semplice. Questo accade ad es. quando nella equazione (4) in z o nelle analoghe che successivamente si trovano oltre a mancare il termine che contiene la funzione z mancano anche quelli che contengono alcune delle prime derivate $z', z'', z''', \ldots$ (*).

E s'intende pure, come dicemmo in fine del § 476, che quando della equazione lineare omogenea data (1) di ordine n saremo arrivati a conoscere $n-1$ integrali, la sua integrazione col processo precedente si ridurrà a quella di una equazione del prim'ordine $y' + \mathrm{P}y = 0$ che s'integra immediatamente, e quindi si effettuerà completamente anche la integrazione della equazione data.

479. — Per mostrare la utilità del teorema dimostrato daremo ora i due esempii seguenti.

1.° Si abbia da integrare la equazione del quart'ordine

$$(21)\qquad y^{\mathrm{IV}} - (3+2x)y''' + (2+6x+x^2)y'' - (4x+3x^2)y' + 2x^2 y = 0.$$

La sua equazione caratteristica sarà la seguente

$$\alpha^4 - (3+2x)\alpha^3 + (2+6x+x^2)\alpha^2 - (4x+3x^2)\alpha + 2x^2 = 0,$$

che ammette le due radici costanti $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ e la radice doppia variabile $\alpha = x$; quindi la nostra equazione avrà i due integrali particolari linearmente indipendenti $y_1 = e^x, y_1 = e^{2x}$, e col processo precedente la sua integrazione completa si ridurrà a quello di una equazione del second'ordine pure lineare ed omogenea.

(*) Questo in particolare avverrà sempre, come risulta dalle formole del § 472, quando tutti o alcuni degli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_i$ che si conoscono provengono dall'ammettere la equazione caratteristica una o più radici costanti ad un certo grado di multiplicità.

Per applicare il detto processo porremo $y = e^x z$, e quindi calcolando y', y'', y''' e y^{IV} come nel § 464, o mediante le formole del § 472, giungeremo subito alla equazione

$$z^{\mathrm{IV}} + (1-2x)z''' + (-1+x^2)z'' + (-1+2x-x^2)z' = 0,$$

che corrisponde alla (5), e posto $z' = u$ avremo l'altra di terz'ordine in u

$$u''' + (1-2x)u'' + (-1+x^2)u' + (-1+2x-x^2)u = 0;$$

che corrisponde alla (6) e che per essere $\frac{y_2}{y_1}$ o e^x uno dei valori di z che soddisfano alla precedente in z, ammetterà l'integrale particolare $u_1 = e^x$.

Ponendo dunque $u = e^x v$ e calcolando u', u'' e u''' e poi facendo $v' = t$ giungeremo subito alla equazione del second'ordine in t

$$(22)\qquad t'' + 2(2-x)t' + (2-x)^2 t = 0,$$

e allora se riusciremo a integrare questa equazione, indicando con t il suo integrale che conterrà due costanti arbitrarie avremo $v = \int t\,dx + c_2$ e quindi $u = e^x \int t\,dx + c_2 e^x$, $z = \int e^x dx \int t\,dx + c_2 e^x + c_1$ e così infine si avrà $y = e^x \int e^x dx \int t\,dx + c_2 e^{2x} + c_1 e^x$ per l'integrale della equazione data che conterrà quattro costanti arbitrarie in quanto che due di queste costanti verranno come abbiamo detto a figurare nell'integrale t della equazione (22) e due sono le c_1 e c_2.

La equazione (22), essendo del second'ordine, col procedimento del § 459, cioè col porre $t = e^{\int w\,dx}$ e prendere w come nuova funzione incognita, si riduce subito alla equazione del prim'ordine

$$w' + w^2 + 2(2-x)w + (2-x)^2 = 0$$

che è una equazione di Riccati e ad essa potrebbero applicarsi i processi dei §§ 375 e seg. (pag. 544 e seg.).

Però anche senza ricorrere alle formole che allora si dettero, osservando che può scriversi sotto la forma

$$w' + \{w + (2-x)\}^2 = 0,$$

basterà porre $w + 2 - x = w_1$ per ridurla all'altra $w_1' + 1 + w_1^2 = 0$ che è subito integrabile perchè si riduce alla forma $\frac{dw_1}{1+w_1^2} + dx = 0$, e ci dà $\operatorname{arc\,tg} w_1 + x = \mathrm{K}$

ovvero $w_1 = \operatorname{tang}(K - x)$ con K costante arbitraria, e quindi essendo

$$t = e^{\int w\,dx} = e^{\int \{w_1 + (x-2)\}\,dx} = e^{\frac{(x-2)^2}{2}} e^{\int \operatorname{tang}(K-x)\,dx} = K_1 e^{\frac{(x-2)^2}{2}} \cos(K - x),$$

con K_1 nuova costante arbitraria, potremo scrivere

$$t = c_3 e^{\frac{(x-2)^2}{2}} \cos x + c_4 e^{\frac{(x-2)^2}{2}} \operatorname{sen} x,$$

e avremo quindi infine per l'integrale della equazione data (21)

$$(23)\quad y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^x \int e^x dx \int e^{\frac{(x-2)^2}{2}} \cos x\,dx + c_4 e^x \int e^x dx \int e^{\frac{(x-2)^2}{2}} \operatorname{sen} x\,dx,$$

essendo c_1, c_2, c_3 e c_4 quattro costanti arbitrarie; e così per quanto complicata abbiamo potuto integrare completamente la equazione (21).

2.° Si voglia integrare la equazione (20) del § 477, 4.° cioè

$$y^{\text{IV}} - (x+3)\,y''' + 3(x+1)\,y'' - (3x+1)\,y' + xy = 0$$

della quale si conoscono i tre integrali particolari $e^x, xe^x, x^2 e^x$.

Applicando il processo del paragrafo precedente col porre $y = e^x z$, si trova subito per la equazione in z la seguente $z^{\text{IV}} + (1-x)\,z''' = 0$ nella quale oltre al termine in z mancano anche quelli in z' e z'' e si riduce quindi subito al prim'ordine col porre $z''' = t$.

Avendosi allora $t' + (1-x)\,t = 0$, si trova immediatamente $t = c_4 e^{\frac{(1-x)^2}{2}}$ con c_4 costante arbitraria; e questo ci porta subito a dire che l'integrale generale della nostra equazione è dato dalla formola

$$y = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^x \int dx \int dx \int e^{\frac{(1-x)^2}{2}} dx,$$

essendo c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie.

480. — Prima di passare allo studio delle equazioni lineari complete facciamo anche le considerazioni seguenti relative sempre a quelle omogenee.

Avendosi ancora la equazione lineare omogenea (1), osserviamo che se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ costituiscono un suo sistema fondamentale d'integrali, avremo le equazioni

$$\begin{array}{l}
a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y'_1 + a_n\, y_1 = -\, a_0 y_1^{(n)}, \\
a_1 y_2^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y'_2 + a_n\, y_2 = -\, a_0 y_2^{(n)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 y_n^{(n-1)} + a_2 y_n^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y'_n + a_n\, y_n = -\, a_0 y_n^{(n)},
\end{array}$$

il cui determinante scritto sotto la forma

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

è il solito determinante D nel quale sono scambiate le linee colle colonne e viceversa, ed è diverso da zero; e quindi avremo le formole seguenti

$$(25)\qquad \frac{a_1}{a_0} = -\frac{D_1}{D},\ \frac{a_2}{a_0} = -\frac{D_2}{D},\ldots,\ \frac{a_s}{a_0} = -\frac{D_s}{D},\ldots,\ \frac{a_n}{a_0} = -\frac{D_n}{D},$$

nelle quali in generale D_s indica ciò che diviene D, scritto come spesso si fa sotto la forma precedente (24), quando agli elementi $y_i^{(n-s)}$ della colonna $(n-s+1)^a$ si sostituiscono le derivate n^e $y_i^{(n)}$ degli integrali corrispondenti y_i; e queste formole dànno i rapporti dei varii coefficienti della equazione data al coefficiente del primo termine espressi razionalmente per gli integrali di un sistema fondamentale, e di esse la prima coll'osservare che $D_1 = D'$ riporta subito alla formola di Liouville $D = D_0 e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ data al § 468.

481. — Esse poi ci mostrano che dato un sistema qualsiasi di funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearmente distinte *esiste sempre una e una sola equazione differenziale di ordine n che le ammette per integrali fondamentali,* e questa sarà la equazione (1) nella quale i rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_0}$ risulteranno perfettamente determinati dalle formole (25), e quindi potrà anche porsi sotto la forma del determinante di ordine $n+1$

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n-1)} & y^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0;$$

come del resto risulta subito anche dall'osservare che questa equazione differenziale dell'ordine n è lineare e omogenea e ammette evidentemente il sistema fondamentale d'integrali $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

482. – Di qui si ha dunque un modo semplice per costruire una equazione lineare omogenea che ha un dato sistema fondamentale d'integrali.

Questa equazione poi potrà costruirsi facilmente anche in base alle considerazioni seguenti che sono semplicissime.

Si osservi in generale che quando si ha una equazione differenziale *qualsiasi* $\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ dell'ordine $n-1$, se si vorrà costruirne un'altra dell'ordine n che oltre agli integrali di questa ne ammetta un altro distinto da questi y_n, basterà prendere la equazione dell'ordine n

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}{\varphi(x, y_n, y'_n, y''_n, \dots, y_n^{(n-1)})}\right\} = 0,$$

perchè questa sarà evidentemente soddisfatta quando vi si ponga $y = y_n$, come sarà soddisfatta da tutte le funzioni y che sono integrali della equazione data $\varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$.

Si dedurrà subito da ciò che quando si abbia una equazione lineare, omogenea d'ordine $n-1$

$$\psi(y) = b_0 y^{(n-1)} + b_1 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-2} y' + b_{n-1} y = 0$$

che ammette un sistema fondamentale d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, se si vorrà costruire una equazione $\varphi(y) = 0$ pure lineare e omogenea dell'ordine n, che oltre a questi ammetta anche un altro integrale y_n che con quelli sia linearmente indipendente, basterà prendere per la equazione cercata la seguente $\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(y)}{\psi(y_n)}\right) = 0$; e quindi una equazione lineare omogenea di ordine n che debba avere un dato sistema fondamentale d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ potrà ottenersi anche costruendo successivamente le funzioni

$$\psi_1(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right), \quad \psi_2(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_1(y)}{\psi_1(y_2)}\right\}, \quad \psi_3(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_2(y)}{\psi_2(y_3)}\right\}, \dots, \quad \psi_{n-1}(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_{n-2}(y)}{\psi_{n-2}(y_{n-1})}\right\},$$

$$\psi_n(y) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_{n-1}(y)}{\psi_{n-1}(y_n)}\right\},$$

e la equazione cercata sarà la $\psi_n(y) = 0$; e evidentemente prima di fare le varie derivazioni potremo anche moltiplicare le funzioni successive $\psi_1(y), \psi_2(y) \dots$, per funzioni della x scelte come meglio vorremo perchè le formole stesse non rimarranno alterate, e in particolare quindi potremo ogni volta tralasciare i denominatori che verranno successivamente ad aversi.

Così ad es. volendo la equazione lineare omogenea di terz'ordine che abbia per integrali fondamentali x, x^2 e $\operatorname{sen} x$ costruiremo successivamente

le funzioni

$$\psi_1 = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2},$$

$$\psi_2 = \left(\frac{y'x - y}{x^2}\right)' = \frac{y''x^3 - 2x^2y' + 2xy}{x^4}$$

$$\psi_3 = \left(\frac{y''x^2 - 2xy' + 2y}{(2 - x^2)\operatorname{sen} x - 2x\cos x}\right)',$$

e così eseguendo la derivazione in ψ_3 e facendo le riduzioni, troveremo per la equazione cercata la seguente

$$\{(2 - x^2)\operatorname{sen} x - 2x\cos x\} y''' + x^2 \cos x\, y'' - 2x \cos x\, y' + 2\cos x\, y = 0.$$

Equazioni lineari complete.

483. — Torneremo più oltre a fare studii anche sulle equazioni lineari omogenee; ora passando a fare studii sulle equazioni lineari complete, troviamo opportuno di esporre un processo mediante il quale può aversi con sole quadrature l'integrale di una equazione lineare completa quando è stata integrata la equazione corrispondente omogenea.

