ULISSE DINI

PROFESSORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

ANALISI INFINITESIMALE

Vol. II. – Calcolo Integrale.

(1.ª PARTE).

PISA

STAB. TIPOGRAFICO SUCC. FRATELLI NISTRI

1909

PREFAZIONE

Quando, sul finire del 1905, spintovi dalla insistenza di amici e colleghi carissimi, io mi decisi di pubblicare per la stampa le mie lezioni di Analisi infinitesimale del 1877, mi prefissi di pubblicarle quali erano, cioè del tutto conformi alle autografie che di quelle erano state fatte dapprima e che si erano poi varie volte ripetute.

Nè con altro intendimento potevo accingermi a tale impresa, perchè ben pensavo che se avessi voluto introdurvi anche soltanto piccole modificazioni qua e là, mi sarebbe stata necessaria una maggiore calma e un maggior tempo disponibile che mille occupazioni svariate, mille circostanze non mi consentono di avere.

E a tali intendimenti in sostanza io mi attenni fedelmente dapprima, ponendo sempre un freno ai desiderii che via via si manifestavano in me di fare cambiamenti, e limitandomi ad inserire poche aggiunte o particolari considerazioni soltanto in note a piè di pagina, e ad indicare espressamente quelle pochissime aggiunte, strettamente indispensabili e opportune, che dapprima andai introducendo qua e là nel testo.

Il desiderio di cambiare però e di aggiungere andò facendosi in me sempre più vivo di mano in mano che si procedeva nella stampa del primo volume; e già nelle parti di questo che si riferiscono alle applicazioni geometriche finii per aggiungere capitoli interi!

Così incominciava già a snaturarsi d'assai il concetto primitivo; e la pubblicazione cessava di essere un corso di lezioni quale lo aveva esposto alla Università nei miei anni giovanili, e tendeva a divenire invece un trattato assai esteso di Analisi infinitesimale, per quanto sempre limitato a parti fondamentali di questa.

Ma se malgrado questo può dirsi che nel primo volume le cose continuassero ancora ad andare, devo riconoscere però che i cambiamenti divennero poi così radicali durante la pubblicazione del secondo che per essi il concetto primitivo delle lezioni di Analisi infinitesimale venne completamente a sparire.

E difatti già nei primi capitoli del secondo volume il numero e l'estensione delle note a piè di pagina andarono molto crescendo, tanto che dovei poi decidermi ad abbandonare del tutto il sistema delle note e introdurre tutte le variazioni nel testo; finchè finii anche per abbandonare pressochè completamente le mie antiche lezioni autografate.

Nè io mi meraviglio di questo se ripenso che già verso il 1879 io aveva avuto in animo di pubblicare le mie lezioni, ma fino d'allora io trovavo che in esse il Calcolo integrale aveva bisogno di essere completato d'assai se non rifatto, e anzi fu per

questo appunto che io rinviai allora la pubblicazione che dopo per varie circostanze non potei più fare.

Sono dunque io il primo a riconoscere che il lavoro non corrisponde più nè al suo titolo, nè allo scopo che io ebbi dapprima nello scriverlo e risente altresì delle tante interruzioni che sono costretto a portarvi nel farlo; ma ciò nonostante io debbo ormai continuare a pubblicarlo col titolo che ha e che non mi è dato più di cambiare, e lasciarlo ormai intessuto quale è; e devo cercare di portarlo in fondo quando che sia, sperando d'altra parte che, se non come lezioni da esporsi per intiero in un corso ordinario alla Università sul Calcolo infinitesimale, come trattato su questo Calcolo alcun che di buono i lettori ci troveranno ancora.

Così però i confini dapprima segnati a questo secondo volume vengono molto ad allargarsi, e io sono quindi costretto a farne ancora due parti assai estese.

L'indice dettagliato che pongo a questa prima parte dà una idea ben chiara di quanto in essa si contiene, ed io richiamo in particolare l'attenzione del lettore sulle applicazioni della integrazione per serie, sugli integrali delle funzioni che contengono altre variabili oltre a quella d'integrazione, e sulle considerazioni assai generali e sempre rigorose sulla loro continuità, derivabilità e integrabilità; come sul lungo capitolo sui valori medii e sui valori approssimati degli integrali. Questo ultimo capitolo specialmente, pei procedimenti in esso usati, e per le formole generali che contiene — che potrebbero prestarsi anche ad applicazioni svariate pel calcolo numerico degli integrali e dei valori di molte funzioni —, come per le considerazioni generali alle quali dà luogo, mi sembra che presenti un particolare interesse.

Quanto poi alla seconda parte di questo volume, non potendo ora entrare in particolari dettagli, dirò solo che in essa, oltre a continuarvi la esposizione di quelle parti del Calcolo integrale che di solito si dànno in tutti i trattati, mi fermerò in particolare a trattare dei casi di esistenza e unicità degli integrali generali delle equazioni differenziali ordinarie, e ad esporre alcuni studî generali sulle equazioni differenziali lineari non che le parti più importanti delle equazioni integrali. E così, tutto insieme, in vista di quello che di più notevole e di nuovo si troverà qua e là nelle due parti di questo volume, spero che il lettore vorrà farmi venia pel disordine e per le imperfezioni che, per le ragioni sopra indicate, in esso certamente riscontrerà.

Pisa, 20 agosto 1909.

U. Dini.

INDICE

DELLA PRIMA PARTE DEL CALCOLO INTEGRALE

CALCOLO INTEGRALE

I.

Integrali definiti – Proprietà fondamentali

1. — Sia $f(x)$ una funzione di una variabile reale x data per tutti i valori di x fra α e β, continua sempre o no, ma sempre finita (*).

S' immagini diviso l'intervallo (α, β) in n intervalli parziali coi punti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, e siano $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n$ questi n intervalli $x_1-\alpha, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_{n-1}-x_{n-2}, \beta-x_{n-1}$; e questi intervalli, che saranno tutti positivi o tutti negativi secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$, vadano ciascuno impiccolendo oltre ogni limite al crescere indefinito del loro numero n.

Si chiamerà *integrale definito* della funzione $f(x)$ fra α e β (o da α a β), e s'indicherà col simbolo $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ il limite per $n=\infty$ della somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ dei prodotti $\delta_s f_s$ degli n intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ in cui si suppone diviso l'intervallo totale (α, β) moltiplicati respettivamente per un valore qualunque della funzione preso nell'intervallo corrispondente δ_s, o anche, più generalmente, per uno qualunque dei numeri f_s compresi fra il limite inferiore e il limite superiore di $f(x)$ nello stesso intervallo δ_s (questi limiti inclusi). E i numeri α e β si diranno respettivamente *limite inferiore* e *limite superiore* dell'integrale (**).

(*) Dicendo che una funzione è *sempre finita* in un intervallo (α, β) s'intende dire che i suoi limiti inferiore e superiore nell'intervallo stesso sono finiti. Colle denominazioni recentemente introdotte, specialmente in Francia, queste funzioni si dicono *funzioni limitate* tanto inferiormente che superiormente *(fonctions bornées)*.

(**) Le considerazioni che ci portano a preferire come punto di partenza pel Calcolo integrale quello che noi qui scegliamo sono le seguenti.

Sia $F(x)$ una funzione di una variabile reale che in ogni punto x di un certo intervallo (α, β) ha sempre una derivata determinata e finita $F'(x)$, e s'immagini

Con questa definizione però onde l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ abbia un significato e quindi la funzione $f(x)$ possa dirsi effettivamente atta alla integrazione definita fra α e β, bisognerà che questa funzione sia tale che il limite della somma $\sum \delta_s f_s$, che evidentemente è sempre numericamente inferiore a un numero finito, abbia un valore determinato indipendente dai valori che si prendono per f_s nei differenti intervalli δ_s, e indipendente dalla legge secondo cui sono presi successivamente questi intervalli; e noi dobbiamo perciò cercare le condizioni necessarie e sufficienti perchè questo accada.

2. — Sia perciò $f(x)$ una funzione di x sempre finita e determinata fra α e β, essendo per es. $\alpha<\beta$, e supponiamo dapprima che si sappia che essa è atta all'integrazione definita fra α e β.

---

l'intervallo scomposto con una legge qualsiasi in piccoli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$ cogli estremi nei punti successivi $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s, \ldots, x_{n-1}, \beta$.

Pel teorema degli accrescimenti finiti avremo le formole

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(\alpha) \quad &= \delta_1 F'(\bar{x}_1)\,, \\
F(x_2) - F(x_1) \quad &= \delta_2 F'(\bar{x}_2)\,, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
F(x_s) - F(x_{s-1}) &= \delta_s F'(\bar{x}_s)\,, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
F(\beta) \quad - F(x_{n-1}) &= \delta_n F'(\bar{x}_n)\,,
\end{aligned}$$

essendo $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s, \ldots, \bar{x}_n$ numeri determinati intermedî nei rispettivi intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$; e quindi sommando si troverà

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sum_1^n \delta_s F'(\bar{x}_s)\,;$$

e se l'intervallo che si considera anzichè farsi terminare al punto β si farà terminare a un punto x qualsiasi dell'intervallo stesso, avremo $F(x)-F(\alpha)=\Sigma\delta_s F'(\bar{x}_s)$, e anche $F(x)-F(\alpha)=\lim \Sigma\delta_s F'(\bar{x}_s)$, intendendo che il limite venga preso all'impiccolire indefinito degli intervalli $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_s, \ldots$ nei quali ora si suppone scomposto l'intervallo da α ad x, crescendo con una legge qualsiasi il numero di questi intervalli, e qualunque sia la legge secondo la quale la scomposizione dell'intervallo stesso viene fatta. E in questa formola il punto di partenza α può scegliersi arbitrariamente nell'intervallo nel quale la funzione è data.

Segue da ciò che, quando sia data una funzione determinata e finita $f(x)$ in un certo intervallo (α, β), per la quale si sappia che essa è la derivata di un'altra funzione $F(x)$, si può dire evidentemente che per ogni punto x dell'intervallo stesso questa ultima funzione $F(x)$ che derivata riproduce la funzione data $f(x)$ può considerarsi all'infuori di una costante $F(\alpha)$ come il limite della somma $\Sigma\delta_s f(\bar{x}_s)$ quando l'inter-

Allora, se si fa una divisione dell'intervallo (α, β) negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, indicando in generale con f_s, come si disse sopra, un valore qualunque di $f(x)$ nell'intervallo δ_s o un numero compreso fra il limite inferiore l_s e il limite superiore L_s di $f(x)$ nello stesso intervallo (questi limiti l_s e L_s inclusi) e considerando la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$, è certo che questa somma avrà un limite determinato e finito indipendente dalla legge secondo la quale è stata fatta la divisione dell'intervallo dato negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ e indipendente dal valore f_s scelto in questi intervalli; quindi si avrà $\lim \sum \delta_s f_s = \lim \sum \delta_s L_s = \lim \sum \delta_s l_s =$ quant. determ. e finita; e perciò sarà $\lim \sum \delta_s D_s = 0$, essendo D_s l'oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo δ_s; e questo mostra intanto che onde la funzione $f(x)$ sia atta all'integrazione definita fra α e β è necessario che la somma $\sum \delta_s D_s$ dei prodotti $\delta_s D_s$, degli

---

vallo da α ad x è scomposto nel modo anzidetto nei piccoli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots$, e le $\bar{x}_s$ sono numeri determinati presi in questi intervalli δ_s; e questa particolarità notevole delle funzioni che hanno una derivata determinata e finita sarà quella che noi prenderemo a fondamento del calcolo integrale.

Questo calcolo, come calcolo inverso del differenziale, ha in particolare per suo oggetto principale quello di ritrovare le funzioni delle quali le funzioni date sono le derivate, o come si dice di ritrovare le funzioni primitive o gli integrali delle funzioni date; ma col dire questo solo, e col prendere questo come punto di partenza del nuovo Calcolo, avendo così in vista il suo scopo principale senza tenere conto di nessuna altra particolarità degli integrali, non si ha traccia nessuna della via da seguire per giungere alla funzione che si cerca, perchè, secondo la indicata definizione della funzione stessa, la ricerca di essa sarebbe basata tutta su operazioni di derivazione da farsi appunto sulla funzione incognita cercata; oltre di che, data una funzione $f(x)$ da integrarsi, nulla ne assicurerebbe della esistenza della funzione che dovrebbe rappresentare l'integrale.

Nè per assicurarsi in ogni caso della esistenza dell'integrale di una funzione data $f(x)$ potrebbero sempre bastare le considerazioni che vengono da quanto fu esposto nel calcolo differenziale rispetto all'area delle curve, dicendo cioè che se $y=f(x)$ è la curva rappresentativa della funzione data $f(x)$, e $f(x)$ è sempre positiva, la funzione integrale non sarà che l'area compresa fra la curva, una ordinata fissa (qualsiasi) e l'ordinata variabile corrispondente all'ascissa x, perocchè non sempre può immaginarsi la curva rappresentativa della funzione $f(x)$, ecc.

È naturale quindi che, anzichè continuare a partire, come di solito si fa, dalla indicata definizione dell'integrale, giovi piuttosto partire da una delle proprietà dell'integrale; ed è per questo appunto che come definizione dell'integrale definito, che poi conduce a quella di un integrale qualsiasi, noi prendiamo qui con Riemann la definizione del testo, che si basa completamente sulla proprietà testè enunciata delle funzioni che hanno una derivata determinata e finita; e solo si estende convenientemente la proprietà stessa per potere togliere di mezzo la difficoltà proveniente dal non essere conosciuti i valori intermedî $\bar{x}_s$ che figurano nella somma $\Sigma\delta_s f(\bar{x}_s)$.

intervalli δ_s nei quali si divide l'intervallo totale moltiplicati per le respettive oscillazioni della funzione negli stessi intervalli, tenda a zero coll'impiccolire di questi intervalli, qualunque sia la legge secondo la quale la divisione dell'intervallo totale è stata fatta.

3. — Supponiamo ora reciprocamente che questa condizione $\lim \sum \delta_s D_s = 0$ sia soddisfatta per ogni divisione dell'intervallo, e cerchiamo se allora la funzione $f(x)$ sia sempre atta o no all'integrazione.

Immaginiamo perciò al solito eseguita una divisione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$, e consideriamo le due somme $\sum \delta_s f_s$, $\sum \delta_s f'_s$ corrispondenti a due sistemi qualunque di valori f_s, f'_s compresi fra i limiti superiori ed inferiori dei valori di $f(x)$ negli stessi intervalli δ_s; ammettendo dapprima che per una almeno di queste somme, ad es. per la prima, sia stato verificato che essa ha un limite determinato.

Si avrà evidentemente in valore assoluto $\sum \delta_s f_s - \sum \delta_s f'_s \leq \sum \delta_s D_s$, e perciò se, come abbiamo supposto, la somma $\sum \delta_s f_s$ per la divisione che è stata fatta dell'intervallo totale in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ avrà un limite determinato, lo stesso accadrà dell'altra $\sum \delta_s f'_s$, e il limite sarà lo stesso qualunque siano i valori f_s che si prenderanno negli intervalli δ_s.

Immaginiamo ora eseguita un'altra divisione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{n'}$ con una legge qualsiasi; ed oltre alla somma $\sum \delta_s f_s$ corrispondente alla divisione $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, per la quale noi qui dapprima ammetteremo ancora come nota l'esistenza del limite, consideriamo anche l'altra $\sum \delta'_s f'_s$ corrispondente alla nuova divisione $(\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{n'})$; sarà facile vedere che, sotto la condizione posta, questa seconda somma avrà lo stesso limite della prima.

Per giungere a questo risultato, confronteremo le stesse due somme con una terza somma corrispondente ad una divisione dell'intervallo (α, β) che partecipi dell'una e dell'altra delle due divisioni che conducono a quelle due somme; e indicando perciò con $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i valori di x in ordine di grandezza crescente corrispondenti ai punti di divisione dell'intervallo (α, β) negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, e con $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'-1}$ i valori analoghi di x per la divisione $(\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{n'})$, formeremo con questi due sistemi di valori di x un terzo sistema $r_1, r_2, \dots, r_h, \dots, r_{\mu-1}$ che risulti dall'insieme dei due primi, in modo che una qualunque delle $r_1, r_2, \dots, r_h, \dots, r_{\mu-1}$ sia una delle $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ o delle $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'-1}$, e supporremo che queste quantità $r_1, r_2, \dots, r_h, \dots, r_{\mu-1}$ siano esse pure in ordine di grandezza crescente,

e siano $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_h, \dots, \rho_\mu$ i nuovi intervalli $r_1 - \alpha$, $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2, \dots, r_h - r_{h-1}, \dots, \beta - r_{\mu-1}$.

Siccome fra due x_s consecutive potranno cadere o no alcune delle x'_s, è certo che fra x_{s-1} e x_s potranno cadere alcune delle r o anche nessuna; ed in generale possiamo dire che se $x_{s-1} = r_h$, sarà $x_s = r_{h+t}$ essendo $t \geq 1$, e $r_{h+1}, r_{h+2}, \dots, r_{h+t-1}$ saranno le r (cioè le antiche x') che cadranno fra x_{s-1} e x_s; ed evidentemente sarà $\delta_s = \rho_{h+1} + \rho_{h+2} + \dots + \rho_{h+t}$, e potremo porre

$$\delta_s f_s = \rho_{h+1} f''_{h+1} + \rho_{h+2} f''_{h+2} + \dots + \rho_{h+t} f''_{h+t} + \rho_{h+1} \{f_s - f''_{h+1}\} + \dots + \rho_{h+t} \{f_s - f''_{h+t}\},$$

dove le $f''_{h+1}, f''_{h+2} \dots f''_{h+t}$ sono valori di $f(x)$ o numeri presi a piacere fra i limiti inferiori e superiori di $f(x)$ negli intervalli $\rho_{h+1}, \rho_{h+2}, \dots, \rho_{h+t}$ respettivamente; e perciò sarà

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \sum_1^\mu \rho_h f''_h + P,$$

essendo P la somma delle somme $\rho_{h+1} \{f_s - f''_{h+1}\} + \rho_{h+2} \{f_s - f''_{h+2}\} + \dots + \rho_{h+t} \{f_s - f''_{h+t}\}$ corrispondenti ai varî intervalli δ_s.

Ora la massima delle differenze fra parentesi in ciascuno dei termini di queste somme non può superare in valore assoluto l'oscillazione D_s nell'intervallo $\delta_s = \rho_{h+1} + \rho_{h+2} + \dots + \rho_{h+t}$, perchè f_s è un valore di $f(x)$ nell'intervallo δ_s o un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore l_s e L_s di $f(x)$ in questo intervallo, e le $f''_{h+1}, f''_{h+2} \dots f''_{h+t}$ sono quantità analoghe pei respettivi intervalli $\rho_{h+1}, \rho_{h+2}, \dots, \rho_{h+t}$ e in conseguenza sono anch'esse comprese fra i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo δ_s; quindi si avrà in valore assoluto

$$P \leq \sum_1^n \delta_s D_s. \tag{1}$$

Similmente si trova che

$$\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s = \sum_1^\mu \rho_h f''_h + P',$$

essendo P′ la somma analoga alla P per gli intervalli δ'_s ed avendosi in valore assoluto

$$P' \leq \sum_1^{n'} \delta'_s D'_s; \tag{2}$$

quindi sarà

$$\sum_{1}^{n} \delta_s f_s - \sum_{1}^{n'} \delta'_s f'_s = \mathrm{P} - \mathrm{P}' , \tag{3}$$

e si conclude perciò intanto che se la condizione $\lim \sum \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ è soddisfatta per tutti i sistemi di divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ e se, come appunto abbiamo supposto, per una data divisione la somma $\sum \delta_s f_s$ ha un limite determinato, le somme analoghe per tutte le altre divisioni avranno ancora lo stesso limite.

D'altra parte, per le stesse considerazioni che ora abbiamo fatte, ci sarà facile di vedere che se la condizione $\lim \sum \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ è soddisfatta quando la divisione successiva dell'intervallo si fa seguendo una certa legge, esiste effettivamente con questa divisione un limite determinato per la somma $\sum \delta_s f_s$, e quindi non vi ha bisogno di porre, come poc'anzi facemmo, la condizione che una delle nostre somme $\sum \delta_s f_s$ abbia un limite determinato, poichè questa viene soddisfatta da sè.

Quando infatti le δ_s saranno ridotte sufficientemente piccole, come per es. quando saranno tutte divenute inferiori a una grandezza sufficientemente piccola d, a causa della condizione $\lim \sum \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ che si suppone soddisfatta, le somme $\sum \delta_s \mathrm{D}_s$ saranno sempre inferiori a un numero dato arbitrariamente piccolo σ; quindi se si suppone ora che le due divisioni $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$ che si avevano precedentemente siano due sistemi di valori successivi delle δ_s corrispondenti alla divisione che si considera, si vede subito per le (1), (2) e (3) che le differenze fra i valori successivi della somma $\sum \delta_s f_s$ da un certo punto in poi si manterranno sempre tutte inferiori a 2σ, e questo, per il noto teorema di Cauchy sui limiti, ci assicura che la stessa somma avrà un limite determinato; talchè si può ora evidentemente affermare che la condizione $\lim \sum \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ di cui abbiamo parlato sopra è anche sufficiente perchè $f(x)$ sia atta all'integrazione definita fra α e β, quando essa è soddisfatta per tutti i sistemi di divisione dell'intervallo, e si può perciò enunciare il teorema seguente: *Affinchè una funzione $f(x)$ di una variabile reale x sia atta alla integrazione definita in un intervallo (α, β) nel quale essa è sempre determinata e finita, è necessario e sufficiente che dividendo secondo una legge qualunque l'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, le somme $\sum \delta_s \mathrm{D}_s$ dei prodotti $\delta_s \mathrm{D}_s$ degli intervalli δ_s moltiplicati per le respettive oscillazioni D_s della funzione negli intervalli stessi tendano a zero coll'impiccolire indefinitamente di questi intervalli.*

E noteremo anche che l'enunciato di questo teorema porta che onde riconoscere se la funzione $f(x)$ sia effettivamente atta all'integrazione è necessario

fare le verificazioni per tutti i sistemi di divisione possibili dell'intervallo (α, β); però si potrebbe facilmente dimostrare che quando la condizione $\lim \sum \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ è soddisfatta per una divisione fatta secondo una certa legge essa lo è anche secondo ogni altra divisione, talchè le verificazioni basta farle per una divisione qualsiasi soltanto (*).

(*) Nei miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, Nistri, 1878), al § 184 [pag. 240] la particolarità indicata sopra viene dimostrata nel modo seguente.

Considerando al solito due divisioni $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$ dell'intervallo (α, β), formiamo con esse una terza divisione composta $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ come facemmo sopra, e indichiamo con D_s, D'_s, D''_h le oscillazioni della nostra funzione $f(x)$ negli intervalli δ_s, δ'_s, ρ_h respettivamente.

Allora se l'intervallo δ_s si comporrà come precedentemente coi nuovi intervalli $\rho_{h+1}, \rho_{h+2}, \ldots, \rho_{h+t}$ per modo che sia $\delta_s = \rho_{h+1} + \rho_{h+2} + \ldots + \rho_{h+t}$, sarà evidentemente $\delta_s \mathrm{D}_s \geq \rho_{h+1} \mathrm{D}''_{h+1} + \rho_{h+2} \mathrm{D}''_{h+2} + \ldots + \rho_{h+t} \mathrm{D}''_{h+t}$, e avremo quindi intanto $\Sigma \delta_s \mathrm{D}_s \geq \Sigma \rho_h \mathrm{D}''_h$.

Osservando poi che quei termini della somma $\Sigma \delta'_s \mathrm{D}'_s$ corrispondente alla seconda divisione che non compariscono nell'ultima somma $\Sigma \rho_h \mathrm{D}''_h$ non potranno mai essere più di n, perchè essi potranno esser soltanto quelli corrispondenti agli intervalli δ'_s nell'interno dei quali cadono uno o più punti x_s della prima divisione, si vede subito che indicando con d' il massimo degli intervalli δ'_s, e con D la massima oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo da α a β, avremo $\Sigma \delta'_s \mathrm{D}'_s \leq \Sigma \rho_h \mathrm{D}''_h + n d' \mathrm{D}$, e perciò sarà evidentemente $\Sigma \delta'_s \mathrm{D}'_s \leq \Sigma \delta_s \mathrm{D}_s + n d' \mathrm{D}$.

Ne segue che supponendo, come potremo sempre fare, $d' < \frac{\sigma}{n \mathrm{D}}$, essendo σ un numero arbitrariamente piccolo, si avrà $\Sigma \delta'_s \mathrm{D}'_s \leq \Sigma \delta_s \mathrm{D}_s + \sigma$; e quindi se colla prima divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ la somma $\Sigma \delta_s \mathrm{D}_s$ potrà ridursi piccola a nostro arbitrio, altrettanto avverrà con un'altra divisione qualsiasi $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$ per la somma corrispondente $\Sigma \delta'_s \mathrm{D}'_s$; e con ciò la particolarità enunciata nel testo resta ora completamente dimostrata.

Aggiungiamo inoltre, poichè qui l'occasione ci si presenta, che con un processo simile si ottengono anche altri risultati notevolissimi.

Per questo senza porre ora espressamente la condizione che la funzione data $f(x)$, pure mantenendosi sempre finita, sia atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), si supponga che la legge fissata per la divisione dell'intervallo stesso in intervalli parziali $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ sia tale che ogni divisione successiva comprenda le precedenti, in modo cioè che ogni punto delle divisioni che successivamente si fanno appartenga alle divisioni seguenti.

Allora quando $n_1 \geq n$, gli estremi degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ saranno tutti estremi di intervalli della divisione successiva $\left(\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2}, \ldots, \overline{\delta_{n_1}}\right)$, per modo che δ_s sarà la somma di un certo numero d'intervalli $\overline{\delta_s}$; e quindi indicando con l_s, L_s e D_s i limiti inferiori e superiori e le oscillazioni di $f(x)$ negli intervalli δ_s, e con $\overline{l_s}$, $\overline{\mathrm{L}_s}$, $\overline{\mathrm{D}_s}$ gli elementi analoghi negli intervalli $\overline{\delta_s}$, avremo evidentemente

$$\sum \overline{\delta_s}\,\overline{\mathrm{D}_s} \leq \sum \delta_s \mathrm{D}_s , \quad \sum \overline{\delta_s}\,\overline{\mathrm{L}_s} \leq \sum \delta_s \mathrm{L}_s , \quad \sum \overline{\delta_s}\,\overline{l_s} \geq \sum \delta_s l_s ;$$

e poichè di qui risulta chiaro che coll'impiccolire indefinitamente degli intervalli

4. — Mostriamo ora con Riemann come la condizione $\lim \sum \delta_s D_s = 0$ si può trasformare facilmente in un'altra che riesce spesso di più facile applicazione.

Supponiamo perciò che questa condizione $\lim \sum \delta_s D_s = 0$ sia soddisfatta, e che gli intervalli δ_s siano già tutti minori di quel numero d pel quale la somma stessa $\sum \delta_s D_s$ è sempre inferiore a un numero positivo e arbitrariamente piccolo σ', e indichiamo con τ la somma degli intervalli δ_s nei quali le oscillazioni D_s della funzione sono superiori a un numero dato pure positivo e piccolo quanto si vuole σ.

Si avrà evidentemente $\tau\sigma < \sum \delta_s D_s < \sigma'$ e perciò $\tau < \frac{\sigma'}{\sigma}$; e quindi osservando che per quanto piccolo sia σ il numero $\frac{\sigma'}{\sigma}$ può sempre supporsi arbitrariamente piccolo, perchè la piccolezza di σ' è indipendente da quella di σ, si concluderà subito che se la condizione $\lim \sum \delta_s D_s = 0$ è soddisfatta, la somma τ degli intervalli δ_s nei quali si hanno oscillazioni maggiori di un numero arbitrariamente piccolo σ potrà rendersi essa pure arbitrariamente piccola coll'impiccolire degli intervalli stessi δ_s.

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ le due somme $\Sigma \delta_s D_s$, $\Sigma \delta_s L_s$ non vanno mai crescendo, e l'altra $\Sigma \delta_s l_s$ non va mai decrescendo, mentre d'altra parte, per essere $f(x)$ sempre finita fra α e β, le somme stesse non superano mai in valore assoluto un certo numero, si conclude di qui intanto che esse hanno tutte limiti determinati e finiti A_D, A_L e A_l.

Ciò premesso, torniamo ora a considerare anche un'altra divisione qualsiasi $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$, continuando però ad ammettere che la legge fissata per la divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ sia ancora quella poc'anzi indicata; e per le due prime delle somme precedenti $\Sigma \delta_s D_s$ e $\Sigma \delta_s L_s$, come per le corrispondenti $\Sigma \delta'_s D'_s$ e $\Sigma \delta'_s L'_s$ ripetiamo le considerazioni che facemmo in principio di questa nota per le due $\Sigma \delta_s D_s$ e $\Sigma \delta'_s D'_s$.

Si giungerà così alle formole $\Sigma \delta'_s D'_s \leq \Sigma \delta_s D_s + \sigma$, $\Sigma \delta'_s L'_s \leq \Sigma \delta_s L_s + \sigma_1$ con σ e σ_1 arbitrariamente piccoli, quando le δ'_s siano tutte inferiori a un numero sufficientemente piccolo; quindi poichè prendendo anche le δ_s già sufficientemente piccole le somme $\Sigma \delta_s D_s$ e $\Sigma \delta_s L_s$ possono supporsi vicine quanto si vuole ad A_D e A_L, noi possiamo ora affermare, indipendentemente dalla piccolezza delle δ_s, che quando le δ'_s saranno tutte inferiori a un intervallo sufficientemente piccolo d', le somme $\Sigma \delta'_s D'_s$ e $\Sigma \delta'_s L'_s$ non potranno superare $A_D + \sigma$ e $A_L + \sigma_1$ respettivamente.

Ma d'altra parte, partendo ora da questi valori delle δ'_s e prendendo come seconda divisione del nostro intervallo (α, β) la $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ formata sempre colla legge sopra indicata, e come prima divisione l'altra $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$, qualunque essa sia, si possono ripetere i ragionamenti fatti in principio di questa nota e così si giunge anche alle formole $\Sigma \delta_s D_s \leq \Sigma \delta'_s D'_s + \sigma_2$, $\Sigma \delta_s L_s \leq \Sigma \delta'_s L'_s + \sigma_3$ quando s'intenda che le δ_s siano già sufficientemente piccole; quindi poichè, per quanto osservammo sopra, le somme $\Sigma \delta_s D_s$ e $\Sigma \delta_s L_s$ non sono respettivamente inferiori a A_D e A_L, si conclude ora che le somme $\Sigma \delta'_s D'_s$ e $\Sigma \delta'_s L'_s$ quando le

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta qualunque sia σ, si avrà $\lim \sum \delta_s D_s = 0$, giacchè allora, se τ è la somma degli intervalli δ_s nei quali si hanno oscillazioni superiori a σ e D è la massima oscillazione di $f(x)$ in questi intervalli (o anche la oscillazione di $f(x)$ fra α e β), $\beta - \alpha - \tau$ sarà la somma degli intervalli nei quali le oscillazioni di $f(x)$ sono inferiori o uguali a σ, e perciò si avrà $\sum \delta_s D_s \leq \tau D + (\beta - \alpha)\sigma$; talchè osservando che σ è arbitrariamente piccolo e τ dietro le ipotesi fatte può supporsi piccolo anch'esso quanto si vuole, si conclude che sarà $\lim \sum \delta_s D_s = 0$; e perciò la condizione del teorema precedente relativa alla somma $\sum \delta_s D_s$ si riduce ora all'altra testè indicata relativa al numero τ, e il teorema stesso può quindi enunciarsi anche col dire che: *Affinchè una funzione reale $f(x)$ di una variabile reale x sia atta alla integrazione, è necessario e sufficiente che dividendo, secondo una legge qualsiasi, l'intervallo (α, β) nei soliti intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$, la somma τ degli intervalli δ_s nei quali le oscillazioni D_s della funzione sono maggiori di un numero qualunque dato anche arbitraria-*

δ'_s saranno inferiori a d' saranno sempre comprese fra $A_D - \sigma_2$, $A_D + \sigma$ e fra $A_L - \sigma_3$, $A_L + \sigma_1$ respettivamente; e questo basta per poter dire che esse pure avranno per limiti A_D e A_L.

Al modo stesso, e anche come conseguenza di questi stessi risultati perchè $\Sigma \delta'_s l'_s = \Sigma \delta'_s L'_s - \Sigma \delta'_s D'_s$, si vede che la somma $\Sigma \delta'_s l'_s$ ha per limite A_l; quindi si può ora affermare che: *Qualunque sia la funzione $f(x)$ fra α e β, purchè sempre numericamente inferiore a un numero finito, le tre somme $\Sigma \delta_s L_s$, $\Sigma \delta_s l_s$ e $\Sigma \delta_s D_s$ all'impiccolire indefinitamente degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ hanno tutte e tre limiti determinati indipendenti dal modo secondo cui le successive divisioni dell'intervallo (α, β) vengono fatte.*

Queste somme furono studiate per la prima volta da Darboux in una memoria *sulle funzioni discontinue* pubblicata nel 1875, nel vol. 4° *degli Annales de l'École normale supérieure,* e successivamente poi da Volterra, da Jordan, da Pasch e da altri.

I limiti A_L e A_l delle due prime somme $\Sigma \delta_s L_s$ e $\Sigma \delta_s l_s$ furono detti da Volterra e da Pasch respettivamente *integrale superiore* e *integrale inferiore*, e da Jordan *integrale per eccesso* e *integrale per difetto,* e furono rappresentati colle notazioni $\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx$, $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx$.

Invece il rapporto del limite $A_L - A_l$ della terza somma $\Sigma \delta_s D_s$ all'intervallo $\beta - \alpha$ fu chiamato *oscillazione media della funzione $f(x)$ nell'intervallo* (α, β), per la considerazione che, quando la divisione di questo intervallo viene fatta in parti uguali $\frac{\beta - \alpha}{n}$, la somma stessa si riduce all'altra $(\beta - \alpha)\frac{\Sigma D_s}{n}$ ed ha sempre lo stesso limite.

E colla introduzione di questi nuovi elementi, la condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione $f(x)$ venga atta alla integrazione fra α e β si riduce a quella che, i *due suoi integrali superiore e inferiore siano uguali fra loro* o che *la sua oscillazione media sia zero.*

mente piccolo σ, coll'impiccolire degli intervalli stessi δ_s finisca per esser sempre minore di qualunque quantità data.

E notiamo che per la osservazione che facemmo in fine del paragrafo precedente basterà che questa condizione si trovi verificata per una divisione dell'intervallo fatta secondo una certa legge per essere certi che sarà verificata anche per qualunque altra divisione.

Questi resultati poi si applicano anche alle funzioni complesse di variabili reali, considerando però allora separatamente le due funzioni, parte reale e coefficiente dell'immaginario, e talvolta anche considerando la funzione modulo della funzione stessa.

5. — Da questo teorema risultano subito come casi particolari i seguenti:

1.° *Tutte le funzioni finite e continue in un intervallo finito (α, β) sono sempre atte alla integrazione definita in questo intervallo*, giacchè essendo esse sempre continue uniformemente, qualunque sia il numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, e qualunque divisione si faccia dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ finirà sempre che in ciascuno di questi intervalli parziali le oscillazioni D_s saranno tutte inferiori a σ, e il numero τ del teorema precedente sarà uguale a zero.

2.° *Le funzioni che fra (α, β) sono sempre finite e hanno soltanto un numero finito di discontinuità* (cioè le funzioni che diconsi funzioni generalmente continue) *sono esse pure atte alla integrazione definita nello stesso intervallo.*

È chiaro infatti che in questo caso se m sono le discontinuità di $f(x)$ si potranno separare dall'intervallo totale m intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ piccoli quanto si vuole che racchiudano gli m punti di discontinuità, e siccome questi intervalli sono in numero finito, la loro somma sarà arbitrariamente piccola. Negli intervalli restanti $\mu_1, \mu_2, \ldots$ per quanto piccoli siano quelli dei quali ora abbiamo parlato, la funzione sarà continua; quindi, qualunque divisione si faccia dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, finirà sempre che finchè si resta negli intervalli $\mu_1, \mu_2, \ldots$ le oscillazioni D_s della funzione saranno tutte minori del solito numero σ.

Ne segue che le oscillazioni D_s maggiori di σ non si potranno avere che negl'intervalli δ_s che cadono del tutto o in parte negli intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; quindi, ammettendo anche che si presenti il caso più sfavorevole che vi siano intervalli δ_s contenuti parte dentro e parte fuori degli intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, e osservando che essi non possono essere più di $2m$, si vede subito che quando le δ_s sono tutte inferiori a d la somma degli intervalli nei quali si hanno oscillazioni maggiori di σ sarà sempre minore di $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m+2md$ e quindi si potrà supporre minore di quel numero che più ci piace qua-

lunque sia il processo di divisione adottato, ciò che mostra appunto che $f(x)$ è atta all'integrazione definita fra α e β.

Vi sono poi anche estesissime classi di funzioni sempre finite che hanno un numero infinito di discontinuità nell'intervallo (α, β) in cui si considerano, e che pure sono ancora atte alla integrazione definita fra α e β, ma su ciò non possiamo ora fermarci; e soltanto per accennare ad un esempio, faremo notare che la funzione che da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi inclusi) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2}\text{ incluso}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2^3}\text{ incluso}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$ e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ incluso}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$, sebbene abbia un numero infinito di discontinuità in vicinanza di $x=0$, è atta all'integrazione definita fra 0 e 1 (*).

(*) Nei miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* [a pag. 245 e seg.] si trova anche dimostrato che: *Sono atte alla integrazione in un intervallo* (α, β):

1.° *tutte le funzioni sempre finite che godono della proprietà che il numero dei punti nei quali si hanno salti maggiori di un numero arbitrariamente piccolo e positivo σ è sempre finito, e solo può crescere indefinitamente all'impiccolire indefinito di σ.*

2.° *tutte le funzioni che hanno soltanto discontinuità ordinarie in un numero finito o in un numero infinito di punti, o che avendone anche di seconda specie le hanno soltanto da una parte dei punti corrispondenti e sempre dalla stessa parte.*

E come caso particolare di questo secondo teorema ne viene che *le funzioni che nell'intervallo (α, β) sono sempre finite e non fanno mai oscillazioni o ne fanno soltanto un numero finito son sempre atte alla integrazione* perchè queste funzioni se hanno discontinuità non possono avere che discontinuità ordinarie.

E s'intende anche che *una funzione sempre finita, che soddisfi a una di queste condizioni d'integrabilità in ogni punto di un intervallo (α, β), con eccezione soltanto di un gruppo di punti di prima specie, o più generalmente di un gruppo di punti rinchiudibile non cesserà a causa di questi punti d'eccezione d'essere integrabile nell'intero intervallo* (α, β), perchè, potendo intendere racchiusi questi punti in intervalli la cui somma sia arbitrariamente piccola, rimarranno gli altri intervalli nei quali le condizioni d'integrabilità saranno soddisfatte, e quindi la condizione del § 4 sarà ancora soddisfatta nell'intiero intervallo (α, β).

Il *salto* σ_x delle funzioni in un punto x trovasi definito nei miei *Fondamenti* ecc., al § 34 (pag. 41), e se D_x è quel numero che ora si suole chiamare l'*oscillazione della funzione nel punto* x, e che in sostanza non è altro che il limite delle oscillazioni che si hanno negli intorni dello stesso punto x all'impiccolire indefinito degli intorni medesimi, si ha sempre $\sigma_x \leq D_x$, e $D_x \leq 2\sigma_x$, cioè σ_x è compreso fra $\frac{1}{2}D_x$ e D_x (gli estremi inclusi); e quindi negli enunciati di questi teoremi ai salti delle funzioni in punti x possono sostituirsi le oscillazioni negli stessi punti e viceversa.

Aggiungiamo che dalla condizione d'integrabilità data al § 4, come da quella del § 3, risulta subito anche evidentemente che *quando una funzione sempre finita*

6. — Per dare un esempio di integrali definiti, che possono calcolarsi facilmente partendo dalla definizione che abbiamo data, prenderemo a determinare l'integrale $\int_0^{\pi} \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$, dove α è finito e differente da 1 in valore assoluto

Osservando che $1-2\alpha\cos x+\alpha^2$ esprime la distanza fra i due punti le cui coordinate polari ρ, θ sono $(\rho=1\,,\ \theta=0)$ e $(\rho=\alpha\,,\ \theta=x)$, o fra i due $(\rho=1\,,\ \theta=0)$ e $(\rho=-\alpha\,,\ \theta=\pi-x)$ secondochè α è positivo o negativo, si vede subito che, quando in valore assoluto α è diverso da 1, la quantità $1-2\alpha\cos x+\alpha^2$ è finita continua e diversa da zero, e $\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ per tutti i valori di x fra 0 e π è pure finito e continuo, e quindi per il teorema precedente è atto all'integrazione fra 0 e π.

Per fare questa integrazione dividiamo l'intervallo fra 0 e π in n intervalli uguali ciascuno a $\frac{\pi}{n}$, e applichiamo il processo precedente prendendo le $\delta_s=\frac{\pi}{n}$, e prendendo pei valori da scegliersi di $\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ negli intervalli δ_s i valori corrispondenti agli estremi inferiori $(s-1)\frac{\pi}{n}$ di questi intervalli.

$f(x)$ è atta alla integrazione in un intervallo $(\alpha\,,\beta)$, essa sarà atta alla integrazione anche in ogni porzione dell'intervallo stesso.

Ne segue, sempre pel teorema del § 4, che se si prende un numero positivo e comunque piccolo σ_1, in ogni porzione $(a\,,b)$ dell'intervallo $(\alpha\,,\beta)$ esisterà un altro intervallo $(a_1\,,b_1)$ *interno* ad $(a\,,b)$ nel quale la oscillazione della funzione sarà minore di σ_1; poi in $(a_1\,,b_1)$ dovrà esistere un intervallo pure *interno* $(a_2\,,b_2)$ nel quale la oscillazione della funzione sarà minore di $\frac{1}{2}\sigma_1$; e similmente nell'intervallo $(a_2\,,b_2)$ dovrà esisterne un altro pure *interno* $(a_3\,,b_3)$ nel quale la oscillazione della funzione sarà minore di $\frac{1}{2^2}\sigma_1$, ... e così si giungerà evidentemente o a un intervallo limite i tutto *interno* ad $(a\,,b)$ o almeno a un punto limite p pure *interno* ad $(a\,,b)$; e in ogni intorno sufficientemente piccolo di qualsiasi punto dello stesso intervallo limite i o del punto p le oscillazioni della funzione saranno minori di un numero comunque piccolo σ.

Da ciò risulta che, nei punti dell'intervallo i (che se esiste verrà evidentemente a essere un *tratto d'invariabilità della funzione*) o nel punto p, la funzione data sarà necessariamente continua; e questo evidentemente porta a dire che le *funzioni, sempre finite e atte alla integrazione in un intervallo $(\alpha\,,\beta)$, in qualsiasi porzione di questo intervallo hanno punti di continuità;* per modo che *esse saranno sempre necessariamente funzioni totalmente o generalmente continue, o per lo meno saranno di quelle conosciute sotto il nome di funzioni punteggiate discontinue* (V. miei *Fondamenti ecc.*, pag. 62).

Si troverà che l'integrale cercato è il limite per $n=\infty$ della espressione

$$\frac{\pi}{n}\left\{\log(1-\alpha)^2+\log\left(1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2\right)+\log\left(1-2\alpha\cos\frac{2\pi}{n}+\alpha^2\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\log\left(1-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right\},$$

che può scriversi sotto la forma

$$\log(1-\alpha)^2+\frac{\pi}{n}\log\left\{\left(1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2\right)\ldots\left(1-2\alpha\cos\frac{s\pi}{n}+\alpha^2\right)\ldots\left(1-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right\},$$

e ora converrà determinare il prodotto che comparisce sotto il logaritmo.

Per questo osserviamo che la equazione binomia $\alpha^{2n}-1=0$ ha le radici 1 e -1 e le altre complesse e coniugate due a due come le $e^{\frac{k\pi i}{n}}$, $e^{-\frac{k\pi i}{n}}$ con $k=1\,,2\ldots(n-1)$, per le quali si ha $\left(\alpha-e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)\left(\alpha-e^{-\frac{k\pi i}{n}}\right)=1-2\alpha\cos\frac{k\pi}{n}+\alpha^2$; e quindi ricordando che se $\psi(\alpha)=0$ è un'equazione algebrica di grado m, e $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots,\alpha_m$ sono le sue m radici, si ha $\psi(\alpha)=A\,(\alpha-\alpha_1)\,(\alpha-\alpha_2)\ldots(\alpha-\alpha_m)$, essendo A il coefficiente del 1.° termine, si troverà subito che il prodotto di cui si deve prendere il logaritmo nella formola precedente è uguale a $\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}$, e si ha perciò

$$\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\lim\frac{\pi}{n}\log(1-\alpha)^2+\lim\frac{\pi}{n}\log\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}\ ;$$

e quindi se $\alpha^2<1$ si avrà

$$\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=0\,,$$

e se $\alpha^2>1$ sarà invece

$$\int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\pi\log\alpha^2=2\pi\log|\alpha|.$$

Se fosse $\alpha=\pm1$ le formole precedenti non ci dicono più nulla; e del resto in questo caso la funzione sotto il segno integrale diviene infinita per $x=0$ o per $x=\pi$, e noi per ora ci limitiamo agli integrali di funzioni che in tutto l'intervallo di integrazione sono sempre finite.

7. — Diamo ora le proprietà principali degli integrali definiti $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, dove $f(x)$ è una funzione che nell'intervallo (α, β) è sempre finita e atta all'integrazione.

1.° Osservando che quando si ha $\beta < \alpha$ gli intervalli δ_s nei quali si deve dividere l'intervallo totale (α, β) per calcolare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ devono considerarsi come negativi, si può dire che si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx, \tag{4}$$

e questo mostra che *invertendo i limiti l'integrale cambia soltanto di segno.*

2.° Se una funzione finita $f(x)$ è integrabile in un intervallo (α, β), essa lo è anche in qualunque porzione di esso, e se γ è un numero compreso fra α e β, per la definizione degli integrali si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx, \tag{5}$$

giacchè la divisione dell'intervallo (α, β) può farsi in modo che un punto di divisione venga a cadere sempre nel punto γ.

Di qui poi si ha anche

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\gamma^\beta f(x)\,dx,$$

e quindi per la osservazione precedente

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx,$$

talchè, osservando che $\beta > \gamma$, si deduce di qui che la formola (5) vale anche quando (supponendo data la funzione $f(x)$ anche fuori dell'intervallo (α, β)) si abbia in essa $\gamma > \beta$.

3.° Se $f(x) = 1$ si ha $\int_\alpha^\beta dx = \lim \sum \delta_s = \beta - \alpha =$ all'intervallo.

4.° Se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_m(x)$ sono finite e atte alla integrazione fra α e β e sono in numero finito, evidentemente anche la loro somma algebrica $\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x)$ sarà essa pure finita; e oltre a ciò

siccome per due valori qualunque ξ e η di x presi in qualsiasi intervallo (α_1, β_1) si ha

$$\varphi(\xi) - \varphi(\eta) = \{f_1(\xi) - f_1(\eta)\} \pm \{f_2(\xi) - f_2(\eta)\} \pm \ldots \pm \{f_m(\xi) - f_m(\eta)\},$$

se si osserva che ξ e η potranno sempre prendersi in modo che il valore assoluto di $\varphi(\xi) - \varphi(\eta)$ sia se non uguale almeno vicino quanto si vuole all'oscillazione di $\varphi(x)$ fra α_1 e β_1, è evidente che avremo $D_\varphi \leq D_{f_1} + D_{f_2} + \ldots + D_{f_m}$, essendo D_φ, D_{f_1}, $D_{f_2}, \ldots, D_{f_m}$ le oscillazioni di $\varphi, f_1, f_2, \ldots, f_m$ nello stesso intervallo (α_1, β_1), e questo porta evidentemente a dire che la somma algebrica $\varphi(x)$ delle funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ sarà essa pure atta alla integrazione fra α e β; e quindi, per la definizione degli integrali definiti e perchè le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sono in numero finito, si troverà

$$\int_\alpha^\beta \left\{ f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x) \right\} dx = \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx \pm \int_\alpha^\beta f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_\alpha^\beta f_m(x)\,dx,$$

cioè *l'integrale di una somma algebrica di più funzioni è la somma algebrica degli integrali delle singole funzioni, quando il loro numero è finito e ciascuna di esse è atta alla integrazione.*

Similmente se c è una costante si avrà $\int_\alpha^\beta c f(x)\,dx = c \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

5.° *Se le funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ sono in numero finito e sono atte alla integrazione definita nell'intervallo finito (α, β), altrettanto accadrà del loro prodotto $f_1 f_2 f_3 \ldots f_m$.*

Supponendo infatti dapprima che si tratti di due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$, e indicando con D l'oscillazione del prodotto $f_1(x) f_2(x)$ e con D_1, D_2 quelle delle funzioni $f_1(x), f_2(x)$ nell'intervallo δ_s, e con L_1, L_2 i limiti superiori e l_1, l_2 i limiti inferiori dei valori di $f_1(x), f_2(x)$ nel medesimo intervallo, e supponendo per semplicità che essi siano tutti positivi, si vede subito che si avrà $D \leq L_1 L_2 - l_1 l_2$, e perciò sarà $D \leq L_1(L_2 - l_2) + l_2(L_1 - l_2)$, ovvero $D \leq L_1 D_2 + l_2 D_1$; e quindi evidentemente se per le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ saranno soddisfatte le condizioni d'integrabilità, altrettanto accadrà per la funzione prodotto $f_1(x) f_2(x)$.

Quando poi le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ non siano sempre positive nell'intervallo (α, β) esse si ridurranno tali coll'aggiunger loro costanti convenienti; e allora se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono le nuove funzioni che così si otterranno, il prodotto $\varphi(x)\psi(x)$ sarà atto alla integrazione fra α e β, e quindi evidentemente altrettanto accadrà anche in questo caso pel prodotto $f_1(x) f_2(x)$; talchè, osservando ora che dal caso del prodotto di due funzioni, si passa successivamente al caso di tre, di quattro funzioni ecc., il teorema enunciato sopra può dirsi completamente dimostrato.

6.° Similmente *il quoziente* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *di due funzioni* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sempre finite e atte alla integrazione in un intervallo finito* (α, β) *sarà atto esso pure alla integrazione nello stesso intervallo, tutte le volte che fra* α *e* β *la funzione denominatore* $\varphi(x)$ *si mantenga sempre numericamente discosta da zero più di una quantità determinata* λ.

Supponiamo infatti dapprima che la funzione $f(x)$ sia sempre positiva fra α e β, e indichiamo con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Siccome le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ fra α e β sono atte alla integrazione, scomponendo l'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ con una legge qualunque, finirà che all'impiccolire sempre più di questi intervalli la somma di quelli (se pure ve ne sono) nei quali le oscillazioni di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ sono superiori a σ sarà minore di quella quantità che più ci piace τ.

In ciascuno degli altri intervalli δ_s la funzione $\varphi(x)$, almeno quando σ (come possiamo sempre supporre) sia preso inferiore a 2λ, avrà sempre lo stesso segno, potendo però questo segno variare da un intervallo ad un altro, quindi se D, D_1, D_2 sono le oscillazioni respettive delle funzioni $\frac{f(x)}{\varphi(x)}, f(x), \varphi(x)$ nell'intervallo δ_s, e l_1, l_2 sono i limiti inferiori e L_1, L_2 i limiti superiori di $f(x)$ e $\varphi(x)$ nello stesso intervallo, quando l_2 e L_2 sono positivi si avrà

$$D \leq \frac{L_1}{l_2} - \frac{l_1}{L_2}, \text{ ovvero } D \leq \frac{L_1 D_2 + l_2 D_1}{l_2 L_2}, \text{ e anche } D \leq \frac{L_1 + l_2}{\lambda^2}\sigma.$$

Invece quando l_2 e L_2 sono ambedue negativi, osservando che allora $-l_2$ e $-L_2$ sono i limiti superiore e inferiore respettivamente della funzione $-\varphi(x)$ nell'intervallo δ_s, e questa ha la stessa oscillazione di $\varphi(x)$ in questo intervallo e in esso è sempre positiva, avremo $D \leq \frac{L_1 - l_2}{\lambda^2}\sigma$; talchè se σ è preso abbastanza piccolo, gli intervalli δ_s nei quali la funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ farà oscillazioni maggiori di un numero positivo e arbitrariamente piccolo σ' potranno esser soltanto tutti o alcuni di quelli nei quali le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ fanno oscillazioni maggiori di σ; e quindi poichè, come abbiamo detto, la somma di questi intervalli può supporsi sempre minore di quel numero che più ci piace τ, resta intanto dimostrato che quando sono soddisfatte le condizioni poste sopra e $f(x)$ è sempre positiva fra α e β, il quoziente $\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione fra α e β.

Osservando poi che il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ può anche considerarsi come il prodotto delle due funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{\varphi(x)}$, e queste, per le ipotesi fatte e per quanto ora abbiamo dimostrato, sono ambedue atte alla integrazione fra α e β, si conclude che anche se $f(x)$ non è sempre positiva fra α e β, il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è atto alla integrazione nell'intervallo (α, β), e con ciò il teorema enunciato resta completamente dimostrato.

Aggiungiamo che se invece di ammettere semplicemente la condizione che le funzioni che abbiamo considerate nei tre ultimi teoremi fossero atte alla integrazione fra α e β, si fosse ammesso che le funzioni stesse fossero tutte continue o avessero soltanto un numero finito di discontinuità, i resultati precedenti sarebbero stati conseguenza immediata del teorema 1.° del § 5 [pag. 12], senza bisogno di alcuna dimostrazione speciale, perchè allora, per teoremi noti, tutte le funzioni somme, prodotti e quozienti qui considerate risultavano funzioni finite e continue o con un numero finito di discontinuità.

È superfluo poi l'osservare che le inverse delle proprietà 4.ª, 5.ª e 6.ª possono benissimo in certi casi non sussistere affatto (*).

(*) Come generalizzazione delle proprietà degli integrali contenute nelle osservazioni 4.ª, 5.ª e 6.ª del testo possiamo aggiungere che: *Se* $u, v, w, \ldots$ *sono un numero finito di funzioni finite e integrabili di* x *fra* α *e* β, *e* $f(u, v, w, \ldots)$ *è una funzione di* x *composta per mezzo di queste funzioni* $u, v, w, \ldots$, *che è sempre finita e continua quando si riguarda come funzione di queste quantità* $u, v, w \ldots$ *considerate come variabili indipendenti nel campo* c *nel quale esse si muovono, allora come funzione di* x *essa sarà sempre integrabile fra* α *e* β.

Si osservi infatti che, essendo $f(u, v, w, \ldots)$, come funzione di $u, v, w, \ldots$, continua nel campo c, essa sarà continua anche uniformemente, e quindi scegliendo a piacere un numero diverso da zero ma positivo e arbitrariamente piccolo σ, potremo sempre trovare un numero ε tale che, per ogni sistema che si consideri di valori $u_0, v_0, w_0, \ldots$ di $u, v, w, \ldots$, avverrà sempre che, quando le $u, v, w, \ldots$ si muovono fra $u_0 - \varepsilon$ e $u_0 + \varepsilon$, $v_0 - \varepsilon$ e $v_0 + \varepsilon$, $w_0 - \varepsilon$ e $w_0 + \varepsilon, \ldots$ nel campo c, le oscillazioni di $f(u, v, w, \ldots)$ non supereranno σ.

S'immagini ora scomposto con una legge qualsiasi l'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Quando questi intervalli saranno ridotti sufficientemente piccoli, se vi saranno intervalli $\delta_p, \delta_q, \ldots$ nei quali le oscillazioni delle varie funzioni $u, v, w, \ldots$ (che si suppongono in numero finito) siano superiori a un numero ε_1 inferiore ad ε e comunque piccolo, in questi intervalli le oscillazioni di $f(u, v, w \ldots)$ *potranno* essere superiori a σ, ma la somma degli intervalli medesimi a causa delle integrabilità delle stesse funzioni $u, v, w, \ldots$ potrà intendersi già ridotta minore di quel numero che più ci piace τ.

Negli altri intervalli invece, essendo le oscillazioni di $u, v, w, \ldots$ inferiori o uguali a ε_1, quelle di $f(u, v, w, \ldots)$ saranno certamente inferiori a σ, quindi, per

7.° Se $f(x)$ è una funzione finita ed atta alla integrazione fra α e β, siccome gli n intervalli δ_s che compariscono nella somma $\sum f_s \delta_s$ possono prendersi tutti uguali fra loro e a $\frac{\beta-\alpha}{n}$, si avrà $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} (\beta-\alpha)\frac{\sum_1^n f_s}{n}$, e perciò sarà

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n f_s}{n},$$

cioè *il rapporto dell' integrale* $\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$ *all' intervallo d' integrazione* $\beta-\alpha$ *può riguardarsi come il limite per* $n=\infty$ *della media di* n *valori della funzione in punti qualsiansi degli* n *intervalli uguali in cui si può supporre diviso l' intervallo totale;* o più particolarmente *come il limite della media di* n *valori della funzione presi in punti equidistanti* $\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}, \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{n}, \ldots, \alpha+(n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}$ *nell' intervallo d' integrazione* (α, β).

Questo limite della media dei valori di $f(x)$ si chiama il *valor medio della funzione nell' intervallo* (α, β).

