X.

Applicazioni varie dei processi di derivazione e d'integrazione sotto il segno

137. — I teoremi di derivazione e d'integrazione sotto il segno integrale possono tornare utili pel calcolo degli integrali definiti.

Osservando infatti che la derivata di un integrale definito presa rispetto a un parametro contenuto in esso dipende sempre in modo semplice da un altro integrale definito di una funzione che è la derivata di quella che figura sotto l'integrale dato, si intende subito come dalla conoscenza di un integrale definito, nel quale figuri un qualche parametro *o questo vi venga introdotto con un opportuno cambiamento di variabile,* si potranno colla derivazione sotto il segno dedurne altri integrali.

Quando poi calcolato un integrale gli si applichi l'integrazione rispetto a un parametro e si possa determinare anche il nuovo integrale effettivamente, può essere che se si fa l'inversione delle integrazioni si riesca facilmente ad eseguire la prima integrazione nel nuovo integrale doppio e allora, eseguita questa, viene naturalmente ad aversi il valore di un altro integrale definito che in molti casi sarebbe stato difficile a determinarsi per altra via.

Oltre a questo poi la derivazione e la integrazione sotto il segno potranno servire utilmente per trovare relazioni fra certi integrali definiti o trovarne alcune loro particolarità; e tutto questo risulterà chiaro dai seguenti esempi e dalle considerazioni che faremo in questo capitolo.

138. — Incominciamo col dare esempii di integrali definiti che si ottengono da altri per mezzo della derivazione sotto il segno.

1.° Ricordiamo che al § 6 [pag. 14 e seg.] si trovò per $\rho<1$

$$\int_0^\pi \log(1-2\rho\cos x+\rho^2)\,dx=0\,. \tag{1}$$

Da questo integrale derivando rispetto a ρ (il che secondo quanto mostrammo al § 124 [pag. 182 e seg.] può farsi finchè $\rho<1$, perchè allora il logaritmo e la sua derivata sono sempre finiti e continui) si otterrà subito l'altro

$$\int_0^\pi \frac{(2\rho-2\cos x)\,dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}=0\,,$$

il quale, moltiplicato per ρ e aggiuntovi e toltovi uno al numeratore, conduce subito anche all'altro che serve continuamente nell'analisi

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}=\frac{\pi}{1-\rho^2}\,, \tag{2}$$

sempre per $\rho<1$.

Una nuova derivazione darebbe l'altro integrale

$$\int_0^\pi \frac{(2\rho-2\cos x)\,dx}{(1-2\rho\cos x+\rho^2)^2}=-\frac{2\rho\pi}{(1-\rho^2)^2}\,,$$

ovvero moltiplicando i due membri per ρ

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}+\int_0^\pi \frac{(\rho^2-1)\,dx}{(1-2\rho\cos x+\rho^2)^2}=-\frac{2\rho^2\pi}{(1-\rho^2)^2}\,,$$

o anche

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(1-2\rho\cos x+\rho^2)^2}=\frac{\pi(1+\rho^2)}{(1-\rho^2)^3}\,, \tag{3}$$

e così con successive derivazioni rispetto a ρ potrebbero determinarsi infiniti altri integrali.

2.° Osserviamo che si ha $\int_0^1 x^a\,dx=\frac{1}{a+1}$ quando $a>-1$, e derivando questa formola rispetto ad a si ottiene l'altra

$$\int_0^1 x^a \log x\,dx=-\frac{1}{(a+1)^2}\,, \tag{4}$$

che, per quanto dicemmo al § 126 [pag. 185 e seg.] vale sempre per $a>-1$, perchè se a_0 è uno qualunque di questi valori di a superiori a -1, quand'anche sia compreso fra -1 e 0, nel qual caso le funzioni da integrarsi sono infinite per $x=0$, si vede subito che la funzione $x^a \log x$ nella vicinanza di $x=0$ pei valori di a in un intorno piccolissimo $(a_0-k)\ a_0+k$ di a_0 è sempre inferiore alla funzione $x^{a_0-k-\delta}$ che, quando i numeri diversi da zero e positivi k e δ siano presi sufficientemente piccoli per modo che si abbia $a_0-k-\delta>-1$, è sempre atta alla integrazione.

Continuando le derivazioni rispetto ad a si trova in generale alla n^a derivazione

$$(5)\qquad \int_0^1 x^a (\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{\pi(n)}{(a+1)^{n+1}}.$$

3.° Partendo dall'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang} x\, dx = \frac{1}{2}\log 2$, si introdurrà prima un parametro variabile a facendo la sostituzione $x=ay$ con a diverso da zero e poi cambiando y in x; con che si avrà la formola

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \operatorname{tang} ax\, dx = \frac{\log 2}{2a};$$

e ora derivando una prima volta rispetto ad a si troverà

$$\int_0^{\frac{\pi}{4a}} \frac{x}{\cos^2 ax}\, dx = \frac{\pi - 2\log 2}{4a^2},$$

e derivando ancora si avrà

$$\int_0^{\frac{\pi}{4a}} \frac{x^2 \operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\, dx = \frac{\pi^2 - 4(\pi - 2\log 2)}{16 a^3};$$

e così con derivazioni successive si potranno trovare quanti integrali si vogliano.

Facendo in questi $a=1$ si avranno gli integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx, \dots$$

4.° Più in generale supposto di avere determinato l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

e che si abbia $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \mathrm{A}$, essendo A una quantità conosciuta, e ammesso che $f(x)$ abbia le sue derivate rispetto ad x fra α e β determinate e finite fino a quelle di un certo ordine, si introdurrà prima il parametro a facendo la trasformazione $x=ay$ con a diverso da zero e cambiando poi y in x, con che si avrà la formola $\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} f(ax)\, dx = \frac{\mathrm{A}}{a}$, e dopo con derivazioni successive rispetto ad a si troveranno subito le altre

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} x f'(ax)\, dx - \frac{\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)}{a^2} = -\frac{\mathrm{A}}{a^2}, \\[2ex] \displaystyle\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} x^2 f''(ax)\, dx - \frac{\beta^2 f'(\beta) - \alpha^2 f'(\alpha)}{a^3} + 2\frac{\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)}{a^3} = 2\frac{\mathrm{A}}{a^3}, \end{cases}$$

che determineranno gli altri integrali $\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} x f'(ax)\, dx$, $\int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} x^2 f''(ax)\, dx$, che per $a=1$ si riducono ai seguenti $\int_\alpha^\beta x f'(x)\, dx$, $\int_\alpha^\beta x^2 f''(x)\, dx, \dots$

Questi integrali del resto possono ottenersi subito dal primo anche con successive integrazioni per parti.

5.° Ricordiamo che si trovarono i due integrali (§ 43 [pag. 83])

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = e^{ax} \frac{a\cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2+b^2} + \mathrm{C}, \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{sen} bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + \mathrm{C},$$

e cambiando a in $-a$ e poi supponendo a diverso da zero e positivo onde le funzioni da integrarsi restino atte all'integrazione anche da 0 a ∞, si otterranno subito i due integrali definiti

$$(8)\qquad \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

e anche questi colla derivazione condurranno a altri integrali molto notevoli.

Osserviamo infatti che le derivate rispetto ad a di $e^{-ax}\cos bx$ e $e^{-ax}\operatorname{sen} bx$ sono $-xe^{-ax}\cos bx$ e $-xe^{-ax}\operatorname{sen} bx$, e che la funzione $xe^{-(a_0-k)x}$, formata da numeri uguali o superiori ai massimi fra i valori assoluti che esse prendono quando, restando la stessa la x, a varia fra a_0+k e a_0-k (essendo k e a_0 positivi e diversi da zero e $k<a_0$), è anch'essa atta alla integrazione fra 0 e ∞; da questo, per quanto si disse al § 127 [pag. 188 e seg.] si dedurrà subito che gli integrali precedenti (8) si potranno derivare rispetto ad a sotto il segno, e così si otterranno gli altri

$$\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} \quad , \quad \int_0^\infty x e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} ,$$

che con nuove derivazioni successive relative ad a o anche a b ci darebbero altri integrali che, come questi e i precedenti, rientrano tutti nelle forme $\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-ax} \cos bx\, dx$ e $\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx$, con λ numero intero e positivo qualsiasi.

Volendo le formole che dànno questi integrali anche per tutti gli altri valori diversi da zero e positivi di λ converrà procedere nel modo seguente.

Supponendo a e λ numeri reali diversi da zero e positivi qualsiansi e b pure reale ma qualunque, si prenda a considerare l'integrale complesso $u=\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-(a+ib)x}\, dx$ che risulta dalla somma dei due integrali reali $\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-ax} \cos bx\, dx$ e $\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx$ dopo avere moltiplicato il secondo per $-i$.

Osservando che la funzione $x^{\lambda-1} e^{-(a+ib)x}$ è il prodotto delle due $x^{\lambda-1} e^{-ax}$ e e^{-ibx}, e che si ha in serie convergente in qualunque intervallo finito

$$e^{-ibx} = 1 - \frac{ibx}{1} + \frac{(ibx)^2}{1.2} - \frac{(ibx)^3}{1.2.3} + \dots ,$$

basta moltiplicare per $x^{\lambda-1} e^{-ax}$ e poi applicare la integrazione per serie fra 0 e ∞ per vedere subito che si ha

$$u = a^{-\lambda} \left\{ \Gamma(\lambda) - \frac{ib}{a} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{1} + \left(i\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\Gamma(\lambda+2)}{1.2} - \left(i\frac{b}{a}\right)^3 \frac{\Gamma(\lambda+3)}{1.2.3} + \dots \right\},$$

essendo in generale $\Gamma(z)$ la funzione Euleriana di seconda specie definita dalla formola $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = a^z \int_0^\infty x^{z-1} e^{-ax} dx$ per tutti i valori reali diversi da zero e positivi di z e per la quale, come vedemmo al § 76. b [pag. 117-118], si ha

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1)\, a\, \Gamma(a) ,$$

per ogni valore intero e positivo di n; quindi avremo evidentemente per $\left|\frac{b}{a}\right|<1$

$$u = a^{-\lambda}\Gamma(\lambda) \left\{ 1 - \frac{\lambda}{1}\frac{ib}{a} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\left(\frac{ib}{a}\right)^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2.3}\left(\frac{ib}{a}\right)^3 + \dots \right\} = a^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\left(1+i\frac{b}{a}\right)^{-\lambda},$$

ciò che permette di dire che per l'integrale cercato si ha la formola seguente

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-(a+ib)x} dx = \Gamma(\lambda)(a+ib)^{-\lambda}$$

che è dimostrata così intanto pei valori di b pei quali $|b|<a$.

Per estenderla ora anche agli altri valori reali di b, osserviamo che, dopo di averla dimostrata per un certo valore b_0 di b (come ora intanto abbiamo fatto pei valori di b compresi fra $-a$ e a e diversi da questi estremi $\pm a$), se si vuole considerare l'integrale per un altro valore $b_0+\beta$ di b, si potrà scrivere

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-[a+i(b_0+\beta)]x} dx = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-(a+ib_0)x} e^{-i\beta x} dx ,$$

e quindi prendendo la serie esponenziale relativa a $e^{-i\beta x}$ cioè

$$e^{-i\beta x} = 1 - \frac{i\beta}{1}x + \frac{(i\beta)^2}{1.2}x^2 - \frac{(i\beta)^3}{1.2.3}x^3 + \dots ,$$

e poi integrandola dopo averla moltiplicata per $x^{\lambda-1} e^{-(a+ib_0)x} dx$, e tenendo conto della formola precedente che si suppone dimostrata per $b=b_0$, avremo subito l'altra

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-[a+i(b_0+\beta)]x} dx = \Gamma(\lambda)(a+ib_0)^{-\lambda} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{1}\frac{i\beta}{a+ib_0} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\left(\frac{i\beta}{a+ib_0}\right)^2 - \dots \right\}$$

che varrà pei valori di β pei quali si ha $\left|\frac{i\beta}{a+ib_0}\right|<1$ o $|\beta|<\sqrt{a^2+b_0^2}$; e questa per gli stessi valori di β ci darà la formola seguente

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-[a+i(b_0+\beta)]x} dx = \Gamma(\lambda)(a+ib_0)^{-\lambda}\left(1+\frac{i\beta}{a+ib_0}\right)^{-\lambda} = \Gamma(\lambda)[a+i(b_0+\beta)]^{-\lambda}$$

la quale estende la formola che abbiamo già trovata pel caso di $|b|<a$, e che abbiamo supposto vera per $b=b_0$, anche ai valori di $b=b_0+\beta$, e ora procedendo così successivamente si vede che *per qualunque valore reale di b e per tutti i valori reali diversi da zero e positivi di a e di λ si ha la formola seguente*

$$(9)\qquad \int_0^\infty x^{\lambda-1}\,e^{-(a+ib)x}\,dx=\frac{\Gamma(\lambda)}{(a+ib)^\lambda};$$

per la quale si può anche notare che essa è quella che viene dalla formola $\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx=\Gamma(\lambda)$ facendo la trasformazione $x=ky$, con k quantità complessa $a+ib$ colla parte reale a diversa da zero e positiva, e poi tornando a scrivere x al posto di y.

Da questa separando nei due membri la parte reale e la parte immaginaria coll'avere ben riguardo al valore che si prende per $(a+ib)^\lambda$ quando λ non è intero si hanno subito gli integrali cercati $\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-ax}\cos bx\,dx$ e $\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx$.

E introducendo il modulo ρ e l'argomento θ di $a+ib$, cioè ponendo $a+ib=\rho^{i\theta}$, con $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta=\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}$, intendendo che per l'arco-tangente si debba prendere quello fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ che ha per tangente $\frac{b}{a}$ quando a è positivo e quello fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ quando a è negativo perchè possa essere $\rho\cos\theta=a$, allora siccome sarà

$$\frac{1}{(a+ib)^\lambda}=\frac{1}{\rho^\lambda e^{i\lambda\theta}}=\frac{e^{-i\lambda\theta}}{\rho^\lambda}=\frac{\cos\lambda\theta}{\rho^\lambda}-i\frac{\operatorname{sen}\lambda\theta}{\rho^\lambda}$$

avremo le formole

$$(10)\quad \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{\Gamma(\lambda)\cos\lambda\theta}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda}{2}}},\qquad \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx=\frac{\Gamma(\lambda)\operatorname{sen}\lambda\theta}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda}{2}}},$$

che facendo la trasformazione $x^\lambda=y$ e poi tornando a scrivere x al posto di

y e cambiando λ in $\frac{1}{\lambda}$ dànno luogo alle altre

$$(11)\quad \int_0^\infty e^{-ax^\lambda}\cos bx^\lambda\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\cos\frac{\theta}{\lambda}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2\lambda}}},\qquad \int_0^\infty e^{-ax^\lambda}\operatorname{sen} bx^\lambda\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{\lambda}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2\lambda}}};$$

θ in questa formola essendo l'arco determinato nel modo indicato sopra.

Derivando la (9) rispetto ad a o a b essa non dà nulla di nuovo perchè conduce alla stessa formola nella quale il λ sia cambiato in $\lambda+1$; derivandola invece una o più volte rispetto a λ conduce ad altri integrali pei quali si hanno le formole complesse

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\log x\,e^{-(a+ib)x}dx=\frac{\Gamma'(\lambda)-\Gamma(\lambda)\log(a+ib)}{(a+ib)^\lambda},$$

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(\log x)^2e^{-(a+ib)x}dx=\frac{\Gamma''(\lambda)-2\Gamma'(\lambda)\log(a+ib)+\Gamma(\lambda)[\log(a+ib)]^2}{(a+ib)^\lambda}$$

. . . .

che col separare le parti reali e immaginarie dànno luogo a nuovi integrali reali ecc.

6.° Osserviamo che dalla formola $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ col solito cambiamento di variabile si avrà l'altra pure nota $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$, ovvero $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, a e $\sqrt{a}$ essendo presi positivamente; e da questa ultima applicando la derivazione sotto il segno rispetto ad a, il che per quanto dicemmo al § 127 [pag. 188 e seg.] si verifica subito che può farsi, si dedurranno con successive derivazioni gli altri integrali

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a)^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}},\quad \int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a)^3}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3}{2.4}\,a^{-\frac{5}{2}},\ldots$$

e in generale

$$(12)\quad \int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi(2n)}{2^{2n}[\pi(n)]^2}\,a^{-\frac{2n+1}{2}},\ldots$$

7.° Ricordiamo che per quanto dicemmo ai §§ 79 e 123 [pag. 123-24 e 180-81] si ha la formola

$$(13)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\theta i}} = \pi \frac{e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen} \pi a},$$

che vale per tutti i valori di a fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e per θ compreso fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.), e osserviamo che gli integrali delle derivate rispetto ad a sono i seguenti

$$(14)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x}{x+e^{\theta i}}\,dx\ ,\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}(\log x)^2}{x+e^{\theta i}}\,dx, \ldots$$

e per questi integrali, con quei processi stessi che si seguirono al § 123 per l'integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\theta i}}$, si dimostra che essi sono funzioni finite e continue di a.

Per questo ricordando quanto dicemmo sopra al § 128 [pag. 190-91] si può assicurare che gli stessi integrali rappresentano le derivate dell'integrale dal quale si parte, e quindi pel primo integrale avremo

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x}{x+e^{\theta i}}\,dx = \pi e^{(a-1)\theta i}\,\frac{\theta i \operatorname{sen} \pi a - \pi \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a};$$

e di qui con nuove derivazioni rispetto ad a del secondo membro si avrebbero anche gli altri integrali.

Per $\theta = 0$ avremo gli integrali seguenti

$$(16)\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}\ ,\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}(\log x)^2}{1+x}\,dx = \pi^3\,\frac{\operatorname{sen}^2 \pi a + 2\cos^2 \pi a}{\operatorname{sen}^3 \pi a}, \ldots$$

che per valori particolari di a fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), ad es. per $a = \frac{1}{2}$, dànno luogo a formole assai notevoli.

Le precedenti poi, come la (13), separandovi la parte reale dalla immaginaria, o cambiandovi θ in $-\theta$ e sommando o sottraendo, dànno luogo ad altre che sono pure notevoli.

In particolare dalle (13) e (15) si hanno le seguenti

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x^2+2x\cos\theta+1} = -\pi\,\frac{\operatorname{sen}(a-1)\theta}{\operatorname{sen}\pi a \operatorname{sen}\theta}, \\[2ex] \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x\,d\theta}{x^2+2x\cos\theta+1} = \pi\,\frac{\pi \operatorname{sen}(a-1)\theta \cos \pi a - \theta \cos(a-1)\theta \operatorname{sen}\pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a \operatorname{sen}\theta}, \end{cases}$$

che valgono per θ compreso fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.), intendendo che nei secondi membri per $\theta = 0$ si debbano prendere i valori limiti $\pi\frac{1-a}{\operatorname{sen}\pi a}$ e $\pi\frac{(a-1)\pi\cos\pi a - \operatorname{sen}\pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$.

Derivando successivamente la (13) rispetto a θ invece che rispetto ad a si hanno anche le altre formole

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+e^{\theta i})^2} = -\pi\,\frac{(a-1)\,e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen}\pi a}\ ,\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+e^{\theta i})^3} = \pi\,\frac{(a-1)^2\,e^{(a-1)\theta i}}{2\operatorname{sen}\pi a}, \ldots,$$

e in generale si ha la formola seguente

$$(18)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(x+e^{\theta i})^n} = (-1)^{n-1}\,\pi\,\frac{(a-1)^{n-1}\,e^{(a-1)\theta i}}{\pi(n-1)\operatorname{sen}\pi a},$$

dove n è numero intero positivo qualunque (lo zero escluso).

Per $\theta = 0$ si ha

$$(19)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1}\,\pi\,\frac{(a-1)^{n-1}}{\pi(n-1)\operatorname{sen}\pi a}.$$

8.° Talvolta, invece di conoscere l'integrale dal quale si parte, si conosce quello che si ottiene colla derivazione rispetto ad un parametro, e allora dalla conoscenza di questo si cerca di ottenere il primo con una integrazione rispetto a quel parametro.

Così, volendo determinare l'integrale $u = \int_0^\pi \frac{\log(1+b\cos x)}{\cos x}\,dx$, che è certo determinato e finito perchè non porta nessuna singolarità il valore $\frac{\pi}{2}$ di x pel quale nella funzione sotto l'integrale il denominatore viene zero insieme al numeratore e la funzione si riduce a b, si osserverà che si ha $\frac{du}{db}=\int_0^\pi \frac{dx}{1+b\cos x}$, e supponendo ora $|b|<1$ e ricordando la formola (37) della pag. 92 si vede che si ha $\frac{du}{db}=\frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}$, dal che risulta subito che $u=\pi \operatorname{arc\,sen} b+C$ essendo C una costante, e poichè per $b=0$ deve essere $u=0$ si conclude che sarà $u=\pi \operatorname{arc\,sen} b$, cioè $\int_0^\pi \frac{\log(1+b\cos x)}{\cos x}dx=\pi \operatorname{arc\,sen} b$, quando $|b|<1$, e s'intende che arc sen b sia compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

139. — Dati ora così molti esempii di integrali ottenuti da altri per mezzo della derivazione sotto il segno, passiamo a darne alcuni di integrali che si determinano invece colla integrazione sotto il segno direttamente, o almeno con considerazioni per le quali occorre valersi anche della integrazione sotto il segno, e esponiamo poi altre considerazioni valendoci sia della derivazione sia della integrazione sotto il segno.

1.° Riprendiamo la prima delle formole (8) e integriamola fra 0 e b rispetto a b dopo averla moltiplicata per db.

Colla inversione delle integrazioni, che evidentemente è possibile quando $a>0$ (§ 133 [pag. 196]), si troverà l'altro integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ e si avrà la formola

(20) $$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx=\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a},$$

che varrà sempre quando $a>0$.

Ora è da osservare che se anche non si avesse così per $a>0$ l'effettivo valore arc tang $\frac{b}{a}$ di questo integrale dal quale apparisce subito che come funzione di a esso è finito è continuo per ogni valore diverso da zero e positivo a_0 di a, basterebbe ricordare le considerazioni del § 121 [pag. 178 e seg.] per assicurarsi che l'integrale stesso $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ è finito e continuo per ogni valore $a_0>0$ di a; perchè per a e x finiti la funzione sotto l'integrale $e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}$ è sempre finita e continua rispetto al sistema di queste variabili a e x, e inoltre in ogni intorno $(a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon')$ di a_0 la funzione stessa non è mai superiore in valore assoluto

all'altra $\frac{e^{-(a_0-\varepsilon)x}}{x}$ che è atta all'integrazione da un numero qualsiasi c diverso da zero all'infinito, e questo ci assicura che l'integrale medesimo $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ in quell'intorno $(a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon')$ è convergente in ugual grado, e quindi è continuo per $a=a_0$ quando $a_0>0$.

Per $a=0$ poi esso si riduce all'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ che ha ancora un significato (§ 74 [pag. 114-15]) e che col cambiare bx in x, quando b è diverso da zero e positivo, si trasforma nell'altro $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ del quale già trovammo il valore $\frac{\pi}{2}$ per altra via al § 112 [pag. 164 e seg.]; ma, se questo già non si sapesse, il trovare che valendosi della (20) anche per $a=0$ con b diverso da zero si otterrebbe appunto $\frac{\pi}{2}$ come valore dello stesso integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ o $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, non basterebbe ad assicurarci della esattezza di questo risultato, perchè per la dimostrazione della formola (20) abbiamo supposto esplicitamente che fosse $a>0$, e d'altra parte la dimostrazione precedente della continuità dell'integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ per $a>0$ non basta più affatto pel caso di $a=0$ perchè il teorema del § 121 non assicura più della convergenza in ugual grado di questo integrale nell'intorno del punto $a=0$ a destra (*).

La continuità di questo integrale però può ancora dimostrarsi con un altro processo molto semplice che ora indicheremo, dopo di che, indipendentemente dalla determinazione già fatta al ricordato § 112 dell'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$, si potrà senz'altro affermare che la formola (20) vale anche per $a=0$, cioè si ha $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ per $b>0$.

(*) Però la convergenza in ugual grado per l'integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ anche nell'intorno del punto $a=0$ a destra, e quindi anche la sua continuità in questo punto, risulterà subito dall'altro criterio sulla convergenza in ugual grado che già dicemmo in fine del § 121 che sarà dato in seguito.

Si spezzi infatti l'integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ nei due $\int_0^c e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ e $\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$, essendo c un numero qualunque diverso da zero e positivo, e si osservi che il primo di questi integrali come funzione di a è certamente continuo per $a=0$ in forza del teorema del § 117 [pag. 171 e seg.], talchè basterà considerare il secondo e dimostrare che questo coll'impiccolire indefinitamente di a tende verso l'integrale $\int_c^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$.

Ora colla integrazione per parti si ha per $a>0$

$$\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = e^{-ac}\frac{\cos bc}{bc} - \frac{1}{b}\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\cos bx}{x^2}\,dx - \frac{a}{b}\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\cos bx}{x}\,dx,$$

$$\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\cos bx}{x}\,dx = -e^{-ac}\frac{\operatorname{sen} bc}{bc} + \frac{1}{b}\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x^2}\,dx + \frac{a}{b}\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx,$$

e quindi si avrà la formola

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = e^{-ac}\,\frac{b\cos bc + a\operatorname{sen} bc}{b^2 c} - \frac{1}{b^2}\int_c^\infty e^{-ax}\,\frac{b\cos bx + a\operatorname{sen} bx}{x^2}\,dx$$

la quale, coll'osservare che l'integrale del secondo membro considerato come funzione di a converge in ugual grado anche negli intorni a destra del punto $a=0$ e quindi è continuo anche in questo punto, ci mostra che il nostro integrale $\int_c^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ col tendere di a a zero tende verso la quantità $\frac{\cos bc}{c} - \frac{1}{b}\int_c^\infty \frac{\cos bx}{x^2}\,dx$ che è appunto l'integrale $\int_c^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ al quale sia stata applicata una integrazione per parti, e così resta dimostrato quanto volevamo (*).

(*) Notiamo che questo processo di dimostrazione si applica anche al caso degli integrali più generali $\int_c^\infty e^{-ax}\varphi(x)\operatorname{sen} bx\,dx$ e $\int_c^\infty e^{-ax}\varphi(x)\cos bx\,dx$ nei quali $\varphi(x)$ è una funzione che tende a zero al crescere indefinito di x e da un certo numero finito qualsiasi all'infinito ammette sempre una derivata che resta atta alla integrazione anche ridotta ai valori assoluti; e si applica anche a molti altri integrali.
E questi integrali convergono in ugual grado anche negli intorni (a destra) di $a=0$.

Aggiungiamo che per b negativo si trova invece $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}$, mentre per $b=0$ l'integrale è zero, talchè questo integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ ha una discontinuità per $b=0$, e quindi come funzione di b esso non può convergere in ugual grado nell'intorno del punto $b=0$ (§ 121 [pag. 178 e seg.]).

2.° Vogliasi ora calcolare l'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ che è certo determinato e finito (§ 73 [pag. 112 e seg.]), e che chiameremo K.

Cambiandovi x in $y\sqrt{a}$ onde introdurre un altro parametro a rapporto a cui si possa poi fare un'altra integrazione, e poi tornando a porre x al posto di y si troverà $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{K}{\sqrt{a}}$, intendendo che a e $\sqrt{a}$ siano positivi; e quindi moltiplicando per $e^{-a}da$ e integrando fra 0 e ∞, ciò che può farsi perchè pel teorema ricordato del § 73 e per quello del § 63 [pag. 103] la funzione $\frac{e^{-a}}{\sqrt{a}}$ è atta alla integrazione fra 0 e ∞, si avrà intanto

$$\int_0^\infty da\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}dx = K\int_0^\infty \frac{e^{-a}\,da}{\sqrt{a}};$$

e poichè ponendo nell'integrale del secondo membro $a=z^2$, con che $\frac{da}{\sqrt{a}} = 2dz$, si ha $\int_0^\infty \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}}da = 2\int_0^\infty e^{-z^2}dz = 2K$, si avrà anche

$$\int_0^\infty da\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}dx = 2K^2, \tag{21}$$

talchè determinando l'integrale doppio del primo membro si potrà poi avere subito il valore cercato di K.

Ora con questo integrale doppio noi siamo evidentemente nel caso considerato al § 136 [pag. 200 e seg.] perchè il primo integrale $\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}dx$ è uguale a $\dfrac{\mathrm{K}\,e^{-a}}{\sqrt{a}}$ e quindi diviene infinito per $a=0$; però siccome l'altro integrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}\,da$ è uguale a $\dfrac{1}{1+x^2}$ ed è sempre finito, e la funzione sotto il segno $e^{-a(1+x^2)}$ è essa pure sempre finita, pel teorema dello stesso § 136 basterà assicurarsi che all'uno o all'altro dei due integrali $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty da\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}\,dx$ e $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_\varepsilon^\infty e^{-a(1+x^2)}\,da$ è applicabile l'inversione delle integrazioni e che l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_\varepsilon^\infty e^{-a(1+x^2)}\,da$ o $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$ converge in ugual grado nell'intorno di $\varepsilon=0$ a destra per essere certi che anche all'integrale doppio $\displaystyle\int_0^\infty da\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}\,dx$ è applicabile l'inversione delle integrazioni.

Ora applicando le considerazioni del § 135 si verifica con tutta facilità che sono soddisfatte tutte le condizioni che si richiedono per potere essere sicuri che all'integrale $\displaystyle\int_0^\infty dx\int_\varepsilon^\infty e^{-a(1+x^2)}\,da$ è applicabile l'inversione delle integrazioni; e d'altra parte si vede pure subito che l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$ converge in ugual grado nell'intorno di $\varepsilon=0$ a destra perchè la funzione sotto l'integrale per ε diverso da zero è sempre minore dell'altra $\dfrac{1}{1+x^2}$ che è atta alla integrazione fra 0 e ∞; dunque risultando certo ora che nell'integrale doppio del primo membro della (21) può farsi la inversione delle integrazioni potremo scrivere

$$2\,\mathrm{K}^2=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-a(1+x^2)}\,da=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,,$$

e si avrà perciò $\mathrm{K}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ciò che permette di dire che si hanno le formole seguenti

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,\tag{22}$$

e

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,,\tag{23}$$

la prima delle quali dà appunto l'integrale cercato, e nella seconda $\alpha>0$.

140. — Osserviamo che l'ultima formola, derivandola ripetute volte rispetto ad α, il che potrà sempre farsi quando $\alpha>0$, dà subito luogo alle altre pure notevoli

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2\,dx=-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)'\,,\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^4\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)''\,,\ldots$$

$$\ldots,\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx=(-1)^n\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)},$$

ovvero

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{-1}\,,\\
&\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^4\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{1.3}{2^2}\,\alpha^{-2}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\alpha^{-n}\,;
\end{aligned}\right.\tag{24}$$

e ora con queste formole ci sarà facile determinare anche l'altro integrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos 2\beta x\,dx$ essendo β una costante reale qualsiasi.

Osserviamo infatti che si ha in serie convergente in ugual grado in ogni intervallo finito relativo ad x

$$\cos 2\beta x=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{2^{2n}\beta^{2n}x^{2n}}{\pi(2n)}\,;$$

e quindi, in forza di quanto dicemmo ai §§ 101 e seg. [pag. 147 e seg.], a questa serie dopo di averla moltiplicata per $e^{-\alpha x^2}$ può applicarsi l'integrazione rispetto ad x fra 0 e ∞ per qualunque valore finito di β.

Da questo si dedurrà subito che si ha

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos 2\beta x\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{2^{2n}\beta^{2n}}{\pi(2n)}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2n}\,dx\,,$$

ovvero per le formole precedenti (24)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos 2\beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_0^\infty (-1)^n 2^n \frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2n-1)}{\pi(2n)}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{2^n}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,2n}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^n}{\pi(n)}\,,$$

e si avrà quindi infine per l'integrale cercato

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos 2\beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}\,, \tag{25}$$

141. — Il processo del quale ci siamo valsi nel § 139 per determinare l'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ può applicarsi in modo più generale sia per la ricerca di altri integrali, quando si sa che questi sono determinati e finiti, sia per trovare relazioni notevoli fra integrali definiti e fra funzioni speciali rappresentate da tali integrali.

Indichiamo infatti con I il valore di un integrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ che voglia considerarsi, e introduciamo un parametro ausiliario a col porre $x=\varphi(a)\,y$, essendo $\varphi(a)$ una funzione di a, da considerarsi soltanto per $a=0$ e pei valori positivi di a, che sia zero per $a=0$ e sia positiva e continuamente e indefinitamente crescente pei valori positivi e crescenti all'infinito di a.

Sarà $dx=\varphi(a)\,dy$, e quindi, sostituendo nell'integrale I e poi tornando a porre x al posto di y, avremo

$$\frac{1}{\varphi(a)}\,\mathrm{I} = \int_0^\infty f[\varphi(a)\,x]\,dx\,,$$

e se $\psi(a)$ è un'altra funzione di a tale che la funzione $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ sia atta alla integrazione fra 0 e ∞, moltiplicando per $\psi(a)$ e facendo una nuova integrazione rispetto ad a avremo anche

$$\mathrm{I}\int_0^\infty \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da = \int_0^\infty da\int_0^\infty \psi(a)\,f[\varphi(a)\,x]\,dx\,,$$

perchè I ha un valore determinato indipendente da a; e posto infine $a=a(t)$ essendo $a(t)$ una funzione sempre crescente da $t=0$ a $t=\infty$, per la quale si ha $a(0)=0$, $a(\infty)=\infty$, e che ha una derivata sempre determinata e integrabile insieme al prodotto $\frac{\psi[a(t)]}{\varphi[a(t)]}a'(t)$ nell'intervallo da $t=0$ a $t=\infty$, avremo la formola seguente

$$\mathrm{I}\int_0^\infty \frac{\psi[a(t)]}{\varphi[a(t)]}\,a'(t)\,dt = \int_0^\infty da\int_0^\infty \psi(a)\,f[\varphi(a)\,x]\,dx\,, \tag{26}$$

la quale, se nell'integrale doppio del secondo membro sarà possibile la inversione delle integrazioni, potrà scriversi sotto la forma

$$\mathrm{I}\int_0^\infty \frac{\psi[a(t)]}{\varphi[a(t)]}\,a'(t)\,dt = \int_0^\infty dx\int_0^\infty \psi(a)\,f[\varphi(a)\,x]\,da\,; \tag{27}$$

e questa formola, quando gli integrali che figurano nei due membri siano conosciuti o possano facilmente determinarsi, o in qualche modo si possano esprimere per I, darà luogo a una relazione in I che potrà condurci alla determinazione dell'integrale stesso I, come appunto avvenne nel § 139 pel caso particolare che allora considerammo dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$; e in ogni modo, a causa della tanta indeterminazione che resta nelle funzioni $\varphi(a)$, $\psi(a)$ ed $a(t)$ darà luogo a infinite relazioni fra l'integrale che si considera I e altri integrali definiti.

142. — Così ad esempio se si cambia $f(x)$ in $f(x^k)$ e si prende $\varphi(a)=a^{\frac{\mu}{k}}$, $\psi(a)=a^\nu\,\mathrm{F}(a^\mu)$, essendo k, μ e ν numeri diversi da zero e positivi e $\mathrm{F}(z)$ una funzione qualsiasi tale che con essa le condizioni che si avevano sopra per le $\psi(a)$ e $\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$ risultino soddisfatte pei prodotti $a^\nu\,\mathrm{F}(a^\mu)$ e $a^{\nu-\frac{\mu}{k}}\mathrm{F}(a^\mu)$, avremo

la formola

$$\mathrm{I}\int_0^\infty a^{\nu-\frac{\mu}{k}}\,\mathrm{F}(a^\mu)\,da=\int_0^\infty dx\int_0^\infty a^\nu \mathrm{F}(a^\mu)\,f(a^\mu x^k)\,da\ ,$$

che col porre $a^{\nu+1-\frac{\mu}{k}}=t$ si trasforma nell'altra

$$\frac{\gamma}{\mu}\,\mathrm{I}\int_0^\infty \mathrm{F}(t^\gamma)\,dt=\int_0^\infty dx\int_0^\infty a^\nu\,\mathrm{F}(a^\mu)\,f(a^\mu x^k)\,da\,, \tag{28}$$

nella quale $\mathrm{I}=\int_0^\infty f(x^k)\,dx$ e le costanti positive μ e ν restano indeterminate e $\frac{1}{\gamma}=\frac{\nu+1}{\mu}-\frac{1}{k}$, e per le nostre ipotesi intorno ad $a\,(t)$ deve essere $\frac{\nu+1}{\mu}>\frac{1}{k}$, e la funzione $\mathrm{F}(z)$ è soggetta alla sola condizione che il prodotto $a^{\nu-\frac{\mu}{k}}\,\mathrm{F}(a^\mu)$ sia atto alla integrazione rispetto ad a da 0 a ∞ e che al tempo stesso l'integrale doppio $\int_0^\infty dx\int_0^\infty a^\nu\,\mathrm{F}(a^\mu)\,f(a^\mu x^k)\,da$ risulti tale che ad esso sia applicabile la inversione delle integrazioni.

143. — La formola trovata è assai notevole per la sua generalità e per le applicazioni che possono farsene particolarizzando le funzioni $f(z)$ e $\mathrm{F}(z)$ e le costanti che vi figurano.

Supponendovi $\mathrm{F}(z)=f(z)=e^{-z}$, essa conduce subito a una formola nota di grande importanza che lega le *funzioni Euleriane di seconda specie, o funzioni* Γ, a quelle conosciute sotto il nome di *funzioni Euleriane di prima specie,* che sono a due parametri diversi da zero e positivi a e b, e sono definite dalla formola

$$\mathrm{B}\,(a,b)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\ , \tag{29}$$

o anche dall' altra

$$\mathrm{B}\,(a\ ,\ b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{30}$$

che si ottiene dalla precedente facendovi $x=\frac{y}{1-y}$ e poi tornando a scrivere y al posto di x (*)

Si osservi infatti che per la ipotesi fatta di $f(z)=e^{-z}$ si ha $\mathrm{I}=\int_0^\infty e^{-x^k}\,dx$; e siccome per le funzioni Γ si ha in generale $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$, basta porre $x^a=y$ e quindi $ax^{a-1}\,dx=dy$ e $x=y^{\frac{1}{a}}$, e poi tornare a scrivere x

---

(*) Siccome la (29) si può scrivere sotto la forma

$$\mathrm{B}\,(a\,,b)=\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx+\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\,,$$

se si osserva che cambiando nel secondo integrale x in $\frac{1}{y}$ e poi tornando a scrivere x al posto di y si ha la formola

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\,,$$

si trova per $\mathrm{B}\,(a\,,b)$ anche la seguente espressione

$$\mathrm{B}\,(a\,,b)=\int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\ ,$$

la quale mette in evidenza che queste funzioni $\mathrm{B}\,(a\,,b)$ non mutano cambiando a in b e b in a, cioè si ha $\mathrm{B}\,(a\,,b)=\mathrm{B}\,(b\,,a)$; come del resto risulta subito anche dalla (30) perchè cambiando in questa nell' integrale del secondo membro x in $1-y$ e poi scrivendo ancora x al posto di y si trova appunto $\mathrm{B}\,(a\,,b)=\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx=\mathrm{B}\,(b\,,a)$.

Questa proprietà poi risulta anche dalla formola (33) che viene data sopra nella pagina seguente.

Qui poi osserveremo anche che cambiando nella (30) x in $\mathrm{sen}^2\,\varphi$ si ha quest'altra espressione di $\mathrm{B}(a\,,b)$

$$\mathrm{B}\,(a\,,b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2a-1}\,\varphi\,\cos^{2b-1}\varphi\,d\varphi$$

che è molto notevole, e alla quale possono naturalmente applicarsi tutte le formole di riduzione e trasformazione che si dettero al § 44 [pag. 84 e seg.].

Con queste nel caso di a e b numeri interi o metà di numeri interi si trova con tutta facilità il valore corrispondente di $\mathrm{B}(a\,,b)$ quale risulta subito anche dalla formola (33) del testo. In particolare si trova che $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$ come si ha anche dalla (32) del testo.

al posto di y per avere per $\Gamma(a)$ anche l'altra espressione

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{a}}}\,dx, \tag{31}$$

per la quale si vede subito che $\mathrm{I} = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$, e così la (28) dà luogo all'altra

$$\frac{1}{k\mu}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty a^\nu e^{-a^\mu(1+x^k)}\,da,$$

la quale, col porre $a^\mu(1+x^k) = y$, prende la forma

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu} - \frac{1}{k}\right) = k\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^k)^{\frac{\nu+1}{\mu}}}\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{\nu+1}{\mu}-1}\,dy,$$

ovvero

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu} - \frac{1}{k}\right) = k\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^k)^{\frac{\nu+1}{\mu}}};$$

per modo che ponendo $x^k = t$, ovvero $x = t^{\frac{1}{k}}$ e poi tornando a porre x al posto di t avremo la formola

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu} - \frac{1}{k}\right) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{k}-1}\,dx}{(1+x)^{\frac{\nu+1}{\mu}}},$$

che col porre $\frac{1}{k} = a$, $\frac{\nu+1}{\mu} - \frac{1}{k} = b$ si muta nell'altra

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx, \tag{32}$$

ovvero

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,b) \tag{33}$$

che è la formola cercata, mediante la quale le funzioni Euleriane di prima specie $\mathrm{B}(a,b)$ si esprimono in modo semplicissimo per quelle di seconda specie.

Osservando poi che dalla (29) si ha $\mathrm{B}(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$ e ricordando

che per la formola (14) della pag. 124) si ha $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$, si vede subito che si ha la formola notevole

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \tag{34}$$

e quindi facendo nella (33) $b = 1-a$ e ricordando che $\Gamma(1) = 1$ si trova la formola pure notevolissima

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \tag{35}$$

che insieme all'altra

$$\Gamma(a) = (a-1)(a-2)\ldots(a-h)\,\Gamma(a-h) \tag{36}$$

per $h < a$, trovata al § 76. b [pag. 117-118] serve a riportare il calcolo delle funzioni $\Gamma(a)$ per tutti i valori positivi di a ai valori delle stesse funzioni per $a \leq \frac{1}{2}$, pei logaritmi delle quali si hanno tavole simili a quelle dei logaritmi ordinarii.

Per $a = \frac{1}{2}$ poi, avendosi per la precedente (35) $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, si ha $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, come risulta anche dall'essere per la (31) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

144. — Per dare un'altra applicazione della formola (28) prendiamo ancora $f(z) = e^{-z}$, con $\mathrm{F}(z) = e^{-\alpha z}\chi(z)$, essendo α una costante diversa da zero e positiva e $\chi(z)$ una funzione continua di z da 0 a ∞ che in valore assoluto non supera mai un numero finito.

Sarà ancora $\mathrm{I} = \frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$ e avremo la formola

$$\frac{\gamma}{k\mu}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha t^\gamma}\chi(t^\gamma)\,dt = \int_0^\infty dx \int_0^\infty a^\nu e^{-a^\mu(\alpha+x^k)}\chi(a^\mu)\,da,$$

dalla quale ponendo $a^\mu = z$ e cambiando nell'integrale del primo membro il t in x otterremo subito l'altra

$$\frac{\gamma}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha x^\gamma}\chi(x^\gamma)\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty z^{\frac{\nu+1}{\mu}-1} e^{-(\alpha+x^k)z}\chi(z)\,dz; \tag{37}$$

e con questa quando avremo calcolato l'integrale semplice del primo membro potremo calcolare l'integrale doppio del secondo, e viceversa.

Ora prendendo una volta $\chi(z)=\cos\beta z$ e un'altra $\chi(z)=\operatorname{sen}\beta z$, con β quantità costante, e sommando le formole che si ottengono dopo di avere moltiplicato la seconda per $-i$, otterremo la seguente

$$\frac{\gamma}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\beta)x^\gamma}dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty z^{\frac{\nu+1}{\mu}-1}e^{-(\alpha+x^k+i\beta)z}dz\,,$$

ovvero, cambiando nel primo membro x^γ in t e poi dopo tornando a porre x al posto di t

$$\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\int_0^\infty x^{\frac{1}{\gamma}-1}e^{-(\alpha+i\beta)x}dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty z^{\frac{\nu+1}{\mu}-1}e^{-(\alpha+x^k+i\beta)z}dz\,.$$

Ricordando ora la formola (9) del § 138 [pag. 210] si vede che l'integrale del primo membro non è altro che $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{\gamma}}}$, e l'integrale relativo a z nel secondo membro non è altro che $\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}{(\alpha+x^k+i\beta)^{\frac{\nu+1}{\mu}}}$, e questo porta a dire che si ha la formola

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(\alpha+x^k+i\beta)^{\frac{\nu+1}{\mu}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{k\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}\frac{1}{(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{\gamma}}}\,, \tag{38}$$

o anche l'altra

$$\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1}{k}-1}dx}{(x+\alpha+i\beta)^{\frac{\nu+1}{\mu}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)}\frac{1}{(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{\gamma}}}\,, \tag{39}$$

dove $\frac{1}{\gamma}=\frac{\nu+1}{\mu}-\frac{1}{k}$, qualunque siano i numeri diversi da zero e positivi k,μ e ν colla sola condizione che sia $\frac{\nu+1}{\mu}>\frac{1}{k}$.

Quando $\frac{1}{k}=1$ e $\frac{\nu+1}{\mu}$ è un numero intero p maggiore di uno, questa formola diviene una identità, perchè allora l'integrale del primo membro si

calcola subito ed è uguale a $\frac{1}{(p-1)(\alpha+i\beta)^{p-1}}$, ed essendo $\frac{\nu+1}{\mu}=p$ e $\frac{1}{\gamma}=\frac{\nu+1}{\mu}-\frac{1}{k}=p-1$, si ha $\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\mu}\right)=(p-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)$.

Pel caso generale poi si può osservare che separando nella formola trovata la parte reale da quella immaginaria si ottengono due nuovi integrali; e poichè ponendo $a=\frac{1}{k}$ e $b=\frac{1}{\gamma}$ essa si trasforma nell'altra

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}dx}{(x+\alpha+i\beta)^{a+b}}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{1}{(\alpha+i\beta)^b}\,, \tag{40}$$

si vede che essa estende la formola (32) al caso della integrazione con una variabile che è complessa, perchè si ottiene dalla stessa formola facendovi la trasformazione $x=(\alpha+i\beta)t$, e poi tornando a porre x al posto di t.

145. — Per fare risaltare sempre più l'importanza del teorema della inversione delle integrazioni ce ne varremo per dare una dimostrazione del *teorema di Frullani* (*), cioè della formola

$$\int_0^\infty\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx=f(0)\log\frac{a}{b}\,, \tag{41}$$

pel caso delle *funzioni $f(x)$ che fra 0 e ∞ sono sempre finite e continue*

(*) Giuliano Frullani nacque nel 1795 e morì nel 1834.

Poco dopo la creazione della Scuola Normale Superiore di Pisa, fatta nel 1813 dal Governo Napoleonico *come Succursale e sul modello di quella di Parigi*, il Frullani, a soli 18 anni, vi fu nominato *Ripetitore per le matematiche;* e nell'anno successivo fu nominato *Professore di matematiche superiori* nella Università, dove insegnò fino al 1820; essendo allora passato ad alto ufficio Amministrativo a Firenze.

La formola (41) del testo, che è data sotto il nome del Frullani anche dal Bertrand a pag. 221 del suo *Calcul Integral* trovasi in una delle memorie da lui pubblicate nei Vol. XVIII, XIX e XX degli Atti della Società dei XL, nelle quali se ne trovano anche parecchie altre, pure molto notevoli, e fra queste alcune relative alla celebre serie che porta il nome di *Serie di Fourier*, e questa stessa serie.

Le dimostrazioni della maggior parte di quelle formole sono tutt' altro che rigorose, per quanto, sotto certe condizioni, le formole stesse siano pressochè tutte valide, o possano ridursi valide con lievi modificazioni; e per la massima parte devono dirsi giustificate, per quanto alla lor volta spesso si trovino pure in difetto, le critiche che ad alcune di quelle memorie mosse il Ruffini Presidente della Società dei XL prima di ammetterne la pubblicazione negli Atti della Società, come risulta da una corrispondenza — che finì poi per essere anche alquanto vivace — fra Ruffini, Frullani e altri insigni matematici di quel tempo; corrispondenza a me gentilmente comunicata dal prof. E. Bortolotti della Università di Modena che potè rinvenirla *insieme alla derivata prima e tendono a zero al crescere indefinito di x; e nel supposto che a e b siano due numeri finiti diversi da zero e positivi.*

Si osservi per questo che, sotto le indicate ipotesi, si avrà la formola $\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0)$, e cambiando x in yx, con y positivo, avremo l'altra

$$\int_0^\infty f'(yx)\,dx = -\frac{f(0)}{y}, \quad \text{e quindi} \quad \int_0^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx = f(0)\log\frac{a}{b};$$

e poichè, avendosi sempre, per valori comunque grandi di c, $\int_c^\infty f'(yx)\,dx = -\frac{f(cy)}{y}$, l'integrale $\int_0^\infty f'(yx)\,dx$ è convergente in ugual grado per tutti i valori di y fra a e b, pel teorema del § 133 [pag. 196] potremo fare la inversione delle integrazioni nell' integrale $\int_a^b dy \int_0^\infty f'(yx)\,dx$, e il nuovo integrale, che sarà appunto l'integrale cercato $\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$, sarà determinato e finito; e quindi per la formola precedente si otterrà subito quella del Frullani.

146. — Dallo stesso processo di dimostrazione che abbiamo seguìto apparisce già che il teorema potrebbe enunciarsi anche per casi assai più generali, perchè in sostanza la dimostrazione che abbiamo fatta richiede soltanto che $f'(x)$ sia atta alla integrazione fra 0 e ∞ e che la inversione delle integrazioni sia possibile, e questo sappiamo che avviene anche in casi diversi da quello considerato, e assai più estesi.

Del resto può seguirsi anche un altro processo di dimostrazione — che in fondo è quello che ordinariamente si usa ridotto rigoroso — che non dà luogo altro che a pochissime restrizioni; e questo processo è il seguente.

Si osservi che, volendo cercare il valore dell'integrale $\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$,

---

fra le carte che gelosamente conservò per molti anni la famiglia RUFFINI come memorie del suo illustre antenato, e che si trovano ora nella biblioteca della R. Accademia di Scienze lettere ed arti in Modena.

Tenuto conto però dello stato della scienza a quel tempo, sì le memorie del FRULLANI che le critiche del RUFFINI, malgrado le numerose imperfezioni che presentano, hanno una importanza notevole e, poichè l'occasione mi si è offerta, ho creduto ben fatto di segnalarle ai lettori.

per definizione bisogna prendere a considerare l'integrale

$$u = \int_0^c \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx,$$

del quale l'integrale cercato sarà il limite per $c=\infty$ quando questo limite sia determinato e finito: e questo integrale si può scrivere

$$u = \int_0^c \left\{ \frac{f(bx)-f(0)}{x} - \frac{f(ax)-f(0)}{x} \right\} dx;$$

e se $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ sarà atta alla integrazione nell'intorno del punto $x=0$, lo saranno certamente anche le due $\frac{f(bx)-f(0)}{x}$ e $\frac{f(ax)-f(0)}{x}$, e quindi lo sarà pure la loro differenza $\frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ la quale risulterà perciò integrabile in qualunque intervallo finito a partire dal punto $x=0$ dalla parte delle x positive se tale sarà la $f(x)$ che per ora supporremo sempre finita; quindi avremo anche

$$u = \int_0^c \frac{f(bx)-f(0)}{x}\,dx - \int_0^c \frac{f(ax)-f(0)}{x}\,dx,$$

ovvero

$$u = \int_0^{bc} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx - \int_0^{ac} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx = \int_{ac}^{bc} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx,$$

da cui

$$u = \int_{ac}^{bc} \frac{f(x)}{x}\,dx + f(0)\log\frac{a}{b}; \tag{42}$$

e se il rapporto $\frac{f(x)}{x}$ sarà atto alla integrazione nell'intorno di $x=\infty$ l'integrale $\int_{ac}^{bc} \frac{f(x)}{x}\,dx$ avrà per limite zero per $c=\infty$ e u avrà il limite determinato e finito $f(0)\log\frac{a}{b}$, e si avrà quindi la formola cercata

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\log\frac{a}{b},$$

la quale resta così dimostrata sotto le sole condizioni che $f(x)$ *sia una funzione finita qualsiasi atta alla integrazione in ogni intervallo finito fra* 0 *e* ∞ *e che al tempo stesso le funzioni* $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ *e* $\frac{f(x)}{x}$ *siano atte alla integrazione negli intorni del punto* $x=0$ (a destra) *e di* $x=\infty$ *respettivamente.*

E si può osservare che neppure occorrerà mantenere la esclusione che abbiamo fatta che per valori diversi da zero e finiti della variabile la funzione $f(x)$ diventi infinita, purchè anche negli intorni dei punti corrispondenti d'infinito quando vi siano (e quindi ancora in qualunque intervallo finito) la stessa $f(x)$ sia atta alla integrazione (*).

147. — Quando $f(\infty)$ ha un valore determinato e finito, ma diverso da zero, ambedue lè dimostrazioni che abbiamo dato della formola del Frullani portano che ad essa debba sostituirsi l'altra

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx=[f(0)-f(\infty)]\log\frac{a}{b}, \tag{43}$$

che in fondo è quella che viene dalla stessa formola cambiandovi $f(x)$ in $f(x)-f(\infty)$; e più generalmente quando $\frac{f(x)}{x}$ non sia integrabile nell'intorno del punto all'infinito, ma l'integrale $\int_{ac}^{bc}\frac{f(x)}{x}\,dx$ per $c=\infty$ abbia un limite determinato e finito $\mathrm{A}(a,b)$ che potrà dipendere da a e da b, allora per la (42) dalla seconda dimostrazione risulta che alla formola del Frullani occorre sostituire l'altra

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx=\mathrm{A}(a,b)+f(0)\log\frac{a}{b}. \tag{44}$$

148. — La seconda dimostrazione che abbiamo data della formola del Frullani porta assai meno restrizioni di quella data prima. Noi però trovammo opportuno di darla perchè è molto semplice e in fondo essa già basta pel caso delle funzioni che ordinariamente si presentano nella pratica, e perchè con quella si fa una nuova applicazione del teorema sulla inversione delle integrazioni, e si ha al tempo stesso un processo di dimostrazione che si applica con tutta facilità anche per la determinazione di altre formole notevoli.

(*) Propriamente dalla dimostrazione risulta che bisognerebbe anche richiedere che negli intorni dei punti d'infinito di $f(x)$, quando vi siano, resti atta alla integrazione la $\frac{f(x)}{x}$, ma pel teorema del § 68 [pag. 107] colla estensione che, come già accennammo, gli sarà data in seguito, l'essere atta alla integrazione la $f(x)$ per valori finiti di x *diversi* da $x=0$ porta che lo sia sempre anche il rapporto $\frac{f(x)}{x}$ e viceversa.

Supponiamo infatti ora che $f(x)$ sia una funzione finita e continua per tutti i valori positivi (lo zero incluso) insieme alle sue prime n derivate, e essa e queste derivate tendano a zero al crescere indefinito di x. Inoltre ammettiamo che esistano anche le derivate $(n+1)^e$, e siano finite e continue fra 0 e ∞, o almeno le derivate n^e siano finite e continue e negli intorni del punto $x=0$ e del punto $x=\infty$ soddisfino alle altre condizioni che si richiedono per potere applicare ad esse la formola del Frullani secondo quanto dicemmo nel secondo processo di dimostrazione.

Allora indicando con $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ $n+1$ numeri finiti e diversi da zero e positivi, e applicando la formola di Frullani alle derivate n^e con prendere $a=x_0$ e $b=x_1$ avremo

$$\int_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_1x)-f^{(n)}(x_0x)}{x}\,dx=f^{(n)}(0)\log\frac{x_0}{x_1}.$$

Integrando ora i due membri di queste equazioni rispetto ad x_1 fra x_1 e x_2 e invertendo le integrazioni, il che può farsi perchè $f^{(n)}(x)$ è sempre finita e continua e tende a zero al crescere indefinito di x avremo

$$\int_0^\infty\left\{\frac{f^{(n-1)}(x_2x)-f^{(n-1)}(x_1x)}{x^2}-\frac{f^{(n)}(x_0x)}{x}\int_{x_1}^{x_2}dx_1\right\}dx=f^{(n)}(0)\int_{x_1}^{x_2}\log\frac{x_0}{x_1}\,dx_1.$$

Integrando di nuovo rispetto a x_2 fra x_2 e x_3 e invertendo le integrazioni nel primo membro avremo l'altra

$$\int_0^\infty\left\{\frac{f^{(n-2)}(x_3x)-f^{(n-2)}(x_2x)}{x^3}-\frac{f^{(n-1)}(x_1x)}{x^2}\int_{x_2}^{x_3}dx_2-\frac{f^{(n)}(x_0x)}{x}\int_{x_2}^{x_3}dx_2\int_{x_1}^{x_2}dx_1\right\}dx=$$

$$=f^{(n)}(0)\int_{x_2}^{x_3}dx_2\int_{x_1}^{x_2}\log\frac{x_0}{x_1}\,dx_1,$$

e così continuando si vede che in fine giungeremo alla formola seguente

$$(45)\quad \int_0^\infty \left\{ \frac{f(x_{n+1}x)-f(x_n x)}{x^{n+1}} - \frac{f'(x_{n-1}x)}{x^n}\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx_n - \frac{f''(x_{n-2}x)}{x^{n-1}}\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx_n - \ldots \right.$$

$$\left. - \frac{f^{(n)}(x_0 x)}{x}\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_{x_1}^{x_2} dx_1 \right\} dx = f^{(n)}(0)\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_{x_1}^{x_2} \log\frac{x_0}{x_1}\,dx_1,$$

che è la formola che cercavamo, nella quale i varii integrali che figurano sotto quello relativo alla variabile x_1 e quello del secondo membro si calcolano con tutta facilità e non è quindi il caso di fermarsi su essi.

È da osservare però che in questa formola (45) non si potrà spezzare l'integrale del primo membro relativo ad x nella somma degli integrali dei suoi varii termini a meno che non si sappia che le varie derivate $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ sono tutte nulle nel punto $x=0$ e che i rapporti $\frac{f'(x)}{x^n}, \frac{f''(x)}{x^{n-1}}, \ldots, \frac{f^{(n)}(x)}{x}$ sono tutti atti alla integrazione definita da 0 a ∞.

149. — S'intende che anche la formola di Frullani gioverà pel calcolo degli integrali definiti come apparisce dai seguenti esempii.

1.° Prendendo $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ avremo per a e b finiti e diversi da zero

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+b^2x^2}-\frac{1}{1+a^2x^2}\right)dx = (a^2-b^2)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} = \log\frac{a}{b},$$

e quindi per b diverso da a sarà

$$(46)\quad \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} = \frac{\log b - \log a}{b^2-a^2}.$$

2.° Prendendo $f(x)=e^{-x}$ avremo

$$(47)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{a}{b},$$

e quindi in particolare per $b=1$ si avrà la formola

$$(48)\quad \log a = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx$$

che esprime il logaritmo $\log a$ per un integrale definito speciale.

3.° Prendendo $f(x)=\cos x$ avremo la formola

$$(49)\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx - \cos ax}{x}\,dx = \log\frac{a}{b}, \quad \text{ovvero} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}x \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a}{b},$$

e per $b=1$ avremo l'altra

$$(50)\quad \log a = \int_0^\infty \frac{\cos x - \cos ax}{x}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{a+1}{2}x \operatorname{sen}\frac{a-1}{2}x}{x}\,dx,$$

che esprime essa pure $\log a$ per un integrale speciale.

4.° Prendendo infine $f(x)=\log(1+qe^{-x})$, con q superiore a -1, avremo

$$(51)\quad \int_0^\infty \log\frac{1+qe^{-bx}}{1+qe^{-ax}}\frac{dx}{x} = \log(1+q)\log\frac{a}{b};$$

e nel caso di $q=e-1$ avremo la formola

$$(52)\quad \int_0^\infty \log\frac{1+(e-1)e^{-bx}}{1+(e-1)e^{-ax}}\,dx = \log\frac{a}{b},$$

che per $b=1$ dà un'altra espressione di $\log a$ per mezzo di un integrale definito; e anche queste formole derivate rispetto a una o a più delle costanti che vi figurano, mantenendosi però sempre nei limiti dei valori che esse possono avere, daranno luogo ad altri integrali definiti.

Del resto è da osservare che per ogni funzione $f(x)$ per la quale la formola di Frullani (41) o anche l'altra (43) siano applicabili si può avere una espressione di $\log a$ per mezzo di un integrale definito tutte le volte che $f(0)$ nel caso della (41) o $f(0)-f(\infty)$ nel caso della (43) non siano zero; perchè facendo $b=1$ nella (41) o nella (43) si hanno subito le formole generali seguenti

$$(53)\quad \log a = \frac{1}{f(0)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(ax)}{x}\,dx, \quad \text{e} \quad \log a = \frac{1}{f(0)-f(\infty)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(ax)}{x}\,dx.$$

Anche la formola (44) conduce in modo simile a una espressione di $\log a$ per mezzo d'integrali definiti.

150. — Il teorema della inversione delle integrazioni può giovare anche

in altri casi per la ricerca di certi integrali definiti o per trovarne alcune proprietà; perchè avendo per es. da calcolare un integrale definito ordinario può darsi che sostituendo in esso ad un fattore nella funzione da integrarsi una sua espressione per mezzo di un integrale definito si giunga a un integrale doppio che con una inversione delle integrazioni riesce subito a determinarsi o mette in evidenza qualche proprietà di integrali definiti o di funzioni definite da questi.

Così ad es.: se si vuole calcolare l'integrale $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$, che colla considerazione degli integrali definiti singolari e colla integrazione per parti (come si fece per gli integrali considerati al § 73 [pag. 114]) si vede subito che è determinato e finito, si osserverà prima che per la (23) della pag. 219 cambiandovi a in x e x in a si ha la formola $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2x}\,da$, e perciò sarà

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos x\,dx \int_0^\infty e^{-a^2x}\,da\,,$$

talchè, siccome si verifica subito che sono soddisfatte le condizioni del § 136 [pag. 200 e seg.] che assicurano la possibilità della inversione delle integrazioni, si troverà la formola seguente

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty da \int_0^\infty e^{-a^2x}\cos x\,dx\,;$$

e ora, per potere applicare al calcolo dell'integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x}\cos x\,dx$ che qui figura la prima delle formole (8) della pag. 207 nella quale s'intende che a sia diversa da zero si scriverà la formola trovata sotto la forma

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^\infty da \int_0^\infty e^{-a^2x}\cos x\,dx\,,$$

e allora per la prima delle dette formole (8) si avrà

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^\infty \frac{a^2\,da}{1+a^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{a^2\,da}{1+a^4}\,,$$

e da questa, per la (12) della pag. 123 quando vi si faccia $m=3$, $n=4$, $\alpha=0$ otterremo subito per l'integrale cercato

$$(54)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Da questo poi cambiando x in y^2 e dopo riponendo x al posto di y avremo l'altro integrale

$$(55)\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

In modo simile si trovano gli integrali $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$ e $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$, poichè collo stesso processo e valendosi della seconda delle già ricordate formole (8) della pag. 207 si ha dapprima

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^\infty \frac{da}{1+a^4}\,,$$

e quindi per la (12) della pag. 123 si trova subito

$$(56)\qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,\quad \text{e quindi}\quad \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

dal che risulta che i due integrali $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ e $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx$ sono uguali fra loro e il loro valore comune è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

151. — Così pure, ricordando che per la derivata $\Gamma'(a)$ delle funzioni Γ si ha la formola (§ 128 [pag. 191])

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\log x\,dx,$$

se in questa si pone per $\log x$ il suo valore $\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{z}\,dz$ che ci viene dato sotto questa forma dalla formola (48), avremo la derivata $\Gamma'(a)$ espressa per l'integrale doppio $\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx \int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{z}\,dz$; e poichè colle solite considerazioni si vede che in questo integrale doppio le integrazioni possono invertirsi avremo la formola

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty dz\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\frac{e^{-z}-e^{-xz}}{z}dx.$$

Di qui risulta subito che

$$\Gamma'(a)=\Gamma(a)\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz-\int_0^\infty\frac{dz}{z}\int_0^\infty e^{-x(1+z)}x^{a-1}dx,$$

e poichè col cambiare kx in x nell'integrale $\int_0^\infty e^{-kx}x^{a-1}dx$ si trova che esso è uguale a $\frac{\Gamma(a)}{k^a}$, sarà

$$\Gamma'(a)=\Gamma(a)\int_0^\infty\left\{e^{-z}-(1+z)^{-a}\right\}\frac{dz}{z},$$

e se ne dedurrà subito

$$\frac{d\log\Gamma(a)}{da}=\int_0^\infty\left\{e^{-z}-(1+z)^{-a}\right\}\frac{dz}{z} \tag{57}$$

per la formola che dà la derivata prima di $\log\Gamma(a)$; e ora da questa, volendo, si hanno subito colla derivazione rispetto ad a anche le derivate seguenti di $\log\Gamma(a)$.

Integrando poi questa formola rispetto ad a fra 1 e a coll'osservare che $\log\Gamma(1)=0$ e invertendo le integrazioni, avremo l'altra

$$\log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left\{(a-1)e^{-z}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-a}}{\log(1+z)}\right\}\frac{dz}{z}, \tag{58}$$

che dà una espressione di $\log\Gamma(a)$ per mezzo di un integrale definito; e poichè per essere $\Gamma(2)=1$ si ha $\log\Gamma(2)=0$, e quindi $\int_0^\infty\left(e^{-z}-\frac{z(1+z)^{-2}}{\log(1+z)}\right)\frac{dz}{z}=0$, moltiplicando questa equazione per $a-1$ e sottraendola dalla precedente si

trova l'altra espressione di $\log\Gamma(a)$

$$\log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left\{(a-1)(1+z)^{-2}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-a}}{z}\right\}\frac{dz}{\log(1+z)},$$

che col porre $\log(1+z)=y$ o $z=e^y-1$ si trasforma nell'altra

$$\log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left\{(a-1)e^{-y}-\frac{e^{-y}-e^{-ay}}{1-e^{-y}}\right\}\frac{dy}{y}. \tag{59}$$

152. — I teoremi di derivazione e di integrazione sotto il segno ci hanno condotto a determinare parecchi integrali definiti fra i quali alcuni, come ad esempio quelli nei quali figura la esponenziale e^{-x^2}, hanno una particolare importanza perchè si presentano nelle applicazioni al calcolo delle probabilità, nella Geodesia e in altri studii superiori.

Questi integrali poi conducono alla loro volta ad altri che pure sono da considerarsi in modo speciale, e noi vogliamo qui mostrare come anche questi nuovi integrali possano ottenersi per mezzo di una trasformazione generale.

Supponiamo perciò in generale di avere da calcolare un integrale definito da 0 a ∞ nel quale la funzione da integrarsi dipenda dalla espressione $ax+\frac{b}{x}$ essendo a e b due costanti diverse da zero e positive; cioè sia $\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$ l'integrale da determinarsi.

Posto $ax+\frac{b}{x}=y$, l'integrale stesso si ridurrà alla determinazione di integrali della forma $\int f(y)dx$ nei quali i limiti degli integrali e il dx dovranno essere tratti dalla formola di trasformazione $ax+\frac{b}{x}=y$, la quale tanto per $x=0$ quanto per $x=\infty$ dà $y=\infty$.

Ora, osservando che la derivata della espressione $ax+\frac{b}{x}$ è $a-\frac{b}{x^2}$ si vede subito che con x positivo essa si annulla per $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ e pei valori di x fra 0 e $\sqrt{\frac{b}{a}}$ essa è sempre negativa mentre per x superiore a $\sqrt{\frac{b}{a}}$ è sempre positiva, quindi la espressione stessa $ax+\frac{b}{x}$ ha un minimo $2\sqrt{ab}$

per $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, ed essa mentre x va da 0 a $\sqrt{\frac{b}{a}}$ decresce da ∞ a $2\sqrt{ab}$ e quando x va da $\sqrt{\frac{b}{a}}$ a ∞ cresce da $2\sqrt{ab}$ a ∞.

Conseguentemente il nuovo integrale relativo ad y si spezzerà in due integrali definiti, il primo da ∞ a $2\sqrt{ab}$ e il secondo da $2\sqrt{ab}$ a ∞; e nel primo integrale il valore di dx andrà tratto dal valore che si ha per x come radice della equazione $ax+\frac{b}{x}=y$ o $ax^2-yx+b=0$ e pel quale col decrescere di y da ∞ a $2\sqrt{ab}$ la x va da 0 a $\sqrt{\frac{b}{a}}$, e nel secondo integrale il valore di dx andrà tratto dall'altra radice che si ha per x, per la quale appunto x va da $\sqrt{\frac{b}{a}}$ a ∞ mentre y va da $2\sqrt{ab}$ a ∞.

Il primo degli indicati valori di x corrisponde evidentemente alla radice $x=\frac{y-\sqrt{y^2-4ab}}{2a}=\frac{2b}{y+\sqrt{y^2-4ab}}$, e il secondo corrisponde all'altra radice $x=\frac{y+\sqrt{y^2-4ab}}{2a}$ intendendo che i radicali siano presi positivamente; quindi pel primo integrale in y avremo $dx=\left(\frac{1}{2a}-\frac{y}{2a\sqrt{y^2-4ab}}\right)dy$, e pel secondo $dx=\left(\frac{1}{2a}+\frac{y}{2a\sqrt{y^2-4ab}}\right)dy$, e conseguentemente avremo

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4ab}}\right)f(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-4ab}}\right)f(y)\,dy,$$

o anche evidentemente

$$(60)\qquad \int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y)\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-4ab}},$$

ed è questa la formola che trasforma l'integrale dato in un altro relativo alla nuova variabile y.

Ponendo poi $\sqrt{y^2-4ab}=z$ o $y=\sqrt{z^2+4ab}$, i radicali intendendosi presi positivamente, mentre y andrà da $2\sqrt{ab}$ a ∞ la z andrà da 0 a ∞, e

così avremo anche la formola

$$(61)\qquad \int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty f\left(\sqrt{z^2+4ab}\right)dz,$$

che è notevolissima, e con questa come colla precedente dalla conoscenza di certi integrali se ne potranno dedurre altri.

153. — Così ad es. quando sia stato calcolato un integrale $\int_0^\infty f(x^2+k)\,dx$ dove a k possa darsi un valore costante positivo qualsiasi, e si voglia determinare l'altro $\int_0^\infty f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx$, si osserverà che $a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}=\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab$ e quindi $f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)=f\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab\right]$; e per la formola (60) avremo

$$\int_0^\infty f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx=\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y^2-2ab)\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-4ab}},$$

e anche

$$(62)\qquad \int_0^\infty f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(z^2+2ab)\,dz.$$

154. — E più particolarmente ancora partendo dall'integrale ormai noto $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, da questa formola si dedurrà subito l'altro integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}dx$, e si avrà

$$(63)\qquad \int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z^2-2ab}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}.$$

E volendo l'integrale $\int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\cos 2\beta\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx$, si osserverà che per la formola precedente esso si riduce all'altro $\frac{e^{-2ab}}{a}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos 2\beta\,(z^2+2\,ab)\,dz$ e si ha quindi

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\cos 2\beta\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx=\frac{e^{-2ab}}{a}\left\{\cos 4\beta ab\int_0^\infty e^{-z^2}\cos 2\beta z^2\,dz\,-\right.$$

$$\left.-\operatorname{sen} 4\beta ab\int_0^\infty e^{-z^2}\operatorname{sen} 2\,\beta z^2\,dz\right\},$$

e quando siano calcolati i due integrali del secondo membro si ha subito anche quello del primo.

E poichè per le formole (11) della pag. 211 si ha

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\,\beta x^2 dx=\frac{\sqrt{\pi}\cos\frac{1}{2}\,\theta}{2\,(1+4\beta^2)^{\frac{1}{4}}}\ ,\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} 2\,\beta x^2 dx=\frac{\sqrt{\pi}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,\theta}{2\,(1+4\beta^2)^{\frac{1}{4}}}\ ,$$

essendo θ l'arco fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ pel quale si ha $\operatorname{arc tang}\theta=2\beta$, avremo

$$(64)\qquad \int_0^\infty e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}}\cos 2\beta\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx=\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-2ab}}{2a\,(1+4\beta^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(4\beta ab+\frac{1}{2}\,\theta\right).$$

155. — Un'altra applicazione interessantissima del teorema della inversione delle integrazioni risulta dalle considerazioni seguenti.

Osserviamo che se si prende a considerare l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda x\cos\mu x}{x}\,dx$ dove λ e μ sono numeri positivi, siccome esso può scriversi sotto la forma $\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}(\lambda+\mu)\,x}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}(\lambda-\mu)\,x}{x}\,dx$ perchè ambedue gli integrali di questa somma sono determinati e finiti, basterà ricordare che l'integrale $\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$ ha una discontinuità per $b=0$, essendo uguale a $\frac{\pi}{2}$ per $b>0$ e a $-\frac{\pi}{2}$ per $b<0$ è uguale a zero per $b=0$ (§ 139, 1.° [pag. 214 e seg.]), per concluderne

subito che l'integrale stesso è discontinuo per $\mu=\lambda$ e che, mentre è uguale a $\frac{\pi}{2}$ per $\mu<\lambda$, è uguale a $\frac{\pi}{4}$ per $\mu=\lambda$ e uguale a zero per $\mu>\lambda$.

Ne segue che, avendo una funzione che deve integrarsi in un certo tratto finito da a a b essendo $b>a$, si potrà osservare che formando il prodotto $\frac{2}{\pi}f(\mu)\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx\cos\mu x}{x}\,dx$, questo sarà zero pei valori di μ superiori a b, sarà $\frac{1}{2}f(\mu)$ per $\mu=b$ e sarà precisamente $f(\mu)$ per $\mu<b$ e quindi anche per μ compreso fra a e b (l'estremo b escluso se $f(b)$ non è zero); e quindi se, occorrendo, la funzione $f(\mu)$ sarà data, o si intenderà continuata anche pei valori di x superiori a b fino a un certo punto, o anche da b a ∞, l'integrale doppio $\frac{2}{\pi}\int_a^c f(\mu)\,d\mu\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx\cos\mu x}{x}\,dx$ con $c\geq b$ sarà precisamente uguale all'integrale del quale trattavasi $\int_a^b f(x)\,dx$, non potendo portare differenza la circostanza che per $x=b$ il valore del prodotto $\frac{2}{\pi}f(\mu)\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx\cos\mu x}{x}\,dx$ è $\frac{1}{2}f(\mu)$ invece che $f(\mu)$.

Se dunque la funzione $f(x)$, considerata ora non solo fra a e b ma anche nell'intervallo da b a ∞, nel quale occorrendo si intenderà continuata con una funzione conveniente, sarà sempre finita e continua o almeno sarà tale che all'integrale doppio suindicato possa applicarsi la inversione delle integrazioni, avremo la formola

$$(65)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx\int_a^c f(\mu)\cos x\mu\,d\mu\,,$$

nella quale il c dovrà essere uguale o superiore a b e potrà anche essere $c=\infty$ se la possibilità di invertire le integrazioni si manterrà anche per $c=\infty$; e questa, se l'integrale doppio del secondo membro potrà calcolarsi completamente, o anche soltanto ridursi a un integrale semplice, servirà a determinare o a trasformare in un altro integrale l'integrale dato $\int_a^b f(x)\,dx$.

L'integrale $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} bx\cos\mu x}{x}\,dx$, a causa del suo valore e della sua discontinuità, alla quale appunto è dovuto l'importante risultato che precede, considerato come funzione di μ viene detto *fattore discontinuo di Dirichlet*, perchè Dirichlet fu il primo a considerarlo e a fare l'applicazione di questo processo alla determinazione del potenziale dell'ellissoide.

156. — Passando a casi particolari, la formola (61) dà luogo a formole molto notevoli.

1.° Supponendo per es., nella (65), $f(x)=1$ e *c finito*, si ha la formola

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\, dx \int_a^c \cos x\mu\, d\mu = 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx \operatorname{sen} \frac{(c-a)}{2} x \cos \frac{(c+a)}{2} x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

che vale per $c \geq b$, e che per $a=0$ si riduce all'altra più semplice

$$(66) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, b;$$

e queste ci dànno nuovi integrali.

2.° Supponendo $a=0$, $f(x)=e^{-x}$, $c=\infty$ si ha

$$1-e^{-b} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\, dx \int_0^\infty e^{-\mu} \cos \mu x\, d\mu\, ,$$

e poichè, trovammo (§ 138, 5.° [pag. 207]) $\int_0^\infty e^{-\mu} \cos \mu x\, d\mu = \frac{1}{1+x^2}$, avremo subito l'altra formola

$$(67) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-b}),$$

che dà un altro integrale, e che derivata rispetto a b conduce anche all'altro

$$(68) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-b}.$$

3.° Supponendo $a=0$, $f(x)=e^{-\alpha x^2}$, $c=\infty$, con α quantità costante diversa da zero e positiva, e valendosi della (25) del § 140 a pag. 220 si trova la formola

$$(69) \qquad \int_0^b e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\, dx$$

che trasforma un integrale definito in un altro.

4.° Cambiando invece x in λ nell'integrale del secondo membro della (65) e poi b in x e $f(x)$ in $f'(x)$ si ha la formola pure notevole

$$(70) \qquad f(x) = f(a) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda \int_a^c f'(\mu) \cos \lambda\mu\, d\mu\, ,$$

nella quale x s'intenderà compreso fra a e c (gli estremi esclusi), e questa formola se c sarà finito varrà per qualunque funzione $f(x)$ fra a e c per la quale la derivata prima $f'(x)$ fra a e c sia sempre finita e continua o almeno tale che all'integrale doppio del secondo membro sia applicabile la inversione delle integrazioni, e se $c=\infty$ varrà ancora quando questa possibilità d'invertire le integrazioni si mantenga anche per $c=\infty$.

157. — E se in quest'ultima formola (70) $f(x)$ ammetterà le sue derivate $f'(x)$ $f''(x), \ldots$ almeno fino a quelle $f^{(n)}(x)$ dell'ordine n nei respettivi intervalli da a a c_1, da a a $c_2, \ldots$, da a a c_n, essendo $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \ldots \geq c_n$, e queste derivate saranno sempre finite e continue almeno fino a quelle dell'ordine $n-1$ inclusive, e per quelle dell'ordine n saranno soddisfatte le condizioni stesse che avevamo per $f(x)$ nella (65), cioè se saranno esse pure finite e continue o almeno se per esse sarà applicabile la inversione delle integrazioni nell'integrale $\int_a^{c_n} f^{(n)}(x) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx \cos \mu x}{x}\, d\mu$ per $b \leq c_n$, allora l'applicazione ripetuta della formola (70) darà luogo successivamente alle formole seguenti

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x) = f(a) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_1 x}{\lambda_1}\, d\lambda_1 \int_a^{c_1} f'(\mu_1) \cos \lambda_1 \mu_1\, d\mu_1\, , \\ & f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \\ & \quad + \frac{2^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_1 x}{\lambda_1}\, d\lambda_1 \int_a^{c_1} \cos \lambda_1 \mu_1\, d\mu_1 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_2 \mu_1}{\lambda_2}\, d\lambda^2 \int_a^{c_2} f''(\mu_2) \cos \lambda_2 \mu_2\, d\mu_2\, , \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{\pi(n-1)}(x-a)^{n-1} + \\ & \qquad + \frac{2^n}{\pi^n}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_1 x}{\lambda_1}\, d\lambda_1 \int_a^{c_1} \cos \lambda_1 \mu_1\, d\mu_1 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_2 \mu_1}{\lambda_2}\, d\lambda_2 \int_a^{c_2} \cos \lambda_2 \mu_2\, d\mu_2 \ldots \\ & \qquad\qquad \ldots \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \lambda_n \mu_{n-1}}{\lambda_n}\, d\lambda_n \int_a^{c_n} f^{(n)}(\mu_n) \cos \lambda_n \mu_n\, d\mu_n\, , \end{aligned} \right.$$

le quali si determinano successivamente sostituendo nell'integrale multiplo al posto della derivata che vi comparisce il suo valore dedotto dalla formola (70) applicata a questa derivata facendo il cambiamento di variabili col cambiamento degli indici ecc., e avendo inoltre riguardo ai valori che si hanno successivamente da queste formole per le funzioni particolari $f(x) = \frac{x-a}{1}$, $= \frac{(x-a)^2}{1.2}$, $= \frac{(x-a)^3}{1.2.3}$, ..., $= \frac{(x-a)^{n-1}}{\pi(n-1)}$.

