XVI.

Estensione dei teoremi di Taylor e di Maclaurin agli sviluppi delle funzioni di più variabili.

222. — Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che è sempre finita e continua in tutti i punti di un certo campo c che contiene il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; e, escluso tutt'al più questo punto e i punti limiti di c, in tutti gli altri punti essa ha almeno le derivate parziali del prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ finite e continue.

Indichiamo con $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ un punto qualunque del campo c diverso dal punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; e proponiamoci di trovare una o più formole che servano a determinare il valore $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ della funzione f nel detto punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ per mezzo dei valori della funzione stessa e di alcune delle sue derivate nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e di quelli delle derivate dell'ordine successivo in un punto intermedio; al modo stesso che per le funzioni $f(x)$ di una sola variabile x la formola di Taylor serve alla determinazione di $f(x_0+h)$ per mezzo dei valori di $f(x)$ e di alcune delle sue derivate nel punto iniziale x_0 e di quello della derivata seguente in un punto intermedio fra x_0 e x_0+h.

Poniamo perciò $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, essendo $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ funzioni finite e continue di t per tutti i valori di t fra t_0 e t_1 (t_0 e t_1 incl.); e queste funzioni per gli stessi valori di t (gli estremi al più escl.) abbiano anche una derivata determinata e finita, e per $t = t_0$ si riducano rispettivamente ad $a_1, a_2, \dots, a_n$; per $t = t_1$ si riducano ad $a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n$; e per t compreso fra t_0 e t_1 prendano valori tali che il punto corrispondente $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ venga sempre anch'esso a cadere nel campo c che si considera.

Allora la funzione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ per tutti questi valori di t diverrà una funzione $F(t)$ di t che si potrà riguardare come una funzione composta di t per mezzo delle $x_1, x_2, \dots, x_n$; e per ogni valore di t fra t_0 e t_1 (t_0 e t_1 al più escl.) questa funzione $F(t)$ di t ammetterà sempre una derivata determinata e finita che sarà $\frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n$, dove $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono le derivate parziali di f nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ corrispondente a quel valore di t, e $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ sono le derivate $x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)$ di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$; talchè ponendo $t_1 - t_0 = \delta$, per la nota formola di Taylor arrestata alle derivate prime, avremo $F(t_1) = F(t_0) + \delta F'(t_0 + \theta_1 \delta)$, con θ_1 compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e quindi sarà intanto

$$(1)\quad f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n\right\}_{t=t_0+\theta_1\delta},$$

dove nel secondo membro s'intende che le derivate parziali di f debbano esser prese nel punto $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ corrispondente a $t = t_0 + \theta_1 \delta$, e così le derivate $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ debbano esser prese per $t = t_0 + \theta_1 \delta$.

Ammettendo poi che esistano e siano finite e continue le derivate parziali di primo e secondo ordine di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in tutti i punti di c (tranne tutt'al più i punti limiti di c per le derivate dei due ordini, e tranne tutt'al più anche il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o $t = t_0$ per quelle del secondo), e ammettendo inoltre che esistano e siano finite le derivate prime e seconde di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ per tutti i valori di t fra t_0 e t_1 (t_1 al più escluso per le derivate dei due ordini e t_0 al più escluso per quelle del secondo) avremo anche la formola $F(t_1) = F(t_0) + \delta F'(t_0) + \frac{\delta^2}{1.2} F''(t_0 + \theta_2 \delta)$, e quindi sarà anche

$$(2)\quad f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \delta \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0} + \frac{\delta^2}{1.2} \left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)_{t=t_0+\theta_2\delta},$$

dove θ_2 è un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e $\left(\frac{df}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)$ indicano le derivate totali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rispetto a t, per modo cioè che si ha

$$\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n,$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} x''_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x''_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x''_n;$$

dove l'espressione $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^2$ è qui lo stesso simbolo (quadrato simbolico) che abbiamo più volte usato pei differenziali delle funzioni di più variabili; e ora, così continuando, coll'ammettere che le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fino alle m^e inclusive esistano e siano finite e continue in tutti i punti di c (esclusi tutt'al più per tutte queste derivate i punti limiti di c, ed escluso tutt'al più il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o $t=t_0$ per le derivate m^e), e coll'ammettere similmente che esistano e siano finite tutte le derivate di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ fino alle m^e inclusive per tutti i valori di t fra t_0 e t_1 (t_1 al più escluso per tutte queste derivate e t_0 al più escluso per le derivate m^e soltanto) avremo la formola seguente

$$(3)\quad f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)=f(a_1, a_2, \dots, a_n)+\delta\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0}+\dots+$$
$$+\frac{\delta^{m-1}}{\pi(m-1)}\left(\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta},$$

dove in generale il simbolo $\left(\frac{d^rf}{dt^r}\right)$ rappresenta la derivata totale r^a di f rispetto a t; talchè se si suppone ora che le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ esistano e siano finite e continue sino a quelle di ordine grande quanto si vuole in tutti i punti del campo c (i punti limiti di c al più escl. e il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ora incl.), e così pure esistano e siano finite e continue le derivate dei varii ordini di $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ per tutti i valori di t fra t_0 e t_1 (t_1 al più escl. e t_0 incl.) e si suppone al tempo stesso che la quantità $\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta}$ abbia per limite zero per $m=\infty$, allora avremo anche la formola seguente

$$(4)\quad f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)=f(a_1, a_2, \dots, a_n)+\delta\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0}+\dots+\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0}+\dots$$

della quale ben si capisce la immensa generalità.

Viceversa se, esistendo sempre ed essendo finite e continue le derivate dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e quelle di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, si saprà che almeno per certi valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ la formola (4) sussiste, allora, siccome sussisterà pure la (3) per qualunque valore finito di m, si potrà asserire che la quantità $\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta}$ per valori convenienti di θ_m compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) dovrà avere per limite zero per $m=\infty$; talchè si può ora affermare che nelle ipotesi sopra indicate della esistenza e della

continuità delle derivate di qualsiasi ordine di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e di $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ entro c e fra t_0 e t_1 (i punti limiti di c e t_1 al più escl.) la condizione necessaria e sufficiente affinchè la formola (4) corrispondente ai valori presi per $h_1, h_2, \dots, h_n$ e ai valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ di $x_1, x_2, \dots, x_n$ sia giusta è che la quantità $\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta}$ abbia per limite zero per $m=\infty$ quando θ_m è scelto in modo conveniente fra 0 e 1 (0 e 1 escl.).

223. — E quando si sia incerti intorno al limite di questa quantità $\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta}$, o intorno alla esistenza delle derivate dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ entro c e di quelle di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ fra t_0 e t_1, allora i termini del secondo membro della formola (4) potranno cessare di avere un significato, e, quand'anche questo non avvenga potrà pure la formola stessa cessare di esser giusta; però in questi casi sussisterà sempre la (3), cioè si avrà

$$(5)\quad f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)=f(a_1, a_2, \dots, a_n)+\delta\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0}+\dots+$$
$$+\frac{\delta^{m-1}}{\pi(m-1)}\left(\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0+\theta_m\delta}$$

per tutti i valori interi e positivi di m pei quali è certo che le varie derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fino a quelle dell'ordine m inclusive sono finite e continue in tutti i punti di c tranne tutt'al più i punti limiti di c per tutte, e il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ per quelle di ordine m, e le derivate di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ per tutti i valori di t fra t_0 e t_1 (t_1 al più escluso) sono anch'esse finite e continue fino a quelle di ordine $m-1$ inclusive, e per gli stessi valori di t (anche t_0 ora al più escl.) le derivate m^e delle stesse funzioni $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ sono almeno determinate e finite.

E aggiungiamo che propriamente per quest'ultima formola (5) non sarebbe necessario esigere la continuità di tutte le derivate m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nei punti di c diversi dal punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e dai punti limiti, ed esigere che le derivate m^e di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ siano sempre finite fra t_0 e t_1 (t_0 e t_1 al più escl.); però noi volendo esser sicuri che nel calcolare $\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)$ possono farsi le inversioni di derivazione, e può sempre applicarsi la regola di derivazione delle funzioni composte, e non volendo d'altra parte entrare in un esame troppo minuzioso, poniamo senz'altro anche le condizioni ora indicate rispetto alle derivate m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e di $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ colle quali le accennate operazioni sono certamente possibili.

Infine osserviamo anche, ciò che del resto è bene evidente, che se per $t=t_1$ le funzioni ausiliarie $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ anzichè divenire $a_1+h_1, a_2+h_2,$

$\ldots, a_n+h_n$ divengono altre quantità $b_1, b_2, \ldots, b_n$, le formole trovate sussistono ancora, nei respettivi casi, quando ai loro primi membri venga sostituito il valore $f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ della funzione nel punto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, senza fare alcun cambiamento nei secondi membri.

224. — Particolarizzando t_0 e t_1 e le funzioni $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, s'intende come le formole precedenti conducono ad altrettanti sviluppi di $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n)$.

Qui ci limiteremo a supporre $t_0=0$, $t_1=1$, $x_1(t)=a_1+h_1 t$, $x_2(t)=a_2+h_2 t$, $\ldots, x_n(t)=a_n+h_n t$ con che $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ fra t_0 e t_1 saranno finite e continue e per $t=t_0=0$ prenderanno i valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e per $t=t_1=1$ prenderanno i valori a_1+h_1, $a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n$ come appunto dev'essere; e allora osservando che per queste funzioni $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ le loro derivate prime saranno $x'_1=h_1, x'_2=h_2, \ldots, x'_n=h_n$ e tutte le altre loro derivate saranno nulle, si vedrà subito che in questo caso si ha coi soliti simboli

$$\left(\frac{df}{dt}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n,\quad \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2,$$

$$\ldots, \left(\frac{d^rf}{dt^r}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^r, \ldots,$$

tutte le volte che le derivate parziali della funzione data $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fino a quelle dell'ordine m^o inclusive sono finite e continue nel punto $(x_1=a_1+h_1 t, x_2=a_2+h_2 t, \ldots, x_n=a_n+h_n t)$ che si considera in queste formole; talchè evidentemente le formole (1), (2) e (3) o (5), nelle quali possiamo ora cangiare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ daranno luogo alle seguenti

$$(6)\quad \begin{cases} f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+ \\ \qquad +\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)_{x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_1 h_2, \ldots, x_n+\theta_1 h_n}, \\ f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)+ \\ \qquad +\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2_{x_1+\theta_2 h_1, x_2+\theta_2 h_2, \ldots, x_n+\theta_2 h_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)+ \\ \quad +\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2+\ldots+\frac{1}{\pi(m-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^{m-1}+ \\ \qquad +\frac{1}{\pi(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^m_{x_1+\theta_m h_1, x_2+\theta_m h_2, \ldots, x_n+\theta_m h_n} \end{cases}$$

dove gl'indici $x_1+\theta_r h_1, x_2+\theta_r h_2, \ldots, x_n+\theta_r h_n$ posti in basso alle parentesi indicano che le derivate corrispondenti r^{me} di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, anzichè esser calcolate come le altre nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, devono esser calcolate nel punto $(x_1+\theta_r h_1, x_2+\theta_r h_2, \ldots, x_n+\theta_r h_n)$, essendo θ_r un numero fra 0 e 1 (gli estremi esclusi) che varia soltanto da una formola all'altra ed *in ciascuna formola è lo stesso per ogni variabile.* E considerando il campo speciale c_1 cui appartiene il punto iniziale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e nel quale le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variano respettivamente fra x_1 e x_1+h_1, fra x_2 e $x_2+h_2, \ldots$, fra x_n e x_n+h_n (gli estremi incl.), si suppone che nei punti di questo campo c_1 (i punti limiti di c_1 diversi dal punto iniziale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al più esclusi) per la prima formola siano finite e continue almeno le derivate parziali del prim'ordine di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; per la seconda siano finite e continue anche quelle del secondo ordine,... e per l'ultima siano finite e continue anche quelle dell'ordine m; potendo solo avvenire che vi siano delle eccezioni nel punto iniziale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, con che però queste eccezioni si riferiscano soltanto alle derivate prime nel caso della prima formola, soltanto alle derivate seconde nel caso della seconda formola,..., e soltanto alle derivate dell'ordine m nel caso dell'ultima formola (*).

La prima delle formole precedenti (6) estende al caso delle funzioni di più variabili la nota formola *degli accrescimenti finiti* che trovammo già pel caso delle funzioni di una sola variabile. Sì essa poi che tutte le altre (6), come le corrispondenti pel caso delle funzioni di una sola variabile, vengono dette anche le *formole dei valori medii.*

(*) Quando si sappia che nel punto iniziale $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ esistono anche le derivate m^e di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e che pel punto stesso a queste derivate sono applicabili le inversioni di derivazione, e per $t=t_0$ è applicabile anche alle derivate parziali $(m-1)^e$ di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la formola di derivazione delle funzioni composte, allora, *quand'anche non si sappia nulla intorno alle derivate m^e di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fuori del detto punto iniziale,* per quanto si disse nella nota alla pag. 87 e seg. si può affermare che, se anche la formola (5) del testo verrà a mancare, avremo sempre la formola seguente

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n)=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\delta\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=t_0}+\ldots+$$
$$+\frac{\delta^{m-1}}{\pi(m-1)}\left(\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right)_{t=t_0}+\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left\{\left(\frac{d^mf}{dt^m}\right)_{t=t_0}+\varepsilon_m\right\},$$

dove ε_m è una quantità che tende a zero all'impiccolire indefinito di δ; e in questa formola al primo membro si dovrà sostituire $f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ quando i valori di $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ per $t=t_1$ siano respettivamente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ invece di essere $a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n$.

Ne segue, sotto queste ipotesi rispetto alle derivate di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, che se facendo ancora, come nel testo al principio di questo paragrafo, $x_1(t)=a_1+h_1 t$, $x_2(t)=a_2+h_2 t, \ldots, x_n(t)=a_n+h_n t$ e $t_0=0$, si lascia indeterminato il t_1 che allora

225\. — Similmente, ammettendo che in tutto il campo c_1 ora indicato (i punti limiti di c_1 diversi dal punto iniziale $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al più esclusi) le derivate parziali dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fino a quelle di ordine

---

sarà uguale a δ, cambiando ancora le $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $x_1, x_2, \dots, x_n$, avremo la formola

$$f(x_1+\delta h_1, x_2+\delta h_2, \dots, x_n+\delta h_n)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)+\delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)+$$

$$+\frac{\delta^2}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2+\dots+\frac{\delta^{m-1}}{\pi(m-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^{m-1}+$$

$$+\frac{\delta^m}{\pi(m)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^m+\varepsilon_m\right\},$$

le derivate che qui figurano essendo tutte prese nel punto iniziale $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e ε_m essendo una quantità che dipenderà da m, da δ e dalle $h_1, h_2, \dots, h_n$, oltre che dai valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ nel punto iniziale, e che col tendere di δ a zero diverrà piccola a piacere.

Cambiando in questa le $\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_n$ in $h_1, h_2, \dots, h_n$ se ne dedurrà l'altra

$$(\alpha)\quad f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)+$$

$$+\frac{1}{1,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2+\dots+\frac{1}{\pi(m-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^{m-1}+$$

$$+\frac{1}{\pi(m)}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^m+\varepsilon'_m\right\},$$

essendo ε'_m ció che diventa $\delta^m\varepsilon_m$ per questo cambiamento; per modo cioè da poter dire che, sotto le ipotesi fatte intorno alle derivate m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, questa formola (α) terrà sempre luogo dell'ultima delle formole (6) del testo (che ora potrà anche mancare); e in essa, quando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ tendano a zero almeno del prim'ordine rispetto a una quantità δ (che può anche essere una delle stesse $h_1, h_2, \dots, h_n$) la ε'_m sarà una quantità che tende sempre a zero con δ di un ordine superiore a δ^m.

Aggiungiamo infine che quando si torni a supporre che siano soddisfatte le condizioni per la validità dell'ultima delle formole (6) del testo, e al tempo stesso si supponga che nel punto iniziale $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ siano soddisfatte per le derivate d'ordine $m+1$ di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quelle condizioni stesse che ponemmo in questa nota per le derivate m^e, allora valendosi dei resultati che si dettero in fine della ricordata nota delle pag. 87 e seg. si può anche affermare che se la forma di grado $m+1$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^{m+1}$, nella quale le derivate s'intendono prese nel punto iniziale $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sarà sempre diversa da zero quando sieno diverse da zero le $h_1, h_2, \dots, h_n$, il numero θ_m che figura nell'ultima delle formole (6), quando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ saranno prese tutte dell'ordine di piccolezza di una certa quantità δ, tenderà verso $\frac{1}{m+1}$ all'impiccolire sempre più di δ.

grande quanto si vuole siano sempre finite e continue, e al tempo stesso la quantità

$$(7)\qquad \frac{1}{\pi(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^m_{x_1+\theta_m h_1,\, x_2+\theta_m h_2,\, \dots,\, x_n+\theta_m h_n}$$

per valori determinati di θ_m compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) abbia per limite zero per $m=\infty$, possiamo dire che, almeno pel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e pei valori presi per le $h_1, h_2, \dots, h_n$, si avrà la formola

$$(8)\quad f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)+$$

$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2+\dots+\frac{1}{\pi(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}h_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^m+\dots$$

cui ora si riduce la (4); e viceversa se esistono le derivate parziali dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nei punti del campo c_1 (i punti limiti diversi dal punto $(x_1, \dots, x_n)$ al più escl.), e se questa formola sussiste, allora la quantità (7) avrà per limite zero per $m=\infty$. Talchè noi possiamo ora affermare che quando le derivate parziali dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono finite e continue in ogni punto del campo c_1 (i punti limiti diversi dal punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al più escl.), allora, affinchè pei valori scelti di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ sussista la formola (8) è necessario e sufficiente che la quantità (7) per un valore determinato di θ_m compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) abbia per limite zero per $m=\infty$.

Questa condizione evidentemente è sempre soddisfatta quando nel campo c_1 le derivate parziali dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oltre esser finite, si mantengono sempre numericamente inferiori ad un dato numero A perchè allora, se $h'_1, h'_2, \dots, h'_n$ sono i valori assoluti di $h_1, h_2, \dots, h_n$, la quantità (7) in valore assoluto è minore dell'altra $\frac{A(h'_1+h'_2+\dots+h'_n)^m}{\pi(m)}$ che per $m=\infty$ ha per limite zero. E in questo caso la formola stessa (8) oltre a sussistere pel sistema di valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ che si considera, sussiste anche evidentemente per tutti gli altri sistemi di valori di queste quantità pei quali h_1 viene a cadere fra 0 e il valore dato di h_1, h_2 viene a cadere fra 0 e il valore dato di $h_2, \dots$, e h_n viene a cadere fra 0 e il valore dato di h_n.

226\. — La formola (8) dà la estensione della formola di Taylor al caso delle funzioni di più variabili, come le altre (6) danno una estensione analoga di quelle che possono dirsi formole di Taylor abbreviate, e corrispondono al caso in cui, o perchè la formola (8) non sussiste o per altra ragione, ci si arresta a un certo punto nella serie del secondo membro della formola (8) stessa, e per l'esattezza della formola ci si aggiunge il termine complementare (7).

E per quanto questo termine complementare (7) sia semplicemente l'errore che si commetterebbe prendendo per valore di $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$ la somma dei primi m termini della serie del secondo membro della formola (8), e non corrisponda quindi al resto di questa serie altro che quando la formola stessa sussiste, ciò nonostante si usa di chiamare sempre il detto termine *resto della serie di Taylor* corrispondente al caso delle funzioni di più variabili.

227. — È poi da osservare che, facendo nella (8) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, e cambiando $h_1, h_2, \dots, h_n$ in $x_1, x_2, \dots, x_n$ si ottiene la formola

$$(9)\qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0, 0, \dots, 0) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} x_n\right) +$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} x_n\right)^2 + \dots + \frac{1}{\pi(m)}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} x_n\right)^m + \dots$$

dove l'indice *zero* alla f indica che le varie derivate parziali di f devono calcolarsi nel punto $(0, 0, \dots, 0)$; e questa formola è l'estensione di quella di Maclaurin alle funzioni di più variabili, e vale per quei punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pei quali avviene che, formando un campo c_1 cui appartiene il punto $(0, 0, \dots, 0)$ e nel quale $x_1, x_2, \dots, x_n$ variano respettivamente fra 0 e i valori dati $x_1, x_2, \dots, x_n$, in questo campo c_1 (i punti limiti diversi dal punto $(0, 0, \dots, 0)$ al più escl.) le derivate parziali dei varii ordini di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono sempre finite e continue, e hanno valori tali che la quantità

$$(10)\qquad \frac{1}{\pi(m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n\right)^m,$$

dove le varie derivate parziali d'ordine m s'intendono prese in un punto determinato $(\theta_m x_1, \theta_m x_2, \dots, \theta_m x_n)$ *interno* al campo stesso c_1, abbia per limite zero per $m = \infty$.

Questa quantità (10), sebbene impropriamente, viene designata sempre col nome di *resto della serie di Maclaurin* corrispondente al caso delle funzioni di più variabili.

228. — Merita poi di esser notato che quando nella (8) si suppone che $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano variabili indipendenti e si ammette altresì che la formola stessa sussista per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ numericamente infe-

riori a dati limiti, allora potremo supporre che $h_1, h_2, \dots, h_n$ siano i differenziali $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, e si avrà quindi la formola seguente

$$(11)\ \Delta f = f(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \dots, x_n+dx_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1\,.\,2} + \dots + \frac{d^m f}{\pi(m)} + \dots$$

che ci dà l'accrescimento Δf della funzione f decomposto in una parte differenziale del prim'ordine $\frac{df}{1}$, in una del secondo $\frac{d^2 f}{1\,.\,2}$, in una del terzo $\frac{d^3 f}{1\,.\,2\,.\,3}, \dots$ precisamente come nel caso delle funzioni di una sola variabile indipendente.

Aggiungiamo poi che quando per rappresentare la espressione simbolica $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^r$ si usi l'altro simbolo facilissimo a intendersi $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^r f(x_1, \dots, x_n)$, allora, ricordando che si ha $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \dots + \frac{z^m}{\pi(m)} + \dots$, si vede subito che le formole precedenti (8), (9) e (11) possono anche scriversi simbolicamente nel modo seguente

$$(12)\ \begin{cases} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = e^{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n\right)} f(0, 0, \dots 0), \\ \Delta f = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e^d - 1) f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

229. — Anche sulle formole (8) e (9) che danno la estensione di quelle di Taylor e di Maclaurin che si trovarono nel caso delle funzioni di una sola variabile, noi potremmo fare osservazioni del tutto simili a quelle che allora si fecero.

Qui però ci limiteremo a presentare le seguenti osservazioni che si riferiscono al resto delle serie dei secondi membri delle dette formole, o meglio all'errore che si commette quando per valore della funzione variata $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$ o della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si prende la somma di un certo numero soltanto dei primi termini delle serie corrispondenti.

Consideriamo perciò il caso della funzione $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$, poichè quello di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ può dirsi un caso particolare di questo; e a scanso di equivoci torniamo a rappresentare con $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ il punto iniziale, e ammettiamo che in un campo c cui appartiene il punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sia sempre finita e continua, e le sue derivate parziali fino alle m^e inclusive siano pure finite e continue per tutto tranne tutt'al più nei punti limiti di c; come anche, a scanso pure di equivoci, dichiariamo esplicitamente che noi supporremo che il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sia *interno* al campo per modo che in esso $x_1, x_2, \dots, x_n$ possano variare a piacere fra $a_1 - \varepsilon_1$ e $a_1 + \varepsilon_1$, fra $a_2 - \varepsilon_2$ e $a_2 + \varepsilon_2, \dots$, e fra $a_n - \varepsilon_n$ e $a_n + \varepsilon_n$ respettivamente, essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ quantità positive diverse da zero.

Ciò premesso, indichiamo con $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ un punto di c, e con $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ numeri positivi uguali o anche maggiori dei valori assoluti $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n$ di $h_1, h_2, \dots, h_n$, ma sempre talmente piccoli che i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pei quali $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono respettivamente compresi fra $a_1 - h_1^0$ e $a_1 + h_1^0$, fra $a_2 - h_2^0$ e $a_2 + h_2^0, \dots$, e fra $a_n - h_n^0$ e $a_n + h_n^0$ formino un campo c_0 tutto contenuto in c.

Allora, indicando per semplicità con $P^{(r)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ il valore della espressione simbolica $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^r$ nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di c_0, avremo la formola

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + P'_{a_1, a_2, \dots, a_n} +$$
$$+ \frac{1}{1.2} P''_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \dots + \frac{1}{\pi(m)} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} + E_m,$$

quando s'indichi con E_m l'errore che si commetterebbe prendendo come valore di $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ la somma dei primi $m+1$ termini della serie di Taylor corrispondente a questa quantità; e al tempo stesso a causa dell'ultima delle formole (6) avremo anche l'altra

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, a_2 \dots, a_n) + P'_{a_1, a_2, \dots, a_n} +$$
$$+ \frac{1}{1.2} P''_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \dots + \frac{1}{\pi(m-1)} P^{(m-1)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \frac{1}{\pi(m)} P^{(m)}_{a_1+\theta_m h_1, a_2+\theta_m h_2, \dots, a_n+\theta_m h_n},$$

talchè sarà

$$E_m = \frac{1}{\pi(m)} \left\{ P^{(m)}_{a_1+\theta_m h_1, a_2+\theta_m h_2, \dots, a_n+\theta_m h_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} \right\};$$

e quindi per studiare E_m converrà studiare le quantità $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$.

Ora evidentemente queste quantità $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ saranno funzioni anche delle $h_1, h_2, \dots, h_n$, omogenee e di grado m, e si avrà propriamente

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum A_{p,q,r\dots} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r \dots} h_1^p h_2^q h_3^r \dots,$$

dove $p+q+r+\dots = m$, e $A_{p,q,r\dots}$ sono i coefficienti polinomiali; quindi sarà

$$(13)\quad P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \sum A_{p,q,r\dots} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r \dots} - \frac{\partial^m f_i}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r \dots}\right) h_1^p h_2^q h_3^r \dots,$$

dove l'indice i posto alla f indica che le derivate sono prese nel punto iniziale; talchè se indichiamo con D_m la massima delle oscillazioni delle varie derivate parziali dell'ordine m di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel campo c_0, e rappresentiamo ancora con $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n$ i valori assoluti di $h_1, h_2, \dots, h_n$, avremo evidentemente in valore assoluto $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} \leq D_m \sum A_{p,q,r\dots} \overline{h}_1^p \overline{h}_2^q \overline{h}_3^r \dots$, ovvero $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} \leq D_m(\overline{h}_1 + \overline{h}_2 + \dots + \overline{h}_n)^m$, e ciò per tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del campo c_0 tranne tutt'al più pei punti limiti, e qualunque sia il sistema di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$; e così, sostituendo, troveremo ora in valore assoluto

$$(14)\quad E_m \leq \frac{D_m(\overline{h}_1 + \overline{h}_2 + \dots + \overline{h}_n)^m}{\pi(m)}, \text{ e anche } E_m \leq \frac{D_m(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m}{\pi(m)},$$

per l'errore E_m che si commette prendendo la somma

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) + P'_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \frac{1}{1.2} P''_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \dots + \frac{1}{\pi(m)} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

come valore di $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$; e ciò anche per tutti gli altri sistemi $h'_1, h'_2, \dots, h'_n$ di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ pei quali il punto $(a_1+h'_1, a_2+h'_2, \dots, a_n+h'_n)$ viene a cadere nel campo indicato sopra con c_0, e qualunque cosa accada nel campo c_0 stesso delle derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di ordine superiore ad m, e sia che sussista o no la formola di Taylor corrispondente.

230. — La formola (13) dà così un limite superiore del valore assoluto della quantità chiamata *resto della serie di Taylor* corrispondente al caso delle funzioni di più variabili, o dell'errore che si commette arrestandoci al gruppo $(m+1)^0$ dei termini della nostra formola; e supposto che ε sia la maggiore fra le quantità $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ si può ridurre all'altra più semplice

$$(15)\quad E_m \leq \frac{D_m n^m \varepsilon^m}{\pi(m)}.$$

Ora si osservi che se, come abbiamo supposto, le derivate parziali m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono tutte finite e continue nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, indicando con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo, si potrà trovare un numero positivo e diverso da zero ε_m dipendente ordinariamente da m e talmente piccolo che, prendendo per $h_1, h_2, \dots, h_n$ un sistema qualunque di valori numericamente inferiori ad ε_m, si abbia sempre $D_m < \sigma$; quindi noi possiamo ora affermare che, se formiamo un campo c'_0 sufficientemente piccolo cui appartenga il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e in modo che in esso le $x_1, x_2, \dots, x_n$ non possano scostarsi in più o in meno dai respettivi valori iniziali $a_1, a_2, \dots, a_n$ più del numero ora indicato ε_m, allora per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ pei quali il punto $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$ viene a cadere nel campo stesso c'_0, avremo $E_m < \dfrac{\sigma n^m \varepsilon_m^m}{\pi(m)}$; talchè, quando si tenga conto come qui abbiamo fatto dei valori di D_m, è certo ora che, impiccolendo ove occorra il numero σ e corrispondentemente ε_m o almeno quest'ultimo, si potrà fare in modo che E_m resti sempre inferiore a quel numero che più ci piace σ_1. Del resto poi, riportandosi ancora alla formola (14) si vede che indipendentemente da D_m, e quindi anche senza richiedere la continuità delle derivate parziali m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, si potrà avere $E_m < \sigma_1$ quando si prendano le $h_1, h_2, \dots, h_n$ in modo che la somma $\overline{h_1} + \overline{h_2} + \dots + \overline{h_n}$ sia abbastanza piccola.

E da ciò si conclude che, *valga o no lo sviluppo completo in serie di Taylor* pel caso delle funzioni di più variabili, quando ci si arresta in esso a un punto in cui le derivate di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono ancora determinate e finite in un intorno del punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, sia del resto che esistano o no in questo punto le derivate seguenti, l'errore che si commetterà prendendo come valore di $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$ la somma che così risulterà dai primi termini soltanto della serie di Taylor potrà rendersi minore di quella quantità che più ci piace quando si prendano tutte le $h_1, h_2, \dots h_n$ sufficientemente piccole in valore assoluto; per modo che per gli stessi valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ la formola

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + P'_{a_1, \dots, a_n} +$$
$$+ \frac{1}{1.2} P''_{a_1, a_2, \dots, a_n} + \dots + \frac{1}{\pi(m)} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

potrà riguardarsi come giusta all'infuori di quantità la di cui piccolezza resterà in nostro arbitrio.

231. — Questa osservazione è d'importanza grandissima per le applicazioni, nelle quali appunto avviene il più spesso che mentre si conoscono alcune delle derivate dei primi ordini, non si sa nulla di quelle degli ordini superiori e neppure si sa se esistono; e non potendo quindi esser sicuri dell'esattezza della formola di Taylor completa, e anzi talvolta neppure potendone calcolare quel numero di termini che più ci piace, conviene necessariamente

arrestarsi in essa ai primi termini, e giova quindi molto il sapere che anche con questi soli possono aversi valori approssimati quanto si vuole per la funzione.

Oltre a ciò poi quando ci si limiti al caso in cui i termini della serie di Taylor hanno un significato, senza però che la formola di Taylor sussista, l'osservazione precedente pone in evidenza il fatto singolare stesso che già notammo per gli sviluppi di Taylor relativi alle funzioni di una sola variabile; quello cioè che la somma di un numero finito qualunque m dei primi termini della stessa serie, ci dà *sempre* valori approssimati quanto si vuole di $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$ per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ che non superano in valore assoluto una quantità sufficientemente piccola ε_m, mentre ciò non avviene sempre, *per gli stessi valori delle* $h_1, h_2, \dots, h_n$, quando si prende la somma di un numero maggiore di termini o la somma della serie, la quale anzi può invece essere anche divergente o indeterminata.

Ciò però si spiega facilmente anche nel caso attuale pensando che quando nelle formole precedenti è dato il σ, il numero corrispondente ε_m deve determinarsi *dipendentemente dal valore che si ha per* m; e quindi può benissimo avvenire che quanto più m cresce, il numero ε_m, sebbene esista sempre e sia diverso da zero, vada sempre più diminuendo e abbia per limite inferiore lo zero; e allora le $h_1, h_2, \dots, h_n$ dovendo al crescere di m essere prese sempre inferiori in valore assoluto al corrispondente numero ε_m, per quanto piccole via via vengano prese, devono al crescere di m essere ognor più impiccolite onde la condizione $E_m < \sigma_1$ continui a esser soddisfatta; e questo farà sì evidentemente che potrà non esistere alcuno dei sistemi dei valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi da zero pei quali la formola di Taylor completa possa riguardarsi come giusta.

232. — Merita poi di esser notato che se s'indica con M il massimo valore assoluto delle varie derivate parziali di ordine m di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ quando non sono tutte zero, e s'indica poi con $Q^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ il valore che prende $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ quando a queste derivate si sostituisce M, e alle $h_1, h_2, \dots, h_n$ si sostituiscono i loro valori assoluti $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$, si ha $Q^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = M(\overline{h_1} + \overline{h_2} + \dots + \overline{h_n})^m$, e quindi per la (14) si avrà anche $E_m \leq \dfrac{D_m}{M} \dfrac{Q^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\pi(m)}$, e se $D_m < \sigma$ sarà $E_m \leq \dfrac{\sigma}{M} \dfrac{Q^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\pi(m)}$, talchè può dirsi che l'errore E_m sarà ordinariamente piccolissimo di fronte al termine $\dfrac{P^{(m)}_{a_1, \dots, a_n}}{\pi(m)}$ a cui ci si arresta nello sviluppo di Taylor corrispondente, o almeno di fronte a $\dfrac{Q^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\pi(m)}$.

Ciò che qui abbiamo detto della formola di Taylor vale evidentemente anche per quella di Maclaurin.

233. — La ristrettezza dei limiti che dobbiamo imporci non ci consente di fare altre osservazioni sugli sviluppi in serie che qui abbiamo dato per le funzioni a più variabili, nè di esporre altri sviluppi per le funzioni di una o più variabili date esplicitamente o definite da equazioni. Neppure possiamo trarre conseguenze dalle formole (6) (8) e (9) per quanto, corrispondendo esse ad altre formole simili che abbiamo già dato per le funzioni di una sola variabile, s'intende subito che potrebbero condurre a varie proprietà delle funzioni finite e continue di più variabili.

Soltanto osserveremo che in forza delle formole stesse noi possiamo dire che quando nei punti di un campo c a n dimensioni, che racchiude nel suo interno il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, una funzione di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali fino a quelle di ordine m inclusive, essa non può avere zero tutte le derivate dell'ordine m in ogni punto di c senza essere una funzione razionale intera dell'ordine $m-1$ rispetto ai soliti accrescimenti $h_1, h_2, \ldots, h_n$, o meglio rispetto alle differenze $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n$.

E in particolare se una funzione di n variabili è finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in tutti i punti del campo c, essa non può avere queste derivate sempre eguali a zero senza avere lo stesso valore in ogni punto di c.

E si può notare che propriamente non è necessario supporre nulla intorno alle derivate della nostra funzione nei punti limiti di c per poter concludere ancora i teoremi ora enunciati.

XVII.

Massimi e minimi delle funzioni di una o più variabili indipendenti

Caso delle funzioni di una sola variabile.

234. — Incominciamo dal parlare delle funzioni di una variabile, e indichiamo con $f(x)$ una funzione data nell' intervallo finito o infinito (a, b).

Supponendo, per non entrare ora in troppi dettagli, che la funzione $f(x)$ non possa essere costante neppure in tratti piccolissimi dell'intervallo (a, b), si dirà che $f(x)$ ha un *massimo* in un punto α dello stesso intervallo (sia questo punto in un estremo o no) quando esisterà un piccolo intorno $(\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_2)$ di α nel quale i valori che prende $f(x)$ fuori di α non sono mai superiori al valore $f(\alpha)$ che prende la stessa $f(x)$ nel punto α, potendo però in alcuni punti, ma non in tutti, essergli uguali.

E si dirà invece che $f(x)$ ha un *minimo* nel punto α quando esisterà un piccolo intorno di α nel quale i valori che prende $f(x)$ fuori del punto α non sono mai inferiori a quello $f(\alpha)$ che la funzione prende nel punto α stesso; e con queste definizioni una funzione $f(x)$ in un dato intervallo finito o infinito potrà avere uno o più massimi e uno o più minimi, o anche averne un numero infinito in vicinanza di dati punti (come avviene per es. in vicinanza del punto $x = 0$ per la funzione che per $x = 0$ è zero e per gli altri valori finiti di x è $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$), o averne un numero infinito in una porzione qualsiasi dell'intervallo; e siccome l'esservi in un punto un massimo o un minimo di una funzione dipende da quello che accade nella funzione nelle estreme vicinanze di quel punto, e non già da ciò che accade nei punti staccati, ben s'intende che, avendo una funzione in un dato intervallo più massimi e più minimi, potrà anche avvenire che il valore che essa ha in un punto di massimo sia eguale o inferiore a quello che ha in un punto di minimo, ecc.

In ogni caso poi, quando si tratta di funzioni *continue* il numero che si chiama limite superiore e così l'altro che si chiama limite inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo che si considera (a, b), corrisponderanno sempre rispettivamente a uno o più massimi o a uno o più minimi della funzione; e gli altri massimi e minimi, se esistono, saranno compresi fra questi due, ecc.

235. — Ammetteremo per fissare le idee, che l'intervallo (a, b), nel quale la nostra funzione sempre finita $f(x)$ viene considerata, sia finito, avvertendo però che, quando fosse infinito, noi non avremmo a fare alcun cangiamento in ciò che segue, all'infuori di quello di non parlare più degli estremi o almeno di quello che fosse infinito, perchè ciò che ora diremo si riferirà sempre ai valori finiti della variabile.

Supponendo allora che α sia un punto di massimo di $f(x)$ e sia interno all'intervallo (a, b), o sia soltanto in un estremo, osserveremo che, secondo la definizione, pei valori di h sufficientemente piccoli e positivi pei quali il punto $\alpha+h$ o l'altro $\alpha-h$ cadono nell'intervallo che si considera, dovremo sempre avere $f(\alpha\pm h)-f(\alpha) \leqq 0$; e se α è un punto di minimo di $f(x)$ dovremo avere invece $f(\alpha\pm h)-f(\alpha) \geqq 0$, senza che (per le ipotesi fatte su $f(x)$) tanto nell'un caso che nell'altro possa esser sempre $f(\alpha+h)-f(\alpha)=0$, o $f(\alpha-h)-f(\alpha)=0$; talchè evidentemente, pei massimi e minimi α che corrispondono a punti *interni* dell'intervallo dato (a, b), i due rapporti incrementali destro e sinistro, $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ e $\dfrac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}$, coll'impiccolire di h finiranno per conservare ciascuno un medesimo segno o esser nulli senza però potere esser sempre eguali allo zero, e dove questi rapporti incrementali non saranno zero, il segno dell'uno sarà diverso da quello dell'altro.

Viceversa se per un punto α interno all'intervallo dato (a, b) i rapporti incrementali destro e sinistro coll'impiccolire di h finiranno per soddisfare alle condizioni ora indicate, il punto α corrisponderà a un punto di massimo o di minimo; e similmente se il punto α sarà un estremo dell'intervallo (a, b), esso corrisponderà o no a un massimo o a un minimo di $f(x)$ secondochè quello fra i due rapporti incrementali che esisterà per quel punto finirà o no per prendere sempre valori dello stesso segno o essere zero.

Si aggiunge poi che quando un punto α, per es. interno all'intervallo (a, b), corrisponde a un massimo o a un minimo, l'esame dei segni che finiranno per avere i rapporti incrementali, dove saranno diversi da zero, servirà a farci riconoscere se si tratta di un massimo o se si tratta di un minimo; giacchè evidentemente si tratterà di massimi nei punti nei quali il segno del rapporto incrementale destro, dove questo rapporto è diverso da zero, finirà per essere sempre negativo, e il segno del rapporto incrementale sinistro

finirà per esser sempre positivo; e si tratterà invece di un minimo nel caso opposto.

Similmente pei rapporti incrementali destro o sinistro che si potranno considerare nei punti estremi, nel caso del massimo o del minimo dovranno aversi i segni che abbiamo rispettivamente indicati per questi rapporti quando trattavasi di un punto interno; quindi evidentemente noi possiamo ora asserire che *qualunque sia la funzione data* $f(x)$, *il solo esame dei segni dei suoi rapporti incrementali* $\dfrac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$ *potrà sempre bastare a farci conoscere se un punto corrisponda a un massimo o a un minimo della funzione data, o se non corrisponda nè all'uno nè all'altro.*

236. — Questi risultati valgono qualunque sia la funzione sempre finita $f(x)$ che si considera nell'intervallo (a, b). Nel caso poi che ordinariamente si presenta, quello cioè delle funzioni finite e continue, che, eccettuato soltanto un numero finito di punti dell'intervallo dato, in tutti gli altri hanno sempre una derivata ordinaria determinata (finita, cioè, o infinita e determinata di segno) i resultati precedenti danno luogo ad altri che sono di grandissima importanza.

S'intende subito infatti che, quando si tratti di punti *interni* dell'intervallo (a, b) nei quali $f(x)$ ha la derivata determinata $f'(x)$, i massimi o minimi non potranno trovarsi altro che fra quelli nei quali $f'(x)$ sia eguale a zero, giacchè allora i rapporti incrementali destri e sinistri, oltre a soddisfare alle condizioni indicate sopra rispetto ai loro segni, dovranno avere anche uno stesso limite; dunque evidentemente, quando si ammetta dapprima che nell'intervallo (a, b) la funzione finita e continua $f(x)$ abbia in alcuni punti la derivata (ordinaria) determinata, mentre in altri punti questa derivata può anch'essere infinita e indeterminata di segno, o non esistere affatto, noi potremo intanto asserire che i massimi e i minimi di questa funzione $f(x)$ non potranno trovarsi altro che fra quei punti x pei quali $f'(x)$ è zero, o fra quelli pei quali questa derivata è infinita e indeterminata di segno, o non esiste affatto, o nei punti estremi; e così in questo caso la ricerca dei massimi è minimi di $f(x)$ dovrà farsi trovando dapprima i punti interni nei quali rispetto alla derivata $f'(x)$ si presentano le indicate particolarità, e poi esaminando se questi punti, e così pure gli estremi dell'intervallo, corrispondono effettivamente a massimi e minimi di $f(x)$; come anche infine cercando di distinguere il massimo dal minimo.

Ora, mentre i punti nei quali $f'(x)$ è infinita e indeterminata di segno corrispondono sempre a massimi o a minimi di $f(x)$, perchè per essi (§ 19 [pag. 20]) i rapporti incrementali destri e sinistri $\dfrac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$ finiscono per essere uno sempre positivo, e l'altro sempre negativo, non potrà dirsi evidentemente lo stesso dei punti interni nei quali la derivata $f'(x)$ manca; come neppure può dirsi lo stesso dei punti estremi dell'intervallo (a, b) o di quelli nei quali $f'(x)$ è zero, perocchè se α è un estremo dell'intervallo (a, b) per es. a, e $a<b$, la differenza $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ per h positivo, o il rapporto incrementale destro corrispondente $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ col tendere a zero di h, dove sono diversi da zero, possono benissimo non conservare sempre un medesimo segno, passando invece continuamente dal positivo al negativo e viceversa; e se α è un punto interno dell'intervallo (a, b) e in esso $f'(\alpha)=0$, potrà avvenire che al tendere a zero di h i due rapporti incrementali $\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$, e $\dfrac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}$, pure avendo per limite zero, dove sono diversi da zero, abbiano sempre lo stesso segno, o uno di essi almeno cangi continuamente di segno.

237. — Ora venendo al caso che più c'interessa, quello cioè delle funzioni $f(x)$ che fra a e b, oltre esser finite e continue, ammettono *generalmente* una derivata (ordinaria) determinata $f'(x)$, per modo quindi che i punti nei quali questa derivata è infinita o indeterminata di segno, o non esiste affatto, siano soltanto in numero finito nell'intervallo (a, b), osserveremo che per ogni punto β interno all'intervallo stesso si potrà formare un intorno a destra $(\beta, \beta+\varepsilon)$ e un intorno a sinistra $(\beta-\varepsilon_1, \beta)$ in ogni punto dei quali la derivata $f'(x)$ sia sempre determinata o tutt'al più venga a mancare nell'estremo β; talchè per ogni valore positivo e sufficientemente piccolo di h avremo le formole

$$\frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}=f'(\beta+\theta h)\,, \qquad \frac{f(\beta-h)-f(\beta)}{-h}=f'(\beta-\theta_1 h)\,,$$

con θ e θ_1 compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); e queste ci mostrano subito che il punto considerato β corrisponderà sempre a un massimo o a un minimo di $f(x)$ tutte le volte che $f'(x)$ nei punti x a destra di β, dove è diversa da zero, avrà sempre un medesimo segno, e uno stesso segno avrà pure nei punti x a sinistra di β, essendo però il segno dei valori di $f'(x)$ a sinistra di β differente dal segno di $f'(x)$ a destra.

Invece il punto β non corrisponderà nè a un massimo nè a un minimo di $f(x)$ quando i valori di $f'(x)$ nei punti a destra e a sinistra di β, dove sono diversi da zero, abbiano tutti sempre lo stesso segno; e rimarrà incertezza quando almeno da una parte di β i valori di $f'(x)$ abbiano continui cangiamenti di segno.

Similmente osservando che anche per gli estremi a e b può farsi un intorno nel quale $f(x)$ ha una derivata per tutto, o tutt'al più questa derivata manca soltanto nell'estremo che si considera, anche per ciascuno di questi punti si troverà una formola simile all'una o all'altra delle due precedenti; talchè con la considerazione di $f'(x)$ nelle vicinanze degli estremi a e b si potrà ancora decidere nella maggior parte dei casi se essi corrispondono o no a massimi o a minimi di $f(x)$.

238. — Segue da ciò evidentemente che per le funzioni $f(x)$ dotate generalmente di derivata determinata nell'intervallo (a, b), quali sono quelle che ordinariamente si presentano nelle applicazioni, volendo trovare i loro massimi e minimi, oltre agli estremi a e b, converrà considerare soltanto quei punti, se ve ne sono, nei quali la derivata è zero, o è infinita e indeterminata di segno, o non esiste affatto.

E se vi saranno dei punti nei quali la derivata è infinita e indeterminata di segno, potremo dire senz'altro che essi corrispondono a massimi o a minimi di $f(x)$; mentre per decidere intorno a tutti gli altri punti (gli estremi incl.) converrà esaminare i segni delle derivate di $f(x)$ in vicinanza dei punti stessi, come abbiamo indicato poco fa; con che l'incertezza rimarrà soltanto nei casi in cui, almeno da una parte del punto che si considera, la derivata $f'(x)$ abbia continui cangiamenti di segno. E pei punti estremi si può anche aggiungere che, quando si trovi che in essi la derivata (a destra o a sinistra) *è differente da zero*, si potrà senz'altro asserire che essi corrispondono a massimi o a minimi della funzione, perchè allora il rapporto incrementale corrispondente finirà evidentemente per restare sempre positivo o sempre negativo.

Per distinguere poi i punti di massimo da quelli di minimo, s'intende che in ogni caso basterà tener conto dei segni delle derivate (ordinarie) nei punti a destra o nei punti a sinistra di quello che si considera, e per alcuni punti basterà anche tener conto soltanto dei segni delle derivate prese a destra o a sinistra nei punti stessi.

E propriamente, pei punti nei quali la derivata di $f(x)$ è infinita e indeterminata di segno, s'intende che essi corrisponderanno a massimi della funzione se la derivata presa in essi a destra sarà $-\infty$, e conseguentemente quella a sinistra sarà $+\infty$; e corrisponderanno invece a minimi nel caso opposto; e tanto questi che gli altri punti di massimo o minimo corrisponderanno a massimi se la derivata (ordinaria) nei punti vicinissimi a destra finirà per esser sempre negativa, e conseguentemente in quelli vicinissimi a sinistra finirà per esser sempre positiva; e corrisponderanno invece a minimi nel caso opposto; nè si avrà in ciò eccezione pei punti estremi, salvo allora, ben s'intende, a non parlare altro che di derivate prese soltanto nei punti posti alla loro destra o soltanto nei punti posti alla loro sinistra, e potendo allora anche limitarci a esaminare il segno della derivata soltanto nel punto estremo stesso, quando questa derivata sia diversa da zero.

E in conseguenza di ciò evidentemente noi possiamo anche affermare che in ogni caso un punto α *interno* all'intervallo $(a\,,b)$ corrisponderà sempre a un massimo quando, al crescere di x, la derivata $f'(x)$ col passare di x pel punto α passa dal positivo al negativo; corrisponderà a un minimo quando $f'(x)$ passerà dal negativo al positivo; e non corrisponderà nè a un massimo nè a un minimo quando $f'(x)$ non cangerà affatto di segno al passare di x per α; e questo evidentemente è in pieno accordo con quanto dicemmo al (§ 48 [pag. 62 e seg.]) intorno alle funzioni crescenti o decrescenti in un punto.

239. — Le considerazioni precedenti valgono per tutti i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x)$ e per classi estesissime di funzioni, e potrebbero quindi essere utilmente applicate nella maggior parte dei casi.

Considerando però in modo speciale i punti α *interni* all'intervallo $(a\,,b)$ nei quali $f'(x)=0$, e supponendo, come il più spesso accade, che in alcuni loro intorni a destra e in alcuni loro intorni a sinistra esistano anche alcune derivate degli ordini superiori di $f(x)$ senza neppure richiedere propriamente che l'ultima di queste derivate che si considererà esista nei punti α stessi, si ottengono anche altri resultati notevolissimi, che sono quelli che per la loro semplicità più comunemente si applicano, mediante i quali, senza bisogno di ricorrere alle considerazioni delle derivate prime di $f(x)$ negli stessi intorni, si può in molti casi riconoscere effettivamente quali fra i punti che annullano $f'(x)$ corrispondono a massimi o a minimi di $f(x)$, distinguendo al tempo stesso il massimo dal minimo.

Ammettiamo perciò dapprima, come il più spesso avverrà, che, mentre nel punto α interno all'intervallo $(a\,,b)$ per la derivata prima di $f(x)$ si ha $f'(\alpha)=0$, questa derivata $f'(x)$ sia continua in α e nei punti di un intorno di α a destra e in quelli di un intorno a sinistra; e oltre a ciò in questi punti (α soltanto al più escluso) esista anche una derivata seconda determinata $f''(x)$ di $f(x)$.

Allora per valori positivi e negativi sufficientemente piccoli di h la formola di Taylor, arrestata alle derivate seconde, col farvi $f'(\alpha)=0$ ci darà la seguente

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(\alpha+\theta_2 h)\ \text{ con } \theta_2 \text{ compreso fra } 0 \text{ e } 1 \ (0 \text{ e } 1 \text{ escl.});$$

e per questa si potrà intanto asserire che se in intorni sufficientemente piccoli di α a destra e a sinistra la derivata seconda $f''(x)$ di $f(x)$ (quand'anche non esista nel punto α) sarà sempre negativa o nulla, la funzione data $f(x)$ avrà in α un massimo; se negli stessi punti $f''(x)$ sarà sempre positiva o nulla la funzione $f(x)$ in α avrà invece un minimo; e se nei punti a destra di α $f''(x)$, dove è diversa da zero, avrà uno stesso segno, e lo stesso accadrà pei punti a sinistra, ma il segno che si ha a destra sarà differente da quello che

si ha a sinistra, allora in α non si avrà nè massimo nè minimo; talchè rimarrà incertezza soltanto nel caso in cui, almeno da una parte di α, $f''(x)$ cambia continuamente di segno.

In particolare dunque se $f''(x)$ esisterà anche nel punto α, e in esso sarà continua e diversa da zero, allora in α si avrà un massimo od un minimo secondochè sarà $f''(\alpha)<0$ o $f''(\alpha)>0$ (giacchè l'essere $f''(x)$ diversa da zero e continua nel punto α porta evidentemente che esista un piccolo intorno di α a destra e a sinistra nel quale $f''(x)$ è pure diversa da zero e ha il segno di $f''(\alpha)$); e così considerando ora in modo speciale il caso in cui $f''(x)$ esiste anche nel punto α, e ivi è continua, noi possiamo affermare che si avrà in α un massimo se sarà $f''(\alpha)<0$, e si avrà invece un minimo se sarà $f''(\alpha)>0$, e rimarrà incertezza quando si avrà $f''(\alpha)=0$.

Ora per decidere la questione anche in quest'ultimo caso, senza ricorrere alla considerazione delle derivate seconde di $f(x)$ negli altri punti dell'intorno di α a destra e a sinistra, quando in questi punti (α al più escl.) anche le derivate terze $f'''(x)$ di $f(x)$ hanno valori determinati, si osserverà che per valori positivi e negativi, ma sufficientemente piccoli di h, la formola di Taylor ci dà $f(\alpha+h)-f(\alpha)=\dfrac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(\alpha+\theta_3 h)$ con θ_3 compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); e di qui si dedurrà subito che, se nei punti degl'intorni a destra e a sinistra di α, $f'''(x)$, dove è differente da zero, avrà sempre uno stesso segno, (venendo allora $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ a cangiare di segno con h) la funzione data $f(x)$ nel punto α non avrà nè un massimo nè un minimo; e se invece negl'intorni a destra di α la derivata stessa sarà negativa e in quelli a sinistra sarà positiva, nel punto α si avrà un massimo; mentre se negli intorni di α a destra la derivata stessa sarà positiva e in quelli a sinistra sarà negativa, allora nel punto α si avrà invece un minimo, e rimarrà incertezza soltanto nel caso in cui, almeno da una parte di α, $f'''(x)$ abbia continui cangiamenti di segno.

In particolare dunque, se $f'''(x)$ esisterà anche nel punto α e in questo punto sarà continua e diversa da zero, allora in α non si avrà nè un massimo nè un minimo, e soltanto se essa sarà zero il punto α potrà ancora corrispondere a un minimo o a un massimo: talchè in questo caso speciale in cui $f'''(x)$ esiste anche nel punto α e in esso è continua, non rimarrà incertezza che quando sia $f'''(\alpha)=0$.

Allora, volendo decidere la questione senza ricorrere alla considerazione delle derivate terze $f'''(x)$ nei punti degl'intorni a destra e a sinistra di α, quando in questi punti (α al più escl.) anche le derivate quarte $f^{\text{IV}}(x)$ di $f(x)$ hanno valori determinati, si osserverà che la formola di Taylor abbreviata ci dà al solito $f(\alpha+h)-f(\alpha)=\dfrac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f^{\text{IV}}(\alpha+\theta_4 h)$ con θ_4 compreso fra 0 e 1

(0 e 1 escl.); e di qui si concluderà che se nei punti degli stessi intorni la derivata quarta $f^{\text{IV}}(x)$, dove è diversa da zero, è sempre negativa, nel punto α si avrà un massimo di $f(x)$; e se negli stessi punti $f^{\text{IV}}(x)$ è positiva, in α si avrà invece un minimo di $f(x)$; mentre se $f^{\text{IV}}(x)$ nei punti di un intorno a destra e in quelli di un intorno a sinistra di α ha lo stesso segno, ma questo segno è differente dalle due parti di α, allora in α non si avrà nè un massimo nè un minimo; e rimarrà quindi incertezza soltanto nel caso in cui $f^{\text{IV}}(x)$ almeno da una parte di α faccia continui cangiamenti di segno.

Così in particolare se $f^{\text{IV}}(x)$ esisterà anche nel punto α e in questo punto sarà continua e differente da zero, allora in α si avrà un massimo o un minimo secondo che sarà $f^{\text{IV}}(\alpha) < 0$ o $f^{\text{IV}}(\alpha) > 0$, e rimarrà incertezza soltanto quando sia $f^{\text{IV}}(\alpha) = 0$; e quindi potendo ripetere successivamente questo processo di dimostrazione, se ci limitiamo a considerare le derivate nel punto α, s'intende subito come noi possiamo senz'altro affermare che: *Quando nel punto α le successive derivate di una funzione finita e continua $f(x)$ esistono almeno finchè non se ne trovi una $f^{(n)}(x)$ che nel punto α, oltre essere determinata (finita cioè o infinita e determinata di segno) sia anche continua*(*) *e diversa da zero, allora, se la prima di queste derivate che nel punto α non si annulla sarà di ordine dispari, in α non si avrà nè un massimo nè un minimo, e se sarà di ordine pari si avrà un massimo quando il valore della stessa derivata sarà negativo, e si avrà un minimo quando sarà positivo.*

Quando poi non siasi potuto applicare questo teorema perchè si sia trovato che le successive derivate che si sono considerate nel punto α, pure essendo ancora determinate e continue in α, erano in questo punto eguali a zero, allora, se non vorremo considerare il valore della derivata dell'ordine seguente in quel punto, o se questa derivata sarà ancora zero, o non esisterà affatto, o sarà infinita e indeterminata di segno, o sarà discontinua, per decidere la questione si esamineranno i segni delle derivate dello stesso ordine o degli ordini precedenti nei punti a destra o a sinistra di α; e in questo esame nel caso delle derivate di ordine dispari applicheremo quanto si disse sopra per

(*) Valendosi della formola (α) trovata nella nota a pag. 87 si vede subito che pel teorema ora enunciato la condizione della continuità nel punto α della prima derivata $f^{(n)}(x)$ diversa da zero in questo punto che si giunge a trovare, non è affatto necessaria; e basterà che questa derivata esista, senza curarsi se esista o no anche nei punti fuori di α, per potere decidere le questioni del massimo e del minimo nel punto α come nell'enunciato del teorema.

Non abbiamo fatto modificazioni nel testo in base a questa osservazione, per la solita ragione di volere riprodurre pressochè invariate in questa pubblicazione le lezioni del 1877, e perchè d'altra parte il caso considerato nel testo è quello che comunemente si presenta.

quelle degli ordini primo o terzo, e nel caso delle derivate di ordine pari applicheremo quanto si disse pur sopra per quelle di ordine secondo o quarto; e non resterà così incertezza altro che nel caso in cui almeno da una parte di α le derivate che si considerano abbiano continui cangiamenti di segno.

240. — Applichiamo ora i risultati ottenuti ad alcuni esempî.

1.° Sia $f(x) = \cosh x + \cos x$ per tutti i valori reali di x.

Si avrà $f'(x) = \operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x$, e si vede perciò intanto che $f'(x)$ diverrà zero per $x = 0$ e non diverrà infinito altro che per $x = \pm\infty$. Se poi si osserverà che, avendosi $f''(x) = \cosh x - \cos x$, la derivata $f''(x)$ si annulla soltanto per $x = 0$ perchè per gli altri valori di x il suo primo termine $\cos hx$ è sempre positivo e maggiore di 1, si vedrà subito anche che il valore zero di x sarà il solo che annulla $f'(x)$, e quindi, lasciando di occuparci del valore $\pm\infty$ di x, per cercare i massimi e i minimi di $f(x)$ basterà considerare soltanto il valore $x = 0$.

Ora per $x = 0$ è anche $f''(x) = 0$; però, essendo $f'''(x) = \operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x$, $f^{\text{IV}}(x) = \cosh x + \cos x$, si ha anche $f'''(0) = 0$, e $f^{\text{IV}}(0) = 2$, e si conclude perciò immediatamente che il valore 0 di x corrisponde a un minimo di $f(x)$.

È da notare che a questa conclusione saremmo pur giunti immediatamente osservando che pei valori di x diversi da zero si ha sempre $f''(x) > 0$; come si può notare altresì che i valori $\pm\infty$ di x possono considerarsi come valori massimi di $f(x)$ perchè dànno $f(x) = +\infty$; e anche da questo avremmo potuto inferirne che il punto $x = 0$ non poteva corrispondere che a un minimo.

2.° Sia $f(x) = x^x$ per $x \geq 0$, essendo $f(0) = \lim_{\varepsilon = +0} f(\varepsilon) = f(+0) = 1$.

Si avrà $f'(x) = x^x \log x + x^x = x^x(\log x + 1)$; quindi, poichè x^x per $x \geq 0$ non è mai zero, non potrà essere $f'(x) = 0$ altro che quando sia $\log x + 1 = 0$ o $x = \frac{1}{e}$, e perciò all'infuori del valore $x = +\infty$ che dà $f(x) = +\infty$, i massimi o minimi di $f(x)$ non potranno corrispondere che a questo valore $\frac{1}{e}$ di x e al valore estremo $x = 0$.