8.° Aggiungiamo che se $f(x)$ è la solita funzione finita e atta alla integrazione fra α e β e $\alpha<\beta$, e se $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$ sono due sistemi qualunque d' intervalli parziali nei quali vien diviso l' intervallo totale (α, β), per la formola (3) avremo $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s - \sum_1^n \delta_s f_s = \mathrm{P}-\mathrm{P}'$, con $\mathrm{P} \leq \sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$ e $\mathrm{P}' \leq \sum_1^{n'} \delta'_s \mathrm{D}'_s$ in valore assoluto; e quindi, pure in valore assoluto, avremo evidentemente

$$\sum_1^{n'} \delta' f'_s - \sum_1^n \delta_s f_s \leq \sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s + \sum_1^{n'} \delta'_s \mathrm{D}'_s .$$

Ora, considerando n come fisso, ed osservando che col successivo impiccolire degli intervalli δ'_s la somma $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ finisce per differire dall'integrale

essere stato scelto σ arbitrariamente piccolo, è certo che anche per la funzione $f(u, v, w, \ldots)$ la condizione d'integrabilità del § 4 [pag. 10 e seg.] rimarrà soddisfatta, e questo dimostra il teorema enunciato.

Qui pure si può avvertire che se le funzioni $u, v, w, \ldots$ fossero anche sempre continue fra α e β, tale risultando allora anche la funzione $f(u, v, w, \ldots)$, il teorema dimostrato sarebbe stato di immediata evidenza.

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ meno di qualunque quantità arbitrariamente piccola data σ_1, e la somma $\sum_1^{n'} \delta'_s \mathrm{D}'_s$ finisce per esser minore di qualunque quantità pure arbitrariamente piccola σ_2, avremo anche, in valore assoluto

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \delta_s f_s \leq \sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s + \sigma_1 + \sigma_2 ,$$

e le quantità σ_1, σ_2 non dipenderanno affatto dagli intervalli δ_s che ora supponiamo fissi, ma dipenderanno soltanto dagli intervalli δ'_s, e potranno quindi supporsi piccole quanto si vuole indipendentemente dalle δ_s.

Di qui risulta subito che la differenza del primo membro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \delta_s f_s$ (che ha un valore fisso indipendente dalle δ'_s) non potrà affatto superare in valore assoluto la somma $\sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$, poichè, se fosse superiore a $\sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$ di un certo numero ε, nulla impedirebbe di ridurre $\sigma_1+\sigma_2$ inferiore a ε con un conveniente impiccolimento degli intervalli δ'_s, e allora saremmo in contraddizione; dunque possiamo affermare, che, qualunque siano gli intervalli parziali δ_s, si avrà sempre in valore assoluto $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \delta_s f_s \leq \sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$; e questo permette evidentemente di dire che *per ogni sistema di valori speciali delle* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *la somma corrispondente* $\sum_1^n \delta_s f_s$ *darà sempre un valore approssimato dell' integrale* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *con un errore per eccesso o per difetto non superiore a* $\sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$; per modo che se $\sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s < \sigma$, l'errore che si commetterà per eccesso o per difetto prendendo $\sum_1^n \delta_s f_s$ come valore dell'integrale sarà inferiore a σ.

Questi risultati valgono evidentemente anche quando $\alpha>\beta$, purchè però allora invece della somma negativa $\sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s$ si prenda il suo valore assoluto.

In particolare poi, prendendo le δ_s uguali fra loro e a $\frac{\beta-\alpha}{n}$, si può affermare che una qualunque delle medie $\frac{\sum_1^n f_s}{n}$ moltiplicata per l'intervallo d'integrazione $\beta-\alpha$ dà il valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ con un errore per eccesso o per difetto non superiore al prodotto dell'intervallo per la media corrispondente delle oscillazioni $\frac{\sum_1^n D_s}{n}$.

S'intende come queste osservazioni potranno servire utilmente in pratica pel calcolo numerico dei valori approssimati degli integrali definiti.

9.° Se $f(x)$ è una funzione che fra α e β è finita e atta alla integrazione, e nei punti dove è diversa da zero ha sempre lo stesso segno, l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ o sarà zero o sarà una quantità differente da zero che avrà lo stesso segno di $f(x)$ o segno contrario secondochè $\alpha<\beta$, o $\alpha>\beta$.

Ciò risulta subito dalla definizione dell'integrale, giacchè se per es. $\alpha<\beta$, i termini della somma $\sum \delta_s f_s$ che non sono uguali allo zero sono dello stesso segno di $f(x)$, e quindi anche la somma sarà nello stesso caso; e conseguentemente o avrà per limite zero, o avrà per limite una quantità diversa da zero e del segno di $f(x)$; mentre se $\alpha>\beta$ accadrà evidentemente il contrario.

E se inoltre fra α e β esisterà un intervallo di ampiezza finita nel quale $f(x)$ differirà da zero più di una quantità determinata, l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà diverso da zero; ed in particolare esso sarà diverso da zero se $f(x)$ non è sempre zero e nei punti dove non è zero ha sempre lo stesso segno e in uno almeno di questi punti x' è anche continua; giacchè allora se $f(x')=A$, esisterà un intorno di x' nel quale $f(x)$ differirà da zero più di $\frac{A}{2}$, e si avrà $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \frac{A}{2}d'$, essendo d' l'ampiezza di questo intorno (*).

(*) Ricordando che, secondo quanto dicemmo in fine della nota delle pag. 13 e 14, una funzione sempre finita e atta alla integrazione in un intervallo se non è sempre continua ha, in ogni porzione di questo intervallo, infiniti punti di continuità, si vede subito che le funzioni, che sono d'integrale nullo in ogni porzione di un intervallo dato e non cambiano mai di segno, o sono sempre zero, o sono funzioni *punteggiate discontinue* atte alla integrazione il cui valore è zero in *ciascuno* degli infiniti suoi punti di continuità.

L'esistenza di queste funzioni risulterà chiaramente da quanto diremo nella prima nota a pag. 28.

Di qui poi risulta che se in tutto l'intervallo (α,β) due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono atte alla integrazione, e si ha sempre $f(x)\geqq\varphi(x)$, sarà

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \text{ se } \alpha<\beta, \text{ e } \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \text{ se } \alpha>\beta,$$

e ciò perchè la differenza $f(x)-\varphi(x)$ non sarà mai negativa fra α e β, e sarà quindi

$$\int_\alpha^\beta \{f(x)-\varphi(x)\}\,dx \geqq 0 \text{ se } \alpha<\beta, \text{ e } \int_\alpha^\beta \{f(x)-\varphi(x)\}\,dx \leqq 0 \text{ se } \alpha>\beta.$$

E se vi sarà almeno un punto x' nel quale $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano diverse fra loro e al tempo stesso siano continue, il caso della eguaglianza dei due integrali $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ e $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ non potrà presentarsi.

10.° Se $f(x)$ è una funzione finita e atta all'integrazione fra α e β, tale sarà pure la funzione $f_1(x)$ formata dai valori assoluti di $f(x)$; giacchè evidentemente in ogni porzione dell'intervallo (α,β) le oscillazioni di $f_1(x)$ non saranno mai superiori alle corrispondenti di $f(x)$; e oltre a ciò poi, se $\alpha<\beta$, in valore assoluto si avrà $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx$, e si potrà anche scrivere $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \eta\int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx$, essendo η un numero compreso fra -1 e 1 (*).

(*) Queste particolarità sussistono anche nel caso di funzioni complesse di una variabile reale.

Sviluppando quanto dicemmo in fine del § 4 [pag. 12] osserviamo che, essendo $f(x)$ una funzione complessa sempre finita $u+iv$ di x dove u e v sono funzioni reali e finite di x fra α e β, il suo integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà, come nel caso delle funzioni reali, il solito limite della somma $\Sigma\,\delta_s f_s$, dove f_s è un valore di $f(x)$ in un punto qualsiasi di δ_s, o più generalmente è il valore u_s+iv_s, essendo u_s e v_s numeri compresi fra i limiti inferiori e superiori di u e v respettivamente nell'intervallo δ_s; supposto al solito che il detto limite esista qualunque sia la legge secondo la quale viene fatta la scomposizione dell'intervallo (α,β) negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \ldots, \delta_n$, e qualunque siano i numeri u_s e v_s che si scelgono nel modo anzidetto.

Allora evidentemente la funzione $f(x)$ sarà atta all'integrazione nell'intervallo (α,β) quando siano atte all'integrazione nello stesso intervallo le due funzioni u e v; quindi se si suppone al solito ad es. $\alpha<\beta$, e si considera il modulo $|f|=\sqrt{u^2+v^2}$ di $f(x)$, per la osservazione generale fatta nella nota alla pag. 19, si potrà dire che il *modulo di $f(x)$ sarà sempre atto alla integrazione fra α e β se tale sarà $f(x)$*, e inoltre per la definizione che ora abbiamo data dell'in-

11.° Se le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono finite e atte all'integrazione fra α e β, e nello stesso intervallo (α, β) la funzione $\varphi(x)$ dove è differente da zero ha sempre lo stesso segno, e l e L sono i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ fra α e β, è facile vedere che l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx$ sarà compreso fra le due quantità $l\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ e $\mathrm{L}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, o sarà uguale ad una di esse; cioè, supposto per es. $\alpha<\beta$, si avrà

$$l\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,,$$

quando $\varphi(x)$ dove è diverso da zero è positivo; e si avrà invece

$$l\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx \geq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

quando $\varphi(x)$ dove è diverso da zero è negativo.

Si vede infatti che formando i due integrali $\int_\alpha^\beta \left\{ f(x)-l \right\} \varphi(x)\,dx$ e $\int_\alpha^\beta \left\{ \mathrm{L}-f(x) \right\} \varphi(x)\,dx$, in essi la funzione sotto il segno quando non è zero ha sempre lo stesso segno che è quello di $\varphi(x)$, e quindi per la osservazione 9.ª si trovano subito le formole scritte sopra.

---

tegrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, si avrà evidentemente mod $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta |f|\,dx$; *e quindi sarà anche* mod $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \eta \int_\alpha^\beta |f|\,dx$, *essendo* η *un numero compreso fra* 0 e 1 (0 e 1 inclusi).

Inoltre, osservando che se θ è l'argomento dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ si ha $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| e^{i\theta}$, si potrà scrivere sempre $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \eta\, e^{i\theta} \int_\alpha^\beta |f|\,dx$, ovvero

$$(\alpha) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \mu \int_\alpha^\beta |f|\,dx\,,$$

essendo μ un numero (reale o complesso) il cui modulo η non è superiore ad uno.

E si può aggiungere che se fra α e β esisterà almeno un intervallo di ampiezza finita nel quale $\varphi(x)$ è discosta da zero più di una quantità determinata, e nello stesso intervallo $f(x)$ sarà discosta da l e da L, e anch'essa più di una quantità determinata, — come avviene ad es. quando $f(x)$ in un suo punto di continuità fra α e β ha un valore differente da l e L e nello stesso punto $\varphi(x)$ è continua e diversa da zero, — allora nelle formole precedenti i segni di uguaglianza non potranno mai aversi, e sarà sempre invece, con $\alpha<\beta$,

$$l\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx < \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx < \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,,$$

o

$$l\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx > \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx > \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,,$$

secondochè $\varphi(x)$ dove è diverso da zero è positivo o negativo.

12.° Dalla osservazione che ora abbiamo fatta risulta subito che se $\varphi(x)$ è una funzione che fra α e β dove è diversa da zero è sempre dello stesso segno, indicando con $\overline{f}$ un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore l e L di $f(x)$ fra α e β si avrà

$$(6) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,d(x) = \overline{f} \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,;$$

e quindi se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β, osservando che allora esiste almeno un valore $\overline{x}$ di x fra α e β pel quale si ha $f(\overline{x})=\overline{f}$, si conclude che sarà

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\overline{x}) \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,;$$

e osservando che si ha $\overline{x}=\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)$, essendo ε un numero compreso fra 0 e 1, si potrà anche scrivere

$$(7) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx = f\big(\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)\big) \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\,.$$

La proprietà espressa dalla formola (6), della quale la (7) è un caso particolare, è conosciuta col nome di *primo teorema del valore medio*. Essa vale, come abbiamo detto, quando $\varphi(x)$ non cambia mai di segno nell'intervallo d'integrazione (*).

(*) Quando, restando nel caso delle funzioni reali, si ammette che durante il corso della integrazione la funzione $\varphi(x)$ possa non avere sempre lo stesso segno, 13.° Supponiamo in particolare nelle formole precedenti $\varphi(x)=1$, e poniamo $\beta-\alpha=h$. Allora la (6) darà luogo all'altra

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx=\overline{f}h, \tag{8}$$

essendo $\overline{f}$ un numero compreso fra il limite inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (α,β) o $(\alpha,\alpha+h)$; e se $f(x)$ è continua fra α e $\alpha+h$ dalla (7) avremo la seguente

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)\,dx=hf(\alpha+\varepsilon h), \tag{9}$$

essendo ε una quantità compresa fra o e 1.

E non si può lasciare di osservare che in questo caso, di $f(x)$ sempre continua fra α e $\alpha+h$, per quanto si disse all'osservazione 11ª, se $f(x)$ non è costante fra α e $\alpha+h$ il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$ che qui comparisce non sarà nè il massimo nè il minimo dei valori di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$; e quindi

---

la formola (6) *del primo teorema del valore medio* non può più applicarsi; però, se la funzione stessa non è mai numericamente superiore a un numero φ_0, è facile vedere che si ha allora una formola dello stesso genere, che è la seguente

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx=\overline{f}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx+\eta\varphi_0 D(\beta-\alpha), \tag{α}$$

essendo $\overline{f}$ al solito un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori di $f(x)$ fra α e β, η un numero compreso fra -1 e 1, e D l'oscillazione di $f(x)$ fra α e β (V. mia *Serie di* Fourier *e altre rappresentazioni* ecc. Pisa, Nistri 1880, a pag. 11 e 12).

In questo caso infatti, siccome $\varphi(x)+\varphi_0$ non sarà mai negativa, all'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+\varphi_0\}\,dx$ sarà ancora applicabile la formola (6), e quindi avremo

$$\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+\varphi_0\}\,dx=\overline{f}\int_\alpha^\beta \{\varphi(x)+\varphi_0\}\,dx=\overline{f}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx+\overline{f}\varphi_0(\beta-\alpha);$$

e per essere

$$\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+\varphi_0\}\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx+\varphi_0\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx+\overline{\overline{f}}\varphi_0(\beta-\alpha),$$

essendo $\overline{\overline{f}}$ un altro valore compreso fra i limiti inferiore superiore di $f(x)$ nell'intervallo (α,β), si vede subito che per ottenere la formola (α) basterà fare la sostituzione nella formola precedente, e osservare che $\overline{f}-\overline{\overline{f}}$ non può superare la oscillazione D di $f(x)$ fra α e β.

Il Darboux poi ha dato un'altra formola che corrisponde a quella del primo

siccome fra i punti μ e ν che corrispondono a questi valori massimo e minimo di $f(x)$ si deve trovare un punto $\overline{x}$ nel quale $f(x)$ ha il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$, evidentemente questo punto $\overline{x}$ sarà *interno* all'intervallo $(\alpha,\alpha+h)$, e pel numero ε che comparisce nella formola (9) si potrà sempre prendere un numero compreso fra 0 e 1 e differente da questi limiti, senza escludere con ciò che la formola stessa possa anche essere soddisfatta dai valori $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$.

In generale poi si può osservare che qualunque sia, purchè finita e atta alla integrazione, la funzione $f(x)$ nelle formole precedenti, sul calcolo del numero $\overline{f}$ o del valore $f(\alpha+\varepsilon h)$ non hanno influenza veruna i valori di $f(x)$ nei punti estremi α e β o α e $\alpha+h$ o in un numero finito di punti $a_1, a_2, \dots, a_p$, come non l'hanno in generale sul valore di un integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ i valori di $f(x)$ in un numero finito di punti, i quali valori possono cangiarsi a piacere; e ciò perchè, come si comprende subito, il cambiamento dei valori di $f(x)$

---

teorema del valore medio pel caso in cui una o ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono complesse, essendo però ancora sempre finite e integrabili fra α e β.

In questo caso, per le osservazioni contenute nelle note delle pag. 19 e 20, e 23 e 24, anche il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione fra α e β, e tale sarà pure il prodotto dei moduli $|f|$ e $|\varphi|$ di $f(x)$ e $\varphi(x)$, e per la formola (α) della seconda delle stesse note si avrà $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_\alpha^\beta |f|\,|\varphi|\,dx$, essendo μ un numero complesso di modulo non superiore ad uno.

Applicando quindi la (6) all'integrale del secondo membro, si troverà subito la formola generale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx=\mu|\overline{f}|\int_\alpha^\beta |\varphi|\,dx, \tag{β}$$

essendo $|\overline{f}|$ un valore intermedio fra i limiti inferiore e superiore dei moduli di $f(x)$ fra α e β.

Nel caso particolare poi in cui $f(x)$ e conseguentemente anche il suo modulo $|f|$ sono funzioni continue fra α e β, osservando che allora ci sarà almeno un valore $\overline{x}$ di x fra α e β pel quale si avrà $|\overline{f}|=|f(\overline{x})|$, e ammettendo che sia θ_1 l'argomento di $f(x)$ per $x=\overline{x}$, si vede subito che la formola trovata darà luogo all'altra $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx=\mu e^{-i\theta_1}f(\overline{x})\int_\alpha^\beta |\varphi|\,dx$, ovvero

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx=\lambda f(\overline{x})\int_\alpha^\beta |\varphi|\,dx, \tag{γ}$$

essendo λ un altro numero complesso di modulo non superiore ad uno; e questa è la formola di Darboux che qui volevamo dare, e della quale la (α) della nota delle pag. 23 e 24 è un caso particolare.

in un numero *finito* di punti nell'intervallo (α, β) non altera le condizioni d'integrabilità della funzione, e nelle somme $\sum_1^n \delta_s f_s$ che conducono al valore dell'integrale si può non prendere mai per f_s negli intervalli che comprendono i punti $a_1, a_2, \ldots, a_p$ i valori di $f(x)$ in questi punti; o anche perchè avendosi

$$\sum_1^n \delta_s f(\xi_s) = \sum\nolimits_1 \delta_s f(\xi_s) + \sum\nolimits_2 \delta_s f(\xi_s),$$

dove la seconda somma è estesa agli intervalli che comprendono i punti $a_1, a_2, \ldots, a_p$ e la prima è estesa a tutti gli altri intervalli, ciò che influisce sul valore dell'integrale è questa prima somma e non la seconda, la quale ha per limite zero (*).

8. — Continuiamo ora a supporre che $f(x)$ sia una funzione di x sempre finita e atta all'integrazione in tutto l'intervallo (α, β), e quindi anche in qualsiasi porzione di esso; e supponendo variabile il limite superiore dell'integrale, consideriamo l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ per tutti i valori di x fra α e β, *intendendo che per $x = \alpha$ esso sia zero* (**).

(*) Evidentemente questa particolarità può estendersi colle stesse considerazioni fino a dire che un integrale non cambia quando si mutano comunque i valori della funzione in un gruppo infinito di punti di prima specie o più generalmente in un gruppo di punti rinchiudibile.

Essa poi si estende anche al caso in cui i valori della funzione si mutano in un gruppo *qualunque* di punti, ma in modo che i salti, o le oscillazioni della funzione in quei punti non vengano ad aumentarsi, e in qualunque porzione anche piccolissima dell'intervallo dato ci siano punti nei quali il valore della funzione non è cambiato; perchè evidentemente, con tali cambiamenti, le oscillazioni della funzione negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ nei quali si scomporrà l'intervallo dato (α, β) per calcolare l'integrale non si aumentano, e la funzione resta ancora atta alla integrazione; e le somme $\Sigma \delta_s f_s$ si può ammettere che non mutino, potendo prendere sempre per le f_s i valori delle funzioni nei punti nei quali questi valori non sono cambiati.

E per questa osservazione, considerando le funzioni che sono la differenza fra la funzione variata nei modi indicati e la funzione data, si viene a mettere in chiaro la esistenza delle funzioni punteggiate discontinue atte alla integrazione delle quali parlammo nella nota alla pag. 22 e che, sebbene diverse da zero, sono d'integrale nullo in ogni porzione dell'intervallo che si considera.

Tutto questo trovasi esposto anche con maggiori dettagli nei miei *Fondamenti* ecc. al § 190. 9°, e seg. [pag. 260 e seg.].

(**) Per comodo, e per seguire gli usi adottati, chiamiamo x il limite superiore dell'integrale che ora supponiamo variabile, pure continuando a chiamare x la variabile d'integrazione. Queste due quantità però non hanno relazione fra loro, poichè la prima, sebbene variabile, ha in ogni integrale il valore determinato che via via le si attribuisce come limite superiore dell'integrale, e la seconda invece prende tutti i valori nell'intervallo d'integrazione da α ad x.

Per la definizione dell'integrale, evidentemente la seconda (cioè quella sotto l'integrale) potrebbe venire sostituita da un'altra variabile y senza che il valore dell'integrale restasse minimamente alterato, perchè se $f(x)$ e $f(y)$ sono funzioni definite al modo stesso, cioè hanno i medesimi valori per gli stessi valori di x e y, si ha evidentemente $\int_\alpha^x f(x)\,dx = \int_\alpha^x f(y)\,dy$.

Evidentemente questo integrale, avendo un valore finito e determinato per tutti i valori di x fra α e β, potrà considerarsi come una funzione di x in questo intervallo, e potremo indicarla con $F(x)$; e poichè si avrà tanto per h positivo che per h negativo

$$F(x+h) = \int_\alpha^x f(x)\,dx + \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

ovvero

$$(10)\qquad F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = \bar{f}h, \quad \text{e} \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \bar{f},$$

essendo $\bar{f}$ un numero compreso fra il limite superiore e l'inferiore dei valori di $f(x)$ fra x e $x+h$, si potrà intanto concludere evidentemente che $F(x)$, *ossia l'integrale* $\int_\alpha^x f(x)\,dx$, *considerato come funzione del suo limite superiore x, quando $f(x)$ è finita e atta alla integrazione fra α e β, è sempre una funzione finita e continua di x in tutto l'intervallo stesso* (α, β).

Facciamo ora avvicinare h a zero per valori positivi e per valori negativi separatamente, e supponiamo che nel punto x, a destra o a sinistra secondo che questi valori di h che si considerano sono positivi o negativi, la funzione $f(x)$ sia continua, o se è discontinua abbia soltanto una discontinuità di quelle che diconsi *ordinarie*.

Con queste ipotesi, per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, si può trovare un numero h_1, dello stesso segno di h, tale che per tutti i punti dell'intervallo da x a $x+h_1$ (il punto x al più escluso) i valori di $f(x)$ in valore assoluto differiscano meno di σ da $f(x+0)$ o da $f(x-0)$ secondo che h_1 è positivo o negativo; quindi, poichè allora, per tutti i valori di h fra 0 e h_1 (0 escluso), il numero $\bar{f}$, e quindi anche il rapporto $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, differisce da $f(x+0)$ o da $f(x-0)$ meno di σ in valore assoluto, si conclude che per h positivo si avrà

$$\lim_{h=+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x+0),$$

e per h negativo si avrà invece

$$\lim_{h=-0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x-0),$$

ciò che ci mostra che *l'integrale* $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ *considerato come funzione del suo limite superiore,* oltre essere una funzione finita e continua in tutto l'intervallo da α a β, è tale altresì che *nei punti dove* $f(x)$ *è continua ha appunto per derivata* $f(x)$; e in quelli dove $f(x)$ ha una discontinuità ordinaria, senza però che questa discontinuità sia di quelle che possono togliersi cambiando il valore della funzione in quel punto, la derivata dell'integrale non è pienamente determinata, nel senso che si trova per essa il valore $f(x+0)$ o $f(x-0)$ secondochè l'accrescimento h che si dà ad x per calcolarla è positivo o negativo; o in altri termini *nel caso che* $f(x)$ *abbia una discontinuità ordinaria nel punto* x, *l'integrale* $\int_\alpha^x f(x)dx$ *nel punto* x *ha una derivata a destra che è* $f(x+0)$ *ed una derivata a sinistra che è* $f(x-0)$.

Nei punti poi nei quali $f(x)$ ha una discontinuità che può togliersi mutando in essi il valore della funzione, la derivata dell'integrale esiste ed è il valore comune di $f(x+0)$ e $f(x-0)$ (cioè il valore che dovrebbe attribuirsi a $f(x)$ per ristabilire la continuità); e nei punti nei quali $f(x)$ ha discontinuità di seconda specie almeno da una parte, s'intende subito per la (10) che la derivata dell'integrale, sebbene in alcuni casi possa ancora esistere, spesso però non esisterà, ed il rapporto corrispondente $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ coll'impiccolire indefinitamente di h per valori positivi o per valori negativi oscillerà fra limiti finiti perchè nella (10) $\overline{f}$ è sempre finita (*).

(*) In ogni caso, per essere $\overline{f}$ nella (10) sempre finita, si vede subito che se si considera una funzione di primo grado $\mu x+\nu$ nella quale μ sia un numero positivo maggiore del limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ nell'intervallo dato (α, β), le funzioni $\varphi(x)=\int_\alpha^x f(x)dx+\mu x+\nu$, e $\psi(x)=\int_\alpha^x f(x)dx-(\mu x+\nu)$ saranno finite e continue e avranno i loro rapporti incrementali respettivamente sempre positivi, e sempre negativi per qualunque valore di x fra α e β (α e β inclus.); e quindi la prima sarà sempre crescente e la seconda sarà sempre decrescente (*Calc. differenz.* § 48, [pag. 62]).

Per questo si può dunque affermare, come trovasi detto anche nei miei *Fondamenti ecc.* al § 193, [pag. 272], che *gli integrali delle funzioni sempre finite e atte alla integrazione in un certo intervallo finito sono sempre funzioni finite e continue che anche se hanno un numero infinito di massimi e minimi li perdono tutti coll'aggiungervi, e col toglierví funzioni convenienti di primo grado;* cioè son di quelle funzioni che al § 134, (pag. 175 e seg.) dei miei *Fondamenti ecc.,* chiamai *funzioni di prima specie.*

E così in particolare gli integrali stessi si possono sempre riguardare come differenza di due funzioni ambedue sempre crescenti, e come somma di una funzione sempre crescente e di una sempre decrescente; per l'una di queste funzioni potendo prendersi sempre una funzione conveniente del primo grado.

È poi da notare che, siccome vi sono anche (§ 5, pag. 12 e seg.) funzioni $f(x)$ che hanno un numero infinito di discontinuità fra α e β e che pure sono atte all'integrazione definita nell'intervallo (α, β), dalle considerazioni ora esposte apparisce chiaramente che esistono e *possono costruirsi col mezzo degli integrali definiti funzioni che, sebbene sempre finite e continue, mancano della derivata intesa nel senso ordinario in un numero infinito di punti di un dato intervallo* (*).

9. — Supponiamo ora che $f(x)$ sia una funzione che in tutto l'intervallo (α, β) è finita e atta alla integrazione e ha tutto al più soltanto delle discontinuità di prima specie in un numero finito o infinito di punti (**).

Sia poi $\varphi(x)$ una funzione finita e continua in tutto l'intervallo (α, β), trovata con un processo qualsiasi, che in tutti i punti dove $f(x)$ è continua ha una derivata determinata che è la stessa $f(x)$, e nei punti dove $f(x)$ è discontinua ha una derivata a destra che è $f(x+0)$ e una derivata a sinistra che è $f(x-0)$.

Una tale funzione $\varphi(x)$ certo esisterà, poichè esiste se non altro l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ che ha appunto questa proprietà; e la differenza $\varphi(x)-\int_\alpha^x f(x)dx$ sarà una funzione di x finita e continua in tutto l'intervallo (α, β) la cui

(*) Se quindi si fossero esposti anche prima i fondamenti del calcolo in base a queste considerazioni, si sarebbero trovate naturalmente le funzioni che sebbene sempre continue mancano di derivata in infiniti punti di ogni intervallo, nè per tanti anni si sarebbe continuato ad ammettere come principio fondamentale dell'Analisi infinitesimale che tutte le funzioni finite e continue almeno generalmente ammettono sempre una derivata (V. *Calc. differenz.*, Cap. II, pag. 20 e seg., e i miei *Fondamenti ecc.*, § 193, [pag. 272]).

(**) Non avendo qui $f(x)$ discontinuità di seconda specie, per quanto dicemmo nella nota a pag. 13, la condizione di essere atta alla integrazione viene sempre soddisfatta da sè, e quindi si potrebbe anche fare a meno di porla esplicitamente.

derivata sarà zero in tutti i punti dello stesso intervallo; e quindi per un teorema noto, la differenza stessa dovrà essere una costante C.

D'altra parte siccome l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ è continuo, e la funzione $\varphi(x)$ si è anch'essa supposta continua, facendo avvicinare x ad α indefinitamente, si vede subito che dovrà essere $C=\varphi(\alpha)$; quindi si può ora evidentemente concludere che: *Se $f(x)$ è una funzione finita di x fra α e β che è atta alla integrazione e non ha discontinuità di seconda specie e $\varphi(x)$ è una funzione finita e continua di x, trovata con un processo qualsiasi, che nei punti di continuità di $f(x)$ ha per derivata $f(x)$ ed in quelli delle discontinuità di $f(x)$, se ve ne sono, ha per derivata a destra $f(x+0)$, e per derivata a sinistra $f(x-0)$, si avrà*

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(\alpha)\,;$$

talchè, in particolare, *se $f(x)$ è sempre finita e continua fra α e β, determinando con un processo qualsiasi una funzione $\varphi(x)$ di x finita e continua, la cui derivata sia sempre $f(x)$* (funzione la cui esistenza risulta dalle considerazioni che precedono), *l'integrale definito $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ non sarà altro che la differenza $\varphi(x)-\varphi(\alpha)$.*

10. — In particolare ancora, se $\varphi(x)$ è una funzione che in tutto l'intervallo (α,β) ha sempre una derivata $\varphi'(x)$ finita e continua (e conseguentemente atta alla integrazione fra α e β o fra α e x), si ha la formola seguente

$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^x \varphi'(x)\,dx\,. \tag{11}$$

D'altra parte, per la definizione degli integrali definiti che noi abbiamo data, si può scrivere

$$\int_\alpha^x \varphi'(x)\,dx = \lim \sum d\varphi(x)\,,$$

quando si convenga che i differenziali di $\varphi(x)$ siano presi per es. agli estremi inferiori degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots$, e questi intervalli siano considerati come i differenziali di x; e questo, insieme alla osservazione che la espressione $\varphi'(x)\,dx$ che figura sotto il segno $\int_\alpha^x \varphi'(x)\,dx$ corrisponde al differenziale $d\varphi(x)$, oltre a giustificare la scelta del segno stesso per rappresentare l'integrale,

perchè il segno $\int$ non è altro che la iniziale della parola *somma*, porta naturalmente a rappresentare l'integrale $\int_\alpha^x \varphi'(x)\,dx$ anche col segno $\int_\alpha^x d\varphi(x)$.

E così avendosi anche

$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^x \varphi'(x)\,dx=\int_\alpha^x d\varphi(x)=\int_\alpha^x d\left\{\varphi(x)-\varphi(\alpha)\right\},$$

si può ora asserire che, nella nostra ipotesi di $\varphi'(x)$ finita e continua fra α e β, i segni di derivazione e di differenziazione vengono distrutti da quello d'integrazione; o in altri termini l'integrazione per le funzioni finite e continue si presenta ora come una operazione il cui effetto è inverso a quello della derivazione o differenziazione e viceversa: e ciò con quella sola restrizione che risulta dalla natura delle operazioni di derivazione o di differenziazione, e anche dalla semplice ispezione delle formole precedenti; la restrizione cioè che l'integrale fra α e x del differenziale di una funzione continua, quando la derivata di questa funzione è continua essa pure, dà la funzione stessa all'infuori tutt' al più di una costante additiva.

Se la derivata $\varphi'(x)$ sebbene determinata e finita avesse delle discontinuità, la formola (11) continua ancora a sussistere in un numero immenso di casi, come in particolare sussiste sempre quando queste discontinuità sono discontinuità ordinarie; ma per fare studii generali relativi a questi casi occorrono altre considerazioni che qui non possiamo fare, e noi ci limitiamo perciò a quelle che abbiamo esposte (*).

(*) Nei miei *Fondamenti ecc.*, dal § 136 in poi (pag. 178 e seg.), ho considerato diffusamente il caso delle funzioni $\varphi(x)$ finite e continue in un dato intervallo (α,β) che non hanno derivata in alcuni punti dello stesso intervallo, o non l'hanno mai; e là, come già ricordai nel *Calcolo Differenziale* nel capitolo che tratta delle tangenti alle curve piane, ho dimostrato l'esistenza, per ogni punto x *interno* all'intervallo, di quattro numeri $\lambda_x, \Lambda_x, \lambda'_x, \Lambda'_x$, che possono essere finiti o infiniti, e essere tutti diversi o anche tutti uguali fra loro, e che io chiamai, i due primi, *estremi oscillatorii destri*, e i due secondi, *estremi oscillatorii sinistri* dei rapporti incrementali di $\varphi(x)$, essendo $\lambda_x \leq \Lambda_x$, $\lambda'_x \leq \Lambda'_x$; e chiamai *oscillazione derivatoria destra* e *oscillazione derivatoria sinistra della funzione* $\varphi(x)$ pel valore x della variabile le differenze $\Lambda_x - \lambda_x$ e $\Lambda'_x - \lambda'_x$ respettivamente.

Questi numeri hanno la particolarità che i rapporti incrementali destri $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ col tendere indefinitamente di h a zero per valori positivi si mantengono sempre fra $\lambda_x - \varepsilon$ e $\Lambda_x + \varepsilon$, essendo ε positivo e arbitrariamente piccolo, ciò che corrisponde a dire che i rapporti incrementali medesimi tendono a finire per

11. — I risultati ultimi somministrano evidentemente un metodo pel calcolo degli integrali definiti $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ delle funzioni $f(x)$ finite e continue e anche di quelle discontinue con discontinuità ordinarie soltanto, poichè per questo basterà trovare con qualsiasi processo una funzione *finita e continua* $\varphi(x)$ che abbia per derivata $f(x)$ nei punti di continuità di questa funzione $f(x)$, e per derivata a destra e a sinistra $f(x+0)$ e $f(x-0)$ nei punti delle discontinuità, e poi fare la differenza $\varphi(x)-\varphi(\alpha)$ dei valori estremi.

È anzi il metodo che di qui resulta quello che più comunemente si usa pel calcolo degli integrali definiti, e che noi pure applicheremo continuamente d'ora innanzi; però siccome esso fa dipendere il calcolo dell'integrale definito da operazioni da farsi su una funzione incognita che bene spesso non può trovarsi che con artifizî e con ripetuti tentativi (la funzione cioè la cui derivata è la funzione data), si intende subito che il metodo che risulta dalla definizione che noi abbiamo data degli integrali definiti, ove non presentasse spessissimo le difficoltà molto gravi che sono inerenti alla ricerca di quel

---

oscillare fra i numeri λ_x e Λ_x; e così i rapporti incrementali sinistri $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ coll'avvicinarsi indefinito di h a zero per valori negativi tendono a finire per oscillare fra λ'_x e Λ'_x.

Naturalmente agli estremi α o β dell'intervallo (α,β) non si hanno che due estremi oscillatorii λ_α e Λ_α o λ'_β e Λ'_β supposto $\alpha<\beta$.

Quando questi quattro numeri λ_x, Λ_x e λ'_x, Λ'_x sono finiti e eguali fra loro siamo nel caso della esistenza di una derivata ordinaria determinata e finita; mentre quando sono uguali soltanto i due λ_x e Λ_x, o i due λ'_x e Λ'_x siamo nel caso della esistenza della derivata a destra o di quella a sinistra respettivamente.

Questi numeri hanno molte proprietà notevolissime, che li assimilano in certo modo alle derivate, le principali delle quali trovansi dimostrate nei due ultimi lunghi capitoli dei detti miei *Fondamenti ecc.* Fra queste proprietà ci è quella del § 198, a pag. 280 per la quale *se uno di essi, per es.* λ_x, *è sempre numericamente inferiore a un numero finito, ed è atto alla integrazione fra* α e β, *lo stesso avverrà degli altri estremi oscillatorii* Λ_x, λ'_x e Λ'_x, *e i loro integrali fra* α e x, *con* x *compreso fra* α e β *(gli estremi inclusi), saranno tutti uguali fra loro e alla differenza* $\varphi(x)-\varphi(\alpha)$; *cioè sarà*

$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^x \lambda_x\,dx=\int_\alpha^x \Lambda_x\,dx=\int_\alpha^x \lambda'_x\,dx=\int_\alpha^x \Lambda'_x\,dx\;;$$

per modo che le differenze di due qualunque di questi estremi oscillatorii, per es. $\Lambda_x-\lambda_x$, costituiranno funzioni d'integrale nullo, ecc.

Questo teorema estende immensamente e completa quello del testo.

Ai detti numeri furono dati dopo anche altri nomi. In particolare il LEBESGUE nel suo libro *Leçons sur l'intégration etc.* (Paris, Gauthier-Villars 1904) a pag. 67, li ha chiamati *numeri derivati inferiori e superiori a destra o a sinistra.*

limite che per essa si richiede, sarebbe il più naturale a seguirsi, perchè esso fa dipendere la ricerca dell'integrale definito di una funzione da operazioni da farsi sulla funzione stessa.

Questo metodo però in ogni caso ci dà, se non altro, il modo di avere valori approssimati quanto si vuole dell'integrale, § 7-8.° [pag. 20 e seg.].

Faremo anche osservare che la proprietà data al § 9 [pag. 31 e seg.] è quella che ordinariamente si prende nei trattati come punto di partenza per la definizione e per lo studio degli integrali definiti e che si usa, come testè dicemmo, pel calcolo di questi integrali, limitandosi (come si fa in tutti i trattati) dapprima alle funzioni continue, e passando in seguito a quelle che hanno un numero finito di discontinuità; e si dà poi invece come proprietà degli integrali definiti medesimi, sempre colla stessa limitazione, quella che noi abbiamo presa per loro definizione (*).

Con tale definizione l'integrale definito $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ viene ad essere considerato sotto un punto di vista alquanto differente da quello da cui noi siamo partiti; però allora gli integrali vengono limitati alle classi di funzioni continue totalmente o generalmente, e si ha l'inconveniente che, nonostante questa limitazione, l'esistenza degli integrali non viene rigorosamente dimostrata per ogni caso; non potendo, almeno in generale, considerarsi come rigorose e complete le dimostrazioni che si trovano nei varii trattati.

Invece colla definizione dalla quale siamo partiti non solo viene messa fuori di dubbio l'esistenza degli integrali nel caso generale, ma si ha inoltre il vantaggio che la integrazione viene ad applicarsi naturalmente (cioè come conseguenza della definizione stessa) a classi grandemente più estese di funzioni, che possono anche avere infiniti punti di discontinuità in ogni porzione dell'intervallo dato, e i cui valori possono anche mutarsi in infiniti punti, sempre in qualsiasi porzione dell'intervallo, senza che l'integrale resti alterato; per modo quindi che le funzioni stesse in questi infiniti punti possono anche non essere neppure date, e venire determinate nei punti stessi attri-

---

(*) Bisogna non dimenticare che, salvo qualche mutamento di forma qua e là, il testo riproduce sempre quello autografato del 1877, riservando le modificazioni o aggiunte alle note, o indicandole espressamente quando siano intercalate nel testo.

Così, avendo ora trovato opportuno, per giustificare subito il nostro punto di partenza pel *Calcolo integrale,* di aggiungere la nota della pag. 3 e seg., non apparirà strano che nelle considerazioni di questo § 11 se ne ritrovino alcune di quelle contenute nella detta nota; nè si troverà strano quello che qui si dice sui trattati di Calcolo, che naturalmente si riferisce a quelli che ci erano allora, ecc.

buendo loro dei valori che potranno scegliersi da noi, e per la scelta dei quali rimarrà sempre una grande arbitrarietà.

È per tutte queste considerazioni che abbiamo trovato meglio di partire dalla definizione degli integrali definiti che abbiamo data, definizione che propriamente deve attribuirsi a Riemann, per quanto di essa si trovino traccie anche nei lavori di altri analisti e segnatamente in quelli di Cauchy e di Dirichlet.

Ora però che con questa definizione siamo giunti a trovare come proprietà degli integrali definiti delle funzioni continue quella che ordinariamente si prende come loro definizione, quando (come il più spesso avverrà) i nostri studî si riferiranno a questa classe di funzioni, ci serviremo noi pure di questa proprietà per la ricerca e per lo studio degli integrali $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ delle funzioni medesime, considerandoli allora anche noi sotto il punto di vista dal quale più comunemente si considerano, quello cioè di essere la differenza dei valori che prendono agli estremi α e x dell'intervallo d'integrazione le funzioni che colla derivazione riproducono la funzione da integrarsi $f(x)$, ...

II.

Integrali indefiniti

12. — Quando una funzione $f(x)$ è finita e atta alla integrazione in un intervallo dato finito, ma che può essere anche arbitrariamente grande, l'integrale definito $\int_\alpha^x f(x)\,dx$, dove i limiti α e x fanno parte dell'intervallo e il limite superiore x è variabile, rappresenta una funzione perfettamente determinata $F(x)$ di x che è sempre finita e continua e che in ogni punto x dove $f(x)$ è continua ha per derivata appunto $f(x)$ (§ 8 [pag. 28 e seg.]).

Variando il limite inferiore α e riducendolo ad α', col lasciarlo però sempre compreso nell'intervallo nel quale la funzione data $f(x)$ è atta alla integrazione, l'integrale diverrà $\int_{\alpha'}^x f(x)\,dx$, e sarà aumentato della quantità costante $\int_{\alpha'}^\alpha f(x)\,dx$ (§ 7. 2.° [pag. 16]); dunque la funzione $F(x)+\int_{\alpha'}^\alpha f(x)\,dx$ sarà essa pure un integrale di $f(x)$ preso fra limiti convenienti, e si vede perciò che esistono infinite funzioni finite e continue di x tutte differenti l'una dall'altra di quantità costanti, che possono riguardarsi come integrali definiti di $f(x)$ presi da un limite inferiore opportunamente scelto al limite superiore x.

Una qualunque $\varphi(x)$ di queste funzioni, e anche più in generale *qualsiasi funzione che proviene dall'aggiungere una costante arbitraria reale o immaginaria ad un integrale definito di* $f(x)$ *di cui il limite superiore è* x, *si chiama integrale indefinito* di $f(x)$ o semplicemente *integrale* e si usa allora di scrivere

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C \qquad \text{(con C costante)},$$

senza segnare alcun limite all'integrale.

Conoscendo poi un integrale indefinito $\varphi(x)$ di $f(x)$, per passare da esso a un integrale definito $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ o $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, per tutti gli intervalli (α, x) o (α, β) nei quali $f(x)$ è finita e atta alla integrazione, si osserverà che l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ corrisponderà sempre ad un valore particolare della costante; e quindi, se C è questo valore particolare, avendosi allora $\int_\alpha^x f(x)\,dx = \varphi(x) + \mathrm{C}$, il secondo membro dovrà annullarsi per $x = \alpha$, e perciò sarà $\mathrm{C} = -\varphi(\alpha)$ e si avrà

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(\alpha)\,; \tag{1}$$

come similmente si avrà

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\ ;$$

ciò che ci mostra che l'integrale fra α e x o fra α e β si ottiene da un integrale indefinito qualunque $\varphi(x)$ ponendovi per x i limiti superiore e inferiore dell'integrale e sottraendo il secondo di questi resultati dal primo, purchè però, almeno nell'intervallo dal primo limite al secondo, l'integrale indefinito $\varphi(x)$ sia sempre finito e continuo.

E se $\varphi(x)$ è l'integrale indefinito di $f(x)$, l'integrale definito di $f(x)$ fra α e β si indica spesso colla notazione $[\varphi(x)]_\alpha^\beta$.

E dividendo l'integrale definito trovato $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ per l'intervallo $\beta - \alpha$ si avrà quello che si chiama *il valore medio di* $f(x)$ nello stesso intervallo (§. 7, 7.° [pag. 20]).

È evidente poi per le considerazioni fin qui svolte, che per la somma algebrica di un numero finito di funzioni finite e atte alla integrazione in un dato intervallo *l'integrale indefinito sarà la somma algebrica degli integrali indefiniti delle singole funzioni, cioè sarà*

$$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\,dx\,;$$

e così pure si avrà

$$\int c\,f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx\,,$$

essendo c una costante, ecc.

13. Limitandoci al caso che più comunemente si presenta, quello cioè in cui la funzione da integrarsi $f(x)$ è sempre finita e continua nello intervallo nel quale si considera, la derivata di un integrale indefinito qualsiasi $\varphi(x)$, per la definizione che abbiamo data di questo integrale e per quanto dicemmo al § 8.° [pag. 28 e seg.], è la funzione data $f(x)$, ed il suo differenziale è $f(x)\,dx$.

Viceversa se $\varphi(x)$ è una funzione finita e continua la cui derivata è $f(x)$ o il cui differenziale è $f(x)dx$, siccome gli integrali definiti non potranno differire da $\varphi(x)$ che per una costante, basterà aggiungere a $\varphi(x)$ una costante arbitraria per ridurla ad essere un integrale indefinito; quindi, per le funzioni *$f(x)$ sempre finite e continue* negli intervalli nei quali si considerano, *gli integrali indefiniti $\varphi(x)$ si presentano ora anche come le funzioni la cui derivata è la stessa $f(x)$ o il cui differenziale è $f(x)dx$*; e conseguentemente per trovarli basterà trovare queste funzioni la cui derivata è $f(x)$ o il cui differenziale è $f(x)\,dx$, o trovarne una e poi aggiungervi una costante arbitraria C.

Si ritorna così alla definizione che ordinariamente si dà degli integrali indefiniti nei trattati; e a questa noi pure ci atterremo d'ora innanzi in queste lezioni.

Trovato poi col processo che viene naturalmente da questa definizione l'integrale indefinito $\varphi(x)$ di $f(x)$, si potrà sempre procedere alla determinazione degli integrali definiti fra limiti qualunque α e β fra i quali $\varphi(x)$ è sempre finita e continua, prendendo per essi la differenza $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

E infine, come notammo anche sopra in generale, per quanto si disse al § 7, 7.° [pag. 20] si vede anche che, trovato con questo processo l'integrale definito $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ di $f(x)$ fra α e β, basterà dividerlo per l'intervallo $\beta - \alpha$ per avere quello che si chiama *valor medio di* $f(x)$ nello stesso intervallo; talchè per tutte queste ricerche basterà il più spesso occuparsi degli integrali indefiniti soltanto.

14. — Fondandosi sulle considerazioni qui indicate si trovano subito gli integrali indefiniti delle varie funzioni semplici.

Ricordando infatti che si hanno le formole seguenti

$$
(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dx^{n+1}}{n+1} = x^n dx, \text{ per } n \text{ diverso da } -1 \text{ e } x \text{ reale e tale che } x^n \text{ sia reale e finito,} \\[2ex]
d\log x = \dfrac{dx}{x}, \quad de^x = e^x dx, \quad \dfrac{de^{\lambda x}}{\lambda} = e^{\lambda x} dx \quad (\text{con } \lambda \text{ costante}), \\[2ex]
d\,\mathrm{sen}\, x = \cos x\, dx, \quad d\cos x = -\mathrm{sen}\, x\, dx, \quad d\,\mathrm{tang}\, x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, \quad d\cot x = -\dfrac{dx}{\mathrm{sen}^2 x} \\[2ex]
d\,\mathrm{senh}\, x = \cosh x, \quad d\cosh x = \mathrm{senh}\, x, \quad d\,\mathrm{tangh}\, x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \ d\coth x = -\dfrac{1}{\mathrm{senh}^2 x}, \\[2ex]
d\,\mathrm{arc\,sen}\, x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,\mathrm{arc\,cos}\, x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,\mathrm{arc\,tang}\, x = \dfrac{dx}{1+x^2}, \ldots \\[2ex]
d(2 \text{ sett senh } x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \ldots,
\end{array}\right.
$$

si conclude subito che

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ per } n \text{ diverso da } -1 \text{ ecc.}, \int dx = x + C, \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \ldots, \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C \ (\text{con } \lambda \text{ costante}), \\[2ex]
\displaystyle\int \cos x dx = \mathrm{sen}\, x + C, \int \mathrm{sen}\, x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\, x + C, \ldots, \\[2ex]
\displaystyle\int \cosh x\, dx = \mathrm{senh}\, x + C, \int \mathrm{senh}\, x\, dx = \cosh x + C, \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \mathrm{tangh}\, x + C, \ldots, \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc\,sen}\, x + C, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{arc\,cos}\, x + C, \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tang}\, x + C, \\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2 \text{ sett senh } x + C, \ldots\ldots,
\end{array}\right.
$$

e da queste si hanno subito anche gli integrali definiti e i valori medii delle funzioni che compariscono sotto i segni integrali negli intervalli nei quali esse si mantengono finite; con questo però che nel caso degli integrali definiti

o dei valori medii che introducono le funzioni circolari inverse $\mathrm{arc\,sen}\, x$, $\mathrm{arc\,tang}\, x, \ldots$ conviene servirsi soltanto di quelli fra i valori di queste funzioni che si succedono con continuità, ecc.

In particolare i valori medii di x^n, con n positivo, di e^x e di $\dfrac{1}{1+x^2}$ fra 0 e 1 sono respettivamente $\dfrac{1}{n+1}$, $e-1$, e $\dfrac{\pi}{4}$; quello di $\dfrac{1}{x}$ fra 1 e 2 è $\log 2$, quelli di $\mathrm{sen}\, x$ e $\cos x$ fra 0 e $\dfrac{\pi}{2}$ sono ambedue uguali a $\dfrac{\pi}{2}$, quello di $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ fra 0 e $\dfrac{\pi}{4}$ è $\dfrac{4}{\pi}$, quello di $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fra 0 e $\dfrac{1}{2}$ è $\dfrac{\pi}{3}$, ecc.

15. — Siccome poi le formole differenziali (2) restano le stesse anche se x invece di essere la variabile indipendente è una funzione di una variabile indipendente t finita e continua insieme alla derivata prima, gli integrali precedenti (3) valgono tanto che in essi x sia la variabile indipendente, tanto che sia una funzione di una variabile indipendente t finita e continua insieme alla sua derivata prima.

E così intesi, essi sono gli integrali semplici ai quali, come agli altri che per mezzo di essi verranno via via successivamente determinati, con *scomposizioni,* per mezzo del teorema sugli integrali delle somme algebriche, e con opportune trasformazioni ed opportuni artifizî si cerca di ridurre gli altri integrali che vogliono calcolarsi.

Così per es. volendo calcolare gli integrali $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}\, x}, \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{1+\cos x}$, $\displaystyle\int \cos^2 x dx, \int \cos^3 x dx, \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}, \int \frac{dx}{1-x^2}$, si osserverà prima che

$$
\frac{dx}{\mathrm{sen}\, x} = \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}}\,\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}},
$$

$$
\frac{dx}{\cos x} = -\frac{dx}{\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{d\,\mathrm{tang}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tang}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},
$$

$$
\frac{dx}{1+\cos x} = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}, \quad \cos^2 x dx = \frac{\cos 2x - 1}{2} dx = d\,\frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4} - d\,\frac{x}{2},
$$

$$
\cos^3 x\, dx = \cos x\,(1-\mathrm{sen}^2 x)\, dx = \cos x\, dx - \mathrm{sen}^2 x\, d\,\mathrm{sen}\, x, \quad \frac{x^2}{1+x^2} dx = dx - \frac{dx}{1+x^2},
$$

$$
\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{d(1+x)}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{d(1-x)}{1-x},
$$

e quindi valendoci delle formole precedenti (3) si troveranno le altre

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C, \int \frac{dx}{\cos x} = -\log \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C = \log \cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C, \int \cos^2 x\, dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{2} + C, \int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arc tg} x + C, \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x) + C = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C,$$

e da queste si troveranno al solito modo gli integrali definiti e i valori medii delle funzioni corrispondenti.

16. — La riduzione degli integrali a integrali semplici, o almeno a integrali noti, è sovente assai laboriosa, dovendo il più spesso procedere con tentativi o artifizî che la pratica sola suggerisce.

Oltre però al processo d'*integrazione per scomposizione* al quale abbiamo già accennato, si hanno altri tre metodi generali di integrazione che spesso riescono utilissimi, il metodo cioè d'integrazione per parti, quello d'integrazione per sostituzione, e quello d'integrazione per serie; e noi esporremo subito i due primi limitamente per ora alle funzioni finite e continue, riservandoci di esporre in seguito anche il metodo di integrazione per serie.

17. — Il metodo di integrazione per parti è fondato sulla formola che dà il differenziale del prodotto di due funzioni.

Siano u e v due funzioni di x finite e continue insieme alle loro derivate prime in tutto un intervallo del quale fa parte quello d'integrazione.

Si avrà $d(uv) = udv + vdu = uv'dx + vu'dx$, e perciò sarà

$$\int udv = uv - \int vdu, \text{ ovvero } \int uv'dx = uv - \int vu'dx;$$

talchè si può concludere che *quando una espressione differenziale da integrarsi $f(x)dx$ viene scomposta in due fattori, l'uno finito u, e l'altro differenziale $v'dx$ o dv, l'integrale indefinito della stessa espressione sarà uguale al fattore finito u moltiplicato per l'integrale del fattore differenziale $v'dx$ o dv, diminuito (questo prodotto) dell'integrale dell'integrale trovato v moltiplicato pel differenziale $u'dx$ o du dell'altro fattore.*

Il metodo d'integrazione che risulta da questo teorema è quello appunto che dicesi di *integrazione per parti*, e in esso si suppone che almeno nell'intervallo del quale fa parte quello d'integrazione le funzioni u, v, u', v' che

figurano nell'enunciato del teorema siano finite e continue; ma vedremo in seguito che questa restrizione può togliersi almeno in grandissima parte (*).

Si deve poi notare che la scomposizione dell'espressione differenziale data in fattori può farsi evidentemente in infiniti modi, e fra questi per applicare il metodo di integrazione per parti si sceglierà sempre quello che tornerà più vantaggioso.

Si deve poi aggiungere che l'integrale v che primo si determina nel metodo d'integrazione per parti può avere in sè una costante arbitraria qualsiasi, ma ciò evidentemente non porta differenza nei resultati finali perchè il termine Cu che nella formola data verrebbe aggiunto al prodotto uv quando v si mutasse per l'aggiunta di una costante C sparirebbe poi calcolando l'integrale $\int vdu$.

E in quanto agli integrali definiti fra α e β si avrà sempre evidentemente

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta uv'dx = (uv)_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta vu'dx,$$

essendo $(uv)_\alpha^\beta = (uv)_\beta - (uv)_\alpha$.

18. — Si intende subito come il metodo di integrazione per parti possa essere utile pel calcolo degli integrali, riducendosi per esso il calcolo di un integrale a quello di un altro che talvolta sarà conosciuto o sarà più facilmente calcolabile, o che, se anche non saprà calcolarsi, spesso avrà una forma più semplice per la quale più facilmente si potranno avere per approssimazione i suoi integrali definiti.

Per mostrare ciò con qualche esempio prenderemo a determinare gli integrali $\int \log x\, dx$, $\int x^m \log x\, dx$, $\int x \cos x\, dx$, $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Prendendo nel primo integrale $\log x$ come fattore finito e dx come fattore differenziale, e applicando il metodo d'integrazione per parti, si trova subito

(5) $$\int \log x\, dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C.$$

Pel secondo integrale prendendo ancora $\log x$ come fattore finito e $x^m dx$

(*) Nei miei *Fondamenti ecc.*, al § 265 [pag. 363 e seg.], partendo dalla definizione che qui abbiamo data al § 1 per gli integrali definiti, il metodo d'integrazione per parti viene dimostrato per casi molto più estesi colla introduzione degli estremi oscillatorii dei quali parlammo in nota alle pag. 33 e 34.

come fattore differenziale, si trova

$$(6)\quad \int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \mathrm{C}.$$

Pel terzo e pel quarto integrale poi, prendendo x per fattore finito e $\cos x\, dx$ o $\operatorname{sen} x\, dx$ per fattore differenziale, si trova subito

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int x\cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + \mathrm{C}\,,\\ &\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + \mathrm{C}\,;\end{aligned}\right.$$

e così col metodo d'integrazione per parti abbiamo potuto trovare facilmente gli integrali che si cercavano.

19. — Talvolta poi applicando una prima volta la integrazione per parti non si giunge subito a fare dipendere l'integrale che si cerca da un integrale noto o che può facilmente determinarsi, ma vi si giunge poi applicando di nuovo lo stesso processo una o più volte di seguito. Tal'altra invece dopo qualche trasformazione l'integrale da cui viene a dipendere quello che si cerca si riduce nuovamente a questo, e allora si riesce pure a determinarlo col risolvere un'equazione di primo grado.

Così per es. se si vuole l'integrale $\int x^3 \cos x\, dx$, con una prima integrazione per parti, prendendo x^3 per fattore finito, si trova

$$\int x^3 \cos x\, dx = x^3 \operatorname{sen} x - 3\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx\,,$$

e si cade così nell'integrale $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$ che noi non conosciamo ancora; ma applicando anche a questo l'integrazione per parti si trova

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

e si cade così nell'integrale $\int x\cos x\, dx$ che già abbiamo determinato; talchè si può dire che

$$\int x^3\cos x\, dx = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2\cos x - 6x\operatorname{sen} x - 6\cos x + \mathrm{C}\,,$$

e si ha così l'integrale cercato $\int x^3 \cos x\, dx$.