Nè si deve tralasciare di notare che, tenendo conto di quest'ultima parte della dimostrazione che è quella che dà luogo ai primi termini delle formole precedenti, si vede che non si può supporre che le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ siano infinite altro che nel caso in cui, per gli integrali doppii che successivamente si introducono, le solite inversioni delle integrazioni siano possibili anche quando i due intervalli d'integrazione siano infiniti, e al tempo stesso le derivate $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n-1)}(a)$ siano tutte zero, perchè ove queste derivate fossero diverse da zero si avrebbero dei termini con integrali privi di significato. E quando per essere soddisfatte queste condizioni le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ possano supporsi infinite le formole precedenti verranno a valere per qualunque valore di x da a a ∞.

Osservando poi che i primi termini delle formole stesse sono appunto quelli dell'ordinaria formola di Taylor, si vede anche che esse ci danno una nuova forma sotto cui può porsi il termine che si chiama *resto* (o termine complementare) di questa formola quando la funzione $f(x)$ alla quale si applica soddisfa alle condizioni poste sopra, e questa forma è data per ogni valore di x dall'integrale multiplo di ordine $2n$ che figura nella ultima delle formole stesse (71).

158. — Osservando che anche l'integrale $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda x \cos ax}{x}\,dx$ considerato come funzione di λ può prendersi come un fattore discontinuo, essendo esso uguale ad 1 per $\lambda > a$, uguale a $\frac{1}{2}$ per $\lambda = a$, e uguale a zero per $\lambda < a$, ci potremo valere di questo fattore quando la funzione $f(x)$ debba integrarsi in un intervallo infinito da a a ∞, perchè si potrà scrivere

$$(72) \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x}\,dx \int_c^\infty f(\lambda)\operatorname{sen} x\lambda\,d\lambda$$

se l'inversione delle integrazioni sarà ancora possibile; e in questa per c potrà prendersi qualunque valore non superiore ad a e anche potrà prendersi $c = -\infty$.

XI.

Area delle curve piane

159. — Avendosi una curva piana riferita a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x e y della quale la equazione sia $y = f(x)$, trovammo al Cap. XXI del Calcolo differenziale che l'area compresa fra questa curva, l'asse delle x e due ordinate y_a e y_x corrispondenti alle ascisse a e x, quando nella indicata porzione la curva è tutta a distanza finita, è continua ed è situata al disopra dell'asse delle x e $a < x$, è una funzione A di x il cui differenziale è $y\,dx$; quindi se si suppone che la seconda ordinata y_x sia quella corrispondente all'ascissa b si avrà

$$(1) \qquad A = \int_a^b y\,dx,$$

cioè l'area indicata non sarà altro che l'integrale definito fra a e b della espressione $y\,dx$, essendo y l'ordinata della curva (*).

(*) Questo capitolo può dirsi il complemento del Cap. XXI del calcolo differenziale.

Propriamente, come dicemmo allora nella nota alla pag. 417, per potere avere tutto il rigore sarebbe stato necessario di assicurarsi fin d'allora che scomposto il piano in striscie elementari con rette parallele all'asse delle y, e considerati per ogni striscia i rettangoli aventi per base sull'asse delle x le distanze fra queste rette successive e per altezze gli uni le ordinate massime e gli altri le ordinate minime della curva nei tratticelli corrispondenti, le somme delle aree dei primi rettangoli e quelle delle aree dei secondi all'impiccolire indefinito delle distanze fra le rette successive avessero un limite comune che fosse inoltre sempre lo stesso qualunque fosse il modo di succedersi di queste rette, e questo limite comune sarebbe stato preso per area della curva limitata nel modo anzidetto, cioè dalla curva dalle due ordinate estreme e dall'asse delle x.

L'esistenza di questo limite comune allora non fu dimostrata, e fu ammessa come evidente per le curve ordinarie delle quali può immaginarsi la rappresentazione geometrica mediante il disegno; ora però evidentemente tale esistenza — anche per le linee intese nel significato il più generale loro attribuito nel Calcolo differenziale — è conseguenza analitica immediata delle considerazioni generali che

160. — Viceversa se si ha un integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ nel quale $a<b$ e $f(x)$ è una funzione che fra a e b è sempre positiva, finita e continua e ha una rappresentazione geometrica per mezzo della curva $y=f(x)$ — per

esponemmo sugli integrali definiti nel Cap. I di questo volume; e quindi non è più il caso di fermarsi a dimostrarla.

Le stesse considerazioni poi mostrano anche immediatamente che l'area A così intesa, quando sia limitata dalla curva, dall'asse delle x e dalle due ordinate corrispondenti alle ascisse a e b, è l'integrale definito $\int_a^b y\,dx$; e il differenziale dell'area, quando l'ordinata estrema è quella che corrisponde all'ascissa x, è la espressione $y\,dx$ come trovammo nel Calcolo differenziale.

Si aggiunge poi che, anche colla definizione data, l'area A si può considerare come il limite dell'area che è determinata dall'asse delle x, dalle due verticali estreme e da un poligono iscritto nella curva con una legge qualsiasi quando il numero dei lati di questo poligono cresce indefinitamente e ogni lato impiccolisce oltre ogni limite; giacchè, indicando con y_{s-1} e y_s le ordinate corrispondenti agli estremi di uno qualsiasi l_s dei lati di un tal poligono, l'area del trapezio formato da questo lato l_s, dalle ordinate estreme y_{s-1} e y_s e dall'asse delle x sarà $\frac{1}{2}(y_{s-1}+y_s)\Delta x_s$, e se M_s è l'ordinata massima della curva nel tratto Δx_s, l'area del rettangolo che ha i lati sulle stesse ordinate y_{s-1} e y_s, sull'asse delle x e sulla orizzontale condotta alla distanza M_s da quest'asse sarà $M_s\,\Delta x_s$, e la differenza fra queste due aree sarà $\frac{1}{2}[(M_s-y_{s-1})+(M_s-y_s]\Delta x_s$ e non sarà superiore in valore assoluto a $D_s\,\Delta x_s$, essendo D_s l'oscillazione dell'ordinata nel tratto Δx_s; e quindi la somma dei trapezii e quella dei rettangoli così costruiti, avendo una differenza non superiore alla somma $\Sigma D_s \Delta x_s$ che ha per limite zero, avranno lo stesso limite; il che prova appunto che V sarà anche il limite dell'area del detto poligono.

Questo, mentre ci mostra rigorosamente che l'area di una curva chiusa qualsiasi e in generale l'area determinata da linee date qualsiansi è sempre il limite dell'area di un poligono rettilineo iscritto con leggi qualsiansi nelle curve che formano il contorno dell'area stessa quando il numero dei lati cresce indefinitamente e questi lati impiccoliscono oltre ogni limite, mostra anche che qualunque siano gli assi coordinati, e anche più generalmente qualunque siano le linee coordinate, e qualunque siano le aree elementari delle quali ci varremo per la determinazione dell'area totale, il risultato è sempre lo stesso, bastando che le aree elementari costituiscano sempre l'intiero poligono.

Ciò poteva apparire anche intuitivo; ma è certo che, colla definizione data delle aree, volendo avere l'estremo rigore, anche questa dimostrazione era necessaria.

Così in particolare resta ora chiarissimo, e al tempo stesso pienamente rigoroso, che, avendosi per es. una curva chiusa con un contorno che non taglia se stesso, la determinazione della sua area fatta colle coordinate polari — scomponendola cioè in triangoli elementari con un lato curvilineo, mediante raggi vicinissimi che escano per es. da un punto interno di quell'area, — conduce sempre a quegli stessi risultati che si ottengono quando, valendosi delle coordinate cartesiane, si fa la scomposizione in rettangoli con un lato curvilineo, ecc.

la quale ammetteremo che possa riguardarsi come effettivamente disegnabile e che la esistenza di un area sia perfettamente concepibile, — è certo che lo stesso integrale rappresenterà l'area compresa fra la curva l'asse delle x e le due ordinate y_a e y_b.

E quando la funzione $f(x)$, mantenendosi ancora finita e continua e conservando sempre una tale rappresentazione geometrica, fosse sempre negativa fra a e b, essendo ancora $a<b$, allora l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ rappresenterà ancora l'area limitata nel modo anzidetto ma presa negativamente; e se la stessa funzione $f(x)$ in un numero finito d'intervalli fra a e b fosse sempre positiva e negli intervalli rimanenti fosse sempre negativa, allora l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ rappresenterà la differenza fra la somma delle aree della curva rappresentativa di $f(x)$ nelle porzioni situate al disopra dell'asse delle x e la somma delle aree situate al disotto di quest'asse, come anche infine se fosse $a>b$ l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$, invece di rappresentare le quantità ora indicate nei varii casi, rappresenterà le quantità stesse col segno cambiato.

E da ciò chiaro apparisce che, limitatamente alle funzioni finite e continue per le quali può immaginarsi una rappresentazione geometrica effettivamente disegnabile, la considerazione delle aree delle curve corrispondenti — l'esistenza delle quali può allora riguardarsi come intuitiva o può dimostrarsi con considerazioni semplici e puramente geometriche — potrebbe evidentemente servire a dimostrare la esistenza degli integrali definiti e indefiniti corrispondenti; ma fuori di questo caso, ammesso pure che con una estensione del concetto di linea si continui a chiamare linea l'insieme dei punti del piano pei quali si ha $y=f(x)$, come anche noi nel Calcolo differenziale dicemmo sempre di fare, l'integrale definito quale fu introdotto nei nostri studi al Cap. I è un qualche cosa di puramente analitico, e come tale la sua esistenza doveva essere analiticamente dimostrata, come noi appunto facemmo.

In ogni modo però è notevole e di estrema importanza la corrispondenza che si ha così in un immenso numero di casi fra elementi analitici, come gli integrali definiti, e veri e propri elementi geometrici come le aree sopra indicate delle curve; ed è appunto per questa corrispondenza che quando un problema sia ridotto alla ricerca di un integrale definito o indefinito di una funzione di una sola variabile, si dice che è ridotto alle *quadrature*, nel modo stesso appunto che si dice che si fa la quadratura di una curva quando se ne trova l'area.

161. — Ponendoci nei casi della vera pratica, in vista delle effettive applicazioni, notiamo in generale che quando valendosi delle coordinate cartesiane si debba determinare coi processi precedenti l'area di una curva chiusa per mezzo degli integrali definiti, come per es. quella di una ellisse, di una lemniscata ecc... che sia per es. tutta situata al disopra dell' asse delle x, si scomporrà la curva in più parti in modo conveniente, e si otterrà poi l'area richiesta facendo la somma o la differenza di più aree parziali come quelle considerate sopra o di più integrali definiti, ecc.

E notiamo anche che nella formola (1) invece di avere y in funzione di x data dalla equazione della curva basterà che si abbiano x e y in funzione di una stessa variabile indipendente ω per mezzo delle due equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ che definiscono la curva, ecc.

162. — Quando poi si faccia uso delle coordinate polari (ρ, ω), la formola

$$S=\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\rho^2\,d\omega$$

darà l'area del settore compreso fra i due raggi vettori corrispondenti agli angoli polari ω_0 e ω_1; e l'area dello stesso settore sarà data anche dalla formola

$$S=\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}(x\,dy-y\,dx)\,,$$

dove le coordinate cartesiane x e y e quindi anche dx e dy si intendono espresse (per mezzo delle equazioni $x=x(\omega), y=y(\omega)$ della curva) in funzione di una variabile indipendente ω e del suo differenziale $d\omega$, questa variabile ω potendo anche essere una delle due coordinate x o y, e intendendo che ω_0 e ω_1 siano i suoi valori ai punti estremi della curva. Anche in questi casi poi per avere un'area data converrà spesso fare una decomposizione della curva in più parti; e determinare poi l'area richiesta per mezzo della somma o della differenza di più aree parziali, ecc.

163. — Diamo alcuni esempi determinando le aree di alcune curve.

1.° Si abbia il cerchio di equazione $x^2+y^2=R^2$, e si voglia l'area A a destra dell'asse delle y compresa fra quest'asse, l'asse delle x, la circonferenza e l'ordinata corrispondente all'ascissa x.

Si avrà $A=\int_0^x y\,dx=\int_0^x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, e quindi sarà

$$A=\frac{R^2}{2}\text{ arc sen }\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\,,$$

e ora, facendo $x=R$, avremo pel quarto dell'area C del cerchio $\frac{1}{4}C=\frac{\pi}{4}R^2$, donde $C=\pi R^2$.

2.° Si voglia l'area della sviluppata dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, essendo $a>b$.

Si trovò in Calcolo differenziale (§ 332 [pag. 455]) che la sviluppata di quest'ellisse ha per equazione $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ quando si ponga $\alpha=\frac{c^2}{a}$, $\beta=\frac{c^2}{b}$, essendo c la semidistanza focale $\sqrt{a^2-b^2}$; e poichè questa equazione è soddisfatta quando si faccia $x=\alpha\,\text{sen}^3\omega$, $y=\beta\cos^3\omega$ si potranno considerare queste ultime come equazioni della curva.

Questa curva sarà dunque composta di quattro parti situate nei quattro angoli degli assi, e sarà simmetrica rispetto a questi assi ecc...., e per l'area della porzione di curva posta al disopra dell'asse delle x e a destra dell'asse delle y e limitata fra questi assi, la curva e l'ordinata corrispondente all'ascissa x o all'angolo ω, si avrà la formola

$$A=\int_0^x y\,dx=3\,\alpha\beta\int_0^\omega \text{sen}^2\omega\cos^4\omega\,d\omega,$$

e quindi per avere A basterà trovare l'integrale in ω che figura in questa formola.

Questo integrale può aversi subito applicando le formole (16) e (17) della pag. 84; ma anche senza ricorrere a queste si può osservare che colle formole della trigonometria per la duplicazione dell'angolo si ha

$$\text{sen}^2\omega\cos^4\omega=\frac{1}{4}\text{sen}^2 2\omega\cos^2\omega=\frac{1}{8}\text{sen}^2 2\omega\cos 2\omega+\frac{1}{8}\text{sen}^2 2\omega=$$
$$=\frac{1}{8}\text{sen}^2 2\omega\cos 2\omega+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\cos 2\omega\,,$$

e quindi integrando fra 0 e ω avremo

$$A=\frac{\alpha\beta}{16}\left(\text{sen}^3 2\omega+3\omega-\frac{3}{2}\text{sen }2\omega\right);$$

e ora facendo in questa $\omega=\frac{\pi}{2}$ si trova che il quarto dell'area della detta curva è $\frac{3}{32}\alpha\beta\pi$ ovvero $\frac{3}{32}\frac{c^4}{ab}\pi$, e l'area totale è $\frac{3}{8}\alpha\beta\pi$ o $\frac{3}{8}\frac{c^4}{ab}\pi$.

3.° Si voglia l'area di una cicloide.

Si sa che chiamando R il raggio del cerchio generatore e ω l'angolo variabile che misura la rotazione del cerchio generatore, cioè l'angolo compreso fra la perpendicolare condotta dal centro del cerchio sull'asse delle x e il raggio condotto dal centro al punto della curva, le equazioni della cicloide espresse per ω sono le seguenti $x = \mathrm{R}(\omega - \operatorname{sen}\omega)$, $y = \mathrm{R}(1 - \cos\omega)$; e quindi partendo dal punto $\omega = 0$, cioè da un vertice della cicloide, si trova subito che l'area A compresa fra la curva, l'asse della x e l'ordinata corrispondente all'angolo ω sarà $\mathrm{A} = \int_0^x y\,dx = \mathrm{R}^2 \int_0^\omega (1 - \cos\omega)^2 d\omega$, e poichè $(1 - \cos\omega)^2 = 1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega = \frac{3}{2} - 2\cos\omega + \frac{1}{2}\cos 2\omega$ si avrà subito

$$\mathrm{A} = \frac{3}{2}\mathrm{R}^2\omega - 2\mathrm{R}^2\operatorname{sen}\omega + \frac{1}{4}\mathrm{R}^2\operatorname{sen}2\omega,$$

e *l'area compresa fra la cicloide e l'asse* (in un solo tratto) si otterrà di qui facendo $\omega = 2\pi$ e perciò *sarà* $3\pi\mathrm{R}^2$, cioè *sarà il triplo dell'area del cerchio generatore.*

4.° Si voglia l'area della cardioide, cioè della curva luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da un punto A di una circonferenza sulle sue tangenti.

Ponendo il polo di un sistema di coordinate polari (ρ, ω) nel punto A da cui si conducono le perpendicolari alle tangenti MT del cerchio, e prendendo per asse polare il diametro del cerchio condotto per A, si vede subito che, se O è il centro del cerchio, il raggio $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ del cerchio si potrà in ogni caso riguardare come risultante dalla somma del raggio vettore ρ della curva e della quantità $\mathrm{R}\cos\omega$; e perciò in coordinate polari l'equazione della cardioide sarà la seguente $\rho = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\omega = \mathrm{R}(1 - \cos\omega) = 2\mathrm{R}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\omega$.

L'area S quindi del settore compreso fra la curva e il raggio vettore corrispondente all'angolo polare ω sarà

$$\mathrm{S} = 2\mathrm{R}^2 \int_0^\omega \operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\omega\, d\omega = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \int_0^\omega (1 - \cos\omega)^2 d\omega = \frac{3}{4}\mathrm{R}^2\omega - \mathrm{R}^2\operatorname{sen}\omega + \frac{1}{8}\operatorname{sen}2\omega,$$

e quindi l'*area racchiusa dall'intiera cardioide sarà* $\frac{3}{2}\pi\mathrm{R}^2$, *cioè sarà la metà di quella della cicloide descritta dallo stesso cerchio generatore.*

5.° Vogliasi l'area della lemniscata di Bernoulli, cioè della curva nella quale il prodotto delle distanze dei suoi punti da due punti fissi F e F' è costante ed eguale ad a^2.

Prendendo un sistema di coordinate polari ρ e ω aventi per asse polare la retta FF' e per polo il punto di mezzo C della retta FF' (centro della curva) l'equazione della curva prende la forma $\rho^2 = 2a^2\cos 2\omega$, per modo che, condotte due rette inclinate di 45° sull'asse FF', la curva vien tutta situata in quelli dei due angoli opposti di queste rette che contengono la retta FF', ed è simmetrica rispetto a FF' e alla retta perpendicolare condotta per C, ecc.

L'area del settore S compreso fra i raggi vettori corrispondenti agli angoli polari ω_0 e ω sarà dunque

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} \rho^2 d\omega = a^2 \int_{\omega_0}^{\omega} \cos 2\omega\, d\omega = \frac{a^2}{2}(\operatorname{sen}2\omega - \operatorname{sen}2\omega_0);$$

quindi facendo $\omega_0 = -\frac{\pi}{4}$ e $\omega = \frac{\pi}{4}$, si troverà che l'area della porzione di curva chiusa posta a destra della perpendicolare a FF' che passa per C è a^2; quella dell'area della curva posta a sinistra della stessa retta è pure a^2, talchè *l'area racchiusa da tutta la lemniscata sarà* $2a^2$, cioè *sarà doppia del quadrato costruito sulla metà della distanza focale* FF'.

164. — Non tralasciamo ora di fare l'osservazione seguente che è d'importanza grandissima.

Quando l'area A racchiusa da una curva tutta al disopra dell'asse delle x, da questo asse, e da due ordinate y_a e y_b corrispondenti alle ascisse a e b, si prende come data dalla formola $\mathrm{A} = \int_a^b y\,dx$, si viene in sostanza a considerare l'area stessa come decomposta in tanti elementi rettangolari $y\,dx$ aventi un lato uguale ad y e l'altro uguale a dx, e questi elementi il calcolo integrale li ricompone poi coll'integrazione; e quando si consideri l'area determinata da una curva chiusa che è incontrata al più in due punti dalle verticali, o più generalmente si consideri l'area racchiusa fra due rette parallele all'asse delle y corrispondenti ancora alle ascisse a e b e due curve $y = f(x)$, $y = \psi(x)$ situate ambedue al disopra dell'asse delle x, e la seconda tutta al disotto della prima, allora avendosi

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - \psi(x)\}\,dx,$$

si viene ancora a considerare come scomposta l'area totale in rettangoli elementari aventi un lato uguale alla porzione della ordinata corrispondente compresa fra le curve e l'altro uguale a dx, e si fa poi la ricomposizione coll'integrazione.

Fermiamoci su questo caso che è più generale, non senza però osservare che le considerazioni che esponiamo si estendono anche a qualunque altro caso; e immaginiamo il piano come diviso in tanti rettangoli elementari $\Delta x \Delta y$ con rette parallele agli assi x, y poste le une alla distanza Δy e le altre alla distanza Δx l'una dall'altra, senza però che si richieda che tutte le Δx siano uguali fra loro, e le Δy siano uguali fra loro, ma potendo anzi le rette dei due sistemi ora indicati succedersi con una legge qualunque.

È chiaro allora che l'area A potrà anche considerarsi come somma dei vari rettangoli $\Delta x \Delta y$ compresi fra le linee che limitano l'area stessa, avendo cura però di prendere porzioni di questi rettangoli invece dei rettangoli interi per quei rettangoli che sono attraversati dalle curve; e per fare questa somma potremo prendere i rettangoli stessi nell'ordine che più ci piace.

Sommando prima tutti i rettangoli $\Delta x \Delta y$ aderenti a ogni retta parallela all'asse delle y e aventi tutti per base Δx, e intendendo che Δy impiccolisca oltre ogni limite, sarà lo stesso che fare l'integrale definito di dy da $y = \psi(x)$ fino a $y = f(x)$, e quindi la quantità $\Delta x \int_{\psi(x)}^{f(x)} dy$ ci darà l'area di tutta la striscia elementare compresa fra le curve e le ordinate corrispondenti alle ascisse x e $x + \Delta x$ all'infuori però di due frazioni di rettangoli $D_x \Delta x$ e $D'_x \Delta x$ essendo D_x e D'_x le oscillazioni respettivamente di $f(x)$ e $\psi(x)$ nell'intervallo Δx.

Facendo poi la somma di queste striscie coll'impiccolire sempre più Δx, si verrà a fare l'integrale $\int \left\{ f(x) - \psi(x) \right\} dx$ definito da a a b, e quindi l'area cercata verrà a presentarsi come l'integrale doppio $\int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{f(x)} dy$, senza tener conto dei limiti di frazioni delle quantità $\Sigma D_x \Delta_x$, $\Sigma D'_x \Delta x$ perchè questi limiti evidentemente saranno zero; talchè l'area richiesta A decomposta così dapprima in aree elementari rettangolari $dx\, dy$, si ricompone colla doppia integrazione e può rappresentarsi coll'integrale doppio $\int \int dx\, dy$, nel quale però le limitazioni devono esser fatte in modo conveniente.

Quando poi invece delle coordinate cartesiane si usano le coordinate polari ρ e ω, la scomposizione delle aree in aree elementari potrà farsi nel modo seguente.

Condotti pel polo i raggi vettori a distanze angolari l'uno dall'altro uguali a $\Delta \omega$, e descritti col centro nel polo i cerchi i cui raggi successivi differiscono l'uno dall'altro di $\Delta \rho$, è chiaro che l'area data viene scomposta in aree elementari rettangolari con due lati rettilinei e due circolari, ciascuna delle quali, all'infuori di quelle lungo i contorni, è misurata dalla differenza di due settori circolari $\frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\omega$ e $\frac{1}{2}\rho^2 \Delta\omega$ ovvero $\rho \Delta\rho \Delta\omega + \frac{1}{2} \Delta\rho^2 \Delta\omega$, e quelle al contorno sono frazioni di queste aree.

Facendo poi la somma di quelle fra queste aree elementari che si trovano aderenti a uno stesso raggio vettore (ciò che equivale a lasciar fermo ω e $\Delta\omega$), se $\Delta\rho$ si impiccolisce oltre ogni limite, si viene a fare l'integrazione rispetto a ρ di $\rho\, d\rho\, \Delta\omega$, perchè la somma dei termini di ordine superiore $\frac{1}{2} \Delta\rho^2 \Delta\omega$ è sempre inferiore a $\frac{1}{2} \rho\, \overline{\Delta\rho}\, \Delta\omega$, essendo $\overline{\Delta\rho}$ la massima delle $\Delta\rho$ o una quantità maggiore, e quindi non spiega veruna influenza e anzi al limite per l'impiccolire indefinito di $\Delta\rho$ è uguale a zero; e l'integrale così ottenuto $\Delta\omega \int \rho\, d\rho$ limitato convenientemente darà l'area di un settore elementare compreso fra i raggi vettori corrispondenti agli angoli polari ω e $\omega + \Delta\omega$, all'infuori di frazioni di espressioni della forma $\rho_1 D_\omega \Delta\omega + \frac{1}{2} D_\omega^2 \Delta\omega$. Il limite poi della somma delle aree di questi settori elementari, cioè l'integrale doppio $\int_a^b d\omega \int \rho\, d\rho$ quando l'integrale rispetto a ρ sia limitato convenientemente, darà l'area compresa fra le curve date e i raggi vettori corrispondenti agli angoli polari a e b.

165. — S'intende poi che nella pratica, invece delle coordinate cartesiane o polari, si potranno usare quelle coordinate curvilinee che torneranno più vantaggiose, tenendo sempre per principio di scomporre l'area che si vuol determinare in aree elementari, e poi tornando a ricomporla con doppie integrazioni; e le integrazioni potranno incominciarsi sempre da quella variabile che conduce a calcoli meno complicati, salvo a fare in ogni caso limitazioni convenienti degli integrali, ecc.

Così in generale quando si abbiano nel piano due sistemi di linee coordinate u, v per le quali il quadrato dell'elemento lineare sia

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

e nel campo nel quale si trova l'area che si vuole considerare non sia mai $EG - F^2 = 0$, siccome in ogni punto (u, v) per l'angolo ω delle linee u e v si ha sen $\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$, il piano verrà diviso da queste linee in tanti quadrilateri curvilinei ciascuno dei quali avrà per area $\sqrt{\mathrm{E}}du\sqrt{\mathrm{G}}\,dv \operatorname{sen}\omega$ ovvero $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du\,dv$ all'infuori di quantità di ordine uniformemente superiore; e, nel caso che si voglia per es. l'area di una curva chiusa, sommando le aree elementari dei quadrilateri lungo ogni linea u o v per es. lungo le linee $v=\mathrm{cost}$; si avrà l'area della striscia compresa fra le linee v e $v+dv$ e questa striscia sarà l'integrale $\int\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du$ limitato convenientemente; dopo di che sommando le striscie corrispondenti a tutti i valori di v, ciò che equivarrà a fare una nuova integrazione si troverà l'area cercata, la quale risulterà così come data dall'integrale doppio $\int dv\int\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du$ o $\int\int\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du\,dv$, ognuna delle integrazioni semplici dovendo essere limitata convenientemente dipendentemente dalle linee che limitano l'area che si cerca.

XII

Archi delle curve nel piano e nello spazio

166. — Passiamo ora a trovare le lunghezze degli archi di curva nel piano e nello spazio.

Incominciando dalle curve piane ricordiamo che in calcolo differenziale si trovò che, ammesso che esistesse un limite per la somma $\sum\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$ o $\sum\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ quando si estendeva questa somma a tutti gli intervalli Δx nei quali si poteva scomporre l'asse delle x da a a b e si passava poi al limite facendo tendere a zero ciascuno degli stessi intervalli, questo limite rappresentava appunto ciò che fu chiamato *arco della curva* fra a e b.

L'esistenza del limite indicato restò allora a dimostrarsi; ora però risulta evidente dopo le considerazioni generali del Cap. I, poichè per quelle considerazioni esso viene ad essere l'integrale definito $\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ e ciò anche senza bisogno di supporre che $\frac{dy}{dx}$ sia continua e finita fra a e b; ma supponendo soltanto che essa sia finita e atta all'integrazione in questo intervallo, poichè se questo avviene di $\frac{dy}{dx}$ altrettanto avviene di $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (pag. 19 in nota); quindi si può ora asserire che quand'anche $\frac{dy}{dx}$ non sia sempre continua fra a e b ma sia però finita e atta all'integrazione in questo intervallo (*), l'arco della curva piana $y=f(x)$ fra le ascisse a e b sarà dato dalla

(*) Con ciò si viene ad ammettere che la curva considerata possa anche mancare di tangente in un gruppo infinito di punti rinchiudibile.

formola $s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, e si potrà scrivere anche $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ intendendo che x e y e quindi anche dx e dy siano espressi per una stessa variabile indipendente ω e pel suo differenziale $d\omega$ coll'equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, e i limiti dell'integrale siano i valori di ω corrispondenti all'estremo dell'arco che si considera.

E se $\frac{dy}{dx}$, restando sempre atta alla integrazione negli intervalli nei quali è finita, diviene infinita in alcuni punti in numero finito fra a e b ma in modo tale che in questi punti sia il limite dei valori che essa ha nei punti vicini o almeno non si annulli e non cangi infinite volte di segno negli intorni dei punti stessi, allora siccome in questi intorni essa sarà atta alla integrazione e, quando siano sufficientemente piccoli, sarà diversa da zero e avrà sempre un medesimo segno lo stesso avverrà della funzione finita $\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$, e quindi (§ 80 [pag. 124]) anche $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ resterà atta all'integrazione nei medesimi intorni, e s si presenterà ancora sotto la forma precedente di integrale definito fra a e b.

Colle coordinate polari poi si avrà

$$s=\int\sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\omega^2}\,,$$

e in questa formola $d\rho$ e $d\omega$ dovranno esprimersi l'uno per l'altro per mezzo della equazione della curva, o dovranno esprimersi per una stessa variabile indipendente e pel suo differenziale, e l'integrale dovrà essere limitato convenientemente dipendentemente dai valori di questa variabile nei punti estremi dell'arco.

Similmente per una curva nello spazio di equazioni $y=f(x)$, $z=\psi(x)$ si avrà $s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$ per l'arco compreso fra i due punti di ascisse a e b; e se le equazioni della curva saranno date per mezzo di una variabile indipendente ω sotto la forma $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, $z=z(\omega)$, si avrà $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ dove dx, dy, dz devono esser tratti dall'equa-

zioni della curva, e i limiti dell'integrale sono i valori di ω corrispondenti ai punti estremi dell'arco.

S'intende che si suppone qui che ad ogni valore di x o di ω corrisponda un punto solo della curva almeno per la porzione di arco che si vuole determinare, altrimenti converrà spezzare l'arco stesso in più parti in modo conveniente, e determinare separatamente ognuna di queste parti. E s'intende pure che tutti gli elementi dell'integrale che figurano in s devono esser presi sempre positivamente; e quando per l'introduzione di date variabili, o per altra ragione essi risultassero in parte positivi e in parte negativi, converrebbe spezzare ancora l'integrale in più integrali ecc.

167. — Determiniamo ora gli archi di alcune curve nel piano e nello spazio.

1.° Si voglia l'arco s della parabola $y^2=4px$ (riferita all'asse e alla tangente al vertice), quando quest'arco debba essere compreso fra il vertice e il punto al disopra dell'asse x la cui ascissa è x.

Si avrà $s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, e poichè $y=2\sqrt{px}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x}}$, sarà

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{p}{x}}\,dx,\ \text{ovvero}\ s=\int_0^x\sqrt{\frac{x+p}{x}}\,dx.$$

Ma si ha

$$\int\sqrt{\frac{x+p}{x}}\,dx=\int\frac{x+p}{\sqrt{x(x+p)}}\,dx=\int\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+px}}\,dx+\frac{p}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px}}=$$

$$=\sqrt{x^2+px}+\frac{p}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x(x+p)}}\,,$$

quindi valendosi della formola (11) della pag. 69 avremo

$$\int\sqrt{\frac{x+p}{x}}\,dx=\sqrt{x(x+p)}+\frac{p}{2}\log\left\{\frac{p}{2}+x+\sqrt{x(x+p)}\right\}+\mathrm{C}\,,$$

e l'arco cercato s della parabola verrà dato dalla formola

$$s=\sqrt{x(x+p)}+\frac{p}{2}\log\left\{\frac{p}{2}+x+\sqrt{x(x+p)}\right\}-\frac{p}{2}\log\frac{p}{2}\,.$$

2.° Si voglia l'arco di una data porzione della cicloide.

Osservando che se R è il raggio del cerchio generatore le equazioni della cicloide sono le due $x = R(\omega - \operatorname{sen}\omega)$, $y = R(1-\cos\omega)$, e perciò si ha $dx = R(1-\cos\omega)d\omega$, $dy = R\operatorname{sen}\omega\, d\omega$, si trova subito $ds^2 = 2R^2(1-\cos\omega)d\omega^2$, ovvero $ds^2 = 4R^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\omega\, d\omega^2$, e $ds = \pm 2R\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega\, d\omega$, e si conclude perciò che l'arco compreso fra i punti corrispondenti a $\omega = \omega_0$ e $\omega = \omega$ nel primo ramo della cicloide sarà

$$s = 2R\int_{\omega_0}^{\omega}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega\, d\omega = \left[-4R\cos\frac{1}{2}\omega\right]_{\omega_0}^{\omega} = -4R\cos\frac{1}{2}\omega + 4R\cos\frac{1}{2}\omega_0;$$

talchè se l'arco si comincia a contare dal punto $\omega = 0$, ciò che si ottiene supponendo $\omega_0 = 0$, si ha $s = 4R\left(1-\cos\frac{1}{2}\omega\right) = 8R\operatorname{sen}^2\frac{1}{4}\omega$, e quindi per un ramo intero della cicloide si ha $s = 8R$, cioè *la lunghezza di un ramo della cicloide è otto volte il raggio del cerchio generatore.*

3.° Si voglia l'arco della cardioide la cui equazione in coordinate polari ρ e ω è (§ 163 4.°) $\rho = R - R\cos\omega$.

Si avrà $d\rho = R\operatorname{sen}\omega\, d\omega$, e quindi $s = \int_{\omega_1}^{\omega}\sqrt{R^2\operatorname{sen}^2\omega + R^2(1-\cos\omega)^2}\,d\omega$, ovvero

$s = R\int_{\omega_0}^{\omega}\sqrt{2(1-\cos\omega)}\,d\omega$, e si potrà prendere $s = 2R\int_{\omega_0}^{\omega}\cos\frac{1}{2}\omega\, d\omega$, quando i valori ω_0 e ω corrispondenti all'estremo dell'arco non superino π perchè $\cos\frac{1}{2}\omega$ che è preso per valore del radicale $\sqrt{1-\cos\omega}$ sia sempre positivo.

Con queste ipotesi avremo dunque

$$s = 4R\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega - 4R\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega_0;$$

talchè se l'arco si comincia a contare dal punto $\omega = 0$ (cioè dal punto dove la cardioide incomincia sul cerchio) avremo $s = 4R\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega$ finchè $\omega \leq \pi$.

Per $\omega = \pi$ si ha la mezza cardioide che è 4R, talchè *la lunghezza della cardioide intiera* è 8R, cioè *otto volte il raggio del cerchio come per la cicloide.*

4.° Si voglia l'arco della spirale d'Archimede, cioè della curva la cui equazione in coordinate polari è $\rho = a\omega$, essendo a una costante.

Si avrà $s = a\int_{\omega_0}^{\omega}\sqrt{1+\omega^2}\,d\omega$, e colla integrazione per parti si troverà subito come alla formola (8) della pag. 45

$$s = \frac{a}{2}\omega\sqrt{1+\omega^2} + a\operatorname{sett\,senh}\omega - \frac{a}{2}\omega_0\sqrt{1+\omega_0^2} - a\operatorname{sett\,senh}\omega_0,$$

e se si misura l'arco s dal polo, cioè dal puuto $\omega_0 = 0$, si avrà

$$s = \frac{a}{2}\omega\sqrt{1+\omega^2} + a\operatorname{sett\,senh}\omega.$$

5.° Si voglia l'arco della spirale logaritmica $\rho = ae^{m\omega}$.

Si avrà $d\rho = ae^{m\omega}m\,d\omega = m\rho\, d\omega$, e quindi,

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}d\rho = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(\rho - \rho_0).$$

6.° Accenniamo anche al modo di avere l'arco della ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ponendo $x = a\operatorname{sen}\varphi$, $y = b\cos\varphi$, l'equazione della ellisse è soddisfatta, quindi prendendo queste per equazioni della ellisse avremo pel suo arco fra i punti corrispondenti ai valori φ_0 e φ di φ $s = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi$, ovvero supponendo $b < a$

$$s = a\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi,$$

essendo k l'eccentricità dell'ellisse $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$.

In questa formola l'integrale del secondo membro non può calcolarsi sotto forma finita, e dipende dagli integrali ellittici; però può aversi sviluppando in serie il radicale colla formola del binomio, e poi applicando l'integrazione per serie, perchè nella serie integrale i vari termini porteranno tutti integrali della forma $\int_{\varphi_0}^{\varphi}\operatorname{sen}^{2m}\varphi\, d\varphi$ che si determinano colle formole del § 46 [pag. 86].

L'integrale $\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi$ che comparisce in s quando si fa $\varphi_0 = 0$, e che all'infuori del fattore a misura l'arco dell'ellisse di eccentricità k contato dalla estremità del piccolo asse b al punto che corrisponde al valore φ dell'angolo ausiliario φ, è quello che Legendre indicò con $E(\varphi)$ e che chiamò funzione ellittica di seconda specie, avendo esso chiamato funzione ellittica di prima specie la funzione $F(\varphi)$ definita dalla formola $F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$.

Ora però il nome di funzioni ellittiche è riservato ad altre quantità, e $F(\varphi)$ e $E(\varphi)$ sono semplicemente *integrali ellittici*, il primo dei quali è detto ora integrale ellittico di prima specie e il secondo dipende in modo semplice da un integrale ellittico di prima specie e da una funzione conosciuta sotto il nome di funzione ellittica di seconda specie appunto per la relazione semplice che ha con quella funzione cui da Legendre era stato dato questo nome.

7.° Si voglia infine l'arco della linea a doppia curvatura determinata dalle equazioni $x=\log t$, $y=\operatorname{sen}^2 t$, $z=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, con t diverso da zero e positivo, quando quest'arco è compreso fra i punti corrispondenti a $t=t_0$ e $t=t$.

Si avrà

$$ds^2=\left\{\frac{1}{t^2}+4\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t+\cos^2 2t\right\}dt^2=\left\{\frac{1}{t^2}+\operatorname{sen}^2 2t+\cos^2 2t\right\}dt^2=\frac{(1+t^2)\,dt^2}{t^2},$$

e perciò sarà $s=\int_{t_0}^{t}\frac{\sqrt{1+t^2}\,dt}{t}$.

E poichè si ha

$$\int\frac{\sqrt{1+t^2}\,dt}{t}=\int\frac{(1+t^2)\,dt}{t\sqrt{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}+\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{1+t^2}+\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}},$$

e quindi per la formola (15) della pag. 70

$$\int\frac{\sqrt{1+t^2}\,dt}{t}=\sqrt{1+t^2}+\log\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}+C,$$

sarà infine

$$s=\sqrt{1+t^2}+\log\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t_0^2}-\log\frac{t_0}{1+\sqrt{1+t_0^2}}.$$

XIII.

Area delle superficie curve. Volumi

Area delle superficie.

168. — Abbiasi una superficie o porzione di superficie, continua e tutta a distanza finita, nella quale il piano tangente esiste in ogni suo punto e varia di posizione con continuità al variare con continuità del punto di contatto.

Si intenderà per *area* di una porzione di questa superficie terminata a un dato contorno, il limite della superficie di un poliedro a faccie triangolari inscritto in essa quando ognuna delle sue faccie tende a zero, nel supposto che le leggi della formazione e del successivo impiccolimento delle faccie di questo poliedro siano tali che le faccie stesse convergano in modo uniforme verso il piano tangente alla superficie; nel senso cioè che al loro indefinito impiccolirsi il loro angolo coi piani tangenti nei vertici dei triangoli (e quindi nei punti di ogni intorno sufficientemente piccolo di questi vertici) converga *uniformemente* verso lo zero; per modo che, scelto un numero positivo arbitrariamente piccolo σ, il detto angolo risulti, *per qualsiasi faccia poliedrica,* sempre minore di σ quando i lati di queste faccie siano già tutti minori di un certo numero ε che ordinariamente sarà esso pure piccolissimo (*).

(*) La condizione che le faccie poliedriche convergano in modo uniforme verso il piano tangente alla superficie non trovasi riportata esplicitamente nelle lezioni autografate del 1877, nelle quali partii puramente e semplicemente dalla definizione di area delle superficie quale era stata data dal SERRET nel secondo volume del suo corso di *Calcolo differenziale e integrale* (pag. 296 della 1.ª ediz. e pag. 293 della 2.ª).

E a vero dire, esaminando bene la dimostrazione della esistenza del limite della superficie poliedrica e della sua indipendenza dal modo di impiccolire delle singole faccie triangolari, si vede che tale condizione è ammessa come conseguenza necessaria dei dati posti rispetto alla superficie; ma questo effettivamente non è, e a me lo fece rilevare il sig. H. A. SCHWARZ quando ebbi il piacere di trovarmi insieme con lui dal compianto prof. BETTI nell'estate del 1879 o 1880.

169. — Dietro questa definizione, converrà prima dimostrare che, sotto le condizioni poste per la superficie data, il limite indicato della superficie poliedrica esiste ed è indipendente dalle leggi secondo cui il poliedro è formato e

---

Lo stesso sig. H. A. SCHWARZ comunicò poi la cosa al compianto prof. HERMITE, e la sua comunicazione fu dall'HERMITE riportata nel Corso autografato delle sue lezioni del 2.° semestre 1881-82 (second tirage, Paris 1883, chez Hermann, pag. 35-36).

In tale comunicazione, che fu poi pubblicata anche nel tomo II delle *Gesammelte Abhandlungen* di SCHWARZ a pag. 309-10-11, viene dato un esempio semplicissimo di un poliedro a faccie triangolari inscritto in un cilindro circolare, pel qual poliedro avviene che, se non si fissa un modo speciale per fare successivamente crescere di numero e impiccolire in grandezza le sue faccie, esso non soddisfa a quella condizione che ora includiamo esplicitamente nella definizione; e a seconda del modo d'impiccolimento che si sceglie può avere un limite uguale o diverso dal valore dell'ordinaria superficie cilindrica, e può farsi riuscire uguale o se si vuole maggiore di qualunque grandezza determinata data superiore alla vera superficie del cilindro, e anche può farsi risultare infinito, come si può fare in modo che non esista alcun limite per quella superficie poliedrica.

Con ciò, la necessità di aggiungere alla definizione di area delle superficie quella o altre condizioni resta messa in piena evidenza, ed io, sia per la importanza della cosa, sia per la semplicità del detto esempio di SCHWARZ, stimo opportuno di riprodurlo in questa nota.

Si consideri perciò un cilindro circolare retto di raggio r e di altezza h, e s'indichino con x, y, z le coordinate cartesiane dei suoi punti, essendo il piano xy la base inferiore del cilindro, e l'asse z l'asse del cilindro; per modo che in coordinate cilindriche u e v (*Calc. differenz.* § 390 [pag. 523]) le equazioni di questo cilindro saranno le seguenti

$$x = r\cos u \ , \ y = r \operatorname{sen} u \ , \ z = v \ ,$$

essendo $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq h$.

S'immagini diviso questo cilindro con n sezioni orizzontali distanti l'una dall'altra di $\frac{h}{n}$ a partire dalla base inferiore, e in ogni sezione retta del cilindro così ottenuta si inscriva un poligono regolare di m lati partendo, su ciascuna sezione, dalla generatrice che corrisponde a $u=0$; con che per la base della sezione ν^a i vertici del poligono corrisponderanno a $u_1=0$, $u_2=\frac{2\pi}{m}$, $u_3=2\frac{2\pi}{m}$, ... , $u_\mu=(\mu-1)\frac{2\pi}{m}$, $u_{\mu+1}=\mu\frac{2\pi}{m}$,..., $u_m=(m-1)\frac{2\pi}{m}$ con $z_\nu=(\nu-1)\frac{h}{n}$ per tutti.

Si divida poi per metà ogni strato cilindrico così formato, e sulla nuova sezione retta corrispondente al piano di divisione si inscriva un altro poligono regolare pure di m lati, ma partendo su questa sezione dalla generatrice corrispondente a $u=\frac{\pi}{m}$; per modo che i vertici del nuovo poligono corrisponderanno a $u'_1=\frac{\pi}{m}$, $u'_2=\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{m}$, $u'_3=2\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{m}$,..., $u'_\mu=(\mu-1)\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{m}$,..., $u'_m=(m-1)\frac{2\pi}{m}+\frac{\pi}{m}$ con $z'_\nu=(\nu-1)\frac{h}{n}+\frac{h}{2n}$ per tutti, precisamente come se il cilindro si fosse alzato di $\frac{h}{2n}$ e avesse ruotato dell'angolo $\frac{\pi}{m}$; e uniamo ogni vertice (u'_μ , z'_ν) situato sulla nuova

secondo cui tendono a zero le sue faccie, e bisognerà trovare il modo di calcolare questo limite, nel supposto sempre che quelle leggi, comunque si fissino, siano però tali che con esse riescano soddisfatte le condizioni indicate.

---

sezione coi due vertici (u_μ , z_ν) e $(u_{\mu+1} , z_\nu)$ della sezione inferiore e coi due $(u_\mu , z_{\nu+1})$ e $(u_{\mu+1} , z_{\nu+1})$ della sezione superiore.

Si formeranno così per ogni strato cilindrico $4m$ triangoli iscritti tutti uguali fra loro, e questi triangoli tutti insieme formeranno un poliedro, con $4mn$ faccie triangolari tutte uguali fra loro, inscritto nell'intiero cilindro; e ciascun triangolo avrà per base un lato dei poligoni regolari che abbiamo costruiti sopra, cioè $2r\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}$ e per altezza una retta che sarà l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un lato l_g, posto sulla generatrice del cilindro, sarà $\frac{h}{2n}$ e l'altro l_s , posto sul raggio della sezione, sarà $r\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)$ o $2r\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2m}$, per modo che la detta altezza del triangolo sarà $\sqrt{\left(\frac{h}{2n}\right)^2+4r^2\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{2m}}$, per il che l'area di ciascuno di quei triangoli sarà $r\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{\left(\frac{h}{2n}\right)^2+4r^2\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{m}}$, e quella della intiera superficie poliedrica verrà ad essere $4mn\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\,r\sqrt{\left(\frac{h}{2n}\right)^2+4r^2\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{2m}}$ o anche

$$2m\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\,r\sqrt{h^2+16r^2\left(\frac{n}{m^2}\right)^2\left(m\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\right)^4}\ .$$

Ne segue che l'area totale della superficie poliedrica al crescere indefinito di m e n tenderà verso l'area ordinaria $2\pi rh$ del cilindro soltanto se gli accrescimenti successivi di m e n avranno luogo in modo che si abbia $\lim\frac{n}{m^2}=0$, tenderà verso una quantità determinata e finita, e di quella grandezza che più ci piacerà se il rapporto $\frac{n}{m^2}$ tenderà verso una quantità finita sufficientemente grande, e avrà invece per limite l'infinito se il rapporto $\frac{n}{m^2}$ crescerà indefinitamente al crescere indefinito di m e n, e infine non avrà nessun limite nè finito nè infinito se non lo avrà il rapporto $\frac{n}{m^2}$ come avverrebbe per es. quando fosse $n=m^2(2+\operatorname{sen} n)$; e questo mette in piena evidenza che il limite della superficie poliedrica sarà la vera superficie cilindrica nel solo caso che la successiva inscrizione delle faccie triangolari poliedriche si faccia in modo che si abbia $\lim\frac{n}{m^2}=0$.

Osservando poi che il rapporto di l_s a l_g o $\frac{4r}{h}n\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2m}=\frac{4r}{h}\left(m\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\right)^2\frac{n}{m^2}$ rappresenta la tangente dell'angolo α che il piano di ogni faccia triangolare del poliedro fa col piano tangente corrispondente al vertice del triangolo opposto alla base si vede che quest'angolo tende appunto a zero quando vi tende $\frac{n}{m^2}$, e non tende a zero negli altri casi, talchè la condizione testè indicata pel modo di crescere indefinitamente di m e n corrisponde appunto a quella che ora includiamo esplicitamente nella definizione di area.

Supponiamo perciò che la porzione C di superficie che si considera, per la quale ammetteremo che siano soddisfatte le condizioni indicate sopra, sia tutta al disopra di un piano che prenderemo come piano xy e inoltre sia tale che fatta la proiezione del suo contorno nel piano xy, ogni punto M dell'area piana C′ racchiusa da questa proiezione sia la proiezione di un punto solo della superficie, e il piano tangente alla superficie non sia mai perpendicolare al piano xy. Se questo non fosse, almeno nei casi ordinarî si potrà spezzare la superficie data C in più parti distinte, per ciascuna delle quali scegliendo convenientemente un piano xy e la direzione positiva dell'asse delle z si rientrerà nel caso ora indicato; ed è perciò che noi ci limiteremo a considerare questo caso soltanto.

Ciò ammesso, si immagini inscritta nella porzione C di superficie che si considera, una superficie poliedrica P a faccie triangolari; ogni faccia σ di essa si proietterà sul piano xy secondo un triangolo σ'; e ogni triangolo σ' corrisponderà a un sol triangolo σ e viceversa; e se si chiama α l'angolo acuto che la perpendicolare alla faccia poliedrica σ fa colla perpendicolare al piano xy (asse delle z), $\cos\alpha$ sarà diverso da zero e positivo e si avrà $\sigma'=\sigma\cos\alpha$, e $\sum\sigma=\sum\frac{\sigma'}{\cos\alpha}$, le somme essendo estese, la prima a tutte le faccie poliedriche, e la seconda a tutti i triangoli corrispondenti sul piano xy.

Ma esistendo un piano tangente della superficie C in ogni suo punto e, per le ipotesi fatte sulla superficie poliedrica inscritta e sulla legge d'impiccolimento delle sue faccie, dovendo tutte queste faccie σ al loro successivo impiccolirsi tendere in modo uniforme a venire sul piano tangente, l'angolo α dovrà tendere in modo uniforme verso l'angolo che la normale alla superficie fa coll'asse delle z; talchè indicando con $\zeta_{\sigma'}$ quest'angolo per la normale corrispondente ad un punto scelto comunque sulla superficie in un intorno di uno dei vertici della faccia σ, come ad es: per uno di questi vertici, si potrà scrivere evidentemente $\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\zeta_{\sigma'}}+\varepsilon$, essendo ε una quantità che, per le ipotesi fatte, quando le faccie σ siano divenute sufficientemente piccole, si manterrà *sempre* (cioè per *qualunque* faccia contemporaneamente) numericamente minore di quella quantità δ che più ci piace.

Si potrà dunque scrivere evidentemente

(1) $$\sum\sigma=\sum\frac{\sigma'}{\cos\zeta_{\sigma'}}+\theta\delta C',$$

essendo θ compresa fra -1 e 1, e quindi basterà ora occuparci della somma $\sum\frac{\sigma'}{\cos\zeta_{\sigma'}}$ nella quale $\zeta_{\sigma'}$ può prendersi uguale all'angolo dell'asse delle z colla

normale alla superficie in uno qualunque dei vertici della faccia corrispondente σ del poliedro, e anche, se vuolsi in uno qualunque dei punti di un piccolo intorno di uno di questi vertici.

S'immagini perciò il piano xy entro l'area C′ decomposto in rettangoli elementari $\Delta x\,\Delta y$ come si fece altra volta al § 164 [pag. 251 e seg.], e si conduca una diagonale in ciascuno di questi rettangoli decomponendoli così ciascuno in due triangoli t e t'; e si supponga dapprima che il poliedro sia quello le cui faccie hanno per proiezioni questi triangoli t e t', *ammettendo che le faccie del poliedro speciale* P *così formato possano poi soddisfare alla condizione di convergere in modo uniforme verso il piano tangente*, il che vedremo che avverrà sempre nei casi che poi indicheremo che sono i casi ordinari.

Si avrà allora $\sigma'=\frac{1}{2}\Delta x\,\Delta y$ e si potrà scrivere $\sum\sigma=\sum\frac{1}{2}\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\zeta_{\sigma'}}+\theta\delta C'$ essendo la somma del secondo membro estesa a tutti i triangoli t e t'; e poichè evidentemente a causa della continuità di $\cos\zeta_{\sigma'}$ si può prendere per questa quantità lo stesso valore tanto pel triangolo t che pel triangolo t', si potrà anche scrivere evidentemente

$$\sum\sigma=\sum\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\zeta}+2\theta_1\delta C',$$

la somma del secondo membro essendo ora estesa a tutti i rettangoli $\Delta x\,\Delta y$ in cui è scomposta l'area C′, fra i quali senza che vi sia alterazione nel limite possiamo intendere che si trovino o no inclusi anche tutti quelli che sono soltanto traversati dal contorno di C′; e in questa somma per $\cos\zeta$ si potrà prendere il valore che ha questa quantità nel vertice che si proietta nel punto (x, y).

Ora con considerazioni analoghe a quelle fatte al detto § 164 si vede che, comunque sia fatta la scomposizione di C′ in rettangoli elementari $\Delta x\,\Delta y$, la somma $\sum\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\zeta}$ ha un limite determinato che è l'integrale doppio $\int\int\frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$ limitato in modo da essere esteso a tutti i punti di C′ e di C; quindi almeno quando l'area S delle superficie si prende come limite del detto poliedro P pel quale si ammette la possibilità di soddisfare alle condizioni più volte indicate, questo limite è determinato e si ha

$$S=\int\int\frac{dx\,dy}{\cos\zeta},$$

dove l'integrale è esteso nel modo che abbiamo detto, e $\cos\zeta$ è il coseno dell'angolo acuto che la normale alla superficie nel punto (x, y) fa coll'asse delle z.

Ma d'altra parte se il poliedro che si inscrive nella superficie C è formato con un'altra legge qualsiasi, ma sempre tale però che risulti soddisfatta la condizione che le sue faccie σ possano convergere *in modo uniforme* verso il piano tangente, per quel poliedro si avrà ancora la formola (1), mentre per quanto grande sia il numero di quelle faccie e quindi anche dei vertici, per le proiezioni di questi vertici si potranno sempre condurre nel piano xy altrettante rette parallele agli assi x e y facendo così una speciale scomposizione dell'area piana C' in aree rettangolari $\Delta x \Delta y$.

Ognuno di questi rettangoli $\Delta x \Delta y$ risulterà dalla somma di alcune delle aree σ' o frazioni di queste aree; mentre, per la ipotesi fatta che il piano tangente, senza essere mai perpendicolare al piano xy, varii di posizione con continuità al variare con continuità del punto di contatto, le inverse dei coseni $\cos\zeta_{\sigma'}$ per tutte quelle aree σ' o loro frazioni che compongono il rettangolo $\Delta x \Delta y$, quando questo sarà divenuto sufficientemente piccolo, differiranno dall'inversa del valore di $\cos\zeta$ in uno stesso punto la cui proiezione cada in quel rettangolo meno di una quantità positiva arbitrariamente piccola data δ che potrà supporsi la stessa per qualsiasi rettangolo $\Delta x \Delta y$, e quindi la somma corrispondente dei rapporti $\frac{\sigma'}{\cos\zeta_{\sigma'}}$ o frazioni di questi rapporti differirà da $\frac{\Delta x \Delta y}{\cos\zeta}$ meno di $\delta \Delta x \Delta y$.

Per questo e perchè si ha ancora la formola (1), avremo sempre $\sum\sigma = \sum_1 \frac{\Delta x \Delta y}{\cos\zeta} + \theta_2 \delta C'$, indicando con θ_2 un numero compreso fra -1 e 1 e con $\sum_1$ la somma corrispondente alla scomposizione speciale che abbiamo fatta ora di C' in rettangoli elementari; quindi, poichè quando le faccie del poliedro siano divenute sufficientemente piccole la somma $\sum_1 \frac{\Delta y \Delta x}{\cos\zeta}$ differirà dall'integrale doppio $\int\int \frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$ tanto poco quanto si vuole, possiamo dire che si avrà $\sum\sigma = \int\int \frac{dx\,dy}{\cos\zeta} + \delta_1$ essendo δ_1 una quantità che in valore assoluto potrà supporsi minore di qualsiasi quantità data; e perciò al limite sarà $\lim \sum\sigma = \int\int \frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$, ciò che mostra appunto che — quando, come dicemmo di ammettere che sia, per ogni poliedro speciale P come quello che costruimmo sopra si possa soddisfare la condizione che le sue faccie, al loro indefinito

impiccolire, convergano in modo uniforme verso il piano tangente — l'area della superficie quale l'abbiamo definita ha un significato indipendente dalla superficie poliedrica della quale ci serviamo e dal modo con cui, sotto la detta condizione, si fanno tendere a zero le faccie di questa superficie.

Ora che ogni poliedro speciale P come quello che costruimmo sopra soddisfi effettivamente alla condizione testè ricordata si verifica subito quando, come appunto è conseguenza delle nostre ipotesi intorno alla porzione di superficie che si considera e alla scelta che abbiamo fatto degli assi coordinati, la porzione stessa può essere rappresentata da una equazione $z = z(x, y)$ per la quale le solite derivate parziali p e q sono finite e continue nella porzione medesima.

Indicando infatti allora con $(x, y, z), (x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ e $(x+\Delta_1 x, y, z+\Delta_1 z)$ le coordinate dei tre vertici di una delle faccie del detto poliedro P, le Δx e $\Delta_1 y$ non saranno zero, e il piano della faccia avrà per equazione

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 0 & \Delta y & \Delta z \\ \Delta_1 x & 0 & \Delta_1 z \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(X-x)\,\Delta y\,\Delta_1 z + (Y-y)\,\Delta z\,\Delta_1 x - (Z-z)\,\Delta_1 x\,\Delta y = 0,$$

o anche

$$(X-x)\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x} + (Y-y)\frac{\Delta z}{\Delta y} - (Z-z) = 0;$$

e poichè pel teorema degli accrescimenti finiti i rapporti $\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 x}$ e $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ non sono che le derivate parziali p e q rispetto ad x e ad y della funzione $z(x, y)$ nei punti $(x+\theta_x \Delta x, y), (x, y+\theta_y \Delta y)$ vicinissimi al punto (x, y), pei quali θ_x e θ_y sono numeri positivi compresi fra 0 e 1, e per le nostre ipotesi le derivate parziali p e q di z sono finite e continue, e quindi continue uniformemente, in tutta la porzione di superficie C, è certo che il detto piano (2) convergerà sempre in modo uniforme verso il piano tangente $p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0$ della superficie; e con questo resta dimostrato completamente quanto volevamo.

170. — Così siccome sotto le nostre ipotesi intorno alle derivate parziali p e q si ha $\cos\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, si può ora concludere che l'area S di una porzione qualunque C di superficie che soddisfa alle condizioni poste in principio e ha per equazione $z = z(x, y)$ è data dalla formola

$$(3)\qquad S = \int\int \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

dove p e q sono le solite derivate parziali di z e il radicale s'intende preso positivamente.

Quando poi la scomposizione dell'area piana C′ in aree elementari, invece di farsi colle rette parallele agli assi x e y corrispondenti alle coordinate cartesiane, si faccia per mezzo di rette che partono da un punto fisso e di circonferenze concentriche che hanno questo punto per centro, cioè si faccia colle linee delle coordinate polari ρ e ω, supponendo per togliere ogni ambiguità che il polo sia esterno a C′, si vede subito che, all'infuori di quantità di ordine superiore al secondo uniformemente che non hanno nessuna influenza, agli elementi $\frac{\sigma'}{\cos\zeta}$ nella (1) si possono sostituire le quantità $\frac{\rho d\rho d\theta}{\cos\zeta}$, e si ha perciò $S=\int\int\frac{\rho d\rho\, d\theta}{\cos\zeta}$, dovendo ora, per fare l'integrazione, $\cos\zeta$ esprimersi per le coordinate ρ e θ.

171. — Fermandoci alla formola $S=\int\int\frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$ noi vediamo che colle coordinate cartesiane l'area S vien data come limite della somma di tanti elementi superficiali $d\sigma=\frac{dx\,dy}{\cos\zeta}$ situati nel piano tangente alla superficie (giacchè $dx\,dy=d\sigma\cos\zeta$); e l'area stessa S si può anche ottenere considerando la superficie che si cerca come decomposta in tanti quadrilateri elementari (ciascuno dei quali ha per proiezione $dx\,dy$) formati dagli elementi di due sistemi di linee che sono le sezioni prodotte nella superficie da due sistemi di piani paralleli ai piani xz e yz respettivamente, e considerando questi quadrilateri come piani e situati sul piano tangente, e poi facendo la ricomposizione di questi elementi colla integrazione.

Questo però non è un resultato speciale proprio delle coordinate cartesiane ma ha una maggiore generalità come resulta dalle considerazioni seguenti.

Si immaginino tracciati sulla superficie due sistemi di linee secondo date leggi, e si supponga che queste linee abbiano in ogni punto una tangente determinata, e le linee di ciascun sistema non tocchino mai quelle dell'altro, e siano indipendenti da queste; e inoltre quelle di ogni sistema possano avvicinarsi l'una all'altra indefinitamente e indipendentemente da quelle dell'altro sistema, e insieme decompongano la superficie in tanti quadrilateri curvilinei senza ambiguità, in modo che i quadrilateri esistano sempre, non si sovrappongano e ricuoprano tutta la porzione di superficie data, salvo tutt'al più al contorno di questa porzione di superficie perchè al contorno invece di quadrilateri intieri potrà darsi che si abbiano soltanto certe porzioni di essi.

A questi quadrilateri curvilinei situati sulla superficie corrisponderanno

quadrilateri sghembi rettilinei formati dalle corde dei loro lati, e decomponendo questi per mezzo di una loro diagonale si verranno a formare tanti triangoli che insieme costituiranno un poliedro P a faccie triangolari inscritto nella superficie.

In ognuna di queste faccie due dei tre lati saranno le corde delle linee dei due sistemi, e coll'avvicinarsi indefinito fra loro delle linee di ciascuno dei due sistemi queste corde tenderanno verso le tangenti; e si può ammettere che per ciascun sistema l'avvicinamento delle linee di esso si faccia in modo che contemporaneamente le corde delle une e delle altre linee siano vicine quanto si vuole alle tangenti corrispondenti, e ciò per qualunque punto della superficie contemporaneamente (e quindi in modo uniforme) se questa superficie non ha singolarità nella porzione che si considera.

Così le faccie triangolari tenderanno in modo uniforme verso il piano tangente, e il limite della superficie del poliedro P sarà l'area della nostra superficie; e poichè, avendo riguardo alle formole per le differenze fra gli archi e le corde che trovammo nel Calcolo differenziale (§ 318 [pag. 436 e seg.]) (*), si vede che, quando la superficie e le linee dei due sistemi non hanno singolarità, nel determinare la misura delle varie faccie triangolari del poliedro, all'infuori di infinitesimi di ordine superiore uniformemente, alle corde possono sostituirsi gli archi, e agli angoli delle corde possono sostituirsi quelli delle tangenti, così riunendo due a due le faccie contigue del poliedro P corrispondenti a uno stesso quadrilatero, si vede chiaro che l'area S, salvo quanto potrà avvenire ai contorni, viene a figurare anche come somma di tanti quadrilateri piani e rettilinei che hanno per lati gli archi e per angoli gli angoli dei quadrilateri nei quali la superficie è stata scomposta; per modo che, fatta la detta scomposizione della superficie cogli indicati due sistemi di linee, si possono prendere come elementi superficiali di essa, destinati a ricomporla colla integrazione, i quadrilateri che si ottengono dalla scomposizione stessa considerandoli come piani e rettilinei, e quindi anche come se fossero situati del tutto nel piano tangente.

Quanto poi alla ricomposizione della superficie colla integrazione s'intende che potremo farla riunendo prima tutti i quadrilateri lungo le linee di un sistema e determinando così con una integrazione semplice le aree delle stri-

(*) Propriamente nel *Calcolo differenziale* al § 318 considerammo le differenze fra gli archi e le corde soltanto nel caso delle curve piane mentre ora le linee che si considerano saranno il più spesso linee gobbe; però colle stesse considerazioni i risultati ottenuti per le curve piane si estendono subito anche al caso delle curve gobbe, come in sostanza a questo fu alluso anche al principio della pag. 513 del detto *Calcolo differenziale*.

scie comprese fra queste linee successive; e poi con una seconda integrazione sommando tutte le striscie ottenute.

Nè sarà il caso di curarsi di quello che proverrà dalle parti di quadrilateri che si avranno al contorno se, come è naturale di supporre, questo sarà di lunghezza finita s, perchè racchiudendolo entro linee che siano distanti da esso meno di σ la somma di quelle frazioni di quadrilateri non supererà l'area compresa fra queste linee la quale potrà supporsi piccola ad arbitrio, perchè se s_1 sarà la maggiore fra le lunghezze di queste due linee quest'area sarà inferiore a un numero che differirà tanto poco quanto si vuole da $2\sigma s_1$.

172. — In seguito a questa osservazione generale, quando sulla superficie si abbia un sistema di coordinate curvilinee u e v *(Calc. diff.* § 374 e seg. [pag. 505 e seg.]) per le quali si abbiano le formole

$$x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ,\ z = z(u,v)$$

per le equazioni della superficie, e pel quadrato dell'elemento lineare della superficie, colle solite notazioni di Gauss, si abbia

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

se ammetteremo che la scomposizione della superficie in quadrilateri elementari si faccia colle linee u e v, l'area di ciascuno di questi quadrilateri sarà $ds_u\,ds_v$ sen ω, essendo ds_u e ds_v gli archi elementari delle stesse linee pei quali si ha *(Calc. diff.* § 382 [pag. 516-517]) $ds_u = \sqrt{\mathrm{G}}\,dv$ e $ds_v = \sqrt{\mathrm{E}}\,du$, e ω essendo l'angolo delle stesse linee u e v pel quale si hanno le formole $\cos\omega = \dfrac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}$ e $\operatorname{sen}\omega = \dfrac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}$, senza che sia mai $\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2 = 0$; quindi l'area stessa elementare sarà $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du\,dv$, e per l'area determinata da una curva chiusa tracciata sulla superficie potrà prendersi sempre l'integrale doppio $\displaystyle\int\!\!\int \sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du\,dv$ nel quale le integrazioni potranno incominciarsi indifferentemente da u o da v limitandole convenientemente ogni volta.

173. — Le osservazioni generali che ora abbiamo fatto sul modo di considerare le aree delle superficie conducono in molti casi a determinarle con molta facilità e anche con una sola integrazione invece che con due.

Si supponga infatti che si tratti p. es: di una superficie di rivoluzione attorno all' asse delle z, di cui l'equazione della curva meridiana sia $z = \varphi(y)$, e s'immaginino tracciati su di essa il sistema dei meridiani e quello dei paralleli.

Siccome i meridiani e i paralleli di queste superficie sono ad angolo retto, si verrà con ciò a scomporre la superficie in tanti rettangoli elementari, l'area di ciascuno dei quali sarà $ds\,dp$, essendo ds l'arco del meridiano e dp quello del parallelo; e siccome ciascuno dei rettangoli che trovansi situati fra due paralleli consecutivi ha per altezza ds, la somma di questi rettangoli e quindi l'area di tutta la striscia compresa fra i due paralleli sarà $ds\,\Sigma\,dp$, ovvero $2\pi y\,ds$, giacchè se y è l'ordinata della curva meridiana nel punto corrispondente al parallelo che si considera, essa è anche il raggio di questo parallelo, e si ha perciò $\Sigma\,dp = 2\pi y$.

Volendo dunque l'area S della superficie compresa fra due paralleli i cui raggi siano le ordinate y_0 e y_1, basterà fare la somma delle aree di tutte le striscie elementari comprese fra questi paralleli, e perciò si avrà con una sola quadratura

$$\mathrm{S} = 2\pi\int y\,ds = 2\pi\int y\sqrt{dz^2+dy^2} = 2\pi\int y\frac{ds}{dy}\,dy = 2\pi\int y\frac{ds}{dz}\,dz\,,$$

intendendo che, se nel passaggio da un parallelo all'altro la variabile d'integrazione varierà sempre in un senso, l'integrale sarà un integrale definito ordinario nel quale l'elemento dovrà essere preso sempre positivamente e i limiti saranno i valori della variabile che corrispondono ai paralleli estremi, mentre quando nell'indicato passaggio la variabile non varierà sempre nello stesso senso, l'integrale dovrà intendersi spezzato nella somma di più integrali in ciascuno dei quali la variabile varii nello stesso senso, prendendo poi questi integrali tutti positivamente.

174. — Applichiamo ora questi processi generali ad alcuni esempii.

1.° Avendosi una sfera $x^2+y^2+z^2 = \mathrm{R}^2$ di raggio R col centro all'origine, si voglia determinare l'area S di quella porzione di superficie che si proietta nel piano xy sul cerchio C descritto sopra un raggio R come diametro; o, il che è lo stesso, si voglia trovare l'area determinata sulla sfera superiormente al piano xy da un cilindro che ha quel cerchio per sezione retta.

La determinazione di quest'area può farsi colle coordinate cartesiane mediante la formola $\mathrm{S} = \displaystyle\int\!\!\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$, che, per essere $p = -\dfrac{x}{z}$, $q = -\dfrac{y}{z}$, si riduce a $\mathrm{S} = \mathrm{R}\displaystyle\int\!\!\int\frac{dx\,dy}{z} = \mathrm{R}\int\!\!\int\frac{dx\,dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2-x^2-y^2}}$, facendo in questa le limitazioni degli integrali con tener conto che la equazione del cerchio C è $\left(x-\dfrac{1}{2}\mathrm{R}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}\mathrm{R}^2$, ovvero $x^2-\mathrm{R}x+y^2 = 0$ o $y = \pm\sqrt{\mathrm{R}x-x^2}$, per modo che facendo le integrazioni prima rispetto alla variabile y e poi rispetto alla x si avrà

$$S = R \int_0^R dx \int_{-\sqrt{Rx - x^2}}^{\sqrt{Rx - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Le integrazioni però si eseguiscono più facilmente quando si fa uso delle coordinate polari, partendo cioè dalla formola $S = \int\int \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\cos\zeta}$, la quale, per essere ora $\cos\zeta = \frac{z}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}$, si trasforma nell'altra $S = R \int\int \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$; e tenendo conto della equazione del cerchio C che in coordinate polari diviene $\rho^2 = R\rho\cos\theta$ o $\rho = R\cos\theta$, si vede che in questo cerchio per ogni valore di θ il ρ va da 0 a $R\cos\theta$, mentre θ va da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, talchè incominciando le integrazioni da ρ si potrà scrivere $S = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$.

Osservando dunque ora che $\int_0^{R\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \left(-\sqrt{R^2 - \rho^2}\right)_0^{R\cos\theta}$, e quindi $\int_0^{R\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R - R\operatorname{sen}\theta$ quando θ è positivo, e $\int_0^{R\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R + R\operatorname{sen}\theta$ quando θ è negativo perchè il radicale $\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\theta}$ deve essere preso sempre positivamente, si vede subito che si avrà

$$S = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta + R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}\theta)\, d\theta,$$

ovvero $S = R^2(\pi - 2)$ per l'area cercata.

Prendendo ora il doppio $2R^2(\pi - 2)$ di questa area sferica e togliendola dalla intiera superficie $2\pi R^2$ della semisfera, la differenza $4R^2$ sarà evidentemente la porzione S_1 della superficie della mezza sfera che resta dopo di avercene staccata la parte racchiusa da due cilindri retti che hanno per base sul piano che limita la mezza sfera i cerchi contigui descritti su due raggi opposti di questa presi come diametri.

La porzione S_1 di superficie sferica così determinata ha dunque la proprietà di essere uguale al quadrato descritto sul diametro $2R$ della sfera, ed essere quindi, come si dice, *quadrabile*. Viene detta la *volta di Viviani* perchè fu Viviani che ne dimostrò questa notevole proprietà risolvendo così un problema celebre che porta perciò il suo nome.

2.° Si voglia l'area dell'ellissoide schiacciata di rotazione attorno all'asse z che ha per curva meridiana l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, con $b < a$.

Ponendo $x = a\cos u$, $z = b\operatorname{sen} u$, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ si potrà intendere che u vada da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ quando si vuole avere tutto l'ellissoide; e poichè pel differenziale ds dell'arco dell'ellisse meridiana si avrà

$$ds = du\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u} = b\, du\sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\operatorname{sen}^2 u},$$

così per l'area S compresa fra i paralleli corrispondenti a $u = u_0$ e $u = u_1$, essendo $u_0 < u_1$, avremo

$$S = 2\pi ab \int_{u_0}^{u_1} du \cos u \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\operatorname{sen}^2 u} = 2\pi a \int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{1 + \frac{e^2}{b^2(1 - e^2)} z^2},$$

e poichè alla pag. 45 si trovò

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \operatorname{sett\,senh} x + C,$$

sarà

$$S = 2\pi \frac{ab}{e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{z}{b} \sqrt{1 + \frac{e^2}{b^2(1 - e^2)} z^2} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \operatorname{sett\,senh} \frac{ez}{b\sqrt{1 - e^2}} \right\}_{z_0}^{z_1},$$

e quindi pel mezzo ellissoide si avrà (facendo $z_0 = 0$, $z_1 = b$)

$$S = \pi ab \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}\, 2 \operatorname{sett\,senh} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \right\}.$$

Se l'ellissoide invece di essere schiacciato ai poli, come deve essere supposto se si vuole che la espressione precedente della eccentricità e sia reale, fosse allungato nel senso dell'asse di rotazione, allora chiamando ancora e l'eccentricità corrispondente a questo caso, si avrebbe per il mezzo ellissoide

$$S = \pi ab \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}} + \frac{\sqrt{1 + e^2}}{e} \operatorname{arc\,sen} \frac{e}{\sqrt{1 + e^2}} \right\}.$$

Supponendo invece $a=b$, $e=0$ coll'osservare che al tendere a zero di e i due rapporti $\frac{2\,\text{sett}\,\text{senh}\,e}{e}$ e $\frac{\text{arc sen}\,e}{e}$ tendono alla unità, si trova $S=2\pi a^2$, come deve essere perchè allora si cade nel caso della mezza sfera.

3.° Si voglia la superficie S del toro del quale il cerchio meridiano o cerchio generatore è di raggio R, e il centro di questo cerchio è alla distanza $a \geq R$ dall'asse.

Introducendo come variabile l'angolo θ che il raggio del cerchio fa colla verticale e facendolo andare da 0 a 2π per modo che il punto più lontano dall'asse corrisponda a $\theta=\frac{\pi}{2}$, avremo sempre $y=a+R\,\text{sen}\,\theta$, $ds=R\,d\theta$, e quindi sarà $S=2\pi R\int_0^{2\pi}(a+R\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta$, ovvero $S=4\pi^2 aR$, per la superficie cercata, la quale risulta così uguale a quella di un rettangolo di cui un lato è la circonferenza $2\pi R$ del cerchio generatore e l'altro lato è la circonferenza $2\pi a$ descritta dal centro di questo cerchio intorno all'asse.

Volumi.

175. — Passiamo ora ad occuparci della determinazione dei volumi limitati da una o da più superficie.

Seguendo perciò i concetti ormai più volte esposti, immaginiamo decomposto lo spazio in tanti parallelepipedi elementari $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ con piani paralleli ai piani coordinati, essendo Δx, Δy e Δz sempre positivi.

Prendiamo a considerare una porzione dello spazio che per semplicità supporremo dapprima tutta al disopra del piano xy e limitata da questo piano, da una porzione di superficie tutta a distanza finita e continua, e dal cilindro che proietta il contorno di questa porzione di superficie sul piano xy; e la stessa superficie sia anche tale che venga incontrata sempre in un solo punto dalle rette parallele all'asse delle z; e consideriamo il volume V_1 formato dall'insieme di tutti i parallelepipedi che sono contenuti per intiero in quello spazio, e il volume $\overline{V}_1$ che viene da questo aggiungendo i vari parallelepipedi contigui che saranno in parte interni e in parte esterni allo spazio medesimo.

Facciamo poi impiccolire indefinitamente con leggi qualsiansi Δx, Δy e Δz e quindi gli stessi parallelepipedi $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$; il limite comune dei volumi V_1 e $\overline{V}_1$, che come vedremo esisterà e sarà l'integrale triplo $\int dx\int dy\int dz$ limitato convenientemente, sarà quello che intenderemo come *volume* V dello spazio considerato.

Per trovare i volumi V_1 e $\overline{V}_1$, si supponga che $\Delta x, \Delta y$ e Δz nel loro successivo impiccolire siano già tutti ridotti minori di un numero positivo arbitrariamente piccolo dato σ; e se p. es. $z=z(x,y)$ è la equazione della porzione di superficie che limita lo spazio che si considera, siccome la funzione $z(x,y)$, essendo finita e continua, sarà anche continua uniformemente, potremo supporre che Δx e Δy siano presi non solo inferiori a σ ma tali altresì che considerando i varii rettangoli $\Delta x\,\Delta y$ contenuti nell'area del piano xy sulla quale si projetterà la stessa porzione di superficie, le oscillazioni $D_{x,y}$ di $z(x,y)$ in ciscuno degli stessi rettangoli siano sempre inferiori a un altro numero positivo dato σ_1 anch'esso arbitrariamente piccolo.

Ammesso questo, per fare la somma dei detti parallelepipedi e trovare quindi i volumi V_1 e $\overline{V}_1$, si incomincino a sommare tutti quelli che si proiettano su uno stesso rettangolo $\Delta x\,\Delta y$ sul piano xy.

La somma s di tutti quelli fra questi ultimi parallelepipedi che sono del tutto interni al nostro spazio sarà $\Delta x\,\Delta y\,\Sigma\Delta z$ o $\Delta x\,\Delta y\int dz$, dove la somma $\Sigma\Delta z$ o l'integrale $\int dz$ deve estendersi dal piano xy fino alla faccia superiore dell'ultimo fra i detti parallelepipedi che appartiene a V_1. Aggiungendo a questa somma s un altro parallelepipedo che sarà inferiore a $\sigma\Delta x\,\Delta y$ si uscirà già almeno in parte dallo spazio, e vi si uscirà poi completamente se si aggiungerà anche un parallelepipedo che abbia per volume $D_{x,y}\,\Delta x\,\Delta y$; e quindi certamente la somma $s+(\sigma+D_{x,y})\,\Delta x\,\Delta y$ sarà superiore alla parte prismatica di $\overline{V}_1$ che si proietta sul rettangolo $\Delta x\,\Delta y$ nel piano xy, per modo che le parti prismatiche di $\overline{V}_1$ e V_1 che si proiettano su questo rettangolo differiranno fra loro meno di $(\sigma+D_{x,y})\,\Delta x\,\Delta y$.

Indichiamo ora con z l'ordinata della superficie corrispondente a un punto (x,y) del rettangolo $\Delta x\,\Delta y$, pel qual punto potremo per es. fissare di prendere il vertice più vicino all'origine delle coordinate; s e $s+(\sigma+D_{x,y})\,\Delta x\,\Delta y$ comprenderanno la quantità $\Delta x\,\Delta y\int dz$ quando l'integrale $\int dz$ viene esteso dal piano xy fino alla superficie sulla verticale che passa pel punto (x,y) ed è per conseguenza uguale a z; quindi le parti prismatiche di $\overline{V}_1$ e V_1 che si proiettano sul piano xy nel rettangolo $\Delta x\,\Delta y$ potranno rappresentarsi con $z\,\Delta x\,\Delta y+\mu(\sigma+D_{x,y})\Delta x\,\Delta y$, essendo μ per V_1 compreso fra -1 e 0, e per $\overline{V}_1$ compreso fra 0 e 1.

Ne segue che se faremo la somma di tutte le indicate parti prismatiche di V_1 e $\overline{V}_1$ per tutti i rettangoli $\Delta x \Delta y$ che riempiono l'area A che è la proiezione dello spazio dato sul piano xy, per modo da ottenere con ciò V_1 e $\overline{V}_1$, si vede che V_1 e $\overline{V}_1$, non differiranno dalla somma s_1 corrispondente delle quantità pure prismatiche $z \Delta x \Delta y$ più della quantità $(\sigma + \sigma_1)$ A che sarà arbitrariamente piccola; quindi il limite che poi troveremo per quest'ultima somma s_1 sarà appunto il limite comune cercato di V_1 e $\overline{V}_1$.