Ora dall'osservare che il valore $x = +\infty$ può riguardarsi come un punto di massimo di $f(x)$, s'intende già subito che i punti $x = \frac{1}{e}$ e $x = 0$ dovranno corrispondere respettivamente a un minimo e a un massimo di x^x; e difatti, siccome la derivata di x^x nel punto $x = 0$ a destra è $-\infty$, anche dietro ciò che precede si conclude subito che il punto $x = 0$ corrisponde a un massimo di x^x; e dall'essere $f''(x) = x^x(\log x + 1)^2 + x^{x-1}$ e $f''\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}-1} > 0$, si riconosce che il punto $\frac{1}{e}$ corrisponde invece a un minimo di x^x.

E si può aggiungere che anche senza bisogno di ricorrere alla derivata seconda di $f(x)$, se si fosse osservato che per $x < \frac{1}{e}$ si ha $f'(x) < 0$ e per $x > \frac{1}{e}$ si ha $f'(x) > 0$, avremmo potuto concludere egualmente che per $x = \frac{1}{e}$ la funzione x^x diviene minima, e per $x = 0$ è invece massima.

3.° Se $f(x) = x^5 - 5x + 3$, si osserverà che $f'(x) = 5x^4 - 5$, e $f''(x) = 20x^3$; e poichè per $x = 1$ e per $x = -1$ si ha $f'(x) = 0$, mentre $f''(1) > 0$ e $f''(-1) < 0$ si concluderà che per $x = 1$ $f(x)$ ha un minimo e per $x = -1$ ha invece un massimo.

4.° Se $f(x) = x^m (a - x)^n$, dove m e n sono numeri positivi e anche a è positivo, si osserverà che $f'(x) = x^{m-1} (a - x)^{n-1} \{ma - (m+n)x\}$; e poichè il fattore di primo grado $ma - (m+n)x$ si annulla per $x = \frac{ma}{m+n}$ e nel traversare questo valore di x passa dal positivo al negativo quando x cresce, si concluderà subito, senza neppure avere bisogno di ricorrere alle derivate seconde, che $f(x)$ per $x = \frac{ma}{m+n}$ ammette un massimo.

Quando poi m e n sono interi e superiori ad uno, si osserverà che $f'(x)$ si annulla per $x = 0$ e per $x = a$, e se m e n sono pari $f'(x)$ col passare di x per questi valori al crescere di x passa dal negativo al positivo, e quindi in quei punti si hanno due minimi; mentre se m e n sono dispari, allora non avvenendo cangiamenti di segni in $f'(x)$ nè per $x = 0$, nè per $x = a$, questi punti non corrisponderanno nè a massimi nè a minimi di $f(x)$. Gli stessi resultati si otterrebbero considerando le derivate di ordine superiore di $f(x)$.

5.° Proponiamoci anche di trovare le massime e le minime distanze di un punto dato di coordinate cartesiane α e β da una curva piana la cui equazione fra le stesse coordinate sia $y = \varphi(x)$.

Chiamando δ la distanza dal punto (α, β) a un punto qualunque (x, y) della curva, sarà $\delta^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$; e poichè in questa $y = \varphi(x)$, δ^2 sarà una funzione di x, e quindi, nell'ipotesi che noi faremo che $\varphi(x)$ abbia generalmente le sue derivate determinate almeno fino a quell'ordine pel quale dovranno qui considerarsi, potremo cercare i valori finiti di x pei quali δ^2 è massimo o minimo applicando i metodi precedenti.

Osservando dunque che per la derivata di δ^2 si ha $\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{dx} = (x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx}$, si potrà subito affermare che i massimi e i minimi di δ^2 corrisponderanno soltanto ai valori finiti di x pei quali si ha, o $(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0$, o $x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = \pm\infty$, o ai punti x pei quali $\frac{dy}{dx}$ sia indeterminato; e quando la curva sia limitata per modo che per x non possano aversi, o almeno non si considerino altro che valori compresi fra i numeri finiti a e b (a e b incl.) allora anche questi valori estremi a e b potranno corrispondere a punti della curva le cui distanze dal punto (α, β) siano massime o minime.

Non occupandoci dunque di quest'ultimo caso e neppure dei punti pei quali $\frac{dy}{dx}$ non esistesse o fosse $\pm\infty$, si può asserire che i punti (x, y) della curva che renderanno massima o minima la distanza δ saranno soltanto fra i punti (x, y) pei quali si ha $(x - \alpha) + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0$, con $y = \varphi(x)$ giacchè essi devono essere sulla curva; quindi, dicendo subito che per una curva $y = \varphi(x)$ che in un punto (x, y) ha una tangente determinata, si chiama *normale* la retta condotta per questo punto perpendicolarmente sulla tangente e, come vedremo fra breve, questa retta ha per equazione $X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0$, si potrà senz'altro concludere che per avere i punti (x, y) della curva le cui distanze dal punto (α, β) sono massime o minime, bisognerà condurre da questo punto (α, β) le varie rette normali alla curva; e allora fra i punti (x, y) della curva nei quali queste rette verranno ad esser normali si troveranno necessariamente tutti i punti cercati, quando, come abbiamo detto, si trascurino quelli, che pure potrebbero esservi, nei quali $\frac{dy}{dx}$ non esiste o è $\pm\infty$.

Per veder poi se i punti così determinati (x, y) corrispondono a massimi o a minimi di δ, o anche se non corrispondono nè a massimi nè a minimi, si esaminerà la derivata seconda di δ^2 o $\frac{1}{2}\frac{d^2\delta^2}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2}$, e se si troverà che questa derivata è positiva si concluderà che il punto (x, y) corrisponde a un minimo, e se è negativa corrisponde a un massimo; mentre se questa derivata è zero non si potrà asserire nulla e converrà passare alla derivata terza, di δ^2 o di $\frac{1}{2}\delta^2$ cioè $3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (y - \beta)\frac{d^3y}{dx^3}$, che se non sarà nulla ci permetterà di concludere senz'altro che il punto considerato (x, y) non corrisponde nè a un massimo nè a un minimo di δ; mentre se sarà nulla per decidere la questione converrà passare alle derivate quarte, ...

Invece poi di esaminare in questa guisa le derivate successive di δ^2 nel punto (x, y) o pel valore corrispondente di x, potrà giovare di esaminare i segni delle derivate prime, seconde, ... pei valori di x che corrispondono ai punti di intorni a destra e a sinistra del valore x che si considera, o pei punti della curva dalle due parti del punto (x, y) e nelle estreme vicinanze di esso, applicando per questo quanto abbiamo detto in generale nei paragrafi precedenti.

Caso delle funzioni esplicite di più variabili.

241. — Passiamo ora a trattare il caso delle funzioni di più variabili, e consideriamo perciò una funzione reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un campo finito o infinito a n dimensioni C; e ammettiamo che questa funzione non possa aver sempre uno stesso valore in nessuna porzione neppure piccolissima *a n dimensioni* del campo C che si considera.

Seguendo i concetti esposti trattando delle funzioni di una sola variabile, diremo che la nostra funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ha un *massimo* in un punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ quando i valori che essa prende fuori di questo punto in ogni intorno sufficientemente piccolo c di esso non sono mai superiori al valore $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ che essa ha nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, potendo però in alcuni punti dello stesso intorno (ma non in tutti) essere uguali a questo valore; e si dirà invece che la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ha un *minimo* nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ quando i valori che essa prende fuori di questo punto in ogni suo intorno sufficientemente piccolo c non sono mai inferiori al valore che essa ha nello stesso punto; e così se il detto punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è un massimo di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e $h_1, h_2, \dots, h_n$ sono quantità positive o negative, alcune delle quali (ma non tutte) possono anche essere nulle, e sono tali che il punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ non esca dal campo che si considera, potendo però prendere qualsiasi posizione in un piccolo intorno di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, per tutti questi sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$, quando sono sufficientemente piccoli si dovrà avere $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 0$; e se il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sarà invece un minimo di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si dovrà avere $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 0$ senza però che i segni di uguaglianza possano aversi per tutti questi sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$.

242. — Ciò premesso, avvertiamo subito che i punti di massimo e di minimo della nostra funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ potranno anche trovarsi in alcuni dei punti limiti di C, o in alcuni di quelli (se ve ne sono) nei quali mancano alcune o tutte le derivate parziali di prim'ordine di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; e quindi anche su questi punti dovrebbe esser fatto un esame speciale.

Noi però, per non entrare in dettagli che ci porterebbero troppo in lungo, non considereremo questi punti singolari; e senza occuparci se il campo C sia finito o infinito, negli studi che seguono intenderemo sempre di riferirci a quei punti di massimo o di minimo a distanza finita e *interni* al campo C pei quali esistono e sono finite e continue le derivate parziali dei varii ordini che avremo via via bisogno di considerare, ammettendo altresì che queste derivate siano finite e continue anche nei punti di intorni piccolissimi c di quelli che si considerano.

Così limitati i nostri studi, s'intende subito che pei punti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ che noi consideriamo, di massimo o di minimo della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, i limiti degli n rapporti incrementali

$$\frac{f(a_1+h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_1}, \quad \frac{f(a_1, a_2+h_2, a_3, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)}{h_2},$$

$$\dots, \quad \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)}{h_n}$$

per $h_1 = \pm 0$, $h_2 = \pm 0$, ..., $h_n = \pm 0$ dovranno esistere e essere necessariamente eguali a zero; talchè si può intanto evidentemente asserire che i punti di massimo e minimo della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di cui noi ci occuperemo si troveranno soltanto fra quelli pei quali tutte le derivate parziali del prim'ordine di f sono uguali a zero; senza poter però asserire al tempo stesso che ciascuno dei punti nei quali le derivate del prim'ordine di f sono tutte nulle corrisponderà sempre necessariamente a un massimo o a un minimo della funzione.

243. — Ora quando $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è uno dei punti nei quali le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sono tutte nulle, per decidere se esso corrisponde a un massimo o a un minimo, o se non corrisponde nè a un massimo nè a un minimo, si potrà osservare che, nella ipotesi che noi facciamo che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ siano finite e continue anche negli altri punti di un certo intorno c di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e che f non sia costante in quell'intorno, le dette derivate non potranno esser sempre tutte nulle in tutti quei punti (§ 233 [pag. 320]), e si avrà la formola

$$(1)\quad f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \right\}_{a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_1 h_2, \dots, a_n+\theta_1 h_n},$$

dove $h_1, h_2, \dots, h_n$ sono numeri positivi o negativi talmente piccoli in valore assoluto che il punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ venga a cadere entro c, θ_1 è un numero positivo compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e le derivate parziali

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ s'intendono prese nel punto $(a_1+\theta_1 h_1, a_2+\theta_1 h_2, \dots, a_n+\theta_1 h_n)$; e quindi se facendo crescere x_1 in modo che il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ resti sempre entro c, per ogni sistema di valori che così possono avere $x_2, x_3, \dots, x_n$, la derivata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ col passare di x_1 per $x_1 = a_1$ passerà dal positivo al negativo o resterà nulla; e similmente se col passare di x_2 per $x_2 = a_2$ mentre si fa crescere la stessa x_2 e restando qualunque $x_1, x_3, \dots, x_n$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ passerà essa pure dal positivo al negativo o resterà nulla; e se lo stesso accadrà per le altre derivate $\frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ quando si passa respettivamente per $x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n$, allora i singoli termini del secondo membro della (1) dove non saranno zero saranno tutti negativi, e conseguentemente nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ si avrà un massimo; mentre se in questi diversi passaggi per $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ le derivate stesse passano dal negativo al positivo o restano nulle, si avrà invece un minimo; e se negli stessi passaggi tutte o alcune delle derivate medesime si conserveranno sempre dello stesso segno o nulle fuori del punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o se alcune passeranno dal positivo al negativo e altre dal negativo al positivo, allora in questo punto non si avrà nè un massimo nè un minimo; e negli altri casi rimarrà assoluta incertezza (*).

244. — Nel caso poi in cui, nell'intorno c del punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ che si considera, esistano e siano finite e continue anche le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di alcuni degli ordini superiori al primo, per decidere se questo punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (nel quale si suppone ancora che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ siano tutte nulle) corrisponda o no a un massimo o a un minimo, e nel caso affermativo se corrisponda all'uno o all'altro, possiamo dare altri criteri molto notevoli.

Per questo, ammettendo soltanto per ora che le varie derivate parziali dell'ordine m di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ siano finite e continue nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ciò che porta però che queste derivate abbiano valori determinati anche nei

---

(*) **Poichè, come sappiamo, la formola (1) propriamente non esige l'esistenza delle derivate parziali del prim'ordine di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(a_1, \dots, a_n)$, s'intende che le considerazioni che ora abbiamo fatte valgono anche pei punti $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nei quali le derivate parziali del prim'ordine mancano o sono infinite, o almeno si è incerti intorno alla esistenza delle derivate medesime, purchè però queste derivate siano finite e continue in tutti gli altri punti di un certo intorno comunque piccolo c di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.**

punti di un certo intorno c di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, e ammettendo inoltre che nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ queste derivate dell'ordine m non siano tutte nulle, daremo prima alcune proprietà della funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n, h_1, h_2, \dots, h_n$ rappresentata dalla solita potenza simbolica

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^m_{x_1, x_2, \dots, x_n}$$

e sulla quale già facemmo qualche studio nel capitolo precedente (*).

Torniamo perciò a indicare questa espressione con $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$, intendendo sempre che il punto corrispondente $(x_1, x_2, \dots x_n)$ sia un punto dell'intorno c nel quale le derivate m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hanno valori determinati; queste derivate essendo inoltre continue nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dove, come abbiamo detto, ammettiamo anche che non siano tutte nulle.

Incominciamo intanto dal considerare il caso *di m pari*, e in questa ipotesi supponiamo anche che nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la quantità stessa $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ che allora si riduce a $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ e diviene una funzione delle *sole* quantità $h_1, h_2, \dots, h_n$, omogenea e di grado m rispetto a queste quantità, non possa annullarsi altro che quando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ sono *tutte* eguali allo zero.

Allora per tutti gl'indicati sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_n = 0$, la funzione $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ prenderà sempre valori dello stesso segno perchè altrimenti, essendo finita e continua ed omogenea si vede subito che essa dovrebbe annullarsi anche per infiniti sistemi di valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema indicato $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_n = 0$ (**); e oltre a

---

(*) È da notare che quanto diciamo in questo paragrafo e nel seguente intorno alla funzione $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ *nel caso di m pari* vale per tutte le funzioni omogenee di grado pari *(forme)* delle n variabili $h_1, h_2, \dots, h_n$.

(**) Siccome cambiando di segno *tutte* le $h_1, h_2, \dots, h_n$ la funzione $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ non muta affatto, è evidente che, se per due sistemi distinti di valori delle stesse $h_1, h_2, \dots, h_n$ la $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ avesse valori diversi da zero e di segni contrarii, si potrebbe sempre supporre che almeno alcuni fra i valori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ diversi da zero del primo dei detti sistemi di valori delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ fossero dello stesso segno di quelli corrispondenti $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ del secondo, o questi valori corrispondenti fossero zero; come per es. che α_1 fosse dello stesso segno di β_1, o che β_1 fosse zero; e allora legando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ con una variabile ausiliaria t con relazioni continue, ad es. colle relazioni $h_1 = \alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)t$, $h_2 = \alpha_2 + (\beta_2 - \alpha_2)t, \dots, h_n = \alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)t$ che col variare di t da 0 a 1 facciano passare le $h_1, h_2, \dots, h_n$ dal primo sistema di valori al secondo, si comprende subito che la $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, ridotta così una funzione continua di t, per un valore t_1 di t fra 0 e 1 (questi valori estremi esclusi) dovrebbe annullarsi, e quindi evidentemente la $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ si annullerebbe per infiniti sistemi di valori delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1=0, h_2=0, \dots, h_n=0$.

ciò poi in $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ dovranno necessariamente figurare e avere un medesimo segno tutti i termini in $h_1^m, h_2^m, \dots, h_n^m$; cioè le varie derivate parziali $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}$ prese nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dovranno esser tutte diverse da zero e avere tutte un medesimo segno che sarà quello che ha sempre $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Si osservi anche che, qualunque sia m, si può scrivere

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \sum A_{p_1, p_2, p_3 \dots} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots} h_1^{p_1} h_2^{p_2} h_3^{p_3} \dots,$$

dove $A_{p_1, p_2, p_3 \dots}$ sono i soliti coefficienti polinomiali, e $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = m$; e quindi indicando con $\frac{\partial^m f_0}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots}$ le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, e nella espressione di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ponendo a fattore comune una delle quantità $h_1^m, h_2^m, \dots, h_n^m$ che sia diversa da zero, per es. h_1^m, potremo scrivere $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = h_1^m B'_m$, essendo B'_m un polinomio intero di grado m rispetto ai rapporti $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ definito dalla equazione

$$B'_m = \sum A_{p_1, p_2, p_3 \dots} \frac{\partial^m f_0}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{p_2} \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{p_3} \dots;$$

e nel caso attuale di m pari e sotto le ipotesi che abbiamo fatto intorno a $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, questo polinomio B'_m non cangerà mai di segno e non potrà annullarsi per nessun sistema di valori reali e finiti dei rapporti $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ poichè, se esso si annullasse per es. pel sistema di valori $\frac{h_2}{h_1} = \lambda_2, \frac{h_3}{h_1} = \lambda_3, \dots, \frac{h_n}{h_1} = \lambda_n$, il valore di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ si annullerebbe anche quando fosse $h_2 = \lambda_2 h_1, h_3 = \lambda_3 h_1, \dots, h_n = \lambda_n h_1$, qualunque fosse h_1, e quindi per infiniti sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_n = 0$, e questo è contro l'ipotesi.

Per fissare le idee supporremo ora che B'_m sia sempre positivo; allora quando faremo variare i rapporti $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ da $-\infty$ a $+\infty$ il polinomio stesso B'_m verrà ad avere un limite inferiore che non potrà esser negativo, come neppure potranno esser negativi i limiti inferiori dei polinomii $B''_m, B'''_m, \dots, B^{(n)}_m$ che si ottengono come B'_m da $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ponendo a fattori comuni $h_2^m, h_3^m, \dots, h_n^m$; e ora mostreremo che tutti questi limiti inferiori saranno diversi da zero e

quindi saranno numeri positivi determinati, il più piccolo dei quali μ_m sarà esso pure diverso da zero e positivo.

245. — Osserveremo perciò dapprima che quando $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ variano in un campo finito, per es. da $-\omega$ a ω, per quanto grande sia il numero positivo ω purchè finito, il limite inferiore $l_{m,\omega}$ che si ha allora per B'_m non potrà esser lo zero, giacchè, a causa della continuità, B'_m per un sistema di valori di $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ compresi tutti fra $-\omega$ e ω prenderà anche il valore $l_{m,\omega}$ e quindi se $l_{m,\omega}$ fosse zero, B'_m dovrebbe annullarsi per valori finiti di $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ il che sappiamo già essere impossibile. Talchè evidentemente per dimostrare che B'_m, e similmente anche $B''_m, B'''_m, \dots, B^{(n)}_m$ hanno i loro limiti inferiori diversi da zero quando $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ variano da $-\infty$ a $+\infty$, basterà far vedere che quando uno almeno di questi rapporti è numericamente maggiore di un numero abbastanza grande ω, i valori di B'_m sono sempre maggiori di un numero dato a piacere Ω, per modo da far sì che l'indicato limite inferiore di B'_m sia quello stesso che si ha per B'_m quando $\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ restano tutti compresi fra $-\omega$ e ω.

Per questo supponiamo dapprima che si tratti delle funzioni di due sole variabili x_1 e x_2. Allora sarà

$$P^{(m)}_{a_1, a_2} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2\right)^m = h_1^m \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1}\right)^m,$$

e

$$B'_m = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1}\right)^m = \frac{\partial^m f_0}{\partial x_2^m} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m + m_1 \frac{\partial^m f_0}{\partial x_2^{m-1} \partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{m-1} + \dots + \frac{\partial^m f_0}{\partial x_1^m},$$

e poichè $\frac{\partial^m f_0}{\partial x_2^m}$ è diverso da zero e positivo, e per $\frac{h_2}{h_1}$ diverso da zero si può scrivere $B'_m = \frac{\partial^m f_0}{\partial x_2^m} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m (1 + \varepsilon)$, essendo ε una quantità che tende a zero al crescere indefinito di $\frac{h_2}{h_1}$, s'intende che quando $\frac{h_2}{h_1}$ sia numericamente maggiore di un numero abbastanza grande ω, B'_m sarà superiore a un certo numero dato a piacere Ω; talchè, per quanto abbiamo detto sopra, può dirsi già dimostrato che nel caso di due sole variabili il limite superiore che si ha per B'_m quando $\frac{h_2}{h_1}$ varia da $-\infty$ a $+\infty$ sarà un numero diverso da zero e positivo. E lo stesso accadrà del limite inferiore della quantità analoga B''_m quando $\frac{h_1}{h_2}$ varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Passando ora al caso di tre variabili, si osserverà che

$$P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} h_3\right)^m = \left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1} h_1 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} h_3\right)\right\}^m = h_1^m \left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{h_2}{h_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\frac{h_3}{h_1}\right)\right\}^m,$$

ovvero

$$P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3} = h_1^m \left\{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{h_2}{h_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\frac{h_3}{h_1}\right)^m + \sum A'_{p_2,p_3} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{p_2} \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{p_3}\right\},$$

dove $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{h_2}{h_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\frac{h_3}{h_1}\right)^m$ è la solita espressione simbolica, A'_{p_2,p_3} sono coefficienti fissi indipendenti da h_1, h_2, h_3, e p_2, p_3 sono numeri interi e positivi tali che $p_2+p_3 \leq m-1$; talchè la quantità B'_m corrispondente a $P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3}$ sarà la quantità fra parentesi che moltiplica h_1^m nella espressione scritta ora di $P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3}$.

Ora poichè si ha anche

$$P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} h_3\right)^m + \sum A'_{p_2,p_3} h_1^{m-p_2-p_3} h_2^{p_2} h_3^{p_3},$$

con $p_2+p_3 < m$, s'intende subito che il termine $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} h_3\right)^m$ non dovrà annullarsi altro che pel sistema di valori $h_2=0$, $h_3=0$, perchè se si annullasse per $h_2=\nu_2$, $h_3=\nu_3$, essendo una almeno delle due quantità ν_2 e ν_3 diversa da zero, $P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3}$ si annullerebbe per $h_1=0$, $h_2=\nu_2$, $h_3=\nu_3$; quindi la espressione $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{h_2}{h_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\frac{h_3}{h_1}\right)^m$ non si annullerà per nessun sistema di valori diversi dal sistema $\frac{h_2}{h_1}=0$, $\frac{h_3}{h_1}=0$, e conseguentemente non cangerà mai neppure di segno, e sarà sempre positiva se, come supponiamo, $P^{(m)}_{a_1,a_2,a_3}$ è positivo.

Posto dunque per abbreviare $\frac{h_2}{h_1}=k_2$, $\frac{h_3}{h_1}=k_3$, s'intende che rispetto alla espressione $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3\right)^m$ saremo precisamente nel caso della espressione $P^{(m)}_{a_1,a_2}$ considerata testè pel caso di due sole variabili; e se l_2 e l_3 sono i valori minimi delle espressioni $\overline{B''}_m$ e $\overline{B'''}_m$ che corrispondono alla solita $\overline{B'}_m$ relativa a questa quantità $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3\right)^m$ quando $\frac{k_3}{k_2}$ o $\frac{k_2}{k_3}$ variano da $-\infty$

a $+\infty$, per ciò che precede questi valori minimi l_2 e l_3 saranno diversi da zero e positivi, e per k_2 o k_3 diversi da zero potremo scrivere respettivamente $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3\right)^m = \eta_2 l_2 k_2^m$, e $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3\right)^m = \eta_3 l_3 k_3^m$, essendo η_2 e η_3 numeri positivi non inferiori ad uno; talchè evidentemente avremo le formole

$$B'_m = \eta_2 l_2 k_2^m + \sum A'_{p_2,p_3} k_2^{p_2} k_3^{p_3}, \quad B'_m = \eta_3 l_3 k_3^m + \sum A'_{p_2,p_3} k_2^{p_2} k_3^{p_3},$$

ovvero

$$B'_m = k_2^m \left(\eta_2 l_2 + \sum A'_{p_2,p_3} \frac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{p_3}}{k_2^{m-p_2-p_3}}\right), \quad B'_m = k_3^m \left(\eta_3 l_3 + \sum A'_{p_2,p_3} \frac{\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{p_2}}{k_3^{m-p_2-p_3}}\right),$$

che dànno due espressioni di B'_m, la prima delle quali vale quando k_2 non è zero, e la seconda vale quando k_3 non è zero. E siccome $p_2+p_3 \leq m-1$, i denominatori dei termini sotto il segno $\sum$ porteranno sempre almeno un fattore k_2 o k_3 respettivamente.

Ciò premesso, ci sarà facile di dimostrare che, quando ω sia un numero finito e positivo sufficientemente grande, se una almeno delle quantità k_2 e k_3, per es. k_2, è numericamente superiore a ω, B'_m non potrà continuare a prendere valori inferiori a un certo numero dato a piacere Ω.

Ammettiamo infatti che questo non sia, e che per valori convenienti di k_2 superiori in valore assoluto a qualunque numero che si scelga per ω, B'_m possa ancora continuare a prendere valori inferiori al numero dato a piacere Ω.

Allora questo dovrà accadere per *infiniti* valori di k_2 ognor più grandi in valore assoluto, perchè, se così non fosse, pei valori di k_2 al di là di un certo numero, che potrebbe essere preso pel numero ω, si avrebbe sempre $B'_m \geq \Omega$ contrariamente al supposto; dunque colla ipotesi che noi abbiamo detto di fare vi saranno di necessità gli indicati infiniti valori di k_2, grandi quanto si vuole in valore assoluto, pei quali dovrà essere $B'_m < \Omega$; e, per questi valori di k_2 e pei valori corrispondenti di k_3 dipendenti dai valori che si prenderanno successivamente per k_2, la quantità fra parentesi della prima delle precedenti espressioni di B'_m sarà inferiore a $\frac{\Omega}{k_2^m}$.

Ne segue che la quantità stessa dovrà divenire arbitrariamente piccola al crescere indefinito di k_2 in valore assoluto; e quindi evidentemente, siccome l_2 è un numero fisso diverso da zero e η_2 non è inferiore a uno, facendo crescere sempre più questi valori di k_2 e variando in corrispondenza il k_3, il secondo termine $\sum A'_{p_2,\,p_3} \dfrac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{p_3}}{k_2^{m-p_2-p_3}}$ della quantità stessa dovrà restare discosto da zero più di una quantità determinata.

Ciò però non può accadere altro che quando al crescere ognor più di k_2 cresca anche il rapporto $\frac{k_3}{k_2}$ in modo da superare, come k_2, qualunque numero dato; e poichè questo porterebbe che anche k_3 dovesse crescere indefinitamente, valendosi della seconda espressione di B'_m si troverebbe che anche $\frac{k_2}{k_3}$ dovrebbe esso pure crescere indefinitamente insieme a k_2, $\frac{k_3}{k_2}$, e k_3, e questo è impossibile perchè $\frac{k_2}{k_3}$ è l'inversa di $\frac{k_3}{k_2}$.

Segue da ciò che la ipotesi fatta è inammissibile, e si può quindi ora esser certi che, quando una almeno delle quantità k_2 e k_3 supererà in valore assoluto un numero finito ma abbastanza grande ω, B'_m sarà sempre maggiore di qualsiasi numero dato Ω; e questo, secondo quanto dicemmo sopra, basta appunto per poter dire che nel caso di tre variabili x_1, x_2, x_3 i limiti inferiori dei valori che si hanno per l'attuale quantità B'_m e così anche per le analoghe B''_m e B'''_m quando h_2 e h_3, o h_1 e h_3, o h_1 e h_2 variano da $-\infty$ a $+\infty$, sono diversi da zero e positivi.

Con ragionamenti del tutto simili possiamo ora dimostrare la stessa proprietà pel caso di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ quando si ammetta di averla già dimostrata pel caso di $n-1$ variabili.

Osserviamo infatti che per n variabili si ha

$$P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} h_1 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} h_n \right) \right\}^m = h_1^m \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1} + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \frac{h_n}{h_1} \right) \right\}^m;$$

ovvero

$$P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = h_1^m \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1} + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \frac{h_n}{h_1} \right)^m + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{p_2} \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{h_n}{h_1}\right)^{p_n} \right\}$$

dove $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1} + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \frac{h_n}{h_1} \right)^m$ è la solita espressione simbolica, $A'_{p_2, p_3, \dots, p_n}$ sono coefficienti fissi indipendenti da $h_1, h_2, \dots, h_n$, e $p_2, p_3, \dots, p_n$ sono numeri interi e positivi la cui somma non supera $m-1$, talchè il B'_m relativo a $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ non sarà altro che la quantità fra parentesi in questa espressione di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Ora ripetendo le considerazioni fatte nel caso precedente si vede subito che anche la quantità $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{h_2}{h_1} + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} \frac{h_3}{h_1} + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \frac{h_n}{h_1} \right)^m$ non si annulla altro che

quando i rapporti $\frac{h_2}{h_1}$, $\frac{h_3}{h_1}, \dots, \frac{h_n}{h_1}$ sono tutti zero, e fuori di questo caso essa è sempre positiva come $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$; talchè, se poniamo per abbreviare $\frac{h_2}{h_1} = k_2$, $\frac{h_3}{h_1} = k_3, \dots, \frac{h_n}{h_1} = k_n$, la espressione $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} k_n \right)^m$ rientrerà nei casi che già ammettiamo considerati rispetto alle funzioni di $n-1$ variabili $x_2, x_3, \dots, x_n$, e indicando con $l_2, l_3, \dots, l_n$ i valori minimi delle quantità $B'_m, B''_m, \dots, B^{(n-1)}_m$ corrispondenti a queste espressioni, potremo ritenere che questi valori minimi $l_2, l_3, \dots, l_n$ siano diversi da zero; e per $k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ o k_n diversi da zero, la espressione $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} k_3 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} k_n \right)^m$ potremo scriverla sotto le forme respettive $\eta_2 l_2 k_2^m$, $\eta_3 l_3 k_3^m, \dots, \eta_{n-1} l_{n-1} k_{n-1}^m$, $\eta_n l_n k_n^m$, essendo $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1}, \eta_n$ numeri positivi non inferiori all'unità.

Sostituendo dunque nel valore che sopra abbiamo detto aversi ora pel B'_m relativo a $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, si troveranno le formole seguenti

$$B'_m = k_2^m \left(\eta_2 l_2 + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \frac{\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^{p_3} \left(\frac{k_4}{k_2}\right)^{p_4} \cdots \left(\frac{k_{n-1}}{k_2}\right)^{p_{n-1}} \left(\frac{k_n}{k_2}\right)^{p_n}}{k_2^{m-p_2-p_3-\dots-p_n}} \right),$$

$$B'_m = k_3^m \left(\eta_3 l_3 + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \frac{\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{p_2} \left(\frac{k_4}{k_3}\right)^{p_4} \cdots \left(\frac{k_{n-1}}{k_3}\right)^{p_{n-1}} \left(\frac{k_n}{k_3}\right)^{p_n}}{k_3^{m-p_2-p_3-\dots-p_n}} \right),$$

$$B'_m = k_4^m \left(\eta_4 l_4 + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \frac{\left(\frac{k_2}{k_4}\right)^{p_2} \left(\frac{k_3}{k_4}\right)^{p_3} \left(\frac{k_5}{k_4}\right)^{p_5} \cdots \left(\frac{k_{n-1}}{k_4}\right)^{p_{n-1}} \left(\frac{k_n}{k_4}\right)^{p_n}}{k_4^{m-p_2-p_3-\dots-p_n}} \right),$$

. . . .

$$B'_m = k_{n-1}^m \left(\eta_{n-1} l_{n-1} + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \frac{\left(\frac{k_2}{k_{n-1}}\right)^{p_2} \left(\frac{k_3}{k_{n-1}}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\right)^{p_{n-2}} \left(\frac{k_n}{k_{n-1}}\right)^{p_n}}{k_{n-1}^{m-p_2-p_3-\dots-p_n}} \right),$$

$$B'_m = k_n^m \left(\eta_n l_n + \sum A'_{p_2, p_3, \dots, p_n} \frac{\left(\frac{k_2}{k_n}\right)^{p_2} \left(\frac{k_3}{k_n}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{k_{n-2}}{k_n}\right)^{p_{n-2}} \left(\frac{k_{n-1}}{k_n}\right)^{p_{n-1}}}{k_n^{m-p_2-p_3-\dots-p_n}} \right),$$

e queste daranno $n-1$ espressioni di B'_m la prima delle quali varrà quando k_2 è diverso da zero, la seconda quando k_3 è diverso da zero, ... e l'ultima quando k_n è diverso da zero; e in tutte queste formole i termini sotto il segno $\sum$ avranno un denominatore perchè $p_2 + p_3 + \dots + p_n$ non supera $m-1$.

Ora, come nel caso di tre variabili, queste formole conducono subito a dimostrare che quando una almeno delle quantità $k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ supera in valore assoluto un numero positivo abbastanza grande ω, B'_m sarà sempre maggiore di qualunque numero dato Ω.

Supposto infatti che ciò non accada, s'intende che una tal circostanza dovrà verificarsi per infiniti valori ognor più grandi di k_2 e per valori corrispondenti di $k_3, k_4, \dots, k_n$, e poichè γ_{l2} non è mai inferiore a uno e l_2 è un numero fisso diverso da zero, per questi infiniti valori di k_2 e pei corrispondenti valori di $k_3, k_4, \dots, k_n$ il secondo termine della quantità fra parentesi nella prima espressione di B'_m dovrà mantenersi discosto da zero più di una quantità determinata.

Questo evidentemente porta che quando si fa crescere k_2 passando per gli indicati valori, i corrispondenti sistemi di valori di $k_3, k_4, \dots, k_n$ dovranno esser tali che uno almeno degli $n-2$ rapporti $\frac{k_3}{k_2}, \frac{k_4}{k_2}, \dots, \frac{k_{n-1}}{k_2}, \frac{k_n}{k_2}$ cresca esso pure indefinitamente; quindi poichè l'ordine in cui si pongono le quantità $k_2, k_3, \dots, k_n$ è in nostro arbitrio, possiamo ammettere che la quantità $\frac{k_3}{k_2}$ cresca indefinitamente con k_2.

Allora evidentemente anche k_3 dovrà crescere indefinitamente con k_2 e quindi, valendoci ora della seconda delle espressioni di B'_m si concluderà che uno almeno degli $n-2$ rapporti $\frac{k_2}{k_3}, \frac{k_4}{k_3}, \dots, \frac{k_{n-1}}{k_3}, \frac{k_n}{k_3}$ deve crescere indefinitamente con k_2 e $\frac{k_3}{k_2}$.

Ma il primo di questi rapporti impiccolisce invece indefinitamente $\left(\text{essendo l'inverso di } \frac{k_3}{k_2}\right)$; quindi uno degli altri $n-3$ rapporti, per es. $\frac{k_4}{k_3}$ dovrà crescere indefinitamente, e perciò altrettanto dovrà avvenire di k_4 e anche di $\frac{k_4}{k_2}$ che è il prodotto di $\frac{k_4}{k_3}$ per $\frac{k_3}{k_2}$.

Passando allora alla terza delle espressioni di B'_m, e osservando che il crescere indefinitamente di $\frac{k_4}{k_2}$ e $\frac{k_4}{k_3}$ porta che diminuiscano invece indefinitamente i rapporti inversi $\frac{k_2}{k_4}$ e $\frac{k_3}{k_4}$, si troverà che uno degli altri $n-4$ rapporti $\frac{k_5}{k_4}, \dots, \frac{k_n}{k_4}$ che figurano in questa espressione di B'_m, per es. $\frac{k_5}{k_4}$ dovrà crescere indefinitamente; e questo porterà che altrettanto accada di k_5 e di $\frac{k_5}{k_2}$, $\frac{k_5}{k_3}$ e che in conseguenza $\frac{k_2}{k_5}, \frac{k_3}{k_5}, \frac{k_4}{k_5}$ diminuiscano invece indefinitamente, e ora così continuando fino a considerare la penultima delle $n-1$ espressioni di B'_m si giungerà evidentemente a trovare che anche $\frac{k_n}{k_{n-1}}$ debba crescere indefinitamente, ciò che porta allora che altrettanto accada di k_n e dei rapporti $\frac{k_n}{k_2}, \frac{k_n}{k_3}, \dots, \frac{k_n}{k_{n-2}}$ e che quindi i rapporti inversi $\frac{k_2}{k_n}, \frac{k_3}{k_n}, \dots, \frac{k_{n-1}}{k_n}$ che figurano nella ultima espressione di B'_m diminuiscano invece tutti indefinitamente.

Con questo però viene ad essere impossibile di soddisfare alle condizioni che si avrebbero dall'ultima delle espressioni precedenti di B'_m; dunque la ipotesi che abbiamo fatta intorno ai valori di B'_m quando una almeno delle quantità $k_2, k_3, \dots, k_n$ sia maggiore in valore assoluto di un numero positivo abbastanza grande ω deve dirsi inammissibile; e questo, per quanto abbiamo detto sopra, basta ora per concludere, come volevamo, che per qualunque numero di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ la quantità B'_m relativa a $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ e similmente le altre analoghe $B''_m, B'''_m, \dots, B^{(n)}_m$, avranno tutte limiti inferiori diversi da zero e positivi, quando i rapporti che in esse figurano variano da $-\infty$ a $+\infty$.

S'intende che se $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, invece di essere sempre positivo, fosse sempre negativo, si avrebbero ancora gli stessi resultati riferendosi però allora ai limiti inferiori dei valori assoluti di $B'_m, B''_m, \dots, B^{(n)}_m$.

246. — Ciò premesso, torniamo ad ammettere che, essendo ancora m un numero pari, $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ invece di esser sempre positivo, possa anche esser sempre negativo, e con questo supposto indichiamo con μ_m il più piccolo fra i limiti inferiori dei valori assoluti delle n quantità $B'_m, B''_m, \dots, B^{(n)}_m$; il qual numero μ_m, per quanto abbiamo dimostrato, sarà diverso da zero.

Osserviamo poi che, a causa della continuità che abbiamo ammesso per le derivate m^e di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, si può sempre prendere un intorno c del punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ talmente piccolo che per tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che cadono in esso e per tutte le derivate m^e di f, si abbia sempre in valore assoluto

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\partial x_3^{p_3}\dots} - \frac{\partial^m f_0}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\partial x_3^{p_3}\dots} < \sigma, \tag{2}$$

essendo $p_1+p_2+p_3+\dots=m$, e essendo σ un numero diverso da zero e positivo preso da noi a piacere; e allora, per ogni sistema di valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ che si vorranno considerare che non siano tutti zero, indicando con $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ i respettivi loro valori assoluti, e con h' il massimo fra questi che sarà variabile da sistema a sistema di questi valori, per quanto si dimostrò nel capitolo precedente, avremo in valore assoluto per gli stessi valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < \sigma\,(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m ,$$

o anche

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < \sigma\, n^m\, h'^m .$$

Si prenda ora per σ un numero inferiore a $\frac{\mu_m}{n^m}$, per es. $\sigma = \frac{1}{2}\frac{\mu_m}{n^m}$, il che evidentemente può farsi perchè μ_m è diverso da zero; e trovando poi il numero ε dotato della proprietà che quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ variano respettivamente fra $a_1 - \varepsilon$ e $a_1 + \varepsilon$, fra $a_2 - \varepsilon$ e $a_2 + \varepsilon$, ..., fra $a_n - \varepsilon$ e $a_n + \varepsilon$ sia soddisfatta la condizione (2), si prenda il campo formato da questi sistemi di valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ per l'intorno c di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Avremo allora in valore assoluto, per tutti i punti di c e per tutti gli indicati sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0$, $h_2 = 0, \dots, h_n = 0$

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < \frac{1}{2} h'^m \mu_m ;$$

quindi, poichè si ha altresì evidentemente $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} \geq h'^m \mu_m$ sarà anche $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < \frac{1}{2} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$; talchè si può ora evidentemente concludere che quando, essendo m un numero pari, le derivate parziali di ordine m della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono tutte determinate e finite in un intorno del punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e in questo punto sono anche continue, allora, se l'espressione simbolica $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^m$ considerata nel punto $a_1, a_2, \dots, a_n$ non si annullerà per nessun sistema di valori delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ diverso dal sistema $h_1 = 0$, $h_2 = 0, \dots, h_n = 0$, esisterà un intorno dello stesso punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nei punti del quale la espressione $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ considerata per qualunque sistema di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi essi pure dal sistema $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_n = 0$ sarà sempre diversa da zero, e avrà sempre il segno di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$; talchè per conoscere il segno della espressione simbolica $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^m$ nei punti di un intorno sufficientemente piccolo di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ basterà cercare quello della stessa espressione nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, o più semplicemente quello di una delle derivate $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}$ in questo punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, giacchè nel caso attuale queste derivate sono tutte diverse da zero e hanno tutte lo stesso segno che è quello di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ (§ 244 [pag. 334 e seg.]).

247. — Torniamo ora al caso generale in cui m può anch'essere un numero dispari, e $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ può comportarsi in modo qualunque senza però esser zero per tutti i sistemi possibili di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$, ciò che porta soltanto l'esclusione già fatta in principio del § 244 [pag. 334 e seg.], quella cioè che non siano eguali a zero nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tutte le derivate di ordine m di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Indicando allora con $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ un sistema qualunque di valori speciali di $h_1, h_2, \dots, h_n$ pei quali $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ha un valore diverso da zero $\overline{P}^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, e con $\overline{h_1^0}, \overline{h_2^0}, \dots, \overline{h_n^0}$ i loro valori assoluti, prenderemo un numero σ tale che la quantità $\sigma \frac{(\overline{h_1^0} + \overline{h_2^0} + \dots + \overline{h_n^0})^m}{\overline{P}^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}$ sia eguale in valore assoluto a un numero i inferiore all'unità, e formeremo un intorno c del solito punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pei punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del quale si abbia sempre in valore assoluto

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots} - \frac{\partial^m f_0}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots} < \sigma .$$

Allora per questi punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e per *qualunque* sistema di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0$, $h_2 = 0, \dots, h_n = 0$ e i cui valori assoluti possiamo indicare con $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$, avremo in valore assoluto

$$P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < \sigma\,(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m ;$$

e poichè pei sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ dello stesso segno di $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ e proporzionali a questi, per modo cioè che sia $h_1 = \frac{\overline{h_1}}{p}$, $h_2 = \frac{\overline{h_2}}{p}, \dots, h_n = \frac{\overline{h_n}}{p}$ dove p è un numero positivo qualunque, si ha $(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m = \frac{(\overline{h_1^0} + \overline{h_2^0} + \dots + \overline{h_n^0})^m}{p^m}$, $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \frac{\overline{P}^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{p^m}$, e quindi

$$\sigma (h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m = \sigma \frac{(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)^m}{P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \sigma \frac{(\overline{h_1^0} + \overline{h_2^0} + \dots + \overline{h_n^0})^m}{\overline{P}^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}} P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} =$$

$$= \pm i\, P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} ,$$

si trova subito che pei sistemi speciali di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ dello stesso segno di quelli scelti sopra $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ e proporzionali a questi si ha sempre in valore assoluto $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} < i\, P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ quando il punto

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è preso comunque in un certo intorno sufficientemente piccolo del punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; talchè si può ora evidentemente concludere che, per ogni sistema di valori $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ di $h_1, h_2, \dots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, ..., $h_n = 0$ e che non annullano $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, esiste un certo intorno c del punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tale che per tutti i sistemi speciali di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ che sono dello stesso segno dei valori scelti $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ e sono proporzionali a questi, e per tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dello stesso intorno la quantità corrispondente $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ sia differente da zero e abbia il segno del valore $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ che corrisponde agli stessi valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$.

248. — Ora partendo da un sistema particolore di valori $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ di $h_1, h_2, \dots, h_n$ pei quali $\overline{P}^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ ha un certo segno, per es. il segno $+$, e supponendo trovato l'intorno c corrispondente di cui ora abbiamo parlato, s'intende che facendo variare le $h_1, h_2, \dots, h_n$ proporzionalmente ai valori dati $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \dots, \overline{h_n}$ senza cangiarli respettivamente di segno, anche $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ conserverà sempre il segno $+$, e si potrà fare in modo che il punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ venga a cadere entro un intorno piccolo quanto si vuole di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e quindi anche entro c; e allora quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ varieranno in quell'intorno, e quindi, anche più particolarmente, quando varieranno respettivamente fra $a_1 - h_1$ e a_1+h_1, fra $a_2 - h_2$ e a_2+h_2, ..., fra $a_n - h_n$ e a_n+h_n, per quanto testè dicemmo, il valore $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ corrispondente agli stessi valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$, o a quelli che se ne potranno dedurre impiccolendoli ancora tutti proporzionalmente senza cambiarli di segno, avrà anch'esso il segno $+$.

Ne segue evidentemente che qualunque sia m, se per un dato sistema di valori di $h_1, h_2, \dots h_n$ la quantità $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ avrà un valore diverso da zero, positivo o negativo, esisteranno sempre infiniti sistemi di valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ (proporzionali ai primitivi e dello stesso segno di questi) pei quali il punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ venga a cadere in un intorno sufficientemente piccolo di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e tali che per tutti i sistemi di valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ respettivamente compresi fra $a_1 - h_1$ e a_1+h_1, fra $a_2 - h_2$ e a_2+h_2, ..., fra $a_n - h_n$ e a_n+h_n il valore corrispondente di $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ venga sempre ad avere il segno positivo o negativo che originariamente si aveva per $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

E così in particolare se m è un numero dispari, e $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ non è sempre eguale a zero, allora (potendo esso prendere valori positivi e valori negativi) in ogni intorno sufficientemente piccolo del punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ esisteranno infiniti punti $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ tali che quando $x_1, x_2, \dots x_n$ variano respettivamente fra $a_1 - h_1$ e a_1+h_1, fra $a_2 - h_2$ e a_2+h_2, ..., fra $a_n - h_n$ e a_n+h_n, e per i valori $h_1, h_2, \dots, h_n$ che qui compariscono, la solita quantità $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ avrà il segno positivo; come ne esisteranno invece infiniti altri nei quali la stessa quantità avrà invece il segno negativo.

249. — I resultati ottenuti nei tre ultimi paragrafi, oltre a corrispondere a proprietà delle funzioni $P^{(m)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$, corrispondono evidentemente anche ad altrettante proprietà del resto della serie di Taylor relativa alle funzioni di più variabili.

Essi poi conducono subito ai criteri ai quali accennammo al § 244 [pag. 334] mediante i quali si può riconoscere in un immenso numero di casi se un punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nel quale le derivate parziali del prim'ordine di una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono tutte nulle, corrisponde o no a un massimo o a un minimo di questa funzione: e nel caso affermativo se corrisponde al massimo o se corrisponde al minimo.

Ammettiamo infatti che nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la nostra funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ abbia eguali a zero tutte le sue derivate parziali del prim'ordine; e nei punti di un intorno di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (questo punto incl.) oltre alle derivate del prim'ordine, anche quelle del secondo siano finite e continue.

Per una formola nota si avrà

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right)^2_{a_1+\theta_2 h_1, a_2+\theta_2 h_2, \dots, a_n+\theta_2 h_n},$$

essendo $0 < \theta_2 < 1$; quindi ammettendo che le varie derivate parziali del second'ordine di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ non siano tutte nulle, e osservando che all'infuori del fattore $\frac{1}{2}$ il secondo membro non è altro che la funzione $P^{(2)}_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ relativa al punto $(a_1+\theta_2 h_1, a_2+\theta_2 h_2, \dots, a_n+\theta_2 h_n)$, per quanto abbiamo dimostrato nel § 246 [pag. 343 e seg.] si concluderà subito che se le derivate seconde di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ soddisfano alle varie condizioni che si richiedono perchè la espressione omogenea (*forma*) di secondo grado $P^{(2)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^2$ quando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ non sono tutte zero sia sempre diversa da zero e positiva, allora nei punti $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n)$ di un intorno sufficientemente piccolo di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la differenza $f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sarà sempre positiva, e quindi nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la funzione avrà un minimo; mentre invece se saranno soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè la forma ora indicata sia diversa da zero e negativa, allora nel punto

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si avrà un massimo; e se queste condizioni non saranno soddisfatte nè le une nè le altre, e la forma indicata $P^{(2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ per dati sistemi di valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sarà positiva e per altri sarà negativa, allora, per quanto si dimostrò nel paragrafo precedente, la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ non sarà nè massima nè minima.

Resterà così l'incertezza soltanto nei casi in cui la forma $P^{(2)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ si annullerà, senza però cangiare mai di segno, anche per sistemi di valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ differenti dal sistema $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0$; e in questi casi, col considerare le derivate seconde soltanto nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la questione rimarrà indecisa, e per deciderla saranno necessarii procedimenti e osservazioni speciali.

Nel caso poi in cui tutte le derivate parziali del second'ordine della funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono zero nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, mentre in un intorno di questo punto sono finite e continue anche le derivate di alcuni degli ordini superiori, allora quando per un certo ordine queste derivate non siano anch'esse tutte eguali a zero nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si possono dare altri criterii per riconoscere se il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, corrisponde o no a un massimo o a un minimo della funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Se infatti si troverà che nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ alcune delle derivate del terz' ordine di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non sono uguali a zero, allora la forma $P^{(3)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ o $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^3_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ per alcuni sistemi di valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sarà diversa da zero, perchè onde fosse sempre zero tutte le derivate del terz'ordine nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dovrebbero essere eguali allo zero; quindi avendo riguardo alla formola

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi(3)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^3_{a_1+\theta_3 h_1, a_2+\theta_3 h_2, \ldots, a_n+\theta_3 h_n} = \frac{1}{\pi(3)} P^{(3)}_{a_1+\theta_3 h_1, a_2+\theta_3 h_2, \ldots, a_n+\theta_3 h_n},$$

e ricordando quanto si disse in fine del paragrafo precedente, si vedrà subito che il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ non corrisponderà nè a un massimo nè a un minimo; e perciò, onde nel punto medesimo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si possa avere un massimo o un minimo della funzione quando in esso tutte le derivate del second'ordine si annullano, sarà necessario che vi si annullino anche tutte quelle del terz' ordine.

Passando allora alle derivate del quart'ordine, e servendosi della formola

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= \frac{1}{\pi(4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^4_{a_1+\theta_4 h_1, a_2+\theta_4 h_2, \ldots, a_n+\theta_4 h_n} = \frac{1}{\pi(4)} P^{(4)}_{a_1+\theta_4 h_n, a_n+\theta_4 h_2, \ldots, a_n+\theta_4 h_n},$$

nella ipotesi che queste derivate del quart'ordine siano anch'esse finite e continue in tutto un intorno di $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e in questo punto non siano tutte eguali allo zero, si concluderà subito, per quanto si disse al § 246 [pag. 343 e seg.], che se saranno soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè la forma di quarto grado $P^{(4)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^4_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ sia sempre diversa da zero e positiva quando le $h_1, h_2, \ldots, h_n$ non sono tutte nulle, allora nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la funzione avrà un minimo; mentre se saranno invece soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè la forma stessa per gl'indicati valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sia sempre diversa da zero e negativa, allora nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si avrà un massimo, e se non saranno soddisfatte nè le une nè le altre di queste condizioni e per dati sistemi di valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ la forma stessa sarà positiva e per altri sarà negativa, allora, per quanto si disse nel paragrafo precedente, nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non avrà nè un massimo nè un minimo, talchè non rimarrà così incertezza altro che quando la solita forma $P^{(4)}_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ si annullerà, senza cangiar mai di segno, anche per sistemi di valori di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ diversi dal sistema $h_1 = 0, h_2 = 0, \ldots, h_n = 0$.

Similmente nel caso che le derivate del quart'ordine si annullino tutte nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, mentre in un intorno di questo punto sono finite e continue anche le derivate del quint'ordine, si troverà che onde nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si possa avere un massimo o un minimo della funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ anche le derivate del quint'ordine devono essere zero nello stesso punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, e ora così continuando si può evidentemente concludere che: *Se le derivate parziali della funzione finita e continua $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono tutte finite e continue in un intorno del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ almeno fino a quell'ordine al quale è necessario di giungere per trovarne almeno una che nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sia diversa da zero, allora se l'ordine m delle prime derivate parziali di f che non si annullano tutte in $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sarà un numero dispari, in questo punto non si avrà nè un massimo nè un minimo.*

Se poi l'ordine stesso m sarà pari, si avrà un massimo o un minimo tutte le volte che siano soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè la forma

$P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, o $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^m_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ *sia sempre diversa da zero quando le* $h_1, h_2, \dots, h_n$ *non sono tutte eguali allo zero. E propriamente quando queste condizioni siano soddisfatte si avrà un massimo o un minimo secondochè questa forma, o* – il che torna lo stesso (§ 244 [pag. 334 e seg.]) – *una delle n derivate parziali* $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}$ *prese nel punto* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *sarà negativa o sarà positiva.*

E infine, sempre in questo caso di m pari, se le condizioni ora indicate non saranno soddisfatte, e la forma stessa $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ *sarà ora positiva, ora negativa, allora nel punto* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *non si avrà nè un massimo nè un minimo; e rimarrà così l'incertezza soltanto nei casi in cui la stessa forma* $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$, *senza cangiar mai di segno, si annullerà anche per sistemi di valori di* $h_1, h_2, \dots, h_n$ *diversi dal sistema* $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_n = 0$.

Aggiungerò che l'incertezza si avrà pure quando si trovi (come in dati casi può pure avvenire) che nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fino a quelle di ordine grande quanto si vuole esistono ma sono sempre eguali a zero; ma il teorema ora enunciato si riferisce soltanto al caso in cui questo non accade.

250. — Credo poi utile di far notare che nei trattati di *Calcolo* si giunge al teorema enunciato sopra con metodi semplicissimi, fondandosi sul principio che anche nel caso di più variabili l'errore che si commette quando ci si arresta a un termine qualunque della serie di Taylor per i valori sufficientemente piccoli di $h_1, h_2, \dots, h_n$ è sempre minore del termine al quale ci siamo fermati; ma a tali metodi possono farsi serie obbiezioni.

È certo infatti che l'errore che si commette arrestandosi nella serie di Taylor al gruppo di termini $(m+1)^{mo}$, — il quale errore non è altro che la differenza $P^{(m)}_{a_1+\theta_m h_1, \dots, a_n+\theta_m h_n} - P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ all'infuori del fattore $\frac{1}{\pi(m)}$, — quando si prendano le $h_1, h_2, \dots, h_n$ numericamente inferiori a un dato numero sufficientemente piccolo ε, si può rendere minore di quel numero che più ci piace σ (§ 230 [pag. 317 e seg.]); però il numero ε dipende da σ, e all'impiccolire di σ anche ε, o le $h_1, h_2, \dots, h_n$ devono essere impiccolite; e poichè in valore assoluto la quantità $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ considerata pei valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ compresi fra $-\varepsilon$ e ε è tanto più piccola quanto più è piccola ε, e in certi casi può anche passare per zero senza che le $h_1, h_2, \dots, h_n$ siano tutte eguali allo zero, s'intende bene che, per quanto si sia sicuri che quando $h_1, h_2, \dots, h_n$ restano compresi fra $-\varepsilon$ e ε, l'indicato errore è sempre piccolissimo e minore di σ, non ne viene da ciò che esso debba sempre essere piccolissimo anche di fronte ai valori di $P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ o di $\frac{P^{(m)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\pi(m)}$ che corrispondono ai valori da considerarsi di $h_1, h_2, \dots, h_n$; e quindi nel caso delle funzioni di più variabili non può ammettersi rigorosamente, *senza qualche restrizione*, il principio suaccennato, e le dimostrazioni che si danno nei trattati di *Calcolo* pel teorema enunciato sopra debbono dirsi prive di rigore (*). È per questo che ho creduto necessario di dare la dimostrazione precedente per quanto lunga e laboriosa possa sembrare.

251. — Particolarizzando ora, col riferirci in modo speciale al caso in cui le derivate che non si annullano nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sono quelle del second'ordine, osserveremo che le condizioni che si richiedono perchè la espressione

$$P^{(2)}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n\right)^2_{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

sia sempre diversa da zero quando le $h_1, h_2, \dots, h_n$ non sono tutte nulle, e quindi in questo punto si abbia un massimo o un minimo per $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si otterranno riducendo la espressione stessa a una somma algebrica di quadrati (cosa che la teoria delle forme dimostra potersi sempre fare), o, come si dice, riducendola alla sua *forma canonica*.

Allora infatti se nella espressione così ridotta si avranno tutti gli n termini, e i coefficienti saranno tutti dello stesso segno, nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vi sarà un massimo o un minimo, e propriamente vi sarà un massimo se i detti termini saranno tutti negativi, e si avrà un minimo se saranno tutti positivi; mentre se alcuni di essi saranno negativi e altri positivi, sia allora che degli stessi termini ne manchino alcuni o no, non si avrà nè un massimo nè un minimo; talchè l'incertezza rimarrà soltanto nel caso in cui nella forma ridotta manchi qualche termine e gli altri abbiano tutti lo stesso segno. E quando si vogliano esprimere analiticamente le condizioni del massimo e del minimo ecc.... basterà esprimere che si hanno le particolarità ora indicate per la forma ridotta di $P^{(2)}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Così in particolare, nel caso delle funzioni di due variabili (x, y), osservando che si ha

$$P^{(2)}_{x,y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2,$$

(*) Ricordiamo che, pubblicandosi qui le Lezioni del 1877, naturalmente ciò che si dice dei trattati di *Calcolo* si riferisce solo a quelli che ci erano in quel tempo.

e si può scrivere quindi

$$P^2_{x,y}=\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}h\right)^2+\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}h^2,$$

dove con h e k abbiano ora indicati gli accrescimenti h_1 e h_2 di x e y, si concluderà che onde esser sicuri di avere un massimo o un minimo di $f(x, y)$ in un punto (a, b) nel quale $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, bisognerà che in questo punto si abbia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0\;; \tag{3}$$

e quando questa condizione sia soddisfatta, si avrà un massimo se sarà $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, e si avrà un minimo se si avrà invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ o $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$.

Se poi pel punto (a, b) la condizione (3) non sarà soddisfatta e si avrà invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2<0$, allora in questo punto (a, b) non si avrà nè un massimo nè un minimo; e infine se sarà $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ resterà incerto se nel punto (a, b) vi sia o no un massimo o un minimo, e per decidere la questione occorrerà fare considerazioni speciali.

Notiamo che la condizione precedente (3) si sarebbe potuta trovare anche esprimendo che la equazione $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{h}{k}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{h}{k}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ in $\frac{h}{k}$ deve avere le sue radici immaginarie onde la espressione $P^{(2)}_{x,y}$ nel punto (a, b) non si annulli altro che quando $h=k=0$.

252. — Del resto poi si può osservare che nei casi particolari bene spesso, senza bisogno di ricorrere ai teoremi generali, le condizioni speciali del problema permettono di decidere se un punto $(a_1, a_2,\dots, a_n)$ pel quale le derivate parziali del prim'ordine di una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sono tutte nulle corrisponde o no a un massimo o a un minimo, e nel caso affermativo, se corrisponde all'uno o all'altro.

Si deve poi osservare che, come avviene anche nel caso di una sola variabile, onde un punto $(a_1, a_2,\dots, a_n)$ possa corrispondere a uno dei massimi o minimi ai quali abbiamo detto di limitare le nostre considerazioni nell'*interno* del campo C nel quale è data la funzione $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$, si dovrà evidentemente avere nel punto stesso $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=0$; e poichè inversamente se questa condizione è soddisfatta qualunque siano i differenziali $dx_1, dx_2,\dots, dx_n$ si avrà sempre $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}=0$, s'intende che basterà in ogni caso scrivere la equazione $df=0$ come condizione necessaria a verificarsi per quei punti di massimo e di minimo che sono interni al campo che si considera e pei quali le derivate parziali di prim'ordine della funzione data sono determinate e finite.

Le discussioni poi per riconoscere se si tratta di massimi o di minimi, o se non si tratta nè degli uni nè degli altri, quando esistano anche le derivate di alcuni degli ordini seguenti negli intorni di questi punti $(a_1, a_2,\dots, a_n)$, e in questi siano anche continue, si faranno esaminando le solite quantità $P^{(m)}_{a_1, a_2,\dots, a_n}$ alle quali evidentemente possono anche sostituirsi i differenziali $d^m f$; e ciò quando speciali circostanze non ci permettano di decidere la questione altrimenti.