Volendo invece l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$, si osserverà che colla integrazione per parti, prendendo $\sqrt{1+x^2}$ come fattore finito, si ha

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

e siccome si può scrivere

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{(1+x^2-1)\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \sqrt{1+x^2}\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \sqrt{1+x^2}\, dx - 2\ \text{sett. senh}\, x\,,$$

sostituendo si trova

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx + 2\ \text{sett. senh}\, x\,,$$

e di qui si ha per l'integrale richiesto

$$(8)\quad \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \text{sett. senh}\, x + \mathrm{C}\,.$$

Similmente osservando che colla integrazione per parti si ha

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

mentre

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \sqrt{1-x^2}\, dx + \operatorname{arc\,sen} x\,,$$

si trova subito che

$$(9)\quad \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \mathrm{C}\,.$$

20. (*) — Merita poi di essere notato che, quand'anche colla integrazione per parti applicata una o più volte di seguito non si riesca a determinare l'integrale che si cerca, può ciò nonostante la stessa integrazione riuscire spesso ancora assai utile.

(*) Questo paragrafo non figura nelle lezioni autografate del 1877.

In questi casi infatti l'integrale cercato verrà a dipendere da un altro integrale, e potrà darsi che questo ultimo metta meglio in evidenza certe particolarità che dal primo integrale non apparivano; come potrà darsi che di esso, quando i calcoli si facciano per determinare un integrale definito, si possano trovare con maggiore facilità valori approssimati, coi quali si avranno evidentemente anche valori approssimati dell'integrale definito cercato; il che, specialmente per la pratica, potrà tornare molto vantaggioso.

Per dare un esempio semplice di questo caso, si supponga di avere da determinare un valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta x^a (b+x)^c dx$ dove a, b, c sono numeri positivi e a e c sono frazionari, e si ha per es. $0 \leq \alpha < \beta$.

Con k integrazioni per parti successive applicate all'integrale indefinito $\int x^a (b+x)^c dx$ si trovano le formole seguenti

$$\int x^a (b+x)^c dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (b+x)^c - \frac{c}{a+1} \int x^{a+1} (b+x)^{c-1} dx,$$

$$\int x^{a+1} (b+x)^{c-1} dx = \frac{1}{a+2} x^{a+2} (b+x)^{c-1} - \frac{c-1}{a+2} \int x^{a+2} (b+x)^{c-2} dx,$$

. . . .

$$\int x^{a+k-1} (b+x)^{c-k+1} dx = \frac{1}{a+k} x^{a+k} (b+x)^{c-k+1} - \frac{c-k+1}{a+k} \int x^{a+k} (b+x)^{c-k} dx,$$

le quali conducono all'altra

$$\int x^a (b+x)^c dx - \frac{1}{a+1} x^{a+1} (b+x)^c - \frac{c}{(a+1)(a+2)} x^{a+2} (b+x)^{c-1} + \frac{c(c-1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} x^{a+3} (b+x)^{c-2} - \ldots \mp$$

$$\mp \frac{c(c-1)\ldots(c-k+2)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)} x^{a+k} (b+x)^{c-k+1} \pm \frac{c(c-1)\ldots(c-k+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)} \int x^{a+k} (b+x)^{c-k} dx;$$

e con questa, la determinazione dell'integrale $\int_\alpha^\beta x^a (b+x)^c dx$ viene a dipendere da quella dell'integrale $\int_\alpha^\beta x^{a+k} (b+x)^{c-k} dx$, gli altri termini di questa formola risultando tutti perfettamente conosciuti.

Ora evidentemente dopo un certo numero k d'integrazioni per parti l'esponente $c-k$ del fattore $b+x$, che non è mai inferiore a $b+\alpha$, diverrà negativo, e lo stesso avverrà se si aumenterà ancora il numero delle integrazioni; e allora in tutto il corso della integrazione da α a β la funzione sotto l'ultimo integrale non sarà mai superiore a $\frac{x^{a+k}}{(b+\alpha)^{k-c}}$.

Segue da ciò, per quanto si disse al § 7 in fine della osservazione 9.ª a pag. 23, che l'integrale stesso sarà inferiore all'altro $\frac{1}{(b+\alpha)^{k-c}} \int_\alpha^\beta x^{a+k} dx$, cioè a $\frac{\beta^{a+k+1} - \alpha^{a+k+1}}{(a+k+1)(b+\alpha)^{k-c}}$, e il valore assoluto dell'ultimo integrale della formola precedente sarà inferiore a quello della espressione

$$(10) \qquad \frac{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-k+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+k+1)} \frac{\beta^{a+k+1} - \alpha^{a+k+1}}{(b+\alpha)^{k-c}};$$

e quindi, ove questo valore assoluto risulti effettivamente molto piccolo, il detto ultimo integrale, a seconda della approssimazione che si richiederà, potrà anche essere trascurato senz'altro, e l'integrale definito cercato, entro i limiti di questa approssimazione, si potrà riguardare come perfettamente conosciuto per mezzo dei termini finiti già determinati.

Spesso poi l'approssimazione potrà rendersi anche maggiore facendo un maggior numero d'integrazioni per parti successive.

Così supponendo $\alpha = 0$, cioè considerando l'integrale $\int_0^\beta x^a (b+x)^c dx$, si vede che la espressione (10) diviene $\frac{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-k+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+k+1)} \frac{\beta^{a+k+1}}{b^{k-c}}$, e quindi nel passare da un valore k_0 che supporremo già maggiore di c al successivo k_0+1, cioè col fare un'altra integrazione per parti, alla espressione stessa si verrà ad aggiungere in valore assoluto il fattore $\frac{k_0-c}{a+k_0+2} \frac{\beta}{b}$, o $\frac{1-\frac{c}{k_0}}{1+\frac{a+2}{k_0}} \frac{\beta}{b}$ che, quando sia $\beta \leq b$, sarà sempre inferiore a uno, per modo che col crescere del numero delle integrazioni successive l'approssimazione andrà sempre aumentando.

Preso così ad esempio l'integrale $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} (2+x)^{\frac{14}{5}} dx$, che corrisponde ad $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$, $c = \frac{14}{5}$, $\beta = 1$, e supposto $k_0 = 3$, cioè dopo tre integrazioni per parti, l'espressione (10), che serve a dare il grado di approssimazione che si ha fermandosi ai termini calcolati con tre integrazioni per parti successive, sarà $\frac{14\,.\,9\,.\,4}{4\,.\,7\,.\,10\,.\,13}\,\frac{3^4}{5^3}\,\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ e sarà inferiore a 0, 09.

Dopo un'altra integrazione questo numero dovrà moltiplicarsi per $\frac{1-\frac{14}{15}}{1+\frac{7}{9}}\,\frac{1}{2}$ cioè per $\frac{3}{160}$ e quindi verrà inferiore a 0,0017; e facendo ancora una integrazione questo numero dovrà moltiplicarsi per $\frac{1-\frac{14}{20}}{1+\frac{7}{12}}\,\frac{1}{2}$ cioè per $\frac{9}{95}$ e quindi sarà inferiore a 0,0001612, e con un'altra integrazione risulterà inferiore a 0,0000242, e così continuando si ridurrà piccolo quanto si vuole, per il chè tenendo conto dei termini che verranno successivamente calcolati giungeremo ad avere il valore dell'integrale cercato $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}(2+x)^{\frac{14}{5}}dx$ con tutto quel grado di approssimazione che si vorrà; e gli errori che successivamente si commetteranno saranno alternativamente per eccesso e per difetto.

21. — Passiamo ora a parlare del metodo d'integrazione per sostituzione. Questo metodo si riduce in sostanza a trasformare l'espressione differenziale da integrarsi in un'altra facendo un cangiamento di variabile indipendente.

Sia perciò da trovarsi un integrale $\int f(x)\,dx$ pei valori di x compresi in un intervallo nel quale $f(x)$ è finita e continua, e sia $\varphi(x)$ questo integrale indefinito ignoto.

Si ponga $x = x(t)$, essendo $x(t)$ una funzione di t finita e continua insieme alla sua derivata prima in un dato intervallo pei punti del quale i suoi valori $x(t)$ vengono a cadere in tutto o parte dell'intervallo relativo ad x nel quale si considera $f(x)$; l'integrale ignoto $\varphi(x)$ diverrà una funzione $\varphi[x(t)]$ di t il cui differenziale sarà $f(x)x'(t)\,dt$ o $f[x(t)]\,x'(t)\,dt$; e siccome la funzione di t $f[x(t)]\,x'(t)$ per le nostre ipotesi viene ad essere finita e continua in un certo intervallo, essa sarà pure atta alla integrazione in questo intervallo.

Esisterà quindi una funzione $\psi(t)$ il cui differenziale sarà $f[x(t)]\,x'(t)\,dt$, e questa funzione $\psi(t)$ non potrà differire da $\varphi[x(t)]$ altro che per una quantità costante, talchè si avrà

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=x(t)} = \int f[x(t)]\,x'(t)\,dt + C = \psi(t) + C,$$

e ora determinando t in funzione di x per mezzo della relazione $x = x(t)$, e sostituendo in $\psi(t)$ si troverà la funzione $\varphi(x)$ di x che rappresenta l'integrale cercato $\int f(x)\,dx$.

Si ha dunque così un altro processo per calcolare in molti casi gli integrali, riducendoli ad altri che possono talvolta esser noti o possono più facilmente determinarsi, come si ha pure un metodo di trasformazione degli integrali che può spesso essere utile. Questo metodo che, come quello di integrazione per parti, è di continua applicazione, è detto d'*integrazione per sostituzione*.

Si deve però notare che quando calcolato $\psi(t)$ si vuole esprimerlo per x come abbiamo detto sopra, bisogna avere ben riguardo ai varî valori che possono venire per t dalla risoluzione dell'equazione $x = x(t)$, onde non cadere in equivoci nel valore da prendersi per sostituirlo in $\psi(t)$, e nella determinazione degli integrali definiti.

22. — Quando però si sappia che in un certo intervallo col crescere di t la funzione trasformatrice $x(t)$ si mantiene sempre crescente o sempre decrescente, in modo che mentre t percorre l'intervallo stesso (t_α, t_β) la $x(t)$ o x percorra una volta sola l'intervallo (α, β) senza ripassare cioè più volte per uno stesso valore, allora, almeno in quell'intervallo, ad ogni valore di t corrisponderà un solo valore di x e viceversa, e la funzione $t(x)$ da prendersi risulterà bene determinata.

In questa ipotesi poi quando x e t sono negli intervalli (α, β) e (t_α, t_β) respettivamente, si avrà

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^x f(x)\,dx = \int_{t_\alpha}^t f[x(t)]\,x'(t)\,dt = \psi(t) - \psi(t_\alpha), \\[2ex] \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} f[x(t)]\,x'(t)\,dt = \psi(t_\beta) - \psi(t_\alpha) \end{cases}$$

essendo t_α, t_β, t i valori pei quali viene soddisfatta la relazione $x = x(t)$ quando si danno ad x i valori α, β, x respettivamente.

Lo stesso pure accadrà (quando la funzione $f(x)$ è una funzione bene determinata a un sol valore per tutti i valori di x che si considerano) tutte le volte che, essendo t_α e t_β valori di t pei quali $x(t)$ prende i valori α e β, la funzione $x(t)$ nell'intervallo (t_α, t) o (t_α, t_β) non è sempre crescente o sempre decrescente, ma ha soltanto un numero finito di massimi e minimi senza avere tratti d'invariabilità (*), ciò che si riconoscerà facilmente dall'esame della sua derivata $x'(t)$.

Si supponga infatti per es. che $t=a_1$, $t=a_2,\dots$, $t=a_m$ siano i punti successivi di massimo e minimo della funzione $x(t)$ fra t_α e t_β, ammettendo ancora che per $t=t_\alpha$ si abbia $x=\alpha$ e per $t=t_\beta$ si abbia $x=\beta$.

Allora, supposto per es. $t_\alpha<a_1<a_2<\dots<a_m<t_\beta$, fra t_α e a_1 la funzione $x(t)$ sarà sempre crescente o sempre decrescente, fra a_1 e a_2 sarà sempre decrescente o sempre crescente, ecc.; e quindi indicando con $x_{a_1}, x_{a_2},\dots, x_{a_m}$ i valori di $x(t)$ per $t=a_1$, $t=a_2,\dots$, $t=a_m$, e ponendo $f[x(t)]x'(t)=\mathrm{F}(t)$, si potrà scrivere

$$\int_\alpha^{x_{a_1}} f(x)\,dx=\int_{t_\alpha}^{a_1}\mathrm{F}(t)\,dt\,,\ \int_{x_{a_1}}^{x_{a_2}} f(x)\,dx=\int_{a_1}^{a_2}\mathrm{F}(t)\,dt\,,\dots,\ \int_{x_{a_m}}^{\beta} f(x)\,dx=\int_{a_m}^{t_\beta}\mathrm{F}(t)\,dt;$$

e di qui sommando si troverà ancora (§ 7. 2° [pag. 16])

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\mathrm{F}(t)\,dt=\int_{t_\alpha}^{t_\beta} f[x(t)]\,x'(t)\,dt\,,$$

come nel caso precedente.

Si suppone qui che la funzione $f(x)$, nel caso che alcuni dei numeri $x_{a_1}, x_{a_2},\dots, x_{a_m}$ escano dall'intervallo (α,β) sia data anche fuori di questo intervallo, come si suppone che quando x riprende lo stesso valore altrettanto accada di $f(x)$ (cioè essa sia sempre a un sol valore), altrimenti non sarebbe più rigorosa l'applicazione del teorema del § 7. 2° [pag. 16] che noi abbiamo fatta pei primi membri delle formole precedenti; e così sotto queste ipotesi (che del resto sono quelle che ordinariamente si presentano) potranno sempre applicarsi le formole (11) nelle quali t_α, t_β, t sono valori che si hanno per t dalla relazione trasformatrice $x=x(t)$ quando x ha i valori α, β, x (**).

(*) Questo equivale a dire che l'intervallo da t_α a t_β si può spezzare in un numero finito di tratti in ciascuno dei quali la funzione è sempre crescente o sempre decrescente (Vol. I. Introd. §§ 61 e 62 [pag. LXI e seg.]).

(**) La definizione degli integrali definiti che è stata il punto di partenza dei nostri studî di calcolo integrale al § 1 conduce subito alle formole (11) date sopra per la integrazione per sostituzione, anche nel caso più generale in cui, invece di richiedere che la funzione data e sempre finita $f(x)$ sia continua nell'intervallo (α,β), si richiede soltanto che sia atta alla integrazione; e per la funzione trasformatrice $x(t)$ si richiede ancora che sia finita e continua, e sia sempre crescente o sempre decrescente, o abbia soltanto un numero finito di massimi e minimi, fra i due valori t_α e t_β di t che corrispondono ai valori α e β di x, ma per la sua derivata $x'(t)$ si esige soltanto che sia determinata e finita e atta alla integrazione nell'intervallo (t_α, t_β); senza escludere quindi che $f(x)$ e $x'(t)$ possano anche avere un numero infinito di discontinuità negli intervalli (α,β) e (t_α,t_β) respettivamente.

Supposto infatti dapprima che fra t_α e t_β la funzione $x(t)$ sia sempre crescente o sempre decrescente, si immagini diviso l'intervallo (t_α,t_β) negli intervalli parziali $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s,\dots,\eta_n$ coi punti di divisione $t_1,t_2,\dots,t_{s-1},t_s,\dots,t_{n-1}$. A questa divisione dell'intervallo (t_α,t_β) ne corrisponderà una dell'intervallo dato (α,β) negli intervalli parziali $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_s,\dots,\delta_n$ coi punti di divisione $x_1,x_2,\dots,x_{s-1},x_s,\dots,x_{n-1}$, essendo in generale $x_s=x(t_s)$, per modo che sarà $\delta_s=x(t_s)-x(t_{s-1})=x'(\overline{t_s})\,\eta_s$, essendo $\overline{t_s}$ un valore determinato di t compreso fra t_{s-1} e t_s; e quindi, indicando con $\overline{x_s}$ il valore di x corrispondente al valore $\overline{t_s}$ di t, avremo

$$\sum f(\overline{x_s})\,\delta_s=\sum f[x(\overline{t_s})]\,x'(\overline{t_s})\,\eta_s\,.$$

Si osservi ora che la funzione data $f(x)$ anche ridotta alla funzione $f[x(t)]$ di t risulterà atta alla integrazione nell'intervallo (t_α,t_β) perchè le sue oscillazioni negli intervalli η_s saranno quelle stesse che essa ha negli intervalli corrispondenti δ_s. Si dedurrà da ciò (§ 7, 5.° [pag. 17]) che anche il prodotto $f[x(t)]x'(t)$ sarà atto esso pure alla integrazione fra t_α e t_β; e per questo e perchè $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β si vedrà subito che le due somme che figurano nella formola precedente, all'impiccolire indefinito delle η_s e quindi delle δ_s, avranno rispettivamente per limiti gli integrali $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ e $\int_{t_\alpha}^{t_\beta} f[x(t)]\,x'(t)\,dt$; e questo dimostra appunto la formola (11) nel caso che ora abbiamo considerato.

Le stesse formole poi si estendono colle considerazioni fatte nel testo, anche al caso in cui fra i due valori t_α e t_β di t che corrispondono a quelli α e β di x la funzione $x(t)$ non è sempre crescente o sempre decrescente ma ha un numero finito di massimi e minimi; e con ciò resta dimostrato quanto enunciammo in principio di questa nota.

Nei miei *Fondamenti* poi ai §§ 270 e seg. [pag. 370 e seg.] il processo d'integrazione per sostituzione è esteso anche al caso in cui per la funzione $x(t)$ non si possono considerare altro che gli estremi oscillatorii, supposti atti alla integrazione, ecc.

23. — Talvolta per trasformare l'integrale $\int f(x)\,dx$ invece della relazione $x=x(t)$ è data la sua inversa $t=t(x)$.

Allora si ricaverà dx dalla formola $dt=t'(x)\,dx$, ciò che porta che $t'(x)$ debba supporsi differente da zero per quei valori di x pei quali si considera l'integrale; dopo si esprimerà per t l'espressione $\dfrac{f(x)}{t'(x)}$ valendosi opportunamente della formola data $t=t(x)$; e se $\left[\dfrac{f(x)}{t'(x)}\right]_t$ indicherà questa funzione

$\dfrac{f(x)}{t'(x)}$ espressa per t, si avrà

$$\int f(x)\,dx = \int \left[\frac{f(x)}{t'(x)}\right]_t dt + C,$$

e il calcolo dell'integrale di $f(x)\,dx$ sarà ridotto a quello dell'integrale di $\left[\dfrac{f(x)}{t'(x)}\right]_t dt$.

Nel caso poi che da α a β la funzione $t(x)$ si mantenga sempre crescente o sempre decrescente, ciò che del resto sarà conseguenza della ipotesi che fra α e β la derivata di $t(x)$ sia finita, continua e diversa da zero, si avrà anche

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} \left[\frac{f(x)}{t'(x)}\right]_t dt,$$

cioè i limiti del nuovo integrale si otterranno subito dalla funzione data $t(x)$ ponendovi per x i valori α e β.

Ove però le indicate ipotesi rispetto alla funzione $f(x)$ non si verifichino, occorrerà spezzare l'integrale in più altri pei quali non si abbia più nè l'inconveniente indicato, nè quello che $t'(x)$ si annulli negli intervalli di integrazione ecc. Ma su ciò non è il caso ora di fermarsi.

24. — Per dare qualche esempio anche di questo metodo d'integrazione, prendiamo a determinare gli integrali $\int \dfrac{dx}{1-x^2}$, $\int \dfrac{dx}{x}\sqrt{1+\log x}$, e l'altro $\int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$ quando $b^2-4ac<0$.

Pel primo integrale si porrà $x=\cos t$, e così avendo riguardo alla prima delle (4) si troverà

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = -\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = -\log\operatorname{tang}\frac{t}{2} + C = -\log\frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} + C = -\log\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} + C,$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \tag{13}$$

Pel secondo integrale si porrà $t=1+\log x$ o $x=e^{t-1}$, ed allora avendosi $dt=\dfrac{dx}{x}$ si troverà

$$\int \frac{dx}{x}\sqrt{1+\log x} = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pel terzo integrale infine si porrà $x=\dfrac{1}{2a}\left(-b+t\sqrt{4ac-b^2}\right)$, ciò che darà $ax^2+bx+c=\dfrac{4ac-b^2}{4a}(1+t^2)$, $dx=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dt$, e quindi

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang} t + C,$$

talchè si avrà la formola

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \tag{14}$$

la quale, quando si supponga $a=1$, $c=1$, $b=2\cos\varphi$ con φ diverso da zero e da multipli interi di π, dà subito luogo all'altra

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\operatorname{arc\,tang}\frac{x+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} + C. \tag{15}$$

25. — Similmente potrebbero trovarsi con tutta facilità molti altri integrali, combinando anche per alcuni di essi il metodo d'integrazione per sostituzione con quello d'integrazione per parti. Noteremo anche che le integrazioni che facemmo al § 15 [pag. 41 e seg.] riducendo agli integrali semplici quegli integrali che allora volevamo determinare, non erano in sostanza altro che applicazioni del metodo d'integrazione per sostituzione.

Tutti questi integrali poi conducono coi soliti metodi a integrali definiti e a valori medii, alcuni dei quali sono anche molto notevoli.

Così ad esempio, quando per non avere imbarazzi per la determinazione dei valori da prendersi per l'*arco-tangente* si supponga φ compreso tra 0 e π (0 e π escl.), l'ultima formola ci dà l'altra notevole

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi}, \tag{16}$$

che varrà anche per $\varphi = 0$ quando allora pel rapporto $\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$ si intenda posto il suo limite, cioè 1.

Da questa per $\varphi = \frac{\pi}{3}$ si ha l'altra

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

e per queste formole si vede che i valori medii fra 0 e 1 delle funzioni $\frac{1}{1+2x\cos\varphi+x^2}$ e $\frac{1}{1+x+x^2}$ sono respettivamente $\frac{\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi}$ e $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, quando per la prima di queste funzioni φ sia compreso fra 0 e π (π escluso).

III.

Integrazione delle funzioni razionali

26. — Passiamo ora a dare i metodi speciali che servono per la integrazione delle funzioni che più spesso si presentano nella pratica; e cominciamo perciò dalle funzioni razionali.

Le funzioni razionali si dividono in funzioni razionali intere e in funzioni razionali fratte, e le prime sono sempre somme di un numero finito di termini tutti della forma $A_p x^p$ o $A_p(x-a_p)^p$ dove A_p e a_p sono quantità costanti e p è un numero intero e positivo.

Gli integrali delle funzioni razionali intere sono dunque somme di integrali semplici tutti della forma $A_p\int x^p\,dx$ o $A_p\int(x-a_p)^p\,dx$, e per questi non si ha nessuna difficoltà, talchè basterà che consideriamo le funzioni razionali fratte. E poichè queste ultime si possono sempre ridurre a una parte intera e a una parte fratta $\frac{F(x)}{f(x)}$ nella quale i due termini $F(x)$ e $f(x)$ sono polinomii interi in x primi fra loro e il denominatore è di grado superiore a quello del numeratore, ammettendo fatta questa riduzione, basterà che cerchiamo ora gli integrali delle funzioni $\frac{F(x)}{f(x)}$ nelle quali il grado m di $F(x)$ è minore del grado n di $f(x)$ e il numeratore non ha fattori comuni col denominatore.

Ricordiamo perciò che quando $\frac{F(x)}{f(x)}$ è una funzione come ora abbiamo detto di considerarla, se le radici reali o immaginarie dell'equazione $f(x)=0$ sono $a_1, a_2, a_3 \dots a_p$ e $n_1, n_2 \dots n_p$ sono i loro gradi di moltiplicità respettivi, essendo $n_1+n_2+\dots+n_p=n$, si può sempre porre la funzione $\frac{F(x)}{f(x)}$ sotto la forma

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{F(x)}{f(x)} = \dfrac{B_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \dfrac{B_2}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \dfrac{B_{n_1}}{(x-a_1)} + \\ + \dfrac{C_1}{(x-a_2)^{n_2}} + \dfrac{C_2}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \dfrac{C_{n_2}}{(x-a_2)} + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots + \\ + \dfrac{L_1}{(x-a_p)^{n_p}} + \dfrac{L_2}{(x-a)^{n_p-1}} + \dots + \dfrac{L_{n_p}}{(x-a_p)}, \end{cases}$$

essendo le B, C, ... L quantità costanti alcune delle quali, all'infuori però delle B_1, C_1, ..., L_1, possono anche esser zero (*); quindi quando sarà effettuata la riduzione di $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ sotto questa forma, il suo integrale sarà la somma di un certo numero di integrali semplici tutti della forma $A\int\dfrac{dx}{(x-a)^s}$ dove s è un numero intero e A è una costante.

Questi integrali all'infuori di una costante arbitraria additiva saranno uguali a $-\dfrac{A}{(s-1)(x-a)^{s-1}}$, o ad $A\log(x-a)$ secondochè s è diverso da uno o uguale ad uno, talchè l'integrazione sarà così completamente effettuata, e si può quindi concludere evidentemente che, fatta astrazione dalle difficoltà (dipendenti dall'Algebra e non dal calcolo integrale) che potranno provenire dalla scomposizione della funzione in frazioni semplici, *l'integrazione delle funzioni razionali* (intere o fratte) *può sempre effettuarsi sotto forma finita, e l'integrale è sempre esprimibile per funzioni della stessa specie e per funzioni logaritmiche.*

27. — Si deve però notare che, anche se le funzioni $f(x)$ e $F(x)$ hanno i loro coefficienti reali, le radici dell'equazione $f(x)=0$ possono essere complesse, e allora quando ci si serva del processo precedente per trovare l'integrale $\int\dfrac{F(x)}{f(x)}dx$, le funzioni da integrarsi verranno complicate di immaginari.

Ciò, come è facile a vedersi, non esclude che a queste funzioni possano ancora applicarsi le regole di integrazione delle funzioni reali, nè si avranno per questo eccezioni al resultato precedente; però anche l'integrale verrà complicato di immaginari, e per farli sparire converrà fare su esso opportune trasformazioni consistenti nel riunire i termini che corrispondono alle radici coniugate.

Del resto però in questo caso si può fare uso di un altro modo di decomposizione della funzione $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ pel quale gli immaginari non si presentano più.

Si sa infatti che, se nella equazione $f(x)=0$ vi sono alcune radici immaginarie, la funzione $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ si scomporrà in una parte formata di termini reali come quelli del secondo membro della (1) e corrispondenti alle radici reali di $f(x)=0$, e una parte corrispondente alle radici complesse e formata di termini della forma $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^\mu}$ dove A, B, b, c sono costanti reali, x^2+bx+c è il prodotto dei fattori $(x-a_1)$ e $(x-a_2)$ corrispondenti a due radici immaginarie e coniugate della solita equazione $f(x)=0$, e μ è un numero intero eguale o inferiore al grado di moltiplicità di queste radici (*).

(*) La formola (1) del testo si dimostra ordinariamente in Algebra.

Del resto, osservando che se a è una radice multipla dell'ordine p della equazione $f(x)=0$ si può scrivere $f(x)=(x-a)^p\varphi(x)$ essendo $\varphi(x)$ una funzione che non si annulla per $x=a$, e indicando con k_p una costante da determinarsi, si potrà porre $\dfrac{F(x)}{f(x)}=\dfrac{k_p}{(x-a)^p}+\theta(x)$, essendo $\theta(x)$ un'altra funzione fratta per la quale si avrà $\theta(x)=\dfrac{F(x)-k_p\varphi(x)}{(x-a)^p\varphi(x)}$; e quindi prendendo $k_p=\dfrac{F(a)}{\varphi(a)}$ si vede subito che $F(x)-k_p\varphi(x)$ sarà divisibile per $x-a$, e si avrà $\theta(x)=\dfrac{F_1(x)}{(x-a)^{p-1}\varphi(x)}$, dove $F_1(x)$ sarà una nuova funzione intera che potrà ancora essere divisibile per $x-a$ ma evidentemente non conterrà nessuno degli altri fattori di $\varphi(x)$ perchè, avendosi $F_1(x)=\dfrac{F(x)-k_p\varphi(x)}{x-a}$, se $F_1(x)$ fosse divisibile per un fattore di $\varphi(x)$ che sarebbe diverso da $x-a$ questo fattore dovrebbe dividere anche $F(x)$ mentre noi abbiamo supposto che $F(x)$ sia primo con $f(x)$; e per questa stessa ragione evidentemente il coefficiente trovato k_p sarà diverso da zero.

Eseguita, ove ne sia il caso, la divisione di $F_1(x)$ una o più volte per $x-a$ per trovare i fattori $x-a$ che fossero in $F_1(x)$, si ridurrà subito $\theta(x)$ ad una frazione irriducibile nella quale il denominatore potrà essere ancora divisibile per una potenza di $x-a$, dopo di che col processo precedente si troveranno in $\theta(x)$ i termini della forma $\dfrac{k_q}{(x-a)^q}$ che avranno per divisori potenze di $x-a$ di grado q inferiore a p, e così operando successivamente si giungerà alla formola (1) del testo; e si vede anche che per questa formola si avrà una unica forma perchè i coefficienti k_p risulteranno qui successivamente determinati in un sol modo.

Osservando in particolare che, quando a è radice semplice della equazione $f(x)=0$, dalla formola $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ si ha $f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$, e quindi $f'(a)=\varphi(a)$, si vede subito che i coefficienti k dei termini $\dfrac{k}{x-a}$ corrispondenti alle radici semplici a della $f(x)=0$ sono uguali a $\dfrac{F(a)}{f'(a)}$, e quindi si possono sempre determinare con tutta facilità.

(*) Nel caso che qui si considera della $f(x)=0$ con coefficienti reali e con tutte o alcune radici complesse $\alpha+i\beta$ — e quindi due a due coniugate e dello stesso or-

Allora, oltre ad esservi integrali della forma $\mathrm{A}\int\frac{dx}{(x-a)^s}$ come nel caso precedente, se ne avranno altri della forma $\int\frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})\,dx}{(x^2+bx+c)^\mu}$, talchè basterà che ora ci occupiamo di questi.

Osserviamo perciò che se $\alpha+i\beta$ e $\alpha-i\beta$ sono le due radici della equazione $x^2+bx+c=0$, si ha

$$\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x^2+bx+c)^\mu}=\frac{\mathrm{A}(x-\alpha)+\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu},$$

---

dine di moltiplicità — la scomposizione di $\frac{\mathrm{F}(x)}{\varphi(x)}$ che si ha per mezzo della formola (1) del testo avrà termini complessi e coniugati due a due.

Così in corrispondenza al termine $\frac{\mathrm{L}+i\mathrm{M}}{(x-\alpha-i\beta)^q}$ con L e M costanti, e q numero intero e positivo uguale o inferiore all'ordine p di moltiplicità di $\alpha+i\beta$, vi sarà anche l'altro $\frac{\mathrm{L}-i\mathrm{M}}{(x-\alpha+i\beta)^q}$; e questi termini riuniti condurranno ad uno tutto reale e della forma $\frac{\mathrm{A}_0(x-\alpha)^q+\mathrm{A}_1(x-\alpha)^{q-1}+\dots}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^q}$, con $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots$ costanti reali.

Questo si scomporrà in termini tutti della forma $\frac{\mathrm{A}_{q-r}(x-\alpha)^r}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^q}$ con $r\leq q$; e, poichè quando sia $r\geq 2$ si può scrivere $(x-\alpha)^r=(x-\alpha)^{r-2}\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}-\beta^2(x-\alpha)^{r-2}$, ciascuno degli stessi termini potrà porsi sotto la forma

$$\mathrm{A}_{q-r}\frac{(x-\alpha)^{r-2}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{q-1}}-\mathrm{A}_{q-r}\,\beta^2\frac{(x-\alpha)^{r-2}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^q};$$

e così abbassando successivamente di due unità ogni volta l'esponente di $x-\alpha$ nei numeratori si ridurranno questi esponenti al primo grado o al grado zero, e si giungerà quindi evidentemente alla scomposizione della quale si parla nel testo, cioè in termini della forma $\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^\mu}$ con A e B costanti reali e $\mu\leq q$, per tutta la parte della formola (1) corrispondente alle radici complesse della $f(x)=0$.

Questi termini poi potranno anche trovarsi successivamente con un processo del tutto simile a quello usato nella nota della pagina 56; poichè scrivendo prima $f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^p\varphi_1(x)$, la funzione $\varphi_1(x)$ non si annullerà nè per $x=\alpha+i\beta$ nè per $x=\alpha-i\beta$, e indicando con k_p e l_p costanti da determinarsi, e ponendo

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\varphi(x)}=\frac{k_p x+l_p}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^p}+\theta_1(x),$$

si troveranno subito, colle considerazioni della nota stessa e col fare una volta $x=\alpha+i\beta$ e un'altra $x=\alpha-i\beta$, valori reali e determinati per i coefficienti k_p e l_p per mezzo dei quali la funzione $\theta_1(x)$ verrà ridotta alla forma $\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{p-1}\varphi_1(x)}$, ecc.

e quindi posto $x-\alpha=t$, si ha

$$\int\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{(x^2+bx+c)^\mu}=\mathrm{A}\int\frac{t\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}+(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^\mu},$$

talchè osservando che si ha

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\beta^2)}{(t^2+\beta^2)^\mu},$$

ovvero

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=-\frac{1}{2(\mu-1)(t^2+\beta^2)^{\mu-1}}+\mathrm{C}\qquad\text{per } \mu>1,$$

e per $\mu=1$ si ha

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+\beta^2)}=\frac{1}{2}\log(t^2+\beta^2)+\mathrm{C},$$

si vede che basterà occuparci degli altri integrali, cioè di quelli della forma $\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}$.

Se $\mu=1$ questo integrale si determina subito ed è uguale ad $\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{\beta}+\mathrm{C}$; mentre se $\mu>1$ sarà facile trovare alcune formole di riduzione mediante le quali l'integrale stesso si ridurrà al caso di un esponente inferiore di un'unità e infine al caso di $\mu=1$.

Per questo si osserverà prima che si ha

$$\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{\beta^2\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^{\mu-1}}-\frac{1}{\beta^2}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu};$$

quindi poichè, applicando l'integrazione per parti all'ultimo integrale col prendere t come fattore finito, si ha

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{2}\int t\frac{2t\,dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=-\frac{1}{2(\mu-1)}\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{\mu-1}}+\frac{1}{2(\mu-1)}\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^{\mu-1}},$$

sostituendo nella precedente si troverà la formola

$$\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^\mu}=\frac{1}{2(\mu-1)\beta^2}\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{\mu-1}}+\frac{2\mu-3}{2(\mu-1)\beta^2}\int\frac{dt}{(t^2+\beta^2)^{\mu-1}},$$

colla quale l'integrale corrispondente a μ si esprime per quello corrispondente a $\mu-1$; ed ora l'applicazione ripetuta di questa formola farà sì evidentemente che l'integrale cercato verrà infine a dipendere da quello corrispondente a $\mu = 1$, e così tutte le integrazioni resteranno effettuate (*).

(*) Nella pratica poi artifizii speciali, alcuni dei quali anche assai notevoli potranno condurre a determinare questi come altri integrali.

a) Così ad es. per trovare l'integrale $\int \frac{dt}{(\beta^2+t^2)^\mu}$, con μ, come qui è supposto, numero intero e positivo, si può procedere nel modo seguente.

Si osservi che se c è un numero diverso da zero e positivo si ha come è noto

$$\int \frac{dt}{c+t^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{c}} + \text{cost.},$$

e di qui derivando rispetto a t si ottiene la formola

$$\frac{1}{c+t^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{c}}\right),$$

dalla quale con $\mu - 1$ derivazioni rispetto a c si giunge subito all'altra

$$\frac{(-1)^{\mu-1}\pi(\mu-1)}{(c+t^2)^\mu} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{d^{\mu-1}}{dc^{\mu-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{c}}\right)\right\},$$

che integrata rispetto a t conduce alla seguente

$$\int \frac{dt}{(c+t^2)^\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{\pi(\mu-1)} \frac{d^{\mu-1}}{dc^{\mu-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{c}}\right) + C,$$

nella quale C è una costante arbitraria; e questa, col cambiarvi c in β^2 *dopo avere fatte le derivazioni nel secondo membro*, conduce subito all'integrale cercato $\int \frac{dt}{(\beta^2+t^2)^\mu}$.

In particolare dunque si ha

$$\int \frac{dt^2}{(c+t^2)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dc^2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{c}}\right) + C,$$

ovvero eseguendo le derivazioni

$$\int \frac{dt}{(c+t^2)^3} = \frac{3}{8} c^{-\frac{5}{2}} \operatorname{arc\,tang}\left(tc^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{4} \frac{tc^{-2}}{c+t^2} + \frac{t}{8} c^{-2} \frac{3c+t^2}{(c+t^2)^2} + C,$$

o anche

$$\int \frac{dt}{(c+t^2)^3} = \frac{3}{8} c^{-\frac{5}{2}} \operatorname{arc\,tang}\left(tc^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{3}{8} \frac{t}{c^2(c+t^2)} + \frac{1}{4} \frac{t}{c(c+t^2)^2} + C,$$

e facendo $c = 1$ si trova

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{3}{8} \operatorname{arc\,tang} t + \frac{3}{8} \frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{4} \frac{t}{(1+t^2)^2} + C.$$

Queste integrazioni portano le funzioni arc tang t, o arc tang $\frac{x-\alpha}{\beta}$, talchè si può ora concludere che *l'integrazione delle funzioni razionali reali* quando non si vogliono introdurre nei calcoli altro che quantità reali *si fa sempre per funzioni razionali, logaritmiche e archi tangenti*. Questo resultato è naturalmente d'accordo col precedente del § 26, giacchè è noto che le funzioni logaritmiche di quantità immaginarie si esprimono per funzioni logaritmiche e archi-tangenti di quantità reali.

28. — Per dare qualche esempio, prendiamo a determinare gli integrali $\int \frac{dx}{x(1-x^2)}$, $\int \frac{dx}{1-x^4}$.

Si osserverà perciò che pel primo di questi integrali si ha

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x},$$

con $A = 1$, $A + C - B = 0$, $C + B = 0$, ovvero $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, (*) e si troverà quindi

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = \log x - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x) + C =$$

$$= \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

---

b) Così anche, ad esempio, volendo determinare l'integrale $\int \frac{dx}{x(a+bx)^\mu}$ dove μ è un numero intero, si osserverà che per essere

$$\frac{1}{x(a+bx)^\mu} = \frac{1}{a^\mu x} - \frac{1}{x(a+bx)^\mu}\left\{\left(\frac{a+bx}{a}\right)^\mu - 1\right\}$$

con calcoli semplicissimi si trova la formola

$$\frac{1}{x(a+bx)^\mu} = \frac{1}{a^\mu x} - \frac{b}{a^{\mu+1}}\left\{\frac{a}{a+bx} + \left(\frac{a}{a+bx}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+bx}\right)^3 + \dots + \left(\frac{a}{a+bx}\right)^\mu\right\},$$

e quindi integrando si ottiene subito con facili riduzioni

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^\mu} = \frac{1}{a^\mu} \log \frac{x}{a+bx} + \frac{1}{a^\mu}\left\{\frac{a}{a+bx} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+bx}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+bx}\right)^3 + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu-1}\left(\frac{a}{a+bx}\right)^{\mu-1}\right\} + C.$$

(*) I valori di questi coefficienti A, B, C si trovano subito anche col processo indicato in fine della nota alla pag. 56.

Pel secondo integrale poi si osserverà prima (onde fare la scomposizione in modo semplice) che

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2},$$

e si concluderà quindi che

$$\int\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{4}\log(1+x)-$$

$$-\frac{1}{4}\log(1-x)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}x+C=\log\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}x+C;$$

e così in modo simile si potrebbero trovare altri integrali, e poi si potrebbero avere coi soliti processi integrali definiti e valori medii.

IV.

Integrazione di alcune funzioni irrazionali

Espressioni con radicali monomii o con radicali di una funzione di primo grado.

29. — Alla integrazione delle funzioni razionali si riducono gli integrali delle funzioni irrazionali che contengono soltanto potenze frazionarie della variabile o di una stessa funzione lineare $ax+b$ di questa variabile, quelli che non contengono altri irrazionali che un radicale quadrato di una espressione di primo o di secondo grado o due radicali quadrati di una espressione di primo grado, e quelli di alcuni differenziali della forma $x^m(a+bx^n)^p dx$ (a, b costanti, m, n, p, numeri raz.) conosciuti sotto il nome di differenziali binomi. Noi studieremo ora questi diversi casi.

Incominciamo dal primo caso, e supponiamo perciò che si abbia da integrare una espressione differenziale $f(x)dx$ dove $f(x)$ è una funzione *razionale* di x e di potenze fratte positive o negative $x^{\frac{m}{p}}, x^{\frac{n}{q}} \ldots$ di x.

È evidente che se si pone $x=t^s$, essendo s il prodotto dei denominatori $p, q, \ldots$ delle potenze fratte di x o il loro minimo multiplo, $f(x)$ diverrà una funzione razionale di t, e siccome si avrà $dx=st^{s-1}dt$, l'espressione differenziale data $f(x)dx$ si ridurrà ad una espressione differenziale razionale $\varphi(t)dt$ di t; e quindi si potrà integrare coi processi precedenti, e si esprimerà per funzioni di t razionali, e per archi-tangenti e logaritmi. Trovato poi l'integrale in funzione di t, si otterrà quello cercato in funzione di x ponendovi per t il suo valore $x^{\frac{1}{s}}$.

Se poi $f(x)$ è una funzione razionale di x e di potenze frazionarie di una espressione di primo grado $ax+b$, basterà porre dapprima $ax+b=y$, con che $x=\frac{y-b}{a}$, $dx=\frac{dy}{a}$, e poi applicare il processo che ora abbiamo indicato alla espressione $\varphi(y)dy$ che si otterrà dopo questa sostituzione.

Così per es. se si ha da integrare la espressione differenziale $\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$, si porrà $x=t^6$, e così si troverà

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=6\frac{(t^6-1)t^3}{t+1}dt=6(t^5-t^4+t^3-t^2+t-1)t^3dt\,,$$

e perciò si avrà integrando

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{2}{3}t^9-\frac{3}{4}t^8+\frac{6}{7}t^7-t^6+\frac{6}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+C\,,$$

ovvero

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C\,.$$

Espressioni con un radicale quadrato di una espressione di secondo grado.

30. — Consideriamo ora il caso in cui si abbia da integrare una espressione differenziale della forma $f(x\,,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$, dove f è una funzione *razionale* di x e del radicale $\sqrt{a+bx+cx^2}$, essendo $a\,,b\,,c$ tre costanti — che supporremo reali per avere formole reali — sebbene i risultati valgano anche quando esse sono complesse (*).

Se il coefficiente c sarà zero, il radicale si ridurrà ad un radicale quadrato di una funzione di primo grado $a+bx$, e verrà immediatamente a sparire quando si applichi il metodo d'integrazione per sostituzione ponendo $a+bx=t^2$; e perciò noi supporremo che c sia diverso da zero, e indicheremo i varii metodi di trasformazione che si hanno allora per fare sparire il radicale dalla espressione da integrarsi senza introdurre immaginari.

(*) Si può osservare in modo generale che quando si ha una funzione *razionale* $f(x\,,\sqrt{P})$ di x e di un radicale quadrato di una funzione intera qualsiasi P, evidentemente si potrà sempre ridurre alla forma $\frac{A+B\sqrt{P}}{C+D\sqrt{P}}$ dove $A\,,B\,,C\,,D$ sono funzioni razionali intere di x, e quindi moltiplicando numeratore e denominatore per $C-D\sqrt{P}$ si ridurrà subito anche all'altra $L+M\sqrt{P}$ o $L+\frac{M_1}{\sqrt{P}}$ dove $L\,,M\,,M_1$ sono funzioni razionali (intere o fratte) di x, talchè per l'integrazione, volendolo, basterebbe limitarsi a considerare gli integrali della forma $\int M\sqrt{P}\,dx$ o $\int\frac{M_1}{\sqrt{P}}dx$.

Si osservi perciò che se c è positivo, il coefficiente di x^2 nel radicale potrà ridursi uguale a uno portando fuori del radicale il fattore $\sqrt{c}$, e se c è negativo potrà ridursi lo stesso coefficiente uguale a -1 portando fuori del radicale il fattore $\sqrt{-c}$ (che allora sarà reale), talchè, senza bisogno di introdurre in calcolo quantità immaginarie, basta in ogni caso considerare i radicali della forma $\sqrt{a+bx\pm x^2}$, e cercare le trasformazioni che mentre esprimono razionalmente x per un'altra variabile t fanno sparire il radicale.

a) Incominciando dal caso in cui nel radicale il termine x^2 ha il segno $+$, un primo metodo di trasformazione sarà quello di porre $\sqrt{a+bx+x^2}=x+t$, giacchè quadrando e riducendo sparisce il termine x^2 e resta la relazione razionale in x e di primo grado $a+bx=2xt+t^2$, la quale ci darà le formole seguenti

$$(1)\qquad\begin{cases} x=\dfrac{a-t^2}{2t-b}\,, & \sqrt{a+bx+x^2}=\dfrac{t^2-bt+a}{2t-b}\,,\\[2ex] dx=-\dfrac{2(t^2-bt+a)\,dt}{(2t-b)^2}\,, & \dfrac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=-\dfrac{2\,dt}{2t-b}\,; \end{cases}$$

e queste trasformeranno la espressione data $f(x\,,\sqrt{a+bx+x^2})dx$ in una altra espressione $\varphi(t)\,dt$ che sarà razionale in t e alla quale quindi potranno applicarsi i metodi noti di integrazione.

Trovato poi l'integrale $\psi(t)$ di $\varphi(t)\,dt$, si porrà in esso per t il suo valore $\sqrt{a+bx+x^2}-x$ e si otterrà così l'integrale $\int f(x\,,\sqrt{a+bx+x^2})dx$ in funzione di x.

b) Si ha poi un secondo metodo di trasformazione che (se non si vogliono introdurre gli immaginari) richiede che a sia positivo o nullo; e questo metodo vale tanto pel caso del radicale $\sqrt{a+bx+x^2}$ quanto pel caso dell'altro $\sqrt{a+bx-x^2}$, supposto sempre che non siano zero insieme a e b.

Esso consiste nel porre $\sqrt{a+bx\pm x^2}=\sqrt{a}+xt$, poichè allora quadrando e riducendo si ottiene $b\pm x=2\sqrt{a}\,t+xt^2$, e quindi si hanno le formole

$$(2)\qquad\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{a}\,t-b}{\pm1-t^2}\,, & \sqrt{a+bx\pm x^2}=\dfrac{\sqrt{a}\,t^2-bt\pm\sqrt{a}}{\pm1-t^2}\,,\\[2ex] dx=2\dfrac{\sqrt{a}\,t^2-bt\pm\sqrt{a}}{(\pm1-t^2)^2}dt\,, & \dfrac{dx}{\sqrt{a+bx\pm x^2}}=\dfrac{2\,dt}{\pm1-t^2}\,, \end{cases}$$

le quali rendono evidentemente razionale la nostra espressione differenziale $f(x\,,\sqrt{a+bx\pm x^2})dx$ pel caso di a positivo o nullo, e escluso, come dicemmo sopra, il caso che a e b siano zero insieme. E si può notare che l'escludere il caso di $a=b=0$ non è di alcuno svantaggio, poichè se $a=b=0$ il radicale sparisce subito da sè.

c) Un terzo metodo infine, tanto pel caso del radicale $\sqrt{a+bx+x^2}$ quanto pel caso dell'altro $\sqrt{a+bx-x^2}$, e nell'ipotesi che le radici della equazione $a+bx\pm x^2=0$ siano ambedue reali e diseguali, è il seguente.

S'indichino con α e β le due radici di questa equazione, con che si avrà $a+bx\pm x^2=\pm(x-\alpha)(x-\beta)$, e si ponga $\sqrt{a+bx\pm x^2}=(x-\alpha)t$.

Quadrando e riducendo si troverà la relazione razionale in x e di primo grado $\pm x\mp\beta=(x-\alpha)t^2$; e quindi si avrà

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{\pm\beta-\alpha t^2}{\pm 1-t^2}, & \sqrt{a+bx\pm x^2}=\pm\dfrac{(\beta-\alpha)t}{\pm 1-t^2}, \\[2ex] dx=\pm\dfrac{2(\beta-\alpha)t\,dt}{(\pm 1-t^2)^2}, & \dfrac{dx}{\sqrt{a+bx\pm x^2}}=\dfrac{2\,dt}{\pm 1-t^2}, \end{cases}$$

e queste formole ridurranno evidentemente razionale la nostra espressione differenziale.

Notiamo che nel caso di $\alpha=\beta$, che noi abbiamo escluso perchè renderebbe illusorie queste formole, il radicale non è che apparente, perchè allora $a+bx\pm x^2$ è un quadrato perfetto, e quindi l'indicata esclusione non porta alcuno svantaggio; e oltre a ciò osserviamo che, se x^2 è preceduto dal segno $+$ e a è negativo, come se x^2 è preceduto dal segno $-$ e a è positivo, le radici α e β sono sempre reali e diseguali, e quindi allora il metodo esposto è applicabile certamente e senza bisogno di introdurre immaginarii.

Del resto poi questo metodo vale anche quando α e β sono complesse, e il precedente vale anche quando a è negativo, come in generale questi metodi valgono tutti qualunque siano i coefficienti a, b, c (reali o complessi) purchè non siano tali da portare a formole illusorie; soltanto in certi casi nelle espressioni trasformate vengono a comparire alcune quantità immaginarie.

31. — Applichiamo ora i resultati precedenti ad alcuni esempii.

1.° Si voglia determinare l'integrale $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

a) Supponendo dapprima c positivo si scriverà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}}$$

e poi valendosi del primo metodo di trasformazione, e per conseguenza delle formole (1) dopo avervi cambiato a e b in $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$, si troverà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{2\,dt}{2t-\frac{b}{c}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(2t-\frac{b}{c}\right)+C,$$

ovvero

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(2\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2}-2x-\frac{b}{c}\right)+C,$$

e anche includendo in C una costante

$$(4)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{a+bx+cx^2}-x\sqrt{c}-\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)+C;$$

e si potrebbe anche scrivere

$$(5)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}-\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C,$$

includendo in C una costante immaginaria $-\dfrac{\log(-1)}{\sqrt{c}}$.

Cambiando poi il segno al radicale nei due membri, o anche moltiplicando e dividendo sotto il logaritmo per $\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}\right)+\sqrt{a+bx+cx^2}$ e includendo in C un'altra costante, si trova anche

$$(6)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C.$$

Questa formola vale anche per c negativo, ma allora è complicata di immaginarii e per farli sparire occorreranno opportune trasformazioni.

b) Può aversi però, anche in questo caso di c negativo, una formola scevra d'immaginarii senza stare a fare queste trasformazioni speciali, e ciò quando si supponga che a sia positivo e invece di valersi del primo dei tre metodi di trasformazione che abbiamo dati sopra, ci si valga del secondo.

Per questo, quando c è negativo, si scriverà prima

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\frac{a}{c}-\frac{a}{c}x-x^2}},$$

e poi si applicheranno le formole (2), dopo di avervi cangiato a e b in $-\frac{a}{c}$ e $-\frac{b}{c}$ e si troverà così

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tang} t + C\,,$$

e quindi si avrà la formola

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{-c}\,x} + C\,,$$

da usarsi appunto per l'integrale richiesto nel caso di a positivo e c negativo, perchè in questo caso non si hanno immaginarii.

Se poi c e a sono positivi, valendosi ancora del secondo metodo potremo scrivere per le (2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{1+t}{1-t} + C\,,$$

e quindi si avrà la formola seguente

$$(8) \qquad \int \frac{da}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{x\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{a+bx+cx^2}}{x\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{a+bx+cx^2}} + C\,,$$

che con facili trasformazioni introducendo in C una costante si riduce alle formole (4) e (5).

c) Del resto poi tornando ancora al caso di c negativo si può osservare che in questo caso si ottiene una formola più semplice della (7) facendo direttamente la trasformazione nel modo seguente.

Si osservi che per c negativo si potrà scrivere (senza introdurre immaginarii)

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{-c}\sqrt{-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}x-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{-c}\sqrt{-\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}-\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2}}\,,$$

e quindi ponendo $x+\frac{b}{2c}=t$ e $\frac{b^2-4ac}{4c^2}=m^2$, con supporre che sia $b^2-4ac>0$ perchè m sia reale e diverso da zero, si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \int \frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{m} + C\,,$$

e perciò prendendo $m = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ col radicale preso positivamente perchè m risulti positivo, si avrà la formola seguente

$$(9) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C\,,$$

che suppone c negativo e $b^2-4ac>0$.

d) Tenendo conto ora delle varie formole qui ottenute se ne trovano altre molto interessanti.

Così in particolare supponendo $a=\alpha^2$, $b=2\alpha\cos\varphi$, $c=1$, dalla (6) avremo la formola

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha x\cos\varphi+x^2}} = \log\left(x+\alpha\cos\varphi+\sqrt{\alpha^2+2\alpha x\cos\varphi+x^2}\right)+C\,;$$

e supponendo invece $a=0$, e $c=1$ o $c=-1$ dalle (6) e (9) avremo le altre

$$(11) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(b+x)}} = \log\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{x(b+x)}\right)+C\,,$$

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(b-x)}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x-b}{b}\right)+C\,.$$

2.° Si voglia determinare l'integrale $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

Questo integrale potrebbe trovarsi valendosi dei metodi di trasformazione sopra indicati, però è facile vedere che per a diverso da zero esso si riduce subito ai precedenti cambiando x in $\frac{1}{x}$.

Con questo cambiamento infatti la espressione differenziale che ora si considera $\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$ si muta nell'altra $-\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, e quindi *per a positivo* si ha dalla (6) $\left(\text{cangiandovi ora } a \text{ in } c \text{ e } c \text{ in } a\text{, e } x \text{ in } \frac{1}{x}\right)$

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\right)+C$$

mentre *per a negativo* e $b^2-4ac>0$ si ha dalla (9)

$$(14)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{bx+2a}{x\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C;$$

e supponendo in queste $b=0$ si hanno le formole

$$(15)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+cx^2}}{x}\right) + C,$$

$$(16)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{a}{x\sqrt{-ac}}\right) + C.$$

nella prima delle quali a si suppone positivo, e nella seconda si suppongono a negativo e c positivo.

Nel caso poi di $a=0$ con b diverso da zero, avendosi

$$\frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{b\frac{1}{x}+c}} = -\frac{2}{b}\, d\left(\sqrt{\frac{b}{x}+c}\right),$$

si trova subito

$$(17)\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}} = -\frac{2}{b}\sqrt{\frac{b}{x}+c} + C = \frac{-2\sqrt{bx+cx^2}}{bx} + C.$$

In modo simile, e anche per mezzo di artifizii che la pratica suggerisce, si troverebbero altri integrali.

32. — Supponiamo ora che si abbia da integrare una espressione differenziale che contenga razionalmente due radicali quadrati di funzioni di primo grado $f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'})\,dx$.

Questo caso si ridurrà subito al caso precedente ponendo $ax+b=z^2$ perchè allora il primo radicale verrà a sparire e il secondo si ridurrà a un radicale quadrato di una funzione di secondo grado, talchè non importa fermarci più oltre sull'integrazione dell'espressione data.

La pratica poi suggerirà spesso speciali artifizii coi quali senza bisogno di applicare i metodi generali si potranno trovare gli integrali di espressioni differenziali come quelle date e di espressioni simili.

Così ad es. quando nella espressione differenziale da integrarsi i radicali $\sqrt{ax+b}$ e $\sqrt{a'x+b'}$ vi entrino riuniti per mezzo di un quoziente, cioè

vi figurino per mezzo del radicale $\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$, si farà la trasformazione ponendo

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^2, \text{ con che } x = -\frac{b'z^2-b}{a'z^2-a},\ dx = \frac{2(ab'-a'b)z}{(a'z^2-a)^2}dz,$$

e la espressione da integrarsi diverrà subito razionale.

In particolare quindi si troverà

$$\int \sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\,dx = (ab'-a'b)\int \frac{2z^2 dz}{(a'z^2-a)^2},$$

e poichè colla integrazione per parti si ha

$$\int \frac{2z^2dz}{(a'z^2-a)^2} = -\frac{z}{a'(a'z^2-a)} + \frac{1}{a'}\int \frac{dz}{a'z^2-a},$$

distinguendo i casi in cui a' ed a hanno lo stesso segno o segno contrario si otterrà subito l'integrale cercato sotto forma reale per mezzo di logaritmi o di archi-tangenti reali in z e quindi in $\sqrt{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$.

Naturalmente si suppone qui che a, a' e $ab'-a'b$ non siano zero, altrimenti i due radicali $\sqrt{ax+b}$ e $\sqrt{a'x+b'}$ si ridurrebbero a uno solo ecc.

Differenziali binomii.

33 — Passiamo ora ad esaminare il caso in cui si abbiano da integrare le espressioni conosciute sotto il nome di *differenziali binomii*, cioè le espressioni differenziali della forma $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, dove a e b sono costanti ambedue diverse da zero e m, n, p sono numeri razionali positivi o negativi, uno dei quali almeno si deve supporre fratto, perchè altrimenti l'espressione stessa sarebbe razionale e non sarebbe il caso di farne ora uno studio speciale.

In questi differenziali, si può sempre supporre n positivo, perchè se fosse negativo si potrebbe scrivere

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

e così l'esponente di x fra parentesi sarebbe ridotto positivo.