Sia data perciò la equazione lineare completa

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = X, \tag{1}$$

dove le $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ e X sono costanti o funzioni della x finite continue e derivabili almeno fino a quell'ordine pel quale respettivamente ococcorrerà di considerare le loro derivate in un dato intervallo nel quale si supporrà anche che a_0 sia diverso da zero; e sia

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \tag{2}$$

dove $C_1, C_2, \dots, C_n$ sono costanti arbitrarie, l'integrale generale della equazione corrispondente omogenea

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3}$$

essendo $y_1, y_2, \dots, y_n$ un sistema fondamentale d'integrali di questa equazione.

È chiaro che ogni integrale della equazione completa (1) potrà esso pure rappresentarsi colla formola (2) quando però in esso, invece di supporle costanti, le $C_1, C_2, \dots, C_n$ si suppongano funzioni della variabile x scelte convenientemente; perchè se $\bar{y}$ sarà un integrale qualsiasi della (1) potremo ad es. prendere come vorremo le prime $n-1$ delle quantità $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ e determinare poi l'altra colla formola $C_n = \frac{\bar{y} - C_1 y_1 - C_2 y_2 - \dots - C_{n-1} y_{n-1}}{y_n}$, o potremo fissare a piacere $n-1$ condizioni alle quali devono soddisfare le $C_1, C_2, \dots, C_n$ come funzioni della x, determinando poi l'altra condizione in modo che la espressione $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ soddisfi alla equazione (1).

Tenendo conto dunque di questa osservazione noi fisseremo che le $C_1, C_2, \dots, C_n$ debbano intanto soddisfare a $n-1$ condizioni tali che per esse non solo il valore che si avrà per l'integrale y della (1), ma anche i valori che si avranno per le sue prime $n-1$ derivate conservino quella stessa forma che hanno quando si tratta della equazione omogenea (3), cioè porremo per condizione che insieme alla (2) si abbiano ancora quelle formole stesse

$$(4)\qquad \begin{cases} y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n\,, \\ y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

che si hanno quando le $C_1, C_2, \dots, C_n$ sono quantità costanti, salvo a determinare poi convenientemente l'altra condizione alla quale le stesse $C_1, C_2, \dots, C_n$, considerate come funzioni della x, dovranno soddisfare perchè il valore (2) di y possa rendere soddisfatta la (1).

Ora poichè dalla (2), quando in essa le $C_1, C_2, \dots, C_n$ invece che come costanti si considerano come funzioni della x, derivando si ha la formola seguente

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n\,,$$

si vede subito che onde y' risulti ancora dato dalla prima delle (4) bisognerà intanto che le derivate $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ delle $C_1, C_2, \dots, C_n$ soddisfino alla equazione

$$(5)\qquad C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0\,.$$

Ora ammesso che questo sia, e quindi che si abbia la prima delle (4), derivando questa si otterrà l'altra

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots + C_n y''_n + C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n\,,$$

e si vede quindi che onde anche y'' soddisfi alla condizione posta cioè di risultare data dalla seconda delle (4), bisognerà che le derivate $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ soddisfino anche alla equazione

$$(6)\qquad C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0\,.$$

Così continuando si troverà successivamente che onde tutte le derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ siano date dalle formole (4), bisognerà che le $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ soddisfino anche alle equazioni

$$(7)\qquad \begin{cases} C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + \dots + C'_n y''_n = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0\,; \end{cases}$$

e ora poichè l'ultima delle (4), che verrà a supporsi così già soddisfatta, con una nuova derivazione ci darà l'altra

$$(8)\qquad y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)},$$

ne segue che, sotto le condizioni poste, per l'integrale y della equazione completa (1) e per le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ avremo il sistema di n equazioni formate dalla (2) dalle (4) e da quest'ultima (8); e quindi moltiplicando la prima di queste equazioni cioè la (2) per a_n, e le successive, cioè le (4) e la (8), respettivamente per $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ e a_0 e poi sommandole si vedrà che onde y possa essere integrale della equazione completa (1) bisognerà e basterà che le $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ soddisfino anche alla equazione

$$(9)\qquad C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = \frac{X}{a_0}\,.$$

Riunendo dunque le varie equazioni (5), (6), (7) e (9) che abbiamo trovato per le $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$, si vede che per esse avremo il sistema di n equazioni di primo grado

$$(10)\qquad \begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0\,, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0\,, \\ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + \dots + C'_n y''_n = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0\,, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = \frac{X}{a_0}\,, \end{cases}$$

il determinante delle quali è appunto il determinante D del sistema fondamentale d'integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ della equazione omogenea (3) dai quali siamo partiti, ed è diverso da zero in tutto l'intervallo che si considera (§ 468); e quindi per una qualunque C'_s delle stesse derivate delle $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots, C_n$ dovremo avere $C'_s = \frac{X D_{n,s}}{a_0 D}$ essendo $D_{n,s}$ l'elemento reciproco di quello $y_s^{(n-1)}$

dell'ultima linea e della colonna s^a del determinante D; e si conclude perciò che l'integrale y della equazione completa (1) si avrà ancora sotto la forma (2) quando in questa le $C_1, C_2, \dots, C_s, \dots, C_n$ invece di essere costanti si intendano determinate dalle formole

$$C_1 = \int \frac{X\,D_{n,1}}{a_0 D}\,dx + c_1\,,\quad C_2 = \int \frac{X\,D_{n,2}}{a_0 D}\,dx + c_2\,, \dots, C_s = \int \frac{X\,D_{n,s}}{a_0 D}\,dx + c_s\,, \dots,$$

$$C_n = \int \frac{X\,D_{n,n}}{a_0 D}\,dx + c_n\,,$$

essendo $c_1, c_2, \dots, c_n$ costanti arbitrarie.

Ponendo dunque per abbreviare

$$(11)\quad Y = y_1 \int \frac{X\,D_{n,1}}{a_0 D}\,dx + y_2 \int \frac{X\,D_{n,2}}{a_0 D}\,dx + \dots + y_n \int \frac{X\,D_{n,n}}{a_0 D}\,dx = \sum_1^n y_s \int \frac{X\,D_{n,s}}{a_0 D}\,dx,$$

si può ora affermare che l'integrale y della equazione completa (1) è dato dalla formola

$$(12)\qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + Y\,,$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono costanti arbitrarie, $y_1, y_2, \dots, y_n$ sono un sistema fondamentale d'integrali della equazione omogenea (3) che viene dalla (1) sopprimendovi il secondo membro, e Y è dato dalla formola (11) e viene ad essere l'integrale particolare della equazione completa (1) che corrisponde a $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, come $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ è l'integrale generale della equazione omogenea corrispondente.

Si può poi osservare che gli integrali che figurano nelle $C_1, C_2, \dots, C_n$ o nella (11) possono intendersi limitati tutti fra x_0 e x perchè questo non può avere altro effetto che quello di mutare il valore delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$. E fatto questo, se negli stessi integrali si muta la variabile d'integrazione x in z, potremo portare nella (11) sotto gli integrali i fattori $y_1, y_2, \dots, y_n$ che ora li moltiplicano; e allora indicando con $D_{z,x}$ ciò che diviene il determinante D quando negli elementi delle sue prime $n-1$ linee si fà il cambiamento della variabile x in z, e in quelli dell'ultima linea alle derivate $(n-1)^e$ di $y_1, y_2, \dots, y_n$ si sostituiscono queste quantità stesse $y_1, y_2, \dots, y_n$ espresse ancora per x, avremo la formola

$$(13)\qquad Y = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{X}{a_0 D}\right)_z D_{z,x}\,dz\,,$$

nella quale l'indice z alla parentesi stà ad indicare che nel rapporto $\dfrac{X}{a_0 D}$

al posto di x è stato sostituito z; e così l'integrale particolare Y viene ad essere dato con una sola integrazione.

484. — Quando dunque sia conosciuto un sistema fondamentale d'integrali della equazione incompleta (3), la ricerca dell'integrale generale di quella completa (1) si riduce con questo processo a quella del suo integrale particolare Y che si determinerà con n quadrature per mezzo della (11) o anche con una sola quadratura per mezzo della (13); e questo processo che è dovuto a Lagrange (come a lui pure sono dovuti quasi tutti gli studi precedenti sulle equazioni lineari) viene detto della *variazione delle costanti arbitrarie,* perchè appunto in esso si fanno variare le costanti che compariscono nell'integrale generale della equazione incompleta corrispondente (3) in modo che questo integrale venga ad essere quello della equazione completa (1).

Da questo processo poi si vede anche che come per le equazioni omogenee così per le equazioni complete non vi sono soluzioni singolari.

485. — Fermiamoci ora come caso particolare sulle equazioni lineari complete (1) nelle quali i coefficienti del primo membro $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sono tutti costanti, e la equazione caratteristica

$$\varphi(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

relativa alla equazione omogenea corrispondente ha le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tutte diseguali.

Per integrali fondamentali di questa equazione omogenea potremo prendere le n esponenziali $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$, e quindi per le (11) e (12) l'integrale generale della nostra equazione completa (1) sarà dato dalla formola

$$(14)\qquad y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + c_n e^{\alpha_n x} + Y\,,$$

dove Y è dato dall'altra

$$(15)\quad Y = e^{\alpha_1 x} \int \frac{X\,D_{n,1}}{a_0 D}\,dx + e^{\alpha_2 x} \int \frac{X\,D_{n,2}}{a_0 D}\,dx + \dots + e^{\alpha_n x} \int \frac{X\,D_{n,n}}{a_0 D}\,dx =$$

$$= \sum_1^n e^{\alpha_s x} \int \frac{X\,D_{n,s}}{a_0 D}\,dx\,,$$

avendosi ora come già vedemmo al § 470

$$D = e^{-\frac{a_1}{a_0}x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{-\frac{a_1}{a_0}x} \prod_{r,s} (\alpha_r - \alpha_s)\,,$$

dove s'intende che in $\Pi_{r,s}(\alpha_r-\alpha_s)$ l'indice r sia sempre maggiore dell'indice s; e sarà anche

$$D_{n,t}=(-1)^{n+t}\,e^{-\left(\frac{a_1}{a_0}+\alpha_t\right)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_{t-1} & \alpha_{t+1} & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots \alpha_{t-1}^2 & \alpha_{t+1}^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \dots \alpha_{t-1}^{n-2} & \alpha_{t+1}^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}=(-1)^{n+t}e^{-\left(\frac{a_1}{a_0}+\alpha_t\right)x}\,\Pi_t(\alpha_r-\alpha_s)$$

dove il prodotto $\Pi_t(\alpha_r-\alpha_s)$ contiene tutti i fattori di $\prod\limits_{r,s}(\alpha_r-\alpha_s)$ all'infuori di quelli nei quali comparisce α_t, cioè corrisponde a tutto il prodotto $\prod\limits_{r,s}(\alpha_r-\alpha_s)$ meno il fattore $(\alpha_t-\alpha_1)(\alpha_t-\alpha_2)\dots(\alpha_t-\alpha_{t-1})(\alpha_{t+1}-\alpha_t)\dots(\alpha_n-\alpha_t)$ che può anche scriversi sotto la forma

$$(16)\qquad (-1)^{n-t}(\alpha_t-\alpha_1)(\alpha_t-\alpha_2)\dots(\alpha_t-\alpha_{t-1})(\alpha_t-\alpha_{t+1})\dots(\alpha_t-\alpha_n)\,.$$

Ma avendosi

$$\varphi(\alpha)=a_0(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\dots(\alpha-\alpha_{t-1})(\alpha-\alpha_t)(\alpha-\alpha_{t+1})\dots(\alpha-\alpha_n)\,,$$

questo prodotto (16) evidentemente non è altro che $(-1)^{n-t}\dfrac{1}{a_0}\left(\dfrac{\varphi(\alpha)}{\alpha-\alpha_t}\right)_{\alpha=\alpha_t}$ o $(-1)^{n-t}\dfrac{\varphi'(\alpha_t)}{a_0}$, quindi il rapporto $\dfrac{D_{n,t}}{a_0\,D}$ che figura nella (15) sotto gli integrali non sarà altro che $\dfrac{e^{-\alpha_t x}}{\varphi'(\alpha_t)}$, e conseguentemente avremo ora pel valore di Y

$$(17)\quad Y=\frac{e^{\alpha_1 x}}{\varphi'(\alpha_1)}\int X\,e^{-\alpha_1 x}dx+\frac{e^{\alpha_2 x}}{\varphi'(\alpha_2)}\int X\,e^{-\alpha_2 x}dx+\dots+\frac{e^{\alpha_n x}}{\varphi'(\alpha_n)}\int X e^{-\alpha_n x}dx=\sum_1^n\frac{e^{\alpha_s x}}{\varphi'(\alpha_s)}\int X\,e^{-\alpha_s x}dx,$$

e l'integrale generale y della nostra equazione (1), quando i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sono tutti costanti e la equazione caratteristica della equazione omogenea corrispondente ha tutte le radici diseguali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sarà dato dalla formola (14) dove Y ha il valore (17).