Ora per trovare la somma s_1 delle quantità $z \Delta x \Delta y$ che sono i prismi di altezza z aventi per basi i rettangoli $\Delta x \Delta y$ sommiamo tutti quelli che stanno fra i due piani paralleli al piano yz e alle distanze x e $x + \Delta x$ da questo, cioè determiniamo la somma $\Delta x \Sigma z \Delta y$ nella quale colla somma $\Sigma z \Delta y$ potremo andare ai limiti estremi del contorno dell'area A salvo nuove differenze in più o in meno nella somma $\Delta x \Sigma z \Delta y$ inferiori a $(\sigma + D'_{c,y}) \Delta x$ per ognuna delle parti c del contorno di A che saranno traversate dalle rette parallele all'asse delle y, intendendo che $D'_{c,y}$ siano le oscillazioni delle ordinate y di queste parti c del contorno nell'intervallo Δx; oscillazioni anche queste che, per la continuità che supponiamo anche in questo contorno, potranno supporsi *sempre* inferiori a un altro numero arbitrariamente piccolo dato σ_2.

Osserviamo poi che per proprietà note la somma così estesa $\Sigma z \Delta y$ e l'integrale $\int z\,dy$ esteso al modo stesso differiranno fra loro meno di $\Sigma D_z \Delta y$ essendo D_z le oscillazioni della funzione z quando sul piano xy si passa da y a $y + \Delta y$ movendosi sulla parallela all'asse delle y alla distanza x da quest'asse, oscillazioni che per le nostre ipotesi sono anch'esse inferiori a σ_1; si concluderà da ciò che quando le Δx e Δy siano ridotte sufficientemente piccole la somma s dei prismi ora considerati $z \Delta x \Delta y$ cioè lo strato di spazio formato da questi prismi compresi fra i piani paralleli al piano yz alle distanze x e $x + \Delta x$ non differirà dall'integrale $\Delta x \int z\,dy$ o $\Delta x \int dy \int dz$ che per una quantità inferiore a $\sigma' \Delta x$, essendo σ' un numero positivo arbitrariamente piccolo dato; e ciò per *qualunque* valore di x corrispondente a punti dell'area A, e quando gli integrali si intendano limitati convenientemente nel modo che risulta dalle considerazioni precedenti.

Non curandoci dunque di ciò che potrà provenire dalla somma delle quantità inferiori a $\sigma' \Delta x$ che sarà certo inferiore a $\sigma'(b - a)$ se a e b sono le ascisse corrispondenti alle parallele estreme all'asse delle y che comprendono l'area A, e indicando ora con $\varphi(x)$ l'ultimo integrale così determinato $\int z\,dy$ o

$\int dy \int dz$, e quindi con $\varphi(x) \Delta x$ l'ultima somma trovata per l'insieme dei prismi compresi nello strato suddetto, rimarrà a trovarsi la somma $\Sigma \varphi(x) \Delta x$ di questi strati, la quale per essere $\varphi(x)$ sempre continua non differirà dall'integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ che per quantità che si potranno ridurre piccole a piacere; dunque evidentemente si può ora asserire che il limite comune cercato di V_1 e $\overline{V}_1$, e quindi il volume del nostro spazio sarà l'integrale triplo $\int dx \int dy \int dz$ e potrà ridursi all'integrale doppio $\int dx \int z\,dy$, gli integrali dovendo successivamente limitarsi nel modo che risulta dalle considerazioni precedenti.

176. — Si supponga ora che lo spazio che si considera — anzichè essere ancora, come per semplicità supponemmo nel paragrafo precedente, tutto al disopra del piano xy e limitato da questo piano, da una porzione di superficie per la quale siano soddisfatte le condizioni poste sopra, e dal cilindro che proietta il contorno di questa superficie sul piano xy — sia posto comunque, ma sempre a distanza finita e limitato da una superficie chiusa o da più porzioni di superficie continue che, salvo nelle linee e faccie piane verticali che avessero, possano essere incontrate dalle rette parallele all'asse delle z in un numero qualsiasi ma sempre finito di punti; allora colle stesse considerazioni si vede che il volume di quello spazio sarà ancora dato dall'integrale triplo $\int dx \int dy \int dz$ nel quale però l'integrale $\int dz$, anzichè essere limitato da 0 a z ed essere quindi uguale a z, sarà uguale alla somma delle lunghezze delle varie porzioni di rette parallele allo stesso asse z che si troveranno comprese nello spazio dato per ogni punto (x, y) della proiezione sul piano xy, prese queste lunghezze, come i differenziali dx e dy, sempre positivamente.

E s'intende che invece di incominciare le integrazioni da z e farle successivamente nell'ordine sopra indicato, potranno farsi anche in un altro ordine mutando allora naturalmente i limiti delle successive integrazioni; e per la dimostrazione che abbiamo fatta s'intende pure che i risultati ottenuti continuano a sussistere anche in casi nei quali le superficie che limitano lo spazio presentano alcune discontinuità.

177. — Questi risultati dànno il mezzo di determinare in ogni caso il volume racchiuso fra date superficie.

Così in particolare, suppongasi che il volume V che si vuole determinare sia limitato dal piano xy, da una superficie $z=z(x,y)$ incontrata in un sol punto (almeno nella porzione in cui si considera) dalle varie rette parallele all'asse delle z, e da un cilindro (cilindro proiettante il contorno della superficie limite) che abbia per base sul piano xy una curva C che è tutta compresa fra due tangenti parallele all'asse delle y che passano pei punti di ascisse a e b; e supponiamo anche che dalle rette parallele all'asse delle y poste fra queste tangenti estreme la curva C sia incontrata soltanto in due punti aventi per ordinate $y=f(x)$ e $y=\psi(x)$, essendo $f(x)\geq\psi(x)$.

Allora evidentemente l'integrale relativo a z si ridurrà a $z(x,y)$, quello relativo ad y verrà limitato da $\psi(x)$ a $f(x)$, e quello relativo ad x da a a b, e si avrà pel volume cercato

$$V=\int_a^b dx\int_{\psi(x)}^{f(x)} z(xy)\,dy\,.$$

Se invece la superficie di cui si cerca il volume fosse chiusa, e fosse incontrata dalle rette parallele all'asse delle z in due punti pei quali $z=z_0(x,y)$ e $z=z_1(x,y)$ essendo $z_0(x,y)\leq z_1(x,y)$, e se per la curva che forma il contorno della proiezione della superficie sul piano xy fossero ancora verificate le condizioni precedenti avremo invece

$$V=\int_a^b dx\int_{\psi(x)}^{f(x)} dy\int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} dz=\int_a^b dx\int_{\psi(x)}^{f(x)}\{z_1(x,y)-z_0(x,y)\}\,dy\,.$$

178. — È poi da osservare che invece della scomposizione che abbiamo fatta del volume V per mezzo di piani paralleli ai piani coordinati, si potrà fare una scomposizione differente in elementi di volume racchiusi da altri sistemi di superficie, per ricomporre poi questi elementi con una tripla integrazione tralasciando quelle quantità che risultassero espresse per infinitesimi di ordine superiore al terzo uniformemente, o per le quali più generalmente si trovasse che la loro somma ha per limite lo zero.

Così avendo un sistema triplo di superficie coordinate curvilinee come ad es. le coordinate polari nello spazio, o quelle cilindriche, o quelle ellittiche ecc. che considerammo nel *Calcolo differenziale* ai §§ 338 e seg. [pag. 522 e seg.], la scomposizione dello spazio in volumi elementari potrà farsi per mezzo delle superficie di ciascuno dei tre sistemi; e così, per le formole allora trovate, l'elemento dello spazio in coordinate polari (ρ,θ,φ) verrà ad essere $\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$, in coordinate cilindriche (ρ,θ,z) verrà ad essere $\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$, ecc.; e in generale questo elemento dello spazio si troverà con tutta facilità per mezzo della formola che dà il quadrato dell'elemento lineare dello spazio colle coordinate che si considerano.

179. — Talvolta poi facendo una scomposizione adattata dello spazio o del volume che si cerca si potrà giungere a determinare il volume stesso anche con una sola integrazione.

Così per es. nel caso delle superficie di rivoluzione attorno all'asse delle z quando la curva meridiana ha per equazione $y=f(z)$, condotti i piani dei varî paralleli si verrà a fare una scomposizione del volume della superficie in volumi elementari che, quando non vi siano vuoti intorno all'asse di rotazione, potranno considerarsi come volumi cilindrici elementari aventi per base la base πy^2 di uno dei due paralleli che li limitano e per altezza la distanza Δz fra i due piani, all'infuori però di volumi uguali a frazioni della differenza di due cilindri aventi ancora per altezza Δz e per basi i paralleli di raggi massimo e minimo R_M, R_m compresi fra i due che limitano il volume elementare che si considera.

Osservando però che questa differenza è uguale a $\pi(R_M^2-R_m^2)\Delta z$ o $\pi(R_M-R_m)(R_M+R_m)\Delta z$, e quindi è minore di $2\pi R D_y\Delta z$, essendo R il raggio del massimo parallelo della superficie e essendo D_y la oscillazione di y nell'intervallo Δz, si vede che anche la somma di tutte queste differenze ha per limite zero quando Δz tende a zero, e si conclude perciò che il volume della superficie di rivoluzione attorno all'asse z compreso fra i paralleli che corrispondono ai valori z_0 e z_1 di z con $z_0<z_1$, quando non vi sono vuoti nel suo interno, è dato dalla formola

$$V=\pi\int_{z_0}^{z_1} y^2\,dz\,, \tag{1}$$

dove y è il raggio del parallelo o l'ordinata della curva meridiana $y=f(z)$ e quindi si ottiene con una sola integrazione.

Quando poi vi è un vuoto intorno all'asse di rotazione, come per es. quando si ha da cercare il volume V generato dall'area compresa fra due porzioni di curve che stanno tutte da una stessa parte dell'asse di rotazione z, e due rette perpendicolari a quest'asse, allora chiamando, per ogni valore di z, Y l'ordinata della curva che in corrispondenza a quel valore di z risulta più lontana dall'asse e y quella della curva più vicina, e indicando con z_0, z_1 i valori di z corrispondenti alle ordinate estreme, essendo $z_0<z_1$, si ha

$$V=\pi\int_{z_0}^{z_1}(Y^2-y^2)\,dz\,. \tag{2}$$

180. — Si deve poi osservare che il processo qui indicato per trovare il volume delle superficie di rivoluzione consiste in sostanza nell'immaginare decomposto il volume cercato in tanti strati elementari che si ottengono tagliando la superficie con un sistema di piani che sono paralleli fra loro e ad una distanza che deve poi divenire infinitesima, e nel riunire poi tutti questi elementi considerandoli come cilindri aventi per base l'area della sezione e per altezza la distanza infinitesima fra i due piani che li producono.

Questo processo quindi ha un carattere generale, e può perciò essere usato utilmente anche in altri casi; e del resto non è altro che il processo generale del § 175 [pag. 274 e seg.] nel quale si sono eseguite due integrazioni, incominciando da quelle relative ad x e ad y e lasciando per ultima quella relativa a z; poichè difatti anche nella formola generale $\int dx \int dy \int dz$ dei paragrafi precedenti l'integrale doppio $\int dy \int dz$ rappresenta l'area della sezione che è prodotta nel volume considerato dal piano parallelo al piano $y\,z$ e alla distanza x da questo, e $dx \int dy \int dz$ rappresenta il volume dello strato compreso fra lo stesso piano e l'altro piano parallelo alla distanza dx dal primo, il qual volume, all'infuori di quantità di ordine superiore uniformemente, può essere appunto considerato come uno strato cilindrico che ha per base la sezione e per altezza dx.

E così in generale si può anche dire che per avere il volume di uno spazio basta sapere determinare con un processo qualsiasi l'area delle sezioni prodotte in esso da un sistema di piani paralleli e considerare come cilindri retti elementari gli strati compresi fra queste successive sezioni, determinandone poi la somma (che verrà ad essere appunto il volume cercato) con una integrazione semplice.

181. — Aggiungiamo infine che bene spesso pel calcolo dei volumi dei corpi e specialmente di quelli di rivoluzione, può anche essere utile di decomporli a strati cilindrici circolari, cioè a strati compresi fra cilindri circolari vicinissimi fra loro e aventi lo stesso asse, e poi riunire con una integrazione semplice tutti questi strati elementari (differenza di volumi cilindrici).

S'intende però che per avere con questo processo il volume che si cerca dovremo spesso calcolarlo in più parti separatamente dipendentemente dalla forma delle superficie che lo limitano, ecc.

In particolare nel caso delle superficie di rivoluzione, supposto che i cilindri abbiano per asse l'asse di rotazione, ogni strato compreso fra i cilindri di raggio r e $r+dr$ e limitato inferiormente dal piano xy e superiormente dalla superficie, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, potrà considerarsi come misurato da $\pi[(r+dr)^2 - r^2]z$ o anche da $2\pi rz\,dr$; e se $z = \varphi(y)$ sarà la equazione della curva meridiana, dovendo prendere $z = \varphi(r)$, il volume cercato quando è terminato dal cilindro di raggio a e non ha vuoti intorno all'asse z, e la superficie è incontrata una sola volta dalla verticale, è dato dalla formola

$$\text{(3)} \qquad V = 2\pi \int_0^a r\,\varphi(r)\,dr.$$

182. — Diamo ora qualche esempio dei resultati precedenti.

1.° Vogliasi il volume compreso fra i piani di due paralleli dell'ellissoide di rotazione attorno all'asse z, pel quale la equazione dell'ellisse meridiana è $\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Ponendo al solito $z = b \operatorname{sen} u$, $y = a\cos u$, il volume V compreso fra i paralleli u_0 e u_1 sarà per la (1)

$$V = \pi a^2 b \int_{u_0}^{u_1} \cos^3 u\,du,$$

e poichè $\int \cos^3 u\,du = \int \cos u\,du - \int \operatorname{sen}^2 u \cos u\,du = \operatorname{sen} u - \frac{\operatorname{sen}^3 u}{3} + C$, sarà

$$V = \pi a^2 b \left\{ \operatorname{sen} u - \frac{\operatorname{sen}^3 u}{3} \right\}_{u_0}^{u_1} = \pi a^2 \left\{ z - \frac{z^3}{3b^2} \right\}_{z_0}^{z_1};$$

donde facendo $z_0 = -b$, $z_1 = b$ si avrà pel volume E dell'intero ellissoide del quale b è l'asse di rotazione $E = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Se l'ellisse ruotasse attorno all'asse a, si avrebbe invece $E' = \frac{4}{3}\pi a b^2$, e perciò $\frac{E}{E'} = \frac{a}{b}$.

2.° Vogliasi anche il volume E dell'intiero ellissoide di assi a, b, c che ha per equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Secondo quanto abbiamo detto in generale si avrà

$$E = 2c \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz$$

ovvero

$$E = 2c \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,;$$

e poichè ponendo $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,t$, si ha

$$\int dy \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int dt\sqrt{1-t^2}\,,$$

e applicando la formula (10) del § 19 si avrà anche

$$\int \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left\{t\sqrt{1-t^2}+\operatorname{arc\,sen} t + C\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right\} + \frac{Cb}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

sostituendo si trova subito

$$E = \pi bc \int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left\{x-\frac{x^3}{3a^2}\right\}_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc\,.$$

È da notare che, immaginando l'ellissoide diviso in tanti strati con piani perpendicolari all'asse delle x, e chiamando e_x le aree delle ellissi sezioni, dietro la osservazione generale fatta nel § 180 si avrebbe con una sola integrazione $E = \int_{-a}^{a} e_x\,dx$ quando fosse conosciuta l'area e_x della sezione ellittica.

Ora, poichè questa sezione ha la equazione seguente in y e z

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

e dietro quanto si vide trattando delle aree piane la sua area e_x è $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ avremmo trovato subito la formola $E = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$ già trovata sopra, dalla quale deducemmo appunto con una sola integrazione $E = \frac{4}{3}\pi a\,bc$.

3.° Si voglia trovare il volume della porzione di cilindro circolare retto limitato superiormente da una porzione di superficie sferica il cui centro è in un punto del contorno della base del cilindro e il cui raggio è il diametro di questa base; o, il che è lo stesso, la porzione del volume della mezza sfera che è racchiuso dal cilindro retto che ha per base, sul piano che limita questa mezza sfera, il cerchio descritto sul raggio R di questa; del qual solido noi determinammo già al § 174, 1.° [pag. 271] la superficie della porzione di sfera che lo limita superiormente giungendo poi allora a risolvere il problema della *volta del Viviani*.

Per determinare con facilità questo volume gioverà fare uso della scomposizione che viene dall'usare le coordinate cilindriche (ρ, θ, z) per le quali come dicemmo sopra al § 178 l'elemento dello spazio è $\rho d\rho d\theta dz$, con che il volume stesso sarà dato dall'integrale doppio $\int d\theta\int z\rho\,d\rho$, o $\int d\theta\int \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$, perchè evidentemente sulla superficie sferica avremo $z^2+\rho^2 = R^2$, e in questi integrali, per quanto vedemmo al citato § 174, 1.° la integrazione relativa a ρ andrà estesa da 0 a $R\cos\theta$ e quella relativa a θ da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Avremo quindi

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{R\cos\theta}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta} d\theta;$$

e poichè il radicale $\sqrt{R^2-\rho^2}$ deve essere preso positivamente, la quantità sotto l'integrale dovrà essere presa uguale a $R^3(1-\operatorname{sen}^3\theta)$ per θ positivo, e a $R^3(1+\operatorname{sen}^3\theta)$ per θ negativo, e si potrà scrivere quindi

$$V = \frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\operatorname{sen}^3\theta)\,d\theta + \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^3\theta)\,d\theta = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\,;$$

e, per essere $\int \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta = \int \operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + C$, avremo infine pel volume cercato $V = \frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

Raddoppiando questo volume e togliendolo da quello $\frac{2}{3}\pi R^3$ della mezza sfera, il resto $\frac{8}{9}R^3$ è la parte del volume della semisfera che è limitato dalla base di questa, dalla volta di Viviani e dalle superficie esterne dei cilindri che proiettano il contorno di questa volta sulla base della mezza sfera. Questo volume è dunque $\frac{8}{9}$ del cubo descritto sul raggio della sfera.

4.° Si voglia il volume del toro quando come al § 174, 3.° il cerchio generatore è di raggio R e la distanza del centro di questo cerchio dall'asse è a, essendo $a \geq R$.

Diviso il toro in strati cilindrici con piani perpendicolari all'asse di rotazione col processo del § 179 e introdotto come nel citato § 174, 3.° l'angolo θ che il raggio del cerchio fa colla verticale, l'ordinata y nella parte del cerchio più lontana dall'asse sarà $a + R \operatorname{sen} \theta$, e quella y dell'altra parte sarà $a - R \operatorname{sen} \theta$ quando anche in questa parte θ si faccia andare da 0 a π; quindi, poichè sarà $z = -R \cos \theta$ e $dz = R \operatorname{sen} \theta \, d\theta$, per la formola (2) avremo pel volume cercato del toro

$$V = \pi R \int_0^\pi \{(a + R \operatorname{sen} \theta)^2 - (a - R \operatorname{sen} \theta)^2\} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 4 \pi a R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta =$$

$$= 2 \pi a R^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = 2 \pi^2 a R^2,$$

cioè questo volume equivarrà a quello di un cilindro retto che ha per base il cerchio generatore, e per altezza la circonferenza descritta dal centro di questo.

5.° Vogliasi infine il volume V_a del solido di rivoluzione compreso fra il piano xy, la superficie generata dalla curva $z = e^{-x^2}$ attorno all'asse delle z e il cilindro di raggio a che ha per asse l'asse z.

Applicando la formola (3) corrispondente al caso della divisione del volume in strati cilindrici circolari, avremo $V_a = \pi \int_0^a e^{-r^2} 2r \, dr$ e quindi $V_a = \pi \left(-e^{-r^2}\right)_0^a$ cioè $V = \pi(1 - e^{-a^2})$, e al crescere indefinito di a, cioè pel volume determinato dalla intiera superficie indefinita, avremo $V = \pi$.

E si può notare che se per determinare il volume V_a avessimo applicato il processo generale del § 175 avremmo avuto

$$V_a = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy = 4 \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} e^{-y^2} dy,$$

e al crescere indefinito di a, applicando il teorema sui limiti degli integrali al quale accennammo in nota alle pag. 173-74, avremmo trovato $V = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2$, ciò che, tenendo conto del valore π trovato sopra per V, avrebbe portato ancora a concludere che il valore dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ è $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, come già trovammo al § 139. 2.° [pag. 217 e seg.].

XIV.

Valori medii degli integrali definiti. Calcolo approssimato di questi integrali

Formole dei valori medii degli integrali.

183. — Nella pratica bene spesso accade che non si riesca a trovare il valore di un integrale definito, tanto nel caso che la funzione da integrarsi sia sempre finita e continua, quanto nel caso in cui essa abbia qualche discontinuità o qualche punto d'infinito, essendo però sempre atta alla integrazione nell'intervallo finito o infinito nel quale la integrazione vuol farsi.

Allora, non potendo avere il valore esatto di questi integrali — che, come abbiamo veduto, occorrono in particolare per la determinazione delle misure degli archi delle curve nel piano e nello spazio, delle aree delle superficie piane e curve, e dei volumi, — bisogna contentarci di avere dei limiti fra i quali gli integrali stessi sono compresi, e meglio anche avere dei valori approssimati di quegli integrali con un dato grado di approssimazione.

Per questo si hanno varii processi dei quali noi ne indicheremo alcuni, ciò che ci darà anche occasione di generalizzare alcuni dei risultati ottenuti nei Capitoli precedenti, e anche di trovarne dei nuovi che hanno una particolare importanza sia pel calcolo approssimato degli integrali, sia per le applicazioni che hanno in varie parti della matematica superiore.

184. — Ricordiamo prima che avendo l'integrale definito fra limiti finiti α e β per un prodotto $f(x)\varphi(x)$, nel quale le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono sempre finite e atte alla integrazione fra questi limiti, e $\varphi(x)$ non cangia mai di segno, essendo ad es. sempre positiva o nulla, se l e L sono respettivamente i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ fra gli stessi limiti α e β e $\alpha<\beta$, si trovò la formola (§ 7. 11° [pag. 24])

$$(1)\qquad l\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

nella quale a l e L possono anche sostituirsi numeri respettivamente minori e maggiori di essi; e questa formola condusse all'altra

$$(2)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \bar{f}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

conosciuta sotto il nome di *prima formola del valor medio,* nella quale $\bar{f}$ è un numero determinato compreso fra l e L, e nel caso della continuità di $f(x)$ nell'intervallo da α e β è un valore della funzione nello stesso intervallo.

E quando la funzione $\varphi(x)$ non abbia sempre lo stesso segno fra α e β, ma si mantenga inferiore in valore assoluto a un numero finito φ_0 allora, per quanto dicemmo nella nota alla pag. 25, alla formola (2) può sostituirsi l'altra

$$(3)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \bar{f}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + \theta \mathrm{D}\varphi_0(\beta-\alpha),$$

essendo θ un numero compreso fra -1 e 1 e D l'oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo (α,β).

185. — Quando poi la funzione $\varphi(x)$ sia sempre positiva fra α e β ma in questo intervallo abbia un numero finito di punti d'infinito restando però sempre atta alla integrazione, e $f(x)$ sia ancora sempre finita, le formole (1) e (2) continueranno ancora a valere, perchè, se per es. γ è un punto d'infinito di $\varphi(x)$ fra α e β e non vi sono altri di questi punti, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ continuerà ad essere atto alla integrazione fra α e β e indicando con ε e ε_1 numeri positivi arbitrariamente piccoli avremo sempre

$$\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon}\{f(x)-l\}\varphi(x)\,dx + \int_{\gamma+\varepsilon_1}^\beta \{f(x)-l\}\varphi(x)\,dx \geq 0,$$

$$\int_\alpha^{\gamma-\varepsilon}\{\mathrm{L}-f(x)\}\varphi(x)\,dx + \int_{\gamma+\varepsilon_1}^\beta \{\mathrm{L}-f(x)\}\varphi(x)\,dx \geq 0;$$

e poichè, in forza delle nostre ipotesi, esistono i limiti per $\varepsilon=0$ e $\varepsilon_1=0$ degli integrali che qui compariscono, avremo ancora evidentemente la formola (1) la quale ci condurrà subito anche alla (2).

E se i punti γ d'infinito di $\varphi(x)$ fra α e β saranno più d'uno, essendo però sempre in numero finito, o se l'intervallo d'integrazione (α,β) sarà infinito, simili considerazioni dimostrano che le formole (1) e (2) continuano ancora a sussistere.

186. — In base a questi risultati che sono dimostrati così per casi este-

sissimi, quando non si sia potuto determinare il valore preciso di un integrale definito, si scomporrà la funzione da integrarsi in un prodotto $f(x)\varphi(x)$, ciò che potrà farsi in infiniti modi; e allora mediante la formola (1) se potremo calcolare l'altro integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ avremo sempre dei limiti fra i quali l'integrale dato è compreso; e se questi limiti saranno talmente vicini fra loro che la loro differenza sia trascurabile potremo anche prendere l'uno o l'altro di essi come valore approssimato dell'integrale che si considera; e in ogni modo la conoscenza di quei limiti potrà in molti casi essere utile in quanto che permetterà di dire che l'integrale non esce da certi confini.

Così ad es. avendo l'integrale ellittico $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$ dove k è un numero positivo inferiore ad uno e φ si supporrà non superiore a π, se si osserva che $1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi=(1-k\operatorname{sen}\varphi)(1+k\operatorname{sen}\varphi)$ si vede che la funzione $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$, o $\frac{1}{\sqrt{(1-k\operatorname{sen}\varphi)(1+\operatorname{sen}\varphi)}}$, è sempre superiore a $\frac{1}{\sqrt{1+k}}$ e inferiore a $\frac{1}{\sqrt{1-k}}$, e quindi l'integrale è compreso fra $\frac{1}{\sqrt{1+k}}\int_0^\varphi d\varphi$ e $\frac{1}{\sqrt{1-k}}\int_0^\varphi d\varphi$, cioè fra $\frac{\varphi}{\sqrt{1+k}}$ e $\frac{\varphi}{\sqrt{1-k}}$; e se k o φ saranno molto piccoli si potrà prendere l'uno o l'altro di questi numeri come valore dell'integrale.

E avendo invece l'integrale $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$, se si osserverà che si può scrivere $\sqrt{1+x^6}=x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$ e che fra 1 e ∞ il massimo di $\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$ è $\sqrt{2}$ e il minimo è 1, si troverà subito che l'integrale dato è compreso fra $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ e $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$, cioè fra $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{4}$.

E infine avendo l'integrale $\int_0^\infty \sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}\, e^{-x^2}\,dx$, siccome il minimo di $\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}$ è 1 e il massimo è $\sqrt{2}$, e il valore dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ è $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, l'integrale dato sarà compreso fra $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

187. — S'intende poi che della formola (1) potremmo anche servirci per trovare soltanto un limite superiore o soltanto un limite inferiore dei valori dell'integrale; e l'arbitrarietà che resta nel modo di scomporre in un prodotto $f(x)\varphi(x)$ la funzione da integrarsi condurrà a trovare infiniti limiti fra i quali l'integrale è compreso. Naturalmente la scomposizione si farà sempre in modo che l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ sia conosciuto o possa facilmente determinarsi; e talvolta avendo da considerare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$ converrà spezzarlo in più altri, e operare poi separatamente su ciascuno dei nuovi integrali.

Così ad es. volendo un limite superiore dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$, gioverà spezzarlo nei due $\int_0^1 e^{-x^3}dx$ e $\int_1^\infty e^{-x^3}dx$, e allora pel primo si vedrà subito che è inferiore alla unità perchè e^{-x^3} ha per massimo uno, e il secondo, potendo scriversi sotto la forma $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}x^2e^{-x^3}dx$, e il massimo di $\frac{1}{x^2}$ essendo l'unità, è inferiore a $\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx$ che è uguale a $\frac{1}{3}$, e quindi un limite superiore dell'integrale dato sarà $\frac{4}{3}$.

Siccome poi l'integrale $\int_1^\infty e^{-x^3}dx$ è evidentemente positivo e un limite inferiore dell'integrale $\int_0^1 e^{-x^3}dx$ è $\frac{1}{e}$ perchè $\frac{1}{e}$ è il minimo di e^{-x^3} fra 0 e 1, così si può anche dire che l'integrale dato $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$ è superiore a $\frac{1}{e}$ e quindi è compreso fra $\frac{1}{e}$ e $\frac{4}{3}$.

Talvolta poi gioverà, o con cangiamenti di variabile o con integrazioni per parti, o con scomposizione in serie o in altro modo, ridurre il calcolo dell'integrale dato a quello di uno o più altri integrali pei quali possano aversi facilmente limiti molto vicini fra loro, o il cui valore assoluto sia molto piccolo e quindi trascurabile, come già si dette di questo un esempio al § 20 [pag. 45 e seg.].

188. — Nelle formole (1) e (2) si ha la condizione che durante la integrazione non cangi mai di segno quella $\varphi(x)$ delle due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ *che deve restare sotto l'integrale* $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ che figura nel secondo membro delle formole stesse.

Quando non si ponga questa condizione per la funzione $\varphi(x)$, e se ne pongano invece altre per l'altra funzione $f(x)$ che *deve passare fuori del segno integrale*, si hanno altre formole, e in particolare si ha quella conosciuta sotto il nome di *seconda formola del valor medio* che è dovuta a *Du Bois-Reymond* e vale pel caso in cui durante la integrazione la funzione $f(x)$ è sempre finita ed è *monotona*, cioè non è mai crescente o non è mai decrescente.

Questa formola nella quale, per la ipotesi che ora viene fatta, $f(x)$ sarà sempre continua o non potrà avere che discontinuità ordinarie, e per conseguenza $f(\alpha+0)$ e $f(\beta-0)$ avranno sempre valori determinati, è la seguente

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx + f(\beta)\int_\xi^\beta \varphi(x)\,dx\,, \tag{4}$$

nella quale ξ è un numero determinato compreso fra α e β, e per $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ dovremo intendere che siano presi i valori di $f(\alpha+0)$ e $f(\beta-0)$; e la formola stessa si deduce subito dalle altre anch'esse notevoli

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx\,,\quad \text{e}\quad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = f(\beta)\int_\xi^\beta \varphi(x)\,dx\,, \tag{5}$$

che sono esse pure formole di valori medii, e sono dovute a *Bonnet*, la prima delle quali vale pel caso delle funzioni positive $f(x)$ non crescenti fra α e β e la seconda pel caso delle funzioni $f(x)$ positive non decrescenti, per modo da potere dire che *in queste formole di Bonnet il valore di $f(x)$ che viene fuori dell'integrale è sempre il massimo* (o limite superiore) *dei valori di $f(x)$ nell'intervallo d'integrazione.*

La dimostrazione di queste formole si fa valendosi del teorema di Abel che abbiamo dato nella Introduzione al *Calcolo differenziale* al § 78 [pag. LXXVI e seg.].

Si supponga infatti dapprima che l'intervallo (α,β) sia finito e in esso la funzione $\varphi(x)$ sia sempre finita, e s'immagini spezzato lo stesso intervallo in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ coi punti $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta$ con una legge

qualsiasi; e si osservi che si potrà scrivere

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \tag{6}$$

$$= \int_\alpha^{\alpha_1} \{f(x)-f(\alpha_1)\}\varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\{f(x)-f(\alpha_2)\}\varphi(x)\,dx + \dots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta}\{f(x)-f(\beta)\}\varphi(x)\,dx +$$

$$+ f(\alpha_1)\int_\alpha^{\alpha_1}\varphi(x)\,dx + f(\alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi(x)\,dx + \dots + f(\beta)\int_{\alpha_{n-1}}^{\beta}\varphi(x)\,dx\,;$$

e poichè nell'ultima linea le somme successive dei secondi fattori sono sempre valori dell'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$, queste somme saranno comprese fra il minimo λ e il massimo Λ dei valori che prende questo integrale mentre x va da α a β.

Supponendo dunque di essere nel caso in cui $f(x)$ da α a β è sempre positiva e non va crescendo, avremo $f(\alpha_1) \geqq f(\alpha_2) \geqq \dots \geqq f(\beta)$, e quindi pel ricordato teorema di Abel la somma dei termini dell'ultima linea della formola precedente sarà sempre compresa fra $f(\alpha_1)\lambda$ e $f(\alpha_1)\Lambda$.

Invece la somma dei termini della prima linea, se φ_0 è il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra α e β o un numero maggiore, sarà inferiore in valore assoluto a $\varphi_0 \Sigma \delta_s D_s$ essendo in generale D_s la oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo δ_s da α_{s-1} a α_s; quindi facendo avvicinare indefinitamente fra loro i punti di divisione $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta$ mentre si fa crescere indefinitamente il loro numero, la detta somma dei termini della prima linea finirà per essere piccola quanto si vuole e al tempo stesso $f(\alpha_1)$ tenderà verso $f(\alpha)$; e conseguentemente tutto il secondo membro della formola precedente, ossia l'integrale dato $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$ sarà compreso fra $f(\alpha)\lambda - \sigma$ e $f(\alpha)\Lambda + \sigma$, essendo σ un numero positivo arbitrariamente piccolo, e quindi anche fra $f(\alpha)\lambda$ e $f(\alpha)\Lambda$ (questi valori estremi inclusi).

Evidentemente dunque il valore del nostro integrale sarà $f(\alpha)\,P$ essendo P un numero compreso fra λ e Λ (λ e Λ incl.); quindi osservando che, per essere l'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$ una funzione continua di x, nel passare di x da α a β l'integrale stesso passa per qualunque valore da λ a Λ, e conseguentemente per un valore speciale ξ di x prende anche il valore P, avremo la formola $\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx$ che è la prima delle (5).

Supponendo invece che $f(x)$ non sia mai decrescente fra α e β basta considerare in ordine inverso la somma dei termini della seconda linea della (6) per giungere a trovare la formola $\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\beta)\int_\xi^\beta \varphi(x)\,dx$ che è la seconda delle formole (5) di Bonnet.

Applicando questa ultima cioè la seconda delle (5) alla funzione $f(\alpha)-f(x)$ nel caso della funzione $f(x)$ non crescente, e applicando invece la prima delle stesse (5) alla funzione $f(\beta)-f(x)$ nel caso della funzione $f(x)$ non decrescente si trova subito in ambedue i casi la formola (4) del Du Bois-Reymond che resta così pienamente dimostrata pel caso in cui anche la funzione $\varphi(x)$ è sempre finita fra α e β, come naturalmente abbiamo dovuto supporre che sia la $f(x)$.

189. — Se poi, restando sempre $f(x)$ finita e monotona fra α e β, $\varphi(x)$ avrà alcuni punti d'infinito fra α e β in numero finito $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$, essendo però ancora atta alla integrazione in questo intervallo con che, per quanto dimostreremo fra breve nel § 191, verrà ad esserlo di per sè anche il prodotto $f(x)\varphi(x)$, è facile vedere che la seconda formola del valore medio, cioè la formola (4), continuerà ancora a sussistere.

Incominciamo infatti coll'escludere i punti $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ cogli intervalli arbitrariamente piccoli

$$(7)\qquad (\gamma_1-\varepsilon_1,\, \gamma_1+\varepsilon'_1),\ (\gamma_2-\varepsilon_2,\, \gamma_2+\varepsilon'_2), \dots, (\gamma_p-\varepsilon_p,\, \gamma_p+\varepsilon'_p),$$

dei quali il primo o l'ultimo si ridurranno a $(\alpha, \alpha+\varepsilon'_1)$ o $(\beta-\varepsilon_p, \beta)$ se γ_1 combinerà con α, o se γ_p combinerà con β; e fissiamo che i punti di divisione $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta$ che abbiamo considerato nel paragrafo precedente per giungere alla formola (6) siano scelti in modo che uno venga sempre a cadere nell'estremo inferiore $\gamma_s-\varepsilon_s$ degli intervalli (7) e *il successivo* cada nell'estremo superiore $\gamma_s+\varepsilon'_s$.

Allora si avrà ancora la formola (6), e in questa per la somma dei termini della seconda linea varranno ancora completamente le considerazioni del paragrafo precedente; e per la somma dei termini della prima linea si potrà osservare che i p termini $\int_{\gamma_s-\varepsilon_s}^{\gamma_s+\varepsilon'_s} \{f(x)-f(\gamma_s+\varepsilon'_s)\}\,\varphi(x)\,dx$ corrispondenti ai tratticelli (7) che racchiudono i punti d'infinito saranno piccoli a piacere dipendentemente dalla piccolezza dei tratticelli stessi, e per gli altri termini, dopo

fissati questi intervalli (7), si potranno scegliere i punti rimanenti di divisione $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ in modo da applicare alla somma di quei termini le considerazioni del paragrafo precedente, e così ridurre questa somma piccola a piacere; quindi si giungerà ancora così all'una o all'altra delle formole di Bonnet e poi a quella del Du Bois-Reymond.

190. — Passando ora al caso in cui l'intervallo d'integrazione è infinito, nel supposto sempre che in questo intervallo $f(x)$ si mantenga monotona e inferiore a un numero finito e $\varphi(x)$ sia atta alla integrazione — con che per quanto dimostreremo nel paragrafo seguente lo sarà pure il prodotto $f(x)\varphi(x)$ — si osserverà che se (α, ∞) è il detto intervallo, indicando con c un numero positivo e grandissimo avremo l'una o l'altra delle due formole di Bonnet

$$\int_\alpha^c f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^{\xi_c}\varphi(x)\,dx\ ,\quad \int_\alpha^c f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_{\xi_c}^c \varphi(x)\,dx\,,$$

secondochè $f(x)$, supposta ora positiva, da α a ∞ non è mai crescente o non è mai decrescente; e la seconda di queste formole si potrà anche scrivere

$$\int_\alpha^c f(x)\varphi(x)\,dx = f(\infty)\int_{\xi_c}^\infty \varphi(x)\,dx + \sigma_c\,,$$

essendo σ_c una quantità che sarà piccola ad arbitrio dipendentemente dalla grandezza di c; e in ambedue queste formole ξ_c sarà un numero determinato dipendente da c e compreso fra α e c e quindi anche fra α e ∞.

Osservando ora che al crescere indefinito di c l'integrale $\int_\alpha^c f(x)\varphi(x)\,dx$ ha un limite determinato e finito che è l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx$, e osservando anche che $f(\alpha)$ nel primo caso e $f(\infty)$ nel secondo non sono zero, si vede subito che gli integrali $\int_\alpha^{\xi_c}\varphi(x)\,dx$ e $\int_{\xi_c}^\infty \varphi(x)\,dx$ avranno essi pure limiti determinati e finiti P e Q nei respettivi casi, e sarà perciò

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\,\mathrm{P}\ ,\ \text{o}\ \int_\alpha^c f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\infty)\,\mathrm{Q}\,,$$

secondochè saremo nel primo o nel secondo caso; e siccome gli integrali

$\int_\alpha^{\xi_c} \varphi(x)\,dx$ e $\int_{\xi_c}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ sono sempre compresi fra i limiti inferiori e superiori respettivamente dei due $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$, $\int_x^\infty \varphi(x)\,dx$ mentre x va da α a ∞ e questi integrali sono sempre finiti e continui, evidentemente anche P e Q saranno compresi fra gli stessi limiti, e perciò saranno essi pure valori speciali determinati degli stessi integrali; e avremo quindi ancora l'una o l'altra delle formole

$$(8)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx\,,\ \text{o}\quad \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = f(\infty)\int_\xi^\infty \varphi(x)\,dx\,,$$

che estendono le formole di Bonnet anche al caso dell'intervallo d'integrazione infinito.

Da queste poi col solito processo si deduce la formola

$$(9)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi(x)\,dx + f(\infty)\int_\xi^\infty \varphi(x)\,dx$$

che estende quella del Du Bois-Reymond del secondo teorema del valore medio.

191. — La formola del secondo teorema del valor medio degli integrali definiti, che è dimostrata così per casi estesissimi, è d'importanza grandissima per le applicazioni che di essa si fanno.

Qui faremo osservare che non soltanto, come è bene evidente, essa può servire come la formola (1) a dare due limiti fra i quali è compreso un integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx$ (con β finito o infinito), quando si conoscono quelli relativi all'integrale $\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx$ mentre x va da α a β; ma essa serve altresì a fare le estensioni alle quali accennammo ai §§ 68, 80 e 120 [pag. 107, 124 e 178] dei teoremi sulla integrabilità dei prodotti, e di quello sulla convergenza in ugual grado degli integrali fra limiti infiniti.

Per ciò che riguarda la integrabilità dei prodotti dimostreremo che *avendosi due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ l'una delle quali $\varphi(x)$ divenga infinita in un punto γ senza che questo le faccia perdere la sua integrabilità, e l'altra $f(x)$ in intorni sufficientemente piccoli di γ sia finita e non faccia infinite oscillazioni, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà esso pure atto alla integrazione anche negli intorni del punto γ.*

È chiaro infatti che l'ipotesi fatta su $f(x)$ porterà che quando ε e ε_1 siano sufficientemente piccoli questa funzione $f(x)$ fra $\gamma-\varepsilon$ e γ e fra γ e $\gamma+\varepsilon_1$ sarà monotona e quindi considerando gli integrali definiti singolari del prodotto $f(x)\varphi(x)$, per es. l'integrale $\int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma-\delta} f(x)\varphi(x)\,dx$, potremo applicare il secondo teorema del valore medio e avremo la formola

$$\int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma-\delta} f(x)\varphi(x)\,dx = f(\gamma-\varepsilon)\int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma-\delta_1} \varphi(x)\,dx + f(\gamma-\delta)\int_{\gamma-\delta_1}^{\gamma-\delta} \varphi(x)\,dx\,,$$

essendo $\varepsilon \leq \delta_1 \leq \delta$, e questa ci mostra che l'integrale $\int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma-\delta} f(x)\varphi(x)\,dx$ sarà piccolo ad arbitrio, e quindi il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione negli intorni del punto γ.

In modo simile colla considerazione degli integrali definiti singolari si vede che *se $\varphi(x)$ è atta alla integrazione fra α e ∞, e $f(x)$ al crescere indefinito di x da un certo valore di x in poi si mantiene finita e monotona, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione nello stesso intervallo (α, ∞) se tale sarà in ogni porzione finita di esso,* perchè per l'integrale definito singolare $\int_c^{c+p} f(x)\varphi(x)\,dx$, con p numero positivo qualsiasi, avremo

$$\int_c^{c+p} f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_c^{c+p_1} \varphi(x)\,dx + f(c+p)\int_{c+p_1}^{c+p} \varphi(x)\,dx$$

essendo $0 \leq p_1 \leq p$, e quindi, per c sufficientemente grande, lo stesso integrale definito singolare diverrà piccolo ad arbitrio.

192. — E anzi da questa stessa formola risulta anche che se, mantenendosi sempre il prodotto $f(x)\varphi(x)$ atto alla integrazione in qualunque porzione *finita* dell'intervallo (α, ∞), *la funzione $\varphi(x)$* non sarà *atta alla integrazione fra α e ∞, ma i suoi integrali definiti singolari saranno sempre inferiori a un numero finito, basterà che l'altra funzione $f(x)$ al crescere indefinito di x tenda a zero senza oscillare perchè il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sia atto alla integrazione anche fra α e ∞.*

Così in particolare, osservando che le funzioni $\operatorname{sen} kx$ e $\cos kx$, con k quantità costante, non sono atte alla integrazione fra α e ∞ ma i loro integrali definiti singolari non sono mai superiori a $\frac{2}{k}$, si può affermare che le funzioni

$f(x) \operatorname{sen} kx$ e $f(x) \cos kx$ quando $f(x)$ al crescere indefinito di x tende a zero senza oscillare sono sempre atte alla integrazione.

Più particolarmente ancora gli integrali $\int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{x^m} dx$ e $\int_\alpha^\infty \frac{\cos kx}{x^m} dx$ nei quali sia $\alpha > 0$, anche se m è fra 0 e 1 (0 escl.), e così gli altri integrali $\int_\alpha^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{\log x} dx$ e $\int_\alpha^\infty \frac{\cos kx}{\log x} dx$ nei quali $\alpha > 1$ hanno valori determinati e finiti.

Un teorema simile che assicura l'integrabilità del prodotto $f(x)\varphi(x)$ si ha pel caso delle funzioni $\varphi(x)$ che diventando infinite in un punto γ cessano per questo di essere atte alla integrazione, quando avvenga che per esse gli integrali definiti singolari corrispondenti siano sempre inferiori a un numero finito, e la funzione $f(x)$ tenda a zero senza oscillare coll'avvicinarsi di x indefinitamente a γ.

193. — Così pure si può ora con tutta facilità dare un teorema che come quello dato in fine del § 120 [pag. 178] può servire a giudicare della convergenza in ugual grado degli integrali $\int_\alpha^\infty f(x, y)\, dx$ fra limiti infiniti; potendo ora affermarsi che *se in questo integrale la funzione da integrarsi si spezza nel prodotto delle due $f_1(x,y)$ e $\varphi(x,y)$, la prima delle quali è sempre inferiore a un numero finito e — per ogni valore speciale che si dia ad y fra a e b — nell'andare di x da un certo numero β a ∞ si mantiene monotona, e al tempo stesso l'integrale $\int_\alpha^\infty \varphi(x, y)\, dx$ è convergente in ugual grado pei valori di y fra a e b*, allora *anche l'integrale dato o $\int_\alpha^\infty f_1(x,y)\,\varphi(x,y)\, dx$ sarà convergente in ugual grado fra a e b*; e ciò perchè pel suo integrale definito singolare per ogni valore y_0 di y fra a e b avremo

$$\int_c^{c+p} f_1(x, y_0)\,\varphi(x, y_0)\, dx = f_1(c, y_0)\int_c^{c+p_1} \varphi(x, y_0)\, dx + f_1(c+p, y_0)\int_{c+p_1}^{c+p} \varphi(x, y_0)\, dx,$$

essendo $p_1 < p$, e questa col supporre $p = \infty$ dimostra subito il teorema.

194. — Da questa poi si vede anche che *se la funzione $\varphi(x,y)$ non sarà atta alla integrazione fra α e ∞, ma i suoi integrali definiti singolari per ogni valore di y fra a e b si manterranno inferiori a un numero finito mentre la $f_1(x,y)$, conservandosi monotona come funzione di x per ogni valore y_0 di y fra a e b, convergerà a zero in ugual grado al crescere indefinito di x*, allora *l'integrale dato $\int_\alpha^\infty f_1(x,y)\,\varphi(x,y)\, dx$ sarà ancora determinato e finito e sarà convergente in ugual grado per ogni valore di y fra a e b.*

Così in particolare gli integrali

$$\int_\alpha^\infty f(x, y) \operatorname{sen}[x\varphi(y)]\, dx \quad \text{e} \quad \int_\alpha^\infty f(x, y) \cos[x\varphi(y)]\, dx,$$

nei quali $\varphi(y)$ non è zero per y compreso fra a e b, sono determinati e finiti e convergono in ugual grado per questi valori di y quando la funzione $f_1(x, y)$ per ogni valore y_0 di y fra a e b ha la proprietà di essere monotona, e al tempo stesso converge a zero in ugual grado per questi valori di y.

E di qui risulta ora immediatamente, e senza bisogno della dimostrazione speciale che facemmo al § 139 [pag. 214 e seg.], che l'integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \operatorname{sen} bx}{x} dx$, dove a è positivo e b è diverso da zero, converge in ugual grado anche pei valori di a negli intorni (a destra) del punto $a = 0$ e quindi è continuo anche per $a = 0$.

195. — Per accennare anche ad altre applicazioni delle formole di Du Bois-Reymond o di Bonnet, ce ne varremo per dimostrarne una che ha una grandissima importanza nell'Analisi, cioè dimostreremo la formola seguente

$$\lim_{h=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

nella quale b è un numero diverso da zero e positivo che non supera $\frac{\pi}{2}$.

Per questo si osserverà prima che si ha

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^b \frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{\operatorname{sen} hx}{x} dx = \int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{x} dx + \int_0^b \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} - 1\right) \frac{\operatorname{sen} hx}{x} dx;$$

e poichè l'integrale $\int_0^b \frac{\operatorname{sen} hx}{x} dx$ col cambiare hx in x si muta nell'altro

$\int_0^{hb} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ che al crescere indefinito di h tende verso l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ il cui valore è $\frac{\pi}{2}$ (§§ 112 e 139, [pag. 164 e 214 e seg.]), per dimostrare la formola (10) basterà mostrare che l'integrale $\int_0^b \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} - 1\right) \frac{\operatorname{sen} hx}{x}$ o $\int_0^b \left(\frac{1}{\operatorname{sen} hx} - \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} hx\, dx$ ha per limite zero al crescere indefinito di h.

Ora se si considera la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}$ per la quale si ha in serie $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{x}{\pi(3)} - \frac{x^3}{\pi(5)} + \ldots\right)$, si vede subito che essa è zero per $x = 0$, e la sua derivata nelle vicinanze del punto $x = 0$ è positiva e prossima quanto si vuole a $\frac{1}{\pi(3)}$, per modo che la funzione stessa è crescente in un certo tratto determinato $(0, k)$ che esce dal punto $x = 0$ a destra.

Osservando quindi che l'integrale che ora dobbiamo considerare si può spezzare nei due $\int_0^k$ e $\int_k^b$, basta valersi del teorema di Du Bois-Reymond o della seconda delle formole (5) di Bonnet, per vedere subito, che il primo di questi integrali sarà uguale a $\left(\frac{1}{\operatorname{sen} k} - \frac{1}{k}\right) \int_\xi^k \operatorname{sen} hx\, dx$, ovvero a $\frac{k}{\operatorname{sen} k}\left(\frac{k}{\pi(3)} - \frac{k^3}{\pi(5)} + \ldots\right) \frac{\cos h\xi - \cos hk}{h}$, e quindi per h sufficientemente grande, per quanto piccolo sia il numero *determinato* k, esso sarà piccolo quanto si vuole.

Il secondo integrale poi, potendo riguardarsi come differenza dei due $\int_k^b \frac{1}{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} hx\, dx$ e $\int_k^b \frac{1}{x} \operatorname{sen} hx\, dx$, per la prima delle ricordate formole (5) di Bonnet potrà porsi sotto la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} k} \int_k^{b_1} \operatorname{sen} hx\, dx - \frac{1}{k} \int_k^{b_2} \operatorname{sen} hx\, dx = \frac{\cos hk - \cos hb_1}{h \operatorname{sen} k} - \frac{\cos hk - \cos hb_2}{hk},$$

essendo b_1 e b_2 numeri compresi fra h e b, e quindi anche l'integrale

$\int_k^b \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} hx\, dx$ al crescere indefinito di h risulterà piccolo quanto si vuole, e con ciò la formola (10) resta completamente dimostrata.

196. — Una semplicissima osservazione del sig. Schwarz conduce anche ad un'altra formola molto notevole che troviamo opportuno di indicare.

Siano perciò u e v due funzioni reali, finite o no ma atte alla integrazione insieme ai loro quadrati e al loro prodotto nell'intervallo finito o infinito (α, β), e siano p e q due costanti reali qualsiasi, e g una funzione che non è mai negativa nell'intervallo (α, β) ed è atta essa pure alla integrazione in questo intervallo e se diviene infinita non lo diviene mai insieme alle funzioni u o v (*).

Allora, pei noti teoremi sui casi di integrabilità dei prodotti, le funzioni gu^2, gv^2 e $g(pu+qv)^2$, e quindi anche la guv, saranno atte esse pure alla integrazione, e l'integrale $\int_\alpha^\beta g(pu+qv)^2 dx$ non sarà mai negativo qualunque siano le costanti p e q, e quindi la espressione

$$p^2 \int_\alpha^\beta gu^2 dx + 2pq \int_\alpha^\beta guv\, dx + q^2 \int_\alpha^\beta gv^2 dx$$

sarà una forma definita di secondo grado in p e q e solo eccezionalmente potrà essere semi-definita, e conseguentemente si avrà sempre la formola seguente

$$\left(\int_\alpha^\beta guv\, dx\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta gu^2 dx \int_\alpha^\beta gv^2 dx, \tag{11}$$

o anche l'altra

$$\left|\int_\alpha^\beta guv\, dx\right| \leq \sqrt{\int_\alpha^\beta gu^2 dx} \sqrt{\int_\alpha^\beta gv^2 dx}, \tag{12}$$

i radicali nel secondo membro essendo presi positivamente.

Questa formola è la formola cercata che servirà evidentemente anch'essa a dare limiti superiori o inferiori di certi integrali, come serve anche in speciali teorie di analisi e di fisica matematica.

(*) Si potrebbe anche ammettere che g e $pu+qv$ divenissero infinite insieme in qualche punto c, richiedendo però allora espressamente che nell'intorno di c le funzioni gu^2, guv e gv^2 fossero atte alla integrazione.

Per essa, se l'intervallo d'integrazione (α, β) è finito e se le funzioni g, u e v sono sempre finite, indicando con M_{uv}, M_{u^2} e M_{v^2} i valori medii delle funzioni guv, gu^2 e gv^2, si ha sempre $|M_{uv}| \leq \sqrt{M_{u^2} M_{v^2}}$; e in particolare se $g=1$ e $v=1$ si ha $|M_u| \leq \sqrt{M_{u^2}}$.

Numeri di Bernoulli. Formole varie pel calcolo approssimato degli integrali.

197. — Le varie formole che abbiamo trovato hanno tutte una particolare importanza in quanto si applicano spesso negli studii di matematica superiore, e servono a dare dei limiti fra i quali si trovano compresi integrali definiti dati; ma raramente servono al calcolo approssimato di questi integrali se prima non si fanno su questi opportune trasformazioni, perchè il più spesso quei limiti non sono abbastanza vicini fra loro.

Per questo calcolo approssimato degli integrali definiti giovano meglio altre formole ed altri processi che ora passeremo a dare.

Una di queste formole è quella di Maclaurin-Eulero che risulterà facilmente dalle considerazioni seguenti.

Indichiamo perciò con $f(x)$ una funzione finita e continua di x in un certo intervallo finito o infinito nel quale intenderemo che si muovano le due variabili x e α; e supponendo che in questo intervallo essa ammetta le derivate finite e continue fino a quelle dell'ordine $n-1$ inclusive, e ammetta pure le derivate dell'ordine n per le quali richiederemo soltanto che siano atte alla integrazione, prendiamo a studiare una funzione $R(x, \alpha)$ definita dalla formola

$$(1)\quad R(x,\alpha) = f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{1\,.\,2} - \ldots - f^{(n-1)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{\pi(n-1)},$$

cioè la funzione che ha per espressione analitica la differenza fra $f(x)$ e la somma dei primi n termini della formola di Taylor quando α è preso come punto iniziale, per modo che corrisponde precisamente alla quantità chiamata resto o termine complementare di questa serie; ma questo studio facciamolo ora indipendentemente dall'avere dimostrata o no la validità della formola di Taylor stessa.

La funzione $R(x, \alpha)$ considerata come funzione di α ammetterà la prima derivata $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ e sarà $\frac{\partial R}{\partial \alpha} = - f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{\pi(n-1)}$, e poichè per le ipotesi fatte

su $f^{(n)}(\alpha)$ questa espressione di $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ sarà atta alla integrazione (§ 192 [pag. 294]), integrando avremo $R = -\frac{1}{\pi(n-1)}\int f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^{n-1}d\alpha + C$, essendo C una quantità costante rispetto ad α, ma che potrà contenere x; e poichè per la formola precedente (1) che definisce il valore di R si vede che per $\alpha = x$ si ha $R = 0$ qualunque sia x, sarà $C = \frac{1}{\pi(n-1)}\left(\int f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^{n-1}d\alpha\right)_x$ e si avrà quindi $R = \frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^{n-1}d\alpha$, ovvero, cambiando in v la variabile α d'integrazione

$$(2)\qquad R = \frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x f^{(n)}(v)(x-v)^{n-1}dv,$$

e quindi sostituendo ora nella (1) avremo la formola seguente

$$(3)\quad f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)\frac{(x-\alpha)}{1} + f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{1\,.\,2} + \ldots + f^{(n-1)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{\pi(n-1)} + \\ + \frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x f^{(n)}(v)(x-v)^{n-1}dv,$$

che non è altro che la ordinaria formola di Taylor nella quale il resto è posto sotto la forma di un integrale definito ed è dato dalla formola (2).

Questo resto quando ad esso si applichi la prima formola del valor medio (§ 184 [pag. 286 e seg.]) nel caso che $f^{(n)}(x)$ sia sempre finita nell'intervallo nel quale si considerano α e x si riduce subito sotto la solita forma data dal Lagrange pel resto della serie di Taylor (*); talchè si può dire di essere giunti così a dare una nuova dimostrazione della formola di Taylor nel caso che nell'intervallo nel quale si considerano α e x la $f(x)$ abbia le derivate finite e continue fino a quelle dell'ordine $(n-1)^{\circ}$ inclusive, e abbia le derivate n^{e} determinate e finite.

(*) Propriamente la prima formola del valor medio permette solo di dire che sotto la fatta ipotesi si ha $R = \frac{\overline{f}^{(n)}(x-\alpha)^n}{\pi(n)}$, essendo $\overline{f}^{(n)}$ un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di $\overline{f}^{(n)}(x)$ fra α e x; ma siccome in questo caso pel teorema del § 43 [pag. 54-55] del *Calcolo differenziale* la derivata $f^{(n)}(x)$ nel passare di x da α ad x prende qualunque valore compreso fra i detti limiti, anche $\overline{f}^{(n)}$ sarà un valore di questa derivata.

Nel caso poi che le derivate n^e di $f(x)$ oltre essere determinate e finite fra α e x siano anche monotone, allora il resto si può porre anche sotto altre forme applicando la formola di Du Bois-Reymond del secondo valore medio, o anche la prima o la seconda delle formole di Bonnet (§ 188 [pag. 390 e seg.]); e un'altra forma cioè $\frac{(x-x_1)^{n-1}}{\pi(n-1)}\{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\alpha)\}$ dove x_1 è un numero compreso fra α e x si avrà coll'applicazione della prima formola del valor medio quando $f^{(n)}(x)$ fra α e x abbia sempre lo stesso segno.

198. — Cambiando nella (3) α in x e x in α si trova subito l'altra

$$(4)\quad f(x)=f(\alpha)+f'(x)\frac{(x-\alpha)}{1}-f''(x)\frac{(x-\alpha)^2}{1\,.\,2}+\dots+(-1)^{(n-1)}f^{(n-1)}(x)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{\pi(n-1)}+$$
$$+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x f^{(n)}(v)(\alpha-v)^{n-1}dv$$

che corrisponde alla formola di Giovanni Bernoulli data alla pag. 118 del *Calcolo differenziale* in nota, nella quale il resto, anzichè sotto la forma data allora, è posto come nel caso della formola di Taylor sotto la forma di un integrale definito (*).

(*) Osserviamo che moltiplicando la (3) per una funzione qualsiasi $\varphi(x)$, che potrà anche divenire infinita in alcuni punti ma restando sempre atta alla integrazione insieme al prodotto $f(x)\varphi(x)$ nell'intervallo nel quale si muovono α e x, e poi integrando fra α e x, e negli integrali che vengono nel secondo membro cambiando la variabile d'integrazione x in u, si ha la formola seguente

$$(\alpha)\quad \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)\,dx=f(\alpha)\int_\alpha^x\varphi(u)\,du+\frac{f'(\alpha)}{1}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)\,du+\frac{f''(\alpha)}{1\,.\,2}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)^2du+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)^{n-1}du+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)\,du\int_\alpha^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv$$

che mutando x in α e α in x e poi cambiando tutto di segno dà luogo anche all'altra

$$(\beta)\quad \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx=f(x)\int_\alpha^x\varphi(u)du+\frac{f'(x)}{1}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)\,du+\frac{f''(x)}{1\,.\,2}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)^2dx+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)^{n-1}du+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)du\int_x^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv,$$

e ora sottraendo queste formole l'una dall'altra, quando l'integrale $\int_\alpha^x\varphi(u)du$ sia diverso da zero, — come avverrà sempre in particolare quando $\varphi(x)$ sia diversa da

E anche per questo resto si potrebbero fare le trasformazioni che indicammo sopra pel caso della formola di Taylor, quando nell'intervallo nel quale si muovono α e x la derivata n^a di $f(x)$ è sempre finita, e quando fra α e x è anche monotona o ha sempre lo stesso segno.

zero e positiva nell'intervallo nel quale si considera — otterremo l'altra formola

$$(\gamma)\quad f(x)-f(\alpha)=\frac{1}{\int_\alpha^x\varphi(u)\,du}\Bigg\{\frac{f'(\alpha)}{1}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)\,du-\frac{f'(x)}{1}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)\,du\quad+$$
$$+\frac{f''(\alpha)}{1\,.\,2}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)^2du-\frac{f''(x)}{1\,.\,2}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)^2du\quad+$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-\alpha)^{n-1}du-\frac{f^{(n-1)}(x)}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)(u-x)^{n-1}dx+$$
$$+\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)\,du\left[\int_\alpha^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv-\int_x^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv\right]\Bigg\},$$

che per la sua generalità a causa della presenza della funzione $\varphi(u)$ può essere utile nelle applicazioni; e questa formola darà luogo anche a una serie quando la funzione $f(x)$ abbia le derivate determinate e finite fino a quelle di qualsiasi ordine e il termine $\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)\,du\left[\int_\alpha^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv-\int_x^u f^{(n)}(v)(u-v)^{n-1}dv\right]$ o $\frac{1}{\pi(n-1)}\int_\alpha^x\varphi(u)\,du\int_\alpha^x f^{(n)}(v)\,(u-v)^{n-1}dv$ abbia per limite zero al crescere indefinito di n.

Questa formola nel caso di $\varphi(x)=1$ si riduce subito a quella che risulta dalla sottrazione delle (3) e (4) cambiando poi in queste $f'(x)$ in $f(x)$.

È inoltre da notare che tutte queste formole possono ottenersi con estrema facilità anche applicando successivamente le integrazioni per parti all'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)\,dx$.

Così facendo infatti, e ad ogni integrazione successiva cambiando per comodità le variabili d'integrazione x in x_1, x_1 in x_2, x_2 in $x_3,\dots$, si giunge alla formola

$$(\delta)\qquad \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)\,dx=f(x)\int_\alpha^x\varphi(x_1)\,dx_1-f'(x)\int_\alpha^x dx_1\int_\alpha^{x_1}\varphi(x_2)\,dx_2+$$
$$+f''(x)\int_\alpha^x dx_1\int_\alpha^{x_1}dx_2\int_\alpha^{x_2}\varphi(x_3)\,dx_3+\dots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\int_\alpha^x dx_1\int_\alpha^{x_1}dx_2\int_\alpha^{x_2}\dots\int_\alpha^{x_{n-1}}\varphi(x_n)\,dx_n+$$
$$+(-1)^n\int_\alpha^x f^{(n)}(x_1)\,dx_1\int_\alpha^{x_1}dx_2\int_\alpha^{x_2}\dots\int_\alpha^{x_n}\varphi(x_{n+1})\,dx_{n+1},$$

Tanto questa formola poi quanto la precedente (3) avrebbero potuto ottenersi anche con semplici integrazioni per parti successive partendo dalla formola $f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(v)\,dv$ e prendendo successivamente per giungere alla (3) $\int dv = v-x$, $\int (v-x)\,dv = \frac{(v-x)^2}{1.2}$,... e per giungere alla (4) prendendo invece $\int dv = v-\alpha$, $\int (v-\alpha)\,dv = \frac{(v-\alpha)^2}{1.2}$,...

199. — Partiamo ora dalla formola di Taylor (3) nella quale per considerare il caso in cui n è un numero dispari porremo $2n+1$ al posto di n, e cambiamo in essa successivamente $f(x)$ in $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(2n-1)}(x)$ arrestandoci sempre nel secondo membro al termine che contiene le derivate d'ordine $2n+1$ sotto l'integrale.

---

e si può vedere con tutta facilità che questa si sarebbe ridotta subito alla (β), perchè considerando in generale l'integrale multiplo

$$w=\int_\alpha^{x_h} \lambda(x_{h+1})\,dx_{h+1}\int_\alpha^{x_{h+1}} dx_{h+2}\int_\alpha^{x_{h+2}} \cdots \int_\alpha^{x_k} \mu(x_{k+1})\,dx_{k+1}$$

dove h e k siano due dei numeri $0,1,2,\ldots .n-1$, e sia $k>h$, e s'intende che sia $x_0=x$ e che $\lambda(x)$ e $\mu(x)$ siano due funzioni integrabili nell'intervallo nel quale si muovono x e α, colla derivazione sotto il segno rispetto ad α si trova

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}=-\mu(\alpha)\int_\alpha^{x_h} \lambda(x_{h+1})\,dx_{h+1}\int_\alpha^{x_{h+1}} dx_{h+2}\int_\alpha^{x_{h+2}} \cdots \int_\alpha^{x_{k-1}} dx_k \ ,$$

o anche eseguendo le integrazioni

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}=-\frac{\mu(\alpha)}{\pi(k-h-1)}\int_\alpha^{x_h} \lambda(x_{h+1})\,(x_{h+1}-\alpha)^{k-h-1}\,dx_{h+1} \ ;$$

e quindi, integrando rispetto ad α e limitando l'integrazione fra x_h e α e cambiando sotto l'integrale la variabile α in u, avremo la formola notevole

$$(w) \qquad \int_\alpha^{x_h} \lambda(x_{h+1})\,dx_{h+1}\int_\alpha^{x_{h+1}} dx_{h+2}\int_\alpha^{x_{h+2}} \cdots \int_\alpha^{x_k} \mu(x_{k+1})\,dx_{k+1} =$$

$$=\frac{1}{\pi(k-h-1)}\int_\alpha^{x_h} \mu(u)\,du\int_u^{x_h} \lambda(x_{h+1})(x_{h+1}-u)^{k-h-1}\,dx_{h+1} \ ,$$

che per $h=0$, $\mu(x)=\varphi(x)$, e $\lambda(x)=1$ quando $k=1,\ 2,3,\ldots,(n-1)$, e $\lambda(x)=f^{(n)}(x)$ quando $k=n$, dà i termini della formola (δ) riducendo questa precisamente alla (β); dopo di che cambiando in questa α in x e x in α si ritrova la (α).

Avremo le formole

$$f(x)-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{\pi(2)}+\ldots+f^{(2n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{2n}}{\pi(2n)}+\int_\alpha^x f^{(2n+1)}(v)\frac{(x-v)^{2n}}{\pi(2n)}dv \ ,$$

$$f'(x)-f'(\alpha)= \qquad f''(\alpha)(x-\alpha)+\ldots+f^{(2n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{2n-1}}{\pi(2n-1)}+\int_\alpha^x f^{(2n+1)}(v)\frac{(x-v)^{2n-1}}{\pi(2n-1)}dv \ ,$$

. . . .

$$f^{(2n-1)}(x)-f^{(2n-1)}(\alpha)= \qquad f^{(2n)}(\alpha)(x-\alpha)+\int_\alpha^x f^{(2n+1)}(v)\frac{x-v}{\pi(1)}dv \ ,$$

e ora se moltiplichiamo queste formole successivamente per 1 , $A_1(x-\alpha)$, $A_2(x-\alpha)^2$, $A_3(x-\alpha)^3$, ... , $A_{2n-1}(x-\alpha)^{2n-1}$ e poi le sommiamo, essendo A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_{2n-1} coefficienti indeterminati, potremo poi determinare questi coefficienti in modo che nel secondo membro vengano a sparire i termini che contengono $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha)$, ... , $f^{(2n)}(\alpha)$, e allora avremo la formola

$$f(x)-f(\alpha)+A_1\{f'(x)-f'(\alpha)\}(x-\alpha)+A_2\{f''(x)-f''(\alpha)\}(x-\alpha)^2+\ldots+$$

$$+A_{2n-1}\{f^{(2n-1)}(x)-f^{(2n-1)}(\alpha)\}(x-\alpha)^{2n-1}=f'(x)(x-\alpha)+\int_\alpha^x f^{(2n+1)}(v)\,F(v)\,dv \ ,$$

essendo

$$(5) \quad F(v)=\frac{(x-v)^{2n}}{\pi(2n)}+A_1\frac{(x-v)^{2n-1}}{\pi(2n-1)}(x-\alpha)+A_2\frac{(x-v)^{2n-2}}{\pi(2n-2)}(x-\alpha)^2+\ldots+$$

$$+A_{2n-1}\frac{(x-v)}{\pi(1)}(x-\alpha)^{2n-1} \ ,$$

e $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{2p}, A_{2p+1},\ldots, A_{2n-1}$ venendo determinate dalle formole

$$(6)\left\{\begin{aligned}
&A_1+\frac{1}{\pi(2)}=0 \ ,\\
&A_2+\frac{A_1}{\pi(2)}+\frac{1}{\pi(3)}=0 \ ,\\
&A_3+\frac{A_2}{\pi(2)}+\frac{A_1}{\pi(3)}+\frac{1}{\pi(4)}=0 \ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{2p}+\frac{A_{2p-1}}{\pi(2)}+\ldots+\frac{A_3}{\pi(2p-2)}+\frac{A_2}{\pi(2p-1)}+\frac{A_1}{\pi(2p)}+\frac{1}{\pi(2p+1)}=0 \ ,\\
&A_{2p+1}+\frac{A_{2p}}{\pi(2)}+\frac{A_{2p-1}}{\pi(3)}+\ldots+\frac{A_3}{\pi(2p-1)}+\frac{A_2}{\pi(2p)}+\frac{A_1}{\pi(2p+1)}+\frac{1}{\pi(2p+2)}=0 \ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ ,\\
&A_{2n-1}+\frac{A_{2n-2}}{\pi(2)}+\ldots\ldots+\frac{A_3}{\pi(2n-3)}+\frac{A_2}{\pi(2n-2)}+\frac{A_1}{\pi(2n-1)}+\frac{1}{\pi(2n)}=0 \ ,
\end{aligned}\right.$$

le quali per le note proprietà dei determinanti simmetrici mostrano subito che all'infuori di A_1 che è uguale a $-\frac{1}{2}$, le altre $A_3, A_5, \dots, A_{2n-1}$ con indice dispari sono tutte zero, talchè se per quelle di indice pari porremo

$$A_2 = \frac{B_1}{\pi(2)}, \quad A_4 = -\frac{B_2}{\pi(4)}, \dots, A_{2p} = (-1)^{p-1}\frac{B_p}{\pi(2p)}, \dots, \tag{7}$$

avremo la formola

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= \frac{x-\alpha}{2}\{f'(x) + f'(\alpha)\} - \frac{B_1(x-\alpha)^2}{\pi(2)}\{f''(x) - f''(\alpha)\} + \\ &+ \frac{B_2(x-\alpha)^4}{\pi(4)}\{f^{\text{iv}}(x) - f^{\text{iv}}(\alpha)\} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}(x-\alpha)^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-2)}(x) - f^{(2n-2)}(\alpha)\} + \\ &+ \int_\alpha^x f^{(2n+1)}(v)\,F(x,v)\,dv, \end{aligned} \tag{8}$$

dove ora le $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ devono essere determinate colle formole che si ottengono dalle precedenti (6) introducendovi per le A_{2p} con indice pari le espressioni (7) e facendovi zero tutte le A con indice dispari all'infuori di A_1 che dovrà farsi uguale a $-\frac{1}{2}$, e poi considerando soltanto tutte le equazioni di posto dispari, o soltanto tutte quelle di posto pari; per modo che per la formola generale che determinerà le B_p potremo prendere indifferentemente l'una o l'altra delle due equazioni seguenti

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{B_p}{\pi(2p)} - \frac{B_{p-1}}{\pi(2p-2)}\frac{1}{\pi(3)} + \frac{B_{p-2}}{\pi(2p-4)}\frac{1}{\pi(5)} - \dots + (-1)^{p-1}\frac{B_1}{\pi(2)}\frac{1}{\pi(2p-1)} + \frac{(-1)^p}{2}\frac{1}{\pi(2p)} + \\ &\qquad + (-1)^{p+1}\frac{1}{\pi(2p+1)} = 0, \\ &\frac{B_p}{\pi(2p)}\frac{1}{\pi(2)} - \frac{B_{p-1}}{\pi(2p-2)}\frac{1}{\pi(4)} + \frac{B_{p-2}}{\pi(2p-4)}\frac{1}{\pi(6)} - \dots + (-1^{p-1}\frac{B_1}{\pi(2)}\frac{1}{\pi(2p)} + \frac{(-1)^p}{2}\frac{1}{\pi(2p+1)} + \\ &\qquad + (-1)^{p+1}\frac{1}{\pi(2p+2)} = 0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

e per la funzione $F(x,v)$ che figura sotto l'integrale si avrà

$$\begin{aligned} F(x,v) &= \frac{(x-v)^{2n}}{\pi(2n)} - \frac{1}{2}\frac{(x-v)^{2n-1}}{\pi(2n-1)}(x-\alpha) + \frac{B_1}{\pi(2)}\frac{(x-v)^{2n-2}}{\pi(2n-2)}(x-\alpha)^2 - \\ &- \frac{B_2}{\pi(4)}\frac{(x-v)^{2n-4}}{\pi(2n-4)}(x-\alpha)^4 + \dots + (-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\frac{(x-v)^2}{\pi(2)}(x-\alpha)^{2n-2}; \end{aligned} \tag{10}$$

e ora ponendo nella (8) $x = \alpha + h$, e nell'integrale dell'ultimo termine cambiando la variabile v d'integrazione in $\alpha + h - t$ o in $\alpha + t$, la (8) stessa si muterà nell'altra

$$\begin{aligned} f(\alpha+h) - f(\alpha) &= h\frac{f'(\alpha+h) + f'(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f''(\alpha+h) - f''(\alpha)\} + \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f^{\text{iv}}(\alpha+h) - f^{\text{iv}}(\alpha)\} + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-2)}(\alpha+h) - f^{(2n-2)}(\alpha)\} + R, \end{aligned} \tag{11}$$

nella quale

$$R = \int_0^h f^{(2n+1)}(\alpha + h - t)\,F(t)\,dt, \tag{12}$$

con

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t^{2n}}{\pi(2n)} - \frac{1}{2}\frac{t^{2n-1}h}{\pi(2n-1)} + \frac{B_1}{\pi(2)}\frac{t^{2n-2}h^2}{\pi(2n-2)} - \frac{B_2}{\pi(4)}\frac{t^{2n-4}h^4}{\pi(2n-4)} + \dots + \\ &+ (-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\frac{t^2h^{2n-2}}{\pi(2)}, \end{aligned} \tag{13}$$

o anche

$$R = \int_0^h f^{(2n+1)}(\alpha+t)\,F_1(t)\,dt, \tag{14}$$

con

$$\begin{aligned} F_1(t) = F(h-t) &= \frac{(h-t)^{2n}}{\pi(2n)} - \frac{1}{2}\frac{(h-t)^{2n-1}h}{\pi(2n-1)} + \frac{B_1}{\pi(2)}\frac{(h-t)^{2n-2}h^2}{\pi(2n-2)} - \frac{B_2}{\pi(4)}\frac{(h-t)^{2n-4}h^4}{\pi(2n-4)} + \dots + \\ &+ (-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\frac{(h-t)^2h^{2n-2}}{\pi(2)}, \end{aligned} \tag{15}$$

dovendo, come abbiamo detto, le $B_1, B_2, B_3 \dots$ determinarsi successivamente per mezzo di una delle (9); e così sotto la forma (11) la formola trovata ci dà l'accrescimento che riceve la funzione $f(x)$ nel passaggio di x da α a $\alpha+h$ espresso per gli accrescimenti corrispondenti delle sue derivate di ordine pari fino a quelle dell'ordine $2n-2$, per la media dei valori delle derivate prime nei punti estremi α e $\alpha+h$ e pel termine complementare R dato dalla (12) o dalla (14), nel supposto che la funzione stessa $f(x)$ abbia le sue derivate determinate, finite e continue fino a quelle dell'ordine $2n$ inclusive, e le derivate dell'ordine $2n+1$ esistano esse pure, ma possano essere anche discontinue o infinite essendo però atte alla integrazione fra α e $\alpha+h$.

200. — I numeri $B_1, B_2, B_3 \dots$ qui introdotti sono detti i *numeri di Bernoulli*. Essi si determinano successivamente per mezzo dell'una o dell'altra

delle formole (20), le quali pei primi dieci di essi ci dànno i valori seguenti

$$B_1 = \frac{1}{6}\,,\quad B_2 = \frac{1}{30}\,,\quad B_3 = \frac{1}{42}\,,\quad B_4 = \frac{1}{30}\,,\quad B_5 = \frac{5}{66}\,,$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}\,,\quad B_7 = \frac{7}{6}\,,\quad B_8 = \frac{3617}{510}\,,\quad B_9 = \frac{43867}{798}\,,\quad B_{10} = \frac{174611}{330}\,;$$

e mentre i primi tre vanno diminuendo, quelli che seguono vanno sempre crescendo e con una rapidità che finisce per essere grandissima.

Questi numeri si presentarono la prima volta nel calcolo delle somme delle potenze simili dei numeri interi; e si presentano anche in un gran numero di sviluppi, e in particolare in quello della funzione $\frac{x}{e^x - 1}$, per la quale quando se ne fa lo sviluppo colla formola di Taylor si trova che

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{\pi(4)}x^4 + \frac{B_3}{\pi(6)}x^6 - \dots,$$

perchè le derivate di ordine dispari della stessa funzione nel punto $x = 0$ a incominciare dalla terza sono tutte nulle e per quelle di ordine pari cambiate alternativamente di segno si trova che vengono determinate appunto da equazioni come le (9) ecc., come apparirà chiaramente in seguito al § 229.

201. — Ottenuta ora la formola (11), se si muta $f(x) - f(\alpha)$ in $\int_\alpha^x f(x)\,dx$, ciò che equivale a cambiare $f'(x)$ in $f(x)$, la formola stessa si muta nell'altra

$$(16)\quad \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx = h\frac{f(\alpha+h)+f(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f'(\alpha+h) - f'(\alpha)\} + \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f'''(\alpha+h) - f'''(\alpha)\} -$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\alpha+h) - f^{(2n-3)}(\alpha)\} + \overline{R},$$

dove $\overline{R}$ potrà porsi sotto l'una o sotto l'altra delle due forme seguenti

$$(17)\quad \overline{R} = \int_0^h f^{(2n)}(\alpha+h-t)\,F(t)\,dt\,,\quad \text{o}\quad \overline{R} = \int_0^h f^{(2n)}(\alpha+t)\,F_1(t)\,dt\,,$$

nelle quali $F(t)$ e $F_1(t)$ sono date dalle (13) e (15); e questa formola (16) varrà a dare il valore dell'integrale definito $\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx$ espresso per le differenze delle derivate di ordine dispari di $f(x)$ fino a quelle di ordine $2n-3$, per la media dei valori della funzione stessa ai punti estremi α e $\alpha+h$, e pel termine complementare $\overline{R}$ dato dall'una o dall'altra delle due espressioni (17); e ciò nel supposto che le derivate di $f(x)$ esistano almeno fino a quelle dell'ordine $2n$; queste ultime però potendo anche essere infinite o discontinue purchè atte alla integrazione nell'intervallo da α a $\alpha+h$.

Supponendo poi che in un intervallo al quale appartengono i punti α e $\alpha+h$ la funzione $f(x)$ abbia le sue derivate determinate finite e continue per qualsiasi ordine, le formole (11) e (16) varranno per qualunque valore di n; e varranno anche sotto la forma di serie, per modo cioè che si avranno anche le formole seguenti

$$(18)\quad f(\alpha+h) - f(\alpha) = h\frac{f'(\alpha+h)+f'(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f''(\alpha+h) - f''(\alpha)\} + \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f^{\text{IV}}(\alpha+h) - f^{\text{IV}}(\alpha)\} -$$
$$- \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-2)}(\alpha+h) - f^{(2n-2)}(\alpha)\} + \dots;$$

$$(19)\quad \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx = h\frac{f(\alpha+h)+f(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f'(\alpha+h) - f'(\alpha)\} + \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f'''(\alpha+h) - f'''(\alpha)\} -$$
$$- \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\alpha+h) - f^{(2n-3)}(\alpha)\} + \dots,$$

quando i valori (12) o (14) di R pel caso della prima formola, e quelli (17) di $\overline{R}$ pel caso della seconda abbiano per limite zero al crescere indefinito di n pei valori di α e di h che si considerano.

202. — Queste serie (18) e (19) sono l'una e l'altra le serie di Maclaurin-Eulero, che essi trovarono senza porre la condizione (che come si vede è indispensabile) che R e $\overline{R}$ abbiano per limite zero al crescere indefinito di n; ma poichè, come già notammo, i numeri di Bernoulli crescono insieme ad n con una rapidità enorme, le serie stesse il più spesso sono divergenti, e conviene perciò valersi — come noi appunto faremo — delle formole (11) o (16), arrestandosi cioè a un certo punto nelle serie corrispondenti (18) o (19) e introducendo il termine complementare R o $\overline{R}$.