Inoltre, quando si voglia, si può sempre supporre che i due esponenti m ed n siano interi perchè se fossero fratti e si avesse $m=\frac{\alpha}{\beta}$, $n=\frac{\gamma}{\delta}$, essendo

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri interi, col porre $x = z^{\nu}$, essendo ν il minimo multiplo di β e δ, si avrebbe $dx = \nu z^{\nu-1} dz$ e i numeri $\frac{\alpha\nu}{\beta}$ e $\frac{\gamma\nu}{\delta}$ sarebbero due numeri interi i e i_1 e quindi sarebbe

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \nu z^{i+\nu-1} (a + bz^{i_1})^p dz,$$

e così gli esponenti di z fuori e dentro la parentesi sarebbero numeri interi.

L'esponente p poi può sempre supporsi fratto, perchè altrimenti quando m e n sono ambedue interi siamo già nel caso delle funzioni razionali, e quando m e n o uno soltanto di questi numeri è fratto si possono sempre ridurre interi come abbiamo osservato, e del resto allora siamo nel caso di funzioni razionali di potenze frazionarie di x, le quali già sappiamo che si riducono alle funzioni razionali.

34. — Ammesso poi che il numero p sia fratto e qualunque siano del resto gli esponenti m ed n, si hanno sempre due casi molto semplici, nei quali la espressione $x^m (a + bx^n)^p dx$ con una sostituzione adattata si riduce razionale, e quindi può essere integrata coi metodi precedenti.

Si ponga infatti $a + bx^n = t$, con che sarà $x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ e quindi $dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt$; si troverà $x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^p dt$, talchè se $\frac{m+1}{n}$ sarà zero o un numero intero qualsiasi (positivo o negativo), l'espressione data, venendo a contenere soltanto l'irrazionalità derivante dal fattore t^p, si ridurrà subito razionale ponendo $t = z^s$ essendo s il denominatore della frazione p.

Osservando poi che $x^m (a + bx^n)^p dx = x^{m+np} (b + ax^{-n})^p dx$, si conclude che la espressione data si riduce razionale anche se $\frac{m+np+1}{-n}$ o $\frac{m+1}{n} + p$ è un numero intero, e la sostituzione da farsi per giungere a questo è data dalla formola $b + ax^{-n} = z^s$ o $\frac{a+bx^n}{x^n} = z^s$, essendo s il denominatore di p; talchè si può ora asserire che i *differenziali binomii* $x^m (a + bx^n)^p dx$ *presentano sempre due casi di integrabilità colla riduzione a integrali di funzioni razionali, e questi casi sono quelli in cui l'uno o l'altro dei due numeri* $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *è un numero intero (positivo, o negativo o zero).*

E nel primo caso la sostituzione da farsi per ridurre razionali gli indicati

differenziali è data dalla formola $a + bx^n = z^s$, e si ha

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{s}{nb} \int \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} z^{sp+s-1} dz,$$

mentre nel secondo è dato invece dall'altra $\frac{a+bx^n}{x^n} = z^s$, e si ha

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = -\frac{s}{na} \int \left(\frac{z^s - b}{a}\right)^{\frac{m+np+1}{-n}-1} z^{sp+s-1} dz,$$

essendo s il denominatore della frazione p; e in queste i differenziali in z da integrarsi sono ancora differenziali binomii ma razionali.

E si può notare che evidentemente questi risultati valgono anche quando gli esponenti m e n sono incommensurabili ma tali sempre che l'uno o l'altro dei due numeri $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{m+1}{n} + p$ sia intero. E si vede pure facilmente che i risultati stessi continueranno a valere, nel senso che le integrazioni si effettueranno sotto forma finita, anche se p è incommensurabile quando quello dei numeri $\frac{m+1}{n}$ e $-\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$ che è intero non sia zero nè negativo.

35. — Nei casi in cui queste condizioni d'integrabilità (o meglio, condizioni di riducibilità a una forma razionale) sono soddisfatte, si potrà dunque eseguire l'integrazione dei differenziali binomii coi processi che abbiamo dati precedentemente.

Però bene spesso i calcoli saranno assai complicati; ed allora sarà più utile valersi di alcune formole di riduzione che si ottengono col metodo di integrazione per parti e che, tolti alcuni casi di eccezione, anche se le condizioni di integrabilità testè indicate non saranno soddisfatte, e qualunque siano i numeri m, n, p (senza neppure escludere che possano essere incommensurabili), varranno a fare dipendere l'integrale cercato da altri integrali della stessa forma che in molti casi potranno meglio servire sia pel calcolo effettivo degli stessi integrali, sia per la determinazione dei loro valori approssimati quando siano integrali definiti.

Queste formole di riduzione si trovano nel modo seguente.

Si osservi che il differenziale $x^m (a + bx^n)^p dx$ può considerarsi come il prodotto dei due fattori x^{m-n+1}, $(a + bx^n)^p x^{n-1} dx$, dei quali il secondo per p diverso da -1 è il differenziale di $\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$; talchè prendendo il primo di essi come fattore finito e il secondo come fattore differenziale, e facendo una integrazione per parti si troverà la formola seguente

$$(1)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx,$$

che vale quando p non è uguale a -1, e fa dipendere l'integrale cercato da un altro della stessa forma che in certi casi potrà meglio servire.

Similmente, osservando che il differenziale dato può anche riguardarsi come il prodotto dei due fattori $(a+bx^n)^p$, $x^m dx$, e applicando ancora l'integrazione per parti, per m differente da -1 si troverà la formola seguente

$$(2)\qquad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx\,,$$

che fa anch'essa dipendere l'integrale cercato da un altro della stessa forma; e in certi casi con queste due formole la ricerca o gli studii dell'integrale $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$ rimarranno semplicizzati.

36. – Talvolta però queste formole aumenterebbero la complicazione invece di diminuirla; e noi per dedurre da queste altre formole che separatamente o insieme combinate possano servire utilmente in tutti i casi, procederemo nel modo seguente.

Si osservi che l'integrale che figura nel secondo membro della formola (1) può porsi sotto la forma

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)(a+bx^n)^p\, dx = a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, dx + b\int x^m (a+bx^n)^p\, dx\,,$$

e quello che figura nel secondo membro della formola (2) può porsi invece sotto l'altra

$$\int \frac{x^m(a+bx^n) - ax^m}{b}(a+bx)^{p-1}dx = \frac{1}{b}\int x^m (a+bx^n)^p\, dx - \frac{a}{b}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}dx,$$

giacchè b può sempre supporsi diverso da zero: talchè sostituendo nelle formole stesse, si ricaveranno subito le altre

$$(3)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np)} - \frac{(m+1-n)}{(m+1+np)}\frac{a}{b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx,$$

$$(4)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{anp}{m+1+np}\int x^n (a+bx^n)^{p-1}dx\,,$$

per le quali si verifica con tutta facilità che non si hanno più respettivamente

neppure i casi di eccezione $p=-1$, $m=-1$ suindicati, ma si ha per ambedue il caso di eccezione $m+1+np=0$; e da queste cambiando nella prima m in $m+n$ e nella seconda p in $p+1$ e poi risolvendo le equazioni ottenute, si ricaveranno anche le seguenti

$$(5)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{(m+1+n+np)b}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx,$$

$$(6)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+1+n+np}{an(p+1)}\int x^m (a+bx^n)^{p+1}dx,$$

le quali tornano a presentare i soli casi di eccezione di $m=-1$ e $p=-1$ respettivamente; e ora con queste formole (3), (4), (5) e (6) si potrà sempre fare una riduzione dell'integrale dato ad altri che saranno ancora integrali di differenziali binomii, ma nei quali venga aumentato o diminuito come più tornerà comodo uno solo degli esponenti m e p dei due fattori x^m e $(a+bx^n)^p$ che figurano nel differenziale dato.

37. — In particolare queste formole gioveranno quando si vogliano ridurre gli integrali dati a dipendere da altri nei quali i due esponenti indicati di x e $a+bx^n$ siano impiccoliti in valore assoluto, perchè evidentemente colla applicazione successiva delle stesse formole l'esponente di $a+bx^n$ si potrà sempre ridurre fra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ $\left(\pm\frac{1}{2}\right.$ incl. quando p sia una frazione col denominatore 2), e quello di x fuori della parentesi potrà rendersi sempre compreso fra 0 e n.

Le stesse formole poi e così le (1) e (2), quand'anche colle loro applicazioni successive non portino a fare dipendere l'integrale cercato da altri perfettamente conosciuti, se dovranno servire al calcolo numerico di integrali definiti potranno ancora giovare; perchè potrà darsi che in esse la parte dell'integrale che resterà ignota si riduca ad un integrale che sia piccolissimo, e allora prendendo la parte già calcolata dell'integrale come valore di esso se ne potrà avere un valore approssimato quanto si vorrà, come già si disse in modo generale e si vide anche con un esempio particolare al § 20 [pag. 45 e seg.].

Si deve però notare che bisogna escludere il caso di $m+1+np=0$ quando si dovranno applicare la (3) e la (4); quello di $m=-1$ per la (2) e per la (5), e quello di $p=-1$ per la (1) e per la (6); ma poichè in tutti questi casi di esclusione, quando nei primi due casi p non sia incommensurabile, sono soddisfatte le condizioni di integrabilità date al § 34, gli integrali corrispondenti si potranno sempre trovare riducendo razionale l'espressione da integrarsi coi metodi generali indicati nello stesso § 34, e applicando poi i metodi di integrazione delle funzioni razionali.

Questi casi di eccezione poi senza presentarsi subito, potranno anche presentarsi mentre si fa l'applicazione successiva delle formole precedenti; e quando ciò avvenga, non si potrà più da quel punto in poi continuare ad applicare le formole stesse, ma converrà procedere nel modo testè indicato riducendo l'espressione per la quale l'inconveniente si presenta a una espressione razionale di un'altra variabile, o applicando altri processi che la pratica suggerirà.

38. — Per dare un'applicazione delle formole precedenti, prendiamo a determinare l'integrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ dove m è un numero intero.

La espressione differenziale $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx$, potendo porsi sotto la forma $x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, è un differenziale binomio, e per esso è soddisfatta o l'una o l'altra delle due condizioni d'integrabilità date al § 34 relative ai numeri $\frac{m+1}{n}$ o $\frac{m+1}{n}+p$, talchè l'integrazione si farà per funzioni algebriche, logaritmi o archi-tangenti, e potrebbe farsi anche senza servirsi delle formole precedenti.

Lascieremo da parte il caso di m dispari e positivo ed uguale a $2\mu+1$, perchè allora se si pone $x^2 = 1 - t^2$ si ha $x dx = -t dt$, $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-t^2)^\mu dt$, e l'integrazione si effettua immediatamente servendosi dello sviluppo del binomio. Negli altri casi poi procederemo nel modo seguente colla applicazione delle formole del paragrafo precedente.

a) Supponendo *m pari e positivo* e uguale a 2μ, coll'applicazione della formola (3) si troverà che

$$(7) \qquad \int \frac{x^{2\mu} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{2\mu-1}\sqrt{1-x^2}}{2\mu} + \frac{2\mu-1}{2\mu}\int \frac{x^{2\mu-2} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

talchè l'applicazione ripetuta di questa formola ci porterà evidentemente a fare dipendere l'integrale cercato dall'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ che si sa essere $\operatorname{arc\,sen} x + C$.

Così per es. se $\mu = 2$ si troverà prima dalla (7)

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

e quindi osservando che la (7) stessa ci dà

$$(8) \qquad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + C,$$

si otterrà subito

$$(9) \qquad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{3}{8}x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,sen} x + C.$$

b) Se poi *m è negativo, essendo ancora pari* e uguale a -2μ, servendosi della (5) si troverà

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\mu-1)x^{2\mu-1}} + \frac{2(\mu-1)}{2\mu-1}\int \frac{dx}{x^{2\mu-2}\sqrt{1-x^2}},$$

e l'applicazione ripetuta di questa formola ridurrà sempre l'integrale cercato a dipendere dall'integrale $\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ che corrisponde a $\mu=1$ e che per questa formola stessa è $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.

Così, anche in questo caso, facendo $\mu = 2$ si trova

$$(11) \qquad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C;$$

e facendo $\mu = 3$ si trova

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}},$$

e quindi

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} - \frac{4}{15}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} - \frac{8}{15}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

c) Se infine *m è negativo e dispari* ed uguale a $-(2\mu+1)$, applicando ancora la formola (5) con supporre che μ non sia zero, ciò che corrisponde a non essere m uguale a -1, si trova

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu}\int \frac{dx}{x^{2\mu-1}\sqrt{1-x^2}};$$

talchè, per μ diverso da zero l'integrale cercato si ridurrà sempre a dipendere dall'integrale $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ che per la formola (13) del § 31 [pag. 69] è uguale a $\log \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$; e così in particolare si avrà

$$(14)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\log \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C,$$

$$(15)\quad \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} - \frac{3}{8}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} + \frac{3}{8}\log \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Tutte queste formole poi condurranno coi soliti processi alla determinazione di integrali definiti, e di valori medii negli intervalli nei quali le funzioni da integrarsi sono sempre finite, avendo però sempre ben riguardo ai valori da prendersi per le funzioni che figurano negli integrali quando siano funzioni a più valori; dovendo sempre queste funzioni restare finite e continue negli intervalli d'integrazione, ecc.

V.

Integrazione di alcune funzioni trascendenti

39. — Gli integrali delle funzioni di una variabile il più spesso non possono trovarsi che con opportuni artifizii ed opportune trasformazioni che riducano gli integrali stessi ad altri integrali noti. È in tal modo appunto che, come si sono potute eseguire la maggior parte delle integrazioni che abbiamo fatte fin qui per funzioni razionali o irrazionali, sono stati trovati anche gli integrali di alcune espressioni differenziali che contengono funzioni trascendenti della variabile; e noi, sia per dare un cenno dei varii artifizi che possono utilmente applicarsi nel calcolo integrale, sia per dare alcune formole che sono di un uso continuo, esporremo ora alcuni dei resultati più notevoli che si hanno per l'integrazione delle funzioni trascendenti.

Incominceremo perciò dall'osservare che gli integrali di queste funzioni possono ridursi a integrali di funzioni razionali o irrazionali quando la espressione differenziale da integrare è il prodotto di una funzione razionale o irrazionale di una quantità trascendente moltiplicata per il differenziale di questa quantità.

È chiaro infatti che, se si chiama t la quantità trascendente, l'integrale cercato prenderà la forma $\int f(t)\,dt$, e quindi la determinazione di questo integrale sarà subito ridotta all'integrazione di una funzione razionale o irrazionale $f(t)$ di t, e se quest'ultima integrazione saprà farsi si troverà subito l'integrale cercato.

È così per es. che si possono trovare coi metodi dei paragrafi precedenti gli integrali

$$\int f(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx\ ,\quad \int f(\cos x)\operatorname{sen} x\,dx\ ,\qquad \int f(e^{ax})e^{ax}\,dx\ ,$$

$$\int f(\log x)\frac{dx}{x}\ ,\qquad \int f(\operatorname{arc\,sen} x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad \int f(\operatorname{arc\,tang} x)\frac{dx}{1+x^2}\ ,$$

quando f è una funzione razionale, o una funzione irrazionale che rientra in qualcuno dei casi che abbiamo considerati; talchè in particolare, osservando che col porre $\log x = t$ si ha $\int \frac{(\log x)^2 dx}{x\sqrt{1-(\log x)^2}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$, per la (8) del § 38 [pag. 77] si conclude che sarà

$$\int \frac{(\log x)^2 dx}{x\sqrt{1-(\log x)^2}} = -\frac{\log x \sqrt{1-(\log x)^2}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (\log x) + C,$$

e similmente si troverebbe che

$$\int \frac{dx}{x \log x \sqrt{1-(\log x)^2}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \log \left\{ \frac{\log x}{1+\sqrt{1-(\log x)^2}} \right\} + C.$$

40. — Una formola spessissimo utile per la integrazione delle funzioni differenziali di quantità trascendenti, si ottiene colla integrazione per parti nel modo seguente.

Supponiamo che si abbia da integrare la espressione $f(z)\,P\,dx$, dove z è una funzione algebrica o trascendente di x e P è un'altra funzione di x.

Ponendo $\int P\,dx = Q$ con che $P\,dx = dQ$, essendo Q una funzione cognita o no, colla integrazione per parti si troverà prima

$$\int f(z)\,P\,dx = \int f(z)\,dQ = f(z)\,Q - \int f'(z)\,Q \frac{dz}{dx}\,dx,$$

e ponendo poi $\int Q \frac{dz}{dx}\,dx = R$, con che $Q\frac{dz}{dx}\,dx = dR$, e applicando di nuovo l'integrazione per parti all'ultimo integrale della formola precedente, e sostituendo si troverà

$$\int f(z)\,P\,dx = f(z)\,Q - f'(z)\,R + \int f''(z)\,R\frac{dz}{dx}\,dx;$$

ed ora ponendo successivamente

$$(1)\quad \int P\,dx = Q\,,\quad \int Q\frac{dz}{dx}\,dx = R\,,\quad \int R\frac{dz}{dx}\,dx = S\,,\quad \int S\frac{dz}{dx}\,dx = T\,;\ldots$$

si vede chiaramente che si avrà la formola

$$(2)\quad \int f(z)\,P\,dx = f(z)\,Q - f'(z)\,R + f''(z)\,S - f'''(z)\,T + \ldots \pm \int f^{(m)}(z)\,V\frac{dz}{dx}\,dx,$$

la quale, quando gli integrali Q, R, S, T, ... V si sappiano trovare successi-

vamente, ridurrà l'integrale cercato a dipendere da un altro integrale che potrà esser noto o essere facilmente calcolabile, e che nel caso particolare in cui la funzione $f(z)$ è razionale intera in z sarà uguale allo zero, perchè alla fine si avrà $f^{(m)}(z) = 0$; mentre se lo stesso integrale non potrà calcolarsi effettivamente potrà darsi che nella integrazione definita risulti piccolissimo, e allora la formola trovata quand'anche non determini perfettamente l'integrale potrà giovare al calcolo approssimato degli integrali definiti.

Supponendo in particolare in questa formola $f(z) = z^n$, essa si trasforma subito nell'altra

$$(3)\quad \int z^n\,P\,dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} - \ldots \pm \pi(n)\,V,$$

e supponendo ad es. $z = x$ con $P = \cos x$ o $P = \operatorname{sen} x$, essa dà luogo alle due

$$(4)\quad \int f(x)\cos x\,dx = \left\{ f(x) - f''(x) + f^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots \right\} \operatorname{sen} x + \left\{ f(x) - f'''(x) + f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots \right\} \cos x + C,$$

$$(5)\quad \int f(x)\operatorname{sen} x\,dx = -\left\{ f(x) - f''(x) + f^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots \right\} \cos x + \left\{ f'(x) - f'''(x) + f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots \right\} \operatorname{sen} x + C,$$

giacchè in questo caso gli integrali (1) si eseguiscono immediatamente e all'infuori del segno sono alternativamente uguali a $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$; talchè si può intanto concludere che se $f(x)$ è una funzione razionale intera gli integrali $\int f(x)\cos x\,dx$ e $\int f(x)\operatorname{sen} x\,dx$ si calcolano subito per mezzo delle (4) e (5).

E così in particolare supponendo $f(x) = x^n$ avremo le formole

$$(6)\quad \int x^n \cos x\,dx = \left\{ x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots \right\} \operatorname{sen} x +$$
$$+ \left\{ n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots \right\} \cos x + C,$$

$$(7)\quad \int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -\left\{ x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots \right\} \cos x +$$
$$+ \left\{ n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots \right\} \operatorname{sen} x + C,$$

41. — Al modo stesso se z è una funzione trascendente e P è tale che si sappiano successivamente eseguire le integrazioni (1), si avrà subito l'integrale $\int z^n\,P\,dx$ per mezzo della (3).

Così per es. quando si volessero calcolare gli integrali $\int x^{m-1}(\log x)^n\,dx$,

$\int (\text{arc sen}\, x)^n dx$ con n intero e positivo, si osserverà che pel primo di questi integrali si ha

$$P = x^{m-1}\ ,\ z = \log x\ ,\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\ ,\ Q = \frac{x^m}{m}\ ,\ R = \frac{x^m}{m^2}\ ,\ S = \frac{x^m}{m^3}, \ldots$$

e pel secondo si ha

$$z = \text{arc sen}\, x\ ,\ P = 1\ ,\ Q = x\ ,\ R = -\sqrt{1-x^2}\ ,\ S = -x\ ,\ T = \sqrt{1-x^2}\ ,\ U = Q = x\ ,\ V = R\ , \ldots$$

e quindi colla (3) si troveranno gli integrali richiesti, i quali verranno dati dalle formole

$$(8)\quad \int x^{m-1} (\log x)^n dx = \frac{x^m}{m}\left\{(\log x)^n - \frac{n}{m}(\log x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(\log x)^{n-1} - \ldots \pm \frac{\pi(n)}{m^n}\right\} + C\ ,$$

$$(9)\quad \int (\text{arc sen}\, x)^n dx = x\left\{z^n - n(n-1)z^{n-2} + n(n-2)(n-3)z^{n-4} - \ldots\right\} +$$
$$+ \sqrt{1-x^2}\left\{nz^{n-1} - n(n-1)(n-2)z^{n-3} + \ldots\right\} + C\ ,$$

essendo in quest'ultima $z = \text{arc sen}\, x$; ed ora facendo $x = e^t$ nella prima di queste formole si otterrà anche l'integrale $\int e^{mt} t^n dt$, e si avrà

$$(10)\qquad \int e^{mt} t^n dt = \frac{e^{mt}}{m}\left\{t^n - \frac{n}{m} t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} t^{n-2} - \ldots \pm \frac{\pi(n)}{m^n}\right\} + C\,.$$

42. — Supponendo nella (2) $P = e^x$, $z = x$, $f(z) = z^m = x^m$, ed osservando che allora si ha $Q = e^x$, $R = e^x$, $S = e^x$; ..., dalla (2) stessa si ha

$$(11)\quad \int x^m e^x dx = e^x(x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \ldots \pm m(m-1)\ldots(m-p+1)x^{m-p}) \mp$$
$$\mp m(m-1)\ldots(m-p)\int x^{m-p-1} e^x dx + C\ ,$$

e questa formola sarà utile specialmente nel caso di m positivo.

Quando m è negativo ed uguale a $-n$ conviene meglio di fare $z = x$, $f(z) = e^z = e^x$, $P = \frac{1}{x^n}$, perchè allora si ha

$$Q = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\ ,\ R = \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}\ ,\ S = -\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} \ldots ,$$

e la (2) ci dà l'altro integrale

$$(12)\quad \int \frac{e^x dx}{x^n} = -e^x\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} + \ldots +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)x^{n-p}}\right) + \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}\int \frac{e^x}{x^{n-p}} dx\ ,$$

talchè se n è intero l'integrale $\int \frac{e^x dx}{x^n}$ verrà sempre a dipendere dall'integrale $\int \frac{e^x dx}{x}$ che non si sa integrare sotto forma finita, ma che è più semplice di quello dato. Questo integrale si chiama *integral-logaritmo*, e ponendo $e^x = y$ si riduce all'altro $\int \frac{dy}{\log y}$.

43. — Applicando ancora la formola (3), o più semplicemente applicando direttamente l'integrazione per parti, si possono trovare altri integrali.

Così per es. volendo i due integrali $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax} \text{sen}\, bx\, dx$ dove a e b sono costanti, si osserverà che l'integrazione per parti col prendere $e^{ax}dx$ come fattore differenziale ci dà le formole

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax} \text{sen}\, bx\, dx\ ,$$

$$\int e^{ax} \text{sen}\, bx\, dx = \frac{e^{ax}\,\text{sen}\, bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos bx\, dx\ ,$$

dalle quali risolvendo si avranno subito le altre

$$(13)\qquad \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\,\text{sen}\, bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C\ ,$$

$$(14)\qquad \int e^{ax} \text{sen}\, bx\, dx = \frac{a\,\text{sen}\, bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\, e^{ax} + C\ ,$$

che si presentano spesso nelle applicazioni.

Del resto poi se si osserva che si ha $e^{ax}(\cos bx + i\,\text{sen}\, bx) = e^{(a+ib)x}$, colla integrazione si trova la formola

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx + i\int e^{ax} \text{sen}\, bx\, dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{e^{ax}(\cos bx + i\,\text{sen}\, bx)}{a+ib}$$

e da questa moltiplicando i due termini dell'ultima frazione per $a - ib$, e uguagliando poi fra loro le parti reali e i coefficienti dell'immaginario si ritrovano appunto le formule precedenti.

44. — Volendo ora gli integrali delle espressioni differenziali della forma $\operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ che accade spessissimo di dovere considerare, si può prima osservare che ponendo $\operatorname{sen} x = t$, con che $\cos x = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ e $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, si ha $\operatorname{sen}^m x \cos^n x = t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$, e così ci si riduce alla integrazione di un differenziale binomio; e quando m ed n fossero numeri interi saremmo sempre in uno dei due casi nei quali la condizione d'integrabilità è soddisfatta.

Per trovare gli integrali $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, o almeno per trasformarli in altri che possano meglio servire, si potrebbe quindi qualunque siano m ed n valersi dei metodi e delle formole di riduzione che si dettero per gli integrali binomii, ma è più comodo trovare queste formole direttamente.

Si osserverà perciò che la espressione data può scriversi sotto la forma $\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x \cos x\,dx$, e il secondo fattore a meno che non sia $m = -1$ è il differenziale di $\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$, talchè applicando l'integrazione per parti col prendere questo fattore come fattore differenziale si troverà

$$(15)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx\,,$$

e poichè si ha evidentemente

$$\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx\,,$$

sostituendo e ricavando poi il valore di $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, si troverà

$$(16)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \cdot \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx\,,$$

che, come si verifica subito, vale anche per $m = -1$ e fa soltanto eccezione il caso di $m = -n$.

Da questa cangiando x in $\frac{\pi}{2} - x$, e quindi dx in $-dx$, e permutando fra loro le lettere m in n e poi cangiando tutto di segno, si otterrà l'altra

$$(17)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x\,dx\,,$$

che vale anch'essa per m differente da $-n$; e ora cangiando nella (16) n in $n+2$, e nella (17) m in $m+2$ e risolvendo poi rispetto a $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ si troveranno le altre

$$(18)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x\,dx$$

$$(19)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^n x\,dx$$

per la prima delle quali è da escludersi soltanto il caso di $n = -1$ e per la seconda quello di $m = -1$; ed ora con queste quattro formole (16), (17), (18), (19) qualunque siano i valori positivi o negativi di m e di n, a meno che non si cada nel caso di eccezione $m = -n$ quando si applicano le due prime e nei casi di $n = -1$ o $m = -1$ quando si applicano respettivamente la (18) o la (19), l'integrale cercato $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ si ridurrà sempre ad integrali della stessa forma, nei quali gli esponenti m ed n sono fra 0 e 2; e se m ed n sono interi questi integrali si ridurranno sempre agli altri $\int dx$, $\int \cos x\,dx$, $\int \operatorname{sen} x\,dx$ $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$, che sono uguali respettivamente a $x + C$, $\operatorname{sen} x + C$, $-\cos x + C$, $\frac{1}{4}\cos 2x + C$.

45. — Nei casi di eccezione bisognerà applicare metodi speciali che la pratica suggerisce immediatamente.

Del resto poi, nel caso in cui $n = -m$, la (15) quando non sia $m = -1$ ci dà la formola

$$(20)\quad \int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x\,dx\,,$$

che cangiando m in $m-2$ e determinando poi $\int \operatorname{tang}^m x\,dx$ conduce subito anche all'altra

$$(21)\quad \int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\,dx\,,$$

che vale quando non sia $m = 1$; e queste evidentemente sono formole di riduzione pei casi di m negativo e positivo rispettivamente e gioveranno per impiccolire l'esponente in valore assoluto.

Nei casi esclusi di $m=1$ e $m=-1$ si ha subito evidentemente

$$(22)\qquad \int \operatorname{tang} x\,dx = -\log\cos x + C \quad , \quad \int \cot x\,dx = \log \operatorname{sen} x + C\,.$$

46. — Supponendo nelle formole precedenti $n=0$, o $m=0$ si hanno le formole che servono a determinare gli integrali $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$, $\int \cos^n x\,dx$, o almeno a ridurli a forme più semplici.

Queste formole per le (17) e (19), (16) e (18) sono le seguenti

$$(23)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \operatorname{sen}^m x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,dx\,, \\[2ex] \displaystyle\int \operatorname{sen}^m x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos x}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+2} x\,dx\,, \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx\,, \\[2ex] \displaystyle\int \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{n+2}{n+1}\int \cos^{n+2} x\,dx\,; \end{cases}$$

e queste applicate successivamente se m e n sono interi conducono subito agli integrali cercati.

Però se m e n sono interi e positivi, anzichè fare uso di queste formole di riduzione, è più comodo valersi degli sviluppi di $\cos^n x$ e $\operatorname{sen}^m x$ per seni e coseni di archi multipli di x.

Così osservando che si ha

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x + \dots\,,$$

quando s'intenda che i coefficienti $n_1, n_2, \dots$ siano quelli binomiali, e che lo sviluppo si arresti al termine in $\cos x$ cioè a $n_{\frac{n-1}{2}}\cos x$ nel caso di n dispari, e al termine in $\cos 0x$ — cioè a quello che è indipendente da $\cos x$ — nel caso di n pari, nel qual caso lo stesso termine sarà $\frac{1}{2}n_{\frac{n}{2}}$, si troverà subito la formola seguente

$$(25)\qquad 2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + n_1\frac{\operatorname{sen}(n-2)x}{n-2} + n_2\frac{\operatorname{sen}(n-4)x}{n-4} + \dots + C.$$

che dà l'integrale $\int \cos^n x\,dx$ coll'avvertenza che quando n è pari l'ultimo

termine della formola non è della stessa forma degli altri che sarebbe indeterminata ma ad esso occorre sostituire $\frac{1}{2}n_{\frac{n}{2}}x$.

E similmente osservando che si hanno le formole (*)

$$(-1)^n 2^{2n-1}\operatorname{sen}^{2n} x = \cos 2nx - (2n)_1\cos(2n-2)x + (2n)_2\cos(2n-4)x - \dots + $$
$$+ (-1)^{n-1}(2n)_{n-1}\cos 2x + (-1)^n\frac{1}{2}(2n)_n\,,$$

$$(-1)^n 2^{2n}\operatorname{sen}^{2n+1} x = \operatorname{sen}(2n+1)x - (2n+1)_1\operatorname{sen}(2n-1)x + (2n+1)_2\operatorname{sen}(2n-3)x - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1}(2n+1)_{n-1}\operatorname{sen} 3x + (-1)^n(2n+1)_n\operatorname{sen} x\,,$$

si troveranno subito le nuove espressioni di $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$ tanto per m pari che per m dispari, le quali del resto potranno aversi anche dalla (25) cambiandovi x in $\frac{\pi}{2} - x$.

47. — Volendo gli integrali di espressioni della forma

$$\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx\,, \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx\,,$$

si possono pure applicare integrazioni per parti successive, o si può seguire un processo analogo a quello tenuto nel § 43 per gli integrali di $e^{ax}\cos bx\,dx$,

---

(*) Come è noto le formole che qui si richiamano per le potenze intere e positive di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ per coseni e seni degli archi multipli si ottengono subito dalla formola del binomio

$$(a+b)^p = a^p + p_1 a^{p-1}b + p_2 a^{p-2}b^2 + \dots + p_{p-1}ab^{p-1} + b^p$$

facendovi $a = e^{ix}$ e $b = e^{-ix}$ per ottenere $\cos x$, e facendovi $a = e^{ix}$ e $b = -e^{-ix}$ per ottenere $\operatorname{sen} x$, e riunendo poi i termini corrispondenti alle stesse potenze di e^{ix} e di e^{-ix}, cioè i termini estremi e gli equidistanti dagli estremi, e distinguendo i due casi di p pari e p dispari.

Ricordiamo inoltre che è ancora la formola del binomio, applicata alla potenza n^a di $\cos x + i\operatorname{sen} x$ coll'osservare poi che questa potenza è anche uguale a $\cos nx + i\operatorname{sen} nx$, che dà le formole

$$\cos nx = \cos^n x - n_2\cos^{n-2} x\operatorname{sen}^2 x + n_4\cos^{n-4} x\operatorname{sen}^4 x - \dots\,,$$
$$\operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} x\,(n_1\cos^{n-1} x - n_3\cos^{n-3} x\operatorname{sen}^2 x + n_5\cos^{n-5} x\operatorname{sen}^4 x - \dots)\,,$$

che esprimono i coseni e seni degli archi multipli per potenze intere e positive di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$; e queste colla integrazione danno pure i seni e coseni degli archi multipli espressi per somme d'integrali della forma $\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$.

$e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$; ma è più semplice osservare che si ha

$$\cos(ax+b)\cos(a'x+b') = \frac{1}{2}\left\{\cos\left[(a+a')x+b+b'\right] + \cos\left[(a-a')x+b-b'\right]\right\},$$

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b') = \frac{1}{2}\left\{\cos\left[(a-a')x+b-b'\right] - \cos\left[(a+a')x+b+b'\right]\right\},$$

e quindi se $a+a'$ e $a-a'$ sono differenti da zero sarà

$$(26)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx = \frac{\operatorname{sen}\left[(a+a')x+b+b'\right]}{2(a+a')} + \frac{\operatorname{sen}\left[(a-a')x+(b-b')\right]}{2(a-a')} + C, \\ \displaystyle\int \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx = \frac{\operatorname{sen}\left[(a-a')x+(b-b')\right]}{2(a-a')} - \frac{\operatorname{sen}\left[(a+a')x+b+b'\right]}{2(a+a')} + C, \end{cases}$$

mentre se per es. $a'=a$, $b=b'=0$, essendo a diverso da zero, sarà

$$(27)\quad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C, \quad \int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C.$$

Supponendo nelle precedenti (26), con $b=0$, $b'=0$ o $b'=\frac{\pi}{2}$ si hanno le altre

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \cos ax \cos a'x\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a+a')x}{2(a+a')} + \frac{\operatorname{sen}(a-a')x}{2(a-a')} + C, \\ \displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} a'x\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-a')x}{2(a-a')} - \frac{\operatorname{sen}(a+a')x}{2(a+a')} + C, \\ \displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos a'x\,dx = -\frac{\cos(a+a')x}{2(a+a')} - \frac{\cos(a-a')x}{2(a-a')} + C, \end{cases}$$

che valgono per a differente da $\pm a'$, talchè supponendo che a e a' siano numeri interi m e n, e definendo gli integrali fra 0 e 2π, da queste e dalle (27) si hanno le formole notevolissime

$$(29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \pi, \end{cases}$$

le prime delle quali valgono per m diverso da $\pm n$, e le due ultime valgono

soltanto per m diverso da zero, essendo, come abbiamo detto, m e n numeri interi.

48. — Faremo anche osservare in modo generale che *quando si hanno da integrare espressioni della forma $f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ dove f è una funzione razionale di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, si potrà sempre fare dipendere la loro integrazione da quella di funzioni razionali, e quindi la integrazione si effettuerà sempre sotto forma finita.*

Si ponga infatti $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = t$, avremo

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = 2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x = \cos^2\frac{1}{2}x\left(1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = 2\cos^2\frac{1}{2}x\,dt = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

e per mezzo di queste formole l'espressione data $f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ si ridurrà evidentemente all'altra $f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$ che è razionale, e l'integrazione potrà quindi effettuarsi sotto forma finita coi metodi dati per le funzioni razionali.

49. — Così per es. volendo determinare l'integrale $\int \frac{dx}{a\operatorname{sen} x + b\cos x}$ dove a e b sono costanti, si osserverà che applicando la trasformazione precedente si trova $\int \frac{dx}{a\operatorname{sen} x + b\cos x} = 2\int \frac{dt}{2at + b(1-t^2)}$, e quando non sia $b=0$ si potrà scrivere $\int \frac{dx}{a\operatorname{sen} x + b\cos x} = 2\int \frac{b\,dt}{a^2+b^2-(bt-a)^2}$ ovvero

$$\int \frac{dx}{a\operatorname{sen} x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}+(bt-a)} + \int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}-(bt-a)}\right],$$

e quindi si avrà

$$(30)\quad \int \frac{dx}{a\operatorname{sen} x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b\operatorname{tang}\frac{1}{2}x - a}{\sqrt{a^2+b^2}-b\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a}\right] + C.$$

Questa formola quando si ponga $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos k$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen} k$, con k diverso da zero e da π perchè b si suppone diverso da zero, si trasforma nell'altra

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{1 - \cos k + \operatorname{sen} k \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{1 + \cos k + \operatorname{sen} k \operatorname{tang} \frac{1}{2} x} + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} k + 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} k \cos \frac{1}{2} k \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} k - 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} k \cos \frac{1}{2} k \operatorname{tang} \frac{1}{2} x} + \mathrm{C},$$

o anche infine includendo in C un'altra costante

$$(31) \qquad \int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \operatorname{tang} \frac{x+k}{2} + \mathrm{C},$$

e sotto questa forma vale anche per $k=0$ e $k=\pi$, e si sarebbe potuta trovare subito direttamente osservando che

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\cos k \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} k \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x+k)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b}} \log \operatorname{tang} \frac{x+k}{2} + \mathrm{C}.$$

50. — Volendo l'integrale più generale $\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c}$ si può ancora fare uso della trasformazione generale precedente, ma è più semplice procedere come segue.

Si ponga $a = \rho \cos\lambda$, $b = \rho \operatorname{sen}\lambda$, essendo $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e si faccia anche $x + \lambda = u + \frac{\pi}{2}$, con che si avrà

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = \rho \operatorname{sen}(x+\lambda) + c = \rho \cos u + c = \rho \cos^2 \frac{1}{2} u - \rho \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} u + c =$$

$$= \cos^2 \frac{1}{2} u \left(c + \rho + (c-\rho) \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u\right) = (c+\rho) \cos^2 \frac{1}{2} u \left(1 \pm k^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u\right)$$

avendo posto $\frac{c-\rho}{c+\rho} = \pm k^2$, e intendendo di prendere il segno $+$ quando $\frac{c-\rho}{c+\rho}$ è positivo ed il segno $-$ quando è negativo, per modo che k sia reale.

Di qui supponendo k diverso da zero, o c diverso da $\sqrt{a^2+b^2}$, e ponendo $k \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = t$ risulta che

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = \frac{1}{c+\rho} \int \frac{du}{\cos^2 \frac{1}{2} u \left(1 \pm k^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u\right)} = \frac{2}{k(c+\rho)} \int \frac{dt}{1 \pm t^2},$$

quando si faccia $k \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = t$; e perciò se $\frac{c-\rho}{c-\rho}$ è positivo sarà

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = \frac{2}{k(c+\rho)} \operatorname{arc\,tang} \left(k \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \mathrm{C},$$

e se $\frac{c-\rho}{c+\rho}$ è negativo siccome

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t} = \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + \mathrm{C},$$

sarà invece

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = \frac{1}{k(c+\rho)} \log \left(\frac{1 + k \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - k \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right)} \right) + \mathrm{C};$$

e quindi poichè, essendo $\frac{c-\rho}{c+\rho} = \frac{c^2-\rho^2}{(c+\rho)^2}$, il segno di $\frac{c-\rho}{c+\rho}$ dipende da quello di $c^2-\rho^2$, si può ora affermare che se $c^2 > a^2+b^2$ avremo la formola

$$(32) \quad \int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{\frac{c - \sqrt{a^2+b^2}}{c + \sqrt{a^2+b^2}}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right) \right) + \mathrm{C},$$

e se $c^2 < a^2+b^2$ avremo invece l'altra

$$(33) \quad \int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \left(\frac{c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2-c^2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right)}{c + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2-c^2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(x + \lambda - \frac{\pi}{2}\right)} \right) + \mathrm{C},$$

intendendo che λ debba essere determinato colle formole $a = \rho \cos\lambda$, $b = \rho \operatorname{sen}\lambda$, e che i segni dei varii radicali debbano essere bene scelti in relazione a quelli di a, b, c e al valore di λ.

Del resto, avendo sempre bene riguardo ai segni dei radicali, la formola (32) può usarsi anche quando $c^2<a^2+b^2$, e la (33) può usarsi quando $c^2>a^2+b^2$, ma allora esse sono complicate d'immaginarii.

51. — Supponendo nelle (32) e (33) $a=0$, se prenderemo $\lambda=\frac{\pi}{2}$ si avrà $\rho=b$ e quindi il radicale $\sqrt{a^2+b^2}$ dovrà prendersi uguale a b in valore e in segno e, limitandoci per semplicità al caso di c positivo, si vede subito che quando il valore assoluto $|b|$ di b è inferiore a c si ha la formola

$$(34)\qquad \int\frac{dx}{c+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)+C,$$

e quando b in valore assoluto è superiore a c si ha l'altra

$$(35)\qquad \int\frac{dx}{c+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-c^2}}\log\left(\frac{b+c+\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{b+c-\sqrt{b^2-c^2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}\right)+C,$$

i radicali dovendo essere presi positivamente.

E osservando che nella prima di queste formole, per essere $|b|<c$ il denominatore $c+b\cos x$ non passa mai per zero, e la funzione del secondo membro varia con continuità quando x va da 0 a π, si vede subito che si può passare senz'altro agli integrali definiti per tutti gli intervalli fra 0 e π, e si ha così la formola

$$(36)\qquad \int_0^x\frac{dx}{c+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right),$$

per $0\leq x\leq\pi$, nella quale i radicali dovranno prendersi positivamente e per l'arco-tangente del secondo membro dovrà prendersi quello inferiore a $\frac{\pi}{2}$; e in particolare per $x=\pi$ si avrà la formola

$$(37)\qquad \int_0^\pi\frac{dx}{c+b\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

sempre pel caso di c positivo e $|b|<c$, e il radicale dovendo prendersi positivamente.

E qui è bene notare che, come ora abbiamo detto per la formola (36), anche per le applicazioni delle altre formole di questo paragrafo, e in generale

di quelle che contengono le funzioni archi-tangenti, logaritmi, ecc. che sono a più valori, onde non cadere in equivoci, bisogna avere bene riguardo a questa singolarità di tali funzioni; e in particolare nel calcolare gli integrali definiti bisogna procurare di prendere sempre valori che nell'intervallo d'integrazione si mantengano finiti e continui ecc.

52. — Altri integrali di espressioni trascendenti potranno determinarsi con speciali artifizii.

Così ad esempio volendo avere i due integrali $\int\frac{\cos px}{\cos nx}dx$, $\int\frac{\operatorname{sen} px}{\cos nx}dx$, dove per semplicità p ed n saranno supposti interi, si osserverà che $\frac{\cos px}{\cos nx}$ e $\frac{\operatorname{sen} px}{\cos nx}$ si possono riguardare come la parte reale e il coefficiente dell'immaginario nella espressione complessa $\frac{\cos px+i\operatorname{sen} px}{\cos nx}$ la quale, moltiplicata al numeratore e al denominatore per $\cos nx+i\operatorname{sen} nx$, si trasforma nell'altra $2\frac{\cos(p+n)x+i\operatorname{sen}(p+n)x}{1+\cos 2nx+i\operatorname{sen} 2nx}$, per modo che si ha

$$\int\frac{\cos px}{\cos nx}dx+i\int\frac{\operatorname{sen} px}{\cos nx}dx=2\int\frac{\cos(p+n)x+i\operatorname{sen}(p+n)x}{1+\cos 2nx+i\operatorname{sen} 2nx}dx;$$

e quindi, facendo un cambiamento di variabile colla formola $\cos x+i\operatorname{sen} x=t$ con che $(-\operatorname{sen} x+i\cos x)dx=dt$, ovvero $dx=-\frac{i\,dt}{t}$, si trova

$$\int\frac{\cos px}{\cos nx}dx+i\int\frac{\operatorname{sen} px}{\cos nx}dx=-i\int t^{p+n-1}\left(1+t^{2n}\right)^{-1}dt$$

e la espressione in t nel secondo membro sarà un differenziale binomio che nel caso che noi consideriamo di n e p interi sarà anche razionale e, sebbene la variabile sia complessa, si integrerà coi metodi noti; e dopo fatta la integrazione basterà separare la parte reale dalla parte immaginaria per determinare senz'altro gli integrali cercati $\int\frac{\cos px}{\cos nx}dx$ e $\int\frac{\operatorname{sen} px}{\cos nx}dx$.

Abbiamo supposto p e n interi per non avere ambiguità pei valori dei radicali che sarebbero venuti a figurare nelle formole; ma del resto il caso in cui p ed n siano fratti si ridurrà subito a quello in cui sono numeri interi ponendo $x=sx_1$ con x_1 nuova variabile, essendo s il minimo multiplo dei denominatori che figureranno in n e p.

In modo simile si potrà trovare una formola che condurrà a determinare gli integrali $\int \frac{\cos px}{\operatorname{sen} nx} dx$ e $\int \frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} nx} dx$, ecc.

53. — Come già altra volta abbiamo fatto notare, tutte le formole che qui abbiamo dato, quand'anche non conducano alla effettiva determinazione degli integrali che si considerano, potranno servire in molti casi utilmente al calcolo approssimato degli integrali definiti e quindi dei valori medii; e ciò perchè talvolta, nella parte che resta ignota figurano integrali che non sono conosciuti perfettamente ma pei quali, applicando le considerazioni fatte nelle osservazioni 9 e 10 al § 7 [pag. 22 e seg.], come si fece al § 20 [pag. 45 e seg.], si riscontra facilmente che sono talmente piccoli da potere essere trascurati nella pratica.

Nei casi poi nei quali i calcoli possono effettuarsi completamente, alcune delle formole stesse danno luogo a integrali definiti notevolissimi, e già si hanno esempii di questi nelle formole (29) e (37).

Altri integrali poi che pure è opportuno di segnalare si possono avere da altre delle formole che abbiamo dato; e così per es. valendosi della prima delle (23), per m intero e superiore ad uno, si trova la formola

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^m x\, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx\,,$$

e da questa cambiandovi successivamente m in $m-2$, $m-4$, ... e moltiplicando membro a membro le formole ottenute, per m pari e uguale a 2μ si ottiene la formola seguente

$$(38) \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\mu} x\, dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2\mu-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,...\,2\mu}\,\pi = \frac{\pi(2\mu)}{2^{2\mu}[\pi(\mu)]^2}\,\pi\,,$$

e per m dispari e uguale a $2\mu+1$ si ottiene l'altra

$$(39) \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\mu+1} x\, dx = 2\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\,...\,2\mu}{3\,.\,5\,.\,7\,...\,(2\mu+1)} = 2^{2\mu+1}\frac{[\pi(\mu)]^2}{\pi(2\mu+1)}\,.$$

E similmente dalla prima delle (24) si ottiene la formola

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \cos^{n-2} x\, dx\,,$$

la quale ci dà le altre

$$(40) \qquad \int_0^{\pi} \cos^{2\mu} x\, dx = \frac{\pi(2\mu)}{2^{2\mu}[\pi(\mu)]^2}\,\pi\,, \quad \int_0^{\pi} \cos^{2\mu+1} x\, dx = 0\,;$$

e queste come le due precedenti si potevano trovare subito, anche con maggiore facilità, valendosi della (25) e di quelle analoghe che dicemmo potersi avere per $\int \operatorname{sen}^m x\, dx$ pei due casi di m pari e m dispari respettivamente.

Dividendo per π i secondi membri di queste formole si ottengono subito anche i valori medii delle potenze intere e positive di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ tra 0 e π.

54. — Avendo ora avuto occasione di dare anche queste ultime formole, non si deve tralasciare di notare che le formole (38) e (39) conducono subito alla formola notevolissima di *Wallis* che dà il valore di π per prodotto infinito.

Si osservi perciò che col crescere indefinito di m l'integrale $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^m x\, dx$ va sempre diminuendo perchè così avviene di $\operatorname{sen}^m x$ per gli stessi valori di x, e quindi si ha

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\mu+1} x\, dx < \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\mu} x\, dx < \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2\mu-1} x\, dx\,;$$

e di qui tenendo conto delle formole (38) e (39) si deduce che

$$\frac{2\mu}{2\mu+1} < \frac{1\,.\,3^2\,.\,5^2\,...\,(2\mu-3)^2\,(2\mu-1)^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,...\,(2\mu-2)^2\quad 2\mu}\,\frac{\pi}{2} < 1\,,$$

e quindi per μ crescente all'infinito si ha

$$\frac{\pi}{2} \lim \frac{1\,.\,3^2\,.\,5^2\,...\,(2\mu-3)^2(2\mu-1)^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,...\,(2\mu-2)^2\quad 2\mu} = 1\,;$$

talchè, osservando che

$$\frac{1\,.\,3^2\,.\,5^2\,...\,(2\mu-3)^2\,(2\mu-1)^2}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,...\,(2\mu-2)^2\quad 2\mu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2\mu-3}{2\mu-4}\cdot\frac{3\mu-2}{2\mu-2}\cdot\frac{2\mu-1}{2\mu-2}\cdot\frac{2\mu-1}{2\mu}\,,$$

e che $\lim \frac{2\mu-1}{2\mu} = 1$ si troverà subito in prodotto infinito

$$(41) \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2\mu-2}{2\mu-3}\cdot\frac{2\mu-2}{2\mu-1}\cdot\frac{2\mu}{2\mu-1}\cdots,$$

e questa è la formola cercata di *Wallis*.

VI.

Caso delle funzioni che divengono infinite in punti dell'intervallo d'integrazione

55. — Fin qui tanto nella definizione degli integrali definiti che si dette, quanto negli integrali definiti che abbiamo calcolato o che abbiamo detto potersi calcolare per mezzo di quelli indefiniti che abbiamo trovato, abbiamo sempre ammesso che la funzione $f(x)$ da integrarsi fosse sempre finita fra i limiti d'integrazione α e β, che supponemmo essi pure finiti.

Ora, mantenendo ancora questa ipotesi intorno ai limiti α e β, supponiamo che $f(x)$ *divenga infinita* in uno o in tutti e due i limiti stessi α e β o per un numero finito di valori di x fra α e β; colle parole *divenire infinita* a destra o a sinistra di un punto a per es. a destra, intendendo dire che il limite dei valori di $f(x)$ quando x si avvicina indefinitamente ad a a destra sia $\pm\infty$, o, anche più generalmente, che questi valori di $f(x)$ senza avere propriamente per limite l'infinito, col tendere di x ad a a destra, finiscano per prendere *anche* valori numericamente maggiori di qualsiasi quantità finita data, potendo però al tempo stesso prendere anche valori minori di una data quantità finita.

Ammettiamo però che, in tutte le porzioni dell'intervallo (α, β) che non contengono nè nell'interno nè agli estremi i punti ove $f(x)$ diviene infinita, questa funzione sia atta all'integrazione; allora, se $f(x)$ diviene infinita soltanto per $x=\beta$ quando x si avvicina a β restando nell'interno dell'intervallo, supponendo per es. $\alpha<\beta$ e indicando con ε una quantità differente da zero e positiva ma arbitrariamente piccola, si considererà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ come il limite per $\varepsilon=0$ dell'integrale $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$; e se $f(x)$ diviene infinita a tutti e due i limiti α e β soltanto, o pei valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ di x fra α e β (α e β per es. ora esclusi),

si considererà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ come il limite respettivamente dell'integrale $\int_{\alpha+\varepsilon'}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$ o della somma

$$(1) \qquad \int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \int_{\alpha_2+\varepsilon'_2}^{\alpha_3-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \dots + \int_{\alpha_m+\varepsilon'_m}^{\beta} f(x)\,dx$$

quando le quantità ε e ε' o le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2 \dots \varepsilon'_m$ tendono a zero per valori positivi secondo una legge qualunque (*).

E la funzione $f(x)$ si considererà come atta all'integrazione definita fra α e β nel caso soltanto in cui la quantità di cui si cerca il limite abbia effettivamente un limite determinato e finito *indipendente dal modo secondo cui tendono a zero le quantità* $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2 \dots \varepsilon_m, \varepsilon'_m$; e perciò evidentemente, se fra α e β la funzione $f(x)$ diviene infinita soltanto nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ avrà un valore determinato e finito, e per conseguenza $f(x)$ sarà atta all'integrazione fra α e β, soltanto nel caso in cui ciascuno degli integrali che compariscono nella somma (1) di cui si ha da cercare il limite abbia un limite determinato e finito; nel qual caso perciò le ε, potendo esser prese comunque, potranno prendersi anche tutte uguali fra loro, e l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ sarà anche la somma degli integrali $\int_\alpha^{\alpha_1}, \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \dots, \int_{\alpha_m}^{\beta}$.

Lo stesso integrale poi $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ talvolta verrà ancora considerato – ma dicendo allora espressamente che è *infinito* – se uno o più degli stessi integrali (1) tenderanno all'infinito nello stesso senso e al tempo stesso gli altri avranno limiti determinati e finiti o, senza avere limiti determinati e finiti, si comporteranno in modo che nessuno di essi prenda anche valori infinitamente grandi e di segno opposto a quello degli integrali infiniti; e sarà invece completamente indeterminato in tutti gli altri casi.

56. — Pel caso che la funzione $f(x)$ divenisse infinita soltanto in un punto a *interno* all'intervallo d'integrazione (α, β), Cauchy, nell'ipotesi per es. di $\alpha<\beta$, chiamava valore principale dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ il limite della

(*) Con una denominazione da alcuni usata gli integrali così definiti per le funzioni che divengono infinite in uno o più punti vengono detti *integrali impropri*, chiamando allora per contrapposto *integrali propri* quelli delle funzioni che sono sempre finite e atte alla integrazione nell'intervallo al quale gli integrali si estendono.

somma $\int_a^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx$ per ε tendente a zero per valori positivi; quindi adottando noi pure questa denominazione, ed osservando che la somma $\int_a^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon'}^{\beta} f(x)\,dx$ può benissimo non avere un limite determinato quando ε e ε' tendono a zero per valori positivi e indipendentemente l'uno dall'altro, e averlo invece quando fra ε e ε' sussistono certe relazioni (e così in particolare quando $\varepsilon' = \varepsilon$), si potrà dire evidentemente che se l'integrale dato $\int_a^{\beta} f(x)\,dx$ non è determinato il suo valore principale però può benissimo esserlo, e se lo stesso integrale è determinato (finito o infinito), il suo valore, conformemente anche all'osservazione generale fatta sopra, coincide sempre col valore principale.

Così per es. l'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ non è determinato perchè il limite di $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{dx}{x} = \int_1^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{dx}{x} = \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ non è determinato, mentre invece il suo valore principale è determinato ed è zero.

57. — Lo stesso Cauchy poi nella ipotesi, in cui ci teniamo noi pure, che $f(x)$ fra α e β avesse soltanto un numero finito d'infiniti, e supposto sempre $\alpha < \beta$, chiamava integrali definiti singolari, per ognuno dei punti a interni all'intervallo nel quale $f(x)$ diviene infinita, l'uno e l'altro degli integrali $\int_{a-\varepsilon}^{a-k_1\varepsilon} f(x)\,dx$, $\int_{a+k_2\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$ dove k_1 e k_2 sono numeri fissi e positivi qualunque, e ε è pure positivo e arbitrariamente piccolo e tale che fra il massimo e il minimo dei numeri $a-\varepsilon$, $a-k_1\varepsilon$, $a+k_2\varepsilon$, $a+\varepsilon$ non cada altro che il punto a in cui $f(x)$ diviene infinita; qui però modificheremo il concetto di Cauchy e chiameremo *integrali definiti singolari* per il punto a ambedue gli integrali $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$, $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$ dove ε e δ sono positivi e $\delta < \varepsilon$, e ε è talmente piccolo che fra $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ non cada che il punto a nel quale $f(x)$ diviene infinita, e s'intende che nessun legame debba esservi fra δ e ε all'infuori della condizione $\delta < \varepsilon$.

Con questa denominazione, osservando che $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} = \int_a^{a-\delta} - \int_a^{a-\varepsilon}$, $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} = \int_{a+\delta}^{\beta} - \int_{a+\varepsilon}^{\beta}$ e ricordando il noto teorema di Cauchy sui limiti (*Calc. diff.* Introd. § 23 [pag. XXXIII]), si può ora evidentemente affermare che se la funzione $f(x)$ diviene infinita in un numero finito di punti fra α e β (α e β inclus.) affinchè essa sia atta all'integrazione in quest'intervallo è necessario e sufficiente che soddisfi alle condizioni d'integrabilità in ogni porzione d'intervallo nella quale è finita, e che *per ogni punto a in cui diviene infinita, gli integrali definiti singolari* $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$, $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$ *per tutti i valori di δ inferiori ad* ε ($\delta = 0$ escluso) *coll'impiccolire sempre più di* ε *finiscano per divenire e mantenersi poi sempre inferiori in valore assoluto a qualunque quantità data positiva e arbitrariamente piccola* σ, o in altri termini *abbiano per limite zero per* $\varepsilon = 0$ *per ogni valore di δ inferiore ad* ε.

Si intende però che quando il punto a è un estremo dell'intervallo d'integrazione (α, β), per esso non si ha che un solo integrale definito singolare (*).

58. — Così la considerazione degli integrali definiti singolari dà un metodo col quale, senza ricorrere alla definizione, si può spesso arrivare facilmente a riconoscere se una funzione $f(x)$ è atta alla integrazione in un dato intervallo, per quanto in alcuni punti (in numero finito) di questo intervallo essa divenga infinita.

Bastando infatti, per ogni punto d'infinito a di $f(x)$, giudicare della piccolezza o no in valore assoluto di uno o due degli integrali definiti singolari $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$, $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$, la questione sarà ridotta all'esame di uno o due integrali definiti ordinarii in ciascuno dei quali la funzione da integrare è sempre finita nel corso della integrazione; e potendo quindi a questi integrali applicare i teoremi e le trasformazioni date nei capitoli precedenti, potrà darsi che si riesca facilmente a fare i riscontri che occorrono per gli integrali medesimi.