In particolare quindi per la equazione del second'ordine $y''-n^2y=X$ dove n è una quantità costante l'integrale generale sarà dato dalla formola

$$y=c_1e^{nx}+c_2e^{-nx}+\frac{e^{nx}}{2n}\int X\,e^{-nx}dx-\frac{e^{-nx}}{2n}\int X\,e^{nx}dx\,.$$

486. — Per la integrazione della equazione completa (1) di ordine n, oltre al processo di Lagrange che abbiamo dato che la riduce a quella della equa-

zione omogenea corrispondente pure di ordine n, se ne può dare un altro col quale la integrazione della stessa equazione completa viene ridotta a quella di una equazione ancora omogenea ma dell'ordine $n+1$ senza che occorrano più allora le quadrature che si richiedono per determinare y sotto la forma (11) o sotto l'altra (13).

S'indichi perciò con $\Phi(y)$ il primo membro della equazione completa data (1), e si divida questa equazione per X.

Per gli integrali y di questa equazione avremo $\dfrac{\Phi(y)}{X}=1$, e quindi anche

$$(18)\quad \left(\frac{\Phi(y)}{X}\right)'=\frac{a_0}{X}y^{(n+1)}+\left\{\left(\frac{a_0}{X}\right)'+\frac{a_1}{X}\right\}y^{(n)}+\left\{\left(\frac{a_1}{X}\right)'+\frac{a_2}{X}\right\}y^{(n-1)}+\dots+\left\{\left(\frac{a_{n-1}}{X}\right)'+\frac{a_n}{X}\right\}y'+\left(\frac{a_n}{X}\right)'y=0\,,$$

cioè gli integrali y della equazione completa (1) saranno pure integrali di questa equazione omogenea di ordine $n+1$, che può anche scriversi sotto la forma

$$(19)\quad a_0y^{(n+1)}+\left\{a'_0+a_1-a_0\frac{X'}{X}\right\}y^{(n)}+\left\{a'_1+a_2-a_1\frac{X'}{X}\right\}y^{(n-1)}+\dots+\left\{a'_{n-1}+a_n-a_{n-1}\frac{X'}{X}\right\}y'+$$
$$+\left\{a'_n-a_n\frac{X'}{X}\right\}y=0\,.$$

Ora questa equazione ammetterà certamente anche tutti gli integrali della equazione omogenea, di ordine n, $\Phi(y)=0$; però se $\bar y_1, \bar y_2, \dots, \bar y_{n+1}$ saranno un sistema fondamentale di integrali della equazione, di ordine $n+1$, (18) o (19) che abbiamo costruito, alcuni di questi integrali potranno appartenere alla equazione omogenea $\Phi(y)=0$ ma uno almeno di essi dovrà non appartenerle, perchè se tutti fossero integrali anche di questa equazione che è di ordine n, fra essi verrebbe necessariamente a sussistere una relazione lineare e quindi non costituirebbero un sistema fondamentale d'integrali della (18) o (19); dunque uno almeno dei detti integrali ad es: $\bar y_k$ dovrà darci $\dfrac{\Phi(\bar y_k)}{X}=\gamma_k$ con γ_k costante diversa da zero, e allora $\dfrac{\bar y_k}{\gamma_k}$ ci darà $\dfrac{\Phi\left(\frac{\bar y_k}{\gamma_k}\right)}{X}=1$, e $\dfrac{\bar y_k}{\gamma_k}$ sarà un integrale della equazione completa (1).

Ne segue che se fra gli integrali $\bar y_1, \bar y_2, \dots, \bar y_{n+1}$ della equazione (18) o (19), $\bar y_1, \bar y_2, \dots, \bar y_k$ con $k\geq 1$ saranno quelli che non sono al tempo stesso integrali della equazione omogenea $\Phi(y)=0$, e daranno

$$\frac{\Phi(\bar y_1)}{X}=\gamma_1\,,\quad \frac{\Phi(\bar y_2)}{X}=\gamma_2\,,\ \dots,\ \frac{\Phi(\bar y_k)}{X}=\gamma_k\,,$$

con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ costanti determinate diverse da zero, mentre i rimanenti integrali $\bar{y}_{k+1}, \bar{y}_{k+2}, \ldots, \bar{y}_{n+1}$ della (18) o (19) saranno anche integrali della equazione omogenea $\Phi(y) = 0$, allora le n funzioni

$$\frac{\bar{y}_2}{\gamma_2} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}, \; \frac{\bar{y}_3}{\gamma_3} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{\bar{y}_k}{\gamma_k} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}, \; \bar{y}_{k+1}, \bar{y}_{k+2}, \ldots, \bar{y}_{n+1}$$

saranno tutti integrali tanto della equazione (18) o (19) quanto della equazione omogenea $\Phi(y) = 0$, e per questa costituiranno un sistema fondamentale, perchè se non fossero linearmente distinti non lo sarebbero neppure $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n+1}$: quindi l'integrale generale della nostra equazione completa (1) sarà dato dalla formola

$$y = c_1\left(\frac{\bar{y}_2}{\gamma_2} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}\right) + c_2\left(\frac{\bar{y}_3}{\gamma_3} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}\right) + \ldots + c_{k-1}\left(\frac{\bar{y}_k}{\gamma_k} - \frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}\right) + c_k\,\bar{y}_{k+1} + c_{k+1}\,\bar{y}_{k+2} + \ldots + c_n\,\bar{y}_{n+1} + \bar{Y},$$

essendo $\bar{Y}$ uno degli integrali particolari $\frac{\bar{y}_1}{\gamma_1}, \frac{\bar{y}_2}{\gamma_2}, \ldots, \frac{\bar{y}_k}{\gamma_k}$ della stessa (1) che avremo trovati, e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ essendo costanti arbitrarie.

487. — E si può notare che il processo ora tenuto ci permette anche di dire che essendo data una equazione lineare completa (1) d'ordine n si potrà sempre costruire una equazione omogenea d'ordine $n+1$ che ammette tutti gli integrali della equazione completa data, e questa equazione omogenea sarà la (19), la quale ammetterà anche tutti gli integrali della equazione incompleta $\Phi(y) = 0$ corrispondente alla equazione data (1).

488. — Le considerazioni che ora abbiamo fatto ne suggeriscono altre che non sono prive di una certa importanza.

Si supponga di avere una equazione lineare omogenea dell'ordine n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{20}$$

che ammette tutti gli integrali di un'altra equazione pure lineare e omogenea ma dell'ordine $n-1$

$$b_0 y^{(n-1)} + b_1 y^{(n-2)} + b_2 y^{(n-3)} + \ldots + b_{n-2} y' + b_{n-1} y = 0\,. \tag{21}$$

e con questa ultima si formi una equazione completa

$$b_0 y^{(n-1)} + b_1 y^{(n-2)} + b_2 y^{(n-3)} + \ldots + b_{n-2} y' + b_{n-1} y = X\,; \tag{22}$$

e proponiamoci di determinare X in modo che questa equazione completa (22) abbia un integrale y_n che insieme a quelli $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ che sono gli integrali di un sistema fondamentale della (21) e quindi al tempo stesso sono

integrali della equazione (20) formi un sistema fondamentale $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ d'integrali della stessa equazione (20).

Si osservi perciò che indicando con $\Phi_{n-1}(y)$ il primo membro delle equazioni (21) o (22), la (22) darà luogo all'altra $\left(\frac{\Phi_{n-1}(y)}{X}\right)' = 0$, ovvero

$$b_0 y^{(n)} + \left\{b'_0 + b_1 - b_0 \frac{X'}{X}\right\} y^{(n-1)} + \left\{b'_1 + b_2 - b_1 \frac{X'}{X}\right\} y^{(n-2)} + \ldots + \left\{b'_{n-2} + b_{n-1} - b_{n-2}\frac{X'}{X}\right\} y' + \left\{b'_{n-1} - b_{n-1}\frac{X'}{X}\right\} y = 0 \tag{23}$$

analoga alla (19), e questa equazione, oltre ad ammettere gli integrali $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ della (21) che per dato appartengono anche alla (20), per quanto già osservammo al § 482 ammetterà anche l'altro integrale y_n di questa equazione quando si prenda $X = \Phi_{n-1}(y_n)$; e allora essendo $\frac{\Phi_{n-1}(y)}{X} = 1$ o $\Phi_{n-1}(y) = X$ per $y = y_n$, y_n sarà un integrale della equazione completa (22) quando in questa X abbia il valore ora indicato $\Phi_{n-1}(y_n)$, che per ora però è sconosciuto se non è conosciuto y_n.

Ora per determinare questo valore X, osserviamo che quando sia trovato e sia posto nella (23), siccome allora questa equazione (23) verrà ad avere uno stesso sistema fondamentale d'integrali della equazione data (20), essa, per quanto dicemmo al § 481, non potrà differire da questa altro che per un fattore costante o funzione della sola x, e quindi avremo la equazione

$$\frac{b'_0}{b_0} + \frac{b_1}{b_0} - \frac{X'}{X} = \frac{a_1}{a_0}\ (*), \tag{24}$$

(*) Insieme alla (24) dal confronto della (20) colla (23) si hanno anche le altre $n-1$ equazioni

$$\frac{b'_1 + b_2}{b_0} - \frac{b_1}{b_0}\frac{X'}{X} = \frac{a_2}{a_0}, \; \frac{b'_2 + b_3}{b_0} - \frac{b_2}{b_0}\frac{X'}{X} = \frac{a_3}{a_0}, \ldots, \frac{b'_{n-2} + b_{n-1}}{b_0} - \frac{b_{n-1}}{b_0}\frac{X'}{X} = \frac{a_{n-1}}{a_0}, \; \frac{b'_{n-1}}{b_0} - \frac{b_{n-1}}{b_0}\frac{X'}{X} = \frac{a_n}{a_0}, \tag{α}$$

e queste per le considerazioni fatte devono venire soddisfatte di per sè dal valore dato sopra per X.

E difatti se si scrivono i due sistemi, di $n-1$ equazioni ciascuno, che esprimono che $y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}$ sono integrali della (20) e della (21) e si scrivono anche quelle che vengono con una derivazione delle equazioni del secondo sistema, basta ricavare da questi tre sistemi di equazioni i valori dei rapporti $\frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}, \frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{b_0}$ e $\frac{b'_1 + b_2}{b_0}, \frac{b'_2 + b_3}{b_0}, \ldots, \frac{b'_{n-2} + b_{n-1}}{b_0}, \frac{b'_{n-1}}{b_0}$ per vedere subito che le equazioni (α) scritte sopra riescono tutte soddisfatte dai valori che si trovano per questi rapporti e da quello che si ha per $\frac{X'}{X}$ dalla (24).

dalla quale si vede subito che dovrà essere

$$X = kb_0\, e^{\int \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}\right) dx}, \tag{25}$$

essendo k una costante arbitraria; quindi noi possiamo dire ora evidentemente che y_n sarà integrale della equazione completa

$$b_0 y^{(n-1)} + b_1 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-2} y' + b_{n-1} y = kb_0\, e^{\int \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0}\right) dx}, \tag{26}$$

e potrà quindi dedursi con sole quadrature dagli integrali che si conoscono $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ della (21), o della (20) stessa, col processo di Lagrange, cioè potrà prendersi per esso a causa della (11)

$$y_n = \sum_1^{n-1} y_s \int \frac{X\, \overline{D}_{n-1,s}}{b_0 \overline{D}}\, dx, \tag{27}$$

essendo D il determinante fondamentale degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, e X essendo determinato dalla (25).