203. — Fermandoci più specialmente sulla seconda di queste formole, che in sostanza non differisce dalla prima, osserviamo che se in essa tralasciamo il termine complementare $\overline{R}$, ciò che equivale a arrestarci a un certo punto nella serie (19), si viene ad avere un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx$, ma per giudicare del grado di approssimazione che così si ottiene pel valore

di h che si considera, bisogna trovare un limite superiore del valore di $\overline{\mathrm{R}}$, il quale certamente, per uno stesso valore di n, sarà tanto più piccolo quanto più sarà piccolo h.

204. — Per trovare questo limite superiore prendiamo a studiare le funzioni $\mathrm{F}(t)$ e $\mathrm{F}_1(t)$, limitandoci ad una di esse, per es. a $\mathrm{F}(t)$, giacchè si ha come sappiamo $\mathrm{F}_1(t) = \mathrm{F}(h-t)$.

Indichiamo perciò in generale con $\mathrm{F}_p(t)$ la funzione

$$\mathrm{F}_p(t) = \frac{t^p}{\pi(p)} - \frac{1}{2}\frac{t^{p-1}h}{\pi(p-1)} + \frac{\mathrm{B}_1}{\pi(2)}\frac{t^{p-2}h^2}{\pi(p-2)} - \frac{\mathrm{B}_2}{\pi(4)}\frac{t^{p-4}h^4}{\pi(p-4)} + \dots, \tag{20}$$

nella quale per $p>2$ l'ultimo termine è $(-1)^{\frac{p}{2}}\frac{\mathrm{B}_{\frac{p}{2}-1}}{\pi(p-2)}\frac{t^2h^{p-2}}{\pi(2)}$ nel caso di p pari, e $(-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{\mathrm{B}_{\frac{p-1}{2}}}{\pi(p-1)}\frac{th^{p-1}}{\pi(1)}$ nel caso di p dispari, e per $p=2$ si ha $\mathrm{F}_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}th = \frac{1}{2}t(t-h)$; e osserviamo che la funzione $\mathrm{F}(t)$ che a noi interessa di studiare non sarà altro che $\mathrm{F}_{2n}(t)$, e la funzione generale $\mathrm{F}_p(t)$, che evidentemente si annulla sempre per $t=0$, si annullerà anche per $t=h$, perchè avremo evidentemente

$$\mathrm{F}_p(h) = h^p\left\{\frac{1}{\pi(p)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(p-1)} + \frac{\mathrm{B}_1}{\pi(2)}\frac{1}{\pi(p-2)} - \frac{\mathrm{B}_2}{\pi(4)}\frac{1}{\pi(p-4)} + \dots\right\},$$

e in questa la quantità fra parentesi tanto nel caso di p numero pari quanto nel caso di p numero dispari sarà sempre zero a causa dell'una o dell'altra delle formole (9) che servono a definire i numeri B.

Ora partendo dalla espressione di $\mathrm{F}_{2n}(t)$ si vede subito che con due successive derivazioni rispetto a t si hanno le formole

$$\mathrm{F}'_{2n}(t) = \mathrm{F}_{2n-1}(t)\ ,\ \mathrm{F}''_{2n}(t) = \mathrm{F}'_{2n-1}(t) = \mathrm{F}_{2n-2}(t) + (-1)^n\frac{\mathrm{B}_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}, \tag{21}$$

la prima delle quali ci mostra che anche $\mathrm{F}'_{2n}(t)$ si annulla per $t=0$ e $t=h$, e la seconda integrata fra 0 e h ci dà $\int_0^h \mathrm{F}_{2n-2}(t)\,dt = (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{B}_{n-1}h^{2n-1}}{\pi(2n-2)}$, da cui cambiando n in $n+1$ si ha la formola notevole

$$\int_0^h \mathrm{F}_{2n}(t)\,dt = (-1)^n\frac{\mathrm{B}_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}, \tag{22}$$

che ci gioverà fra breve.

205. — Dalle stesse formole (21) è facile anche di dedurre che $\mathrm{F}_{2n}(t)$ mentre si annulla per $t=0$ e $t=h$, non si annulla per nessun valore di t fra 0 e h e quindi ha sempre lo stesso segno in questo intervallo.

Ammesso infatti che questo non fosse e che $\mathrm{F}_{2n}(t)$ si annullasse almeno per un valore c fra 0 e h, pel teorema di Rolle la sua derivata $\mathrm{F}'_{2n}(t)$ dovrebbe annullarsi per un valore c_1 di t diverso da zero e da c fra 0 e c, e per un altro valore c_2 diverso da c e da h fra c e h; e allora, siccome già sappiamo che essa si annulla per $t=0$ e per $t=h$, la sua derivata $\mathrm{F}''_{2n}(t)$ si annullerebbe almeno in tre punti diversi da 0 e da h pure situati fra 0 e h.

Da ciò, avendo riguardo alla seconda delle formole (21), si deduce che $\mathrm{F}_{2n-2}(t)$ prenderebbe lo stesso valore in questi tre punti e quindi la sua derivata si annullerebbe almeno in due punti fra 0 e h diversi da 0 e da h; e così partendo ora da $\mathrm{F}_{2n-2}(t)$ giungeremmo a conclusioni simili rispetto a $\mathrm{F}_{2n-4}(t)$, e continuando giungeremmo a concludere che anche $\mathrm{F}_2(t)$ dovrebbe prendere lo stesso valore in tre punti mentre questo è impossibile perchè $\mathrm{F}_2(t)$ è la funzione di secondo grado $\frac{1}{2}t(t-h)$; dunque non è ammissibile l'ipotesi che abbiamo fatta che $\mathrm{F}_{2n}(t)$ si annulli in un punto diverso da 0 e da h e compreso fra 0 e h, e così resta dimostrato quanto volevamo.

206. — Questo risultato ci permette evidentemente di dire che, quando si ammetta ora che le derivate $f^{(2n)}(x)$ siano sempre finite fra α e $\alpha+h$, all'integrale $\int_0^h f^{(2n)}(\alpha+h-t)\,\mathrm{F}_{2n}(t)\,dt$ che rappresenta il termine complementare $\overline{\mathrm{R}}$ della formola (16) si può applicare il primo teorema del valor medio, e si avrà perciò $\overline{\mathrm{R}} = f^{(2n)}(\xi)\int_0^h \mathrm{F}_{2n}(t)\,dt$, ovvero per la (22)

$$\overline{\mathrm{R}} = (-1)^n\frac{\mathrm{B}_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}f^{(2n)}(\xi), \tag{23}$$

essendo ξ un valore di x compreso fra α e $\alpha+h$; e quindi, se μ_{2n} sarà il limite superiore dei valori assoluti di $f^{(2n)}(x)$ per x compreso fra α e $\alpha+h$ o un numero maggiore, il valore assoluto di $\overline{\mathrm{R}}$ sarà inferiore a $\frac{\mu_{2n}\mathrm{B}_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}$; cioè l'errore che si commetterà quando pel valore dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx$ si prenda la somma dei primi termini delle serie (19) fino a quello che contiene B_{n-1} inclusivamente, sarà numericamente inferiore a $\frac{\mu_{2n}\mathrm{B}_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}$.

207. — Con ciò abbiamo il modo di determinare il grado di approssimazione che si ha quando per valore di un integrale $\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx$ si prende un certo numero di termini della serie (19). E per quanto, come abbiamo detto, le B_n crescano immensamente con n, siccome al tempo stesso cresce immensamente anche il denominatore nella (23) e cresce il grado della potenza di h, quand'anche le derivate di $f(x)$ crescano rapidamente con n, si comprende subito che a qualunque punto ci si arresti nella serie (19) si avrà sempre un forte grado di approssimazione quando h sia molto piccolo; mentre, coll'osservare che il grado di piccolezza che così si avrà per h dipenderà da n, si comprende pure che dopo avere ottenuta, per un dato valore di h (e quindi anche pei valori di h inferiori) una forte approssimazione arrestandosi a un certo termine nella serie stessa (19), questa approssimazione *per lo stesso valore di h* (per quanto piccolo esso sia) potrà diminuire assai quando si prenda nella serie un maggior numero di termini, e anzi la somma di questa serie potrà anche crescere indefinitamente o andare oscillando fra certi confini anche discostissimi fra loro, per modo cioè da avere la divergenza nella serie, precisamente come accade per la serie di Taylor (*Calc. differ.* § 73 e seg. [pag. 99 e seg.]).

208. — Ora se con opportuni cambiamenti nella serie (19) o nel secondo membro della formola (16) si potesse giungere ad un'altra formola per la quale il limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi a un certo punto nella serie e prendendo la somma corrispondente per valore dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx$ avesse ancora la forma precedente, ma nella quale invece della potenza $(2n+1)^a$ dell'intervallo h d'integrazione vi comparisse quella di una frazione dello stesso intervallo, si comprende che il grado di approssimazione sarebbe anche maggiore per ogni valore di h; quindi gioverà di trovare anche un'altra formola per la quale questo avvenga.

Questa formola si ottiene subito dalla (16) nel modo seguente.

Osserviamo che cambiando successivamente nella (16) α in $\alpha+h$, $\alpha+2h$, $\alpha+3h, \dots, \alpha+(p-1)h$ con p numero intero qualsiasi, e sommando le varie formole che così si ottengono, nell'ultima delle quali porremo $\alpha+ph=\beta$, si giunge all'altra formola pure notevole

$$(24)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = h\sum_{s=0}^{s=p} f(\alpha+sh) - h\,\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f'(\beta)-f'(\alpha)\} +$$
$$+\frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f'''(\beta)-f'''(\alpha)\} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\beta)-f^{(2n-3)}(\alpha)\} + R_p\,,$$

nella quale sarà

$$(25)\qquad R_p = \int_0^h \sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt\,,$$

indicando ora colle notazioni del § 204 cioè con $F_{2n}(t)$ la funzione che prima indicammo con $F(t)$; e questa formola, per la quale naturalmente conviene supporre che $f(x)$ insieme alle sue derivate $f'(x), f''(x), \dots, f^{(2n)}(x)$ soddisfi alle condizioni poste sopra in tutto l'intervallo da α a β, è appunto la formola cercata, e ci condurrà poi anche ad altri risultati notevolissimi.

209. — In essa intanto, per le proprietà che trovammo sopra per $F(t)$ o $F_{2n}(t)$ e pel primo teorema del valor medio, avremo

$$(26)\qquad R_p = (-1)^n\frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-\xi)\,,$$

essendo ξ un valore di x compreso fra 0 e h, e quindi, se $f^{(2n)}(x)$ sarà sempre finita fra α e β e μ_{2n} sarà il limite superiore dei suoi valori assoluti o un numero maggiore, si potrà scrivere

$$(27)\qquad R_p = \theta_p\, p\,\mu_{2n}\frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}\,,$$

essendo θ_p un numero compreso fra -1 e 1.

Ne segue che il valore assoluto di R_p sarà sempre inferiore a $p\mu_{2n}\dfrac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}$; e poichè si ha ora $\alpha+ph=\beta$, h in questa espressione invece di essere l'intiero intervallo d'integrazione $\beta-\alpha$ sarà la p^a parte di questo intervallo.

210. — Osserviamo ora che la serie corrispondente alla (24) è la seguente

$$(28)\qquad h\sum_{s=0}^{s=p} f(\alpha+sh) - h\,\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2} - \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}\{f'(\beta)-f'(\alpha)\} +$$
$$+\frac{B_2 h^4}{\pi(4)}\{f'''(\beta)-f'''(\alpha)\} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\beta)-f^{(2n-3)}(\alpha)\} + \dots$$

e anche questa fu data da Eulero per rappresentare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$; ma evidentemente, per quanto abbiamo detto, essa non può effettivamente rappresentare l'integrale altro che quando la quantità indicata sopra con R_p abbia per limite zero al crescere indefinito di n.

Essa però arrestata a qualsiasi termine darà sempre l'integrale con un certo grado di approssimazione che sarà tanto più forte quanto più sarà piccolo il numero h che è la p^a parte dell'intervallo d'integrazione; e precisamente la somma (27) arrestata al termine $(-1)^{n-1}\dfrac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\beta)-f^{(n-3)}(\alpha)\}$ darà l'integrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore che sarà numericamente inferiore a $p\mu_{2n}\dfrac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}$, dove $h=\dfrac{\beta-\alpha}{p}$.

Si osservi ora che per $p=1$ la formola (24) come la serie (28) si riducono, come è ben naturale, alla formola (16) e alla serie (19) quando in esse sia fatta $\alpha+h=\beta$; e così la (19) e la (28) arrestate ambedue al termine che porta il medesimo B_{n-1} (cioè al termine che ha lo stesso posto), possono servire alla determinazione dello stesso integrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, ma, mentre valendosi della (19) si potrà assicurare soltanto che l'errore sarà numericamente inferiore a $\mu_{2n}\dfrac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}$, valendosi della (28) saremo sicuri che l'errore è inferiore a questo numero diviso per p^{2n}. E così qualunque sia l'ampiezza $\beta-\alpha$ dell'intervallo d'integrazione basterà prendere p abbastanza grande per far sì che con un numero finito qualsiasi di termini della (28), si abbia l'integrale con quel grado di approssimazione che più ci piace; giacchè se si troverà per es. $\mu_{2n}\dfrac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n+1)}=k$, basterà prendere per p il primo numero intero superiore a $\sqrt[2n]{\dfrac{k}{\sigma}}$ per essere sicuri che la (28) arrestata al termine che porta B_{n-1} darà l'integrale cercato $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore numericamente inferiore a σ.

211. — E quando l'integrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(x)\,dx$ sia conosciuto e rappresenti una funzione speciale che voglia calcolarsi per dati valori della variabile, il processo qui indicato potrà servire a dare il valore di questa funzione con quel grado di approssimazione che si vorrà.

Così ad es. se sarà $f(x)=\dfrac{1}{x}$, si vede subito che, essendo $\dfrac{\beta-\alpha}{p}=h$, avremo

pel valore del logaritmo neperiano di β

$$(29)\quad \log\beta=\log\alpha+h\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+h}+\frac{1}{\alpha+2h}+\dots+\frac{1}{\alpha+ph}\right)-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{B_1h^2}{2}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)-$$
$$-\frac{B_2h^4}{4}\left(\frac{1}{\beta^4}-\frac{1}{\alpha^4}\right)+\frac{B_3h^6}{6}\left(\frac{1}{\beta^6}-\frac{1}{\alpha^6}\right)+\dots+(-1)^n\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{2n-2}\left(\frac{1}{\beta^{2n-2}}-\frac{1}{\alpha^{2n-2}}\right),$$

con un errore inferiore a $\dfrac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{p^{2n}\alpha^{2n+1}}$ o a $\dfrac{B_n}{p^{2n}}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right)^{2n+1}$; e, comunque sia stato preso n, qualunque sia β basterà prendere sufficientemente grande il numero intero p per avere con queste formole il valore di $\log\beta$ con tutto quel grado di approssimazione che si vorrà quando sia conosciuto $\log\alpha$.

Per $\alpha=1$ avremo

$$\log\beta=h\left(1+\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1+2h}+\dots+\frac{1}{1+ph}\right)-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)+\frac{B_1h^2}{2}\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)-$$
$$-\frac{B_2h^4}{4}\left(\frac{1}{\beta^4}-1\right)+\frac{B_3h^6}{6}\left(\frac{1}{\beta^6}-1\right)-\dots+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{2n-2}\left(\frac{1}{\beta^{2n-2}}-1\right),$$

con un errore inferiore a $\dfrac{B_n(\beta-1)^{2n+1}}{p^{2n}}$, essendo $h=\dfrac{\beta-1}{p}$; e l'errore potrà rendersi piccolo quanto si vuole prendendo p sufficientemente grande.

Per $n=2$ avremo

$$\log\beta=h\left(1+\frac{1}{1+h}+\frac{1}{1+2h}+\dots+\frac{1}{1+ph}\right)-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)+\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right),$$

con un errore inferiore a $\dfrac{(\beta-1)^5}{30p^4}$ perchè $B_1=\dfrac{1}{6}$, $B_2=\dfrac{1}{30}$; e anche in questa formola col prendere p sufficientemente grande l'errore si ridurrà piccolo ad arbitrio.

Così nel caso di $\beta=2$ prendendo $p=4$ o $p=5$ e quindi $h=\dfrac{1}{4}$ o $h=\dfrac{1}{5}$ si ha di qui il valore di $\log 2$ con un errore rispettivamente inferiore in valore assoluto a $\dfrac{1}{30\,.\,256}$ e $\dfrac{1}{30\,.\,625}$ o $\dfrac{1}{7680}$ e $\dfrac{1}{18750}$.

Così pure, prendendo $\alpha=e^k$ e β compreso fra e^k e e^{k+1}, cioè $\beta=\eta e^{k+1}$ essendo $\dfrac{1}{e}<\eta<1$, siccome si avrà $\log\alpha=k$, la formola (29) darà subito $\log\beta$

per qualunque valore di β compreso fra e^k e e^{k+1} con un errore numericamente inferiore a $\frac{B_n}{p^{2n}}(\eta e-1)^{2n+1}$.

E per $n=2$ si avrà

$$(30)\ \log\beta = k+h\left(\frac{1}{e^k}+\frac{1}{e^k+h}+\frac{1}{e^k+2h}+\ldots+\frac{1}{e^k+ph}\right)-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{e^k}\right)+\frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{e^{2k}}\right),$$

con un errore che sarà numericamente inferiore a $\frac{1}{30p^4}(\eta e-1)^5$, e potrà rendersi piccolo quanto si vuole prendendo sufficientemente grande il p; e così con questa formola dando a k i valori $0, 1, 2, 3, \ldots$, potremo calcolare successivamente con pochissime operazioni aritmetiche elementari i logaritmi neperiani (e volendo poi anche quelli con una base qualsiasi) per qualunque numero positivo.

Applicazioni delle formole di Maclaurin-Eulero. Nuove formole che se ne deducono.

212. — I risultati ottenuti, pei quali si suppone naturalmente che l'intervallo d'integrazione per l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sia finito, sono quelli ai quali volevamo giungere quando ci prefiggemmo di ottenere formole che servano alla determinazione approssimata degli integrali; e la loro importanza non può sfuggire ad alcuno, senza bisogno di farla risaltare con altri esempî speciali che ognuno potrà fare da sè.

Come abbiamo detto però la formola (24) del § 208 [pag 312], nella quale R_p è dato dalla formola seguente (25) o dalle (26) o (27), conduce anche ad altri risultati notevolissimi che, volendolo, potranno ancora servire allo stesso scopo; e noi ora troviamo opportuno di indicare anche alcuni di questi.

Incominciamo perciò coll'osservare che – quando si suppongono fissati α e β – in corrispondenza al valore scelto pel numero intero p o, il che è lo stesso, in corrispondenza alla divisione dell'intervallo $\beta-\alpha$ in p parti uguali fra loro, si ha la detta formola (24), che, quando vi si ponga per h il suo valore $\frac{\beta-\alpha}{p}$ e si indichi per abbreviare con S_p la somma $\sum_0^p{}_s f\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{p}\right)-\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}$ o $\frac{f(\alpha)}{2}+\frac{f(\beta)}{2}+\sum_1^{p-1}{}_s f\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{p}\right)$ può scriversi sotto la forma

$$(1)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{p}S_p - \frac{B_1(\beta-\alpha)^2}{\pi(2)p^2}\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}+$$

$$+\frac{B_2(\beta-\alpha)^4}{\pi(4)p^4}\{f'''(\beta)-f'''(\alpha)\}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}(\beta-\alpha)^{2n-2}}{\pi(2n-2)p^{2n-2}}\{f^{(2n-3)}(\beta)-f^{(2n-3)}(\alpha)\}+R_p\,,$$

dove

$$(2)\qquad R_p = \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{p}}\sum_1^p{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt = \theta_p\,\mu_{2n}\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)p^{2n}}\,,$$

essendo θ_p un numero compreso fra -1 e 1, e μ_{2n}, come già dicemmo, essendo il limite superiore dei valori assoluti di $f^{(2n)}(x)$ per x compreso fra α e β o un numero maggiore di quel limite; e così, se si prendono altri numeri interi e positivi ad arbitrio $p_1, p_2, \ldots, p_k$, oltre alla (1) avremo altre k equazioni tutte come la (1) stessa nella quale sia cambiato p in $p_1, p_2, \ldots, p_k$; e sommandole tutte dopo di averle moltiplicate per costanti indeterminate $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ e facendo le posizioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{C_0}{p^2}+\frac{C_1}{p_1^2}+\frac{C_2}{p_2^2}+\ldots+\frac{C_k}{p_k^2}=\lambda_1\,, \\ \frac{C_0}{p^4}+\frac{C_1}{p_1^4}+\frac{C_2}{p_2^4}+\ldots+\frac{C_k}{p_k^4}=\lambda_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ \frac{C_0}{p^{2n-2}}+\frac{C_0}{p_1^{2n-2}}+\frac{C_2}{p_2^{2n-2}}+\ldots+\frac{C_k}{p_k^{2n-2}}=\lambda_{n-1}\,, \end{cases}$$

insieme alle altre

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{C_0 S_p}{p}+\frac{C_1 S_{p_1}}{p_1}+\frac{C_2 S_{p_2}}{p_2}+\ldots+\frac{C_k S_{p_k}}{p_k}=T_{k+1}\,, \\ \frac{C_0\theta_p}{p^{2n}}+\frac{C_1\theta_{p_1}}{p_1^{2n}}+\frac{C_2\theta_{p_2}}{p_2^{2n}}+\ldots+\frac{C_k\theta_{p_k}}{p_k^{2n}}=\Theta_{k+1}\,, \end{cases}$$

quando non risulti $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k = 0$ avremo la formola

$$(5)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k}\Big\{(\beta-\alpha)T_{k+1} - \lambda_1 \frac{B_1(\beta-\alpha)^2}{\pi(2)}\{f'(\beta) - f'(\alpha)\} +$$

$$+ \lambda_2 \frac{B_2(\beta-\alpha)^4}{\pi(4)}\{f'''(\beta) - f'''(\alpha)\} - \ldots + (-1)^{n-1}\lambda_{n-1}\frac{B_{n-1}(\beta-\alpha)^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\beta) - f^{(2n-3)}(\alpha)\} +$$

$$+ \mu_{2n}\Theta_{k+1}\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}\Big\};$$

e da questa, dopo avere scelto come vorremo i numeri interi $p, p_1, p_2, \ldots, p_k$, fissando convenientemente il loro numero e le costanti $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$, potremo avere sotto infinite forme l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, e anche potremo fare prendere alle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, infiniti sistemi di valori anche dati ad arbitrio, come potremo far variare, pure ad arbitrio, la forma di T_{k+1} o procurare che vengano soddisfatte altre condizioni speciali.

Ed è da notare che in tutte le formole che così otterremo la *somma dei coefficienti dei valori* $f\left(\alpha + s\frac{\beta-\alpha}{p_r}\right)$ *che figurano in* $\frac{T_{k+1}}{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k}$ nel primo termine del secondo membro della espressione (5) che si avrà per l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *sarà sempre l'unità,* giacchè per ogni p_r la somma dei coefficienti dei valori $f\left(\alpha + s\frac{\beta-\alpha}{p_r}\right)$ per $s = 0, 1, 2, \ldots, p_r$ in Sp_r sarà sempre p_r, e quindi a causa del valore che si ha per T_{k+1} dalla prima delle (4) la somma dei coefficienti di tutti i valori $f\left(\alpha + s\frac{\beta-\alpha}{p_r}\right)$ sarà $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k$.

213. – Così, fissando in particolare di prendere $k = n-1$, se vorremo che le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ siano tutte zero, ciò che si otterrà determinando le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, all'infuori di un fattore di proporzionalità che scomparirà nella (5), mediante le formole

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{C_0}{p^2} + \frac{C_1}{p_1^2} + \frac{C_2}{p_2^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{p_{n-1}^2} = 0, \\ \frac{C_0}{p^4} + \frac{C_1}{p_1^4} + \frac{C_2}{p_2^4} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{p_{n-1}^4} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{C_0}{p^{2n-2}} + \frac{C_1}{p_1^{2n-2}} + \frac{C_2}{p_2^{2n-2}} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{p_{n-1}^{2n-2}} = 0, \end{cases}$$

il che, come ora vedremo, potrà sempre farsi, avremo la formola più semplice

$$(7)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1}}\left\{(\beta-\alpha)T_n + \mu_{2n}\Theta_n\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}\right\},$$

nella quale le derivate di $f(x)$ non compariscono più altro che nell'ultimo termine cioè nel termine complementare.

Ora per mostrare che le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ o meglio i loro rapporti a una di esse possono sempre determinarsi e che la loro somma è diversa da zero, introduciamo invece dei numeri interi $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ le inverse dei loro quadrati indicandole con $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$, cioè ponendo $\frac{1}{p^2} = q$, $\frac{1}{p_1^2} = q_1$, $\frac{1}{p_2^2} = q_2, \ldots, \frac{1}{p_{n-1}^2} = q_{n-1}$, con che le equazioni (6) si trasformeranno nelle altre

$$(8)\quad \begin{cases} C_0 q + C_1 q_1 + C_2 q_2 + \ldots + C_{n-1}q_{n-1} = 0, \\ C_0 q^2 + C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2 + \ldots + C_{n-1}q_{n-1}^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 q^{n-1} + C_1 q_1^{n-1} + C_2 q_2^{n-1} + \ldots + C_{n-1}q_{n-1}^{n-1} = 0, \end{cases}$$

le quali ci mostrano che le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ devono essere tutte proporzionali ai determinanti minori di ordine $n-1$ della matrice

$$\left\| \begin{matrix} q & q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} \\ q^2 & q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_{n-1}^2 \\ q^3 & q_1^3 & q_2^3 & \ldots & q_{n-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q^{n-1} & q_1^{n-1} & q_2^{n-1} & \ldots & q_{n-1}^{n-1} \end{matrix} \right\|.$$

Prendendo ora a studiare uno di questi determinanti minori per es. quello che viene sopprimendo la prima colonna nella matrice, e osservando che si ha

$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_{n-1}^2 \\ q_1^3 & q_2^3 & \ldots & q_{n-1}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{n-1} & q_2^{n-1} & \ldots & q_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_{n-1} \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{n-2} & q_2^{n-2} & \ldots & q_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix},$$

si vede che il determinante stesso sarà uguale a $\frac{P}{q}\prod_{r,s}(q_r-q_s)$, essendo P il prodotto di tutti i numeri $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$, e $\prod_{r,s}(q_r-q_s)$, dove $r>s$, essendo il solito prodotto delle differenze fra i numeri $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$.

D'altra parte se si costruisce la equazione $\varphi(z)=0$ del grado n in z che ha per radici i numeri $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ e ha per coefficiente del primo termine l'unità, per modo che sarà $\varphi(z)=(z-q)(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_{n-1})$, indicando con Q il prodotto di tutte le differenze delle radici di questa equazione, avremo evidentemente

$$Q=(q_1-q)(q_2-q)\ldots(q_{n-1}-q)\prod_{r,s}(q_r-q_s)=(-1)^{n-1}\varphi'(q)\prod_{r,s}(q_r-q_s);$$

e questa porta a dire che i determinanti minori della matrice scritta sopra saranno tutti proporzionali a $\frac{1}{q\varphi'(q)}, \frac{1}{q_1\varphi'(q_1)}, \ldots, \frac{1}{q_{n-1}\varphi'(q_{n-1})}$, e quindi le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ le potremo prendere come determinate dalle formole seguenti

$$(9)\qquad C_0=\frac{1}{q\varphi'(q)},\quad C_1=\frac{1}{q_1\varphi'(q_1)},\quad C_2=\frac{1}{q_2\varphi'(q_2)},\ldots,\ C_{n-1}=\frac{1}{q_{n-1}\varphi'(q_{n-1})}.$$

Queste quantità dunque avranno tutte valori determinati, finiti e diversi da zero, e anche la loro somma $C_0+C_1+C_2+\ldots+C_{n-1}$ che figura al denominatore della (7) risulterà sempre diversa da zero, perchè avendosi per le note formole della scomposizione delle frazioni in frazioni semplici

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{z-q}\frac{1}{\varphi'(q)}+\frac{1}{z-q_1}\frac{1}{\varphi'(q_1)}+\frac{1}{z-q_2}\frac{1}{\varphi'(q_2)}+\ldots+\frac{1}{z-q_{n-1}}\frac{1}{\varphi'(q_{n-1})},$$

si vede subito che sarà $C_0+C_1+C_2+\ldots+C_{n-1}=-\frac{1}{\varphi(0)}=\frac{(-1)^{n-1}}{qq_1q_2\ldots q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{P}$, e quindi la (7) potrà porsi sotto la forma

$$(10)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(-1)^{n-1}P\left\{(\beta-\alpha)T_n+\mu_{2n}\Theta_n\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}\right\},$$

dove T_n e Θ_n saranno dati dalle (4) nelle quali sia fatto $k=n-1$, quando in queste le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ si intendano determinate dalle (9); le $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ in tutte queste formole essendo le inverse dei quadrati dei numeri interi $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ che saranno stati scelti.

Ora fermandoci un momento sulla equazione $\varphi(z)=0$ nella quale il coefficiente del primo termine è 1 e l'ultimo termine è $(-1)^nP=(-1)^n(pp_1p_2\ldots p_{n-1})^{-2}$, osserviamo che la equazione $F(y)=\frac{(-1)^ny^n}{P}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=0$ sarà quella che ha per radici i quadrati dei numeri $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ e ha il coefficiente del primo termine uguale alla unità; e siccome si ha $F'(y)=\frac{(-1)^n}{P}\left\{ny^{n-1}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)-y^{n-2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\right\}$ si vede subito che sarà $F'(p^2)=\frac{(-1)^{n-1}}{P}p^{2n-4}\varphi'(q)$.

Ne segue che colla introduzione della equazione $F(y)=0$ che ha per radici i quadrati dei numeri $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ le quantità $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ date dalle (8) verranno a prendere la forma

$$C_0=(-1)^{n-1}\frac{p^{2n-2}}{PF'(p^2)},\quad C_1=(-1)^{n-1}\frac{p_1^{2n-2}}{PF'(p_1^2)},\ldots,\ C_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{p_{n-1}^{2n-2}}{PF'(p_{n-1}^2)};$$

e quindi la formola (10) potrà ridursi alla forma seguente

$$(11)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\overline{T}_n+\mu_{2n}\overline{\Theta}_n\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)},$$

dove ora si ha

$$(12)\quad\begin{cases}\overline{T}_n=\dfrac{p^{2n-3}}{F'(p^2)}S_p+\dfrac{p_1^{2n-3}}{F'(p_1^2)}S_{p_1}+\dfrac{p_2^{2n-3}}{F'(p_2^2)}S_{p_2}+\ldots+\dfrac{p_{n-1}^{2n-3}}{F'(p_{n-1}^2)}S_{p_{n-1}},\\[2ex] \overline{\Theta}_n=\dfrac{\theta_p}{p^2F'(p^2)}+\dfrac{\theta_{p_1}}{p_1^2F'(p_1^2)}+\dfrac{\theta_{p_2}}{p_2^2F'(p_2^2)}+\ldots+\dfrac{\theta_{p_{n-1}}}{p_{n-1}^2F'(p_{n-1}^2)},\end{cases}$$

per modo che indicando con m il minimo dei valori assoluti delle derivate $F'(p^2), F'(p_1^2), F'(p_2^2), \ldots, F'(p_{n-1}^2)$, e con m_1 quello dei denominatori di $\overline{\Theta}_n$ avremo in valore assoluto $\overline{\Theta}_n<\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_{n-1}^2}\right)$, $\overline{\Theta}_n<\frac{n}{m_1}$, e quindi indicando con θ e θ_1 numeri compresi fra -1 e 1 la formola (11) potrà scriversi sotto l'una e l'altra delle due forme seguenti

$$(13)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\overline{T}_n+\theta\frac{\mu_{2n}}{m}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_{n-1}^2}\right)\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)},\\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\overline{T}_n+\theta_1\frac{n\mu_{2n}}{m_1}\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)},\end{cases}$$

per modo che l'errore che si commetterà prendendo il primo termine $(\beta-\alpha)\overline{\mathrm{T}}_n$ come valore del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà inferiore in valore assoluto a $\frac{\mu_{2n}}{m}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\dots+\frac{1}{p_{n-1}^2}\right)\frac{\mathrm{B}_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}$ e a $\frac{n\mu_{2n}}{m_1}\frac{\mathrm{B}_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{\pi(2n)}$; e l'importanza di questo risultato non può sfuggire ad alcuno.

Ed è anche da notare, per quanto dicemmo in fine del paragrafo precedente, che la somma dei varii coefficienti dei valori $f\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{p_r}\right)$ nella espressione di T_n dovrà fare sempre l'unità.

214. — In particolare supponendo $p=1$, $p_1=2$, $p_2=3$, ..., $p_{n-1}=n$, la equazione $\mathrm{F}(y)=0$ sarà la seguente

$$\mathrm{F}(y)=(y-1^2)(y-2^2)(y-3^2)\dots(y-n^2),$$

e se k è uno qualunque dei numeri $1, 2, 3, \dots, n$ avremo, per $1<k<n$

$$\mathrm{F}'(k^2)=(k^2-1^2)(k^2-2^2)\dots(k^2-(k-1)^2)(k^2-(k+1)^2)\dots(k^2-n^2),$$

ovvero

$$\mathrm{F}'(k^2)=(-1)^{n-k}(k-1)(k-2)\dots2.1.1.2.3\dots(n-k)(k+1)(k+2)\dots$$
$$\dots(2k-1)(2k+1)\dots(k+n),$$

o anche

$$2k^2\,\mathrm{F}'(k^2)=(-1)^{n-k}\pi(n-k)\pi(n+k)\,; \tag{14}$$

e sotto questa forma si vede subito che questa formola varrà anche per $k=1$ e $k=n$.

Indicando quindi con $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ i denominatori dei singoli termini che figurano in $\overline{\Theta}_n$, per $k<n$ avremo la formola

$$-\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\pi(n-k-1)\,\pi(n+k+1)}{\pi(n-k)\,\pi(n+k)}=\frac{n+k+1}{n-k}=1+\frac{2k+1}{n-k},$$

dalla quale risulta che in valore assoluto questi denominatori $a_1, a_2, \dots, a_n$ vanno successivamente crescendo e il minimo di essi, sempre in valore assoluto, è il primo a_1 che è uguale a $\frac{(-1)^{n-1}\pi(n-1)\pi(n+1)}{2}=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)[\pi(n-1)]^2}{2}$; e perciò si avrà $\overline{\Theta}_n=\frac{2\theta_1}{(n+1)[\pi(n-1)]^2}$, essendo θ_1 un numero compreso fra -1 e 1.

E osservando ora che $\frac{p_{k-1}^{2n-3}}{\mathrm{F}'(p_{k-1}^2)}=\frac{k^{2n-3}}{\mathrm{F}'(k^2)}=(-1)^{n-k}\frac{2k^{2n-1}}{\pi(n-k)\pi(n+k)}$ e sostituendo nel valore di $\overline{\mathrm{T}}_n$ si troverà la formola seguente

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(-1)^{n-1}2\left\{\frac{1}{\pi(n-1)\pi(n+1)}\mathrm{S}_1-\frac{2^{2n-1}}{\pi(n-2)\pi(n+2)}\mathrm{S}_2+\right.$$
$$\left.+\frac{3^{2n-1}}{\pi(n-3)\pi(n+2)}\mathrm{S}_3-\dots+(-1)^{n-1}\frac{n^{2n-1}}{\pi(0)\pi(2n)}\mathrm{S}_n\right\}(\beta-\alpha)+\frac{2\theta_1\mu_{2n}\mathrm{B}_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{(n+1)[\pi(n-1)]^2\pi(2n)}, \tag{15}$$

che è notevolissima, e che ci mostra che prendendo per valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ la somma

$$(-1)^{n-1}2\left\{\frac{1^{n-1}}{\pi(n-1)\pi(n+1)}\mathrm{S}_1-\frac{2^{2n-1}}{\pi(n-2)\pi(n+2)}\mathrm{S}_2+\right.$$
$$\left.+\frac{3^{2n-1}}{\pi(n-3)\pi(n+3)}\mathrm{S}_3-\dots+(-1)^{n-1}\frac{n^{2n-1}}{\pi(0)\pi(2n)}\mathrm{S}_n\right\}(\beta-\alpha) \tag{16}$$

l'errore che si commetterà sarà inferiore a $\frac{2\mu_{2n}\mathrm{B}_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{(n+1)[\pi(n-1)]^2\pi(2n)}$ dove μ_{2n} è al solito il limite superiore dei valori assoluti di $f^{(2n)}(x)$ fra α e β o un numero maggiore.

E poichè, specialmente a causa di quanto dimostreremo in seguito al § 229 intorno al valore del rapporto $\frac{\mathrm{B}_n}{\pi(2n)}$, questo errore sarà il più spesso piccolissimo, e ciò anche per valori assai piccoli di n, la formola trovata potrà servire utilmente pel calcolo approssimato degli integrali e delle funzioni rappresentate da questi.

Così supponendo per es. $f(x)=\frac{1}{x}$ con $\alpha=1$, la formola stessa potrà servire al calcolo approssimato dei logaritmi neperiani; poichè in questo caso essa ci dà subito una espressione di $\log\beta$ essendo β un numero positivo qualunque superiore alla unità.

215. — Aggiungiamo ancora a riguardo delle formole (11) e (15) che, nel caso particolare in cui le quantità $\theta_p, \theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \dots, \theta_{p_{n-1}}$ che figurano nel valore di $\overline{\Theta}_n$ dato dalla seconda delle formole (12) siano tutte eguali fra loro e

sia θ il loro valore comune, avremo

$$\overline{\Theta}_n = \theta \left\{ \frac{1}{p^2 F'(p^2)} + \frac{1}{p_1^2 F'(p_1^2)} + \frac{1}{p_2^2 F'(p_2)^2} + \dots + \frac{1}{p_{n-1}^2 F'(p_{n-1}^2)} \right\};$$

e poichè per le solite formole della scomposizione delle frazioni in frazioni semplici la somma fra parentesi non è altro che $-\frac{1}{F(0)}$ cioè $\frac{(-1)^{n-1}}{(pp_1 p_2 \dots p_{n-1})^2}$, così in questo caso sarà $\overline{\Theta}_n = (-1)^{n-1} \frac{\theta \mu_{2n}}{(pp_1 p_2 \dots p_{n-1})^2}$, e quindi la formola (11) si muterà nell'altra

$$(17) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\beta - \alpha)\,\overline{T}_n + (-1)^{n-1} \frac{\theta \mu_{2n} B_n (\beta - \alpha)^{2n+1}}{(pp_1 p_2 \dots p_{n-1})^2 \pi(2n)},$$

nella quale $\overline{T}_n$ è ancora dato dalla prima delle (12), cioè si ha

$$(18) \qquad \overline{T}_n = \frac{p^{2n-3}}{F'(p^2)} S_p + \frac{p_1^{2n-3}}{F'(p_1^2)} S_{p_1} + \frac{p_2^{2n-3}}{F'(p_2^2)} S_{p_2} + \dots + \frac{p_{n-1}^{2n-3}}{F'(p_{n-1}^2)} S_{p_{n-1}},$$

essendo in generale

$$(19)\ S_{p_r} = \sum_0^{p_r} f\left(\alpha + s\,\frac{\beta - \alpha}{p_r}\right) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \sum_1^{p_r - 1} f\left(\alpha + s\,\frac{\beta - \alpha}{p_r}\right).$$

E nel caso particolare di $p = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., $p_{n-1} = n$, in corrispondenza alla (15) avremo ora l'altra

$$(20)\ \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (-1)^{n-1}\, 2 \left\{ \frac{1^{2n-1}}{\pi(n-1)\,\pi(n+1)} S_1 - \frac{2^{2n-1}}{\pi(n-2)\,\pi(n+2)} S_2 + \frac{3^{2n-1}}{\pi(n-3)\,\pi(n+3)} S_3 - \right.$$
$$\left. - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n^{2n-1}}{\pi(0)\,\pi(2n)} S_n \right\} (\beta - \alpha) + (-1)^{n-1} \frac{\theta \mu_{2n} B_n (\beta - \alpha)^{2n+1}}{[\pi(n)]^2 \pi(2n)},$$

essendo in generale

$$(21)\ S_i = \sum_0^i f\left(\alpha + s\,\frac{\beta - \alpha}{i}\right) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \sum_1^{i-1} f\left(\alpha + s\,\frac{\beta - \alpha}{i}\right);$$

e queste formole, sotto l'attuale ipotesi rispetto a $f(x)$ e nel supposto che il θ sia perfettamente conosciuto, serviranno a darci in modo preciso il valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ quando di esse ci si voglia servire per la determi-

nazione di questo integrale; mentre, quando questo integrale sia conosciuto, le formole stesse risolute rispetto a B_n serviranno a darci espressioni molto notevoli di questi numeri di Bernoulli B_n.

216. — Questo sotto la ipotesi che abbiamo posta che la funzione $f(x)$ sia tale che nella formola (2) che dà R_p il coefficiente θ_p risulti indipendente dal numero p, il che però avverrà soltanto in casi specialissimi.

In particolare questo avverrà quando sia $f(x) = x^{2n}$, nel qual caso sarà $f^{(2n)}(x) = \pi(2n)$, e quindi per la (22) della pag. 310 avremo

$$R_p = p\,\pi(2n) \int_0^{\frac{\beta - \alpha}{p}} F_{2n}(t)\,dt = (-1)^n \frac{B_n (\beta - \alpha)^{2n+1}}{p^{2n}},$$

e sarà perciò $\theta_p = \theta_{p_1} = \theta_{p_2} = \dots = \theta_{p_{n-1}} = \theta = (-1)^n$, $\mu_{2n} = \pi(2n)$; e per questo e perchè, quando si ponga per semplicità di scrittura $\beta - \alpha = h$, la (19) darà in generale

$$(22) \quad S_{p_r} = \frac{\sum_0^{p_r}{}_s\, (p_r \alpha + sh)^{2n}}{p_r^{2n}} - \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} + \frac{\sum_1^{p_r - 1}{}_s\, (p_r \alpha + sh)^{2n}}{p_r^{2n}},$$

e la (18) diverrà

$$(23)\ \overline{T}_n = \frac{\sum_0^{p}{}_s\, (p\alpha + sh)^{2n}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{\sum_0^{p_1}{}_s\, (p_1 \alpha + sh)^{2n}}{p_1^3 F'(p_1^2)} + \frac{\sum_0^{p_2}{}_s\, (p_2 \alpha + sh)^{2n}}{p_2^3 F'(p_2^2)} + \dots + \frac{\sum_0^{p_{n-1}}{}_s\, (p_{n-1} \alpha + sh)^{2n}}{p_{n-1}^3 F'(p_{n-1}^2)} -$$
$$- \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \left\{ \frac{p^{2n-3}}{F'(p^2)} + \frac{p_1^{2n-3}}{F'(p_1^2)} + \frac{p_2^{2n-3}}{F'(p_2^2)} + \dots + \frac{p_{n-1}^{2n-3}}{F'(p_{n-1}^2)} \right\},$$

ne segue che per la (17) avremo

$$(24) \qquad \frac{\beta^{2n+1} - \alpha^{2n+1}}{2n + 1} = (\beta - \alpha)\,\overline{T}_n - \frac{B_n (\beta - \alpha)^{2n+1}}{(pp_1 p_2 \dots p_{n-1})^2},$$

$\overline{T}_n$ ora essendo dato dalla formola precedente (23); e questa formola (24), col prendere come meglio vorremo i numeri interi e positivi $p, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ e i numeri α e β, servirà a dare infinite espressioni diverse dei numeri di Bernoulli B_n.

In particolare supponendo $\alpha = 0$, $\beta = 1$ il valore di $\overline{T}_n$ si semplicizza moltissimo, e la formola precedente (24) dà luogo all'altra più semplice

$$(25)\ \frac{B_n}{(pp_1 p_2 \dots p_{n-1})^2} = \sum\nolimits_p \frac{1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \dots + (p-1)^{2n}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{1}{2} \sum\nolimits_p \frac{p^{2n-3}}{F'(p^2)} - \frac{1}{2n+1},$$

nella quale le somme $\sum_p$ s'intendono estese agli n valori $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ di p; e questa nel caso speciale di $p=1, p_1=2, p_2=3, \ldots, p_{n-1}=n$ si trasforma nell'altra ancora più semplice e notevole

$$(26)\quad \frac{B_n}{[\pi(n)]^2} = 2\sum_{1}^{n}{}_k (-1)^{n-k} \frac{1^{2n}+2^{2n}+3^{2n}+\ldots+(k-1)^{2n}}{k\pi(n-k)\pi(n+k)} + \sum_{1}^{n}{}_k (-1)^{n-k} \frac{k^{2n-1}}{\pi(n-k)\pi(n+k)} \frac{1}{2n+1},$$

perchè in questo caso si ha come già trovammo al § 214

$$2p_{k-1}^2 F'(p_{k-1}^2) = 2k^2 F'(k^2) = (-1)^{n-k}\pi(n-k)\pi(n+k).$$

217. — Queste formole poi possono anche semplicizzarsi valendosi delle considerazioni seguenti.

Si osservi che se nelle formole del § 215, invece di supporre $f(x)=x^{2n}$ come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, si suppone $f(x)=x^i$ con i uguale a uno qualsiasi dei numeri $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$ si ha allora $f^{(2n)}(x)=0$, e la (17) viene a mancare dell'ultimo termine e dà luogo alla formola seguente

$$(27)\quad \frac{\beta^{i+1}-\alpha^{i+1}}{i+1} = (\beta-\alpha)\,\overline{T}_n,$$

nella quale il $\overline{T}_n$ è determinato dalla formola

$$(28)\quad \overline{T}_n = \frac{\sum_{0}^{p}{}_s (p\alpha+sh)^i p^{2n-i}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{\sum_{0}^{p_1}{}_s (p_1\alpha+sh)^i p_1^{2n-i}}{p_1^3 F'(p_1^2)} + \ldots + \frac{\sum_{0}^{p_{n-1}}{}_s (p_{n-1}\alpha+sh)^i p_{n-1}^{2n-i}}{p_{n-1}^3 F'(p_{n-1}^2)} - \frac{\alpha^i+\beta^i}{2}\sum_p \frac{p^{2n-3}}{F'(p^2)},$$

perchè ora si ha

$$S_{p_r} = \sum_{0}^{p_r}{}_s \frac{(p_r\alpha+sh)^i}{p_r^i} - \frac{\alpha^i+\beta^i}{2} = \frac{\alpha^i+\beta^i}{2} + \sum_{1}^{p_r-1}{}_s \frac{(p_r\alpha+sh)^i}{p_r^i};$$

e quindi in particolare nel caso di $\alpha=0$ e $\beta=1$, quando i abbia uno qualsiasi dei valori interi e positivi $1, 2, 3, \ldots, 2n-1$ avremo la formola

$$(29)\quad \frac{1}{i+1} = \sum_p \frac{\{1^i+2^i+3^i \ldots (p-1)^i\}p^{2n-i}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{p^{2n-3}}{F'(p^2)},$$

nella quale la somma $\sum_p$ s'intende estesa a tutti i valori $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$; e quando i sia zero, ciò che corrisponde a supporre $f(x)=1$ e quindi anche

$(\alpha^i)_{\substack{i=0\\ \alpha=0}}=1$, avremo l'altra formola $\sum \frac{p^{2n-2}}{F'(p^2)} = 1$ che si otterrebbe anche dalla precedente col farvi $i=1$, e che combina con quella che si ottiene dalla nota formola di scomposizione in frazioni semplici della frazione $\frac{y^{n-1}}{F(y)}$ moltiplicandola per $F(y)$ e poi uguagliando fra loro i coefficienti di y^{n-1} nei due membri (*).

Valendosi ora della formola (29) e sottraendola dalla (25) otterremo subito l'altra

$$(30)\quad \frac{B_n}{(pp_1p_2\ldots p_{n-1})^2} = \sum_p \frac{1^{2n}+2^{2n}+3^{2n}+\ldots+(p-1)^{2n} - \{1^i+2^i+3^i+\ldots+(p-1)^i\}p^{2n-i}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{2n-i}{(i+1)(2n+1)}$$

che varrà per qualunque valore che si scelga per i fra i numeri $1, 2, 3, \ldots, 2n-1$; e quindi in particolare per $i=1$ ci darà la formola seguente

$$(31)\quad \frac{B_n}{(pp_1p_2\ldots p_{n-1})^2} = \sum_p \frac{1^{2n}+2^{2n}+3^{2n}+\ldots+(p-1)^{2n} - \frac{p-1}{2}p^{2n}}{p^3 F'(p^2)} + \frac{2n-1}{2(2n+1)},$$

che nel solito caso di $p=1, p_1=2, p_2=3, \ldots, p_{n-1}=n$ si trasforma nell'altra

$$(32)\quad \frac{B_n}{[\pi(n)]^2} = 2\sum_{2}^{n}{}_k (-1)^{n-k} \frac{1^{2n}+2^{2n}+3^{2n}+\ldots+(k-1)^{2n} - \frac{k-1}{2}k^{2n}}{k\pi(n-k)\pi(n+k)} + \frac{2n-1}{2(2n+1)}$$

(*) La formola di scomposizione delle frazioni in frazioni semplici applicata alla frazione $\frac{y^i}{F(y)}$ con $i \leq n-1$ conduce anche ad altre formole simili a quella che qui consideriamo $\sum \frac{p^{2n-2}}{F'(p^2)} = 1$.

Notiamo che, supponendo $p=1, p_1=2, p_2=3, \ldots, p_{k-1}=k, \ldots, p_{n-1}=n$ e ricordando che allora si ha $2p_{k-1}^2 F'(k_{k-1}^2) = 2k^2 F'(k^2) = (-1)^{n-k}\pi(n-k)\pi(n+k)$, la formola $\sum \frac{p^{2n-2}}{F'(p^2)} = 1$ dà come caso particolare la seguente

$$\frac{1^{2n}}{\pi(n-1)\pi(n+1)} - \frac{2^{2n}}{\pi(n-2)\pi(n+2)} + \frac{3^{2n}}{\pi(n-3)\pi(n+3)} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n^{2n}}{\pi(0)\pi(2n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}.$$

Del resto sarebbe anche facile vedere che la formola $\sum \frac{p^{2n-2}}{F'(p^2)} = 1$ è conseguenza della osservazione fatta in fine del § 213 cioè che la somma dei coefficienti delle $f\left(\alpha + s\frac{h}{p_r}\right)$ è sempre l'unità.

che potrà servire come le precedenti per la determinazione dei numeri di Bernoulli B_n.

Supponendo $n=1, 2, 3, \ldots$ si trovano da questa formola con calcoli numerici semplicissimi i valori $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}, \ldots$ di $B_1, B_2, B_3, \ldots$

Viceversa ammettendo conosciuti questi numeri $B_1, B_2, B_3, \ldots$ la formola (31) col farvi $n=1, 2, 3, \ldots$ darà successivamente le somme delle potenze simili dei numeri interi $1, 2, \ldots, p-1$ per qualsiasi valore intero e positivo di p.

218. — Come già dicemmo al § 212 [pag. 316 e seg.], per la determinazione delle costanti $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$, — che allora si introdussero colla sola condizione che la loro somma non fosse zero, e che nel caso speciale di $k=n-1$ determinammo colla condizione che restassero soddisfatte le equazioni (6) —, possono fissarsi anche altre condizioni alle quali esse debbano soddisfare onde far sì che la espressione che si ha dalla (5) per l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ venga a presentarsi sotto altre forme speciali, e si possano così avere anche altre forme pei valori approssimati di questo integrale.

Per accennare anche a questi casi, sempre nel supposto che $C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k$ non sia zero, osserviamo che lasciando indeterminato il k e indicando in generale, per semplicità di scrittura, con h_r il rapporto $\frac{\beta-\alpha}{p_r}$ si ha

$$S_{p_r}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}+\sum_1^{p_r-1} f(\alpha+sh_r)\,;$$

e se si indicano con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l$ i punti *distinti* fra α e β (α e β escl.) che corrispondono ai varii valori che si ottengono per $\alpha+sh_r$ dando ad s tutti i valori da 1 a p_r-1 e facendo prendere a p_r tutti i $k+1$ valori $p, p_1, p_2, \ldots, p_k$, si vede subito che sarà $l \leq p+p_1+p_2+\ldots+p_k-k-1$, e la quantità T_{k+1} data dalla prima delle formole (4) potrà porsi sotto la forma

$$T_{k+1}=P_0\{f(\alpha)+f(\beta)\}+P_1 f(\alpha_1)+P_2 f(\alpha_2)+\ldots+P_i f(\alpha_i)+\ldots+P_l f(\alpha_l)\,, \tag{33}$$

avendosi pel primo coefficiente P_0

$$2P_0=\frac{C_0}{p}+\frac{C_1}{p_1}+\frac{C_2}{p_2}+\ldots+\frac{C_k}{p_k}\,, \tag{34}$$

e per gli altri $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_l$ avendosi in generale

$$P_i=g_{i,0}\frac{C_0}{p}+g_{i,1}\frac{C_1}{p_1}+g_{i,2}\frac{C_2}{p_2}+\ldots+g_{i,k}\frac{C_k}{p_k}\,, \tag{35}$$

essendo le $g_{i,0}, g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,k}$ numeri determinati che saranno uguali a zero o a uno a seconda dei valori che saranno stati scelti per le $p, p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$, e per quanto si disse in fine del § 212 il rapporto $\frac{2P_0+P_1+P_2+\ldots+P_l}{C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k}$ dovendo risultare l'unità; e quindi la formola (5) potrà porsi sotto la forma seguente

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=&\frac{\beta-\alpha}{C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k}\Big\{P_0\{f(\alpha)+f(\beta)\}+P_1 f(\alpha_1)+P_2 f(\alpha_2)+\ldots+P_l f(\alpha_l)\Big\}-\\&-\frac{1}{C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k}\Big\{\lambda_1\frac{B_1(\beta-\alpha)^2}{\pi(2)}\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}-\lambda_2\frac{B_2(\beta-\alpha)^4}{\pi(4)}\{f'''(\beta)-f'''(\alpha)\}+\\&+\ldots+(-1)^n\lambda_{n-1}\frac{B_{n-1}(\beta-\alpha)^{2n-2}}{\pi(2n-2)}\{f^{(2n-3)}(\beta)-f^{(2n-3)}(\alpha)\}\Big\}+\\&+\mu_{2n}\Theta_{k+1}\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{(C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k)\,\pi(2n)}\,,\end{aligned} \tag{36}$$

essendo Θ_{k+1} dato dalla seconda delle (4) e μ_{2n} essendo il limite superiore dei valori assoluti di $f^{(2n)}(x)$ per x compreso fra α e β; e le $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k, \ldots, \lambda_k$ avendo i valori che risulteranno dalle formole (3) in seguito ai valori che verranno scelti per le costanti $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$.

E così in generale quando, avendo fissati i valori di $n, k, p, p_1, p_2, \ldots, p_k$, saranno state determinate in un modo o in un altro queste costanti $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$, allora la parte perfettamente conosciuta del secondo membro di questa formola — cioè tutto il secondo membro stesso all'infuori dell'ultimo termine — darà un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore numericamente inferiore a

$$\mu_{2n}\left(\frac{C'_0}{p^{2n}}+\frac{C'_1}{p_1^{2n}}+\frac{C'_2}{p_2^{2n}}+\ldots+\frac{C'_k}{p_k^{2n}}\right)\frac{B_n(\beta-\alpha)^{2n+1}}{|C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k|\,\pi(2n)}\,, \tag{37}$$

essendo $C'_0, C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$ e $|C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k|$ i valori assoluti di $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ e $C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k$.

In particolare, supponendo $n=1$ e ricordando che $B_1=\frac{1}{6}$, la somma

$$\frac{\beta-\alpha}{C_0+C_1+C_2+\ldots+C_k}\Big\{P_0\{f(\alpha)+f(\beta)\}+P_1 f(\alpha_1)+\ldots+P_l f(\alpha_l)\Big\} \tag{38}$$

darà un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore numericamente inferiore a

$$(39)\qquad \frac{\mu_2}{12}\left(\frac{C'_0}{p}+\frac{C'_1}{p_1^2}+\frac{C'_2}{p_2^2}+\dots+\frac{C'_k}{p_k^2}\right)\frac{(\beta-\alpha)^3}{|C_0+C_1+C_2+\dots+C_k|},$$

essendo ora μ_2 il massimo valore assoluto della derivata seconda $f''(x)$ per x compreso fra α e β.

E se per valore del nostro integrale si prenderà la espressione precedente (38) coll'aggiunta del primo o anche dei primi due dei termini seguenti nel secondo membro della (36), allora, almeno quando l'intervallo d'integrazione sia abbastanza piccolo e le derivate quarte e seste di $f(x)$ non siano molto grandi in confronto alle derivate seconde, si avrà un valore ordinariamente più approssimato dell'integrale, perchè l'errore risulterà allora numericamente inferiore alla espressione (37) nella quale sia fatto $n=2$ o $n=3$, con $B_2=\frac{1}{30}$ e $B_3=\frac{1}{42}$.

E infine nel caso in cui i valori che saranno scelti per le costanti $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ rendano zero il valore di λ_1 dato dalla prima delle (3), come nel caso in cui, oltre a λ_1, rendano zero anche λ_2, l'errore che si commetterà prendendo la somma (38) come valore approssimato del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà numericamente inferiore oltre che alla espressione (39) anche alla espressione (37) nella quale sia fatto $n=2$ o $n=3$ con $B_2=\frac{1}{30}$ e $B_3=\frac{1}{42}$ come nel caso dell'osservazione precedente. Risultati simili si avranno se oltre a λ_1 e λ_2 sarà zero anche λ_3 ecc.

Tutte queste considerazioni poi valgono anche nel caso di $k=0$ e $C_0=1$, cioè quando si consideri la (24) del § 208 [pag. 312] senz'altro, che rimane così inclusa nella (36).

219. — Tutto questo qualunque siano i valori che si daranno alle costanti indeterminate $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ colla sola esclusione del caso in cui pei valori che si scelgano per esse si venga ad avere $C_0+C_1+C_2+\dots+C_k=0$; quindi, considerando sempre come dati il k e le $p, p_1, p_2, \dots, p_k$ e il numero n, potranno anche fissarsi condizioni speciali per la determinazione delle stesse costanti.

Fra le condizioni che possono porsi per questo vi è quella di far sì che i rapporti dei coefficienti della espressione (33) di T_{k+1} a $C_0+C_1+C_2+\dots+C_k$ vengano ad avere valori determinati dati $\overline{P}_0, \overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_l$, tali però sempre che la somma $2\overline{P}_0+\overline{P}_1+\overline{P}_2+\dots+\overline{P}_l$ risulti l'unità, per modo da avere

pel valore approssimato del nostro integrale la formola

$$(40)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\left\{\overline{P}_0\{f(\alpha)+f(\beta)\}+\overline{P}_1 f(\alpha_1)+\overline{P}_2 f(\alpha_2)+\dots+\overline{P}_l f(\alpha_l)\right\},$$

ciò che equivale a porre per la determinazione delle stesse costanti $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ le condizioni

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{C_0}{p}+\dfrac{C_1}{p_1}+\dfrac{C_2}{p_2}+\dots+\dfrac{C_k}{p_k}=2\overline{P}_0\left(C_0+C_1+C_2+\dots+C_k\right),\\[2mm] g_{1,0}\dfrac{C_0}{p}+g_{1,1}\dfrac{C_1}{p_1}+g_{1,2}\dfrac{C_2}{p_2}+\dots+g_{1,k}\dfrac{C_k}{p_k}=\overline{P}_1\left(C_0+C_1+C_2+\dots+C_k\right),\\[2mm] g_{2,0}\dfrac{C_0}{p}+g_{2,1}\dfrac{C_1}{p_1}+g_{2,2}\dfrac{C_2}{p_2}+\dots+g_{2,k}\dfrac{C_k}{p_k}=\overline{P}_2\left(C_0+C_1+C_3+\dots+C_k\right),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_{l,0}\dfrac{C_0}{p}+g_{l,1}\dfrac{C_1}{p_1}+g_{l,2}\dfrac{C_2}{p_2}+\dots+g_{l,k}\dfrac{C_k}{p_k}=\overline{P}_l\left(C_0+C_1+C_2+\dots+C_k\right), \end{cases}$$

e a meno che queste equazioni non presentino qualche incompatibilità, esse determineranno i valori di tutte o almeno di alcune delle stesse $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$ all'infuori di un coefficiente di proporzionalità che sparirà da sè nelle formole del paragrafo precedente.

E quando alcune di queste costanti o dei loro rapporti a una di esse resti indeterminata, come avverrà quando sia $l<k$ e non vi siano incompatibilità, allora potremo porre anche altre condizioni, come ad esempio quella che siano successivamente zero alcune delle quantità $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ a incominciare dalla prima λ_1.

220. — Così per esempio:

1.° quando si supponga $k=0$ e si prenda $p=n$, si avrà la (24) stessa della pag. 312, e per un valore approssimato del nostro integrale nel caso di $n\geq 2$ si avrà la formola

$$(42)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{h_n}{2}\left\{f(\alpha)+2\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\dots+f(\alpha_{n-1})\}+f(\beta)\right\},$$

essendo $\alpha_s=\alpha+sh_n$ con $h_n=\frac{\beta-\alpha}{n}$; e, a causa della (39), quando il calcolo dell'integrale si faccia con questa formola (42), l'errore sarà numericamente inferiore a $\frac{\mu_2(\beta-\alpha)^3}{12n^2}$, essendo μ_2 il limite superiore dei valori assoluti della derivata seconda di $f(x)$ fra α e β.

2.° quando si supponga $k=1$ e si prendano $p=1$, $p_1=2$ con che avremo $\alpha_1=\alpha+\frac{1}{2}h$, se si vorrà che sia $\overline{P}_0=\frac{1}{6}$ e $\overline{P}_1=\frac{4}{6}$, con che si avrà la più semplice delle formole di Simpson e di Cotes

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{6}\left\{f(\alpha)+4f(\alpha_1)+f(\beta)\right\} \tag{43}$$

che spesso si usa pel calcolo dei valori approssimati degli integrali, si vede subito che bisognerà prendere le due costanti C_0 e C_1, che allora si avranno nelle nostre formole, in modo che si abbiano le equazioni

$$C_0+\frac{C_1}{2}=\frac{1}{3}(C_0+C_1)\quad,\quad\frac{C_1}{2}=\frac{4}{6}(C_0+C_1),$$

le quali ci danno $C_1=-4C_0$, $C_0+C_1=-3C_0$; e poichè questi valori di C_0 e C_1 portano che il valore corrispondente di λ_1 dato dalla prima delle (3) sia zero senza che lo sia il valore di λ_2, per quanto si disse sul finire del paragrafo precedente basta avere riguardo a ciò che diviene ora la espressione (37) per $n=2$ per potere affermare che la formola suindicata di Simpson darà un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore numericamente inferiore a $\frac{\mu_4(\beta-\alpha)^5}{1728}$ essendo μ_4 il limite superiore dei valori assoluti della derivata quarta di $f(x)$ nell'intervallo (α,β).

Invece tenendo conto della (39), pel limite superiore dell'errore avremmo avuto $\frac{\mu_2(\beta-\alpha)^3}{18}$ essendo μ_2 il limite superiore dei valori assoluti delle derivate seconde di $f(x)$ fra α e β; e talvolta a seconda dei valori di μ_2 e di μ_4 e di $\beta-\alpha$ questo limite superiore dell'errore potrà essere minore del precedente; però in tal caso sarà meglio valersi della (42) per $n=2$ invece che di questa ultima (43) perchè per la (42) il limite superiore dell'errore risulterà minore.

3.° E quando, sempre con $k=1$, si prendano $p=1$, $p_1=3$ con che i punti α_r saranno i due $\alpha_1=\alpha+\alpha\frac{1}{3}h$, $\alpha_2=\alpha+\frac{2}{3}h$, se si richiederà che sia

$\overline{P}_0=\frac{1}{8}$, $\overline{P}_1=\overline{P}_2=\frac{3}{8}$ onde avere la seconda delle formole di Cotes

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{\beta-\alpha}{8}\left\{f(\alpha)+3f(\alpha_1)+3f(\alpha_2)+f(\beta)\right\}, \tag{44}$$

che pure spesso si usa pel calcolo dei valori approssimati degli integrali, si vede che in questo caso bisognerà determinare le due costanti C_0 e C_1 in modo da avere le due equazioni

$$C_0+\frac{C_1}{3}=\frac{1}{4}(C_0+C_1)\quad,\quad\frac{C_1}{3}=\frac{3}{8}(C_0+C_1)$$

alle quali si ridurranno allora le (41); cioè bisognerà prendere $C_1=-9C_0$, $C_0+C_1=-8C_0$, e così, osservando che anche in questo caso sarà $\lambda_1=0$ con λ_2 diverso da zero, e avendo riguardo a ciò che diviene ora la solita espressione (37), si può affermare che la formola di Cotes (44) darà un valore approssimato dell'integrale con un errore numericamente inferiore a $\frac{\mu_4(\beta-\alpha)^5}{5184}$; cioè si avrà una approssimazione che ordinariamente sarà più forte di quella che si ha coll'ordinaria formola (43) di Simpson.

Tenendo conto invece della (39) si troverebbe $\frac{\mu_2(\beta-\alpha)^3}{48}$ come limite superiore dell'errore, e questo pure potrebbe talvolta essere più piccolo del precedente; ma allora si avrebbe un limite superiore dell'errore anche più piccolo applicando la (42) pel caso di $n=3$; e si avrebbe un limite superiore perfettamente uguale applicando la (42) pel caso di $n=2$, e quindi nel primo di questi casi converrà meglio valersi della stessa formola (42) invece che della (44).

4.° Sempre con $k=1$ quando si supponga in generale $p=1$ e $p_1=n$ essendo n un numero intero qualunque superiore ad uno, si può osservare che allora le α_r saranno gli $n-1$ punti $\alpha+h_n$, $\alpha+2h_n$, $\alpha+3h_n$,..., $\alpha+(n-1)h_n$ con $h_n=\frac{\beta-\alpha}{n}$, e pel modo tenuto per giungere alla (40) si vede che i coefficienti $\overline{P}_0, \overline{P}_1,\ldots$ si ridurranno a due soli al più distinti fra loro.

Indicandoli quindi con λ e μ, si avrà allora pel valore approssimato del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ la formola seguente

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\left\{\lambda f(\alpha)+\mu\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\}+\lambda f(\beta)\right\},$$

e fra le C_0, C_1, λ e μ dovranno sussistere le relazioni

$$\frac{C_0}{2}+\frac{C_1}{2n}=\lambda(C_0+C_1)\ ,\quad \frac{C_1}{n}=\mu(C_0+C_1)\ ;$$

e uno dei numeri λ e μ, per esempio μ, potrà prendersi a piacere, e l'altro λ dovrà venire determinato in modo che queste due equazioni possano coesistere.

Ora, potendo queste equazioni porsi sotto la forma

$$n(1-2\lambda)\,C_0+(1-2n\lambda)\,C_1=0\ ,\quad n\mu\,C_0+(n\mu-1)\,C_1=0\ ,$$

si vede subito che onde esse possano coesistere bisognerà che sia

$$(1-2\lambda)(n\mu-1)-\mu(1-2n\lambda)=0\quad \text{ovvero}\quad n\mu-1+2\lambda-\mu=0\ ,$$

cioè dovrà essere $\lambda=\dfrac{1-(n-1)\mu}{2}$; quindi, escludendo il caso di $\mu=0$ che ci darebbe $\lambda=\dfrac{1}{2}$ con $C_1=0$ e ci ricondurrebbe alla (24) della pag. 312 per $p=1$, e escludendo anche l'altro caso di $\mu=\dfrac{1}{n}$ che darebbe $\lambda=\dfrac{1}{2n}$ con $C_0=0$ e corrisponderebbe a quello in cui si avesse la (24) stessa con $p=n$, riconducendoci quindi alla formola (42), si vede ora che si potrà scrivere

$$(45)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)\left\{\frac{1-(n-1)\mu}{2}f(\alpha)+\mu\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-(n-1)\mu}{2}f(\beta)\right\}$$

con $C_1=-\dfrac{n\mu}{n\mu-1}C_0$, $C_1+C_0=-\dfrac{1}{n\mu-1}C_0$, e con μ diverso da $\dfrac{1}{n}$ ma del resto qualsiasi; talchè osservando che per le due prime delle formole (3) si avrà $\lambda_1=\dfrac{\mu(n^2-1)-n}{n(n\mu-1)}C_0$, $\lambda_2=\dfrac{\mu(n^4-1)-n^3}{n^3(n\mu-1)}C_0$, si vede che sarà anche $\lambda_1=0$ quando sia $\mu=\dfrac{n}{n^2-1}$, e allora non potrà essere $\lambda_2=0$.

Ora per giudicare dell'errore che si commetterà valendosi della (45) pel calcolo approssimato degli integrali si osservi che, avendosi $C_1=-\dfrac{n\mu}{n\mu-1}C_0$ e potendo per semplicità supporre senz'altro $C_0=1$, nelle formole (37) e (39) potremo prendere $C'_1=\dfrac{n\mu}{n\mu-1}$ quando $n\mu>1$, $C'_1=\dfrac{n\mu}{1-n\mu}$ quando $\mu>0$

e $n\mu<1$, e $C'_1=\dfrac{n\mu'}{1+n\mu'}$ quando $\mu=-\mu'$ con $\mu'>0$, escludendo come abbiamo detto i casi limiti di $\mu=0$ e $\mu=\dfrac{1}{n}$.

E così valendosi della (39) si vede che un limite superiore dell'errore che si farebbe calcolando un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ colla formola (45) sarebbe

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu_2}{12n}\Big(\mu+n(n\mu-1)\Big)\,(\beta-\alpha)^3 & \text{quando}\quad n\mu>1,\\[2ex] \dfrac{\mu_2}{12n}\Big(\mu+n(1-n\mu)\Big)(\beta-\alpha)^3 & \text{quando}\quad n\mu<1\quad \text{con}\quad \mu>0,\ \text{e}\\[2ex] \dfrac{\mu_2}{12n}\Big(\mu'+n+n^2\mu'\Big)\quad(\beta-\alpha)_3 & \text{quando}\quad \mu=-\mu'\quad\text{con}\quad \mu'>0\,. \end{cases}$$

essendo sempre al solito μ_2 il limite superiore dei valori assoluti della derivata seconda di $f(x)$ pei valori di x da α a β.

Nel caso particolare poi in cui sia $\mu=\dfrac{n}{n^2-1}$, nel qual caso si ha $\lambda_1=0$ e $n\mu>1$, la formola (45) si muta subito nell'altra

$$(47)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{2(n+1)}\left\{f(\alpha)+\frac{2n}{n-1}\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_{n-1})\}+f(\beta)\right\},$$

e allora dalla prima delle (46) si ha per un limite superiore dell'errore $\dfrac{\mu_2}{6(n^2-1)}(\beta-\alpha)^3$; e poichè in questo caso, essendo $\lambda_1=0$, può applicarsi anche la (37), si avrà anche l'altro limite superiore dell'errore $\dfrac{\mu_4(n^2+1)}{720\,n^2(n^2-1)}(\beta-\alpha)^5$ essendo μ_4 il limite superiore dei valori assoluti della derivata quarta di $f(x)$ per x compreso fra α e β.

Si deve però notare che i limiti superiori (46) degli errori risultanti dall'applicazione della formola (45) corrispondentemente ai varii casi sono tutti maggiori di quelli che si hanno quando si applica la (42) per gli stessi valori di n, e quindi in generale non converrà valersi della detta formola (45) pel calcolo approssimato degli integrali definiti e dovrà preferirsi la (42); ma quando per essere $\mu=\dfrac{n}{n^2-1}$ la (45) si muti nella (47) e si applichi questa, allora se le derivate quarte di $f(x)$ per x fra α e β non saranno molto grandi in confronto alle derivate seconde, e l'intervallo d'integrazione sarà abbastanza piccolo, il numero $\frac{\mu_4(n^2+1)}{720\,n^2(n^2-1)}(\beta-\alpha)^5$ che in tal caso potrà prendersi per limite superiore dell'errore risulterà molto minore di quello corrispondente alla (42), e quindi l'applicazione della (47) potrà tornare utile.

Nel caso di $n=2$ e $n=3$ la (47) si riduce naturalmente alle (43) e (44). Per $n=4$, $n=5$,... essa si riduce alle altre

$$(48)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{30}\Big\{3f(\alpha)+8\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)\}+3f(\beta)\Big\}, \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{24}\Big\{2f(\alpha)+5\{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+f(\alpha_3)+f(\alpha_4)\}+2f(\beta)\Big\}, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{cases}$$

essendo nella prima $\alpha_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}$, $\alpha_2=\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{4}$, $\alpha_3=\alpha+3\frac{\beta-\alpha}{4}$, nella seconda $\alpha_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{5}$, $\alpha_2=\alpha+2\frac{\beta-\alpha}{5}$,...

5.° E quando supponendo $k=2$, si prendano $p=1$, $p_1=m$, $p_2=2m$, con che i punti α_r saranno i $2m-1$ punti $\alpha+\frac{h}{2m}, \alpha+2\frac{h}{2m},\dots,\alpha+(2m-1)\frac{h}{2m}$, allora se si richiederà che sia $\overline{P}_0=\frac{1}{6m}$, $\overline{P}_1=\overline{P}_3=\overline{P}_5=\dots=\overline{P}_{2m-1}=\frac{4}{6m}$, $\overline{P}_2=\overline{P}_4=\overline{P}_6=\dots=\overline{P}_{2m-2}=\frac{2}{6m}$, ciò che darà luogo alla formola generale di Simpson

$$(49)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{\beta-\alpha}{6m}\Big[f(\alpha)+f(\beta)+2\Big\{f\Big(\alpha+\frac{h}{m}\Big)+f\Big(\alpha+2\frac{h}{m}\Big)+\dots+f\Big(\alpha+(m-1)\frac{h}{m}\Big)\Big\}$$
$$+\,4\Big\{f\Big(\alpha+\frac{h}{2m}\Big)+f\Big(\alpha+3\frac{h}{2m}\Big)+\dots+f\Big(\alpha+(2m-1)\frac{h}{2m}\Big)\Big\}\Big]$$

che come le precedenti si usa pure pel calcolo del valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, si vede che allora le equazioni (41) si ridurranno alle tre seguenti

$$C_0+\frac{C_1}{m}+\frac{C_2}{2m}=\frac{1}{2m}(C_0+C_1+C_2),\quad \frac{C_1}{m}+\frac{C_2}{2m}=\frac{1}{3m}(C_0+C_1+C_2),\quad \frac{C_2}{2m}=\frac{2}{3m}(C_0+C_1+C_2)$$

le quali ci daranno $C_0=0$, $C_2=-4C_1$, $C_0+C_1+C_2=-3C_1$, per modo che, avuto riguardo ancora alla circostanza che anche in questo caso si ha $\lambda_1=0$ con λ_2 diverso da zero, e tenuto conto al solito della (37), si potrà dire che la (49) darà un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore che sarà numericamente inferiore a $\frac{\mu_4(\beta-\alpha)^5}{1728\,m^4}$, e quindi, col prendere per m un numero intero abbastanza grande, potrà rendersi piccolo a piacere.

Qui pure tenendo conto della (39) si troverebbe un altro limite superiore dell'errore $\frac{\mu_2(\beta-\alpha)^3}{18\,m^2}$ che potrebbe talvolta essere minore del precedente.

È poi da aggiungere che quando, invece di prendere per valori approssimati del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ quelli che si hanno dai secondi membri delle formole precedenti (43), (44), (47), (48) e (49), si prendano le espressioni che si ottengono da questi coll'aggiungervi il valore del terzo termine $\frac{\lambda_2}{C_0+C_1+C_2+\dots+C_k}\frac{B_2(\beta-\alpha)^4}{\pi(4)}\{f'''(\beta)-f'''(\alpha)\}$ della formola generale (36) corrispondente ai varii casi ai quali le stesse formole si riferiscono (non parlandosi del secondo termine della stessa formola (36) che abbiamo visto essere zero negli stessi casi), allora il limite superiore del valore numerico corrispondente si determinerà ancora per mezzo della espressione (37) facendovi $n=3$, e ponendovi per le costanti C_0 e C_1, o C_0, C_1 e C_2 e pei numeri p e p_1, o p, p_1 e p_2 i valori corrispondenti trovati pei singoli casi.

Similmente poi quando si prendessero per k e per $p, p_1, p_2,\dots, p_k$ altri valori, come ad es. si prendesse $k=3$ con $p=1$, $p_1=m$, $p_2=2m$, $p_3=3m$, fissando poi opportunamente le corrispondenti $\overline{P}_0, \overline{P}_1,\dots$, potrebbero aversi altre formole, delle quali alcune sono anche assai notevoli.

221. — Per dare un'altra applicazione interessante della formola (24) della pag. 312, prendiamo a considerare il caso particolare in cui $\alpha=0$, $h=1$ e $f(x)=x^r$, essendo r un numero intero e positivo.

Allora se r è dispari, preso $2n=r+1$ sarà $f^{(2n)}(x)=0$ qualunque sia x, e la formola (24) della pag. 312 darà subito luogo all'altra

$$(50)\quad \frac{p^{r+1}}{r+1}=1^r+2^r+3^r+\dots+p^r-\frac{p^r}{2}-\frac{B_1 r}{\pi(2)}p^{r-1}+\frac{B_2 r(r-1)(r-2)}{\pi(4)}p^{r-3}-\dots+$$
$$+(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{B_{\frac{r-1}{2}}\,r(r-1)(r-2)\dots4.3}{\pi(r-1)}p^2,$$

ovvero

$$(51)\quad 1^r+2^r+3^r+\ldots+(p-1)^r=\frac{p^{r+1}}{r+1}-\frac{p^r}{2}+\frac{B_1 r}{\pi(2)}p^{r-1}-\frac{B_2 r(r-1)(r-2)}{\pi(4)}p^{r-3}+\ldots+$$

$$+(-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{B_{\frac{r-1}{2}}\, r(r-1)(r-2)\ldots 4.3}{\pi(r-1)}p^2;$$

e se r è pari prendendo $2n=r+2$ avremo la formola

$$(52)\quad 1^r+2^r+3^r+\ldots+(p-1)^r=\frac{p^{r+1}}{r+1}-\frac{p^r}{2}+\frac{B_1 r}{\pi(2)}p^{r-1}-\frac{B_2 r(r-1)(r-2)}{\pi(4)}p^{r-3}+\ldots+$$

$$+(-1)^{\frac{r}{2}}\frac{B_{\frac{r}{2}}\, r(r-1)(r-2)\ldots 3.2}{\pi(r)}p;$$

e in questo caso di r pari se si prendesse invece $2n=r$ allora, siccome invece di quest'ultima formola se ne troverebbe un'altra che ha tutti i termini comuni all'infuori dell'ultimo che verrebbe sostituito da $\overline{R}_p$, cioè da $\pi(r)p\int_0^1 F(t)\,dt$, pel confronto di queste due formole si ritroverebbe subito la formola (22) del § 204 pel caso di $h=1$.

Queste formole (51) e (52) dànno evidentemente le espressioni delle somme delle potenze positive di grado r dispari e pari respettivamente dei numeri interi $1, 2, 3, \ldots, p-1$ espresse pei numeri di Bernoulli senza che occorra di calcolarle successivamente come richiederebbero le formole (31) o (32); ed è anzi considerando queste somme di potenze che i detti numeri furono introdotti la prima volta dal Bernoulli.

Aggiungiamo che, avendo riguardo alla espressione analitica della funzione che indicammo con $F_p(t)$ al § 204 [pag. 310], si vede che questa funzione, per $h=1$ e $t=n$ con n intero, moltiplicata per $\pi(p-1)$ si riduce appunto alla somma delle potenze di grado $p-1$ dei numeri interi $1, 2, 3 \ldots n-1$.

Caso in cui l'intervallo d'integrazione diviene infinito. Conseguenze varie che se ne deducono.

222. — Della formola (24) della pag. 312 può farsi anche un'altra applicazione che merita di essere segnalata, relativa al caso in cui l'intervallo d'integrazione è infinito o può crescere indefinitamente.

Si riprenda la formola stessa supponendo dapprima che in essa $f(x)$ sia finita e continua da α a ∞ insieme alle sue prime $2n-1$ derivate, e le derivate d'ordine $2n$ se non sono anch'esse finite e continue siano almeno atte alla integrazione, sempre fra α e ∞, e inoltre sì $f(x)$ che le sue derivate fino a quelle dell'ordine $2n-1$ inclusive siano zero per $x=\infty$, e la serie $\sum_0^\infty{}_s f(\alpha+sh)$ sia convergente.