Così ad es. quando la funzione data $f(x)$ sia molto complicata e si debba esaminare l'integrale $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$, potremo spesso in questo sostituire ad $f(x)$ un'altra funzione $\varphi(x)$ che per x compreso fra $a-\varepsilon$ e a (a escl.) sia sempre

---

(*) Nei miei *Fondamenti per la teorica* ecc. ai §§ 216 e seg. [pag 299 e seg.] ho considerato anche il caso in cui la funzione da integrarsi $f(x)$ diviene infinita in un gruppo infinito di punti di prima specie, e per tal caso ho mostrato come sia conveniente di considerare integrali definiti singolari di varii ordini.

E considerando poi tali funzioni anche nel mio libro — già ricordato nella nota della pag. 26 — « *Sulla serie di Fourier* ecc. », al § 13 [pag. 22] ho fatto rilevare che per le funzioni medesime, quando sono atte alla integrazione in un intervallo finito (α, β), i punti d'infinito si possono sempre racchiudere in un numero finito d'intervalli talmente piccoli che non solo sia arbitrariamente piccola la loro somma, ma anche la somma dei valori assoluti degli integrali estesi ad essi sia minore di quel numero che più ci piace σ.

positiva e i cui valori per ogni punto x siano superiori ai valori assoluti corrispondenti di $f(x)$, e allora l'integrale $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$ sarà numericamente inferiore all'altro $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} \varphi(x)\,dx$; e quando questo (come spesso avverrà) possa calcolarsi, se si riscontrerà che esso risulta inferiore a σ si concluderà subito senz'altro che altrettanto avviene dell'integrale $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)\,dx$.

59. — Dietro la definizione che abbiamo data dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ quando $f(x)$ diviene infinita in un numero finito di punti nell'intervallo (α, β) e in questo intervallo è atta all'integrazione definita, e dietro le proprietà dimostrate nel § 8 [pag. 28 e seg.] per gli integrali estesi ad intervalli nei quali $f(x)$ è sempre finita, si vede subito che *l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ sarà ancora una funzione finita e continua $F(x)$ di x per tutti i valori di x fra α e β (i limiti α e β inclusi),* perchè se x sarà un punto dove $f(x)$ è finita, per h abbastanza piccolo si avrà

$$F(x+h) = F(x) + \int_x^{x+h} f(x)\,dx = F(x) + \theta h\,,$$

essendo θ un numero compreso fra i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ fra x e $x+h$, e quindi sarà $\lim F(x+h) = F(x)$; e se x è un punto dove $f(x)$ è infinita sarà ancora

$$F(x) = \lim_{h=0} \int_\alpha^{x-h} f(x)\,dx = \lim_{h=0} F(x-h)$$

tanto per h positivo che per h negativo.

60. — Inoltre in tutti i punti x nei quali $f(x)$ è finita e continua si avrà ancora $F'(x) = f(x)$, e nei punti dove $f(x)$, essendo ancora finita, è discontinua e ha una discontinuità di prima specie la derivata di $f(x)$ a destra sarà $f(x+0)$ e quella a sinistra sarà $f(x-0)$.

E se si ricorda il teorema degli accrescimenti finiti che è contenuto nella formola $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x+\theta h)$ con $0 < \theta < 1$, e che vale quando fra x e $x+h$ (x e $x+h$ incl. o no) $F(x)$ ha una derivata determinata e finita o infinita e determinata di segno, si vede subito che quando, considerando la nostra funzione $f(x)$ in intorni sufficientemente piccoli dei suoi punti x d'in-

finito, si trova che essa è finita e continua per ogni punto fuori di x per modo da essere sicuri che $F'(x+\theta h) = f(x+\theta h)$, allora *se il limite dei valori di $f(x+\varepsilon)$ per $\varepsilon = \pm 0$ è l'infinito, la derivata dell'integrale negli stessi punti x d'infinito di $f(x)$ a destra o a sinistra sarà l'infinito, e avrà il segno del limite di $f(x+\varepsilon)$ per $\varepsilon = +0$ o per $\varepsilon = -0$ respettivamente;* talchè l'incertezza intorno alla natura della derivata dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ resta soltanto pei punti x nei quali $f(x)$ è finita o infinita ma ha discontinuità di seconda specie e in quelli nei quali $f(x)$ diviene infinita senza che fuori di x negli intorni di questi punti x la funzione $f(x)$ sia continua; e si potrebbe anche vedere che alcune di queste eccezioni potrebbero facilmente esser tolte.

61. — Essendo poi al solito $f(x)$ una funzione che fra α e β ha un numero finito di infiniti nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ma è ancora atta alla integrazione e fuori degli stessi punti è continua o ha soltanto discontinuità di prima specie, se si troverà una funzione $\varphi(x)$ *sempre* finita e continua fra α e β che nei punti x dove $f(x)$ è finita e continua ha per derivata $f(x)$, e in quelli dove $f(x)$ è discontinua, a destra ha per derivata $f(x+0)$ e a sinistra ha per derivata $f(x-0)$, restando così l'incertezza soltanto pei punti dove $f(x)$ diviene infinita, si può ancora asserire che sarà $\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclusi), e rimarrà così estesa questa formola anche al caso in cui la funzione da integrarsi $f(x)$ divenga infinita fra i limiti d'integrazione.

È chiaro infatti che, sotto queste condizioni, supposto per es. che gli infiniti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ non cadano nel punto α nè nel punto x, e x sia per es. dopo il punto α_p, si avrà (§ 9 [pag. 31-32])

$$(2)\quad \varphi(\alpha_1 - \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha_1 - \varepsilon_1} f(x)\,dx\,,\ \varphi(\alpha_2 - \varepsilon_2) - \varphi(\alpha_1 + \varepsilon_1) = \int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2 - \varepsilon_2} f(x)\,dx, \dots$$

$$\dots, \varphi(x) - \varphi(\alpha_p + \varepsilon_p) = \int_{\alpha_p + \varepsilon_p}^x f(x)\,dx\,;$$

e se uno dei punti α e x o tutti e due saranno punti dove $f(x)$ diviene infinita, una delle due equazioni prima e ultima o tutte e due prenderanno la forma dell'equazione seconda; quindi sommando queste equazioni e avendo riguardo alla continuità di $\varphi(x)$ e alla definizione degli integrali, e passando al limite per $\varepsilon_1 = 0\,,\ \varepsilon_2 = 0\,,\ \dots\,,\ \varepsilon_p = 0$ si avrà in tutti i casi

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx\,, \tag{3}$$

come volevamo dimostrare (*).

62. — Osserviamo poi che quando fra α e β la funzione $f(x)$ diviene infinita soltanto in un numero finito di punti ed è atta alla integrazione in tutti gli intervalli $(p\,,q)$ nei quali è finita, la esistenza di una funzione $\varphi(x)$ che sia finita e continua *nell'intiero intervallo da* α β, e che in questi intervalli $(p\,,q)$ serva a rappresentare sempre l'integrale $\int_p^q f(x)\,dx$, per modo che sia $\varphi(p) - \varphi(q) = \int_p^q f(x)\,dx$ porta necessariamente che si abbiano le equazioni (2), e quindi che gli integrali che in esse compariscono abbiano tutti limiti determinati e finiti per $\varepsilon_1 = 0\,,\ \varepsilon_2 = 0\,,\ \dots\,,\ \varepsilon_p = 0$.

Si concluderà da ciò che *l'esistenza di una tal funzione* $\varphi(x)$ *porta di necessità che la funzione* $f(x)$ *sia atta all'integrazione in tutto l'intervallo da* α *a* β *e che sia* $\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx$ *per tutti i valori di* x *fra* α *e* β (α e β incl.); talchè *in particolare* osservando che, se in un certo intervallo $(p\,,q)$ una funzione finita e continua $F(x)$ ha una derivata pur finita e continua $F'(x)$, si ha $F(p) - F(q) = \int_p^q F'(x)\,dx$, si può anche asserire che *se una funzione finita e continua* $F(x)$ *di* x *fra* α *e* β *ha sempre una derivata* $F'(x)$, *che se*

(*) La condizione che qui abbiamo posta che $f(x)$ nei punti dove è finita, se non è continua, non abbia che discontinuità di prima specie viene da quella che ponemmo per semplicità nel § 9 [pag. 32] quando volemmo giungere alla formola corrispondente alla (3) nei tratti nei quali $f(x)$ è sempre finita e atta alla integrazione.

S'intende subito però che, mantenendo sempre la condizione della continuità di $\varphi(x)$ e della integrabilità di $f(x)$ in tutto l'intervallo $(\alpha\,,\beta)$, la formola stessa (3) applicata ai tratti nei quali $f(x)$ è finita e anche a quelli che comprendono i punti d'infinito sussiste in casi ben più generali; e in particolare essa sussiste quando i punti di discontinuità (di prima o seconda specie) di $f(x)$ nei tratti nei quali è finita costituiscono un gruppo di punti di prima specie o più generalmente un gruppo di punti rinchiudibile; perchè allora la differenza $\varphi(x) - \int_\alpha^x f(x)\,dx$ considerata nei tratti η_1, nei quali $f(x)$ è finita, dovendo essere costante in quei *tratti parziali* di η_1, nei quali $f(x)$ è anche continua, sarà sempre uguale *alla stessa costante* $\varphi(\alpha)$ pei valori di x in tutti i detti *tratti intieri* η_1.

diviene infinita lo diviene soltanto in un numero finito di punti, e in tutti gli altri è sempre continua, si avrà

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x F'(x)\,dx$$

per tutti i valori di x *fra* α *e* β *(*α *e* β *inclus.); e se (secondo le denominazioni del* § 12 [pag. 37]) $\varphi(x)$ *è un integrale indefinito sempre finito e continuo di una funzione* $f(x)$ *che fra* α *e* β *diviene infinita soltanto in un numero finito di punti* [integrale che può supporsi ottenuto cercando una funzione la cui derivata in tutti i punti dove $f(x)$ è finita e continua sia la stessa $f(x)$], *allora la funzione* $f(x)$ *sarà atta alla integrazione nell'intero intervallo* $(\alpha\,,\beta)$, *e l'integrale definito* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *si otterrà ancora prendendo per esso la differenza* $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

63. — Le considerazioni precedenti danno in sostanza tre modi diversi per riconoscere se la presenza di un punto d'infinito in un intervallo $(\alpha\,,\beta)$ per una funzione $f(x)$ faccia perdere o no a questa funzione la sua integrabilità, supposto naturalmente che essa sia integrabile in ogni porzione dell'intervallo nella quale è finita.

Questi tre modi risultano evidentemente il primo dalla definizione, il secondo (come già dicemmo) dalla considerazione degli integrali definiti singolari, e il terzo da quella degli integrali indefiniti; ma più semplicemente in molti casi si può arrivare a decidere della integrabilità o no di una funzione $f(x)$ che diviene infinita in punto valendosi del seguente

Teorema. — *Se la funzione* $f(x)$ *per* $x = \beta$ *diviene infinita, e fra* α *e* $\beta - \varepsilon$, *essendo* $\alpha < \beta$, *per quanto piccolo si prenda il numero positivo* ε *è sempre finita e atta all'integrazione, allora*

a) l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ *sarà finito e determinato tutte le volte che* $f(x)$ *per* $x = \beta$ *diviene infinita di ordine inferiore o uguale, o anche semplicemente non maggiore, di quello di una qualunque delle funzioni*

$$\frac{1}{(\beta - x)^\mu}\,,\ \frac{1}{(\beta - x)[\log(\beta - x)]^{1+\mu}}\,,\ \frac{1}{(\beta - x)\log(\beta - x)[\log^2(\beta - x)]^{1+\mu}}\,,\ \dots \tag{4}$$

dove μ *è una quantità determinata differente da zero e positiva e che nella prima funzione è inferiore all'unità;*

b) lo stesso integrale sarà invece infinito tutte le volte che coll'avvicinarsi di x *a* β *la funzione* $f(x)$ *finisce per restar sempre dello stesso segno,* *e per $x = \beta$ diviene infinita di ordine superiore o uguale, o anche semplicemente non minore, di quello di una delle funzioni*

$$(5)\qquad \frac{1}{\beta - x},\ \frac{1}{(\beta - x)\log(\beta - x)},\ \frac{1}{(\beta - x)\log(\beta - x)\log^2(\beta - x)},\ \ldots$$

intendendo sempre che $\log^2(\beta - x)$, ... *indichino le quantità* $\log[\log(\beta - x)]$, ..., *e propriamente intendendo anche che pei varii logaritmi successivi* (quelli cioè pei quali devono esser presi i logaritmi più volte di seguito o devono essere fatte loro potenze $1+\mu$) *siano sempre presi i loro valori assoluti, ecc.* ...

Per dimostrare la prima parte di questo teorema incominciamo dall'osservare che, per le ipotesi che allora si hanno, si potrà sempre trovare un numero ε tale che una delle quantità

$$f(x)(\beta - x)^{\mu},\ f(x)(\beta - x)[\log(\beta - x)]^{1+\mu},\ f(x)(\beta - x)\log(\beta - x)[\log^2(\beta - x)]^{1+\mu}, \ldots$$

pei valori di x fra $\beta - \varepsilon$ e β (β escluso) resti sempre numericamente inferiore a una quantità finita e positiva c; e quindi l'integrale definito singolare $\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)\,dx$ sarà numericamente inferiore a una delle quantità

$$c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta - x)^{\mu}},\ c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta - x)[\log(\beta - x)]^{1+\mu}},\ c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta - x)\log(\beta - x)[\log^2(\beta - x)]^{1+\mu}},\ \ldots$$

le quali sono respettivamente eguali alle altre

$$\frac{c}{1-\mu}\left(\varepsilon^{1-\mu} - \delta^{1-\mu}\right),\ \frac{c}{\mu}\left\{\left(\log\varepsilon\right)^{-\mu} - \left(\log\delta\right)^{-\mu}\right\},\ \frac{c}{\mu}\left\{\left(\log^2\varepsilon\right)^{-\mu} - \left(\log^2\delta\right)^{-\mu}\right\},\ \ldots$$

e perciò evidentemente si avrà $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)\,dx = 0$ per tutti i valori di δ inferiori ad ε ($\delta = 0$ escluso), ciò che dimostra appunto la prima parte del teorema (§ 57 [pag. 98-99]).

64. — Per dimostrare ora anche la seconda parte del teorema, si osservi che se ε è un numero positivo già sufficientemente piccolo, esisterà allora un numero γ fra α e $\beta - \varepsilon$ dotato della proprietà che per tutti i valori di x fra γ e β (γ incluso e β escluso) la funzione $f(x)$ abbia sempre lo stesso segno; e si potrà porre

$$\int_{\alpha}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx\,;$$

e poichè il primo integrale del secondo membro è determinato e finito, per studiare l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ basterà cercare il limite dell'altro $\int_{\gamma}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$, per ε positivo e tendente a zero.

Ma, per le ipotesi che ora si hanno, con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel caso precedente, si vede subito che, se c è una quantità positiva diversa da zero e γ_1 è un numero fisso fra γ e β abbastanza vicino a β, l'integrale $\int_{\gamma_1}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$ per tutti i valori di ε inferiori a un certo limite è numericamente maggiore di una delle quantità

$$c\int_{\gamma_1}^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{\beta - x},\ c\int_{\gamma_1}^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta - x)\log(\beta - x)},\ c\int_{\gamma_1}^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta - x)\log(\beta - x)\log^2(\beta - x)}, \ldots$$

le quali in valore assoluto sono respettivamente uguali alle altre

$$c\left\{\log\varepsilon - \log(\beta - \gamma_1)\right\},\ c\left\{\log^2\varepsilon - \log^2(\beta - \gamma_1)\right\},\ c\left\{\log^3\varepsilon - \log^3(\beta - \gamma_1)\right\},\ \ldots$$

e crescono quindi indefinitamente coll'impiccolire indefinito di ε; dunque si ha $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\gamma}^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx = \pm\infty$, e con ciò resta evidentemente dimostrata la seconda parte del teorema.

65. — È da notare che questa seconda parte del teorema dimostrato può cessare di sussistere quando (contrariamente appunto a quello che si è ammesso nell'enunciato del teorema) $f(x)$ cangi continuamente di segno, o quando passi continuamente per zero coll'avvicinarsi indefinitamente di x a β, nonostante che tenendo conto soltanto di *alcuni* dei valori assoluti che prende $f(x)$ quando x si avvicina indefinitamente a β, potrebbe dirsi che questi valori crescono indefinitamente di ordine uguale o superiore a quello delle quantità (4).

E che questo possa avvenire, s'intende bene pensando che i continui cambiamenti di segno di $f(x)$ in vicinanza di $x = \beta$ possono benissimo far sì che si distruggano successivamente fra loro quegli elementi dell'integrale che, quando fossero tutti dello stesso segno, riuniti renderebbero infinito l'integrale, ecc. ...; e del resto ciò effettivamente si riscontra per es. pei due integrali $\int_0^b \frac{\mathrm{sen}\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$, $\int_0^b\left(\mathrm{sen}\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right)dx$ dei quali il primo per la definizione, dovendo risultare dal prendere il limite per $\varepsilon = 0$ di $\cos\frac{1}{b} - \cos\frac{1}{\varepsilon}$, è indeterminato, e il secondo, essendo uguale a $\lim_{\varepsilon=0}\left(b\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{b} - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\varepsilon}\right)$, è determinato e finito ed è uguale a $b\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{b}$.

66. — S'intende poi come il teorema dimostrato possa benissimo trovare applicazione effettiva per riconoscere se un dato integrale sia o no determinato e finito.

Così per es. pel teorema stesso si riscontra subito che gli integrali

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,,\quad \int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx}{\mathrm{sen}^{\frac{4}{3}}(x-a)\,\mathrm{sen}^{\frac{4}{3}}(x-b)}\,,\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\,dx}{\sqrt{\mathrm{sen}\,x}}\,,$$

$\int_0^1 \frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\,dx}{\mathrm{sen}\,x\,(\log x)^2}$, e così l'altro $\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n dx$, nel quale a è diverso da zero e positivo e n è zero o è positivo, sono determinati e finiti, mentre gli integrali $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\mathrm{sen}\,x\log x}\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\mathrm{sen}\,x}\,,\ldots$ sono tutti infiniti.

67. — Aggiungiamo che, degli integrali precedenti, i due $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ e $\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n dx$, quando in quest'ultimo n si suppone zero o intero e positivo e $a>0$, si determinano con tutta facilità.

Pel primo di questi, osservando che il prodotto $(x-a)(b-x)$ può porsi sotto la forma $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, si vede subito che l'integrale indefinito $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ pei valori di x fra a e b è $\mathrm{arcsen}\,\frac{2x-a-b}{b-a} + \mathrm{C}$, e quindi per $b>a$ si trova subito la formola notevole

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi\,, \tag{6}$$

che dà il valore del primo integrale.

Pel secondo integrale poi osserveremo che colla integrazione per parti si ha

$$\int x^{a-1}(\log x)^n dx = \frac{x^a(\log x)^n}{a} - \frac{n}{a}\int x^{a-1}(\log x)^{n-1}dx\,;$$

e questa formola, quando a è positivo, varrà sempre per x fra 0 e 1 e prossimo quanto si vuole a 0 e a 1 perchè le funzioni $x^{a-1}(\log x)^n$ e $x^{a-1}(\log x)^{n-1}$ sono atte alla integrazione in questo intervallo; quindi evidentemente sarà

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n dx = -\frac{n}{a}\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^{n-1}dx\,,$$

e cambiando successivamente n in $n-1\,, n-2\,,\ldots,\,2\,,1$ e poi moltiplicando membro a membro le formole che si ottengono, si giungerà subito all'altra

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n dx = (-1)^n \frac{\pi(n)}{a^{n+1}} \tag{7}$$

che dà il valore cercato dell'integrale $\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n dx$ sotto le fatte ipotesi di $a>0$ e n zero o intero e positivo.

68. — Ci è utile ora di fare vedere che se $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ sono due funzioni di x atte all'integrazione che non divengono infinite fra α e β altro che in un numero finito di punti, *senza però divenire mai infinite insieme* (cioè senza divenire infinite ambedue negli stessi punti), *la funzione prodotto $f(x)\mathrm{F}(x)$ sarà atta essa pure alla integrazione fra α e β tutte le volte che ambedue le funzioni $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ restano atte all'integrazione anche riducendole alle funzioni $f_1(x)$ e $\mathrm{F}_1(x)$ dei loro valori assoluti* (*).

Osserviamo infatti che se $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ sono atte all'integrazione fra α e β, negli intervalli nei quali sono entrambe finite anche il loro prodotto è atto all'integrazione (§ 7-5.° [pag. 17]), talchè basta cercare se per questo prodotto sono soddisfatte le condizioni di integrabilità derivanti dal fatto dell'esistenza di alcuni punti dove una delle due funzioni $f(x)$ o $\mathrm{F}(x)$ diviene infinita.

Sia perciò α_1 un punto dove una delle due funzioni per es. $\mathrm{F}(x)$ diviene infinita.

(*) In seguito poi daremo anche altri casi d'integrabilità dei prodotti delle funzioni che divengono infinite in uno o più punti, sempre però senza divenire infinite insieme.

Esaminando l'integrale definito singolare $\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1-\delta} f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx$, e osservando che, siccome $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ non divengono infinite insieme, $f(x)$ sarà finita negli intorni di α_1, si vede subito che se M è un numero finito maggiore dei valori assoluti di $f(x)$ in un intorno $(\alpha_1-\varepsilon_1, \alpha_1)$ a sinistra di α_1, essendo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, si avrà in valore assoluto $\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1-\delta} f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx < \mathrm{M}\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1-\delta} \mathrm{F}_1(x)\,dx$, e quindi, per le condizioni poste sopra, l'integrale definito singolare $\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1-\delta} f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx$ coll'impiccolire di ε per tutti i valori di δ inferiori a ε sarà piccolo quanto si vuole.

Lo stesso avviene dell'integrale definito singolare $\int_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_1+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx$, e quindi sono soddisfatte le condizioni d'integrabilità del prodotto $\mathrm{F}(x) f(x)$ pel punto α_1; e poichè ugualmente si vede che esse sono soddisfatte per tutti gli altri punti di infinito di $f(x)$ o di $\mathrm{F}(x)$, il teorema resta dimostrato.

Notiamo che potrebbe avvenire che qualche infinito di $f(x)$ non comparisse nel prodotto $f(x)\,\mathrm{F}(x)$ per essere esso distrutto da un infinitesimo di $\mathrm{F}(x)$, e ciò renderebbe *a fortiori* integrabile il prodotto $f(x)\,\mathrm{F}(x)$; e notiamo anche che la condizione che le funzioni $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ restino atte all'integrazione anche ridotte ai loro valori assoluti o, come si dice, siano *integrabili assolutamente*, basta verificarla soltanto per ciò che si riferisce agli intorni dei punti d'infinito, perchè negli intervalli nei quali una funzione è finita, l'essere questa funzione atta all'integrazione porta che lo sia anche la funzione formata coi suoi valori assoluti (§ 7-10° [pag. 23]). E si noterà pure che, se una delle due funzioni $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ rimane sempre finita fra α e β per essa non avremo altra condizione che quella di essere atta alla integrazione fra α e β.

VII.

Integrali fra limiti infiniti

Considerazioni e teoremi generali.

69. — Finora abbiamo considerato le funzioni da integrarsi soltanto in intervalli (α, β) di ampiezza finita. Ora supporremo che le funzioni stesse siano date in intervalli di ampiezza infinita (cioè maggiore di qualunque numero dato), e considereremo anche gli integrali di queste funzioni in questi intervalli.

Incominceremo perciò col dire che se $f(x)$ è una funzione, sempre finita o no, che è atta alla integrazione in ogni porzione finita — ma grande quanto si vuole — dell'intervallo in cui si considera, per valore dell'integrale definito $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ o $\int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx$ dove α è finito, s'intende il limite dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ o $\int_{-\beta}^\alpha f(x)\,dx$ per β crescente indefinitamente per valori positivi; e per valore dell'integrale $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ s'intende il limite dell'integrale $\int_{-\alpha}^\beta f(x)\,dx$ per α e β crescenti indefinitamente per valori positivi e *indipendentemente l'uno dall'altro;* e, facendo ancora le solite distinzioni pei casi in cui questi limiti sono finiti e determinati, o sono infiniti o non esistono si dice che una funzione $f(x)$ è atta all'integrazione definita fra α e ∞, o fra $-\infty$ e α, o fra $-\infty$ e ∞ quando l'integrale corrispondente $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito (*).

(*) Anche gli integrali definiti pei quali uno almeno dei limiti è infinito, con una denominazione che talvolta si usa, si dicono *improprii*, e più spesso anche *integrali improprii fra limiti infiniti*, per distinguerli dagli altri fra limiti finiti per funzioni che divengono infinite, che pure si sono chiamati integrali improprii (pag. 97 in nota).

Aggiungiamo poi che, seguendo il Cauchy, si chiama *valore principale* dell'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ il limite dell'integrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$ per α crescente indefinitamente per valori positivi, e osserviamo che con questa denominazione si può dire che anche quando l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (secondo il significato che noi gli attribuiamo) non sia determinato, il suo valore principale però potrà esserlo; e quando l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ sia determinato il suo valore coinciderà sempre col valore principale.

70. — Ricordiamo anche che Cauchy chiamava integrali definiti singolari l'uno e l'altro dei due integrali $\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx$, $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx$ dove μ e ν sono numeri positivi qualunque, e ε è pure positivo e arbitrariamente piccolo; ma noi modificheremo il concetto del Cauchy, e chiameremo *integrali definiti singolari* gli integrali $\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f(x)\,dx$, $\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\,dx$ dove β e γ sono positivi, β è arbitrariamente grande e γ *è un numero positivo qualunque;* e faremo notare che, dietro questa definizione, pei soliti teoremi di Cauchy sui limiti, si può ora affermare che onde una funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione definita in un intervallo di ampiezza infinita (α, ∞), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, \infty)$ è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle condizioni di integrabilità in qualunque porzione finita, ma grande quanto si vuole, dello stesso intervallo, e che *gli integrali definiti singolari corrispondenti* $\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)\,dx$, $\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f(x)\,dx$ *abbiano per limite zero per* $\beta=\infty$ *qualunque sia* γ *purchè positivo.*

71. — Osserveremo poi che se (considerando, come spesso si fa, $x=+\infty$ e $x=-\infty$ come punti speciali), una funzione $f(x)$ si dice *continua* per $x=+\infty$ o $x=-\infty$ quando il valore che ha o che le si attribuisce in questi punti è il limite dei valori di $f(x)$ per x crescente indefinitamente per valori positivi o per valori negativi respettivamente, si potrà allora affermare evidentemente che, se $f(x)$ è una funzione atta all'integrazione definita fra α e $+\infty$, o fra $-\infty$ e α, o fra $-\infty$ e $+\infty$, l'integrale $\int_{c}^{x} f(x)\,dx$ dove c è un valore fisso qualunque preso nell'intervallo corrispondente ($+\infty$ o $-\infty$ inclusi), considerato come funzione di x è una funzione finita e continua per tutti i valori di x fra α e $+\infty$, o fra $-\infty$ e α, o fra $-\infty$

e $+\infty$ respettivamente, e in particolare *essa è continua* per $x=+\infty$ o $x=-\infty$.

72. — D'ora innanzi il più spesso ci limiteremo a considerare gli integrali $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ nei quali il limite superiore è $+\infty$ e l'inferiore è una quantità finita α, giacchè gli integrali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nei quali i due limiti sono infiniti si possono ridurre ai due $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$ e $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ nei quali un solo limite è infinito, e il primo di questi si riduce immediatamente all'altro prendendo per variabile $-x$ invece di x.

E trattandosi dell'integrale $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ nel supposto che $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e ∞, osserveremo che si può dire anche che se $F(x)$ è una funzione di x finita e continua per tutti i valori di x fra α e $+\infty$ ($+\infty$ incluso) e insieme a $f(x)$ soddisfa alle condizioni per le quali si ha

$$F(x)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx \tag{1}$$

per tutti i valori finiti di x, allora, a causa della continuità tanto di $F(x)$ che dell'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$ per $x=\infty$, si potrà dire che questa formola sussisterà anche per $x=\infty$, e si avrà cioè

$$F(\infty)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

E anzi quando, senza sapere come si comporti una funzione $f(x)$ al crescere indefinito di x per ciò che riguarda la sua integrabilità, si sappia che essa è atta all'integrazione in qualunque intervallo finito comunque grande, e si sappia altresì che esiste una funzione $F(x)$ di x *finita continua anche per* $x=\infty$, e per la quale si ha la formola (1) per tutti i valori *finiti* di x fra α e ∞, allora siccome da questa formola risulta che l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx$ avrà un limite determinato e finito $F(\infty)-F(\alpha)$ per $x=+\infty$ si può affermare che *l'essere* $f(x)$ *atta all'integrazione fra* α *e* ∞ *sarà sempre conseguenza di questi dati intorno a* $f(x)$ *e a* $F(x)$; cioè, senza occuparci del modo di comportarsi di $f(x)$ col crescere indefinito di x, si potrà dire che *quando è soddisfatta la condizione indicata* — quella cioè della esistenza della indicata funzione $F(x)$ finita e continua anche all'infinito — *ferme restando le altre condizioni a distanza finita, la stessa funzione $f(x)$ sarà necessariamente atta all'integrazione anche fra α e ∞ e si avrà la formola* (2).

E in particolare se fra α e ∞ (∞ incluso) una funzione $F(x)$ è finita e continua, e per ogni valore finito di x fra α e ∞ ammette una derivata $F'(x)$ che è finita e continua essa pure, o che in ogni intervallo finito diviene infinita o cessa di esistere soltanto in un numero finito di punti, allora per tutti i valori di x fra α e $\infty (x=\infty$ incluso) si avrà la formola $F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x F'(x)\,dx$.

E se, seguendo ancora le denominazioni del § 12 (pag. 37 e seg.), la funzione $\varphi(x)$ sarà un integrale indefinito qualsiasi di una funzione $f(x)$ che è sempre finita e continua o diviene infinita o discontinua soltanto in un numero finito di punti in ogni intervallo finito, e se questo integrale indefinito $\varphi(x)$ sarà finito e continuo per tutti i valori di x fra α e ∞ (∞ incluso) si avrà

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(\alpha)$$

per tutti i valori di x fra α e ∞ (∞ incluso), e così in particolare si avrà

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \varphi(\infty) - \varphi(\alpha),$$

come pel caso degli integrali fra limiti finiti.

73. — Le considerazioni precedenti mettono in evidenza come — analogamente a quanto rilevammo nel capitolo precedente per le funzioni che divengono infinite a distanza finita — per giudicare se una funzione $f(x)$ resta atta alla integrazione anche al crescere indefinito di x si hanno tre metodi derivanti uno dalla definizione, uno dalla considerazione degli integrali definiti singolari, e il terzo dalla considerazione degli integrali indefiniti che siano stati determinati a distanza finita.

In molti casi poi per decidere se l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha o no un valore determinato o finito basterà fare uso del teorema seguente che risulta dai metodi stessi e che è del tutto analogo a quello del § 63 [pag. 103].

« *Se la funzione $f(x)$ è atta all'integrazione fra α e un numero finito ma grande quanto si vuole e positivo β, allora*

a) l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ avrà un valore determinato e finito tutte le volte che la funzione stessa $f(x)$ col crescere indefinito di x diviene infinitesima di

ordine superiore o uguale, o anche soltanto non minore, di quello di una qualunque delle funzioni

$$\frac{1}{x^{1+\mu}},\quad \frac{1}{x(\log x)^{1+\mu}},\quad \frac{1}{x\log x(\log^2 x)^{1+\mu}},\dots$$

nelle quali μ è un numero determinato differente da zero e positivo;

b) lo stesso integrale sarà invece infinito tutte le volte che la funzione $f(x)$ a partire da un certo valore x' fino a valori comunque grandi di x, oltre a conservar sempre lo stesso segno, si mantiene discosta da zero più di una quantità determinata o, se tende a zero col crescere indefinito di x, diviene infinitesima soltanto di ordine inferiore o uguale, o anche soltanto non maggiore, di quello di una delle funzioni

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x\log x},\quad \frac{1}{x\log x\log^2 x},\dots$$

La dimostrazione di questo teorema si fa con ragionamenti del tutto simili a quelli dei §§ 63 e 64 [pag. 103 e seg.].

Per la prima parte infatti si osserva che, per le ipotesi fatte, esisterà un numero β' tale che per tutti i valori di x superiori a β' una delle quantità

$$f(x)\,x^{1+\mu},\quad f(x)\,x(\log x)^{1+\mu},\quad f(x)\,x\log x(\log^2 x)^{1+\mu},\dots$$

sarà sempre numericamente inferiore a una quantità finita e positiva c, e quindi, per $\beta > \beta'$ e γ qualunque ma positivo, l'integrale definito singolare $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)\,dx$ sarà numericamente inferiore a una delle quantità

$$c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x^{1+\mu}},\quad c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x(\log x)^{1+\mu}},\quad c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x\log x(\log^2 x)^{1+\mu}},\dots$$

le quali sono respettivamente uguali alle altre

$$\frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{\beta^\mu}-\frac{1}{(\beta+\gamma)^\mu}\right\},\quad \frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{(\log\beta)^\mu}-\frac{1}{[\log(\beta+\gamma)]^\mu}\right\},\quad \frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{(\log^2\beta)^\mu}-\frac{1}{[\log^2(\beta+\gamma)]^\mu}\right\},\dots$$

che per β crescente indefinitamente tendono a zero qualunque sia il numero positivo γ; e si concluderà perciò che nel caso attuale l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito.

Per dimostrare la seconda parte del teorema si osserva che, indicando con γ un numero positivo tale che per $x \geq \gamma$ la funzione $f(x)$ abbia sempre lo stesso segno, si potrà porre

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx\,,$$

e siccome il primo integrale del secondo membro $\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito, basterà occuparci del limite del secondo integrale $\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$ per $\beta = \infty$.

Ma, supponendo γ abbastanza grande e indicando con c una conveniente quantità diversa da zero e positiva, è certo che pei valori di x superiori a γ una delle quantità

$$f(x)\ ,\ f(x)x\ ,\ f(x)x\log x\ ,\ f(x)x\log x\log^2 x\ ,\ldots$$

si manterrà sempre superiore a c in valore assoluto e avrà sempre uno stesso segno; quindi l'integrale $\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$ sarà numericamente maggiore di uno degli integrali

$$c\int_\gamma^\beta dx\ ,\ c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x}\ ,\ c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x\log x}\ ,\ c\int_\gamma \frac{dx}{x\log x\log^2 x}\ ,\ldots$$

i quali sono respettivamente uguali alle quantità

$$c(\beta-\gamma)\ ,\ c(\log\beta-\log\gamma)\ ,\ c(\log^2\beta-\log^2\gamma)\ ,\ c(\log^3\beta-\log^3\gamma)\ ,\ldots$$

che crescono indefinitamente con β, talchè evidentemente si può concludere che l'integrale $\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$, e così l'altro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ avranno per limite $\pm\infty$ per $\beta = \infty$, ciò che dimostra la seconda parte del teorema.

74. — Notiamo (come del resto apparisce chiaro anche dalla dimostrazione fatta) che la condizione posta per la seconda parte del teorema – quella cioè che la funzione $f(x)$ da un certo valore di x in poi *non cangi di segno e non passi più per zero altro che divenendo infinitesima per* $x = \infty$ – viene richiesta onde potere assicurare che *l'integrale è infinito;* e anzi quando la detta condizione non si verifica avviene spesso che gli integrali corrispondenti $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ non siano infiniti.

Di questo infatti si hanno esempi semplici negli integrali

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx\ ,\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}}\ ,\ \int_0^\infty \cos x^2 dx\ ,\ \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx\ ,\ \int_0^\infty \sqrt{x}\cos x^2 dx\ ,$$

nel primo dei quali b è una costante qualunque diversa da zero, e negli ultimi tre la funzione sotto il segno non tende neppure a zero al crescere indefinito di x e anzi nell'ultimo prende *anche* valori infinitamente grandi.

Applicando infatti l'integrazione per parti agli integrali definiti singolari corrispondenti col prendere per fattore differenziale per il primo integrale $\operatorname{sen} bx\,dx$, pel secondo $\operatorname{sen} x\,dx$, pel terzo $\cos x^2\,2x\,dx$, pel quarto $\operatorname{sen} x^2\,2x\,dx$ e pel quinto $\cos x^2\,2x\,dx$, si troverà subito che

$$\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = -\frac{\cos b(\beta+\gamma)}{b(\beta+\gamma)} + \frac{\cos b\beta}{b\beta} - \frac{1}{b}\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\cos bx}{x^2}\,dx\,,$$

$$\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sqrt{\beta+\gamma}} + \frac{\cos\beta}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{2}\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx\,,$$

$$\int_\beta^{\beta+\gamma} \cos x^2\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)^2}{2(\beta+\gamma)} - \frac{\operatorname{sen}\beta^2}{2\beta} + \frac{1}{2}\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx\,,$$

$$\int_\beta^{\beta+\gamma} \operatorname{sen} x^2\,dx = -\frac{\cos(\beta+\gamma)^2}{2(\beta+\gamma)} + \frac{\cos\beta^2}{2\beta} - \frac{1}{2}\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx\,,$$

$$\int_\beta^{\beta+\gamma} \sqrt{x}\cos x^2\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)^2}{2\sqrt{\beta+\gamma}} - \frac{\operatorname{sen}\beta^2}{2\sqrt{\beta}} + \frac{1}{4}\int_\beta^{\beta+\gamma} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx\,,$$

e avendo riguardo alla prima parte del teorema dimostrato si vede di qui che, qualunque sia il numero positivo γ, questi integrali definiti singolari hanno tutti per limite zero per $\beta = \infty$, e perciò *gli integrali* (3) *hanno tutti valori determinati e finiti.*

Similmente gli integrali

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx\ ,\ \int_0^\infty \log x\cos x\,dx\ ,\ \int_0^\infty x\operatorname{sen} x\,dx$$

non sono infiniti, e neppure sono determinati e finiti, perchè col calcolo immediato pel primo, e colla integrazione per parti per gli altri due si vede subito che gli integrali definiti corrispondenti $\int_0^\beta$ presi fra 0 e β, al crescere indefinito di β oscillano sempre fra -1 e 1 pel primo, e fra numeri negativi e positivi indefinitamente crescenti in valore assoluto per gli altri due.

75. — S'intende subito poi come il teorema dimostrato sopra potrà spesso avere una grandissima utilità per riconoscere se un integrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ abbia o no un valore finito e determinato.

Così per es. si vede subito per esso che gli integrali

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x+\operatorname{sen}^2 x)(\log x)^2}\,, \quad \int_1^\infty \frac{\sqrt{x(x-1)}}{1+x+x^3+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1+e^x+\cos x}\,, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2}\,, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx \end{cases}$$

sono tutti determinati e finiti quando si ammetta che nel quarto di essi a e b siano diversi da zero e positivi, nel quinto n sia superiore a -1, e nel sesto $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano funzioni reali razionali intere di x prime fra loro, la prima delle quali $\varphi(x)$ sia di grado inferiore alla seconda $\psi(x)$ almeno di due unità, e inoltre quest'ultima sia di grado pari e tale che la equazione $\psi(x)=0$ abbia tutte le sue radici immaginarie.

Invece per lo stesso teorema gli integrali

$$\int_1^\infty \frac{(1+\sqrt{x})\,dx}{x+\operatorname{sen}^2 x}\,, \quad \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{a+bx^2}\,dx\,, \quad \int_1^\infty \frac{\sqrt{x(x-1)}\,dx}{1+x+x^2+\operatorname{sen}^2 x}\,,$$

nel secondo dei quali a e b sono diversi da zero e positivi sono tutti infiniti.

Determinazione di alcuni integrali.

76. — Gli ultimi tre degli integrali (4) del paragrafo precedente, quando nel penultimo di essi ci si limiti a considerare il caso in cui n è zero o un numero intero positivo, e nell'ultimo si ammetta che le radici della equazioni $\psi(x)=0$ – che, come abbiamo detto, si suppongono tutte immaginarie – siano radici semplici, possono anche determinarsi completamente con tutta facilità.

a) Pel primo infatti dei detti tre integrali, cioè per l'integrale $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2}$, osserveremo che si ha

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\frac{a}{b}+x^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{a}{b}}\,x + \mathrm{C}\,,$$

e quindi si troverà subito

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,.$$

b) Pel secondo poi degli stessi integrali, osservando che per n diverso da zero e positivo colla integrazione per parti si ha

$$(2)\qquad \int e^{-x}x^n\,dx = -e^{-x}x^n + n\int e^{-x}x^{n-1}\,dx\,,$$

si vede subito che si avrà la formola

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx\,,$$

e da questa se n è intero, cambiando n in $n-1, n-2, \ldots 2, 1$ e poi moltiplicando membro a membro le successive eguaglianze che così si ottengono, si giungerà subito all'altra

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = \pi(n)\,,$$

che dà il valore dell'integrale cercato $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$, e che evidentemente vale anche per $n=0$, perchè allora si ha subito $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$.

Aggiungiamo che quando n non è intero ma è superiore a -1 l'integrale qui considerato $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$ ha ancora — come già dicemmo — un valore determinato e finito, e per esso vale ancora la formola (2), ma non si può più dedurne la (3).

Cambiando in questo integrale n in $a-1$ esso si muta nell'altro $\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$ che ha un significato per ogni valore diverso da zero e positivo di a, e per $a=0$ è infinito (§ 63 [pag. 103 e seg.]); e questo integrale è conosciuto sotto il nome di *integrale Euleriano di seconda specie,* o anche sotto il nome di *funzione* Γ, perchè con una notazione introdotta da Legendre si suole indicare col simbolo $\Gamma(a)$.

Questa funzione $\Gamma(a)$ dunque ha un valore determinato e finito per ogni valore diverso da zero e positivo di a e per $a=0$ è infinita; e per essa a causa della (2) si ha la formola notevole

$$(4)\qquad \Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

la quale dà subito luogo all'altra

$$\Gamma(a+1)=a(a-1)(a-2)\ldots(a-h+1)\,\Gamma(a-h+1) \tag{5}$$

per qualsiasi valore intero di h inferiore ad $a+1$; e queste formole sono fondamentali per lo studio della funzione $\Gamma(a)$, e oltre a mostrarci che per a intero e positivo questa funzione è sempre intera e uguale al prodotto dei numeri naturali $\pi(a-1)$ o $1.2\ldots(a-1)$ come già trovammo sopra, ci mostrano anche che pei valori fratti di a essa si riduce sempre a dipendere dai valori che prende quando a è compreso fra 0 e 1.

c) Infine pel terzo integrale $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$, sotto le ipotesi che abbiamo fatte per $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, osserveremo che, indicando con 2μ il grado del denominatore $\psi(x)$, e con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\mu}$ le radici della equazione $\psi(x)=0$ che noi supponiamo tutte semplici e immaginarie, per la formola di scomposizione delle frazioni in frazioni semplici avremo (pag. 56 in nota)

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\frac{1}{x-\omega_s};$$

e, poichè riducendo i termini del secondo membro allo stesso denominatore – che all'infuori di un coefficiente verrà ad essere appunto $\psi(x)$ – si vede subito che la somma $\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}$ sarà il coefficiente di $x^{2\mu-1}$ nel numeratore $\varphi(x)$, si conclude intanto che questa somma dovrà essere zero perchè noi supponiamo che il numeratore $\varphi(x)$ sia al più del grado $2\mu-2$.

Ora, indicando con $\alpha_s+i\beta_s$ la radice ω_s, le quantità β_s saranno tutte diverse da zero, e dalla formola precedente avremo

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\frac{x-\alpha_s+i\beta_s}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2}=\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\frac{x-\alpha_s}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2}+$$
$$+i\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\frac{\beta_s}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2},$$

e quindi sarà

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\frac{1}{2}\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\Big[\log\{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\}\Big]_{-\alpha}^{\beta}+i\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\Big[\text{arc tang}\frac{x-\alpha_s}{\beta_s}\Big]_{-\alpha}^{\beta},$$

ovvero

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\frac{1}{2}\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\log\frac{(\beta-\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(\alpha+\alpha_s)^2+\beta_s^2}+i\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\Big\{\text{arc tang}\frac{\beta-\alpha_s}{\beta_s}+$$
$$+\text{arc tang}\frac{\alpha+\alpha_s}{\beta_s}\Big\},$$

essendo α e β due numeri positivi che poi dovremo fare crescere indefinitamente con una legge qualsiasi.

Osservando ora che

$$\log\frac{(\beta-\alpha_s)^2+\beta_s^2}{(\alpha+\alpha_s)^2+\beta_s^2}=\log\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\log\frac{\left(1-\frac{\alpha_s}{\beta}\right)^2+\frac{\beta_s^2}{\beta^2}}{\left(1+\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta_s^2}{\alpha^2}},$$

e ricordando che per le nostre ipotesi si ha $\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}=0$, si vede che sarà

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\frac{1}{2}\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\log\frac{\left(1-\frac{\alpha_s}{\beta}\right)^2+\frac{\beta_s}{\beta^2}}{\left(1+\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2+\frac{\beta_s^2}{\alpha^2}}+ \tag{6}$$
$$+i\sum_1^{2\mu}\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}\Big\{\text{arc tang}\frac{\beta-\alpha_s}{\beta_s}+\text{arc tang}\frac{\alpha+\alpha_s}{\beta_s}\Big\}.$$

Ora evidentemente se faremo crescere indefinitamente α e β con una legge qualsiasi i termini della prima somma in questa formola tenderanno tutti a zero, e quelli della seconda somma tenderanno verso π quando β_s è positivo e verso $-\pi$ quando β_s è negativo; dunque, se intenderemo che $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\mu$ siano le radici di $\psi(x)=0$ per le quali β_s è positivo, e le $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2}, \ldots, \omega_{2\mu}$ siano le coniugate di $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$, è evidente che avremo la formola seguente

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\pi i\sum_1^{\mu}\Big\{\frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)}-\frac{\varphi(\omega_{\mu+s})}{\psi'(\omega_{\mu+s})}\Big\} \tag{7}$$

che dà sotto una forma notevolissima l'integrale cercato $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx$.

In particolare dunque se $\varphi(x)=1$ e $\psi(x)=1+x^{2\mu}$, avendosi allora $\frac{1}{\psi'(\omega_s)}=\frac{1}{2\mu\omega_s^{2\mu-1}}=-\frac{\omega_s}{2\mu}$ e potendo prendere $\omega_s=e^{\frac{2s-1}{2\mu}\pi i}$, con che $\omega_{\mu+s}=-\omega_s$, sarà

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2\mu}}=-\frac{\pi i}{\mu}\sum_1^{\mu}\omega_s=-\frac{\pi i}{\mu}\sum_1^{\mu}e^{\frac{2s-1}{2\mu}\pi i}=-\frac{\pi i}{\mu}e^{\frac{\pi i}{2\mu}}\sum_0^{\mu-1}e^{\frac{s\pi i}{\mu}},$$

e per la formola che dà la somma delle progressioni geometriche avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2\mu}}=-\frac{2\pi i}{\mu}\frac{e^{\frac{\pi i}{2\mu}}}{1-e^{\frac{\pi i}{\mu}}},$$

o anche infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2\mu}} = \frac{\pi}{\mu \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2\mu}} . \tag{8}$$

E così, più particolarmente ancora, per $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2}{3}\pi , \ldots \tag{9}$$

Dividendo per 2 gli integrali (8) e (9) si avranno i valori degli integrali stessi estesi fra 0 e ∞ invece che fra $-\infty$ e ∞, perchè evidentemente quando $f(x)$ è una funzione pari che è atta alla integrazione fra $-\infty$ e ∞ si ha sempre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{-\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$.

77. — Considerando ancora l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$, osserviamo che si può tralasciare la ipotesi che le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano reali e che $\psi(x)$ sia di grado pari 2μ, e si può ammettere in modo generale che le stesse funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano due funzioni razionali intere prime fra loro e la seconda delle quali $\psi(x)$ sia di grado (pari o dispari) n superiore almeno di due unità a quello di $\varphi(x)$, essendo però tale ancora che la equazione $\psi(x) = 0$ non abbia radici reali.

Allora l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$ avrà ancora un significato (*), e per esso coi ragionamenti stessi che abbiamo fatto sopra si giungerà ancora alla formola (6) nella quale a 2μ sia sostituito n, e poi dalla formola stessa si dedurrà l'altra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = \pi i \sum_{1}^{n} \pm \frac{\varphi(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)} , \tag{10}$$

(*) Quando una funzione $f(x)$ è complessa, per l'integrale $\int f(x)\,dx$ anche se viene preso fra limiti infiniti si mantiene la definizione stessa che abbiamo data pel caso delle funzioni reali, e per questo si vede subito che si hanno ancora le stesse condizioni d'integrabilità.

Del resto poi se $f(x)$ si pone sotto la forma $A(x) + iB(x)$ l'integrale stesso viene a dipendere da due integrali di funzioni reali perchè viene ad essere la somma $\int A(x)\,dx + i\int B(x)\,dx$.

nel secondo membro della quale i termini dovranno prendersi col segno $+$ o col segno $-$ secondochè nella radice $\omega_s = \alpha_s + i\beta_s$ della $\psi(x) = 0$ che figura nei termini stessi il β_s sarà positivo o sarà negativo.

Questa formola che dà una generalizzazione della (7), è d'importanza grandissima; ed essa separando nei due membri la parte reale dalla parte immaginaria darà sempre luogo a due altre formole che ordinariamente saranno distinte e serviranno alla determinazione di due integrali diversi.

78. — Per dare ora una applicazione anche di quest'ultima formola (10) prendiamo a determinare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^n + e^{\alpha\pi i}} dx$, dove m ed n sono numeri interi e positivi e $m \leq n-1$, e α è una costante per la quale escluderemo sempre il caso che sia un numero intero dispari, e quando n è dispari escluderemo anche il caso che α sia un numero pari. Inoltre, poichè coll'aggiungere o togliere ad α numeri pari $e^{\alpha\pi i}$ non cambia, supporremo anche senz'altro che α sia compreso fra -1 e 1 coll'escludere sempre i valori -1 e 1, e nel caso di n dispari escludendo anche il valore zero di α.

In questo caso sarà $\varphi(x) = x^{m-1}$, $\psi(x) = x^n + e^{\alpha\pi i}$, e le radici ω_s della equazione $\psi(x) = 0$ potranno prendersi tutte sotto la forma $e^{\frac{(\alpha-1)\pi i}{n}} e^{\frac{2s\pi i}{n}}$, ovvero

$$\omega_s = e^{\frac{2s+\alpha-1}{n}\pi i} = \cos\frac{(2s+\alpha-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{(2s+\alpha-1)\pi}{n} ,$$

con $s = 1, 2, \ldots, n$; e in queste il rapporto $\frac{2s+\alpha-1}{n}$ sarà sempre compreso fra 0 e 2 perchè, per le ipotesi che abbiamo fatto su α, il numero $\alpha - 1$ sarà sempre compreso fra -2 e 0 (i valori estremi -2 e 0 sempre esclusi e nel caso di n numero dispari escluso anche il valore -1 di $\alpha - 1$).

Avendosi dunque ora $\varphi(\omega_s) = \omega_s^{m-1}$, $\psi'(\omega^s) = n\omega_s^{n-1}$, con $\omega_s^n = -e^{\alpha\pi i}$, sarà $\frac{\varphi'(\omega_s)}{\psi'(\omega_s)} = \frac{1}{n}\omega_s^{m-n} = -\frac{e^{-\alpha\pi i}}{n}\omega_s^m$; quindi per la formola (10) avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^n + e^{\alpha\pi i}} dx = -\frac{e^{-\alpha\pi i}}{n}\pi i \sum_{1}^{n} \pm \omega_s^m , \tag{11}$$

e nei termini del secondo membro dovremo prendere il segno $+$ o il segno $-$ secondochè pel valore corrispondente di s $\operatorname{sen}\frac{(2s+\alpha-1)\pi}{n}$ sarà positivo o negativo, cioè secondochè il rapporto $\frac{2s+\alpha-1}{n}$ sarà inferiore o superiore ad uno.

Distinguendo ora i due casi di n pari e n dispari, osserviamo che nel primo di questi casi per $s=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ il rapporto $\frac{2s+\alpha-1}{n}$ sarà sempre inferiore ad uno, mentre pei valori $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}+2,\ldots,n$ di s sarà superiore ad uno e inoltre sarà $\omega_{\frac{n}{2}+s}=-\omega_s$; se ne dedurrà subito che

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha\pi i}}\,dx=-\frac{e^{-\alpha\pi i}}{n}\pi i\sum_1^{\frac{n}{2}}\omega_s^m(1-(-1)^m),$$

e quindi per m pari si avrà $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha\pi i}}\,dx=0$, come era ben naturale che si trovasse perchè allora la funzione sotto l'integrale è una funzione dispari; e per m dispari avremo invece

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha\pi i}}\,dx=-2\,\frac{e^{-\alpha\pi i}}{n}\pi i\sum_1^{\frac{n}{2}}\omega_s^m,$$

o anche, poichè la funzione sotto l'integrale è pari,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}}{x^n+e^{\alpha\pi i}}\,dx=-\frac{e^{-\alpha\pi i}}{n}\pi i\sum_1^{\frac{n}{2}}\omega_s^m.$$

Ed ora osservando che per essere $\omega_s=e^{\frac{(\alpha-1)\pi i}{n}}e^{\frac{2s\pi i}{n}}$ si ha

$$\sum_0^{\frac{n}{2}}\omega_s^m=e^{\frac{m(\alpha-1)\pi i}{n}}\sum_1^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{2m\pi i}{n}}\right)^s=e^{\frac{m(\alpha+1)\pi i}{n}}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}\left(e^{\frac{2m\pi i}{n}}\right)^s,$$

ovvero perchè m è dispari

$$\sum_0^{\frac{n}{2}}\omega_s^m=\frac{2e^{\frac{m(\alpha+1)\pi i}{n}}}{1-e^{\frac{2m\pi i}{n}}}=i\,\frac{e^{\frac{m\alpha\pi i}{n}}}{\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}},$$

si trova infine la formola seguente

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{x^n+e^{\alpha\pi i}}=\frac{\pi e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha\pi i}}{n\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}},\tag{12}$$

che vale per m numero dispari e n numero pari, e $m<n$, e con α numero reale qualsiasi compreso fra -1 e 1 (gli estremi esclusi).

Con procedimenti poco differenti si potrebbe trattare anche il caso in cui nella formola (11) n sia un numero dispari, distinguendo però allora il caso di α positivo da quello di α negativo perchè, per α positivo la frazione $\frac{2s+\alpha-1}{n}$ per $s=1,2,3,\ldots\frac{n-1}{2}$ è minore di uno e per $s=\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}+1,\ldots,n$ è maggiore di uno, mentre per α negativo la stessa frazione è inferiore ad uno anche per $s=\frac{n+1}{2}$; ma noi non ci fermeremo su questo caso.

79. — Restando nel caso di n pari, osserveremo che, facendo nell'integrale del primo membro della formola (12) un cambiamento di variabile col porre $x^n=t$ e dopo tornando a scrivere x al posto di t, la formola stessa si trasforma nell'altra

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{x+e^{\alpha\pi i}}\,dx=\frac{\pi e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\alpha\pi i}}{\operatorname{sen}\frac{m}{n}\pi};$$

e in questa, avendo riguardo ai valori che possono avere m e n, potremo intendere che il rapporto $\frac{m}{n}$ sia una frazione qualsiasi a compresa fra 0 e 1 il cui numeratore è dispari e il denominatore è pari; talchè, cambiando ora $\alpha\pi$ in θ, noi possiamo anche dire che si avrà sempre la formola seguente

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{x+e^{\theta i}}\,dx=\frac{\pi e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen}a\pi},\tag{13}$$

che è dimostrata così per tutti i valori fratti di a compresi fra 0 e 1 il cui numeratore è dispari e il denominatore è pari, e per θ costante reale compresa fra $-\pi$ e π (questi estremi $\pm\pi$ esclusi).

Questa formola poi colle considerazioni che faremo in seguito sui casi di continuità degli integrali che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili verrà estesa al § 123 anche agli altri valori di a compresi fra 0 e 1, per modo che allora risulterà dimostrata per qualunque valore di a fra 0 e 1 (gli estr. escl.).

Supponendo nella (13) $\theta=0$ si avrà la formola seguente molto notevole

$$(14)\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Tutte le formole precedenti infine separando la parte reale da quella immaginaria, il che si farà con tutta facilità, daranno subito luogo ad altre che sono pure molto notevoli.

Casi d'integrabilità dei prodotti di funzioni. Estensione dei casi di applicabilità della integrazione per parti.

80. — Osserveremo ora che se $f(x)$ è la solita funzione atta all'integrazione nell'intervallo (α, ∞), e $F(x)$ è un'altra funzione di x fra α e ∞ che in ogni intervallo *finito* (preso fra α e ∞) soddisfa alle condizioni che si richiedono § 7-5° [pag. 17] e § 68 [pag. 107] perchè il prodotto $f(x)\,F(x)$ sia atto all'integrazione nello stesso intervallo, *questo prodotto sarà atto alla integrazione anche fra α e ∞ quando a partire da un certo valore x' di x fino a valori grandi quanto si vuole la funzione $F(x)$ si mantiene sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito, e la funzione $f(x)$ resta atta all'integrazione fra x' e ∞ anche riducendola ai suoi valori assoluti $f_1(x)$ cioè*, come si dice, *la funzione $f(x)$ è integrabile assolutamente o incondizionatamente fra x' e ∞*.