489. — Con questa formola però per determinare y_n bisognerebbe avere determinato almeno i primi coefficienti b_0 e b_1 della equazione omogenea (21), d'ordine $n-1$, che ha per integrali gli $n-1$ integrali conosciuti $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ della (20); ma se si osserva che per la formola di Liouville data ai §§ 468 e 480 si ha $\frac{b_1}{b_0} = -\frac{\overline{D}'}{\overline{D}}$, e quindi si può scrivere anche

$$X = kb_0 \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{\overline{D}}, \tag{28}$$

si vede che per l'integrale y_n si potrà prendere anche

$$y_n = \sum_1^{n-1} y_s \int \frac{\overline{D}_{n-1,s}}{\overline{D}^2}\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, dx, \tag{29}$$

avendo tralasciato, come naturalmente può farsi, il fattore k che figura qui come costante arbitraria; e questa formola dà l'n^o integrale y_n della (20) espresso per gli $n-1$ integrali conosciuti $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ senz'altro.

E, volendo, col limitare gli integrali che figurano in questa formola fra x_0 e x e cambiare poi sotto gli integrali la variabile d'integrazione x in z, o col valersi della (13) invece che della (11) per trovare y_n, si può avere questo integrale y_n anche con una sola quadratura per mezzo della formola

$$y_n = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{\overline{D}^2} \right)_z \overline{D}_{z,x}\, dz, \tag{30}$$

nella quale s'intende che le notazioni siano quelle stesse che si hanno nella (13).

490. — Così con queste formole (27) o (29) o (30) quando di una equazione lineare omogenea (20) di ordine n si conoscano $n-1$ integrali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ di un sistema fondamentale, si può determinare con sole quadrature anche l'n^o y_n senza passare per le varie equazioni che bisogna successivamente costruire col processo del § 478; e quando ci si valga delle (29) o (30) non ci sarà neppure bisogno di avere costruita la equazione (21) della quale gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ costituiscono un sistema fondamentale.

Così può dirsi anche in particolare che quando si conoscano tutti gli integrali di un sistema fondamentale $y_1, y_2, \dots, y_n$ di una equazione lineare (20) omogenea e di ordine n, quelli della sua equazione derivata

$$a_0 y^{(n+1)} + (a'_0 + a_1) y^{(n)} + (a'_1 + a_2) y^{(n-1)} + \dots + (a'_{n-1} + a_n) y' + a'_n y = 0$$

saranno gli stessi $y_1, y_2, \dots, y_n$ con più l'altro y_{n+1} che per la (27) è dato dalla formola

$$y_{n+1} = \sum_1^{n} y_s \int_{x_0}^{x} \frac{D_{n-1,s}}{a_0 D}\, dx, \tag{31}$$

dove D è il solito determinante fondamentale degli integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ della equazione data, perchè avendo riguardo alla (25) si vede che in questo caso per la funzione corrispondente a X può prendersi l'unità. E al solito, quando si voglia, questo valore di y_{n+1} potrà aversi anche per mezzo dell'altra formola

$$y_{n+1} = \int_{x_0}^{x} \frac{D_{z,x}\, dz}{(a_0 D)_z}, \tag{32}$$

cioè con una sola integrazione.

491. — In modo simile potrebbe trattarsi il caso di una equazione lineare omogenea di ordine n per la quale si sappia che ammette tutti gli integrali di un sistema fondamentale di un'altra dell'ordine $n-2$, o della quale si conoscano $n-2$ integrali di un sistema fondamentale, ma allora per determinare i secondi membri delle due equazioni lineari complete, una dell'ordine $n-2$ e l'altra dell'ordine $n-1$, che conducono alla determinazione successiva dei

due integrali che mancano per completare il sistema fondamentale di quelli della equazione data, occorre integrare prima una equazione di Riccati e poi fare una quadratura.

492. — Aggiungiamo anche, a complemento del teorema che fu dato al § 478 sull'abbassamento dell'ordine delle equazioni lineari omogenee, che quando si conosce un integrale Y di una equazione completa (1), col porre $y=\eta+Y$ questa equazione si ridurrà subito a quella omogenea corrispondente

$$a_0\eta^{(n)}+a_1\eta^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\eta'+a_n\eta=0\,;$$

e se si conoscono i integrali linearmente indipendenti della equazione completa $y_1, y_2, \ldots, y_i$, venendo ad essere $y_2-y_1, y_3-y_1, \ldots, y_i-y_1$ $i-1$ integrali di quella omogenea, l'ordine di questa pel teorema del § 478 potrà abbassarsi di $i-1$ unità restando ancora omogenea; e si può quindi affermare che la conoscenza di i integrali della equazione completa permette sempre di abbassare di $i-1$ unità l'ordine della equazione riducendola al tempo stesso anche omogenea.

Se poi invece di conoscere i integrali linearmente indipendenti della equazione completa (1) d'ordine n, se ne conosceranno i della equazione omogenea corrispondente, allora la integrazione della equazione completa data si ridurrà sempre a quella della equazione omogenea corrispondente di un ordine inferiore di i unità quando si segua il processo di Lagrange del § 483; e del resto, volendo, col processo stesso del § 478 applicato al primo membro della (1), questa equazione si ridurrà anche ad un'altra equazione completa dell'ordine $n-i$ sempre inferiore di i unità a quello della primitiva.

493. — Ai casi che abbiamo dato di abbassamento dell'ordine delle equazioni lineari se ne può aggiungere un altro che viene immediatamente dalle considerazioni generali esposte nel capitolo precedente.

Secondo quanto dicemmo nel capitolo stesso una funzione $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})$ di ordine n rispetto alle derivate di y è la derivata esatta di un'altra funzione dell'ordine $n-1$ quando sia soddisfatta la condizione (2) del § 440 (pag. 629), cioè

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'+\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)''-\ldots+(-1)^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)}=0\,;$$

quindi avendosi la solita equazione lineare

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=X \tag{33}$$

con X zero o no, si può dire subito che il suo primo membro sarà la derivata esatta di una espressione dell'ordine $n-1$ quando fra i suoi coefficienti sia soddisfatta la condizione

$$a_n-a'_{n-1}+a''_{n-2}-\ldots+(-1)^{(n-1)}a_1^{(n-1)}+(-1)^n a_0^{(n)}=0\,; \tag{34}$$

e allora si potrà fare subito una prima integrazione e si passerà ad una equazione dell'ordine $n-1$ per trovare la quale basterà applicare i processi del capitolo ricordato, e che si riscontra subito che sarà lineare essa pure.

Del resto, anche direttamente senza ricorrere alle formole di quel capitolo, applicando la integrazione fra x_0 e x alla equazione (33) con fare successive integrazioni per parti sui varii termini, e ponendo

$$\left\{\begin{aligned} p_0 &= a_0\,,\\ p_1 &= a_1 - p'_0\,,\\ p_2 &= a_2 - p'_1\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ p_s &= a_s - p'_{s-1}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ p_{n-1} &= a_{n-1}-p'_{n-2}\,,\\ p_n &= a_n - p'_{n-1}\,, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

con che in generale si ha

$$p_s=a_s-a'_{s-1}+a''_{s-2}+\ldots+(-1)^{s-1}a_1^{(s-1)}+(-1)^{(s)}a_0^{(s)}, \tag{36}$$

e

$$p_n=a_n-a'_{n-1}+a''_{n-2}-a'''_{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}a_1^{(n-1)}+(-1)^n a_0^{(n)}.$$

si vede subito che quando sia soddisfatta la condizione (34) che corrisponde alla $p_n=0$, si giunge immediatamente alla equazione lineare deil'ordine $n-1$

$$p_0y^{(n-1)}+p_1y^{(n-2)}+p_2y^{(n-3)}+\ldots+p_{n-2}y'+p_{n-1}y=X_1\,, \tag{37}$$

dove $X_1=\int_{x_0}^{x}X\,dx+C_1$, essendo C_1 una costante arbitraria, e così in questo caso l'integrazione della equazione data (33) sarà ridotta a quella della equazione precedente (37) ancora lineare ma dell'ordine $n-1$.

Naturalmente poi se anche per questa nuova equazione (37) sarà soddisfatta la condizione corrispondente alla (34), la integrazione di essa e quindi anche quella della equazione data (33) si ridurrà alla integrazione di un'altra equazione dell'ordine $n-2$

$$q_0y^{(n-2)}+q_1y^{(n-3)}+\ldots+q_{n-3}y'+q_{n-2}y=X_2\,, \tag{38}$$

dove $X_2 = \int_{x_0}^{x} X_1 \, dx + C_2$, essendo C_2 una nuova costante arbitraria: e così continuando, la integrazione della equazione data quando risultino soddisfatte le varie condizioni corrispondenti alla (34) per le equazioni che successivamente si formano, potrà ridursi a quella di una equazione ancora lineare e di ordine alquanto inferiore.

E osservando che per le $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}$ e così per la q_{n-1} si avranno formole analoghe alle (35), si vede subito che in generale si avrà $q_0 = a_0$ e

$$(39) \qquad q_s = a_s - 2a'_{s-1} + 3a''_{s-2} - 4a'''_{s-3} + \ldots + (-1)^s (s+1) a_0^{(s)}$$

per $s = 1, s = 2, \ldots, s = n-1$ e con $q_{n-1} = 0$; e se il processo potrà ancora ripetersi, passando ad un'altra equazione

$$(40) \qquad r_0 y^{(n-3)} + r_1 y^{(n-4)} + \ldots + r_{n-4} y' + r_{n-3} y = X_3 ,$$

dove $X_3 = \int_{x_0}^{x} X_2 \, dx + C_3$ con C_3 nuova costante arbitraria, troveremo al modo stesso $r_0 = a_0$ e

$$(41) \qquad r_s = a_s - 3a'_{s-1} + 6a''_{s-2} - 10 \, a'''_{s-3} + \ldots + (-1)^s \frac{(s+1)(s+2)}{2} a_0^{(s)}$$

per $s = 1, s = 2, \ldots, s = n-2$ e con $r_{n-2} = 0$, e così potremo continuare quando ne sarà il caso, formando i coefficienti numerici delle derivate nei coefficienti delle equazioni successive, colle leggi che si seguono per la formazione dei numeri che diconsi *numeri figurati;* come appunto è naturale che debba avvenire perchè in sostanza queste formole e questi processi non sono che quelli generali del § 453 che ora abbiamo voluto applicare direttamente alla equazione data perchè così, in questo caso, le cose risultavano più naturali e anche più semplici.

494. — Ritornando ora sul caso degli abbassamenti degli ordini delle equazioni lineari che possono farsi quando si conoscono alcuni integrali della equazione omogenea data o di quella omogenea corrispondente alla equazione data se questa è completa, osserviamo che, per le considerazioni che allora facemmo, nel caso particolare in cui si conoscono $n-1$ integrali distinti della indicata equazione omogenea di ordine n, la equazione data (omogenea o no) può sempre integrarsi completamente per sole quadrature mediante i processi precedenti.

Fermandoci però in modo speciale sulle equazioni lineari del second'ordine omogenee o no, è facile vedere che, anche senza l'applicazione di quei processi, e in modo molto più semplice si giunge sempre ad integrarle completamente e si trova la formola esplicita che ne dà l'integrale generale quando si conosce un integrale particolare della equazione omogenea corrispondente.

Sia data infatti la equazione lineare del second'ordine completa o no

$$(42) \qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = X ,$$

e sia y_1 un integrale conosciuto della equazione omogenea corrispondente $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, per modo che si abbia

$$a_0 y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1 = 0 .$$

Moltiplicando quest'ultima per un integrale y della equazione data (42) e questa per y_1, e poi sottraendo, avremo la equazione

$$a_0 (y'' y_1 - y''_1 y) + a_1 (y' y_1 - y'_1 y) = X y_1 ;$$

e quindi, osservando che $y'' y_1 - y''_1 y$ è la derivata di $y' y_1 - y'_1 y$, basterà porre $y' y_1 - y'_1 y = z$ per ridurre subito la equazione precedente all'altra del prim'ordine in z

$$a_0 z' + a_1 z = X y_1 ,$$

che s'integra immediatamente e ci dà per formole note (§ 366 (pag. 534-35)) pel valore di z o di $y' y_1 - y'_1 y$

$$y' y_1 - y'_1 y = e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \left\{ \int \frac{X}{a_0} y_1 e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx + C_1 \right\} ,$$

essendo C_1 una costante arbitraria.