Allora, quando si ammetta anche che $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e ∞ (*), se noi, lasciando ferma h, faremo crescere indefinitamente p e quindi β, giungeremo subito alla formola seguente

$$(1)\quad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx=h\sum_0^\infty{}_s f(\alpha+sh)-h\frac{f(\alpha)}{2}+\frac{B_1 h^2}{\pi(2)}f'(\alpha)-\frac{B_2 h^4}{\pi(4)}f'''(\alpha)+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}f^{(2n-3)}(\alpha)+\lim_{p=\infty}\int_0^h\sum_1^p{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt,$$

e, se anche la serie $\sum_1^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ sarà convergente e convergente in ugual grado pei valori di t fra 0 e h, potremo trasformare questa formola nell'altra

$$(2)\quad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx=h\sum_0^\infty{}_s f(\alpha+sh)-h\frac{f(\alpha)}{2}+\frac{B_1 h^2}{\pi(2)}f'(\alpha)-\frac{B_2 h^4}{\pi(4)}f'''(\alpha)+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}f^{(2n-3)}(\alpha)+\int_0^h\sum_1^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt,$$

e questa formola potrà servire al calcolo approssimato degli integrali $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$

(*) Quando la funzione $f(x)$ sia sempre positiva e non mai crescente da α a ∞, è inutile porre esplicitamente anche la condizione che essa sia atta alla integrazione fra α e ∞, perchè allora pel teorema del § 114 [pag. 167] questa condizione è soddisfatta da sè venendo ad essere sempre conseguenza dell'altra, che pure è stata posta, della convergenza della serie $\sum_0^\infty f(\alpha+sh)$.

Propriamente poi, nel caso generale, invece della integrabilità di $f(x)$ fra α e ∞ basterebbe evidentemente limitarsi a richiedere che l'integrale $\int_\alpha^{\alpha+ph} f(x)\,dx$ avesse un limite determinato e finito per $p=\infty$, sostituendo però allora questo limite all'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ nelle formole (1) e (2) date sopra.

che hanno uno dei limiti infinito, prendendo per loro valore il secondo membro della stessa formola nel quale sia trascurato l'ultimo termine; e questo con un errore che sarà numericamente inferiore a $\frac{\mu B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)}$, essendo μ il limite superiore dei valori assoluti della serie $\sum_1^\infty {}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ pei valori di t fra 0 e h (questi limiti inclusi). E questo errore per ogni valore speciale che si prenda per n potrà rendersi piccolo quanto si vuole prendendo sufficientemente piccolo h, quando il numero μ non cresca oltre ogni limite all'impiccolire di h o tutt'al più cresca soltanto di ordine inferiore a quello di $\frac{1}{h^{2n+1}}$.

223. — È poi da osservare che siccome la formola (2) dà una relazione fra una serie e due integrali, se di questi tre elementi saremo riusciti a calcolarne due, per mezzo di essa potremo subito determinare anche il terzo; e lo stesso potrà dirsi per gli elementi corrispondenti nel caso che si debba applicare la (1).

Così in particolare se sarà conosciuto il valore dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ e quello della serie $\sum_0^\infty {}_s f(\alpha+sh)$, per mezzo delle stesse formole otterremo sempre il valore di infiniti integrali della forma $\int_0^h \sum_1^\infty {}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt$, o almeno il limite per $p=\infty$ degli altri integrali $\int_0^h \sum_1^p {}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F(t)\,dt$ dove n può avere un valore intero e positivo qualsiasi, dovendo questo limite necessariamente esistere al seguito delle ipotesi che abbiamo fatte per $f(x)$ e per la convergenza della serie $\sum_0^\infty {}_s f(\alpha+sh)$.

Così preso ad es. $f(x)=\frac{1}{x^i}$ con $i>1$ e $\alpha=h=1$, avremo la formola

$$(3)\quad \frac{1}{i-1}=\sum_1^\infty \frac{1}{s^i}-\frac{1}{2}+\frac{B_1 i}{\pi(2)}-\frac{B_2 i(i+1)(i+2)}{\pi(4)}+\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1} i(i+1)(i+2)\ldots(i+2n-4)}{\pi(2n-2)}+$$
$$+\,i(i+1)(i+2)\ldots(i+2n-1)\int_0^1 \sum_1^\infty \frac{1}{(s+1-t)^{i+2n}}\,F_{2n}(t)\,dt.$$

che darà il valore degli integrali $\int_0^1 \sum_1^\infty \frac{1}{(s+1-t)^{i+2n}}\,F_{2n}(t)\,dt$.

E prendendo $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ con $\alpha=0$ e $h=1$, e ricordando che $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$, si troverà la formola

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} s}{s}+\lim_{p=\infty}\int_0^1 \sum_1^p\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{(2n)}_{x=s-t} F_{2n}(t)\,dt,$$

giacchè per essere $\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{\pi(3)}+\frac{x^4}{\pi(5)}-\ldots$ le derivate di ordine dispari di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ sono tutte zero per $x=0$.

E siccome per quanto si vide alla pag. XCIV della Introduzione al *Calcolo differenziale* si ha la formola $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}=\frac{\varphi}{2}$ per tutti i valori di φ da $-\pi$ a π (gli estremi $\pm\pi$ escl.) e da questa per $\varphi=1-\pi$ si deduce che $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} n}{n}=\frac{\pi-1}{2}$, la formola precedente si trasformerà nell'altra

$$(4)\qquad \lim_{p=\infty}\int_0^1 \sum_1^p\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{(2n)}_{x=s-t} F_{2n}(t)\,dt=0.$$

224. — Partiamo ancora dalla formola (2), conservando le ipotesi che per essa si fecero su $f(x)$ e sulla convergenza in egual grado della serie $\sum_1^\infty f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ pei valori di t fra 0 e h, e applichiamola al caso in cui si diano ad h gli n valori $h, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$; e, analogamente a quanto facemmo al § 212 partendo dalla formola (24) della pag. 312, moltiplichiamo le formole che così si ottengono per le costanti indeterminate $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ e sommiamole.

Si vedrà subito che, volendo determinare queste costanti in modo che nella formola che così si ottiene vengano a mancare i termini che contengono i numeri $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, bisognerà determinarle in modo che soddisfino a un sistema di equazioni come le (8) del § 213 [pag. 319] nelle quali s'intenda che $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ rappresentino ora i quadrati dei numeri $h, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$; quindi indicando con $\psi(z)=0$ una equazione di grado n in z che abbia per coefficiente del primo termine l'unità e abbia per radici questi quadrati $h^2, h_1^2, h_2^2, \ldots, h_{n-1}^2$ e ripetendo i ragionamenti che si fecero per giungere alle formole (9) dello stesso § 213 si vede che potremo prendere le $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ come determinate dalle formole

$$(5)\qquad C_0=\frac{1}{h^2\psi'(h^2)}\,,\quad C_1=\frac{1}{h_1^2\psi'(h_1^2)}\,,\quad C_2=\frac{1}{h_2^2\psi'(h_2^2)}\,,\dots,\ C_{n-1}=\frac{1}{h_{n-1}^2\psi'(h_{n-1}^2)}\,,$$

e per la loro somma $C_0+C_1+C_2+\dots+C_{n-1}$ avremo

$$(6)\qquad C_0+C_1+C_2+\dots+C_{n-1}=-\frac{1}{\psi(0)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(h\,h_1\,h_2\dots h_{n-1})^2}\,.$$

Indicando quindi in generale con S_{h_r} la somma $\left\{\frac{f(\alpha)}{2}+\sum_1^\infty{}_s\,f(\alpha+sh_r)\right\}h_r$, e osservando che se si indica con $\overline{F}_{2n}(t)$ il valore di $F_{2n}(t)$ per $h=1$ si ha

$$\int_0^h\sum_1^\infty{}_s\,f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt=h^{2n+1}\int_0^1\sum_1^\infty{}_s\,f^{(2n)}(\alpha+sh-ht)\,\overline{F}_{2n}(t)\,dt\,,$$

avremo la formola

$$(7)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx=(-1)^{n-1}(hh_1h_2\dots h_{n-1})^2\Big\{C_0S_h+C_1S_{h_1}+C_2S_{h_2}+\dots+C_{n-1}S_{h_{n-1}}+$$
$$+\int_0^1\Big(C_0\textstyle\sum_h+C_1\sum_{h_1}+C_2\sum_{h_2}+\dots+C_{n-1}\sum_{h_{n-1}}\Big)\overline{F}_{2n}(t)\,dt\Big\}$$

indicando in generale con $\sum_{h_r}$ la somma $h_r^{2n+1}\sum_1^\infty{}_s\,f^{(2n)}(\alpha+sh_r-th_r)$.

225. — In particolare quindi supponendo $h=1$, $h_1=2$, $h_2=3$, ..., $h_{n-1}=n$, e ripetendo i calcoli del § 214 [pag. 322 e seg.] applicati ora a $\psi(z)$ avremo l'altra formola

$$(8)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx=2\pi^2(n)\Big\{\frac{S_1}{\pi(n-1)\pi(n+1)}-\frac{S_2}{\pi(n-2)\pi(n+2)}+\frac{S_3}{\pi(n-3)\pi(n+3)}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{S_n}{\pi(0)\pi(2n)}\cdot$$
$$+\int_0^1\Big\{\frac{\sum_1}{\pi(n-1)\pi(n+1)}-\frac{\sum_2}{\pi(n-2)\pi(n+2)}+\frac{\sum_3}{\pi(n-3)\pi(n+3)}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{\sum_n}{\pi(0)\pi(2n)}\Big\}\overline{F}_{2n}(t)\,dt\Big\}\,,$$

essendo ora in generale

$$(9)\qquad S_r=r\left\{\frac{f(\alpha)}{2}+\sum_1^\infty{}_s\,f(\alpha+rs)\right\}\,,\quad \textstyle\sum_r=r^{2n+1}\sum_1^\infty{}_s\,f^{(2n)}(\alpha+rs-rt)\,,$$

e anche queste formole nei casi particolari possono essere utili pel calcolo approssimato degli integrali fra limiti infiniti trascurando al solito l'ultimo termine (cioè l'integrale) del secondo membro delle formole stesse, e possono

anche servire per la effettiva determinazione di speciali integrali, come si riscontra ad esempio prendendo $f(x)=\frac{1}{x^i}$ con $i>1$, o $f(x)=e^{-x}$, ecc.

E l'errore che così si commetterà nel calcolo approssimato degli integrali fra limiti infiniti $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ sarà numericamente inferiore alla espressione

$$(10)\qquad \frac{B_n}{\pi(n-1)\,\pi(n+1)\,\pi(2n)}\left\{1^{2n+1}\nu_1+2^{2n+1}\nu_2+3^{2n+1}\nu_3+\dots+n^{2n+1}\nu_n\right\},$$

essendo in generale ν_r il limite superiore dei valori assoluti della serie $\sum_1^\infty{}_s\,f^{(2n)}\{\alpha+rs-rt\}$ per t compreso fra 0 e 1.

226. — Aggiungiamo che se, tenendo un processo più generale di quello del paragrafo precedente, si applica la formola (2) al caso in cui si diano ad h i k valori $h, h_1, h_2, \dots, h_{k-1}$, essendo k un numero intero qualsiasi, e poi si sommano le formole che così si ottengono dopo di averle moltiplicate per k costanti indeterminate $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ la cui somma non sia zero, allora conservando le notazioni precedenti per S_{h_r} e $\sum_{h_r}$ si giungerà alla formola seguente

$$(11)\ \int_\alpha^\infty f(x)\,dx=\frac{1}{C_0+C_1+C_2+\dots+C_{k-1}}\Big\{(C_0S_h+C_1S_{h_1}+\dots+C_{k-1}S_{k-1})+\overline{\lambda}_1\frac{B_1}{\pi(2)}f'(\alpha)-\overline{\lambda}_2\frac{B_2}{\pi(4)}f'''(\alpha)+$$
$$+\dots+(-1)^n\,\overline{\lambda}_{n-1}\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}f^{(2n-3)}(\alpha)+\int_0^1\Big(C_0\textstyle\sum_h+C_1\sum_{h_1}+\dots+C_{k-1}\sum_{h_{k-1}}\Big)\overline{F}_{2n}(t)\,dt\Big\}$$

essendo ora in generale

$$C_0h^{2r}+C_1h_1^{2r}+C_2h_2^{2r}+\dots+C_{k-1}h_{k-1}^{2r}=\overline{\lambda}_r\,,$$

per $r=1,2,\dots,n-1$; e anche questa formola, comunque si prendano le costanti $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$, sempre però colla condizione che la loro somma non sia zero, potrà servire a dare valori approssimati dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, e per essa potranno farsi considerazioni del tutto simili a quelle che si fecero nel § 218 [pag. 328 e seg.] pel caso dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

i cui limiti erano finiti, e si potrà avere al modo stesso un limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi a un termine qualsiasi nel secondo membro.

Si deve poi osservare che l'esclusione fatta qui e al § 218 [pag. 328 e seg.] del caso di $C_0+C_1+C_2+\dots+C_{k-1}=0$ è necessaria quando le formole che si ottengono devono servire al calcolo dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ o dell'altro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$; ma quando la determinazione di questi integrali non si richieda, le costanti stesse $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ potranno anche prendersi in modo che la loro somma sia zero, fermandosi però allora naturalmente a scrivere le formole alle quali si giunge prima di arrivare alla (11) o alla corrispondente (36) della pag. 219, cioè prima di eseguire la divisione per $C_0+C_1+C_2+\dots+C_{k-1}$.

E allora le formole che si otterranno potranno invece servire alla determinazione dell'integrale che viene a figurare nell'ultimo termine del secondo membro delle formole stesse, e anche a fare certe trasformazioni sulle altre formole, e quindi potranno ancora essere utili.

227. — Gli errori che si commettono nel calcolare gli integrali definiti coi processi precedenti e così i limiti superiori dei valori assoluti degli stessi errori portano per fattore la espressione $\frac{B_n}{\pi(2n)}$; e noi troviamo perciò opportuno di dare una notevole espressione di questo rapporto, dovuta a Eulero, per mezzo delle serie delle inverse delle potenze pari $(2n)^e$ dei numeri naturali.

Per questo occorre trovare due diverse espressioni in serie del rapporto $\frac{x}{e^x-1}$ (*), e per avere intanto la prima di queste serie, prenderemo a considerare la espressione $\frac{1}{x^{2n}-1}$, e ne faremo la scomposizione in frazioni semplici coi soliti processi dell'Algebra, osservando che le radici della equazione binomia $x^{2n}-1=0$ sono le due reali 1 e -1 e le $2n-2$ complesse $e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}$ con $k=1,2,3,\dots,n-1$.

Per la nota formola di quella scomposizione avremo identicamente per x

---

(*) **Nell'Analisi superiore, valendosi della teoria delle funzioni di variabile complessa le espressioni in serie che qui si cercano pel rapporto $\frac{x}{e^x-1}$ si trovano con maggiore facilità, e per tutti i valori reali e complessi di x il cui modulo è inferiore a 2π.**

diverso dalle dette radici di $x^{2n}-1=0$

$$\frac{1}{x^{2n}-1}=\frac{1}{2n}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2n}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2n}\sum_1^{n-1}{}_k\left(\frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}}{x-e^{\frac{k\pi i}{n}}}+\frac{e^{-\frac{k\pi i}{n}}}{x-e^{-\frac{k\pi i}{n}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2n}\sum_1^{n-1}{}_k\frac{2-2x\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1},$$

o anche, osservando che $2-2x\cos\frac{k\pi}{n}=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1-(x^2-1)$,

$$\frac{1}{x^{2n}-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{x^2-1}-\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n}\sum_1^{n-1}\frac{x^2-1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1};$$

e quindi, osservando anche che $x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1=(x-1)^2+4x\,\mathrm{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$, e cambiando x in $1+\frac{x}{2n}$, avremo

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n}-1}=\frac{1}{x+\frac{x^2}{4n}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+2\sum_1^{n-1}{}_k\frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+16n^2\left(1+\frac{x}{2n}\right)\mathrm{sen}^2\frac{k\pi}{2n}}.$$

Si faccia ora crescere n indefinitamente, nel supposto che x sia finito e diverso da zero. Il primo membro di questa formola avrà per limite $\frac{1}{e^x-1}$, e il secondo avrà per limite $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+2\lim_{n=\infty}\sum_1^{n-1}{}_k\frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+16n^2\left(1+\frac{x}{2n}\right)\mathrm{sen}^2\frac{k\pi}{2n}}$;

e converrà perciò studiare il limite della somma che figura nell'ultimo termine cioè il limite per $n=\infty$ di $\sum_1^{n-1}{}_k\frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+4k^2\pi^2\left(1+\frac{x}{2n}\right)\left(\frac{\mathrm{sen}\,k\alpha_n}{k\alpha_n}\right)^2}$, avendo posto per semplicità di scrittura $\alpha_n=\frac{\pi}{2n}$.

Per questo si consideri la serie $\sum_1^\infty{}_s\frac{x}{x^2+4s^2\pi^2}$ che evidentemente è convergente per qualunque valore di x, e i termini di essa per ogni valore finito di k sono i limiti per $n=\infty$ dei termini corrispondenti della somma precedente della quale dobbiamo cercare il limite; sarà facile vedere che questa serie è appunto il limite che cerchiamo.

S'indichi infatti con m un numero, grandissimo ma finito, tale che il resto r_m della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{4s^2\pi^2}$ a partire dall'$(m+1)^0$ termine sia inferiore a $\frac{\sigma}{x}$, essendo σ arbitrariamente piccolo, e intendendo, come già supponemmo, che x sia diverso da zero.

E fissato questo numero m, si supponga che nella somma della quale dobbiamo cercare il limite al crescere indefinito di n, sia già n superiore ad m, e si spezzi la stessa somma nelle due parti

$$\sum_1^m{}_k \frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+4k^2\pi^2\left(1+\frac{x}{2n}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} k\alpha_n}{k\alpha_n}\right)^2} \quad \text{e} \quad \sum_{m+1}^{n-1}{}_k \frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+4k^2\pi^2\left(1+\frac{x}{2n}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} k\alpha_n}{k\alpha_n}\right)^2}.$$

Essendo m grandissimo ma finito, si vedrà subito intanto che la prima di queste parti al crescere indefinito di n tenderà verso la somma $\sum_1^m{}_s \frac{x}{x^2+4s^2\pi^2}$, la quale pel modo con cui è stato scelto m differisce dalla somma della serie $\sum_1^\infty{}_s \frac{x}{x^2+4s^2\pi^2}$ meno di σ.

Osservando poi che $k\alpha_n$ è sempre inferiore a $\frac{\pi}{2}$ perchè k non supera $n-1$, si vede che nella seconda parte $\sum_{m+1}^{n-1}{}_k$ il rapporto $\frac{\operatorname{sen} k\alpha_n}{k\alpha_n}$ sarà sempre superiore a $\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ o a $\frac{2}{\pi}$, e quindi la stessa seconda parte sarà inferiore a $\sum_{m+1}^{n-1}{}_k \frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+16k^2}$, e anche a $\sum_{m+1}^{\infty}{}_k \frac{x+\frac{x^2}{4n}}{x^2+16k^2}$ che sarà pure piccola quanto si vuole a causa del valore scelto per m; quindi evidentemente il limite cercato sarà appunto la serie $\sum_1^\infty{}_s \frac{x}{x^2+4s^2\pi^2}$, e si avrà la formola

(12) $$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+2\sum_1^\infty \frac{x^2}{x^2+4s^2\pi^2}$$

chè è la prima delle espressioni cercate per $\frac{x}{e^x-1}$ e che evidentemente vale anche pel valore $x=0$ che sopra escludemmo.

228. — Dimostrata questa formola, sarà facile di trovare l'altra che ci occorre, cioè lo sviluppo di $\frac{x}{e^x-1}$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di x quando x è reale e compresa fra -2π e 2π ($\pm 2\pi$ escl.).

Si osservi perciò che si ha $\frac{x^2}{x^2+4s^2\pi^2}=\frac{x^2}{4s^2\pi^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^2}$, e quindi se $|x|<2\pi$ si avrà sempre per ogni valore di s

$$\frac{x^2}{x^2+4s^2\pi^2}=\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^2-\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^4+\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^6-\dots,$$

e quindi sostituendo nella precedente avremo la formola

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+2\lim_{m=\infty}\sum_1^m{}_s\left\{\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^2-\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^4+\left(\frac{x}{2s\pi}\right)^6-\dots\right\}=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+2\lim_{m=\infty}\left\{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{m^2}\right)-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{m^4}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x}{2\pi}\right)^6\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\dots+\frac{1}{m^6}\right)-\dots\right\};$$

e ora, osservando che la serie fra parentesi considerata pei valori sempre crescenti di m è una serie convergente in ugual grado rispetto ad m — perchè la serie, formata con numeri maggiori dei valori assoluti dei limiti superiori dei suoi termini, $\sum_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2p}S_{2p}$ per $\left|\frac{x}{2\pi}\right|<1$ è convergente —, per un teorema dato al § 104 della *Introduzione al Calcolo differenziale* [pag. xcv], si vede subito che il limite della stessa serie sarà la serie dei limiti, e avremo quindi per la formola cercata

(13) $$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+2\left\{S_2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2-S_4\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4+S_6\left(\frac{x}{2\pi}\right)^6-\dots\right\},$$

avendo posto in generale

(14) $$S_p=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots$$

229. — Trovato così lo sviluppo di $\frac{x}{e^x-1}$ per potenze intere e positive di x per x compreso fra -2π e 2π, questo per quanto dicemmo nel *Calcolo differenziale* al § 81 [pag. 110] non sarà altro che lo sviluppo di Maclaurin

corrispondente alla stessa funzione $\frac{x}{e^x-1}$, e quindi i coefficienti delle varie potenze x^k di x non saranno altro che le derivate di ordine k di questa funzione nel punto $x=0$ divise per $\pi(k)$.

D'altra parte se si pone $u=\frac{x}{e^x-1}$ ovvero $x=u\ (e^x-1)$, valendosi della nota formola di Leibnitz per le derivate dei prodotti si trova che quando $n>1$ si ha la formola seguente

$$0=u^{(n)}(e^x-1)+\{n_1u^{(n-1)}+n_2u^{(n-2)}+\ldots+n_nu\}e^x,$$

dalla quale risulta che per $x=0$ le derivate $u_0^{(k)}$ di u sono legate fra loro dalla relazione

$$n_1u_0^{(n-1)}+n_2u_0^{(n-2)}+\ldots+n_nu_0=0\,;$$

nella quale $u_0=1$; e ora scrivendo le formole che si hanno successivamente da questa col farvi $n=2,3,4,\ldots$ si trova che esse si riducono immediatamente alle formole (6) della pag. 305, e ci mostrano perciò che per $x=0$ la derivata prima di u o di $\frac{x}{e^x-1}$ è $-\frac{1}{2}$, e tutte le altre derivate di ordine dispari sono zero, mentre quelle di ordine pari quando si cambino alternativamente di segno sono precisamente i numeri di Bernoulli $B_1, B_2, B_3 \ldots$; e perciò il coefficiente di x^{2n} nello sviluppo precedente di $\frac{x}{e^x-1}$ è precisamente $(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}$, e quindi insieme alla formola

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}x^{2n}, \tag{15}$$

che può prendersi per lo sviluppo in serie per potenze intere della x per la funzione $\frac{x}{e^x-1}$ quando x è reale e compreso fra -2π e $2\pi\,(\pm 2\pi$ escl.), a causa della (13) si ha anche la formola generale seguente

$$\frac{B_n}{\pi(2n)}=\frac{2S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}, \tag{16}$$

che è la formola cercata, dovuta, come già dicemmo, a Eulero (*).

(*) Le formole (13) e (15) che qui abbiamo trovato pei valori reali di x compresi fra -2π e $2\pi\,(\pm 2\pi$ escl.) valgono anche pei valori complessi di x il cui modulo è inferiore a 2π; e per questo mutandovi x in $2ix$ ci dànno anche lo sviluppo di $\frac{2ix}{e^{2ix}-1}$ e quindi di $ix+\frac{2ix}{e^{2ix}-1}$ o di $ix\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$, cioè di $ix\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$, o di $x\cot x$ pei valori di x il cui modulo è inferiore a π.

E così per queste formole e per la (16) si può dire che i numeri di Bernoulli in seguito agli studii di Eulero hanno una particolare importanza per le somme delle serie delle potenze inverse pari dei numeri naturali, e per gli sviluppi in serie di $\cot x$ e di altre linee trigonometriche e di certe funzioni esponenziali; come in seguito agli studii dello stesso Eulero e di Maclaurin gli stessi numeri tengono una parte importante nelle formole di questo capitolo, che abbiamo detto appunto formole di Maclaurin-Eulero, che servono al calcolo approssimato degli integrali definiti, e in quelle che si deducono da esse.

Inoltre per gli studii di Jacopo Bernoulli i detti numeri hanno importanza anche per le somme delle potenze intere e positive dei numeri naturali; e anzi fu studiando queste somme che Egli li introdusse nell'analisi, come già dicemmo al § 221 nella pag. 338.

E si può notare che questa formola, mentre dà una espressione notevole dei numeri di Bernoulli B_n per mezzo delle somme S_{2n} delle serie $\sum_1^\infty \frac{1}{s^{2n}}$, ci mostra anche che *i numeri stessi sono tutti positivi*, come del resto avremmo potuto dedurre anche dalle formole della pag. 306 colle quali li definimmo; e quando nella formola stessa (16) invece delle S_{2n} vi si considerino come conosciuti questi numeri B_n, — che vengono dati come numeri *razionali* dalle formole (9) della pag. 306 e da quelle dei §§ 216 e 217 [pag. 325 seg.] mentre la (16) ce li dà espressi per le quantità π e S_{2n} —, essa serve a dare i valori delle stesse somme S_{2n}, poichè ci dà $S_{2n}=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_n}{\pi(2n)}$ e ci mostra che le S_{2n} sono tutte incommensurabili.

Così con essa facendovi $n=1,2,3,\ldots$ si trovano le formole seguenti

$$S_2=\frac{\pi^2}{6}\ ,\ S_4=\frac{\pi^4}{90}\ ,\ S_6=\frac{\pi^6}{945}\,,\ldots$$

230. — Considerando ancora gli integrali che rappresentano gli errori che si commettono nel calcolo approssimato degli integrali definiti quando questo viene fatto coi processi precedenti, e osservando che in essi figura sempre la funzione $F_{2n}(t)$ che definimmo e studiammo anche un poco ai §§ 204 e 205 [pag. 310 e seg.], noi troviamo utile di dimostrare per la stessa funzione un'altra particolarità notevole che in certi casi ci condurrà anche ad un altro limite superiore dei detti errori.

Questa proprietà risulterà subito dalla formola $F_{2n}(h-t)=F_{2n}(t)$ che si verifica immediatamente per la $F_2(t)$ perchè $F_2(t)=\frac{1}{2}t(t-h)$, e si dimostra poi in generale col metodo d'induzione partendo dalla seconda delle formole (21) della pag. 310, cioè dalla formola seguente

$$F''_{2n}(t) = F_{2n-2}(t) + (-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}.$$

Ammesso infatti che la proprietà contenuta nella formola $F_{2n}(h-t) = F_{2n}(t)$ sia stata dimostrata per $F_{2n-2}(t)$, siccome allora per la formola precedente si vede subito che si ha $F''_{2n}(h-t) = F''_{2n}(t)$ (*) e quindi anche $\frac{d^2 F_{2n}(h-t)}{dt^2} = \frac{d^2 F_{2n}(t)}{dt^2}$, se ne deduce che dovrà essere $F_{2n}(h-t) = F_{2n}(t) + k_0 + k_1 t$, essendo k_0 e k_1 due costanti; e poichè come si vide nel ricordato § 204 la funzione $F_{2n}(t)$ si annulla per $t=0$ e per $t=h$ si trova subito che k_0 e k_1 devono essere zero, e si ha perciò anche $F_{2n}(h-t) = F_{2n}(t)$, ciò che permette di concludere che questa formola sussiste sempre.

Dimostrata questa formola, basta osservare che da essa si ha subito l'altra $F'_{2n}(h-t) = -F'_{2n}(t)$ (**) per inferirne che $F'_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) = -F'_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$, e $F'_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) = 0$; quindi, poichè per quanto dicemmo ai ricordati §§ 204 e 205 si riscontra subito che la $F'_{2n}(t)$ che già si annulla come $F_{2n}(t)$ per $t=0$ e $t=h$ non può annullarsi che in un solo altro punto in questo intervallo $(0, h)$, si deduce intanto che questo avverrà sempre e soltanto per $t = \frac{h}{2}$, e perciò $F\left(\frac{h}{2}\right)$ *sarà il massimo valore assoluto di* $F_{2n}(t)$ *per* t *compreso fra* 0 *e* h.

231. — È questa la particolarità relativa a $F_{2n}(t)$ che volevamo dimostrare; e ora tenendo conto di questa sarà facile vedere che in molti casi (che sono del resto quelli più comuni) i limiti superiori degli errori che si hanno nel calcolo approssimato degli integrali definiti — quando questo calcolo si fa per mezzo delle formole di Maclaurin-Eulero e delle altre che si deducono da queste —

(*) A scanso di equivoci diciamo espressamente che con $F'(h-t)$ e $F''(h-t)$ intendiamo le derivate $F'(t)$ e $F''(t)$ nelle quali dopo la derivazione sia cambiato t in $h-t$.

(**) Avuto ora riguardo alla prima delle (21) della pag. 310 si vede di qui che insieme alla formola $F_{2n}(h-t) = F_{2n}(t)$ si ha l'altra $F_{2n-1}(h-t) = -F_{2n-1}(t)$, e quindi in generale si ha $F_p(h-t) = (-1)^p F_p(t)$.

E mentre $F_{2n}(t)$ si annulla soltanto per $t=0$ e $t=h$, e fra 0 e h è sempre dello stesso segno, $F_{2n-1}(t)$ oltre ad annullarsi essa pure per $t=0$ e per $t=h$ si annulla anche per $t=\frac{h}{2}$, e fra 0 e $\frac{h}{2}$ ha sempre uno stesso segno, e fra $\frac{h}{2}$ e h ha il segno opposto.

possono porsi anche sotto forme diverse, e talvolta più comode di quelle che loro abbiamo dato, e per essi si ottengono allora anche altri risultati molto interessanti.

Osservando infatti che gli stessi errori sono sempre della forma $\int_0^h \varphi(\alpha, h, t) F_{2n}(t)\, dt$ dove $\varphi(\alpha, h, t)$ è una funzione che dipende dalle derivate d'ordine $2n$ di $f(x)$, perocchè essa è ad es. la funzione $f^{(2n)}(\alpha+h-t)$ nel caso della formola (16) del § 201 [pag. 308], ed è l'altra $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ nel caso della (24) del § 208 [pag. 312] ecc., si vede subito che nei casi nei quali la funzione stessa $\varphi(\alpha, h, t)$ è sempre diversa da zero e dello stesso segno pei valori di t fra 0 e h, gli errori suddetti potranno porsi sempre sotto la forma $\theta_n F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \int_0^h \varphi(\alpha, h, t)\, dt$, essendo θ_n un numero *positivo* compreso fra 0 e 1 e diverso da zero e da 1.

E così un limite superiore del valore assoluto degli errori medesimi sarà il valore assoluto della espressione $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \int_0^h \varphi(\alpha, h, t)\, dt$, la quale nel caso delle formole ricordate sopra (cioè della (16) della pag. 308 e della (24) della pag. 312) si riduce all'altra $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \{ f^{(2n-1)}(\beta) - f^{(2n-1)}(\alpha) \}$, supposto ora naturalmente di essere nei casi nei quali la derivata $f^{(2n)}(\alpha+h-t)$ o la somma $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ per t compreso fra 0 e h sono sempre dello stesso segno; il che porterà necessariamente che la differenza $f^{(2n-1)}(\beta) - f^{(2n-1)}(\alpha)$ che corrisponde all'integrale $\int_0^h \varphi(\alpha, h, t)\, dt$, — e quindi anche il termine che seguirebbe quello a cui ci si arresta nella nostra formola —, sia differente da zero; e porterà anche che il segno della stessa differenza $f^{(2n-1)}(\beta) - f^{(2n-1)}(\alpha)$ sia quello della derivata $f^{(2n)}(\alpha+h-t)$ o della somma $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$, ecc.

232. — I valori di $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ che qui compariscono possono aversi dalla stessa espressione che definisce $F_{2n}(t)$, cioè si hanno pel caso di $n=1$ dalla formola $F_2(t) = \frac{1}{2} t(t-h)$, e pel caso di $n>1$ dalla (20) del § 204 [pag. 310]

cioè dalla seguente

$$F_{2n}(t)=\frac{t^{2n}}{\pi(2n)}-\frac{1}{2}\frac{t^{2n-1}h}{\pi(2n-1)}+\frac{B_1}{\pi(2)}\frac{t^{2n-2}h^2}{\pi(2n-2)}-\frac{B_2}{\pi(4)}\frac{t^{2n-4}h^4}{\pi(2n-4)}+\dots$$
$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\frac{t^2h^{2n-2}}{\pi(2)},$$

facendovi $t=\frac{h}{2}$; e così servendosi della espressione di $F_2(t)$, e di quelle di $F_4(t), F_6(t), F_8(t),\dots$ che si ottengono da $F_{2n}(t)$ facendovi $n=2, n=3, n=4,\dots$, si trova subito che

$$F_2\left(\frac{h}{2}\right)=-\frac{h^2}{8},\quad F_4\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{h^4}{384},\quad F_6\left(\frac{h}{2}\right)=-\frac{h^6}{15360},\quad F_8\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{17h^8}{10321920},\dots$$

Del resto poi è facile vedere che quando $n>1$ si ha sempre la formola seguente

$$(17)\qquad F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)=(-1)^n\frac{B_n(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}\pi(2n)}h^{2n}=(-1)^n2(1-2^{-2n})\frac{B_nh^{2n}}{\pi(2n)},$$

mediante la quale avendo i valori dei numeri Bernoulliani si hanno subito quelli di $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ per $n>1$.

Per trovare questa formola si osservi che avendosi la formola (15) che dà lo sviluppo di $\frac{x}{e^x-1}$ cioè

$$(18)\ \frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{B_1}{\pi(2)}x^2-\frac{B_2}{\pi(4)}x^4+\frac{B_3}{\pi(6)}x^6\dots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}x^{2n}+\dots$$

per tutti i valori di x fra -2π e 2π, se per semplicità nella serie del secondo membro si considerano come introdotti coi coefficienti zero anche i termini di grado dispari dopo il primo, e poi colla regola ordinaria di Cauchy si moltiplica questa serie per quella che corrisponde allo sviluppo di $\frac{e^{\frac{t}{h}x}-1}{x}$, cioè per la serie

$$\frac{t}{h\pi(1)}+\frac{t^2x}{h^2\pi(2)}+\frac{t^3x^2}{h^3\pi(3)}+\frac{t^4x^3}{h^4\pi(4)}+\dots+\frac{t^{2n}x^{2n-1}}{h^{2n}\pi(2n)}+\dots,$$

si vede subito che nel prodotto che così otterremo, che verrà ad essere lo

sviluppo di $\frac{e^{\frac{t}{h}}-1}{e^x-1}$ per potenze intere e positive di x fra -2π e 2π, il coefficiente di x^{2n-1} sarà precisamente $\frac{1}{h^{2n}}F_{2n}(t)$; dal che risulta in particolare che se si vuole avere $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ basterà cercare con un processo qualsiasi lo sviluppo in serie ordinata per le potenze intere e positive di x per la espressione $\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^x-1}$, e poi trovato il coefficiente di x^{2n-1} in questa serie moltiplicarlo per h^{2n} (V. *Calc. differ.* § 81 [pag. 110]).

Ciò posto si osservi che si ha

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^x-1}=\frac{e^{\frac{1}{2}x}+1-2}{\left(e^{\frac{1}{2}x}-1\right)\left(e^{\frac{1}{2}x}+1\right)}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}-1}-\frac{2}{e^x-1};$$

e quindi valendosi della formola (18), con supporre pel momento che x, oltre ad essere compreso fra -2π e 2π, sia anche diverso da zero, si potrà scrivere

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^x-1}=\frac{2}{x}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{x}{2}+\frac{B_1}{\pi(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{B_2}{\pi(4)}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{B_3}{\pi(6)}\left(\frac{x}{2}\right)^6-\dots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\dots\right\}-$$
$$-\frac{2}{x}\left\{1-\frac{1}{2}x+\frac{B_1}{\pi(2)}x^2-\frac{B_2}{\pi(4)}x^4+\frac{B_3}{\pi(6)}x^6-\dots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}x^{2n}+\dots\right\},$$

ovvero

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{e^x-1}=\frac{B_1}{\pi(2)}\left(\frac{1}{2}-2\right)x-\frac{B_2}{\pi(4)}\left(\frac{1}{2^3}-2\right)x^3+\frac{B_3}{\pi(6)}\left(\frac{1}{2^5}-2\right)x^5-\dots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-2\right)x^{2n-1}+\dots;$$

e questa formola varrà ancora pei valori di x fra -2π e 2π incluso ora, a causa della continuità, anche il valore zero di x; quindi, poichè nella serie del secondo membro il coefficiente di x^{2n-1} è $(-1)^{n-1}\frac{B_n}{\pi(2n)}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-2\right)$ o $(-1)^n\frac{B_n(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}\pi(2n)}$, si conclude come volevamo che quando sia $n>1$ si ha

$$F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)=(-1)^n\frac{B_n(2^{2n}-1)}{2^{2n-1}\pi(2n)}h^{2n}=(-1)^n2(1-2^{-2n})\frac{B_nh^{2n}}{\pi(2n)}.$$

E tenendo conto della formola (16) si potrà anche scrivere

$$(19)\qquad F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)=(-1)^n\frac{(2^{2n}-1)\,S_{2n}}{2^{4n-2}\,\pi^{2n}}\,h^{2n}=(-1)^n\,\frac{4\,(1-2^{-2n})\,S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}\,h^{2n},$$

essendo ancora

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots,$$

donde si vede che $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ andrà diminuendo rapidissimamente col crescere di n quando h è alquanto inferiore a 2π e in particolare quando $h\leq 1$.

233. — Questo risultato mette in evidenza una particolarità notevole delle solite formole di Maclaurin-Eulero pel caso in cui esse vengano applicate a funzioni $f(x)$ per le quali le derivate $f^{(2n)}(x)$ di un certo ordine pari $2n$ sono tali che esse stesse considerate pei valori di x fra α e β, o più generalmente le somme $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ considerate pei valori di t fra 0 e h sono sempre dello stesso segno.

Tale particolarità si riferisce all'errore E_n che si commette nel calcolo dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ quando nella formola corrispondente ci si arresta al termine u_n che contiene B_n o le derivate dell'ordine $2n-1$ precedente a quello pel quale sono soddisfatte le suddette condizioni, perocchè si trova che *in questi casi tale errore E_n è sempre numericamente inferiore al termine u_n a cui ci si arresta* (il quale, come già osservammo sopra alla fine del § 231, per le condizioni poste viene ad essere necessariamente diverso da zero).

Sotto queste ipotesi infatti, quando nella formola che si considera ci si arrestasse invece al termine precedente u_{n-1} (cioè a quello che contiene B_{n-1}) l'errore che si commetterebbe verrebbe ad essere quello considerato nei due paragrafi che precedono, e per quanto risulta da ciò che abbiamo mostrato nei paragrafi stessi sarebbe *dello stesso segno* del termine seguente $u_n=(-1)^n\frac{B_n h^{2n}}{\pi(2n)}\{f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)\}$ e sarebbe numericamente inferiore *al doppio* del suo valore assoluto; e questo basta evidentemente a provare il nostro asserto.

S'intende poi che questa particolarità varrà per qualunque termine cui ci si arresti nelle stesse formole, quando le condizioni poste sopra per le derivate d'ordine $2n$ si verifichino per tutte le derivate d'ordine pari fino a quelle che seguono le derivate d'ordine dispari che figurano nell'ultimo termine che si vuole considerare.

234. — Se poi si osserva che per ciò che precede l'errore E_{n-1} che si commette fermandoci nelle nostre formole al termine u_{n-1} che contiene B_{n-1} può scriversi sotto la forma

$$(20)\quad E_{n-1}=(-1)^n\,2\theta_n\,(1-2^{-2n})\frac{B_n h^{2n}}{\pi(2n)}\{f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)\}=2\theta_n\,(1-2^{-2n})\,u_n,$$

dove θ_n è un numero positivo compreso fra 0 e 1, si comprende subito che quando ci si fermi invece al termine seguente u_n l'errore corrispondente E_n potrà porsi sotto la forma

$$(21)\quad E_n=(-1)^n\{2\theta_n\,(1-2^{-2n})-1\}\frac{B_n h^{2n}}{\pi(2n)}\{f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)\}=\{2\theta_n\,(1-2^{-2n})-1\}\,u_n$$

D'altra parte se anche per le derivate $f^{(2n+2)}(x)$ dell'ordine $2n+2$ si verificano le stesse particolarità che si ammisero sopra per quelle dell'ordine $2n$, il detto errore E_n che si commette fermandosi al termine stesso u_n risulterà anche dalla (20) col cambiarvi n in $n+1$ e quindi si presenterà anche sotto la forma

$$(22)\qquad E_n=(-1)^{n+1}\,2\theta_{n+1}\,(1-2^{-(2n+2)})\frac{B_{n+1}\,h^{2n+2}}{\pi(2n+2)}\{f^{(2n+1)}(\beta)-f^{(2n+1)}(\alpha)\},$$

essendo θ_{n+1} un'altra quantità positiva compresa fra 0 e 1, e questo valore di E_n dovrà combinare col precedente (21); quindi nel caso speciale in cui la differenza $f^{(2n+1)}(\beta)-f^{(2n+1)}(\alpha)$, che sarà come l'altra $f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)$ diversa da zero, sia dello stesso segno di questa, evidentemente la quantità $2\theta_n(1-2^{-2n})-1$ dovrà essere negativa.

Ne segue che la quantità $2\theta_n\,(1-2^{-2n})$ dovrà essere un numero positivo $\bar\theta_n$ compreso fra 0 e 1, e si avrà quindi per la (20) $E_{n-1}=\bar\theta_n\,u_n$, ciò che ci permette di dire che *in questo caso* in cui le derivate $f^{(2n)}(x)$ e $f^{(2n+2)}(x)$ nel passare di x da α a β, o più generalmente le somme $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ e $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n+2)}(\alpha+sh-t)$ nel passare di t da 0 a h non mutano mai di segno, e le differenze $f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)$ e $f^{(2n+1)}(\beta)-f^{(2n+1)}(\alpha)$ (che sono necessariamente diverse da zero) hanno lo stesso segno — *ciò che corrisponde a dire che i termini u_{n-1} e u_n sono di segno contrario* —, *l'errore E_{n-1} che si commette fermandosi al termine u_{n-1} è dello stesso segno del termine seguente u_n ed è numericamente inferiore a questo termine.*

E inoltre, in questo caso, poichè la quantità negativa $2\theta_n\,(1-2^{-2n})-1$ è superiore a -1 perchè θ_n è superiore a zero, si può anche affermare per la (21) che l'errore E_n *che si commetterà fermandosi al termine u_n sarà di segno contrario a questo termine,* oltre ad essere in valore assoluto inferiore a questo, come già trovammo anche sopra.

235. — Se poi le due differenze $f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)$ e $f^{(2n+1)}(\beta)-f^{(2n+1)}(\alpha)$ saranno fra loro di segno contrario – *ciò che corrisponde al caso in cui i due termini u_{n-1} e u_n siano dello stesso segno* –, allora sempre pel confronto fra i due valori (21) e (22) di E_n si vede che la quantità $2\theta_n(1-2^{-2n})-1$ dovrà essere positiva e $2\theta_n(1-2^{-2n})$ sarà un numero positivo superiore alla unità, e quindi per la (20) *l'errore E_{n-1} che si commetterà fermandoci al termine u_{n-1} sarà dello stesso segno del termine seguente u_n e in valore assoluto sarà superiore a questo termine u_n.*

In questo caso poi, siccome la quantità positiva $2\theta_n(1-2^{-2n})-1$ non può superare l'altra $2(1-2^{-2n})-1$ o $1-2^{-(2n-1)}$, così per la (21) *l'errore E_n che si commetterà fermandoci al termine u_n* invece che al termine u_{n-1} *sarà dello stesso segno di u_n* e non solo sarà numericamente inferiore a questo termine ma *sarà anche inferiore a* $(1-2^{-(2n-1)})u_n$.

E anche tutte le particolarità degli ultimi due paragrafi varranno per qualunque punto a cui ci si arresti nella formola che si considera quando le condizioni poste si verifichino per tutte le derivate di ordine pari di $f(x)$ fino a quelle dell'ordine $2k+2$ se l'ultimo termine della formola del quale vorremo occuparci sarà il termine u_k.

E si deve notare, come già osservammo in fine del § 231, che sotto la ipotesi che le derivate $f^{(2n)}(x)$ nel passare di x da α a β o la somma $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ nel passare di t da 0 a h mantengano sempre lo stesso segno, questo segno sarà anche quello della differenza $f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)$; e quindi le due differenze considerate sopra $f^{(2n-1)}(\beta)-f^{(2n-1)}(\alpha)$ e $f^{(2n+1)}(\beta)-f^{(2n+1)}(\alpha)$ avranno lo stesso segno o segno contrario secondochè avranno segno uguale o segno diverso le due derivate $f^{(2n)}(x)$ e $f^{(2n+2)}(x)$ nel passare di x da α a β o le due somme $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n)}(a+sh-t)$ e $\sum_{s=1}^{s=p} f^{(2n+2)}(\alpha+sh-t)$ nel passare di t da 0 a h. In forza di questa osservazione gli enunciati dei teoremi precedenti potrebbero modificarsi introducendo in campo i segni di queste quantità e non più quelli delle indicate differenze.

236. — Dimostrata ora la formola (16) che dà una proprietà notevolissima dei numeri di Bernoulli, e trovate le particolarità degli ultimi paragrafi relative alla funzione $F_{2n}(t)$, e agli errori che si commettono nel calcolo approssimato degli integrali definiti fatto colle formole di Maclaurin-Eulero, torniamo ancora a valerci della formola (24) della pag. 312 pel caso in cui la

funzione $f(x)$ è data fra α e ∞; ma, senza richiedere più che essa soddisfi a tutte le condizioni poste in principio del § 221, richiediamo soltanto che per ogni valore finito di x fra α e ∞ sia finita e continua insieme a quelle delle sue derivate che verranno considerate. E, pure potendo la stessa funzione non essere atta alla integrazione nell'intervallo da α a ∞, e potendo anche crescere indefinitamente al crescere indefinito di x, ammettiamo che la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ delle sue derivate di un certo ordine pari $2n$ sia convergente e convergente in ugual grado per ogni valore di t fra 0 e h (0 e h incl.) (*) e la sua somma sia $P_{2n}(h,t)$; con che le somme $\sum_{1}^{m} f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ di

---

(*) Questo ad esempio accade quando, essendo α diverso da zero e positivo, si ha $f(x)=x^k$ con k numero qualsiasi, e quando si ha $f(x)=\log x$, o $f(x)=\log^2 x,\ldots$, o anche quando sia $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$ nel supposto allora che α sia superiore ad uno, ecc.

Del resto si può osservare in generale che quando $f(x)$ ha una derivata determinata anche per valori comunque grandi di x, se si indica con i un certo numero positivo, e con p e q s'indicano due numeri pur positivi e grandissimi essendo $q>p$, per una formola nota (V. *Calc. diff.* § 42. 4.° [pag. 52]) si hanno le due

$$\frac{f(q)-f(p)}{q^i-p^i}=\frac{f'(p_1)}{ip_1{}^{i-1}}\quad,\quad\frac{f(q)-f(p)}{q^{-i}-p^{-i}}=-\frac{f'(p_2)}{ip_2{}^{-i-1}}$$

nelle quali p_1 e p_2 saranno numeri compresi fra p e q; e da queste si dedurranno le altre

$$\frac{f(q)}{q^i}-\frac{f(p)}{q^i}=\left\{1-\left(\frac{p}{q}\right)^i\right\}\frac{f'(p_1)}{ip_1{}^{i-1}}\quad,\quad f(q)p^i-f(p)p^i=\left\{1-\left(\frac{p}{q}\right)^i\right\}\frac{f'(p_2)p_2{}^{i+1}}{i},$$

le quali, coll'osservare che, per quanto grande sia p, potremo sempre supporre q immensamente grande rispetto a p, ci mostrano che se al crescere indefinito di x la quantità $\dfrac{f'(x)}{x^{i-1}}$ o l'altra $f'(x)x^{i+1}$ avranno un limite determinato, anche la quantità $\dfrac{f(x)}{x^i}$ nel primo caso e l'altra $f(x)x^i$ nel secondo avranno pure un limite determinato; e i limiti delle due quantità $\dfrac{f(x)}{x^i}$ e $\dfrac{f'(x)}{x^{i-1}}$ nel primo caso, come quelli delle due $f(x)x^i$ e $f'(x)x^{i+1}$ nel secondo saranno zero o infiniti insieme, e se il limite sarà finito e diverso da zero per l'una delle stesse quantità (nei respettivi casi) lo sarà anche per l'altra, e sarà i il rapporto del limite della seconda delle stesse quantità al limite della prima.

In particolare quindi — nel supposto che la funzione $f(x)$ sia tale che i detti limiti esistano *entrambi* nell'uno o nell'altro caso — si può dire che *se $f(x)$ al crescere indefinito di x diverrà infinita di ordine inferiore od uguale ad i la sua derivata prima $f'(x)$ lo diverrà d'ordine inferiore od uguale ad $i-1$,* e *quindi se $i<1$ la derivata $f'(x)$ diverrà certamente infinitesima d'ordine superiore od uguale ad $1-i$ respettivamente; e se $f(x)$ diverrà infinitesima d'ordine superiore od uguale ad i la sua deri-*

un numero qualunque m dei suoi termini saranno sempre numericamente inferiori a un numero finito K_{2n} per gli stessi valori di t.

In questo caso si avrà ancora la (24) della pag. 312 nella quale R_p sarà dato dalla formola successiva (25) o anche dalle seguenti (26) o (27); e poichè in queste formole, lasciando fermi α e h, potremo ammettere che p e quindi $\beta = \alpha + ph$ possano crescere indefinitamente, si può dire che la espressione

$$(23)\quad \int_\alpha^{\alpha+ph} f(x)\,dx - h\sum_0^p{}_s f(\alpha+sh) + \frac{h}{2}f(\beta) + \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}f'(\beta) - \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}f'''(\beta) + \ldots + $$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)} f^{(2n-3)}(\beta)\,,$$

potrà porsi sotto le due forme seguenti

$$(24)\qquad \Lambda_n + \int_0^h P_{2n}(h\,,t)\,F_{2n}(t)\,dt + \sigma_{2n} \quad \text{e} \quad \Lambda_n + \theta \frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} K_{2n}\,,$$

dove

$$(25)\quad \Lambda_n = -\frac{h}{2}f(\alpha) + \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}f'(\alpha) - \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}f'''(\alpha) + \ldots + (-1)^n \frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)}f^{(2n-3)}(\alpha)\,,$$

---

vata $f'(x)$ lo diverrà d'ordine superiore od uguale ad $i+1$. E tanto nell'un caso che nell'altro varrà anche la proposizione inversa; e anzi quando l'una o l'altra delle indicate particolarità si verificherà per la derivata $f'(x)$ non vi sarà bisogno di fare ipotesi o verifiche per la esistenza del limite del rapporto $\frac{f(x)}{x^i}$ nel primo caso e del prodotto $f(x)x^i$ nel secondo, perchè questi limiti verranno di suo necessariamente ad esistere. E così, più particolarmente ancora, se la derivata $f'(x)$ al crescere indefinito di x diverrà infinitesima di ordine superiore al primo la funzione $f(x)$ diverrà sempre infinitesima.

Con queste considerazioni, che possono riguardarsi come un complemento dei teoremi dati ai §§ 45 e 46 [pag. 57 e seg.] del *Calcolo differenziale*, e che potrebbero anche estendersi, si vede in particolare che se una funzione $f(x)$ ammette derivate almeno fino a quelle di un ordine abbastanza elevato per qualunque valore comunque grande di x, e queste derivate al crescere indefinito di x divengono sempre infinite o infinitesime di un ordine determinato o superiore a un numero determinato, esse al crescere dell'ordine di derivazione finiranno per essere certamente infinitesime di ordine superiore a un numero dato; ciò che porta a potere affermare che — *in questi casi* — per la serie $\sum_1^\infty{}_s f^{(l)}(\alpha+sh-t)$, quando l sia sufficientemente grande, finirà per essere sempre soddisfatta la condizione posta sopra, cioè che essa sia convergente e convergente in egual grado e le somme successive $\sum_1^m f^{(l)}(\alpha+sh-t)$ siano sempre numericamente inferiori a un numero finito K_l per ogni valore di t fra 0 e h (0 e h incl.).

essendo σ_{2n} la quantità $-\int_0^h \sum_{p+1}^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt$ che tenderà a zero al crescere indefinito di p perchè vi tende in modo uniforme qualunque sia t fra 0 e h la quantità sotto l'integrale, e essendo θ un numero compreso fra -1 e 1 che al crescere indefinito di p avrà un limite determinato θ_n perchè la seconda delle due precedenti espressioni (24) deve avere un limite determinato come lo ha la prima; e questo numero θ_n sarà compreso naturalmente anch'esso fra -1 e 1 (questi estr. incl.).

Di qui segue che qualunque sia la funzione data $f(x)$, salvo però a soddisfare alle condizioni che abbiamo posto, *la espressione (23) avrà sempre un limite determinato e finito* L *per* $p=\infty$, e questo limite potrà porsi sotto le due forme seguenti

$$(26)\qquad \Lambda_n + \int_0^h P_{2n}(h\,,t)\,F_{2n}(t)\,dt\,, \quad \text{e} \quad \Lambda_n + \theta_n \frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} K_{2n}\,;$$

e a causa delle proprietà della funzione $F_{2n}(t)$ che dimostrammo ai §§ 204 e 205 [pag. 310-311], la prima di queste espressioni (26) potrà anche porsi sotto la forma $\Lambda_n + (-1)^n \frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} P_{2n}(h\,,\xi)$, essendo ξ un numero determinato compreso fra 0 e h.

Avuto poi riguardo alla espressione (16) data da Eulero pel rapporto $\frac{B_n}{\pi(2n)}$, in quest'ultima espressione del limite per $p=\infty$ della espressione (23) come nella seconda delle espressioni precedenti (26) a $\frac{B_n}{\pi(2n)}$ si potrà sostituire il rapporto $\frac{2\,S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}$, essendo

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots$$

237. — È poi da aggiungere che nel caso particolare in cui la funzione data $f(x)$ è tale che le sue derivate $f^{(2n)}(x)$ d'ordine $2n$ sono sempre dello stesso segno pei valori di x da α a ∞, o più generalmente è dello stesso segno per tutti i valori di t fra 0 e h la somma delle serie $\sum_1^\infty f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$, ferme restando tutte le altre condizioni precedenti, allora nella seconda delle espressioni (26) per K_{2n} si potrà prendere il limite superiore dei valori assoluti

della serie $\sum_1^\infty f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ o di P_{2n} per t compreso fra 0 e h; e oltre a ciò siccome, in questo caso, indicando con t_1 un valore determinato di t fra 0 e h, il secondo termine della prima delle espressioni stesse (26) potrà porsi sotto la forma

$$F_{2n}(t_1)\int_0^h P_{2n}(h\,,\,t)\,dt = F_{2n}(t_1)\int_0^h \sum_1^\infty{}_s\, f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,dt =$$

$$= -F_{2n}(t_1)\sum_1^\infty{}_s \left\{ f^{(2n-1)}(\alpha+(s-1)h)) - f^{(2n-1)}(\alpha+sh) \right\},$$

e quindi anche sotto l'altra $-F_{2n}(t_1)\,f^{(2n-1)}(\alpha)$ quando si supponga anche che $f^{(2n-1)}(x)$ al crescere indefinito di x o più generalmente $f^{(2n-1)}(\alpha+sh)$ al crescere indefinito di s tendano a zero, basterà ricordare quanto dimostrammo intorno alla funzione $F_{2n}(t)$ nei §§ 230 e 231 per potere affermare che il limite L per $p=\infty$ della espressione (23) potrà anche porsi sotto la forma $\Lambda_n - \bar{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha)$, essendo $\bar{\theta}_n$ un numero determinato compreso fra 0 e 1; e quindi *in questo caso in cui le derivate* $f^{(2n)}(x)$ *sono sempre dello stesso segno per* x *compreso fra* α *e* ∞, *o più generalmente ha sempre lo stesso segno la somma della serie* $\sum_1^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ *pei valori di* t *fra* 0 *e* h, *e al tempo stesso le derivate dell'ordine precedente* $f^{(2n-1)}(x)$ *al crescere indefinito di* x *o più generalmente le* $f^{(2n-1)}(\alpha+sh)$ *al crescere indefinito di* s *tendono a zero,* il valore assoluto del secondo termine del detto limite L non sarà mai superiore al valore assoluto delle due espressioni

$$(27)\qquad \frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} K_{2n} = \frac{2\,S_{2n} h^{2n+1}}{(2\pi)^{2n}} K_{2n} \quad \text{e} \quad F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha)\,,$$

essendo, come abbiamo detto, in questo caso K_{2n} il limite superiore dei valori della serie $\sum_1^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ per t compreso fra 0 e h, e $F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ avendo per ogni valore di n il valore trovato nel § 232, e in particolare avendosi

$$F_2\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^2}{8}\,,\quad F_4\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^4}{384}\,,\quad F_6\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^6}{15360}\,,\quad F_8\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{17\,h^8}{10321920}, \ldots$$

E poichè per quanto vedemmo ai §§ 204 e 205 [pag. 310 e seg.] $F_{2n}(t_1)$ è positivo per n pari e negativo per n dispari, si può affermare che *nel caso attuale il secondo termine del limite* L *ha il segno di* $f^{(2n-1)}(\alpha)$ *o segno contrario secondo che* n *è dispari o pari;* e del resto evidentemente per ciò che riguarda il valore numerico di questo secondo termine di L si possono applicare senz'altro i risultati ottenuti per gli errori E_{n-1} e E_n ai §§ 233-34-35 [pag. 354 e seg.] considerando lo stesso secondo termine come l'errore che si commetterebbe prendendo Λ_n per valore di L.

238. — Del resto poi è da osservare che le considerazioni che abbiamo fatto nei due paragrafi precedenti intorno al secondo termine delle espressioni (26), possono farsi anche per l'integrale $\sigma_{2n} = -\int_0^h \sum_{p+1}^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)\,F_{2n}(t)\,dt$ che rappresenta l'errore che si commette quando *per valori finiti di* p si prende come valore della espressione (23) il suo limite L.

Ne segue che nel caso generale in cui per $f(x)$ si richiedono soltanto le condizioni poste in principio del § 236, questo errore σ_{2n} potrà porsi sotto la forma

$$(-1)^{n+1}\frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} \sum_{p+1}^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-\eta)\,,$$

essendo η un numero determinato compreso fra 0 e h, e quindi si avrà sempre la formola seguente

$$(28)\qquad \int_\alpha^{\alpha+ph} f(x)\,dx - h\sum_0^\infty{}_s f(\alpha+sh) + \frac{h}{2}f(\beta) + \frac{B_1 h^2}{\pi(2)}f'(\beta) - \frac{B_2 h^4}{\pi(4)}f'''(\beta) + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1}h^{2n-2}}{\pi(2n-2)} f^{(2n-3)}(\beta) = L + (-1)^{n+1}\frac{B_n h^{2n+1}}{\pi(2n)} \sum_{p+1}^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-\eta)\,;$$

e nel caso particolare in cui $f(x)$ oltre a soddisfare alle dette condizioni del § 236 soddisfa anche a quelle del paragrafo precedente, — cioè è anche tale che le sue derivate $f^{(2n)}(x)$ d'ordine $2n$ per tutti i valori di x fra α e ∞, o anche più generalmente, le serie $\sum_1^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ e $\sum_{p+1}^\infty{}_s f^{(2n)}(\alpha+sh-t)$ per tutti i valori di t fra 0 e h conservano sempre lo stesso segno e le derivate dell'ordine precedente $f^{(2n-1)}(x)$ al crescere indefinito di x o più generalmente le $f^{(2n-1)}(\alpha+sh)$ al crescere indefinito di s tendono a zero —, lo stesso errore σ_{2n} si potrà porre anche sotto la forma $\bar{\theta}_{n,p+1} F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha+ph)$, essendo $\bar{\theta}_{n,p+1}$ un numero positivo compreso fra 0 e 1, e quindi si avrà allora anche la formola seguente

$$(29)\quad \int_{\alpha}^{\alpha+ph} f(x)\,dx - h\sum_{0}^{p}{}_{s} f(\alpha+sh) + \frac{h}{2} f(\beta) + \frac{B_1 h^2}{\pi(2)} f'(\beta) - \frac{B_2 h^4}{\pi(4)} f'''(\beta) + \dots +$$

$$+(-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{\pi(2n-2)} f^{(2n-3)}(\beta) = \Lambda_n - \overline{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha) + \overline{\theta}_{n.p+1} F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha+ph),$$

perchè, per quanto dicemmo nel paragrafo precedente, in questo caso si avrà $L = \Lambda_n - \overline{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha)$, dove $\overline{\theta}_n$ è un numero determinato dipendente da n e non da p e compreso fra 0 e 1, e Λ_n è dato dalla (25).

E queste formole (28) e (29) varranno per qualunque valore *finito* di n e per qualunque valore finito di p, e varranno anche al limite per $p = \infty$ nel senso che il limite dei loro primi membri sarà quello stesso dei secondi cioè L o $\Lambda_n - \overline{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) f^{(2n-1)}(\alpha)$.

In particolare quando la funzione $f(x)$ è anche tale che si possa prendere $n = 1$ si ha di qui la formola di *Franel* per la quale si può dire che *la quantità*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+ph} f(x)\,dx - h\sum_{0}^{p} f(\alpha+sh) + \frac{h}{2} f(\beta)$$

ha un limite determinato e finito $\Lambda_1 - \overline{\theta}_1 F_2\left(\frac{h}{2}\right) f'(\alpha) = -\frac{h}{2} f(\alpha) + \overline{\theta}_1 \frac{h^2}{8} f'(\alpha)$.

239. — Nei casi poi nei quali, a partire dalla funzione stessa $f(x)$ o da qualcuna delle sue derivate di ordine non superiore a $2n-3$, queste derivate hanno limiti determinati e finiti al crescere indefinitamente *in un modo qualunque* di x (*), o almeno hanno limiti determinati e finiti al crescere indefinitamente di p per numeri interi quando $x = \beta = \alpha + ph$, allora lo stesso naturalmente avverrà dei termini corrispondenti della espressione (23) (o dei primi membri delle (28) e (29)), e quindi i risultati ottenuti potranno più opportunamente riferirsi alla parte G che resta della espressione stessa dopo di avervi soppresso i detti termini e, volendo, anche altre parti fisse o che abbiano esse pure limiti determinati e finiti.

(*) Per quanto dicemmo nella nota al § 236 questi limiti, — nel caso che esistano al crescere di x all'infinito in un modo qualunque —, almeno dopo la prima delle derivate per le quali la indicata circostanza si presenterà saranno evidentemente zero, e le successive derivate al crescere indefinito di x diverranno infinitesime di ordine successivamente crescente.

Questa parte G si comporrà ordinariamente dei due primi termini della espressione (23), cioè dell'integrale $\int_{\alpha}^{\alpha+ph} f(x)\,dx$ e della somma $h\sum_{0}^{p}{}_{s} f(\alpha+sh)$, e potrà avere o no alcuni dei termini seguenti della espressione stessa; s'intende subito quindi come, valendosi delle formole (28) o (29), per ogni valore comunque grande di p si potrà avere una espressione della stessa parte G che conterrà: 1° un termine fisso e finito $\overline{L}$ che si comporrà di L e dei limiti fissi e finiti e diversi da zero che provengano dagli altri termini della (23), o da quelli corrispondenti dei primi membri delle stesse formole (28) o (29); 2° altri termini che al crescere indefinito di p (o di β) diverranno infinitesimi, e ordinariamente saranno anche di ordini successivamente crescenti. E quanto maggiore, *purchè sempre finito,* sarà il numero n altrettanto maggiore sarà ordinariamente il numero dei termini infinitesimi dei varii ordini che con facilità verranno calcolati.

Ne segue che quando ad es. la serie $\sum_{0}^{\infty}{}_{s} f(\alpha+sh)$ sia divergente, uno o più degli altri termini della espressione (23) dovranno di necessità essere tali da non avere limiti determinati finiti al crescere indefinito di p, e questi termini, che figureranno in G serviranno in certo modo a trasformare e separare nella somma $\sum_{0}^{p}{}_{s} f(\alpha+sh)$ la parte che produce la divergenza da una parte fissa e finita e da altre parti che al crescere indefinito di p tenderanno a zero e saranno ordinariamente di ordini d'infinitesimo successivamente crescenti. E i detti termini di G, che saranno spesso differentissimi per la forma dalla somma $\sum_{0}^{p}{}_{s} f(\alpha+sh)$, potranno anche talvolta, per valori crescenti di p, essere più facilmente calcolabili della somma suddetta $\sum_{0}^{p}{}_{s} f(\alpha+sh)$, o potranno mettere meglio in evidenza certe sue particolarità, come apparirà chiaramente dagli esempii che daremo fra breve.

E ne segue anche che *ad ogni funzione* $f(x)$ *che soddisfi alle condizioni che abbiamo poste corrisponderà sempre una costante* L — analoga alla costante C di Eulero della quale parleremo nel paragrafo seguente — *che sarà il limite della quantità* G *sopraindicata* e si troverà coi processi precedenti.

Queste considerazioni inoltre varranno spesso anche per giudicare della divergenza o della convergenza di una serie, e in modo diverso e talvolta anche ben più largo di quanto potemmo fare al § 114 [pag. 167], perocchè si può dire ad esempio che tutte le volte che una funzione $f(x)$ soddisfa alle condizioni poste in principio del § 236, *se l'integrale* $\int_a^{a+ph} f(x)dx$ *e i valori di* $f(x)$ *e delle sue derivate di ordine dispari* $f'(x), f'''(x), \dots, f^{(2n-3)}(x)$ *per* $x=\alpha+ph$ *avranno limiti determinati e finiti per* $p=\infty$, *necessariamente la serie* $\sum_0^\infty {}_s f(\alpha+sh)$ *sarà convergente.*

240. — Queste osservazioni generali fanno comprendere già l'importanza dei risultati ottenuti; ma questa importanza risulterà anche più chiaramente dai seguenti esempii nei quali per semplicità supporremo sempre senz'altro $\alpha=h=1$ e cambieremo p in $p-1$ e quindi β in p.

1.° Si supponga $f(x)=\frac{1}{x}$, con che, volendo, si potrà prendere nelle nostre formole $n=1$ perchè $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ e la serie $\sum_1^\infty \frac{2}{(1+s-t)^3}$ per t fra 0 e 1 è convergente in ugual grado, e $f''(x)$ sarà sempre positiva per x positivo e si potrà prendere senz'altro $K_2=2S_3=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)$.

Allora, supponendo appunto dapprima $n=1$ e tenendo conto di quanto dicemmo nei paragrafi precedenti nei quali, come già abbiamo detto di fare, intenderemo posto $\alpha=h=1$ e cambiato p in $p-1$ e quindi β in p, la (25) ci darà ora $\Lambda_1=-\frac{1}{2}$, e quindi ricordando che $F_2(t)=\frac{1}{2}t(t-h)$ e $F_2\left(\frac{h}{2}\right)=-\frac{h^2}{8}$, si potrà senz'altro affermare che la differenza

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\log p \tag{30}$$

ha per limite per $p=\infty$ la costante C definita dalla formola

$$C=\frac{1}{2}+\sum_1^\infty {}_s\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+s-t)^3}dt, \tag{31}$$

che è conosciuta sotto il nome di *costante di Eulero* o anche sotto quello di *costante di Mascheroni*, e per la quale si vede intanto che, mentre evidentemente è superiore ad $\frac{1}{2}$, per la prima delle (27) è inferiore a $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}S_3$ e per la seconda delle stesse (27) è anche inferiore a $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ o a $\frac{5}{8}$ (*).

(*) **Il valore di questa costante C con 15 decimali esatte è C=0,577215664901532...**

E poichè con calcoli semplicissimi si trova che

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+s-t)^3}dt=\log\frac{s}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2s(s+1)}=\frac{1}{2s(s+1)}-\sum_2^\infty {}_r\frac{1}{r(s+1)^r}, \tag{32}$$

sarà anche

$$C=1-\sum_1^\infty {}_s\left(\sum_2^\infty {}_r\frac{1}{r(s+1)^r}\right). \tag{33}$$

Da ciò risulta che la somma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}$ al crescere indefinito di p cresce come $\log p$, e oltre a ciò avendo riguardo alla (29) si vede che per qualunque valore intero finito di p si ha

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\log p=C+\frac{1}{2p}-\frac{\theta_{1,p}}{8p^2}, \tag{34}$$

essendo $\theta_{1,p}$ un numero positivo compreso fra 0 e 1, e si ha anche

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\log p=C+\frac{1}{2p}-\sum_p^\infty {}_s\int_0^1\frac{t(1-t)}{(1+s-t)^3}dt, \tag{35}$$

ovvero per la (32)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\log p=C+\sum_p^\infty {}_s\left(\sum_2^\infty {}_r\frac{1}{r(s+1)^r}\right). \tag{36}$$

Se poi invece di supporre, come abbiamo fatto, $n=1$ si suppone $n>1$, ciò che evidentemente può sempre farsi perchè nel caso attuale di $f(x)=\frac{1}{x}$ insieme a $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ e $f''(x)=\frac{1.2}{x^3}$ si ha

$$f'''(x)=-\frac{1.2.3}{x^4},\dots,f^{(2n-1)}(x)=-\frac{\pi(2n-1)}{x^{2n}},\ f^{(2n)}(x)=\frac{\pi(2n)}{x^{2n+1}},$$

allora applicando ancora la (29) si ottiene la formola seguente

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\log p&=\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\dots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{2n-2}-\bar\theta_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-1)+\\&+\frac{1}{2p}-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_2}{4p^4}-\frac{B_3}{6p^6}-\dots-(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-2)p^{2n-2}}+\bar\theta_{n,p}F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(2n-1)}{p^{2n}},\end{aligned} \tag{37}$$

essendo $\bar\theta_n$ e $\bar\theta_{n,p}$ numeri determinati compresi fra 0 e 1 che dipendono ambedue da n e il secondo dipende anche da p, e in questa formola l'ultimo termine indipendente da p cioè $-\bar{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-1)$ proviene dalla serie d'integrali $-\pi(2n)\sum_1^\infty{}_s \int_0^1 \frac{F_{2n}(t)\,dt}{(1+s-t)^{2n+1}}$, e poichè già trovammo che il limite del primo membro $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-\log p$ per $p=\infty$ è la costante C di Eulero, si vede subito che per questa costante si ha anche la formola

$$(38) \quad C=\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{2n-2}-\pi(2n)\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{F_{2n}(t)\,dt}{(1+s-1)^{2n+1}},$$

ovvero

$$(39) \quad C=\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{2n-2}-\bar{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-1),$$

e quindi la formola precedente ci darà per qualunque valore *finito* di n

$$(40) \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-\log p=C+\frac{1}{2p}-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_2}{4p^4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-2)\,p^{2n-2}}+\bar{\theta}_{n,p}\,F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(2n-1)}{p^{2n}},$$

in tutte queste formole essendo per quanto si vide al § 232

$$F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\,2(1-2^{-2n})\frac{B_n}{\pi(2n)}=(-1)^n\frac{4(1-2^{-2n})S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}.$$

In particolare per $n=2$ si ha la formola

$$(41) \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-\log p=C+\frac{1}{2p}-\frac{1}{12p^2}+\frac{\theta_{2,p}}{64p^4}$$

e la costante C può porsi sotto la forma

$$(42) \quad C=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{t^4-2t^3+t^2}{(1+s-t)^5}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{\bar{\theta}_2}{64},$$

perchè $F_4(t)=\frac{t^4}{24}-\frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{24}$ e $F_4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{384}$.

2.° Si supponga $f(x)=x^i$, essendo i inferiore ad uno ma diverso oltre che da zero anche da -1 (per non ricadere nel caso precedente), con che, volendo, si potrà ancora prendere nelle nostre formole $n=1$, perchè $f'(x)=ix^{i-1}$ e

$f''(x)=\frac{i(i-1)}{x^{2-i}}$, e la serie $\sum_1^\infty{}_s\frac{i(i-1)}{(1+s-t)^{2-i}}$ per t fra 0 e 1 è convergente in ugual grado; e si potrà prendere $K_2=|i(i-1)|\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{s^{2-i}}$ perchè $f''(x)$ ha sempre lo stesso segno per valori positivi di x.

Allora colle solite considerazioni dei paragrafi precedenti si potrà senz'altro affermare che la differenza

$$\frac{p^{i+1}}{i+1}+\frac{p^i}{2}-(1^i+2^i+3^i+\ldots+p^i)$$

ha per limite per $p=\infty$ una costante C_i che può riguardarsi come definita dalla formola

$$C_i=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{2}-\frac{i(i-1)}{2}\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{t(1-t)}{(1+s-t)^{2-i}}\,dt.$$

In particolare dunque supponendo $i=-\frac{1}{2}$ si può dire che la differenza

$$2\sqrt{p}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$

ha per limite la costante positiva $\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{t(1-t)}{(1+s-t)^{\frac{5}{2}}}\,dt$ che per la seconda delle (27) è superiore a $\frac{3}{2}-\frac{1}{16}$ o a $\frac{23}{16}$ e quindi è compresa fra $\frac{23}{16}$ e $\frac{24}{16}$, e per la prima delle stesse (27) è anche superiore a $\frac{3}{2}-\frac{1}{32}S_{\frac{5}{2}}$ cioè a $\frac{3}{2}-\frac{1}{32}\left(1+\frac{1}{2^2\sqrt{2}}+\frac{1}{3^2\sqrt{3}}+\frac{1}{4^2\sqrt{4}}+\ldots\right)$.

Se poi fosse $i\geq 1$ non potremmo più supporre $n=1$, ma potremmo ancora applicare i risultati precedenti prendendo secondo i casi $n=2$ o $n>2$.

E tanto in questo caso di $i\geq 1$, quanto in quello di $i=1$ valendosi della (29) si potrebbero avere formole analoghe alle (41) e (42), ecc.

3.° Si supponga $f(x)=\log x$, con che avendosi $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x_2}$, $f'''(x)=\frac{1.2}{x^3},\ldots, f^{(2n-1)}(x)=\frac{\pi(2n-2)}{x^{2n-1}}$, $f^{(2n)}(x)=-\frac{\pi(2n-1)}{x^{2n}}$, potremo, volendolo, limitarci a supporre ancora $n=1$ e prendere $K_2=S_2=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$

Allora, osservando che $\int_1^p \log x\, dx = p\log p - p + 1$, colle solite considerazioni dei paragrafi precedenti si potrà affermare che il limite della espressione $\log \pi(p) - \left(p+\frac{1}{2}\right)\log p + p$ è una costante $\overline{C}$ che può prendersi come definita dalla formola

$$\overline{C} = 1 - \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_s \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(1+s-t)^2}\,dt, \tag{43}$$

e per la quale troveremo nel Capitolo seguente che ha per valore $\log\sqrt{2\pi}$, mentre ora tenendo conto della seconda delle (27) si può dire soltanto che essa è compresa fra $\frac{7}{8}$ e 1. E, calcolando l'integrale che figura nei termini della serie del secondo membro, per questa costante C avremo anche la formola seguente

$$\overline{C} = 1 - \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_s\left\{(2s+1)\log\left(1+\frac{1}{s}\right) - 2\right\} = 1 - \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_s\left\{\frac{1}{s^2}\sum_0^\infty(-1)^m\frac{m+1}{(m+2)(m+3)}\frac{1}{s^m}\right\}. \tag{44}$$

che può servire a dare limiti più approssimati pel valore della stessa costante.

Se poi si suppone $n>1$, allora valendosi della (29) si ottiene la formola seguente

$$\log\pi(p) - \left(p+\frac{1}{2}\right)\log p + p =$$

$$= 1 - \frac{B_1}{1.2} + \frac{B_2}{3.4} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)} + \pi(2n-1)\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{F_{2n}(t)}{(1+s-t)^{2n}}\,dt +$$

$$+ \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{p} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{p^3} + \dots + (-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{p^{2n-3}} - \pi(2n-1)\sum_p^\infty{}_s\int_0^1\frac{F_{2n}(t)}{(1+s-t)^{2n}}\,dt,$$

ovvero

$$\log\pi(p) - \left(p+\frac{1}{2}\right)\log p + p = \overline{C} + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{p} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{p^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{p^5} - \dots + \tag{45}$$

$$+ (-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{p^{2n-3}} + \overline{\theta}_{n,p}F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(2n-2)}{p^{2n-1}},$$

risultandone ora per la costante $\overline{C}$ anche la espressione

$$\overline{C} = 1 - \frac{B_1}{1.2} + \frac{B_2}{3.4} - \frac{B_3}{5.6} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)} + \pi(2n-1)\sum_1^\infty{}_s\int_0^1\frac{F_{2n}(t)}{(1+s-t)^{2n}}\,dt, \tag{46}$$

ovvero

$$\overline{C} = 1 - \frac{B_1}{1.2} + \frac{B_2}{3.4} - \frac{B_3}{5.6} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)} - \overline{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-2), \tag{47}$$

essendo $\overline{\theta}_n$ e $\overline{\theta}_{n,p}$ le solite quantità comprese fra 0 e 1.

La formola (45) nella quale sia posto $\overline{C} = \log\sqrt{2\pi}$ e sia tralasciato l'ultimo termine intendendola continuata indefinitamente è dovuta a *Stirling*. Però la serie che così viene a figurare nel secondo membro è una serie divergente e la formola propriamente diviene illusoria; ma arrestandosi a un termine qualsiasi nel secondo membro l'errore è sempre minore del termine al quale ci si arresta e del termine seguente (§§ 233-34-35 [pag. 354 e seg.]).

Passando dai logaritmi ai numeri coll'osservare che, come dicemmo sopra, si troverà poi che $\overline{C} = \log\sqrt{2\pi}$, si giunge subito alla formola seguente

$$\pi(p) = \sqrt{2\pi}\, p^{p+\frac{1}{2}}\, e^{-p+\lambda_n(p)}, \tag{48}$$

essendo $\lambda_n(p)$ la funzione di p che tende a zero al crescere indefinito di p ed è definita dalla formola

$$\lambda_n(p) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{p} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{p^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{p^5} + \dots + (-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{p^{2n-3}} - \overline{\theta}_{n,p}F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(2n-2)}{p^{2n-1}},$$

per modo che in particolare nei casi di $n=2$, $n=3$, $n=4$,... si ha

$$\lambda_2(p) = \frac{1}{12p} - \frac{\theta_{2,p}}{192p^3},\quad \lambda_3(p) = \frac{1}{12p} - \frac{1}{360p^3} + \frac{\theta_{3,p}}{640p^5},\quad \lambda_4(p) = \frac{1}{12p} - \frac{1}{360p^3} + \frac{1}{1260p^5} - \frac{17\,\theta_{4,p}}{14336\,p^7},$$

e questa formola (48) dà una espressione notevole e molto utile del prodotto $1.2.3\dots p$ per valori grandissimi di p.

E avendo ora trovata questa espressione (48) di $\pi(p)$ basta ricordare la formola (16) per ottenere anche un'altra espressione dei numeri di Bernoulli B_q che è la seguente

$$B_q = 4\pi S_{2q}\left(\frac{q}{\pi}\right)^{2q+\frac{1}{2}} e^{-2q+\lambda_n(2q)}, \tag{49}$$

dove S_{2q} è la solita somma delle potenze inverse $(2q)^e$ dei numeri naturali, e $\lambda_n(2q)$ si ha subito dalle formole precedenti pei varii valori di n cambiandovi p in $2q$.

4.° Sempre ammettendo per semplicità che sia $\alpha = h = 1$, si supponga che si abbia $f(x) = \lambda(x)\log\mu(x)$, essendo $\lambda(x)$ e $\mu(x)$ pei valori di x da 1 a ∞ due funzioni delle quali la seconda sia sempre diversa da zero e positiva, e ambedue siano finite e continue e ammettano le derivate almeno fino a quelle di un certo ordine, e siano tali che per $f(x)$ risultino ancora soddisfatte le condizioni poste in principio del § 236; e oltre a ciò si ammetta che colla integrazione per parti o in altro modo si riesca a calcolare l'integrale indefinito $\int \lambda(x)\log\mu(x)\,dx$, e sia questo $F(x)$.