È chiaro infatti che se queste condizioni sono soddisfatte, l'integrale definito singolare $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)\,F(x)\,dx$ dove $\beta \geqq x'$ sarà numericamente inferiore a $M\int_\beta^{\beta'} f_1(x)\,dx$ essendo M un numero positivo di cui, a partire da x', è sempre numericamente minore la funzione $F(x)$; e quindi, per le condizioni poste, lo stesso integrale definito singolare pei valori di β sufficientemente grandi e qualunque sia γ sarà sempre inferiore a quel numero che più ci piace, e perciò il prodotto $f(x)\,F(x)$ sarà atto all'integrazione definita anche fra α e ∞.

Anche questo teorema come quello del § 68 relativo agli intervalli finiti verrà in seguito esteso ad altri casi.

81. — A causa dell'estrema importanza del metodo d'integrazione per parti troviamo utile ora di estenderlo al caso in cui nell'intervallo d'integrazione le funzioni che compariscono negli integrali che figurano in quel metodo presentino qualche singolarità o lo stesso intervallo sia infinito.

Per procedere in modo più semplice e chiaro considereremo dapprima il caso in cui u e v sono due funzioni di x finite e continue in tutto un intervallo (α, β) che dapprima supporremo *finito*, mentre le loro derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ in alcuni punti possono non esistere o non essere finite e continue; ammettendo però che, se queste derivate hanno alcune discontinuità o alcune indeterminazioni, le abbiano soltanto in un numero finito di punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, e se divengono infinite lo divengano soltanto in un numero pure finito di punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ e in modo che, in piccoli intorni di questi punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dove l'una o l'altra o tutte e due le derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ divengono infinite, i prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ siano atti all'integrazione.

Per queste condizioni e per quanto dicemmo in generale al § 62 [pag. 102] la presenza dei punti singolari $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nelle derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ non farà sì che queste funzioni e le altre $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ cessino di essere atte all'integrazione fra α e β, poichè, attribuendo loro valori finiti qualunque nei punti di indeterminazione $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, esse diverranno funzioni che fra α e β sono finite e continue o hanno soltanto un numero finito di discontinuità e hanno un numero finito di infiniti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tali che per le nostre ipotesi la loro presenza non fa perdere il significato ai relativi integrali.

Inoltre siccome in tutti i punti non singolari delle derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ si ha $\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$ e per la presenza degli stessi punti i due termini del secondo membro di questa formola non perdono la integrabilità, è certo che anche la quantità $\frac{d(uv)}{dx}$ quando le si attribuiscano valori speciali finiti nei punti d'indeterminazione verrà una funzione atta all'integrazione in tutti i tratti fra α e β che non contengono i punti di infinito $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, e quindi anche in tutto l'intervallo da α a β (§§ 61 e 62 [pag. 101 e seg.]), e si avrà perciò

$$\int_\alpha^\beta \frac{d(uv)}{dx}dv=\int_\alpha^\beta u\frac{dv}{dx}dx+\int_\alpha^\beta v\frac{du}{dx}dx,$$

ovvero

$$\int_\alpha^\beta u\frac{dv}{dx}dx=\int_\alpha^\beta \frac{d(uv)}{dx}dx-\int_\alpha^\beta v\frac{du}{dx}dx.$$

Ora poichè, per le nostre ipotesi, il prodotto uv è finito e continuo in tutto l'intervallo (α, β) e la sua derivata $\frac{d(uv)}{dx}$ per quanto possa avere le singolarità indicate è atta alla integrazione in questo intervallo, basta tenere conto delle particolarità ormai note dei §§ 10 e 62 [pag. 32 e seg. e pag. 102] per potere dire che il primo integrale del secondo membro della formola trovata è la differenza $(uv)_\beta - (uv)_\alpha$ o $(uv)_\alpha^\beta$; talchè sostituendo si conclude che si avrà sempre la formola seguente

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta u \frac{dv}{dx} dx = (uv)_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v \frac{du}{dx} dx ;$$

e quando la derivata $\frac{dv}{dx}$ — *che per le nostre ipotesi viene ad essere atta alla integrazione fra* e β — si rappresenti con V, con che v viene ad essere un integrale $\int V\,dx$, questa formola corrisponde appunto a quella della integrazione per parti, la quale resta così dimostrata quando sono soddisfatte le condizioni poste sopra.

82. — Da questa dimostrazione sembrerebbe dunque che prima di applicare la formola dell'integrazione per parti fra α e β, oltre a verificare che $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ non hanno che un numero finito d'infiniti, o di punti di discontinuità o d'indeterminazione, fosse necessario verificare che i prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ negli intorni dei punti dove $\frac{du}{dx}$ o $\frac{dv}{dx}$ divengono infinite si mantengono *ambedue* atti all'integrazione; però le osservazioni che seguono mostrano come si possa il più spesso fare a meno di questa doppia verificazione.

Si supponga perciò che β sia uno dei punti dove l'una o l'altra delle due derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ o tutte e due divengono infinite, e che per questo punto l'indicata verificazione sia stata fatta soltanto per una delle due funzioni $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$, e si sappia del resto che le altre condizioni che abbiamo poste per le funzioni u e v e pei punti singolari delle loro derivate sono tutte soddisfatte.

Supponendo per es. $\alpha < \beta$, e indicando con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, si avrà

$$(2) \qquad \int_\alpha^{\beta-\varepsilon} u \frac{dv}{dx} dx = (uv)_\alpha^{\beta-\varepsilon} - \int_\alpha^{\beta-\varepsilon} v \frac{du}{dx} dx ;$$

quindi, osservando che per le ipotesi e verificazioni fatte il termine $(uv)_\alpha^{\beta-\varepsilon}$ e uno dei due integrali $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} u \frac{dv}{dx} dx$ e $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} v \frac{du}{dx} dx$ hanno limiti determinati e finiti per $\varepsilon = 0$, si vedrà subito che altrettanto deve avvenire anche dell'altro di questi integrali, talchè si può ora asserire che l'indicata verificazione per ogni punto d'infinito di $\frac{du}{dx}$ o di $\frac{dv}{dx}$ basta farla per uno soltanto dei due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$.

Ora, pei punti d'infinito $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ nei quali *una sola* delle due funzioni $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ diviene infinita, uno dei due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ si mantiene sempre finito e quindi lo stesso prodotto in intorni degli stessi punti è sempre atto all'integrazione; dunque evidentemente le verificazioni basterà farle per una sola delle due funzioni $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ e soltanto per quei punti nei quali $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ divengono infinite insieme; talchè *in particolare* noi possiamo ora affermare che *se u e v sono funzioni finite e continue e le loro derivate* $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ *non divengono mai infinite insieme fra α e β e hanno soltanto un numero finito d'infiniti, di discontinuità o d'indeterminazioni nello stesso intervallo, la formola* (1) *della integrazione per parti sarà sempre applicabile.*

Se poi vi sono dei punti nei quali $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ divengono infinite insieme, allora onde applicare la formola (1) bisognerà verificare che in intorni qualsiasi degli stessi punti uno dei soliti due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ è atto all'integrazione, e ciò in particolare avverrà sempre (§ 68 [pag. 107]) quando una delle due derivate $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ negli stessi intorni sia atta all'integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti.

83. — Si osservi inoltre che quando, restando ferme le altre condizioni rispetto alle funzioni u e v, uno dei due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ non soddisfacesse per qualche punto β alle condizioni indicate, allora a causa della (2) neppure l'altro vi soddisfarebbe e la (1) non avrebbe significato; mentre se questa formola ha un significato, essa sarà sempre giusta (quando, come abbiamo detto più volte di supporre, fra α e β vi siano soltanto un numero finito

di singolarità di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}\Big)$ perchè allora essa risulterà dalla (2) passando al limite per $\varepsilon = 0$, ecc.

Da ciò si concluderà che, ferma stante la condizione sempre posta finora che u e v siano finite e continue e che il numero delle singolarità di $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ fra α e β sia finito, si può anche senz'altro affermare che il metodo d'integrazione per parti sarà sempre applicabile tutte le volte che non ci conduca a formole prive di significato.

Se poi, nella formola stessa (1) della integrazione per parti, uno almeno dei due integrali che vi compariscono sarà infinito o indeterminato, allora per le stesse considerazioni che abbiamo fatto potremo inferirne che altrettanto accadrà dell'altro integrale quando, come per ora abbiamo sempre supposto, u e v siano ancora tutte e due finite e continue.

84. — Del resto poi, ponendoci ora in un caso più generale coll'ammettere che anche le funzioni u o v in uno o più punti β in numero finito possano avere qualche singolarità, ma in modo che il loro prodotto uv sia ancora finito e continuo in quei punti, e che al tempo stesso uno almeno dei due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ risulti atto alla integrazione negli intorni dei punti stessi, si può osservare che allora, avendosi ancora la formola (2), si riscontra subito che anche l'altro degli stessi prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ sarà atto alla integrazione negli intorni di quei punti e si avrà ancora la formola (1).

Similmente se, non facendo alcuna ipotesi intorno al prodotto uv negli intorni dei punti singolari β, si troverà che ambedue i prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ sono atti alla integrazione negli stessi intorni allora, sempre per la (2), il prodotto uv risulterà finito e continuo anche in quei punti, e la formola (1) continuerà ancora a sussistere; quindi, estendendo ora i risultati ottenuti sopra, si può evidentemente affermare in modo più generale che *la formola* (1) *della integrazione per parti sussisterà sempre anche quando nell'intervallo d'integrazione si hanno un numero finito di singolarità nelle funzioni u e v o nelle loro derivate tutte le volte che due dei termini della formola stessa* (e quindi anche il terzo) *avranno un significato.*

Invece se per uno dei termini della (1) si troverà che esso presenta qualche singolarità, tenendo conto ancora della (2) si vede che lo stesso dovrà accadere anche per uno almeno degli altri due termini; e così in particolare se si avranno singolarità nel primo termine del secondo membro della stessa formola (1), allora uno almeno dei due integrali che vi figurano sarà infinito o indeterminato; talchè bene spesso l'applicazione della stessa formola potrà anche servire a farci riconoscere se una funzione sia atta o no alla integrazione in un dato intervallo (α, β).

85. — Supponiamo ora che le funzioni u e v siano date fra α e ∞, siano finite e continue anche per $x = \infty$ e siano tali inoltre che per esse l'integrazione per parti colla formola (1) sia applicabile in intervalli di ampiezza finita ma comunque grandi (α, β).

Allora passando al limite nella stessa formola (1) per $\beta = \infty$, si vede subito che il metodo d'integrazione per parti sarà applicabile anche fra α e ∞, e si avrà

$$\int_\alpha^\infty u\frac{dv}{dx}\,dx = (uv)_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty v\frac{du}{dx}\,dx \tag{3}$$

tutte le volte che uno dei due prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ sia atto all'integrazione fra un numero arbitrariamente grande x' e l'infinito, con che accadrà lo stesso anche per l'altro di questi prodotti; e in particolare, sotto le ipotesi fatte rispetto a u e v anche per $x = \infty$, lo stesso metodo sarà applicabile quando una almeno delle due funzioni $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dx}$ fra un numero x' comunque grande e l'infinito si mantenga atta all'integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti (§ 80 [pag. 124]).

86. — Tralasciando poi la ipotesi che abbiamo fatta sul modo di comportarsi delle funzioni u e v e dei prodotti $u\frac{dv}{dx}$ e $v\frac{du}{dx}$ al crescere indefinito di x, con considerazioni simili a quelle del paragrafo precedente applicate ora alla formola (1) al crescere indefinito di β, si giungerà a concludere in modo generale che *la formola della integrazione per parti varrà sempre anche per intervalli di ampiezza infinita tutte le volte che due almeno dei suoi termini* (e quindi anche il terzo) *avranno un significato.*

87. — E se uno dei termini della formola stessa (3) sarà infinito o indeterminato, lo stesso dovrà accadere almeno per uno degli altri due; e così in particolare quando una almeno delle due funzioni u e v e il loro prodotto non siano finiti e continui per $x = \infty$, uno almeno dei due integrali $\int_\alpha^\infty u\frac{dv}{dx}$ e $\int_\alpha^\infty v\frac{du}{dx}\,dx$ dovrà essere infinito o mancare del tutto di significato; talchè ap-

parisce chiaro di qui che il metodo d'integrazione per parti potrà servire talvolta utilmente anche a riconoscere se una funzione sia atta o no alla integrazione fra α e ∞.

E così per es. siccome l'integrale $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$ è determinato (§ 74 [pag. 114]) e applicandovi l'integrazione per parti, col prendere $\frac{dx}{x}$ per fattore differenziale, si troverebbe la formola

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx = [(\operatorname{sen} bx \log x)]_0^{\infty} - b\int_0^{\infty}\log x \cos bx\, dx,$$

la quale non ha significato perchè il prodotto $\operatorname{sen} bx \log x$ col crescere indefinito di x non ha un limite determinato, si conclude subito che l'integrale $\int_0^{\infty}\log x\cos bx\,dx$ (che evidentemente non rientra fra quelli ai quali può applicarsi il teorema del § 73 [pag. 112] non ha un valore determinato, ecc....

La definizione di Riemann degli integrali fra limiti finiti estesa agli integrali fra limiti infiniti (*).

88. — Prima di lasciare questo soggetto della integrazione fra limiti infiniti, vogliamo ora cercare anche se e in quali casi la definizione di Riemann relativa agli integrali presi fra limiti finiti che fu il nostro punto di partenza del Calcolo integrale, può venire estesa agli integrali presi fra limiti infiniti quali noi abbiamo detto nei paragrafi precedenti che debbono essere intesi.

Vogliamo cioè cercare, *nel supposto che $f(x)$ sia una funzione sempre finita fra α e ∞*, se ed in quali casi immaginando l'intervallo infinito (α, ∞) diviso in un numero infinito d'intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ l'integrale $\int_\alpha^{\infty}f(x)dx$ quale fu da noi definito al § 69 [pag. 109] possa anche riguardarsi come il limite della somma della serie $\sum\delta_s f_s$ formata dai prodotti degli stessi intervalli δ_s moltiplicati ciascuno per un numero f_s compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori della funzione nei respettivi intervalli δ_s (questi limiti incl.), preso lo stesso limite all'impiccolire indefinitamente degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ secondo una legge tutt'affatto qualunque.

(*) Le considerazioni che ora esponiamo sono estratte dai miei *Fondamenti* ecc. (§ 248 e seg. [pag. 337 e seg.]).

E a ciò c'induce la considerazione che, se indichiamo con β un numero finito ma arbitrariamente grande, con $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ valori di x fra α e β e con $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ gli intervalli corrispondenti $x_1-\alpha, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, \beta-x_{n-1}$, per la definizione di Riemann si ha

$$\int_\alpha^{\beta}f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0}\sum_1^n\delta_s f_s,$$

dove f_s è un numero compreso fra il limite inferiore e il limite superiore di $f(x)$ nell'intervallo δ_s (questi limiti inclusi), e quindi valendosi della vera definizione dell'integrale $\int_\alpha^{\infty}f(x)\,dx$, cioè di quella da noi data al § 69, si avrà

$$\int_\alpha^{\infty}f(x)\,dx = \lim_{\beta=\infty}\left\{\lim_{\delta_s=0}\sum_1^n\delta_s f_s\right\};$$

talchè, siccome nel secondo membro deve prendersi prima il limite rapporto alle quantità δ_s e poi quello rapporto a β, apparisce di qui che effettivamente, almeno senza una conveniente dimostrazione, non si può affermare che l'integrale $\int_\alpha^{\infty}f(x)\,dx$ sarà sempre il limite della somma delle serie $\sum_1^{\infty}\delta_s f_s$ quando le δ_s tendono a zero; giacchè in quest'ultimo caso si viene a prendere prima il limite rispetto a β (poichè si suppone subito infinito l'intervallo d'integrazione) e poi quello rispetto agli intervalli δ_s, e si viene così a fare una inversione di limiti.

89. — Noi cercheremo dunque se e in quali casi, *quando $f(x)$ è sempre finita fra α e ∞*, la vera definizione dell'integrale $\int_\alpha^{\infty}f(x)\,dx$ data al § 69 e quella che risulterebbe dall'estendere la definizione che si ha per gli integrali fra limiti finiti possano prendersi indifferentemente l'una per l'altra, per modo cioè che si abbia $\int_\alpha^{\infty}f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0}\sum_1^{\infty}\delta_s f_s$; e dimostreremo perciò che

1.° *se si troverà che, formando le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ con una qualche legge* speciale *determinata, la serie $\sum_1^{\infty}\delta_s f_s$ è convergente e ha un limite determinato e finito e indipendente dai valori che si scelgono per le f_s quando le δ_s con-*

vergono a zero, allora *la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione fra α e ∞ e il limite della serie sarà appunto il valore dell'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$;

2.° *la condizione necessaria e sufficiente perchè per un dato sistema di valori* speciali *delle* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ *la serie stessa* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, *supposta convergente, abbia un limite determinato e finito, è espressa ancora dalla solita condizione di integrabilità* $\lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$ *applicata nell'intervallo infinito* (α, ∞) *agli indicati intervalli* speciali $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$

In altri termini, in seguito a queste due particolarità, *si potrà dunque assicurare che la formola*

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty \delta_s f_s, \tag{1}$$

sussiste rigorosamente tutte le volte che, essendo state scelte le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ *con qualche legge* speciale *determinata, la serie* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ *almeno dopo che le* δ_s *saranno divenute sufficientemente piccole risulti convergente, e al tempo stesso:*

a) o sia soddisfatta la condizione che questa serie $\sum \delta_s f_s$ *abbia un limite determinato e finito al tendere delle* δ_s *a zero,*

b) o sia soddisfatta l'altra che la solita quantità $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ *abbia per limite zero*;

intendendo sempre che i numeri f_s devono essere presi *comunque* fra i limiti inferiore e superiore l_s e L_s di $f(x)$ nell'intervallo corrispondente δ_s (questi limiti inclusi), mentre per gli intervalli δ_s *basta* che siano formati con leggi *speciali* determinate, ma che possono essere qualunque.

90. — Ammettiamo infatti dapprima che la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, che noi supponiamo convergente almeno quando le δ_s siano divenute sufficientemente piccole, abbia un limite determinato e finito A al tendere delle δ_s a zero, qualunque siano i valori che si prendono per le f_s negli intervalli δ_s che successivamente si formano con una certa legge determinata.

Per questa serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ si avrà

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s l_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s L_s = A,$$

e si troverà perciò intanto $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$; talchè, indicando con n e n' due numeri variabili coll'impiccolire delle quantità δ_s, e determinati sempre in modo che δ_n sia il primo degli intervalli successivi $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ il cui estremo superiore non è minore di un certo numero α_1, e $\delta_{n'}$ sia l'ultimo degli stessi intervalli il cui estremo inferiore non è maggiore di un altro numero β_1 (con $\beta_1 > \alpha_1$), si vede subito che quando le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ siano già ridotte sufficientemente piccole, siccome sì esse che le quantità $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ sono tutte positive, anche la somma $\sum_n^{n'} \delta_s D_s$ finirà per essere minore di quel numero che più ci piace σ; e questo permette intanto di dire che la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione definita in qualunque intervallo di ampiezza finita (α_1, β_1).

Segue da ciò (§ 7, 8.° [pag. 21]) che qualunque sia il sistema di valori scelti per gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ e qualunque sia n, si avrà la formola

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k_n \sum_1^n \delta_s D_s,$$

essendo k_n un numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.); talchè quando le δ_s siano già talmente piccole che si abbia sempre $\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$, si potrà scrivere evidentemente

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k'_n \sigma, \tag{2}$$

essendo k'_n compreso fra -1 e 1.

D'altra parte, siccome la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è convergente, si può scrivere

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s = \sum_1^n \delta_s f_s + \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s, \quad \text{ovvero} \quad \sum_1^n \delta_s f_s = \sum_1^\infty \delta_s f_s - \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s,$$

e per ogni sistema di valori speciali delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ esisterà un numero m dipendente da questi valori delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ ma sempre finito e tale che per *ogni* valore di n non inferiore ad m le somme $\sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$ per gli stessi valori delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ siano sempre numericamente inferiori a σ; quindi poichè si può anche supporre che le stesse $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ siano già state prese tanto piccole che la somma corrispondente $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ differisca da A meno di σ, si può ora evidentemente asserire che per ogni sistema speciale di valori sufficientemente piccoli delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ la differenza $A - \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx$ al crescere indefinito di n si manterrà sempre numericamente inferiore a 3σ.

Ma se β è un numero *qualunque* superiore a $\alpha + \sum_1^m \delta_s$, si potrà sempre trovare un numero $n \geq m$ tale che il limite superiore $\alpha + \sum_1^n \delta_s$ dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx$ differisca da β meno di δ_{n+1}, per modo che l'integrale stesso differisca dall'altro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ meno della quantità εL, essendo L il limite superiore dei valori di $f(x)$ fra α e ∞, e ε un numero di cui le δ_s sono tutte più piccole; dunque poichè anche ε può supporsi piccolo a piacere, è evidente ora che dato un numero arbitrariamente piccolo σ_1, la differenza $A - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, al crescere sempre più di β finirà per divenire e restare poi sempre numericamente inferiore a questo numero σ_1, e quindi la nostra funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione anche fra α e ∞ e si avrà $\lim_{\beta=\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = A$, ovvero $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s$; e questo dimostra intanto la prima parte del teorema enunciato.

91. — Per dimostrare anche la seconda parte del medesimo teorema, ammettiamo ora che si sappia che quando le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ sono formate secondo una certa legge speciale determinata, e almeno dopo che esse siano divenute sufficientemente piccole, la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è sempre convergente, e che al tempo stesso l'altra $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ al tendere a zero delle stesse $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ ha per limite zero.

Allora, considerando le due serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s f'_s$ corrispondenti a due qualunque dei sistemi di valori sufficientemente piccoli che si hanno successivamente per le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ nel tempo che esse tendono a zero, è chiaro che si potrà trovare un numero m tale che pei sistemi di valori scelti per le δ_s e δ'_s, e pei valori di n e n' non inferiori a m le somme corrispondenti

$\sum_1^n \delta_s f_s$, $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ differiscano respettivamente dalle somma S_δ, $S_{\delta'}$ delle due serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s f'_s$ meno di quel numero che più ci piace σ, e quindi per n e n' superiori a m si potrà sempre scrivere:

$$S_\delta - S_{\delta'} = \sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^{n'} \delta'_s f'_s + 2k_n \sigma,$$

essendo k_n un numero compreso fra -1 e 1.

Si scelgano ora le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots, \delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \dots$ tutte inferiori a un numero dato arbitrariamente piccolo ε, e tali che le due somme $\sum_1^\infty \delta_s D_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s D'_s$ siano ambedue inferiori a σ; e i numeri n e n', oltre a prendersi ambedue superiori al valore di m corrispondente ai valori che ora si considerano per le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots, \delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n, \dots$, si prendano in modo che le due somme $\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n$, $\delta'_1 + \delta'_2 + \dots + \delta'_{n'}$ siano uguali tra loro, o tutt'al più differiscano l'una dall'altra meno di ε.

Allora, siccome l'ipotesi fatta che sia $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$ porta, come si disse sopra, che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra due numeri finiti qualunque, e quindi che si possa applicare la formola (2) per modo da avere

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k'_n \sigma, \quad \sum_1^{n'} \delta'_s f'_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^{n'} \delta'_s} f(x)\,dx + k''_n \sigma,$$

con k'_n e k''_n compresi fra -1 e 1, si vede subito che le due somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, $\sum_1^{n'} \delta_s f'_s$ differiranno fra loro meno della quantità $2\sigma + \varepsilon L$, essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e ∞, e perciò S_δ e $S_{\delta'}$ differiranno fra loro meno di $4\sigma + \varepsilon L$; dunque pel solito teorema di Cauchy sui limiti, si può evidentemente concludere che le somme S_δ o $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ avranno un limite determinato e finito.

Viceversa se questo accade, per quanto si è detto nel paragrafo precedente, si avrà ancora $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty \delta_s f_s$, e $\lim \Sigma \delta_s D_s = 0$; talchè il teorema enunciato sopra al § 89 può dirsi ora completamente dimostrato.

92. — Dalla dimostrazione che abbiamo data del teorema precedente non risulta che la formola (1) sia applicabile tutte le volte che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito, ma solo in forza di questa dimostrazione si può essere sicuri che la formola stessa è giusta quando si sappia che almeno per quei sistemi di valori speciali delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ che in essa figurano la serie $\sum\limits_1^\infty \delta_s f_s$ è convergente e ha un limite determinato e finito, o sapendo soltanto che essa è convergente si sappia altresì che la serie $\sum\limits_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ ha per limite lo zero.

Questo risultato però può essere reso più completo, giacchè si può anche dimostrare che *quando la funzione $f(x)$ fra α e ∞ è sempre numericamente inferiore a un numero finito, e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito, esistono sempre infiniti modi di formazione degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ tali che facendoli convergere a zero conservando sempre nei differenti loro stati la stessa legge di formazione, la serie $\sum\limits_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ ha per limite lo zero, e l'altra $\sum\limits_1^\infty \delta_s f_s$ si mantiene sempre convergente, e quindi ha per limite l'integrale stesso $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$.*

Formati infatti ad esempio gli infiniti intervalli i cui estremi sono nei punti successivi α, $\alpha+d$, $\alpha+2d$, ..., $\alpha+rd$, $\alpha+(r+1)d$, ... dove d è un numero qualunque positivo e finito, si osserverà che quando, come noi abbiamo supposto, $f(x)$ è sempre finita e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito, come anche più generalmente quando la funzione $f(x)$ è finita e atta all'integrazione in ogni intervallo finito (*), la funzione stessa $f(x)$ sarà atta alla integrazione anche in ciascuno degli intervalli finiti $(\alpha, \alpha+d)$, $(\alpha+d, \alpha+2d)$, ..., $(\alpha+rd, \alpha+(r+1)d)$, ...; e quindi si potrà evidentemente trovare un numero ε_1 differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha, \alpha+d)$ in intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_1}$ tutti inferiori a ε_1 la somma corrispondente $\sum\limits_1^{m_1} \delta_s \mathrm{D}_s$ sia sempre inferiore a un numero positivo

(*) Per questa parte della dimostrazione che è relativa alla serie $\Sigma \delta_s \mathrm{D}_s$ basta ammettere che la funzione $f(x)$ oltre ad essere finita sia atta alla integrazione in ogni intervallo *finito;* ma dopo per la parte relativa all'altra serie $\Sigma \delta_s f_s$ bisogna ammettere che $f(x)$ sia atta alla integrazione anche fra α e ∞.

comunque piccolo σ_1; similmente si potrà trovare un numero ε_2 differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha+d, \alpha+2d)$ in intervalli parziali $\delta_{m_1+1}, \delta_{m_1+2}, \ldots, \delta_{m_2}$ tutti inferiori a ε_2 la somma corrispondente $\sum\limits_{m_1+1}^{m_2} \delta_s \mathrm{D}_s$ sia sempre inferiore a σ_1^2; e in generale si potrà trovare un numero ε_{r+1} differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha+rd, \alpha+(r+1)d)$ in intervalli parziali $\delta_{m_r+1}, \delta_{m_r+2}, \ldots, \delta_{m_{r+1}}$ tutti inferiori a ε_{r+1} la somma corrispondente $\sum\limits_{m_r+1}^{m_{r+1}} \delta_s \mathrm{D}_s$ sia sempre inferiore a σ_1^{r+1}; e allora, col sistema dei valori $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_1}, \delta_{m_1+1}, \delta_{m_1+2}, \ldots, \delta_{m_2}, \ldots$ così ottenuti per le δ_s, qualunque sia il numero intero p si avrà sempre $\sum\limits_1^p \delta_s \mathrm{D}_s < \sigma_1 + \sigma_1^2 + \ldots$, ovvero $\sum\limits_1^p \delta_s \mathrm{D}_s < \frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$, giacchè σ_1 può supporsi piccolissimo.

Questo ci assicura che la serie $\sum\limits_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ così formata viene ad esser tale che la somma di un numero qualunque dei suoi primi termini non supera mai $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$; e per questo, e perchè è a termini positivi, la serie stessa per gli indicati valori delle $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sarà sempre convergente, e la sua somma essendo inferiore a $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$, avrà per limite zero quando, impiccolendo sempre più σ_1, le δ_s si facciano impiccolire indefinitamente seguendo la suindicata legge di formazione; talchè resta con ciò intanto dimostrato che quando $f(x)$ è finita e atta all'integrazione nell'intervallo (α, ∞), o anche soltanto in ogni intervallo finito compreso in esso, si possono sempre trovare infiniti sistemi di valori per le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ pei quali si ha $\lim \sum\limits_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s = 0$.

Dimostrata così l'esistenza di questi sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, prendiamo ora uno qualunque di questi sistemi, o anche più generalmente un sistema qualunque di valori pei quali la somma $\sum\limits_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ sia convergente; e considerando la serie $\sum\limits_1^\infty \delta_s f_s$ corrispondente a questi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ formiamo la somma $\sum\limits_{p+1}^q \delta_s f_s$ di un numero qualunque dei suoi termini dopo il p^0.

Si avrà

$$\sum_{p+1}^{q} \delta_s f_s = \int_{\alpha+\sum_1^p \delta_s}^{\alpha+\sum_1^q \delta_s} f(x)\,dx + k' \sum_{p+1}^{q} \delta_s \mathrm{D}_s ,$$

essendo k' un numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.); e poichè pel sistema di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ che ora si considerano la serie $\sum \delta_s \mathrm{D}_s$ è convergente, in questa formola, quando p sia abbastanza grande e qualunque sia q, la somma $\sum_{p+1}^{q} \delta_s \mathrm{D}_s$ sarà minore di quel numero che più ci piace, e lo stesso accadrà dell'integrale che vi comparisce quando ora si torni ad ammettere che $f(x)$ sia finita e atta alla integrazione anche fra α e ∞, giacchè esso non verrà ad essere altro che un integrale definito singolare relativo alla funzione $f(x)$; dunque evidentemente per gli stessi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ le somme di un numero qualunque di termini dopo un certo termine p^0 nella serie $\sum_1^{\infty} \delta_s f_s$ saranno minori di quel numero che più ci piace, e si può quindi concludere intanto che quando $f(x)$ è sempre finita e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato e finito, se le δ_s sono scelte in modo che la serie $\sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ sia convergente, anche la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ corrispondente agli stessi valori delle δ_s sarà convergente.

Questo, per il teorema precedente, basta anche per poter dire che la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ ha un limite determinato quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots$ tendono a zero conservando sempre la stessa legge di formazione nei successivi loro stati, e questo limite è precisamente l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$; talchè resta ora completamente dimostrato il teorema enunciato sopra.

93. — Il teorema dimostrato mette in evidenza che *quando una funzione $f(x)$ è finita e atta alla integrazione fra α e ∞, esistono sempre infiniti sistemi speciali di intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ pei quali la definizione di Riemann relativa al caso degli integrali fra limiti finiti resta applicabile anche quando si estende all'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$, cioè si ha*

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s ,$$

e per quegli intervalli si ha ancora $\lim \sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s = 0$; però non risulta di qui che questa formola sussista per *qualunque* sistema che venga scelto per gli stessi intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

Che anzi è da notare esplicitamente come nella dimostrazione del teorema precedente non sia escluso che i numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \ldots$ che ivi compariscono possano andare successivamente diminuendo, e anche tendere a zero; e quando ciò avvenga non si potrà trovare un numero ε che oltre essere positivo e differente da zero sia tale che per ogni sistema di valori delle δ_s inferiori a ε si abbia sempre $\sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s < \sigma$, ecc., talchè nel caso degli integrali $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ pei quali l'intervallo d'integrazione è di ampiezza infinita, quand'anche essi siano determinati e finiti, non può assicurarsi che la somma $\sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s$ abbia per limite zero per *qualunque* sistema d'intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

Si aggiunge che la condizione $\lim \sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s = 0$, nel caso degli intervalli d'integrazione d'ampiezza infinita non è più condizione sufficiente per la integrabilità della funzione corrispondente $f(x)$ fra α e ∞, almeno finchè sia verificato soltanto che questa condizione è soddisfatta per alcuni sistemi di valori speciali degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$

E ciò perchè, secondo i teoremi e i processi di dimostrazione precedenti si vede subito che onde assicurarsi che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ è determinato e finito, non basta riuscire a verificare la indicata condizione $\lim \sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s = 0$, ma si richiede sempre anche che risulti al tempo stesso verificata l'altra che la serie corrispondente $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ sia convergente, ecc....; e del resto effettivamente, nel corso della dimostrazione stessa del teorema precedente è risultato che esistono sempre dei sistemi speciali di intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$, pei quali la condizione $\lim \sum_1^\infty \delta_s \mathrm{D}_s = 0$ si verifica quando la funzione è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, senza bisogno che lo sia anche nell'intervallo infinito; talchè ricordando quanto si dimostrò nella nota a pag. 9 si riscontra ora che, in ciò che riguarda la somma $\sum \delta_s \mathrm{D}_s$ vi ha una differenza fortissima fra il caso degli integrali presi fra limiti finiti e quello degli integrali presi fra limiti infiniti.

94. — A questo proposito però — tenendo conto del processo seguìto per la dimostrazione dell'ultima parte del teorema precedente — si può ora osservare in modo generale che *se l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ha un valore determinato*

e finito, allora per tutti quei sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \dots$ *pei quali la serie* $\sum_2^\infty \delta_s D_s$ *è convergente* (*), *anche l'altra* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ *sarà convergente.*

E siccome per qualunque valore finito di n si ha la formola

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k'_n \sum_1^n \delta_s D_s\,,$$

con k'_n compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.), così nel caso del teorema ora enunciato sarà

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s = \int_\alpha^\infty f(x)\,dx + k_\delta \sum_1^\infty \delta_s D_s\,, \tag{3}$$

essendo ora k_δ un altro numero *determinato* e compreso anch'esso fra -1 e 1 (-1, e 1 incl.); e se al tempo stesso sarà $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$, allora si avrà anche $\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \int_\alpha^\infty f(x)\,dx$.

Se poi, invece di sapere che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è determinato e finito, *si saprà che per certi sistemi di valori speciali delle* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ *le serie* $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ *e* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ *sono convergenti e si ha* $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$, allora, essendo precisamente nel caso della seconda parte del teorema del § 89, *si potrà asserire che l'integrale* $\int_\alpha^\infty fx(dx)\,dx$ *è determinato e finito e quindi si verrà ancora ad avere la formola precedente* (3).

Questo risultato dà evidentemente anche un criterio per giudicare della integrabilità di $f(x)$ fra α e ∞.

95. – Infine avendo ancora riguardo alla formola (3) che vale quando l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ è determinato e finito, e gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ sono tali che per essi la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ è convergente, si può affermare che *per gli stessi*

(*) Di questi sistemi d'intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \dots$ che rendono convergente la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ ne esiste un numero infinito. Ciò risulta da quei ragionamenti stessi che si fecero nel § 92.

sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ *che rendono convergente la serie* $\sum_1^\infty \delta_s D_s$, *la serie* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ *darà sempre un valore approssimato dell'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *con un errore per eccesso o per difetto non superiore a* $\sum_1^\infty \delta_s D_s$; e con ciò resta esteso al caso degli integrali fra limiti infiniti il teorema dato alla osservazione 8.ª del § 7 a pag. 21.

96. — A complemento poi dei risultati qui esposti troviamo ora opportuno di aggiungere che *quando la funzione* $f(x)$ *è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, e a partire da un certo valore di* x *fino all'infinito, nei punti dove non è zero la funzione stessa ha sempre il medesimo segno, per es., il segno positivo,* allora *tutte le volte che l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *è infinito, anche la serie* $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ *sarà infinita o almeno avrà per limite l'infinito, quando le* δ_s *si prendono con una legge qualsiasi, e viceversa.*

È chiaro infatti che se a partire da un certo valore x' di x fino all'infinito la funzione $f(x)$ è positiva o nulla, e l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ha per limite l'infinito per $\beta = \infty$, ciò vuol dire che, qualunque sia la legge di formazione degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ le somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, dove δ_n è l'ultimo degli intervalli stessi il cui estremo inferiore non supera β, dovendo coll'impiccolire indefinito delle δ_s venire prossime quanto si vuole all'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, finiranno per essere maggiori di qualunque quantità data, e le somme complementari $\sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$ avendo i loro termini positivi accresceranno quelle somme ancor più, per modo che si avrà $\sum_1^\infty \delta_s f_s = \infty$, o almeno $\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \infty$.

Invece se con qualunque sistema di valori delle δ_s la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è infinita o ha per limite l'infinito, allora si osserverà prima che ciò dovrà pure accadere quando per le δ_s si prendono quei sistemi di valori pei quali si ha $\lim \Sigma \delta_s D_s = 0$, l'esistenza dei quali fu dimostrata in principio del § 92, e quindi anche per questi sistemi di valori delle δ_s si potrà trovare un numero n tale che la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ sia maggiore di quel numero che più ci piace, e il numero $\alpha + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ sia maggiore di x'.

Ma allora, siccome si ha sempre

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k'_n \sum_1^n \delta_s \mathrm{D}_s\,, \tag{4}$$

dove k'_n è il solito numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.), è evidente che l'integrale del secondo membro sarà anch'esso maggiore di qualsiasi numero dato, e tale si manterrà anche se al posto del suo limite superiore si pone un numero maggiore, perchè da x' in poi la funzione $f(x)$ è sempre positiva; dunque in questo caso è forza concludere che $\lim \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \infty$, e con ciò il teorema resta completamente dimostrato. 30g

97. — Inoltre a speciale complemento del teorema del § 92 si può aggiungere che *quando la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, ma l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ è infinito o indeterminato, necessariamente vi saranno infiniti sistemi di valori delle δ_s per le quali la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ non solo ha per limite l'infinito o manca di limite determinato al tendere delle δ_s a zero ma è infinita respettivamente o indeterminata anche fuori del limite,* giacchè se le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ sono scelte in uno degli infiniti modi pei quali le somme successive $\sum \delta_s \mathrm{D}_s$ risultano piccole quanto si vuole, la formola (4) ci darà

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx + k''_n \sigma\,, \tag{5}$$

con k''_n compreso ancora fra -1 e 1; e quindi, se sarà $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \infty$, passando al limite per $n=\infty$ si otterrà evidentemente $\lim_{n=\infty} \sum_1^n \delta_s f_s = \infty$.

Se poi l'integrale stesso $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ non sarà determinato, allora l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ col crescere indefinito di β finirà per oscillare fra due limiti che saranno finiti o uno almeno dei quali crescerà indefinitamente, e quindi per quanto grande divenga il β, lo stesso integrale non cesserà mai di prendere anche valori discosti fra loro più di una certa quantità d superiore a 2σ.

Osservando dunque che col crescere indefinito di n quando le δ_s saranno già divenute inferiori a ε, il limite superiore dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\sum_1^n \delta_s} f(x)\,dx$ passerà vicino quanto si vuole a qualsiasi numero β, e quindi l'integrale stesso differirà dall'altro $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ meno di $\varepsilon \mathrm{L}$, essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e ∞, s'intende subito, a causa della formola (5), che nel caso attuale la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ si manterrà sempre indeterminata mentre le δ_s convergono indefinitamente a zero secondo la legge indicata, e così resta dimostrata completamente la proprietà che abbiamo enunciato.

A questo poi si può aggiungere, a causa della prima parte del teorema del § 89, che quando l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ non ha un valore determinato e finito, nonostante che $f(x)$ sia finita e atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ dovrà avere un limite infinito o mancare assolutamente di limite anche per quei sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ pei quali essa sia convergente fuori del limite.

VIII.

Integrazione per serie

V. pag. 84 Vol I° [illegible]

98. — Data una funzione $f(x)$ fra α e β, bene spesso, quando sia difficile a trovarsi per altra via il suo integrale definito fra α e β o fra α e x, si procede a questa ricerca con un metodo detto d'*integrazione per serie* che consiste nello sviluppare la funzione data in una serie convergente e poi applicare l'integrazione termine a termine.

Questo processo, però non può sempre applicarsi perchè non sempre la serie degli integrali corrisponde all'integrale della somma delle serie; ma vi ha un caso molto notevole, ed anche assai semplice e di estesa applicazioue, nel quale il processo stesso è pienamente legittimo, e questo caso è quello che risulta dal seguente

Teorema. — *Se i termini $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ di una serie $\sum u_n$ sono funzioni di x finite e atte all'integrazione in un intervallo finito (α, β) e in questo intervallo la serie stessa è convergente in ugual grado;*

1.° *la sua somma sarà una funzione $f(x)$ atta alla integrazione fra α e β,*

2.° *la serie $\sum \int_\alpha^\beta u_n dx$ i cui termini sono gli integrali fra α e β di quelli della serie data $\sum u_n$ sarà convergente e avrà per somma l'integrale definito fra α e β della somma della serie stessa $\sum u_n$, cioè si avrà*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum \int_\alpha^\beta u_n\,dx .$$

Per dimostrare la prima parte di questo teorema osserviamo che essendo n un numero finito si avrà

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + R_n ,$$

dove R_n è il resto della serie; e a causa della convergenza in ugual grado di $\sum u_n$ per tutti i valori di x fra α e β, per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, esisterà un numero m tale che per $n \geq m$ si abbia in valore assoluto $R_n < \sigma$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclusi).

Supponendo dunque $n \geq m$, essendo m il numero ora indicato, se si immagina diviso l'intervallo (α, β) in p intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$, indicando con $d'_s, d''_s, \dots, d_s^{(n)}, d_s^{(f)}, d_s^{(R)}$ le oscillazioni di $u_1, u_2, \dots, u_n, f(x), R_n$ nell'intervallo δ_s, e osservando che $d_s^{(R)} < 2\sigma$ e $d_s^{(f)} < d'_s + d''_s + \dots d_s^{(n)} + 2\sigma$, si vede subito che sarà

$$\sum_1^p \delta_s d_s^{(f)} < \sum_1^p \delta_s d'_s + \sum_1^p \delta_s d''_s + \dots + \sum_1^p \delta_s d_s^{(n)} + 2\sigma(\beta - \alpha) ;$$

e quindi poichè, dopo di aver fissato n e σ, si possono prendere p così grande e le δ_s così piccole che le singole somme del secondo membro siano tutte minori di quel numero che più ci piace, come per es. siano tutte minori di $\frac{\sigma}{n}$, e allora si ha $\sum_1^\beta \delta_s d_s^{(f)} < \sigma + 2\sigma(\beta - \alpha)$, si conclude intanto che $f(x)$ è atta all'integrazione fra α e β e così la prima parte del teorema è dimostrata.

Segue ora da questo che qualunque sia n si avrà

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta u_1 dx + \int_\alpha^\beta u_2 dx + \dots + \int_\alpha^\beta u_n dx + \int_\alpha^\beta R_n dx ,$$

ovvero

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n dx = \int_\alpha^\beta R_n dx = \rho_n(\beta - \alpha) ,$$

essendo ρ_n un numero compreso fra il limite superiore e il limite inferiore dei valori del resto R_n di $\sum u_n$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclusi); quindi, poichè a partire da un certo valore di n in poi si ha sempre in valore assoluto $R_n < \sigma$ per tutti i valori di x fra α e β e quindi anche $\rho_n < \sigma$, si conclude che a partire da un certo valore di n in poi si ha in valore assoluto

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n dx < \sigma(\beta - \alpha) , \tag{1}$$

e perciò la serie $\sum \int_\alpha^\beta u_n dx$ è convergente e ha per somma l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x) dx$, ciò che completa la dimostrazione del teorema (*).

99. — Osservando poi che la differenza che figura nel primo membro della (1) viene ad essere il resto della serie degli integrali, e ammettendo che l'integrazione anzichè da α a β si effettui da α a un valore x qualsiasi fra α e β, si vede subito che il resto della serie integrale corrispondente risulta numericamente inferiore a $\sigma(x-\alpha)$, e quindi è sempre inferiore anche a $\sigma(\beta-\alpha)$; e da ciò si potrà anche evidentemente concludere che *quando per la serie* $\sum u_n$ *sono soddisfatte fra* α *e* β *tutte le condizioni poste sopra, la serie degli integrali* $\sum \int_\alpha^x u_n dx$ *per tutti i valori di* x *nell'intervallo* (α, β) *sarà convergente in ugual grado e la sua somma sarà una funzione finita e continua di* x *nello stesso intervallo;* talchè *alla nuova serie potranno ancora applicarsi nuove integrazioni successive quante volte vorremo.*

100. — Notiamo anche che, secondo il teorema dimostrato, quando si vorrà applicare l'integrazione per serie, onde essere sicuri dell'esattezza dei risultati converrà prima assicurarsi della convergenza in ugual grado della serie nell'intervallo d'integrazione, a meno che, nonostante la mancanza della convergenza in ugual grado nella serie o la incertezza intorno a questa particolarità della serie stessa, non si trovi per altra via la legittimità di tali operazioni, come appunto si fa per alcune serie che si presentano in Analisi (**).

Dobbiamo poi altresì notare che la mancanza della convergenza in ugual grado in una serie, nonostante la continuità della funzione che ne rappre-

(*) Osserviamo che quando, come spesso avviene, la serie Σu_n, che si suppone convergente in ugual grado fra α e β, è stata ottenuta sviluppando in serie una funzione $f(x)$ per la quale già si sappia che essa è atta alla integrazione nello stesso intervallo (α, β), allora naturalmente la prima parte del teorema sussiste di per sè e basta limitare la dimostrazione alla seconda parte.

(**) Secondo le considerazioni fatte, la convergenza in ugual grado di una serie in un certo intervallo si presenta qui come condizione soltanto sufficiente per la sua integrabilità.

La condizione che è al tempo stesso necessaria e sufficiente per l'integrabilità delle serie è stata data dal prof. ARZELÀ, in alcune memorie pubblicate negli *Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna*, estendendo il concetto della convergenza in ugual grado delle serie colla introduzione della *convergenza in ugual grado, o convergenza uniforme, a tratti.*

senta la somma, produce *talvolta* effettivamente la inesattezza dei resultati che si avrebbero applicando la integrazione per serie termine a termine.

Si prenda infatti ad es. a considerare la serie

$$\sum_1^\infty \left\{ -2n^2 x e^{-n^2 x^2} + 2(n+1)^2 x e^{-(n+1)^2 x^2} \right\}, \tag{2}$$

che è convergente e ha per somma la funzione continua $-2xe^{-x^2}$ per qualunque valore finito di x, ma non è convergente in ugual grado in quegli intervalli che contengono il punto zero, perchè nel resto R_n della serie si ha $R_n = -2(n+1)^2 x e^{-(n+1)^2 x^2}$, e evidentemente questo resto non tende a zero in modo uniforme al crescere indefinito di n per i valori di x che cadono in intorni del punto $x = 0$.

Applicando la integrazione fra 0 e x ai singoli termini di questa serie si giunge alla serie convergente $\sum_1^\infty \left\{ e^{-n^2 x^2} - e^{-(n+1)^2 x^2} \right\}$ che ha per somma e^{-x^2}, mentre applicando l'integrazione alla somma $-2xe^{-x^2}$ della serie data si trova pel valore dell'integrale $e^{-x^2} - 1$, talchè si conclude che per la serie (2), nonostante che essa sia convergente e rappresenti una funzione continua di x, l'integrazione fra 0 e x secondo il metodo ordinario d'integrazione delle somme finite non è applicabile.

Più generalmente se si ha una serie $\sum_1^\infty (u_n - u_{n+1})$ nella quale le funzioni u_n al crescere indefinito di n tendono a zero per qualunque valore di x in un intervallo (α, β) ma non vi tendono in modo uniforme, questa serie sarà convergente e avrà per somma u_1 per tutti gli stessi valori di x, ma non sarà convergente in ugual grado perchè il suo resto è u_{n+1}.

E allora se avverrà che l'integrale $\int_\alpha^x u_{n+1} dx$ non tenda a zero al crescere indefinito di n ma tenda verso una funzione $A(x)$, l'integrazione per serie non sarà applicabile, perchè mentre l'integrale della somma u_1 della serie data sarà l'integrale $\int_\alpha^x u_1 dx$, la serie degli integrali, che sarà certo convergente, avrà per somma $\int_\alpha^x u_1 dx - A(x)$.

101. — Sulla integrazione per serie — ammettendo sempre, come è naturale, anche senza dirlo esplicitamente, che *i singoli termini delle serie siano atti alla integrazione nell'intervallo finito o infinito nel quale la integrazione deve farsi* — si hanno anche altri teoremi che possono spesso applicarsi quando

non si vuole o non si può fare uso di quello del § 98; ma noi non possiamo ora trattenerci a dimostrarli, e ci limiteremo a fare le osservazioni seguenti, la seconda delle quali serve per l'integrazione per serie in intervalli di ampiezza infinita, mentre la prima gioverà in particolar modo quando la serie abbia dei punti di divergenza, e quindi in alcuni punti la sua somma $f(x)$ sia indeterminata o infinita.

1.° *Se una serie $\sum u_n$, la cui somma è $f(x)$, è tale che ad essa è applicabile l'integrazione per serie fra α e $\beta-\varepsilon$, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo e $\alpha<\beta$, alla stessa serie come alla funzione $f(x)$ sarà applicabile l'integrazione anche fra α e β, cioè si avrà*

$$(3)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx,$$

tutte le volte che la somma della serie integrale $\sum\int_\alpha^x u_n\,dx$ è una funzione $\psi(x)$ di x finita e continua anche per $x=\beta$ (a sinistra).

È chiaro infatti che se questo accade, si ha la formola

$$(4)\quad \int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx = \sum\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} u_n\,dx = \sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx - \left\{\sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx - \sum\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} u_n\,dx\right\} =$$
$$= \sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx - \left\{\psi(\beta)-\psi(\beta-\varepsilon)\right\},$$

e da questa passando al limite per $\varepsilon=0$ si ottiene subito la formola (3).

Questo risultato evidentemente gioverà in particolare quando la serie data $\sum u_n$, per la quale non abbiamo supposto nulla pel punto $x=\beta$, sia divergente in questo punto, e gioverà anche perchè, come è già detto nell'enunciato, esso permette di affermare *che sotto le condizioni poste la funzione somma $f(x)$ sarà atta all'integrazione nell'intiero intervallo (α,β), comunque essa si comporti nel punto β e nell'intorno (a sinistra) di questo punto.*

2.° *Se la serie $\sum u_n$ è tale che ad essa può applicarsi l'integrazione per serie termine a termine fra α e un numero per es. positivo β grande quanto si vuole, e al tempo stesso la serie integrale $\sum\int_\alpha^x u_n\,dx$ rappresenta una funzione $\psi(x)$ di x finita e continua anche per $x=\infty$, indicando ancora con $f(x)$ la somma della serie $\sum u_n$, questa funzione $f(x)$ sarà atta all'integrazione fra α e ∞ e si avrà*

$$(5)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \sum\int_\alpha^\infty u_n\,dx;$$

cioè alla stessa serie sarà applicabile l'integrazione definita anche fra α e ∞.

In questa ipotesi infatti per β comunque grande avremo

$$(6)\ \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx = \sum\int_\alpha^\infty u_n\,dx - \left\{\sum\int_\alpha^\infty u_n\,dx - \sum\int_\alpha^\beta u_n\,dx\right\} =$$
$$= \sum\int_\alpha^\infty u_n\,dx - \left\{\psi(\infty)-\psi(\beta)\right\},$$

e perciò al limite per $\beta=\infty$ sarà

$$\lim\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \sum\int_\alpha^\infty u_n\,dx.$$

E merita anche di essere osservato esplicitamente che, in questi teoremi, alla condizione della continuità per $x=\beta$ o per $x=\infty$ della somma $\psi(x)$ della serie integrale gioverà spesso sostituire l'altra che *questa serie integrale risulti convergente in ugual grado, anche soltanto semplicemente, nell'intorno (a sinistra) del punto, o nell'intervallo da un numero finito e all' ∞* (intorno del punto all'infinito) (*); giacchè il verificarsi di questa condizione per una serie a termini continui come è quella degli integrali porta appunto la continuità della sua somma $\psi(x)$ per $x=\beta$ o per $x=\infty$. (V. Introd. al Cal. diff. § 94 [pag. LXXXVIII]).

102. — Aggiungiamo che tenendo conto delle formole (4) e (6) che hanno condotto alle due osservazioni precedenti si può anche affermare che *avendosi una serie $\sum u_n$ la cui somma nell'intervallo (α,β) o nell'intervallo (α,∞), sia una funzione $f(x)$ atta alla integrazione nello stesso intervallo, se a questa serie sarà applicabile l'integrazione termine a termine in ogni porzione dell'intervallo (α,β) che non termini al punto β o in ogni intervallo finito fra*

(*) Le due condizioni della continuità e della convergenza in ugual grado, anche soltanto semplicemente, di una serie a termini continui non si equivalgono, giacchè una tal serie può essere continua senza essere convergente in ugual grado neppure semplicemente; ma il caso più comune è quello in cui si ha la convergenza in ugual grado, e allora ne consegue necessariamente la continuità.

α e ∞, e se al tempo stesso la serie integrale $\sum\int_\alpha^x u_n\,dx$ avrà un valore determinato e finito anche per $x=\beta$ o per $x=\infty$, la somma $\psi(x)$ di questa serie integrale sarà necessariamente finita e continua anche in questi punti o in essi avrà soltanto una discontinuità ordinaria.

E viceversa *se la serie integrale sarà continua o avrà soltanto una discontinuità ordinaria per $x=\beta$ o per $x=\infty$, ferme restando tutte le altre condizioni per gli intervalli fra α e β che non terminano al punto β o per ogni intervallo finito fra α e ∞, la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione nell'intiero intervallo da α a β o da α a ∞, pure non essendo applicabile l'integrazione per serie termine a termine in questo intervallo nel caso della discontinuità della serie integrale.*

103. – Questi risultati poi servono in particolare quando si ha una serie $\sum u_n$ che viene considerata fra α e β o fra α e ∞, e per la quale si sa che essa è convergente in ugual grado in ogni intervallo fra α e β che non termini al punto β o in ogni porzione finita fra α e ∞, e si vuole applicare l'integrazione termine a termine a questa serie dopo di avere moltiplicato tutti i suoi termini per una funzione $\psi(x)$ che tutt'al più abbia qualche singolarità nei punti $x=\beta$ o $x=\infty$, nei quali anche la serie può essere divergente.

E difatti, a causa dei risultati precedenti, *se si troverà che la nuova serie $\sum\varphi(x)u_n$ ha i suoi termini atti alla integrazione nell'intiero intervallo da α a β o da α a ∞ e la serie integrale corrispondente $\sum\int_\alpha^x\psi(x)\,u_n\,dx$ è finita e continua anche per $x=\beta$ o per $x=\infty$, si potrà inferirne che la funzione prodotto $f(x)\psi(x$ sarà atta essa pure alla integrazione negli stessi intervalli da α a β o da α a ∞, e si avrà*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\psi(x)\,dx=\sum\int_\alpha^\beta\psi(x)\,u_n\,dx\,,\quad\text{o}\quad\int_\alpha^\infty f(x)\,\psi(x)\,dx=\sum\int_\alpha^\infty\psi(x)\,u_n\,dx\,.$$

E al solito invece di occuparsi della continuità della serie $\sum\int_\alpha^x\psi(x)\,u_n\,dx$ per $x=\beta$ o per $x=\infty$ basterà assicurarsi che si ha *convergenza in ugual grado in questa serie integrale nell'intorno (a sinistra) del punto β o nell'intorno del punto all'infinito.*

104. — Più generalmente poi si può anche affermare che *avendosi una serie qualsiasi* $\sum u_n$ convergente o no *pei valori di x nell'intervallo da α a β*

o da α a ∞, se avverrà che la sua serie integrale $\sum\int_\alpha^x u_n\,dx$ sia convergente per tutti gli stessi valori di x non esclusi i valori estremi, e fatta tutt'al più eccezione per questi valori estremi la sua somma $\theta(x)$ possa essere considerata come l'integrale $\int_\alpha^x\varphi(x)\,dx$ di una certa funzione $\varphi(x)$ che risulta atta alla integrazione anche se si considera nell'intiero intervallo (α,β) o (α,∞), allora la stessa funzione $\theta(x)$, cioè la somma della serie degli integrali, considerata per $x=\beta$ o per $x=\infty$ o sarà ancora continua e in questo caso sarà uguale precisamente all'integrale $\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx$, o avrà al più una discontinuità ordinaria, e il salto della funzione sarà $\theta(\beta)-\int_\alpha^\beta\varphi(x)\,dx$. E in quest'ultimo caso naturalmente la serie integrale non sarà convergente in ugual grado neppure semplicemente; mentre quando si avrà convergenza in ugual grado anche soltanto semplicemente in questa serie, saremo sempre nel caso della continuità della somma $\theta(x)$ della stessa serie, e questa somma $\theta(x)$ rappresenterà l'integrale $\int_\alpha^x\varphi(x)dx$ anche per $x=\beta$ o per $x=\infty$.

È per questo ad esempio che mentre la serie $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\cos nx$ non ha nessun significato, la serie dei suoi integrali

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\dots$$

che è convergente per ogni valore di x, e fra $-\pi$ e π (gli estr. escl.) rappresenta $\frac{1}{2}x$ (V. Introd. al Calc. diff. § 102 [pag. XCIV]), cioè rappresenta $\frac{1}{2}\int_0^x dx$, nei punti $\pm\pi$ ha soltanto una discontinuità ordinaria (*).

(*) Merita di essere rilevato come da queste considerazioni risulti che partendo da serie che sono a termini finiti e continui (o almeno integrabili) in un certo intervallo, ma non hanno alcun significato, colla loro integrazione termine a termine si può giungere talvolta ad altre serie la cui somma è continua e derivabile o ha soltanto discontinuità ordinarie.