Dividendo ora per y_1^2 si vede che il primo membro viene ad essere la derivata di $\frac{y}{y_1}$, e quindi, integrando e introducendo una nuova costante arbitraria C, si troverà subito

$$(43) \qquad y = C y_1 + C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx + y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \int \frac{X}{a_0} y_1 e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx}{y_1^2} dx ,$$

per l'integrale generale cercato della equazione data (42).

Supponendo $X = 0$, avremo più semplicemente

$$(44) \qquad y = C y_1 + C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx ,$$

per l'integrale della equazione omogenea

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,, \tag{45}$$

quando y_1 è un suo integrale particolare; e in tutte queste formole nel caso, che spesso si presenta, nel quale la equazione (42) è della forma

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 \frac{dy}{dx}\right) + a_2 y = \mathrm{X}\,,$$

con $\mathrm{X} = 0$ o no, nel qual caso $a_1 = a'_0$, alle esponenziali $e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ e $e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ si sostituiscono naturalmente a_0 e $\frac{1}{a_0}$, e le formole stesse si riducono più semplici.

Trasformazioni più comuni che possono farsi sulle equazioni lineari. Applicazioni alle equazioni del 2.° e del 3.° ordine.

495. — Daremo nel capitolo seguente le formole generali d'integrazione delle equazioni lineari di ordine qualsiasi complete o no per mezzo di serie che potranno aversi sotto infinite forme.

S'intende fin d'ora però come per l'applicazione delle formole che allora troveremo, e anche per altri studii che vogliano farsi sull'equazioni lineari, possa talvolta giovare di avere queste equazioni con certi coefficienti piuttosto che con altri; e si comprende quindi come sia utile il conoscere le principali fra le più comuni trasformazioni che possono farsi sulle equazioni medesime.

La più semplice di tali trasformazioni è quella che si fà moltiplicando tutta la equazione per una funzione λ che si dovrà scegliere poi in modo adattato per fare sì che uno o più dei coefficienti della equazione, o la intera equazione vengano ad avere certe particolarità speciali.

Così ad es. avendosi la equazione

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2} y' + a_n y = \mathrm{X}\,, \tag{1}$$

quando ad essa se ne voglia sostituire un altra nella quale il coefficiente del secondo termine sia la derivata di quello del primo, come nel caso al quale accennammo in fine del paragrafo precedente per le equazioni del second'ordine, basterà prendere la funzione moltiplicatrice λ in modo che si abbia $(\lambda a_0)' = \lambda a_1$, ovvero $\frac{(\lambda a_0)'}{\lambda a_0} = \frac{a_1}{a_0}$, e quindi $\lambda = \frac{k}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, essendo k una costante che potrà sempre prendersi uguale ad uno.

496. — E se si vorrà invece fare in modo che moltiplicando per λ la equazione (1) il suo primo membro diventi la derivata esatta di una funzione dell'ordine $n-1$, con che una prima integrazione potrà subito effettuarsi riducendosi allora la equazione data ad un'altra di ordine $n-1$, bisognerà prendere per λ uno dei moltiplicatori di Iacobi dei quali parlammo al § 449 (pag. 639 e seg.), cioè si dovrà prendere per λ una funzione che soddisfi alla equazione differenziale in z

$$(z a_0)^{(n)} - (z a_1)^{(n-1)} + (z a_2)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^{n-1}(z a_{n-1})' + (-1)^{(n)} z a_n = 0 \tag{2}$$

che risulta subito dalla (20) dello stesso § 449, e che è pure una equazione lineare e omogenea dell'ordine n.

Quando poi si riesca a trovare un integrale λ di questa equazione, allora la equazione (1) moltiplicata per λ darà subito luogo all'altra dell'ordine $n-1$ alla quale testè accennavamo sopra, che ne rappresenterà un integrale primo, e che potrà trovarsi anche eseguendo integrazioni per parti successive sui singoli termini come facemmo al § 493; e questa equazione dell'ordine $n-1$ sarà la seguente

$$p_0 y^{(n-1)} + p_1 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y = \int \lambda \mathrm{X}\, dx + \mathrm{C}\,, \tag{3}$$

essendo C una costante arbitraria, e avendosi

$$p_0 = \lambda a_0\,,\ p_1 = \lambda a_1 - p'_0\,,\ p_2 = \lambda a_2 - p'_1\,, \ldots, p_{n-1} = \lambda a_{n-1} - p'_{n-2}\,, \tag{4}$$

con $p_n = \lambda a_n - p'_{n-1} = 0$ perchè p_n sarà precisamente il primo membro della equazione (2) nel quale sia messo λ al posto di z.

La equazione (2) si chiama la ***equazione aggiunta*** della equazione

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, \tag{5}$$

cioè della equazione omogenea corrispondente alla (1), e il suo primo membro si chiama ***il polinomio aggiunto*** del primo membro di questa equazione; e essa ha molte proprietà notevoli, fra le quali quella che prendendo di essa la equazione aggiunta si ritorna alla equazione primitiva (5).

Difatti moltiplicando la stessa equazione aggiunta (2) per un fattore μ e poi integrandola coll'applicare ai suoi termini successive integrazioni per parti, come facemmo per passare dalla (1) alla (3) dopo di averla moltiplicata per λ, si trova che i moltiplicatori μ che rendono il primo membro della (2) la derivata esatta di una funzione di ordine $n-1$ in z vengono ad essere appunto gli integrali della equazione omogenea (5), la quale risulta così all'infuori di un fattore la equazione aggiunta della (2).

497. — Una seconda trasformazione delle equazioni lineari (1) (complete o no) che pure riesce talvolta utilissima, consiste nel cambiare la funzione incognita y col sostituire ad essa il prodotto tu di due funzioni una delle quali per es. u dovrà essere la nuova funzione incognita, e l'altra t dovrà prendersi poi in quel modo che più converrà per fare sì che la nuova equazione differenziale in u abbia date particolarità.

Con questa trasformazione le derivate di y si determinano colla solita formola di Leibnitz, e si hanno quindi le formole

$$\begin{aligned}
y &= tu\,,\\
y' &= t'u + tu'\,,\\
y'' &= t''u + 2t'u' + tu''\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(k)} &= t^{(k)}u + k_1 t^{(k-1)}u' + k_2 t^{(k-2)}u'' + \ldots + k_{k-1} t' u^{(k-1)} + tu^{(k)}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n-1)} &= t^{(n-1)}u + (n-1)_1 t^{(n-2)}u' + (n-1)_2 t^{(n-3)}u'' + \ldots\ldots\ldots + tu^{(n-1)}\,,\\
y^{(n)} &= t^{(n)}u + n_1 t^{(n-1)}u' + n_2 t^{(n-2)}u'' + \ldots\ldots\ldots + n_{n-1} t' u^{(n-1)} + tu^{(n)}
\end{aligned}$$

per mezzo delle quali, analogamente a quanto trovammo nel § 464, la equazione data si trasforma nell'altra

$$\begin{aligned}
a_0 t u^{(n)} + (n_{n-1} a_0 t' + a_1 t)\, u^{(n-1)} + (n_{n-2} a_0 t'' + (n-1)_{n-2} a_1 t' + a_2 t)\, u^{(n-2)} + \ldots +\\
+ (n_1 a_0 t^{(n-1)} + (n-1)_1 a_1 t^{(n-2)} + \ldots + 2_1 a_{n-2} t' + a_{n-1} t) u' +\\
+ (a_0 t^{(n)} + a_1 t^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t' + a_n t)\, u = \mathrm{X}\,,
\end{aligned}$$

e in questa, appunto prendendo per t una funzione adattata, potremo talvolta fare acquistare ai coefficienti valori o proprietà speciali (*).

Così potremo sempre in una equazione lineare qualsiasi di ordine n fare sparire il secondo termine cioè quello di ordine $n-1$, prendendo t in modo che si abbia $n a_0 t' + a_1 t = 0$ ovvero $\frac{t'}{t} = -\frac{a_1}{n a_0}$, o $t = k e^{-\frac{1}{n}\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, cioè ponendo $y = k e^{-\frac{1}{n}\int \frac{a_1}{a_0} dx} u$, con k costante arbitraria che potrà sempre pren-

(*) Si può notare che in sostanza questa trasformazione fu già applicata per le equazioni lineari al § 464 e poi al § 478 quando si trattò dell'abbassamento dell'ordine delle equazioni omogenee delle quali siano conosciuti uno o più integrali, prendendosi allora per t uno degli integrali conosciuti col quale veniva a sparire l'ultimo termine nella equazione trasformata.

dersi uguale ad uno; per modo che se nella equazione data sarà già $a_1 = a'_0$, come vedemmo sopra in fine del § 495 che poteva sempre aversi, basterà prendere $y = \frac{u}{\sqrt[n]{a_0}}$.

498. — Una terza trasformazione poi potrà farsi col cambiamento della variabile x in un'altra ξ colla formola $dx = f(\xi)\, d\xi$, o $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost.}$, e combinando o no questa trasformazione colle due precedenti.

Per le formole del cambiamento della variabile indipendente, a $y', y'', y''', \ldots$, bisognerà allora sostituire i rapporti

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{d^2 y\, dx - d^2 x\, dy}{dx^3}\,,\ \frac{(d^3 y\, dx - d^3 x\, dy)\, dx - 3\,(d^2 y\, dx - d^2 x\, dy)\, d^2 x}{dx^5}\,,\ldots,$$

nei quali i differenziali si intendono presi rispetto alla nuova variabile ξ, e la nuova equazione, nella quale nei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ per x bisognerà intendere posto il valore precedente in ξ, verrà sotto una forma assai diversa, che, quando si scelga convenientemente la funzione trasformatrice $f(\xi)$, potrà talvolta riuscire più comoda di quella dalla quale si parte, o venire a soddisfare a condizioni speciali che si richiedano. E altre particolarità potranno ottenersi coll'applicare contemporaneamente anche le trasformazioni dei due ultimi paragrafi.

499. — Così ad es. la equazione del second'ordine

$$(7)\qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \mathrm{X}$$

colla trasformazione data dalla formola $dx = f(\xi)\, d\xi$ o $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost.}$ si cambierà nell'altra

$$a_0 \frac{y'' f - f' y'}{f^3} + \frac{a_1 y'}{f} + a_2 y = \mathrm{X}\,,$$

ovvero

$$(8)\qquad a_0 f y'' + (a_1 f^2 - a_0 f')\, y' + a_2 f^3 y = \mathrm{X} f^3\,,$$

nella quale le derivate di y e di f si intendono prese rispetto a ξ, e in $a_0 . a_1, a_2$ e X si deve intendere che al posto di x sia messo il suo valore in ξ, cioè $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost}.$

E così volendo ad es. fare sparire il secondo termine con questa trasformazione, come si dette il modo di farlo sparire anche colla trasformazione precedente del § 497, bisognerà scegliere la formola di trasformazione $dx = f(\xi)\,d\xi$ in modo che sia $a_1 f^2 - a_0 f' = 0$, ovvero $a_1 f^2 d\xi - a_0 df = 0$ o anche, per essere $dx = f d\xi$, $a_1 f dx - a_0 df = 0$ e quindi $\log f = \int \frac{a_1}{a_0} dx + \text{cost.}$ o $f = k e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ con k costante, e perciò $\frac{dx}{d\xi} = k e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ e infine $\xi = \frac{1}{k} \int e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx + \text{cost.}$, e in queste formole potremo sempre prendere $k = 1$.

500. — E quando si parta dalla equazione di second'ordine già ridotta alla forma

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 \frac{dy}{dx}\right) + a_2 y = \mathrm{X}, \tag{9}$$

o quando, se sarà stata data sotto la forma generale (7) le si applichi prima la trasformazione del § 495 col moltiplicarla per $\frac{1}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$ onde ridurla a questa forma, allora colla trasformazione precedente essa diventerà la seguente

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{a_0}{f} \frac{dy}{d\xi}\right) + a_2 f y = f\mathrm{X}, \tag{10}$$

che in particolare quando sia $f = a_0$ o $d\xi = \frac{dx}{a_0}$ si riduce subito all'altra

$$y'' + a_0 a_2 y = a_0 \mathrm{X}, \tag{11}$$

intendendo ora che $a_0 a_2$ e $a_0 \mathrm{X}$ siano espressi per ξ mediante la formola che si ricaverà dalla $d\xi = \frac{dx}{a_0}$, o $\xi = \int \frac{dx}{a_0} + \text{cost.}$, come, in questo caso di $a_1 = a'_0$, risulta subito anche da quanto si trovò in fine del paragrafo precedente.