253. — Aggiungiamo inoltre che quando le equazioni $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$ o $df=0$ non siano soddisfatte soltanto da un numero finito di sistemi di valori di $x_1, x_2,\dots, x_n$, ma lo siano per es. da tutti quelli fra i quali sussiste una relazione della forma $\varphi(x_1, x_2,\dots, x_n)=0$, allora, ammesso che per tutti questi sistemi di valori di $x_1, x_2,\dots, x_n$ siano soddisfatte le altre condizioni del massimo o del minimo, per es. quelle del massimo, la funzione sarà massima negl'infiniti punti pei quali si avrà $\varphi(x_1, x_2,\dots, x_n)=0$, cioè, come si dice, in tutto un campo di $n-1$ dimensioni contenuto nel campo dato.

E così per es. trattandosi di una funzione $f(x, y)$ di due variabili x e y che si riguardino come coordinate cartesiane dei punti del piano, se avverrà che i punti pei quali sono soddisfatte le due equazioni $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$ e insieme le altre condizioni del massimo siano quelli che verificano una equazione $\varphi(x, y)=0$ che rappresenta una certa curva, ciò vorrà dire che la funzione data sarà massima lungo tutta questa curva.

254. — Diamo ora qualche esempio della teoria che precede.

1.° La funzione

$$f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+g \tag{4}$$

avrà un massimo o un minimo nel punto le cui coordinate (x_0, y_0) sono determinate dalle equazioni

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=ax+by+d=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=bx+cy+e=0 \tag{5}$$

tutte le volte che sarà $b^2 - ac < 0$, e in questo caso si avrà un massimo se a (e quindi c) è negativo, e si avrà invece un minimo se a è positivo, giacchè si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = b\ ,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c\ ,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4(ac - b^2)\,.$$

Invece lo stesso punto $(x_0\,, y_0)$ non corrisponderà nè a un massimo nè a un minimo di $f(x\,, y)$ se sarà $b^2 - ac > 0$; e vi resterà incertezza se sarà $b^2 - ac = 0$.

Ora per esaminare anche quest'ultimo caso di $b^2 - ac = 0$, supponendo dapprima che $a\,, b$ e c siano tutti diversi da zero, osserveremo che le equazioni (5) possono avere soluzioni finite soltanto quando sia al tempo stesso $bd - ae = 0$ (e $be - cd = 0$); e poichè questo porta che esse rientrino l'una nell'altra, i valori di x e y, avendo da soddisfare ad una sola equazione $ax + by + d = 0$, non riesciranno determinati.

Siccome però, qualunque siano i valori di x e y, quando $b^2 - ac = 0$ e a è diverso da zero si ha $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^2 = ah^2 + 2\,bhk + ck^2 = \frac{1}{a}\,(ah + bk)^2$, si vede subito che se insieme a $b^2 - ac = 0$ si ha $bd - ae = 0$, e $a\,, b$ e c sono diversi da zero, tutti i punti $(x\,, y)$ che soddisfano alla equazione precedente $ax + by + d = 0$ corrispondono a massimi della funzione se a, e quindi c, sono negativi, e corrispondono a minimi se a e quindi c sono positivi.

E difatti si vede subito che nel caso di $b^2 - ac = 0$, $bd - ae = 0$ e a, b e c diversi da zero la funzione che consideriamo $f(x\,, y)$ può porsi sotto la forma $f(x\,, y) = \frac{1}{a}\,(ax + by + d)^2 + g - \frac{d^2}{a}$, e quindi è bene evidente che quando $ax + by + d = 0$, se a è negativa essa è massima, e se a è positiva essa è minima.

In modo simile si trattano i casi di $a = b = 0$ con c diverso da zero, e quello di $b = c = 0$ con a diverso da zero che a causa delle (5) richiedono anche respettivamente che sia $d = 0$ o $e = 0$, e che corrispondono pure a massimi o a minimi di $f(x\,, y)$ la quale però allora si riduce a una funzione di una sola variabile; e si può notare che in questi varî casi di $b^2 - ac = 0$, quando x e y si considerino come coordinate cartesiane dei punti di un piano, i punti di massimo o di minimo della funzione (4) sono tutti quelli di una linea retta.

Il caso poi di $a = b = c = 0$ non è evidentemente da considerarsi.

2.° Sia $f(x\,, y) = \log x + \log y - y \log x$ con x e y diversi da zero e positivi.

Si avrà $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - \log x$, e per valori finiti di x e y queste derivate si annulleranno soltanto per $x = e$, $y = 1$.

Però siccome si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1 - y}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$ e per $x = e$, $y = 1$ si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ senza che sia $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, si vede subito che il punto $(e\,, 1)$ non corrisponderà nè a un massimo nè a un minimo di $f(x\,, y)$, e questa funzione in conseguenza non avrà nè massimi nè minimi per sistemi di valori finiti delle variabili.

3.° Trovare fra i triangoli inscritti in un cerchio quello che ha la massima area.

S'indichi con r il raggio del cerchio, e supponendo il problema risoluto, si rappresenti con ABC il triangolo inscritto; e preso uno qualunque dei vertici, per es. A, si tiri il diametro AD (*).

Si chiami inoltre θ l'angolo BAD, e φ l'angolo CAD, prendendo però come positivi gli angoli situati da una parte di AD e come negativi quelli situati dall'altra; talchè se si fissa di prender come positivi quelli posti dalla parte dove si trova il lato AB, e come negativi quelli posti dall'altra, allora θ sarà positivo e inferiore a $\frac{\pi}{2}$, e φ sarà anch'esso inferiore a $\frac{\pi}{2}$ essendo però superiore a $-\frac{\pi}{2}$.

Supposto poi che dei due angoli θ e φ, quando fossero tutti e due positivi, sia θ il maggiore, s'intende subito che l'area T del triangolo si potrà rappresentare con $\frac{1}{2}$ AB . AC sen $(\theta - \varphi)$; e poichè tirando BD e CD si vede subito che $\mathrm{AB} = 2r\cos\theta$, $\mathrm{AC} = 2r\cos\varphi$, se ne deduce che la funzione T da rendersi massima sarà la seguente

$$\mathrm{T} = f(\theta\,, \varphi) = 2r^2\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,(\theta - \varphi).$$

Ora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2r^2\cos\varphi\,\{\cos\theta\cos(\theta - \varphi) - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,(\theta - \varphi)\} = 2r^2\cos\varphi\cos(2\theta - \varphi)\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -2r^2\cos\theta\,\{\cos\varphi\cos(\theta - \varphi) + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,(\theta - \varphi)\} = -2r^2\cos\theta\cos(\theta - 2\varphi)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -4r^2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,(2\theta - \varphi)\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -4r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,(\theta - 2\varphi)\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} = 2r^2\left(\mathrm{sen}\,\theta\cos(\theta - 2\varphi) + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,(\theta - 2\varphi)\right) = 2r^2\,\mathrm{sen}\,2(\theta - \varphi)\,,$$

(*) Il lettore è pregato di farsi da sè la figura che non presenta nessuna difficoltà.

quindi pei valori di θ e φ che corrispondono al massimo cercato di T si deve intanto avere

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=2r^2\cos\varphi\cos(2\theta-\varphi)=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}=-2r^2\cos\theta\cos(\theta-2\varphi)=0\,,$$

e poichè pel nostro problema φ e θ non possono esser multipli di $\frac{\pi}{2}$, dovremo avere evidentemente $\cos(2\theta-\varphi)=0$, e $\cos(\theta-2\varphi)=0$.

Queste equazioni determinano infiniti sistemi di valori di θ e φ, però avendo riguardo alle condizioni del problema e all'altra che i valori cercati di θ e φ devono rendere negativi $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$, si vede subito che dev'essere $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\theta-2\varphi=\frac{\pi}{2}$, e perciò sarà $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$; quindi, osservando ora che con questi valori di θ e φ si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta\,\partial \varphi}\right)^2=16r^4\cos^2\frac{\pi}{6}-4r^4\operatorname{sen}^2\frac{2}{3}\pi=$ $=16r^4\cos^2\frac{\pi}{6}-4r^4\operatorname{sen}^2\frac{1}{3}\pi=16r^4\cos^2\frac{\pi}{6}-4r^4\cos^2\frac{\pi}{6}=12r^4\cos^2\frac{\pi}{6}>0$, si potrà asserire che questi valori $\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ di θ e φ corrispondono effettivamente al massimo cercato di T, e si ha perciò $A=\theta-\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Al modo stesso si troverebbe che $B=C=\frac{\pi}{3}$, e si conclude quindi che il triangolo di area massima inscritto nel cerchio è il triangolo equilatero.

Indipendentemente dalle verifiche fatte per mezzo delle derivate seconde di $f(\theta,\varphi)$, si poteva osservare che le equazioni $\cos(2\theta-\varphi)=0$, $\cos(\theta-2\varphi)=0$ portavano che pel nostro problema non fossero da considerarsi altro che i valori di θ e φ pei quali si avesse $2\theta-\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, $\theta-2\varphi=\mp\frac{\pi}{2}$, e così soltanto i quattro casi di $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$ e $\theta-2\varphi=\frac{\pi}{2}$, di $2\theta-\varphi=-\frac{\pi}{2}$ e $\theta-2\varphi=-\frac{\pi}{2}$, di $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$ e $\theta-2\varphi=-\frac{\pi}{2}$, e di $2\theta-\varphi=-\frac{\pi}{2}$ e $\theta-2\varphi=\frac{\pi}{2}$, dei quali soltanto il primo può corrispondere al problema, gli altri portando o a un triangolo ridotto ad un punto (minimo), o a una inversione degli angoli θ e φ fra loro.

Caso delle funzioni implicite. Massimi e minimi relativi.

255. — Lasciando ora il caso delle funzioni esplicite di una o più variabili indipendenti, passiamo a considerare quello delle funzioni implicite; cioè il caso in cui la funzione u che deve rendersi massima o minima, invece di essere data esplicitamente in funzione delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è definita da una equazione della forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)=0$, o, anche più generalmente, è definita insieme ad altre m quantità $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ da un sistema di $m+1$ equazioni fra queste quantità, la funzione stessa u e le variabili indipendenti.

Supponiamo perciò di avere un sistema di $m+1$ equazioni della forma

$$(1)\qquad \begin{cases} L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, u)=0\,, \\ L_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, u)=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, u)=0\,, \end{cases}$$

per le quali ammetteremo che in un certo campo C_1 a $n+m+1$ dimensioni relativo alle $n+m+1$ quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, u$ le $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$ siano funzioni finite e continue delle quantità stesse insieme alle loro derivate parziali del primo ordine almeno; e in un certo campo C a n dimensioni relativo alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ queste equazioni definiscano completamente la funzione u che si vuole considerare e le altre funzioni ausiliarie $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ come funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ finite, continue e a un sol valore insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, per modo anche che i valori che così si avranno per $u, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ per ogni sistema di valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entro C, uniti a questi valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vengano sempre a corrispondere a punti del campo C_1 nel quale $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$ sono finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine.

Ora, per trovare i massimi e i minimi della nostra funzione u nei punti interni a C_1 (se questi massimi e minimi esistono) osserveremo che per tutti i punti entro C si avranno le equazioni differenziali $dL_1=0$, $dL_2=0, \ldots, dL_{m+1}=0$, ovvero

$$
(2)\begin{cases}
\frac{\partial L_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial L_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} + \frac{\partial L_1}{\partial u}du = 0\,,\\
\frac{\partial L_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial L_2}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial L_2}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} + \frac{\partial L_2}{\partial u}du = 0\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \ldots + \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} + \frac{\partial L_{m+1}}{\partial u}du = 0\,;
\end{cases}
$$

e queste, con opportune eliminazioni di $dx_{n+1}, dx_{n+2},\ldots, dx_{n+m}$ (come per es. moltiplicandole per gli elementi reciproci corrispondenti a $\frac{\partial L_1}{\partial u}, \frac{\partial L_2}{\partial u},\ldots, \frac{\partial L_{m+1}}{\partial u}$ nel determinante funzionale (Iacobiano) D di $L_1, L_2,\ldots, L_{m+1}$ relativo alle $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots, x_{n+m}, u$) condurranno ad una equazione della forma

$$
(3)\qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n + U\,du = 0\,,
$$

che determinerà il valore di du, dandoci

$$
du = -\frac{X_1}{U}dx_1 - \frac{X_2}{U}dx_2 - \ldots - \frac{X_n}{U}dx_n\,,
$$

in tutti i punti nei quali U non è zero; e ciò qualunque sia il processo tenuto per fare l'eliminazione; talchè s'intende subito che i valori cercati di $x_1, x_2,\ldots, x_n$ che corrispondono a massimi o a minimi di u entro C, quando questi massimi e minimi esistono, non potranno trovarsi che fra quelli che soddisfano alle n equazioni

$$
(4)\qquad \frac{X_1}{U} = 0\,,\quad \frac{X_2}{U} = 0\,,\ldots,\quad \frac{X_n}{U} = 0\,,
$$

nelle quali deve intendersi che $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots, x_{n+m}, u$ abbiano i valori che risultano per esse dalle equazioni date (1).

E così evidentemente noi possiamo dire che, scritte le equazioni differenziali (2) e formata poi la (3) e quindi le (4), considerando le equazioni (1) e (4) avremo un sistema di $n+m+1$ equazioni con altrettante incognite $x_1, x_2,\ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2},\ldots, x_{n+m}, u$ fra le soluzioni delle quali devono trovarsi i sistemi dei valori cercati di $x_1, x_2,\ldots, x_n$, e corrispondentemente quelli di $x_{n+1},\ldots, x_{n+m}, u$, pei quali u *può* esser massimo o minimo.

Quando poi queste equazioni (1) e (4) non presentino incompatibilità, e determinino effettivamente dei sistemi di valori per le variabili indipendenti $x_1, x_2,\ldots, x_n$ entro C e per le funzioni $x_{n+1},\ldots, x_{n+m}, u$, in modo da dover

dire che i valori che vengono per $u, x_{n+1},\ldots, x_{n+m}$ corrispondono effettivamente a valori della funzione u che si vuole considerare e delle altre funzioni ausiliarie $x_{n+1},\ldots, x_{n+m}$, allora rimarrà a cercarsi se effettivamente i sistemi di valori trovati per $x_1, x_2,\ldots, x_n$ corrispondono a massimi o a minimi di u, e nel caso affermativo, se corrispondono agli uni o agli altri. E quando le condizioni del problema non siano tali da permetterci di decidere subito con esse la questione, converrà ricorrere all'esame delle derivate seconde o dei differenziali secondi di u, ecc., che si troveranno colle solite regole delle funzioni implicite e con opportune eliminazioni.

Si dovrà però aver riguardo in modo speciale a quei sistemi di valori di $x_1, x_2,\ldots, x_n, x_{n+1},\ldots, x_{n+m}, u$ che, dopo di essere stati trovati col mezzo delle (1) e delle equazioni $X_1 = 0, X_2 = 0,\ldots, X_n = 0$ alle quali danno luogo naturalmente le (4), si riscontrasse che essi rendono anche $U = 0$; perchè questi valori, riducendo identica la (3), potrebbero benissimo non darci $du = 0$, e il caso di $U = 0$ era già stato espressamente escluso; come anche si deve avere speciale riguardo a quei valori che ottenuti dapprima col far sì che si avesse $U = \infty$, si trovasse poi che rendono infinita anche una o più delle quantità $X_1, X_2,\ldots, X_n$, e a quei valori che facessero perdere il rigore a qualcuna delle operazioni di eliminazione che saranno state fatte per giungere alla equazione (3).

Ed è da aggiungere inoltre che coll'aver detto di limitarci a cercare i massimi e minimi di u entro il campo C nel quale le derivate di u sono finite e continue, siamo venuti naturalmente ad escludere dalle nostre considerazioni quei massimi o minimi che possono corrispondere a punti nei quali tutte o alcune delle derivate parziali del prim'ordine di u fossero infinite o non esistessero affatto; e per questi converrà, caso per caso, fare un esame speciale. E questo esame, pei massimi o minimi che dovessero corrispondere a valori infiniti di alcune o di tutte le derivate parziali del prim'ordine di u, nel caso sempre che le funzioni $L_1, L_2,\ldots, L_{m+1}$ debbano esser finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, si ridurrà evidentemente all'esame delle soluzioni che potessero aversi dalla equazione $U = 0$.

256. — Notiamo in particolare che nel caso in cui, non essendovi le funzioni ausiliarie $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots, x_{n+m}$, le equazioni (1) si riducono all'unica

$$
L(x_1, x_2,\ldots, x_n, u) = 0
$$

che serve a definire la funzione u, allora la equazione differenziale cui essa dà luogo

$$
\frac{\partial L}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial L}{\partial u}du = 0
$$

corrisponde subito alla equazione (3); e quindi le equazioni (4) del massimo e del minimo si riducono allora alle seguenti

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial x_1}}{\frac{\partial L}{\partial u}}=0,\quad \frac{\frac{\partial L}{\partial x_2}}{\frac{\partial L}{\partial u}}=0\ ,\ldots,\ \frac{\frac{\partial L}{\partial x_n}}{\frac{\partial L}{\partial u}}=0\,,$$

che propriamente, quando si abbiano ancora le limitazioni che abbiamo poste in principio del paragrafo precedente, potranno venire sostituite dalle altre $\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$,..., $\frac{\partial L}{\partial x_n}=0$, giacchè allora vengono escluse quelle soluzioni che rendessero $\frac{\partial L}{\partial u}=\pm\infty$.

Nel caso attuale poi bisogna avere speciale riguardo a quei sistemi di valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e corrispondentemente di u che oltre ad annullare $\frac{\partial L}{\partial x_1}$, $\frac{\partial L}{\partial x_2}$,..., $\frac{\partial L}{\partial x_n}$ annullassero anche $\frac{\partial L}{\partial u}$.

Similmente, quando si vogliono considerare anche quei massimi o minimi che corrispondessero a valori infiniti di tutte o di alcune delle derivate parziali del prim'ordine di u, dovrebbero esaminarsi anche i valori che annullassero $\frac{\partial L}{\partial u}$ senza annullare tutte le derivate $\frac{\partial L}{\partial x_1}$, $\frac{\partial L}{\partial x_2}$,..., $\frac{\partial L}{\partial x_n}$, perchè essi potrebbero appunto corrispondere ad alcuni di questi massimi o minimi. Il più spesso però i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ che annullano $\frac{\partial L}{\partial u}$ corrispondono anche a qualche altra singolarità di u.

257. – Nel caso più particolare poi in cui si ha una equazione a due sole variabili $f(x, y)=0$, per modo che y viene ad essere una funzione di una sola variabile x definita da questa equazione, le equazioni del massimo e del minimo di y, quando le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ non possano essere infinite, si ridurranno alla unica $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ che unita alla equazione data $f(x, y)=0$ determinerà i valori di x e y che soli possono corrispondere a quelli fra i massimi e minimi di y pei quali le derivate parziali di $f(x, y)$ e le derivate di y sono finite e continue; e in questo caso bisognerà avere speciale riguardo ai valori di x e y che insieme a $\frac{\partial f}{\partial x}$ annullassero $\frac{\partial f}{\partial y}$. Si dovranno poi cercare anche i valori di x e y che annullano $\frac{\partial f}{\partial y}$ senza annullare $\frac{\partial f}{\partial x}$ se si vorranno trovare

anche tutti quei massimi e minimi che corrispondessero a valori infiniti della derivata y' di y.

E limitandoci al caso dei punti (x, y) pei quali $\frac{\partial f}{\partial y}$, oltre ad essere determinata e finita, sia anche diversa da zero, i quali punti (x, y) per potere corrispondere a massimi o a minimi dovranno, come abbiamo detto, essere fra quelli pei quali si ha $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, gioverà ricordare che secondo la teorica delle funzioni implicite (§ 152 [pag. 207 e seg.]) i differenziali d^2y, d^3y,..., di ordine superiore di y vengono determinati dalle formole $d^2f=0$, $d^3f=0$,..., che possono scriversi sotto la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0\,,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^3+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)d^2y+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E osservando che la prima di queste formole quando, per essere $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, si ha $dy=0$ o $y'=0$, si riduce subito all'altra $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$; e ricordando il teorema del § 239 [pag. 328], si vedrà subito che, se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ non è zero, per decidere se il punto considerato (x, y) è un punto di massimo o di minimo converrà esaminare il segno del rapporto $\dfrac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$; e se questo rapporto sarà positivo avremo un massimo, mentre se sarà negativo avremo un minimo.

Quando poi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sia zero, allora venendo ad essere anche $d^2y=0$ o $y''=0$, la seconda delle formole precedenti si ridurrà all'altra $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0$, e quindi per lo stesso teorema del § 239 non avremo nè massimo nè minimo se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ sarà diverso da zero, mentre se $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ sarà zero, venendo allora ad essere anche $d^3y=0$ o $y'''=0$, si passerà alla formola che dà i differenziali quarti la quale si ridurrà alla seguente $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}dx^4+\frac{\partial f}{\partial y}d^4y=0$ perfettamente simile a quella che si aveva nel caso dei differenziali secondi, e dalla quale risulterà subito che quando $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ non sia zero avremo un massimo o un minimo secondochè il rapporto $\frac{\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ sarà positivo o negativo; e quando $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ sia zero bisognerà passare a considerare la derivata del quint'ordine.

E così continuando, si giungerà a un teorema del tutto simile a quello ricordato sopra del § 239 [pag. 328] relativo alle funzioni esplicite y di x, col sostituirvi alla considerazione delle derivate successive $y', y'', y''', y^{\text{iv}}, \ldots$ di y quella delle corrispondenti $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \ldots$; per concluderne che *quando la prima di queste derivate che sarà diversa da zero sarà di ordine dispari non avremo nè massimo nè minimo, mentre se sarà di ordine pari avremo un massimo quando il rapporto di questa derivata a* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sarà positivo, e avremo un minimo quando questo rapporto sarà negativo. Ciò sempre nel supposto che la derivata* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *nel punto corrispondente* (x, y) *sia determinata finita e diversa da zero.*

258. — Tornando ora al caso generale in cui si hanno le equazioni (1), avvertiamo che ordinariamente la eliminazione delle quantità $dx_{n+1}, dx_{n+2}, \ldots, dx_{n+m}$ fra le equazioni (2) si fa col metodo dei moltiplicatori indeterminati $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$.

Si moltiplicano cioè le stesse equazioni (2) per queste quantità indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ che si determinano poi in modo che dalla somma delle equazioni che così si ottengono vengano a sparire tutti i termini che contengono $dx_{n+1}, dx_{n+2}, \ldots, dx_{n+m}$, con che allora si giunge evidentemente alla equazione (3).

Le equazioni alle quali devono soddisfare queste quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ vengono ad essere così le seguenti

$$(5)\qquad \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+1}} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_{n+1}} = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+2}} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+2}} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_{n+2}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+m}} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_{n+m}} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_{n+m}} = 0, \end{cases}$$

e queste propriamente non determinano completamente le quantità stesse

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$, ma soltanto i loro rapporti ad una di esse che può del resto esser presa eguale ad uno; e dietro ciò, quando si escludano, o almeno si considerino a parte i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, u$ che rendessero infinita la espressione

$$(6)\qquad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial u} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial u},$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ devono avere i valori ora indicati, le equazioni dei massimi e dei minimi di u verranno ad essere le seguenti

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_1} = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

che sono del tutto simili alle precedenti (5); talchè evidentemente noi possiamo dire che quando si considerino tutte insieme le equazioni (1) (5), e (7) si ha un sistema di $2m+n+1$ equazioni che possono riguardarsi come quelle che risolvono gli attuali problemi di massimi e minimi, inquantochè determinano i rapporti di m delle quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ alla $(m+1)^a$, e i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, u$ che soli possono corrispondere ai massimi e ai minimi.

Si deve però tener mente che qui vengono lasciate da parte quelle soluzioni (che talvolta potrebbero esservi) che rendessero infinita la somma (6) cioè $\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial u} + \ldots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial u}$; come si deve avere speciale riguardo a quelle soluzioni delle equazioni (5) e (7) che annullassero anche la stessa espressione (6), e a quelle che annullassero o rendessero infiniti alcuni dei moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$, perchè evidentemente l'essere zero la somma più volte indicata potrebbe far sì che non si avesse più $du = 0$, e l'essere zero o infiniti alcuni dei moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ renderebbe privo di rigore il processo di eliminazione tenuto.

Però quando i valori che si hanno dalle (5) per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ o pei loro rapporti a uno di essi non possano essere infiniti, se vi saranno ancora tutte le limitazioni che abbiamo posto in principio del § 255 [pag. 357] è evidente che non vi potranno esser soluzioni che rendano infinita la espressione (6), talchè di questo allora non vi sarà da occuparsene.

Aggiungiamo che nei casi speciali possono presentarsi alcune impossibilità o incompatibilità, e ciò allora deve attribuirsi alla mancanza dei massimi o minimi che si cercano o a qualche singolarità della funzione u o delle altre $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Quando però le condizioni sono relative a un campo C_1 nel quale, oltre essere finite e continue le derivate parziali di prim'ordine di $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$ come si suppose in principio del ricordato § 255, è anche differente da zero il determinante funzionale D di queste funzioni relativo alle quantità $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}, u$, allora dietro quanto si dimostrò in generale trattando delle funzioni implicite, le incompatibilità che si presentassero debbono soltanto attribuirsi alla mancanza dei massimi e minimi cercati.

259. — Fermandoci ancora sul processo che ora abbiamo dato per trovare le equazioni (5) e (7) che insieme alle (1) servono a determinare quei massimi e minimi della solita funzione u (se pure esistono) pei quali la somma (6) non è infinita, merita di esser notato che i primi membri delle equazioni (5) e (7) non sono altro che le derivate parziali rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ della somma $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_{m+1} L_{m+1}$, e quindi quando si volessero trovare i massimi o i minimi di una funzione u delle $n+m$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ considerate come indipendenti, nella ipotesi che questa funzione u venisse definita dalla equazione unica

$$(8) \qquad \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_{m+1} L_{m+1} = 0 ,$$

allora per quanto si disse nel § 256 [pag. 359] si giungerebbe ancora alle equazioni (5) e (7) che insieme alla (8) servirebbero a determinare i valori di $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}, u$.

Anche in questo caso poi bisognerebbe avere speciale riguardo a quei sistemi di valori che annullassero la somma $\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial u} + \dots + \lambda_{m+1} \frac{\partial L_{m+1}}{\partial u}$, e, quando non si avessero ancora le limitazioni poste in principio del § 255 [pag. 357] rispetto alle funzioni $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$, bisognerebbe anche escludere o considerare a parte quei sistemi di valori di $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}, u$ che rendessero infinita la stessa espressione; talche evidentemente noi possiamo dire che *il problema della ricerca dei massimi e minimi di una funzione u di n variabili indipendenti definita da un sistema di $m+1$ equazioni* (1) *nelle quali oltre alla funzione u figurano altre m funzioni ausiliarie, conduce alle stesse equazioni che si hanno nel caso di una funzione u di $n+m$ variabili indipendenti definita da una unica equazione* (8). La sola differenza sta in ciò che nel secondo caso, quello cioè della unica equazione (8), le quantità

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ figurano come date avanti a piacere, mentre nel primo, avendo m equazioni di più, restano determinati i rapporti di m di queste quantità alla $(m+1)^a$ e debbono poi essere esaminati in modo speciale quei sistemi di valori che annullassero o rendessero infinite alcune delle quantità stesse.

Questa osservazione che collega così due problemi distinti di massimi o minimi è molto importante per le applicazioni, perchè per essa *il caso di un sistema di più equazioni* (1) *si riporta sempre a quello di una sola equazione* (8), *e si tratta al modo stesso, salvo a determinare poi i rapporti delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ a una di esse nel modo indicato.*

260. — Vogliamo in ultimo considerare anche il caso delle funzioni esplicite $f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ di $n+m$ variabili delle quali però n soltanto possono riguardarsi come indipendenti, perchè fra esse sussistono m equazioni di condizione

$$(9) \qquad \begin{cases} L_1(x_1, x_2, \dots, x_n^*, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 , \\ L_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_m(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 , \end{cases}$$

che definiscono m delle stesse variabili come funzioni delle rimanenti, e colle solite condizioni che le funzioni così definite siano finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine.

Questo caso, che è quello dei *massimi e minimi relativi*, rientra subito nel precedente, giacchè chiamando u la funzione data, alle m equazioni (9) si può aggiungere l'altra

$$(10) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) - u = 0 ,$$

e allora si forma un sistema di equazioni che viene ad essere un caso particolare del sistema (1).

Servendoci dunque dei moltiplicatori indeterminati $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$, col prendere $\lambda_{m+1} = 1$, e considerando la equazione precedente (10) come l'ultima del sistema di $m+1$ equazioni ora indicato, noi possiamo dire che le equazioni del massimo o del minimo nel caso attuale sono quelle stesse che si hanno col metodo del § 256 [pag. 359] per la funzione u definita dalla unica equazione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) - u + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_m L_m = 0 ;$$

e poichè queste equazioni hanno tutte la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_r}+\lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x_r}+\lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x_r}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial L_m}{\partial x_r}=0,$$

dove $r=1,2,\ldots,n+m$, e combinano naturalmente con quelle che si hanno per la funzione u di $n+m$ variabili indipendenti per la quale si ha

$$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})+\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2+\ldots+\lambda_m L_m,$$

noi possiamo dire evidentemente che *le equazioni dei massimi e minimi di una funzione* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})$, *quando si hanno m equazioni di condizione* $L_1=0$, $L_2=0,\ldots,L_m=0$ *che determinano nel solito modo m delle variabili in funzione delle altre, si possono anche ottenere considerando nella funzione data f tutte le variabili come indipendenti, purchè a questa funzione f si sostituisca l'altra* $f+\lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2+\ldots+\lambda_m L_m$, *dove le* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ *sono quantità che restano poi determinate dalle equazioni di condizione che si trovano, e alle quali devono poi naturalmente essere unite le equazioni di condizione date* $L_1=0$, $L_2=0,\ldots,L_m=0$.

Anche per questo caso poi converrà avere speciale riguardo a quei sistemi di valori speciali di $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ che annullassero o rendessero infiniti alcuni dei moltiplicatori $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

261. — Diamo ora alcuni esempi della teoria che precede.

1.° Si vogliano trovare i valori di x che rendono massima o minima una delle due funzioni di y definite dalla equazione

$$f(x,y)=\operatorname{sen} x+y\cos x+y^2=0, \tag{11}$$

in un intervallo nel quale queste funzioni non hanno singolarità.

Si osserverà perciò che per questa funzione $f(x,y)$ si hanno le due $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-y\operatorname{sen} x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos x+2y$, e quindi pei massimi e minimi che noi cerchiamo dovremo avere $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-y\operatorname{sen} x=0$, o $y=\cot x$ insieme a $f(x,y)=0$.

Pei valori di x dunque che soli possono corrispondere a massimi e a minimi (quando sono esclusi i punti che dànno $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ pei quali le derivate delle funzioni y verrebbero infinite) dovremo avere $\operatorname{sen} x+\cot x\cos x+\cot^2 x=0$, ovvero $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}+1=0$, o anche $\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x-1=0$; e quindi per gli stessi valori di x, che evidentemente corrispondono ad archi che terminano nel terzo

o nel quarto quadrante perchè $\operatorname{sen} x$ deve essere negativo sarà

$$\operatorname{sen} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{e} \qquad \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}-1},$$

onde

$$y=\cot x=\mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}=-\frac{1}{\cos x};$$

e ora, osservando che $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos x+2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\operatorname{sen} x-y\cos x$, e che a causa della (11) e del valore trovato di y si ha $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos x-\frac{2}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-2}{\cos x}=-\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\operatorname{sen} x-y\cos x=y^2$, per quanto si disse al § 257 [pag. 360 e seg.] si vede subito che pei valori di x che danno $\operatorname{sen} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e che corrispondono a archi di circolo che terminano nel terzo quadrante, la funzione y, che per gl'indicati valori di x si riduce a $\cot x$, ha sempre dei massimi, mentre pei valori di x che corrispondono ad archi che terminano nel quarto quadrante la funzione stessa ha invece dei minimi.

È da notare che le due funzioni y definite dalla (11) sono le seguenti

$$y=\frac{-\cos x+\sqrt{\cos^2 x-4\operatorname{sen} x}}{2}, \qquad y=\frac{-\cos x-\sqrt{\cos^2 x-4\operatorname{sen} x}}{2},$$

dove il radicale può intendersi preso sempre positivamente; e si riscontra subito che ambedue queste funzioni divengono massime e minime nei punti x che abbiamo trovato sopra.

Esse poi hanno altri massimi e minimi, essendo però massimi per l'una e minimi per l'altra; e questi corrispondono ai valori x che riducono infinite e indeterminate di segno le derivate delle due funzioni y. — Questi valori si trovano esprimendo che $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e non sono altro che quelli che soddisfano alla equazione $\cos^2 x-4\operatorname{sen} x=0$, talchè essi riducono eguali i valori delle due funzioni y.

2.° Vogliasi il massimo o il minimo di una funzione u di x definita insieme ad y dalle due equazioni

$$x^2+y^2+u^2=1, \qquad x+y+u=1, \tag{12}$$

quando si resta in un intervallo nel quale le derivate sono sempre finite e continue.

Secondo quanto si disse in generale, le equazioni del massimo o del minimo si otterranno subito introducendo una indeterminata, che per comodo indicheremo con 2λ, e cercando le equazioni corrispondenti al massimo o al minimo della funzione u definita dalla equazione

$$x^2+y^2+u^2-1+2\lambda(x+y+u-1)=0,$$

come se x e y fossero variabili indipendenti; dunque le equazioni cercate saranno le due

$$(13) \qquad x+\lambda=0, \qquad y+\lambda=0,$$

e queste, unite alle due equazioni date determineranno i valori di x, y, u che possono corrispondere a un massimo o a un minimo di u, e determineranno pure la quantità ausiliaria λ.

Ora le equazioni (13) dànno $y=x$, $\lambda=-x$, e sostituendo nelle (12) si trovano le due $u=1-2x$, $6x^2-4x=0$, talchè si hanno i due sistemi di valori $(x=0\,, y=0\,, u=1)$, $\left(x=\frac{2}{3}\,, y=\frac{2}{3}\,, u=-\frac{1}{3}\right)$ che soli possono corrispondere ai massimi o ai minimi di u che noi cerchiamo.

Il sistema $(x=0\,, y=0\,, u=1)$ corrisponde evidentemente a un massimo perchè u non può in valore assoluto superare l'unità.

Osservando poi che le equazioni derivate delle (12) sono le seguenti

$$\begin{cases} x+yy'+uu'=0\,, \\ 1+y'^2+yy''+u'^2+uu''=0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+y'+u'=0\,, \\ y''+u''=0\,, \end{cases}$$

le quali per $x=0$, $y=0$, $u=1$, $u'=0$ dànno $y'=-1$, $u''=-2$, mentre per $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $u=-\frac{1}{3}$, $u'=0$ dànno invece $y'=-1$, $u''=2$, si riscontra di nuovo che la prima soluzione corrisponde a un massimo, e la seconda corrisponde a un minimo.

Si può notare che nel caso di $x=0$, $y=0$, $u=1$ viene ad essere $\lambda=0$, ma ciò non ha ora alcun inconveniente perchè il determinante funzionale dei primi membri delle due equazioni date (12) relativo ad y e ad u nel punto $(x=0\,, y=0\,, u=1)$ viene differente da zero, e le equazioni derivate vengono soddisfatte da $u'=0$, ecc.

3.° Si voglia il triangolo massimo fra tutti quelli che hanno lo stesso perimetro $2\mathrm{S}$.

Chiamiamo perciò x, y, z i tre lati ignoti del triangolo che si cerca. Avremo, $2\mathrm{S}=x+y+z$, talchè ricordando che se u è l'area di questo triangolo si ha

$u=\sqrt{\mathrm{S}(\mathrm{S}-x)(\mathrm{S}-y)(\mathrm{S}-z)}$, si vede che saremo nel caso in cui si deve render massima una funzione delle tre variabili x, y, z quando fra esse sussiste l'equazione di condizione $x+y+z-2\mathrm{S}=0$, e il problema sarà un problema di massimi relativi.

Seguendo sempre il processo indicato nel paragrafo precedente, le equazioni del massimo si troveranno dunque scrivendo quelle relative alla funzione

$\sqrt{\mathrm{S}(\mathrm{S}-x)(\mathrm{S}-y)(\mathrm{S}-z)}+\frac{\lambda}{2}(2\mathrm{S}-x-y-z)$ come se x, y, z fossero variabili indipendenti, e λ essendo una quantità da determinarsi; dunque queste equazioni saranno le seguenti

$$\frac{\sqrt{\mathrm{S}(\mathrm{S}-y)(\mathrm{S}-z)}}{\sqrt{\mathrm{S}-x}}=\frac{\sqrt{\mathrm{S}(\mathrm{S}-x)(\mathrm{S}-z)}}{\sqrt{\mathrm{S}-y}}=\frac{\sqrt{\mathrm{S}(\mathrm{S}-x)(\mathrm{S}-y)}}{\sqrt{\mathrm{S}-z}}=\lambda,$$

e quindi, escludendo i casi pei quali uno dei tre lati x, y, z sia uguale ad S che porterebbero che fosse uguale ad S anche la somma degli altri due lati e corrisponderebbero ad un minimo $u=0$, si avrà $\mathrm{S}-x=\mathrm{S}-y=\mathrm{S}-z$, o $x=y=z=\frac{2\mathrm{S}}{3}$, talchè si può subito affermare che il triangolo cercato è il triangolo equilatero, essendo evidentemente questa l'unica soluzione di cui ora sia il caso di occuparci.

4.° Vogliasi scomporre un numero N in tre parti x, y, z tali che il prodotto $x^m y^n z^p$ sia un massimo.

La funzione da rendersi minima sarà $x^m y^n z^p$ colla condizione $x+y+z=\mathrm{N}$, o $x+y+z-\mathrm{N}=0$, e il problema sarà ancora un problema di massimi relativi; talchè introducendo al solito una quantità indeterminata λ, le equazioni del massimo e del minimo verranno quelle stesse che si hanno per la funzione $x^m y^n z^p+\lambda(x+y+z-\mathrm{N})$ nell'ipotesi di x, y, z variabili indipendenti, e quindi esse si ridurranno alle tre seguenti

$$mx^{m-1}y^n z^p+\lambda=0\,, \quad nx^m y^{n-1}z^p+\lambda=0\,, \quad px^m y^n z^{p-1}+\lambda=0\,,$$

alle quali deve unirsi anche l'altra $x+y+z=\mathrm{N}$.

Da queste si deduce subito che $\frac{\lambda x}{m}=\frac{\lambda y}{n}=\frac{\lambda z}{p}=\frac{\lambda(x+y+z)}{m+n+p}=\frac{\lambda\mathrm{N}}{m+n+p}$, e si conclude quindi che deve aversi

$$x=\frac{m\mathrm{N}}{m+n+p}\,, \quad y=\frac{n\mathrm{N}}{m+n+p}\,, \quad z=\frac{p\mathrm{N}}{m+n+p}\,,$$

non potendo essere $\lambda = 0$ senza che una delle quantità x, y, z sia zero, ciò che corrisponderebbe a un minimo.

Trovata ora questa soluzione, non vi ha evidentemente bisogno di alcuna verificazione per esser sicuri che essa corrisponde al massimo cercato.

È da notare che nel caso particolare del prodotto xyz, essendo $m = n = p = 1$, si ha $x = y = z = \frac{N}{3}$.

5.° Si voglia il minimo o il massimo di $x+y+z$, quando fra x, y, z deve sussistere la relazione

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, \tag{14}$$

dove a, b, c sono tre costanti positive.

Introducendo ancora la solita indeterminata λ, le equazioni del massimo e del minimo verranno ad essere quelle stesse che si hanno per la funzione $x+y+z+\lambda\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1\right)$ quando x, y, z sono variabili indipendenti, e quindi saranno le seguenti $1 - \lambda\frac{a}{x^2} = 0, 1 - \lambda\frac{b}{y^2} = 0, 1 - \lambda\frac{c}{z^2} = 0$, alle quali deve unirsi sempre la equazione (14).

Da ciò si deduce subito che

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{y^2} = \frac{c}{z^2}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\sqrt{b}}{y} = \frac{\sqrt{c}}{z}, \tag{15}$$

fissando senz'altro di prendere i radicali positivamente; e ora sostituendo nella (14) si troverà $\frac{\sqrt{a}}{x}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) = 1$, e quindi avremo

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{y}{\sqrt{b}} = \frac{z}{\sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \tag{16}$$

per le equazioni che determinano subito i valori di x, y, z che possono corrispondere al massimo o al minimo, e questi valori saranno tutti positivi.

Il valore di λ poi viene ad essere $\lambda = x + y + z = \frac{x^2}{a} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$ e non presenta singolarità.

Per decidere ora se i valori che così abbiamo trovati per x, y, z corrispondono a un massimo o a un minimo di $x+y+z$, osserveremo che, ponendo $u = x + y + z$ e considerando x e y come indipendenti, si ha $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, mentre dalle (14) si hanno le equazioni a derivate parziali in z

$$\frac{c}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{x^2}, \quad \frac{c}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{y^2}$$

$$-\frac{2c}{z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{c}{z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2a}{x^3}, \quad -\frac{2c}{z^3}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{c}{z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad -\frac{2c}{z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{c}{z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2b}{y^3},$$

e queste per le (15) ci danno le altre $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, e

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{4}{xy} + \frac{4}{z}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),$$

le quali a causa delle (16) ci mostrano che quando nelle (16) stesse i radicali sono presi positivamente, si ha $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$, e quindi i valori di x, y e z dati dalle (16) corrispondono a un minimo della nostra funzione u o $x + y + z$.

6.° Dato un punto (a, b, c) nello spazio si vogliano trovare i punti (x, y, z) di una superficie $f(x, y, z) = 0$ la cui distanza dal punto (a, b, c), o il quadrato u di questa distanza, è massima o minima.

Avendosi $u = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, e dovendo le x, y, z soddisfare alla equazione $f(x, y, z) = 0$, saremo ancora in un problema di massimi o minimi relativi, e quindi le equazioni corrispondenti saranno quelle dei massimi e minimi della funzione $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2\lambda f(x, y, z)$, dove λ è la solita quantità indeterminata e x, y, z sono riguardate come variabili indipendenti.

Queste equazioni saranno dunque le seguenti

$$x - a + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y - b + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad z - c + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

e quindi i valori cercati di x, y, z saranno fra quelli che oltre a soddisfare alla equazione $f(x, y, z) = 0$ soddisfano alle altre

$$\frac{x-a}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y-b}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z-c}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

a meno che non siano $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$; e questo, per quanto vedremo in seguito, mostra che i punti cercati non potranno essere che i piedi delle rette condotte normalmente alla superficie $f(x, y, z) = 0$ dal punto dato (a, b, c).

Considerando poi una delle tre variabili x, y, z come funzione delle altre due, ad es. z come funzione di x e y quando non sia $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, la u diviene una funzione di queste variabili x e y, e applicando i criterî generali del § 251 [pag. 351] con valersi della teoria delle funzioni implicite, si potrà riconoscere se i piedi delle dette normali corrispondono a massimi o a minimi, o se non corrispondono nè agli uni nè agli altri.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

XVIII.

Generalità sulle curve (*)

262. — Si chiama *linea* in generale l'insieme dei punti nel piano o nello spazio la posizione dei quali viene determinata con date leggi, quando queste leggi sono tali che per esse i singoli punti della linea vengano a corrispondere ai valori di una unica variabile reale che percorre un dato intervallo finito o infinito passando almeno una volta per ogni punto di questo.

Con questa definizione generale, le coordinate di ogni punto della linea verranno determinate come funzioni di una variabile reale ω; e così, nel caso ad esempio delle linee piane, le coordinate dei punti delle quali supporremo il più spesso che siano quelle cartesiane (ortogonali o oblique) x e y, potremo scrivere per ogni punto di esse $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$; e quando la variabile ω sia la stessa ascissa x, alle equazioni corrispondenti $x=\omega$, $y=y(\omega)$ potrà essere sostituita la unica $y=y(x)$.

Queste funzioni poi, anzichè essere date esplicitamente, potranno essere definite da un sistema di due equazioni $\varphi(x, y, \omega)=0$, $\psi(x, y, \omega)=0$, che si ridurranno a una sola $F(x, y)=0$ quando, essendo per es. x la variabile indipendente, una di esse si riduca alla $x-\omega=0$.

La linea si dirà continua in un punto a distanza finita corrispondente al valore ω_0 della variabile indipendente ω, quando le funzioni di ω che rappresentano le coordinate saranno finite e continue in quel punto ω_0, e i nostri studî si riferiranno più specialmente alle linee continue.

(*) Questo Capitolo e il seguente corrispondono all'unico Cap. XVIII delle lezioni del 1877, ma ne diversificano alquanto allo scopo di ottenere maggiore chiarezza e precisione. Così qualche differenza qua e là si trova anche nei capitoli seguenti di questo volume, riservando però ancora alle note le modificazioni più sostanziali, o facendone cenno espressamente quando vengano incluse nel testo.

263. — Con questa definizione, fissata la variabile indipendente x o ω, le funzioni y, o x e y che corrispondono alle coordinate dei singoli punti della curva potrebbero essere a più valori, potendo ad uno stesso valore della variabile indipendente corrispondere più punti della curva; volendo dunque che questo non accada e che le funzioni da considerarsi siano sempre a un sol valore bisognerà che la linea quando occorra possa essere spezzata in tratti, anche piccolissimi, pei quali ad ogni valore della variabile indipendente corrisponda un sol punto della curva, e da considerarsi questi tratti separatamente l'uno dall'altro.

Così quando, essendo x la variabile indipendente, la equazione della linea che supporremo continua debba essere la $y=f(x)$, o l'altra $F(x, y)=0$, i tratti nei quali la linea stessa verrà a spezzarsi saranno quelli corrispondenti agli intervalli relativi ad x nei punti dei quali la y resta finita continua e ad un sol valore, pure potendo crescere indefinitamente coll'avvicinarsi indefinito di x a valori o punti speciali, o saranno quelli corrispondenti agli intervalli relativi ad x pei quali la equazione $F(x, y)=0$ definisca una o più funzioni a un sol valore y della x; ciascuna di queste funzioni separatamente corrispondendo ai singoli tratti.

E quando la linea sia definita per mezzo di due equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, i tratti da considerarsi separatamente saranno quelli pei quali x e y saranno funzioni finite, continue e ad un sol valore di ω, pure potendo crescere indefinitamente coll'avvicinarsi di ω a valori speciali.

264. — Naturalmente questi spezzamenti della linea in tratti parziali dovranno farsi in un modo o in un altro a seconda della variabile indipendente che sarà scelta; come chiaro ad esempio apparisce quando, essendo l'ascissa x la variabile indipendente, i tratti dovranno naturalmente essere determinati in modo che ciascuno di essi venga incontrato in un sol punto dalle rette parallele all'asse delle y, e varieranno quindi ordinariamente al variare degli assi coordinati. Questi singoli tratti potranno così avere gli estremi anche in punti ordinarii della linea i quali, senza presentare nessuna singolarità rispetto alla linea in sè, figureranno come punti speciali soltanto per ciò che riguarda la funzione $y(x)$ che rappresenterà l'ordinata y, e dipenderanno semplicemente dalla posizione della curva rispetto agli assi coordinati scelti, e specialmente rispetto a quello corrispondente alla variabile che viene scelta come funzione dell'altra.

Così ad esempio quando la curva sia una ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ di semiassi a e b riferita a questi assi, e sia presa x come variabile indipendente, i due tratti di essa da considerarsi separatamente saranno quelli posti l'uno tutto al disopra e l'altro tutto al disotto dell'asse x e terminati ciascuno ai due estremi $x=-a$ e $x=a$ di questo asse che pure sono punti ordinarii della curva, e muteranno quando si prenda invece y per variabile indipendente, o quando si cambino gli assi coordinati.

E quando la curva sia la spirale di Archimede che in coordinate polari ρ, ω ha per equazione $\rho=a\omega$ con a costante e $\omega \geq 0$, e in coordinate cartesiane ortogonali è rappresentata per mezzo della equazione trascendente

$$\sqrt{x^2+y^2}=a \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}, \quad \text{o} \quad y=x \operatorname{tang}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},$$

basta immaginare disegnata la curva per comprendere subito che colle coordinate cartesiane x e y quando è presa x come variabile indipendente bisogna spezzare la curva in infiniti tratti perchè per ogni valore di x la y possa essere a un sol valore.

E precisamente se si osserva che, essendo sempre $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\operatorname{sen}\omega$, per la curva stessa si avrà $x=a\omega\cos\omega$, $y=a\omega\operatorname{sen}\omega$, e negli infiniti punti $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ pei quali si ha $\operatorname{tang}\omega=\frac{1}{\omega}$ la derivata prima di x rispetto ad ω è zero e la seconda è alternativamente negativa e positiva, e quindi questi punti corrispondono successivamente a massimi e a minimi di x rispetto ad ω (§ 239 [pag. 328]), si vede subito che gli infiniti tratti da considerarsi della detta spirale termineranno ai punti corrispondenti a questi successivi valori $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots$ di ω che sono compresi respettivamente fra 0 e π, fra π e 2π, fra 2π e $3\pi, \ldots$ e nei quali la curva, come apparirà subito dalle considerazioni che faremo fra breve, non presenta altra particolarità che quella di avere in essi la tangente perpendicolare all'asse delle x.

Invece quando l'ellisse e la spirale d'Archimede si prendono come determinate respettivamente, l'ellisse per mezzo delle due equazioni $x=a\cos\omega$, $y=b\operatorname{sen}\omega$, e la spirale per mezzo delle due $x=a\omega\cos\omega$, $y=a\omega\operatorname{sen}\omega$, colla introduzione di una nuova variabile indipendente ω (che nel caso dello spirale non sarà altro che l'angolo polare), allora gli spezzamenti di queste curve che erano necessarii colla variabile indipendente x non saranno più necessarii colla nuova variabile.

265. — Pure facendo però, quando occorra, l'indicato spezzamento delle linee in tratti parziali in ciascuno dei quali le funzioni da considerarsi siano sempre finite continue e ad un sol valore, giova osservare che le linee stesse o tratti di linee definite (come pure sempre si usa di fare) in un modo tanto generale, e gli elementi che per esse poi considereremo (tangenti, ecc....) corrispondono a qualche cosa di puramente analitico, piuttosto che a linee o a elementi geometrici propriamente detti.

Di esse infatti potranno sul piano segnarsi effettivamente punti quanti si vogliano, ma non sempre potranno intendersi segnati tratti di esse, anche soltanto piccolissimi, nel senso che ordinariamente si attribuisce alle parole *«tracciare o disegnare una linea o un tratto di linea»*; come ad esempio non si potranno disegnare nell'intorno del punto $x=0$ le linee che per la definizione data si intenderebbero corrispondere alle equazioni $y=x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $y=x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, perchè, sebbene continue nel punto $x=0$, esse in ogni intorno dello stesso punto avrebbero infinite oscillazioni. E ciò che qui accade pel solo punto $x=0$ per altre linee avviene in infiniti punti e anche in ogni punto di un dato intervallo (*).

Segue da ciò che, pure facendo sempre in ciò che segue i nostri studii in modo generale, coll'ammettere cioè che le funzioni che figureranno in ogni studio speciale abbiano (nel senso analitico) quella maggiore generalità che il problema comporterà, quando poi vorremo porci veramente nel campo

(*) Le difficoltà per ciò che ha riguardo alla rappresentazione geometrica delle funzioni si fanno anche maggiori quando le funzioni stesse sono discontinue; e a diminuirle riteniamo che potranno talvolta giovare le osservazioni seguenti.

Considerando una funzione $f(x)$ in un certo intervallo, nel quale ora si ammetterà che possa anche avere infinite discontinuità, e per ogni punto x dello stesso intervallo prendendo un suo intorno *determinato*, per es. a destra, $(x, x+\delta)$, i valori di $f(x)$ avranno in questo intorno un limite inferiore e un limite superiore che ordinariamente varieranno al variare dell'ampiezza dell'intorno stesso.

All'impiccolire di questo intorno questi limiti inferiore e superiore andranno respettivamente crescendo e diminuendo, o rimarranno invariati, e quindi essi tenderanno verso limiti determinati l_x e L_x; e sarà sempre $l_x \leq L_x$, essendo $l_x = L_x = f(x)$ in tutti i punti x di continuità di $f(x)$ a destra.

Similmente gli intorni a sinistra daranno luogo a due numeri determinati l'_x e L'_x che potranno essere diversi dai due l_x e L_x, e pei quali si avrà pure $l'_x \leq L'_x$, con $l'_x = L'_x = f(x)$ in tutti i punti x di continuità di $f(x)$ a sinistra.

Preso in ogni caso il minore $\overline{l}_x$ dei due numeri l_x e l'_x, e il maggiore $\overline{L}_x$ dei due L_x e L'_x, questi limiti $\overline{l}_x$ e $\overline{L}_x$ costituiranno due funzioni bene determinate di x, che potranno anche ridursi ad una sola; e le linee che avranno le equazioni $y=\overline{l}_x$ e $y=\overline{L}_x$, se si ridurranno a una sola — come avverrà sempre quando $f(x)$ è continua in tutto l'intervallo — corrisponderanno precisamente alla linea $y=f(x)$, e altrimenti questa sarà sempre compresa fra quelle.

Ad ogni linea dunque $y=f(x)$ corrisponderà la striscia di piano compresa fra le due $y=\overline{l}_x$ e $y=\overline{L}_x$; e talvolta questa striscia, che potrà anche ridursi alla linea stessa $y=f(x)$ e in ogni modo la comprenderà sempre, o anche l'insieme di queste due linee potranno meglio riguardarsi come rappresentazione geometrica della funzione $f(x)$ quando questa sia discontinua. (V. per altre considerazioni di questo genere F. KLEIN, *Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve* — Mathem. Annalen XXII Band, pag. 249).

geometrico e applicare i risultati a vere linee geometriche quali si presentano nella pratica, allora le funzioni corrispondenti dovranno essere tali che, almeno per piccoli tratti della linea, non solo possa immaginarsi effettivamente il tracciato della linea o del tratto di linea considerato, ma inoltre almeno in generale, cioè esclusi soltanto un numero finito di punti, la linea o tratto di linea corrispondente venga ad avere, in ogni punto, almeno alcuni degli elementi (geometrici) che poi considereremo (tangenti, ecc...).

E allora quando si abbiano queste limitazioni, se M sarà un punto dei tratti continui di linea che considereremo e se questi tratti non saranno rettilinei neppure in piccole porzioni in vicinanza di M, è certo ad es. che *su ogni retta determinata* uscente da M da una parte, per es. a destra, dovremo finire per trovare intorni, siano pure piccolissimi e variabili da retta a retta ma finiti, sui quali nessun punto della curva potrà più esservi all'infuori di M, perchè altrimenti in ogni intorno comunque piccolo della retta stessa la curva verrebbe ad avere infiniti punti sulla retta senza coincidere con questa, e quindi farebbe un numero infinito di oscillazioni almeno da una parte di quella retta, nè si potrebbe affatto parlare di disegno o di rappresentazione geometrica vera e propria.

E così in particolare, se avremo le indicate limitazioni, e sarà x o ω la solita variabile indipendente, nei tratti non rettilinei della curva che considereremo le funzioni corrispondenti y o x e y, pei valori di x o di ω in intorni sufficientemente piccoli di un valore speciale x_0 o ω_0 corrispondente a un dato punto M della curva, non riprenderanno mai quello stesso valore che esse hanno in M, perchè altrimenti su una retta uscente dal punto M e parallela all'asse delle x nel primo caso, o per quelle uscenti dallo stesso punto M e parallele a uno o a tutti e due gli assi nel secondo, la curva avrebbe infiniti punti in vicinanza di M senza averceli tutti, e farebbe quindi infinite oscillazioni.

Tutte queste considerazioni si estendono anche alle curve nello spazio, salvo allora a dovere considerare tre coordinate invece di due.

XIX.

Tangente e normale alle curve piane. Asintoti

Tangente e normale.

266. — Premesse queste considerazioni generali, passiamo a fare studii speciali intorno alle curve, incominciando dalle curve piane.

Incominciamo perciò dal dire che chiameremo punti della curva a *destra* di quello corrispondente a un valore x_0 o ω_0 della variabile x o ω i punti corrispondenti a valori di x o di ω maggiori di x_0 o di ω_0, e punti a *sinistra* quelli corrispondenti ai valori di x o di ω minori di x_0 o di ω_0; e allora naturalmente agli estremi dell'intervallo nel quale x o ω si muovono quando questo intervallo è finito non avremo che punti a destra o punti a sinistra in quanto si abbia riguardo ai valori della stessa variabile.

Ma quando la variabile indipendente non sia l'ascissa x ma un'altra quantità ω, e si abbia riguardo alla rappresentazione geometrica potrà anche darsi che gli estremi di ω corrispondano ambedue a uno stesso punto della curva, o uno almeno di essi potrà corrispondere anche a un altro punto della curva; e ciò perchè in un estremo tanto x che y potranno riprendere i valori che avevano nell'altro estremo, o per un altro valore di ω; e quindi allora il punto corrispondente della curva potrà avere ancora punti a destra e punti a sinistra *sulla curva* quando si abbia riguardo al movimento di un punto su di essa.

Chiameremo poi tangente a *destra* della curva in un suo punto M corrispondente al valore x_0 o ω_0 della variabile indipendente la retta limite delle posizioni successive di quelle che riuniscono quel punto ai punti vicini della curva a destra (secante) quando questi si avvicinano indefinitamente al primo, supposto che questa retta limite esista; e chiameremo tangente *a sinistra* la retta analoga limite delle posizioni successive delle secanti a sinistra di M.

E quando la tangente a destra e quella a sinistra del punto M esistano

entrambe e costituiscano una stessa retta, essendo inoltre queste tangenti sul prolungamento l'una dell'altra, questa retta si dirà la *tangente ordinaria* o semplicemente *la tangente* alla curva nel punto M.

Il punto M al quale queste rette corrispondono si dirà il punto di *contatto della tangente a destra* o *di quella a sinistra* respettivamente, o il punto di *contatto* senz'altro quando si tratterà della tangente ordinaria.

Quando una almeno di queste tangenti esista, la retta ad essa perpendicolare condotta pel punto di contatto si dirà respettivamente la *normale* della curva a *destra* o a *sinistra*, o la *normale ordinaria* o semplicemente la *normale*.

Naturalmente agli estremi dell'intervallo nel quale x o ω si muoveranno quando questo intervallo è finito non potremo avere che una tangente e una normale a destra o a sinistra, salva l'osservazione fatta sopra per gli estremi stessi.

267. — Siano ora (x, y) le coordinate cartesiane (ortogonali o oblique(*)) del punto M della curva o tratto di curva che si considera pel quale si vuole condurre la tangente da una delle due parti, per es. a destra, quando esiste.

La equazione di una retta qualsiasi condotta per questo punto M e le cui coordinate correnti siano X e Y sarà della forma $A(X-x)+B(Y-y)=0$, e se $(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)$ saranno le coordinate di un punto M' della curva vicino ad M pel quale la retta dovrà passare per potere essere una secante, avremo $A\Delta x + B\Delta y = 0$, e quindi la equazione della stessa secante si potrà sempre ridurre alla forma $(X-x)\Delta y-(Y-y)\Delta x=0$; e se Δx sarà diverso zero, come avverrà sempre quando sia x la variabile indipendente, e anche quando, essendo ω questa variabile, siano $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ le equazioni della curva e la funzione $x(\omega)$ non riprenda continuamente lo stesso valore nelle vicinanze del punto ω, la equazione della secante potrà scriversi sotto la forma

$$Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x),$$

la quale ci mostra che il suo coefficiente angolare sarà sempre il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ degli accrescimenti di y e di x.

(*) A scanso di equivoci dirò una volta per tutte che le formole che noi diamo in queste applicazioni varranno sempre quando gli assi coordinati x e y saranno ortogonali; e tali saranno anche ordinariamente supposti, dicendolo espressamente o no. Nei casi però nei quali questi assi potranno essere anche obliqui, e che si trovi conveniente di farlo rilevare, come ad es. ora per le equazioni delle tangenti, e più tardi per gli asintoti, per alcune aree, ecc. lo diremo sempre espressamente.

268. — Fermandoci dunque dapprima sul caso in cui la variabile indipendente sia l'ascissa x, osserviamo che se $f(x)$ sarà la funzione che rappresenterà y per ogni valore di x nelle vicinanze del punto che si considera e che si dedurrà dalla equazione della curva data sotto la forma $y=f(x)$ o sotto l'altra $F(x, y)=0$, indicando ora a scanso di equivoci con (x_0, y_0) le coordinate del punto M, e ponendo $\Delta x = h$ con che sarà $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$, avremo sempre $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ciò che mostra che *il coefficiente angolare della secante sarà sempre il rapporto incrementale destro o sinistro di y*; e sarà il destro o il sinistro secondochè il punto M' che si farà muovere sulla curva per venire sempre più verso M è a destra o a sinistra di M, o secondochè per la secante si considera la direzione a destra o quella a sinistra di M.