Naturalmente poi le serie ottenute in questi casi sono di quelle alle quali la derivazione per serie termine a termine non è affatto applicabile, mentre è applicabile la derivazione alla somma della serie in tutti i punti di continuità di essa.

Applicazioni varie della integrazione per serie.

105. — I risultati precedenti danno luogo a molte applicazioni delle quali noi indicheremo le principali; e incominceremo col mostrare come la integrazione per serie possa servire alla ricerca di alcuni integrali.

1.° Si vogliano determinare gli integrali $\int_0^x \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$, e $\int_0^\alpha \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,d\alpha$ quando α è reale e in valore assoluto non supera l'unità, e x è pure reale ma qualunque.

Si osservi perciò dapprima che quando sia $|\alpha|<1$ si ha in serie convergente qualunque sia x

$$\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=\log(1-\alpha e^{ix})(1-\alpha e^{-ix})=-\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n}e^{inx}-\sum_1^\infty\frac{\alpha^n}{n}e^{-inx}$$

ovvero

$$\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=-2\sum_1^\infty\frac{\alpha^n}{n}\cos nx\,; \tag{1}$$

e siccome per la serie $\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n}\cos nx$, qualunque sia l'intervallo nel quale si fa variare x, la serie dei massimi valori assoluti dei suoi termini è $\sum_1^\infty\frac{|\alpha|^n}{n}$, e questa se $|\alpha|<1$ è convergente, ricordando un teorema noto (Introd. al Calc. diff. § 95 [pag. LXXXIX]) si vede subito che, sempre quando $|\alpha|<1$, la serie stessa $\sum_1^\infty\frac{\alpha^n}{n}\cos nx$ in qualunque intervallo nel quale si faccia variare x è convergente in egual grado, e quindi ad essa è applicabile l'integrazione per serie [§ 98].

Ne segue che pel primo degli integrali cercati si avrà sempre in serie convergente finchè $|\alpha|<1$ e qualunque sia x

$$\int_0^x \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=-2\sum_1^\infty\frac{\alpha^n}{n^2}\operatorname{sen} nx\,; \tag{2}$$

e quindi in particolare per $x=\pi$ sarà

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=0\,,$$

come già trovammo al § 6 [pag. 14 e seg.].

Per considerare ora anche il caso di $\alpha=\pm1$ ricordiamo che nella Introduzione al Calcolo differenziale al § 102 [pag. XCII e seg.] dimostrammo che la serie $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$, che corrisponde a $\frac{1}{2}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ per $\alpha=-1$, è convergente in ugual grado in tutti gli intervalli relativi ad x che non comprendono i punti $(2k+1)\pi$ con k numero intero, e osserviamo che con considerazioni come quelle che allora si fecero si trova che anche l'altra serie $-\sum_1^\infty\frac{\cos nx}{n}$, che corrisponde a $\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ per $\alpha=1$, è convergente in ugual grado negli intervalli che non comprendono i punti $2k\pi$; e da questo pel teorema del § 98 si concluderà perciò intanto che alle serie medesime è applicabile l'integrazione termine a termine negli stessi intervalli.

Per questo e perchè le serie degli integrali $2\sum(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$, $-2\sum\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ sono sempre convergenti in ugual grado, basterà ora applicare il teorema primo del § 101 per concluderne che alle serie $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$ e $-\sum_1^\infty\frac{\cos nx}{n}$ è applicabile l'integrazione termine a termine anche quando gli intervalli d'integrazione contengono i punti testè rispettivamente esclusi $(2k+1)\pi$ e $2k\pi$; e questo basta evidentemente per poter dire che la formola (2) vale anche per $\alpha=\pm1$, e così il primo degli integrali cercati è determinato per tutti i valori di α fra -1 e 1 (±1 inclusi).

Osservando poi che se si considerano i termini della serie $\sum\frac{\alpha^n}{n}\cos nx$ come funzioni di α, il cerchio di convergenza di questa serie qualunque sia x è quello di raggio uno, e quindi la serie stessa è convergente in ugual grado per tutti i valori di α fra $-1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$ essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, basta applicare il teorema del § 98 per vedere subito intanto che per α compreso fra -1 e $+1$ (gli estr. ±1 al più escl.) si ha

$$\int_0^\alpha \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,d\alpha=-2\sum\frac{\alpha^{n+1}}{n(n+1)}\cos nx\,; \tag{3}$$

dopo di che, tenendo conto ancora del primo teorema del § 101 si vede subito che questa formola vale anche pei valori estremi -1 e $+1$ di α; e così anche il secondo degli integrali cercati è determinato in tutti i casi.

2.° Vogliasi calcolare l'*integral-logaritmo* o $\int_a^x\frac{e^x\,dx}{x}$ (§ 42 [pag. 83]) dove a è diverso da zero e positivo; il quale integrale, come già dicemmo, non si ha sotto forma finita.

Per questo si osserverà che si ha

$$(4)\qquad \frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^3}{1.2.3.4}+\dots,$$

e la serie del secondo membro, tolto il primo termine che diviene infinito per $x=0$, è convergente in egual grado in qualunque intervallo finito; e quindi pel teorema del § 98 si troverà subito la formola seguente

$$(5)\qquad \int_a^x \frac{e^x\,dx}{x}=\log\frac{x}{a}+\sum_1^\infty \frac{x^n-a^n}{n\pi(n)},$$

che varrà per ogni valore finito diverso da zero e positivo di x, e per la quale si avrà subito anche l'integrale indefinito sotto la forma

$$(6)\qquad \int \frac{e^x\,dx}{x}=\log x+\sum_1^\infty \frac{x^n}{n\pi(n)}+C,$$

giacchè la serie $\sum_1^\infty \frac{a^n}{n\pi(n)}$ è convergente per qualunque valore finito di a.

Di qui poi o dalla (5) si avranno anche le formole seguenti

$$(7)\qquad \int \frac{e^x-1}{x}\,dx=\sum_1^\infty \frac{x^n}{n\pi(n)}+C,\quad e\quad \int_0^x \frac{e^x-1}{x}\,dx=\sum_1^\infty \frac{x^n}{n\pi(n)}.$$

che varranno per qualunque valore finito di x.

3.° Vogliasi per mezzo di una serie l'integrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ per x compreso fra -1 e 1 (gli estremi inclusi) cioè per $|x|\leq 1$, che già sappiamo essere uguale a $\operatorname{arc\,sen} x$.

Si osservi perciò che quando $|x|<1$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)_1 x^2+\left(-\frac{1}{2}\right)_2 x^4-\left(-\frac{1}{2}\right)_3 x^6+\dots,$$

essendo $\left(-\frac{1}{2}\right)_1, \left(-\frac{1}{2}\right)_2, \left(-\frac{1}{2}\right)_3,\dots$ i soliti coefficienti binomiali; e siccome

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;\dots\;n}=(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n},$$

si potrà anche scrivere

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}x^{2n}+\dots;$$

talchè, osservando che la serie del secondo membro ha per cerchio di convergenza quello di raggio uno e *nell'interno* del cerchio è convergente in ugual grado, si avrà subito per x compreso fra -1 e 1 (gli estr. al più esclusi)

$$(8)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots;$$

Osservando poi che anche la serie del secondo membro in questa formola ha per cerchio di convergenza quello di raggio uno, e osservando inoltre che coll'applicare per es. il criterio di Gauss per la convergenza delle serie a termini positivi, si trova che essa è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio di convergenza, se ne deduce che la serie stessa è una funzione finita e continua di x anche per $x=\pm 1$, e quindi pel teorema primo del § 101 si conclude che la formola (8) vale anche per $x=\pm 1$.

E si può notare che, siccome si sa già che $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sen} x$, si può ora affermare che si ha la formola

$$(9)\qquad \operatorname{arc\,sen} x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$$

che dà lo sviluppo in serie di $\operatorname{arc\,sen} x$ per tutti i valori di x fra -1 e 1 (± 1 inclusi), intendendo sempre qui con $\operatorname{arc\,sen} x$ l'arco non superiore a $\frac{\pi}{2}$ in valore assoluto che ha per seno x.

In particolare quindi per $x=1$ si ha la formola seguente

$$(10)\qquad \frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7}+\dots+\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{1}{2n+1}+\dots$$

che dà uno sviluppo in serie di $\frac{\pi}{2}$, e facendo $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}},\dots$, si hanno formole simili per $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\dots$

4.° Vogliasi l'integrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1\pm x^4}}$ per x compreso fra -1 e 1 (± 1 inclusi).

Osservando che quando $|x|<1$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm x^4}}=\left(1\pm x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=1\pm\left(-\frac{1}{2}\right)_1 x^4+\left(-\frac{1}{2}\right)_2 x^8\pm\left(-\frac{1}{2}\right)_3 x^{12}+\dots,$$

con ragionamenti simili ai precedenti si troverà subito la formola

$$(11)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1\pm x^4}}=x\mp\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^9}{9}\mp\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{13}}{13}+\dots+(\mp 1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\dots$$

per tutti i valori di x fra -1 e 1 (± 1 inclusi).

5.° In generale quando una funzione $f(x)$ fra a e $a+h$, con h per es. positivo, è sviluppabile in serie colla formola di Taylor

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{\pi(n)}+\dots,$$

se si osserva che, indicando con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, questa serie pei valori di x fra a e $a+h-\varepsilon$ è convergente in ugual grado, si vede subito che alla serie stessa si potrà applicarle l'integrazione termine a termine per tutti i valori di x fra a e $a+h$ ($a+h$ al più escl.), e si avrà la formola

$$(12)\quad \int_a^x f(x)\,dx=f(a)(x-a)+f'(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+f''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{\pi(n+1)}+\dots;$$

e così in particolare se $a=0$, cioè se la formola dalla quale si parte è quella di Maclaurin, avremo

$$(13)\quad \int_0^x f(x)\,dx=f(0)x+f'(0)\frac{x^2}{1.2}+f''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+\dots+f^{(n)}(0)\frac{x^{n+1}}{\pi(n+1)}+\dots$$

per i valori di x pei quali la formola di Maclaurin dalla quale si parte è applicabile, fatta tutt'al più eccezione pei valori estremi che possono darsi ad x.

Aggiungiamo, per quanto possa anche apparire superfluo, che trovati alcuni integrali definiti fra α e x col processo d'integrazione per serie, basterà aggiungere loro una costante arbitraria per avere gli integrali indefiniti corrispondenti, come già si fece sopra per l'integral-logaritmo; però le formole che allora si otterranno varranno evidentemente soltanto pei valori di x compresi negli intervalli nei quali alla serie dalla quale si parte è applicabile l'integrazione termine a termine.

106. — Osserviamo anche che, come nell'esempio 3.° del paragrafo precedente la integrazione per serie ha servito a darci uno sviluppo in serie per $\operatorname{arc\,sen} x$, così in altri casi la stessa integrazione per serie può valere a darci sviluppi di altre funzioni.

Ricordiamo ad es. che al § 79 [pag. 123] trovammo la formola

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}=\pi\frac{e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen} a\pi},$$

con a compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e θ compreso fra $-\pi$ e π ($-\pi$ e π escl.), e osserviamo che l'integrale del primo membro può riguardarsi come la somma dei due $\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}$, $\int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}$.

Siccome per $|x|<1$ si ha in serie convergente

$$\frac{1}{x+e^{\theta i}}=\frac{1}{e^{\theta i}}\frac{1}{1+xe^{-\theta i}}=\sum_0^\infty(-1)^n x^n e^{-(n+1)\theta i},$$

e per $|x|>1$ si ha invece in serie pure convergente

$$\frac{1}{x+e^{\theta i}}=\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{e^{\theta i}}{x}}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{e^{n\theta i}}{x^{n+1}},$$

e la convergenza in queste serie è anche in ugual grado nei respettivi intervalli da 0 a $1-\varepsilon$ e da $1+\varepsilon$ all'infinito con ε positivo e arbitrariamente piccolo, si vede subito che dalla prima di queste formole, non ostante che a sia compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), avremo per $x<1$ (§ 103)

$$\int_0^x \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{e^{-(n+1)\theta i}}{a+n}x^{a+n},$$

e dalla seconda avremo per $x>1$ (§ 101. 2.°)

$$\int_x^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}=-\sum_0^\infty(-1)^n\frac{e^{n\theta i}}{a-n-1}x^{a-n-1};$$

e poichè, per quanto si vide nella Introd. al Calc. differ. ai §§ 81 e 100 [pag. LXXVII e XCI], le serie dei secondi membri in queste formole sono convergenti anche per $x=1$, e sono continue la prima a sinistra e la seconda a destra di questo punto $x=1$, perchè θ non prende i valori $\pm\pi$, basta applicare il teorema primo del § 101 per concluderne che le formole stesse valgono anche per $x=1$, e quindi si avrà la formola seguente

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\theta i}} = \sum_0^\infty (-1)^n \left\{ \frac{e^{-(n+1)\theta i}}{a+n} - \frac{e^{n\theta i}}{a-n-1} \right\},$$

la quale per la (14) ci darà subito l'altra

$$(16)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty (-1)^n \left\{ \frac{e^{-(a+n)\theta i}}{a+n} - \frac{e^{-(a-n-1)\theta i}}{a-n-1} \right\},$$

che dà sotto infinite forme, a causa della arbitrarietà di θ fra $-\pi$ e $\pi(-\pi$ e π escl.), lo sviluppo in serie di $\frac{1}{\operatorname{sen} a\pi}$ o di $\operatorname{cosec} a\pi$ per tutti i valori di a compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.).

Supponendo $\theta=0$ si ha lo sviluppo ordinario

$$(17)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = \operatorname{cosec} a\pi = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty (-1)^n \left\{ \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-n-1} \right\}.$$

che per $a=\frac{1}{2}$ ci dà la formola

$$(18)\qquad \frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

come per $a=\frac{1}{4}$, $a=\frac{1}{6}, \dots$ ci darebbe i valori di $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{3}, \dots$

Ed è notevole che separando nel secondo membro della (16) la parte reale dalla parte immaginaria si ottengono anche le due formole

$$(19)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty (-1)^n \left\{ \frac{\cos(a+n)\theta}{a+n} - \frac{\cos(a-n-1)\theta}{a-n-1} \right\},$$

$$(20)\qquad 0 = \sum_0^\infty (-1)^n \left\{ \frac{\operatorname{sen}(a+n)\theta}{a+n} + \frac{\operatorname{sen}(a-n-1)\theta}{a-n-1} \right\},$$

che valgono qualunque sia θ fra $-\pi$ e $\pi(-\pi$ e $+\pi$ escl.) e per ogni valore di a fra 0 e 1 (0 e 1 escl.).

107. — I risultati precedenti, mentre ci mostrano che l'integrazione per serie può servire per la determinazione degli integrali definiti e degli sviluppi in serie per certe funzioni, danno in sostanza anche un processo per la trasformazione in serie degli integrali definiti.

Viceversa poi è facile vedere che la integrazione per serie può servire anche a trovare la somma di certe serie, e alla trasformazione di serie in integrali definiti.

Per mostrare in modo generale come questo possa farsi, supponiamo di avere una serie $\sum u_n$ i cui termini siano costanti o anche funzioni di una variabile x, e di questa serie si voglia trovare la somma S.

Ammettiamo che i termini u_n di questa serie si possano riguardare come integrali fra due limiti finiti o infiniti α e β relativi ad una variabile y (che potrà anche essere la stessa x quando questo non porti ambiguità) del prodotto di una funzione $v_n(y)$ per un'altra quantità costante o funzione anch'essa della y, per es. $\varphi(y)$, che sia la stessa per ogni termine della serie, come devono essere sempre gli stessi i limiti α e β, senza però escludere che questi limiti e così le funzioni $v_n(y)$ e $\varphi(y)$ possano anche contenere la x.

È chiaro allora che potremo scrivere

$$S = \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,v_1(y)\,dy + \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,v_2(y)\,dy + \dots + \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,v_n(y)\,dy + \dots,$$

e se la serie $\sum v_n(y)$ sarà convergente in ugual grado fra α e β e $\varphi(y)$ sarà sempre finita nello stesso intervallo o, più generalmente, se alla serie $\sum v_n(y)$ sarà applicabile la integrazione fra α e β anche dopo di averne moltiplicati i varii termini per $\varphi(y)$, allora avremo evidentemente

$$(21)\qquad S = \int_\alpha^\beta \varphi(y) \sum_0^\infty v_n(y)\,dy,$$

talchè, se la somma della serie $\sum_1^\infty v_n(y)$ sarà conosciuta e sarà pur conosciuto o potrà determinarsi l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(y) \sum_1^\infty v_n(y)dy$, risulterà determinata anche la somma S della serie data; e se sarà $\theta(y)$ la somma della serie $\sum v_n(y)$ la serie data $\sum u_n$ verrà trasformata nell'integrale definito $\int_\alpha^\beta \varphi(y)\theta(y)dy$.

Tenendo conto poi delle considerazioni fatte nel § 102, si vede che questi risultati varranno anche se la serie $\sum_1^\infty v_n(y)$ sarà divergente (cioè infinita o indeterminata) o se la funzione $\varphi(y)$ diverrà indeterminata o infinita a uno o a tutti e due i limiti α e β per es. al limite β, quando la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta \varphi(y)\, v_n(y)\, dy$ sia finita e continua anche nel punto β, ecc.

Queste considerazioni inoltre possono anche servire a dimostrare la convergenza della serie data $\sum u_n$ quando di questa, a differenza di quanto supponevamo sopra, non si sappia nulla avanti; perchè se risulterà determinato e finito l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(y) \sum_1^\infty v_n(y)\, dy$, naturalmente sarà determinata e finita anche S cioè la somma della serie data.

108. — Per dare qualche esempio prendiamo a cercare la somma della serie $\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn}$ dove α è una costante qualsiasi, e a, b, β sono quantità diverse da zero e positive, e $|x|<1$.

Osservando che $\frac{1}{a+bn} = \int_0^1 y^{a+bn-1} dy$, si vede subito che sarà

$$\frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn} = x^\alpha \int_0^1 y^{a+bn-1} x^{\beta n}\, dy = x^\alpha \int_0^1 y^{a-1} (x^\beta y^b)^n\, dy,$$

e quindi avremo

$$\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn} = x^\alpha \sum_0^\infty \int_0^1 y^{a-1} (x^\beta y^b)^n\, dy;$$

e poichè la serie $\sum_0^\infty (x^\beta y^b)^n$ per $|x|<1$ è convergente in ugual grado per tutti i valori di y fra 0 e 1 (gli estr. incl.) e ha per somma evidentemente $\frac{1}{1-x^\beta y^b}$ avremo

$$(22)\qquad \sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{1-x^\beta y^b}\, dy,$$

purchè, come abbiamo supposto, a sia diverso da zero e positivo.

Fatto poi un cambiamento di variabile col porre $x^\beta y^b = z^\beta$, cioè col porre $y = \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\beta}{b}}$, avremo anche

$$(23)\qquad \sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn} = \frac{\beta}{b}\, x^{\alpha-\beta\frac{a}{b}} \int_0^x \frac{z^{\beta\frac{a}{b}-1}}{1-z^\beta}\, dz;$$

e tanto sotto questa forma quanto sotto la precedente (22) la determinazione della somma della serie data viene ridotta a quella di uno o di un altro integrale dei quali, il primo quando a e b sono numeri interi o fratti, e il secondo quando sono interi o fratti il β e il rapporto $\frac{a}{b}$ (i casi di a, b o β zero sempre escl.) si riducono sempre a integrali di funzioni razionali (§ 29 [pag. 63]) che si determinano con tutta facilità.

In ogni caso poi la nostra serie $\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a+bn}$ risulta così trasformata in un integrale definito.

109. — Similmente se si voglia determinare la somma dell'altra serie $\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{(a+bn)[a+b(n+1)]}$ quando a, b e β sono diversi da zero e positivi e x non supera la unità in valore assoluto, si osserverà prima che

$$\frac{1}{(a+bn)[a+b(n+1)]} = \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{a+bn} - \frac{1}{a+b(n+1)}\right\} = \frac{1}{b}\int_0^1 y^{a+bn-1}(1-y^b)\, dy,$$

e con ragionamenti simili a quelli fatti pel caso precedente si troverà che quando $|x|<1$ si ha la formola seguente

$$(24)\qquad \sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+\beta n}}{(a+bn)[a+b(n+1)]} = \frac{x^\alpha}{b}\int_0^1 \frac{y^{a-1}(1-y^b)}{1-x^\beta y^b}\, dy,$$

che riporta la determinazione della somma della serie data a quella di un integrale definito che nel caso di a e b interi o fratti (ma sempre diversi da zero e positivi) e $|x|<1$ si riduce alla integrazione di una funzione razionale, e questa integrazione si effettua con tutta facilità.

Quando poi $x=1$ e quando, nel caso che β sia un numero intero pari, si ha $x=-1$, il semplice esame della serie ci mostra subito che la sua somma è $\frac{1}{ab}$, e lo stesso risulta anche dalla formola (24) che vale così anche per $x=1$, e se β è un numero intero pari vale anche per $x=-1$.

E quando poi sia $\beta=0$ la somma della serie è $\frac{x^\alpha}{ab}$ qualunque sia x, e la formola (24) si mantiene ancora valida.

Cambiando n in $2n$ e supponendo senz'altro $\alpha=\beta=0$, si trova anche la formola

$$(25)\qquad \sum_0^\infty \frac{1}{(a+2bn)[a+b(2n+1)]} = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{y^{a-1}}{1+y^b}\, dy,$$

che col cambiare y^b in z e poi z di nuovo y si riduce all'altra

$$(26)\qquad \sum_0^\infty \frac{1}{(a+2bn)[a+b(2n+1)]} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{y^{\frac{a}{b}-1}}{1+y}\,dy\,.$$

In ogni caso poi con questi processi le serie considerate vengono trasformate in integrali definiti.

110. — Aggiungiamo che con opportune considerazioni la integrazione per serie può anche servire, e in infiniti modi, a ridurre la determinazione di un integrale fra limiti infiniti, per es. dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ che supporremo determinato e finito, alla determinazione della somma di una serie e di un altro integrale definito.

Si prenda infatti una serie infinita di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ da α all'infinito, e si osservi che avendosi

$$(27)\qquad \int_\alpha^{a_n} f(x)\,dx = \int_\alpha^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx\,,$$

se la funzione $f(x)$ sarà, come abbiamo supposto, atta alla integrazione fra α e ∞, la serie $\sum_1^\infty \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$, nella quale s'intenderà che sia $a_0 = \alpha$, sarà convergente e la sua somma sarà appunto l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$.

Facendo ora in ciascun integrale $\int_{a_{s-1}}^{a_s} f(x)\,dx$ un cambiamento di variabile, che muterà da integrale a integrale, col porre $x=\varphi_n(y)$, essendo $\varphi_n(y)$ una funzione che fra due numeri *fissi* λ e μ dati a piacere sia finita e continua insieme alla sua derivata e per $x=\gamma$ e $x=\mu$ si riduca respettivamente a a_{n-1} e a_n, avremo

$$(28)\qquad \int_{a_{s-1}}^{a_s} f(x)\,dx = \int_\lambda^\mu \varphi'_s(y) f[\varphi_s(y)]\,dy\,,$$

e

$$(29)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_\lambda^\mu \varphi'_n(y) f[\varphi_n(y)]\,dy\,;$$

talchè se la serie $\sum_1^\infty \varphi'_n(y) f[\varphi_n(y)]$ sarà convergente e convergente in ugual grado fra λ e μ, o più generalmente se sarà atta alla integrazione in questo intervallo, avremo la formola

$$(30)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \int_\lambda^\mu \sum_1^\infty f'_n(y) f[\varphi_n(y)]\,dy\,,$$

per la quale la determinazione dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ sarà ridotta a quella della somma $\theta(y)$ della serie $\sum_1^\infty \varphi'_n(y) f[\varphi_n(y)]$ pei valori di y fra λ e μ, e poi alla determinazione dell'integrale $\int_\lambda^\mu \theta(y)\,dy$; e la tanta arbitrarietà che resta in $\varphi(y)$ e nelle costanti λ e μ ci mostra che questa trasformazione potrà farsi in infiniti modi.

E quando avvenisse che la serie $\sum_1^\infty \varphi'(y) f[\varphi_n(y)]$ non risultasse convergente in ugual grado fra λ e μ, o in essa mancasse assolutamente la convergenza, allora, come vedremo fra breve pel caso particolare dell'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, potrebbe darsi che con opportune trasformazioni gli integrali $\int_\lambda^\mu \varphi'_n(y) f[\varphi_n(y)]\,dx$ potessero ridursi ad altri della forma $\int_{\lambda_0}^{\mu_0} \psi_n(y)\,dy$ pei quali la serie $\sum_1^\infty \psi_n(y)$ risultasse convergente in ugual grado o almeno integrabile fra λ_0 e μ_0, e in tal caso invece della (30) si potrebbe applicare la formola

$$(31)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \int_{\lambda_0}^{\mu_0} \sum_1^\infty \psi_n(y)\,dy\,.$$

111. — In particolare potremo prendere

$$(32)\qquad \varphi_n(y) = a_{n-1} + \frac{\varphi(y)-\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)-\varphi(\lambda)}(a_n - a_{n-1})\,,$$

essendo $\varphi(y)$ una funzione qualsiasi di y finita e continua insieme alla sua derivata fra λ e μ, e allora la formola (30) si ridurrà all'altra

$$(33)\qquad \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{\varphi(\mu)-\varphi(\lambda)}\int_\lambda^\mu \varphi'(y)\,\theta_1(y)\,dy\,,$$

essendo $\theta_1(y)$ la somma della serie $\sum_1^\infty (a_n - a_{n-1}) f[\varphi_n(y)]$ dove $\varphi_n(y)$ è dato dalla formola precedente (32), e supponendo ancora che questa serie sia convergente in ugual grado o almeno integrabile fra λ e μ, ecc.

E in particolare prendendo $\varphi(y) = y$ avremo

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{\mu-\lambda}\int_\lambda^\mu \theta_2(y)\,dy, \tag{34}$$

con

$$\theta_2(y) = \sum_1^\infty (a_n - a_{n-1}) f\left[a_{n-1} + \frac{y-\lambda}{\mu-\lambda}(a_n - a_{n-1})\right]. \tag{35}$$

E più particolarmente ancora, supponendo $\lambda = 0$ e prendendo i punti $\alpha, a_1, a_2, a_3, \ldots$ successivamente equidistanti, e indicando con h la distanza di ciascuno di essi dal seguente, avremo

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \frac{h}{\mu}\int_0^\mu \theta_3(y)\,dy, \tag{36}$$

con

$$\theta_3(y) = \sum_1^\infty f\left(\alpha + (n-1)h + \frac{h}{\mu}y\right). \tag{37}$$

sempre colla solita supposizione della convergenza in ugual grado o almeno della integrabilità fra λ e μ della serie che figura in $\theta_3(y)$, ecc.

112. — E così per es. quando si volesse trasformare, per poi calcolarlo effettivamente, l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ che al § 74 [pag. 114] noi vedemmo che è determinato e finito, prendendo $h = \mu = 2\pi$ avremo

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{2(n-1)\pi + y} = \sum_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{2n\pi + y}dy;$$

e poichè la serie $\operatorname{sen} y \sum_0^\infty \frac{1}{2n\pi + y}$ non è convergente, si osserverà prima che in ogni termine gli integrali $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{2n\pi + y}dy$ possono ridursi alla somma $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{2n\pi + y}dy + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{2n\pi + y}dy$ che col cambiare nel secondo integrale y

in $y + \pi$ si trasforma subito nell'altra $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{2n\pi + y}dy - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{(2n+1)\pi + y}dy$ o nell'integrale $\pi\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{(2n\pi + y)[(2n+1)\pi + y]}dy$, talchè si può scrivere anche

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \pi \sum_0^\infty \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{(2n\pi + y)[(2n+1)\pi + y]}dy; \tag{38}$$

e ora poichè la serie $\sum \frac{1}{(2n\pi + y)[(2n+1)\pi + y]}$, quando si faccia astrazione dal termine corrispondente a $n = 0$ che per $y = 0$ è infinito, resulta convergente in ugual grado fra 0 e π, si avrà la formola

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \pi\int_0^\pi \operatorname{sen} y\,\theta(y)\,dy, \tag{39}$$

essendo $\theta(y)$ la somma della serie $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n\pi + y)[(2n+1)\pi + y]}$ che colla formola (26) si riduce anch'essa a un integrale definito.

Osservando poi che dalla formola precedente si ha

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} y \{\theta(y) + \theta(\pi - y)\}dy,$$

e

$$\theta(y) + \theta(\pi - y) = \frac{1}{\pi^2}\sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{\left(2n + \frac{y}{\pi}\right)\left(2n + 1 + \frac{y}{\pi}\right)} + \frac{1}{\left(2n + 1 - \frac{y}{\pi}\right)\left(2n + 2 - \frac{y}{\pi}\right)} \right\},$$

basta avere riguardo alla formola (17) della pag. 158 che dà lo sviluppo in serie di $\frac{1}{\operatorname{sen} a\pi}$, scrivendola prima sotto la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_0^\infty (-1)^n \left\{\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+1-a}\right\},$$

e poi aggruppando ogni termine di posto pari col successivo di posto dispari, per vedere che la somma della serie $\theta(y) + \theta(\pi - y)$ che figura sotto l'integrale precedente è $\frac{1}{\pi \operatorname{sen} y}$; e questo permette di subito determinare l'integrale $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, dandoci la formola

(40) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

113. — Aggiungiamo infine che questi processi servono anche a dare dei criterii per giudicare della convergenza di certe serie e della natura di certi integrali.

Supposto infatti ad esempio che nella formola (28) *sia* $\lambda < \mu$ *e che la funzione* $\varphi'_s(y)\, f[\varphi_s(y)]$ *risulti sempre positiva e non mai crescente* (monotona) *fra* λ *e* μ, *e anche* $f(x)$ *sia sempre positiva da* α *a* ∞, siccome si ha in ogni caso e per ogni valore *finito* di n

(41) $$\int_\alpha^{a_n} f(x)\,dx = \sum_1^n \int_{a_{s-1}}^{a_s} f(x)\,dx = \sum_1^n \int_\lambda^\mu \varphi'_s(y)\, f[\varphi_s(y)]\,dy\,,$$

è evidente che avremo

$$(\mu-\lambda)\sum_1^n \varphi'_s(\mu)\, f[\varphi_s(\mu)] < \int_\alpha^{a_n} f(x)\,dx < (\mu-\lambda)\sum_1^n \varphi'_s(\lambda)\, f[\varphi_s(\lambda)]\,;$$

e quindi, osservando che, per essere $f(x)$ sempre positiva da α a ∞, l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ avrà certamente un valore finito o sarà infinito, nè si potrà parlare affatto di indeterminazione, e questo valore (finito o infinito) dell'integrale sarà il limite (che certo esisterà) dell'integrale $\int_\alpha^{a_n} f(x)\,dx$ comunque siano state scelte le a_n, potremo evidentemente affermare che

1.° *se l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *avrà un valore finito la serie* $\sum_1^\infty \varphi'_n(\mu)\, f[\varphi_n(\mu)]$ *sarà convergente, e se lo stesso integrale sarà infinito la serie* $\sum_1^\infty \varphi'_n(\lambda)\, f[\varphi_n(\lambda)]$ *sarà divergente* (infinita);

2.° *se di queste due serie* $\sum_1^\infty \varphi'_n(\lambda)\, f[\varphi_n(\lambda)]$ *e* $\sum_1^\infty \varphi'_n(\mu)\, f[\varphi_n(\mu)]$ *la prima sarà*

convergente l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *avrà un valore finito, e se la seconda sarà divergente* (infinita) *l'integrale sarà infinito.*

114. — In particolare quindi se ci poniamo nell'ultimo dei casi considerati nel § 111, prendendo cioè i punti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ distanti successivamente l'uno dall'altro e da α della stessa quantità h, e supponiamo $\lambda = 0$, $\mu = h$ e $\varphi_n(y) = \alpha + (n-1)h + y$, si vede subito che *quando* $f(x)$ *è una funzione sempre positiva e non mai crescente da* α *a* ∞, *la serie* $\sum f(\alpha+nh)$ *sarà convergente se l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *è finito, e sarà divergente se l'integrale stesso è infinito, e viceversa;* cioè *la serie* $\sum f(\alpha+nh)$ *e l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ *saranno convergenti e divergenti insieme.*

Supponendo in particolare $f(x)$ successivamente uguale alle funzioni $\frac{1}{x^\mu}$, $\frac{1}{x \log x^\mu}$, $\frac{1}{x \log x (\log^2 x)^\mu}, \ldots$ si ritrovano i noti teoremi sulla convergenza della serie $\sum \frac{1}{n^\mu}$, $\sum \frac{1}{n (\log n)^\mu}$, $\sum \frac{1}{n \log n (\log^2 n)^\mu} \ldots$ per μ positivo e superiore ad uno, e sulla loro divergenza per gli altri valori di μ.

115. — Questi risultati poi potranno anche estendersi, supponendo ancora che le funzioni $\varphi'_s(y)\, f[\varphi_s(y)]$ fra λ e μ e la $f(x)$ fra α e ∞ siano sempre positive, ma non ponendo più la condizione che non siano mai crescenti fra gli stessi limiti; e per fare questa estensione converrà allora introdurre in campo in modo generale numeri uguali o maggiori, o numeri uguali o minori respettivamente dei valori massimi e minimi (o limiti superiori e inferiori) di queste funzioni negli intervalli (λ, μ) o $(\alpha + nh, \alpha + (n+1)h)$.

E in questi casi per maggiore generalità, sempre ammettendo che $f(x)$ sia sempre positiva, potremo considerare le serie $\sum \alpha_n$ e $\sum \beta_n$ formate respettivamente da numeri positivi α_n uguali o maggiori, e numeri positivi β_n uguali o minori dei valori degli integrali $\int_\lambda^\mu \varphi'_n(y)\, f[\varphi(y)]\,dy$ o $\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$; e allora, sempre per la (41), *se la serie* $\sum \alpha_n$ *sarà convergente l'integrale* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *avrà un valore finito, mentre se la serie* $\sum \beta_n$ *sarà divergente* *l'integrale stesso sarà infinito;* e inversamente *se questo integrale* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *sarà infinito la serie* $\sum \alpha_n$ *sarà divergente e se l'integrale stesso avrà un valore finito la serie* $\sum \beta_n$ *sarà convergente.*

E così per es. quando si abbia l'integrale $\int_0^\infty \frac{\mathrm{L}(x)\,dx}{\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{sen}^2 x}$, nel quale le funzioni $\mathrm{L}(x)$, $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$ sono sempre diverse da zero e positive, e al crescere indefinito di x $\mathrm{P}(x)$ se non è una costante resta sempre compresa fra due numeri diversi da zero p e q essendo $p<q$, e $\mathrm{P}(x)$ e $\mathrm{Q}(x)$ crescono invece continuamente e indefinitamente, allora fissando che le $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ siano nei punti $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi, \ldots$, si vede che potremo prendere

$$\alpha_n = \mathrm{L}(n\pi)\int_0^\pi \frac{dx}{p+\mathrm{Q}[(n-1)\pi]\,\mathrm{sen}^2 x}\ ,\quad \beta_n = \mathrm{L}[(n-1)\pi]\int_0^\pi \frac{dx}{q+\mathrm{Q}(n\pi)\,\mathrm{sen}^2 x}\,;$$

e siccome per a e b diversi da zero e positivi si ha

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\,\mathrm{sen}^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\,\mathrm{sen}^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\cos^2 x+(a+b)\,\mathrm{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2}{a+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{\frac{a}{a+b}+\mathrm{tang}^2 x} = \frac{2}{\sqrt{a(a+b)}}\left[\mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{a+b}{a}}\,\mathrm{tang}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}},$$

sarà

$$\alpha_n = \frac{\mathrm{L}(n\pi)}{\sqrt{p\{p+\mathrm{Q}[(n-1)\pi]\}}} = \frac{\mathrm{L}(n\pi)}{\sqrt{\mathrm{Q}[(n-1)\pi]}}\,\alpha'_n\,,$$

$$\beta_n = \frac{\mathrm{L}[(n-1)\pi]}{\sqrt{q\{q+\mathrm{Q}(n\pi)\}}} = \frac{\mathrm{L}[(n-1)\pi]}{\sqrt{\mathrm{Q}(n\pi)}}\,\beta'_n\,,$$

essendo α'_n e β'_n quantità finite che si mantengono sempre discoste da zero più di un certo numero, per il che si può dire evidentemente che *sotto le fatte ipotesi, l'integrale dato* $\int_0^\infty \frac{\mathrm{L}(x)\,dx}{\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{sen}^2 x}$ *avrà un valore finito quando la serie* $\sum \frac{\mathrm{L}(n\pi)}{\sqrt{\mathrm{Q}(n-1)\pi}}$ *è convergente, e sarà infinito quando la serie* $\sum \frac{\mathrm{L}(n-1)\pi]}{\sqrt{\mathrm{Q}(n\pi)}}$ *è divergente.*

E nel caso più comune nel quale i rapporti $\frac{\mathrm{L}(x)}{\mathrm{L}(x+\pi)}$ e $\frac{\mathrm{Q}(x)}{\mathrm{Q}(x+\pi)}$ hanno per limite l'unità al crescere indefinito di x, si deduce di qui che *lo stesso integrale* $\int_0^\infty \frac{\mathrm{L}(x)\,dx}{\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{sen}^2 x}$ *avrà un valore finito o infinito secondochè la serie* $\sum \frac{\mathrm{L}(n\pi)}{\sqrt{\mathrm{Q}(n\pi)}}$ *sarà convergente o divergente.*

In particolare dunque si può dire che l'integrale $\int_0^\infty \frac{x^h\,dx}{1+x^{2h+s}\,\mathrm{sen}^2 x}$, nel quale h è un numero diverso da zero e positivo qualsiasi, ha un valore finito per $s>2$ ed è infinito per $s\leq 2$.

IX.

Integrali delle funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili

Generalità. — Casi di continuità degli integrali.

116. – Finora abbiamo supposto che le funzioni da integrarsi, anche quando erano date per mezzo della loro espressione analitica, contenessero una sola variabile che era quella cui si riferiva l'integrazione, o almeno non è stata considerata come variabile altro che una delle quantità che in esse comparivano.

Supponiamo ora che l'integrazione definita si porti su una funzione che oltre alla variabile d'integrazione x contiene altre variabili, per es. un'altra variabile y; cioè consideriamo l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ nel quale però la variabile y durante l'integrazione figurerà come una quantità costante; e considerando x e y come coordinate cartesiane dei punti di un piano, fissiamo, a scanso di equivoci, che – quando non si avverta espressamente il contrario – si intenderà sempre che $f(x,y)$ considerata come funzione delle due variabili x e y sia data in tutti i punti del piano, o almeno sia data in un campo $\bar{C}$ che abbia tutto *nell'interno* (cioè discosto con ogni suo punto dal contorno più di una certa quantità data) il campo C dei punti (x, y) nei quali la funzione stessa viene a passare durante la integrazione.

Facendo nella integrazione variare x da α a β mentre y resta costante e uguale a un valore determinato a, si verrà a fare l'integrazione lungo una porzione della retta $y=a$ limitata dalle due ascisse $x=\alpha$ e $x=\beta$; quindi supponendo $f(x,y)$ atta all'integrazione rispetto a x per ogni *valore speciale* che si dà a y fra due valori dati y_0 e y_1, cioè su ogni retta parallela all'asse delle x compresa fra le due rette estreme $y=y_0$ e $y=y_1$, l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ per

ognuno di questi valori di y avrà un significato e il suo valore verrà perciò ad essere una funzione di y per tutti i valori di y nell'intervallo (y_0, y_1).

In questo integrale poi i limiti α e β potranno essere costanti, come potranno essi pure variare con y, potendo essere anche essi due funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ di y (*), e talvolta potranno anche essere due funzioni $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ delle due variabili x e y le quali potranno prendere tutti i valori in un dato campo finito o infinito, e allora l'integrale, quando si tien conto anche della variabilità di x così determinata, sarà una funzione di x e y nello stesso campo.

In quest'ultimo caso però è da osservare che la variabile x che figurerà nei limiti non dovrà riguardarsi come la stessa di quella d'integrazione, la quale figurerà nell'integrale soltanto come una quantità sottoposta alla condizione di prendere durante l'integrazione i valori compresi fra $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ per ogni sistema di valori speciali di x e y, e potrà anche, a scanso di equivoci, esser rappresentata con un'altra lettera per es. ξ; per modo che, quando si abbia per es. l'integrale $\int_{xy}^{x+y}\left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} xy\right)dx$, debba intendersi che esso non sia altro che l'integrale $\int_{xy}^{x+y}\left(\frac{\xi}{y} - \operatorname{sen} \xi y\right)d\xi$, ovvero $\left(\frac{\xi^2}{2y} + \frac{\cos \xi y}{y}\right)_{xy}^{x+y}$ cioè $\frac{(x+y)^2}{2y} + \frac{\cos[(x+y)y]}{y} - \frac{x^2 y}{2} - \frac{\cos xy^2}{y}$.

117. — Sia però che i limiti α e β contengano la variabile x, sia che non la contengano, noi, almeno per ora, non ci occuperemo di questo; e tenendo conto solo della variabile y, studieremo l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ come funzione di y nel caso che α e β non contengano questa variabile, o contenendola siano funzioni finite e continue di y; e indicheremo in ogni caso questi limiti

(*) Così ad esempio se la funzione $f(x,y)$ si considerasse entro un cerchio di raggio R col centro all'origine, supponendola data o no anche pei punti fuori del cerchio, e se si volesse il suo valor medio lungo le varie rette parallele all'asse delle x bisognerebbe determinare prima l'integrale $\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx$ intendendo che in esso y avesse il valore corrispondente alla retta che si vuole considerare, e poi dividere lo stesso integrale per l'intervallo d'integrazione $2\sqrt{R^2-y^2}$; e in questo integrale i limiti sarebbero funzioni di y.

Invece se la funzione $f(x,y)$ fosse considerata in un rettangolo coi vertici nei punti (α,γ), (β,γ), (β,δ) e (α,δ), il suo valore medio lungo le rette parallele all'asse delle x sarebbe l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$, diviso per l'intervallo d'integrazione $\beta-\alpha$; e in questo integrale i limiti sarebbero costanti.

α e β con $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ quando convenga mettere in evidenza la variabile y che essi possono contenere.

Chiamando dunque $\varphi(y)$ l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ e volendo studiarne i casi di continuità, osserveremo che sarà

$$(1) \qquad \varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \ , \ \varphi(y+k) = \int_{\alpha(y+k)}^{\beta(y+k)} f(x,y+k)\,dx ;$$

e ponendo per semplicità $\alpha(y+k) = \alpha_1$ e $\beta(y+k) = \beta_1$, avremo

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x,y+k)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{ f(x,y+k) - f(x,y) \} dx +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha} f(x,y+k)\,dx + \int_{\beta}^{\beta_1} f(x,y+k)\,dx ,$$

e evidentemente se α e β non contengono y, allora sarà $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ e i due ultimi integrali $\int_{\alpha_1}^{\alpha}$, $\int_{\beta}^{\beta_1}$ mancheranno.

In ogni caso se α e β avranno valori finiti, e se nei punti (α,y) e (β,y) la funzione $f(x,y)$, considerata come funzione delle due variabili x e y, sarà finita e continua, indicando con σ_1 e σ_2 quantità numericamente inferiori a una quantità comunque piccola, per valori sufficientemente piccoli di k si avrà sempre

$$(2) \quad \varphi(y+k) - \varphi(y) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big\{ f(x,y+k) - f(x,y) \Big\} dx + \Big\{ f(\beta,y) + \sigma_1 \Big\} (\beta_1 - \beta) - \Big\{ f(\alpha,y) + \sigma_2 \Big\} (\alpha_1 - \alpha)$$

e questa formola ci condurrà subito a trovare dei casi di continuità del nostro integrale (*).

(*) Come già al paragrafo precedente dicemmo di ammettere, si suppone qui, che la funzione $f(x,y)$ sia data in tutto il piano o almeno in un campo che abbia *nel suo interno* tutti i punti pei quali passa la funzione stessa durante l'integrazione.

Se invece la funzione fosse data soltanto entro un campo determinato C e colla integrazione si arrivasse anche ai punti del contorno di esso, come nella nota della pagina precedente già vedemmo che talvolta può essere, allora i punti $(\alpha, y+k)$ e $(\beta, y+k)$ sulla retta orizzontale $y+k$ che noi siamo venuti a considerare, e così tutti i punti dei tratti di questa retta da $x=\alpha_1$ a $x=\alpha$ e da $x=\beta_1$ a $x=\beta$ potranno uscire dal campo C nel quale la funzione è data; ma questa difficoltà può togliersi colle considerazioni seguenti.

Supponiamo infatti dapprima che $f(x,y)$ sia finita e continua in tutto il campo C che si considera, o almeno in una porzione di esso nella quale sia possibile tracciare un rettangolo R comunque piccolo formato da due rette parallele all'asse delle x condotte alle distanze $y-k_1$ e $y+k_1$ da quest'asse, e da due rette parallele all'asse delle y condotte alle distanze $\alpha - h_1$ e $\beta + h_1$ da questo asse, essendo h_1 e k_1 quantità positive comunque piccole, e supposto $\alpha < \beta$.

Allora, siccome la continuità di $f(x,y)$ entro R sarà uniforme, per ogni numero arbitrariamente piccolo σ si potranno trovare due numeri h_0 e k_0 tali che per tutti i valori di h e k numericamente inferiori a h_0 e k_0 e per tutti i punti (x,y) compresi in R si abbia sempre in valore assoluto $f(x+h\,,\,y+k) - f(x,y) < \sigma$; quindi evidentemente per $k < k_0$ tutti gli elementi dell'integrale che comparisce nella formola (2) saranno numericamente inferiori a σdx, e l'integrale sarà inferiore a $\sigma(\beta - \alpha)$, e poichè anche le differenze $\alpha_1 - \alpha$ e $\beta_1 - \beta$ o sono nulle o possono ridursi esse pure arbitrariamente piccole, si conclude di qui *che l'integrale $\varphi(y)$ sarà una funzione finita e continua per ogni valore y che corrisponda a una retta orizzontale y per la quale esista il rettangolo* R quand'anche a distanza finita da questa retta vi siano punti o linee di discontinuità; e si può dire perciò intanto *in particolare* che l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$ *sarà una funzione di y finita e continua, quando in tutto il campo* C *nel quale si considera, la funzione $f(x,y)$ che figura sotto l'integrale è sempre finita e continua* (*).

118. — Il processo tenuto per la dimostrazione di questo teorema fa già intendere come esso sia suscettibile di una grande estensione.

In questo caso infatti nulla c'impedisce di considerare la funzione come *continuata* anche fuori del campo C in piccole porzioni in vicinanza dei punti (α, y) e (β, y) attribuendole su ogni retta orizzontale y_0 esternamente a C il valore che essa ha al contorno di C nei punti $(\alpha(y_0), y_0)$ e $(\beta(y_0), y_0)$ nei quali la retta stessa y_0 traversa il contorno C dalla parte corrispondente; e la funzione stessa così continuata risulterà ancora continua nei punti (α, y) e (β, y) che corrispondono ai limiti dell'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$ se la continuità in questi punti si avrà già nella funzione $f(x,y)$ quando si considera soltanto nel campo C nel quale è data; e quindi applicando i processi precedenti alla nuova funzione continuata nel modo da noi indicato si giungerà ancora alla formola (2), e si potranno fare ancora le considerazioni che seguono.

(*) Queste considerazioni e alcune di quelle che seguono rientrano come casi particolari in quelle più generali che potrebbero farsi sui limiti degli integrali $\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)\,dx$ nei quali la funzione da integrarsi, e talvolta anche i limiti dell'integrale, contengono un'altra quantità λ che prende infiniti valori nell'intorno di un

Ed infatti è facile vedere che, anche se la funzione $f(x,y)$ che si considera è data soltanto in un campo C finito, e in questo campo essa è ancora sempre finita ma ha alcune discontinuità, le quali però sono soltanto in un numero finito di punti staccati, o anche in un numero infinito di punti ma che si succedono — con continuità o no — su un numero finito di linee continue *che non coincidono in tratti di ampiezza finita con linee* $y=$ cost. (cioè con rette orizzontali) *e neppure le toccano o le raggiungono in un numero infinito di punti*, allora, quando i limiti $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ siano costanti o siano funzioni finite e continue di y, l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ sarà una funzione finita e continua di y per tutti valori di y che possono considerarsi nel campo C.

Dimostreremo questo teorema generale anche nel caso in cui il contorno del campo finito C, nel quale $f(x,y)$ è data o viene considerata, sia formato di più linee chiuse, *purchè le linee che formano i contorni* interni *siano in numero finito, non abbiano tratti orizzontali di ampiezza finita e neppure abbiano comuni un numero infinito di punti con rette orizzontali;* e, sotto queste ipotesi, osserveremo prima che quando la retta parallela all'asse delle x, che corrisponde al valore di y che si considera nel passare di x da $\alpha(y)$ a $\beta(y)$ incontrasse i contorni interni in più punti corrispondenti alle ascisse $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p}$ (i quali sarebbero sempre evidentemente in numero finito e pari) per l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ si dovrebbe intendere allora la somma degli integrali ordinari $\int_{\alpha(y)}^{\alpha_1}$, $\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}$, $\int_{\alpha_4}^{\alpha_5}$, ..., $\int_{\alpha_{2p}}^{\beta(y)}$, perchè la funzione si dovrebbe considerare soltanto da $\alpha(y)$ a α_1, da α_2 a α_3, da α_4 a $\alpha_5 \dots$, e da α_{2p} a $\beta(y)$, giacchè i punti compresi fra α_1 e α_2, fra α_3 e $\alpha_4, \dots$ sarebbero fuori del campo C; e il numero di questi integrali non sarebbe lo stesso per tutti i valori di y; però, onde non avere a fare tante distinzioni, gioverebbe meglio procedere nel modo seguente.

---

punto λ_0 (che può anche essere l'infinito) e si cerca il limite dell'integrale per $\lambda=\lambda_0$ a destra o a sinistra.

Si dimostra con tutta facilità che *il limite dell'integrale è sempre l'integrale* $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\,dx$ *della funzione limite* $f(x)$ *quando la funzione data* $f_\lambda(x)$ *è sempre finita e converge in ugual grado verso il suo limite* $f(x)$ *per tutti i valori di* x *fra* α_0 *e* β_0 *essendo* α_0 *e* β_0 *i limiti di* α *e* β; e questo teorema è suscettibile anche di una grande estensione (V. miei *Fondamenti* ecc. §§ 286 e seg. [pag. 395 e seg.]).

Si potrebbe cioè in tal caso intendere continuata la funzione con una funzione sempre uguale a zero anche negli spazi (vuoti) racchiusi dalle linee interne, e allora saremmo nel caso di una funzione data in tutto un campo C_1 racchiuso da una linea unica (cioè dal contorno esterno del campo dato C), e questa funzione negli spazi di C_1 appartenenti anche al detto campo primitivo C avrebbe per valori quelli della funzione data e negli spazi rimanenti di C_1 (spazi vuoti di C) avrebbe per valore zero, e per la nuova funzione gli antichi contorni interni verrebbero tutt'al più a figurare come nuove linee di discontinuità, mentre l'integrale primitivo $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ si ridurrebbe allora a un unico integrale definito ordinario.

Semplicizzata così la questione, si racchiuderebbero i punti di discontinuità entro linee chiuse piccolissime, e le varie linee di discontinuità (comprese quelle che provenissero dai contorni interni del campo primitivo C) entro linee continue condotte vicinissime a quelle di discontinuità da una parte e dall'altra, e si condurrebbe pure una linea continua interna al campo stesso C_1 e vicinissima al contorno (antico contorno esterno C_1).

Allora il campo C_1 verrebbe scomposto in più pezzi $c_1, c_2, \dots$ nei quali la funzione $f(x,y)$ sarebbe sempre continua e in altri piccolissimi e in numero finito $\sum_1$, $\sum_2 \dots$ nei quali si avrebbero le singolarità della funzione; e l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ si potrebbe intendere spezzato in più altri, gli uni estesi a quei tratti della retta $y=$ cost. sulla quale si fa l'integrazione che si troverebbero compresi negli spazii $c_1, c_2, \dots$, e gli altri estesi ai tratti della stessa retta compresi negli spazi $\sum_1$, $\sum_2 \dots$, che racchiudono le singolarità. E poichè questi ultimi tratti, per le ipotesi fatte sui punti o linee di discontinuità e sulle linee che formano i contorni interni, sarebbero piccolissimi e in numero finito e quindi gli integrali estesi ad essi sarebbero pure piccolissimi, mentre per gli integrali estesi agli altri tratti si potrebbero ripetere le considerazioni del paragrafo precedente, s'intende subito che si giungerebbe così a dimostrare con tutta facilità il teorema enunciato.

119. — Un processo simile si potrebbe seguire nel caso in cui $f(x,y)$ divenisse infinita in un numero finito di punti o di linee entro il campo C che si considera, quando però allora fossero soddisfatte certe condizioni relative alla integrabilità della funzione $f(x,y)$ lungo le varie rette $y=$ cost. anche nell'intorno dei punti singolari su queste rette; ma noi non possiamo ora trattenerci e dilungarci molto su queste considerazioni che del resto non presentano difficoltà dopo quanto ora abbiamo detto pei casi delle discontinuità.

Solo noteremo in particolare che se, essendo a un numero compreso fra $\alpha(y_0)$ e $\beta(y_0)$ o uno di questi estremi, la funzione $f(x,y)$ diviene infinita sulla retta $y=y_0$ soltanto nel punto (a, y_0), e lo diviene inoltre o no lungo una linea che passa per questo punto e non ha altri punti comuni colla detta retta $y=y_0$, mentre del resto si mantengono ferme tutte le altre condizioni che avevamo sopra, allora colle considerazioni precedenti si vedrà che l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ non cesserà di essere finito e continuo pei valori di y *diversi* da quei valori speciali pei quali $f(x,y)$ diviene infinita fra $\alpha(y)$ e $\beta(y)$; e esso esisterà pure e *sarà finito e continuo anche per questi valori speciali di y, come ad es. per $y=y_0$, se si potranno formare intorni sufficientemente piccoli del punto (a, y_0) pei quali gli integrali estesi alle porzioni di qualsiasi retta orizzontale y che cade in quegli intorni siano inferiori in valore assoluto a qualunque numero arbitrariamente piccolo dato* σ.

Più particolarmente ancora, nel caso che sia ad es. $\alpha(y_0) < a < \beta(y_0)$ e che la funzione $f(x,y)$ divenga infinita soltanto nel punto (a, y_0) o lungo la verticale che corrisponde ad $x=a$ in un certo tratto nell'intorno del punto $y=y_0$, *alla condizione ora indicata potrà sostituirsi l'altra che gli integrali* $\int_{\alpha(y)}^{a-\varepsilon} f(x,y)\,dx$ *e* $\int_{a+\varepsilon_1}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ *al tendere di ε e ε_1 a zero convergano in ugual grado verso gli integrali* $\int_{\alpha(y)}^{a} f(x,y)\,dx$ *e* $\int_{a}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ *per ogni valore di y nell'intorno di y_0.*

Questo in particolare avverrà sempre quando *la funzione $f(x,y)$, considerata come una funzione di y lungo i tratti di ciascuna delle verticali che cadono nell'intorno del punto (a, y_0), per ogni valore di x è sempre numericamente inferiore o uguale a una funzione positiva $f_1(x)$* (*) *che diviene infinita per $x=a$ di ordine uguale o inferiore a un numero μ minore dell'unità o, più generalmente, è atta all'integrazione nell'intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon_1)$ del punto a.*

120. — Contentandoci ora di avere brevemente accennato così anche ai casi delle funzioni che hanno discontinuità o divengono infinite, passeremo a considerare il caso in cui uno dei limiti α e β, per es. β, è costante ed uguale all' ∞.

(*) S'intende che si potrebbe considerare la funzione $\varphi(x)$ costituita dai massimi valori assoluti, o limiti superiori dei valori assoluti, che prende $f(x,y)$ quando per ogni valore di x separatamente si fa variare y fra y_0-k_0 e y_0+k_0, e questa funzione $\varphi(x)$ potrebbe prendersi senz'altro per la $f_1(x)$ quando si riscontrasse che essa è atta alla integrazione nell'intervallo da $a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon_1$; ma questa funzione $\varphi(x)$ non potrà trovarsi sempre con molta facilità.

Per questo caso però è utile premettere intorno agli integrali fra limiti infiniti o indefinitamente crescenti una distinzione analoga a quella che si fa per le serie in seguito alla nozione di serie convergenti in ugual grado.

Sia perciò $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$ un integrale nel quale β è sempre infinito, o almeno è una funzione di y che cresce indefinitamente col tendere di y a uno o più valori speciali y_0 compresi in un dato intervallo (a,b).

Ammettendo che *la funzione $f(x,y)$ per ogni valore speciale di y sia sempre atta alla integrazione rispetto ad x fra α e β anche se β è infinito,* e indicando con σ un numero diverso da zero e positivo, ma arbitrariamente piccolo, è chiaro che *per ogni valore speciale di y fra a e b* (a e b inclusi) esisterà un numero $c' < \beta$ tale che per tutti i valori di c compresi fra c' e β si avrà in valore assoluto $\int_{c}^{\beta} f(x,y)\,dx < \sigma$; però, anche se β fosse sempre infinito, *questo numero c' potrebbe variare con y, e quindi potrebbe non esistere,* almeno per ogni valore di σ, *un numero fisso c' che servisse per tutti i valori di y fra a e b* (a e b inclusi).