Sotto queste ipotesi, indicando in generale per brevità di scrittura con $(\lambda\log\mu)_\xi^{(m)}$ la derivata m^a di $\lambda(x)\log\mu(x)$ per $x = \xi$, avremo la formola

$$(50)\qquad F(p) - \log\prod_{s=1}^{s=p}\mu(s)^{\lambda(s)} + \frac{1}{2}\lambda(p)\log\mu(p) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_p - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_p - \dots$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}(\lambda\log\mu)_p^{(2n-3)} = F(1) - \frac{1}{2}\lambda(1)\log\mu(1) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_1 - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_1 + \dots$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2}(\lambda\log\mu)_1^{(2n-3)} + \int_0^1\sum_1^\infty{}_s(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}F_{2n}(t)\,dt - \int_0^1\sum_p^\infty{}_s(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}F_{2n}(t)\,dt,$$

e questa ci permetterà di dire che la espressione

$$(51)\ F(p) - \log\prod_{s=1}^{s=p}\mu(s)^{\lambda(s)} + \frac{1}{2}\lambda(p)\log\mu(p) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_p - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_p + \dots +$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}(\log\mu)_p^{(2n-3)}$$

per $p = \infty$ ha un limite determinato e finito, e questo limite è la costante L definita dalla formola

$$(52)\qquad L = F(1) - \frac{1}{2}\lambda(1)\log\mu(1) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_1 - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_1 + \dots +$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}(\lambda\log\mu)_1^{(2n-3)} + \int_0^1\sum_1^\infty{}_s(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}F_{2n}(t)\,dt,$$

e si ha inoltre la formola seguente

$$(53)\ F(p) - \log\prod_{s=1}^{s=p}\mu(s)^{\lambda(s)} + \frac{1}{2}\lambda(p)\log\mu(p) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_p - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_p + \dots +$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}(\lambda\log\mu)_p^{(2n-3)} = L - \int_0^1\sum_p^\infty(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}F_{2n}(t)\,dt;$$

e quando le derivate $(\lambda\log\mu)_x^{(2n)}$ siano sempre dello stesso segno per x fra 1 e ∞, — o almeno siano dello stesso segno, per tutti i valori di t fra 0 e 1, le due serie $\sum_1^\infty{}_s(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}$ e $\sum_p^\infty{}_s(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}$ —, l'ultimo termine della espressione (52) e l'ultimo del secondo membro della (53) potranno anche porsi sotto le forme $-\overline{\theta}_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda\log\mu)_1^{(2n-1)}$ e $\overline{\theta}_{n,p} F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda\log\mu)_p^{(2n-1)}$ respettivamente.

E in queste formole, quei termini della espressione (51) o del primo membro della (53) che al crescere indefinito di p tendessero a zero o a quantità determinate e finite potranno tralasciarsi senz'altro includendo però nella costante L quei termini, col segno cambiato, che tendessero a quantità determinate e finite diverse da zero, e portando nel secondo membro della (53) quelli che tendessero a zero.

Da queste formole poi passando dai logaritmi ai numeri si hanno espressioni notevoli del prodotto $\prod_{s=1}^{s=p}\mu(s)^{\lambda(s)}$ per valori interi comunque grandi di p, poichè si ha la formola seguente

$$(54)\qquad \prod_{s=1}^{s=p}\mu(s)^{\lambda(s)} = e^{F(p)+\omega(p)-L},$$

nella quale $F(x)$ è l'integrale indefinito $\int\lambda(x)\log\mu(x)\,dx$, L è dato dalla (52) e

$$(55)\ \omega(p) = \frac{1}{2}\lambda(p)\log\mu(p) + \frac{B_1}{1.2}(\lambda\log\mu)'_p - \frac{B_2}{\pi(4)}(\lambda\log\mu)'''_p + \dots + (-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}(\lambda\log\mu)_p^{(2n-3)} +$$

$$+\int_0^1\sum_p^\infty(\lambda\log\mu)_{1+s-t}^{(2n)}F_{2n}(t)\,dt,$$

per modo che $L = F(1) + \omega(1) - \lambda(1)\log\mu(1)$.

5.° In particolare supponendo $\lambda(x) = \mu(x) = x$, si avrà $F(x) = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$,

$$(\lambda\log\mu)' = \log x - 1,\ (\lambda\log\mu)'' = \frac{1}{x},\ (\lambda\log\mu)''' = -\frac{1}{x^2}, \dots, (\lambda\log\mu)^{(k)} = (-1)^k\frac{\pi(k-2)}{x^{k-1}},$$

e quindi si potrà prendere $n \geq 2$, e si potrà dire che la quantità

$$(56)\qquad \frac{p(p+1)}{2}\log p - \frac{p^2}{4} - \log(1.2^2.3^3\dots p^p) + \frac{1}{12}\log p$$

ha per limite la costante L_1 definita dalla formola

$$(57)\quad L_1 = -\frac{1}{4} + \frac{B_2}{2.3.4} - \frac{B_3}{4.5.6} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-4)(2n-3)(2n-2)} +$$

$$+ \pi(2n-2)\sum_1^{\infty}{}_s \int_0^1 \frac{F_{2n}(t)\,dt}{(1+s-t)^{2n-1}},$$

che col supporre senz'altro $n=2$ può scriversi più semplicemente

$$(58)\qquad L_1 = -\frac{1}{4} + 2\sum_1^{\infty}{}_s\int_0^1 \frac{F_4(t)}{(1+s-t)^3}dt = -\frac{1}{4} + \frac{\theta_2}{384}$$

essendo θ_2 compreso fra 0 e 1; e per qualunque valore intero di p e anche al limite per $p=\infty$ si ha la formola seguente

$$(59)\ \left(\frac{p(p+1)}{2} + \frac{1}{12}\right)\log p - \frac{p^2}{4} - \log(1.2^2.3^3\dots p^p) = L_1 - \frac{B_2}{2.3.4p^2} +$$

$$+ \frac{B_3}{4.5.6p^4} - \dots + (-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-4)(2n-3)(2n-2)p^{2n-4}} - \pi(2n-2)\sum_p^{\infty}{}_s\int_0^1\frac{F_{2n}(t)\,dt}{(1+s-t)^{2n-1}},$$

nella quale n è un numero intero *finito* qualsiasi superiore ad uno, e nella (57) come in questa gli ultimi termini possono trasformarsi nel solito modo sostituendo cioè ad essi le quantità $\theta_n F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-3)$ e $-\theta_{n,p}F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(2n-3)}{p^{2n-2}}$ respettivamente.

Passando dai logaritmi ai numeri, avremo la formola notevole

$$(60)\qquad 1.2^2.3^3\dots p^p = e^{-L_1}\sqrt[12]{p}\,p^{\frac{p(p+1)}{2}}e^{-\frac{p^2}{4}+\tau(p)},$$

essendo

$$\tau(p) = \frac{B_2}{2.3.4p^2} - \frac{B_3}{4.5.6p^4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{(2n-4)(2n-3)(2n-2)p^{2n-4}} + \theta_{n,p}\frac{F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\pi(2n-3)}{p^{2n-2}}.$$

6.° Supponiamo ora che nelle formole del n.° 4 sia $\lambda(x)=1$, $\mu(x)=1+\nu(x)$, essendo $\nu(x)$ una funzione che è sempre superiore a -1 per ogni valore finito di x non inferiore all'unità ed è tale inoltre che $\log\{1+\nu(x)\}$ venga a soddisfare alla condizione posta per $f(x)$ al principio del § 236.

Avremo $F(x) = \int\log\{1+\nu(x)\}dx = x\log\{1+\nu(x)\} - \int\frac{x\nu'(x)}{1+\nu(x)}dx$, o anche $F(x) = x\log\{1+\nu(x)\} - \rho(x)$ quando si ponga $\rho(x) = \int\frac{x\nu'(x)}{1+\nu(x)}dx$; e essendo $[\log\{1+\nu(x)\}]' = \frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}$, almeno nei casi più comuni la derivata prima di $\log\{1+\nu(x)\}$ tenderà a zero al crescere indefinito di x di ordine non inferiore al primo, e le derivate seguenti lo diverranno di ordine non inferiore al secondo, e quindi basterà prendere nelle nostre formole $n \geq 1$.

Ammesso dunque di essere in uno di questi casi, si potrà dire che *la espressione*

$$(61)\qquad \left(p+\frac{1}{2}\right)\log\{1+\nu(p)\} - \rho(p) - \log\prod_{s=1}^{s=p}\{1+\nu(s)\}$$

avrà un limite determinato e finito per $p=\infty$, *e questo limite sarà la costante* L_2 *definita dalla formola*

$$(62)\ L_2 = \frac{1}{2}\log\{1+\nu(1)\} - \rho(1) + \frac{B_1}{1.2}\frac{\nu'(1)}{1+\nu(1)} - \frac{B_2}{\pi(4)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_1'' + \frac{B_3}{\pi(6)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_1^{\mathrm{IV}} - \dots +$$

$$+ (-1)^n\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-3)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_1^{(2n-4)} + \int_0^1\sum_1^{\infty}{}_s\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_{1+s-t}^{(2n-1)}F_{2n}(t)\,dt;$$

dove n è uno qualunque dei numeri $1,2,3,\dots$, e inoltre si avrà la formola seguente

$$(63)\ \left(p+\frac{1}{2}\right)\log\{1+\nu(p)\} - \rho(p) - \log\prod_{s=1}^{s=p}\{1+\nu(s)\} = L_2 - \frac{B_1}{1.2}\frac{\nu'(p)}{1+\nu(p)} + \frac{B_2}{\pi(4)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_p'' -$$

$$- \frac{B_3}{\pi(6)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_p^{\mathrm{IV}} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_p^{(2n-4)} - \int_0^1\sum_p^{\infty}{}_s\left(\frac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}\right)_{1+s-t}^{(2n-1)}F_{2n}(t)\,dt;$$

e questa formola quando si passi dai logaritmi ai numeri servirà al calcolo del prodotto di un numero qualunque di fattori successivi appartenenti a prodotti infiniti anche divergenti, o alla trasformazione di quei prodotti in integrali definiti e in altri fattori conosciuti; come servirà a trasformare prodotti infiniti convergenti in integrali definiti e a calcolare tali prodotti e viceversa; e evidentemente darà anche criterii — del tutto analoghi a quelli che si hanno per le serie — per decidere della convergenza o divergenza dei prodotti infiniti coll'esame di certi fattori e di certi integrali definiti.

E difatti passando dai logaritmi ai numeri nella espressione (61) o nella formola (63) si potrà affermare che, quando la funzione $\nu(x)$ soddisfi alle condizioni indicate sopra, *il rapporto* $\dfrac{\prod_{s=1}^{s=p} \{1+\nu(s)\}}{\left[1+\nu(p)\right]^{p+\frac{1}{2}} e^{-\varrho(p)}}$ *ha un limite determinato e finito* e^{-L_2} *per* $p=\infty$, essendo L_2 la costante definita dalla formola (59) che è naturalmente la stessa per qualunque valore intero e finito di n superiore o uguale a 1; e questo ci mostra che *quando il prodotto infinito* $\prod_1^\infty \{1+\nu(s)\}$ *è convergente, il suo valore sarà il limite per* $p=\infty$ *della espressione* $[1+\nu(p)]^{p+\frac{1}{2}} e^{-L_2-\varrho(p)}$ *o anche dell'altra* $[1+\nu(p)]^p e^{-L_2-\varrho(p)}$, perchè in questo caso $\nu(p)$ tenderà a zero al crescere indefinito di p.

E, sotto questa condizione che è naturale di porre rispetto a $\nu(p)$, dal medesimo risultato segue anche *che il prodotto infinito* $\prod_1^\infty \{1+\nu(s)\}$ *sarà convergente e avrà un valore finito e diverso da zero quando sia finito e diverso da zero il limite per* $p=\infty$ *della espressione* $[1+\nu(p)]^p e^{-\varrho(p)}$, *e viceversa;* mentre se quel prodotto infinito sarà divergente, essendo cioè zero o infinito o indeterminato, lo stesso avverrà della medesima espressione $[1+\nu(p)]^p e^{-\varrho(p)}$ la quale si comporterà sempre come quel prodotto infinito. E in queste espresssioni il $\varrho(p)$ è l'integrale definito $\displaystyle\int_c^p \frac{x\nu'(x)}{1+\nu(x)}\,dx$, essendo c una costante che potrà scegliersi come vorremo fra α e ∞.

7.° In particolare se $\nu(x)$ sarà una funzione razionale i risultati precedenti saranno applicabili, e allora la funzione $\varrho(x)=\displaystyle\int \frac{x\nu'(x)}{1+\nu(x)}\,dx$ potrà determinarsi applicando i processi che si dettero per la integrazione delle funzioni razionali o applicandone altri che vengano suggeriti dalla forma della stessa funzione $\nu(x)$.

E se sarà $\nu(x)=gx^k$, essendo g una costante diversa da zero che per semplicità supporremo positiva e k un numero qualsiasi positivo o negativo, allora, avendosi $\dfrac{\nu'(x)}{1+\nu(x)}=k\dfrac{gx^{k-1}}{1+gx^k}$, i risultati precedenti saranno pure applicabili per $n\geq 1$, e si potrà prendere sempre $\varrho(x)=k\displaystyle\int_0^x \frac{gx^k\,dx}{1+gx^k}$, ovvero

$$\varrho(x)=k\int_0^x \frac{g\,dx}{g+x^{-k}}, \text{ e quindi } \varrho(1)=k\int_0^1 \frac{g\,dx}{g+x^{-k}}.$$

Distinguiamo ora il caso di k superiore o uguale a -1 e di k inferiore a -1, e nel primo caso poniamo $k=-1+k_1$, con k_1 positivo o nullo.

Si potrà scrivere $\varrho(p)=(-1+k_1)\displaystyle\int_0^p \frac{g\,dx}{g+x^{1-k_1}}$, e quindi se k_1 sarà diverso da uno $\varrho(p)$ crescerà all'infinito insieme a p andando verso $-\infty$ o verso $+\infty$ secondochè $0\leq k_1<1$ o $k_1>1$, e il prodotto $\displaystyle\prod_1^p\left(1+\frac{g}{s^{1-k_1}}\right)$, che cresce all'infinito con p, crescerà come il prodotto $\left(1+\dfrac{g}{p^{1-k_1}}\right)^{p+\frac{1}{2}} e^{-\varrho(p)}$, e il limite del rapporto di queste due quantità sarà il numero e^{-L_2}, essendo L_2 il valore (62) corrispondente al caso di $\nu(x)=\dfrac{g}{x^{1-k_1}}$ con k_1 nullo o positivo ma diverso da uno (*), e $\varrho(1)=(k_1-1)\displaystyle\int_0^1 \frac{g\,dx}{g+x^{1-k_1}}$.

Nel caso poi di k inferiore a -1, cambiandolo in $-l$ con $l>1$ si vede subito che allora venendo ad essere $\varrho(x)=-l\displaystyle\int_0^x \frac{g\,dx}{g+x^l}$, $\varrho(p)$ tenderà a un limite determinato e finito al crescere indefinito di p, e questo limite sarà l'integrale $-l\displaystyle\int_0^\infty \frac{g\,dx}{g+x^l}$ il cui valore è $-\dfrac{g^{\frac{1}{l}}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}}$, perchè ricordando la formola (14) della pag. 124 cioè $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$, nella quale $0<a<1$, si vede che basta fare in questa nell'integrale del primo membro un cambiamento di variabile col porre $x^a=\dfrac{t}{g^a}$ e poi mutare a in $\dfrac{1}{l}$ per trovare subito la formola $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g\,dt}{g+t^l}=\frac{g^{\frac{1}{l}}\pi}{l\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}}$.

(*) Nel caso di $k_1=1$ o $k=0$ il risultato ottenuto sussiste ancora, ma corrisponde ad una identità e non altro.

Per questo si può dunque affermare che quando g è diverso da zero e positivo e $l>1$, il rapporto $\dfrac{\prod_{s=1}^{s=p}\left(1+\frac{g}{s^l}\right)}{\left(1+\frac{g}{p^l}\right)^p}$ ha per limite la quantità $e^{-L_2+\tau}$

dove $\tau=\dfrac{g^{\frac{1}{l}}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}}$ e L_2 è il valore che si ha dalla solita formola (62) pel caso di $\nu(x)=\dfrac{g}{x^l}$ con $l>1$ e $\rho(1)=-l\displaystyle\int_0^1\frac{g\,dx}{g+x^l}$; e di qui osservando che

$\lim\limits_{p=\infty}\left(l+\dfrac{g}{p^l}\right)^p=\lim\left[\left(1+\dfrac{g}{p^l}\right)^{\frac{p^l}{g}}\right]^{\frac{g}{p^{l-1}}}=e^0=1$, si conclude che il valore del prodotto infinito $\prod_1^\infty\left(1+\dfrac{g}{s^l}\right)$ è $e^{-L_2+\tau}$ potendo prendere ora

$$L_2=l\int_0^1\frac{g\,dx}{g+x^l}+\frac{1}{2}\log(1+g)+lg\int_0^1\sum_1^\infty{}_s\left[\frac{g+(l+1)x^l}{x^2(g+x^l)^2}\right]_{1+s-t}F_2(t)\,dt\,,$$

ovvero

$$L_2=l\int_0^1\frac{g\,dx}{g+x^l}+\frac{1}{2}\log(1+g)+\theta F_2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{lg}{1+g}=l\int_\theta^1\frac{g\,dx}{g+x^l}+\frac{1}{2}\log(1+g)-\frac{\theta lg}{8(1+g)},$$

essendo θ un numero compreso fra 0 e 1.

In particolare per $l=2$ si ha che il valore del prodotto infinito $\prod_1^\infty\left(1+\dfrac{g}{s^2}\right)$ è $\dfrac{1}{\sqrt{1+g}}e^{\sqrt{g}\left(\pi-2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{g}}\right)-\frac{\theta g}{4(1+g)}}$, e per $g=1$ si riduce a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{8}}$, essendo $0<\theta<1$.

E supponendo ad es. $g=\dfrac{\xi^2}{\pi^2}$, e osservando che il prodotto $\xi\prod_1^\infty\left(1+\dfrac{\xi^2}{s^2\pi^2}\right)$ rappresenta $\operatorname{senh}\xi$, si ha di qui per $\operatorname{senh}\xi$ la formola seguente

$$\operatorname{senh}\xi=\frac{\pi\xi}{\sqrt{\pi^2+\xi^2}}e^{\xi\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\xi}\right)-\theta\frac{\xi^2}{4(\xi^2+\pi^2)}}.$$

nella quale s'intende che ξ sia diverso da zero, e θ è al solito un numero positivo compreso fra 0 e 1.

8.° Cambiando nelle formole generali $f(x)$ nella somma di k differenze $f_1(b_1+x)-f_1(a_1+x)$, $f_2(b_2+x)-f_2(a_2+x)$, ..., $f_k(b_k+x)-f_k(a_k+x)$, o cambiando in quelle del n. 4.° $\mu(x)$ nel prodotto di k quozienti simili $\dfrac{\mu_1(b_1+x)}{\mu_1(a_1+x)}$, $\dfrac{\mu_2(b_2+x)}{\mu_2(a_2+x)}$, ..., $\dfrac{\mu_k(b_k+x)}{\mu_k(a_k+x)}$ essendo in generale le a_i e b_i quantità costanti date a piacere, e supponendo $\lambda(x)=1$, si ottengono altre formole che servono per determinare valori approssimati di somme di k integrali o di somme di k somme di uno stesso numero qualunque p di termini di k serie, o valori approssimati di k prodotti ciascuno di uno stesso numero p di fattori della forma $\dfrac{\mu_i(b_i+s)}{\mu_i(a_i+s)}$.

E se le funzioni $f_i(\xi)$, pei valori che ξ verrà a prendere quando, essendo $\xi=a_i+x$ o $\xi=b_i+x$, si fa variare x da 1 a ∞, avranno anche le derivate dell'ordine $2n+1$, allora poichè pel teorema degli accrescimenti finiti sarà $f_i^{(2n)}(b_i+x)-f^{(2n)}(a_i+x)=(b_i-a_i)f^{(2n+1)}(\bar{\xi})$ essendo $\bar{\xi}$ un numero determinato compreso fra a_i+x e b_i+x, si vede subito che se le derivate dell'ordine $2n+1$ di $f_i(\xi)$ o di $\log\mu_i(\xi)$ avranno sempre lo stesso segno per gli indicati valori di ξ, lo stesso accadrà delle differenze $f_i^{(2n)}(b_i+x)-f_i^{(2n)}(a_i+x)$, o delle altre $[\log\mu_i(b_i+x)]^{(2n)}-[\log\mu_i(a_1+x)]^{(2n)}$ ovvero $\left(\log\dfrac{\mu_i(b_i+x)}{\mu_i(a_i+x)}\right)^{(2n)}$, per tutti i valori di x che si dovranno considerare; per modo che se le differenze b_1-a_1, b_2-a_2, ..., b_k-a_k avranno tutte lo stesso segno e pure lo stesso segno avranno le derivate delle varie funzioni $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, ..., $f_k(\xi)$ o delle altre $\log\mu_1(\xi)$, $\log\mu_2(\xi)$, ..., $\log\mu_k(\xi)$, allora agli errori che si avranno nel calcolo dei detti valori approssimati saranno applicabili le considerazioni dei §§ 233-34-35 (pag. 234 e seg.).

E così in particolare, sotto le ipotesi ora indicate rispetto alla esistenza delle derivate delle singole funzioni $\log\mu_i(\xi)$ fino a quelle dell'ordine $2n+1$, partendo dalla (53) e poi passando dai logaritmi ai numeri, come si fece per avere la (54), si otterrà la formola seguente

$$\prod_1^p{}_s\frac{\mu_1(b_1+s)}{\mu_1(a_1+s)}\prod_1^p{}_s\frac{\mu_2(b_2+s)}{\mu_2(a_2+s)}\cdots\prod_1^p{}_s\frac{\mu_k(b_k+s)}{\mu_k(a_k+s)}=$$

$$=\sqrt{\prod_1^k{}_s\frac{\mu_i(b_i+1)\mu_i(b_i+p)}{\mu_i(a_i+1)\mu_i(a_i+p)}}\,e^{\sum_1^k{}_i\int_1^p\{\log\mu_i(b_i+x)-\log\mu_i(a_i+x)\}dx+\omega(p)-\omega(1)},$$

dove ora s'intende che sia

$$\omega(p) = \frac{B_1}{\pi(2)}\left(\log \prod_1^k {}_i \frac{\mu_i(b_i+\xi)}{\mu_i(a_i+\xi)}\right)'_{\xi=p} - \frac{B_2}{\pi(4)}\left(\log \prod_1^k {}_i \frac{\mu_i(b_i+\xi)}{\mu_i(a_i+\xi)}\right)'''_{\xi=p} + \dots +$$

$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1}}{\pi(2n-2)}\left(\log \prod_1^k {}_i \frac{\mu_i(b_i+\xi)}{\mu_i(a_i+\xi)}\right)^{(2n-3)}_{\xi=p} - \theta_{n,p}\, F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log \prod_1^k {}_i \frac{\mu_i(b_i+\xi)}{\mu_i(a_i+\xi)}\right)^{(2n-1)}_{\xi=p},$$

e $\omega(1)$ sia il valore che si ha da $\omega(p)$ quando vi si faccia $p=1$, essendo al solito $\theta_{n,p}$ e $\theta_{n,1}$ numeri positivi compresi fra 0 e 1.

In particolare se $\mu_1(\xi) = \mu_2(\xi) = \dots = \mu_k(\xi) = \xi$, avremo la formola

$$(64) \qquad \prod_1^p {}_s \frac{b_1+s}{a_1+s} \prod_1^p {}_s \frac{b_2+s}{a_2+s} \dots \prod_1^p \frac{b_k+s}{a_k+s} = K \prod_1^k {}_i \frac{(b_i+p)^{b_i+p+\frac{1}{2}}}{(a_i+p)^{a_i+p+\frac{1}{2}}} e^{\omega(p)},$$

essendo K indipendente da p e definita dalla formola

$$(65) \qquad K = \prod_1^k {}_i \frac{(a_i+1)^{a_i+\frac{1}{2}}}{(b_i+1)^{b_i+\frac{1}{2}}} e_{-\omega(1)};$$

e poichè in questo caso sarà in generale

$$\left(\log \prod_1^k {}_i \frac{\mu_i(b_i+\xi)}{\mu_i(a_i+\xi)}\right)^{(\nu)} = (-1)^{\nu-1}\pi(\nu-1) \sum_1^k {}_i \frac{1}{(b_i+\xi)^\nu} - \frac{1}{(a_i+\xi)^\nu},$$

si potrà intanto prendere senz'altro $n=1$ e allora nella formola (64) sarà

$$(66) \quad \omega(p) = -\frac{\theta_{1,p}}{8} \sum_1^k {}_i \frac{b_i - a_i}{(a_i+p)(b_i+p)}, \quad \omega(1) = -\frac{\theta_{1,1}}{8} \sum_1^k {}_i \frac{b_i - a_i}{(a_i+1)(b_i+1)},$$

dove $\theta_{1,p}$ e $\theta_{1,1}$ sono i soliti numeri compresi fra 0 e 1; mentre prendendo $n>1$ si avrà

$$(67) \quad \omega(p) = \frac{B_1}{1.2} \sum_1^k {}_i \left(\frac{1}{b_i+p} - \frac{1}{a_i+p}\right) - \frac{B_2}{3.4} \sum_1^k {}_i \left(\frac{1}{(b_i+p)^3} - \frac{1}{(a_i+p)^3}\right) +$$

$$+ \dots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)} \sum_1^k {}_i \left(\frac{1}{(b_i+p)^{2n-3}} - \frac{1}{(a_i+p)^{2n-3}}\right) -$$

$$- \theta_{n,p}\, \pi(2n-2)\, F_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) \sum_1^k {}_i \left(\frac{1}{(b_i+p)^{2n-1}} - \frac{1}{(a_i+p)^{2n-1}}\right).$$

E senza l'introduzione dei numeri $\theta_{n,p}$ al posto degli ultimi termini nelle espressioni di $\omega(p)$ si potrà scrivere

$$- \pi(2n-1) \int_0^1 \sum_p^\infty {}_s \left(\sum_1^k {}_i \frac{1}{(b_i+1+s-t)^{2n}} - \frac{1}{(a_i+1-s-t)^{2n}}\right) F_{2n}(t)\, dt.$$

Questi risultati gioveranno molto per gli studii sulle funzioni Euleriane $\Gamma(x)$ che considerammo già e che studieremo ancora nel capitolo seguente.

241. — Prima di por fine a questi studii troviamo opportuno di fare anche la osservazione seguente.

Nella formola (16) della pag. 308 e nell'altra (24) della pag. 312 (che sono le formole di Maclaurin-Eulero), come in tutte le altre formole che da quelle abbiamo dedotto, il numero intero n è stato sempre supposto qualunque *ma finito*.

Ove questo numero n si fosse supposto infinito, le serie che — quando sia fatta astrazione da ciò che al limite per $n=\infty$ verrebbe ad essere l'integrale che costituisce il termine complementare — sarebbero venute a comparire nelle varie formole, il più spesso sarebbero state divergenti, mentre in ogni caso la somma dei primi termini di quelle serie, cioè di quelli ai quali si riducono i secondi membri delle formole stesse per valori piccoli di n quando si tralascia l'integrale che vi comparisce come termine complementare, danno sempre valori approssimati delle quantità rappresentate dai primi membri, con una approssimazione che può rendersi anche fortissima.

Questo però non deve recare meraviglia, come non reca meraviglia il fatto - *pure dello stesso genere anzi identico* - che la serie di Taylor può essere divergente, e anche i suoi termini dopo un certo punto possono non avere più alcun significato, mentre arrestandosi a uno qualsiasi dei termini già calcolati di quella serie si può avere un valore approssimato della funzione presa a sviluppare, e con quel grado di approssimazione che più ci piace (*Calc. diff.* § 75, pag. 103 e seg.).

Ed infatti chi ben riguardi ai processi di dimostrazione che qui abbiamo seguìto, - che in sostanza sono anche quelli che si seguono o almeno possono seguirsi (§ 197 [pag. 300 e seg.]) per giungere alla formola di Taylor, e che potrebbero seguirsi anche per giungere ad altri risultati dello stesso genere (*) -, vedrà che, salvo casi specialissimi che si presentano solo quando siano soddisfatte particolari condizioni, i processi stessi per essere rigorosi richiedono sempre che n sia finito, e non vi è quindi da meravigliarsi se essi portano a risultati privi di significato e assurdi quando, ammesso pure che valgano per qualunque valore *finito* ma comunque grande di n, - contrariamente a quello che i processi stessi consentono — si suppone $n=\infty$ e per di più si prende il limite per $n=\infty$ soltanto di una parte del secondo membro trascurando senz'altro l'altra parte, (cioè il termine complementare), anzichè prendere il limite del secondo membro tutto insieme.

(*) In particolare questi processi possono seguirsi per giungere a quelle serie, il più spesso divergenti, che Stieltjes chiamò *serie semi-convergenti,* e che Poincaré con denominazione meglio appropriata e entrata ora nell'uso, chiamò *serie asintotiche.*

E d'altra parte i detti processi in sostanza non sono che processi di trasformazione della funzione o della quantità che si considera, coi quali *si impone a questa di svolgersi sotto una forma speciale determinata;* e ben s'intende come questo non abbia ad essere sempre possibile quando si vuole lo sviluppo sotto forma di serie, e neppure quando ci si voglia fermare a un punto qualsiasi, a meno che in questo caso non vi si ponga sempre *un termine complementare* che corrisponda alla differenza fra la funzione o la quantità presa a sviluppare, e i termini, *in numero finito,* già calcolati sotto la forma voluta.

E nei casi delle nostre formole questa differenza, *a causa della forma stessa imposta allo sviluppo*, sarà naturalmente piccolissima per ogni parte finita dello sviluppo medesimo finchè la variabile si muove *entro intervalli sufficientemente ristretti;* ma ordinariamente *l'ampiezza di questi intervalli dipenderà dal numero dei termini che si prendono* (e quindi da n) e spesso essa andrà impiccolendo indefinitamente al crescere indefinitamente del numero degli stessi termini, per modo quindi che, per qualunque ampiezza *finita* che si prenda per quegli intervalli, facendo crescere il numero dei termini, mentre quella ampiezza si lascia fissa, la differenza stessa potrà il più spesso cessare di essere piccola e potrà anche crescere indefinitamente; e solo quando avvenga che, pur mantenendosi l'ampiezza medesima discosta da zero più di una certa quantità, il detto termine complementare abbia per limite lo zero per ogni valore della variabile nell'intervallo corrispondente, le formole verranno a sussistere anche per $n=\infty$, cioè sotto forma di serie.

Quello che vi è veramente di notevole in tutto questo consiste nelle particolarità rilevate ai §§ 233-34-35 [pag. 354 e seg.)] pel caso delle funzioni per le quali le derivate di uno o di due ordini pari successivi $2n$ e $2n+2$ nel tratto (α, β) o (α, ∞) nel quale si fanno gli studii non mutano mai di segno, o più generalmente non mutano di segno in un certo intervallo le somme finite o le serie infinite che figurano in uno o in due dei termini complementari successivi suddetti; le particolarità cioè che, in questi casi, l'errore che si commette arrestandosi a un certo punto – cioè il termine complementare corrispondente – è sempre numericamente inferiore al termine a cui ci si arresta e talvolta anche al termine che lo seguirebbe ove la formola volesse continuarsi.

Ma all'infuori di questo che pure è certamente notevolissimo, non troviamo che siavi altro che meriti di essere segnalato, nè troviamo che debba dirsi cosa singolare e quasi paradossale e inesplicabile che, mentre il più spesso le serie che si avrebbero continuando i termini all'infinito non hanno alcun significato, esse hanno invece una particolare importanza quando ci si arresta a un termine qualsiasi; perocchè mentre quest'ultima circostanza è conseguenza naturalissima dei processi seguiti, nulla invece ci autorizza, fuori che in casi specialissimi, a prendere in considerazione le serie infinite e tanto meno poi a sostituirle alla quantità che ha condotto a formarle e che può essere rappresentata rigorosamente soltanto dalle somme arrestate a un certo punto e completate col corrispondente termine complementare.

E ogni sorpresa verrà naturalmente a sparire se, lasciando di fermare la nostra attenzione su una tale serie, che come serie il più spesso non può essere considerata affatto, ci si limiti invece a considerare i termini corrispondenti come una semplice successione di termini che dipendono con leggi speciali dalla quantità che ad essi dà luogo, e che rispetto a questa hanno la particolarità notevole che facendo di essi le somme successive *queste somme* si vanno prima avvicinando alla quantità stessa — fino a rappresentarla spessissimo con un forte grado di approssimazione — per allontanarsene poi, il più delle volte, continuamente e anche molto rapidamente.

In particolare trattandosi della serie di Stirling della quale abbiamo fatto cenno al n. 3.° del paragrafo precedente, ogni sorpresa relativa alla singolarità che essa presenta verrà a sparire quando si lasci di portare la nostra attenzione sulla serie stessa come serie che dovesse servire per lo sviluppo di quella quantità che ai termini di essa dà luogo; e tutto invece risulterà naturalissimo quando si abbia solo riguardo alla successione dei termini stessi sia per considerarne le somme successive nel modo ora indicato allo scopo di avere valori approssimati della stessa quantità, sia per considerarne le somme *finite* composte di quel numero di termini successivi che vogliono prendersi e dei corrispondenti termini complementari, che nel fatto sono le sole espressioni alle quali i processi rigorosi effettivamente conducono.

Altri processi pel calcolo approssimato degli integrali definiti.

242. — Oltre ai processi precedenti per la determinazione approssimata degli integrali definiti per le funzioni integrabili e sempre finite, altri se ne hanno che vengono spessissimo usati e che giova perciò d'indicare.

Uno di questi processi risulta subito da quanto dicemmo negli studii generali sugli integrali definiti al § 7, n. 8° [pag. 20 e 21].

Ricordando infatti quanto allora dicemmo, si vede subito che quando si abbia l'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, e l'intervallo d'integrazione (α, β) sia finito, se si dividerà questo intervallo in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, indicando con f_s un valore di $f(x)$ nell'intervallo δ_s o un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore l_s e L_s di $f(x)$ in questo intervallo, e con D_s la oscillazione di $f(x)$ nello stesso intervallo, si potrà senz'altro affermare che la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ darà il valore dell'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore che numericamente non è mai superiore a $\sum_1^n \delta_s D_s$; e quindi quando per la divisione fatta dell'intervallo questa somma $\sum_1^n \delta_s D_s$ sia inferiore a σ la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ darà il valore dell'integrale con una approssimazione superiore a questo numero σ.

E se gli intervalli δ_s saranno presi tutti uguali a $\frac{\beta-\alpha}{n}$ la somma stessa che allora si ridurrà all'altra $\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_1^n f_s$, o alla media $\frac{\sum_1^n f_s}{n}$ moltiplicata per l'intervallo $\beta-\alpha$, darà il valore dell'integrale con una approssimazione superiore a $\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_1^n D_s$ o a $(\beta-\alpha)\frac{\sum_1^n D_s}{n}$; talchè, in particolare, se la funzione $f(x)$ da α a β non sarà mai crescente o non sarà mai decrescente *(monotona)*, la somma suddetta $(\beta-\alpha)\frac{\sum_1^n f_s}{n}$ darà l'integrale con un errore numericamente inferiore a $(\beta-\alpha)\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{n}$, e basterà prendere n abbastanza grande perchè questo errore sia piccolo quanto si vuole.

243. – E ponendoci ancora nel caso in cui la divisione dell'intervallo (α,β) negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sia fatta con una legge qualunque coi punti di divisione $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$, osserveremo che potendo sempre prendere per f_s il valore medio $\frac{f(\alpha_{s-1})+f(\alpha_s)}{2}$ dei due valori estremi $f(\alpha_{s-1})$ e $f(\alpha_s)$ che è certo compreso fra l_s, L_s, si vede che *pel valore approssimato* $\sum_1^n \delta_s f_s$ *del nostro integrale potremo prendere la somma* $\sum_1^n \frac{f(\alpha_{s-1})+f(\alpha_s)}{2}\delta_s$, intendendo ora che α_0 e α_n corrispondano a α e β; e così nel caso in cui la ricerca dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ si faccia per determinare l'area della curva di equazione $y=f(x)$ limitata dalla curva, dall'asse delle x e dalle ordinate corrispondenti alle ascisse estreme α e β, nel supposto ad esempio che nel tratto (α,β) la curva non passi mai sotto all'asse delle x, si vede che il valore approssimato dell'integrale o dell'area cercata corrisponderà alla somma delle aree dei trapezii contigui formati dall'asse delle x, dalle verticali corrispondenti ai successivi punti di divisione e dalle corde che sottendono i piccoli archi della curva compresi fra queste verticali successive; ciò che equivarrà a spezzare la curva in n piccoli tratti e considerarla come se fosse una spezzata poligonale costituita dalle corde che sottendono i varii tratti della curva; e l'errore che così faremo non sarà mai superiore in valore assoluto a $\Sigma\delta_s D_s$.

Per questa ragione il metodo ora indicato per la determinazione dei valori approssimati degli integrali è detto il *metodo dei trapezii*.

Ed è da osservare che nel caso particolare in cui gli intervalli parziali siano tutti uguali a $\frac{\beta-\alpha}{n}$, siccome allora la somma precedente potrà scriversi sotto la forma

$$\frac{\beta-\alpha}{n}\left\{\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}+\sum_1^{n-1} f\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right\},$$

il valore approssimato che si avrà con questo processo pel nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ corrisponderà precisamente a quello che si trovò al § 220 - 1° [pag. 331], e un limite superiore dell'errore potrà quindi determinarsi anche coi processi usati nello stesso paragrafo; dal che ne viene che l'errore stesso risulterà numericamente inferiore anche a $\frac{\mu_2(\beta-\alpha)^3}{12n^2}$ essendo μ_2 il limite superiore dei valori assoluti della derivata seconda di $f(x)$ fra α e β, quando, naturalmente, si supponga che questa derivata seconda sia determinata e finita nello stesso intervallo.

E quando $f(x)$ e la sua derivata seconda non mutino mai di segno per x compreso fra α e β o non mutino di segno le somme $\sum_1^n f\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{n}-t\right)$ e $\sum_1^n f''\left(\alpha+s\frac{\beta-\alpha}{n}-t\right)$ per t compreso fra 0 e $\frac{\beta-\alpha}{n}$, allora per la determinazione del limite superiore dell'errore e del suo segno potranno applicarsi anche le considerazioni dei §§ 234 e 235 [pag. 355-56] per le quali in questo limite superiore dell'errore verrà a figurare la differenza $\frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{12n^2}(\beta-\alpha)^2$.

244. — Altre formole per la determinazione di valori approssimati degli integrali ci vengono fornite dai processi d'interpolazione.

Si abbia infatti da determinare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ e, seguendo un metodo suggerito da Cotes, si cerchi di sostituire alla funzione $f(x)$ un'altra funzione $\varphi(x)$ corrispondente all'ordinata di una curva parabolica $y=\varphi(x)$ di ordine n che passi per $n+1$ punti, dati ad arbitrio sulla curva $y=f(x)$, e corrispondenti alle ascisse $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; e ciò allo scopo di prendere poi l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ come valore approssimato di quello cercato $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

In questi punti α_s dovrà essere $\varphi(\alpha_s)=f(\alpha_s)$, e se si indica con $\psi(x)=0$ la equazione di grado $n+1$ che ha per radici $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, siccome la funzione cercata $\varphi(x)$ dovrà essere di grado n, per la solita formola della scomposizione delle frazioni in frazioni semplici si avrà $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_0^n \frac{\varphi(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)}\frac{1}{x-\alpha_s}$; e quindi, dovendo essere $\varphi(\alpha_s)=f(\alpha_s)$, la funzione cercata $\varphi(x)$ verrà data dalla formola

$$\varphi(x)=\sum_0^n \frac{f(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)}\frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}, \tag{1}$$

ovvero

$$\varphi(x)=\sum_0^n f(\alpha_s)\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{s-1})(x-\alpha_{s+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_s-\alpha_0)(\alpha_s-\alpha_1)\ldots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\ldots(\alpha_s-\alpha_n)}, \tag{2}$$

che è la nota formola d'interpolazione di Lagrange, e così per l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ da sostituire a quello dato $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ si avrà la formola seguente

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\sum_0^n G_s f(\alpha_s), \tag{3}$$

essendo le G_s coefficienti numerici, *dipendenti dai punti* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *e non dalla funzione* $f(x)$, pei quali si avrà

$$G_s=\frac{1}{\psi'(\alpha_s)}\int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}\,dx, \tag{4}$$

ovvero

$$G_s=\int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{s-1})(x-\alpha_{s+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_s-\alpha_0)(\alpha_s-\alpha_1)\ldots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\ldots(\alpha_s-\alpha_n)}\,dx; \tag{5}$$

e poichè, essendo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ numeri compresi fra α e β (α e β incl.), si può scrivere in generale $\alpha_s=\alpha+\eta_s(\beta-\alpha)$, dove le $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sono numeri compresi fra 0 e 1 (0 e 1 incl.), e $0\leq\eta_0<\eta_1<\eta_2<\eta_3<\ldots<\eta_n\leq 1$ se $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si suppongono scritti in ordine crescente, basterà fare un cangiamento di variabile col porre $x=\alpha+\eta(\beta-\alpha)$ per avere $G_s=(\beta-\alpha)g_s$, con

$$g_s=\int_0^1 \frac{(\eta-\eta_0)(\eta-\eta_1)\ldots(\eta-\eta_{s-1})(\eta-\eta_{s+1})\ldots(\eta-\eta_n)}{(\eta_s-\eta_0)(\eta_s-\eta_1)\ldots(\eta_s-\eta_{s-1})(\eta_s-\eta_{s+1})\ldots(\eta_s-\eta_n)}\,d\eta, \tag{6}$$

e quindi

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=(\beta-\alpha)\sum_0^n g_s f(\alpha_s), \tag{7}$$

essendo g_s coefficienti numerici determinati dalla formola precedente che non dipendono altro che dai punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o dai numeri $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$; e *per questi numeri* g_s *si avrà la proprietà notevole espressa dalla equazione* $\sum g_s=1$, perchè avendosi $\frac{1}{\psi(x)}=\sum_0^n \frac{1}{\psi'(\alpha_s)}\frac{1}{x-\alpha_s}$ e quindi $1=\sum_0^n \frac{1}{\psi'(\alpha_s)}\frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}$, si vede subito che si ha la formola

$$\beta-\alpha=\sum_0^n \frac{1}{\psi'(\alpha_s)}\int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}\,dx=\sum_0^n G_s, \tag{8}$$

che, per essere $G_s=(\beta-\alpha)g_s$, conduce immediatamente all'altra $\Sigma g_s=1$.

Si aggiunge che nel caso particolare in cui i punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono due a due equidistanti dagli estremi α e β in modo cioè da avere $\alpha_s-\alpha=\beta-\alpha_{n-s}$ o $\alpha_s+\alpha_{n-s}=\alpha+\beta$, se nell'integrale che figura nella espressione (4) di G_s si cambia x in $\alpha+\beta-y$ o in $\alpha_s+\alpha_{n-s}-y$, e poi si pone ancora x al posto di y, l'integrale stesso diviene $-\int_\alpha^\beta \frac{\psi(\alpha+\beta-x)}{x-\alpha_{n-s}}\,dx$. Oltre a ciò, per essere $\alpha+\beta=\alpha_s+\alpha_{n-s}$, con s uguale a uno qualunque dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n$, la equazione $\psi(\alpha+\beta-x)=0$ ha evidentemente le stesse radici $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ della $\psi(x)=0$, e per questo e perchè in essa il coefficiente del primo termine è quello stesso di $\psi(x)$ moltiplicato pel fattore $(-1)^{n-1}$, oltre ad essere $\psi(\alpha+\beta-x)=(-1)^{n+1}\psi(x)$, sarà anche $\psi'(x)=(-1)^n\psi'(\alpha+\beta-x)$ ovvero $\psi'(x)=(-1)^n\psi'(\alpha_s+\alpha_{n-s}-x)$ e quindi $\psi'(\alpha_s)=(-1)^n\psi'(\alpha_{n-s})$; e così per la (4) si avrà subito la formola seguente

$$G_s=\frac{1}{\psi'(\alpha_{n-s})}\int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)}{x-\alpha_{n-s}}\,dx=G_{n-s},$$

la quale ci mostra che *in questo caso in cui i punti* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *sono due a due equidistanti dagli estremi* α *e* β, *i coefficienti estremi* G_0 *e* G_n (*o* g_0 *e* g_n), *e così quelli equidistanti dagli estremi* G_s *e* G_{n-s} (*o* g_s *e* g_{n-s}) *hanno lo stesso valore.*

245. — Rispetto poi a questi coefficienti G_s e g_s merita anche di essere notato che la loro determinazione, oltre che colla integrazione per mezzo delle formole (4) e (6), può essere fatta anche nei due modi seguenti.

Si osservi che applicando la formola d'interpolazione di Lagrange alle $n+1$ funzioni semplici $1, x, x^2, \ldots, x^n$ si ottengono le formole seguenti

$$1 = \sum_0^n \frac{1}{\psi'(\alpha_s)} \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}, \quad x = \sum_0^n \frac{\alpha_s}{\psi'(\alpha_s)} \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}, \quad x^2 = \sum_0^n \frac{\alpha_s^2}{\psi'(\alpha_s)} \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s}, \ldots, x^n = \sum_0^n \frac{\alpha_s^n}{\psi'(\alpha_s)} \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s},$$

dalle quali integrandole fra α e β, si avranno le n equazioni

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \beta - \alpha & = & G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_n, \\ \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2} & = & \alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \ldots + \alpha_n G_n, \\ \dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3} & = & \alpha_0^2 G_0 + \alpha_1^2 G_1 + \alpha_2^2 G_2 + \ldots + \alpha_n^2 G_n, \\ \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1} & = & \alpha_0^n G_0 + \alpha_1^n G_1 + \alpha_2^n G_3 + \ldots + \alpha_n^n G_n; \end{array} \right.$$

e basterà risolvere queste $n+1$ equazioni lineari per avere subito i valori di $G_0, G_1, G_2, \ldots, G_n$ che divisi per $\beta-\alpha$ daranno anche quelli di $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n$. E il determinante denominatore di questi valori sarà quello di Vandermonde relativo ai numeri $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, cioè, all'infuori di un coefficiente, sarà la radice quadrata del discriminante della equazione $\psi(x)=0$.

Oltre a questo poi si può osservare che essendo α_s una radice qualsiasi della $\psi(x)=0$, colla formola di Taylor applicata a $\psi(x)$ si avrà

$$\frac{1}{\psi'(\alpha_s)} \frac{\psi(x)}{x-\alpha_s} = 1 + \frac{\psi''(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{x-\alpha_s}{\pi(2)} + \frac{\psi'''(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{(x-\alpha_s)^2}{\pi(3)} + \ldots + \frac{\psi^{(n+1)}(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{(x-\alpha_s)^n}{\pi(n+1)},$$

e quindi integrando avremo la formola seguente

$$(10) \quad G_s = \beta - \alpha + \frac{\psi''(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{(\beta-\alpha_s)^2-(\alpha-\alpha_s)^2}{2\pi(2)} + \frac{\psi'''(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{(\beta-\alpha_s)^3-(\alpha-\alpha_s)^3}{3\pi(3)} + \ldots + \frac{\psi^{(n+1)}(\alpha_s)}{\psi'(\alpha_s)} \frac{(\beta-\alpha_s)^{n+1}-(\alpha-\alpha_s)^{n+1}}{(n+1)\pi(n+1)},$$

colla quale potremo pure determinare in modo semplice le G_s e quindi anche le g_s.

246. – Tutto questo comunque si prendano i punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ fra α e β.

Nel caso particolare poi in cui questi punti siano equidistanti fra loro e sia $\alpha_0 = \alpha$ e $\alpha_n = \beta$, allora, venendo ad essere $\alpha_s = \alpha + \frac{s}{n}(\beta-\alpha)$ e $\eta_s = \frac{s}{n}$ con $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, sarà per la (6)

$$(11) \quad g_s = (-1)^{n-s} n^n \int_0^1 \frac{\eta\left(\eta-\frac{1}{n}\right)\left(\eta-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\eta-\frac{s-1}{n}\right)\left(\eta-\frac{s+1}{n}\right)\ldots(\eta-1)}{s(s-1)(s-2)\ldots 2.1.1.2\ldots(n-s)}\, d\eta$$

o anche cambiando η in $\frac{\eta}{n}$

$$(12) \quad g_s = \frac{(-1)^{n-s}}{n\pi(s)\pi(n-s)} \int_0^n \eta(\eta-1)(\eta-2)\ldots(\eta-s+1)(\eta-s-1)\ldots(\eta-n)\, d\eta,$$

ovvero

$$(13) \qquad g_s = \frac{(-1)^{n-s}}{n\pi(s)\pi(n-s)} \int_0^n \frac{F(x)}{x-s}\, dx,$$

essendo $F(x)=0$ la equazione che ha per radici i numeri interi $0, 1, 2, \ldots, n$, e ha per coefficiente del primo termine l'unità, e, per quanto dicemmo nel § 244 *in questo caso si avrà sempre* $g_s = g_{n-s}$.

Supponendo in particolare $n = 2, 3, 4, \ldots$, e valendosi della (6) o di uno dei due processi del paragrafo precedente, con semplici calcoli che ognuno può fare da sè si trovano i valori delle g_s corrispondenti a questi casi, e si ottengono quindi le formole seguenti

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left\{ f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) \right\},$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{8}\left\{ f(\alpha) + 3f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{3}\right) + 3f\left(\alpha+\frac{2(\beta-\alpha)}{3}\right) + f(\beta) \right\},$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{90}\left\{ 7f(\alpha) + 32f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}\right) + 12f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + 32f\left(\alpha+\frac{3(\beta-\alpha)}{4}\right) + 7f(\beta) \right\},$$

. . . .

che danno tutte valori approssimati del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Le due prime di queste formole combinano colle due (43) e (44) che si dettero al § 220 [pag. 332 e 333], e quindi pei limiti superiori dell'errore che con esse si commette si possono prendere quelli che allora indicammo. La prima delle stesse formole è anche la più semplice delle formole di Simpson, come già dicemmo nel medesimo § 220.

Immaginando poi diviso l'intervallo d'integrazione (α, β) in n parti uguali a $\frac{\beta-\alpha}{n}$ che indicheremo con h_n e spezzando così l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nella somma di n integrali tutti della forma $\int_{\alpha+(s-1)h_n}^{\alpha+sh_n} f(x)\,dx$, e a ciascuno di questi ultimi applicando la prima delle formole di Simpson o di Cotes data sopra, si ritrova la formola generale di Simpson data pure al § 220, e per la quale si hanno i limiti superiori dell'errore che determinammo nel n.° 5.° del paragrafo stesso [pag. 336].

247. — Rispetto poi all'errore che si commetterà prendendo l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ per valore approssimato dell'altro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, si può osservare che esso sarà l'integrale $\int_\alpha^\beta \theta(x)\,dx$, essendo $\theta(x)=f(x)-\varphi(x)$; e quindi poichè, dietro quanto dicemmo nei due paragrafi precedenti, un valore approssimato di quest'ultimo integrale è lo zero perchè si ha $\theta(\alpha_s)=0$ per tutti i valori $0, 1, 2, \ldots, n$ di s, si potrà affermare che un limite superiore dello stesso errore sarà $\Sigma\delta_s \overline{D}_s$ o $2\Sigma\delta_s\overline{\theta}_s$, essendo $\overline{D}_s$ e $\overline{\theta}_s$ respettivamente la oscillazione e il massimo (o limite superiore) dei valori assoluti di $\theta(x)$ nell'intervallo $\delta_s=\alpha_s-\alpha_{s-1}$, quando s'intenda che se α_0 e α_n non sono α e β si abbia $\delta_0=\alpha_0-\alpha$ e $\delta_{n+1}=\beta-\alpha_n$. E così, se la funzione data $f(x)$ sarà una funzione che avrà la derivata prima determinata e finita in tutto l'intervallo da α a β, basterà ordinariamente cercare nei singoli intervalli δ_s i punti nei quali $\theta'(x)=0$, che pel teorema di Rolle esisteranno certamente in ogni intervallo δ_s esclusi tutt'al più i due δ_0 e δ_{n+1}, quando vi siano anche questi cioè quando non sia $\alpha_0=\alpha$ e $\alpha_n=\beta$; e il valore di $\overline{\theta}_s$ corrisponderà ad uno o a più di questi punti pei quali si ha $\theta'(x)=0$ nell'intervallo corrispondente δ_s.

248. — Del resto quando, come il più spesso accade, la funzione da integrarsi $f(x)$ è sviluppabile in serie convergente di potenze di x per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclus.) e si ha

$$(14)\quad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}+\ldots,$$

allora se $\varphi(x)$ è la funzione di grado n che le viene sostituita pel calcolo dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, un limite superiore del valore assoluto dell'errore che si commetterà si potrà determinare nel modo seguente.

Si osservi che se si indica con $f_n(x)$ il polinomio di grado n che si ottiene da $f(x)$ arrestandoci al termine a_nx^n, e con $R_{n+p}(x)$ il resto della serie a incominciare dal termine che segue $a_{n+p}x^{n+p}$, si avrà

$$(15)\qquad f(x)=f_n(x)+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots+a_{n+p}x^{n+p}+R_{n+p}(x);$$

e se, calcolando i valori di $f_n(x), x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+p}$ e $R_{n+p}(x)$ per $x=\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si determineranno le funzioni di grado n $\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots, \varphi_{n+p}(x), \overline{\varphi}_{n+p}(x)$ che negli stessi punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ prendono i valori così calcolati, la prima di queste funzioni $\varphi_n(x)$, essendo uguale a $f_n(x)$ in $n+1$ punti, coinciderà con $f_n(x)$ e avremo

$$(16)\ \varphi(x)=f_n(x)+a_{n+1}\varphi_{n+1}(x)+a_{n+2}\varphi_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}\varphi_{n+p}(x)+\overline{\varphi}_{n+p}(x).$$

D'altra parte, poichè tutte queste funzioni $\varphi_r(x)$ e $\overline{\varphi}_{n+p}(x)$ si determineranno per mezzo della (1) ponendovi per le $f(\alpha_0), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ i valori che prendono x^r e $R_{n+p}(x)$ per $x=\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, si vede subito che in esse le $n+1$ funzioni intere di grado n che moltiplicano questi valori di x^r e $R_{n+p}(x)$ saranno le stesse per tutte le dette funzioni φ_r e $\overline{\varphi}_{n+p}$ perchè non dipenderanno che dai punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; e quindi indicando con τ e con $\overline{R}_{n+p}(x)$ il massimo valore assoluto di quelle $n+1$ funzioni intere e quello di $\overline{R}_{n+p}(x)$ pei valori di x fra α e β, o numeri maggiori, e avendo riguardo in particolare alla espressione di $\overline{\varphi}_{n+p}$ avremo evidentemente $|\overline{\varphi}_{n+p}(x)| \leq (n+1)\tau\overline{R}_{n+p}$ per ogni valore di x fra α e β. E a causa di questo, indicando con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo e osservando che la serie (14) che rappresenta $f(x)$ è convergente in tutto l'intervallo da α a β (gli estr. α e β incl.), e quindi è convergente in ugual grado in questo intervallo (V. *Introd. al Calc. diff.* § 99, [pag. XCI]), si vede che si avrà sempre $|\overline{\varphi}_{n+p}(x)|<\sigma$ per tutti i valori di x fra α e β quando p sarà superiore a un certo numero p_σ.

Per questo, e perchè essendo

$$R_{n+p}=a_{n+p+1}x^{n+p+1}+a_{n+p+2}x^{n+p+2}+\ldots,$$

basta scrivere il valore della $\overline{\varphi}_{n+p}(x)$ determinata per mezzo della (1) per vedere subito che si ha anche in serie convergente

$$\overline{\varphi}_{n+p}=a_{n+p+1}\varphi_{n+p+1}(x)+a_{n+p+2}\varphi_{n+p+2}(x)+\ldots,$$

si può ora affermare che si avrà anche, in serie convergente in ugual grado fra α e β,

$$(17)\qquad \varphi(x) = f_n(x) + a_{n+1}\varphi_{n+1}(x) + a_{n+2}\varphi_{n+2}(x) + \dots + a_{n+p}\varphi_{n+p}(x) + \dots;$$

e quindi l'errore $\int_\alpha^\beta \{f(x) - \varphi(x)\}\,dx$ che si commetterà quando coll'applicare questi processi per la funzione $f(x)$ si prenderà l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ come valore di quello da determinarsi $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, sarà dato non solo dalla somma finita

$$a_{n+1}\int_\alpha^\beta \{x^{n+1} - \varphi_{n+1}(x)\}\,dx + a_{n+2}\int_\alpha^\beta \{x^{n+2} - \varphi_{n+2}(x)\}\,dx + \dots + a_{n+p}\int_\alpha^\beta \{x^{n+p} - \varphi_{n+p}(x)\}\,dx + \bar{\varepsilon},$$

dove $\bar{\varepsilon} = \int_\alpha^\beta \{\mathrm{R}_{n+p} - \bar{\varphi}_{n+p}(x)\}\,dx$, ma anche dalla serie

$$a_{n+1}\int_\alpha^\beta \{x^{n+1} - \varphi_{n+1}(x)\}\,dx + a_{n+2}\int_\alpha^\beta \{x^{n+2} - \varphi_{n+2}(x)\}\,dx + \dots + a_{n+p}\int_\alpha^\beta \{x^{n+p} - \varphi_{n+p}(x)\}\,dx + \dots;$$

cioè il detto errore sarà dato sotto forma finita dalla somma degli errori che in seguito all'applicazione di questi processi provengono separatamente dalle potenze $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{n+p}$ moltiplicate respettivamente per $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+p}$ e da R_{n+p}; e al tempo stesso l'errore medesimo si potrà anche riguardare come la somma della serie degli errori che provengono dall'applicare separatamente i detti processi ai termini della serie di potenze $x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+p}, \dots$ moltiplicati tali errori per $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+p}, \dots$ respettivamente.

Si osservi ora che gli errori ε_r provenienti da una qualsiasi x^r delle potenze $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots$, cioè gli integrali $\int_\alpha^\beta \{x^r - \varphi_r(x)\}\,dx$ sono naturalmente del tutto indipendenti dalla funzione data $f(x)$, e a causa della (7) sono dati dalla espressione $\dfrac{\beta^{r+1} - \alpha^{r+1}}{r+1} - (\beta - \alpha)\sum_s^n \alpha_s^r g_s$.

Essi dunque dipendono soltanto dai limiti α e β dell'integrale, dall'esponente r e dai punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e quindi, fissati come meglio si vorrà questi punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e calcolati in corrispondenza una volta per tutte colla espressione precedente gli errori $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \varepsilon_{n+3}, \dots$ provenienti dalle potenze successive $x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3}, \dots$, l'errore che coll'applicazione di questi processi d'interpolazione si avrà nel calcolo del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà la somma della serie $a_{n+1}\varepsilon_{n+1} + a_{n+2}\varepsilon_{n+2} + a_{n+3}\varepsilon_{n+3} + \dots$, e si potrà anche riguardare come uguale alla somma finita $a_{n+1}\varepsilon_{n+1} + a_{n+2}\varepsilon_{n+2} + \dots + a_{n+p}\varepsilon_{n+p}$ quando si faccia astrazione dall'errore $\bar{\varepsilon}$ proveniente da R_{n+p} che sarà arbitrariamente piccolo per valori sufficientemente grandi di p, in quanto che, per quanto dicemmo sopra intorno a $\bar{\varphi}_{n+p}(x)$, esso sarà numericamente inferiore a $(\beta - \alpha)\{1 + (n+1)\tau\}\bar{\mathrm{R}}_{n+p}$.

249. — Poichè, come abbiamo detto, questi errori ε_r, per ogni esponente r e per ogni intervallo dato (α, β), dipendono dai punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, s'intende che essi muteranno al mutare degli stessi punti, è variando questi opportunamente, i detti errori si potranno fare impiccolire, e alcuni di essi anche potranno rendersi uguali a zero.

Il caso più interessante da studiare, considerato già da Gauss, è quello in cui si riducono zero i primi $n+1$ di quegli errori $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots, \varepsilon_{2n+1}$, perocchè allora il calcolo dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, quando non si tenga conto dell'errore proveniente da R_{2n+1}, si farà applicando l'integrazione al polinomio $\varphi(x)$ di grado n corrispondente a $f(x)$, e si otterranno allora, dentro gli stessi limiti di approssimazione, quegli stessi risultati che si avrebbero se nella serie (14) che rappresenta $f(x)$ ci si arrestasse al termine di grado $2n+1$, e si calcolasse l'integrale con questa parte $f_{2n+1}(x)$ di $f(x)$, con un errore quindi che sarebbe uguale all'integrale $\int_\alpha^\beta \mathrm{R}_{2n+1}\,dx$.

Per trovare come devono essere presi i punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fra α e β perchè questo accada, osserviamo che se si considera una parte $f_m(x)$ della serie (14) che rappresenta $f(x)$ arrestata a un termine $a_m x^m$ preso dopo quello di grado n e prima di quello di grado $2n+2$, e si divide $f_m(x)$ per $\psi(x)$ essendo $\psi(x) = 0$ la equazione di grado $n+1$ che ha per radici gli $n+1$ valori $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ presi fra α e β, si avrà

$$f_m(x) = \mathrm{Q}\psi(x) + \mathrm{R},$$

essendo Q un polinomio di grado non superiore ad n, e R un altro polinomio di grado inferiore a $n+1$; e nei punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nei quali $\psi(x)$ è zero le funzioni $f_m(x)$ e R avranno gli stessi valori, per modo che R sarà il polinomio che si otterrebbe coi processi precedenti d'interpolazione quando per $f(x)$ si prendesse $f_m(x)$.

Ne segue che se si vuole che l'integrale $\int_\alpha^\beta f_m(x)\,dx$ risulti determinato *senza nessun errore* quando si calcola coi processi precedenti d'interpolazione per mezzo di un polinomio *di grado non superiore ad* n che prenda gli stessi valori di $f_m(x)$ nei punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ occorrerà prendere per esso l'integrale $\int_\alpha^\beta \mathrm{R}\,dx$, e bisognerà che l'integrale $\int_\alpha^\beta \mathrm{Q}\,\psi(x)\,dx$ risulti zero; e noi dobbiamo quindi cercare come dovrà essere presa $\psi(x)$, o come dovranno essere scelti i punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ fra α e β, perchè questo avvenga.

Ora evidentemente poichè Q è di grado n al più, l'integrale $\int_\alpha^\beta \mathrm{Q}\,\psi(x)\,dx$ risulterà certamente zero, quando i punti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ siano scelti in modo che per essi $\psi(x)$ risulti tale da far sì che gli integrali

$$(18)\qquad \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx\,,\quad \int_\alpha^\beta x\,\psi(x)\,dx\,,\quad \int_\alpha^\beta x^2\,\psi(x)\,dx\,,\ldots,\quad \int_\alpha^\beta x^n\,\psi(x)\,dx$$

siano tutti zero; quindi per la questione che ci occupa basterà trovare una funzione intera di grado $n+1$ da prendersi per $\psi(x)$ per la quale risultino soddisfatte queste condizioni e che uguagliata a zero abbia tutte le sue $n+1$ radici reali e comprese fra α e β.

Per questo si osservi che quando si ha una funzione $\lambda(x)$ che fra α e β è finita e continua insieme alle sue derivate almeno fino a quelle di un certo ordine, e negli stessi punti α e β essa e le sue prime k derivate sono tutte zero, per ogni numero intero e positivo l inferiore a k che si prenda a considerare, basterà applicare successivamente l volte l'integrazione per parti all'integrale $\int_\alpha^\beta x^l \lambda^{(k)}(x)\,dx$ prendendo i primi fattori $x^l, x^{l-1}, \ldots$ come fattori finiti per riscontrare subito che questo integrale è zero; quindi se prenderemo per $\lambda(x)$ una funzione intera che uguagliata a zero abbia α e β per radici multiple ciascuna dell'ordine $n+1$, gli integrali $\int_\alpha^\beta x^l \lambda^{(n+1)}(x)\,dx$ corrispondenti

ai valori $0, 1, 2, \ldots, n$ di l saranno tutti zero, e oltre a ciò pel teorema di Rolle applicato successivamente $n+1$ volte alla funzione stessa $\lambda(x)$ la sua derivata $(n+1)^a$ o $\lambda^{(n+1)}(x)$ si annullerà per $n+1$ valori distinti di x fra α e β; e questa derivata $\lambda^{(n+1)}(x)$ sarà anche di grado $n+1$ se prenderemo semplicemente $\lambda(x) = [(x-\alpha)(\beta - x)]^{n+1}$.

Da ciò risulta dunque che, se si prende per la funzione cercata $\psi(x)$ la derivata $(n+1)^a$ di $[(x-\alpha)(\beta-x)]^{n+1}$ e per $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si prendono le $n+1$ radici che, per quanto abbiamo detto, viene ad avere fra α e β la equazione $\frac{d^{n+1}[(x-\alpha)(\beta-x)]^{n+1}}{dx^{n+1}} = 0$, gli integrali (18) risultano appunto tutti eguali a zero; e con ciò resta pienamente risoluto il problema che ci siamo proposti.

In particolare se i limiti degli integrali che si considerano sono 1 e -1 basterà prendere $\psi(x) = \frac{d^{n+1}(1-x^2)^{n+1}}{dx^{n+1}}$ (*), cioè per le $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ basterà prendere le radici della equazione $\frac{d^{n+1}(1-x^2)^{n+1}}{dx^{n+1}} = 0$.

250. — Aggiungiamo che applicando il processo ora indicato pel calcolo approssimato dell'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ l'errore che si commette verrà ad essere l'integrale $\int_\alpha^\beta \mathrm{R}_{2n+1}\,dx$; e quando la serie $\sum a_n x^n$ che rappresenta $f(x)$ è convergente in ugual grado in tutto l'intervallo (α, β), o almeno ad essa è applicabile l'integrazione definita da α a β, l'errore stesso si ridurrà alla serie $\sum_2^\infty a_{2n+p} \int_\alpha^\beta x^{2n+p}\,dx$, o $\sum_2^\infty a_{2n+p} \frac{\beta^{2n+p+1} - \alpha^{2n+p+1}}{2n+p+1}$.

E nel caso particolare in cui, con $\alpha < \beta$, α e β sono compresi fra 0 e

(*) Le funzioni che qui compariscono $\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ moltiplicate pel fattore numerico $\frac{(-1)^n}{2^n \pi(n)}$ si considerano in Analisi per tutti i valori interi e positivi di n e anche per $n=0$, e sono conosciute sotto il nome di *funzioni di Legendre* o di *funzioni* X_n perchè vengono indicate con X_n.

Esse non sono altro che i coefficienti delle varie potenze di α nello sviluppo della espressione $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di α quando α e x hanno il modulo non superiore ad uno; e esse hanno una grandissima importanza sia per le numerose proprietà notevoli delle quali esse godono, sia perchè si presentano in molte e svariate questioni di Analisi, di Fisica matematica, di Meccanica celeste, ecc.

1 (0 e 1 incl.), allora siccome gli integrali $\int_{\alpha}^{\beta} x^{2n+p}\,dx$ vanno continuamente diminuendo al crescere indefinito di p e il maggiore è il primo di essi, cioè $\frac{\beta^{2n+3}-\alpha^{2n+3}}{2n+3}$, che non è superiore a $\frac{\beta^{2n+3}}{2n+3}$, pel solito teorema di Abel dato al § 78 [pag. LXXVI] della *Introd. al Calc. diff.*, basterà che la serie $\sum a_n$ sia convergente (anche soltanto semplicemente) per poter dire che il detto errore sarà inferiore a $\frac{\beta^{2n+3}}{2n+3}\sigma_{2n+1}$, essendo $\frac{1}{2}\sigma_{2n+1}$ un numero positivo di cui sono sempre numericamente inferiori i resti della serie $\sum a_n$ considerati dopo il termine a_{2n+1}.

Se poi qualunque siano α e β con $|\alpha| \leq |\beta|$, la serie $\sum a_n x^n$ sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini anche per $x=|\beta|$ allora siccome si ha sempre $\int_{\alpha}^{\beta} x^{2n+p}\,dx = \beta^{2n+p+1}\frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+p+1}}{2n+p+1}$ il detto errore sarà inferiore a $\frac{2|\beta|}{2n+3}R'_{2n+1}$ essendo R'_{2n+1} il resto $\sum_{2}^{\infty} a'_{2n+p}|\beta|^{2n+p}$ della serie dei valori assoluti della $\sum a_n x^n$ per $x=\beta$. E sotto queste stesse condizioni quando sia $\alpha=-\beta$ e siano a'_n i valori assoluti dei coefficienti a_n, il detto errore risulterà inferiore anche a $\frac{2\beta}{2n+3}\sum_{1}^{\infty} a'_{2n+2p}\beta^{2n+2p}$, cioè al prodotto di $\frac{2\beta}{2n+3}$ pel resto della serie $\sum_{0}^{\infty} a'_{2s}x^{2s}$ formata dai valori assoluti dei soli termini di grado pari della serie data per $x=\beta$, preso questo resto a partire dal termine $a'_{2n+2}\beta^{2n+2}$.

E così in particolare quando i limiti dell'integrale che si cerca siano -1 e 1 l'errore sarà numericamente inferiore a $\frac{2}{2n+3}(a'_{2n+2}+a'_{2n+4}+a'_{2n+6}+\dots)$.

XV.

Brevi studii sugli integrali Euleriani

Integrali Euleriani di prima specie.

251. — Nei capitoli precedenti abbiamo avuto più volte occasione di parlare degli integrali Euleriani di prima e seconda specie che abbiamo già definiti, quello di seconda specie $\Gamma(a)$ al § 76 [pag. 116-17] colla formola

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\,dx\,, \tag{1}$$

per a diverso da zero e positivo, e quello di prima specie $B(a\,,b)$ al § 143 [pag. 222] colla formola

$$B(a\,,b)=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\,, \tag{2}$$

o anche coll'altra

$$B(a\,,b)=\int_0^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\,, \tag{3}$$

per a e b diversi da zero e positivi; e ora a causa della loro importanza, oltre a ricordare qui le varie formole e proprietà che già abbiamo trovato per questi integrali, ne daremo altre fra le più interessanti.

252. — Fermandoci dapprima sugli integrali di prima specie $B(a\,,b)$, ricordiamo che al § 143 [pag. 223 in nota] dimostrammo la formola

$$B(a\,,b)=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx\,, \tag{4}$$

la quale, come la (3), mostra che si ha $B(a,b)=B(b,a)$, cioè che la funzione $B(a,b)$ non muta col mutare a in b e b in a; e si trovò pure la formola

(5) $$B(a,b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2a-1}\varphi\cos^{2b-1}\varphi\,d\varphi,$$

la quale in particolare per $a=b=\frac{1}{2}$ dà subito $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$, e per $b=a$ dà l'altra

$$B(a,a)=2^{2-2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}2\varphi)^{2a-1}d\varphi,$$

che col porre $2\varphi=t$ diviene

$$B(a,a)=2^{1-2a}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2a-1}t\,dt=2^{1-2a}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2a-1}t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{sen}^{2a-1}t\,dt\right)=2^{2-2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^{2a-1}t\,dt,$$

e conduce quindi all'altra formola

(6) $$B(a,a)=2^{1-2a}B\left(a,\frac{1}{2}\right).$$

253. — E ricordiamo pure che osservando che la (2) per $b=1-a$ ci dà $B(a,1-a)=\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$, e ricordando la formola $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi}$ che trovammo alla pag. 124, si giunge anche alla formola

(7) $$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}a\pi},$$

che demmo già alla pag. 225, e dalla quale si ha come già trovammo

(8) $$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

Cambiando b in $a+1$ nella (4) si trova

$$B(a,a+1)=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{2a}}dx,$$

e quindi si ha anche la formola

(9) $$B(a,a)=2B(a,a+1),$$

che per la (6) dà luogo anche all'altra

(10) $$B(a,a+1)=\frac{1}{2^{2a}}B\left(a,\frac{1}{2}\right),$$

che per $a=\frac{1}{2}$ dà

(11) $$B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

254. — Cambiando nella (2) x in e^{2t} con t nuova variabile si trova subito anche la formola

$$B(a,b)=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2at}}{(1+e^{2t})^{a+b}}dt=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(a-b)t}}{(e^t+e^{-t})^{a+b}}dt=2\int_0^{\infty}\frac{e^{(a-b)t}+e^{(b-a)t}}{(e^t+e^{-t})^{a+b}}dt,$$

o anche

(12) $$B(a,b)=2^{2-a-b}\int_0^{\infty}\frac{\cosh(a-b)t}{\cosh^{a+b}t}dt;$$

e di qui in particolare facendovi $a=b=\frac{1}{2}$ o anche $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, si ha $\int_0^{\infty}\frac{dt}{\cosh t}=\frac{\pi}{2}$; e valendosi delle formole precedenti si ottengono anche altri integrali e relazioni fra varii integrali.

255. — Partendo poi dalla formola (3) si ha l'altra

$$B(a,b+1)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx-\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx=$$
$$=B(a,b)-B(a+1,b),$$

e poichè integrando per parti nell'integrale $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx$ col prendere $(1-x)^b$ per fattore finito si trova subito anche $B(a,b+1)=\frac{b}{a}B(a+1,b)$, se ne deduce la formola seguente

(13) $$B(a,b)=\frac{a+b}{a}B(a+1,b),$$

la quale applicata successivamente col cambiarvi a in $a+1$, $a+2$,..., $a+n-1$, essendo n un numero intero e positivo qualsiasi, conduce all'altra

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{(a+b)\,(a+b+1)\ldots(a+b+n-1)}{a\quad(a+1)\;\ldots\;(a+n-1)}\,\mathrm{B}(a+n,b)\,,$$

ovvero

$$\mathrm{B}(a,b)=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a+1}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{a+n-1}\right)\mathrm{B}(a+n,b)\,, \tag{14}$$

e queste col farvi $a=1$ e coll'osservare che $\mathrm{B}(1,b)=\int_0^1(1-x)^{b-1}dx=\frac{1}{b}$, e cambiare n in $n-1$ ci dànno anche la formola notevole seguente

$$\mathrm{B}(n,b)=\mathrm{B}(b,n)=\frac{1\,.\,2\,.\,3\quad\ldots\quad(n-1)}{b\,(b+1)\,(b+2)\,\ldots\,(b+n-1)}\,, \tag{15}$$

che è dovuta a Wallis e che determina per mezzo di un prodotto finito le $\mathrm{B}(a,b)$ nelle quali uno almeno dei numeri a, b è un numero intero.

256. — La formola (14) col cambiarvi fra loro a e b, e $a+n$ e b condurrebbe anche ad esprimere $\mathrm{B}(a+n,b+m)$ per $\mathrm{B}(a,b)$ quando m e n son numeri interi e positivi qualsiansi.

Essa poi col farvi crescere n indefinitamente *non può* darci immediatamente $\mathrm{B}(a,b)$ sotto forma di prodotto infinito, perchè in essa al crescere indefinito di n il prodotto $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a+1}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{a+n-1}\right)$ cresce all'infinito, mentre per le formole (2), (3) o (4) le $\mathrm{B}(a,b)$ al crescere indefinito di a o di b tendono a zero; e quindi per avere una espressione per prodotto infinito di $\mathrm{B}(a,b)$ converrà fare anche altre considerazioni.

Si osservi perciò che in forza della (13), se tenendo fermo il b si fa crescere a indefinitamente, il rapporto $\frac{\mathrm{B}(a+1,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$, pure mantenendosi sempre inferiore ad uno, tenderà all'unità, e in conseguenza lo stesso evidentemente accadrà del rapporto $\frac{\mathrm{B}(a+l,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$ quando l è un numero positivo intero e finito (*).

(*) Evidentemente il rapporto $\frac{\mathrm{B}(a+l,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$ dove l è un numero positivo intero e finito, e così l'altro che si considera poi $\frac{\mathrm{B}(a+h,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$, dove h è un numero positivo e finito qualsiasi, tenderà all'unità anche se a e b crescono insieme indefinitamente ma in modo che il rapporto $\frac{b}{a}$ tenda a zero.

D'altra parte se lasciando fermo b si fa crescere a in un modo qualsiasi, dalla formola (3) si vede subito che $\mathrm{B}(a,b)$ va sempre diminuendo, quindi se h sarà un numero positivo qualsiasi compreso fra i due numeri interi l e $l+1$, avremo $\mathrm{B}(a+l,b)>\mathrm{B}(a+h,b)>\mathrm{B}(a+l+1,b)$ e

$$\frac{\mathrm{B}(a+l,b)}{\mathrm{B}(a,b)}>\frac{\mathrm{B}(a+h,b)}{\mathrm{B}(a,b)}>\frac{\mathrm{B}(a+l+1,b)}{\mathrm{B}(a,b)}\,,$$

ciò che porta a concludere che anche $\frac{\mathrm{B}(a+h,b)}{\mathrm{B}(a,b)}$ tenderà alla unità al crescere indefinito di a anche se il numero positivo e finito h non è un numero intero.

Ora indicando con α un numero positivo qualsiasi e applicando anche a $\mathrm{B}(\alpha,b)$ la formola (14), si giunge subito all'altra

$$\frac{\mathrm{B}(a,b)}{\mathrm{B}(\alpha,b)}=\prod_0^{n-1}{}_s\left(\frac{1+\dfrac{b}{a+s}}{1+\dfrac{b}{\alpha+s}}\right)\frac{\mathrm{B}(a+n,b)}{\mathrm{B}(\alpha+n,b)}\,,$$

nella quale, per quanto ora abbiamo visto, il rapporto $\frac{\mathrm{B}(a+n,b)}{\mathrm{B}(\alpha+n,b)}$ al crescere indefinito di n tenderà all'unità; quindi evidentemente si potrà scrivere

$$\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(\alpha,b)\prod_0^{\infty}{}_s\left(\frac{1+\dfrac{b}{a+s}}{1+\dfrac{b}{\alpha+s}}\right);$$

e ora supponendo $\alpha=1$ e osservando che $\mathrm{B}(1,b)=\frac{1}{b}$ si troverà per *lo sviluppo cercato di* $\mathrm{B}(a,b)$ *in prodotto infinito*

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{1}{b}\prod_0^{\infty}{}_s\left(\frac{1+\dfrac{b}{a+s}}{1+\dfrac{b}{s+1}}\right)=\frac{1}{b}\prod_0^{\infty}{}_s\frac{(s+1)\,(a+b+s)}{(a+s)\,(b+s+1)}\,, \tag{16}$$

o anche

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{a+b}{a\,b}\prod_1^{\infty}{}_s\frac{s\,(a+b+s)}{(a+s)\,(b+s)}\,. \tag{17}$$

257. — Aggiungiamo che in sostanza tanto sotto la forma (2) come sotto la forma (3) gli integrali Euleriani di prima specie $\mathrm{B}(a,b)$, quando i numeri

a e b sono razionali, sono integrali di differenziali binomi (§ 33 e seg. [pag. 71 e seg.]) e il loro valore si ha sotto forma finita, anche nel caso degli integrali indefiniti, quando uno almeno dei numeri a e b è un numero intero, e anche quando è soltanto intera la loro somma.

Del resto poi ogni integrale di differenziale binomio $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ si può ridurre alla forma di quelli Euleriani di prima specie ponendo $bx^n = -at$ con che $nbx^{n-1}dx = adt$ e quindi $\int x^m (a+bx^n)^p dx = k\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1-t)^p dt$ essendo k un coefficiente costante; e anzi Eulero e Lagrange considerarono in modo speciale gli integrali $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$, dove n, p e q sono numeri interi e positivi, indicandoli col simbolo $\left(\frac{p}{q}\right)$; e Legendre considerò questo integrale $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$ come l'integrale di prima specie, riguardando come un caso particolare quello corrispondente a $n=1$, cioè il nostro $B(p,q)$ che Egli indicava col simbolo $[p, q]$.

Integrali Euleriani di seconda specie o funzioni Γ.

258. — Passando ora a occuparci più specialmente degli integrali Euleriani di seconda specie conosciuti anche sotto il nome di *funzioni* Γ e definiti dalla formola

$$(1) \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

per ogni valore diverso da zero e positivo di a, osserviamo prima che cambiando sotto l'integrale e^{-x} in t si ottiene la formola

$$(2) \qquad \Gamma(a) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt,$$

che pure può prendersi come definizione di $\Gamma(a)$.