Segue da ciò che se la secante, condotta per es. a destra di M, col tendere del punto di secanza M' al punto M tenderà verso una posizione limite determinata, che allora sarà la tangente a destra nel punto M, il rapporto incrementale destro $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ per $h=+0$ avrà un limite determinato, finito o infinito, che sarà la derivata di $f(x)$ nel punto x_0 a destra, e sarà il coefficiente angolare della tangente a destra; mentre se la indicata secante col tendere del punto M' ad M o di h a zero per valori positivi varierà senza tendere ad una posizione determinata, allora la tangente a destra non esisterà, e il rapporto incrementale destro $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ non avrà un limite determinato per $h=+0$, e quindi tenderà a finire per oscillare continuamente fra due numeri diversi fra loro finiti o infiniti, dei quali si può dimostrare la esistenza (*); nel senso che, se λ_{x_0} e Λ_{x_0} sono questi numeri limiti essendo

per es. $\lambda_{x_0} \leq \Lambda_{x_0}$, il rapporto incrementale destro $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ all'impiccolire indefinito di h finirà per restare sempre compreso fra $\lambda_{x_0}-\varepsilon$ e $\Lambda_{x_0}+\varepsilon$, essendo ε un numero positivo piccolo a piacere, e passerà continuamente per qualsiasi numero compreso fra gli stessi limiti λ_{x_0} e Λ_{x_0}.

E questi numeri limiti λ_{x_0} e Λ_{x_0} corrisponderanno ai coefficienti angolari delle due direzioni entro le quali (nel senso ora indicato) finirà per muoversi continuamente la nostra secante, intendendo con ciò che nel caso particolare di $\lambda_{x_0}=-\infty$ e $\Lambda_{x_0}=+\infty$ la secante debba prendere nel suo movimento tutte le direzioni possibili a destra della parallela all'asse delle y condotta per M.

Viceversa in seguito a questo, e anche con considerazioni dirette, si vede subito che se, essendo ancora $f(x)$ la funzione corrispondente all'ordinata y di una curva, questa funzione nel punto x_0 avrà la derivata a destra determinata (finita o infinita), allora evidentemente esisterà una posizione limite per la nostra secante, e la curva nel punto $M(x_0, y_0)$ avrà una tangente a destra determinata il cui coefficiente angolare sarà uguale alla derivata a destra ora indicata; mentre se mancherà la derivata a destra di $f(x)$ nel punto x_0 mancherà pure la tangente a destra della curva nel punto stesso $M(x_0, y_0)$, e la solita secante tenderà a finire per oscillare fra due direzioni limiti i coefficienti angolari delle quali saranno i numeri limiti λ_{x_0} e Λ_{x_0} dei quali parlammo sopra, cioè i numeri fra i quali tende a finire per oscillare il rapporto incrementale destro di $f(x)$ relativo al punto x_0.

269. — Lo stesso può dirsi evidentemente per la secante e per la tangente a sinistra di M, e pel rapporto incrementale sinistro; e così evidentemente, quando si tratti di punti M della curva pei quali esistono intorni a destra e a sinistra, cioè punti *interni* al tratto di curva che si considera, noi possiamo affermare che se esisterà una stessa tangente della curva sì a destra che a sinistra di un suo punto M, e la sua parte a destra sarà il prolungamento di quella a sinistra, cioè se esisterà la tangente *ordinaria*, la funzione $f(x)$ che rappresenterà l'ordinata avrà la derivata ordinaria determinata (finita cioè o infinita e determinata di segno) nel punto x_0, e questa derivata sarà il coefficiente angolare della tangente.

E viceversa se la funzione $f(x)$ nel punto x_0 avrà la derivata ordinaria determinata, la curva nel punto corrispondente M avrà tanto la tangente a destra che quella a sinistra, e l'una sarà il prolungamento dell'altra in modo da costituire una unica retta, cioè avrà la tangente ordinaria, e il coefficiente angolare di questa tangente sarà ancora la derivata.

Se poi, sempre pei punti *interni* $M(x_0, y_0)$ della curva, esisterà una tan-

(*) L'esistenza e le principali fra le numerose particolarità dei numeri limiti λ_x e Λ_x fra i quali tendono a finire per muoversi continuamente i rapporti incrementali destri $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ all'avvicinarsi indefinito di h a zero per valori positivi, e così quelle degli altri due numeri limiti λ'_x e Λ'_x corrispondenti ai rapporti incrementali sinistri, trovansi trattate diffusamente in varii punti dei due ultimi capitoli dei miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, Nistri 1878) dal § 136 in poi (pag. 178 e seg.).

A tali proprietà di questi numeri corrispondono naturalmente altrettante proprietà delle curve considerate in generale.

I detti numeri λ_x e Λ_x e i due λ'_x e Λ'_x furono in quei *Fondamenti ecc.* designati coi nomi di *estremi oscillatorii destri* e *estremi oscillatorii sinistri* respettivamente. Dopo sono stati designati da altri anche coi nomi di *numeri derivati destri*, e *numeri derivati sinistri*.

gente tanto a destra che a sinistra, ma queste tangenti costituiranno *due* rette *distinte*, la funzione $f(x)$ che rappresenta l'ordinata y della curva nel punto x_0 avrà tanto la derivata a destra che quella a sinistra, ma queste derivate saranno distinte fra loro e quindi non esisterà la derivata ordinaria, e viceversa; e nel caso in cui la tangente a destra e quella a sinistra facciano una stessa retta ma in modo che le due direzioni debbano riguardarsi come coincidenti e non come il prolungamento l'una dell'altra, venendo così ad essere come un caso limite di quello delle due tangenti a destra e a sinistra distinte, allora come la tangente ordinaria (nel senso che non se ne ha che una a destra e a sinistra) potrà essere riguardata come esistente, essendo però ridotta in certo modo a metà e parallela all'asse delle y (*), così la derivata di $f(x)$ nel punto x_0 potrà riguardarsi come esistente ma essendo infinita e indeterminata di segno, e viceversa.

270. — Quando poi avvenisse che nel punto $M(x_0, y_0)$, che ora ammetteremo che possa anche essere un estremo del tratto che si considera, la tangente mancasse assolutamente almeno da una parte, per es. a destra, perchè le secanti condotte per M non tendessero ad una posizione determinata, allora, come abbiamo visto, il rapporto incrementale destro tenderebbe a finire per oscillare indefinitamente fra i due numeri limiti diversi fra loro λ_{x_0} e Λ_{x_0}, e viceversa.

In questo caso però condotta per M una retta qualunque r a destra compresa fra le due di coefficienti angolari λ_{x_0} e Λ_{x_0} e diversa da queste, è chiaro che se k sarà il coefficiente angolare di quella retta r, esso sarà compreso fra λ_{x_0} e Λ_{x_0}, e il rapporto incrementale destro $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ che varia con continuità al variare di h per valori diversi da zero e positivi, al tendere di h a zero passerà infinite volte per k, e quindi la curva in ogni intorno comunque piccolo di M avrà punti sulla retta r e sopra e sotto di essa, e farà infinite oscillazioni; talchè tali punti non potranno mai presentarsi su quelle curve o fra i punti di quelle curve ai quali già nel § 265 [pag. 377 e seg.] abbiamo detto che dovremo limitare le nostre considerazioni quando vorremo tenerci nel vero campo geometrico e nella pratica. E così in questi casi delle vere applicazioni geometriche, la funzione $f(x)$ che rappresenterà l'ordinata dei punti dei nostri tratti di curva dovrà avere sempre la derivata a destra e quella a sinistra almeno nei punti che saranno considerati *entro* quei tratti; ma queste derivate potranno non essere sempre uguali fra loro, e nei punti stessi quando siano punti *interni* dovranno sempre esistere almeno separatamente la tangente a destra e quella a sinistra; mentre nei punti estremi, se dovranno considerarsi, dovranno esistere la derivata e la tangente da una parte.

(*) Il caso in cui la tangente da una parte di un punto $M(x_0, y_0)$ di una curva e quella dall'altra parte esistono e formano una unica retta senza essere però il prolungamento l'una dell'altra può presentarsi anche quando questa tangente non è parallela all'asse delle y; ma qui, avendo fissato che x sia la variabile indipendente e che negli intorni di x_0 le parallele all'asse delle y non incontrino la curva che in un punto, questi casi vengono naturalmente ad escludersi perchè, quando si presentano, i tratti di curva dalle due parti di M devono essere considerati separatamente, e il punto M viene ad essere un *estremo* di questi tratti, per modo che sull'uno e sull'altro viene a mancare l'intorno a destra o quello a sinistra.

E del resto questi punti **M** devono sempre riguardarsi come punti singolari delle curve (punti di regresso).

Questi punti però, nei quali per $f(x)$ esistono la derivata a destra e quella a sinistra ma sono distinte fra loro, corrispondono a vertici della curva (punti angolosi) nei quali la *ordinaria tangente* non esisterà; e anche questi punti, per la impossibilità dell'effettivo tracciamento della linea per mezzo di un disegno quando essi siano in numero infinito, nelle vere applicazioni geometriche non potranno affatto considerarsi quando nei loro intorni esistano infiniti altri di tali punti, al modo stesso che, come già dicemmo, non possono considerarsi quei punti negli intorni dei quali la funzione farà infinite oscillazioni.

271. — Tutto questo quando la variabile indipendente scelta sia x.

Quando invece questa variabile sia ω e la curva sia rappresentata dalle due equazioni $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, allora le considerazioni che abbiamo fatte pei rapporti incrementali di $f(x)$ dovranno farsi invece pel rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, nel quale sarà $\Delta x = x(\omega_0 + \Delta\omega) - x(\omega_0)$, $\Delta y = y(\omega_0 + \Delta\omega) - y(\omega_0)$, e per la esistenza della tangente almeno da una parte del punto M che corrisponde al valore ω_0 di ω bisognerà che esista un limite determinato (finito o infinito) di questo rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ al tendere di $\Delta\omega$ a zero, ecc.

272. — Queste osservazioni generali, oltre a darci il modo di scrivere subito la equazione della tangente e poi anche quella della normale alle curve, quando queste rette esistono, collegano le questioni sulle derivate delle funzioni con quelle sulle tangenti alle curve.

È anzi per questo legame fra le derivate delle funzioni e le tangenti alle curve che si era creduto dapprima di potere dimostrare l'esistenza delle derivate per le funzioni finite e continue almeno in generale (cioè esclusi soltanto alcuni punti in numero finito pei tratti finiti), e per questo in sostanza si diceva semplicemente così: « Siccome esiste in generale (cioè esclusi soltanto un numero finito di punti) la tangente alla curva $y = f(x)$, e il coef-

« ficiente angolare di questa tangente è la derivata $f'(x)$ di $f(x)$, deve esistere « in generale la derivata della funzione $f(x)$ ». Però anche astrazione fatta dalla possibilità di immaginare sempre una curva rappresentativa per ogni funzione finita e continua $f(x)$, ognuno bene intende che, secondo quanto abbiamo detto sopra, l'ammettere l'esistenza delle tangenti alle curve equivale in fondo ad ammettere quella delle derivate, e quindi il ragionamento indicato viene ad essere del tutto inconcludente.

273. — In ciò che segue, pure non mettendoci soltanto nel vero campo geometrico e nei casi della pratica ma restando ancora nel caso generale per quanto è possibile, intenderemo sempre che le curve note o ignote che noi considereremo, o che cercheremo di determinare dietro qualche loro proprietà siano curve per le quali si abbiano le limitazioni che sono necessarie perchè, almeno generalmente (cioè esclusi soltanto alcuni punti in numero finito), esista la tangente ordinaria, e inoltre, quando vorranno effettivamente considerarsi, esistano anche quegli altri elementi speciali dei quali il calcolo differenziale o considerazioni geometriche ne fanno risaltare la importanza.

Si tratterà perciò sempre di curve che potranno spezzarsi ove occorra in più tratti distinti da considerarsi separatamente, pur potendo questi tratti essere anche piccolissimi, e che in ciascun tratto quando la variabile indipendente sia x saranno rappresentate da una equazione (nota o ignota) della forma $y=f(x)$, nella quale $f(x)$ dovrà essere una funzione che pei valori di x che si considerano è a un sol valore finita e continua e almeno in generale ammette sempre le derivate (ordinarie) determinate e finite fino a quell'ordine di derivazione cui avremo bisogno di giungere colle nostre considerazioni.

O anche le curve stesse o i varii tratti di esse potranno essere rappresentate da una equazione della forma $F(x, y)=0$ per la quale la funzione $F(x, y)$, pei valori di x, y considerati in un certo campo a due dimensioni come variabili indipendenti, almeno generalmente è a un sol valore finita e continua insieme a quelle fra le sue derivate parziali che sarà necessario di considerare, ed è tale che la equazione stessa $F(x, y)=0$ definisca una o più funzioni distinte y della x dotate delle stesse proprietà indicate sopra, cioè che abbiano le derivate ordinarie determinate e finite almeno fino a quelle di un certo ordine, che possano determinarsi colla solita regola delle funzioni composte, ecc.

E anche infine le curve stesse, o alcuni loro tratti, potranno essere rappresentati, come già dicemmo, per mezzo delle due equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, essendo ω una variabile indipendente qualsiasi che ordinariamente sarà una quantità legata intimamente colla curva o inerente al problema che si studia, come sarà ad esempio il tempo nei problemi di meccanica, di

astronomia, ecc., e spesso farà sparire la necessità di spezzare la curva in più tratti e darà altri vantaggi; e in questo caso le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ dovranno essere sempre, almeno generalmente, a un sol valore finite e continue e ammettere quelle delle loro derivate che occorrerà di considerare.

E così nelle curve che noi considereremo, oltre ad esistere almeno in generale le tangenti ordinarie, la posizione di queste tangenti il più spesso varierà con continuità al variare con continuità del punto di contatto sulla curva, e alle funzioni che compariscono nelle loro equazioni saranno applicabili gli sviluppi di Taylor in serie o almeno quelli abbreviati, ecc.

In casi particolari poi, che saranno però quelli più comuni, queste curve potranno rappresentarsi per mezzo di equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ nelle quali le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ saranno sviluppabili in serie di Taylor almeno in certi intervalli relativi ad ω; e allora queste linee, secondo una denominazione adottata, saranno dette anche da noi *linee analitiche*. E, più particolarmente ancora, quelle linee per le quali le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ saranno funzioni razionali di ω saranno dette *linee unicursali* (*).

274. — Ciò premesso, continuiamo per ora ad ammettere in generale che gli assi coordinati x e y possano anche essere obliqui, e consideriamo dapprima il caso in cui la equazione della nostra curva o tratto di curva sia data sotto la forma $y=f(x)$; e, salvo avvertenza in contrario, intendiamo sempre di riferirci a quei punti (x, y) pei quali non si hanno singolarità in quelle derivate di $f(x)$ che occorre di considerare, ciò che, per le limitazioni che abbiamo detto d'imporci, esclude soltanto un numero finito di punti.

Allora nel punto (x, y) la tangente alla nostra curva avrà per coefficiente angolare y' o $\frac{dy}{dx}$, e perciò la sua equazione potrà porsi sotto la forma

$$\text{(1)} \qquad Y-y=y'(X-x), \quad \text{o} \quad Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

o anche sotto l'altra

$$\text{(2)} \qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy},$$

e di queste formole (1) e (2) la prima varrà anche quando si riferisca a un

(*) Si dimostra facilmente, anche colla semplice applicazione delle considerazioni generali che facemmo al Cap. VI sulla serie di Taylor (§ 72, 2.° [pag. 98]), che negli intervalli nei quali una funzione razionale è sempre finita essa è sempre sviluppabile in serie di Taylor; ed è per questo che abbiamo detto che le linee unicursali sono casi particolari delle linee analitiche.

punto (x, y) nel quale y' è infinita e determinata o no di segno, potendo però in questo caso la tangente essere rappresentata anche più semplicemente sotto la forma $X - x = 0$.

275. — Quando poi la equazione della curva o tratto di curva che si considera sia l'altra $F(x, y) = 0$, della quale del resto la $y = f(x)$ è un caso particolare, e per essa siano soddisfatte le condizioni poste sopra, allora per ciascuna delle funzioni y definite dalla equazione stessa avremo la equazione differenziale

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

che determinerà il differenziale e la derivata di y; e quindi per le precedenti (1) e (2) la equazione della tangente quando $\frac{\partial F}{\partial y}$ non sia zero si presenterà sotto la forma

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

Essa poi varrà anche pei punti (x, y) pei quali sarà $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ senza che sia $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, e in quei punti la tangente sarà parallela all'asse delle y; perchè allora, presa y come variabile indipendente, saranno soddisfatte le condizioni che, secondo la teoria delle funzioni implicite, bastano ad assicurare che la equazione $F(x, y) = 0$ definisce una funzione x della y che ha le solite particolarità, ecc.

Nel caso poi che in punti speciali (x, y) (i quali però ordinariamente saranno punti singolari e eccezionali della curva) ambedue le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ siano zero, sì la (3) che la (4) si ridurranno identiche e quindi la (4) non ci darà più la equazione della tangente, sebbene questa tangente possa continuare ancora ad esistere.

In questo caso però osservando che *nei punti vicini* il rapporto $-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, nel quale dovrà intendersi che y sia l'ordinata della curva, rappresenterà ancora la derivata di y nei punti stessi, gioverà spesso di esaminare il modo di comportarsi dello stesso rapporto negli intorni di quei punti, e quando esso abbia un limite determinato almeno pei valori di x da una parte del punto che si considera per es. a destra, la tangente esisterà ancora almeno da quella

parte, e la sua equazione sarà quella che si avrà dalla (1) ponendovi per y' questo valore limite.

Questo valore limite della derivata y' potrà dedursi talvolta anche dalla equazione differenziale seconda della $F(x, y) = 0$, cioè dalla equazione $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$ quando in qualche modo si sappia che anche questa può considerarsi e che la derivata seconda y'' è determinata e finita anche in quel punto; salvo però allora ad osservare che riducendosi la equazione stessa all'altra $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 = 0$, essa a meno che non sia $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \leq 0$ darà luogo a due valori reali e distinti di y', e converrà quindi fare uno studio speciale per vedere quale di questi due valori dovrà essere preso. Spesso però il punto in questione sarà un punto estremo del tratto di curva che si considera; se poi questo non sarà, allora ordinariamente dei due valori di y' l'uno corrisponderà alla derivata di y a destra e l'altro a quella a sinistra, e in quel punto la curva avrà un vertice.

Questi punti speciali dunque quando non siano estremi della curva corrisponderanno ordinariamente a punti singolari e eccezionali, e noi d'ora innanzi, salvo che non si avverta espressamente il contrario, li intenderemo sempre esclusi dalle nostre considerazioni.

276. — Così fuori di questi casi la equazione della tangente sarà la (4), e si può dire quindi che *essa si otterrà sempre dalla equazione differenziale* (3) *della curva sostituendo ai differenziali dx e dy le differenze $X - x$ e $Y - y$ fra le coordinate correnti della tangente e quelle del punto di contatto;* e questo avverrà naturalmente anche quando la equazione della curva sia sotto la forma particolare $y = f(x)$, come risulta del resto anche dalla (1).

Dalle stesse equazioni (1), (2) e (4) apparisce anche che alla tangente appartiene il punto $(x + dx, y + dy)$ perchè le stesse equazioni sono soddisfatte dalle coordinate di questo punto; talchè si può dire che mentre il punto stesso $(x + dx, y + dy)$ non è sulla curva e ne è distante (sulla parallela all'asse delle y) di una quantità infinitesima di ordine superiore al primo — perchè il punto della curva che trovasi su questa parallela corrispondente all'ascissa $x + dx$ ha per ordinata $y + \Delta y$ dove Δy è l'intero accrescimento che riceve y quando x passa dall'essere x ad essere $x + dx$ — invece il detto punto $(x + dx, y + dy)$ è sulla tangente.

E così quando, pel trascurare le quantità infinitesime di ordine superiore al primo, lo stesso punto $(x + dx, y + dy)$ si consideri come un punto della curva la tangente potrà essere considerata come la retta che riunisce i due punti infinitamente vicini (x, y) e $(x + dx, y + dy)$ della curva.

277. — Passando infine al caso in cui, colla introduzione di una variabile ausiliaria ω, la curva o tratto di curva che si considera sia rappresentata dalle equazioni

$$x = x(\omega) \ , \ y = y(\omega) \ ,$$

per modo che ogni punto della curva corrisponda a un valore speciale di ω, per ciò che precede si può dire che la equazione della tangente alla curva nel punto (x, y) corrispondente a un valore speciale di ω sarà la seguente

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Y} - y = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}(\mathrm{X} - x) \ ;$$

e quindi se, essendo — come abbiamo detto di supporre sempre almeno in generale — le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ finite e continue nel punto ω insieme a alcune delle loro derivate, non avremo al tempo stesso $dx = dy = 0$, la tangente potrà essere sempre rappresentata dalla equazione

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{Y} - y = \frac{dy}{dx}(\mathrm{X} - x) \ , \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{X} - x}{dx} = \frac{\mathrm{Y} - y}{dy} \ ,$$

intendendo, — come risulta subito dalla precedente (5) —, che quando uno dei denominatori dx e dy sia zero senza che lo sia l'altro, ciò voglia dire che la tangente è parallela all'asse corrispondente all'altra variabile y o x, e che per essa nella seconda delle equazioni precedenti deve essere zero il numeratore corrispondente.

E quando per punti speciali della curva, in corrispondenza di valori particolari di ω, le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ abbiano ancora le derivate, ma siano infinite, allora se questa circostanza si presenterà per una sola di esse, scrivendo il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sotto la forma $\dfrac{\frac{\Delta y}{\Delta \omega}}{\frac{\Delta x}{\Delta \omega}}$ si vede che il suo limite esisterà ancora ma sarà zero o infinito, e la tangente esisterà, pure essendo respettivamente parallela agli assi x o y, per modo che avrà per equazione $\mathrm{Y} - y = 0$ o $\mathrm{X} - x = 0$.

Invece se per un valore speciale di ω le derivate di $x(\omega)$ e $y(\omega)$ saranno ambedue infinite, converrà fare uno studio speciale sul rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per vedere se la tangente esiste ancora o no.

278. — Non fermandoci però su questi casi delle derivate di una o di tutte e due le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ infinite, che potranno, quando si voglia, essere considerati a parte, è da osservare che mentre nei casi precedenti, nei quali era fissato che la variabile indipendente fosse la x, il dx non poteva mai essere zero, nel caso attuale invece, potendo la variabile indipendente ω essere diversa da x (e anche da una funzione di primo grado in x) dx e dy potranno divenire zero anche tutti e due per valori speciali di ω; e su questi casi è ora opportuno di fermarci un momento.

Osserviamo perciò che nei punti corrispondenti a questi valori di ω la tangente potrà ancora esistere; ed esisterà effettivamente quando il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ abbia un limite determinato, essendo ancora naturalmente rappresentata dalla equazione (5); e se le due funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ per quello dei detti valori di ω che si considererà avranno anche le derivate seconde determinate e finite, allora siccome per quanto si disse al Cap. VI trattando della serie di Taylor (§ 66 [pag. 87 in nota]) si potrà scrivere $\Delta x = \frac{1}{2} d^2x + \varepsilon$, $\Delta y = \frac{1}{2} d^2y + \varepsilon'$, essendo ε e ε' quantità infinitesime di ordine superiore al secondo, si vede subito che la equazione stessa della tangente si potrà scrivere sotto la forma

$$\frac{\mathrm{X} - x}{d^2x} = \frac{\mathrm{Y} - y}{d^2y} \ ,$$

quando non siano zero anche ambedue i differenziali secondi d^2x e d^2y.

E quando anche questi differenziali secondi siano ambedue zero, ma esistano i differenziali terzi d^3x e d^3y, si troverà al modo stesso che la tangente esisterà e la sua equazione sarà la seguente

$$\frac{\mathrm{X} - x}{d^3x} = \frac{\mathrm{Y} - y}{d^3y} \ ,$$

quando d^3x e d^3y non siano ambedue zero; e così in generale se le derivate di $x(\omega)$ e $y(\omega)$ continueranno ad esistere nel punto considerato ω almeno fino a quell'ordine i pel quale finisce per aversene almeno una diversa da zero, la tangente esisterà pure e la sua equazione si presenterà sotto la forma

$$\frac{\mathrm{X} - x}{d^ix} = \frac{\mathrm{Y} - y}{d^iy} \ ;$$

talchè si può ora affermare che quando le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ che rappresentano le coordinate x e y dei punti della nostra curva ammettono le derivate di qualunque ordine determinate e finite in un punto ω, la tangente alla curva nel punto corrispondente a questo valore di ω non potrà mancare altro che quando per ambedue le dette funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ queste derivate siano tutte eguali a zero nel punto stesso per qualunque ordine.

E poichè questa circostanza di avere le loro derivate di qualunque ordine sempre zero in un punto non potrà mai presentarsi per le funzioni che sono sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di quel punto a meno che esse non siano costanti, ciò che nel caso attuale non potrebbe essere per ambedue le funzioni $x(\omega)$ e $y(\omega)$ ad un tempo, si potrà dire evidentemente in particolare che le *linee che in un certo tratto sono di quelle che abbiamo chiamato linee analitiche avranno la tangente determinata in ogni punto di quel tratto.*

279. — Queste considerazioni generali abbiamo voluto farle per dare un cenno dei varî casi che possono presentarsi ed essere completi il più possibile nei nostri studî; ma dopo di avere accennato a questi casi, non ci fermeremo su essi e, salvo che non si avverta espressamente il contrario, escluderemo sempre dalle nostre considerazioni i casi nei quali dx e dy siano contemporaneamente zero, che sono i soli che possono portare singolarità e anche fare mancare la tangente quando le derivate *prime* di $x(\omega)$ e $y(\omega)$ esistono e sono determinate e finite.

Ammessa ora l'esclusione dei punti nei quali dx e dy siano ambedue zero, come di quelli nei quali manchino le derivate prime delle funzioni da considerarsi, e considerando sempre a parte quelli nei quali una almeno di queste derivate sia infinita, noi possiamo dire ora *riassumendo* che la tangente alla curva data nei punti che si considerano esisterà e sarà sempre rappresentata dalla equazione

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}, \tag{7}$$

coll'avvertenza di dovere prendere uguale a zero il numeratore di quello dei due rapporti $\frac{X-x}{dx}$ e $\frac{Y-y}{dy}$ pel quale il denominatore fosse zero senza più curarsi allora dell'altro rapporto; e coll'osservare inoltre che, mentre quando, essendo x la variabile indipendente, per la equazione della curva si abbia $y=f(x)$, il caso della tangente parallela all'asse delle y $X-x=0$ non potrà presentarsi altro che quando $f'(x)$ sia infinita, nel caso invece della variabile indipendente ω con $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ per le equazioni della curva, il caso della tangente parallela all'asse delle y si avrà sempre anche quando sia $dx=0$ con dy diverso da zero, oltre che quando sia infinita $y'(\omega)$ senza che lo sia $x'(\omega)$.

E quando, anzichè essere rappresentata la curva per mezzo della equazione $y=f(x)$ o delle due $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, sia rappresentata dall'altra $F(x,y)=0$, allora, escludendo il caso in cui $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ siano ambedue zero, la equazione della tangente sarà ancora la precedente nella quale però pei valori di dx e dy dovranno intendersi posti quelli che soddisfano alla equazione differenziale (3) della curva, cioè per dx e dy dovranno sostituirvisi le quantità ad esse proporzionali $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $-\frac{\partial F}{\partial x}$, riducendosi così la equazione stessa all'altra

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0. \tag{8}$$

280. — Limitandoci ora al caso degli assi coordinati ortogonali, osserveremo che determinata la equazione della tangente alla curva nei varii casi, per avere quella della normale basterà ricordare che, sotto l'attuale ipotesi degli assi ortogonali, per due rette perpendicolari fra i loro coefficienti angolari devono essere reciproci e di segno contrario; e si concluderà subito che la equazione della normale a una curva potrà sempre prendersi sotto la forma

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0, \tag{9}$$

escludendo al solito il caso di $dx=dy=0$ quando non si vogliano fare le considerazioni del § 278.

E nel caso particolare di x variabile indipendente questa equazione potrà scriversi

$$X-x+(Y-y)\,y'=0, \tag{10}$$

quando la equazione della curva sia data sotto la forma $y=f(x)$, e potrà scriversi invece

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{11}$$

quando per equazione della curva si abbia l'altra $F(x,y)=0$.

281. — Per trovare poi anche i coseni di direzione della tangente, cioè i coseni degli angoli $\widehat{Tx}$ e $\widehat{Ty}$ che la tangente fa cogli assi coordinati x e y supposti ortogonali, ricorderemo che per una retta la cui equazione sia posta sotto la forma $\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}$ questi coseni sono respettivamente $\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; e ne dedurremo quindi subito che pei coseni di direzione della tangente avremo

$$\cos\widehat{Tx}=\pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \quad \cos\widehat{Ty}=\pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \tag{12}$$

qualunque sia la variabile indipendente; e in particolare avremo

$$(13) \qquad \cos\widehat{Tx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\,, \quad \cos\widehat{Ty} = \pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,$$

quando la variabile indipendente sia x e la equazione della curva sia data sotto la forma $y=f(x)$, e avremo invece

$$(14) \quad \cos\widehat{Tx} = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}\,, \quad \cos\widehat{Ty} = \mp\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}\,,$$

quando la equazione della curva sia data sotto la forma $F(x,y)=0$; i doppî segni in tutte queste formole venendo poi determinati quando si fissi quale delle due direzioni della tangente a partire dal punto di contatto debba essere presa come positiva.

Del resto poi, ricordando che colla variabile indipendente x il coefficiente angolare della tangente è y' e si ha quindi $\operatorname{tang}\widehat{Tx}=y'$, si potevano dedurre anche da questa i valori (13) di $\cos\widehat{Tx}$ e $\cos\widehat{Ty}=\operatorname{sen}\widehat{Tx}$, passando poi alle formole generali coll'applicare il processo del cambiamento della variabile indipendente, ecc.

Naturalmente per gli angoli $\widehat{Nx}$ e $\widehat{Ny}$ della normale cogli assi x e y avremo $\cos\widehat{Nx}=\pm\cos\widehat{Ty}$, $\cos\widehat{Ny}=\mp\cos\widehat{Tx}$, e così valendoci delle formole precedenti potremo scrivere subito anche questi coseni.

In particolare nel caso della curva data per mezzo della equazione $F(x,y)=0$ avremo

$$\cos\widehat{Nx} = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}\,, \quad \cos\widehat{Ny} = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}\,.$$

282. — Insieme alla tangente e alla normale alle curve si considerano in modo speciale certe porzioni di rette che dipendono essenzialmente dagli assi coordinati che sono stati scelti, e che si chiamano *tangente geometrica* o *lunghezza della tangente, normale geometrica o lunghezza della normale, sotto-tangente e sotto-normale.*

Le due prime sono respettivamente la porzione T di tangente e la porzione N di normale comprese fra il punto di contatto e l'asse delle x; e le due ultime S_t e S_n sono respettivamente, all'infuori del segno, le proiezioni sull'asse delle x della lunghezza della tangente e della normale, cioè le porzioni di quest'asse comprese fra il piede dell'ordinata del punto di contatto (proiezione di questo punto sull'asse delle x) e il punto d'incontro della tangente e della normale collo stesso asse.

Così, supponendo sempre che gli assi siano ortogonali e considerando i due triangoli rettangoli formati dall'ordinata e dall'asse delle x colla tangente e colla normale respettivamente (*), avremo subito le formole

$$T=\frac{y}{\cos\widehat{Ty}}\,, \quad N=\frac{y}{\cos\widehat{Ny}}\,, \quad S_t=y\cot\widehat{Tx}\,, \quad S_n=y\cot\widehat{Nx}\,,$$

le quali quando l'ordinata y della curva, si consideri come funzione di x ci danno subito le seguenti

$$(15) \quad T=y\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}\,, \quad N=y\sqrt{1+y'^2}\,, \quad S_t=\frac{y}{y'}\,, \quad S_n=yy'\,,$$

intendendo che per T e N debbano sempre prendersi i valori assoluti dei secondi membri, e che S_t e S_n debbono prendersi in valore e in segno come date dalle formole che abbiamo scritto.

Colla variabile indipendente qualunque ω avremo invece

$$(16) \quad T=y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\,, \quad N=y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\,, \quad S_t=\frac{y\,dx}{dy}\,, \quad S_n=\frac{y\,dy}{dx}\,,$$

supponendo sempre al solito che dx e dy non siano contemporaneamente zero, ecc.

Evidentemente la conoscenza di una di queste quattro lunghezze, e specialmente quella della sotto-tangente e sotto-normale col loro segno potrà servire utilmente per la costruzione grafica della tangente e della normale alla curva in un punto dato posto fuori dell'asse delle x, perchè servirà a determinare i punti delle stesse rette su quest'asse, ecc. (**).

(*) Il lettore potrà fare da sè la figura segnando su un piano una curva qualunque e le rette che costituiscono i triangoli rettangoli qui indicati.

(**) Allo stesso scopo della costruzione grafica delle tangenti e delle normali, anche in coordinate polari si considerano le lunghezze della tangente e della normale, la sotto-tangente e la sotto-normale polari pei punti M delle curve.

Tirata perciò per il polo una retta perpendicolare al raggio vettore di un punto M di una curva, si prendono per *lunghezze della tangente* e *della normale polare* in quel punto le porzioni delle rette corrispondenti comprese fra il punto di contatto e la detta perpendicolare al raggio vettore; e si prendono per la *sotto-tangente* e *sotto-normale polari* le porzioni della stessa perpendicolare comprese fra il polo e i piedi della tangente e della normale.

Le formole per la determinazione di queste lunghezze si possono trovare con tutta facilità, e noi le daremo fra breve in altra nota al § 317 dopo avere data una formola generale per l'angolo delle tangenti di due curve.

283. — Valendosi dei risultati ottenuti, quando si avrà da considerare una curva o tratto di curva potremo avere subito in ogni suo punto pel quale non si abbiano singolarità, le equazioni della tangente e della normale, i loro coseni di direzione, e le lunghezze speciali delle quali parlammo poc'anzi.

Così ad es. nel caso della ellisse o della iperbola, quando siano date per mezzo delle solite loro equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

considerando separatamente le loro parti sopra e sotto all'asse delle x, basterà osservare che le loro equazioni differenziali sono le due $\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0$, $\frac{x\,dx}{a^2}-\frac{y\,dy}{b^2}=0$ per dedurne subito che le equazioni delle loro tangenti sono respettivamente le seguenti

$$\frac{x(\mathrm{X}-x)}{a^2}+\frac{y(\mathrm{Y}-y)}{b^2}=0\,, \quad \text{e} \quad \frac{x(\mathrm{X}-x)}{a^2}-\frac{y(\mathrm{Y}-y)}{b^2}=0\,;$$

le quali, a causa delle equazioni delle rispettive curve alle quali soddisfano x e y, si trasformano subito nelle altre

$$\frac{x\mathrm{X}}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}=1\,, \quad \text{e} \quad \frac{x\mathrm{X}}{a^2}-\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}=1\,, \tag{17}$$

che si ottengono da quelle delle curve stesse sostituendo ai quadrati x^2 e y^2 i prodotti $x\mathrm{X}$ e $y\mathrm{Y}$ respettivamente.

Invece per le equazioni della normale avremo le seguenti

$$\frac{y(\mathrm{X}-x)}{b^2}-\frac{x(\mathrm{Y}-y)}{a^2}=0\,, \quad \text{e} \quad \frac{y(\mathrm{X}-x)}{b^2}+\frac{x(\mathrm{Y}-y)}{a^2}=0\,,$$

ovvero

$$\frac{y\mathrm{X}}{b^2}-\frac{x\mathrm{Y}}{a^2}=xy\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right), \quad \text{e} \quad \frac{y\mathrm{X}}{b^2}+\frac{x\mathrm{Y}}{a^2}=xy\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

E se l'ellisse o l'iperbola saranno rappresentate respettivamente per mezzo delle equazioni

$$\begin{cases} x=a\cos\omega\,, \\ y=b\,\mathrm{sen}\,\omega\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x=\pm a\cosh\omega \\ y=b\,\mathrm{senh}\,\omega\,, \end{cases}$$

bastando per la ellisse che ω vada da 0 a 2π senza che occorra allora di

spezzare la curva in due parti, e intendendo per l'iperbola che ω varii da $-\infty$ a ∞, e che nel secondo membro della formola che dà x si prenda il segno $+$ o il segno $-$ secondochè si considererà il ramo a destra o quello a sinistra dell'asse delle y, valendosi delle formole generali si troverà subito che le equazioni della tangente e della normale per la ellisse sono respettivamente le due

$$\frac{\mathrm{X}\cos\omega}{a}+\frac{\mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\omega}{b}=1\,, \quad \text{e} \quad a\mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,\omega-b\mathrm{Y}\cos\omega=(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega\,,$$

e per la iperbola sono le altre

$$\frac{\mathrm{X}\cosh\omega}{a}-\frac{\mathrm{Y}\,\mathrm{senh}\,\omega}{b}=1\,, \quad \text{e} \quad a\mathrm{X}\,\mathrm{senh}\,\omega+b\mathrm{Y}\cosh\omega=(a^2+b^2)\,\mathrm{senh}\,\omega\cosh\omega\,,$$

quando si consideri il ramo a destra, ecc.

Facilmente si troverebbero anche i coseni di direzione della tangente e della normale all'ellisse o all'iperbola, la lunghezza della tangente e della normale, la sotto-tangente e la sotto-normale; e così potremmo considerare anche altre curve date qualsiansi.

284. — Gli stessi risultati generali da noi ottenuti servono anche a trovare le curve che devono avere date particolarità rispetto alle tangenti, o rispetto alle normali, come apparisce chiaro dai seguenti esempii.

1.° Volendo la curva dalle tangenti di lunghezza costante a, si vede subito che basterà trovare la funzione y di x per la quale si ha $\frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}=\pm a$, ciò che si farà facilmente col calcolo integrale.

Questa curva si presenta in questioni importanti di analisi applicata alla geometria.

2.° Volendo le curve dalle normali di lunghezza costante a, si vede che bisognerà determinare y in modo che si abbia $y\sqrt{1+y'^2}=\pm a$.

Ora di qui si ha $y'^2=\frac{a^2-y^2}{y^2}$, e salvo a considerare poi a parte il caso di $y^2-a^2=0$, si potrà dividere per a^2-y^2 e estrarre la radice, con che si avrà $\frac{yy'}{\sqrt{a^2-y^2}}=\pm 1$; e di qui osservando che il primo membro non è altro che $-\frac{d\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)}{dx}$, si vedrà subito che la funzione $\sqrt{a^2-y^2}$ deve avere la stessa derivata della funzione $\mp x$, e quindi $\sqrt{a^2-y^2}$ e $\mp x$ dovranno differire soltanto per una costante che possiamo indicare con $\pm c$; talchè può dirsi evidentemente che dovrà essere $\sqrt{a^2-y^2}=\mp(x-c)$, ovvero

$y^2+(x-c)^2=a^2$, cioè si avranno così intanto i cerchi di raggio a, il cui centro è in un punto qualunque dell'asse delle x.

Osservando poi che anche il caso che abbiamo escluso di $y^2-a^2=0$, o di $y=\pm a$ corrisponde esso pure al problema sia perchè dandoci $y'=0$ soddisfa alla equazione di esso $y\sqrt{1+y'^2}=\pm a$, sia perchè per $y=\pm a$ si hanno le due rette parallele poste sopra e sotto all'asse delle x e alla distanza a da quest'asse, si conclude ora che le linee cercate sono tutti i cerchi di raggio a che hanno il centro in un punto qualunque dell'asse delle x, e le due rette parallele a quest'asse ora indicate.

3.° Volendo le curve nelle quali la sotto-tangente è costante e uguale ad a, si vede che bisogna determinare y in modo che sia $\frac{y}{y'}=a$, ovvero $\frac{y'}{y}=\frac{1}{a}$, o anche $\frac{d\log y}{dx}=\frac{1}{a}$; e poichè questa ci mostra che per le curve cercate la funzione $\log y$ viene ad avere la stessa derivata di $\frac{x}{a}$, si conclude subito che per esse $\log y$ e $\frac{x}{a}$ differiscono solo per una costante che possiamo indicare con $\log c$, per modo che si ha $\log y=\frac{x}{a}+\log c$, e quindi le curve cercate saranno quelle esponenziali di equazione $y=ce^{\frac{x}{a}}$.

4.° Volendo le curve nelle quali la sotto-normale ha un valore costante a, si osserverà che per queste curve dev'essere $yy'=a$, ovvero $\frac{d(y^2)}{dx}=2a$; e poichè questa ci mostra che y^2 deve avere la stessa derivata di $2ax$, si concluderà subito che le curve cercate hanno per equazione $y^2=2ax+c$, dove c è una costante. Queste curve sono dunque le parabole che hanno per semiparametro a — cioè la lunghezza fissa della sotto-normale — e il cui vertice è in un punto qualunque dell'asse x che viene ad esser l'asse delle parabole.

5.° Volendo le curve nelle quali la sotto-tangente è proporzionale all'ascissa, si osserverà che per queste curve si deve avere $\frac{y}{y'}=\frac{x}{a}$, ovvero $\frac{y'}{y}=\frac{a}{x}$, essendo a una costante; e poichè questa dandoci $\frac{d\log y}{dx}=\frac{a\,d\log x}{dx}=\frac{d\log x^a}{dx}$ ci mostra al solito che $\log y$ e $\log x^a$ non possono differire che per una quantità costante che possiamo indicare con $\log c$, si conclude subito che per le curve cercate si ha $\log y=\log x^a+\log c$, cioè queste curve sono quelle paraboliche di equazione $y=cx^a$.

6.° Volendo le curve nelle quali la sotto-normale è proporzionale all'ascissa, si osserverà che per esse dev'essere $yy'=ax$, essendo a una costante; e

poichè questa equazione può scriversi sotto la forma $\frac{d(y^2)}{dx}=\frac{d(ax^2)}{dx}$ si vede subito che per le curve cercate si avrà $y^2=ax^2+c$ essendo c una costante arbitraria.

Queste curve si riducono a rette quando $c=0$ e a è positiva; sono cerchi per c positivo e $a=-1$; sono ellissi per a negativo e c positivo, e sono iperbole per a positivo e c diverso da zero ma qualunque.

285. — Porremo fine a questi studii sulle tangenti alle curve facendo anche le considerazioni seguenti.

Riprendendo le equazioni (17) che trovammo per le tangenti alla ellisse e alla iperbola in coordinate cartesiane si vede che esse sono di primo grado rispetto alle coordinate x, y del punto di contatto.

Ora è degno di nota che un tal risultato non è che un caso particolare di una proprietà generale della equazione in coordinate cartesiane (ora ortogonali o oblique) della tangente alle curve algebriche, poichè si dimostra facilmente che *la equazione della tangente alle curve algebriche di ordine m è sempre di grado $m-1$ rispetto alle coordinate x e y del punto di contatto.*

Si osservi infatti dapprima che la equazione $F(x,y)=0$ di una curva algebrica dell'ordine m si potrà porre sotto la forma

$$F(x,y)=u_m(x,y)+u_{m-1}(x,y)+\ldots+u_r(x,y)+\ldots+u_1(x,y)+u_0=0,$$

dove in generale $u_r(x,y)$ indica l'insieme dei termini di grado r di $F(x,y)$; e così $F(x,y)$ è decomposta in una somma di funzioni omogenee dei gradi $m, m-1, \ldots, 2, 1, 0$ respettivamente, potendo però mancare alcune o anche tutte le funzioni omogenee di grado inferiore ad m.

Osservando ora che la equazione della tangente $(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}=0$ può porsi sotto la forma $X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}=x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}$, e si ha

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=\left(x\frac{\partial u_m}{\partial x}+y\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)+\left(x\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x}+y\frac{\partial u_{m-1}}{\partial y}\right)+,\ldots,$$

e ricordando che pel noto teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, (§. 194 [pag. 271]) per tutti i valori di r si ha $x\frac{\partial u_r}{\partial x}+y\frac{\partial u_r}{\partial y}=ru_r$, si vede subito che nel caso attuale alla equazione della tangente può darsi la forma

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}=mu_m+(m-1)u_{m-1}+\ldots+ru_r+\ldots u_1=$$

$$=m(u_m+u_{m-1}+\ldots+u_r+\ldots u_1+u_0)-u_{m-1}-2u_{m-2}-\ldots-(m-r)u_r-\ldots-mu_0,$$

e quindi a causa della equazione della curva $u_m+u_{m-1}+...+u_r+...+u_1+u_0=0$, cui devono soddisfare x e y, essa si ridurrà subito all'altra

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}=-u_{m-1}-2u_{m-2}-...-(m-r)u_r-...-mu_0\,,$$

che evidentemente sarà del grado $m-1$ rispetto alle coordinate x e y, come appunto volevamo dimostrare.

286. — Si può anche osservare che quando si vogliono condurre le varie tangenti a una curva algebrica di ordine m $F(x,y)=0$ da un punto (α,β), le coordinate x e y dei varii punti di contatto si dovranno determinare combinando la equazione della curva che è di grado m coll'altra

$$(18)\qquad \alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial F}{\partial y}=-u_{m-1}-2u_{m-2}-...-(m-r)u_r-...-mu_0$$

che esprime che la tangente nel punto (x,y) passa pel punto (α,β) e che, tranne il caso di valori specialissimi di α e β e di forme speciali di $F(x,y)$, è del grado $m-1$.

Si vedrà subito da ciò che *in generale il numero delle tangenti che da un punto* (α,β) *si possono condurre a una curva algebrica dell'ordine* m *(reali o immaginarie, distinte o multiple) sarà al più* $m(m-1)$; e così in particolare nel caso delle curve di second'ordine da un punto (α,β) si potranno condurre al più due tangenti alla curva; per quelle del terzo se ne potranno condurre al più 6, ecc.

Osservando poi che la equazione (18), quando in essa x e y si considerino come coordinate variabili, rappresenta una curva che in generale è dell'ordine $m-1$, e la cui equazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti di contatto delle varie tangenti alla curva che si possono condurre pel punto (α,β), si concluderà anche che *in generale i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto* (α,β) *a una curva dell'ordine* m *sono tutti situati su una curva dell'ordine* $m-1$, e così nel caso particolare delle curve del terz'ordine, i sei punti di contatto delle tangenti che in generale si possono condurre alle stesse curve da un punto (α,β) sono su una curva del second'ordine, ecc....

Si può anche notare che quando s'introduca la variabile ω, rappresentando cioè la curva data $F(x,y)=0$ mediante le equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, allora, siccome non vi è bisogno di tener conto della equazione della curva, perchè, qualunque sia ω, questa viene soddisfatta da sè dai valori $x(\omega)$ e $y(\omega)$ di x e y, i punti di contatto della curva data colle varie tangenti che le si potranno condurre dal punto (α,β) si determineranno trovando i valori di ω

che soddisfano alla equazione $F_1(\omega)=0$ che risulta dalla (18) ponendovi per x e y i valori $x(\omega)$ e $y(\omega)$.

Asintoti.

287 (*). — Quando una curva va coi suoi punti anche a distanza infinita, per modo che movendosi un punto sopra di essa, una almeno delle due coordinate x e y divenga infinita, possono esistere le rette limiti delle tangenti alla curva in punti posti a distanza finita, quando questi punti si allontanano su alcuni rami della curva all'infinito.

Queste rette quando esistono si chiamano *asintoti* della curva, e si considerano come le tangenti alla curva nei punti all'infinito.

Esse potranno essere parallele a uno degli assi (che ora potranno supporsi anche obliqui), ad esempio a quello delle y, o essere inclinate su quest'asse; e noi considereremo separatamente questi due casi.

288. — Nel primo caso se questi asintoti sono a distanza finita, bisognerà che, restando il punto sulla curva, la y divenga infinita per uno o più valori finiti di x; e se k è uno di questi valori, siccome y, come funzione di x, anche per valori di x sempre più vicini a k almeno da una parte, avrà sempre la derivata y' determinata e finita perchè nei punti corrispondenti la curva ha la tangente, è certo che in punti x posti nelle vicinanze di k quella derivata y' finirà per prendere anche valori ognor più grandi (§ 46 [pag. 59]), senza che per questo debba di necessità avere per limite l'infinito.

Nel caso però che questo limite sia l'infinito, la tangente $Y-y=y'(X-x)$ alla curva al tendere sempre più di x a k tenderà a divenire la parallela all'asse delle y di equazione $X=k$, e allora questa retta $X=k$ sarà appunto un asintoto, mentre se y' non avrà per limite l'infinito la tangente oscillerà intorno alla detta parallela $X=k$ e non si avrà per essa una posizione limite; quindi si può dire intanto che *per trovare gli asintoti paralleli all'asse* y *e posti a distanza finita, basterà trovare i valori finiti* k *di* x, *quando vi sono, pei quali* y *diviene infinita e al tempo stesso la derivata di* y *ha per limite l'infinito; e allora le rette corrispondenti* $X=k$ *saranno gli asintoti cercati.*

289. — Se poi, andando i punti della curva all'infinito x e y diverranno infiniti contemporaneamente, o almeno diverrà infinita x, ponendo la equazione della tangente in un punto (x,y) sotto la forma $Y=y'X+y-y'x$, si vede subito che onde questa tangente tenda ad una retta limite $Y=pX+q$

(*) **La teoria degli *asintoti* che viene esposta in questi paragrafi non figurava nelle lezioni autografate del 1877.**

posta a distanza finita, bisognerà che y' e la differenza $y - y'x$ o $x\left(\frac{y}{x} - y'\right)$ abbiano limiti determinati e finiti p e q, non potendo ora il limite di y' per $x = \infty$ essere infinito se la retta limite deve essere a distanza finita.

D'altra parte è da osservare in generale che se una funzione y di x *al crescere indefinito* di x per es. per valori positivi ha sempre una derivata determinata, e questa derivata y' ha un limite (finito o infinito), lo stesso accadrà del rapporto $\frac{y}{x}$ e il suo limite sarà appunto quello di y' tanto se y si mantiene sempre inferiore a un numero finito, quanto se crescendo indefinitamente ha per limite l'infinito; perchè nel secondo di questi casi ciò risulta subito dal teorema del § 93 [pag. 128 e seg.] pel quale il limite del rapporto $\frac{y}{x}$ è uguale a quello del rapporto delle derivate; e nel primo degli stessi casi, se k è un valore finito qualsiasi di x pel quale y ha il valore y_k, pel teorema degli accrescimenti finiti, per ogni valore di x superiore a k avremo $\frac{y - y_k}{x - k} = \bar{y}'$, essendo $\bar{y}'$ il valore della derivata y' in un punto $\bar{x}$ fra k e x, e quindi evidentemente in questo caso il limite di y', che noi supponiamo che esista, dovrà necessariamente essere lo zero, come è zero allora quello di $\frac{y}{x}$.

Segue da ciò che per gli asintoti che ora cerchiamo, posti a distanza finita, anche il rapporto $\frac{y}{x}$ dovrà avere un limite determinato e finito, e questo limite dovrà essere precisamente quello stesso p di y', ciò che porta che nel prodotto $x\left(\frac{y}{x} - y'\right)$ il secondo fattore dovrà avere per limite lo zero, mentre il primo ha per limite l'infinito.

Il prodotto stesso però potrà avere un limite determinato e finito; e se questo sarà q, la tangente tenderà verso la retta limite a distanza finita $Y = pX + q$, mentre se lo stesso prodotto non avrà limite o l'avrà infinito la tangente non andrà verso una posizione limite, o andrà all'infinito; dunque *per trovare gli asintoti a distanza finita corrispondenti a punti all'infinito della curva pei quali x cresce all'infinito basterà trovare quelli pei quali il rapporto $\frac{y}{x}$ e la derivata y' di y al crescere indefinito di x tendono a uno stesso limite determinato e finito p, e al tempo stesso tende a un numero determinato e finito q il prodotto $x\left(\frac{y}{x} - y'\right)$ o la differenza $y - y'x$*, potendo anche uno o tutti due questi limiti p e q essere uguali a zero.

Se poi il limite di $y - y'x$ o $x\left(\frac{y}{x} - y'\right)$ sarà l'infinito, e quelli di $\frac{y}{x}$ e y' esisteranno pure, essendo o no anch'essi l'infinito, l'asintoto esisterà ancora ma sarà a distanza infinita.

E si può altresì notare che, potendo il prodotto $x\left(\frac{y}{x} - y'\right)$ trasformarsi nel quoziente $\dfrac{\frac{y}{x} - y'}{\frac{1}{x}}$ che nel caso degli asintoti a distanza finita per $x = \infty$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, il suo limite (§. 91 [pag. 126 e seg.]) sarà uguale a quello del rapporto delle derivate $\dfrac{\frac{y'x - y}{x^2} - y''}{-\frac{1}{x^2}}$, o di $y - y'x + y''x^2$, quando y'' e quest'ultimo limite esistono; e questo evidentemente ci mostra subito che *per gli asintoti a distanza finita il prodotto $y''x^2$ se ha un limite per $x = \infty$ dovrà averlo uguale allo zero.*

290. — Fermandoci ora sul caso particolare delle curve algebriche $F(x, y) = 0$, e indicando con $\varphi_n(x, y)$ il gruppo dei termini di grado più alto n in $F(x, y)$, per modo che la equazione della curva possa scriversi sotto la forma $\varphi_n(x, y) + H = 0$ essendo H una funzione di x e y del grado $n - 1$ al più, si osserverà che se in qualche modo, esaminando la equazione della curva, ci si potrà assicurare che allontanandoci indefinitamente sulla curva il rapporto $\frac{y}{x}$ non può crescere indefinitamente con x, allora il rapporto $\frac{H}{x^n}$ tenderà a zero e lo stesso dovrà quindi necessariamente avvenire di $\frac{\varphi_n(x,y)}{x^n}$; e poichè $\varphi_n(x, y)$ è omogenea e di grado n, si vede subito di qui che i valori limiti p di $\frac{y}{x}$ che soli potranno corrispondere ai coefficienti angolari degli asintoti della curva posti a distanze finite e non paralleli all'asse delle y, saranno i coefficienti angolari delle rette diverse dall'asse delle y (cioe da quella di equazione $x = 0$) che sono rappresentate dalla equazione omogenea $\varphi_n(x, y) = 0$; cioè essi saranno le radici in t della equazione $\varphi_n(1, t) = 0$, le quali saranno naturalmente tutte finite, ma alcune di esse potranno non essere reali.

Al tempo stesso poi perchè ad una radice reale t di questa equazione corrisponda effettivamente un asintoto della curva posto a distanza finita bisognerà che il valore corrispondente della derivata y' di y abbia pure un limite determinato e finito che allora sarà uguale a quella radice, e un limite determinato e finito lo abbia pure la differenza $y-y'x$.

Se poi dalla equazione della curva risulterà che restando su di essa il rapporto $\frac{y}{x}$ potrà anche crescere indefinitamente con x, queste considerazioni varranno solo per quei valori di $\frac{y}{x}$ che si manterranno finiti, perchè questi soli potranno corrispondere a asintoti a distanza finita.

291. — Presa quindi ad esempio la iperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, si osserverà prima che non vi sono asintoti paralleli all'asse delle y perchè, per ogni valore finito di x, y è sempre finito; e dividendo poi tutta la equazione per x^2, si osserverà che il rapporto $\frac{y}{x}$ non può crescere indefinitamente con x, e quindi uguagliando a zero il binomio $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ si troverà subito che gli asintoti non potranno essere che rette coi coefficienti angolari $\frac{b}{a}$ e $-\frac{b}{a}$.

E poichè, prendendo la equazione derivata $\frac{x}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=0$, o servendosi del valore di y che si deduce dalla equazione colla risoluzione, si vede subito che per $x=\pm\infty$ la derivata y' ha un limite determinato che è appunto $\frac{b}{a}$ o $-\frac{b}{a}$, e la differenza $y-xy'$ ha per limite zero, se ne deduce che per la iperbola data vi sono effettivamente due asintoti, e questi sono le due rette di equazione $Y=\frac{b}{a}X$, e $Y=-\frac{b}{a}X$ che passano pel centro della curva.

Presa poi come secondo esempio la curva conosciuta sotto il nome di *Folium* di Cartesio, cioè quella di equazione $x^3+y^3=3axy$ con a costante, basterà dividere questa equazione una volta per y e un'altra per x^2y per vedere subito che per nessun valore finito di x può essere y infinito, e che al crescere indefinito di x il rapporto $\frac{y}{x}$ non può crescere all'infinito.

Da ciò si dedurrà intanto che non potranno esservi asintoti paralleli all'asse delle y nè a distanza finita nè a distanza infinita, e che per compiere le ricerche relative agli asintoti di questa curva rimmarrà a considerare il binomio x^3+y^3 uguagliandolo a zero o formando la equazione $1+t^3=0$; e poichè questa non ha altro che una radice reale $t=-1$, si concluderà intanto che non vi potrà essere che un asintoto reale, e il suo coefficiente angolare non potrà essere che -1.

Osservando poi che derivando si ha la equazione $x^2-ay+(y^2-ax)y'=0$, e quindi $y'=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$, e $y-xy'=\frac{x^3+y^3-2axy}{y^2-ax}=\frac{axy}{y^2-ax}$, si vede che y' al crescere indefinito di x tende appunto verso -1, e la differenza $y-xy'$ tende verso $-a$; e si conclude quindi che l'asintoto esiste effettivamente e ha per equazione $Y=-X-a$; e non si hanno altri asintoti.

XX.

Concavità e convessità delle curve. — Punti di inflessione

292. — Se si ha una curva che in un punto M ammette una tangente determinata MT in modo anche che la tangente a destra di M debba considerarsi come il prolungamento di quella a sinistra; e se questa curva considerata in un piccolo intorno di M (di cui parte sia a destra e parte a sinistra di M) si trova da una stessa parte della tangente MT, o tutt'al più alcuni punti di essa (ma non tutti) sono su questa tangente, allora prendendo una retta qualunque AB che non passi per M e non sia perpendicolare alla tangente MT, si dice che la curva nel punto M volge a questa retta AB la sua *concavità* o la sua *convessità* secondochè la porzione di curva che abbiamo detto di considerare attorno al punto M si trova tutta contenuta in uno degli angoli acuti o tutta in uno degli angoli ottusi che la tangente MT fa colla retta AB.

Quando invece la tangente nel punto M non lascia tutti da una stessa parte di essa i punti della curva posti a destra e a sinistra di M in intorni sufficientemente piccoli, allora nel punto M la curva non sarà nè concava nè convessa rispetto a nessuna delle rette AB che non passano per M e non sono perpendicolari alla tangente.

Però in questo caso può darsi che, considerando separatamente sulla curva gl'intorni a destra di M e quelli a sinistra, si trovi che la tangente in M, traversando ivi la curva, lascia i punti di intorni sufficientemente piccoli a destra di M tutti da una parte della tangente a destra, e quelli di intorni a sinistra tutti dall'altra parte della tangente a sinistra, senza escludere che alcuni punti a destra o a sinistra possano anche restare sulla tangente; e allora si dice che la curva ha un *punto d'inflessione* nel punto M (*).

(*) Per mantenere la generalità ammettiamo che la curva negli intorni di M da una stessa parte (o da tutte e due) possa anche avere continuamente punti sulla tangente, o averli contemporaneamente dalle due parti di questa tangente; ma na-

Evidentemente sui punti d'inflessione non ha alcuna influenza la posizione o la direzione della retta AB rispetto alla quale può essere richiesto di cercare la concavità o la convessità della curva negli altri punti, come non vi ha nessuna influenza la posizione o la direzione degli assi coordinati. Essi dipendono assolutamente soltanto dal modo di comportarsi della curva negl'intorni a destra e a sinistra di essi, e possono aversi per tutto dove la tangente (ordinaria) è determinata e la tangente da una parte è il prolungamento di quella che si ha dall'altra.