In generale dunque tanto che β sia sempre infinito pei valori di y fra a e b, quanto che lo divenga soltanto per valori speciali di y in questo intervallo, potrà avvenire che, almeno pei valori positivi di σ inferiori a un certo numero, non esista un numero *fisso* c' tale che per tutti i valori di y pei quali β è infinito o è maggiore di c' e per ogni valore di c fra c' e β si abbia sempre in valore assoluto $\int_{c}^{\beta} f(x,y)\,dx < \sigma$; e quindi, quando gli integrali $\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$ si considerano per tutti i valori di y compresi in un intervallo (a,b) che contiene almeno alcuni punti nei quali β è infinito o coll'avvicinarsi ai quali cresce indefinitamente, è naturale di distinguerli, come per le serie, in integrali *convergenti in ugual grado* nello stesso intervallo e in integrali *non convergenti in ugual grado,* secondochè il detto numero c', che serve per tutti i valori di y fra a e b pei quali $\beta > c'$, esiste o no per tutti i valori di σ.

E, sempre come per le serie, potremo estendere i concetti di convergenza in ugual grado degli integrali anche al caso in cui, invece di considerare qualsiasi valore di y nell'intervallo da a a b (a e b incl.), si consideri soltanto un gruppo infinito di valori y in questo intervallo, dicendo allora che si ha convergenza in ugual grado nell'integrale quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste il numero c' che serve per ogni valore di y dello stesso gruppo.

Diremo poi che l'integrale *converge in ugual grado in generale* per gli infiniti valori di y che si possono considerare fra a e b quando la convergenza in ugual grado si ha negli intervalli che restano dopo di avere escluso un numero finito di valori di y fra a e b con intervalli piccoli quanto si vuole; e diremo infine che si ha *convergenza in ugual grado semplicemente* quando per ogni numero c' che si prenda esistano valori *speciali* di c fra c' e β pei quali si abbia in valore assoluto $\int_c^\beta f(x,y)\,dx < \sigma$ per quanto piccolo sia preso il numero σ e qualunque sia y, senza che questo accada per qualsiasi valore di c fra c' e β.

E anche per ciò che riguarda la convergenza in ugual grado degli integrali avremo teoremi simili a quelli che si hanno per le serie, e *in particolare,* facendo ragionamenti analoghi a quelli che si fanno per le serie, potremo dire che *un integrale* $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *convergerà in ugual grado pei valori di y che si possono considerare fra a e b quando considerando la $f(x,y)$, per ogni valore speciale che si attribuisca ad x, come dipendente dalla sola y per tutti gli indicati valori di y fra a e b* (*)*, si trovi che pei valori di x superiori a un certo numero c, essa è sempre numericamente inferiore o uguale a una funzione positiva $f_1(x)$ che è atta alla integrazione fra c e ∞*, come in particolare avverrà *quando $f_1(x)$ divenga infinitesima per $x=\infty$ di ordine uguale o superiore a un numero μ maggiore della unità.*

In seguito poi, come facemmo anche per le serie, potremo dare anche un altro teorema che servirà esso pure come criterio per giudicare della convergenza in ugual grado degli integrali.

121. — Ciò premesso, e limitandoci qui per maggiore semplicità allo studio della continuità degli integrali $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ pei quali il limite superiore è

(*) In altri termini, si ammette qui di considerare la funzione $f(x,y)$ lungo ciascuna verticale $x=$ cost. separatamente, e si suppone che per ognuna di queste verticali i valori che essa vi prende non superino quello che ha la funzione $f_1(x)$ pel valore di x che corrisponde alla verticale medesima.

E qui pure, come nella nota al § 119 a pag. 176, si potrebbe per $f_1(x)$ prendere la funzione costituita dai massimi o limiti superiori dei valori assoluti di $f(x,y)$ considerata lungo ciascuna verticale separatamente.

sempre infinito per qualsiasi valore che si debba considerare di y fra a e b, esamineremo il caso in cui almeno *in un intorno* (y_0-k_1, y_0+k_2) *del punto y_0 che si vuol considerare l'integrale sia convergente in ugual grado.*

Osservando che qualunque sia c si può scrivere

$$\int_\alpha^\infty f(x,y_0+k)\,dx - \int_\alpha^\infty f(x,y_0)\,dx = \left[\int_\alpha^c f(x,y_0+k)\,dx - \int_\alpha^c f(x,y_0)\,dx\right] + \\ + \int_c^\infty f(x,y_0+k)\,dx - \int_c^\infty f(x,y_0)\,dx,$$

si vedrà subito che se c è un numero finito qualsiasi, maggiore del numero c' suindicato, pel quale si ha in valore assoluto $\int_c^\infty f(x,y)dx < \sigma$ per qualsiasi valore di y compreso fra y_0-k_1 e y_0+k_2, e se l'integrale $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ per $y=y_0$ è continuo, si avrà evidentemente in valore assoluto, per tutti i valori sufficientemente piccoli di k, $\int_\alpha^\infty f(x,y_0+k)dx - \int_\alpha^\infty f(x,y_0)\,dx < \sigma_1$, essendo σ_1 un numero arbitrariamente piccolo, ciò che porta che anche l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ sarà continuo per $y=y_0$; quindi *in particolare* si può ora affermare che *l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *sarà una funzione finita e continua di y per* tutti *i valori di y in un dato intervallo quando in questo intervallo esso è convergente in ugual grado, e pei valori finiti ma comunque grandi di c l'integrale* $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ *è anch'esso continuo.*

In altri termini si può dire che *se per valori finiti ma comunque grandi di c l'integrale $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ è sempre finito e continuo per $y=y_0$, mentre l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$, pure essendo sempre determinato e finito, è discontinuo per $y=y_0$, questo integrale non sarà convergente in ugual grado nell'intorno di y_0.*

In particolare si può dire che *se* — come bene spesso avverrà — *la funzione $f(x,y)$ sarà sempre finita e continua in ogni punto (x,y) a distanza finita nel campo d'integrazione, per la continuità dell' integrale* $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ *per $y=y_0$ basterà assicurarsi della convergenza in ugual grado di questo integrale nell' intorno $(y_0-k_1\,,\,y_0+k_2)$ di y_0.*

Notiamo che il processo stesso di dimostrazione che abbiamo tenuto mostra che il teorema enunciato non è posto qui sotto la forma più generale che sarebbe suscettibile di ricevere, e in certi casi potrebbe anche mancare la convergenza in ugual grado nell' integrale $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ senza che in esso mancasse la continuità, come in particolare avverrebbe quando l' integrale fosse soltanto convergente in ugual grado semplicemente.

Però il caso della ordinaria convergenza in ugual grado dell' integrale $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ sarà il caso più comune della continuità dell' integrale medesimo; e per decidere della convergenza in ugual grado di un integrale nell' intorno di un punto o in un intervallo il più spesso gioverà applicare il teorema dato in fine del paragrafo precedente.

122. — Questi teoremi servono a dimostrare la continuità di certe funzioni che si esprimono per integrali definiti, e servono anche a dare alcune proprietà di certi integrali.

Così per es. per le funzioni conosciute sotto il nome di *funzioni* Γ *(integrali Euleriani di 2.ª specie)* alle quali accennammo al § 76, *b* [pag. 117], che sono definite dalla formola

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx\,,$$

per mezzo delle considerazioni precedenti si dimostra subito che esse sono funzioni continue per ogni valore finito diverso da zero e positivo di a.

Se si indica infatti con a_0 il valore che si considera di a, si riscontra subito che l' integrale $\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ è convergente in ugual grado pei valori di a compresi fra a_0-k_0 e a_0+k_0 perchè l' integrale $\int_c^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$ è sempre inferiore all' altro $\int_c^\infty e^{-x}x^{a_0+k_0-1}dx$ che per c sufficientemente grande diviene arbitrariamente piccolo; e al tempo stesso considerando l' integrale $\int_0^c e^{-x}x^{a-1}dx$ si vede che esso è continuo per $a=a_0$ perchè se $a_0>1$ la funzione sotto il segno integrale $e^{-x}x^{a-1}$ per x fra 0 e c e per a compreso fra a_0-k_0 e a_0+k_0 con k_0 sufficientemente piccolo è sempre finita e continua, e se $0<a_0\leq 1$ nell' intorno $(a_0-k_0\,,\,a_0+k_0)$ di a_0 la funzione diviene infinita solo per $x=0$, e negli intorni a destra del punto $x=0$ si mantiene inferiore all' altra $e^{-x}x^{a_0-k_0-1}$ che per k_0 sufficientemente piccolo è atta all' integrazione nello stesso intorno del punto $x=0$; e quindi sono soddisfatte tutte le condizioni che per le considerazioni dei paragrafi precedenti si richiedono per assicurare la continuità di $\Gamma(a)$ nel punto a_0.

123. — Così pure, riprendendo l' integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}$, con a compresa far 0 e 1 (0 e 1 escl.) e θ compreso fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.), che noi considerammo già al § 78 [pag. 123-124], si può osservare che questo integrale è convergente in ugual grado per qualunque valore di a fra 0 e 1 (gli estr. escl.), perchè, quando a ha uno di questi valori a_0, il modulo della funzione sotto il segno integrale per $x>c$, con $c>1$, è sempre inferiore a $\frac{b}{x^{2-a}}$, dove b è un numero finito positivo e $2-a>1$; e al tempo stesso l' integrale $\int_0^c \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}$ è una funzione continua di a nel punto a_0 perchè la funzione sotto il segno $\frac{x^{a-1}}{x+e^{\theta i}}$, considerata per ogni valore speciale di θ diverso da $\pm\pi$, per x diverso da zero è sempre finita e continua, e per $x=0$ diviene infinita, ma i suoi moduli negli intorni di $x=0$, quando a è compreso fra a_0-k_0 e a_0+k_0, sono sempre inferiori a quelli della funzione $x^{a_0-k_0-1}$ moltiplicata per un fattore che quando θ è fra $-\pi$ e π (questi estremi $\pm\pi$ escl.) è sempre finito, e questa funzione $x^{a_0-k_0-1}$, quando k_0 è sufficientemente piccolo, è atta alla integrazione nell' intorno di $x=0$.

Di qui risulta dunque che lo *stesso integrale* $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+e^{\theta i}}$ *è una funzione finita e continua di a fra* 0 *e* 1 (0 e 1 escl.) *quando θ è compresa fra $-\pi$ e π* ($\pm\pi$ escl.); e poichè noi trovammo alla pag. 123 che quando a è una frazione della forma $\frac{2p+1}{2q}$, con p e q numeri interi e positivi qualsiansi e $2p+1<2q$, il valore di questo integrale è uguale al valore corrispondente della funzione $\pi \frac{e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen} a\pi}$ che è essa pure finita e continua pei valori di a fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e qualunque sia θ fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.), basterà osservare che i punti limiti del gruppo dei numeri della detta forma $\frac{2p+1}{2q}$ sono tutti i numeri compresi fra 0 e 1 per concluderne che l'integrale sopra indicato ha sempre per valore $\pi \frac{e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen} a\pi}$, cioè si ha la formola

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\theta i}} = \pi \frac{e^{(a-1)\theta i}}{\operatorname{sen} a\pi}$$

per qualunque valore reale di a fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e per qualunque valore di θ fra $-\pi$ e π ($\pm\pi$ escl.), come in fine del §. 78 dicemmo appunto che si sarebbe dimostrato.

Derivazione e integrazione sotto il segno $\int$.

124. — Riprendiamo ora l'integrale $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ quando $f(x,y)$ è sempre finita e continua almeno pei valori di x e y nel campo C nel quale si considera; e supponiamo dapprima che anche $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ siano *finiti* e costanti (cioè indipendenti da y) o siano funzioni *continue di y sempre inferiori ad un numero finito.*

Allora, per quanto abbiamo dimostrato, l'integrale è sempre una funzione finita e continua di y, e quindi è il caso di cercare almeno alcuni casi nei quali esso ammette una derivata rispetto ad y determinata e finita.

Supponiamo perciò che $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ siano costanti, o siano funzioni di y che ammettono una derivata determinata e finita pel valore y che si considera, e $f(x,y)$ nell'intiero campo C, o almeno in un rettangolo R come quello considerato al § 117 [pag. 171 e seg.] abbia essa pure una derivata parziale $f'_y(x,y)$ rispetto ad y che oltre essere sempre determinata e finita sia anche continua.

In questa ipotesi dalla formola (2) dello stesso § 117 avremo

$$(1)\ \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_\alpha^\beta \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx + \left\{f(\beta,y)+\sigma_1\right\}\frac{\beta_1-\beta}{k} - \left\{f(\alpha,y)+\sigma_2\right\}\frac{\alpha_1-\alpha}{k},$$

e quindi anche

$$(2)\ \frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx + f(\beta,y)\beta'(y) - f(\alpha,y)\alpha'(y) + \sigma',$$

essendo $0<\theta_x<1$, e essendo σ' una quantità che per k sufficientemente piccolo è minore di quella quantità che più ci piace; quindi, poichè, per la supposta continuità di $f'_y(x,y)$ in tutti i punti (x,y) del rettangolo R relativo al valore y che si considera, si ha anche la continuità uniforme in questo rettangolo, il che porta che per gli stessi punti si abbia sempre in valore assoluto $f'_y(x+h,y+k)-f'_y(x,y)<\sigma$ quando h e k sono numericamente inferiori a date quantità fisse h_0 e k_0, si conclude che sarà

$$\int_\alpha^\beta f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx + \int_\alpha^\beta \left\{f'_y(x,y+\theta_x k) - f'_y(x,y)\right\}dx =$$
$$= \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx + \varepsilon\sigma(\beta-\alpha),$$

essendo ε compreso fra 1 e -1; e perciò evidentemente si può senz'altro affermare che sotto le fatte ipotesi $\varphi(y)$, o l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$, *pel valore y che si considera* ammette una derivata determinata e finita e si ha la formola

$$(3)\qquad \frac{d}{dy}\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx + f(\beta,y)\frac{d\beta}{dy} - f(\alpha,y)\frac{d\alpha}{dy};$$

ciò che ci permette di dire *in particolare* che quando nell'*intiero* campo di integrazione la funzione $f(x,y)$, oltre essere finita e continua, *ammette una derivata parziale rispetto ad y finita e continua* essa pure e i limiti α e β dell'integrale sono costanti (indipendenti cioè da y) o sono funzioni di y finite e continue che ammettono una derivata determinata e finita; *l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ sarà una funzione di y che avrà sempre anch'essa una derivata determinata e finita, e questa derivata:*

1.° *nel caso dei limiti costanti si otterrà prendendo come suo valore quello dell'integrale $\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$ della funzione derivata o, come si dice, derivando la funzione sotto il segno;*

2.° *nel caso dei limiti variabili si otterrà aggiungendo all'integrale che si ha nel caso dei limiti costanti la quantità* $f(\beta,y)\frac{d\beta}{dy}-f(\alpha,y)\frac{d\alpha}{dy}$ *i cui due termini non sono altro che i valori* $f(\alpha,y)$, $f(\beta,y)$ *della funzione sotto il segno ai limiti* α *e* β *dell'integrale moltiplicati per le derivate dei limiti corrispondenti, e preso col segno* $+$ *il termine che corrisponde al limite superiore e col segno* $-$ *quello che corrisponde al limite inferiore.*

Questo teorema, che specialmente nella sua 1.ª parte è di una importanza grandissima, è conosciuto sotto il nome di *teorema della derivazione sotto il segno integrale.*

125. — Questo resultato comprende il caso in cui la funzione sotto il segno integrale sia indipendente da y e i limiti soli (uno o tutti e due) siano funzioni di questa variabile, e ci dà per questo caso

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x)\,dx = f(\beta)\frac{d\beta}{dy} - f(\alpha)\frac{d\alpha}{dy},$$

come del resto è ben naturale dietro quanto sappiamo intorno agli integrali delle funzioni di una variabile.

Notiamo che, colle ipotesi che abbiamo fatto, anche la derivata $\frac{d}{dy}\int_\alpha^\beta f(x,y)dx$ del nostro integrale risulta una funzione finita e continua di y se tali sono anche le derivate $\frac{d\alpha}{dy}$ e $\frac{d\beta}{dy}$ dei limiti α e β, e notiamo anche che passando ai differenziali relativi ad y si ha dalla (3)

$$d\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx = dy\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx + f(\beta,y)\,d\beta - f(\alpha,y)\,d\alpha\,;$$

e se la funzione f sotto il segno integrale e i limiti α e β dell'integrale contenessero anche altre variabili $z,t\ldots$, essendo però la f finita e continua insieme alle sue derivate parziali prime $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial t},\ldots$ almeno rispetto alle varie coppie di variabili x e y, x e z, x e $t,\ldots$ separatamente, e per le α e β essendo determinate e finite le derivate $\frac{\partial\alpha}{\partial y},\frac{\partial\alpha}{\partial z},\frac{\partial\alpha}{\partial t},\ldots\frac{\partial\beta}{\partial y},\frac{\partial\beta}{\partial z},\frac{\partial\beta}{\partial t},\ldots$, allora sarebbe

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y}dx + f_\beta\frac{\partial\beta}{\partial y} - f_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial z}\int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial z}dx + f_\beta\frac{\partial\beta}{\partial z} - f_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z},\ldots$$

e quindi pel differenziale totale rispetto a $y,z,t,\ldots$ dell'integrale si avrebbe

$$d\int_\alpha^\beta f\,dx = dy\int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial y}dx + dz\int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial z}dx + dt\int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial t}dx + \ldots + f_\beta d\beta - f_\alpha d\alpha,$$

o anche

$$d\int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta df\,dx + f_\beta\,d\beta - f_\alpha\,d\alpha,$$

indicando con f_α e f_β i valori di f per $x=\alpha$ e $x=\beta$ e colla lettera d i differenziali presi coll'aver riguardo soltanto alle variabili $y,z,t\ldots$

126. — Il teorema della derivazione sotto il segno è esso pure suscettibile di maggiore estensione, ma noi non possiamo farla completamente perchè per questo, volendo esser precisi, converrebbe fare alcune osservazioni molto delicate che ci tratterrebbero assai; e ci limiteremo perciò a considerare soltanto alcuni dei casi ai quali il teorema stesso può estendersi.

Supponendo ancora che i limiti α e β del nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ siano finiti e limitandoci per maggiore semplicità al caso in cui sono costanti, ammettiamo che nel campo C che si considera la funzione $f(x,y)$ o la sua derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$ manchino del tutto o divengano discontinue o infinite (una sola di esse o tutte e due insieme) in un numero finito di punti, o in alcuni tratti o in un numero infinito di punti di un numero finito di linee, che, sempre per semplicità, saranno supposte verticali senz'altro (*), pure ammettendo che le funzioni stesse $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano finite e continue negli altri punti, e siano atte alla integrazione rispetto ad x fra α e β per tutti i valori di y che si considerano.

Allora, operando come al § 118 [pag. 173 e seg.], si potrà intendere scomposto il campo dato C in un numero finito di campi parziali $c_1, c_2,\ldots$ nei quali nè la funzione $f(x,y)$ nè la sua derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ presentano singolarità, e in altri campi $\sum_1,\sum_2,\ldots$ — che potranno supporsi limitati da rette orizzontali e verticali e arbitrariamente piccoli — che conterranno le varie singolarità di $f(x,y)$

(*) Ciò corrisponde a dire che per certi valori speciali di x, per es. per $x=a$, la funzione $f(x,y)$, o $f(a,y)$, diviene infinita per tutti o per un gruppo infinito di valori di y compresi fra due numeri p e q.

o di $\frac{\partial f}{\partial y}$; e al tempo stesso gli integrali $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ e $\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y} dx$ potranno intendersi spezzati ciascuno in più integrali estesi ai tratti (α_1,β_1), (α_2,β_2),... della retta y che cadono entro i campi $c_1, c_2, \ldots$ e in altri estesi ai tratti piccolissimi (γ_1,δ_1), (γ_2,δ_2),... della stessa retta che cadono nei campi $\sum_1, \sum_2, \ldots$, quando di questi tratti ve ne siano sulla retta corrispondente al valore y che si considera.

Considerando questi ultimi integrali quando ve ne siano, per es. l'integrale $\int_{\gamma_1}^{\delta_1} f(x,y)\,dx$ che indicheremo con $\psi_1(y)$, avremo

$$\frac{\psi_1(y+k)-\psi_1(y)}{k} = \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} dx = \int_{\gamma_1}^{\delta_1} f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx\,,$$

ovvero

$$\frac{\psi_1(y+k)-\psi_1(y)}{k} = \int_{\gamma_1}^{\delta_1} f'_y(x,y)\,dx + \int_{\gamma_1}^{\delta_1} \left\{ f'_y(x,y+\theta_x k) - f'_y(x,y) \right\} dx, \tag{4}$$

perchè al rapporto $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ sarà applicabile la formola degli accrescimenti finiti per tutti i valori di x fra γ_1 e δ_1 ad eccezione di quello che corrisponde alla verticale sulla quale si hanno le singolarità; e se il campo $\sum_1$ al quale corrisponde il tratto (γ_1,δ_1) sarà di quelli che servono ad escludere i punti nei quali la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ viene a mancare, mentre fuori dei punti stessi è sempre numericamente inferiore a un numero finito, allora l'ultimo termine di questa formola si potrà ridurre piccolo a piacere dipendentemente dalla piccolezza del tratto (γ_1,δ_1).

Invece se lo stesso campo $\sum_1$ sarà di quelli che servono ad escludere i punti della verticale, corrispondente per es. ad $x=a$, nei quali $\frac{\partial f}{\partial y}$ è infinita o almeno prende anche valori arbitrariamente grandi, allora per essere sicuri che l'ultimo termine della formola precedente può ridursi arbitrariamente piccolo coll'impiccolire convenientemente (γ_1,δ_1) o $\sum_1$, gioverà ammettere che siano soddisfatte altre condizioni speciali, come ad esempio sia soddisfatta quella che, su ogni verticale, diversa da quella che corrisponde ad $x=a$, che cade entro $\sum_1$, i valori della derivata $f'_y(x,y+k)$ — quando k in valore assoluto non

passa un certo numero k_0 che potrà anche supporsi piccolissimo — si mantengano sempre numericamente inferiori a una funzione positiva $f_1(x)$ che è atta all'integrazione nell'intervallo (γ_1,δ_1).

Supporremo dunque soddisfatta questa o altre condizioni che assicurino che gli ultimi termini della formola (4) e delle sue analoghe relative agli altri campi $\sum_2, \ldots$ si possano sempre ridurre piccoli ad arbitrio coll'impiccolire opportunamente questi campi $\sum_1, \sum_2, \ldots$, e ciò per qualsiasi valore di k che non superi in valore assoluto un certo numero k_0; e allora, fissati questi campi $\sum_1, \sum_2, \ldots$, rimarranno pure fissati pienamente gli altri campi $c_1, c_2, \ldots$ nei quali non si hanno singolarità nè per $f(x,y)$ nè per $\frac{\partial f}{\partial y}$, e se $\varphi_1(y)$ sarà uno degli integrali $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x,y)\,dx$ estesi ai tratti che cadono in questi campi, avremo la formola simile alla (4)

$$\frac{\varphi_1(y+k)-\varphi_1(y)}{k} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f'_y(x,y)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left\{ f'_y(x,y+\theta_x k) - f'_y(x,y) \right\} dx;$$

e in questa l'ultimo termine si potrà ridurre piccolo quanto si vuole all'impiccolire sempre più di k o del numero k_0.

Tutto questo permette evidentemente di dire che al nostro integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ sarà sempre applicabile il teorema della derivazione sotto il segno — oltre che per tutti i valori di y che corrispondono a rette orizzontali sulle quali non si hanno affatto singolarità nè nella funzione $f(x,y)$ nè nella sua derivata $f'_y(x,y)$ — anche pei valori di y che corrispondono a rette sulle quali si presentano le singolarità, quando queste siano tali che per esse riescano soddisfatte *le condizioni poste sopra*, restando così l'incertezza solo pei valori di y corrispondenti alle altre singolarità quando ve ne siano; e così *in particolare* si può ora affermare che se nell'integrale a limiti costanti e finiti $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ la funzione $f(x,y)$ e la sua derivata parziale $f'_y(x,y)$, o soltanto questa derivata, divengono discontinue o infinite nel punto (a, y_0), essendo o no discontinue o infinite anche per altri punti della verticale che passa per lo stesso punto — cioè per altri punti corrispondenti allo stesso valore a di x e a valori di y diversi da y_0 — allora *all'integrale stesso sarà applicabile il teorema della derivazione sotto il segno anche per $y=y_0$ quando,* *supposto ad es.* $\alpha<a<\beta$, *la derivata* $f'_y(x,y)$ *considerata come una funzione di* y *per tutti i valori di* y *in un intorno* $(y_0-k_0\,,\,y_0+k_0)$ *del valore* y_0, *per ogni valore di* x *diverso da* a *fra* $a-\varepsilon$ *e* $a+\varepsilon_1$ *non supera mai in valore assoluto un certo numero finito o, se cresce indefinitamente, è sempre numericamente inferiore od uguale a una funzione positiva* $f_1(x)$ *che per* $x=a$ *diviene infinita di un ordine uguale o inferiore a un numero* μ *minore dell'unità o, più generalmente, è atta alla integrazione nell'intorno* $(a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon_1)$ *del punto* $x=a$.

E si può notare che questa condizione è quella stessa che, secondo quanto dicemmo in fine del § 119 [pag. 175 e seg.], assicura che le singolarità qui indicate di valori infiniti in $f'_y(x,y)$ non fanno perdere il valore finito e la continuità all'integrale della derivata $\int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx$; talchè, per essere certi che, malgrado la presenza di quelle singolarità, il teorema della derivazione sotto il segno resta ancora applicabile a un dato integrale $\int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx$, basterà assicurarsi *col processo indicato in fine del detto § 119* che l'integrale della derivata $\int_y^\beta f'_y(x,y)\,dx$ è una funzione finita e continua di y.

127. — Consideriamo ora anche il caso in cui i limiti α e β, che supporremo ancora costanti, sono uno o tutti e due infiniti, e diamo alcuni casi nei quali è ancora applicabile la derivazione sotto il segno, e quindi si hanno le formole

$$(5)\quad \frac{d}{dy}\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx=\int_\alpha^\infty \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx\quad,\quad \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^\infty f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx.$$

Osserviamo perciò che, ponendo $\varphi(y)=\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ nell'ipotesi che α sia finito, e indicando con c un numero qualsiasi finito indipendente da y, si ha

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\frac{1}{k}\left[\int_\alpha^c f(x,y+k)\,dx-\int_\alpha^c f(x,y)\,dx\right]+\int_c^\infty \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx,$$

e se all'integrale $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ è applicabile la derivazione sotto il segno si ha

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\int_\alpha^c f'_y(x,y)\,dx+\int_c^\infty \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\,dx+\sigma_1\,,$$

essendo σ_1 una quantità che (comunque sia stato preso il c) quando il k viene preso numericamente inferiore a una quantità sufficientemente piccola k_c, è minore in valore assoluto di quella quantità che più ci piace.

Ma, se $f(x,y)$ ammette una derivata determinata e finita rispetto ad y per tutti i valori di x, si ha

$$(6)\quad \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=f'_y(x,y+\theta_x k)=f'_y(x,y)+\{f'_y(x,y+\theta_x k)-f'_y(x,y)\}\,,$$

essendo θ_x il solito numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); e quindi se $f'_y(x,y)$ pel valore y che si considera sarà atta all'integrazione fra α e ∞ si avrà

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\int_\alpha^\infty f'_y(x,y)\,dx+\int_c^\infty\{f'_y(x,y+\theta_x k)-f'_y(x,y)\}\,dx+\sigma_1\,,$$

e perciò sarà ancora evidentemente

$$\varphi'(y)=\frac{d}{dy}\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx=\int_\alpha^\infty f'_y(x,y)\,dx,$$

cioè si avrà la prima delle formole (5), tutte le volte che sia soddisfatta anche la condizione che *pei valori di* k *numericamente inferiori a* k_c *la quantità* $\int_c^\infty\{f'_y(x,y+\theta_x k)-f'_y(x,y)\}\,dx$ *sia sempre inferiore in valore assoluto a un dato numero arbitrariamente piccolo* σ; ed è questa dunque la sola condizione che bisogna porre onde la prima delle formole (5) sia giusta, quando siano soddisfatte le altre condizioni che già abbiamo posto e che è ben naturale di richiedere, quelle cioè che la funzione $f'_y(x,y)$ sia atta all'integrazione fra α e ∞ e che possa applicarsi la derivazione sotto il segno agli integrali estesi fra α e il numero c pel quale non si ha nessuna condizione, e che può quindi essere anche un numero *determinato* qualsiasi.

Supposto ora che la derivazione sotto il segno all'integrale $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ sia applicabile per qualsiasi valore comunque grande di c, l'indicata condizione si trasforma evidentemente nell'altra che « *al di là di qualunque numero* c_1 *si possa trovare un valore di* c *pel quale l'integrale* $\int_c^\infty f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx$ *quando* k *è numericamente inferiore a una data quantità sufficientemente piccola* k_c *si* *mantenga sempre minore di σ in valore assoluto*»; e quindi *in particolare* si può dire evidentemente che *all'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *dove* α *è costante e finita sarà applicabile la derivazione sotto il segno per es. per* $y = y_0$ *quando* — restando sempre soddisfatte le condizioni indicate sopra rispetto alla integrabilità di $f'_y(x,y)$ fra α e ∞ e alla possibilità di applicare la derivazione sotto il segno fra α e un numero comunque grande c — *si trovi che i valori assoluti di* $f'_y(x,y)$ *corrispondenti ad uno stesso valore di* x *fra* c *e* ∞ *e ai valori di* y *che cadono in un intorno* $(y_0 - k_0, y_0 + k_0)$ *del valore* y_0 *che si considera siano sempre inferiori od uguali a quelli di una funzione positiva* $f_1(x)$ *che per* $x = \infty$ *divenga infinitesima di ordine uguale o superiore a un numero* μ *maggiore dell'unità o, più generalmente, sia atta all'integrazione fra un numero* c_1 *e* ∞ (*).

Per l'integrale $\int_{-\infty}^\infty f(x,y)\,dx$ si avrebbe naturalmente una condizione di più relativa al limite inferiore.

128. — Qui pure è da notare che l'ultima condizione trovata è quella stessa che, secondo quanto dicemmo al § 121, vale ad assicurare che l'essere un limite infinito non fa perdere il valore finito e la continuità all'integrale della derivata $\int_\alpha^\infty f'_y(x,y)\,dx$, ammesso che la verificazione della convergenza

(*) Notiamo che siccome nell'integrale $\int_c^\infty f'_y(x, y+\theta_x k)\,dx$ il θ_x dipende anche da x, nel corso della integrazione la $y+\theta_x k$, pure restando sempre fra $y-k_0$ e $y+k_0$ se $|k|<k_0$, *varierà con* x, e quindi la condizione $\left|\int_c^\infty f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx\right| < \sigma$ potrà essere soddisfatta senza che si abbia convergenza in ugual grado nell'integrale $\int_\alpha^\infty f'_y(x,y)\,dx$ quando y è compreso fra $y-k_0$ e $y+k_0$ perchè, trattandosi di questa convergenza, la y in questo integrale conserva sempre uno stesso valore durante l'integrazione; e per la stessa ragione l'essere convergente in ugual grado questo integrale non porta *sempre* di necessità che risulti soddisfatta la condizione precedente $\left|\int_c^\infty f'_y(x,y+\theta_x k)\,dx\right| < \sigma$. Invece sarà sempre soddisfatta questa condizione e pel teorema dato in fine del § 120 [pag. 178] si avrà al tempo stesso convergenza in ugual grado nell'integrale $\int_c^\infty f'_y(x,y)\,dx$ se $f'_y(x,y)$ soddisfarà alla condizione contenuta nel teorema ora enunciato.

in ugual grado per questo integrale che è richiesta dalle condizioni del § 121 venga fatta colla applicazione del teorema dato in fine del § 120; talchè per questa osservazione e per quella analoga fatta in fine del § 126 si può ora asserire che in tutti i casi qui considerati i processi che abbiamo dato per assicurare che l'integrale della derivata è ancora una funzione finita e continua valgono altresì ad assicurare la derivabilità dell'integrale dato, salva la restrizione testè indicata pel modo di verificare la convergenza in ugual grado dell'integrale della derivata quando un limite è infinito.

E così quando si riprenda a considerare la funzione conosciuta sotto il nome di funzione Γ, cioè $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx$, siccome gli integrali delle derivate rispetto ad a sono i seguenti

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\log x\,dx\ ,\quad \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}(\log x)^2\,dx\ ,\ \ldots,\quad \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}(\log x)^n\,dx\ ,$$

e per tutti questi integrali si verifica che essi sono finiti e continui per ogni valore finito diverso da zero e positivo di a e la verificazione si fa cogli stessi processi che seguimmo al § 122 per la funzione $\Gamma(a)$, si conclude che per gli indicati valori di a la funzione $\Gamma(a)$, oltre essere finita e continua, ammette le derivate di qualunque ordine sempre finite e continue anch'esse, e per queste derivate si hanno le formole seguenti

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\log x\,dx\ ,\quad \Gamma''(a) = \int_8^\infty e^{-x}x^{a-1}(\log x)^2\,dx\ ,\ \ldots,$$

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}(\log x)^n\,dx\ ,\ \ldots$$

Mostreremo fra poco l'utilità di tutti questi teoremi sulla derivazione sotto il segno integrale, applicandoli alla ricerca degli integrali definiti o alla dimostrazione di loro particolarità.

129. – Considerando ora l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ quando i limiti α e β sono finiti o infiniti, e sono costanti o funzioni di una o di tutte e due le variabili x e y, s'intende che, venendo l'integrale stesso ad essere una nuova funzione di una o di tutte e due le variabili x e y, se questa funzione sarà atta alla integrazione rispetto ad x o ad y si potrà fare una nuova integrazione.

Si avrà allora ciò che dicesi *integrale doppio*, e questo integrale nel caso che la seconda integrazione si faccia rispetto ad y fra γ e δ potrà rappresentarsi con $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$, mentre nel caso che la nuova integrazione si faccia ancora rispetto ad x e fra γ e δ potrà rappresentarsi con $\int_\gamma^\delta dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$.

Si intende poi che se si avessero altre variabili, o anche ripetendo più volte l'integrazione rispetto ad x o ad y, si potrebbero ottenere integrali *tripli*, integrali *quadrupli*, ecc.; e in generale potrebbero aversi integrali *multipli* dell'ordine n se n fossero le integrazioni da eseguirsi successivamente.

E con questa definizione, supposto per es. che si abbia un integrale doppio $\int_\gamma^\delta dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ dove γ e δ sono le ordinate minima e massima di una curva chiusa C (come per es. di un cerchio, di un'ellisse ecc....) incontrata da ogni retta $y=$ cost. parallela all'asse delle x, che sia posta fra le due $y=\gamma$ e $y=\delta$, nei due soli punti di ascisse $\alpha(y)$ e $\beta(y)$, si comprende subito che l'integrale dato potrà anche riguardarsi come uguale al limite della somma dei prodotti $f(x,y)\,dx\,dy$ dell'area $dx\,dy$ dei varii rettangoli elementari nei quali si scompone l'area racchiusa dalla linea C, moltiplicati questi rettangoli per un valore della funzione sui loro lati $y=$cost.; intendendo però che deve esser questo un doppio limite che si determinerà cercando prima il limite della somma relativamente ai rettangoli situati lungo una stessa retta parallela all'asse delle x, e poi cercando il limite della somma dei limiti ottenuti per ciascuna retta orizzontale moltiplicati ciascuno pei lati dy degli antichi rettangoli, e trascurando le frazioni di rettaagoli al contorno.

Ma su questa considerazione, che dovrà poi essere svolta ulteriormente, noi non ci fermeremo ora riservandoci di tornarci sopra più oltre; e passeremo invece a dare un'altra proprietà notevole degli integrali doppi $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ quando i limiti della integrazione relativi a ciascuna variabile sono costanti rispetto all'altra variabile.

130. — La proprietà che qui vogliamo dimostrare, limitandoci però dapprima al caso delle funzioni finite e continue è contenuta nella formola

$$\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy, \tag{6}$$

per la quale si può dire che *per le funzioni finite e continue di due variabili, quando in un loro integrale doppio i limiti relativi a ciascuna integrazione sono finiti e non dipendono dall'altra variabile, le due integrazioni possono invertirsi*; o in altri termini si ha il teorema che può enunciarsi dicendo che per *integrare un integrale definito basta integrare la funzione sotto il segno integrale*, ed è perciò conosciuto anche sotto il nome di *teorema della integrazione sotto il segno.*

Per dimostrare questo teorema, quando si ammette che si abbiano tutte le limitazioni che abbiamo posto, si chiamino per comodo x e y i limiti superiori degli integrali relativi a x e a y e si ponga

$$u = \int_\gamma^y dy \int_\alpha^x f(x,y)\,dx\ , \quad v = \int_\alpha^x dx \int_\gamma^y f(x,y)\,dy\,.$$

Si osservi poi che se si pone anche

$$w = \int_\alpha^x f(x,y)\,dx\ , \qquad w_1 = \int_\gamma^y f(x,y)\,dy\,,$$

si ha

$$u = \int_\gamma^y w\,dy\ , \qquad v = \int_\alpha^x w_1\,dx\,,$$

e w e w_1 sono funzioni finite e continue rispetto a x e y almeno quando si considerano queste variabili separatamente; e le quantità $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w_1}{\partial y}$ sono esse pure funzioni di x e y finite e continue.

Pel teorema della derivazione sotto il segno si avrà

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_\gamma^y \frac{\partial w}{\partial x}\,dy = \int_\gamma^y f(x,y)\,dy\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \int_\alpha^x \frac{\partial w_1}{\partial y}\,dx = \int_\alpha^x f(x,y)\,dx\,,$$

mentre evidentemente sarà anche

$$\frac{\partial v}{\partial x} = w_1 = \int_\gamma^y f(x,y)\,dy\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = w = \int_\alpha^x f(x,y)\,dx\,,$$

e quindi avremo le due formole $\frac{\partial(u-v)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial(u-v)}{\partial y}=0$ le quali ci mostrano che u e v non potranno differire fra loro che per una costante; e poichè supponendo x molto prossimo ad α, o y molto prossimo a β le u e v vengono ambedue prossime quanto si vuole a zero, si conclude che la costante è zero, e $u=v$, ciò che dimostra evidentemente il teorema.

131. — Questo teorema può estendersi esso pure al caso in cui nel campo dei valori di x e y, fra α e β e fra γ e δ respettivamente, si abbiano per $f(x,y)$ alcune discontinuità o alcuni infiniti in un numero finito di punti o in un numero finito di linee; e noi considereremo ora il caso speciale in cui, mantenendosi ancora la funzione $f(x,y)$ sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito, si abbiano discontinuità in punti isolati, o sopra un numero finito di rette orizzontali o verticali (corrispondenti cioè a valori speciali di y o di x) in tratti continui o in un numero finito o infinito di punti su queste rette; riservandoci di considerare poi al § 136 anche un caso in cui si abbiano punti o linee d'infinito per $f(x,y)$ nel campo d'integrazione.

Per trattare il caso delle discontinuità ora indicate, si ammetta ad es. che nell'integrale doppio $\mathrm{I}=\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$, nel quale i limiti si suppongono ancora finiti, si abbia una discontinuità *soltanto* in un punto isolato nel quale sia $y=\gamma_0$, o sopra la retta orizzontale $y=\gamma_0$ in un tratto continuo o in un numero finito o infinito di punti della stessa retta, essendo per es. $\gamma<\gamma_0<\delta$.

Avremo allora

$$\mathrm{I}=\lim\left\{\int_\gamma^{\gamma_0-\varepsilon} dy \int_\alpha^\beta f\,dx+\int_{\gamma_0+\varepsilon_1}^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx\right\},$$

il limite essendo preso al tendere a zero di ε e di ε_1 con leggi qualsiansi, e siccome per ciascuno degli integrali doppii che figurano nel secondo membro la inversione delle integrazioni sarà possibile, avremo

$$\mathrm{I}=\lim\left\{\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^{\gamma_0-\varepsilon} f\,dy+\int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma_0+\varepsilon_1}^\delta f\,dy\right\}.$$

Ma indicando con $\overline{f}$ il limite superiore dei valori assoluti di $f(x,y)$ nel campo d'integrazione o un numero maggiore, è certo che per qualunque valore di x fra α e β gli integrali $\int_\gamma^{\gamma_0-\varepsilon} f\,dy$ e $\int_{\gamma_0+\varepsilon_1}^\delta f\,dy$ differiranno dai due $\int_\gamma^{\gamma_0} f\,dy$ e $\int_{\gamma_0}^\delta f\,dy$ meno di $\varepsilon\overline{f}$ e $\varepsilon_1\overline{f}$ in valore assoluto, e la somma fra parentesi nella formola precedente differirà dall'integrale $\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$ meno di $(\varepsilon+\varepsilon_1)\,\overline{f}(\beta-\alpha)$; quindi evidentemente il limite del secondo membro nella stessa formola sarà l'integrale doppio $\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$, e questo dimostra appunto che anche nel caso delle discontinuità qui considerate l'inversione delle integrazioni sarà ancora possibile.

Lo stesso si vede subito che avverrà anche se γ_0 è uno degli estremi γ e δ, come se i punti o le rette orizzontali di discontinuità sono in numero maggiore, ma sempre finito, e se vi sono anche rette verticali sulle quali si hanno discontinuità.

132. — Supponiamo ora che nell'integrale doppio $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ uno dei limiti, per es. β, sia infinito, senza che lo siano gli altri α, γ e δ; e ammettiamo che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ sia sempre finito per qualunque valore di y fra γ e δ (γ e δ inclusi) e che l'integrale doppio suindicato sia determinato e finito; e inoltre se c è un numero comunque grande ma finito, all'integrale $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ sia sempre applicabile l'inversione delle integrazioni, come in particolare avverrà sempre quando pei valori di x fra α e c e di y fra γ e δ la $f(x,y)$ sia sempre finita e continua, o abbia soltanto le discontinuità delle quali abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Si avrà

$$\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx=\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^c f(x,y)\,dx+\int_\gamma^\delta dy \int_c^\infty f(x,y)\,dx=\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy+$$
$$+\int_\gamma^\delta dy \int_c^\infty f(x,y)\,dx, \tag{7}$$

e di qui, prendendo in considerazione l'integrale $\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$ per cercarne il limite per $c=\infty$, si concluderà subito che — ammesso, come abbiamo detto, che l'integrale $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ sia determinato e finito non solo per qualunque valore finito di c ma anche per $c=\infty$, e che ad esso *per ogni valore finito ma grande quanto si vuole di* c sia applicabile l'inversione delle integrazioni — se si riscontrerà al tempo stesso che *l'integrale* $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *converge in ugual grado per tutti i valori di* y *fra* γ *e* δ, *allora anche l'integrale* $\int_\alpha^\infty dx\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$ (cioè quello che viene dall'invertire le integrazioni) *sarà determinato e finito e si avrà*

$$(8)\qquad \int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx=\int_\alpha^\infty dx\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\,;$$

cioè *l'inversione delle integrazioni sarà ancora possibile.*

133. — In particolare di qui risulta che *quando* $f(x,y)$ *sia finita e continua nel campo d'integrazione* (cioè per tutti i sistemi di valori di x fra α e ∞ e di y fra γ e δ), *per la possibilità della inversione delle integrazioni nell'integrale doppio* $\int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *basterà assicurarsi che l'integrale semplice* $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *è determinato e finito e converge in ugual grado per tutti i valori di* y *da* γ *a* δ; perchè, per quanto dicemmo ai §§ 117 e 121 [pag. 171 e seg. e 178 e seg.], questo porterà che lo stesso integrale $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e a maggior ragione l'altro $\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ per qualunque valore finito ma comunque grande di c siano anche continui per tutti gli indicati valori di y da γ a δ, e allora gli integrali $\int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ e $\int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ saranno certamente determinati e finiti, e al primo sarà applicabile la inversione delle integrazioni qualunque sia c, e quindi risulteranno soddisfatte di per sè tutte le condizioni che si richiedevano nel paragrafo precedente.

Così, più particolarmente ancora — *sempre nel supposto che* $f(x,y)$ *sia finita e continua nel campo d'integrazione* — pel teorema dato in fine del § 120 potremo dire che *la inversione delle integrazioni nell'integrale doppio* $\int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ *sarà sempre possibile quando, considerata per ogni valore di* x *fra* α *e* ∞ *separatamente, la funzione* $f(x,y)$ *pei valori di* y *da* γ *a* δ *sarà sempre numericamente inferiore o uguale a una funzione positiva* $f_1(x)$ *atta alla integrazione fra* α *e* ∞, *come in particolare avverrà quando questa funzione* $f_1(x)$ *al crescere indefinito di* x *diverrà infinitesima di ordine uguale o superiore a un numero* μ *maggiore della unità.*

Nè in questi casi vi è bisogno di verificare che l'integrale doppio $\int_\gamma^\delta dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ è determinato e finito perchè, come abbiamo rilevato nel corso del nostro ragionamento, questa particolarità è conseguenza della convergenza in ugual grado, e quindi della continuità, che si ha nell'integrale semplice $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$.

134. — Similmente se l'integrale doppio $\int_\gamma^\infty dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ ha un valore determinato e finito, e l'integrale semplice $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ è esso pure determinato e finito per tutti i valori di y da γ a ∞, e converge in modo che per valori sufficientemente grandi di c l'integrale $\int_\gamma^\infty dy\int_c^\infty f(x,y)\,dx$ sia sempre numericamente inferiore a una quantità arbitrariamente piccola σ; e se al tempo stesso all'integrale $\int_\gamma^\infty dy\int_\alpha^c f(x,y)\,dx$ sarà applicabile la inversione delle integrazioni, allora valendosi ancora della formola (7) nella quale sia fatto $\delta=\infty$, si trova subito che anche *l'integrale* $\int_\alpha^\infty dx\int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ *sarà determinato e finito e si avrà*

$$(9)\qquad \int_\gamma^\infty dy\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx=\int_\alpha^\infty dx\int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$$

cioè *l'inversione delle integrazioni sarà ancora possibile.*

135. — Così, in particolare, limitatamente al caso delle funzioni $f(x,y)$ che sono sempre finite e continue in ogni punto a distanza finita del campo d'integrazione e sono atte alla integrazione rispetto ad x fra α e ∞ e rispetto ad y fra γ e ∞ per qualunque valore di y e x respettivamente, e quando

gli integrali doppii $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ sono ambedue determinati e finiti, è facile ora di vedere che *a questi integrali sarà sempre applicabile la inversione delle integrazioni quando siano soddisfatte le due condizioni seguenti cioè:*

1.° *che, considerata per ogni valore di x fra c_1 e ∞ separatamente, la funzione $f(x,y)$ per tutti i valori di y fra γ e ∞ sia sempre numericamente inferiore a una funzione positiva $\varphi_1(x)$ atta alla integrazione fra c_1 e ∞; e considerata per ogni valore di y fra c_2 e ∞, la stessa funzione $f(x,y)$ per tutti i valori di x fra α e ∞ sia sempre numericamente inferiore a una funzione positiva $\varphi_2(y)$ atta alla integrazione fra c_2 e ∞, essendo c_1 e c_2 numeri finiti e positivi comunque scelti;*

2.° *che uno almeno dei due integrali* $\int_c^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_c^\infty f(x,y)\,dy$, *per es. il primo* $\int_c^\infty f(x,y)\,dx$, *pei valori di c al di là di un certo numero sufficientemente grande sia sempre numericamente inferiore a $\sigma\varphi_3(y)$ essendo σ un numero positivo arbitrariamente piccolo dato, e $\varphi_3(y)$ essendo una funzione positiva di y atta alla integrazione fra γ e ∞.*

Sotto queste ipotesi infatti, le prime tre condizioni del teorema del paragrafo precedente sono già soddisfatte, e la quarta pure viene ad essere soddisfatta anch'essa, perchè per quanto dicemmo nei §§ 120 e 121 gli integrali $\int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$, oltre essere determinati e finiti, saranno anche funzioni continue di y e x respettivamente fra γ e ∞ e fra α e ∞, e quindi anche gli integrali doppii $\int_\gamma^c dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ per valori comunque grandi di c saranno determinati e finiti e ad essi pel teorema del § 133 sarà applicabile la inversione delle integrazioni.

Si può poi osservare che le condizioni del n. 1.° portano l'integrabilità di $f(x,y)$ come funzione di x fra α e ∞ e come funzione di y fra γ e ∞, e quindi di queste integrabilità, alle quali abbiamo accennato in principio di questo paragrafo, sarà inutile occuparci quando sono soddisfatte le condizioni del n. 1.°

Indipendentemente poi dall'altra ipotesi ammessa che l'integrale doppio $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ sia determinato e finito, è da osservare che il trovare soddisfatte le altre condizioni qui indicate porta che, essendo c un valore sufficientemente grande e c' un altro numero qualsiasi superiore a c, si hanno le formole

$$\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy = \int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^c f(x,y)\,dx\ ,\quad \int_\alpha^{c'} dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy = \int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^{c'} f(x,y)\,dx,$$

e queste danno luogo all'altra

$$\int_c^{c'} dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy = \int_\gamma^\infty dy \int_c^{c'} f(x,y)\,dx < 2\sigma \int_\gamma^\infty \varphi_3(y)\,dy\ ,$$

la quale ci mostra che l'integrale doppio $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ viene di suo ad avere un valore determinato e finito, e quindi l'ipotesi che abbiamo ammessa che *ambedue* gli integrali doppii $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ siano determinati e finiti, quando sono soddisfatte le condizioni contenute nei n.[i] 1 e 2 del teorema enunciato, basta *richiederla soltanto pel primo di questi integrali* $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$.

Se poi anche per l'integrale $\int_c^\infty f(x,y)\,dy$ risulterà soddisfatta una condizione simile a quella che nel n. 2 dell'enunciato del teorema abbiamo posta per l'altro integrale $\int_c^\infty f(x,y)\,dx$, allora anche l'integrale doppio $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ verrà di suo ad avere un valore determinato e finito; e quindi in questo caso si potrà del tutto fare a meno di porre a priori la ipotesi che i due integrali doppii $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ e $\int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\infty f(x,y)\,dy$ siano determinati e finiti, perchè questi risulteranno tali senz'altro in conseguenza delle altre condizioni, cioè di quelle dei n. 1 e 2 così completate, le quali *rimarranno allora sufficienti da sole ad assicurare la possibilità dell'inversione delle integrazioni* *negli integrali dati, quando la funzione da integrarsi $f(x,y)$ è sempre finita e continua nel campo d'integrazione.*

Si intende che tanto nel caso ora considerato quanto nei casi generali alcune delle condizioni che abbiamo detto richiedersi perchè la inversione delle integrazioni sia applicabile potrebbero anche rendersi meno restrittive.

136. – Del resto conviene anche notare che quando si considerano, come abbiamo fatto, gli integrali fra limiti infiniti $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ o $\int_\gamma^\infty dy \int_\alpha^\infty f(x,y)\,dx$ nei quali per semplicità di scrittura scriveremo sempre f invece di $f(x,y)$, può darsi che avvenga che questa funzione $f(x,y)$, considerata per es. come funzione di x, per quanto sempre finita, non sia atta alla integrazione da α a ∞ per qualche valore speciale di y per es. per $y=\gamma$; come anche può darsi, tanto nel caso dei limiti infiniti come in quello degli integrali fra limiti finiti, che la funzione $f(x,y)$ divenga infinita in un punto (α,γ).

Allora gli integrali doppii corrispondenti possono cessare di avere un significato e in tal caso non saranno da considerarsi affatto; quando poi essi conservino un significato, la inversione delle integrazioni in certi casi sarà ancora possibile, e noi vogliamo ora indicarne uno — che è il più comune e si riferisce ad un tempo ai due casi suddetti — nel quale la detta inversione può ancora essere fatta.

Consideriamo perciò l'integrale doppio $\int_\alpha^\delta dy \int_\gamma^\beta f\,dx$, ammettendo che in questo β e δ possano anche essere uno o tutti e due infiniti, per comprendere così nello stesso tempo i due casi ora indicati; e ammettiamo che i due integrali $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx$ e $\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$ abbiano ciascuno un valore determinato e finito, ciò che non esclude che gli integrali $\int_\alpha^\beta f\,dx$ e $\int_\gamma^\delta f\,dy$ separatamente possano anche essere uno o tutti e due infiniti per $y=\gamma$ o per $x=\alpha$ respettivamente; ma noi supporremo che uno di essi almeno, per es. il secondo cioè $\int_\gamma^\delta f\,dy$, *sia finito anche per* $x=\alpha$.

Indicando con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, avremo sempre $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx$; e poichè la y nell'integrale del secondo

membro $\int_{\gamma+\varepsilon}^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx$ non prende mai il valore γ s'intende che esso e l'altro integrale $\int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy$ potranno non presentare singolarità per quanto gli integrali possano essere presi fra limiti iufiniti; e noi, oltre ad ammettere questo, ammetteremo inoltre che colle considerazioni dei paragrafi precedenti o con altre *si sia anche potuto verificare che per gli stessi integrali la inversione delle integrazioni è possibile.*

Per questo avremo

$$\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy\,, \tag{10}$$

e sarà facile vedere che *colle condizioni testè poste, l'inversione delle integrazioni negli integrali* $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx$ e $\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$ *sarà sempre possibile e si avrà* $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$:

1.° quando β è finito, *se l'integrale* $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy$ *all'impiccolire indefinito di* ε *convergerà in ugual grado verso zero per tutti i valori di* x *fra* α *e* β.

2.° quando β è infinito, *se per ogni numero comunque grande* c *che si prenda l'integrale* $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy$ *all'impiccolire indefinito di* ε *convergerà in ugual grado verso zero per tutti i valori di* x *fra* α *e* c; *e se al tempo stesso avuto riguardo alla variabilità di* ε, *si avrà convergenza in ugual grado in un intorno* $(0,\varepsilon_1)$ *sufficientemente piccolo di* $\varepsilon=0$ *a destra per l'integrale* $\int_\alpha^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy$ *quando questo si consideri come integrale semplice rispetto ad* x *fra* α *e* ∞ *dell'integrale* $\int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy$ *riguardato come funzione di* x *e di* ε.

È chiaro infatti che, essendo σ un numero positivo arbitrariamente piccolo, per ogni valore sufficientemente piccolo di ε avremo nel primo caso

$\left|\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy\right| < \sigma$ *per ogni valore di x fra α e β*; e quindi, per essere β finito,

sarà $\int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy + \eta\sigma(\beta-\alpha)$ con $|\eta|<1$, e si avrà perciò

$\lim\limits_{\varepsilon=0} \int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$ e quindi per la (10) $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy$.

Nel secondo caso poi, per ogni numero dato positivo ma arbitrariamente piccolo σ, esisterà un numero sufficientemente piccolo ε_1 tale che si potrà trovare un numero sufficientemente grande c dotato della proprietà che per ogni valore positivo di ε inferiore a ε_1 si abbia sempre $\int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy < \sigma$; e poi scelto un altro numero σ_1 tale che il prodotto $\sigma_1(c-\alpha)$ sia minore di quel numero che più ci piace, per es. minore anch'esso di σ, si potrà trovare un numero ε_2, che potremo scegliere sempre non superiore a ε_1, pel quale quando $\varepsilon<\varepsilon_2$ si abbia sempre $\left|\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy\right| < \sigma_1$ per ogni valore di x fra α e c; e allora sarà $\int_\alpha^c dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f\,dy + \eta_c \sigma_1 (c-\alpha)$ essendo η_c un altro numero compreso in valore assoluto fra 0 e 1; e per questo, osservando che

$$\int_\alpha^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^c dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy + \int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f\,dy + \int_c^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy + \eta_c\sigma_1(c-\alpha),$$

e $\int_\alpha^c dx \int_\gamma^\delta f\,dy = \int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f\,dy - \int_c^\infty dx \int_\gamma^\delta f\,dy$, se ne dedurrà subito che

$\lim\limits_{\varepsilon=0} \int_\alpha^\infty dx \int_{\gamma+\varepsilon}^\delta f\,dy = \int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f\,dy$, e quindi per la (10) si avrà anche in questo caso $\int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\infty f\,dx = \int_\alpha^\infty dx \int_\gamma^\delta f\,dy$, come volevamo dimostrare.

E si può aggiungere che *se la funzione $f(x,y)$ è finita pei valori di x comunque grandi ma finiti e pei valori di y che cadono in un intorno* $(\gamma, \gamma+\varepsilon_1)$ *di* γ, allora *la condizione rispetto alla convergenza in ugual grado*

verso zero dell'integrale $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dx$, *pei valori di x fra α e β nel caso di β finito e fra α e c nel caso di β infinito, è sempre soddisfatta da sè ed è quindi inutile di occuparsene;* perchè in tal caso, indicando con $\overline{f}$ il limite superiore dei valori di $f(x,y)$ nel rettangolo degli indicati valori di x fra α e β o fra α e c, e di y fra γ e $\gamma+\varepsilon_1$ è certo che per $\varepsilon<\varepsilon_1$ avremo sempre in valore assoluto $\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy < \varepsilon\overline{f}$, e quindi, pei valori di ε che, oltre a non superare ε_1, sono anche inferiori a $\frac{\sigma}{\overline{f}}$, avremo anche $\left|\int_\gamma^{\gamma+\varepsilon} f\,dy\right| < \sigma$ per tutti i valori di x fra i limiti indicati α e β o α e c.

Se poi anche l'integrale $\int_\gamma^\delta f\,dy$ fosse infinito per $x=\alpha$ allora la dimostrazione e l'enunciato del teorema dovrebbero essere alquanto modificati aggiungendo altre condizioni.