E se giunti alla (10), applicheremo anche la trasformazione del § 497 col fare cioè il cambiamento della funzione y nella u mediante la formola $y = tu$ che dà $y' = tu' + t'u$, la (10) stessa si trasformerà subito nell'altra

$$\frac{a_0}{f} t u'' + \left\{\left(\frac{a_0}{f} t\right)' + \frac{a_0}{f} t'\right\} u' + \left\{\left(\frac{a_0}{f} t'\right)' + a_2 f t\right\} u = f\mathrm{X}, \tag{12}$$

nella quale le varie derivate devono intendersi prese rispetto a ξ; e per la presenza delle due funzioni arbitrarie f e t potremo fare acquistare a questa equazione infinite forme diverse.

Così volendo che in essa manchi il termine in u' basterà che si abbia

$$\left(\frac{a_0 t}{f}\right)' + \frac{a_0}{f} t' = 0, \quad \text{ovvero} \quad 2\frac{a_0}{f} t' + \left(\frac{a_0}{f}\right)' t = 0,$$

cioè basterà prendere $t = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}$ con k costante che potrà sempre prendersi uguale ad uno; e allora avendosi $\left(\frac{a_0}{f} t'\right)' = -\left(\frac{a_0 t}{f}\right)''$, il coefficiente di u diverrà $\left\{a_2 f - \left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{a_0}{f}}\right\} t$, e la equazione precedente (12) si ridurrà subito all'altra senza il secondo termine

$$u'' + \left\{\frac{a_2}{a_0} f^2 - \left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{f}{a_0}}\right\} u = f\sqrt{\frac{f}{k a_0}}\,\mathrm{X}, \tag{13}$$

nella quale la funzione $f(\xi)$ resta ancora arbitraria, e le derivate si intendono prese rispetto a ξ.

501. — In seguito a questi risultati noi possiamo dunque affermare che data una equazione generale lineare del secondo ordine (7), riducendola prima alla forma (9), se già non è di questa forma, col moltiplicarla per $\frac{1}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}$, e facendo poi il cambiamento di variabile colla formola $dx = f(\xi)\, d\xi$, e infine cambiando anche la funzione y colla formola $y = \sqrt{\frac{kf}{a_0}}\, u$, la equazione data potrà sempre trasformarsi nell'altra

$$y'' + \beta y = \gamma, \tag{14}$$

dove β e γ sono dati dalle formole

$$\beta = \frac{a_2}{a_0} f^2 - \left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)'' \sqrt{\frac{f}{a_0}}, \quad \gamma = f\sqrt{\frac{f}{k a_0}}\,\mathrm{X}, \tag{15}$$

nelle quali tutto deve intendersi espresso per ξ, le derivate s'intendono pure prese rispetto a ξ, e le a_0, a_2 e X si intende che siano quelle che figurano nella equazione posta sotto la forma (9) espresse però anch'esse per ξ; per modo che quando vi si vogliano invece fare figurare i coefficienti della equazione data sotto la forma generale (7) bisognerà nelle (15) ad a_0, a_2 e X sostituire respettivamente

$$e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}, \quad \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{X}}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}. \tag{16}$$

E la riduzione delle equazioni di second'ordine alla forma più semplice (14) potrà farsi in infiniti modi, perchè in β e γ la funzione $f(\xi)$ resta del tutto arbitraria.

Così in particolare partendo dalla equazione già ridotta alla forma (9), e prendendo con $k=1$, $f=\sqrt{a_0}$, cioè $d\xi=\frac{dx}{\sqrt{a_0}}$ o $\xi=\int\frac{dx}{\sqrt{a_0}}$, la equazione (13) in u trasformata della stessa (9) sarà la seguente

$$(17)\qquad u''+\left\{a_2-\left(a_0^{\frac{1}{4}}\right)''a_0^{-\frac{1}{4}}\right\}u=a_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{X},\quad \text{con}\quad y=a_0^{-\frac{1}{4}}u\,;$$

prendendo $f=1$ cioè $x=\xi$, il che corrisponde a non fare il cambiamento di variabile, la equazione trasformata (13) sarà l'altra

$$(18)\qquad u''+\left\{\frac{a_2}{a_0}-\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)''a_0^{-\frac{1}{2}}\right\}u=a_0^{-\frac{1}{2}}\mathrm{X},$$

e prendendo infine $f=a_0$, cioè $d\xi=\frac{dx}{a_0}$ o $\xi=\int\frac{dx}{a_0}$, si avrà, come già trovammo sopra, l'altra trasformata (11) cioè

$$(19)\qquad u''+a_0a_2u=a_0\mathrm{X}\,;$$

e particolarizzando f in altro modo potremmo avere anche altre forme notevoli nelle quali può trasformarsi una equazione lineare qualsiasi del second'ordine già ridotta alla forma (9). E nelle equazioni trasformate (17) e (19) s'intende che le varie derivate siano prese rispetto alla nuova variabile ξ e che i coefficienti che ci figurano vengano espressi per ξ mediante le formole di trasformazione $\xi=\int\frac{dx}{\sqrt{a_0}}$ e $\xi=\int\frac{dx}{a_0}$ respettivamente.

502. — A proposito ancora delle equazioni lineari del second'ordine aggiungiamo anche le considerazioni seguenti.

Osserviamo cioè che se si eseguisce la derivazione seconda rispetto a ξ per la espressione $\sqrt{\frac{a_0}{f}}$ che figura nel valore (15) di β, per la formola di Leibnitz si trova

$$\left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)''=\left(a_0^{\frac{1}{2}}f^{-\frac{1}{2}}\right)''=\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)''f^{-\frac{1}{2}}-\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)'f^{-\frac{3}{2}}f'+a_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)'',$$

e se in questa s'introducono le derivate di $a_0^{\frac{1}{2}}$ rispetto ad x invece di quelle che ora vi figurano rispetto **a** ξ, coll'osservare che per la formola di

trasformazione $dx=f(\xi)\,d\xi$ si ha

$$\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{d\,a_0^{\frac{1}{2}}}{dx}\,\frac{dx}{d\xi}=\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)'_x f,$$

e

$$\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)''=\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)'_x f\right)'=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)''_x\frac{dd}{d\xi}f+\left(a^{\frac{1}{2}}\right)'_x f'=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)''_x f^2+\left(a^{\frac{1}{2}}\right)'_x f',$$

si troverà subito

$$\left(\sqrt{\frac{a_0}{f}}\right)''=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)''_x f^{\frac{3}{2}}+a_0^{\frac{1}{2}}\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)'',$$

e quindi il valore (15) di β che figura nella equazione trasformata (14) della equazione (9) verrà a porsi sotto la forma seguente

$$\beta=\left\{\frac{a_2}{a_0}-\frac{\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)''_x}{a_0^{\frac{1}{2}}}\right\}f^2-\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)''f^{\frac{1}{2}},$$

o anche sotto l'altra

$$\beta=\left\{\frac{a_2}{a_0}-\frac{\left(a_0^{\frac{1}{2}}\right)''_x}{a^{\frac{1}{2}}}\right\}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{d\xi}}}\right)''\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mentre si ha al tempo stesso

$$\gamma=\frac{\mathrm{X}}{(k\,a_0)^{\frac{1}{2}}}f^{\frac{3}{2}}=\frac{\mathrm{X}}{(k\,a_0)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

perchè $f=\frac{dx}{d\xi}$.

503. — Ritornando poi alla equazione di forma generale (7) col sostituire alle a_0, a_2 e X le espressioni (16), avremo subito

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}\beta&=\left\{\frac{a_2}{a_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x-\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\right\}f^2-\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)''f^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{a_2}{a_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x-\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\right\}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2-\\&\qquad-\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{d\xi}}}\right)''\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}},\\\gamma&=\frac{\mathrm{X}}{a_0\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\int\frac{a_1}{a_0}dx}f^{\frac{3}{2}}=\frac{\mathrm{X}}{a_0\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\int\frac{a_1}{a_0}dx}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}\right.$$

mentre il valore di t diverrà

$$(21) \qquad t = \sqrt{k}\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0} dx} f^{\frac{1}{2}};$$

quindi si può dire che avendosi la equazione lineare generale del secondo ordine

$$(22) \qquad a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \mathrm{X},$$

se si cambia la variabile x nella variabile ξ colla formola $dx = f(\xi)\, d\xi$, e invece della funzione y si introduce la funzione u colla formola $y = tu$ nella quale t è dato dalla (21), la stessa equazione (22) si trasforma nell'altra in u e ξ

$$(23) \qquad u'' + \beta u = \gamma,$$

dove β e γ sono date dalle formole (20) nelle quali s'intende che, dopo calcolata la derivata $\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x$ e l'integrale $\int \frac{a_1}{a_0} dx$, alla variabile x sia sostituita per tutto la variabile ξ colla formola $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost.}$, essendo $f(\xi)$ una funzione di ξ che è finita continua e derivabile almeno fino alle derivate seconde ma del resto è arbitraria.

E si può notare che questi risultati potranno ottenersi subito anche direttamente dalla (8) applicandole la trasformazione $y = tu$, senza passare per la equazione ridotta della forma (9).

504. — Così evidentemente si può ora anche affermare che quando si parte da una equazione lineare del second'ordine (22), se avverrà che, con una scelta conveniente della funzione $f(\xi)$, la sua trasformata (23) risulti una equazione che si sappia integrare e il cui integrale sia u, potremo integrare subito anche la equazione data stessa (22) e il suo integrale y sarà dato dalla formola $y = \sqrt{k}\, e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0} dx} f^{\frac{1}{2}} u$ nella quale per ξ in f e in u si dovrà intendere introdotto x valendosi della formola $x = \int f(\xi)\, d\xi + \text{cost.}$

E viceversa si può dire che se la equazione data (22) potrà subito integrarsi e il suo integrale sarà y, potranno pure integrarsi immediatamente le infinite equazioni lineari e del second'ordine in u e ξ

$$(24) \qquad u'' + \left[\left\{\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x - \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\right\} x'(\xi)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x'(\xi)}}\right)'' \sqrt{x'(\xi)}\right] u =$$
$$= \frac{\mathrm{X}}{a_0\sqrt{k}}\, e^{\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0} dx}\, x'(\xi)^{\frac{3}{2}},$$

nella quale k è una costante arbitraria e al posto di x si intende posta la funzione $x(\xi)$ che potrà prendersi arbitrariamente purchè derivabile almeno fino al terz'ordine; e l'integrale di questa equazione sarà dato dalla formola

$$(25) \qquad u = \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{\sqrt{k}\sqrt{x'(\xi)}}\, y.$$

Partendo poi da questa equazione (24) come se essa fosse la (22), e applicandole gli stessi processi, giungeremo a infinite altre equazioni che potranno pure integrarsi subito, e così potremo continuare indefinitamente.

505. — Così supponendo che la equazione data (22) sia la $y'' = 0$ il cui integrale è $cx + c_1$ con c e c_1 costanti arbitrarie, e supponendo nelle formole precedenti $k = 1$, si può dire ora in particolare che la equazione omogenea del second'ordine

$$(26) \qquad u'' - \left(\frac{1}{\sqrt{x'(\xi)}}\right)'' \sqrt{x'(\xi)}\; u = 0$$

nella quale $x(\xi)$ è una funzione arbitraria qualsiasi che ammette almeno le derivate terze, può subito integrarsi e il suo integrale è

$$u = \frac{cx(\xi) + c_1}{\sqrt{x'(\xi)}};$$

e così, più particolarmente ancora prendendo $x(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$ si troverà che la equazione

$$(27) \qquad 4\xi^2 u'' - 3u = 0$$

ha per integrale $u = c\xi^{-\frac{1}{2}} + c'\xi^{\frac{3}{2}}$ con c e c' costanti arbitrarie.