S'intende però che quando la curva sia limitata o si consideri a pezzi distinti, noi volendo trattare dei punti d'inflessione ci riferiamo sempre a quei punti pei quali esiste sulla curva un intorno a destra e uno a sinistra, e quindi escludiamo i punti estremi della curva; come, ammettendo che la tangente a destra debba essere il prolungamento di quella a sinistra, noi veniamo naturalmente ad escludere dai punti d'inflessione quelli nei quali, avendo la curva una specie di punta, due rami di essa vengono ad avere una tangente comune che sta fra i rami medesimi. In particolare quando la curva è riferita a due assi ortogonali o obliqui x e y, e x è la variabile indipendente, non saranno punti d'inflessione quelli nei quali la tangente è parallela all'asse delle y e la derivata prima è infinita e indeterminata di segno, mentre *sono sempre punti d'inflessione quelli nei quali questa derivata prima è infinita e determinata di segno.*

Rispetto alla concavità però o alla convessità ci si può talvolta riferire anche ai punti estremi della curva o ai punti nei quali due o più rami di una curva si riuniscono, considerandoli però separatamente, come, volendolo, si possono considerare separatamente gli intorni a destra di un punto e quelli a sinistra; ma allora propriamente non si può parlare che di concavità o convessità a destra o a sinistra, nè si potrà parlare di punti d'inflessione pei quali occorre considerare contemporaneamente gli intorni a destra e quelli a sinistra; e noi a scanso di equivoci, a meno che non lo avvertiamo esplicitamente, intenderemo sempre di escludere questi casi dalle nostre considerazioni.

turalmente quel caso non si presenterà altro che in punti speciali e eccezionali che dovranno tralasciarsi quando, essendo nel vero campo geometrico, ci occuperemo soltanto delle curve che si presentano nelle applicazioni (§§ 265 [pag. 377e seg.]).

E per ogni punto non eccezionale di queste curve gli intorni da una stessa parte di esso, quando siano sufficientemente piccoli, saranno tutti da una medesima parte della tangente e non avranno nessun punto su questa all'infuori del punto di contatto; per modo che allora in ogni punto *interno* del tratto che si considererà avremo sempre necessariamente concavità o convessità rispetto ad ogni retta che non passi per quel punto e non sia perpendicolare alla tangente, o avremo un punto d'inflessione.

293. — Ciò premesso, supponiamo le curve riferite a un sistema di assi x e y che per semplicità supporremo senz'altro ortogonali, e passiamo ad occuparci della loro concavità e convessità rispetto all'asse delle x e dei loro punti d'inflessione, limitandoci però dapprima, anche pei punti d'inflessione, a quelli nei quali la tangente non è parallela all'asse delle y.

Allora se essendo x la variabile indipendente sarà $f(x)$ la funzione che rappresenterà l'ordinata y per ogni punto nelle vicinanze del punto $M(x,y)$ che si considera, e che si dedurrà dalla equazione della curva, data sotto forma esplicita $y=f(x)$ o sotto forma implicita $F(x,y)=0$, è certo che la derivata y' o $f'(x)$ nel punto M sarà determinata e finita, e la equazione della tangente in M sarà $Y-y=y'(X-x)$; talchè quando per la tangente la X dall'essere x passa ad essere $x+h$ essendo h positivo o negativo, la Y dall'essere y passerà ad essere $y+k$ essendo $k=y'h$; cioè l'ordinata della tangente varierà di $k=y'h$.

Invece quando sulla curva la x dall'essere x passa ad essere $x+h$, l'ordinata varierà di Δy essendo $\Delta y=f(x+h)-f(x)$; e quindi, *quando il punto* M *sarà al disopra dell'asse delle* x (cioè quando y sarà diverso da zero e positivo), se per h sufficientemente piccolo in valore assoluto la differenza $\Delta y-k$ si manterrà positiva o tutt'al più in alcuni punti sarà zero sì a destra che a sinistra di M, in M si avrà convessità, e se si manterrà negativa o tutt'al più in alcuni punti sarà zero, in M si avrà concavità; mentre se il punto M sarà al disotto dell'asse delle x accadrà invece l'opposto, e per comprendere quindi i due casi insieme basterà considerare il segno del prodotto $y(\Delta y-k)$; e non si potrà parlare altro che di concavità e convessità a destra o a sinistra separatamente se il punto M sarà sull'asse delle x.

E se la differenza $\Delta y-k$ a destra di M, quando h è sufficientemente piccolo, finirà per avere sempre lo stesso segno o essere zero in alcuni punti, e lo stesso accadrà a sinistra, ma il segno che si avrà a destra sarà differente da quello che si ha a sinistra, allora qualunque sia la posizione del punto M, sopra o sotto all'asse delle x *o su quest'asse*, nello stesso punto M si avrà un punto d'inflessione.

Si esclude naturalmente il caso che $\Delta y-k$ sia zero in tutto un tratto a destra o a sinistra di M, perchè allora la curva almeno in quel tratto sarebbe rettilinea, e non sarebbe più il caso di parlare di convessità o concavità nè di punti d'inflessione.

294. — Ciò posto, ammettiamo ora che la funzione $f(x)$ che rappresenta l'ordinata y della nostra curva abbia le sue derivate finite e continue nel punto x corrispondente all'ascissa del punto $M(x,y)$ che si considera, almeno fino a quelle di un certo ordine m superiore al primo.

Evidentemente questa condizione suppone che le derivate di $f(x)$ sino a quelle dell'ordine $m-1$ inclusive siano finite e continue in ogni punto di un certo intorno (a destra e a sinistra) di M, e quelle di ordine m siano per lo meno determinate e finite nello stesso intorno; dunque, quando h sia sufficientemente piccolo in valore assoluto, per la formola di Taylor avremo

$$\Delta y-k=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\dots+\frac{h^{m-1}}{\pi(m-1)}f^{(m-1)}(x)+\frac{h^m}{\pi(m)}f^{(m)}(x+\theta_m h),$$

essendo θ_m un numero compreso fra 0 e 1, e quindi se esiste una derivata di ordine superiore al primo che non si annulla nel punto x, e la prima di queste derivate è $f^{(m)}(x)$, sarà

$$\Delta y-k=\frac{h^m}{\pi(m)}f^{(m)}(x+\theta_m h); \tag{1}$$

talchè a causa della continuità di $f^{(m)}(x)$ nel punto x, se h in valore assoluto è sufficientemente piccolo, il segno di $\Delta y-k$ sarà quello di $h^m f^{(m)}(x)$, e quindi se m è dispari questo segno varierà con quello di h, mentre se m è pari, esso rimarrà lo stesso anche se h cangia segno, e allora dipenderà soltanto da quello di $f^{(m)}(x)$.

Evidentemente dunque: *Sotto le ipotesi fatte che nel punto* M *le derivate di* $f(x)$ *siano finite e continue almeno sino a quelle di un ordine* m *superiore al primo* (*) *che non si annullano nel punto* M, *noi possiamo affermare che se la prima di queste derivate che non si annulla nel punto* M *sarà di ordine dispari, e in questo caso soltanto, nello stesso punto* M *si avrà una inflessione; mentre se il punto* M *non sarà sull'asse delle* x, *e la prima derivata di* $f(x)$ *che non si annulla sarà di ordine pari, allora in questo punto la curva volgerà la sua concavità o la sua convessità all'asse delle* x *secondochè il prodotto* $f(x)f^{(m)}(x)$ o $yy^{(m)}$ *sarà negativo o positivo;* e in particolare

---

(*) Tenendo conto della formola

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\dots+\frac{h^{m-1}}{\pi(m-1)}f^{(m-1)}(x)+\frac{h^m}{\pi(m)}\{f^{(m)}(x)+\varepsilon_m\},$$

dove ε_m è una quantità che diviene infinitesima con h, che noi dimostrammo nella nota alla pag. 87 colla sola ipotesi che la derivata m^a di $f(x)$ sia determinata *e finita* nel punto x senza richiedere nulla per le derivate m^e nei punti vicini, allora invece della (1) del testo si troverebbe l'altra $\Delta y-k=\frac{h^m}{\pi(m)}\{f^{(m)}(x)+\varepsilon_m\}$, e con questa si giungerebbe ugualmente al teorema enunciato sopra e alle conseguenze di esso *senza bisogno di porre la condizione della continuità nel punto* M *per l'ultima derivata di* $f(x)$ *che si considera quando questa è finita.*

se il punto M *sarà al disopra dell' asse delle x si avrà concavità o convessità secondochè* $f^{(m)}(x)$ o $y^{(m)}$ *sarà negativo o positivo.* Si suppone naturalmente in questo teorema che $f(x)$ non sia di quelle funzioni le cui derivate di ordine superiore al primo esistono, ma sono tutte eguali a zero nel punto M che si considera.

In particolare dunque quando nel punto $M(x, y)$ la derivata seconda sia zero e sia continua, e nello stesso punto la derivata terza sia ancora continua e sia diversa da zero, in M si avrà sempre una inflessione della curva, mentre se M non sarà sull' asse delle x, e in esso la derivata seconda di y sarà diversa da zero e continua, si avrà in M concavità o convessità, secondochè il prodotto yy'' sarà negativo o positivo, e in particolare se M sarà al disopra dell' asse delle x si avrà concavità o convessità secondochè y'' sarà negativo o positivo.

295. — Farò osservare che quando si trovasse che nel punto M le derivate seconda, terza,... fino alla $(m-1)^a$ inclusive di $f(x)$ sono uguali allo zero, mentre nello stesso punto la derivata m^a $(m>1)$ è infinita e determinata di segno essendo ancora continua, il teorema precedente rimarrà ancora applicabile; e quindi anche allora se m è pari nel punto M si avrà concavità o convessità, e se m è dispari si avrà una inflessione; talchè in particolare si può dire che nel caso in cui le derivate prime siano finite e continue, e le derivate seconde siano determinate e siano anch' esse continue (finite o infinite), i punti d' inflessione non potranno essere che fra quelli nei quali le derivate seconde di y sono zero, e quindi per trovarli bisognerà incominciare a cercare i punti nei quali le derivate seconde sono zero, e poi in questi punti esaminare le derivate terze, ecc.

Se poi *nel punto* che si considera M le derivate seconda, terza,... fino alla $(m-1)^a$ inclusive di $f(x)$ sono zero, e la derivata m^a *non è determinata* allora il teorema precedente non basterà più; però se negl' intorni a destra e a sinistra di M (M escl.) le derivate m^e di $f(x)$ fossero ancora determinate, e quelle negl' intorni a destra avessero sempre uno stesso segno o fossero zero, e lo stesso accadesse di quelle negl' intorni a sinistra allora continuerebbe ancora a sussistere la formola (1), e quindi *dall' esame dei segni di* $f^{(m)}(x)$ *negl' intorni a destra e a sinistra di* M si potrebbe ancora decidere se nel punto M la curva ha una inflessione o volge la sua concavità o la sua convessità all' asse delle x.

Questa osservazione poi può evidentemente valere anche quando per decidere la questione ci si volesse servire di una delle derivate di ordine superiore che sono zero nel punto M, come ad es. occorre di fare nel caso in cui la funzione $f(x)$ è una di quelle funzioni le cui derivate successive nello stesso punto M esistono, ma sono tutte eguali allo zero.

S' intende poi che servendosi dei segni di $f^{(m)}(x)$ nel punto M quando in questo punto $f^{(m)}(x)$ è diversa da zero e continua, e in ogni caso servendoci dei segni di questa derivata negl' intorni a destra e a sinistra di M separatamente, si possono trattare anche i casi della concavità a destra o a sinistra che sopra avevamo detto di escludere; e ciò evidentemente anche pei punti M che appartenessero all' asse delle x.

Merita poi di esser notato che, come avviene sempre nei punti di massimo o di minimo dell' ordinata (punti più alti o punti più bassi della curva), anche nei punti d' inflessione può essere $\frac{dy}{dx}=0$; però i punti d' inflessione, quand' anche siano di quelli nei quali la tangente è parallela all' asse delle y, non corrisponderanno mai evidentemente a punti di massimo o di minimo.

296. — Fermandoci ancora sui punti d' inflessione, osserviamo che per ora ci siamo occupati soltanto di quelli fra questi punti nei quali la tangente non è parallela all' asse delle y; ma poichè, riferendosi sempre a curve o pezzi di curve pei quali y è una funzione a un sol valore di x, noi dicemmo già che per questi ultimi punti d' inflessione si dovevano considerare tutti e soli quelli nei quali la derivata prima di y è infinita e determinata di segno, così noi possiamo dire che già abbiamo il modo di determinare anche questi.

Del resto, indipendentemente anche da queste considerazioni, la ricerca di questi punti si farà ancora come quella degli altri quando si cangi la variabile indipendente, prendendo cioè per questa variabile la y invece della x e introducendo quindi in campo la funzione $x(y)$ che rappresenterà l'ascissa x, e che si dedurrà dalla equazione $y=f(x)$ cercando la funzione inversa di $f(x)$, o si dedurrà dall' altra $F(x, y)=0$.

Allora, coll'osservare che la funzione $x(y)$ inversa di $f(x)$ ha per derivata $\frac{1}{f'(x)}$, o che la tangente alla curva nei punti che si vogliono considerare, quando tali punti esistano, viene ad essere parallela all' asse y della nuova variabile indipendente, si vede subito che nei punti stessi dovrà essere $x'(y)=0$, e quindi per le considerazioni precedenti si potrà subito affermare che i nuovi punti d' inflessione che si cercano saranno quelli pei quali avremo ad un tempo $x'(y)=0$ e $x''(y)=0$ con $x'''(y)$ diverso da zero, e più generalmente quelli nei quali la prima delle derivate di $x(y)$ che non si annullano è di ordine superiore al primo e dispari.

297. — Tutto questo, come abbiamo detto, tanto nel caso che la curva sia data subito per mezzo della equazione $y=f(x)$ o dell' altra $x=x(y)$, quanto nell' altro in cui, essendo data per mezzo della equazione $F(x, y)=0$, si intenda che le funzioni $f(x)$ o $x(y)$ siano quelle determinate da questa equazione.

In quest'ultimo caso però non vi sarà propriamente bisogno di determinare queste funzioni $f(x)$ o $x(y)$, poichè valendosi delle solite equazioni fra le derivate che trovammo nella teoria delle funzioni implicite si potranno sempre determinare i valori delle derivate delle stesse funzioni $f(x)$ o $x(y)$ rispetto ad x o rispetto ad y, o almeno si potranno esaminare questi valori e i loro segni nel punto che si avrà da considerare; e si troveranno così i punti d'inflessione, e si riconoscerà se vi è concavità o convessità in un punto dato (x, y) della curva.

Così, esclusi sempre, come già dicemmo di fare, i punti (x, y) (se ve ne sono) pei quali $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ siano ambedue zero, si può osservare che dovendo allora aversi le equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0\ ,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y=0\ ,\ \dots\ ,$$

se si suppone ad es. che $\frac{\partial F}{\partial y}$ sia diverso da zero, coll'esaminare il segno delle espressioni

$$(2)\qquad -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2}{\frac{\partial F}{\partial y}}\ ,\quad\text{o}\quad -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

che si ricaveranno da queste equazioni pel valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ nell'ipotesi di x variabile indipendente, cioè quando vi sia fatto $d^2x=0$, si avrà subito modo di riconoscere, senza bisogno di determinare y o $f(x)$, se in un punto (x, y) della nostra curva $F(x, y)=0$ si ha concavità o convessità rispetto all'asse delle x, quando in questo punto non sia $y=0$ e il valore stesso delle espressioni precedenti di $\frac{d^2y}{dx^2}$ non risulti zero.

E si avrà modo altresì di trovare tutti i punti d'inflessione, perchè, dovendo in questi essere $d^2y=0$ o $d^2x=0$ secondochè sarà presa per variabile indipendente x o y, è evidente che per essi insieme alla equazione $F(x, y)=0$ dovremo avere sempre l'altra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0\ ,$$

che può anche scriversi sotto la forma di determinante

$$-\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix}=0\ ,$$

con $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ o $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ quando si tratti di punti nei quali la tangente venga parallela all'asse delle x, o a quello delle y respettivamente.

I punti d'inflessione quindi non potranno trovarsi che fra quelli d'intersezione delle due curve

$$(3)\qquad F(x, y)=0\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2=0\ ;$$

e per decidere se essi siano effettivamente o no punti d'inflessione bisognerà ricorrere alla equazione alle derivate del terz'ordine che si avrà dalla $F(x, y)=0$.

In particolare i punti d'inflessione nei quali la tangente sia parallela all'asse delle x o a quello delle y, quando esistano, dovranno essere fra quelli comuni alle tre curve

$$F=0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0\ ,\quad\text{o alle tre}\quad F=0\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0\ ,\ \text{ecc.}$$

298. — Infine quando, colla introduzione di una variabile ausiliaria ω, la curva data sia rappresentata per mezzo delle due equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, nel qual caso le solite funzioni $f(x)$ e $x(y)$ che avevamo precedentemente sarebbero quelle che risulterebbero dalla eliminazione di ω fra queste equazioni, non occorrerà di fare queste eliminazioni, ma basterà valersi delle formole che la teoria del cambiamento della variabile indipendente somministra pel calcolo delle derivate $y', y'', y''', \dots$, o $x', x'', x''', \dots$

Così, esclusi al solito i punti, quando ve ne siano, nei quali siano contemporaneamente zero dx e dy, si vede subito che quando non siano zero respettivamente dx o dy basterà esaminare il segno dei rapporti $\frac{d^2y\,dx-dy\,d^2x}{dx^3}$ o $\frac{d^2x\,dy-dx\,d^2y}{dy^3}$ che danno $y''(x)$ o $x''(y)$ per decidere se si ha concavità o convessità rispetto agli assi x o y respettivamente, supposto che i rapporti stessi non siano zero, e supposto pure che non sia $y=0$ nel primo caso e $x=0$ nel secondo.

I punti d'inflessione poi saranno fra quelli che corrisponderanno a valori di ω pei quali $d^2ydx - d^2xdy = 0$, con dx diverso da zero quando la tangente non deve essere parallela all'asse delle y e dy diverso da zero quando non deve essere parallela all'asse delle x, supposto sempre che le derivate che si considerano di $x(\omega)$ e $y(\omega)$ siano determinate e finite. E per decidere se questi punti saranno effettivamente o no punti d'inflessione converrà ricorrere anche alle formole che danno $y'''(x)$, o $x'''(y)$ espresse per la variabile ω, e quindi saranno sempre punti d'inflessione quando pei valori di ω ad essi corrispondenti non si avrà $d^3ydx - d^3xdy = 0$, ecc.

E in queste formole ai differenziali potremo sempre sostituire le derivate.

299. — Applichiamo ora i risultati che precedono ad alcuni esempii.

1.° Se si ha la curva $y = \mathrm{A}\,e^{-\alpha^2x^2}$ dove A è una costante positiva, si osserverà che

$$y' = -2\mathrm{A}\,\alpha^2 x e^{-\alpha^2x^2}, \; y'' = -2\mathrm{A}\,\alpha^2 e^{-\alpha^2x^2}(1-2\alpha^2x^2), \; y''' = 4\mathrm{A}\,\alpha^4 x e^{-\alpha^2x^2}(1-2\alpha^2x^2) + 8\mathrm{A}\alpha^4 x e^{-\alpha^2x^2}$$

e siccome y' è sempre finita, i punti d'inflessione non potranno essere altro che dove $y''=0$.

Ora y'' è zero soltanto per $x^2 = \dfrac{1}{2\alpha^2}$, cioè per $x = -\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ e $x = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$, e y''' per questi valori di x è diverso da zero; dunque effettivamente in ciascuno di questi punti la curva presenta una inflessione.

Osservando poi che la curva è tutta al disopra dell'asse delle x perchè y è sempre positivo, e y'' per x compreso fra $-\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ e $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ è negativo e fuori di questo intervallo è positivo, si vede anche che fra $-\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ e $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ la curva volge la sua concavità all'asse delle x, e fuori di questo intervallo gli volge invece la convessità.

E siccome per $x=0$ si ha $y'=0$ e $y''<0$, si vede anche che questa curva ha un massimo sull'asse della y e ivi la sua ordinata è A.

Questa curva si presenta in studii importanti del calcolo delle probabilità e in Geodesia.

2.° Se si ha la curva $y = \operatorname{sen} x$ (sinussoide), osservando che $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$, $y''' = -\cos x$ si vede che nei punti pei quali x è multiplo di π la y'' è zero mentre y''' é diverso da zero, e si conclude quindi che la curva ha i punti d'inflessione in tutti quelli nei quali traversa l'asse delle x. Fuori di questi punti volge sempre la sua concavità all'asse delle x perchè il prodotto yy'' quando x non è multiplo di π è sempre negativo.

Trasportando l'asse delle x parallelamente a sè stesso la curva diviene in alcuni tratti concava e in altri convessa rispetto al nuovo asse.

3.° Se si ha la curva delle tangenti $y = \operatorname{tang} x$ e si considera pei valori di x compresi fra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$, osservando che si ha $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y'' = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$, $y''' = \dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{6\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}$, si vede subito che per $x=0$ essa ha un punto d'inflessione e fuori di questo punto è sempre convessa rispetto all'asse delle x.

4.° Se si ha la curva di quart'ordine $y = x^4 - 6x^2 + x + 6$, osservando che si ha $y' = 4(x^3 - 3x) + 1$, $y'' = 12(x^2 - 1)$, $y''' = 24x$, si vede che i punti d'inflessione corrispondono soltanto a $x = -1$ e $x = 1$ perchè y'' è zero soltanto in questi punti e allora y''' è diverso da zero.

Fuori di questi punti e di quelli nei quali taglia l'asse delle x la curva in alcuni tratti è concava e in altri è convessa rispetto a quest'asse. In particolare per $x=0$ essa è concava perchè allora si ha $y=6$, $y''=-12$, e siccome per $x=2$ si ha $y=0$, e per $x>2$ si ha sempre $y>0$ e $y''>0$ così quando $x>2$ la curva è sempre convessa rispetto all'asse delle x, ecc.

5.° Se si ha la curva $y = x\log x - \dfrac{1}{x}$ con x positivo, osservando che $y' = 1 + \log x + \dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}$, $y''' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^4}$, si vedrà subito che si ha un punto d'inflessione soltanto per $x = \sqrt{2}$, ecc.

6.° Quando si abbia la curva $y = \sqrt[3]{x-c}$, siccome sarà $y' = \dfrac{1}{3}(x-c)^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9}(x-c)^{-\frac{5}{3}}$, la y'' non sarà mai zero a distanza finita, e quindi non avremo nessun punto d'inflessione nel quale la tangente non sia parallela all'asse delle y.

Invece siccome per $x=c$ la derivata prima sarà infinita e determinata di segno il punto $(x=c, y=0)$ sarà un punto d'inflessione nel quale la tangente è parallela all'asse delle y. Ciò si trova anche introducendo la funzione inversa x di y, cioè prendendo per equazione della curva $x = y^3 + c$, poichè allora per $x=c$, $y=0$ si ha $x'(y)=0$, $x''(y)=0$, $x'''(y)=6$.

7.° Quando si abbia la curva $\mathrm{F}(x, y) = y^3 + ay^2 + by + cx + d = 0$ dove a, b, c, d sono costanti, la terza delle quali c è diversa da zero, siccome sarà $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = c$, $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = 3y^2 + 2ay + b$, $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} = 2(3y+a)$ si vede subito per le (3) che non potrà aversi inflessione altro che nel punto pel quale sarà $y = -\frac{a}{3}$ e quindi $x = -\frac{1}{c}\left(y^3 + ay^2 + by + d\right)_{y=-\frac{a}{3}} = \frac{9ab - 2a^3 - 27d}{27c}$; e in questo punto la tangente sarà verticale quando per $y = -\frac{a}{3}$ sia $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ cioè quando sia $b = \frac{a^2}{3}$.

Esaminando poi la equazione alle derivate terze col prendere x o y per variabile indipendente secondochè $b - \frac{a^2}{3}$ è o no diverso da zero, si vede che il punto stesso $\left(x = \frac{9ab - 2a^3 - 27d}{27c}, y = -\frac{a}{3}\right)$ è sempre un punto d'inflessione.

8.° Quando si abbia la curva $F(x, y) = \operatorname{sen}(x - y) + e^x - e^y + \log x = 0$ alla quale evidentemente appartiene il punto $(x = 1, y = 1)$ che è al disopra dell'asse delle x, calcolando la espressione (2) relativa a questo punto si vede che essa è negativa, e si conclude quindi che in quel punto la curva è concava.

9.° Avendosi la curva $x = \omega + e^\omega$, $y = \omega^2 + \cos\omega$, siccome per essa avremo $x' = 1 + e^\omega$, $y' = 2\omega - \operatorname{sen}\omega$, $x'' = e^\omega$, $y'' = 2 - \cos\omega$, $x''' = e^\omega$, $y''' = \operatorname{sen}\omega, \ldots$, si vede subito che non potendo essere mai $x' = 0$ la sua tangente non sarà mai parallela all'asse y, e quindi per quanto si disse al § 298 [pag. 413 e seg.] i suoi punti d'inflessione non potranno essere che fra quelli corrispondenti ai valori di ω pei quali si avrà

$$(4) \qquad (2 - \cos\omega)(1 + e^\omega) - e^\omega(2\omega - \operatorname{sen}\omega) = 0;$$

e questi saranno effettivamente tutti punti d'inflessione perchè per essi non potrà essere zero la espressione $\operatorname{sen}\omega(1 + e^\omega) - e^\omega(2\omega - \operatorname{sen}\omega)$, non potendo mai essere $2 - \cos\omega - \operatorname{sen}\omega = 0$.

Osservando poi che la curva è sempre al disopra dell'asse delle x, perchè il valore di y è positivo qualunque sia ω, si vede che essa è concava nei punti corrispondenti ai valori di ω pei quali il primo membro della espressione (4) è negativo ed è convessa per quelli pei quali lo stesso primo membro è positivo.

In particolare essa è convessa per $\omega \leq 0$, ed è sempre concava per valori positivi e sufficientemente grandi di ω.

XXI.

Aree e archi delle curve piane

Differenziali delle Aree.

300. — Sia $y = f(x)$ la equazione di una curva piana C che dapprima supporremo riferita a coordinate cartesiane ortogonali, e per la quale ammetteremo anche che possa essere data per mezzo di due equazioni $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, nel qual caso in $f(x)$ la x non sarà la variabile indipendente, ma sarà la funzione $x(\omega)$ della variabile indipendente ω.

Supponendo che almeno in una certa porzione CM questa curva non sia mai al disotto dell'asse delle x (cioè di una retta qualsiasi che è presa come asse delle x) e sia tutta a distanza finita, s'intende che l'area o porzione di piano ACMP compresa fra la curva CM, l'asse delle x, l'ordinata fissa AC corrispondente al punto iniziale C, e l'ordinata MP corrispondente al punto variabile M (*), sarà una quantità determinata il cui valore dipenderà dall'ascissa x dell'estremo variabile M, e quindi sarà una funzione di x che potremo indicare con $A(x)$ e più semplicemente con A; e se la curva è continua, questa funzione $A(x)$, oltre esser finita, sarà anche continua, e quando si varii l'ordinata iniziale AC la funzione stessa evidentemente varierà di una quantità costante positiva o negativa, e crescerà col crescere di x (**).

(*) Anche qui il lettore è pregato di costruire la figura che si fa con tutta facilità.

(**) Quando la curva è effettivamente descritta sul piano, l'area che abbiamo detto di considerare si concepisce bene come la porzione determinata del piano che è limitata nel modo indicato nel testo.

Ma, a tutto rigore, tanto per questo caso quando si voglia procedere alla effettiva determinazione numerica della misura di quest'area dopo fissata una unità di misura superficiale, quanto e più ancora quando la linea C della quale si tratta, E evidentemente basterà sapere determinare le aree così limitate, perchè se si avrà poi da determinare l'area racchiusa da una o più linee qualsiansi, questa determinazione si ridurrà sempre a somme o differenze di aree come la $A(x)$, limitate nel modo anzidetto.

301. — Ci proporremo intanto di trovare il differenziale e la derivata di questa funzione $A(x)$, supponendo appunto che, almeno nel tratto nel quale si considera, y sia finita e continua e non sia mai negativa, cioè la curva sia a distanza finita, continua e tutta situata al disopra dell'asse delle x, e tutt'al più raggiunga quest'asse in qualche punto speciale; dopo, nel calcolo integrale, valendoci del differenziale o della derivata che ora troveremo potremo determinare la funzione stessa $A(x)$, cioè l'area cercata.

Per questo si supponga che il punto estremo M dalla sua posizione passi alla posizione vicinissima N restando sulla curva. Le coordinate di N saranno $x+\Delta x, y+\Delta y$, e se s'indica con μ l'ordinata massima della curva fra M e N, e con μ' l'ordinata minima (comprendendo anche il caso che fra M e N la curva faccia alcune oscillazioni) $y+\Delta y$ sarà compreso fra μ e μ' potendo però essere eguale a μ o a μ' (*); e quando M sia abbastanza vicino ad N, cioè quando Δx sia abbastanza piccolo, a causa della continuità di y, le differenze $\mu-\mu'$, $\mu-y$, $y-\mu'$ saranno piccole a piacere nostro, e le due ultime non supereranno evidentemente la prima.

Osservando ora che l'accrescimento ΔA di A quando si passa da M a N sarà compreso evidentemente fra i due rettangoli che hanno per base Δx e per altezza uno μ e l'altro μ', si trova subito che

$$\Delta A=\mu'\Delta x+\theta(\mu-\mu')\Delta x=y\Delta x-(y-\mu')\Delta x+\theta(\mu-\mu')\Delta x=y\Delta x+(\theta-\theta_1)(\mu-\mu')\Delta x,$$

ovvero

$$\Delta A=y\,\Delta x+\eta(\mu-\mu')\,\Delta x, \tag{1}$$

essendo θ e θ_1 quantità positive comprese fra 0 e 1, e η una quantità compresa fra -1 e 1; e poichè $\mu-\mu'$ è piccola a piacere nostro, si vede di qui che l'accrescimento ΔA di A si compone di due parti, l'una delle quali $y\Delta x$ coll'impiccolire di Δx, quando y non è zero può riguardarsi come infinitesima di prim'ordine rispetto all'accrescimento Δx, e l'altra $\eta(\mu-\mu')\Delta x$ può riguardarsi come infinitesima di ordine superiore; e quando $y=0$, allora in ΔA manca la parte del prim'ordine.

Si aggiunge che quando Δx si prenda negativo A subirà una diminuzione invece di un accrescimento e i termini di ΔA avranno un semplice cambiamento di segno; talchè si può dire che qualunque sia il segno di Δx la prima parte di ΔA è sempre $y\Delta x$, e quindi evidentemente tanto che x sia la variabile indipendente quanto che non lo sia, si avrà sempre la formola

$$dA=ydx, \tag{2}$$

la quale ci mostra che *il differenziale della funzione* A *che rappresenta l'area della nostra curva sarà* ydx; *e la derivata rispetto ad* x *della stessa funzione sarà l'ordinata* y *della curva.*

302. — Questo risultato, mentre ci mostra che per avere l'area A della curva $y=f(x)$ bisogna incominciare dal trovare una funzione la cui derivata sia $f(x)$ o y, ci permette anche di dire inversamente che quando si abbia una funzione finita e continua $\varphi(x)$ per la quale esista una curva rappresentativa $y=\varphi(x)$, se si vorrà trovare una funzione $\psi(x)$ la cui derivata sia appunto $\varphi(x)$, in quegl'intervalli nei quali la stessa $\varphi(x)$ non è negativa, basterà prendere per la funzione che si cerca $\psi(x)$ l'area compresa fra la curva indicata $y=\varphi(x)$, l'asse delle x, una ordinata fissa corrispondente all'ascissa a del punto iniziale e una ordinata mobile che passa pel punto di ascissa x; e la funzione $\psi(x)$, come appunto dev'essere, verrà così a contenere una co-

pure ammettendo che sia continua, debba essere intesa nel modo generale da noi indicato nel Cap. XVIII, l'area corrispondente non può essere concepita altro che come il limite comune di somme di aree elementari che risulteranno dalla scomposizione del piano in parti o grandezze superficiali ciascuna delle quali si determinerà coi processi della geometria elementare, e che saranno minori le une e maggiori le altre di quelle corrispondenti che naturalmente vengono concepite come grandezze superficiali determinate dalla curva nelle sue piccole porzioni. E la dimostrazione della esistenza di questi limiti indipendentemente dal processo di scomposizione seguìto, come la loro effettiva determinazione non possono farsi con tutto il rigore altro che nel calcolo integrale.

Nel testo la esistenza del limite è ammessa come cosa che si comprende e si intuisce naturalmente, e noi per non alterare sostanzialmente le lezioni del 1877, non abbiamo creduto opportuno di farvi le modificazioni che sarebbero state necessarie per tenere conto di queste considerazioni. E continueremo quindi ad ammettere come certa tale esistenza senz'altro, pur tenendo mente che pel completo rigore è necessaria una dimostrazione speciale della esistenza di quel limite, che qui riterremo come data, e che del resto al principio del Calcolo integrale risulterà come conseguenza immediata e intuitiva dalla definizione che daremo degli integrali definiti e dai teoremi fondamentali sulla loro esistenza.

(*) Quando (come appunto accade nei casi ordinarii) la funzione $f(x)$ in tutto un intorno a destra e a sinistra di M ha la derivata determinata e diversa da zero e sempre dello stesso segno (come avviene per es. quando in M questa derivata è continua e diversa da zero) allora poichè in quell'intorno non si annulla mai la derivata di $f(x)$, questa funzione $f(x)$ non potrà avere massimi e minimi nei punti *interni* dell'intorno medesimo; e quindi in questo caso si potrà prendere N talmente vicino ad M che fra M e N la curva non faccia oscillazioni, e delle due quantità y e $y+\Delta y$ una sia μ e l'altra sia μ'.

stante arbitraria additiva dipendente dalla posizione della ordinata che si prende come fissa. Ma su ciò dovremo tornare più diffusamente in calcolo integrale.

303. — Immaginiamo ora decomposta l'area A in n aree elementari $\Delta_1 A$, $\Delta_2 A, \dots, \Delta_n A$, col dividere la porzione $AP = x - a$ dell'asse delle x in tanti intervalli parziali $Aa_1 = h_1$, $a_1 a_2 = h_2, \dots, a_{n-1}P = h_n$; e indichiamo con $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ le ordinate della curva corrispondenti ai punti $A, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Indichiamo inoltre con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i massimi valori delle ordinate nei rispettivi intervalli $h_1, h_2, \dots, h_n$, con $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$ i minimi, e con $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ numeri compresi fra -1 e 1.

Per la formola (1) si avrà

$$A = \Delta_1 A + \Delta_2 A + \dots + \Delta_n A = \sum_1^n \left\{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \right\},$$

qualunque sia il numero n; e quindi facendo crescere n indefinitamente e passando al limite si avrà anche

$$A = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \left\{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \right\}.$$

Ora osserviamo che la differenza $\mu_r - \mu'_r$ non è altro che l'oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo h_r, e per la proprietà nota della continuità uniforme delle funzioni finite e continue si può intender scomposto l'intervallo AP in intervalli parziali $h_1, h_2, \dots, h_n$ talmente piccoli che per essi, e anche al successivo loro impiccolirsi, le oscillazioni $\mu_r - \mu'_r$ si mantengano sempre *tutte* inferiori a quel numero che più ci piace σ.

Si dedurrà da ciò che quando y non è mai zero nell'intervallo AP, i secondi termini $\eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r$ nelle somme $\sum_1^n \{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \}$ coll'impiccolire delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ divengono infinitesimi di ordine uniformemente superiore a quello dei primi termini corrispondenti $y_{r-1} h_r$; e quindi, osservando anche che la somma $\sum_1^n y_{r-1} h_r$ è sempre inferiore a un numero finito perchè tali sono le $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, per un teorema noto sugli infinitesimi si concluderà che questa somma $\sum_1^n y_{r-1} h_r$ ha un limite determinato e finito che è lo stesso di quello primitivo e quindi è precisamente A; e così sostituendo alle h_r il differenziale dx si ha la formola

$$A = \lim \sum y dx = \lim \sum dA \tag{3}$$

tutte le volte che y è finita, continua, diversa da zero e positiva pei valori di x nell'intervallo AP.

304. — Questa formola poi sussiste anche se la funzione finita e continua y si annulla soltanto in un numero finito di punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ nell'intervallo AP, restando però sempre positiva negli altri punti; giacchè se i punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono per es. *interni* all'intervallo AP, potremo racchiuderli entro intervalli piccoli a piacere $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$, $(\alpha_2 - \varepsilon, \alpha_2 + \varepsilon), \dots, (\alpha_m - \varepsilon, \alpha_m + \varepsilon)$, e allora l'area totale A si scomporrà in $2m + 1$ aree parziali delle quali m corrisponderanno a questi ultimi intervalli speciali, e le altre $m + 1$ corrisponderanno agli intervalli rimanenti da A a $\alpha_1 - \varepsilon$, da $\alpha_1 + \varepsilon$ a $\alpha_2 - \varepsilon$, da $\alpha_2 + \varepsilon$ a $\alpha_3 - \varepsilon, \dots,$ da $\alpha_m + \varepsilon$ a P; e poichè per questi ultimi intervalli, per quanto piccolo si prenda ε, varrà sempre la formola precedente, mentre le aree corrispondenti ai primi intervalli, come anche le somme parziali dei termini pur corrispondenti ydx della somma totale $\Sigma\, ydx$ saranno arbitrariamente piccoli, s'intende appunto che continuerà a valere la formola (3).

305. — È da notare che in forza della formola (3) l'area di una curva qualunque limitata nel modo più volte indicato, quando questa curva è continua e a distanza finita ed è tutta al di sopra dell'asse delle x, o tutt'al più lo raggiunge in un numero finito di punti in ogni intervallo finito, si presenta come limite della somma di più aree rettangolari aventi per base dx e per altezza l'ordinata variabile y.

In altri termini, fatta una scomposizione dell'area totale con rette parallele all'asse delle y in aree elementari che vadano impiccolendo ognor più al crescere del loro numero, potremo riguardare queste aree elementari come aree rettangolari, e l'area totale come limite della somma di queste aree; e un tale risultato generale risulta qui come conseguenza del teorema sugl'infinitesimi che abbiamo ricordato, in forza del quale abbiamo trascurato nella ricomposizione delle varie aree parziali tutte quelle parti (ignote) la cui determinazione, ove fosse stata assolutamente necessaria, avrebbe presentato se non delle impossibilità, certo delle difficoltà grandissime. Anche di qui dunque apparisce la grande importanza dei teoremi che dimostrammo in principio intorno agli infinitesimi (*).

(*) È però da notare che, tenendo conto del teorema noto sulla continuità uniforme delle funzioni continue, la formola (3) si sarebbe potuta trovare, anche indipendentemente dal teorema sugli infinitesimi ricordato nel testo, e anche senza fare l'ipotesi che la curva possa raggiungere l'asse delle x solo in un numero finito di punti; e ciò coll'osservare che la somma $\sum_1^n \{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \}$ trovata sopra può scriversi sotto la forma $\sum_1^n y_{r-1} h_r + \sum_1^n \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r$, e per essere le η_r comprese fra -1

stante arbitraria additiva dipendente dalla posizione della ordinata che si prende come fissa. Ma su ciò dovremo tornare più diffusamente in calcolo integrale.

303. — Immaginiamo ora decomposta l'area A in n aree elementari $\Delta_1 A$, $\Delta_2 A, \dots, \Delta_n A$, col dividere la porzione $AP = x - a$ dell'asse delle x in tanti intervalli parziali $Aa_1 = h_1$, $a_1 a_2 = h_2, \dots, a_{n-1} P = h_n$; e indichiamo con $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ le ordinate della curva corrispondenti ai punti $A, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Indichiamo inoltre con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ i massimi valori delle ordinate nei respettivi intervalli $h_1, h_2, \dots, h_n$, con $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_n$ i minimi, e con $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ numeri compresi fra -1 e 1.

Per la formola (1) si avrà

$$A = \Delta_1 A + \Delta_2 A + \dots + \Delta_n A = \sum_1^n \left\{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \right\},$$

qualunque sia il numero n; e quindi facendo crescere n indefinitamente e passando al limite si avrà anche

$$A = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \left\{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \right\}.$$

Ora osserviamo che la differenza $\mu_r - \mu'_r$ non è altro che l'oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo h_r, e per la proprietà nota della continuità uniforme delle funzioni finite e continue si può intender scomposto l'intervallo AP in intervalli parziali $h_1, h_2, \dots, h_n$ talmente piccoli che per essi, e anche al successivo loro impiccolirsi, le oscillazioni $\mu_r - \mu'_r$ si mantengano sempre *tutte* inferiori a quel numero che più ci piace σ.

Si dedurrà da ciò che quando y non è mai zero nell'intervallo AP, i secondi termini $\eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r$ nelle somme $\sum_1^n \{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \}$ coll'impiccolire delle $h_1, h_2, \dots, h_n$ divengono infinitesimi di ordine uniformemente superiore a quello dei primi termini corrispondenti $y_{r-1} h_r$; e quindi, osservando anche che la somma $\sum_1^n y_{r-1} h_r$ è sempre inferiore a un numero finito perchè tali sono le $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, per un teorema noto sugli infinitesimi si concluderà che questa somma $\sum_1^n y_{r-1} h_r$ ha un limite determinato e finito che è lo stesso di quello primitivo e quindi è precisamente A; e così sostituendo alle h_r il differenziale dx si ha la formola

$$A = \lim \sum y dx = \lim \sum dA \tag{3}$$

tutte le volte che y è finita, continua, diversa da zero e positiva pei valori di x nell'intervallo AP.

304. — Questa formola poi sussiste anche se la funzione finita e continua y si annulla soltanto in un numero finito di punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ nell'intervallo AP, restando però sempre positiva negli altri punti; giacchè se i punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono per es. *interni* all'intervallo AP, potremo racchiuderli entro intervalli piccoli a piacere $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$, $(\alpha_2 - \varepsilon, \alpha_2 + \varepsilon), \dots, (\alpha_m - \varepsilon, \alpha_m + \varepsilon)$, e allora l'area totale A si scomporrà in $2m + 1$ aree parziali delle quali m corrisponderanno a questi ultimi intervalli speciali, e le altre $m + 1$ corrisponderanno agli intervalli rimanenti da A a $\alpha_1 - \varepsilon$, da $\alpha_1 + \varepsilon$ a $\alpha_2 - \varepsilon$, da $\alpha_2 + \varepsilon$ a $\alpha_3 - \varepsilon, \dots$, da $\alpha_m + \varepsilon$ a P; e poichè per questi ultimi intervalli, per quanto piccolo si prenda ε, varrà sempre la formola precedente, mentre le aree corrispondenti ai primi intervalli, come anche le somme parziali dei termini pur corrispondenti ydx della somma totale $\Sigma\, ydx$ saranno arbitrariamente piccoli, s'intende appunto che continuerà a valere la formola (3).

305. — È da notare che in forza della formola (3) l'area di una curva qualunque limitata nel modo più volte indicato, quando questa curva è continua e a distanza finita ed è tutta al di sopra dell'asse delle x, o tutt'al più lo raggiunge in un numero finito di punti in ogni intervallo finito, si presenta come limite della somma di più aree rettangolari aventi per base dx e per altezza l'ordinata variabile y.

In altri termini, fatta una scomposizione dell'area totale con rette parallele all'asse delle y in aree elementari che vadano impiccolendo ognor più al crescere del loro numero, potremo riguardare queste aree elementari come aree rettangolari, e l'area totale come limite della somma di queste aree; e un tale risultato generale risulta qui come conseguenza del teorema sugl'infinitesimi che abbiamo ricordato, in forza del quale abbiamo trascurato nella ricomposizione delle varie aree parziali tutte quelle parti (ignote) la cui determinazione, ove fosse stata assolutamente necessaria, avrebbe presentato se non delle impossibilità, certo delle difficoltà grandissime. Anche di qui dunque apparisce la grande importanza dei teoremi che dimostrammo in principio intorno agli infinitesimi (*).

(*) È però da notare che, tenendo conto del teorema noto sulla continuità uniforme delle funzioni continue, la formola (3) si sarebbe potuta trovare, anche indipendentemente dal teorema sugli infinitesimi ricordato nel testo, e anche senza fare l'ipotesi che la curva possa raggiungere l'asse delle x solo in un numero finito di punti; e ciò coll'osservare che la somma $\sum_1^n \{ y_{r-1} h_r + \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r \}$ trovata sopra può scriversi sotto la forma $\sum_1^n y_{r-1} h_r + \sum_1^n \eta_r (\mu_r - \mu'_r) h_r$, e per essere le η_r comprese fra -1

306. — Aggiungiamo che se gli assi coordinati fossero obliqui e facessero fra loro l'angolo θ, il differenziale dell'area A determinata ancora dall'asse delle x, dalla curva e da due ordinate parallele all'asse delle y, una fissa e l'altra variabile, sarebbe dato da

$$dA = y \operatorname{sen} \theta \, dx; \tag{4}$$

e invece della (3) si avrebbe l'altra

$$A = \lim \sum y \operatorname{sen} \theta \, dx = \lim \sum dA. \tag{5}$$

307. — Quando si usano le coordinate polari, invece di prendere le aree limitate come precedentemente, si considerano ordinariamente altre aree a forma di settori, limitate cioè dalla curva, un raggio vettore fisso e un raggio vettore mobile; e il differenziale o la derivata di queste aree si trovano allora con eguale facilità.

Sia infatti $\rho = \rho(\omega)$ la equazione della curva, essendo ρ il raggio vettore e ω l'angolo polare che potrà anche non essere la variabile indipendente; e $\rho(\omega)$ sia una funzione finita e continua di ω. E sia AOM l'area A' che ora si considera, essendo OA il raggio vettore fisso, OM quello variabile e AM l'arco di curva compreso fra questi raggi.

Facendo passare il punto M nella posizione vicinissima N sempre sulla curva, e indicando con ν e ν' i valori massimo e minimo del raggio vettore nell'intervallo MN, è chiaro che l'aumento $\Delta A'$ che riceve l'area $A' = AOM$ quando M passa in N sarà compreso fra l'area del settore circolare corrispondente all'angolo MON e al raggio ν e quella del settore circolare corrispondente all'angolo stesso MON e al raggio ν'; e quindi, chiamando $\Delta\omega$ l'angolo MON, che non è altro che l'aumento che riceve ω quando da M si passa in N, avremo

$$\Delta A' = \frac{1}{2}\nu'^2 \Delta\omega + \frac{1}{2}\theta(\nu^2 - \nu'^2)\Delta\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega - \frac{1}{2}(\rho^2 - \nu'^2)\Delta\omega + \frac{1}{2}\theta(\nu^2 - \nu'^2)\Delta\omega = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega + \frac{1}{2}(\theta - \theta_1)(\nu^2 - \nu'^2)\Delta\omega = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\omega + \frac{1}{2}\eta(\nu^2 - \nu'^2)\Delta\omega,$$

con θ e θ_1 compresi fra 0 e 1 e η compreso fra -1 e 1; e di qui con ragionamenti simili a quelli del § 301 [pag. 418 e seg.] si conclude subito che il differenziale richiesto dell'area A' è dato dalla formola

$$dA' = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega. \tag{6}$$

La derivata di A' rispetto ad ω viene dunque ad essere $\frac{1}{2}\rho^2$.

308. — Con ragionamenti simili a quelli del paragrafo precedente si troverebbe anche che quando $\rho(\omega)$ è una funzione continua di ω, che non si annulla mai o si annulla soltanto per un numero finito di valori di ω (*) quando il raggio vettore dalla posizione OA passa alla posizione OM, si ha la formola

$$A' = \lim \sum \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \lim \sum dA', \tag{7}$$

talchè l'area A' potrà riguardarsi come limite della somma di più aree di settori circolari corrispondenti all'angolo $d\omega$ e a un raggio eguale al raggio vettore variabile ρ; o in altri termini, fatta una scomposizione dell'area A' con rette che partano dal polo in tanti settori curvilinei elementari che vadano ciascuno impiccolendo ognor più al crescere indefinito del loro numero, potremo riguardare questi settori come settori circolari di raggio variabile ρ la cui somma al limite riproduce l'area totale A', facendo a meno in tal guisa di occuparci delle differenze che passano fra i veri settori curvilinei elementari in cui viene scomposta l'area totale ed i settori circolari che ad essi vengono sostituiti.

S'intende poi che se ω_0 è l'angolo polare che corrisponde al raggio fisso iniziale OA, e se l'angolo ω che corrisponde al raggio mobile OM supera $2\pi + \omega_0$, allora l'area A' corrisponde all'area che si ha quando ω passa da ω_0 a $\omega_0 + 2\pi$ coll'aggiunta di quella che si ha passando da $\omega_0 + 2\pi$ a ω, o da $\omega_0 + 2\pi$ a $\omega_0 + 4\pi$ e poi da $\omega_0 + 4\pi$ a ω, intendendo cioè allora che l'area della curva ricuopra due o più volte il piano come a fogli staccati, ecc...

309. — Le formole dei paragrafi precedenti possono riguardarsi come relative a qualsiasi variabile indipendente; e profittando di questa circostanza noi possiamo trasformare la (6) in coordinate cartesiane ortogonali, con che si giungerà ad una formola che dà l'area elementare a settori in coordinate cartesiane ortogonali e che torna spesso utilissima.

---

e 1, dopochè le h_r saranno impiccolite in modo che in ogni termine si abbia $\mu_r - \mu'_r < \sigma$, la seconda parte di questa somma sarà sempre minore in valore assoluto di $\sigma \Sigma h_r$ ovvero di $\sigma(x - a)$, e quindi il limite A della intera somma precedente sarà quello stesso delle somme $\Sigma y_{r-1} h_r$ o $\Sigma y dx$.

(*) Sostituendo ai processi indicati quelli della nota del § 305 a pag. 421 la condizione che il numero dei punti nei quali $\rho(\omega)$ si annulla sia finito può esser tolta.

Per questo osserviamo che preso per asse delle x l'asse polare, si ha $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega$, e $\omega=\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $\rho^2=x^2+y^2$, intendendo qui che pel valore di ω sia escluso il punto $x=0$, $y=0$ (nel qual punto ω non è propriamente determinato), e avendo ben cura nello scegliere il valore da prendersi per l'$\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

Ora da queste formole quando x e y non sono ambedue zero si ha $d\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{\rho^2}$; e quindi sarà per la (6)

$$(8)\qquad dA'=\frac{xdy-ydx}{2},$$

restando anche qui arbitraria la variabile indipendente, e solo dovendo fra x e y sussistere la relazione che viene dalla equazione della curva.

E così se la curva sarà rappresentata per mezzo delle equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, essendo ω la variabile indipendente, allora avremo evidentemente

$$(9)\qquad dA'=\frac{xy'-yx'}{2}d\omega,$$

le derivate intendendosi prese rispetto ad ω.

310 — Diamo ora qualche applicazione dei resultati che precedono.

1.° Si voglia l'area del segmento parabolico compreso fra una parabola e una delle sue corde MM' (*).

Prendendo per asse delle x il diametro Ox corrispondente alla corda MM', e per asse delle y la tangente Oy alla sua estremità, questa tangente sarà parallela alla corda, e quindi indicando con θ l'angolo degli assi, e con A la parte dell'area posta al disopra del diametro Ox che sarà la metà dell'area cercata, avremo per la (4) $dA=y\,\mathrm{sen}\,\theta dx$; e poichè qualunque sia la corda MM', l'equazione della parabola è sempre della forma $y^2=2px$, sarà anche $dA=\sqrt{2p}\,\mathrm{sen}\,\theta x^{\frac{1}{2}}\,dx$.

Ora siccome $x^{\frac{1}{2}}\,dx$ è il differenziale di $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, si vede subito di qui che le due funzioni A e $\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,\mathrm{sen}\,\theta x^{\frac{3}{2}}$ hanno lo stesso differenziale e quindi non

(*) Il lettore per maggiore chiarezza potrà farsi le figure relative a questi esempii, le quali del resto non presentano nessuna difficoltà.

possono differire fra loro che per una quantità costante c, e si ha perciò

$$A=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,\mathrm{sen}\,\theta x^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}xy\,\mathrm{sen}\,\theta+c;$$

talchè, osservando che per $x=0$ si ha $A=0$ e quindi dev'essere $c=0$, si troverà subito che $A=\frac{2}{3}xy\,\mathrm{sen}\,\theta$; cioè l'area A sarà i due terzi del parallelogrammo formato dagli assi coordinati e dalle parallele a questi assi condotte pel punto M, e quindi raddoppiando si troverà subito l'area cercata, e si concluderà che *nella parabola l'area del segmento compreso fra la parabola e una corda è i due terzi di quella del parallelogrammo formato da questa corda, dalla tangente parallela e dalle due rette parallele al diametro corrispondente condotte per le estremità della corda.*

2.° Si voglia l'area compresa fra uno dei rami della sinussoide $y=\mathrm{sen}\,x$ e l'asse delle x nel tratto da $x=0$ a $x=\pi$.

Indicando con A l'area corrispondente al tratto da $x=0$ a $x=x(x\leq\pi)$, per la (2) si avrà subito $dA=y\,dx=\mathrm{sen}\,x\,dx$; e quindi A e la funzione $-\cos x$ avranno lo stesso differenziale, e perciò sarà $A=-\cos x+c$, essendo c una costante.

Osservando poi che per $x=0$ si deve avere $A=0$, si troverà che $c=1$, e si concluderà che $A=1-\cos x=2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}$; talchè facendo $x=\pi$, si vede ora che l'area cercata è uguale a 2.

Uguale misura si ha per le aree relative agli altri rami al disopra dell'asse delle x, come per quelli al disotto.

3.° Si voglia l'area A' del settore ellittico compreso fra i raggi vettori di due punti A e M.

Essendo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la equazione dell'ellisse, se s'introduce una variabile ausiliaria ω colle solite formole $x=a\cos\omega$, $y=b\,\mathrm{sen}\,\omega$, dalla (9) si ha subito $dA'=\frac{ab}{2}d\omega$, talchè si conclude che A' e $\frac{ab}{2}\omega$ hanno lo stesso differenziale, e quindi indicando con c una costante si avrà $A'=ab\frac{\omega}{2}+c$.

Ora se ω_0 è il valore di ω corrispondente al punto A (il qual valore si potrà determinare colle formole $x_0=a\cos\omega_0$, $y_0=b\,\mathrm{sen}\,\omega_0$, quando x_0 e y_0 siano le coordinate di A) basta osservare che per $\omega=\omega_0$ dev'essere $A=0$ per dedurne subito che $c=-ab\frac{\omega_0}{2}$; e quindi $A'=ab\frac{\omega-\omega_0}{2}$ sarà la formola che dà l'area cercata del settore ellittico.

Supponendo poi che si tratti della intera ellisse, e osservando che allora deve farsi $\omega_0 = 0$, $\omega = 2\pi$, si trova subito che per l'area A' dell'intera ellisse si ha $A' = \pi ab$, cioè *quest'area è eguale a quella di un cerchio il cui raggio è medio proporzionale fra i due semi-assi a e b dell'ellisse.*

4.° Volendo l'area A' del settore iperbolico, si osserverà che se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è l'equazione della iperbola, si può porre, come già si fece altra volta

(10) $$x = a\cosh\omega\ ,\ y = b\,\mathrm{senh}\,\omega\ ,$$

e perciò si ha $dA' = \frac{ab}{2}d\omega$, e quindi sarà come nel caso precedente $A' = ab\frac{\omega - \omega_0}{2}$, essendo ω_0 l'angolo ω corrispondente al punto iniziale.

Supponendo ora che il raggio vettore iniziale sia sull'asse delle x, cioè sia $\omega_0 = 0$, si avrà $2A' = ab\omega$, e se l'iperbola è equilatera, e il semi-asse trasverso è l'unità, si avrà $2A' = \omega$; talchè avendo riguardo alle (10), si potrà dire che se x e y sono le coordinate dei punti di una iperbola equilatera il cui semi-asse trasverso è l'unità, si ha $x = \cosh 2A'$, $y = \mathrm{senh}\,2A'$, cioè x e y sono respettivamente il coseno e seno iperbolico del doppio settore compreso fra l'asse trasverso, la curva e il raggio vettore del punto che ha quelle coordinate.

Questo risultato collega sempre più le funzioni iperboliche $\mathrm{senh}\,\omega$ e $\cosh\omega$ con quelle circolari $\mathrm{sen}\,\omega$ e $\cos\omega$, poichè anche in queste si ha analogamente che l'arco ω è il doppio del settore circolare corrispondente all'arco stesso.

E a causa del risultato medesimo le funzioni inverse delle due $x = \cosh\omega$ e $y = \mathrm{senh}\,\omega$ si rappresentano con $\omega = 2\,\mathrm{sett}\cosh x$ e $\omega = 2\,\mathrm{sett}\,\mathrm{senh}\,y$ e si leggono *doppio settore il cui coseno iperbolico è x*, o *doppio settore il cui seno iperbolico è y.*

5.° Si voglia anche l'area compresa fra una iperbola, un asintoto e due rette, una delle quali fissa e l'altra mobile, e ambedue parallele all'altro asintoto.

Riferendo l'iperbola agli asintoti come assi x e y, e chiamando θ il loro angolo, l'equazione della iperbola sarà $xy = m^2$, essendo m una costante; e se A è l'area cercata, sarà $dA = y\,\mathrm{sen}\,\theta dx = m^2\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{dx}{x}$, e perciò A e $m^2\mathrm{sen}\,\theta\log x$ avranno lo stesso differenziale, e quindi si avrà $A = m^2\mathrm{sen}\,\theta\log x + c$ essendo c una costante; talchè osservando che, se x_0 è l'ascissa corrispondente alla ordinata iniziale dalla quale si incominciano a contare le aree, per $x = x_0$ si deve avere $A = 0$, si conclude che sarà $c = -m^2\mathrm{sen}\,\theta\log x_0$, e perciò sarà $A = m^2\mathrm{sen}\,\theta\log\frac{x}{x_0}$.

Se l'iperbola è equilatera si ha $\theta = \frac{\pi}{2}$, e $A = m^2\log\frac{x}{x_0}$; e quindi se si suppone $m^2 = 1$ e si prende per ordinata fissa quella del vertice, ciò che porta che sia $x_0 = 1$, si avrà $A = \log x$; cioè *l'area iperbolica così determinata sarà il logaritmo neperiano dell'ascissa.* È per questo che i logaritmi neperiani vengono detti anche *logaritmi iperbolici.*

Differenziali degli archi.

311. — Negli studii precedenti intorno alle aree delle curve piane, noi abbiamo avuto soltanto bisogno di ammettere che le curve di cui si trattava fossero continue; ora passando a trattare degli archi delle curve, ammetteremo anche che queste curve siano tali che se $f(x)$ è la funzione che rappresenta la loro ordinata nel tratto di esse che si considera, la funzione $f(x)$ abbia una derivata finita e continua.

Incominceremo col definire ciò che s'intende per lunghezza di un arco di curva, dicendo che questa lunghezza è il limite del perimetro di un poligono, inscritto con una legge qualsiasi nella curva in tutto il tratto che si considera, quando i suoi lati impiccoliscono indefinitamente; e riservandoci in calcolo integrale di dimostrare l'esistenza di questo limite, non solo nel caso che ora consideriamo di $f'(x)$ finita e continua, ma anche in casi molto più generali, ammetteremo ora senz'altro che esso, oltre essere finito (come si troverà facilmente anche adesso) sia anche determinato e indipendente dalla legge secondo la quale la iscrizione del poligono è fatta.

Ciò premesso, si vede chiaramente che se la curva è riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, e (x_r, y_r), $(x_r + \Delta x_r, y_r + \Delta y_r)$ sono le coordinate degli estremi M e M' di uno dei lati MM' del poligono, essendo Δx_r e Δy_r legati fra loro dalla relazione $\Delta y_r = f(x_r + \Delta x_r) - f(x_r) = f'(x_r + \theta_r\Delta x_r)\Delta x_r$ con $0 < \theta_r < 1$, la lunghezza di questo lato sarà $\sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2}$, e quindi l'arco s di curva compreso fra due punti A e B sarà

$$s = \lim\sum\sqrt{\Delta x_r^2 + \Delta y_r^2} = \lim\sum\Delta x_r\sqrt{1 + \frac{\Delta y_r^2}{\Delta x_r^2}}\ ,$$

la somma essendo estesa a tutti i lati del poligono; e di qui appunto osservando che $\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = f'(x_r + \theta_r\Delta x_r) = f'(\xi_r)$, dove ξ_r è l'ascissa di uno dei punti compresi fra gli estremi M e M' del lato corrispondente del poligono, e osservando pure che per le ipotesi fatte $f'(x)$ è sempre inferiore ad un numero finito A, si trova che la somma $\sum \Delta x_r \sqrt{1+\frac{\Delta y_r^2}{\Delta x_r^2}}$ sarà sempre inferiore a $\sqrt{1+A^2}\sum \Delta x_r$ o a $(x-a)\sqrt{1+A^2}$, essendo a ed x le ascisse dei punti estremi A e B; e questo basta per poter dire che il limite richiesto, quando sia determinato, non potrà superare un numero finito: talchè resterebbe ora soltanto a mostrarsi che esso è effettivamente determinato ed è lo stesso qualunque sia la legge secondo la quale il poligono viene inscritto, ciò che, come abbiamo detto, sarà fatto in calcolo integrale.