Ricordiamo poi che, come risulta subito dalla formola (1), e come trovammo già alle pag. 117-118 e 225, si ha $\Gamma(1)=1$ e

$$(3) \qquad \Gamma(a) = (a-1)(a-2)\dots(a-h)\Gamma(a-h),$$

essendo h un numero intero inferiore ad a, per modo che quando a è un numero intero n si ha $\Gamma(n) = 1.2.3\dots(n-1) = \pi(n-1)$, e in particolare

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1.$$

259. — Alla pag. 224 poi trovammo anche la formola

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a, b),$$

ovvero

$$(4) \qquad B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

che esprimendo in modo semplice le funzioni Euleriane di prima specie per quelle di seconda rende le funzioni di seconda specie assai più interessanti di quelle di prima specie.

Da questa poi facendovi $b=1-a$ con a compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e avendo riguardo alla (7) del § 253 si ritrova l'altra notevolissima

$$(5) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi},$$

che per $a=\frac{1}{2}$ dà subito $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, e unita alla (3) serve a ridurre il calcolo della funzione $\Gamma(a)$ per qualunque valore positivo di a a quello dei valori della stessa funzione per a compreso fra 0 e $\frac{1}{2}$.

E cambiando in questa a in $\frac{1}{2}+a$ con supporre a fra 0 e $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{ escl.}\right)$ si ottiene subito l'altra

$$(6) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi};$$

mentre applicando la (4) ai due membri della formola $B(a, a) = 2^{1-2a}B\left(a, \frac{1}{2}\right)$ data al § 252, coll'osservare che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, si trova l'altra

$$(7) \qquad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2a}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2a),$$

che vale per qualunque valore positivo di a ed è essa pure notevole, e combinata colla precedente ci dà la seguente

$$(8) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)\Gamma(2a) = 2^{2a-1}\frac{\sqrt{\pi}}{\cos a\pi}\Gamma(a),$$

che vale soltanto per $0<a<\frac{1}{2}$; e cambiando in questa a in $\frac{1}{6}-\alpha$ conduce all'altra

$$(9)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}-2\alpha\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{2}{3}+2\alpha}\cos\left(\frac{1}{6}-\alpha\right)\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}-\alpha\right),$$

che vale solo per $\alpha<\frac{1}{6}$, e colla quale quando siano calcolati i valori di $\Gamma(a)$ per $a<\frac{1}{3}$ si ottengono subito quelli per a compresa fra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ per modo che ora tenendo conto di queste formole e delle (3) e (4) si vede che basta avere calcolati i valori di $\Gamma(a)$ per a compreso fra 0 e $\frac{1}{3}$ (gli estremi esclusi) per potere determinare $\Gamma(a)$ per tutti gli altri valori positivi di a.

In particolare facendo $\alpha=0$ nella (9) avremo la formola

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)=2^{-\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{\pi}}{\cos\frac{\pi}{6}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\quad \text{ovvero}\quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{6}\right).$$

Così, ancora in particolare, facendo $a=\frac{1}{4}$ nella (5) o nella (7) si ha l'altra pure notevole

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\pi\sqrt{2},$$

e supponendo nella (3) $a=n+\frac{1}{2}$ con n numero intero si ha la seguente

$$(10)\qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

260. — Infine cambiando d'ora innanzi a in x, sempre con x diverso da zero e positivo, ricordiamo anche che alla pag. 236 trovammo la formola

$$(11)\qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\int_0^\infty\left\{e^{-z}-(1+z)^{-x}\right\}\frac{dz}{z},$$

che dà la derivata di $\log\Gamma(x)$, e allora da questa deducemmo le due

$$(12)\qquad \log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left\{(x-1)e^{-z}-\frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-x}}{\log(1+z)}\right\}\frac{dz}{z},$$

e

$$(13)\qquad \log\Gamma(x)=\int_0^\infty\left\{(x-1)e^{-z}-\frac{e^{-z}-e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right\}\frac{dz}{z},$$

che dànno due espressioni di $\log\Gamma(x)$ per mezzo di integrali definiti.

261. — Da queste formole poi se ne deducono altre che hanno una particolare importanza.

Osservando che l'integrale che figura nella (13) è derivabile rispetto ad x sotto il segno integrale perchè sono soddisfatte le condizioni del § 127 [pag. 188 e seg.], si avrà subito anche la formola

$$(14)\qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right\}dz,$$

che dà una nuova espressione di $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$, e derivando ancora conduce subito all'altra

$$(15)\qquad \frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\int_0^\infty\frac{e^{-xz}z}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Scrivendo ora l'integrale del secondo membro di questa sotto la forma $\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^\infty\frac{e^{-xz}z}{1-e^{-z}}\,dz$, e osservando che pei valori di z fra ε e ∞ la frazione $\frac{1}{1-e^{-z}}$ è la somma della progressione

$$1+e^{-z}+e^{-2z}+e^{-3z}+\dots+e^{-nz}+\dots,$$

che per gli stessi valori di z è convergente in ugual grado, si vede che sarà

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\lim_{\varepsilon=\infty}\sum_0^\infty{}_n\int_\varepsilon^\infty e^{-(x+n)z}z\,dz\,;$$

quindi, poichè in generale si ha colla integrazione per parti

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-(x+n)z}z\,dz=\frac{\varepsilon e^{-(x+n)\varepsilon}}{x+n}+\frac{e^{-(x+n)\varepsilon}}{(x+n)^2},$$

osservando che la serie $\sum_0^\infty\frac{e^{-(x+n)\varepsilon}}{(x+n)^2}$ come funzione di ε è convergente in ugual grado nell'intorno di $\varepsilon = 0$ si troverà intanto

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \varepsilon\, e^{-\varepsilon x} \sum_0^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n} \right\} + \sum_0^\infty \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Ma per essere con $x > 0$

$$\sum_0^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n} < \frac{1}{x} + \sum_1^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{n},$$

si vede che si ha

$$\varepsilon \sum_0^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n} < \varepsilon \left\{ \frac{1}{x} - \log(1 - e^{-\varepsilon}) \right\},$$

ovvero

$$\varepsilon \sum_0^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n} < \frac{\varepsilon}{x} - \varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon \log\left(1 - \frac{\varepsilon}{1.2} + \frac{\varepsilon^2}{1.2.3} - \dots\right),$$

ciò che mostra che $\varepsilon \sum_0^\infty \frac{e^{-n\varepsilon}}{x+n}$ ha per limite zero per $\varepsilon = 0$, e si conclude quindi rigorosamente che si ha la formola

(16) $$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(x+n)^2},$$

che dà lo sviluppo in serie di $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ per qualunque valore diverso da zero e positivo di x.

262. — E poichè da questa formola (16) risulta che la derivata seconda di $\log \Gamma(x)$ è sempre positiva, se ne deduce che la prima derivata cioè $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ sarà sempre crescente da 0 a ∞ e quindi non potrà annullarsi che una volta.

D'altra parte, osservando che $\Gamma(x)$ prende il valore 1 tanto per $x=1$ quanto per $x=2$, si vede che $\Gamma'(x)$ si annullerà effettivamente e soltanto per un valore α di x compreso fra 1 e 2; e per questo, e perchè $\Gamma(x)$ è sempre finito e positivo per valori finiti (e positivi) di x ed è grandissimo per x molto prossimo a zero, $\Gamma'(x)$ sarà negativo per $x < \alpha$ e positivo per $x > \alpha$ e quindi il punto α corrisponderà al *punto di minimo di* $\Gamma(x)$, nè di minimi o massimi ve ne potranno essere altri a distanza finita.

Calcolandolo effettivamente con approssimazioni successive si trova che questo minimo di $\Gamma(x)$ ha luogo per $x = 1,4616321\dots$, e il valore minimo corrispondente di $\Gamma(x)$ è $0,8856032\dots$

263. — La formola (16) conduce anche ad altre espressioni di $\log \Gamma(x)$ e della sua derivata che hanno un particolare interesse.

Osservando che da questa si ha

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} - \frac{1}{x^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{(x+n)^2}$$

per tutti i valori reali e positivi di x prossimi quanto si vuole a zero, e che il secondo membro è una funzione continua di x anche per $x = 0$ nel qual punto ha il valore $S_2 = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, si vede che la funzione $\frac{d\left[\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + \frac{1}{x}\right]}{dx}$ si mantiene finita ed ha il limite determinato S_2 al tendere di x a zero per valori positivi; quindi, poichè la serie del secondo membro pei valori positivi di x è convergente in ugual grado in qualunque intervallo che parta dal punto $x = 0$ (0 incl.), integrando fra 0 e x si troverà subito la formola seguente

(17) $$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + \frac{1}{x} = -C + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right),$$

essendo $-C$ il limite del primo membro per $x = 0$, o anche, come si vede subito da questa stessa formola, il valore di $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ per $x = 1$, che per la (14) non è altro che l'integrale $\int_0^\infty \left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{1-e^{-z}}\right\} e^{-z}\, dz$, e per la (11) può anche rappresentarsi coll'integrale $\int_0^\infty \left\{e^{-z} - (1+z)^{-1}\right\} \frac{dz}{z}$.

264. — La formola così trovata (17) dà una espressione in serie della derivata $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ che vale per qualunque valore positivo di x; e in essa figura la costante C per la quale come abbiamo detto si ha

(18) $$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right) e^{-z}\, dz, \text{ e anche } C = \int_0^\infty \left\{(1+z)^{-1} - e^{-z}\right\} \frac{dz}{z},$$

e che come vedremo fra breve non è altro che la *costante di Eulero* $\lim_{p=\infty} \left\{ \sum_1^p \frac{1}{n} - \log p \right\}$ che introducemmo già al § 240. 1° [pag. 364].

Aggiungiamo che altre espressioni della derivata $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ si trovarono già per integrali definiti per mezzo della (11) e della (14); e ora colla introduzione della costante C se ne ottengono subito anche altre perchè basta per es. sommare fra loro la (14) e la prima delle (18) per ottenere la formola seguente

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -\mathrm{C} + \int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{1-e^{-z}}\,dz\,, \tag{19}$$

che dà un'altra espressione di $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ per integrali definiti.

265. — Questa espressione poi col porre $e^{-z}=t$ si trasforma nell'altra

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -\mathrm{C} + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt \tag{20}$$

dalla quale risulta subito la particolarità notevole rilevata da Gauss che *pei valori commensurabili* $\frac{m}{n}$ *di* x *la derivata* $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ *si può avere sempre sotto forma finita,* perchè l'integrale indefinito $\int \frac{1-t^{\frac{m}{n}-1}}{1-t}\,dt$ si calcola completamente col cambiare t in t^n e si ha

$$\left[\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}\right]_{x=\frac{m}{n}} = -\mathrm{C} + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}-t^{m-1}}{1-t^n}\,dt\,. \tag{21}$$

In particolare se $n=1$, cioè se x è un numero intero m si ha

$$\left[\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}\right]_{x=m} = -\mathrm{C} + \int_0^1 (1+t+t^2+\ldots+t^{m-2})\,dt\,,$$

cioè

$$\left[\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}\right]_{x=m} = -\mathrm{C}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m-1} = \lim_{n=\infty}\left\{\log n - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} - \ldots - \frac{1}{n}\right\}, \tag{22}$$

perchè, come abbiamo detto, C è la costante di Eulero ricordata sopra.

266. — Integrando ancora la (17) fra 0 e x, come evidentemente può farsi, e osservando che, per essere $\log\Gamma(x)+\log x = \log\{x\Gamma(x)\} = \log\Gamma(x+1)$, si ha $\lim_{x=0}\{\log\Gamma(x)+\log x\}=0$, si giungerà all'altra formola

$$\log\Gamma(x) = -\log x - \mathrm{C}x + \sum_1^\infty\left(\frac{x}{n} - \log(x+n) + \log n\right); \tag{23}$$

e poichè questa per $x=1$ ci dà

$$0 = -\mathrm{C} + \sum_1^\infty\left(\frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n\right), \tag{24}$$

si vede di qui intanto che $\mathrm{C} = \lim_{p=\infty}\left(\sum_1^p \frac{1}{n} - \log p\right)$, cioè C è appunto la costante di Eulero come già dicemmo sopra che avremmo trovato, e per la quale ora abbiamo veduto che viene data anche dalle formole (18).

Eliminando poi questa costante C fra la (23) e la (24) si trova anche l'altra formola

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \sum_1^\infty\{x[\log(n+1)-\log n] - \log(x+n) + \log n\}\,; \tag{25}$$

quindi indicando con r_p il resto della serie del secondo membro a incominciare da $n=p+1$, si potrà scrivere

$$\log\Gamma(x) = -\log x + x\log(p+1) + \sum_1^p \log\frac{n}{x+n} + r_p\,,$$

o anche passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma(x) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots p(p+1)^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}\,e^{r_p}\,;$$

talchè, osservando che per ogni valore finito di x il resto r_p tenderà a zero al crescere indefinito di p, si avrà la formola notevole

$$\Gamma(x) = \lim_{p=\infty}\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots p(p+1)^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}\,, \tag{26}$$

o anche più semplicemente

$$\Gamma(x) = \lim_{p=\infty}\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}\,p^x\,. \tag{27}$$

Da questa poi avendo riguardo alla formola (15) della pag. 398 si avrà

$$\Gamma(x) = \lim_{p=\infty}\mathrm{B}(x,p)\,p^x\,, \tag{28}$$

ciò che permette ora di dire che la $\mathrm{B}(x,p)$ al crescere indefinito di p tende a zero come la potenza p^{-x}; e questo evidentemente, per quanto si vide al § 256 [pag 398-99] avviene anche quando non si pone la condizione che p cresca all'infinito soltanto per numeri interi.

267. — La nuova formola (27), che in sostanza non differisce dalla (26), è quella che Gauss prese per definizione della funzione $\Gamma(x)$ non solo per x reale e positivo, ma anche per x complesso; e partendo da questa potrebbero ritrovarsi, volendo, tutte le proprietà che abbiamo dato sopra per le funzioni $\Gamma(x)$.

Noi però ce ne varremo soltanto per trovare altre particolarità di queste funzioni, e prima di tutto per trovare gli sviluppi di $\Gamma(x)$ e $\Gamma(x+1)$ per prodotti infiniti.

Osservando che si può sempre scrivere

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,p}{x(x+1)(x+2)...)(x+p)}(p+1)^x=\frac{1}{x}\frac{1^{1-x}2^x}{x+1}\frac{2^{1-x}3^x}{x+2}\frac{3^{1-x}4^x}{x+3}\cdots\frac{(p-1)^{1-x}p^x}{x+p-1}\frac{p^{1-x}(p+1)^x}{x+p},$$

per la (26) si troverà subito la formola seguente

$$\text{(29)}\qquad \Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_1^\infty{}_p\frac{p^{1-x}(p+1)^x}{x+p}=\frac{1}{x}\prod_1^\infty{}_p\frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^x}{1+\frac{x}{p}},$$

che dà lo sviluppo cercato di $\Gamma(x)$ in prodotto infinito.

Questa poi col ricordare che $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ ci dà subito l'altra

$$\text{(30)}\qquad \Gamma(x+1)=\prod_1^\infty{}_p\frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^x}{1+\frac{x}{p}}$$

che serve per lo sviluppo in prodotto infinito di $\Gamma(x+1)$ e che col cambiarvi x in $x-1$ ci dà anche l'altra formola

$$\text{(31)}\qquad \Gamma(x)=\prod_1^\infty{}_p\frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^x}{\left(1+\frac{x-1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)}$$

per un altro sviluppo per prodotto infinito di $\Gamma(x)$.

Queste formole valgono anche pei valori complessi di x quando $\Gamma(x)$ si considera partendo dalla definizione di Gauss pei valori reali e complessi di x, e mostrano inoltre che $\Gamma(x)$ diviene infinita in tutti e soli i punti $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$,... e quindi la funzione $\frac{1}{\Gamma(x)}$ diviene zero soltanto in questi punti.

268. — Valendosi ancora della formola (26) o della (27) passeremo ora a trovare coll'applicazione della formola (64) della pag. 378 i valori di $\Gamma(x)$ e $\log\Gamma(x)$ e della derivata di $\log\Gamma(x)$ per x positivo e grandissimo, o come si dice *le espressioni asintotiche di* $\Gamma(x)$ *e* $\log\Gamma(x)$ *e della derivata di* $\log\Gamma(x)$.

Prendendo per questo nella detta formola $k=1$, $b_1=0$, $a_1=x-1$ avremo subito

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,p}{x(x+1)(x+2)\,...\,(x+p-1)}=e^{-\omega(1)}x^{x-\frac{1}{2}}\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{(x+p-1)^{x+p-\frac{1}{2}}}e^{\omega(p)},$$

e in questa $\omega(p)$ per la formola (66) della stessa pag. 378 potrà porsi anche sotto la forma $\frac{\theta_{1,p}}{8}\frac{x-1}{p(x+p-1)}$, ciò che ci mostra che la stessa $\omega(p)$ al crescere indefinito di p tende sempre a zero per qualunque valore comunque grande ma finito di x, mentre $\omega(1)$ non solo è sempre finito ma è anche inferiore a $\frac{1}{8}$.

A causa poi della (67) della stessa pag. 378, $\omega(1)$ è dato anche dalla formola

$$\omega(1)=\frac{B_1}{1.2}\left(1-\frac{1}{x}\right)-\frac{B_2}{3.4}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\left(1-\frac{1}{x^{2n-3}}\right)-\pi(2n-1)\int_0^1\sum_1^\infty{}_s\left(\frac{1}{(1+s-t)^{2n}}-\frac{1}{(x+s-t)^{2n}}\right)F_{2n}(t)\,dt,$$

per modo che si avrà anche $\omega(1)=g_0-g(x)$ essendo g_0 una costante definita dalla formola

$$g_0=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{3.4}+\frac{B_3}{5.6}-\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)\,2n-2)}-\pi(2n-1)\int_0^1\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{(1+s-t)^{2n}}F_{2n}(t)\,dt,$$

e $g(x)$ una funzione di x definita dall'altra

$$\text{(32)}\quad g(x)=\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3}+\frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5}-\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{x^{2n-3}}-$$

$$-\pi(2n-1)\int_0^1\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{(x+s-t)^{2n}}F_{2n}(t)\,dt,$$

e l'una e l'altra di queste quantità possono anche scriversi sotto la solita forma $\frac{\theta_{1,1}}{8}$ e $\frac{\theta'_{1,1}}{8}$, essendo $\theta_{1,1}$ e $\theta'_{1,1}$ numeri compresi fra 0 e 1, e quindi esse sono inferiori a $\frac{1}{8}$; e inoltre $g(x)$ tende a zero al crescere indefinito di x; e se si ricorda la formola (46) della pag. 368 si vede che $1-g_0$ non è altro che la costante numerica che allora indicammo con $\bar{C}$ e che, come allora dicemmo e come mostreremo fra breve ai §§ 271 e 272, è uguale a $\log\sqrt{2\pi}$.

Segue di qui che a causa della (27) si ha

$$\Gamma(x)=e^{-g_0+g(x)}x^{x-\frac{1}{2}}\lim_{p=\infty}\left(\frac{p}{x+p-1}\right)^{x+p-\frac{1}{2}}\frac{p}{x+p}=$$

$$=e^{-g_0+g(x)}x^{x-\frac{1}{2}}\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{\left[\left(1+\frac{x-1}{p}\right)^{\frac{p}{x-1}}\right]^{x-1}}\left(\frac{p}{x+p-1}\right)^{x-\frac{1}{2}}\frac{p}{x+p}\right\},$$

e perciò, tenendo conto della osservazione che abbiamo fatta che $1-g_0=\log\sqrt{2\pi}$, si potrà scrivere

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+g(x)}, \tag{33}$$

o anche moltiplicando per x

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+g(x)}, \tag{34}$$

per modo che si avrà

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+g(x), \tag{35}$$

e

$$\log\Gamma(x+1)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+g(x), \tag{36}$$

essendo $g(x)$ definita dalla formola (32).

Da queste formole poi colla derivazione che si applica termine a termine anche alla espressione di $g(x)$ si ottengono anche le formole seguenti

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\log x-\frac{1}{2x}+g'(x),\quad\text{e}\quad\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx}=\log x+\frac{1}{2x}+g'(x), \tag{37}$$

che dànno nuove espressioni per le derivate di $\log\Gamma(x)$ e $\log\Gamma(x+1)$ che giovano specialmente pei valori grandissimi di x.

269. — Sono queste le formole cercate, e continuando ad intendere che in esse $g(x)$ sia data dalla (32) sono perfettamente rigorose per qualunque valore finito e comunque grande di x.

Ordinariamente però s'intende invece che in queste formole $g(x)$ anzichè essere data dalla formola (32) sia la serie infinita conosciuta sotto il nome di serie di *Stirling*

$$\frac{B_1}{1\,.\,2}\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3\,.\,4}\frac{1}{x^3}+\frac{B_3}{5\,.\,6}\frac{1}{x^5}-\ldots+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{x^{2n-3}}-\ldots; \tag{38}$$

e $g'(x)$ sia la serie delle derivate dei termini di questa; cioè $g(x)$ e $g'(x)$ siano le serie che vengono dalla (32) e dalla sua derivata tralasciando in esse gli ultimi termini (termini complementari), e intendendo i secondi membri protratti all'infinito; ma allora le formole propriamente non hanno più nessun significato perchè le serie stesse sono divergenti per qualunque valore finito di x (*); nè ciò può recare alcuna meraviglia per le considerazioni che facemmo in generale al § 241 [pag. 379 e seg.].

Però queste serie hanno la particolarità notevole che risulta dalle considerazioni generali dei §§ 233-34-35 [pag. 354 e seg.], cioè che, arrestandosi in esse a qualunque termine, l'errore che si commette nel calcolo rigoroso di $g(x)$ e di $g'(x)$ è inferiore al termine che segue quello al quale ci si arresta; e quindi arrestandosi ai primi termini l'errore stesso è piccolissimo, e così le formole trovate servono bene al calcolo approssimato dei valori di $\log\Gamma(x)$ e della sua derivata per valori ognor più grandi di x.

270. — Aggiungiamo che siccome $\log\Gamma(x+1)$ può aversi anche dalla (35) cambiandovi x in $x+1$, basta confrontare il valore che così si ottiene con quello dato dalla (36) per trovare la formola seguente

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\{g(x)-g(x+1)\};$$

e quindi, avendo riguardo alla formola (32) che definisce $g(x)$, e calcolando la differenza $g(x)-g(x+1)$ coll'osservare che la differenza delle due serie $\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{(x+s-t)^{2n}}$ e $\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{(x+1+s-t)^{2n}}$ si riduce al termine $\frac{1}{(x+1-t)^{2n}}$, si trova subito l'altra formola pure notevole

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{B_1}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{B_2}{3\,.\,4}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)+\frac{B_3}{5\,.\,6}\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{(x+1)^5}\right)-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\left(\frac{1}{x^{2n-3}}-\frac{1}{(x+1)^{2n-3}}\right)-\pi(2n-1)\int_0^1\frac{F_{2n}(t)}{(x+1-t)^{2n}}dt, \tag{39}$$

(*) Basta infatti avere riguardo alla espressione (16) data alla pag. 348 pei numeri di Bernoulli B_n per trovare subito che al crescere di n i termini della serie (37) crescono all'infinito per qualunque valore positivo e finito di x.

che può servire al calcolo approssimato dei valori di $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$; e questa, quando nel secondo membro si tralasci l'ultimo termine, e s'intenda trasformato lo stesso secondo membro in una serie, conduce al solito ad una formola senza alcun significato perchè la serie ora indicata risulta divergente, ma arrestata la serie stessa ai primi termini e anche soltanto al secondo o terzo termine, cioè prendendo

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{12x(x+1)}\,,\ \text{o}\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{12x(x+1)}-\frac{1}{360}\,\frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}\,,$$

serve ugualmente a dare i valori approssimati di $\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ o di $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, cioè delle differenze $\log(x+1)-\log x$; e questo con una approssimazione grandissima se x è molto grande, perchè al solito arrestandosi a un termine qualunque nella serie l'errore che si commette coll'applicare la formola stessa è minore del termine che segue quello al quale ci si arresta.

271. — Passiamo ora a dimostrare la formola di Gauss

$$(40)\qquad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-nx+\frac{1}{2}}\,\Gamma(nx)\,,$$

della quale la formola (6) del § 259 è un caso particolare, corrispondendo essa al caso di $n=2$.

Osserviamo perciò in generale che si ha dalla (27)

$$\Gamma\left(x+\frac{i}{n}\right)=\frac{1\,.\,2\,.\,3\dots p}{\left(x+\frac{i}{n}\right)\left(x+\frac{i}{n}+1\right)\dots\left(x+\frac{i}{n}+p\right)}\,p^{x+\frac{i}{n}}\,(1+\varepsilon_{p,i})\,,$$

essendo $\varepsilon_{p,i}$ una quantità che tende a zero al crescere indefinito di p; e quindi dando ad i i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ e facendo il prodotto membro a membro delle formole che così si ottengono, troveremo subito

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(1\,.\,2\dots p)^n\,n^{np+n}\,p^{nx+\frac{n-1}{2}}}{nx\,(nx+1)\,(nx+2)\dots(nx+n\,(p+1)-1)}\,(1+\varepsilon'_p),$$

essendo ε'_p un'altra quantità che tende a zero al crescere indefinito di p.

D'altra parte calcolando $\Gamma(nx)$ per mezzo della (27) col mutarvi p in np si trova

$$\Gamma(nx)=\frac{1\,.\,2\dots np}{(nx+1)\,(nx+2)\dots(nx+np)}\,\frac{(np)^{nx}}{nx}\,(1+\varepsilon''_p)\,,$$

quindi evidentemente si può scrivere

$$(41)\qquad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=C_n\,n^{-nx}\,\Gamma(nx)\,,$$

essendo

$$C_n=\lim_{p=\infty}\frac{(1\,.\,2\dots p)^n\,n^{np+n}\,p^{\frac{n-1}{2}}}{1\,.\,2\dots np\,(nx+np+1)\,(nx+np+2)\dots(nx+np+n-1)}=$$

$$=\lim_{p=\infty}\frac{(1\,.\,2\dots p)^n}{1\,.\,2\dots np}\,n^{np+1}\,p^{-\frac{n-1}{2}}\,,$$

per modo che questa quantità C_n è indipendente da x.

Ora per determinare questa costante C_n osserviamo che per la formola (48) della pag. 369 si ha in generale

$$1\,.\,2\dots p=e^{\overline{C}}\,p^{p+\frac{1}{2}}\,e^{-p+\lambda_n(p)}\,,$$

essendo $\overline{C}$ una costante indipendente da p che si presentò anche sopra nel § 267 e che finora non determinammo, pur dicendo sempre che avremmo poi trovato che è uguale a $\log\sqrt{2\pi}$, e essendo $\lambda_n(p)$ una quantità che tende a zero al crescere indefinito di p; quindi sarà

$$\frac{(1\,.\,2\dots p)^n}{1\,.\,2\dots np}\,n^{np+1}\,p^{-\frac{n-1}{2}}=e^{(n-1)\overline{C}}\,\frac{p^{np+\frac{n}{2}}\,e^{-np+n\lambda'_n(p)}\,n^{np+1}\,p^{-\frac{n-1}{2}}}{(np)^{np+\frac{1}{2}}\,e^{-np+\lambda_n(np)}}\,,$$

e da questa avremo subito $C_n=e^{(n-1)\overline{C}}\,n^{\frac{1}{2}}$, ciò che ci porta a dire che sarà

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=e^{(n-1)\overline{C}}\,n^{-nx+\frac{1}{2}}\,\Gamma(nx)\,,$$

essendo $\overline{C}$ la costante sopra indicata.

Ma facendo ora $n=2$ si ha di qui

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=e^{\overline{C}}\,2^{-2x+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2x)\,,$$

e questa confrontata colla (7) del § 259 ci mostra che $\overline{C}=\log\sqrt{2\pi}$; e così mentre è trovato per $\overline{C}$ appunto il valore $\log\sqrt{2\pi}$ che era ancora rimasto a determinarsi, resta trovato anche quello $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}$ dell'altra costante che cercavamo C_n, e resta dimostrata anche la formola (40).

272. — Aggiungiamo che anche indipendentemente dalla formola della pag. 369, la costante C_n che figura nella (41) e quindi la formola (40) avrebbero potuto trovarsi nel modo seguente.

Facendo nella (41) $x=\frac{1}{n}$ coll'osservare che $\Gamma(1)=1$, avremmo avuto

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=C_n n^{-1},$$

o anche scrivendo in questa i fattori del primo membro in ordine inverso

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=C_n n^{-1};$$

e moltiplicando fra loro queste equazioni e tenendo conto della (5) del § 259 avremmo ottenuto

$$\frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}=C_n^2 n^{-2},$$

e per essere

(42) $$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}} \text{ (*)}$$

(*) La dimostrazione di questa formola si fa nel modo seguente:
Si osservi che la equazione

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=0$$

ha per radici i valori della esponenziale $e^{\frac{2si\pi}{n}}$ per $s=1,2,\ldots,n-1$, e quindi si ha la identità

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=\prod_1^{n-1}{}_s\left(x-e^{\frac{2si\pi}{n}}\right),$$

dalla quale facendovi $x=1$ si ottiene l'altra

$$n=\prod_1^{n-1}{}_s\left(1-e^{\frac{2si\pi}{n}}\right)=\prod_1^{n-1}{}_s\left(1-\cos\frac{2s\pi}{n}-i\operatorname{sen}\frac{2s\pi}{n}\right),$$

ovvero

$$n=2^{n-1}\prod_1^{n-1}{}_s\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}-i\cos\frac{s\pi}{n}\right)=2^{n-1}\prod_1^{n-1}{}_s\left(\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{\frac{si\pi}{n}}\right),$$

o anche

$$n=2^{n-1}e^{-(n-1)i\frac{\pi}{2}}e^{(1+2+\ldots+n-1)\frac{\pi i}{n}}\prod_1^{n-1}{}_s\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}=2^{n-1}\prod_1^{n-1}{}_s\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n},$$

e quindi infine $\prod_1^{n-1}{}_s\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

ne avremmo subito dedotto come trovammo sopra $C_n=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$, giungendo così senz'altro alla (40); dopo di che tenendo conto della relazione $C_n=e^{(n-1)\overline{C}}n^{\frac{1}{2}}$ che abbiamo trovata nel paragrafo precedente saremmo giunti a determinare anche il valore $\log\sqrt{2\pi}$ della costante $\overline{C}$ della pag. 369.

273. — Notiamo anche che la (40) per $x=1$ ci dà come caso particolare la formola notevole

(43) $$\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-n+\frac{1}{2}}1.2\ldots(n-1);$$

e osserviamo inoltre che la (40) stessa ci dà l'altra

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{n}}n^{-nx+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(nx)}{\Gamma(x)},$$

mentre per $x=\frac{1}{n}$ la stessa (40) ci dà

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}},$$

e dal confronto di queste ultime due formole si vede che al tendere di x a zero il rapporto $\frac{\Gamma(nx)}{\Gamma(x)}$ tende verso $\frac{1}{n}$, cioè si ha $\lim_{x=0}\frac{\Gamma(nx)}{\Gamma(x)}=\frac{1}{n}$, come del resto risulta subito anche dall'essere $\lim_{x=0}x\Gamma(x)=\lim_{x=0}\Gamma(x+1)=1$.

274. — La (40) poi conduce ad un'altra formola dovuta a Raabe che ha essa pure un particolare interesse.

Si osservi che prendendo i logaritmi dei due membri della detta formola (40) si trova l'altra

(44) $$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}_s\log\Gamma\left(x+\frac{s}{n}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\log 2\pi+\frac{1}{2n}\log n-x\log n+\frac{\log\Gamma(nx)}{n},$$

e poichè la (35) col cambiarvi x in nx ci dà subito

$$\frac{\log\Gamma(nx)}{n}-x\log n=\frac{\log\sqrt{2\pi}}{n}-\frac{1}{2n}\log n+x\log x-\frac{1}{2n}\log x-x+\frac{1}{n}g(nx),$$

basta osservare che al crescere indefinito di n le quantità $\frac{1}{n}\log n$ e $g(nx)$ tendono a zero per dedurne intanto che il limite di $\frac{\log\Gamma(nx)}{n}-x\log n$ al crescere indefinito di n tende verso $x\log x-x$.

D'altra parte per la definizione degli integrali definiti al crescere indefinito di n il primo membro della formola (44) tende verso l'integrale $\int_x^{x+1} \log\Gamma(x)\,dx$, o $\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,dt$; quindi si può senz'altro concludere che per qualunque valore positivo di x, non escluso il valore $x=0$ perchè $\log\Gamma(x)$ è integrabile da 0 a ∞, si ha la formola

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,dt = \int_x^{x+1} \log\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x\,, \tag{45}$$

che è appunto quella di Raabe che volevamo dimostrare.

275. — Le formole che abbiamo trovato nel § 268 dànno le espressioni rigorose di $\Gamma(x)$ e $\log\Gamma(x)$ quando si prende in esse la $g(x)$ sotto forma finita, ma non possono più dirsi rigorose, per quanto servano ancora al calcolo approssimato delle stesse funzioni $\Gamma(x)$ e $\log\Gamma(x)$, quando si prendano sotto forma di serie coll'intendere che in esse $g(x)$ sia la serie di Stirling (38).

Volendo avere anche serie rigorose per $\log\Gamma(x)$ o come più si usa per $\log\Gamma(x+1)$ bisogna valersi della (23) o della (25) del § 266 [pag. 406-07].

Ora partendo dalla (23) dopo avervi cambiato x in $x+1$ si ha

$$\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - \mathrm{C}(x+1) + \sum_1^\infty\left(\frac{x+1}{n} - \log(x+1+n) + \log n\right),$$

e si può scrivere

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - \mathrm{C}x - \mathrm{C} + \lim_{n=\infty}\Big\{&\frac{x}{1}+\frac{1}{1}-\log 2-\log\left(1+\frac{x}{2}\right)+\log 1 +\\ &+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\log 3-\log\left(1+\frac{x}{3}\right)+\log 2 +\\ &+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}-\log 4-\log\left(1+\frac{x}{4}\right)+\log 3 +\\ &+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\\ &+\frac{x}{n}+\frac{1}{n}-\log(n+1)-\log\left(1+\frac{x}{n+1}\right)+\log n\Big\},\end{aligned}$$

ovvero

$$\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - \mathrm{C}x - \mathrm{C} + x + \lim_{n=\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right]+\sum_2^n\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\right\};$$

e poichè $\lim\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right]=\mathrm{C}$, si potrà scrivere anche

$$\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - (\mathrm{C}-1)x + \lim_{n=\infty}\sum_2^n\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Ma supponendo ora x compreso fra -1 e 1 si ha sempre

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^m}{mn^m} + \dots;$$

quindi indicando come al solito con S_m la somma della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^m}$ per $m>1$ e con $\varepsilon_{m,n}$ il suo resto si potrà scrivere evidentemente

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - (\mathrm{C}-1)x + \lim_{n=\infty}\Big\{&\frac{x^2}{2}(\mathrm{S}_2-1-\varepsilon_{2,n}) - \frac{x^3}{3}(\mathrm{S}_3-1-\varepsilon_{3,n}) +\\ &+\frac{x^4}{4}(\mathrm{S}_4-1-\varepsilon_{4,n}) - \dots\Big\},\end{aligned}$$

donde osservando che per essere x compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 per ora escl.) la serie $\sum\frac{|x|^n}{n}$ è convergente, e a partire da un certo valore di n le $\varepsilon_{2,n}$ e a fortiori le altre $\varepsilon_{3,n}, \varepsilon_{4,n}, \dots$ sono tutte inferiori a un numero dato σ arbitrariamente piccolo, si conclude che per tutti i valori di x da -1 a $+1$ (-1 e 1 per ora escl.) si ha la formola

$$\log\Gamma(x+1) = -\log(x+1) - (\mathrm{C}-1)x + \frac{x^2}{2}(\mathrm{S}_2-1) - \frac{x^3}{3}(\mathrm{S}_3-1) + \frac{x^4}{4}(\mathrm{S}_4-1) - \dots; \tag{46}$$

la quale, coll'osservare che per gli stessi valori di x si ha

$$\log(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

si trasforma anche nell'altra

$$\log\Gamma(x+1) = -\mathrm{C}x + \frac{x^2}{2}\mathrm{S}_2 - \frac{x^3}{3}\mathrm{S}_3 + \frac{x^4}{4}\mathrm{S}_4 - \dots \tag{47}$$

che è quella che volevamo trovare, e che con facilità applicando i teoremi dati sulle serie convergenti in ugual grado nella *Introd. al Calc. diff.* si vedrebbe che vale anche per $x=1$, come evidentemente vale per $x=-1$ per essere allora $\Gamma(x+1)=\infty$.

276. — Osserviamo poi che, per x diverso da 0 da 1 e da -1, dalle formole note

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,, \quad \text{e} \quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}\,,$$

si trae l'altra

$$\Gamma(x+1)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}\,,$$

che può considerarsi come valida anche per $x=0$, e quindi si ha

$$\log\Gamma(x+1)=\log\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}-\log\Gamma(1-x)\,,$$

e da questa, valendosi della (46) nella quale sia cambiato x in $-x$, si ottiene la seguente

$$(48)\quad \log\Gamma(x+1)=\log\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}+\log(1-x)-(\mathrm{C}-1)\,x-\frac{x^2}{2}(\mathrm{S}_2-1)-\frac{x^3}{3}(\mathrm{S}_3-1)-\frac{x^4}{4}(\mathrm{S}_4-1)\ldots$$

e ora sommando questa colla (46) stessa si trova l'altra

$$(49)\quad \log\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}-\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-(\mathrm{C}-1)x-\frac{x^3}{3}(\mathrm{S}_3-1)-\frac{x^5}{5}(\mathrm{S}_5-1)-\ldots$$

che è più rapidamente convergente della (46).

Questa poi quando venga scritta sotto la forma

$$(50)\quad \log\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{x}{1+x}\,\frac{\pi(1-x)}{\operatorname{sen}\pi(1-x)}\right\}-(\mathrm{C}-1)x-\frac{x^3}{3}(\mathrm{S}_3-1)-\frac{x^5}{5}(\mathrm{S}_5-1)-\ldots$$

vale anche per $x=1$ perchè il secondo membro è continuo per $x=1$ come il primo, e con queste si calcolano i valori dei logaritmi della funzione $\Gamma(x)$ pei valori di x fra 1 e 2 o anche se si vuole fra 0 e 1 formando una tavola di questi logaritmi colla quale poi, valendosi della formola (3) del § 258 [pag. 400] possono calcolarsi gli stessi logaritmi anche per gli altri valori positivi di x (*). Questa tavola serve effettivamente nella pratica per la determinazione numerica dei tanti integrali che si riducono a dipendere dalle funzioni Γ e dei quali noi pure ne trovammo alcuni nei capitoli precedenti.

277. — Facendo poi nella (50) $x=1$ e osservando che $\Gamma(2)=1$ se ne

(*) V. ad es. BERTRAND, *Calcolo diff. ed integr.*, Vol. II, pag. 285 e seg.

deduce la formola seguente

$$(51)\qquad \mathrm{C}=1-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{3}(\mathrm{S}_3-1)-\frac{1}{5}(\mathrm{S}_5-1)-\frac{1}{7}(\mathrm{S}_7-1)-\ldots,$$

che può servire per la determinazione della costante C di Eulero.

Una formola poi che serve anche più rapidamente al calcolo di questa costante si trova facendo $x=\pm\frac{1}{2}$ nella (49), e ricordando che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ e $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; ma la formola che più rapidamente d'ogni altra conduce al calcolo di C con quel numero di decimali esatte che più ci piace di avere, e non richiede il calcolo della somma $\mathrm{S}_3, \mathrm{S}_5, \mathrm{S}_7, \ldots$, è quella che si trova valendosi della (22) del § 265 [pag. 406] e della seconda delle (37) del § 268 [pag. 410] che dà la espressione di $\dfrac{d\log\Gamma(x+1)}{dx}$.

Valendosi infatti della (22) del § 265 col cambiarvi m in $x+1$, intendendo che x sia un numero intero, si trova la formola

$$\mathrm{C}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}-\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx}\,,$$

e quindi per la seconda delle (37) del § 268 si ha

$$(52)\qquad \mathrm{C}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}-\log x-\frac{1}{2x}-g'(x)\,;$$

e prendendo per x un numero intero a piacere e per $g'(x)$ quel numero che vorremo dei termini che si ottengono col derivare quelli della serie di Sterling (38), si ha sempre di qui un valore approssimato di C con un errore che è inferiore al termine che segue quello a cui ci si arresta nella serie delle derivate dei termini della (38) che s'intende sostituita a $g'(x)$.

Così prendendo $x=10$, e fermandoci al sesto termine della detta serie cioè a quello che contiene x^{12} nel denominatore, si trova

$$\mathrm{C}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)-\log 10-\frac{1}{20}+\frac{0{,}01}{12}-\frac{0{,}001}{120}+$$
$$+\frac{0{,}000\,001}{252}-\frac{0{,}000\,000\,01}{240}+\frac{0{,}000\,000\,000\,1}{132}-\frac{0{,}000\,000\,000\,691}{32760}\,,$$

e prendendo

$$\log 10=2.302\,585\,092\,994\,045\,68\ldots,$$

si ottiene infine

$$\mathrm{C}=0{,}577\,215\,664\,901\,532\ldots,$$

per valore della costante di Eulero con quindici decimali esatte.

XVI.

Breve studio sugli integrali multipli. Trasformazione delle variabili in questi integrali

278. — Nei capitoli precedenti abbiamo avuto più volte occasione di considerare integrali doppii, tripli ecc. come risultati di successive integrazioni, e la ricerca delle superficie e dei volumi ci condusse anche a riguardare questi integrali doppii o tripli come somme di elementi infinitesimi del secondo o del terzo ordine, al modo stesso che un integrale semplice è il limite di una somma di elementi infinitesimi che almeno ordinariamente possono riguardarsi come di prim'ordine.

In generale un integrale multiplo

$$(1)\quad \int_{\varphi_1}^{\psi_1} dx_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_3(x_1,x_2)}^{\psi_3(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2})}^{\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2})} dx_{n-1} \int_{\varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_n$$

può anch'esso riguardarsi come limite di una somma di elementi della forma $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\,dx_n$ ottenuta facendo variare dapprima soltanto la x_n da $\varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ fino a $\psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ per intervalli dx_n che finiscono per divenire minori di qualsiasi quantità data mentre le altre variabili $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ restano invariate e hanno sistemi di valori qualsiasi fra quelli che esse possono prendere fra i limiti degli integrali, poi facendo variare al modo stesso x_{n-1} da $\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2})$ fino a $\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2})$ per intervalli dx_{n-1} e lasciando allora invariate le variabili rimanenti $x_1, x_2,\ldots, x_{n-2}$, ecc.

I varii sistemi di valori che così vengono a prendere $x_1, x_2,\ldots, x_n$ nella somma il cui limite dà l'integrale sono sistemi di valori che sono compresi in un dato campo; come per es. quando si tratta degli integrali doppii

$$(2)\quad \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \;, \quad \text{o} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,,$$

o dell'integrale triplo

$$(3)\quad \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,,$$

i sistemi di valori che x e y, o x, y e z possono prendere respettivamente sono quelli corrispondenti ai punti compresi nell'area racchiusa dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$, o nell'area racchiusa dal rettangolo formato dalle quattro rette $x=a, x=b, y=c, y=d$, o nello spazio racchiuso dalla superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2=1$; e come questi integrali si dicono estesi al cerchio, o al rettangolo, o alla sfera corrispondente, così l'integrale (1) si dice esteso al campo T dei sistemi dei valori che possono prendere $x_1, x_2,\ldots, x_n$ senza uscire dai limiti delle integrazioni.

In generale poi, al modo stesso che i limiti degli integrali (2) e (3) possono considerarsi come definiti, pel primo dalla diseguaglianza $x^2+y^2-1\leq 0$, pel secondo dalle disuguaglianze $c\leq y\leq d$, $a\leq x\leq b$ e pel terzo dalla diseguaglianza $x^2+y^2+z^2-1\leq 0$, nel senso che i sistemi di valori che possono attribuirsi alle variabili debbono soddisfare a queste condizioni, così in generale un integrale multiplo (1), rispetto ai limiti, può considerarsi come definito da una o più disuguaglianze della forma $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq 0$, o in generale da determinate condizioni ai limiti.

279. — E nel caso di un numero qualunque di variabili $x_1, x_2,\ldots, x_n$, estendendo alla scomposizione in elementi dello spazio corrispondente T i concetti geometrici relativi al caso degli elementi lineari e degli elementi superficiali del piano *in coordinate cartesiane ortogonali* o dell'elemento dello spazio a tre dimensioni pure *in coordinate cartesiane ortogonali,* cioè considerando come elemento ΔT dello spazio T l'insieme dei punti $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ pei quali $x_1, x_2,\ldots, x_n$ sono respettivamente compresi fra x_1 e $x_1+\Delta x_1$, fra x_2 e $x_2+\Delta x_2,\ldots$, e fra x_n e $x_n+\Delta x_n$, e come misura della estensione dello stesso elemento il prodotto $\Delta x_1\,\Delta x_2\ldots\Delta x_n$, s'intende che l'integrale multiplo (1) potrà anche scriversi in modo abbreviato sotto la forma degli integrali semplici col simbolo

$\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dT$ e, come già abbiamo detto, potrà anche considerarsi come limite di una somma presa nel senso sopra indicato.

280. – Tenendo conto di questo e, con un concetto più generale, immaginando scomposto un campo finito T in elementi contigui $\Delta_s T = \Delta_s x_1\,\Delta_s x_2\ldots\Delta_s x_n$ con una legge qualsiasi, si estende ancora il concetto d'integrale multiplo, e — come nel caso degli integrali definiti per le funzioni di una sola variabile — si defi-

nisce ora un integrale esteso al campo T per le funzioni sempre finite $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dicendo che esso è il limite della somma $\Sigma f_s \Delta_s T$ estesa a tutti gli elementi $\Delta_s T$ che trovansi in T quando questi elementi $\Delta_s T$, e insieme i $\Delta_s x_1, \Delta_s x_2, \dots, \Delta_s x_n$ che li compongono per prodotto, impiccoliscono indefinitamente con leggi del tutto arbitrarie, e le f_s che li moltiplicano sono valori della funzione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nell'elemento corrispondente $\Delta_s T$ o anche, più generalmente, sono valori compresi fra il limite superiore e il limite inferiore della funzione nello stesso elemento $\Delta_s T$. E ciò nel supposto che i limiti del campo T siano tali che continuata, ove occorra, la scomposizione dello spazio in elementi $\Delta_s T$ anche fuori di T, la somma di tutti quelli fra questi elementi che, pure essendo in parte fuori di T, contengono punti limiti di T finisca per impiccolire quanto si vuole all'impiccolire indefinito delle $\Delta_s x_1, \Delta_s x_2, \dots, \Delta_s x_n$ con leggi qualsiansi.

281. — Con questa definizione poi, procedendo come nel caso degli integrali definiti di una sola variabile, e indicando con D_s la oscillazione della funzione nel campo $\Delta_s T$, si trova che per la integrabilità di una funzione finita qualsiasi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in un campo T è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione (del tutto simile a quella che si ha per gl'integrali delle funzioni di una sola variabile) $\lim \Sigma D_s \Delta_s T = 0$ (*), per modo che si riscontra

---

(*) Come abbiamo detto sopra le dimostrazioni delle particolarità relative agli integrali multipli intesi nel modo ora indicato si fanno con considerazioni del tutto simili a quelle che si fecero pel caso degli integrali semplici; e qui per darne una idea, per quanto possano apparire ovvie a tutti, le esporremo brevemente pel caso degli integrali doppii.

S'indichino perciò con x e y le due variabili, e si considerino queste come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, e la porzione di piano che dovrà essere il campo T d'integrazione si supponga tutta a distanza finita e limitata da una o più linee o parti di linee per le quali siano soddisfatte le condizioni generali poste sopra, come avverrà sempre quando siano linee o parti di linee continue rappresentate da equazioni della forma $y = y(x)$ o $x = x(y)$, essendo $y(x)$ e $x(y)$ funzioni finite e continue.

S'immagini poi scomposto il piano con leggi qualsiansi in rettangoli elementari Δ_s contigui gli uni agli altri e con lati paralleli agli assi x e y, estendendo la scomposizione anche a piccole porzioni all'esterno di T, ma limitandoci poi, per la determinazione e per lo studio dell'integrale, a considerare soltanto quelli fra questi rettangoli che sono contenuti per intiero nel campo T, poichè per le fatte ipotesi la somma degli altri rettangoli elementari, in parte esterni a T, che contengono punti del contorno potrà ridursi piccola a piacere.

È evidente allora che indicando con l_s e L_s i limiti inferiore e superiore nei rettangoli Δ_s della funzione da integrarsi $f(x, y)$, se questa funzione sarà atta alla integrazione entro T, le somme $\Sigma l_s \Delta_s$ e $\Sigma L_s \Delta_s$ avranno lo stesso limite, e quindi, qualunque sia la scomposizione effettuata in rettangoli Δ_s, le somme $\Sigma D_s \Delta_s$ avranno per limite zero; per modo che questa condizione si presenta intanto come condizione necessaria per la integrabilità della funzione.

in particolare che sono atte alla integrazione le funzioni finite e continue in tutto T e lo sono anche molte funzioni discontinue.

E poichè, quando la funzione data è atta alla integrazione la scomposizione dello spazio T in elementi $\Delta_s T$ e il passaggio al limite potranno farsi con leggi qualunque senza che venga a mutare il limite che rappresenterà l'integrale, s'intende che l'integrale così definito potrà sempre ottenersi anche con successive integrazioni, ciò che ci riporta ai concetti precedentemente esposti; e queste integrazioni potranno farsi in quell'ordine che più ci piacerà, salvo a cangiare corrispondentemente i limiti quando si muta l'ordine delle integra-

---

Per dimostrare ora che questa condizione è anche sufficiente, osserviamo prima che quando è soddisfatto il limite della somma $\Sigma f_s \Delta_s$, se esiste, evidentemente non muta quando conservando la stessa legge per la divisione del piano in rettangoli Δ_s si mutano i valori f_s; e considerando poi due scomposizioni diverse qualsiansi del piano in elementi rettangolari Δ_s e Δ'_s, intendiamo segnati effettivamente questi rettangoli, e facciamo una nuova scomposizione in altri rettangoli prolungando tutti i lati dei rettangoli delle due scomposizioni date, e considerando i nuovi rettangoli che vengono così a trovarsi nel campo T.

Ogni rettangolo R_h della nuova scomposizione sarà parte di uno dei rettangoli di ciascuna delle due prime divisioni o sarà uguale a uno di questi, per modo che ogni rettangolo della prima o della seconda divisione, per esempio il rettangolo Δ_s della prima divisione, si comporrà di uno o più rettangoli $R_h, R_{h+1}, \dots$ della divisione composta, e ogni prodotto $f_s \Delta_s$ sarà una somma di prodotti della forma $f_s R_h$, $f_s R_{h+1}, \dots$ i quali potranno ciascuno trasformarsi nelle somme $\bar{f}_h R_h + (f_s - \bar{f}_h) R_h$, $\bar{f}_{h+1} R_{h+1} + (f_s - \bar{f}_{h+1}) R_{h+1}, \dots$ essendo $\bar{f}_h, \bar{f}_{h+1}, \dots$ valori di $f(x, y)$ scelti fra i limiti inferiori e superiori di $f(x, y)$ nei nuovi rettangoli $R_h, R_{h+1}, \dots$ respettivamente.

Si avrà quindi evidentemente

$$f_s \Delta_s = \bar{f}_h R_h + \bar{f}_{h+1} R_{h+1} + \dots + (f_s - \bar{f}_h) R_h + (f_s - \bar{f}_{h+1}) R_{h+1} + \dots =$$

$$= \bar{f}_h R_h + \bar{f}_{h+1} R_{h+1} + \dots + \eta_s D_s (R_h + R_{h+1} + \dots) = \bar{f}_h R_h + \bar{f}_{h+1} R_{h+1} + \dots + \eta_s D_s \Delta_s,$$

essendo η_s un numero compreso fra -1 e 1, e perciò sarà $\Sigma f_s \Delta_s = \Sigma \bar{f}_h R_h + \eta \Sigma D_s \Delta_s$ e similmente sarà $\Sigma f'_s \Delta'_s = \Sigma \bar{f}_h R_h + \eta' \Sigma D'_s \Delta'_s$, essendo η e η' due nuovi numeri compresi fra -1 e 1.

Segue di qui che, se le somme $\Sigma D_s \Delta_s$ e $\Sigma D'_s \Delta'_s$ finiscono per divenire piccole quanto si vuole all'impiccolire indefinito delle Δ_s e Δ'_s, altrettanto avverrà della differenza $\Sigma f_s \Delta_s - \Sigma f'_s \Delta'_s$; quindi poichè le due scomposizioni in rettangoli Δ_s e Δ'_s possono supporsi due scomposizioni assolutamente distinte fatte con leggi diverse, e anche possono supporsi come corrispondenti a due stati successivi di una unica divisione per modo da potere allora applicare il noto teorema di Cauchy che assicura della esistenza del limite, si conclude evidentemente che, sotto le condizioni poste, le somme $\Sigma f_s \Delta_s$ hanno sempre un limite che è lo stesso qualunque sia il modo di scomposizione del piano in rettangoli Δ_s, e qualunque siano i valori f_s che si scelgano per ogni rettangolo, ciò che corrisponde a dire che la funzione $f(x, y)$ è atta alla integrazione nel campo dato T.

zioni stesse, tutte le volte che questi limiti non siano costanti (§ 130 [pag. 192 e seg.]); mentre quando i limiti sono costanti (e finiti) la invertibilità delle integrazioni senza cambiare i limiti relativi alle singole variabili già da noi dimostrata al ricordato § 130 risulta ora evidente, e questo anche pel caso più generale delle funzioni finite e atte alla integrazione nei campi corrispondenti.

282. — Aggiungiamo che la possibilità della inversione delle integrazioni, con un corrispondente cambiamento dei limiti quando occorra, potrà condurre anche a formole molto notevoli e molto utili.

Così per es. quando si consideri un integrale doppio $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ esteso all'area del triangolo formato sul piano xy dall'asse delle x dalla retta inclinata di 45° su quest'asse condotta per l'origine e da una retta parallela all'asse delle y e alla distanza a da quest'asse (supposto gli assi ortogonali), se si farà prima l'integrazione rispetto ad y e poi quella rispetto ad x si vede subito che il primo integrale (cioè quello relativo ad y) dovrà essere limitato fra 0 e x per ogni valore di x, e il secondo dovrà poi essere limitato fra 0 ed a per modo che l'integrale che si considera sarà l'integrale doppio $\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy$, e invece se si farà prima l'integrazione rispetto ad x e poi quella rispetto ad y il primo integrale dovrà essere limitato fra y e a per ogni valore di y, e il secondo dovrà poi essere limitato fra 0 e a per modo che si avrà l'integrale doppio $\int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx$; e questo permette di dire che *si avrà sempre la formola seguente*

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx, \tag{4}$$

che è dovuta a *Dirichlet,* ed è molto notevole.

Altre formole simili potrebbero aversi considerando integrali doppii estesi ad altri triangoli o ad altre aree, come potrebbero aversi formole ugualmente notevoli per integrali tripli ecc.

283. — Valendosi poi della nuova definizione e seguendo i processi tenuti pel caso degli integrali semplici si estendono agli integrali multipli le particolarità che si trovarono pei detti integrali semplici, come in particolare ad es. si estendono quelle sui valori approssimati degli integrali date al § 7, 8.° [pag. 20-21] e quelle sui loro valori medii date nel Capo primo del Capitolo XIV [pag. 286 e seg.] salvo a fare convenienti limitazioni rispetto alle funzioni da integrarsi dovute alla circostanza che ora vi sono più variabili invece di una sola (*), e si estendono pure le definizioni e le considerazioni relative pel caso delle funzioni che hanno alcuni punti o linee d'infinito ecc. intendendo esclusi questi punti, linee ecc. con spazii arbitrariamente piccoli di forma qualsiansi, e considerando gli integrali come i limiti di quelli estesi alle parti rimanenti degli spazii medesimi ecc.

284. — Premesse queste considerazioni generali, partiamo ora da un integrale multiplo esteso ad un campo finito $\int\int\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, che per quanto abbiamo detto potremo considerare come una successione di integrali definiti pei quali è ammissibile la inversibilità delle integrazioni, salvo a cangiare convenientemente i limiti quando occorra; e passiamo a dare la formola che serve alla trasformazione degli integrali multipli quando alle variabili $x_1, x_2,\ldots, x_n$ se ne sostituiscono altre $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_n$ legate alle prime da n equazioni della forma

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 = x_1(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n) & , \\ x_2 = x_2(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n) & , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & , \\ x_{n-1} = x_{n-1}(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n) & , \\ x_n = x_n(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n-1},\rho_n) & , \end{array}\right. \tag{5}$$

nelle quali le funzioni del secondo membro sono finite e continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine, almeno nel campo che si considera o in tutto questo campo fatta tutto al più eccezione per un numero finito di punti, e il determinante funzionale (Jacobiano) formato colle derivate di $x_1, x_2 \ldots x_n$, rispetto a $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_n$ è differente da zero per tutto fuorchè in punti speciali.

Per questo, seguendo i processi dei §§ 167 e seg. [pag. 226 e seg.] del *Calcolo differenziale* col supporre le (5) disposte in ordine conveniente, immagineremo ricavato dalla prima delle (5) un valore ρ_1 e sostituito in tutte le

(*) Per ciò che riguarda i valori medii degli integrali multipli, Vedi ad es. Arzelà (Mem. dell'Accad. delle Sc. di Bologna, 1891) e Dini (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, Tomo XVIII).

altre; poi dalla prima di queste ultime $n-1$ equazioni intenderemo ricavato un valore per ρ_2 e sostituito nelle rimanenti; e così continuando si formerà il sistema di equazioni la prima delle quali è ancora la prima delle (5)

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_1 = F_1(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n) & , \\ x_2 = F_2(x_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n) & , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & , \\ x_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_n) & , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & , \\ x_{n-1} = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, \rho_{n-1}, \rho_n) & , \\ x_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, \rho_n) & , \end{array}\right.$$

le quali diverranno identiche quando si torni a porre in esse i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ dati dalle (5) stesse, e si ridurranno nuovamente alle (5) quando in ciascuna di esse nei secondi membri si sostituiscano successivamente i valori di $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ dati dalle equazioni che la precedono; e ora il passaggio dalle prime variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ alle nuove $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ invece di farsi tutto in un tempo colle equazioni (5) potrà farsi successivamente col mezzo delle equazioni (6).

Si comincierà perciò col fare uso dell'ultima delle formole (6), cioè della seguente

$$(7)\qquad x_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, \rho_n),$$

sostituendo così alla variabile x_n la variabile ρ_n, e lasciando invariate le altre variabili $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$; e allora la sostituzione nell'integrale dato $\int\int\dots\int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ si farà ponendovi per x_n il valore precedente (7) e per dx_n la espressione $dx_n = \dfrac{\partial F_n}{\partial \rho_n} d\rho_n$ (giacchè nell'integrazione relativa a x_n le variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ restano invariate) e cambiando al tempo stesso i limiti dell'integrale corrispondente per mezzo della (7).

Si troverà così

$$\int\int\dots\int f\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}\, dx_n = \int\int\dots\int f \frac{\partial F_n}{\partial \rho_n}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}\, d\rho_n$$

e con ciò la variabile x_n sarà eliminata dall'integrale.

Riducendo ora l'integrale trasformato all'altro

$$\int\int\dots\int f \frac{\partial F_n}{\partial \rho_n}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-2}\, d\rho_n\, dx_{n-1}$$

con una inversione delle due prime integrazioni (quelle cioè relative a ρ_n e a x_{n-1}), ciò che al più ci farà cangiare i limiti dell'integrale, si viene a ricadere nel caso precedente, poichè basta fare uso della penultima delle equazioni (6), cioè della $x_{n-1} = F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, \rho_{n-1}, \rho_n)$, e ripetere il processo precedente col lasciar ferme ora $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, \rho_n$.

Si dovrà quindi sostituire a dx_{n-1} l'espressione $\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial \rho_{n-1}} d\rho_{n-1}$ e determinare opportunamente i limiti dell'integrale relativo a ρ_{n-1}, e così l'integrale si ridurrà all'altro

$$\int\int f \frac{\partial F_n}{\partial \rho_n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial \rho_{n-1}}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-2}\, d\rho_n\, d\rho_{n-1},$$

e ora continuando si vede chiaramente che l'integrale dato si trasformerà nell'altro $\displaystyle\int\int\dots\int f \frac{\partial F_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \dots \frac{\partial F_{n-1}}{\partial \rho_{n-1}} \frac{\partial F_n}{\partial \rho_n}\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_{n-1}\, d\rho_n$ nel quale f e $\dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_1}, \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_2}, \dots, \dfrac{\partial F_n}{\partial \rho_n}$ s'intendono ora espresse in funzione delle $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ per mezzo delle (6) successivamente o per mezzo delle (5), e i limiti degli integrali devono determinarsi tenendo conto delle formole di trasformazione (5) o (6).

285. — Con ciò la trasformazione dell'integrale è eseguita; però siccome nell'integrale trasformato compariscono le quantità $\dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_1}, \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_2}, \dots, \dfrac{\partial F_n}{\partial \rho_n}$ che si sono successivamente dedotte (in senso inverso) dalle equazioni (6), conviene eliminarle sostituendo ad esse altre quantità che si deducano dalle (5) senza bisogno di passare per le (6).

Poniamo perciò

$$H_1 = x_1 - F_1(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n), \quad H_2 = x_2 - F_2(x_1, \rho_2, \dots, \rho_n), \dots,$$
$$H_i = x_i - F_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_n), \dots, H_n = x_n - F_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \rho_n),$$

ed osserviamo che le equazioni $H_1 = 0, H_2 = 0, \dots, H_i = 0, \dots, H_n = 0$ saranno identiche quando in esse per $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ si pongano i valori (5).

Da ciò resulta che intendendo che le derivate parziali $\dfrac{\partial H_i}{\partial \rho_r}, \dfrac{\partial H_i}{\partial x_s}$ di H_i

siano dedotte dalle formole precedenti, e le altre $\frac{\partial x_1}{\partial \rho_r}$, $\frac{\partial x_2}{\partial \rho_r}$,... siano dedotte dalle (5), si hanno equazioni della forma

$$\frac{\partial H_i}{\partial \rho_r} + \frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_r} + \frac{\partial H_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_r} + \dots + \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_r} = 0\,,$$

ovvero

$$-\frac{\partial H_i}{\partial \rho_r} = \frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_r} + \frac{\partial H_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_r} + \dots + \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_r}\,;$$

nelle quali però, quando $i < n$, $\frac{\partial H_i}{\partial x_{i+i}}, \dots, \frac{\partial H_i}{\partial x_n}$ sono nulle; quindi facendo il prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} \end{vmatrix}\,, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial H_n}{\partial x_1} & \frac{\partial H_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

linea per linea, si trova che questo prodotto è

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial H_2}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial \rho_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial H_1}{\partial \rho_n} & \frac{\partial H_2}{\partial \rho_n} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial \rho_n} \end{vmatrix}\,,$$

essendo le $\frac{\partial H_i}{\partial x_s}$ e $\frac{\partial H_i}{\partial \rho_r}$ le derivate parziali di H_i che figurano nelle formole precedenti.

Ma le derivate rispetto alle x_s delle quantità H_i a destra della diagonale nel secondo dei determinanti scritti sopra sono tutte nulle, e quelle in diagonale sono uguali all'unità; e le derivate rispetto alle ρ_r delle stesse quantità H_i a destra pure della diagonale nell'ultimo determinante sono nulle anch'esse, e per quelle della diagonale si ha

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial \rho_1}\,,\ \frac{\partial H_2}{\partial \rho_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial \rho_2}\,, \dots, \frac{\partial H_n}{\partial \rho_n} = -\frac{\partial F_n}{\partial \rho_n}\,,$$

quindi si può evidentemente asserire (come del resto già si trovò nel calcolo differenziale § 168 [pag. 230 e seg.]) che si avrà

(8) $$\frac{\partial F_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial F_2}{\partial \rho_2}\dots\frac{\partial F_n}{\partial \rho_n} = D\,,$$

essendo D il determinante funzionale (o Jacobiano) delle funzioni (5) cioè

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \rho_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \rho_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n} \end{vmatrix}\,;$$

e perciò la formola di trasformazione degli integrali multipli sarà la seguente

(9) $$\int\int\dots\int f\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \int\int\dots\int f\,D\,d\rho_1\,d\rho_2\dots d\rho_n\,,$$

nella quale s'intende che nel secondo membro la f sia espressa per le nuove variabili $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ per mezzo delle (5) e i limiti degli integrali siano opportunamente determinati.

Questa formola pel caso degli integrali doppii e tripli fu data da Eulero e da Lagrange, e pel caso generale fu data da Jacobi. Notiamo che in queste trasformazioni, come anche si disse trattando del cangiamento di variabile negli integrali semplici, bisogna aver ben riguardo alla multiplicità dei sistemi di valori $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ che (dipendentemente dalle formole date di trasformazione) possono corrispondere a un solo sistema di valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ ecc; e per questo basterà tener conto di quanto si disse nel calcolo differenziale ai §§ 167 e seg. [pag. 226 e seg.].

286. — Il determinante D come già abbiamo detto è il solito determinante funzionale (o Jacobiano) delle funzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ e gode di molte proprietà notevoli, una delle quali risulta subito dalla formola precedente (9).

Osserviamo infatti che se servendoci delle (5) si esprimessero le $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ per le $x_1, x_2, \dots, x_n$ e si tornasse a trasformare l'integrale $\int\int\dots\int f\,D\,d\rho_1\,d\rho_2\dots d\rho_n$ riportandolo alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, esso diverrebbe

(10) $$\int\int\dots\int f\,D\,D_1\,dx_1\,dx_2\dots dx_n\,,$$

essendo D_1 il determinante funzionale del sistema $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, cioè

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \rho_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

nel quale le $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ si suppongono dedotte dalle (5) nel modo che abbiamo detto.

E poichè evidentemente l'ultimo integrale (10) deve essere identico al primitivo $\int\int \ldots \int f dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, in forza della continuità ecc. che noi supponiamo in tutte le derivate che qui figurano, si conclude che sarà $DD_1 = 1$, cioè *il determinante funzionale del sistema* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *e quello del sistema* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sono reciproci l'uno dell'altro* come si potrebbe trovare anche direttamente.

287. — Per dare un esempio, prendiamo a trasformare in coordinate polari ρ, θ e φ l'integrale $\int\int\int f dx\, dy\, dz$ colle solite formole che servono a passare dalle coordinate cartesiane alle polari $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $z = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$.

Si osserverà perciò che in questo caso si ha

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho^2(\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = \rho^2\operatorname{sen}\theta,$$

e quindi sarà $\int\int\int f dx\, dy\, dz = \int\int\int f \rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$; ciò che mostra anche, quando si supponga $f = 1$, che l'elemento dello spazio *in coordinate polari* ρ, θ *e* φ è $\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$, come del resto già trovammo con altre considerazioni anche nel calcolo differenziale.

288. — Questa osservazione relativa all'elemento dello spazio ordinario in coordinate polari conduce ad un'altra d'ordine generale.

Osserviamo cioè che quando in modo generale si considerano le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come coordinate cartesiane in uno spazio a n dimensioni, estendendo le considerazioni dei §§ 374 e seg. [pag. 505 e seg.] del *Calc. differ.* sulle coordinate curvilinee si può dire che le formole (5) di trasformazione corrispondono, come nel caso delle superficie o dello spazio ordinario, al passaggio dalle coordinate cartesiane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a un sistema di coordinate curvilinee $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$; e il quadrato ds^2 dell'elemento lineare dello spazio, cioè $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$, in coordinate curvilinee $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ può prendersi come dato dalla formola

$$ds^2 = \sum_{r,s} A_{r,s}\, d\rho_r\, d\rho_s,$$

nella quale r e s prendono tutti i valori $1, 2, \ldots, n$ e si ha in generale

$$A_{r,r} = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial x_h}{\partial \rho_r}\right)^2, \quad A_{r,s} = A_{s,r} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial x_h}{\partial \rho_r}\frac{\partial x_h}{\partial \rho_s},$$

per modo che $\sqrt{A_{1,1}}\, d\rho_1$, $\sqrt{A_{2,2}}\, d\rho_2, \ldots, \sqrt{A_{n,n}}\, d\rho_n$ possono, come nel caso delle superficie o dello spazio ordinario, prendersi come gli elementi lineari $ds_{\rho_1}, ds_{\rho_2}, \ldots, ds_{\rho_n}$ delle linee $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ respettivamente, cioè di quelle linee per le quali sono costanti tutte le variabili meno la ρ_1 per la linea ρ_1, meno la ρ_2 per la linea $\rho_2, \ldots,$ e meno la ρ_n per la linea ρ_n.

D'altra parte, facendo il quadrato del determinante funzionale D col moltiplicare linea per linea si trova

$$D^2 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

e il determinante del secondo membro è simmetrico perchè $A_{r,s} = A_{s,r}$, e si riduce al prodotto $A_{1,1} A_{2,2} \ldots A_{n,n}$ quando si ha $A_{r,s} = 0$ per r diverso da s, cioè – nel caso delle superficie o dello spazio ordinario – quando le linee o le superficie coordinate sono ortogonali; quindi se (come facemmo nel *Calcolo differenziale* per le superficie) si immagina che, della superficie nel caso di due sole variabili x_1 e x_2, o dello spazio ordinario nel caso di tre variabili x_1, x_2, x_3, sia fatta una scomposizione in elementi superficiali per mezzo delle linee coordinate ρ_1 e ρ_2 tracciate sulla superficie, o in volumi elementari per mezzo delle superficie (ρ_2, ρ_3), (ρ_3, ρ_1) e (ρ_1, ρ_2) (cioè $\rho_1 = \text{cost}$,

$\rho_2 = \text{cost.}$ e $\rho_3 = \text{cost.}$), questi elementi di superficie o di volume in coordinate curvilinee vengono ad essere appunto $|D|\, d\rho_1\, d\rho_2$ e $|D|\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3$ (*).

Estendendo dunque questi concetti puramente geometrici anche agli spazii di un maggior numero di dimensioni, potremo prendere il prodotto $|D|\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_n$ come l'elemento dello spazio a n dimensioni in coordinate curvilinee $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, appunto come si trova anche cogli studî precedenti sugli integrali multipli quando D è positivo, perchè nel caso di $f = 1$ i risultati precedenti ci danno la formola

$$\int\int \dots \int dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \int\int \dots \int D\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_n\,;$$

talchè intendendo sempre di prendere, come testè dicemmo, il prodotto $D\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_n$ per elemento dello spazio a n dimensioni nel sistema di coordinate curvilinee $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ quando D è positivo, per la formola generale (9) di trasformazione degli integrali multipli verrà ora ad estendersi anche la definizione degli integrali multipli $\int\int \dots \int f\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ data nel § 280, poichè l'integrale viene ora a risultare in ogni caso come limite della somma dei prodotti degli elementi dello spazio d'integrazione corrispondenti alle coordinate adottate $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ moltiplicati per un valore della funzione f in un punto qualsiasi degli elementi medesimi.

289. — Come seconda applicazione della formola di trasformazione degli integrali multipli, prendiamo a determinare un integrale notevole che conduce alla generalizzazione di una formola relativa agli integrali Euleriani.

Si consideri perciò l'integrale multiplo

$$(11)\quad I = \int\int \dots \int x_1^{p_1-1}\, x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n)^{q-1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ sono numeri diversi da zero e positivi e l'integrale si

(*) Questo si vide già per le superficie nel *Calcolo differenziale* al § 382 [pag. 516-17] e fu ricordato nel *Calc. integr.* al § 172 [pag. 270].

Per lo spazio ordinario poi la cosa si vede subito quando le superficie cordinate sono fra loro ortogonali perchè allora il volume dell'elemento dello spazio è evidentemente $ds_{\rho_1}\, ds_{\rho_2}\, ds_{\rho_3}$ o $\sqrt{A_{1.1}\, A_{2.2}\, A_{3.3}}\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3$, e quindi è appunto $|D|\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3$; in generale poi anche se le superficie coordinate non sono tutte ortogonali fra loro si trova subito lo stesso valendosi della formola che dà il volume dei parallelipedi obliqui espressi in funzione dei loro lati e degli angoli di questi lati.

intende esteso al campo T a n dimensioni nel quale le $x_1, x_2, \dots, x_n$ non sono mai negative e la loro somma non supera l'unità; e si cerchi di determinarlo.

Si faccia per questo un cambiamento di variabili colle formole

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = \rho_1 & , \\ x_2 = (1 - \rho_1)\, \rho_2 & , \\ x_3 = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\, \rho_3 & , \\ \dots\dots\dots\dots & , \\ x_n = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \dots (1 - \rho_{n-1})\, \rho_n & , \end{cases}$$

pel quale, calcolando successivamente $1 - x_1$, $1 - x_1 - x_2$, $1 - x_1 - x_2 - x_3, \dots$ si trova

$$(13)\qquad 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_s = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \dots (1 - \rho_s) = \frac{x_s}{\rho_s}(1 - \rho_s)$$

per $s = 1, 2, \dots, n$, e il determinante funzionale corrispondente D si riduce al prodotto $\frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial x_2}{\partial \rho_2} \dots \frac{\partial x_n}{\partial \rho_n}$, cioè a $\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}$, perchè in esso tutti gli elementi da una stessa parte della diagonale vengono zero.

Osservando che i nuovi limiti per ciascuna variabile saranno 0 e 1, si vede subito che si avrà

$$I = \int\int \dots \int \frac{x_1^{p}\, x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} (1 - \rho_1)^{q-1} (1 - \rho_2)^{q-1} \dots (1 - \rho_n)^{q-1}\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_n =$$

$$= \int\int \dots \int \rho_1^{p_1-1}\, \rho_2^{p_2-1} \dots \rho_n^{p_n-1} (1 - \rho_1)^{q+p_2+p_3+\dots+p_n-1} (1 - \rho_2)^{q+p_3+\dots+p_n-1} \dots$$

$$\dots (1 - \rho_{n-1})^{q+p_n-1} (1 - \rho_n)^{q-1}\, d\rho_1\, d\rho_2 \dots d\rho_n\,,$$

cioè

$$I = \int_0^1 \rho_1^{p_1-1} (1 - \rho_1)^{q+p_2+p_3+\dots+p_n-1}\, d\rho_1 \int_0^1 \rho_2^{p_2-1} (1 - \rho_2)^{q+p_3+\dots+p_n-1}\, d\rho_2 \dots$$

$$\dots \int_0^1 \rho_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1 - \rho_{n-1})^{q+p_n-1}\, d\rho_{n-1} \int_0^1 \rho_n^{p_n-1} (1 - \rho_n)^{q-1}\, d\rho_n\,,$$

e per la formola (3) del § 251 [pag. 395] che definisce gli integrali Euleriani di prima specie avremo la seguente

$$(14)\quad I = B(p_1, q + p_2 + p_3 + \dots + p_n)\, B(p_2, q + p_3 + \dots + p_n) \dots B(p_{n-1}, q + p_n)\, B(p_n, q),$$

la quale introducendo gli integrali di seconda specie colla formola (4) del [§ 259 pag. 401] dà l'altra notevolissima

$$\text{(15)}\qquad \mathrm{I} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)},$$

che determina l'integrale cercato (11) espresso per le funzioni Γ, e che per $n=1$ si riduce appunto alla ricordata formola (4) del § 259 della quale essa viene ad essere così la generalizzazione.

290. — Per $q=1$, ricordando che $\Gamma(1)=1$ si ottiene subito l'altra formola

$$\text{(16)}\quad \int\!\!\int\!\ldots\!\int x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)},$$

l'integrale essendo esteso al campo T sopra indicato.

Aggiungiamo che, se quest'ultimo integrale (16) anzichè al campo T dovesse essere esteso al campo T_1 nel quale le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non sono mai negative e si ha

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\lambda_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\lambda_2} + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\lambda_n} \leq 1,$$

essendo le $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ quantità date diverse da zero e positive, allora ponendo

$$x_1 = a_1\,\xi_1^{\frac{1}{\lambda_1}},\quad x_2 = a_2\,\xi_2^{\frac{1}{\lambda_2}},\ldots,\quad x_n = a_n\,\xi_n^{\frac{1}{\lambda_n}},$$

con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ nuove variabili che non sono mai negative e per le quali si ha $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n \leq 1$, si ricade nell'integrale

$$\frac{a_1^{p_1}\,a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n}}{\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_n}\int\!\!\int\!\ldots\!\int \xi_1^{\frac{p_1}{\lambda_1}-1}\,\xi_2^{\frac{p_2}{\lambda_2}-1}\ldots\xi_n^{\frac{p_n}{\lambda_n}-1}\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n,$$

al quale può applicarsi la formola (16); e quindi si può dire che si ha anche la formola seguente

$$\text{(17)}\quad \int\!\!\int\!\ldots\!\int x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{a_1^{p_1}\,a_2^{p_2}\ldots a_n^{p_n}}{\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\lambda_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\lambda_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\lambda_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\lambda_1}+\frac{p_2}{\lambda_2}+\cdots+\frac{p_n}{\lambda_n}+1\right)},$$

quando l'integrale del primo membro sia esteso al nuovo campo ora indicato T_1.

In particolare nel caso dell'integrale triplo $\int\!\!\int\!\!\int x^{p-1}\,y^{q-1}\,z^{p-1}\,dx\,dy\,dz$ esteso a quella ottava parte dello spazio racchiuso dall'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

nella quale le coordinate x, y, z non sono mai negative, avremo la formola

$$\text{(18)}\qquad \int\!\!\int\!\!\int x^{p-1}\,y^{q-1}\,z^{r-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2}+1\right)}\,a^p\,b^q\,c^r;$$

e quindi se $p=q=r=1$ ricordando che si ha $\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, e $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ si troverà subito che la ottava parte del volume E dell'ellissoide è $\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\,\pi abc$, e quindi per l'intiero ellissoide si avrà $\mathrm{E}=\frac{4}{3}\pi abc$ come già trovammo al § 182. 2.° [pag. 282].

291. — Aggiungiamo che, cambiando nell'integrale (11) $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ in $p_1+1, p_2+1, \ldots, p_n+1, q+1$ e ricordando che si ha $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, la formola trovata (15) si trasforma nell'altra

$$\text{(19)}\qquad \int\!\!\int\!\ldots\!\int x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}\,(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^q\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \frac{p_1\,p_2\ldots p_n\,q\,\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\,\Gamma(q)}{(p_1+p_2++\cdots p_n+q+n)\,(p_1+p_2+\cdots+p_n+q+n-1)\ldots(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)\,\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+q)},$$

nella quale i numeri $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ si suppongono tutti superiori a -1 e l'integrale si intende esteso al campo T nel quale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non sono negativi e la loro somma non supera la unità; e quando questi numeri siano numeri interi e positivi o nulli avremo anche

$$\text{(20)}\qquad \int\!\!\int\!\ldots\!\int x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}\,(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^q\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= p_1\,p_2\ldots p_n\,q\,\frac{\pi(p_1-1)\,\pi(p_2-1)\ldots\pi(p_n-1)\,\pi(q-1)}{\pi(p_1+p_2+\cdots+p_n+q+n)}.$$

Supponendo poi nella (15) $p_1=a$, $p_2=a+\frac{1}{n}$, $p_3=a+\frac{2}{n}$, ..., $p_n=a+\frac{n-1}{n}$, con a diverso da zero e positivo, la formola stessa si muta nell'altra

$$\int\int\dots\int x_1^{a-1} x_2^{a+\frac{1}{n}-1} \dots x_n^{a+\frac{n-1}{n}-1}(1-x_1-x_2-\dots-x_n)^{q-1}dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$
$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(na+\frac{n-1}{2}+q\right)},$$

e quindi per la formola (40) del § 271 [pag. 412] si ha la formola seguente

$$(21)\quad \int\int\dots\int x_1^{a-1} x_2^{a+\frac{1}{n}-1} x_3^{a+\frac{2}{n}-1} \dots x_n^{a+\frac{n-1}{n}-1}(1-x_1-x_2-\dots-x_n)^{q-1}dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$
$$=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-na+\frac{1}{2}}\,\Gamma(na)\,\Gamma(q)}{\Gamma\left(na+\frac{n-1}{2}+q\right)},$$

che nel caso in cui $\frac{n-1}{2}+q$ è un numero intero si muta nell'altra

$$(22)\quad \int\int\dots\int x_1^{a-1} x_2^{a+\frac{1}{n}-1} x_3^{a+\frac{2}{n}-1} \dots x_n^{a+\frac{n-1}{n}-1}(1-x_1-x_2-\dots-x_n)^{q-1}dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$
$$=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-na+\frac{1}{2}}\,\Gamma(q)}{na\,(na+1)\,(na+2)\dots\left(na+\frac{n-1}{2}+q-1\right)}.$$

Nel caso particolare di $q=1$ si ha dunque la formola

$$(23)\quad \int\int\dots\int x_1^{a-1} x_2^{a+\frac{1}{n}-1} x_3^{a+\frac{2}{n}-1} \dots x_n^{a+\frac{n-1}{n}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-na+\frac{1}{2}}\,\Gamma(na)}{\Gamma\left(na+\frac{n+1}{2}\right)},$$

che per n dispari diviene

$$(24)\quad \int\int\dots\int x_1^{a-1} x_2^{a+\frac{1}{n}-1} x_3^{a+\frac{2}{n}-1} \dots x_n^{a+\frac{n-1}{n}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-na+\frac{1}{2}}}{na\,(na+1)\dots\left(na+\frac{n-1}{2}\right)}$$

292. — Aggiungiamo anche che il processo seguito della trasformazione dell'integrale multiplo (11) con un cambiamento di variabili per mezzo delle (12) può servire anche alla determinazione di altri integrali multipli.