E supponendo che la equazione data (22) sia l'altra $y'' - n^2 y = 0$ il cui integrale è $y = c\,e^{nx} + c_1 e^{-nx}$ si potrà dire che la equazione

$$(28) \qquad u'' - \left\{n^2 x'(\xi)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x'(\xi)}}\right)'' \sqrt{x'(\xi)}\right\} u = 0$$

può subito integrarsi e il suo integrale è

$$u = \frac{c\,e^{nx(\xi)} + c_1 e^{-nx(\xi)}}{\sqrt{x'(\xi)}}.$$

E in particolare prendendo ora $x(\xi) = \frac{\xi^2}{2}$ si troverà che la equazione

$$(29) \qquad u'' - \left(n^2\xi^2 + \frac{3}{4\xi^2}\right) u = 0$$

ha per integrale

$$u = \frac{c e^{\frac{n\xi^2}{2}} + c_1 e^{-\frac{n\xi^2}{2}}}{\sqrt{\xi}} .$$

Partendo poi da queste equazioni (26), (27), (28) e (29) si giungerebbe cogli stessi processi ad infinite altre equazioni pure integrabili immediatamente ecc.

506. — Anche per le equazioni lineari del terz'ordine le trasformazioni precedenti conducono a risultati che presentano uno speciale interesse; e in particolare partendo da una equazione lineare del terz'ordine generale

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = \mathrm{X}, \tag{30}$$

col fare il cambiamento della variabile e quello della funzione mediante le formole precedenti $dx = f(\xi) d\xi$ e $y = tu$, si riesce sempre a fare sparire dalla equazione il secondo e il terzo termine, riducendo cioè la equazione data alla forma

$$u''' + b_3 u = \mathrm{X}_1 , \tag{31}$$

dove b_3 e X_1 si intendono espresse per la nuova variabile ξ, e le derivate s'intendono prese rispetto a ξ; e questo si fà colla integrazione di una equazione lineare e omogenea del second'ordine che manca del secondo termine, e di una del primo che s'integra immediatamente.

Si osservi infatti che con questi cambiamenti, dovendo sostituire nella (30) al posto di y il prodotto tu, e al posto di y', y'', y''' le espressioni differenziali che si hanno dalle (6) cambiandovi y in tu, si vede che la equazione stessa si trasforma nell'altra

$$a_0 f^2 (tu)''' - (3a_0 ff' - a_1 f^3)(tu)'' - (a_0 ff'' + a_1 f^2 f' - 3a_0 f'^2 - a_2 f^4)(tu)' + \\ + a_3 f^5 (tu) = f^5 \mathrm{X},$$

nella quale le derivate devono intendersi prese rispetto a ξ.

Sviluppando ora le derivate di tu colla solita formola di Leibnitz, questa equazione si riduce alla seguente

$$\begin{aligned} (32) \quad & a_0 f^2 t u''' + \{3a_0 f^2 t' - (3a_0 ff' - a_1 f^3) t\} u'' + \{3 a_0 f^2 t'' - 2(3a_0 ff' - a_1 f^3) t' - \\ & - (a_0 ff'' + a_1 f^2 f' - 3a_0 f'^2 - a_2 f^4) t\} u' + \{a_0 f^2 t''' - (3a_0 ff' - a_1 f^3) t'' - \\ & - (a_0 ff'' + a_1 f^2 f' - 3a_0 f'^2 - a_2 f^4) t' + a_3 f^5 t\} u = f^5 \mathrm{X}; \end{aligned}$$

e quindi se si vuole che in questa manchino il secondo e il terzo termine

bisognerà che f e t siano presi in modo che si abbiano le due equazioni

$$(33) \quad \begin{cases} t' - \left(\dfrac{f'}{f} - \dfrac{a_1}{3a_0} f\right) t = 0 , \\ t'' - 2\left(\dfrac{f'}{f} - \dfrac{a_1}{3a_0} f\right) t' - \left(\dfrac{1}{3}\dfrac{f''}{f} + \dfrac{a_1}{3a_0} f' - \dfrac{f'^2}{f^2} - \dfrac{a_2}{3a_0} f^2\right) t = 0 . \end{cases}$$

Ora la prima di queste equazioni può scriversi sotto la forma

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{t}{f}\right) + \frac{a_1}{3a_0} t = 0 ,$$

e ricambiando in questa la variabile ξ in x colla formola $dx = f d\xi$ si ottiene l'altra omogenea e di prim'ordine $\frac{d}{dx}\left(\frac{t}{f}\right) + \frac{a_1}{3a_0}\frac{t}{f} = 0$ che s'integra immediatamente e ci dà $t = k f e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx}$ con k costante arbitraria che prenderemo senz'altro uguale a uno, con che si avrà intanto

$$t = f e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx} . \tag{34}$$

Osserviamo ora che colla derivazione rispetto a ξ la prima delle (33) dà luogo all'altra

$$t'' - \left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right) t' - \left\{\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} - \left(\frac{a_1}{3a_0}\right)' f - \frac{a_1}{3a_0} f'\right\} t = 0 ,$$

che sottratta dalla seconda riduce questa alla seguente

$$-\left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right) t' + \left\{\frac{2}{3}\frac{f''}{f} - 2\frac{a_1}{3a_0} f' - \left(\frac{a_1}{3a_0}\right)' f + \frac{a_2}{3a_0} f^2\right\} t = 0 ;$$

e ora eliminando t e t' fra questa e la prima delle (33) si trova la equazione differenziale nella sola f

$$\frac{2}{3}\frac{f''}{f} - 2\frac{a_1}{3a_0} f' - \left(\frac{a_1}{3a_0}\right)' f + \frac{a_2}{3a_0} f^2 - \left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)^2 = 0 ,$$

ovvero

$$\frac{2}{3}\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} + \left\{\frac{a_2}{3a_0} - \left(\frac{a_1}{3a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3a_0}\right)' \frac{1}{f}\right\} f^2 = 0 ,$$

o anche dividendo per $\frac{1}{3} f^{\frac{1}{2}}$

$$2\left(\frac{f'}{f^{\frac{3}{2}}}\right)' + \left\{\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)' \frac{1}{f}\right\} f^{\frac{3}{2}} = 0 ,$$

le derivate intendendosi prese tutte rispetto alla variabile ξ.

Ricambiando ora in questa la variabile ξ in x colla solita formola $dx = f d\xi$ si giunge subito all'altra

$$(35) \qquad (\sqrt{f})''_x + \frac{1}{4}\left\{\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x\right\}\sqrt{f} = 0,$$

nella quale a scanso di equivoci abbiamo posto l'indice x a $(\sqrt{f})''$ e a $\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'$ per indicare che qui le derivate s'intendono prese rispetto ad x; e si conclude quindi, che determinato un integrale z in funzione di x della equazione di second'ordine priva del secondo termine

$$(36) \qquad z''_x + \frac{1}{4}\left\{\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x\right\} z = 0 \ (*),$$

potremo prendere $f = z^2$, e allora si avrà $\xi = \int \frac{dx}{z^2} + \text{cost.}$ per la formola che serve a fare il cambiamento della variabile.

E così noi possiamo dire ora evidentemente che avendosi una equazione lineare del terz'ordine qualsiasi (30), quando in essa si faccia un cambiamento di variabile colla formola

$$(37) \qquad \xi = \int \frac{dx}{z^2} + \text{cost.},$$

essendo z un integrale della equazione del second'ordine (36), e si cambi la funzione y in tu, essendo t dato dalla formola

$$(38) \qquad t = z^2 e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx},$$

la equazione stessa (30) si trasformerà nell'altra

$$(39) \qquad a_0 u''' + \left\{a_0 \frac{t'''}{t} - \left(3a_0 \frac{f'}{f} - a_1 f\right)\frac{t''}{t} - \left(a_0 \frac{f''}{f} + a_1 f' - 3a_0 \frac{f'^2}{f^2} - a_2 f^2\right)\frac{t'}{t} + a_3 f^3\right\} u =$$
$$= X f^2 e^{\int \frac{a_1}{3a_0} dx},$$

nella quale $f = z^2$, e le varie derivate s'intendono prese tutte rispetto a ξ, come tutte le quantità che vi figurano si intendono espresse per ξ per mezzo

(*) Col porre $z = e^{\int \lambda dx}$ questa equazione si riduce subito all'altra in λ

$$\lambda' + \lambda^2 = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'_x + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}\right\},$$

che è una equazione di Riccati e si sa integrare in molti casi come mostrammo ai §§ 381 e seg. (pag. 550 e seg.).

della formola (37); e in questa come volevamo mancheranno appunto i termini in u' e u''.

507. — In questa equazione trasformata (39), nella quale, come abbiamo detto, s'intende che t abbia il valore precedente $fe^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx}$, e f sia il quadrato di uno degli integrali z della equazione (36) che si supporrà conosciuto, il coefficiente di u e il secondo membro risulteranno pienamente conosciuti quando per mezzo della formola (37) si riesca ad eliminare x facendo così comparire per tutto ξ invece di x.

In particolare per giungere alla effettiva determinazione del coefficiente di u nella stessa equazione (30) può giovare l'osservazione che invece delle tre prime derivate di t rispetto a ξ potremo sempre farvi comparire soltanto t e i coefficienti della equazione data oltre alla funzione f e alle sue derivate, perchè per la prima delle (33) si ha $t' = \left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right) t$, e derivando rispetto a ξ si trovano subito le altre formole

$$t'' = \left\{\left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)^2\right\} t,$$

$$t''' = \left\{\left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)'' + 3\left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)\left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{a_1}{3a_0} f\right)^3\right\} t$$

nelle quali le derivazioni s'intendono fatte tutte rispetto alla variabile ξ.

508. — Del resto poi, volendo avere il detto coefficiente di u nella (39) espresso in modo più semplice pei coefficienti della equazione data (30) e per le loro derivate, oltre che per quello degli integrali z della (36) che sarà stato scelto, basterà seguire un processo speciale che risulta dall'osservare che, pel modo con cui fu ottenuta la (32), il coefficiente di u in questa equazione (32) non è altro che il primo membro della equazione data (30) nel quale è posto $y = t$ ed è fatto il solito cambiamento di variabile colla formola (37), e dopo è moltiplicato per f^3; e il coefficiente di u nella (39) differisce da quello della (32) solo per la soppressione del fattore $f^2 t$.

Tenendo conto dunque di questa osservazione, converrà determinare prima le derivate *rispetto ad* x della funzione t o $z^2 e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx}$ nella quale deve intendersi che z sia uno degli integrali della equazione (36); e poichè con una prima derivazione di t si avrà subito

$$(40) \qquad t' = \left(2\frac{z'}{z} - \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\right) t,$$

derivando ancora e valendosi della formola (36) che può scriversi anche sotto la forma

$$(41)\qquad 4\frac{z''}{z}=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0},$$

troveremo con calcoli semplicissimi

$$(42)\qquad t''=\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{5}{18}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0}+2\frac{z'^2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{z'}{z}\right\}t,$$

e derivando di nuovo e valendosi ancora della (41) troveremo

$$(43)\qquad t'''=\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{6}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'-\frac{11}{54}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-2\frac{a_1}{a_0}\frac{z'}{z^2}-2\frac{a_2}{a_0}\frac{z'}{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\frac{z'}{z}\right\}t,$$

e ora con questi valori di t', t'', t''' otterremo subito la formola seguente

$$a_0t'''+a_1t''+a_2t'+a_3t=\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0}\right\}a_0t,$$

per la quale dietro la osservazione fatta sopra si può dire che per la equazione trasformata della (30) può prendersi senz'altro la seguente

$$(44)\qquad u'''+\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0}\right\}z^6u=\frac{z^4X}{a_0}e^{\int\frac{a_1}{3a_0}dx},$$

nella quale la derivata terza di u s'intende presa rispetto a ξ, mentre le varie derivate di $\frac{a_1}{a_0}$ e $\frac{a_2}{a_0}$ e di z in questa come nelle precedenti si suppongono prese rispetto ad x, e per z s'intende preso uno degli integrali della equazione (36); e dopo fatti i calcoli di queste derivate e scelto l'integrale z, s'intende che nel coefficiente di u e nel secondo membro la variabile x debba venire eliminata e debba invece introdursi la variabile ξ valendosi per questo della solita formola $\xi=\int\frac{dx}{z^2}+\text{cost.}$

509. — In seguito a questi risultati noi possiamo dunque affermare che colle trasformazioni qui indicate la integrazione di qualunque equazione lineare del terz'ordine (30) si ridurrà sempre a quella di una equazione lineare e omogenea del second'ordine (36) priva del secondo termine, e di una del terz'ordine (44) nella quale mancano il secondo e il terzo termine;

e quindi quando queste equazioni (36) e (44) si sapranno integrare si integrerà subito anche la equazione data (30), e il suo integrale y verrà dato dalla formola $y=tu=z^2e^{-\int\frac{a_1}{3a_0}dx}u$, dove z è un integrale della equazione (36) e u è l'integrale della equazione (44), supposta questa equazione tutta espressa per la nuova variabile ξ mediante la formola (37); e s'intende che poi per avere l'integrale y della (30) dovremo tornare ad eliminare ξ da u per mezzo della stessa formola (37) cioè $\xi=\int\frac{dx}{z^2}+\text{cost.}$

E si può anche dire inversamente che quando si parta da una equazione (30) che si sappia integrare, e il cui integrale sia y, se la equazione corrispondente del second'ordine (36) verrà ad essere essa pure fra quelle che si sanno integrare, potremo integrare subito anche la equazione finale (44) in u e ξ, e pel suo integrale u avremo $u=\frac{e^{\int\frac{a_1}{3a_0}dx}}{z^2}y$ dove per x bisognerà intendere introdotta la variabile ξ per mezzo della solita formola $\xi=\int\frac{dx}{z^2}+\text{cost.}$, essendo z un integrale della equazione (36).