Si osservi ora che ogni termine della somma precedente, per es. l'r^0, potrà porsi sotto la forma

$$\sqrt{1+f'(\xi_r)^2}\,\Delta x_r = \left\{\sqrt{1+f'(x_r)^2}+\left[\sqrt{1+f'(\xi_r)^2}-\sqrt{1+f'(x_r)^2}\right]\right\}\Delta x_r =$$
$$=\left\{\sqrt{1+f'(x_r)^2}+\frac{f'(\xi_r)^2-f'(x_r)^2}{\sqrt{1+f'(\xi_r)^2}+\sqrt{1+f'(x_r)^2}}\right\}\Delta x_r\,,$$

e se μ_r e μ'_r saranno i valori massimo e minimo di $f'(x)$ fra x_r e $x_r+\Delta x_r$, il secondo termine di questa espressione, che evidentemente non sarà mai superiore in valore assoluto a quello di $\frac{1}{2}\{f'(\xi_r)^2-f'(x_r)^2\}\Delta x_r$, sarà anche inferiore a $M(\mu_r-\mu'_r)\Delta x_r$ e potrà scriversi sotto la forma $\eta_r M(\mu_r-\mu'_r)\Delta x_r$, essendo η_r un numero compreso fra -1 e 1 e M il massimo valore di $f'(x)$ nel tratto di curva C che si considera.

Segue da questo che pel valore di s si avrà

$$s=\lim\Sigma\{\Delta x_r\sqrt{1+f'(x_r)^2}+A''_r(\mu_r-\mu'_r)\Delta x_r\},$$

essendo A''_r un numero che per tutti i lati del poligono può supporsi inferiore a un numero finito L; e quindi tenendo conto della circostanza già notata che quando le Δx_r si prendano abbastanza piccole la differenza $\mu_r-\mu'_r$ può rendersi minore di quel numero che più ci piace, e questo per qualsiasi lato del poligono contemporaneamente, e applicando il solito teorema sugl'infinitesimi di cui già facemmo uso nel caso delle aree o seguendo il processo indicato nella nota del § 305 a pag. 421, si concluderà subito che quando $\frac{dy}{dx}$ è sempre finito e continuo per tutti i valori di x nel tratto che si considera, si ha anche $s=\lim\sum\Delta x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, ovvero

(1) $$s=\lim\sum dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\lim\sum\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

talchè s si presenta così come limite del poligono iscritto anche quando, considerando senz'altro i suoi lati come infinitesimi, nelle loro espressioni $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ a Δx e Δy si sostituiscono dx e dy, riguardando cioè come uguali a $x+dx$ e $y+dy$ le coordinate del punto della curva che è il vertice che nel poligono iscritto succede a quello di coordinate x e y.

312. — Ottenuta così una espressione analitica generale per la quantità s che abbiamo chiamata arco della curva che si considera, e rispetto alla quale abbiamo detto di riservarci nel calcolo integrale di dimostrare che essa è effettivamente determinata, osserveremo ora che, quando l'estremo B si faccia muovere sulla curva, questa quantità s viene naturalmente ad essere una funzione di x nell'intervallo corrispondente alla porzione di curva che si considera; e quindi è il caso di cercarne il differenziale se, come appunto troveremo, questo differenziale esiste.

Per questo osserveremo che se s è la lunghezza dell'arco contato da un punto iniziale A ad un punto variabile M la cui ascissa è x_0, quando da M si passa ad un punto vicinissimo M' a destra o a sinistra di M e la cui ascissa sia x_0+h, chiamando Δs l'accrescimento che così viene ad avere s, si avrà $\Delta s=\lim\Sigma dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, la somma essendo estesa a tutti i lati di un poligono iscritto nell'arco MM'; e se s'indica con $\frac{dy_0}{dx_0}$ il valore di $\frac{dy}{dx}$ nel punto M, con un processo del tutto simile a quello usato precedentemente, si troverà subito

$$\Delta s=\lim\left[\sum dx\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}+\sum dx\left\{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}\right\}\right]=$$
$$=\lim\left[\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}\sum dx+\eta(\mu_1-\mu'_1)\sum dx\right]=h\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}+\eta(\mu_1-\mu'_1)h,$$

essendo al solito $-1<\eta<1$, e avendo indicato con μ_1 e μ'_1 il massimo e il minimo dei valori di $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ nell'intervallo da x_0 a x_0+h.

Ma al solito prendendo h abbastanza piccolo, la differenza $\mu_1-\mu'_1$ verrà piccola a piacere nostro; quindi evidentemente $h\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}$ o $dx\sqrt{1+\frac{dy_0^2}{dx_0^2}}$ è la parte di Δs che si deve prendere come il differenziale di s; talchè si può ora concludere che per un punto qualunque $(x\,,\,y)$ si ha

(2) $$ds=dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

e

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,; \qquad s=\lim\sum ds\,. \tag{3}$$

È poi da notare che i risultati dei due ultimi paragrafi può dirsi che valgano anche quando vi sono dei punti in numero finito nei quali $\frac{dy}{dx}$ è infinita pure essendo sempre continua, giacchè allora se $x=x(y)$ è la funzione inversa di $y=f(x)$, essa nelle vicinanze dei punti stessi e in questi punti avrà un significato e avrà una derivata $\frac{dx}{dy}$ determinata, finita e continua; e quindi presa y come variabile indipendente invece di x, almeno in tratti sufficientemente piccoli che racchiudano i punti dove $\frac{dy}{dx}$ è infinito, si troveranno ancora le formole

$$s=\lim\sum\sqrt{dx^2+dy^2}\,, \qquad ds=dy\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2}+1}=\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

che può dirsi in conseguenza che valgano per tutte le curve la cui tangente oltre essere determinata in tutto il tratto che si considera non è parallela all'asse delle y altro che in un numero finito di punti, e varia con continuità nella sua posizione al variare con continuità del punto di contatto.

Le stesse formole poi sotto la forma

$$s=\lim\sum\sqrt{dx^2+dy^2}\,, \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

valgono qualunque sia la variabile indipendente ω, sia perchè queste si hanno subito dalle precedenti applicando quelle del cangiamento della variabile indipendente, sia perchè le avremmo trovate subito sotto questa forma se fin da principio avessimo preso la curva come rappresentata dalle equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$; e così in generale si ha $\frac{ds}{d\omega}=\sqrt{x'(\omega)^2+y'(\omega)^2}$.

313. — Queste formole conducono subito al teorema che dice che *nelle solite curve piane che hanno una tangente determinata la cui posizione varia con continuità al variare al modo stesso del punto di contatto nell'intervallo che si considera, il rapporto dell'arco alla corda ha per limite l'unità.*

Indicando infatti con c la corda $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ di un arco Δs e supponendo in modo generale che sia ω la variabile indipendente, con che si tratta subito

anche il caso in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle y, si avrà

$$\frac{\Delta s}{c}=\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\frac{\Delta s}{\Delta\omega}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\omega}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta\omega}\right)^2}}\,,$$

e quindi passando al limite e valendoci dell'ultima delle formole precedenti si troverà che $\lim\frac{\Delta s}{c}=1$, come appunto volevamo dimostrare.

Con questo noi possiamo intanto affermare che *l'arco e la corda nelle curve quando divengono infinitesimi non possono differire fra loro altro che per un infinitesimo di ordine superiore al primo.* Fra breve poi si vedrà anche che almeno nei casi ordinari questa differenza è del terz'ordine, e s'intende che questa osservazione potrà tornare utilissima a causa dei teoremi generali che fin dal principio abbiamo dato intorno agli infinitesimi.

314. — Osserviamo che, avendo trovato che il differenziale dell'arco di una curva piana qualsiasi che abbia una tangente determinata la cui posizione varia con continuità insieme al punto di contatto è dato dalla formola $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ o $ds^2=dx^2+dy^2$, e in questa la variabile indipendente può esser presa a piacere, s'intende subito che quando si voglia ds^2 in coordinate polari basta ricavare dx e dy dalle formole $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega$, e poi sostituire.

Si trova così la formola seguente

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\omega^2\,, \tag{4}$$

la quale si sarebbe potuta ottenere subito anche osservando che per ciò che precede all'arco che passa per due punti infinitamente vicini si può sostituire la retta che li unisce e viceversa; e quindi ds si può considerare come il lato MM′ di un triangolo MCM′ di cui un altro lato MC è la corda dell'arco di cerchio MC di raggio ρ che corrisponde all'angolo $d\omega$ e per la quale può prendersi quest'arco di cerchio $\rho d\omega$, e il terzo lato è $\mathrm{M'C}=\Delta\rho$ e l'angolo M′CM tende a divenire un angolo retto.

La stessa formola dunque è quella che si avrebbe considerando senz'altro il triangolo MCM′ come rettangolo in C e considerando le corde MC e MM′ come confuse cogli archi.

315. — Se poi si avesse

$$x=x(u\,,v)\,,\quad y=y(u\,,v) \tag{5}$$

essendo u e v due nuove variabili, una delle quali sarà la variabile indipendente quando non siano ambedue funzioni di una terza variabile ω che sia essa la variabile indipendente, allora fra u e v sussisterebbe sempre una relazione della forma $\psi(u, v)=0$ che verrebbe dalla equazione della curva $y=f(x)$ o $\mathrm{F}(x, y)=0$; e poichè in questo caso si avrebbe sempre $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$, $dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$, sostituendo in ds^2 si giungerebbe subito alla formola

$$ds^2=\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}du\,dv+\mathrm{G}dv^2, \tag{6}$$

nella quale

$$\mathrm{E}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \quad \mathrm{F}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \mathrm{G}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2; \tag{7}$$

e in quest'espressione di ds^2 il du e il dv sarebbero legati fra loro dalla relazione $\frac{\partial \psi}{\partial u}du+\frac{\partial \psi}{\partial v}dv=0$ che viene dalla equazione $\psi(u, v)=0$ della curva, o si esprimerebbero pel differenziale della variabile indipendente ω mediante le formole colle quali fossero stabilite le relazioni fra u e v e questa variabile ω (*).

(*) Colle coordinate cartesiane (ortogonali o oblique) x e y i punti del piano si possono considerare come determinati dalle intersezioni di due sistemi di rette parallele agli assi y e x delle quali le coordinate x e y possono riguardarsi come i parametri respettivi, perchè per ogni valore particolare a o b di queste coordinate x, y viene individuata la retta parallela agli assi y o x alla quale lo stesso valore si riferisce.

I punti del piano però, almeno entro certe porzioni di esso, possono essere determinati senza ambiguità anche dalle intersezioni di altri sistemi di linee, come per es. da sistemi di rette che escono da un punto e sistemi di cerchi che hanno questo punto per centro quando siamo nel caso delle coordinate polari; o da sistemi di ellissi e di iperbole omofocali quando siamo nel caso delle coordinate che si dicono *coordinate ellittiche*, considerando allora separatamente i quattro quadranti del piano determinati dagli assi di quelle ellissi e iperbole, ecc.

Così nel caso delle coordinate polari (ρ, ω) il raggio vettore ρ è evidentemente il parametro dei cerchi, e l'angolo polare ω è il parametro delle rette, e le formole $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega$ che servono a passare dalle coordinate cartesiane ortogonali alle polari sono quelle che legano i parametri x e y delle prime linee coordinate a quelli ρ e ω delle seconde relative allo stesso punto.

E nel caso delle coordinate ellittiche (λ, μ), essendo $\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1$ le equazioni delle ellissi omofocali corrispondenti a ogni valore positivo di λ non inferiore a c, e $\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-c^2}=1$ le equazioni delle iperbole pure omofocali corrispondenti

316. — Farò notare che bene spesso nello studio delle curve piane torna comodo di prendere per variabile indipendente il loro arco s contato a partire da una origine arbitraria, ma che, una volta scelta, resta poi sempre fissa.

Allora pei punti della curva le coordinate x e y e tutti gli altri elementi di essa si possono riguardare come funzioni di s, e quando si abbiano le formole (5), anche u e v vengono ad essere funzioni di s.

---

a ogni valore di μ fra 0 e c (gli estremi 0 e c incl.), λ e μ sono i parametri di queste ellisse e iperbole respettivamente, e le formole che servono a passare dalle coordinate cartesiane ortogonali (x, y) alle ellittiche (λ, μ), o che legano i parametri x e y delle prime linee coordinate a quelli λ e μ delle seconde sono quelle che si ottengono dalle precedenti risolvendole rispetto a x^2 e y^2, cioè sono le seguenti

$$x^2=\frac{\lambda^2\mu^2}{c^2}, \quad y^2=\frac{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2};$$

e i segni da prendersi nei valori che verranno di qui per x e y saranno diversi a seconda dei quadranti nei quali i punti dovranno trovarsi.

In generale poi quando si abbiano due sistemi distinti di linee del piano, ciascuna delle quali, per ogni sistema separatamente, venga determinata dal valore di un certo parametro u o v, e che colla loro intersezione determinino i varii punti di certe porzioni di esso, queste linee saranno dette un sistema di *coordinate curvilinee* o *linee coordinate* del piano di parametri u e v, e questi parametri si diranno le variabili coordinate corrispondenti; e poichè ogni punto (x, y) del piano in un certo campo si troverà alla intersezione di una linea del primo sistema con una linea del secondo e corrisponderà quindi a un certo sistema di valori dei parametri u e v, le formole che servono a passare dalle coordinate cartesiane (x, y) alle corrispondenti curvilinee (u, v) o che legano i parametri x e y delle prime a quelli u e v delle seconde saranno della forma $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$; dal che si vede che geometricamente il caso considerato nel testo è quello in cui i punti del piano, anzichè essere determinati dalle intersezioni dei sistemi di rette parallele che costituiscono le ordinarie linee coordinate cartesiane, sono determinati dalla intersezione dei sistemi di linee, prese come linee coordinate, che hanno i parametri u e v.

E per queste coordinate, ogni linea del sistema u o v respettivamente avrà per equazione in coordinate cartesiane x, y quella $\varphi(x, y, u)=0$ o $\psi(x, y, v)=0$ che risulta dalle precedenti $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ eliminandovi v o u respettivamente e dando a u o a v il valore speciale corrispondente alla linea che si considera: o anche se vuolsi ogni linea del sistema u o v respettivamente sarà rappresentata dal sistema delle equazioni precedenti

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v)$$

nelle quali per ogni linea u o v al parametro u o v respettivamente s'intenda dato il corrispondente valore *costante* che esso deve avere, restando variabile l'altro parametro v o u.

Le coordinate x e y, o le variabili u e v delle (5) si esprimeranno allora per s mediante equazioni della forma

$$x = x(s) \ , \ y = y(s) \ , \tag{8}$$

$$u = u(s) \ , \ v = v(s) \ , \tag{9}$$

nelle quali le funzioni dei secondi membri verranno a un sol valore, almeno per tutti i punti della curva posti da una stessa parte del punto iniziale; e fra i differenziali di s e di x e y o di u e v sussisteranno le relazioni date precedentemente.

317. — Coll'introduzione dell'arco s come variabile indipendente molte formole prendono forme semplicissime; e in particolare i coseni degli angoli α e β che la tangente a una curva fa cogli assi x e y supposti ortogonali prendono una forma semplice e notevole.

Fissando infatti che l'angolo α debba essere l'angolo che la direzione della tangente presa nel senso secondo cui s cresce fa colla direzione positiva dell'asse delle x, e fissando lo stesso per l'angolo β rispetto all'asse delle y, è chiaro che quando si passa da un punto M a un punto vicinissimo della curva, gli accrescimenti Δx e Δy che riceveranno x e y saranno le proiezioni della corda c che riunisce i due punti M e M′, e si avrà $\Delta x = c \cos \alpha_1$, $\Delta y = c \cos \beta_1$, ovvero $\cos \alpha_1 = \frac{\Delta x}{c}$, $\cos \beta_1 = \frac{\Delta y}{c}$, essendo α_1 e β_1 gli angoli della corda c coi due assi, angoli che al limite diverranno quelli α e β della tangente.

Ma pel calcolo del limite dei rapporti $\frac{\Delta x}{c}$ e $\frac{\Delta y}{c}$, alla corda c si può sostituire ds che ne differisce soltanto per un infinitesimo di ordine superiore, come a Δx e Δy si possono sostituire dx e dy; quindi, facendo queste sostituzioni e osservando che allora i secondi membri si riducono a $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$, e per le curve che consideriamo hanno valori determinati come se già fossimo passati al limite, e ciò quand'anche la tangente sia parallela all'asse delle y e qualunque sia la variabile indipendente, si conclude subito che $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ sono i valori limiti di $\cos \alpha_1$ e $\cos \beta_1$, e perciò si hanno le formole

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} \ , \ \cos \beta = \frac{dy}{ds} \ , \tag{10}$$

che sono quelle cercate, e nelle quali i secondi membri, quando invece che come quozienti di differenziali si riguardino come derivate, saranno le derivate $x'(s)$ e $y'(s)$ di x e y considerate come funzioni di s.

È da notare che queste formole vengono precisamente quali si troverebbero se ds coincidesse colla tangente, giacchè, come dicemmo altra volta, il punto $(x+dx \, , y+dy)$ è sempre sulla tangente. Ciò dipende dalla circostanza che quando, cangiando se occorre gli assi coordinati, si prende per es. l'asse delle y in una direzione che non sia parallela alla tangente, la differenza fra le variazioni delle ordinate della curva e della tangente corrispondenti a una stessa variazione dell'ascissa è di ordine superiore al primo rispetto a quest'ultima variazione; e questo evidentemente fa sì che la parte della tangente compresa fra la ordinata iniziale e la successiva differisce dalla corda, e quindi anche dall'arco elementare, per quantità infinitesime di ordine superiore al primo, e all'infuori quindi di queste quantità la tangente può intendersi confusa colla corda e coll'arco elementare (*).

(*) Se si hanno due curve che s'incontrano in un punto M, e per le quali le coordinate dei singoli punti siano respettivamente $(x \, , y)$ e $(x_1 \, , y_1)$, e gli archi siano s e s_1, a causa delle formole trovate si vede subito che per l'angolo θ delle tangenti alle curve stesse nel punto M o, come si dice, per l'angolo di queste curve nella direzione dei loro archi crescenti, avremo la formola

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds_1} = \frac{dx\,dx_1 + dy\,dy_1}{ds\,ds_1} \ , \tag{α}$$

la quale ci darà subito l'altra

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{ds^2\,ds_1^2 - (dx\,dx_1 + dy\,dy_1)^2}}{ds\,ds_1} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)(dx_1^2+dy_1^2) - (dx\,dx_1+dy\,dy_1)^2}}{ds\,ds_1} \ ,$$

ovvero

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{dy\,dx_1 - dy_1\,dx}{ds\,ds_1} \ , \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{tang} \theta = \pm \frac{dy\,dx_1 - dy_1\,dx}{dx\,dx_1 + dy\,dy_1} \ , \tag{β}$$

qualunque sia la variabile indipendente che si sceglierà per la prima curva, e quella che si sceglierà per la seconda.

In particolare quindi se, avendo una curva in coordinate polari, si vuole l'angolo θ che essa fa col raggio vettore, si osserverà che per la curva avremo le equazioni

$$x = \rho \cos \omega \ , \ y = \rho \operatorname{sen} \omega \ ,$$

con ρ e ω legate fra loro dalla equazione della curva in coordinate polari, o funzioni di una variabile indipendente data, e pel raggio vettore avremo le altre

$$x_1 = \rho \cos \omega \ , \ y_1 = \rho \operatorname{sen} \omega \ ,$$

nelle quali ω ha un valore costante uguale all'angolo che il raggio stesso fa coll'asse polare, e ρ è variabile da punto a punto del raggio.

Conseguentemente, avendosi per la curva

$$dx = \cos \omega \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \omega \, d\omega \ , \ dy = \operatorname{sen} \omega \, d\rho + \rho \cos \omega \, d\omega \ , \ ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 \ ,$$

318. — Le formole (9) unite alle altre

$$(11) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad 0 = dx\, d^2x + dy\, d^2y,$$

la seconda delle quali si ottiene dalla prima differenziandola nella ipotesi di s variabile indipendente c, conducono anche a determinare l'ordine d'infi-

---

e pel raggio vettore

$$dx_1 = \cos\omega\, d\rho \quad , \quad dy_1 = \operatorname{sen}\omega\, d\rho \quad , \quad ds_1 = d\rho \ ,$$

per l'*angolo cercato* θ *che la curva fa col raggio vettore* avremo le formole

$$(\gamma) \quad \cos\theta = \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}} \ , \quad \operatorname{sen}\theta = \pm \frac{\rho\, d\omega}{ds} = \pm \frac{\rho\, d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, \ \operatorname{tang}\theta = \pm \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} \ ,$$

e nel caso di ω variabile indipendente avremo

$$(\delta) \qquad \cos\theta = \frac{\rho'}{s'} \ , \quad \operatorname{sen}\theta = \pm \frac{\rho}{s'} \ , \quad \operatorname{tang}\theta = \pm \frac{\rho}{\rho'} \ .$$

essendo ρ' e s' le derivate di ρ e di s rispetto ad ω.

Queste formole si troverebbero subito anche considerando il triangolo infinitesimo formato dalla curva, dal cerchio descritto col raggio vettore del punto che si considera e col centro nel polo, e dal raggio vettore del punto infinitamente vicino, e sostituendo agli archi le corde, ecc.

E trovato ora l'angolo θ della tangente col raggio vettore in coordinate polari, basta ricordare le definizioni che si dettero nella seconda nota alla pag. 395 per le lunghezze polari T_p e N_p della tangente e della normale, e per la sotto-tangente e la sotto-normale polari $S_{t.p}$, $S_{n.p}$ di una curva, e costruire i triangoli rettangoli formati respettivamente dalla tangente o dalla normale col raggio vettore e colla perpendicolare a questo raggio per trovare subito le espressioni analitiche di quelle linee.

Colla variabile indipendente ω, facendo astrazione dai segni, si hanno subito infatti le formole seguenti

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{ll} T_p = \dfrac{\rho}{\cos\theta} = \dfrac{\rho s'}{\rho'} = \dfrac{\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho'} \quad , & N_p = \dfrac{\rho}{\operatorname{sen}\theta} = s' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \ , \\ S_{t.p} = \rho \operatorname{tang}\theta = \dfrac{\rho^2}{\rho'} \quad , & S_{n.p} = \rho \cot\theta = \rho' \ , \end{array} \right.$$

che danno appunto le espressioni cercate.

In particolare dunque per la spirale di Archimede $\rho = a\omega$ avremo $\operatorname{tang}\theta = \pm\omega$, $S_{n.p} = a$ donde si vede che in questa spirale *la sotto-normale polare è costante* e l'angolo θ della tangente col raggio vettore cresce continuamente coll'allontanarsi della curva dal polo.

E nella spirale logaritmica $\rho = ae^{m\omega}$ avremo $\rho' = m\rho$, $\operatorname{tang}\theta = \pm\dfrac{1}{m}$, $T_p = \dfrac{\sqrt{1+m^2}\,\rho}{m}$, $N_p = \sqrt{1+m^2}\,\rho$, $S_{t.p} = \dfrac{\rho}{m}$ e $S_{n.p} = m\rho$, ciò che mostra che *questa spirale taglia in ogni punto il raggio vettore sotto lo stesso angolo, e la tangente, la normale, la sotto-tangente e la sotto-normale polari sono tutte proporzionali a questo raggio vettore.*

nitesimo, almeno nei casi ordinarii, della differenza fra l'arco elementare s e la corda corrispondente c, poichè esse ci permettono di dimostrare quanto affermammo in fine del § 313 [pag. 431] cioè che *nelle curve per le quali* x, y *considerate come funzioni dell'arco* s *ammettono una derivata terza determinata e sempre inferiore a un numero finito, almeno in tutto un intorno del punto che si considera* (il punto stesso al più escluso) *e dalla parte in cui è preso l'arco, la differenza fra l'arco e la corda è infinitesima almeno del terz'ordine rispetto all'arco.*

Si prenda infatti un sistema di assi x e y dei quali il primo sia diretto secondo la tangente alla curva nel punto M preso dalla parte in cui si considera s, e il secondo sia nella direzione della normale, e si supponga che l'arco s incominci a contarsi da M.

In forza delle ipotesi che abbiamo fatte sulla esistenza delle derivate di x e y in un piccolo intorno di M, la formola di Maclaurin abbreviata, per s abbastanza piccolo, ci darà le altre

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_{\theta s} \frac{s^3}{1.2.3} \ , \quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_{\theta_1 s} \frac{s^2}{1.2},$$

dove con x_0, y_0, $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0$, ... s'indicano i valori di queste quantità nel punto iniziale M, e cogl'indici θs e $\theta_1 s$ applicati a $\dfrac{d^3x}{ds^3}$ e $\dfrac{d^2y}{ds^2}$ s'indicano invece valori di queste derivate presi in punti intermedî dell'arco s e distanti da M di θs e $\theta_1 s$.

Ma nel punto M, per la scelta che abbiamo fatto degli assi, e per le (10) si ha $x_0 = y_0 = 0$, $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0 = 1$, $\left(\dfrac{dy}{ds}\right)_0 = 0$, e quindi a causa della seconda delle (11) sarà anche $\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = 0$; dunque si avrà

$$x = s + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_{\theta s} \frac{s^3}{6} = s + a s^3 \ , \ y = \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_{\theta_1 s} \frac{s^2}{2} = b s^2 \ ,$$

essendo a e b quantità che anche all'impiccolire indefinito di s restano inferiori a un numero finito; e perciò si avrà $x^2 + y^2 = c^2 = s^2 + (2a + b^2) s^4 + a^2 s^6$, donde

$$s^2 - c^2 = (s-c)(s+c) = -(2a+b^2) s^4 - a^2 s^6, \text{ ovvero } s - c = -(2a+b^2) \frac{s^4}{s+c} - \frac{a^2 s^6}{s+c} = \mathrm{P}\, s^3,$$

essendo P una nuova quantità sempre inferiore ad un numero finito; e questo dimostra appunto quanto abbiamo enunciato. E poichè nelle formole che hanno servito a questa dimostrazione per y figurano soltanto le derivate seconde, così in quanto ad y per la validità del teorema propriamente basterà richiedere che esistano, essendo sempre finite, le derivate seconde in tutti i punti dell'intorno di M che si considera (questo punto M al più escluso) qualunque cosa accada delle derivate terze di y (*).

Farò notare che quando invece di ammettere la esistenza delle derivate terze di x e y o anche soltanto di x, ci si fosse limitati ad ammettere che le derivate seconde di x fossero finite e continue nel punto M, allora valendoci delle formole

$$x = s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_{\theta_2 s} \frac{s^2}{1 . 2}, \quad y = bs^2,$$

e osservando che per s abbastanza piccolo i valori di $\frac{d^2x}{ds^2}$ da $s=0$ a $s=s$ sono prossimi a zero quanto si vuole, col metodo stesso che abbiamo seguito sopra saremmo ancora giunti a provare che la differenza $s-c$ col tendere a zero di s viene infinitesima di ordine superiore al secondo, ma non avremmo potuto dimostrare che essa viene infinitesima del terz'ordine almeno. Anche in questo caso poi, come nel precedente, non è propriamente necessario l'ammettere l'esistenza e la continuità anche delle derivate seconde di y nel punto M, ma basta ammettere che queste derivate esistano e siano inferiori ad un numero finito in tutti i punti diversi da M in un intorno di M preso dalla parte dalla quale si considera s.

319. — Riservandoci di fare in calcolo integrale maggiori applicazioni delle formole precedenti alla rettificazione delle curve piane, faremo ora soltanto le seguenti:

1.° Si voglia l'arco fra il punto $x=x_0$ e il punto $x=x$ per la curva, che si presenta in meccanica ed è conosciuta col nome di *catenaria*, $y = a\cosh\frac{x}{a}$ dove a è una lunghezza costante.

(*) Notiamo che quando si tenga conto di quanto si disse sulla formola di Taylor nella nota alla pag. 87, si vede subito che pel teorema enunciato non occorre ammettere l'esistenza della derivata terza per x e seconda per y nei punti fuori di quello che si considera, ammettendo però allora che esistano e siano determinate e finite queste derivate a destra o a sinistra *nel punto* che si considera, pur potendo la derivata a destra non essere uguale a quella a sinistra quando, considerandosi l'arco dalle due parti di M, queste derivate devono esistere ed essere finite tutte e due. Invece nel teorema come è stato enunciato e dimostrato sopra non si richiede l'esistenza di queste derivate nel punto che si considera, mentre si richiede che esistano, essendo sempre finite, nei punti vicini.

Per questo si osserverà che $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\frac{x}{a}}$, ovvero $ds = \cosh\frac{x}{a}\,dx = a\,d\operatorname{senh}\frac{x}{a}$, e quindi s e $a\operatorname{senh}\frac{x}{a}$ non potranno differire fra loro altro che per una costante c, e perciò si avrà $s = a\operatorname{senh}\frac{x}{a} + c$; talchè se l'arco s'incomincia a contare dal punto la cui ascissa è x_0, allora dovendo essere $a\operatorname{senh}\frac{x_0}{a} + c = 0$, si avrà per l'arco richiesto $s = a\left\{\operatorname{senh}\frac{x}{a} - \operatorname{senh}\frac{x_0}{a}\right\}$; e se $x_0=0$, sarà $s = a\operatorname{senh}\frac{x}{a}$ ovvero $s=\sqrt{y^2-a^2}$, cioè l'arco s sarà il lato di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è l'ordinata e l'altro lato è a; e le equazioni (8) che esprimono x e y per l'arco s contato a partire dal punto $(x=0, y=a)$ saranno le seguenti $x = 2a\operatorname{sett\,senh}\frac{s}{a}$, $y=\sqrt{a^2+s^2}$.

2.° Si voglia l'arco della *spirale logaritmica*, cioè della curva che in coordinate polari (ρ, ω) è rappresentata dalla equazione $\rho = ae^{m\omega}$, dove a e m sono due costanti, la prima delle quali potrebbe anche eliminarsi cambiando la direzione dell'asse polare col farlo ruotare di una quantità k determinata dalla condizione $ae^{mk}=1$.

In questo caso volendo servirsi della formola che dà il differenziale ds in coordinate polari, osserveremo che si ha $d\rho = mae^{m\omega}d\omega = m\rho\,d\omega$, e quindi sarà $ds = \sqrt{m^2+1}\,\rho\,d\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}d\rho$, donde si vede che s e $\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\rho$ non potranno differire fra loro altro che per una costante c, e perciò si avrà $s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\rho + c$, talchè se l'arco s s'incomincia a contare dal punto $(\rho = a, \omega = 0)$ si avrà $c = -\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}a$ e $s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(\rho - a)$.

3.° Si voglia l'arco della *spirale d'Archimede*, cioè della curva che in coordinate polari ha per equazione $\rho = a\omega$, essendo a una costante.

Per questo osserviamo che avendosi ora $d\rho = a\,d\omega$, si troverà subito $ds = a\sqrt{1+\omega^2}\,d\omega$; e qui farà comodo d'introdurre una nuova variabile indipendente onde trovar subito s.

Si porrà perciò $\omega = \operatorname{senh} t$, essendo t questa nuova variabile, e così si avrà $d\omega = \cosh t\,dt$, e $ds = a\cosh^2 t\,dt$; e poichè $\cosh 2t = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t = 2\cosh^2 t - 1$, avremo anche $ds = \frac{a}{2}(1+\cosh 2t)\,dt = \frac{a}{2}d\left(t + \frac{\operatorname{senh} 2t}{2}\right)$, e si concluderà quindi che s e $\frac{a}{2}\left(t+\frac{\operatorname{senh} 2t}{2}\right)$ non possono differire fra loro altro che per una costante c, e si ha perciò $s=\frac{a}{2}\left(t+\frac{\operatorname{senh} 2t}{2}\right)+c$.

E se si stabilisce che l'arco debba incominciare a contarsi dal polo $\rho=0$, o $\omega=0$, osservando che per questo valore di ω si ha anche $t=0$, e quindi dev'essere $c=0$, si troverà

$$s=\frac{a}{2}\left(t+\frac{\operatorname{senh} 2t}{2}\right)=\frac{a}{2}(t+\operatorname{senh} t \cosh t)=\frac{a}{2}\left(t+\operatorname{senh} t\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\right),$$

ovvero

$$s=\frac{a}{2}\left\{2 \operatorname{sett\,senh} \omega+\omega\sqrt{1+\omega^2}\right\}.$$

XXII.

Curvatura delle linee piane

Raggio e centro di curvatura.

320. — Sia data una linea piana che, almeno nel tratto in cui si considera, abbia in ogni punto una tangente determinata la cui direzione varii con continuità al muoversi con continuità del punto di contatto.

Condotta una tangente a questa curva nel punto M, è evidente che quando muovendoci sulla curva si passerà da M ai punti vicinissimi, la tangente nelle sue successive posizioni cambierà di direzione se la curva non è rettilinea in nessun intorno di M; e nei casi delle curve ordinarie, quando siano esclusi tutt'al più alcuni punti eccezionali, essa non oscillerà intorno alla direzione della tangente primitiva, ma a misura che ci si allontana dal punto M (restando però sempre abbastanza vicini a questo punto) la direzione della nuova tangente si scosterà sempre più dalla tangente primitiva.

Ora, in questi casi, ammesso che si abbiano due o più curve che passino per M ed ivi abbiano la stessa tangente della curva data, s'intende che, quando ci si muova su queste come sulla primitiva, per una stessa lunghezza dell'arco percorso gli spostamenti delle successive tangenti saranno ordinariamente differenti per le differenti curve; ed è evidente che fra le stesse curve quella che più devierà dalla direzione rettilinea (della tangente) o che, per così dire, più s'incurverà di fronte alle altre, sarà la curva per la quale, a parità del cammino percorso sulle curve è maggiore l'angolo che la tangente nelle posizioni successive farà colla tangente primitiva.

321. — Di qui, sia per tener conto anche del cammino percorso sulla curva, sia per sostituire all'angolo delle tangenti un altro elemento che all'impiccolire dell'arco non divenga piccolo quanto si vuole ma ordinariamente si mantenga finito, e al tempo stesso sia un elemento del tutto inerente alla curva nel quale si tenga conto dell'andamento di essa in un certo percorso, sorge

naturale l'idea di servirsi del rapporto fra l'angolo che misura la deviazione della tangente dalla sua direzione primitiva e l'arco percorso, per giudicare dell'incurvamento della linea in quel tragitto; e allora per due curve tangenti fra loro nel punto di partenza, questo nuovo elemento servirà alla pari dell'angolo delle tangenti per decidere del diverso incurvamento dell'una e dell'altra a parità di cammino percorso da esse.

In base a questi concetti, per ogni curva posta a distanza finita e che nel tratto che si considera abbia sempre una tangente determinata che varii di posizione in modo continuo al variare con continuità del punto di contatto, insieme all'angolo i delle tangenti condotte alle due estremità di un arco, si considererà il rapporto dello stesso angolo i di queste tangenti alla lunghezza s dell'arco compreso fra i loro punti di contatto; e mentre il detto angolo i, per seguire gli usi invalsi, si chiamerà *curvatura dell'arco*, il detto rapporto invece si chiamerà *curvatura media dell'arco*.

E siccome, quando si considerino per archi infinitesimi uscenti da un punto M, le curvature medie così definite all'impiccolire indefinito degli archi tenderanno ordinariamente verso un limite determinato, che si potrà riguardare come la curvatura media della linea pei detti archi infinitesimi, questo limite K, quando esiste, si chiamerà la *curvatura della linea nel punto* M; per il che, osservando che, se ad es. il detto limite K sarà finito, il rapporto $\frac{i}{s}$ finirà per essere e restare vicino a K quanto si vuole quando s sarà divenuto sufficientemente piccolo, se ne deduce che per due linee tangenti fra loro in un punto M, e per le quali le curvature in quel punto siano K e K_1, e sia ad es. $K > K_1$, la linea di curvatura maggiore K sarà appunto quella per la quale, *cogli stessi archi piccolissimi sulle due curve,* l'angolo delle tangenti sarà maggiore.

Evidentemente dunque il nome di curvatura nel punto M dato al detto limite di $\frac{i}{s}$ è pienamente giustificato, e questo elemento nuovo che ora così s'introduce negli studii sulle curve servirà bene a studiarne l'andamento negli intorni piccolissimi di ogni punto.

322. — Scelta ora una direzione fissa, per la quale prenderemo poi l'asse delle x, è evidente che l'angolo delle tangenti alla estremità di un arco elementare si potrà sempre considerare, all'infuori del segno, come l'accrescimento (positivo o negativo) $\Delta\tau$ che riceve l'angolo τ che la tangente fa con quella direzione fissa quando si passa dal punto M al punto vicinissimo della curva all'estremità dell'arco che si considera; e similmente questo arco si potrà considerare come l'accrescimento Δs che nello stesso passaggio riceve l'arco s della curva contato da un punto fisso qualsiasi della curva.

Ne segue che l'elemento che abbiamo definito come curvatura della linea nel punto M non sarà altro che il valore assoluto del limite di $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ quando questo limite esiste; e così nel caso che, essendo i punti della curva determinati dai valori di una variabile indipendente x o ω, sì τ che s siano funzioni di questa variabile che ammettano le derivate prime determinate e finite, e quindi anche i differenziali $d\tau$ e ds — come avverrà sempre quando nel punto M che si considera le coordinate x e y dei punti della curva oltre alle derivate prime avranno anche le derivate seconde determinate e finite e le prime, come sempre supponiamo (§ 279 [pag. 392]), non saranno ambedue zero — *la curvatura stessa avrà sempre un significato e sarà data senz'altro dal rapporto* $\frac{d\tau}{ds}$ senza più bisogno di alcun passaggio al limite, e verrà a dipendere, almeno ordinariamente, dalle derivate prime e seconde di x e y.

In questi casi il differenziale $d\tau$ che, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, è l'angolo che formano le due tangenti infinitamente vicine condotte all'estremità di un arco infinitesimo Δs, si dice *angolo di contingenza* della curva nel punto M, e così la curvatura di una linea in un punto viene ad essere *il rapporto dell'angolo di contingenza $d\tau$ al differenziale corrispondente ds dell'arco.*

Aggiungiamo inoltre che propriamente trattando della curvatura di una linea in un punto noi dovremmo distinguere la curvatura a destra e quella a sinistra; ma riferendoci a quel che accade nei casi ordinarii noi ci occuperemo soltanto di quei punti della curva nei quali la curvatura che si avrebbe a destra non differisce da quella che si avrebbe a sinistra per modo che allora riuscirebbe inutile il fare la distinzione indicata. Ciò, ben s'intende, nel caso che si tratti di punti della curva *interni* all'intervallo che si considera, perocchè nei punti estremi la curvatura da considerarsi diviene naturalmente curvatura a destra o curvatura a sinistra dei punti stessi.

323. — Come già abbiamo osservato, il rapporto $\frac{d\tau}{ds}$ o la curvatura della curva ha sempre un significato determinato per ogni punto della curva pel quale le due coordinate, considerate in funzione l'una dell'altra, o in funzione di una variabile indipendente, hanno le derivate prime e seconde determinate e finite nel punto M che si considera, e le prime non sono ambedue uguali a zero.

Ora osserveremo che siccome l'angolo di due tangenti infinitamente vicine nel cerchio (come anche in ogni curva dotata di tangente) è uguale a uno degli angoli delle normali infinitamente vicine, la curvatura del cerchio in uno qualunque dei suoi punti sarà evidentemente l'inversa del raggio.

E poichè qualunque sia il valore di $\frac{d\tau}{ds}$ in un punto di una curva, purchè sia determinato, esiste sempre un cerchio il cui raggio R è l'inversa di $\frac{d\tau}{ds}$, così per ogni punto di una curva nel quale la curvatura sia determinata, *esisterà sempre un cerchio che avrà la stessa curvatura della curva in quel punto.*

Questo cerchio potrà sempre intendersi condotto tangente alla curva e col centro posto sulla normale in un punto conveniente situato dalla parte dove si trovano rispetto alla tangente i piccoli intorni della curva, quando non si tratti di punti d'inflessione o di quelli nei quali la tangente taglia continuamente la curva (per quanto si trovi che in questi ultimi due casi il cerchio stesso, quando pure è da considerarsi, si riduce ad una linea retta che è la tangente, e il centro va all'infinito e può riguardarsi indifferentemente come posto dall'una parte o dall'altra della tangente); e questo cerchio viene detto *cerchio di curvatura*, il suo raggio R vien detto *raggio di curvatura* della curva, e il suo centro *centro di curvatura.*

E così indicando con R il raggio di curvatura della curva, la curvatura viene rappresentata da $\frac{1}{R}$ e si ha $\frac{1}{R}=\frac{d\tau}{ds}$, $R=\frac{ds}{d\tau}$, cioè *il raggio di curvatura è l'inversa della curvatura.*

324. — Passiamo ora a calcolare la curvatura o il raggio di curvatura di una linea in un punto M (x, y) nel quale la funzione $f(x)$ che rappresenta l'ordinata y ha le derivate prime e seconde determinate e finite, intendendo al solito che $f(x)$ sia la funzione che risulta subito dalla equazione della curva quando è data sotto la forma $y=f(x)$, o altrimenti sia quella definita dalla solita equazione della curva $F(x, y)=0$, e intendendo che gli assi coordinati siano ortogonali.

Chiamando α l'angolo che la tangente in M fa coll'asse delle x, è evidente che all'infuori del segno si avrà $d\tau=d\alpha$; quindi poichè, come sappiamo, qualunque sia la variabile indipendente si ha $\tang\alpha=\frac{dy}{dx}$, l'angolo di contingenza $d\tau$ sarà determinato dalla formola $\frac{1}{\cos^2\alpha}d\tau=d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2}$, la quale, per essere $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$ (§ 317 [pag. 434]), ci dà

$$d\tau=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2}\cos^2\alpha=\frac{dx\,d^2y-dyd^2x}{ds^2}; \tag{1}$$

e così, osservando che $R=\frac{ds}{d\tau}$ e $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, si otterrà subito

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x} \tag{2}$$

per l'espressione del raggio di curvatura qualunque sia la variabile indipendente; e il segno, trattandosi di una lunghezza assoluta, si prenderà sempre positivo.

Supponendo poi che x sia la variabile indipendente, si troverà

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}; \tag{3}$$

talchè, oltre a poter concludere di qui, come già osservammo e come resultava anche dalla (2), che R è determinato in tutti i punti nei quali y' e y'' hanno valori determinati e finiti, quand'anche y'' non esista nei punti vicini, si conclude anche che *nei punti d'inflessione il raggio di curvatura è infinito,* e quindi *in questi punti il cerchio di curvatura si ridurrà ad una linea retta e coinciderà colla tangente.*

325. — Nei punti poi nei quali y'' è infinita senza che lo sia y', l'angolo di contingenza $d\tau$ propriamente non potrà più considerarsi, e quello $\Delta\tau$ delle tangenti infinitamente vicine sarà fortissimo di fronte all'arco ds, e propriamente esso sarà infinitesimo soltanto di un ordine inferiore al primo rispetto a quest'arco, per modo che la curvatura della linea dovrà riguardarsi come infinita e $R=0$, come appunto ci vien dato dalla espressione precedente di R.

Similmente nei punti $M(x_0, y_0)$ nei quali y', y'' sono ambedue infinite, se y'' esisterà anche nei punti vicini, e y' considerato fuori del punto avrà per limite effettivamente il valore infinito che esso ha in M, e al tempo stesso anche l'espressione $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ avrà un limite determinato (finito o infinito), allora è facile vedere che questo valor limite dovrà prendersi come valore di R nel punto M stesso.

E difatti prendendo y per variabile indipendente invece di x, pei punti vicini al punto $M(x_0, y_0)$ nel quale la y' è infinita si avrà $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$, e $y''(x)=-\frac{x''(y)}{x'^3(y)}$, $R=-\frac{\{1+x'^2(y)\}^{\frac{3}{2}}}{x''(y)}$, e il limite di questo valore di R per $y=y_0$ dovrà esistere ed essere eguale a quello del valore precedente $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ poichè i due valori sono precisamente gli stessi.

Ora siccome $x'(y)$ ha per limite zero, la derivata seconda $x''(y)$ dovrà, come l'espressione $-\frac{\{1+x'^2(y)\}^{\frac{3}{2}}}{x''(y)}$, avere un limite determinato che sarà la derivata seconda di $x(y)$ a destra o a sinistra di y_0 secondochè i limiti vengono presi a destra o a sinistra, e sarà la derivata seconda ordinaria se, come ammettiamo, questi limiti sono gli stessi sì a destra che a sinistra; quindi il valore limite delle due espressioni di R sarà $-\frac{1}{x''(y_0)}$ cioè precisamente il valore che si ha per R quando si parte subito dall'ipotesi che y sia la variabile indipendente. Talchè osservando che il valore effettivo di R, non è altro che il limite di $\frac{\Delta s}{\Delta \tau}$ e quindi su esso non può avere influenza la scelta della variabile indipendente, resta ora evidentemente dimostrato quanto abbiamo enunciato sopra.

Si può aggiungere che di qui risulta anche che sotto le indicate condizioni, e più generalmente in tutti i punti nei quali $x'(y_0)=0$, e $x''(y_0)$ è determinato, il valore del raggio di curvatura può prendersi uguale a $-\frac{1}{x''(y_0)}$; come, inversamente a quanto testè mostrammo quando ci si limiti sempre alla considerazione dei punti (x_0, y_0) nei quali y' è infinita ed è il limite dei valori che essa ha nei punti vicini, si può anche notare che per quelli fra questi punti pei quali $x'(y)$ e $x''(y)$ sono determinati e continui, e di più $x'(y)$ fuori di essi non passa mai per zero, l'espressione $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ considerata fuori dei punti stessi avrà un limite determinato $-\frac{1}{x''(y_0)}$ che sarà precisamente il valore di R nei punti medesimi.

Oltre a ciò poi si può aggiungere che in generale se partendo da un punto (x_0, y_0) la tangente alla curva cambia con continuità la sua posizione, per modo cioè che in quel punto y' sia continua, senza però che si sappia nulla della derivata seconda in quel punto, e se i valori di R col tendere a questo punto hanno un limite determinato, questo limite sarà sempre il valore di R nel punto stesso (x_0, y_0); giacchè se in esso y' è infinito valgono le considerazioni precedenti; e se y' è finito, l'esservi un limite determinato per $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ porta che vi sia anche per y'' e che quindi esista una derivata seconda determinata per y anche nel punto (x_0, y_0), ciò che fa sì che il limite

di $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ per $x=x_0$ sia appunto $\frac{\{1+y'^2(x_0)\}^{\frac{3}{2}}}{y''(x_0)}$, cioè il raggio di curvatura nel punto (x_0, y_0).

Ed è pure da notare che nel caso di y' infinito il limite indicato pel valore di R vi sarà quando vi sia quello del rapporto $\frac{y''}{y'^3}$ che non è altro che $-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'^2}\right)$, e sarà uguale all'inversa del limite dello stesso rapporto.

Nè si deve lasciare di osservare che nei ragionamenti fatti non abbiamo distinto i punti a destra dai punti a sinistra di quello che si considera perchè supponevamo che a sinistra avvenisse precisamente quello che avviene a destra; e quando questo non sia o quando i punti che si considerano siano estremi all'intervallo o convenga di riguardarli come estremi, allora i ragionamenti stessi possono applicarsi alla parte corrispondente soltanto, salvo però ad intendere che si tratterà allora soltanto di raggi di curvatura a destra o di raggi di curvatura a sinistra.

326. — Pei punti dunque nei quali y'' è determinato, essendo y' determinato e finito, il valore di R ci viene dato dalle formole (2) e (3); e nei punti nei quali y' è infinito essendo però continuo (per modo cioè che la tangente alla curva tenda con continuità a ridursi parallela all'asse delle y), allora pel valore di R può prendersi il limite dei secondi membri delle formole stesse (2) e (3) o di $\frac{y'^3}{y''}$ tutte le volte che questo limite esiste; e anche può prendersi $R=-\frac{1}{x''(y)}$.

Aggiungiamo ora che per quanto già sappiamo il valore di R può porsi sotto altre forme notevoli, giacchè dando gli esempi relativi ai cangiamenti di variabile indipendente (§ 209 [pag. 287 e seg.]) si fecero già varie trasformazioni delle attuali espressioni di R.

E così, ricordando queste trasformazioni noi possiamo dire senz'altro che introducendo le coordinate polari ρ e ω e lasciando indeterminata la variabile indipendente, si ha la formola

$$R=\frac{(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3+2\,d\rho^2 d\omega+\rho\, d\rho\, d^2\omega-\rho\, d^2\rho\, d\omega}; \tag{4}$$

che quando ω è presa per variabile indipendente si riduce all'altra

$$R=\frac{(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3+2\,d\rho^2 d\omega-\rho\, d^2\rho\, d\omega}=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}, \tag{5}$$

dove ρ' e ρ'' sono le derivate di ρ rispetto ad ω.

Introducendo l'arco s colla formola $dx^2+dy^2=ds^2$ che dà $dxd^2x+dyd^2y=ds\,d^2s$, si trovano subito anche le formole

$$(6)\qquad R=-\frac{dy}{d\dfrac{dx}{ds}}\ ,\quad R=\frac{dx}{d\dfrac{dy}{ds}}\ ,\quad \frac{1}{R^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

che valgono qualunque sia la variabile indipendente, e per la prima delle quali conviene supporre che non sia zero il dy e per la seconda che non sia zero il dx (*); e queste se la variabile indipendente sarà lo stesso arco s, indicando cogli apici le derivate prime e seconde rispetto ad s, si trasformano nelle altre

$$(7)\qquad R=-\frac{y'}{x''}\ ,\quad R=\frac{x'}{y''}\ ,\quad \frac{1}{R^2}=x''^2+y''^2,$$

dalle due prime delle quali, come anche dalla (2), si ottiene subito anche l'altra sempre relativa al caso della variabile indipendente s

$$(8)\qquad \frac{1}{R}=x'y''-y'x'',$$

che è pure notevole.

Queste formole sono suscettibili anche di una interpretazione geometrica molto semplice che si ottiene immaginando la curva riferita alla sua tangente e alla normale nel punto che si considera come facemmo al § 318 [pag. 436 e seg.].

327. — Infine aggiungiamo che se la curva è rappresentata dalla equazione $F(x,y)=0$, calcolando le derivate di y o di x rispetto ad x ad y coi processi della teoria delle funzioni implicite, si trova che quando $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ non siano ambedue zero il raggio di curvatura è dato dalla formola

$$(9)\qquad R=\frac{\left\{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2},$$

(*) Indipendentemente dalla teoria del cangiamento della variabile indipendente, queste formole si possono anche trovare col processo stesso col quale si trovò la (2), partendo però dalle due $\cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}$ e $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{dy}{ds}$ date al §. 317 [pag. 434], invece che dall'altra $\operatorname{tang}\alpha=\dfrac{dy}{dx}$.

Colla differenziazione infatti queste formole ci danno le due $-\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha=d\dfrac{dx}{ds}$, $\cos\alpha\, d\alpha=d\dfrac{dy}{ds}$, e queste conducono subito alle due prime delle (6) dalle quali si ha poi immediatamente anche la terza.

nella quale il denominatore — come già notammo al § 297 [pag. 413] — può anche porsi sotto la forma di un determinante

$$-\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\end{vmatrix};$$

ed è sempre da ricordare che nelle varie espressioni che abbiamo dato per R s'intende sempre di prendere i valori assoluti.

328. — Per dare subito qualche applicazione di queste formole prenderemo a determinare il raggio di curvatura di alcune linee.

1.° Abbiasi la curva $y^2=2px+qx^2$ la quale, com'è noto, dipendentemente dai valori che si danno alle costanti p e q, può rappresentare una sezione conica qualunque.

Osservando che questa equazione ci dà le due

$$(10)\qquad y\frac{dy}{dx}=p+qx\quad,\quad y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=q,$$

e moltiplicando i due membri dell'ultima equazione pei due della equazione data, ciò che fa escludere per ora i punti pei quali $y=0$, e sottraendovi poi il quadrato della prima, si troverà l'altra $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=-p^2$, per mezzo della quale dalla (3) si avrà $R=\dfrac{\left\{y^2+y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{p^2}$, donde, ponendovi per $y\dfrac{dy}{dx}$ il valore $p+qx$, si avrà subito il valore di R espresso per x e y; e ciò per tutti i punti della curva non esclusi quelli pei quali $y=0$, poichè in questi punti dalla prima delle (10) si ha $\dfrac{dy}{dx}=\infty$ e i valori di $\dfrac{dy}{dx}$ nei punti vicini hanno per limite il valore infinito di $\dfrac{dy}{dx}$ nei punti stessi, mentre il valore di R ha pure un limite determinato che è p o $-p$.

Osservando poi che la normale geometrica N è data dalla formola $N^2=y^2+y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$, si trova anche che $R=\dfrac{N^3}{p^2}$; talchè si può affermare che *in ogni sezione conica il raggio di curvatura nei singoli punti è proporzionale al cubo della normale geometrica corrispondente.*

2.° Vogliasi il raggio di curvatura della catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

Si troverà subito $R = a \cosh^2 \frac{x}{a}$, donde apparisce che *nella catenaria il raggio di curvatura è proporzionale al quadrato dell'ordinata.*

3.° Vogliasi il raggio di curvatura della *lemniscata* di Bernoulli, la cui equazione, come è noto, in coordinate polari ρ e ω è della forma $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega$, essendo a la semi-distanza focale.

Prendendo come variabile indipendente l'angolo polare ω (i cui valori devono essere compresi fra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$, o fra $\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{5}{4}\pi$), si osserverà che per la (5) deve essere

$$R = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3 + 2 d\rho^2 d\omega - \rho d^2\rho\, d\omega},$$

e siccome per ρ diverso da zero o ω diverso dai suoi valori estremi onde non avere da considerare altro che derivate finite si ha

$$\rho d\rho = -2a^2 \operatorname{sen} 2\omega\, d\omega \ , \ \rho d^2\rho + d\rho^2 = -4a^2 \cos 2\omega\, d\omega^2 = -2\rho^2 d\omega^2,$$

e quindi

$$d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = \frac{1}{\rho^2}(\rho^2 d\rho^2 + \rho^4 d\omega^2) = \frac{1}{\rho^2}(4a^4 \operatorname{sen}^2 2\omega + 4a^4 \cos^2 2\omega) = \frac{4a^4}{\rho^2} d\omega^2,$$

$$\rho^2 d\omega^3 + 2d\rho^2 d\omega - d\rho^2 \rho\, d\omega = \frac{d\omega^3}{\rho^2}\left(\rho^4 + 3\rho^2 \frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \rho^2\left(\rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2} + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{d\omega^3}{\rho^2}(12a^4 \cos^2 2\omega + 12a^4 \operatorname{sen}^2 2\omega) = \frac{12a^4}{\rho^2} d\omega^3,$$

si troverà subito la formola seguente $R = \frac{2}{3}\frac{a^2}{\rho}$ che varrà anche pel punto $\rho = 0$, e che ci mostra che nella *lemniscata di Bernoulli il raggio di curvatura è inversamente proporzionale al raggio vettore.*

4.° Vogliasi il raggio di curvatura della spirale logaritmica $\rho = ae^{m\omega}$.

Si osserverà perciò che $\rho = ae^{m\omega}$, $\rho' = mae^{m\omega} = m\rho$, $\rho'' = m^2\rho$, e quindi per la (5) si troverà subito $R = \sqrt{1+m^2}\,\rho$, talchè si vede che *nella spirale logaritmica il raggio di curvatura è proporzionale al raggio vettore.*

329. — Passiamo ora a trovare anche il centro di curvatura corrispondente a un punto M della curva.

Per questo, cominciamo dall'osservare che se MC e M'C sono le normali alla curva nel punto M e in un altro punto vicinissimo M', dirette dalla parte dove esse s'incontrano in un punto C, il triangolo rettilineo MCM' formato da queste normali e dalla corda MM' che chiameremo c ci darà $MC = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \operatorname{sen} MM'C$, e poichè al limite l'angolo MM'C diviene retto, e il rapporto $\frac{c}{\operatorname{sen} C}$ viene evidentemente uguale a $\frac{ds}{d\tau}$ perchè alla corda c si può sostituire l'arco ds e al seno di C si può sostituire l'angolo stesso C, ossia l'angolo di contingenza $d\tau$, si avrà $\lim MC = R$, ciò che ci mostra che *quando il raggio di curvatura in un punto M è determinato, esiste un punto C_1 che è il limite dei punti d'incontro della normale in M colle normali ai punti infinitamente vicini; e questo punto C_1 è sulla normale in M a una distanza da M eguale al raggio di curvatura.*

Si osservi poi che quando nel punto M la tangente alla curva non presenta singolarità e il raggio di curvatura è finito, supponendo y' finito (il che potrà sempre farsi con un cambiamento opportuno di assi ove occorra) la y'' sarà diversa da zero; e quindi se y'' sarà anche continua, per quanto si disse trattandosi della concavità e della convessità, la curva sarà tutta situata da una stessa parte della tangente e il punto C_1 sarà pure da questa parte e *sarà appunto il centro di curvatura di questa curva.*

Se poi essendo ancora y' finito y'' sarà zero, allora il punto C_1 sarà a distanza infinita, e questo punto potrà ancora considerarsi come il centro di curvatura della linea perchè allora R sarà infinito.

S'intende poi che se y'' considerata come derivata a destra ha un valore, e considerata come derivata a sinistra ne ha un altro, allora, come si hanno due raggi di curvatura, si hanno pure due centri di curvatura pel punto corrispondente.

330. — Ciò premesso, sarà facile di trovare le coordinate (ξ, η) del centro di curvatura di una linea per un punto $M(x, y)$, poichè queste coordinate non saranno altro che il limite di quelle del punto comune alle normali condotte alla curva pei punti $M(x, y)$ e $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Osservando che quando, come supponiamo, le coordinate sono ortogonali, e x è la variabile indipendente e y' è finito, la equazione della normale nel primo punto è la seguente

$$X - x + (Y - y)y' = 0, \tag{11}$$

e quella della normale nel secondo punto è evidentemente l'altra

$$X - x - \Delta x + (Y - y - \Delta y)(y' + \Delta y') = 0,$$

si vede che le coordinate (X, Y) del punto d'incontro delle due normali saranno quelle che soddisfano a queste due equazioni; e poichè queste colla sottrazione danno luogo all'altra $-\Delta x - y'\,\Delta y + (Y-y)\Delta y' - \Delta y\,\Delta y' = 0$, che evidentemente può anche scriversi sotto la forma

$$-dx - y'dy + (Y-y)\,dy' + \varepsilon = 0\,,$$

essendo ε una quantità infinitesima d'ordine superiore al primo, così possiamo anche dire che le stesse coordinate (X, Y) sono quelle che soddisfano alla (11) e a quest'ultima equazione, nella quale la prima parte è precisamente il differenziale del primo membro della (11) calcolato considerandovi X e Y come costanti.

Con queste, calcolando i valori di $Y-y$ e $X-x$ e poi passando al limite, si vede subito che le coordinate cercate (ξ, η) dovranno soddisfare alla equazione

$$\xi - x + (\eta - y)\,y' = 0\,,$$

e all'altra che viene da questa con una differenziazione fatta considerandovi ξ e η come costanti

$$-dx - y'dy + (\eta - y)dy' = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad -(1+y'^2) + (\eta - y)\,y'' = 0\,,$$

e per esse avremo le formole

$$(12) \qquad \xi - x = -\frac{(1+y'^2)y'}{y''}\,, \qquad \eta - y = \frac{1+y'^2}{y''}\,,$$

le quali applicando quelle del cangiamento della variabile indipendente si trasformano nelle altre

$$(13) \qquad \xi - x = -\frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}\,, \qquad \eta - y = \frac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}\,,$$

che valgono qualunque sia la variabile indipendente; e da queste come dalle precedenti (12) avremo sempre ξ e η almeno finchè y' non è infinito, perchè, fuori di questo caso, quand'anche sia $y''=0$ o sia $y''=\infty$, si hanno di qui per ξ e η i valori che devono effettivamente aversi. Neppure poi vi sarà eccezione pei punti nei quali y' sia infinito, purchè tutte le funzioni si mantengano continue, potendo allora cambiare la x in y, ecc.

E merita anche di essere notato che le formole che abbiamo trovato per determinare le coordinate del centro di curvatura di una linea in un punto (x, y) sono quelle stesse che, facendo astrazione dalle quantità d'ordine

superiore si sarebbero trovate per le coordinate del punto d'incontro della normale nel punto (x, y) con quella nel punto infinitamente vicino $(x+dx\,, y+dy)$ considerato come appartenente alla curva.