È chiaro infatti che se si ha un integrale $\int\int\dots\int f(x_1, x_2,\dots, x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n$ esteso al solito campo T nel quale le $x_1, x_2,\dots, x_n$ non sono mai negative e la loro somma non supera l'unità, quando in esso si cambiano le variabili per mezzo delle (12) l'integrale si trasformerà nell'altro

$$\int\int\dots\int \frac{f(x_1, x_2,\dots, x_n)\, x_1 x_2 \dots x_n}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_n$$

nel quale i limiti degli integrali rispetto a ciascuna variabile sono per tutti 0 e 1; e se la funzione $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ sarà tale che il prodotto $f(x_1, x_2,\dots, x_n)\, x_1 x_2 \dots x_n$ si riduca ad un prodotto di più funzioni che contengono ciascuna una sola delle variabili $\rho_1, \rho_2,\dots, \rho_n$ o si riduca alla somma di più di questi prodotti, è chiaro che l'integrale dato si ridurrà al prodotto di n integrali semplici definiti fra 0 e 1 o a una somma di prodotti di questi integrali che talvolta potranno essere già conosciuti o potranno facilmente determinarsi.

Così ad es. se nell'integrale dato esteso al solito campo T sarà

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) = \varphi(x_1)\, x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} (1-x_1)^{q_1-1} (1-x_1-x_2)^{q_2-1} \dots (1-x_1-x_2-\dots-x_n)^{q_n-1},$$

dove $\varphi(x_1)$ contiene la sola variabile x_1, e le $p_1, p_2,\dots, p_n, q_1, q_2,\dots, q_n$ sono positive e tali sono anche le somme

$$p_s + p_{s+1} + \dots + p_n + q_{s-1} + q_s + \dots + q_n - (n-s+1)$$

per $s = 2, 3,\dots, n$ allora, indicando per brevità di scrittura con $p_{r,n}$ e $q_{r,n}$ le somme $p_r + p_{r+1} + \dots + p_n$ e $q_r + q_{r+1} + \dots + q_n$ e facendo la solita trasformazione colle formole (12) e tenendo conto anche della (13), l'integrale stesso si trasformerà nell'altro

$$\int_0^1 \varphi(\rho_1)\, \rho_1^{p_1-1} (1-\rho_1)^{p_{2,n}+q_{1,n}-n} d\rho_1 \int_0^1 \rho_2^{p_2-1} (1-\rho_2)^{p_{3,n}+q_{2,n}-(n-1)} d\rho_2 \dots$$
$$\dots \int_0^1 \rho_{n-1}^{p_{n-1}-1} (1-\rho_{n-1})^{p_{n,n}+q_{n-1,n}-2} d\rho_{n-1} \int \rho_n^{p_n-1} (1-\rho_n)^{q_n-1} d\rho_n$$

il quale per le formole (3) del § 251 [pag. 395] e (4) del § 259 [pag. 401] applicate successivamente dà luogo alla formola seguente

$$(25)\quad \int\int\cdots\int \varphi(x_1)\,x_1^{p_1-1}\ldots x^{p_n-1}(1-x_1)^{q_n-1}(1-x_1-x_2)^{q_n-1}\ldots(1-x_1-x_2-\ldots-x_n)^{q_n-1}dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_2)\,\Gamma[p_{3,n}+q_{2,n}-(n-2)]}{\Gamma[p_{2,n}+q_{2,n}-(n-2)]}\;\frac{\Gamma(p_3)\,\Gamma[p_{4,n}+q_{3,n}-(n-3)]}{\Gamma[p_{3,n}+q_{3,n}-(n-3)]}\ldots$$

$$\ldots\frac{\Gamma(p_{n-1})\,\Gamma(p_n+q_{n-1,n}-1)}{\Gamma(p_{n-1,n}+q_{n-1,n}-1)}\;\frac{\Gamma(p_n)\,\Gamma(q_n)}{\Gamma(p_n+q_n)}\int_0^1 \varphi(\rho_1)\,\rho_1^{p_1-1}(1-\rho_1)^{p_{2,n}+q_{1,n}-n}d\rho_1$$

nella quale l'integrale del primo membro s'intende esteso al solito campo T, e che si può semplicizzare assai quando le $q_1, q_2 \ldots q_n$ siano numeri interi e quando sia $\varphi(\rho_1)=1$.

Nel caso di $\varphi(\rho_1)=1$, e $q_1=q_2=\ldots=q_{n-1}=1$, $q_n=q$ questa formola si riduce alla formola (15).

293. — Quando poi invece dell'integrale (25) se ne abbia un altro esteso ancora al solito campo T e nel quale al posto di uno o più dei fattori $x_1^{p_1-1}, x_2^{p_2-1}, \ldots, x_n^{p_n-1}, (1-x_1)^{q_1-1}, (1-x_1-x_2)^{q_2-1}, \ldots, (1-x_1-x_2-\ldots-x_n)^{q_n-1}$ siano alcuni dei logaritmi $\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n, \log(1-x_1), \log(1-x_1-x_2), \ldots, \log(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)$, allora tenuto conto delle (12) e (13) si vede che l'integrale trasformato si spezza nella somma di più prodotti d'integrali definiti semplici estesi tutti fra 0 e 1 e relativi alle singole variabili $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ separatamente.

294. – S'intende poi che per certi integrali $\int\int\cdots\int f(x_1\,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ estesi a dati campi, invece della trasformazione (12) potrà giovare un'altra trasformazione simile determinata dalle formole

$$(26)\qquad \begin{cases} x_1 = x_{1,1}(\rho_1) & , \\ x_2 = x_{2,1}(\rho_1)\,x_{2,2}(\rho_2) & , \\ x_3 = x_{3,1}(\rho_1)\,x_{3,2}(\rho_2)\,x_{3,3}(\rho_3) & , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ x_n = x_{n,1}(\rho_1)\,x_{n,2}(\rho_2)\ldots x_{n,n}(\rho\ ) & , \end{cases}$$

nelle quali le $x_{r,s}(\rho_s)$ sono funzioni della sola variabile corrispondente ρ_s, che ammettono la derivata prima $x'_{r,s}(\rho_s)$, ecc., perchè nel caso di questa trasformazione avremo

$$D = x_1\,x_2\ldots x_n\,\frac{x'_{1,1}(\rho_1)\,x'_{2,2}(\rho_2)\ldots x'_{n,n}(\rho_n)}{x_{1,1}(\rho_1)\,x_{2,2}(\rho_2)\ldots x_{n,n}(\rho_n)},$$

e dipendentemente dalla forma della funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che figura sotto l'integrale e da quella delle funzioni $x_{r,s}(\rho_s)$, il prodotto $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,x_1\,x_2\ldots x_n$ che figurerà sotto l'integrale trasformato potrà talvolta ridursi ancora al prodotto di più funzioni che contengono ciascuna una sola delle variabili $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ o potrà ridursi a una somma di questi prodotti, ecc.

XVII.

Integrazione delle espressioni differenziali che contengono più variabili

Caso delle variabili tutte indipendenti.

295. — Le integrazioni che abbiamo fatte finora si riferivano tutte ad espressioni differenziali che contengono una sola variabile, o nelle quali le singole variabili vengono considerate separatamente, poichè anche le integrazioni che si presentano negli integrali multipli sono o si riducono sempre a successive integrazioni di funzioni di una sola variabile. Ora passeremo a dire qualche cosa anche intorno all'integrazione di espressioni differenziali di più variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, cioè di espressioni della forma

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \dots + X_n dx_n, \tag{1}$$

dove le $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ sono funzioni di $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Supporremo dapprima che le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano tutte indipendenti, e si muovano in un campo C a n dimensioni nel quale ammetteremo che le funzioni $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ siano finite e continue, ed esistano e siano pure finite e continue anche le varie loro derivate parziali almeno fino a quelle dell'ordine $n-1$ (*); e osserveremo dapprima che non sempre una espressione

(*) Propriamente, avuto riguardo al teorema sulla inversione delle derivazioni (*Calc. diff.* [pag. 164 e seg.]) che poi occorre di applicare e alle altre considerazioni che si fanno nel paragrafo seguente, la esistenza e la continuità delle derivate basta richiederla per quelle fra esse per le quali le derivazioni rispetto a una stessa variabile non sono ripetute, ed è esclusa quella rispetto alla variabile il cui differenziale moltiplica nella (1) la funzione che viene derivata; cioè trattandosi per es. della funzione X_s basta che esistano e siano finite e continue le derivate $\frac{\partial^k X_s}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_k}}$ con $k \leq n-1$ e $r_1, r_2, \dots, r_k$ numeri fra 1 e n diversi fra loro e da s.

Nel seguito poi, come allora diremo, l'esistenza e la continuità delle derivate parziali delle funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ basterà richiederla per quelle del prim'ordine $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ con r diverso da s.

differenziale come la (1) ammetterà un integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, cioè non sempre essa proverrà dalla differenziazione di una funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ o, come si dice, sarà un *differenziale esatto* di una funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Supponiamo infatti che la espressione (1) sia il differenziale esatto di una funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$; si avrà

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n,$$

e poichè, essendo le $x_1, x_2, \dots, x_n$ tutte variabili indipendenti, potremo anche supporre le $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ tutte uguali a zero fuorchè una, si vede subito che dovrà essere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = X_1, \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = X_2, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = X_r, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = X_s, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = X_n, \tag{2}$$

e di qui osservando che per le condizioni poste per le funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ l'inversione delle derivazioni sarà possibile, si avranno subito le relazioni seguenti

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \ \frac{\partial X_1}{\partial x_3} = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial X_1}{\partial x_4} = \frac{\partial X_4}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_1}, \\
\qquad \frac{\partial X_2}{\partial x_3} = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}, \ \frac{\partial X_2}{\partial x_4} = \frac{\partial X_4}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial X_2}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_2}, \\
\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial x_4} = \frac{\partial X_4}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial X_3}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_3}, \\
\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_{n-1}},
\end{array}\right. \tag{3}$$

le quali sono tutte della forma $\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$, e il loro numero è evidentemente uguale al numero $\frac{n(n-1)}{2}$ delle combinazioni di n cose due a due; talchè si può dire intanto che quando le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono indipendenti, e le $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono funzioni finite e continue di $x_1, x_2, \dots, x_n$ di cui le derivate parziali del prim'ordine esistono e sono esse pure finite e continue, affinchè la espressione differenziale del primo ordine

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_r dx_r + \dots + X_s dx_s + \dots + X_n dx_n$$

sia un differenziale esatto, è necessario che siano soddisfatte $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni tutte della forma $\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$.

Queste equazioni esprimono che nella espressione differenziale data la derivata rispetto a x_s del coefficiente X_r di dx_r deve essere uguale alla derivata rispetto a x_r del coefficiente X_s di dx_s; e quindi nel caso particolare delle espressioni differenziali $X dx + Y dy$ di due variabili x e y esse si riducono all'unica $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, come nel caso delle espressioni differenziali $X dx + Y dy + Z dz$ di tre variabili x, y, z si riducono invece alle tre $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$.

296. — È facile poi di vedere che le condizioni che ora abbiamo trovate come condizioni necessarie perchè la espressione differenziale (1) sia un differenziale esatto, sono anche condizioni sufficienti; e quando sono soddisfatte, la ricerca della funzione integrale $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ si riduce subito a più integrazioni relative ciascuna a una sola variabile.

Si ammetta infatti che le condizioni (3) siano tutte soddisfatte, e si osservi per prima cosa che se la funzione integrale φ deve esistere essa dovrà intanto soddisfare alla prima delle stesse condizioni (3), e quindi se si prende un integrale indefinito qualsiasi $\int X_1 dx_1$ di $X_1 dx_1$ che certo esisterà, e si indica questo integrale con A_1, la stessa funzione φ non potrà differire da A_1 altro che per una quantità che dovrà figurare come una costante nel derivare rispetto ad x_1, e non potrà quindi essere altro che una funzione delle altre variabili $x_2, x_3, ..., x_n$.

Supposto dunque che l'integrale scelto A_1 sia continuo e derivabile, fino a quell'ordine che poi occorrerà, anche rispetto a tutte le variabili $x_2, x_3, ..., x_n$ (*), ne segue che dovrà essere $\varphi = A_1 + \varphi_1$, essendo φ_1 una funzione di $x_2, x_3, ..., x_n$, e tutta la questione si ridurrà quindi alla determinazione di questa funzione φ_1 che dovrà avere una variabile di meno di quelle contenute in φ, e che dovrà determinarsi colla condizione che il differenziale di $A_1 + \varphi_1$ sia precisamente la espressione (1).

(*) Questo avverrà (§ 124 [pag. 182 e seg.]) prendendo ad esempio $A_1 = \int_{a_1}^{x_1} X_1 dx_1$ essendo a_1 una costante o anche una funzione finita continua e derivabile di $x_2, x_3, ..., x_n$.

Dovremo dunque avere

$$dA_1 + d\varphi_1 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + ... + X_n dx_n;$$

e poichè $dA_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial A_1}{\partial x_n} dx_n$ e $\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = X_1$, si vede subito che onde la funzione cercata φ esista, bisognerà che esista una funzione φ_1 delle sole variabili $x_2, x_3, ..., x_n$ il cui differenziale sia la espressione

$$(4) \qquad \left(X_2 - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(X_3 - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right) dx_3 + ... + \left(X_n - \frac{\partial A_1}{\partial x_n}\right) dx_n .$$

Ora perchè una tale funzione φ_1 possa esistere bisognerà prima di tutto che i varii coefficienti di questa espressione non contengano x_1, e questo effettivamente avverrà perchè la derivata rispetto ad x_1 di uno qualsiasi $X_r - \frac{\partial A_1}{\partial x_r}$ di questi coefficienti è la differenza $\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_r \partial x_1}$ la quale, potendosi fare per le nostre ipotesi in $\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_r \partial x_1}$ la inversione delle derivazioni, può scriversi $\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial \frac{\partial A_1}{\partial x_1}}{\partial x_r}$ ovvero $\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_r}$, e quindi per le condizioni (3) è uguale a zero.

Bisognerà poi che la stessa espressione (4) si trovi nelle stesse condizioni della (1), in quanto cioè dovrà soddisfare alle condizioni corrispondenti alle (3), e questo pure avverrà se saranno soddisfatte le condizioni (3) e quelle che già abbiamo poste per l'esistenza e la continuità delle derivate delle funzioni $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ e di A_1 (*), perchè allora la derivata $\frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_r \partial x_s}$ rispetto ad x_s del coefficiente di dx_r nella espressione (4) sarà uguale alla derivata $\frac{\partial X_s}{\partial x_r} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_s \partial x_r}$ rispetto ad x_r del coefficiente di dx_s nella stessa espressione; quindi evidentemente si può ora asserire che la ricerca dell'integrale φ della espressione data (1) quando le condizioni (3) sono soddisfatte viene così ridotta a quella dell'integrale φ_1 della espressione analoga (4) che è nelle stesse condizioni della (1) ma ha una variabile di meno x_1; e quando si trovi questo integrale φ_1 sarà $\varphi = A_1 + \varphi_1$.

(*) Evidentemente a questo punto basterebbe ammettere la esistenza e la continuità delle derivate parziali delle funzioni $X_1, X_2, ..., X_n$ fino a quelle del secondo ordine intendendo al tempo stesso di avere scelto bene l'integrale A_1; ma per il seguito di *questa* dimostrazione bisogna poi successivamente ammettere la esistenza e la continuità di queste derivate parziali almeno fino a quelle dell'ordine $n-1$.

Ripetendo ora questi stessi ragionamenti per la espressione differenziale (4), si vede subito che se si indica con A_2 un integrale indefinito qualsiasi $\int\left(X_2 - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)dx_2$ che soddisfi come A_1 alle solite condizioni di continuità e di derivabilità, l'esistenza e la ricerca di φ_1 viene a dipendere dalla esistenza e dalla ricerca dell'integrale della espressione differenziale

$$\left(X_3 - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)dx_3 + \dots + \left(X_n - \frac{\partial A_1}{\partial x_n} - \frac{\partial A_2}{\partial x_n}\right)dx_n\,,$$

che in forza della nostra ipotesi contiene un'altra variabile di meno x_2 e soddisfa ancora alle condizioni corrispondenti alle (3); e quando questo integrale sia trovato e sia φ_2, l'integrale della espressione data (1) sarà $A_1 + A_2 + \varphi_2$; quindi evidentemente colla ripetizione di questo processo tutto verrà in fine a dipendere dalla esistenza dell'integrale φ_{n-1} della espressione $\left(X_n - \frac{\partial A_1}{\partial x_n} - \frac{\partial A_2}{\partial x_n} - \dots - \frac{\partial A_{n-1}}{\partial x_n}\right)dx_n$ che non conterrà più che la variabile x_n per modo che l'integrale stesso esisterà certamente; e allora indicando con A_n quest'ultimo integrale, l'integrale della espressione (1) sarà $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n + C$ essendo C una costante; talchè si può ora evidentemente concludere che quando la espressione differenziale (1) è tale che $X_1, X_2, \dots, X_n$, oltre essere funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ finite e continue insieme alle loro derivate parziali dei varii ordini fino a quelle dell'ordine $n-1$, soddisfano alle condizioni (3), esiste effettivamente l'integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ della espressione stessa (1), e questo integrale è $\varphi = A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n + C$, essendo C una costante arbitraria, e $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ essendo funzioni che si determinano successivamente colle equazioni

$$A_1 = \int X_1 dx_1\,,\quad A_2 = \int\left(X_2 - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)dx_2\,,\quad A_3 = \int\left(X_3 - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)dx_3\,, \dots$$

$$\dots, A_{n-1} = \int\left(X_{n-1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial A_2}{\partial x_{n-1}} - \dots - \frac{\partial A_{n-2}}{\partial x_{n-1}}\right)dx_{n-1}\,,\ A_n = \int\left(X_n - \frac{\partial A_1}{\partial x_n} - \frac{\partial A_2}{\partial x_n} - \dots - \frac{\partial A_{n-1}}{\partial x_n}\right)dx_n$$

dove gli integrali da farsi successivamente sono tutti integrali indefiniti qualsiasi delle funzioni che compariscono sotto i segni integrali che si suppongono finite e continue e derivabili rispetto alle singole variabili, per modo che essi possono contenere in sè anche funzioni arbitrarie delle variabili *che seguono* quella cui l'integrazione si riferisce.

Nel caso particolare dunque delle espressioni differenziali $X dx + Y dy$

di due variabili x e y quando la condizione di integrabilità $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ è soddisfatta, l'integrale φ sarà dato dalla formola

$$\varphi = \int X\,dx + \int\left\{Y - \frac{\partial}{\partial y}\int X\,dx\right\}dy + C\,;$$

e nel caso delle espressioni $X dx + Y dy + Z dz$ di tre variabili x, y, z quando le condizioni d'integrabilità $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$ sono soddisfatte, l'integrale φ sarà dato dalla formola

$$\varphi = \int X\,dx + \int\left\{Y - \frac{\partial}{\partial y}\int X\,dx\right\}dy + \int\left[Z - \frac{\partial}{\partial z}\int X\,dx - \frac{\partial}{\partial z}\int\left\{Y - \frac{\partial}{\partial y}\int X\,dx\right\}dy\right]dz + C\,,$$

avendo cura però di prendere sempre per gli integrali che compariscono nelle successive integrazioni quegli integrali indefiniti stessi che sono stati presi nei termini precedenti, e pei quali si intende anche che siano finiti continui e derivabili rispetto alle singole variabili.

297. — Diamo ora alcuni esempi dei resultati che precedono.

1.° Vogliasi l'integrale della espressione differenziale a due variabili

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(2y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$$

in un campo nel quale non si trova il punto $x=0$, $y=0$.

Si osserverà perciò che in questo caso si ha $X = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Y = 2y - \frac{x}{x^2+y^2}$, e quindi $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ e la condizione d'integrabilità è soddisfatta; e si concluderà perciò che l'integrale cercato φ sarà

$$\varphi = \int\frac{y}{x^2+y^2}dx + \int\left\{2y - \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{y}{x^2+y^2}dx\right\}dy + C\,,$$

dovendo prendere per l'integrale indefinito $\int\frac{y}{x^2+y^2}dx$ che comparisce sotto il secondo integrale, quel valore stesso che si prenderà per il primo termine.

Ma pel valore del primo termine $\int\frac{y}{x^2+y^2}dx$ può prendersi $\operatorname{arctang}\frac{x}{y}$, quindi poichè $\frac{\partial}{\partial y}\left(\text{arc tang}\,\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ il secondo termine si riduce a $\int 2y\,dy$ o a y^2 e perciò sarà $\varphi = \text{arc tang}\,\frac{x}{y} + y^2 + \text{C}$.

2.° Vogliasi l'integrale φ della espressione differenziale a tre variabili

$$(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz\,,$$

che evidentemente è un differenziale esatto.

Dietro i risultati generali si avrà

$$\varphi = \int (y+z)\,dx + \int \left\{ z+x-\frac{\partial}{\partial y}\int (y+z)\,dx \right\} dy +$$

$$+ \int \left[x+y-\frac{\partial}{\partial z}\int (y+z)\,dx - \frac{\partial}{\partial z}\int \left\{ z+x-\frac{\partial}{\partial y}\int (y+z)\,dx \right\} \right] dz + \text{C}\,;$$

e poichè può prendersi

$$\int (y+z)\,dx = xy+xz\,, \quad \int \left\{ z+x-\frac{\partial}{\partial y}\int (y+z)\,dx \right\} dy = \int \left\{ z+x-\frac{\partial}{\partial y}(xy+xz) \right\} dy = zy\,,$$

$$\int \left[x+y-\frac{\partial}{\partial z}\int (y+z)\,dx - \frac{\partial}{\partial z}\int \left\{ z+x-\frac{\partial}{\partial y}\int (y+z)\,dx \right\} dy \right] dz = \int \left\{ x+y-\frac{\partial}{\partial z}(xy+xz)-\frac{\partial}{\partial z}(zy) \right\} dz = 0,$$

sarà $\varphi = xy+yz+zx+\text{C}$ l'integrale richiesto. + fine

298. — Il processo generale che abbiamo dato per la integrazione di una espressione differenziale (1) quando sono soddisfatte le condizioni (3) d'integrabilità, per essere applicato richiede varie integrazioni successive, e porta non poche limitazioni relative alla derivabilità delle funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$.

Si può dare però anche un altro processo che è molto notevole, e che oltre a non richiedere altro che semplici integrazioni applicate alle singole funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ separatamente, richiede soltanto l'esistenza e la continuità di quelle derivate parziali del primo ordine delle stesse funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ che figurano nelle condizioni d'integrabilità (3), con esclusione quindi delle derivate parziali $\frac{\partial \text{X}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \text{X}_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \text{X}_n}{\partial x_n}$ per le quali non si pone neppure la condizione della loro esistenza; per modo che con questo nuovo processo non si hanno altro che quelle condizioni che sono strettamente indispensabili e che devono naturalmente essere soddisfatte perchè la espressione data possa essere un differenziale esatto.

S'immagini perciò di partire da un punto fisso determinato $\text{A}_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ del campo C delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nel quale si suppongono soddisfatte le condizioni poste ora per le funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ e per le loro derivate parziali del prim'ordine, e per andare da questo punto A_0 al punto generico $\text{A}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si fissi di muoversi prima colla sola variabile x_1 da a_1 fino ad x_1 per modo da arrivare al punto $\text{A}_0(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, poi partendo da questo punto A_1 ci si muova colla sola variabile x_2 da a_2 fino ad x_2 per modo da arrivare al punto $\text{A}_2(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)$, e così continuando col muovere successivamente una variabile alla volta si finirà per arrivare al punto $\text{A}_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$; supposto naturalmente che con questi movimenti successivi si resti sempre nel campo C nel quale le condizioni poste per le funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ e per le loro derivate del prim'ordine sono soddisfatte.

Nel primo movimento da A_0 ad A_1 la funzione cercata φ_1 se esisterà, dovrà avere per differenziale $\text{X}_1(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_1$, e quindi indicando con φ_0 il suo valore iniziale nel punto di partenza A_0 si arriverà al punto A_1 col valore $\varphi_0 + \int_{a_1}^{x_1} \text{X}_1(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_1$.

Nel secondo cammino da A_1 ad A_2 il differenziale della funzione dovrà essere $\text{X}_2(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_2$, e quindi si arriverà al punto A_2 col valore

$$\varphi_0 + \int_{a_1}^{x_1} \text{X}_1(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \text{X}_2(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_2\,,$$

e così continuando si vede che si finirà per arrivare al punto $\text{A}_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ col valore

$$(5)\quad \varphi = \varphi_0 + \int_{a_1}^{x_1} \text{X}_1(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \text{X}_2(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)\,dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} \text{X}_3(x_1, x_2, x_3, a_4, \ldots, a_n)\,dx_3 +$$

$$+ \ldots + \int_{a_n}^{x_n} \text{X}_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\,dx_n\,;$$

e ora sarà facile vedere che sotto le condizioni poste per le funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ la funzione φ di n variabili così determinata con n integrazioni semplici avrà appunto per differenziale la espressione data (1).

Per le condizioni infatti che abbiamo posto per le funzioni $\text{X}_1, \text{X}_2, \ldots, \text{X}_n$ nel campo C, e per quanto dicemmo nel Cap. IX [pag. 170 e seg.] sugli integrali delle funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono anche altre variabili, si vede subito intanto che la funzione trovata φ sarà finita e continua nello stesso campo C e ammetterà tutte le derivate parziali del prim' ordine.

Presa poi a determinare la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}$ rispetto ad una variabile qualsiasi x_r di questa funzione φ si vede che sarà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \int_{a_r}^{x_r} X_r(x_1, x_2 \dots x_r, a_{r+1}, a_{r+2} \dots a_n)\, dx_r + \int_{a_{r+1}}^{x_{r+1}} X_{r+1}(x_1, x_2 \dots x_r, x_{r+1}, a_{r+2} \dots a_n)\, dx_{r+1} + \right.$$
$$\left. + \dots + \int_{a_n}^{x_n} X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n \right\},$$

ovvero (§ 124 [pag. 182 e seg.])

$$(6)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = X_r(x_1, x_2, \dots, x_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n) + \int_{a_{r+1}}^{x_{r+1}} \frac{\partial X_{r+1}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n)}{\partial x_r}\, dx_{r+1} +$$
$$+ \dots + \int_{a_n}^{x_n} \frac{\partial X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_r}\, dx_n \Big\},$$

o anche per le (3) che si suppongono soddisfatte

$$(7)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = X_r(x_1, x_2, \dots, x_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n) + \int_{a_{r+1}}^{r_{r+1}} \frac{\partial X_r(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, a_{r+1}, \dots, a_n)}{\partial x_{r+1}}\, dx_{r+1} +$$
$$+ \dots + \int_{a_n}^{x_n} \frac{\partial X_r(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n}\, dx_n \Big\},$$

e di qui eseguendo le integrazioni e riducendo si troverà $\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = X_r(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ciò che mostra appunto che quando sono soddisfatte le condizioni (3) la funzione trovata (5) ha per differenziale la espressione data (1), e rappresenta quindi un integrale di questa espressione differenziale.

299. — Scrivendo le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un altro ordine e applicando ancora il processo che ora abbiamo dato, si giungerà all'integrale sotto una forma diversa dalla (5); ma il nuovo integrale, come *ogni altro che venga trovato con altro processo qualsiasi*, venendo ad avere le stesse derivate, non potrà differire dall'integrale (5) altro che per una costante.

Questa costante però può cambiare nel passare da una parte ad un'altra del campo C (e allora l'integrale presenterà una discontinuità), quando in questo campo vi siano uno o più punti nei quali tutte o alcune delle funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ presentino qualche singolarità. Ciò del resto si intende bene come possa avvenire quando pel calcolo dell'integrale si tiene il processo che ora abbiamo indicato per giungere all'integrale (5), perchè, quando nel campo C vi siano i detti punti singolari, alcune delle linee d'integrazione successive al muoversi del punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verranno a passare per quei punti singolari, e allora il processo, per alcuni valori delle variabili, richiederà alcune modificazioni per le quali appunto l'integrale e quindi la costante potranno venire a cambiare di valore.

Del resto l'integrale, quando esiste, all'infuori di una costante che dipenderà sempre dal valore che gli si attribuirà nel punto iniziale $A_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ potrà determinarsi anche con altri processi dei quali quello indicato nel paragrafo precedente non è che un caso particolare.

È chiaro infatti che fissando leggi qualsiansi alla variabilità di $x_1, x_2, \dots, x_n$ per andare con continuità come nei casi precedenti dal punto iniziale A_0 al punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, qualunque sia il valore φ_0 che si attribuisca all'integrale nel punto A_0, la variazione che risulterà nell'integrale medesimo nel passare dal detto punto iniziale a un punto qualsiasi sarà sempre la somma degli accrescimenti che essa riceverà passando per punti vicinissimi al muoversi delle variabili secondo le leggi fissate, e sarà quindi anche il limite della somma di quegli accrescimenti e perciò anche dei differenziali corrispondenti dati dalla (1); ciò che equivale sempre a fare uno o più integrali ordinarii in dipendenza da quelle leggi, come si sono fatti nel paragrafo precedente. L'integrale quindi risulterà dalla somma di questi integrali ordinarii col valore iniziale φ_0, e potrà farsi corrispondere a un integrale qualsiasi determinando convenientemente questo valore iniziale.

300. — Le considerazioni del § 298, che ora abbiamo anche estese, mentre dànno un processo notevole ma del resto molto naturale per la ricerca dell'integrale di una espressione differenziale (1) quando questo integrale esiste, conducono anche ad una osservazione che merita di essere fatta.

Osserviamo cioè che *quand'anche le condizioni* (3) *non siano soddisfatte per la espressione differenziale data* (1), siccome coll'aggiungere e togliere nel secondo membro della espressione (6) gli integrali che figurano nel secondo membro della (7) si ha la formola seguente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=\mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\int_{a_{r+1}}^{x_{r+1}}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_{r+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{r+1},a_{r+2},\ldots,a_n)}{\partial x_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_{r+1},a_{r+2},\ldots,a_n)}{\partial x_{r+1}}\right\}dx_{r+1}+$$

$$+\int_{a_{r+2}}^{x_{r+2}}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_{r+2}(x_1,x_2,\ldots,x_{r+2},a_{r+3},\ldots,a_n)}{dx_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_{r+2},a_{r+3},\ldots,a_n)}{\partial x_{r+2}}\right\}dx_{r+2}+$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\int_{a_n}^{x_n}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right\}dx_n\,,$$

si vede subito che quando la espressione differenziale data (1) non sia un differenziale esatto basta ad ogni suo termine $\mathrm{X}_r dx_r$ per $r=1\,,2\,,\ldots,n-1$ aggiungere la espressione

$$\int_{a_{r+1}}^{x_{r+1}}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_{r+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{r+1},a_{r+2},\ldots,a_n)}{\partial x_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_{r+1},a_{r+2},\ldots,a_n)}{\partial x_{r+1}}\right\}dx_{r+1}+$$

$$+\int_{a_{r+2}}^{x_{r+2}}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_{r+2}(x_1,x_2,\ldots,x_{r+2},a_{r+3},\ldots,a_n)}{\partial x_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_{r+2},a_{r+3},\ldots,a_n)}{\partial x_{r+2}}\right\}dx_{r+2}+$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+$$

$$+\int_{a_n}^{x_n}\left\{\frac{\partial \mathrm{X}_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_r}-\frac{\partial \mathrm{X}_r(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right\}dx_n$$

moltiplicata per dx_r, per giungere ad una espressione differenziale che sia un differenziale esatto; e allora il suo integrale è appunto la funzione φ data dalla (5).

In questo caso cambiando l'ordine delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si giunge ugualmente ad altre espressioni (ordinariamente diverse) che sono pure differenziali esatti; e questa osservazione presenta una certa importanza inquantochè per essa partendo da una espressione differenziale qualsiasi che non sia un differenziale esatto si possono sempre costruire con tutta facilità altre espressioni che sono differenziali esatti.

Così ad es. se si parte da una espressione $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy$, dove X e Y sono funzioni di x e y, che non sia un differenziale esatto, indicando con a e b

due costanti qualsiansi, si giungerà subito a un differenziale esatto costruendo la espressione

$$\left\{\mathrm{X}+\int_b^y\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right)dy\right\}dx+\mathrm{Y}\,dy\,,$$

e anche costruendo l'altra

$$\mathrm{X}\,dx+\left\{\mathrm{Y}+\int_a^x\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\right)dx\right\}dy\,;$$

e gli integrali di queste espressioni saranno respettivamente le funzioni

$$\int_a^x \mathrm{X}(x\,,b)\,dx+\int_b^y \mathrm{Y}(x\,,y)\,dy+\mathrm{C}\,,\quad \int_b^y \mathrm{Y}(a\,,y)\,dy+\int_a^x \mathrm{X}(x\,,y)\,dx+\mathrm{C}\,,$$

essendo C una costante.

E similmente se si parte da una espressione $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$, dove $\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}$ sono funzioni di $x\,,y\,,z$, che non sia un differenziale esatto, indicando con $a\,,b\,,c$ tre costanti qualsiansi si giungerà subito a un differenziale esatto costruendo la espressione

$$\left[\mathrm{X}+\int_b^y\left\{\frac{\partial \mathrm{Y}(x,y,c)}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}(x,y,c)}{\partial y}\right\}dy+\int_c^z\left\{\frac{\partial \mathrm{Z}(x,y,z)}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{X}(x,y,z)}{\partial z}\right\}dz\right]dx+$$

$$+\left[\mathrm{Y}+\int_c^z\left\{\frac{\partial \mathrm{Z}(x,y,z)}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Y}(x,y,z)}{\partial z}\right\}dz\right]dy+\mathrm{Z}dz\,,$$

il cui integrale sarà la funzione $\int_a^x \mathrm{X}(x,b,c)\,dx+\int_b^y \mathrm{Y}(x,y,c)\,dy+\int_c^z \mathrm{Z}(x,y,z)dz+\mathrm{C}$

essendo ancora C una costante: e cambiando l'ordine delle variabili $x\,,y\,,z$ si potranno avere subito anche altre due espressioni differenziali che saranno pure differenziali esatti.

Così in particolare partendo dalla espressione $y^2dx+xz^2dy+x^3y\,dz$ che non è un differenziale esatto, col processo precedente si giunge subito all'altra

$$[c^2y-bc^2+b^2+3x^2y\,(z-c)\,]\,dx+[x^3(z-c)+c^2x]\,dy+x^3y\,dz$$

che come si verifica immediatamente è un differenziale esatto, e il cui integrale è $b^2(x-a)+c^2x(y-b)+x^3y\,(z-c)+\mathrm{C}$.

301. — Non lascieremo questo soggetto senza fare anche la osservazione seguente che è d'importanza grandissima.

Osserveremo cioè che quando nella espressione differenziale data (1) le condizioni (3) sono soddisfatte, l'integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ esiste, non solo nella ipotesi che finora abbiamo ammesso che $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano variabili indipendenti, ma anche quando esse siano legate fra loro da relazioni speciali o siano funzioni di altre variabili, poichè in ogni caso la funzione φ che si determina come integrale della (1) coi metodi superiormente indicati, anche se le $x_1, x_2, \dots, x_n$ non sono effettivamente variabili indipendenti ha per differenziale la espressione data (1) e quindi rappresenta sempre un suo integrale; e faremo altresì notare esplicitamente che in questo caso l'integrale della (1) si trova sempre come se le $x_1, x_2, \dots, x_n$ fossero del tutto indipendenti quand'anche effettivamente non lo siano, senza bisogno di fare uso e neppure di conoscere le relazioni speciali che legano fra loro le $x_1, x_2, \dots, x_n$ o che le legano ad altre variabili, e può sempre ottenersi partendo da un suo valore iniziale nei modi da noi indicati in generale nei paragrafi precedenti.

Se poi le condizioni d'integrabilità (3) non sono soddisfatte, allora non esisterà una funzione delle n quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ il cui differenziale, o il cui accrescimento (all'infuori di quantità d'ordine superiore), sia sempre la espressione data (1) quando si lascia che le variabili si possano muovere in un modo del tutto arbitrario come variabili indipendenti; ma quando fra le variabili si stabiliscano dei legami e il movimento di queste variabili si faccia solo con leggi e condizioni determinate, come appunto avverrà quando le stesse variabili, invece di essere del tutto indipendenti, siano legate fra loro o siano funzioni di un minor numero di altre variabili indipendenti, allora dipendentemente dalla natura di questi legami s'intende bene che potrà esistere ancora una funzione delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma legate nel modo anzidetto, o una funzione delle vere variabili indipendenti che abbia per differenziale la espressione data (1).

E bene s'intende difatti che quando ad es. le $x_1, x_2, \dots, x_n$ non siano variabili indipendenti, ma le variabili indipendenti siano invece altre in numero minore $u_1, u_2, \dots, u_i$, e si abbiano le relazioni

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, \dots, u_i) \ , \ x_2 = x_2(u_1, u_2, \dots, u_i) \ , \dots , \ x_n = x_n(u_1, u_2, \dots, u_i),$$

allora nella espressione (1) le $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ si esprimeranno per le $du_1, du_2, \dots, du_i$, e la espressione stessa si ridurrà ad un'altra della forma $U_1 du_1 + U_2 du_2 + \dots + U_i du_i$, con $U_1, U_2, \dots, U_i$ funzioni di $u_1, u_2, \dots, u_i$, e le condizioni d'integrabilità di questa corrispondenti alle (3) saranno in

numero molto minore $\frac{i(i-1)}{2}$, e potranno risultare soddisfatte dipendentemente dalle relazioni precedenti che legano le $x_1, x_2, \dots, x_n$ alle vere variabili indipendenti $u_1, u_2, \dots, u_i$.

302. — In particolare se le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ saranno funzioni di una sola variabile u, la espressione (1) si ridurrà alla forma $\psi(u)du$, essendo

$$\psi(u) = X_1 \frac{dx_1}{du} + X_2 \frac{dx_2}{du} + \dots + X_n \frac{dx_n}{du},$$

e il suo integrale sarà $\int \psi(u)du$; e similmente se $x_1, x_2, \dots, x_n$ saranno funzioni di due variabili indipendenti u e v, la espressione (1) si ridurrà alla forma $U\,du + V\,dv$ essendo

$$U = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial u} \ , \quad V = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial v},$$

e perchè questa espressione $U\,du + V\,dv$ risulti il differenziale esatto di una funzione $\varphi(u, v)$ basterà che le funzioni $x_1(u, v)$, $x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)$ che rappresenteranno $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano scelte in modo da far sì che resti soddisfatta la unica condizione $\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}$ che allora viene a corrispondere alle (3).

In particolare se si avrà la espressione differenziale a tre variabili $X dx + Y dy + Z dz$ dove X, Y e Z sono funzioni di x, y, z, ammettendo ad es. che solo x e y debbano essere indipendenti mentre z deve essere legata ad esse dalla formola $z = z(x, y)$, essendo $z(x, y)$ una funzione che ammette le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ o (colle solite notazioni di Monge) p, q, s, allora la espressione data potrà porsi sotto la forma

$$(X + Zp)\,dx + (Y + Zq)\,dy;$$

e perchè questa risulti un differenziale esatto con x e y variabili indipendenti basterà che si verifichi la condizione $\frac{\partial(X + Zp)}{\partial y} = \frac{\partial(Y + Zq)}{\partial x}$ che ora corrisponderà alle (3) e che, coll'osservare che Y e Z contengono x, y, z, e in esse z è funzione di x e y come lo sono p e q, può porsi sotto la forma

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) p - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) q = 0;$$

cioè basterà che $z(x, y)$ sia una delle infinite funzioni di x e y che soddisfano a questa equazione a derivate parziali del prim'ordine.

In altri termini la espressione data $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, quando non è un differenziale esatto perchè non sono soddisfatte le condizioni

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \;,\quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \;,\quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \,,$$

non rappresenterà il differenziale di una funzione quando ci si muove col punto (x, y, z) nello spazio in un modo qualsiasi, ma lo rappresenterà però quando i movimenti si faranno restando sempre sopra una delle infinite superficie $z = z(x, y)$ per le quali viene soddisfatta la precedente equazione a derivate parziali (8).

Integrali lungo linee.

303. — Il caso considerato nel paragrafo precedente in cui, essendo o no la espressione differenziale

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n \tag{1}$$

un differenziale esatto, si fa la integrazione supponendo che le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ anzichè essere indipendenti siano invece funzioni di una sola variabile u dà luogo a osservazioni molto importanti.

Tanto nel caso di due o di tre variabili, come in quello in cui le variabili sono in numero maggiore, quando queste si suppongono legate ad una nuova variabile u mediante le formole

$$x_1 = x_1(u) \;,\; x_2 = x_2(u) \;,\dots,\; x_n = x_n(u) \,, \tag{2}$$

essendo $x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)$ funzioni finite e continue di u che ammettono anche le derivate prime, – che per semplicità supporremo sempre finite e continue esse pure per tutti i valori di u che si considerano all'infuori tutt'al più di un numero finito di valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ –, allora al muoversi di u si dice che il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si muove, nello spazio a n dimensioni corrispondenti alle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, *lungo una linea* l, le cui equazioni sono date dalle formole precedenti (2), *che è sempre continua* e che in ogni punto u, che non sia uno dei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ha una tangente determinata che varia con continuità insieme ad u (*); e allora la integrazione della espressione (1) quando si fa sotto la ipotesi che si abbiano le (2), e andando dal valore u_0 di u pel quale $x_1, x_2, \dots, x_n$ hanno i valori $a_1, a_2, \dots, a_n$

(*) Come sempre si usa, si riportano qui al caso degli spazii a più dimensioni le denominazioni che sono relative al caso degli spazii a due e a tre dimensioni.

al valore generico u, viene detta naturalmente *integrazione lungo la linea stessa* (2) dal punto $A_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ al punto generico $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e corrisponde all'integrale definito

$$\int_{u_0}^{u_1} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n) \,, \tag{3}$$

dove le $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ devono essere tratte dalle (2), cioè corrisponde all'integrale definito ordinario

$$\int_{u_0}^{u_1} \{ X_1 x'_1(u) + X_2 x'_2(u) + \dots + X_n x'_n(u) \} du \,, \tag{4}$$

dove in $X_1, X_2, \dots, X_n$ si intendono posti per $x_1, x_2, \dots, x_n$ i valori (2) (*).

Così in particolare quella integrazione, che fu fatta nel § 298 per dare il secondo processo d'integrazione delle espressioni differenziali a n variabili indipendenti come la (1), fu una integrazione lungo una linea composta di n porzioni di linee riunite l'una all'altra, e su ciascuna delle quali tutte le variabili all'infuori di una hanno valori speciali che sono o si tengono fissi nella integrazione mentre l'altra variabile varia fra limiti determinati; e queste linee nel caso di due o di tre variabili coordinate cartesiane sono rispettivamente due o tre rette parallele agli assi coordinati.

(*) Nel caso di due variabili x e y, come in quello di tre x, y e z che si considerano come coordinate cartesiane dei punti del piano o dello spazio, se si ha una loro funzione $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$, e si considera una linea AM nel piano o nello spazio i cui estremi hanno per ascisse α e ξ, intendendo divisa questa linea in n parti qualsiansi coi punti $A, A_1, A_2, \dots, A_{s-1}, A_s, \dots, A_{n-1}, M$ le cui ascisse (supposte p. es. sempre crescenti) siano $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_s, \dots, x_{n-1}, \xi$, e indicando in generale con f_s un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x, y)$ o di $f(x, y, z)$ nel tratto da A_{s-1} a A_s, si chiama ordinariamente *integrale rispetto ad x fatto lungo la linea* AM il limite della somma $\sum_1^n (x_s - x_{s-1}) f_s$ dove $x_0 = \alpha$ e $x_n = \xi$, quando i punti di divisione si avvicinano indefinitamente fra loro al crescere indefinito del loro numero, nel supposto naturalmente che quel limite esista.

Quando $f(x, y)$ è finita e continua e la linea AM è essa pure a distanza finita ed è continua e rappresentata dalla equazione $y = y(x)$ nel caso del piano e dalle due $y = y(x)$ e $z = z(x)$ nel caso dello spazio, il detto limite corrisponde evidentemente agli integrali definiti $\int_\alpha^\xi f[x, y(x)]\,dx$ e $\int_\alpha^\xi f[x, y(x), z(x)]\,dx$; e quindi la definizione che abbiamo data sopra della integrazione lungo una linea nel caso di un numero qualunque di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ non è che una estensione di quella che si dà ordinariamente pei casi di due o di tre variabili.

304. — Naturalmente il valore dell'integrale (3) o (4) viene così a dipendere dalle relazioni (2), e quindi il suo valore dipenderà ordinariamente dalla linea d'integrazione condotta fra i punti estremi $A_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quando questi si suppongono fissi.

Quando però nel campo a n dimensioni nel quale si muovono le linee d'integrazione la espressione data (1) è il differenziale esatto di una funzione *a un sol valore* e le funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ non hanno alcuna singolarità nè esse nè le loro derivate prime, il valore dell'integrale sarà lo stesso qualunque sia la linea d'integrazione fra gli stessi punti estremi A_0 e M.

In questo caso infatti se $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un integrale della espressione data (1), trovato con un processo qualsiasi considerando le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ come indipendenti, il differenziale di questa funzione sarà sempre

$$d\varphi = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n$$

comunque siano presi gli accrescimenti $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, e così, in particolare, anche quando, movendosi lungo la linea l le cui equazioni sono le (2), le $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ siano tratti da queste equazioni; e quindi l'integrale lungo questa linea $\int_{u_0}^{u} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n)$, o $\int_{u_0}^{u} (X_1 u'_1 + X_2 u'_2 + \dots + X_n u'_n) du$ — che, come già notammo in generale in fine del § 299, può sempre considerarsi anche come la somma degli accrescimenti che riceve successivamente la funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quando il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si muove a tratti piccolissimi e evanescenti sulla linea stessa — sarà precisamente la differenza $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dei valori estremi di quella funzione, e così l'integrale medesimo sarà del tutto indipendente dalla linea d'integrazione fra i punti estremi.

305. — Invece se, *sempre nel supposto che la espressione* (1) *sia un differenziale esatto,* la funzione integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel campo a n dimensioni nel quale si muovono le linee d'integrazione condotte fra A e M sarà una funzione *a più valori,* e se partendo da A *con uno stesso valore iniziale* della funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e seguendo linee diverse per andare da A ad un altro punto M si giungerà in M con valori diversi della stessa funzione, allora, poichè gl'integrali $\int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n)$ della espressione (1) presi lungo quelle linee saranno sempre uguali alla differenza fra i valori di $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ai quali si giunge seguendo le linee stesse e il valore iniziale $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$, gl'integrali medesimi avranno valori diversi, cioè verranno a dipendere dalle linee lungo le quali l'integrazione viene fatta.

Inversamente se estendendoli lungo due linee diverse che terminino agli stessi estremi A_0 e M gli integrali $\int_{A_0}^{M} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n)$ avranno gli stessi valori, la funzione integrale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ partendo da A_0 con un dato valore giungerà in M con uno stesso valore sia che si segua l'una sia che si segua l'altra linea; mentre se gli integrali sui due percorsi avranno valori diversi la funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ giungerà in M con valori diversi.

306. — Ora quando si vada da un punto A_0 ad un punto M secondo due linee come la linea (2) che siano diverse ma vicinissime fra loro, e che si mutino l'una nell'altra con deformazione continua (*), se nel passaggio dall'una all'altra linea le funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$ si manterranno finite e continue, necessariamente gli integrali $\int_{A}^{M} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n)$, ove non siano uguali fra loro, coll'avvicinare sempre più le due linee d'integrazione dovranno venire vicini quanto si vuole; quindi, poichè la differenza di questi integrali dovrà essere uguale a quella dei valori che si ottengono per $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto M quando partendo da A_0 collo stesso valore si va in M secondo quelle linee, è certo che i valori dei due integrali dovranno essere assolutamente uguali fra loro se per $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ saremo nei casi che *ordinariamente* si presentano, cioè se i valori distinti che la funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ potrà avere in uno stesso punto M saranno in numero finito, o se, essendo questi valori in numero infinito, le loro differenze non saranno mai al disotto di un certo numero.

Ne segue che quando, conservando gli stessi estremi A_0 e M, la linea primitiva l d'integrazione fra A_0 e M si deforma successivamente con leggi qualsiansi ma sempre con continuità, e con questa deformazione continua passa poi ad essere un'altra linea l_1 senza traversare mai alcuna singolarità delle funzioni $X_1, X_2, \dots, X_n$, allora partendo da A_0 collo stesso valore della funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si arriverà in M con valori uguali tanto col primo

---

(*) Si intende dire con questo che, avendosi una linea L che sia rappresentata dalle equazioni (2) e che si consideri pei valori di u fra u_0 e u relativi ai punti da A_0 ad M, le funzioni $x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)$ col variare insensibilmente di qualche parametro contenuto in esse si mutino, con leggi qualsiansi ma sempre con continuità, in altre funzioni che per gli stessi valori di u si esse che le loro derivate siano sempre vicine alle funzioni e alle derivate corrispondenti più di una quantità comunque piccola data δ, per modo che le differenze fra i valori corrispondenti di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e al tempo stesso quelle fra i valori delle derivate nei punti corrispondenti agli stessi valori di u siano sempre numericamente minori di δ.

quanto col secondo percorso, e gli integrali $\int_{A_0}^{M}(X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n)$ estesi ai due percorsi saranno uguali.

In altri termini, sotto le fatte ipotesi per la funzione integrale $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, mutando la linea d'integrazione col tenere fissi gli estremi A_0 e M l'integrale $\int_{A_0}^{M}(X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n)$, e così i valori di $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nel punto M, non potranno mutare altro che quando, deformando con continuità la prima linea per passare con questa deformazione alla seconda, nel passaggio da una linea all'altra s'incontrino singolarità delle funzioni $X_1, X_2,\ldots, X_n$. E così se in un campo C a n dimensioni la espressione (1) sarà il differenziale esatto di una funzione che, se è a più valori, in ogni punto però ha soltanto un numero finito di valori o avendone un numero infinito le loro differenze non vengono mai al disotto di una certa quantità, allora in ogni porzione C_1 di C nella quale le funzioni $X_1, X_2,\ldots, X_n$ non abbiano singolarità e alla quale appartengano i punti iniziale e finale A_0 e M gli integrali $\int_{A_0}^{M}(X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n)$ estesi alle linee fra A e M tutte contenute in C_1 e che possono ridursi l'una all'altra con deformazione continua senza uscire mai da C_1, avranno tutti uno stesso valore che dipenderà soltanto dai punti estremi e non dalla linea d'integrazione.

307. – Se poi in un campo C a n dimensioni al quale appartiene un punto $A_0(a_1, a_2,\ldots, a_n)$ non si sa se la espressione (1) sia un differenziale esatto, pure essendo ancora in quel campo le funzioni $X_1, X_2,\ldots, X_n$ finite e continue insieme alle loro derivate prime $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ (r diverso da s), allora è facile vedere inversamente che se andando dal punto A_0 a un altro punto M qualsiasi nell'intorno di A_0 l'integrale $\int_{A_0}^{M}(X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n)$ avrà sempre lo stesso valore qualunque sia il percorso che si tiene, la espressione stessa (1) soddisfarà necessariamente alle condizioni che si richiedono pei differenziali esatti nel punto $A_0(a_1, a_2, a,\ldots, a_n)$, nel senso cioè che in questo punto saranno soddisfatte le $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}=\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ con r diverso da s.

Tenendo infatti il processo seguito nel § 298 pel calcolo dell'integrale della espressione differenziale data (1), si supponga di andare dal punto $A_0(a_1, a_2\ldots a_n)$ al punto $M_{r,s}(a_1, a_2\ldots a_{r-1}, a_r+h_r, a_{r+1}\ldots a_{s+1}, a_s+h_s, a_{s+1}\ldots a_n)$

seguendo prima il cammino nel quale muovendosi colla sola variabile x_r si va con questa variabile da a_r a a_r+h_r e poi partendo dal punto d'arrivo $M_r(a_1, a_2,\ldots, a_{r-1}, a_r+h_r, a_{r+1},\ldots, a_{s-1}, a_s, a_{s+1},\ldots, a_n)$ e muovendosi colla sola variabile x_s si va con questa variabile da a_s a a_s+h_s arrivando così al punto $M_{r,s}$.

In tal caso l'integrale della espressione (1) esteso alla linea $A_0M_rM_{r,s}$ sarà il seguente

$$\int_{a_r}^{a_r+h_r}X_r(a_1, a_2,\ldots, a_{r-1}, x_r, a_{r+1},\ldots, a_{s-1}, a_s, a_{s+1},\ldots, a_n)\,dx_r+$$
$$+\int_{a_s}^{a_s+h_s}X_s(a_1, a_2,\ldots, a_{r-1}, a_r+h_r, a_{r+1},\ldots, a_{s-1}, x_s, a_{s+1},\ldots, a_n)\,dx_s;$$

mentre se dal punto A_0 si va in modo simile allo stesso punto $M_{r,s}$ ma muovendosi prima colla variabile x_s e poi colla variabile x_r, si troverà l'integrale

$$\int_{a_s}^{a_s+h_s}X_s(a_1, a_2,\ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1},\ldots, a_{s-1}, x_s, a_{s+1},\ldots, a_n)\,dx_s+$$
$$+\int_{a_r}^{a_r+h_r}X_r(a_1, a_2,\ldots, a_{r-1}, x_r, a_{r+1},\ldots, a_{s-1}, a_s+h_s, a_{s+1},\ldots, a_n)\,dx_r;$$

e quindi se, secondo le fatte ipotesi, i due integrali saranno uguali, la loro differenza Δ sarà zero.

Ora questa differenza può scriversi

$$\Delta=h_s\int_{a_r}^{a_r+h_r}\frac{X_r(a_1,..,a_{r-1},x_r,a_{r+1},..,a_{s-1},a_s+h_s,a_{s+1},..,a_n)-X_r(a_1,..,a_{r-1},x_r,a_{r+1},..,a_{s-1},a_s,a_{s+1},..,a_n)}{h_s}dx_r-$$
$$-h_r\int_{a_s}^{a_s+h_s}\frac{X_s(a_1,..,a_{r-1},a_r+h_r,a_{r+1},..,a_{s-1},x_s,a_{s+1},..,a_n)-X_s(a_1,..,a_{r-1},a_r,a_{r+1},..,a_{s-1},x_s,a_{s+1},..,a_n)}{h_r}dx_s,$$

e indicando in generale con $X_{i,j}$ la derivata di X_i rispetto a x_j e con θ_r e θ_s numeri positivi compresi fra 0 e 1, pel teorema degli accrescimenti finiti avremo anche

$$\Delta = h_s \int_{a_r}^{a_r+h_r} X_{r,s}(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, x_r, a_{r+1}, \ldots, a_{s-1}, a_s+\theta_s h_s, a_{s+1}, \ldots, a_n)\, dx_r -$$

$$- h_r \int_{a_s}^{a_s+h_s} X_{s,r}(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r+\theta_r h_r, a_{r+1}, \ldots, a_{s-1}, x_s, a_{s+1}, \ldots, a_n)\, dx_s ,$$

ovvero $\Delta = h_r h_s (\overline{X}_{r,s} - \overline{X}_{s,r})$ essendo $\overline{X}_{r,s}$ e $\overline{X}_{s,r}$ i valori di $X_{r,s}$ e $X_{s,r}$ nei respettivi punti $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r + \theta'_r h_r, a_{r+1}, \ldots, a_{s-1}, a_s + \theta''_s h_s, a_{s+1}, \ldots, a_n)$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r + \theta''_r h_r, a_{r+1}, \ldots, a_{s-1}, a_s + \theta'_s h_s, a_{s+1}, \ldots, a_n)$ dove le $\theta_r, \theta_s, \theta''_r$ e θ''_s sono quantità positive comprese fra 0 e 1; quindi per le nostre ipotesi sarà $\overline{X}_{r,s} - \overline{X}_{s,r} = 0$.

Di qui, osservando che i punti suindicati ai quali corrispondono questi valori di $\overline{X}_{r,s}$ e $\overline{X}_{s,r}$ sono vicini quanto si vuole al punto A_0 dipendentemente dalla piccolezza delle h_r e h_s, e osservando inoltre che abbiamo supposto che in questo punto A_0 le funzioni $X_{r,s}$ e $X_{s,r}$ siano finite e continue, se ne deduce subito che nello stesso punto A_0 si ha $X_{r,s} = X_{s,r}$ come volevamo dimostrare; e la proprietà così dimostrata varrà per qualunque punto di C se per ogni punto saranno soddisfatte le condizioni che ora avevamo pel punto A_0, per modo che si può anche affermare che *se*, nel campo C nel quale $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono sempre finite e continue insieme alle loro derivate prime $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ (r diverso da s), *gli integrali presi lungo le linee condotte comunque fra due punti dati qualsiasi non dipenderanno dalla linea d'integrazione ma soltanto dai punti estremi, la espressione differenziale* (1) *sarà un differenziale esatto in tutto il campo.*

E avendo riguardo alla dimostrazione precedente, si può anche osservare che quando ci si limiti a considerare un punto $A_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ preso isolatamente, le condizioni che si posero per giungere a concludere che in questo punto A_0 si ha $X_{r,s} = X_{s,r}$ o $\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ possono alquanto ridursi, poichè propriamente basta richiedere che queste derivate $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ e $\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ siano finite e continue in quel punto e soltanto rispetto alle singole coppie di variabili x_r e x_s separatamente, senza richiedere nulla rispetto alla loro continuità nei punti vicini. E ciò perchè quando siano soddisfatte soltanto queste condizioni la dimostrazione può farsi ancora ugualmente, colla sola differenza che si deve intendere allora che le quantità indicate sopra con

$\overline{X}_{r,s}$ e $\overline{X}_{s,r}$ rappresentino semplicemente numeri determinati compresi fra i limiti inferiori e superiori delle $X_{r,s}$ e $X_{s,r}$ quando, restando ferme le altre variabili, le x_r e x_s si muovono fra a_r e $a_r + h_r$ e fra a_s e $a_s + h_s$ respettivamente; e questi limiti inferiori e superiori, per la supposta continuità delle $X_{r,s}$ e $X_{s,r}$ nel punto A_0 sono ancora vicini quanto si vuole ai valori di $X_{r,s}$ e $X_{s,r}$ nello stesso punto A_0.

E se, occupandosi solo delle due variabili x_r e x_s separatamente, si ha riguardo solo alle derivate $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ e $\frac{\partial X_s}{\partial x_r}$ di X_r e X_s, allora tenendo conto della dimostrazione fatta si vede che anche degli integrali $\int (X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n)$ estesi a linee piccolissime che vanno da A_0 basterà considerare gli integrali $\int_{A_0}^{M_{r,s}} (X_r\, dx + X_s\, dx_s)$ relativi alla espressione $X_r\, dx_r + X_s\, dx_s$, come se le altre variabili non ci fossero, e poi assicurarsi soltanto che questi integrali risultano uguali quando nella integrazione ci si muove prima colla variabile x_r e poi colla variabile x_s e viceversa, ferme restando sempre le altre variabili.

308. — Due tratti di linea ambedue continui che vadano da un punto A_0 ad un punto qualsiasi M, considerati insieme e l'uno percorso andando da A_0 ad M e l'altro da M ad A_0 costituiscono una linea chiusa L. E quando si possa immaginare un campo C_1 a n dimensioni che contenga l'intiera linea $A_0 M A_0$ e nel quale la espressione (1) sia un differenziale esatto e le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ siano finite e continue insieme alle loro derivate prime $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ (r diverso da s), allora, se il campo C_1 sarà tale che una porzione (qualsiasi) di L possa con deformazione continua e senza uscire dal campo ridursi alla parte rimanente della linea stessa, l'integrale $\int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n)$ esteso al secondo tratto da M ad A_0 sara uguale e di segno contrario a quello esteso al primo da A_0 ad M perchè andando su quel secondo tratto da M ad A_0 i differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ verranno ad essere uguali e di segno contrario a quelli che si hanno quando sullo stesso tratto si và da A_0 ad M; e quindi l'integrale esteso all'intera linea chiusa sarà zero.

E così pure se colle formole (2) e sempre nel detto campo C_1 si avrà una linea chiusa L perchè col passare dal valore iniziale u_0 ad un altro valore u_1 le funzioni $x_1(u), x_2(u), \ldots, x_n(u)$ che figurano nelle stesse formole (2) per $u = u_0$ e per $u = u_1$ vengono a riprendere lo stesso valore e conducono quindi allo stesso punto A_0, l'integrale $\int_L (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + ... + X_n dx_n)$ esteso a quella linea chiusa L sarà zero se il campo C_1 sarà tale che preso su L su un punto qualsiasi M, questo punto scomporrà la linea in due parti l_1 e l_2 che incominciano ciascuna ad A_0 e terminano ad M, e che come i due tratti che si avevano nel caso precedente possono ridursi l'una all'altra con deformazione continua restando sempre in C_1; o anche, il che torna lo stesso, se la linea L, al suo deformarsi con continuità, restando sempre chiusa e sempre col punto A_0 iniziale e finale ad un tempo, senza uscire mai da C_1 potrà finire per ridursi al punto A_0, perchè allora l'integrale esteso alle varie linee successive conserverà sempre lo stesso valore, e quando la linea sarà ridotta piccolissima tale sarà pure l'integrale, ciò che porta appunto che l'integrale stesso, che deve avere un valore determinato, sarà necessariamente zero.

Viceversa se, essendo ancora le $X_1, X_2, ..., X_n$ funzioni finite e continue insieme alle loro derivate $\frac{\partial X_r}{\partial x_s}$ (r diverso da s) in ogni punto di un campo C, non si saprà se in questo campo la espressione (1) è un differenziale esatto, allora quando si riscontri che, per *qualunque* linea chiusa arbitrariamente piccola, contenuta in quel campo, l'integrale esteso ad essa è zero, tenendo conto di quanto dicemmo nel paragrafo precedente, si potrà ancora affermare che la espressione (1) è un differenziale esatto in tutto quel campo.

309. — Ammettiamo ora che nel campo C che si considera le funzioni $X_1, X_2, ..., X_n$, *pure mantenendosi sempre a un sol valore,* possano in qualche punto o lungo qualche linea o in altre parti a due o più dimensioni di C avere qualche singolarità, *essendo però sempre in tutti gli altri punti di* C *la espressione* (1) *un differenziale esatto.*

Allora se si considera in C una linea chiusa L e insieme un'altra linea pur chiusa L_1 vicinissima a questa nella quale senza uscire da C la stessa L si muti con deformazione continua, è certo intanto che se nel passaggio dall'una all'altra linea le funzioni $X_1, X_2, ..., X_n$ rimarranno in una parte di C nella quale non hanno singolarità, gli integrali $\int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + ... + X_n dx_n)$ estesi a queste linee quando s'intendano percorse nello stesso senso, se non saranno uguali non potranno differire fra loro che per quantità piccolissime, e tanto più piccole quanto più saranno vicine le linee stesse.

D'altra parte se sulla linea L escludiamo un tratto piccolissimo σ e sulla linea L_1 escludiamo il tratto corrispondente σ_1 nel quale σ viene a mutarsi colla deformazione, e intendiamo riuniti gli estremi corrispondenti di questi

tratti σ e σ_1 con linee l e l_1 pure piccolissime, la linea chiusa composta dalle porzioni $L - \sigma$ e $L_1 - \sigma_1$ di L e L_1 e dalle linee l e l_1 sarà tale che nel percorrerla tutta intiera le due parti $L - \sigma$ e $L_1 - \sigma_1$ verranno percorse in senso opposto e lo stesso avverrà delle due l e l_1 (*), e l'integrale esteso alla intiera linea così percorsa sarà zero perchè questa linea è chiusa e, nella porzione di C alla quale appartengono tutte queste linee $L - \sigma$, $L_1 - \sigma_1$, l e l_1, anche quando si mutano con deformazione continua, le funzioni $X_1, X_2, ..., X_n$ non hanno singolarità.

La differenza quindi fra gli integrali estesi alle linee $L - \sigma$ e $L_1 - \sigma_1$ quando s'intendono percorse nello stesso senso finirà per divenire piccola quanto si vuole, e ciò non dipendentemente dalla vicinanza di L e L_1, ma dipendentemente dalla piccolezza dei tratti σ e σ_1, perchè all'impiccolire indefinitamente di questi tratti le linee l e l_1 si avvicinano sempre più fra loro, e siccome queste linee nella integrazione fatta lunga la intiera linea chiusa vengono percorse in senso opposto gli integrali estesi alle stesse linee l e l_1 (che sono già sempre piccolissimi per ciascuna di esse separatamente a causa della loro piccolezza) tendono a distruggersi completamente all'impiccolire indefinito di σ e σ_1.

Ne segue che, tenendo ferme le linee L e L_1, la indicata differenza degli integrali estesi alle linee $L - \sigma$ e $L_1 - \sigma_1$ tende a impiccolire indefinitamente all'impiccolire di σ e σ_1, e questo basta evidentemente per poter dire che il suo limite al tendere a zero di σ e σ_1, che è la differenza fra gli integrali estesi ad L e ad L_1, sarà zero, e questi due integrali saranno assolutamente eguali fra loro.

Passando ora con una nuova deformazione dalla linea L_1 ad un'altra linea pur vicinissima L_2 sempre senza uscire da C, e poi ad un'altra L_3, e così successivamente fino ad arrivare ad un'altra linea chiusa $\overline{L}$ senza mai uscire dal campo C e senza traversare singolarità delle funzioni $X_1, X_2, ..., X_n$ gli integrali non muteranno nel passare successivamente da una linea all'altra, e così *l'integrale esteso alla prima linea chiusa L sarà uguale a quello esteso alla linea chiusa finale* $\overline{L}$.

310. — Aggiungiamo che avremmo anche potuto considerare subito le due linee iniziale e finale L e $\overline{L}$ senza passare per le linee intermedie

(*) Così nel caso di due variabili x e y corrispondenti alle coordinate cartesiane dei punti di un piano, se le linee L e L_1 saranno ad es. due circonferenze concentriche e i tratti σ e σ_1 saranno quelli compresi fra due loro raggi vicinissimi, la linea chiusa composta si formerà dalle parti che restano delle due circonferenze togliendovi gli archi σ e σ_1 e dalle piccole porzioni di raggi condotti agli estremi di σ e σ_1 comprese fra le due circonferenze.

$L_1, L_2, L_3, \ldots$, facendo per esse quella dimostrazione stessa che abbiamo fatta testè nel caso delle linee L e L_1; cioè formando una nuova linea chiusa composta colle linee $\overline{L}$ e L dalle quali siano tolti due tratti piccolissimi σ e σ_1, e con due linee vicinissime l e l_1 condotte alle estremità di quei tratti σ e σ_1 di L e L_1 e che tendano a sovrapporsi all'impiccolire indefinito dei tratti medesimi σ e σ_1; e saremmo giunti ugualmente a dimostrare che gli integrali estesi alle due linee L e $\overline{L}$ sono uguali quando le stesse linee L e $\overline{L}$ si possono riguardare come appartenenti ad un campo nel quale la espressione (1) è un differenziale esatto e in esso le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono a un sol valore e non hanno nessuna singolarità, e le linee stesse L e $\overline{L}$ possono mutarsi l'una nell'altra con deformazione continua senza uscire dal campo.

311. — In particolare dunque se il campo C che si considera sarà tale che in esso ogni linea chiusa possa con deformazione continua ridursi ad un punto, e se in esso le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ avranno soltanto una singolarità in un punto $A_0(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, indicando con ω_0 una linea chiusa piccola quanto si vuole presa in un intorno piccolissimo del punto stesso, e con L una linea chiusa che colla deformazione continua possa ridursi ad A_0 e quindi anche ad ω_0, si vede che l'integrale $\int_L (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n)$ esteso ad L sarà uguale all'integrale esteso ad ω_0 e quindi anche al limite di questo integrale preso all'impiccolire di ω_0 indefinitamente.

D'altra parte se di punti singolari non vi ha che il solo punto A_0 e *se il campo* C *che si considera è a più di due dimensioni*, nulla impedisce di estrarre da C un nuovo campo C_1 nel quale non sia più contenuto il punto A_0 ma vi sia sempre contenuta la linea L la quale potrà ancora con deformazione continua ridursi ad un punto di C_1, e questo mostra che allora l'integrale $\int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n)$ sarà zero; quindi si può anche evidentemente affermare che, colle condizioni che abbiamo poste, *nel caso di* $n > 2$ la singolarità nel punto A_0 sarà sempre tale che anche l'integrale esteso ad ω_0 e così il suo limite saranno zero come sarà zero l'integrale esteso a qualunque linea chiusa che con deformazione continua possa ridursi ad A_0; e *solo nel caso di* $n = 2$ l'integrale esteso a ω_0 e il suo limite potranno avere un valore determinato e diverso da zero che sarà sempre uguale a quello dell'integrale esteso alle linee L che con deformazione continua possono ridursi al punto A_0.

E così ad es. se la linea ω_0 potrà rappresentarsi colle equazioni $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_{p-1} = \alpha_{p-1}, x_p = \alpha_p + \rho\cos\omega$, $x_{p+1} = \alpha_{p+1}, \ldots, x_{q-1} = \alpha_{q-1}$, $x_q = \alpha_q + \rho \operatorname{sen}\omega$,

$x_{q+1} = \alpha_{q+1}, \ldots, x_n = \alpha_n$, essendo ω una variabile che va da 0 a 2π e ρ una quantità costante che tende a zero all'impiccolire sempre più di ω, allora per $n > 2$ l'integrale

$$\int_0^{2\pi} (-\rho \overline{X}_p \operatorname{sen}\omega + \rho \overline{X}_q \cos\omega)\, d\omega$$

dove $\overline{X}_p$ e $\overline{X}_q$ sono i valori che prendono X_p e X_q lungo la linea ω_0, cioè quando $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_q, \ldots, x_n$ hanno i valori sopra indicati, sarà zero per qualunque valore comunque piccolo di ρ e per ogni coppia di funzioni X_p e X_q, come sarà sempre zero l'integrale $\int_L (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots X_n dx_n)$ esteso a una linea chiusa qualunque L che con trasformazione continua possa ridursi al punto A_0.

E se essendo $n = 2$ la espressione differenziale (1) si riduce alla $X_p dx_p + X_q dx_q$ allora si avrà la formola

$$\int_L (X_p dx_p + X_q dx_q) = \int_0^{2\pi} (-\rho \overline{X}_p \operatorname{sen}\omega + \rho \overline{X}_q \cos\omega)\, d\omega = \lim_{\rho=0} \int_0^{2\pi} (-\rho \overline{X}_p \operatorname{sen}\omega + \rho \overline{X}_q \cos\omega)\, d\omega,$$

e l'integrale $\int_0^{2\pi} (-\rho X_p \operatorname{sen}\omega + \rho X_q \cos\omega)\, d\omega$ e il suo limite per $\rho = 0$ avranno uno stesso valore determinato zero o no, che sarà il valore comune degli integrali $\int_L (X_p dx_p + X_q dx_q)$ estesi alle solite linee chiuse L che con trasformazione continua possono ridursi al punto A_0.

E se nella porzione del campo C che si considera, invece di esservi un solo punto singolare per le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vi saranno i k punti isolati $A_1, A_2, \ldots, A_k$, con k numero finito, e non vi saranno altre singolarità, allora per $n > 2$ l'integrale $\int_L (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n)$ sarà sempre uguale a zero, mentre se $n = 2$ esso sarà uguale alla somma di k integrali estesi a altrettante linee chiuse piccole quanto si vuole $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ che racchiudono ciascuna uno solo di quei punti singolari e al limite di questa somma.

312. — Altre e importantissime proprietà relative agli integrali curvilinei potrebbero dedursi da queste considerazioni; ma questi studii che possono farsi anche per altra via per mezzo degli integrali multipli ci porterebbero im-

mensamente in lungo, e per essere completi richiederebbero studii che qui non possiamo fare, sui campi a due o più variabili. Ci arresteremo perciò a quelli che abbiamo fatti, e solo per mostrarne la utilità aggiungeremo come essi possano servire in molti casi pel calcolo degli integrali definiti, supponendo senz'altro per semplicità che le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si riducano a due sole x e y che considereremo come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano.

Supponiamo infatti che si abbia ad es. da calcolare l'integrale definito $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du$; e ammettiamo che si possano trovare due funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ per le quali la espressione $X\,dx + Y\,dy$ risulti un differenziale esatto in un certo campo C nel quale X e Y sono anche finite e continue, e al tempo stesso si abbiano due funzioni $x(u)$ e $y(u)$ come quelle delle equazioni (2) tali che la linea (2) ad esse corrispondente considerata fra i valori u_0 e u_1 di u si trovi tutta intera nel campo C e su essa la espressione differenziale corrispondente $X\,dx + Y\,dy$ o $\{X x'(u) + Y y'(u)\}\,du$ si riduca a $f(u)\,du$.

Allora se per $u = u_0$, e per $u = u_1$ i valori di x e y saranno x_0 e y_0, e x_1 e y_1, indicando con $\varphi(x, y)$ l'integrale di $X\,dx + Y\,dy$ trovato coi soliti metodi dei §§ 296 e 298 o con altri processi col considerare x e y come variabili indipendenti, l'integrale cercato $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du$ non sarà altro che la differenza $\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0)$.

E indipendentemente dalla conoscenza dell'integrale $\varphi(x, y)$, se un'altra linea $x = \xi(\omega), y = \eta(\omega)$ per $\omega = \omega_0$ e $\omega = \omega_1$ passerà per gli stessi punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e fra questi punti sarà anch'essa situata nel campo C, allora l'integrale cercato $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du$ sarà uguale all'altro esteso alla nuova linea

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \{X[\xi(\omega), \eta(\omega)]\,\xi'(\omega) + Y[\xi(\omega), \eta(\omega)]\,\eta'(\omega)\}\,d\omega,$$

e quindi la ricerca del primo integrale sarà ridotta a quella di quest'ultimo, e potrà darsi che questo si possa determinare più facikmente.

313. — Più specialmente poi per la ricerca degli integrali definiti gioverà l'applicare le considerazioni dei §§ 310 e 311.

Supposto infatti ad es. che la linea rappresentata dalle equazioni $x = x(u)$, $y = y(u)$ venga ad essere una linea chiusa L perchè per $u = u_0$ e per $u = u_1$ le funzioni $x(u)$ e $y(u)$ riprendono lo stesso valore, e supposto inoltre che

si riscontri che l'integrale cercato $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du$ viene a corrispondere all'integrale di una certa espressione differenziale $X\,dx + Y\,dy$ preso lungo quella linea L, allora se nel campo racchiuso da L la espressione $X\,dx + Y\,dy$ sarà un differenziale esatto e le funzioni X e Y saranno a un sol valore ma avranno in C uno o più punti singolari in numero finito per es. i punti $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2), \dots, A_i(a_i, b_i), \dots, A_k(a_k, b_k)$, l'integrale cercato $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du$ sarà uguale al limite della somma degli integrali $\int (X\,dx + Y\,dy)$ estesi ciascuno in un senso conveniente a curve piccolissime $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k$ che racchiudano respettivamente i punti $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_k$, il limite intendendosi preso all'impiccolire indefinito delle linee $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k$.

Preso per ciascuna di queste linee ω_i un piccolo cerchio col centro in A_i e di raggio ρ_i, avremo dunque $\int_{u_0}^{u_1} f(u)\,du = \sum_1^k{}_i\, I_i$ essendo in generale I_i il limite dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} \{-\rho_i X(a_i + \rho_i \cos\omega, b_i + \rho_i \operatorname{sen}\omega) \operatorname{sen}\omega + \rho_i Y(a_i + \rho_i \cos\omega, b_i + \rho_i \operatorname{sen}\omega) \cos\omega\}\,d\omega$$

per $\rho_i = 0$.

314. — Così in particolare quando si abbia da determinare l'integrale $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')}$, si osserverà che all'infuori del divisore $R^2 - \rho'^2$ esso può riguardarsi come l'integrale della espressione differenziale

$$(5)\quad -\left\{2\frac{y - \rho'\operatorname{sen}\theta'}{(x - \rho'\cos\theta')^2 + (y - \rho'\operatorname{sen}\theta')^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right\}dx + \left\{2\frac{x - \rho'\cos\theta'}{(x - \rho'\cos\theta')^2 + (y - \rho'\operatorname{sen}\theta')^2} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right\}dy$$

esteso al cerchio C di raggio R col centro all'origine che ha per equazioni le due $x = R\cos\theta, y = R\operatorname{sen}\theta$; e poichè questa espressione è un differenziale esatto e i suoi coefficienti divengono infiniti oltre che nell'origine $x = 0, y = 0$ anche nel punto $M(x = \rho'\cos\theta', y = \rho'\operatorname{sen}\theta')$ che se $\rho' < R$ sarà interno al cerchio C, si concluderà subito che sotto questa ipotesi di $\rho' < R$ l'integrale cercato moltiplicato per $R^2 - \rho'^2$ è uguale al limite della somma dei due integrali estesi a due cerchi piccolissimi di raggi ρ e ρ_1 l'uno col centro all'origine e l'altro col centro nel punto M, percorsi questi due cerchi nel senso diretto.

Facendo $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\operatorname{sen}\omega$ sul primo cerchio e $x=\rho'\cos\theta'+\rho_1\cos\omega$, $y=\rho'\operatorname{sen}\theta'+\rho_1\operatorname{sen}\omega$ sul secondo, si trova subito che il primo integrale ha per valore e quindi anche per limite -2π per $\rho=0$, e il secondo ha per valore e quindi anche per limite 4π per $\rho_1=0$, e perciò il valore dell'integrale cercato è $\frac{2\pi}{R^2-\rho'^2}$ e si ha quindi per $\rho'<R$

$$\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho'^2}{R^2+\rho'^2-2R\rho'\cos(\theta-\theta')}d\theta=2\pi,$$

come risulta subito in modo semplice anche dalla formola (2) del §§ 138 1.° [pag. 205] cambiando ρ in $\frac{\rho'}{R}$, ecc.

Aggiungiamo che se la integrazione della espressione (5) anzichè farsi lungo il cerchio C col centro nell'origine viene fatta lungo altre linee che abbiano ancora nel loro interno l'origine e il punto M, si hanno altri integrali il cui valore a causa dei risultati dei paragrafi precedenti è sempre uguale a 2π.

Così facendo l'integrazione lungo l'ellisse $x=a\cos\theta$, $y=b\operatorname{sen}\theta$ di semiassi a e b ambedue maggiori di ρ' avremo la formola

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{2ab-2\rho'(a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'+b\cos\theta\cos\theta')}{(a\cos\theta-\rho'\cos\theta')^2+(b\operatorname{sen}\theta-\rho'\operatorname{sen}\theta')^2}-\frac{ab}{a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)d\theta=-2\pi,$$

e poichè l'integrale $\int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta}d\theta$ proviene da quello del differenziale esatto $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ che ha soltanto un punto singolare nell'origine ed è perciò uguale a 2π, avremo anche la formola

$$\int_0^{2\pi}\frac{ab-\rho'(a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'+b\cos\theta\cos\theta')}{a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta+\rho'^2-2\rho'(a\cos\theta\cos\theta'+b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta')}d\theta=0,$$

per tutti i valori positivi di a e b e con ρ' pure positivo ma inferiore ad a e b, e θ' qualsiasi.