In altri termini dunque si potrà dire riassumendo che quando avendosi una equazione lineare del terz'ordine (30), la equazione corrispondente del second'ordine (36) venga ad essere fra quelle che si sanno integrare basterà che si sappia integrare una delle due equazioni (30) e (44) perchè si possa subito integrare anche l'altra, e i loro integrali y e u saranno legati fra loro dalla solita formola $y=z^2e^{-\int\frac{a_1}{3a_0}dx}u$, ecc.

510. — Così in particolare nel caso in cui si abbia

$$(45)\qquad \frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0}=0,$$

dove le derivate dei rapporti $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$ e $\frac{a_3}{a_0}$ qui e in ciò che segue s'intendono sempre prese rispetto ad x, o più generalmente quando avendo potuto integrare la equazione del second'ordine (36) si abbia

$$(46)\qquad \left\{\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0}\right\}z^6=h,$$

essendo in questa h una quantità costante, e essendo z un integrale della (36), allora, siccome la equazione trasformata (44) potrà subito integrarsi, anche l'integrazione della equazione del terz'ordine (30) si effettuerà subito completamente e il suo integrale sarà dato dalla formola $y = tu = z^2 e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx} u$, essendo u l'integrale della equazione trasformata (44) che dovrà ridursi funzione di x colla solita formola $\xi = \int \frac{dx}{z^2} + \text{cost.}$

511. — Più particolarmente dunque se insieme alla (45) avremo l'altra

$$(47) \qquad \left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0,$$

allora sì la (36) che la (44) saranno subito integrabili e sarà $z = ax + b$ con a e b costanti qualsiasi, e

$$u = \int d\xi \int d\xi \int \frac{z^4 X}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{3a_0} dx} d\xi + c + c_1\xi + c_2\xi^2,$$

e in questa valendosi della formola $\xi = \int \frac{dx}{z^2} + \text{cost.}$ e dell'altra $d\xi = \frac{dx}{z^2}$ vi si farà subito comparire x invece di ξ; e quindi, come abbiamo detto, sarà immediatamente integrabile anche la equazione data (30) nella quale il rapporto $\frac{a_1}{a_0}$ rimarrà arbitrario, mentre gli altri due rapporti $\frac{a_2}{a_0}$ e $\frac{a_3}{a_0}$ risulteranno determinati dalla (47) e (45) che si suppongono soddisfatte, e delle quali la (45) a causa della (47) può anche scriversi sotto la forma

$$(48) \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{1}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{a_3}{a_0} = 0.$$

511. — E quando, pure continuando ad essere soddisfatta la condizione (47) non lo sarà però la (45), ma prendendo per z uno degli integrali $z = ax + b$ che si avranno allora per la (36), con a e b costanti qualsiansi, si troverà che con esso è soddisfatta la condizione (46), cioè si avrà

$$(49) \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)' - \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_3}{a_0} = \frac{h}{(ax+b)^6}$$

ovvero per la (47)

$$(50) \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{1}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{a_3}{a_0} = -\frac{h}{(ax+b)^6}$$

con h, a e b costanti scelte convenientemente, allora si potrà senz'altro affermare che tutte le equazioni lineari del terz'ordine (30) per le quali ri-

sulteranno contemporaneamente soddisfatte la condizione (47) e la (49) o la (50) potranno immediatamente integrarsi, e il loro integrale y sarà dato dalla formula $y = (ax+b)^2 e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx} u$ essendo u l'integrale della equazione

$$(51) \qquad u''' + hu = \frac{(ax+b)^4 X}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{3a_0} dx},$$

nella quale al solito la derivata u''' di u s'intende presa rispetto a ξ, e il secondo membro s'intende ridotto funzione di ξ mediante la formola $\xi = \int \frac{dx}{(ax+b)^2} + \text{cost.}$, o $\xi = -\frac{1}{a(ax+b)} + \text{cost.}$ quando si supponga a diversa da zero, come del resto sarà naturale di richiedere perchè si abbia un cambiamento di variabile del quale valga la pena di occuparsi. Nell'integrale y poi al posto della variabile ξ che figurerà in u bisognerà sostituire il valore in x dato da quest'ultima formola.

Così in particolare se la equazione (30) sarà anche omogenea, e se sarà $a = 1$, $b = 0$, $h = 1$, riducendosi allora la (51) all'altra $u''' + u = 0$, il cui integrale è $u = ce^{-\xi} + c_1 e^{-\alpha\xi} + c_2 e^{-\beta\xi}$, nel quale α e β sono le due radici cubiche complesse delle unità e c, c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie, l'integrale della equazione omogenea

$$(52) \qquad a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

sarà dato dalla formola

$$(53) \qquad y = x^2 e^{-\int \frac{a_1}{3a_0} dx} \left(c e^{\frac{1}{x}} + c_1 e^{\frac{\alpha}{x}} + c_2 e^{\frac{\beta}{x}}\right)$$

quando siano soddisfatte le due condizioni

$$(54) \qquad \begin{cases} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0} = 0, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' + \frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{a_3}{a_0} = -\frac{1}{x^6} \end{cases}$$

per le quali il rapporto $\frac{a_1}{a_0}$ resta del tutto arbitrario e gli altri $\frac{a_2}{a_0}$ e $\frac{a_3}{a_0}$ risultano determinati da queste condizioni.

Più particolarmente ancora se la equazione data (52) mancherà già del secondo e terzo termine, allora essendo $a_1 = a_2 = 0$ la prima delle condizioni (54) sarà già soddisfatta e la seconda porterà che la prima di queste sia $\frac{a_3}{a_0} = \frac{1}{x}$, e se ne dedurrà quindi che la equazione $x^6 y''' + y = 0$ avrà per integrale

$$y=x^2\left(c\,e^{\frac{1}{x}}+c_1 e^{\frac{\alpha}{x}}+c_2 e^{\frac{\beta}{x}}\right).$$

512. — Infine, senza più richiedere ora che sia soddisfatta la condizione (47), aggiungiamo in modo più generale che quando si riesca a sapere che con un integrale z della equazione del second'ordine (36) risulta soddisfatta la condizione (46) con h quantità costante diversa da zero, allora se, per abbreviare, indicheremo con H il coefficiente di z^6 nel primo membro dalla formola stessa, cioè se porremo

$$\text{(55)}\qquad \mathrm{H}=\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''+\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0},$$

avremo $\mathrm{H}z^6=h$, e quindi $z=h^{\frac{1}{6}}\mathrm{H}^{-\frac{1}{6}}$ per l'integrale z che considereremo; e avendosi da questa

$$z''_x=h^{\frac{1}{6}}\left(\mathrm{H}^{-\frac{1}{6}}\right)''_x=-\frac{1}{6}h^{\frac{1}{6}}\left(\mathrm{H}^{-\frac{7}{6}}\mathrm{H}'_x\right)'_x,$$

basterà sostituire nella (36) per concluderne subito che nel caso attuale sarà

$$\text{(56)}\qquad \mathrm{H}^{\frac{1}{6}}\left(\mathrm{H}^{-\frac{7}{6}}\mathrm{H}'_x\right)'_x=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}\right\},$$

o anche eseguendo il calcolo nel primo membro.

$$\text{(57)}\qquad \left(\frac{\mathrm{H}'_x}{\mathrm{H}}\right)'_x-\frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{H}'_x}{\mathrm{H}}\right)^2=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}\right\}.$$

Viceversa se, senza partire da un integrale z della (36) e dalla formola (46), si riscontrerà che per una equazione data (30) è soddisfatta quest'ultima condizione (56) e (57) nella quale H è data dalla (55), è certo, pel calcolo che ora abbiamo fatto, che anche allora $z=h^{\frac{1}{6}}\mathrm{H}^{-\frac{1}{6}}$ sarà un integrale della equazione (36) e al tempo stesso risulterà soddisfatta la condizione (46) perchè questa in sostanza non è che la $z=h^{\frac{1}{6}}\mathrm{H}^{-\frac{1}{6}}$ posta sotto altra forma; quindi ora si può anche evidentemente affermare che tutte le equazioni lineari del terz'ordine (30) per le quali risulta soddisfatta la condizione (56) o (57) dove H è dato dalla (55), potranno immediatamente integrarsi, e il loro integrale y sarà dato dalla formola $y=z^2 e^{-\int\frac{a_1}{3a_0}dx}u$, ovvero

$y=\left(\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{3}}e^{-\int\frac{a_1}{3a_0}dx}u$, essendo u l'integrale della equazione

$$\text{(58)}\qquad u'''+hu=\left(\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\mathrm{X}}{a_0}e^{-\int\frac{a_1}{3a_0}dx},$$

nella quale al solito il secondo membro dovrà ridursi funzione di ξ mediante la formola $\xi=\int\frac{dx}{z^2}+\text{cost.}$, o $\xi=\int\left(\frac{\mathrm{H}}{h}\right)^{\frac{1}{3}}dx+\text{cost.}$, colla quale inversamente dovrà poi intendersi eliminato il ξ dal valore di u nell'integrale $y=\left(\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{a_1}{3a_0}dx}u$ della nostra equazione.

513. — Osserviamo anche che se si pone $\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}=p$ la condizione (57) si trasforma nell'altra

$$p'-\frac{1}{6}p^2=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}\right\},$$

che è una delle equazioni di Riccati che come sappiamo (§§ 381 e seg. [pag. 550 e seg.]) s'integrano sotto forma finita in molti casi; e quando questa sia integrata, con una semplice quadratura se ne dedurrà un valore per H che uguagliato al valore (55) darà sotto altra forma la condizione (57) per la quale, quando sia soddisfatta, la equazione data (30) si può subito integrare nel modo testè indicato.

S'intende però che se l'integrale z sarà già stato effettivamente trovato per mezzo della equazione (36) — come ad es. avviene quando la espressione $\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}$ pure essendo diversa da zero è una quantità costante o ad es. è $\frac{3}{x^2}$, o $4\left(n^2x^2+\frac{3}{4x^2}\right)$ (§ 505) —, e se al tempo stesso si sarà riscontrato che con quell'integrale z la (49) riesce soddisfatta, allora anche senza valersi della condizione (56) o (57) l'integrazione della equazione (30) si effettuerà immediatamente come dicemmo ai § 508.

514. — Infine osserviamo che nel caso particolare in cui nella equazione data (30) manchi già il secondo termine, o più generalmente il rapporto $\frac{a_1}{a_0}$ sia una quantità costante k la equazione trasformata (44) si ridurrà all'altra più semplice

$$u'''+\left\{\frac{2}{27}k^3-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)'-\frac{k}{3}\frac{a_2}{a_0}+\frac{a_3}{a_0}\right\}z^6u=\frac{z^4\mathrm{X}}{a_0}e^{\frac{kx}{3}},$$

e la (36) si ridurrà alla seguente

$$z'' + \frac{1}{4}\left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}k^2\right)z = 0\ ;$$

e con queste potranno trovarsi facilmente altri casi nei quali la equazione stessa di terz'ordine (30) può subito integrarsi.