È poi da aggiungere che avendo riguardo alla formola (3) o (2), le (12) o (13) ci danno le altre

$$(14) \qquad \xi - x = R\cos\lambda\,, \quad \eta - y = R\cos\mu\,,$$

essendo λ e μ i coseni degli angoli che una delle due direzioni della normale scelta convenientemente fa cogli assi x e y; e queste formole valgono ora evidentemente anche se y' in quel punto è infinito poichè esse esprimono che $\xi - x$ e $\eta - y$ sono le proiezioni di R sugli assi coordinati. E si può notare che quest'ultima particolarità relativa alle proiezioni di R sugli assi coordinati si verifica sempre; e da essa anzi saremmo potuti partire per trovare immediatamente le equazioni stesse (12) o (13).

331. — Fissando, come già in generale dicemmo sempre di fare, di prendere R positivo, la direzione che si deve scegliere come positiva per la normale nel punto M onde sussistano le formole precedenti (14) evidentemente è quella che dal punto stesso M va al centro di curvatura.

Ora fissata in tal guisa la direzione positiva della normale, se si prende per direzione positiva della tangente, o pel senso in cui cresce l'arco s della curva, quella che prenderebbe l'asse positivo delle x quando la direzione scelta per la normale fosse presa come direzione positiva dell'asse delle y, s'intende subito che l'angolo μ della normale coll'asse delle y sarà precisamente eguale all'angolo α della tangente coll'asse delle x, poichè, immaginati condotti per M due assi paralleli a quelli delle x e delle y, di tanto ruota l'asse delle x per venire sulla tangente, e di altrettanto ruoterà quello delle y per venire sulla normale.

Invece l'angolo λ che la normale fa coll'asse delle x sarà il supplemento dell'angolo β che la tangente fa coll'asse delle y, per modo che si avrà

$$(15) \qquad \cos\lambda = -\cos\beta = -\frac{dy}{ds}\,, \qquad \cos\mu = \cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,;$$

e quindi le formole (14) potranno ridursi alle altre

$$(16) \qquad \xi - x = -R\,\frac{dy}{ds}\,, \qquad \eta - y = R\,\frac{dx}{ds}$$

le quali confrontate colle (12) e (13) ci mostrano che il valore da prendersi per R in queste formole, quando y' non è infinito, è il seguente $R = \frac{(1+y'^2)}{y''}\frac{ds}{dx}$, ovvero

$$R = \frac{(dx^2+dy^2)ds}{dxd^2y - dyd^2x} \tag{17}$$

qualunque sia la variabile indipendente, ds essendo l'accrescimento positivo o negativo di s che figura nei coseni $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$.

Sviluppate e sviluppanti.

332. — La curva luogo geometrico dei centri di curvatura di una linea si chiama la *sviluppata*, o la *evoluta* di questa linea, e ciò per una proprietà di cui gode della quale parleremo fra breve.

La curva data alla sua volta si dice allora la *sviluppante* della linea dei centri di curvatura; e quando sia costruita la sviluppata di una linea si avranno subito evidentemente i raggi di curvatura di questa linea prendendo le porzioni di normali comprese fra la curva e la sviluppata.

Intendendo ora che le coordinate cartesiane ortogonali x e y dei punti della curva data C siano espresse in funzione di una variabile indipendente ω (che può anch'essere la stessa x), le formole precedenti, per es. le (13) del § 330 daranno le coordinate ξ e η del punto della sviluppata che corrisponde a un punto della curva per ogni valore speciale di ω; e quindi le formole stesse

$$\xi = x - \frac{(dx^2+dy^2)dy}{dxd^2y - dyd^2x}\ ,\quad \eta = y + \frac{(dx^2+dy^2)dx}{dxd^2y - dyd^2x} \tag{1}$$

possono riguardarsi come quelle che danno le coordinate dei varii punti della sviluppata in funzione della variabile ω sotto la forma $\xi = \xi(\omega)$, $\eta = \eta(\omega)$, e possono prendersi quindi come equazioni della sviluppata. Eliminando poi la variabile ω fra queste equazioni, si otterrà anche la equazione in coordinate cartesiane della sviluppata stessa.

Così per es. trattandosi della iperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se si pone al solito $x = \pm a\cosh\omega, y = b\,\mathrm{senh}\,\omega$, dove si prenderà il segno $+$ o il segno $-$ in x secondochè si tratterà del ramo dell'iperbola a destra dell'asse delle y o di quello a sinistra, osservando che si ha

$$dx = \pm a\,\mathrm{senh}\,\omega d\omega\ ,\qquad dy = b\cosh\omega d\omega\ ,$$
$$d^2x = \pm a\cosh\omega d\omega^2\ ,\qquad d^2y = b\,\mathrm{senh}\,\omega\, d\omega^2\ ,$$

si vede che le (1) ci daranno per le equazioni della sviluppata

$$\xi = \pm a\cosh\omega \pm \frac{1}{a}(a^2\mathrm{senh}^2\omega + b^2\cosh^2\omega)\cosh\omega\ ,$$
$$\eta = b\,\mathrm{senh}\,\omega - \frac{1}{b}(a^2\mathrm{senh}^2\omega + b^2\cosh^2\omega)\,\mathrm{senh}\,\omega\ ,$$

e poichè queste ci dànno le altre

$$\pm a\xi = (a^2\mathrm{senh}^2\omega + b^2\cosh^2\omega + a^2)\cosh\omega = (a^2+b^2)\cosh^3\omega\ ,$$
$$b\eta = -(a^2\mathrm{senh}^2\omega + b^2\cosh^2\omega - b^2)\,\mathrm{senh}\,\omega = -(a^2+b^2)\,\mathrm{senh}^3\omega\ ,$$

se si pone $a^2+b^2=c^2$, $\frac{c^2}{a} = a_1$, $\frac{c^2}{b} = b_1$, si trova subito $\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ per la equazione in coordinate cartesiane della sviluppata della iperbola.

In modo simile si troverebbe che ponendo $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c^2}{a} = a_1$, $\frac{c^2}{b} = b_1$, la sviluppata della ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ha per equazione $\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

333. — Per trovare ora le proprietà principali della sviluppata di una curva prendiamo le sue equazioni sotto la forma (16) del § 331 cioè

$$\xi - x = -R\frac{dy}{ds}\ ,\quad \eta - y = R\frac{dx}{ds}\ ,$$

dove $R = \frac{(dx^2+dy^2)ds}{dxd^2y - dyd^2x}$.

Differenziando nell'ipotesi che R sia finito, diverso da zero e differenziabile, ciò che richiederà che esistano e siano finite anche le derivate terze di x e y, si troverà

$$d\xi - dx = -R\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}dR\ ,\quad d\eta - dy = R\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}dR;$$

e da queste, moltiplicando la prima per dx e la seconda per dy, e sommando coll'avere riguardo al valore precedente di R e all'essere $ds^2 = dx^2 + dy^2$, si troverà intanto

$$d\xi dx + d\eta dy = 0; \tag{2}$$

mentre, quadrando e sommando coll'aver riguardo a questa equazione e all'essere per le (6) del § 326 [pag. 448] $\frac{ds^2}{R^2} = \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2$, si troverà anche

$$dR^2 = d\xi^2 + d\eta^2; \tag{3}$$

talchè osservando che, se σ è l'arco della sviluppata, si ha $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2$, mentre dalla (2) si ha l'altra $\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{dx}{ds} + \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{dy}{ds} = 0$ che mostra che le tangenti alla sviluppata e alla curva data sono fra loro perpendicolari, si concluderà che *la tangente alla sviluppata coincide colla normale alla curva data, e il suo arco elementare* $d\sigma$ *è eguale a* $\pm\, dR$.

Ne segue che, se gli archi σ della sviluppata verranno contati nel senso in cui cresce R per modo da avere $d\sigma = dR$, applicando il teorema del § 42. 1.° [pag. 50] si vede che si avrà $\sigma - R = \text{cost}$; e quindi se l'arco della sviluppata s'incomincia a contare dal punto nel quale $R = R_0$, per modo che si abbia $\sigma = 0$ per $R = R_0$, la costante che figura nella differenza $\sigma - R$ sarà uguale a $-R_0$, e quindi sarà $\sigma = R - R_0$; talchè si può anche asserire che un *arco qualunque di una sviluppata è uguale alla differenza dei raggi di curvatura corrispondenti delle sviluppanti* quando, ben s'intende, nell'intervallo il raggio di curvatura R si mantiene diverso da zero, finito e continuo e ammette una derivata in modo che si possano fare i calcoli precedenti, e si possa applicare il ricordato teorema del §. 42, 1.°

E per le proprietà dimostrate, osservando che l'angolo di contingenza $d\tau$ della curva data viene ad essere uguale a quello della sviluppata, e oltre a ciò si ha $dR = d\sigma$, se indichiamo con ρ il raggio di curvatura della sviluppata si vede che sarà $\rho = \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{d\tau} = R\frac{dR}{ds}$, e si conclude quindi che *fra i raggi di curvatura* ρ *e* R *della sviluppata e della sviluppante sussiste la relazione semplice e notevole* $\rho = R\frac{dR}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dR^2}{ds}$.

334. — Premesse queste particolarità della curva sviluppata, supponiamo inversamente in modo generale che sia data una curva K qualsiasi le cui coordinate ξ e η, almeno nei tratti nei quali sarà considerata, siano funzioni finite e continue di una certa variabile indipendente ω insieme alle loro derivate fino a quelle del terz'ordine almeno (le ultime potendo anche essere soltanto finite), e $\frac{d\xi}{d\omega}$ e $\frac{d\eta}{d\omega}$ non siano ambedue zero e il raggio di curvatura di K sia sempre finito; e si cerchi se esistano sempre linee C delle quali le tangenti alla curva data K siano le normali, precisamente come nel caso delle sviluppate e delle sviluppanti.

Indichiamo con σ l'arco della curva data K contato da un suo punto qualsiasi e nel senso nel quale le tangenti andranno dalla curva stessa K a quella C che si cerca, e indichiamo con x e y le coordinate dei punti di questa curva C che saranno pure funzioni di ω e dovranno risultare funzioni

che abbiano le derivate prime perchè la curva cercata deve avere le normali, e quindi anche le tangenti.

Evidentemente la porzione di tangente a K compresa fra K e C, cioè la distanza fra i punti corrispondenti (ξ, η) e (x, y) delle due curve dipenderà da σ e potremo rappresentarla con $\varphi(\sigma)$; e quindi per le equazioni della curva cercata avremo le seguenti

$$(4) \qquad x - \xi = \varphi(\sigma)\frac{d\xi}{d\sigma} \quad , \quad y - \eta = \varphi(\sigma)\frac{d\eta}{d\sigma} ,$$

nelle quali la funzione $\varphi(\sigma)$ dovrà avere una derivata determinata rispetto a σ perchè x e y dovranno averla e tutte le altre funzioni che compariscono in queste formole hanno la derivata, e $\frac{d\xi}{d\omega}$ e $\frac{d\eta}{d\omega}$ e quindi anche $\frac{d\xi}{d\sigma}$ e $\frac{d\eta}{d\sigma}$ non sono ambedue zero.

Queste ci daranno le altre

$$dx - d\xi = \varphi'(\sigma)d\xi + \varphi(\sigma)d\frac{d\xi}{d\sigma} \quad , \quad dy - d\eta = \varphi'(\sigma)d\eta + \varphi(\sigma)d\frac{d\eta}{d\sigma} ,$$

le quali, moltiplicandole per $d\xi$ e per $d\eta$ e sommandole coll'osservare che dalla formola $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ o $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 = 1$ si ha subito l'altra

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{d\sigma}\,d\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,d\frac{d\eta}{d\sigma} = 0 \;, \quad \text{ovvero} \quad d\xi\,d\frac{d\xi}{d\sigma} + d\eta\,d\frac{d\eta}{d\sigma} = 0 \;,$$

ci mostrano che onde la curva (4) soddisfi alla condizione voluta per la quale deve essere $dx\,d\xi + dy\,d\eta = \sigma$ bisognerà che si abbia $\varphi'(\sigma) = -1$; e viceversa se sarà $\varphi'(\sigma) = -1$ avremo $dx\,d\xi + dy\,d\eta = 0$.

Ne segue che $\varphi(\sigma)$ dovrà avere la stessa derivata di $-\sigma$, e quindi pel teorema del (§ 42. 1.° [pag. 50 e 51]) dovrà essere $\varphi(\sigma) = t - \sigma$, essendo t una costante qualsiasi; dunque le curve cercate saranno tutte e sole quelle di equazioni

$$(6) \qquad x - \xi = (t - \sigma)\frac{d\xi}{d\sigma} \quad , \quad y - \eta = (t - \sigma)\frac{d\eta}{d\sigma} ,$$

qualunque sia la costante t.

E costruita una di queste linee per es. quella C_θ che corrisponde al valore θ di t, le altre C_t si otterranno da questa portando sulle tangenti alla curva data K o sulle normali a C_θ e a partire da C_θ una lunghezza costante $t - \theta$, per modo da ridurre ad essere $t - \sigma$ invece di $\theta - \sigma$ le porzioni di tangenti comprese fra K e C_t; e quindi tutte queste linee C_t costituiranno un sistema di linee tutte equidistanti fra loro sulle normali, e potranno dirsi linee *equidistanti* o *parallele*.

Il raggio di curvatura R di queste linee sarà $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$; e poichè ora dalle equazioni (6) si hanno subito le altre

$$dx=(t-\sigma)\,d\frac{d\xi}{d\sigma}\;,\quad dy=(t-\sigma)\,d\frac{d\eta}{d\sigma}\;,$$

$$d^2x=(t-\sigma)\,d^2\frac{d\xi}{d\sigma}-d\frac{d\xi}{d\sigma}\,d\sigma\;,\quad d^2y=(t-\sigma)\,d^2\frac{d\eta}{d\sigma}-d\frac{d\eta}{d\sigma}\,d\sigma\;,$$

sarà

$$R=(t-\sigma)\,\frac{\left\{\left(d\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2+\left(d\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{d\frac{d\xi}{d\sigma}\,d^2\frac{d\eta}{d\sigma}-d\frac{d\eta}{d\sigma}\,d^2\frac{d\xi}{d\sigma}}\;,$$

ovvero per la (5), quando per es. $\frac{d\xi}{d\sigma}$ sia diverso da zero,

$$R=-(t-\sigma)\,\frac{\frac{d\xi}{d\sigma}\left\{\left(d\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2+\left(d\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{d\frac{d\eta}{d\sigma}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\,d^2\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{d\eta}{d\sigma}\,d^2\frac{d\eta}{d\sigma}\right)}\;,$$

non potendo essere $d\frac{d\eta}{d\sigma}=0$ perchè il raggio di curvatura di K si è supposto sempre finito nel tratto che si considera.

Ma differenziando la (5) si vede subito che

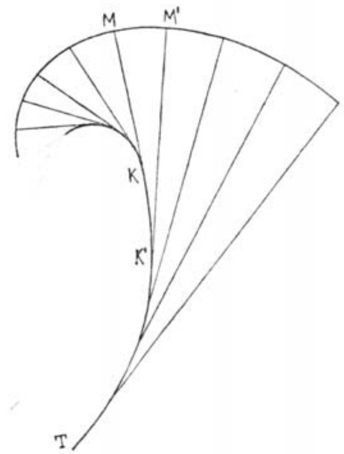
$$\frac{d\xi}{d\sigma}\,d^2\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{d\eta}{d\sigma}\,d^2\frac{d\eta}{d\sigma}=-\left(d\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2-\left(d\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2,$$

quindi sostituendo, e avendo riguardo alle formole (6) del § 326 [pag. 448] applicate al raggio di curvatura della linea K, si troverà subito che $R=t-\sigma$, e così rimarrà pienamente dimostrato che sotto le fatte ipotesi le curve C_t definite dalle equazioni (6) sono tutte sviluppanti della curva data K.

Così si può dunque affermare che partendo da una curva data qualsiasi K, per la quale siano soddisfatte le condizioni poste sopra, essa potrà sempre riguardarsi come una sviluppata, e le sue sviluppanti saranno le infinite curve (6); e se sarà data avanti una curva C e se ne sarà costruita la sviluppata K,

la curva C dovrà trovarsi necessariamente fra le curve (6) che provengono dalla K, e dovrà corrispondere a un valore particolare della costante t che figura nelle stesse equazioni (6).

335. — Oltre a ciò si può osservare che preso come origine degli archi σ un punto fisso (ma qualsiasi) T sulla curva K nei tratti nei quali questa curva, soddisfacendo a tutte le condizioni poste sopra, non presenta alcuna singolarità, se s'immagina applicato su di essa a partire da T e nel senso scelto per gli archi positivi σ un filo di lunghezza qualsiasi t tenendo tesa lungo la tangente la parte KM, K′M′, ... del filo non applicata alla curva, allora siccome la parte dello stesso filo che sarà applicata alla curva in una posizione qualsiasi sarà σ, e quella non applicata alla curva e posta invece sulla tangente sarà $t-\sigma$, le coordinate dell'altro capo del filo saranno appunto le x e y date dalle (6); talchè si può ora affermare che *avvolto un filo di lunghezza t su una curva K, tenendo fisso un capo del filo e svolgendolo dall'altro capo per modo che la parte svolta resti sempre tesa lungo la tangente alla curva stessa* K, *il capo mobile* M *del filo descriverà una sviluppante* C_t *di* K; *e variando la lunghezza t di esso si avranno tutte le infinite sviluppanti di* K.



È per questa loro particolarità di costruzione in relazione alla curva data K che, chiamando K la *sviluppata*, le curve C_t sono state dette le sue *sviluppanti*.

Tale particolarità avrebbe potuto dedursi come spesso si fa anche dai teoremi dimostrati sopra nel § 333, aggiungendo però alle ordinarie dimostrazioni anche qualche considerazione speciale per giungere con rigore alle stesse conclusioni.

336. — Prendendo per es. un cerchio di raggio a, e rappresentandolo colle equazioni $\xi=a\cos\frac{\sigma}{a}$, $\eta=a\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a}$ dove σ è il suo arco, si trova, per ciò che precede, che le sue sviluppanti (6) sono date dalle equazioni

$$x=a\cos\frac{\sigma}{a}-(t-\sigma)\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a}\;,\quad y=a\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a}+(t-\sigma)\cos\frac{\sigma}{a}\;,$$

le quali danno facilmente le due $x^2+y^2=a^2+(t-\sigma)^2$, $x\cos\frac{\sigma}{a}+y\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a}=a$; e poichè la prima di queste ci dà $\sigma=t-\sqrt{x^2+y^2-a^2}$, sostituendo nella seconda, si trova $x\cos\left(\frac{t-\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}\right)+y\,\mathrm{sen}\left(\frac{t-\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}\right)=a$ per la equazione in coordinate cartesiane delle sviluppanti di cerchio, ciascuna delle quali corrisponderà a un valore particolare da darsi a t.

XXIII.

Curve inviluppi

337. — Quando la equazione

$$f(x\,,y\,,a)=0 \tag{1}$$

di una curva contiene un parametro variabile a, che può figurare anche in più parametri $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\ldots$ per modo che la equazione sia della forma $f(x\,,y\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\ldots)=0$ dove $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\ldots$ siano funzioni di a, essa, invece di rappresentare una curva unica e determinata, rappresenta una famiglia di curve, ciascuna delle quali si ottiene dando ad a uno dei valori particolari che essa può avere, e queste curve hanno tutte una proprietà comune che è quella espressa dalla equazione (1).

Le curve successive che si ottengono facendo variare a con continuità possono successivamente incontrarsi, e se esistono dei punti limiti per le loro successive intersezioni, il luogo geometrico di questi punti limiti formerà ordinariamente una curva speciale che dicesi *inviluppo* delle curve date (1), le quali alla lor volta diconsi allora le *inviluppate;* e questa curva inviluppo sebbene non avrà più in generale la proprietà espressa dalla equazione (1), sarà tale che le coordinate dei suoi punti soddisfaranno ancora alla equazione stessa (1) quando però a non sia più una costante su tutta la curva ma varii invece in modo determinato passando da punto a punto della curva, cioè sia una funzione determinata di x e y, giacchè evidentemente ogni punto $(\xi\,,\eta)$ dello inviluppo si troverà sopra una curva (1) e il parametro a che determina questa curva varierà al variare del punto stesso $(\xi\,,\eta)$.

338. — La equazione della curva inviluppo di un sistema di curve $f(x\,,y\,,a)=0$ si ottiene con tutta facilità, quando questo inviluppo esiste e, almeno entro un certo campo relativo a $x\,,y$ e a, la funzione $f(x\,,y\,,a)$ ha le sue derivate parziali del prim'ordine finite e continue.

Si osservi infatti che mentre per la curva (a) si ha $f(x,y,a)=0$, per una curva vicinissima $(a+\Delta a)$ dello stesso sistema si avrà $f(x,y,a+\Delta a)=0$; e le coordinate dei punti d'intersezione M di queste curve (a) e $(a+\Delta a)$, quando esse come supponiamo effettivamente s'incontrano, potranno aversi anche dalle due equazioni

$$f(x,y,a)=0\ ,\ f(x,y,a+\Delta a)-f(x,y,a)=0\ ,$$

o dalle due

$$(2)\qquad f(x,y,a)=0\ ,\ \frac{f(x,y,a+\Delta a)-f(x,y,a)}{\Delta a}=0\ ,$$

talchè, indicando con $f'_x, f'_y, f'_a, f''_{a,x}, f''_{a,y}, f''_{a,a}, f''_{x,x}, \ldots$ le derivate di f, e osservando che per le ipotesi fatte si ha

$$\frac{f(x,y,a+\Delta a)-f(x,y,a)}{\Delta a}=f'_a(x,y,a+\theta\Delta a)=f'_a(x,y,a)+\varepsilon\ ,$$

essendo θ una quantità compresa fra 0 e 1, e ε un'altra quantità che all'impiccolire indefinito di Δa diventa piccola quanto si vuole per tutti i sistemi di valori di x e y nelle vicinanze di M, si può dire intanto che le coordinate (x,y) del punto d'incontro che si considera delle linee (a) e $(a+\Delta a)$ dovranno soddisfare alle due equazioni

$$(3)\qquad f(x,y,a)=0\ ,\ f'_a(x,y,a)+\varepsilon=0\ .$$

Ora se per ogni valore di a dentro un certo tratto, questi punti d'incontro (x,y) delle linee (a) e $(a+\Delta a)$ al tendere a zero di Δa andranno verso posizioni limiti determinate, e (ξ,η) saranno le coordinate del punto limite di quello (x,y) che si considera relativo alle linee (a) e $(a+\Delta a)$, fuori del limite avremo $x=\xi+\sigma$, $y=\eta+\sigma_1$, essendo σ e σ_1 quantità che tendono a zero insieme a Δa; e quindi ponendo questi valori di x e y nella seconda delle (3) si vede subito che, se come supponiamo la derivata $f'_a(x,y,a)$ sarà continua anche rispetto alle variabili x, y, la stessa equazione potrà scriversi sotto la forma $f'_a(\xi,\eta,a)+\varepsilon_1=0$, essendo ε_1 un'altra quantità che tende a zero all'impiccolire indefinito di Δa; e ora poichè in $f'_a(\xi,\eta,a)$ non ci è più traccia di Δa si vede che dovrà essere necessariamente $f'_a(\xi,\eta,a)=0$.

D'altra parte, poichè il punto (ξ,η,a) è sempre sulla curva (1), dovremo avere anche $f(\xi,\eta,a)=0$; dunque i punti limiti (ξ,η) di quelli d'incontro delle linee (a) e $(a+\Delta a)$, quando esistono, per ogni valore speciale di a dovranno soddisfare al sistema delle due equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} f(\xi,\eta,a)=0\ , \\ f'_a(\xi,\eta,a)=0\ , \end{cases}\qquad \text{o}\qquad (5)\quad \begin{cases} f(\xi,\eta,a)=0\ , \\ df=0\ , \end{cases}$$

il differenziale nel secondo sistema di equazioni essendo preso rispetto ad a con mantenere fermi ξ e η; per modo che questi punti limiti, quando esistono, all'infuori di quantità di ordine superiore al primo rispetto a Δa, potranno anche riguardarsi come i punti d'incontro delle linee $f(x,y,a)=0$ e $f(x,y,a+da)=0$ corrispondenti ai valori a e $a+da$ di a, perchè alla seconda equazione può sostituirsi l'altra $\dfrac{f(x,y,a+da)-f(x,y,a)}{da}=0$ che all'infuori di quantità di ordine superiore è appunto la $f'_a(x,y,a)=0$.

Pei punti (ξ,η) della curva inviluppo corrispondentemente ad ogni valore speciale di a nel tratto che si considera dovremo dunque avere le due equazioni (4) o (5); quindi le coordinate corrispondenti saranno i valori $\xi(a)$ e $\eta(a)$ che risultano per ξ e η dalla risoluzione delle equazioni (4) per ogni valore di a, o che sono definite come funzioni di a da queste equazioni, e la curva inviluppo luogo di questi punti potrà considerarsi come rappresentata dalle due equazioni

$$(6)\qquad \xi=\xi(a)\ ,\ \eta=\eta(a)\ ,$$

o anche evidentemente dall'altra $\varphi(\xi,\eta)=0$ che viene dalla eliminazione di a fra le due equazioni $f=0$, $f'_a=0$.

E infine se si osserva che a verrà ad avere un valore determinato per ogni punto (ξ,η) della curva inviluppo, e sarà variabile da punto a punto perchè per ogni punto (ξ,η) di questa curva varierà la curva (1) sulla quale questo punto si trova, mentre d'altra parte questo valore di a dovrà sempre soddisfare alla seconda delle (4), si vede che la stessa curva inviluppo potrà anche riguardarsi come rappresentata dalla equazione della curva data (1) nella quale però a invece di essere una costante è la funzione di x e y determinata dalla equazione derivata $f'_a=0$, ammesso naturalmente che questa determinazione di a possa farsi.

339. — Tutto questo quando si sappia avanti che le curve (a) e $(a+\Delta a)$ si incontrano successivamente, e che esiste una curva inviluppo.

Però a rendere più completo questo studio è necessario di trovare almeno i principali fra i casi nei quali è certo che questa curva inviluppo *effettivamente esiste;* e per questo dimostreremo ora inversamente che quando siano soddisfatte quelle condizioni che si dettero nella teoria delle funzioni implicite

(§ 164, [pag. 223, e seg.]) per essere certi che le equazioni

$$(7) \qquad f(\xi\,,\eta\,,a)=0 \quad , \quad f'_a(\xi\,,\eta\,,a)=0$$

definiscono due funzioni ξ e η del parametro a che hanno le solite particolarità rispetto all'essere finite, continue ecc., allora l'inviluppo esisterà, e sarà rappresentato da queste equazioni (*).

Ammettiamo dunque infatti che le equazioni (7) per ogni valore di a entro un certo tratto definiscano una curva e diano luogo al sistema di valori $\xi(a)\,,\eta(a)$ che figurano nelle (6), e che pel valore speciale a_0 di a questi valori $\xi(a)\,,\eta(a)$ divengano ξ_0 e η_0; e ammettiamo inoltre dapprima — riservandoci poi di togliere questa condizione — che le linee (a_0) e $(a_0+\Delta a)$ si incontrino successivamente per valori comunque piccoli di Δa.

Le coordinate $(x\,,y)$ del punto comune di queste linee soddisfaranno alle due equazioni

$$(8) \qquad f(x\,,y\,,a_0)=0 \;, \qquad \frac{f(x\,,y\,,a_0+\Delta a)-f(x\,,y\,,a_0)}{\Delta a}=0 \;,$$

la seconda delle quali può anche scriversi sotto la forma

$$f'_a(x\,,y\,,a_0)+\frac{f(x\,,y\,,a_0+\Delta a)-f(x\,,y\,,a_0)-f'_a(x\,,y\,,a_0)\Delta a}{\Delta a}=0 \;,$$

ovvero $f'_a(x\,,y\,,a_0)+\psi(x\,,y\,,a_0\,,\Delta a)=0$, indicando con $\psi(x\,,y\,,a_0\,,\Delta a)$ la funzione definita dalla formola

$$(9) \qquad \psi(x\,,y\,,a_0\,,\Delta a)=\frac{f(x\,,y\,,a_0+\Delta a)-f(x\,,y\,,a_0)-f'_a(x\,,y\,,a_0)\Delta a}{\Delta a}$$

nella quale considereremo $x\,,y$ e Δa come variabili, per tutti i valori di Δa sufficientemente piccoli *e diversi da zero* qualunque siano x e y dentro un certo campo che comprenda il punto $(\xi_0\,,\eta_0)$; e poichè evidentemente per la formola (β) della nota alla pag. 51 (che del resto è la conseguenza immediata dell'esistenza della derivata di $f(x,y,a)$ rispetto ad a) all'impiccolire indefinito di Δa questa funzione ψ tende a zero qualunque siano x e y, noi la potremo considerare come definita e uguale a zero anche per $\Delta a=0$; e con questa

(*) La dimostrazione che si dà in questo paragrafo dell'esistenza delle curve inviluppo sotto le condizioni poste non trovasi nelle Lezioni autografate del 1877. In quelle fu soltanto accennato esplicitamente alla possibilità di tale dimostrazione, omettendola per non allungare di troppo le stesse Lezioni.

intelligenza potremo studiare il sistema delle due equazioni

$$(10) \qquad f(x\,,y\,,a_0)=0 \;, \qquad f'_a(x\,,y\,,a_0)+\psi(x\,,y\,,a_0\,,\Delta a)=0$$

fra le variabili $x\,,y$ e Δa per tutti i sistemi di valori di Δa in un piccolo intorno di $\Delta a=0$, *incluso questo valore zero di* Δa, e qualunque siano x e y nel campo che si considera.

Queste equazioni (10) per $\Delta a=0$ saranno soddisfatte da $x=\xi_0\,,y=\eta_0$, talchè esisterà intanto un sistema iniziale di valori per x e y che soddisfano a queste equazioni; e poichè per $\Delta a=0$ i primi membri di queste equazioni qualunque siano x e y si riducono a quelli delle equazioni (7), le loro derivate rispetto ad x e a y per ogni sistema di valori di x e y negli intorni di ξ_0 e η_0 quando $\Delta a=0$, e quindi in particolare nel punto $(x=\xi_0\,,y=\eta_0\,,\Delta a=0)$ saranno quelle degli stessi primi membri delle (7). E conseguentemente se per queste equazioni (7), come noi supporremo, saranno soddisfatte quelle condizioni che porta la teoria delle funzioni implicite per potere essere certi che esse considerate come equazioni in $\xi\,,\eta\,,a$ definiscano un sistema di funzioni $\xi(a)\,,\eta(a)$ nell'intorno del punto a_0, e così in particolare se nel punto $(\xi_0\,,\eta_0\,,a_0)$ sarà diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} f'_\eta & f'_\eta \\ f''_{a,\xi} & f''_{a,\eta} \end{vmatrix} \;,$$

questa condizione sarà soddisfatta pel punto $(x=\xi_0\,,y=y_0\,,\Delta a=0)$ anche per le equazioni (10) considerate come equazioni in $x\,,y$ e Δa.

D'altra parte se si calcolano le derivate parziali rispetto ad x e y, quando Δa è diverso da zero, per la funzione ψ definita dalla formola (9), e se alle funzioni $f'_x(x\,,y\,,a_0+\Delta a)$ e $f'_y(x\,,y\,,a_0+\Delta a)$, considerate ora come funzioni di a pel punto $a_0+\Delta a$, si applica la formola (β) della nota a pag. 51 (che del resto, come già dicemmo, non è che la conseguenza immediata delle esistenza delle derivate di f'_x e f'_y rispetto ad a nel punto $(x\,,y\,,a_0)$), si vede subito che le stesse derivate $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ sono determinate finite e continue e tendono a zero con Δa; e quindi pei valori di x e y negli intorni di ξ_0 e η_0 (ξ_0 e y_0 inclusi) e pei valori di Δa nell'intorno di $\Delta a=0$ (non escluso ora per quanto dicemmo sopra anche il valore di $\Delta a=0$) saranno pure finite e continue le derivate parziali rispetto ad x e y del primo membro della seconda delle (10), come lo sono le derivate rispetto ad x e y del primo membro della prima delle stesse equazioni.

Quanto poi alla derivata rispetto a Δa della stessa funzione ψ per Δa diverso da zero, osserviamo che determinandola colla regola dei quozienti essa può scriversi sotto la forma

$$\frac{f'_a(x\,,y\,,a_0+\Delta a)\,\Delta a-\{f(x\,,y\,,a_0+\Delta a)-f(x\,,y\,,a_0)\}}{\Delta a^2}\,,$$

ovvero

$$f''_{a,a}(x\,,y\,,a_0+\theta\Delta a)-\frac{1}{2}f''_{a,a}(x\,,y\,,a_0+\theta_1\Delta a)$$

con θ e θ_1 numeri compresi fra 0 e 1; si vedrà subito che se, come supponiamo, $f''_{a,a}(x\,,y\,,a)$ è sempre determinata e finita e continua nei punti dell'intorno del punto $(\xi_0\,,\eta_0\,,a_0)$, la derivata rispetto a Δa della stessa funzione ψ che è anche quella del primo membro della seconda delle equazioni (10) sarà sempre determinata e finita per Δa diverso da zero; e poichè avrà il limite determinato $\frac{1}{2}f''_{a,a}(x\,,y\,,a_0)$ per $\Delta a=0$, la stessa derivata esisterà e sarà finita anche per $\Delta a=0$ qualunque siano x e y negli intorni di ξ_0 e η_0 (ξ_0 e η_0 inclusi) e sarà eguale precisamente a questo limite $\frac{1}{2}f''_{a,a}(x,y\,,a_0)$ (§ 44, [pag. 55 e 56]).

Ricordando dunque quanto si disse nella teoria delle funzioni implicite, si potrà ora intanto affermare che sotto le condizioni poste, per tutti i valori di Δa nell'intorno di $\Delta a=0$, o di a fra a_0 e $a_0+\Delta a$ quando Δa sia sufficientemente piccolo, le equazioni (10) definiscono due funzioni finite e continue x e y di Δa che col tendere di Δa a zero tenderanno a ξ_0 e η_0.

Coll'osservare poi che, a causa del valore (9) di ψ, le equazioni (10) non sono che le trasformate delle (8) si vede subito che non è più necessario di porre la condizione che ponemmo sopra, cioè che le curve (a_0) e $(a_0+\Delta a)$ s'incontrino, perchè i valori di x e y che così si avranno dalle equazioni (10) per ogni valore di Δa diverso da zero non saranno altro che le coordinate del punto d'incontro, che verrà così necessariamente ad esistere, delle curve stesse (8) e quindi anche delle due $f(x,y,a_0)=0\,,f(x\,,y\,,a_0+\Delta a)=0$. Inoltre queste coordinate avranno per limite quelle del punto $(\xi_0\,,\eta_0)$ della curva (7), dunque evidentemente si può ora affermare che, quando sieno soddisfatte le condizioni poste in principio di questo paragrafo intorno alle equazioni (7) almeno pei valori di a nell'intorno di un certo valore a_0, le curve $f(x\,,y\,,a)=0$ corrispondenti ai valori a e $a+\Delta a$ di a in questo intorno di a_0 si incontreranno successivamente e avranno una curva inviluppo che sarà rappresentata dalle equazioni (7), come appunto volevamo mostrare.

340. — Queste condizioni, come abbiamo detto, sono quelle che secondo la teoria delle funzioni implicite bastano ad assicurare che le equazioni (7) definiscono due funzioni $\xi\,,\eta$ di a che sono finite e continue insieme alle loro derivate prime nell'intorno del punto a e che per $a=a_0$ hanno i valori $\xi_0\,,\eta_0$ pei quali le (7) sono soddisfatte quando $a=a_0$; ed esse si riducono in sostanza a quelle di essere la funzione $f(x\,,y\,,a)$ finita e continua insieme alle sue derivate parziali $f'_x\,,f'_y\,,f'_a\,,f''_{a,x}\,,f''_{a,y}\,,f''_{a,a}$ nell'intorno del punto $(\xi_0\,,\eta_0\,,a_0)$ pel quale si suppone che le (7) stesse risultino verificate, e al tempo stesso essere diverso da zero in questo punto l'Iacobiano dei primi membri delle stesse equazioni (7) relativo a ξ e η.

E per la definizione generale che si dette per le curve, si vede che le condizioni medesime corrispondono in sostanza a quelle che si richiedono per essere sicuri che le equazioni (7), che devono rappresentare l'inviluppo, rappresentino effettivamente una curva per ogni valore di a nell'intorno del valore a_0; talchè per la esistenza dell'inviluppo di una curva (1) basterà assicurarsi che le equazioni (7) corrispondenti rappresentano una curva, la quale però potrà considerarsi sicuramente come inviluppo soltanto fuori dei punti singolari, cioè fuori dei valori di a e di x e y pei quali la funzione f o le sue derivate $f'_x\,,f'_y\,,f'_a\,,\,f''_{a,x}\,,f''_{a,y}\,,f''_{a,a}$ di $f(x\,,y\,,a)$ presentano qualche singolarità, o l'Iacobiano rispetto ad x e y dei due primi membri delle (7) è zero.

Si deve anche aggiungere che quando, risultando soddisfatte pei valori di a in un certo intorno di un valore a_0 le condizioni ora indicate, le equazioni (7) definiscono una curva di equazioni $x=x(a)$, $y=y(a)$, queste equazioni venendo rese identiche da questi valori di x e y daranno luogo alle due

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}x'(a)+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'(a)=0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial x}x'(a)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial y}y'(a)=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}\,, \end{cases}$$

e queste quando, come si suppone, il solito Iacobiano delle funzioni $f(x,y\,,a)$ e $f'_a(x\,,y\,,a)$ relativo ad x e y non è zero, determineranno sempre per $x'(a)$ e $y'(a)$ due valori dei quali uno almeno sarà differente da zero, e la curva inviluppo (7) ammetterà certamente anche una tangente determinata nei punti corrispondenti se in questi punti $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ sarà diverso da zero.

Invece se, essendo ancora diverso da zero il detto Iacobiano nel punto che si considera, il $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ sarà zero in questo punto, le equazioni precedenti non potranno essere soddisfatte altro che da valori nulli di $x'(a)$ e $y'(a)$, e allora per quanto si disse al §. 278 [pag. 390, seg.] la curva inviluppo nel punto stesso *potrà* presentare qualche singolarità rispetto alla tangente; quindi, lasciando da parte lo studio di questi punti speciali, noi possiamo ora affermare che se alle condizioni del paragrafo precedente si aggiunge anche l'altra che nei punti che si considerano la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ non sia zero, allora saremo sicuri che la curva inviluppo, oltre ad esistere per valori di a in un certo intorno di un valore a_0, avrà sempre anche una tangente determinata.

341. — Troviamo ora gli inviluppi di alcuni sistemi di curve.

1.° Si voglia l'inviluppo delle ellissi concentriche nelle quali la somma degli assi è una costante k, e questi assi sono sempre sulle stesse rette, per modo che esse sono rappresentate dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k-a)^2}=1, \tag{12}$$

dove a è il parametro variabile.

Per questo si osserverà che la derivata rispetto ad a del primo membro di questa equazione è $-\frac{2x^2}{a^3}+\frac{2y^2}{(k-a)^3}$, e quindi poichè l'Iacobiano rispetto ad x e y dei primi membri delle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k-a)^2}=1 \quad , \quad -\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{(k-a)^3}=0 \tag{13}$$

è differente da zero quando nè x nè y sono zero (*) e tutte le altre condizioni dei due paragrafi precedenti sono soddisfatte, si conclude che l'inviluppo cercato esiste ed è rappresentato dal sistema delle due equazioni precedenti (13); e poichè la seconda di queste conduce subito alle altre

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{k-a}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{k}, \tag{14}$$

eliminando con queste il parametro a dalla prima si trova che la equazione

(*) Si può osservare che, a causa della seconda delle equazioni (13), x o y non potranno essere zero altro che ai casi limiti di $a=0$ o $a=k$ che richiedono appunto che si abbia $x=0$, $y=\pm k$ o $x=\pm k$, $y=0$; mentre per gli altri valori di x, y e a il primo membro della equazione (12) e le sue derivate non presentano alcuna singolarità, e tanto l'Iacobiano quanto la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ non sono mai zero. Conseguentemente nei detti punti soltanto la curva può presentare singolarità, come effettivamente le presenta.

dell'inviluppo delle ellissi (12) in coordinate x, y è la seguente

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}, \tag{15}$$

in forza della quale le precedenti (14) ci permettono di rappresentare la stessa curva anche colle equazioni

$$x=\pm a^{\frac{3}{2}}k^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad y=\pm(k-a)^{\frac{3}{2}}k^{-\frac{1}{2}}.$$

Questa curva è conosciuta sotto il nome di *asteroide;* ed è formata di quattro rami simmetrici rispetto agli assi delle ellissi, con quattro punti singolari (cuspidi) ai punti $x=\pm k$, $y=\pm k$ su questi assi.

2.° Vogliasi l'inviluppo delle parabole che hanno uno stesso asse e il cui vertice è distante di una lunghezza uguale alla metà del parametro a da un punto fisso A situato su quell'asse.

Osserviamo perciò che, prendendo gli assi coordinati coll'origine nel punto fisso A e coll'asse delle x su quello comune delle parabole, la equazione di queste parabole si riduce alla forma $y^2=2a(x-\frac{1}{2}a)=2ax-a^2$; si vedrà subito che l'inviluppo cercato potrà rappresentarsi col sistema delle due equazioni $y^2=2ax-a^2$, $x-a=0$, la seconda delle quali si ottiene uguagliando a zero la derivata rispetto ad a del secondo membro della prima; e poichè la eliminazione di a fra queste equazioni conduce all'altra $y^2=x^2$ che rappresenta le due rette $y=x$ e $y=-x$, si conclude che l'inviluppo cercato si compone di queste due rette inclinate l'una di 45° e l'altra di —45° sull'asse delle parabole e passanti ambedue per l'origine delle coordinate, cioè pel punto fisso A.

3.° Avendo una curva qualsiasi $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, se si vorrà l'inviluppo delle sue tangenti $(X-x)y'-(Y-y)x'=0$, dove x' e y' sono le derivate di $x(\omega)$ e $y(\omega)$ bisognerà prendere il sistema delle due equazioni

$$(X-x)y'-(Y-y)x'=0 \quad , \quad (X-x)y''-(Y-y)x''=0,$$

la seconda delle quali è la derivata della prima presa rispetto al parametro variabile ω considerandovi come costanti X e Y; e quindi evidentemente l'inviluppo cercato sarà la curva stessa $X=x(\omega)$, $Y=y(\omega)$, a meno che non sia $x'=y'=0$, o più generalmente $x'y''-y'x''=0$.

Ma se questo avvenisse per uno o più valori speciali isolati di ω la teoria generale dei paragrafi precedenti non ci assicurerebbe già più della esistenza dell'inviluppo nell'intorno dei valori di ω pei quali si avesse $x'y''-y'x''=0$; e se avvenisse per tutto un tratto relativo ad ω, allora se in questo tratto una delle due derivate x' e y' per es. x' fosse sempre zero la linea si ridurrebbe alla retta $x=\text{cost.}$, e se x' e y' non fossero zero, avendosi allora $\frac{y''}{y'}=\frac{x''}{x'}$ o $d\log y'=d\log x'$, se ne dedurrebbe prima che $y'=cx'$ e poi che $y=cx+d$ con c e d costanti, cioè la linea sarebbe ancora una retta e non sarebbe il caso di occuparsene perchè, avendo per tangente sè stessa in ogni punto, mancherebbe il sistema infinito di rette delle quali si deve prendere l'inviluppo.

Lasciando dunque da parte questo caso della linea retta, si ha di qui che ogni curva dotata di tangente ecc. è l'inviluppo di questa tangente, salvo le singolarità che possono esservi nei punti speciali pei quali si abbia $x'y''-y'x''=0$ che ordinariamente saranno punti d'inflessione. E ciò risultava anche dalle considerazioni che esponemmo sulle sviluppate, e anche dall'osservare che, all'infuori di infinitesimi di ordine superiore, la tangente ad una curva in un punto può riguardarsi come la retta che riunisce questo punto della curva al suo infinitamente vicino.

4.° E più in generale se, essendo data una curva di equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, ad ogni punto di essa in un certo tratto sarà collegata un'altra linea che varî da punto a punto della curva, come potrà essere ad esempio, oltre che la tangente, la sua normale, o un cerchio col centro sulla tangente a una distanza fissa dal punto di contatto e con un raggio che sia uguale a questa distanza o sia uguale al raggio di curvatura della curva in quel punto, ecc. si potrà cercare l'inviluppo delle linee che corrispondono in questo modo ad ogni punto della curva.

E poichè queste linee avranno una equazione che risulterà sempre della forma $\varphi(X, Y, x, y, x', y', x'', y'', \ldots)=0$ dove $x', y', x'', y'', \ldots$ sono le derivate delle funzioni $x(\omega), y(\omega)$ che rappresentano le coordinate dei punti della curva, l'inviluppo sarà la linea rappresentata dal sistema delle due equazioni $\varphi=0$ e $d\varphi=0$, nella seconda delle quali il differenziale si dovrà intendere preso considerando come costanti X e Y, per modo che le stesse equazioni potranno scriversi

$$\varphi=0\,,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial x'}x''+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y''+\frac{\partial\varphi}{\partial x''}x'''+\frac{\partial\varphi}{\partial y''}y'''+\ldots=0\,;$$

e ciò quando queste rappresentino effettivamente una curva, da considerarsi questa curva fuori dei soliti punti singolari, come si trovò ad esempio nel capitolo precedente trattando dell'inviluppo delle normali a una curva, cioè della sviluppata, ecc.

342. — Le curve inviluppo godono di una proprietà notevole quale è quella di essere tangenti, almeno in generale, in ogni loro punto a una delle curve inviluppate (variabile naturalmente da punto a punto).

Sia infatti (x_0, y_0) un punto dell'inviluppo posto sulla curva (1) per la quale $a=a_0$, e ammettiamo senz'altro che nell'intorno di questo punto siano soddisfatte le condizioni del § 339 [pag. 463 e seg.] e inoltre che la seconda delle equazioni (7) definisca una funzione $a(x,y)$ finita e continua insieme alle sue derivate parziali di primo ordine, e che nel punto (x_0, y_0) ha il valore a_0.

Allora se il punto (x_0, y_0) si considera come appartenente alla curva inviluppata (1) per la quale a ha il valore costante a_0, osservando che per questa curva nel punto (x_0, y_0) una almeno delle due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, per es. $\frac{\partial f}{\partial y}$ sarà diversa da zero, perchè altrimenti il solito Iacobiano sarebbe zero, si vede subito che la tangente ad essa in quel punto sarà determinata e avrà il coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}$ determinato dalla formola $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$.

Se poi lo stesso punto (x_0, y_0) si riguarda come appartenente alla curva inviluppo (7) che può considerarsi come la curva che ha ancora per equazione la $f(x, y, a)=0$ ma nella quale a, invece di essere costante, è la funzione di x e y che è determinata dalla seconda delle (7) e che per $x=x_0$, $y=y_0$ diviene uguale ad a_0, si trova che il coefficiente angolare della tangente alla curva inviluppo nello stesso punto sarà determinato dalla equazione differenziale $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\partial x+\frac{\partial a}{\partial y}\partial y\right)=0$ che – per essere $a(x,y)$ una funzione di x e y finita e continua insieme alle sue derivate prime che soddisfa alla seconda delle (7) – si riduce ancora alla precedente $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$, di modo che per $x=x_0$, $y=y_0$, $a=a(x_0, y_0)=a_0$ il coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}$ della tangente dell'inviluppo è ancora quello della tangente alla curva inviluppata, e quindi le due tangenti coincidono.

Il teorema enunciato resta così dimostrato per tutti quei punti dell'inviluppo nei quali sono soddisfatte le condizioni generali del ricordato § 339 e la funzione $a(x, y)$ definita dalla seconda delle equazioni (7) della curva inviluppo è finita e continua insieme alle sue derivate $\frac{\partial a}{\partial x}$ e $\frac{\partial a}{\partial y}$ ciò che in particolare, per la teoria delle funzioni implicite, avverrà sempre quando pei valori corrispondenti di x, y e a, oltre alle solite derivate rispetto ad x e

y di $f(x\,,y\,,a)$ e $f'_a(x\,,y\,,a)$ che devono essere finite e continue, esista anche la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ e sia anch'essa finita e continua, e diversa da zero.

In altri termini per quanto si disse al § 340 si vede che per la validità di questo teorema basterà che siano soddisfatte le condizioni generali per le quali è certo che la curva inviluppo esiste ed ha la tangente.

Aggiungiamo infine che la particolarità che ora abbiamo dimostrata delle curve inviluppo, quella cioè di essere sempre tangenti a una curva inviluppata, si prende in molti trattati come definizione delle linee inviluppo, dicendo cioè che esse sono le linee che in ogni loro punto sono tangenti a una di quelle del sistema dato $f(x\,,y\,,a)=0$; e anche partendo da questa definizione si giunge a trovare le (7) come equazioni dell'inviluppo, e si trovano le stesse condizioni per la sua esistenza.

XXIV.

Contatti delle curve piane. Curve osculatrici

343. — Siano $y=f(x)$, $Y=\varphi(x)$ le equazioni di due curve riferite a due assi coordinati x e y che potranno essere anche obliqui, e le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ nel punto a abbiano le lore derivate finite e continue almeno fino a quelle di un certo ordine $n-1$, e le derivate dell'ordine n esistano pure e siano finite nello stesso punto, potendo però non esistere affatto nei punti vicini.

Indicando con y_{a+h} e Y_{a+h} le ordinate della prima e della seconda curva per $x=a+h$, la formola di Taylor abbreviata che trovammo nella nota alla pag. 87 (*) pei valori $a+h$ di x sufficientemente prossimi ad a ci darà le due

$$(1)\quad\begin{cases} y_{a+h}=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{1\,.\,2}f''(a)+\ldots+\dfrac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\dfrac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(a)+\varepsilon_n\,,\\[2ex] Y_{a+h}=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\dfrac{h^2}{1\,.\,2}\varphi''(a)+\ldots+\dfrac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}\varphi^{(n-1)}(a)+\dfrac{h^n}{\pi(n)}\varphi^{(n)}(a)+\varepsilon'_n\,,\end{cases}$$

essendo ε_n e ε'_n quantità infinitesime con h d'ordine superiore ad n; e se in a avremo semplicemente $f(a)=\varphi(a)$ senza che sia $f'(a)=\varphi'(a)$ le due curve date si taglieranno in a senza avere la tangente comune, e la differenza delle

(*) In questo capitolo e nei seguenti facciamo spesso un leggiero cambiamento al testo delle Lezioni del 1877 valendoci della formola di Taylor abbreviata quale fu data nella nota a pag. 87 invece di quella ordinaria col termine complementare di Lagrange, perchè così per le ultime derivate che si considerano non ci è bisogno di richiedere la loro esistenza anche fuori del punto iniziale e la loro continuità in questo punto, nel quale basterà invece che esse siano determinate e finite.

ordinate nei punti $a+h$ vicini ad a sarà data dalla formola

$$\mathrm{Y}_{a+h}-y_{a+h}=h\{\varphi'(a)-f'(a)\}+\frac{h^2}{1\,.\,2}\{\varphi''(a)-f''(a)\}+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}\{\varphi^{(n-1)}(a)-f^{(n-1)}(a)\}+$$

$$+\frac{h^n}{\pi(n)}\{\varphi^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)\}+\varepsilon'_n-\varepsilon_n\,,$$

e misurerà lo spostamento delle curve l'una dall'altra parallelamente all'asse delle y nei punti vicini ad a.

In questo caso poi, quando sia sicura l'esistenza delle derivate determinate e finite almeno per quelle del prim'ordine, cioè sia $n \geq 1$, questo spostamento conterrà un termine di primo grado in h, talchè lo spostamento delle due curve sarà del prim'ordine rispetto ad h, ed anche, se vuolsi, rispetto all'arco di ciascuna delle due curve, giacchè dalla formola $\frac{dx}{ds}=\cos\widehat{Tx}$ si vede subito che (non essendo ora $\cos\widehat{Tx}$ uguale a zero perchè abbiamo escluso il caso che $f'(a)$ e $\varphi'(a)$ siano infiniti) gli accrescimenti di x e di s sulle due curve divengono insieme infinitesimi dello stesso ordine.

Se poi $n \geq 2$ e in a si ha $f'(a)=\varphi'(a)$ senza che sia $f''(a)=\varphi''(a)$, le due curve in a si toccheranno, cioè avranno in a anche la stessa tangente, e per la formola precedente lo spostamento nei punti vicini ad a sarà di secondo ordine rispetto ad h come rispetto all'arco di ciascuna delle due curve.

Si dirà allora che in *a le due curve hanno un contatto del prim'ordine;* e se, essendo $n \geq 3$, sarà anche $f''(a)=\varphi''(a)$ senza che sia $f'''(a)=\varphi'''(a)$, lo spostamento delle due curve sarà del terz'ordine e si dirà che *le due curve hanno nel punto a un contatto del second'ordine;* e in generale se nel punto a le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, oltre essere eguali avranno le loro derivate finite e continue ed eguali fino alle μ^e inclusive, mentre le derivate $(\mu+1)^e$ sono ancora determinate e finite in a ma sono differenti fra loro, per modo cioè che si abbia $f(a)=\varphi(a)$, $f'(a)=\varphi'(a)$, $f''(a)=\varphi''(a)$,..., $f^{(\mu)}a)=\varphi^{(\mu)}(a)$ senza che sia $f^{(\mu+1)}(a)=\varphi^{(\mu+1)}(a)$, allora lo spostamento delle due curve nei punti vicini ad a sarà di ordine $\mu+1$ rispetto ad h, come rispetto all'arco delle due curve, e si *dirà che queste curve hanno un contatto di ordine μ nel punto a.*

344. — Viceversa, avendosi le due curve $y=f(x)$ e $\mathrm{Y}=\varphi(x)$ per le quali siano soddisfatte le solite condizioni per $f(x)$ e $\varphi(x)$ per modo che si abbiano ancora le formole (1), se avverrà che per un punto a i loro spostamenti parallelamente all'asse delle y siano infinitesimi di un certo ordine $\mu+1$ uguale o inferiore a quello delle ultime derivate che si considerano, allora a causa

delle (1) stesse si vede subito che quest'ordine $\mu+1$ dovrà essere intero, e che le derivate delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ saranno uguali fino a quelle dell'ordine μ inclusive, mentre quelle dell'ordine $\mu+1$ saranno diverse fra loro; talchè saremo ancora nel caso considerato delle curve che in a hanno un contatto di ordine μ.

345. — Queste considerazioni poi potranno riferirsi soltanto ai punti a destra o soltanto ai punti a sinistra di a quando a sia un estremo dell'arco che si considera nelle due curve, o quando per qualche ragione si debbano considerare soltanto i punti posti da una parte di a o si debbano considerare separatamente i punti posti dalle due parti di a; e allora i contatti di cui si dovrà parlare saranno contatti soltanto a destra o soltanto a sinistra, e dovrà intendersi che h prenda soltanto valori positivi o soltanto valori negativi, e $f'(a)$, $f''(a)$,... $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$... rappresentino le derivate a destra o a sinistra di $f(x)$ e $\varphi(x)$.

E considerando separatamente i punti a destra da quelli a sinistra, s'intende che si potrà allora riferirci anche al caso in cui almeno dopo un certo ordine le derivate di $f(x)$ o $\varphi(x)$ prese nel punto a da una delle due parti abbiano un valore, mentre prese dall'altra ne hanno un altro o sono infinite, o non esistono affatto; e in tal caso mentre nel punto a a destra si potrà avere per es. un contatto di un certo ordine fra le curve date, nel punto stesso a a sinistra potrà aversi un contatto di ordine differente o non esservi affatto contatto.

346. — Qui però, a meno che non si avverta espressamente il contrario, intenderemo sempre di riferirci *a quei punti interni* degli archi che si considerano nelle due curve date pei quali sono determinate e finite alcune delle ordinarie derivate come fu detto sopra; e in questi casi, che sono i casi ordinarii, accadrà a destra quel che accade a sinistra, e quindi potremo parlare di contatti delle curve senza distinguere i contatti a destra da quelli a sinistra.

E allora osservando che nei contatti di ordine pari la differenza $\mathrm{Y}_{a+h}-y_{a+h}$ cangia segno con h, mentre in quelli di ordine dispari essa conserva lo stesso segno tanto per h positivo quanto per h negativo, si potrà asserire che nei contatti di ordine pari le due curve si toccano traversandosi, mentre in quelli di ordine dispari le due curve si toccano in modo da non traversarsi; e in quest'ultimo caso quando il loro contatto nel punto corrispondente è almeno del terz'ordine, e non hanno nello stesso punto una inflessione, le due curve saranno contemporaneamente concave o convesse rispetto a una stessa retta e quindi resteranno tutte da una stessa parte della tangente e comprese l'una nell'altra nei punti vicinissimi a quello di contatto.

347. — Così in particolare ricordando che la equazione della tangente alla

curva $y=f(x)$ in un punto a nel quale la derivata prima $f'(a)$ non è infinita è $Y-f(a)=f'(a)(X-a)$, basterà osservare che, qualunque sia X e quindi anche per $X=a$, ha si $\frac{dY}{dX}=f'(a)$, $\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^3Y}{dX^3}=...=0$, per concluderne che, quando la tangente a una curva $y=f(x)$ in un punto a non è parallela all'asse delle y, in quel punto fra la tangente e la curva si ha un contatto di prim'ordine tutte le volte che nel punto a anche $f''(x)$ esiste ed è finita e diversa da zero; e se $f''(x)=0$, e in quel punto esiste ed è finita anche la derivata terza allora il contatto è di ordine superiore; e in particolare quindi, ammesso che sieno finite tutte quelle derivate di $f(x)$ che occorre di considerare, si può ora asserire che *nei punti d'inflessione nei quali la tangente non è parallela all'asse delle y, il contatto fra la curva e la tangente è sempre di second'ordine o di ordine pari superiore al secondo.*

E se in un punto dove la tangente non è parallela all'asse delle y due curve, oltre ad avere la stessa tangente, hanno anche lo stesso raggio di curvatura finito e diverso da zero e diretto dalla stessa parte, allora in quel punto verranno eguali fra loro anche le derivate seconde delle ordinate e saranno finite; e quindi, se nello stesso punto anche le derivate del terz'ordine saranno finite, *fra le due curve vi sarà un contatto almeno di second'ordine in quel punto.*

In particolare dunque fra il cerchio di curvatura e la curva nei punti nei quali la tangente non è parallela all'asse delle y e le derivate terze di y sono finite, si ha un contatto almeno del second'ordine; e quindi, poichè ordinariamente non sono soddisfatte le condizioni che si richiederebbero perchè questo contatto fosse di ordine superiore al secondo, così si può anche asserire che, tranne in punti speciali, *il cerchio di curvatura traversa la curva.*

348. — Riportandosi alla definizione si potrebbe credere che sull'ordine dei contatti delle curve avesse sempre influenza la direzione degli assi coordinati.

Merita perciò di esser notato che quando si mutino gli assi coordinati, in modo però che l'asse nuovo delle y non venga parallelo alla tangente comune nel punto di contatto delle due curve che si considerano, l'ordine di contatto di queste curve non viene alterato; cioè, *salvo la indicata eccezione, l'ordine di contatto di due curve è indipendente dalla direzione degli assi coordinati.*

Si osservi infatti che se M′ è un punto di una delle due curve vicinissimo a quello M che si considera, si potranno condurre per M′ due rette che siano parallele l'una all'antica ordinata e l'altra alla nuova, le quali incontreranno l'altra curva nei punti N e P respettivamente; e riunendo questi punti colla retta NP si formerà un triangolo M′NP (*) che ci darà la formola $\frac{M'N}{M'P}=\frac{\text{sen } M'PN}{\text{sen } M'NP}$, nel primo membro della quale M′N e M′P sono gli spostamenti delle due curve secondo l'asse antico e secondo l'asse nuovo delle y corrispondenti allo stesso arco MM′.

D'altra parte, quando nei punti di un dato intervallo $(x, x+h)$ per $f(x)$ esiste sempre una derivata determinata $f'(x)$, si ha la formola degli accrescimenti finiti $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$ con $0<\theta<1$, e da questa si vede subito che se, come supponiamo, nei punti dell'arco NP esiste sempre una tangente determinata alla curva che si considera, in un punto intermedio m dello stesso arco si avrà una tangente parallela alla corda NP, talchè gli angoli M′NP e M′PN saranno uguali a quelli di questa tangente colle due rette M′N e M′P; quindi per le solite ipotesi intorno alla continuità di $f'(x)$ o intorno al modo di variare con continuità della tangente, gli stessi angoli M′NP e M′PN col tendere indefinito di M′ ad M tenderanno verso gli angoli della tangente MT nel punto M coll'asse antico e coll'asse nuovo delle y.

Segue da ciò che se la tangente MT comune alle due curve non è parallela a nessuno di questi due assi, gli angoli M′NP, M′PN avranno limiti diversi da zero e da π, e quindi per la formola precedente il rapporto $\frac{M'N}{M'P}$ degli spostamenti delle due curve secondo i due assi delle y avrà un limite determinato finito e diverso da zero; dunque è certo che M′N e M′P diverranno infinitesimi dello stesso ordine, e questo, per quanto si disse sopra al §. 344, porta subito a concludere anche la uguaglianza degli ordini di contatto, giacchè prendendo le formole di trasformazione delle coordinate e avendo riguardo ai loro coefficienti si vede anche che quando nessuno dei due assi delle y è parallelo alla tangente MT, le ordinate delle due curve e le loro derivate, nell'ipotesi che si abbia il nuovo asse delle y, sono determinate e finite quando lo sono le ordinate e le derivate corrispondenti quando si ha l'antico asse delle y; e sì alle prime ordinate che alle seconde sono applicabili le formole (1) fino allo stesso ordine n di derivate.

Si può poi notare che la proprietà dimostrata risulterebbe subito anche dall'osservare che quando si hanno i nuovi assi, per le stesse formole di trasformazione delle coordinate si vede che le ordinate delle due curve e le loro derivate, oltre a restar finite, restano anche uguali fra loro fino a quell'ordine

(*) Anche in questo caso la figura si fa con tutta facilità colle indicazioni che abbiamo date, e il lettore potrà farla da sè.

soltanto pel quale erano finite ed uguali per gli assi antichi; come si può notare altresì che il risultato ora ottenuto ci permette di dire in modo generale che quando due curve hanno un contatto di ordine μ in un punto, la distanza da un punto di una di esse all'altra, contata in qualunque direzione non parallela alla tangente, col tendere di questo punto a quello di contatto diviene infinitesima di ordine $\mu+1$ rispetto all'arco di ciascuna delle due curve.

349. — Aggiungiamo che: *Quando due curve hanno fra loro un contatto di un dato ordine μ in un punto a, è impossibile condurre una terza curva che abbia con una di esse, e quindi anche coll'altra, un contatto di ordine inferiore a μ nello stesso punto a e che sia compresa fra le due curve date nei punti sufficientemente vicini ad a; o più in generale le curve che in un punto di una curva data hanno con questa un contatto di ordine μ, in prossimità di questo punto sono vicine a questa più di qualunque altra linea che nel punto stesso abbia con quella data un contatto di ordine inferiore a μ.*

E difatti, se s'indica con Y'_{a+h} l'ordinata nel punto $a+h$ di una terza curva che passi pel punto a e ivi abbia un contatto d'ordine inferiore a μ colle prime due curve d'ordinate y e Y che hanno fra loro un contatto di ordine μ, s'intende subito che coll'impiccolire di h la differenza $Y_{a+h}-y_{a+h}$ finirà per divenire e restare sempre inferiore in valore assoluto alla differenza $Y'_{a+h}-y_{a+h}$ come anche all'altra $Y'_{a+h}-Y_{a+h}$, e questo mostra quanto abbiamo enunciato.

S'intende che i resultati dei due ultimi paragrafi si applicano anche ai contatti considerati soltanto da una parte del punto che si considera.

E s'intende pure che i contatti fra le curve oltre ad aversi, come noi abbiamo sempre supposto, nei punti nei quali la tangente non è parallela all'asse delle y, potranno naturalmente aversi anche nei punti nei quali si presenta questa particolarità. E per studiarli basterà prendere per variabile indipendente y invece di x o fare un cangiamento di assi coordinati.

350. — Aggiungiamo che qui abbiamo supposto che le equazioni delle curve da considerarsi siano date sotto la forma esplicita $y=f(x)$, $Y=\varphi(x)$, e gioverà quindi accennare anche ai casi nei quali questo non avvenga.

Supponiamo perciò ad esempio che le equazioni delle curve date sieno invece le due

$$f(x\,,\,y)=0 \quad \text{e} \quad \varphi(x\,,\,y)=0 \tag{2}$$

ciò che non esclude che una di esse per es. la prima sia della forma $y-f(x)=0$, restando così ancora con questa nel caso precedente; e queste curve abbiano un punto comune $(a\,,\,y_a)$ per modo da avere $f(a\,,\,y_a)=0$ e $\varphi(a\,,\,y_a)=0$.

Allora per rientrare nel caso già trattato basterà intendere che le funzioni indicate precedentemente con $f(x)$ e $\varphi(x)$ e le loro derivate siano ora le funzioni corrispondenti alle ordinate di queste curve e le loro derivate, cioè siano quelle funzioni definite dalle equazioni (2) che per $x=a$ si riducono l'una e l'altra a y_a e le derivate di esse; ma anche senza ricorrere alla determinazione di queste funzioni potremo trattare dei contatti di queste curve valendoci delle considerazioni seguenti.

Escludiamo perciò i casi specialissimi e ordinariamente corrispondenti a punti singolari nei quali pel punto $(a\,,\,y_a)$ sono zero contemporaneamente $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, o $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; e oltre a questi casi escludiamo anche quelli nei quali insieme a $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia zero $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ o insieme a $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia zero $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, pei quali volendo occuparsene occorrerà prima fare un cambiamento di assi coordinati; e supponiamo ad es. che nel punto da considerarsi $(a\,,\,y_a)$ non siano zero nè $\frac{\partial f}{\partial y}$ nè $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

In questo caso, secondo la teoria delle funzioni implicite, le derivate delle funzioni y definite dalle equazioni (2) nel punto $(a\,,\,y_a)$ potranno effettivamente determinarsi per mezzo delle equazioni differenziali corrispondenti; cioè si determineranno per mezzo delle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0\,,\\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{dy}dy\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0\,,\\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,d^2y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y=0\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{3}$$

quando si tratterà della prima curva, e per mezzo delle altre simili che si hanno da queste cambiandovi f in φ quando si tratterà della seconda curva; quindi evidentemente avremo un contatto di prim'ordine nel punto $(a\,,\,y_a)$ comune alle due curve quando, ponendo in questi due sistemi di equazioni per x e y questi valori a e y_a, risulteranno uguali i valori che da esse verranno determinati per le derivate prime di y per le due curve e non quelli delle derivate seconde; avremo un contatto di second'ordine quando per le due curve oltre alle derivate prime di y risulteranno uguali anche le derivate seconde ma non le terze, ecc.

In altri termini si può dire che nei contatti degli ordini primo, secondo terzo, ... bisogna che i valori comuni a e y_a di x e y relativi al punto di contatto e quelli di $y', y'', y''', \ldots$, relativi a una delle due curve per quel punto rendano successivamente identiche le equazioni differenziali (o derivate) degli ordini primo, secondo, terzo,... dell'altra curva, ecc.

351. — E quando una o tutte e due le curve da considerarsi siano rappresentate per mezzo di due equazioni in seguito alla introduzione di una variabile indipendente ausiliaria, come ad esempio colle due equazioni $x=x(\omega)$ $y=y(\omega)$ la prima curva, e $x_1=x_1(\omega_1)$, $y_1=y_1(\omega_1)$ la seconda, per la quale solo a scanso di equivoci abbiamo indicato con x_1 e y_1 le coordinate, allora se avverrà che le due curve abbiano un punto comune M corrispondente ai valori a e a_1 di ω e ω_1, potremo determinare colle formole del cambiamento della variabile indipendente i valori delle antiche derivate di y e y_1 rispetto ad x e a x_1 nel punto M per le due curve, e coll'esame di questi valori potremo decidere se le due curve abbiano o no un contatto nel punto M e di quale ordine.

I valori delle varie derivate di y rispetto ad x per la prima curva saranno dunque i seguenti

$$\frac{y'}{x'}\,,\quad \frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\,,\quad \frac{(x'y'''-y'x''')x'-3(x'y''-y'x'')x''}{x'^5}\,,\ldots$$

e per averli pel punto M basterà farvi $\omega=a$; e quelli delle derivate di y_1 rispetto ad x_1 per la seconda curva saranno i valori simili

$$\frac{y'_1}{x'_1}\,,\quad \frac{x'_1y''_1-y'_1x''_1}{x'^3_1}\,,\quad \frac{(x'_1y'''_1-y'_1x'''_1)x'_1-3(x'_1y''_1-y'_1x''_1)x''_1,\ldots}{x'^5_1}\,,\ldots$$

e per averli nel punto M basterà farvi $\omega_1=a_1$; e nei contatti dei varii ordini questi valori dovranno risultare successivamente uguali fino a quelli corrispondenti all'ordine di contatto inclusive.

352. — Ciò che abbiamo esposto intorno ai contatti delle curve piane conduce alla considerazione di certe curve che dipendono in modo speciale dalla curva data nel punto che si vuole considerare, e che si dicono le sue *curve osculatrici*.

Sia data una curva fissa C, e si consideri un sistema di curve C' rappresentate tutte da una equazione della stessa forma

$$\varphi(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1})=0\,, \tag{4}$$

nella quale però figurino un certo numero, per es. $\mu+1$, di parametri o costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1}$, variando le quali si ottengono tutte le curve del sistema; e almeno finchè le costanti prendono soltanto valori contenuti in un dato campo, le ordinate di queste curve C' come quella di C in un punto a risultino finite e continue insieme a tutte le loro derivate, almeno fino a quella dell'ordine $\mu+1$ inclusive.

Profittando dell'arbitrarietà delle indicate costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1}$, si cerchi di determinarle in modo che queste curve C' vengano ad avere un contatto colla curva data C di quell'ordine maggiore che sarà possibile, e per questo incominciamo dall'osservare in generale che onde la curva C' abbia un contatto di un ordine qualsiasi colla curva C nel punto (a, y_a) di questa, bisogna per prima cosa che questo punto appartenga anche alle C' ciò che porterà che la loro equazione (4) venga soddisfatta da queste coordinate (a, y_a), cioè che si abbia

$$\varphi(a, y_a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1})=0\,. \tag{5}$$

Inoltre se il contatto fra le due curve dovrà essere di un certo ordine n, indicando con $Y_a, Y'_a, Y''_a, \ldots$ l'ordinata delle curve C' nel punto a e le sue derivate, che naturalmente si dovrà supporre che esistano e siano determinate e finite almeno fino all'ordine $n+1$ inclusive, bisognerà che, supposta già soddisfatta la $Y_a=y_a$, vengano soddisfatte anche le altre n condizioni $Y'_a=y'_a$, $Y''_a=y''_a, \ldots, Y^{(n)}_a=y^{(n)}_a$; le quali, per quanto si disse sopra al § 350, nel caso che le equazioni delle curve C' siano della forma (4) si ridurranno alle equazioni differenziali (o derivate) della equazione (4) nelle quali per $x, y, y', y'', y''', \ldots$, siano poste respettivamente $a, y_a, y'_a, y''_a, y'''_a \ldots$; talchè un contatto di ordine n darà luogo a $n+1$ equazioni di condizione delle quali una sarà la (5) e le altre saranno quelle che vengono nel modo ora indicato dalle prime n equazioni derivate della (4).

Figurando nella (4) $\mu+1$ costanti arbitrarie, e potendo quindi porre altrettante equazioni per determinarle quando queste non siano incompatibili fra loro e sieno tutte distinte, segue da quanto abbiamo detto che potremo disporre delle $\mu+1$ costanti che figurano nella equazione (4) delle curve C' per stabilire fra esse e la curva data C un contatto di ordine μ; e ciò tutte le volte che le equazioni di condizione che si stabiliranno nel modo testè indicato risultino compatibili fra loro, e non ce ne siano che rientrino le une nelle altre, nel quale ultimo caso potremo porre anche altre condizioni, e avere anche un contatto di ordine superiore a μ.

Queste curve allora saranno evidentemente curve del sistema C' che avranno colla curva data nel punto che si considera un contatto di ordine più elevato di quello che potranno avere le altre curve del sistema C' corrispondenti agli altri valori delle costanti, e si diranno *le curve del sistema C′ osculatrici* di quella data C nel punto che si considera.

Ed è notevole che, per quanto dicemmo sopra, le equazioni di condizione che serviranno a determinare le costanti che figurano nella (4) e condurranno quindi alle curve osculatrici della C, sono quelle che si ottengono scrivendo la equazione (4) delle curve C′ e le sue equazioni differenziali (o derivate) e ponendovi per $x, y, y', y'', \ldots$ i valori che hanno queste quantità per la curva data C nel punto (a, y_a) che si considera.

353. — Di queste curve osculatrici generalmente non ve ne sarà che una, ma in qualche caso potranno anche esservene di più dipendentemente dal numero dei sistemi di valori che risulteranno per le costanti arbitrarie dalle equazioni di condizione; come in certi casi potranno non esservene, o esservene invece un numero infinito ma con un contatto di ordine minore di μ, perchè alcune delle equazioni di condizione risultino incompatibili e convenga considerarne soltanto un numero minore le quali lascieranno allora indeterminate alcune costanti.

L'ordine del contatto sarà in generale uguale a μ cioè uguale al numero delle costanti diminuito di una unità; però in certi casi potrà anche essere minore come ora dicemmo, mentre in altri potrà invece essere maggiore, potendo darsi, come già osservammo nel paragrafo precedente, che sia possibile di aggiungere altre equazioni di condizione perchè alcune delle prime $\mu+1$ rientrino le une nelle altre, o potendo darsi che alcune delle equazioni differenziali della (4) immediatamente successive alla μ^a risultino pure soddisfatte dai valori $a, y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(\mu)}, y_a^{(\mu+1)}, \ldots$ di $x, y, y', y'', \ldots, y^{(\mu)}, y^{(\mu+1)}, \ldots$ relativi alla prima curva nel punto a.

La distanza poi fra i punti della curva data, e quelli di una delle curve C′ osculatrici, pei punti posti in prossimità del punto di contatto, sarà infinitesima di un ordine che generalmente sarà eguale al numero $\mu+1$ delle costanti che figurano nelle equazioni delle curve del sistema, e nei casi speciali ora indicati potrà anch'essere infinitesima di ordine talvolta inferiore e talvolta superiore a questo numero; e ciò, per quanto dicemmo al § 348 [pag. 476], qualunque sia la direzione secondo la quale queste distanze vengono contate, fatta eccezione soltanto per la direzione parallela alla tangente nel punto di contatto.

S'intende poi che nel sistema C′ potranno esservi anche curve osculatrici di quella data C in punti nei quali, le derivate delle ordinate essendo tutte infinite, la tangente è parallela all'asse delle y; e per trovarle basterà prendere per variabile indipendente y invece che x o fare un cangiamento di assi coordinati.

Oltre a ciò si intende che in casi speciali potrà avvenire che non si possa

parlare altro che di curve osculatrici a destra o di curve osculatrici a sinistra; come potrà avvenire che le curve del sistema osculatrici a destra siano differenti da quelle osculatrici a sinistra; ed è per questo che noi troviamo utile di avvertire esplicitamente che i risultati seguenti per quanto vengano esposti in modo da riferirsi più specialmente a quei casi che ordinariamente si presentano, nei quali cioè accade a destra quello che accade a sinistra, potranno riferirsi anche al caso in cui si tratti di curve osculatrici soltanto a destra o soltanto a sinistra del punto che si considera; intendendo però allora che le derivate in questo punto sieno derivate a destra o derivate a sinistra, e così pure le tangenti, i centri di curvatura ecc... siano relativi alla parte corrispondente del punto stesso.

354. — E si può aggiungere infine che se le curve del sistema C′ anzichè dalla (4) fossero date da due equazioni della forma

$$x = x(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1}) \quad , \quad y = y(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1}) ,$$

allora per esprimere che le derivate di y come funzioni dell'ascissa sono uguali per le curve C e C′ fino a quelle di un certo ordine avremmo ancora un numero di equazioni uguali a quest'ordine, e si troverebbero al solito tenendo conto delle formole del cangiamento della variabile indipendente.

Per esprimere però che la curva C′ passa pel punto (a, y_a) avremmo le due equazioni $a = x(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1})$, $y_a = y(\omega, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu+1})$ invece della unica (4), ma in questi casi avremmo in più da determinare la quantità ω e quindi le conclusioni finali sarebbero ancora le stesse.

355. — Premesse ora queste nozioni generali, osserveremo che, siccome le equazioni delle rette del piano contengono due costanti arbitrarie, quelle dei cerchi ne contengono tre, quelle delle coniche ne contengono cinque ecc. così pei punti di una curva nei quali l'ordinata, quando sia presa in modo da non essere parallela alla tangente, è finita e continua insieme ad un numero conveniente delle sue derivate, esisterà ordinariamente una retta osculatrice che avrà colla curva un contatto almeno del prim'ordine, esisterà un cerchio osculatore che avrà colla curva un contatto almeno di second'ordine, esisterà una conica osculatrice che avrà colla curva un contatto almeno del quart'ordine, ecc.

E la distanza della curva dalla retta osculatrice nei punti vicini a quello di contatto sarà almeno di second'ordine rispetto all'arco della curva, quella della curva al cerchio osculatore sarà almeno del terz'ordine, quella della curva alla conica osculatrice sarà almeno del quint'ordine, ecc., quando queste distanze non siano contate parallelamente alla tangente nel punto di contatto.

356. — Merita ora di esser notato che *la retta osculatrice in un punto di una curva è la tangente, e il cerchio osculatore è il cerchio di curvatura.*

Indicando infatti con $y=f(x)$ la equazione della curva, e con $y=\alpha x+\beta$ quella di un sistema di rette non parallele all'asse delle y, si vede subito che onde la retta $y=\alpha x+\beta$ divenga osculatrice della curva nel punto (ξ, η), bisognerà determinare le costanti α e β in modo che si abbiano le equazioni $f(\xi)=\eta=\alpha\xi+\beta$, $f'(\xi)=\alpha$, e perciò la retta osculatrice nel punto (ξ, η) sarà quella di equazione $y=f'(\xi)x+\eta-f'(\xi)\xi$, ovvero $y-\eta=f'(\xi)(x-\xi)$, cioè sarà la tangente.

Presa poi l'equazione $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ che, quando α, β e R sono costanti arbitrarie, rappresenta un sistema di cerchi, si vede subito che per trovare il cerchio osculatore della curva nel punto (ξ, η) si dovranno determinare le costanti α, β e R in modo che sia

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2\,,\quad \xi-\alpha+(\eta-\beta)f'(\xi)=0\,,\quad 1+f'^2(\xi)+(\eta-\beta)f''(\xi)=0\,;$$

e le due ultime equazioni quando non sia $f''(\xi)=0$ sono appunto quelle che ci servirono a determinare le coordinate α e β del centro del cerchio di curvatura, mentre la prima è quella che ne determina il raggio R.

S'intende che per la retta osculatrice si suppone qui che anche le derivate seconde di $f(x)$ siano determinate e finite nel punto (ξ, η), e per il cerchio osculatore si suppone che lo siano anche le derivate terze; e si comprende anche subito che, quando sia $f''(\xi)=0$, la retta osculatrice, invece di avere un contatto soltanto di prim'ordine come lo ha nei casi ordinarii, lo avrà di ordine superiore ecc., e pel cerchio osculatore avremo $\beta=\infty$ e $R=\infty$ come appunto accade allora anche pel cerchio di curvatura, ecc.

Questi risultati poi sussistono anche se nel punto (ξ, η) la tangente della curva data è parallela all'asse delle y, quando al solito questa posizione della tangente sia il limite delle posizioni che essa ha nei punti vicini; giacchè in questi casi con un cangiamento di assi, o prendendo per esempio per variabile indipendente y invece che x, si giunge subito alle stesse conclusioni.

357. — È pur degno di nota che *le curve osculatrici del sistema* C' *in un punto* M *di una curva fissa* C *si possono riguardare come limiti delle curve del sistema* C' *che passano pel punto* M *e per altri* μ *punti vicinissimi* $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ *situati sulla curva* C, *quando questi vengono ad avvicinarsi successivamente e indefinitamente al primo* M.

Si supponga infatti di avere già disposto di n delle $\mu+1$ costanti che figurano nelle equazioni delle curve C' per modo da avere nel punto a che si considera un contatto di ordine $n-1$, essendo $\mu+1>n\geq 1$.

Allora se y e Y sono le ordinate di C e delle curve C', nel punto a avremo le equazioni $Y_a=y_a$, $Y'_a=y'_a, \ldots, Y_a^{(n-1)}=y_a^{(n-1)}$; e poichè, se si vorrà disporre di un'altra costante per modo da far sì che la curva C' passi per un punto $M_n(a+h_n, y_{a+h_n})$ della curva C, si dovrà porre la condizione $Y_{a+h_n}=y_{a+h_n}$, così applicando la solita formola di Taylor abbreviata per le y_{a+h_n} e Y_{a+h_n}, e poi facendo la differenza di questi valori si troverà che dovremo avere anche l'altra

$$(Y_a^{(n)}-y_a^{(n)})\frac{h_n^n}{\pi(n)}+\varepsilon'_n-\varepsilon_n=0\,,$$

dove ε_n e ε'_n divengono infinitesimi con h_n d'ordine superiore ad n.

Ora se h_n impiccolisce indefinitamente e la curva C' deve continuare a passare pel punto $a+h_n$ della curva C, per un teorema sugl'infinitesimi dovremo avere $Y_a^{(n)}=y_a^{(n)}$; dunque le curve C' che verranno così a determinarsi avranno un contatto con C almeno dell'ordine n; e questo, facendo successivamente $n=1, 2, \ldots, \mu+1$, mostra subito quanto abbiamo enunciato sopra.

Notiamo che con questa dimostrazione si viene a supporre come è richiesto nell'enunciato, che i punti $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ vadano a confondersi nel punto M soltanto successivamente; ma *si potrebbe anche dimostrare che il modo con cui essi tendono ad* M *è del tutto indifferente, quando essi siano tali da dovere essere considerati come distinti anche quando si trascurano le quantità di ordine superiore.*

358. — E aggiungiamo infine che per queste considerazioni: *Il cerchio osculatore (o il cerchio di curvatura) di una linea in un punto può riguardarsi:*

1.° *come il limite verso cui tende il cerchio che è tangente alla curva nel punto che si considera e che passa per un secondo punto della curva, quando questo punto si avvicina indefinitamente al primo restando sulla curva;*

2.° *come il limite verso cui tende il cerchio che passa pel punto che si considera e per due altri punti della curva, quando questi due ultimi punti si avvicinano indefinitamente al primo restando sulla curva.*

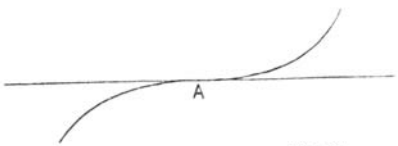
XXV.

Cenno sui punti singolari delle curve piane

359. — Mi limiterò ad accennare le varie specie di punti singolari che possono presentare le curve piane che non hanno singolarità altro che eccezionalmente.

1.° *Punti d'inflessione.* — Sono quelli che noi abbiamo già studiato a parte (§§ 292 e seg. [pag. 406 e seg.]), nei quali la tangente taglia la curva, per modo che i punti degli intorni a destra sieno da una parte della tangente e quelli degli intorni a sinistra siano dall'altra parte, ecc. (fig. 1.ª).

Fig. 1.ª



2.° *Punti multipli.* — Sono quelli nei quali due o più rami della curva s'incontrano essendo o no tangenti (fig. 2.ª e 3.ª), come avviene, per es. nel centro della lemniscata di Bernoulli. Questi punti si dicono *doppii* quando i rami che in essi s'incontrano sono soltanto due come nella lemniscata e come nel punto B della fig. 2.ª; si dicono *tripli*, come il punto C della fig. 3.ª, quando i rami che in essi s'incontrano sono soltanto tre, ecc.

Fig. 2.ª

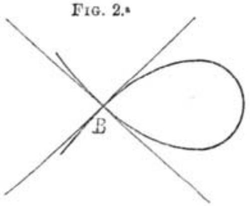
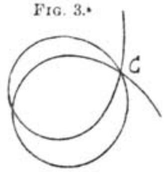


Fig. 3.ª



3.° *Punti di regresso o cuspidi.* — Sono quelli nei quali due rami della curva si fermano ed ivi hanno una tangente a comune (fig. 4.ª e 5.ª).

Fig. 4.ª

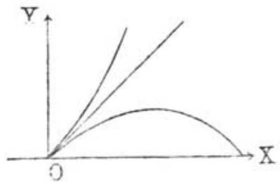
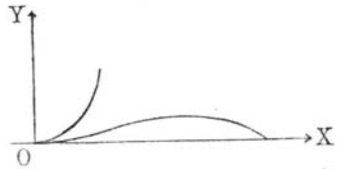


Fig. 5.ª



Essi si dicono *punti di regresso di primo genere o di prima specie* se la tangente comune è posta fra i due rami e si dicono di *secondo genere* o di *seconda specie* quando la tangente comune, nei punti vicini a quello di contatto, lascia da una stessa parte i due rami della curva.

Così la curva $(y-x)^2-x^3=0$, che si compone dei due rami $y=x+\sqrt{x^3}$, $y=x-\sqrt{x^3}$ (fig. 4.ª), ha nel punto $x=0$ un regresso di prima specie; mentre l'altra $(y-x^2)^2-x^5=0$ che si compone dei due rami $y=x^2+\sqrt{x^5}$, $y=x^2-\sqrt{x^5}$ (fig. 5.ª) ha nel punto $x=0$ un regresso di seconda specie.

È evidente infatti che i due rami della prima curva sono l'uno al disopra, e l'altro al disotto della retta $y=x$ che è la tangente comune perchè per $x=0$ la derivata di y a destra è l'unità pei due rami; mentre la seconda curva in vicinanza di $x=0$ ha i suoi due rami al disopra della retta $x=0$ che è la tangente, giacchè pel primo di questi rami si ha $y=x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$ e pel secondo si ha $y=x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ e quindi per x positivo e prossimo a zero si ha sempre evidentemente $y>0$, e pei due rami la derivata di y a destra pel punto $x=0$ è uguale a zero.

Esaminando i rami inferiori delle due curve si vede che essi tagliano l'asse delle x per $x=1$; e colla considerazione delle derivate prima e seconda di y si vede anche che pel ramo $y=x-\sqrt{x^3}$ della prima curva si ha un punto di massimo per $x=\frac{4}{9}$, e pel ramo $y=x^2-\sqrt{x^5}$ della seconda curva si ha un punto d'inflessione per $x=\frac{64}{225}$ e un punto di massimo per $x=\frac{16}{25}$.

4.° *Punti isolati.* Sono punti le cui coordinate soddisfano alla equazione della curva senza però che nei loro intorni sufficientemente piccoli vi siano altri punti di essa.

Così per es. nella curva

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(x-\frac{1}{2}a\right)}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\left(y-\frac{1}{2}b\right)}{b^2}\right)=0$$

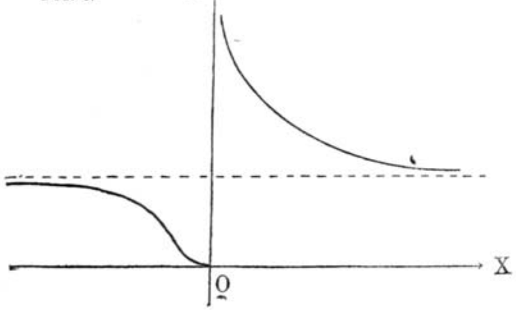
il punto di coordinate $\left(x=\frac{1}{2}a\,,y=\frac{1}{2}b\right)$ è un punto isolato della curva.

Sono altresì punti isolati quelli pei quali $x=\frac{1}{2}a+k\pi$ e $y=\frac{1}{2}b+k_1\pi$ con k e k_1 numeri interi qualsiansi, eccettuati però quelli, quando ve ne siano, che dipendentemente dai valori di a e b per valori speciali di k e k_1 si trovassero sulla iperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

5.° *Punti di arresto o di fermata.* Sono punti nei quali un ramo di curva viene bruscamente a fermarsi.

Così per es. è un punto d'arresto il punto $x=0$ pel ramo posto dalla parte delle x negative nella curva $y=e^{\frac{1}{x}}$ (fig. 6.ª).

FIG. 6.ª



Questo ramo viene da distanza grandissima dalla parte delle x negative, è tutto al disopra dell'asse delle x e compreso fra quest'asse e la retta $y=1$ che è un suo asintoto, ha un punto d'inflessione per $x=-\frac{1}{2}$ perchè ivi la derivata seconda di y è zero e la derivata terza è diversa da zero; e per $x=0$ raggiunge l'origine e ivi si arresta bruscamente perchè col tendere di x a zero y va verso lo zero se x tende a zero per valori negativi, e cresce all'infinito se x tende a zero per valori positivi.

Lo stesso ramo di curva nel punto di fermata $x=0$ ha per tangente a sinistra l'asse delle x perchè col tendere di x a zero dalla parte delle x negative y' ha per limite lo zero.

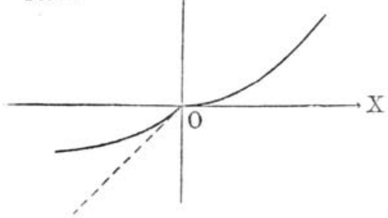
Invece dalla parte delle x positive la curva è tutta al disopra della retta

$y=1$ e va all'infinito tanto nel senso dell'asse delle y che in quello dell'asse delle x, essendo sempre convessa verso quest'asse perchè la derivata seconda di y per x positivo è sempre positiva; e l'asse delle y e la retta $x=1$ sono due asintoti di questo ramo della curva.

6.° *Punti salienti o angolosi o vertici.* Sono punti nei quali due rami di una curva si fermano senza però avere la tangente comune.

Così accade per es. per la curva $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ nel punto $0x=$ (fig. 7.ª),

FIG. 7.ª



perchè col tendere di x a zero sì a destra che a sinistra y tende verso lo zero, e quindi la curva passa per l'origine ed ivi è continua; e se si calcola la sua derivata pei valori di x diversi da zero si trova che

$$y'=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2},$$

e col tendere di x a zero a destra questa derivata tende verso lo zero, mentre a sinistra tende verso uno, e quindi per $x=0$ la derivata a destra esiste ed è zero, e a sinistra esiste pure ed è uno (§. 44 [pag. 55 e seg.]), e la tangente a destra è distinta da quella a sinistra.

La curva nelle vicinanze del punto $x=0$ ha la forma indicata nella figura, perchè per x diverso da zero la derivata seconda di y è $y''=\frac{e^{\frac{1}{x}}(e^{\frac{1}{x}}-1)}{x^3(1+e^{\frac{1}{x}})^3}$, e quindi nelle vicinanze del punto $x=0$ il prodotto yy'' è negativo a sinistra ed è positivo a destra, e la curva è concava verso l'asse delle x nei punti a sinistra ed è convessa nei punti a destra (§. 294 [pag. 408 e seg.]).

360. — Lo studio e la ricerca dei punti singolari nelle curve di equazione $f(x\,,y)=0$ si fa per mezzo delle derivate, poichè, per quanto dicemmo trattando delle funzioni implicite al §. 149 e seg. [pag. 200 e seg.], nella y considerata come funzione della x, o nella x considerata come funzione della y per un punto della curva non potranno aversi singolarità che possano dare luogo a punti singolari del genere di quelli qui indicati – esclusi quelli d'inflessione – altro che per quei punti speciali pei quali presenti qualche singolarità la funzione $f(x\,,y)$ o pei quali le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$ cessino di esistere o siano infinite o discontinue, o pei quali infine queste derivate siano con-

temporaneamente zero, come appunto si riscontra che avviene in tutti gli esempii di punti singolari che abbiamo dato sopra; talchè, fatta astrazione dai primi dei detti punti speciali, le singolarità in una curva di equazione $f(x, y)=0$, — i punti d'inflessione eccettuati — non potranno aversi altro che per quei punti pei quali si abbia $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$; e quindi per trovarle bisognerà incominciare col cercare i punti (x, y) pei quali si abbiano contemporaneamente le tre equazioni $f(x, y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e poi converrà esaminare se essi corrisponderanno effettivamente o no a punti singolari.

Quanto poi ai punti d'inflessione per trovarli basterà valersi delle considerazioni esposte al §. 297 [pag. 411 e seg.].

Tenendo conto di queste considerazioni, gli studii sui punti singolari potrebbero essere molto sviluppati; ma noi non possiamo fermarci ulteriormente su questi, e dobbiamo contentarci di quel poco che abbiamo detto intorno ad essi.

XXVI.

Curve nello spazio. Tangente e piano normale

361. — Si chiama curva *gobba* o *a doppia curvatura* una linea, definita ancora nel modo generale di cui al Cap. XVIII, quando i suoi punti non sono tutti situati in uno stesso piano.

Noi studieremo ora le curve gobbe, e in generale le curve nello spazio, senza escludere così il caso che possano ancora essere piane e situate in un piano qualsiasi dello spazio; e ponendoci nel caso delle coordinate cartesiane che potremmo supporre ortogonali o oblique, ma che per semplicità supporremo senz'altro sempre ortogonali, incominceremo coll'osservare che la posizione di ogni punto della curva verrà determinata quando si conoscano i valori delle sue tre coordinate x, y, z in relazione ai valori di una variabile indipendente ω che potrà anche essere una delle coordinate stesse.

Così i punti di una linea nello spazio verranno determinati da tre equazioni

$$x=x(\omega)\ ,\ y=y(\omega)\ ,\ z=z(\omega), \tag{1}$$

che si ridurranno a due, per es. alle seguenti

$$y=y(x)\ ,\ z=z(x), \tag{2}$$

quando, per essere x la variabile indipendente, la prima delle equazioni precedenti si riduca alla $x=\omega$.

Inoltre i punti di una curva nello spazio potranno anche essere determinati dal sistema di due equazioni della forma

$$f(x, y, z)=0\ ,\ \varphi(x, y, z)=0 \tag{3}$$

che definiscono due delle quantità x, y, z, per es. y e z, in funzione dell'altra

x; per modo che per equazioni della curva potremo prendere secondo i casi le (1) o le (2) [che in sostanza sono comprese nelle (1)], o le (3) che comprendono le (2), potendo queste porsi sotto la forma $y-f(x)=0$, $z-\varphi(x)=0$ e venendo così a corrispondere ad un caso particolare delle (3).

E evidentemente le due equazioni (2) considerate separatamente rappresenteranno sui piani xy e xz respettivamente le proiezioni della curva su questi stessi piani, e per quanto si sa dalla Geometria analitica rappresenteranno anche i cilindri proiettanti la curva su quei piani; i quali cilindri quando vogliano considerarsi daranno colla loro intersezione la curva che si considera nello spazio.

Così pure le equazioni (3) considerate separatamente rappresenteranno ciascuna una superficie, e la curva che si considera sarà la intersezione di queste superficie.

E come nel caso delle curve piane delle quali abbiamo trattato nei capitoli precedenti, e che in sostanza corrispondono anche a quelle delle quali prendiamo ora a trattare quando per queste sia sempre $z=0$, intenderemo sempre anche ora che le funzioni che figureranno nei nostri studii siano finite, continue e a un sol valore e, finchè non si avverta espressamente il contrario, abbiano le derivate determinate e anche finite almeno fino a quell'ordine pel quale occorrerà di considerarle; e per questo, quando occorra e possa farsi, intenderemo spezzata la curva in due o più parti da considerarsi sempre separatamente, e nelle quali si verifichino le indicate proprietà.

362. — Come nelle curve piane si chiamerà *tangente* in un punto M a una curva qualsiasi nello spazio la retta limite (quando esiste) delle posizioni successive di una secante che ruota attorno al punto M pel quale è condotta, per modo che uno degli altri punti nei quali essa taglia la curva si avvicini indefinitamente al detto punto M.

Naturalmente questa posizione limite della secante potrebbe non esistere, e in tal caso non si avrebbe la tangente; come potrebbe darsi che esistesse un limite per le secanti condotte a *destra* di M, e non esistesse o si avesse una retta limite diversa per le secanti condotte a sinistra di M. E allora si avrebbe la tangente soltanto da una parte del punto che si considera, o almeno si avrebbe una tangente a destra distinta da quella che si avrebbe a sinistra; ma in ciò che segue onde non entrare in troppi dettagli — pei quali del resto potremmo ripetere le considerazioni che facemmo pel caso delle curve piane — quando parleremo di tangente, a meno che non si tratti dei punti estremi della curva, intenderemo sempre di riferirci a quei casi nei quali la tangente a destra e quella a sinistra non formano che una sola retta e sono sul prolungamento l'una dell'altra, chiamando questa retta *tangente ordinaria* o semplicemente *tangente*.

363. — Volendo ora occuparci delle tangenti alle curve nello spazio, prendiamo una curva le cui equazioni siano le due

$$y=y(x)\ ,\quad z=z(x)\,, \tag{4}$$

o più generalmente le altre

$$x=x(\omega)\ ,\quad y=y(\omega)\ ,\quad z=z(\omega)\,, \tag{5}$$

essendo x o ω la variabile indipendente; e indichiamo con (x, y, z) le coordinate del punto M nel quale si vuole condurre la tangente quando esiste, e con $(x+\Delta x\,,\ y+\Delta y\,,\ z+\Delta z)$ quelle di un altro punto M' della curva vicinissimo ad M.

Ponendoci nel caso delle equazioni (5), che comprende quello delle (4), perchè come già osservammo queste si hanno col supporre nella prima delle (5) $x=\omega$ e cambiando poi ω in x, avremo le formole $\Delta x=x(\omega+\Delta\omega)-x(\omega)$, $\Delta y=y(\omega+\Delta\omega)-y(\omega)$, $\Delta z=z(\omega+\Delta\omega)-z(\omega)$, e le equazioni della secante MM' saranno le seguenti

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}\ ; \tag{6}$$

e ciò anche nel caso che una o due delle quantità Δx, Δy e Δz passino per lo zero, nel qual caso la secante sarà parallela a uno dei piani o a uno degli assi coordinati, intendendo allora che debbano essere zero anche i numeratori corrispondenti in queste equazioni.

E se sarà x la variabile indipendente, nel qual caso Δx sarà diverso da zero, queste equazioni scritte sotto la forma

$$Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)\ ,\quad ,\quad Z-z=\frac{\Delta z}{\Delta x}(X-x)\ ,$$

ci mostrano che i coefficienti angolari delle proiezioni della secante sui piani coordinati xy e xz sono i rapporti incrementali delle funzioni $y(x)$ e $z(x)$; per modo che se queste funzioni avranno le derivate determinate e finite nel punto M al quale corrisponde il valore x della variabile, la tangente alla curva in questo punto esisterà senza essere parallela al piano yz e avrà le equazioni seguenti

$$Y-y=y'(X-x)\quad ,\quad Z-z=z'(X-x)\,; \tag{7}$$

e viceversa se per la curva data esisterà la tangente nel punto M, e questa tangente non sarà parallela al piano yz, i rapporti incrementali $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$

avranno limiti determinati e finiti, e quindi esisteranno le derivate determinate e finite di $y(x)$ o $z(x)$ nel punto M, e le equazioni della tangente saranno le (7).

364. — Più in generale se, essendo le (5) le equazioni della curva, pel valore di ω che corrisponde al punto M che si considera le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$ $z(\omega)$ avranno le derivate prime determinate e finite e una almeno di esse sarà diversa da zero, basterà dividere per $\Delta\omega$ i denominatori delle equazioni (6) per vedere subito che la secante rappresentata da queste equazioni all'avvicinarsi indefinito del punto M' ad M tende verso una posizione limite che è la retta di equazioni

$$(8) \qquad \frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}, \quad \text{o} \quad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

nelle quali si deve intendere che quando uno o due dei denominatori sono zero debbano essere zero anche i numeratori corrispondenti, e questa retta sarà la tangente; mentre nel caso in cui le tre derivate x', y', z' o i tre differenziali dx, dy, dz siano tutti zero, allora quando per tutte e tre le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$, $z(\omega)$ esistano le derivate degli ordini superiori almeno fino a quelle di un certo ordine, se avverrà che fino all'ordine $i-1$ siano tutte zero, ma di quelle dell'ordine i una almeno sia diversa da zero, dividendo i denominatori delle (3) per $\Delta\omega^i$ e ricordando la formola di Taylor abbreviata data nella nota alla pag. 87, si vede subito che la tangente esisterà ancora e avrà le equazioni seguenti

$$(9) \qquad \frac{X-x}{x^{(i)}}=\frac{Y-y}{y^{(i)}}=\frac{Z-z}{z^{(i)}}, \quad \text{o} \quad \frac{X-x}{d^ix}=\frac{Y-y}{d^iy}=\frac{Z-z}{d^iz},$$

nelle quali si deve intendere al solito che quando uno o due dei denominatori siano zero debbano essere zero anche i numeratori corrispondenti; per modo che si può ora senz'altro affermare che la tangente per una curva qualsiasi (5) non potrà mancare altro che in quei punti ω pei quali le derivate prime di $x(\omega)$, $y(\omega)$, $z(\omega)$ manchino o abbiano qualche singolarità, o esistendo ed essendo determinate e finite insieme a alcune di quelle degli ordini superiori, non si giunga mai a trovarne una diversa da zero (*).

(*) In particolare questo caso eccezionale si presenterà in un punto ω_0, — se in esso le derivate di $x(\omega)$, $y(\omega)$ e $z(\omega)$ non finiscono per mancare affatto o essere discontinue — quando in questo punto le loro prime derivate saranno tutte zero, e al tempo stesso le tre funzioni coll'avvicinarsi di ω indefinitamente al punto ω_0 negli intorni comunque piccoli di questo punto riprenderanno sempre valori già presi.

Supponendo infatti che questo avvenga, e considerando per es. la funzione $x(\omega)$, pel teorema di Rolle si vedrà subito che la sua derivata $x'(\omega)$ dovrà passare infinite volte per lo zero in ogni intorno comunque piccolo di ω_0, e quindi questa derivata, se in ω_0 e in suoi intorni sufficientemente piccoli sarà finita e continua, come naturalmente dovremo ammettere che sia se dovranno esistere le derivate seconde, sarà nello stesso caso di $x(\omega)$.

Allora anche la derivata seconda $x''(\omega)$ di $x(\omega)$ passerà infinite volte per zero in intorni sufficientemente piccoli di ω_0 e essa sarà zero anche in ω_0, potendo però essere o no continua, a meno che in questo punto essa non esista affatto; e ora così continuando si vede che accadrà appunto quanto abbiamo detto.

Questa osservazione avrebbe evidentemente potuto essere fatta anche per le curve piane.

Aggiungiamo che questo processo di dimostrazione pone anche in evidenza che se una funzione $x(\omega)$ in un punto ω_0 ammette le derivate determinate e finite almeno fino a quella di un certo ordine, e *fra queste derivate se ne trova almeno una di ordine i che non è zero,* allora *la funzione stessa e le sue prime $i-1$ derivate coll'avvicinarsi indefinito di ω a ω_0 non potranno riprendere sempre valori già presi;* e quindi in particolare *in intorni sufficientemente piccoli di ω_0 esse avranno valori diversi da quello che hanno in ω_0*. Così, più particolarmente ancora, *quelle fra queste funzioni $x(\omega)$, $x'(\omega)$, $x''(\omega)$, ..., $x^{(i-1)}(\omega)$ che in ω_0 avranno il valore zero, fuori di questo punto in intorni sufficientemente piccoli di ω_0 saranno sempre diverse da zero.*

Per le curve dunque che hanno tratti nei quali esse sono *analitiche* la tangente *esisterà in ogni punto di questi tratti;* perchè negli intorni di ciascuno di questi punti le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$ e $z(\omega)$ saranno tutte sviluppabili in serie di Taylor, e quindi non potranno in quei punti avere le derivate sempre zero, altrimenti sarebbero tutte e tre costanti negli intorni dei punti stessi, il che è inammissibile.

365. — In particolare dunque, quando, come faremo sempre d'ora innanzi finchè non si avverta espressamente il contrario, ci si ferma alla considerazione dei tratti di curva nei punti dei quali le derivate prime sono sempre determinate e finite, sia che quelle degli ordini seguenti esistano o no, la tangente alla curva data (5) non potrà mancare altro che nei punti M che corrispondano a valori della variabile ω pei quali siano zero contemporaneamente dx, dy e dz; e, salvo il caso di esplicita avvertenza in contrario, escludendo quindi sempre d'ora innanzi questi punti — nei quali però talvolta, come abbiamo detto, la tangente *potrà* pure esistere, e esisterà effettivamente il più spesso nei casi ordinari — la tangente negli altri punti esisterà sempre, e le sue equazioni potranno sempre scriversi sotto la forma

$$(10) \qquad \frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

intendendo che se uno o due dei differenziali dx, dy e dz sarà zero dovranno essere zero anche i numeratori corrispondenti, e allora la tangente sarà parallela a uno dei piani o a uno degli assi coordinati.

E così nel caso in cui sia x la variabile indipendente, essendo allora necessariamente diverso da zero il dx, non potranno aversi eccezioni altro che pei punti nei quali le derivate di $y(x)$ e $z(x)$ siano infinite o non esistano affatto.

366. — Nel caso dunque che la curva che si considera sia data per mezzo delle equazioni (5) che comprendono il caso delle equazioni (4), nei punti pei quali le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$, $z(\omega)$ hanno le derivate determinate e finite e non si ha $dx = dy = dz = 0$, le equazioni della tangente saranno sempre le (10).

Quando poi la curva anzichè venire rappresentata da equazioni già poste sotto la forma (5) o sotto la forma (4) è rappresentata invece dalle altre

$$f(x, y, z) = 0 \;,\; \varphi(x, y, z) = 0, \tag{11}$$

dove f e φ sono funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine almeno, allora, senza bisogno di trovare le equazioni (4) o (5) che le corrisponderanno, si osserverà che per essa dx, dy e dz devono sodisfare alle equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \;,\; \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0, \tag{12}$$

le quali portano che dx, dy, dz debbono essere proporzionali ai determinanti minori del second'ordine

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} \;,\; \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \;,\; \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{13}$$

della matrice dei coefficienti

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{matrix} \right\Vert ; \tag{14}$$

e quindi le equazioni della tangente (10) si ridurranno allora alle altre

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}, \tag{15}$$

in forza delle quali può dirsi ora che nei punti dove le derivate parziali di f e φ sono determinate finite e continue, la tangente non può mancare altro che nei punti pei quali i tre determinanti (13) siano contemporaneamente uguali a zero, cioè pei quali la matrice (14) abbia la caratteristica inferiore a 2.

E poichè, secondo la teoria delle funzioni implicite (§§. 164 e seg. [pag. 223 e seg.]), queste condizioni sono quelle stesse sotto le quali, essendo dato un punto (x_0, y_0, z_0) che soddisfa alle due equazioni (11) è certo che queste equazioni definiscono due delle tre variabili x, y, z in funzione della terza ecc., e assicurano quindi l'esistenza di una curva cui appartiene il punto $M(x_0, y_0, z_0)$, si può affermare che le condizioni che ora troviamo sotto le quali può dirsi certa la esistenza della tangente alla curva (11) nel punto M non sono che quelle per le quali secondo la indicata teoria delle funzioni implicite può dirsi certa la esistenza della curva medesima; e non se ne hanno altre.

Osservando poi che a causa delle (10) le differenze $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ per la tangente a una curva in un punto (x, y, z) sono proporzionali a dx, dy, dz, si può inoltre affermare che le equazioni della tangente vengono date anche dalle equazioni che risultano dalle (12) col porvi $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ invece di dx, dy, dz, e quindi la tangente può anche rappresentarsi col sistema delle due equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0, \end{aligned} \right. \tag{16}$$

quando si escludano ancora i punti (x, y, z) nei quali si annullano contemporaneamente i determinanti (13), perchè in questo caso le equazioni (12) come queste ultime si riducono ad una sola.

Si deve notare che, sotto la forma (16), la tangente alla curva (11) si presenta come intersezione di due piani, ciascuno dei quali dipende soltanto da una delle superficie (11) che colla loro intersezione producono la curva data, ed è quel piano che, come diremo fra poco, è conosciuto sotto il nome di *piano tangente* alla superficie corrispondente.

E si deve notare inoltre che a causa delle (12) le ultime equazioni, come anche le precedenti, mostrano che la tangente a una curva nel punto (x, y, z) passa sempre pel punto $(x + dx, y + dy, z + dz)$ che all'infuori d'infinitesimi di ordine superiore può considerarsi come appartenente alla curva; quindi, all'infuori di questi infinitesimi, la tangente ad una curva può riguardarsi come la retta che riunisce due punti infinitamente vicini della curva stessa.

367. — Aggiungiamo infine che se, come talvolta avviene, le equazioni della curva sono date sotto la forma

$$x = x(u, v) \;,\; y = y(u, v) \;,\; z = z(u, v), \tag{17}$$

dove u e v sono quantità variabili funzioni di una variabile indipendente ω, o sono legate fra loro da una relazione della forma $\varphi(u,v)=0$ (*), allora avremo le formole

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\ ,\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\ ,\ dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\,,$$

dove du e dv si esprimono pel differenziale $d\omega$ per mezzo delle equazioni che legano u e v alla variabile indipendente ω, o si esprimono l'una per l'altra per mezzo della relazione $\frac{\partial \varphi}{\partial u}du+\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv=0$; e quindi a causa delle (10) le equazioni della tangente nel punto (x,y,z) si presenteranno sotto la forma

$$(18)\qquad \frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv}=\frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv}=\frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv}\,,$$

quando come è ben naturale, tutte le derivate che qui si hanno da considerare siano finite e continue, onde potere applicare la regola di differenziazione delle funzioni composte, ecc.

368. — Trattando delle tangenti alle curve piane venne fatto naturalmente di considerare la retta condotta nel piano della curva perpendicolarmente alla tangente nel punto di contatto, che fu detta la normale alla curva.

Trattandosi di curve nello spazio non si può parlare di perpendicolare alla tangente senza porre qualche altra condizione che valga a determinarla, e perciò allora si considera l'insieme di tutte le perpendicolari alla tangente, cioè il piano che contiene tutte queste normali.

Questo piano che è quello perpendicolare alla tangente condotto pel punto di contatto, è quello che si dice *piano normale*, e per trovarne la equazione basterà ricordare che se le equazioni di una retta sono poste sotto la forma $\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$, quella di un piano perpendicolare a questa retta è la seguente $aX+bY+cZ+d=0$; e quando esso deve passare pel punto (x,y,z) della retta, la sua equazione si riduce all'altra

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0\,.$$

(*) Come diremo fra breve al § 375 questo caso si presenterà specialmente quando, essendo data una superficie determinata le cui equazioni, come allora diremo, spesso si intenderanno poste sotto la forma (17), si vorranno fare studii intorno a curve speciali situate su quella superficie.

Osservando dunque che le equazioni della tangente ad una curva nel punto (x,y,z) possono sempre prendersi sotto la forma (10), si vedrà subito che la equazione del piano normale alla stessa curva nel punto (x,y,z) sarà la seguente

$$(19)\qquad (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0$$

qualunque sia la variabile indipendente; e se la curva è rappresentata per mezzo delle equazioni (11), allora la equazione del piano normale viene a prendere la forma

$$(20)\ (X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+(Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)+(Z-z)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0\,,$$

che può anche scriversi sotto l'altra

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}=0\,;$$

e, come per le (19) bisogna escludere i punti nei quali si ha ad un tempo $dx=dy=dz=0$, così per queste ultime (20) e (21) bisogna escludere quelli nei quali i tre determinanti (13), che ora figurano come coefficienti, sono contemporaneamente eguali a zero.

369. — I coseni degli angoli che la tangente in un punto (x,y,z) di una curva fa coi tre assi si ottengono con tutta facilità.

Per le (10) infatti si vede subito che essi sono proporzionali a dx, dy, dz, e si troveranno perciò le formole seguenti

$$(22)\ \cos\widehat{Tx}=\pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,,\ \cos\widehat{Ty}=\pm\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,,\cos\widehat{Tz}=\pm\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,,$$

dove il radicale s'intende preso positivamente, e il segno dev'essere quello superiore o quello inferiore a seconda della direzione della tangente che si prende come positiva; e queste formole valgono qualunque sia la variabile indipendente.

E nel caso che le equazioni della curva siano le (11), allora si ha

$$(23)\qquad \begin{cases} \cos \widehat{Tx} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z}\right), \\ \cos \widehat{Ty} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}\right), \\ \cos \widehat{Tz} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right), \end{cases}$$

dove Δ è il quadrato della matrice (14) cioè

$$(24)\qquad \Delta = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

o anche per una proprietà delle matrici

$$(25)\ \Delta = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2,$$

e in queste il radicale s'intende ancora preso positivamente, e il segno deve esser sempre il segno superiore o quello inferiore secondochè si prende per positiva l'una o l'altra delle due direzioni della tangente.

In modo simile si trovano le formole pel caso che la curva sia data per mezzo delle equazioni (17).

È poi superfluo l'osservare che queste formole possono riguardarsi anche come quelle che danno i coseni degli angoli che la perpendicolare al piano normale fa coi tre assi.

XXVII.

Del piano tangente e della normale ad una superficie. Coordinate curvilinee.

Del piano tangente, e della normale.

370. — I risultati precedenti ci conducono subito alla considerazione di un piano che esiste generalmente per ogni punto delle superficie che si presentano nelle applicazioni ordinarie e che *dicesi piano tangente*.

Sia perciò

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0$$

la equazione di una superficie, essendo $f(x, y, z)$ una funzione per la quale siano soddisfatte le solite condizioni di essere finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in un campo nel quale cadono i valori di x, y, z che si considerano; e supponiamo che almeno in un piccolo intorno del punto (x_0, y_0, z_0) che si vuole considerare, la superficie sia a distanza finita, sia continua e non sia incontrata che in un punto dalle rette parallele a uno almeno degli assi x, y, z, per modo che la equazione (1) definisca almeno una delle tre quantità x, y, z in funzione delle altre due come funzione finita, continua e ad un sol valore insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine per tutti i punti di un certo intorno di quello (x_0, y_0, z_0) che si considera.

E qui osserveremo che, in ordine a quanto si disse trattando delle funzioni implicite (§§ 155 e seg. [pag. 213 e seg.]), quest'ultima condizione sarà sempre soddisfatta da sè quando pel punto (x_0, y_0, z_0) che si vuole considerare non si abbia ad un tempo $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$; talchè, quando si escludano dalle nostre considerazioni i punti pei quali si abbia contemporaneamente $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, basterà porre la condizione che $f(x, y, z)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in un campo relativo a x, y, z che comprenda il punto (x_0, y_0, z_0) per essere sicuri che la equazione stessa (1) definisce una porzione di superficie che passa pel punto $M(x_0, y_0, z_0)$; e per tutti i punti di questa superficie fra i differenziali dx, dy, dz sussisterà sempre la relazione differenziale

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \tag{2}$$

Supposto ora che nel punto che si vuole considerare $M(x_0, y_0, z_0)$ le tre derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ non siano tutte zero, si immagini condotta per quel punto sulla superficie una linea qualunque che nel punto stesso abbia una tangente determinata.

Per la ipotesi fatta intorno alle tre derivate $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ nel punto M, di queste linee ne esisterà un numero infinito, perchè considerando *ad esempio* i piani $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, o più generalmente le superficie d'equazione

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) + (x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)\varphi(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

dove A, B, C sono coefficienti costanti, e $\varphi(x, y, z)$ è una funzione finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine nell'intorno del punto $M(x_0, y_0, z_0)$, queste superficie passeranno tutte per questo punto, e basterà formare la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ A & B & C \end{matrix} \right\|$$

corrispondente alle derivate parziali dei primi membri delle equazioni (1) e (3) nel punto M per assicurarsi che, quando $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ non sono tutte zero in questo punto, esistono infiniti sistemi di valori per A, B, C che fanno acquistare valori diversi da zero almeno a uno dei minori del second'ordine della stessa matrice, e tali anche che i valori di questi minori di second'ordine corrispondenti a un sistema di valori di A, B, C non siano proporzionali a quelli corrispondenti ad un altro sistema.

Così evidentemente in corrispondenza a questi valori di A, B, C si ottengono infinite superficie (3) che intersecano la superficie (1) secondo *infinite curve* che giacciono quindi su questa superficie e passano pel punto $M(x_0, y_0, z_0)$ e ivi hanno tutte una tangente determinata (§ 366 [pag. 496]), distinta da curva a curva perchè i coefficienti nelle loro equazioni non son proporzionali fra loro; quindi pei punti della nostra superficie pei quali non si ha ad un tempo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ la possibilità di farvi passare infinite curve C che nei punti stessi abbiano una tangente determinata diversa da curva a curva non può affatto mettersi in dubbio.

371. — Indicando dunque ora in modo generale con (x, y, z) anzichè con (x_0, y_0, z_0) le coordinate di quello fra gli stessi punti che si prenderà a considerare, e conducendo per esso sulla superficie una qualsiasi delle curve C che hanno la tangente, le equazioni di questa tangente saranno le seguenti

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

dove dx, dy, dz devono trarsi dalle equazioni della curva; e quindi, poichè di qui risulta che per la tangente i differenziali dx, dy, dz devono essere proporzionali alle differenze $X-x, Y-y, Z-z$, e d'altra parte, trovandosi la curva sulla superficie (1), questi differenziali dx, dy, dz devono soddisfare anche alla equazione (2), si conclude subito che qualunque sia la curva C cui è stata condotta la tangente nel punto (x, y, z) le coordinate X, Y, Z dei suoi punti dovranno sempre soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0; \tag{4}$$

e ora siccome questa equazione rappresenta un piano che passa pel punto $M(x, y, z)$, e la curva C può essere una qualunque fra le infinite curve dotate di tangente nel punto M delle quali abbiamo visto essere certa la esistenza, si potrà ora evidentemente concludere che in ogni punto di una superficie $f(x, y, z) = 0$ per il quale $f(x, y, z)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine senza che si abbia ad un tempo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, esiste un piano determinato che passa pel punto stesso e nel quale sono situate le tangenti a tutte le infinite curve che passano per quel punto e che ivi hanno una tangente determinata diversa per le diverse curve.

Questo piano è quello che, come abbiamo già detto, si chiama *piano tangente* alla superficie (1); e la sua equazione è data dalla (4) che, confrontata colla equazione (2), ci permette di dire che *per scrivere la equazione del piano tangente a una superficie* (1) *basta sostituire nella sua equazione differenziale* (2) *ai differenziali* dx, dy, dz *le differenze* $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ *fra le coordinate correnti* X, Y, Z *dei punti del piano e quelle* (x, y, z) *del punto di contatto.*

E osservando che la equazione (4) del piano tangente è evidentemente soddisfatta col farvi $X=x+dx$, $Y=y+dy$, $Z=z+dz$ perchè allora si riduce alla equazione differenziale (2) della superficie, si può anche senz'altro affermare che il piano tangente di una superficie, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, può dirsi che passi pel punto di contatto e pei punti della superficie che sono a questo infinitamente vicini. È del resto bene evidente che ciò doveva accadere in conseguenza della definizione che abbiamo data del piano tangente.

372. — Passando ora al caso in cui la equazione della superficie (1) è della forma

$$z=z(x, y) \tag{5}$$

dove $z(x, y)$ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine nel punto che si considera, osserveremo che la equazione (4) del piano tangente alla superficie in questo punto (x, y, z) verrà ad esser la seguente

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{6}$$

dove p e q sono le solite derivate parziali del prim'ordine di z; e poichè la equazione differenziale (2) della superficie si riduce ora all'altra $dz=pdx+qdy$, si riscontra subito pure, come del resto è ben naturale per quanto già dicemmo, che da essa si ottiene la equazione (6) del piano tangente sostituendovi a dx, dy, dz le differenze corrispondenti $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

E si può notare che nel caso in cui la equazione della superficie è data sotto la forma (5) che rientra nella (1) scrivendola sotto l'altra forma $z-z(x, y)=0$, i punti d'eccezione non possono essere che quelli nei quali la funzione $z(x, y)$ cessa di essere finita e continua o presenta qualche altra singolarità, o delle due derivate parziali p e q una almeno cessa di avere valori determinati e finiti.

373. — L'esistenza del piano tangente alle superficie porta naturalmente quella di una retta perpendicolare che passa pel punto di contatto, e che viene detta *normale* alla superficie.

Presa la equazione della superficie sotto le forme (1) o (5), e in conseguenza quella del piano tangente sotto le forme (4) o (6), la normale alla superficie

nel punto (x, y, z), dovendo essere una retta perpendicolare al piano stesso (4) o (6), verrà rappresentata respettivamente dalle equazioni

$$\text{(7)}\quad \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad \text{o} \qquad \text{(8)}\quad \frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$$

facendo qui pure le esclusioni che abbiamo fatte pel piano tangente.

E i coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale a una superficie fa cogli assi coordinati, dovendo essere proporzionali a $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, verranno dati respettivamente dalle formole seguenti

$$\text{(9)}\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\lambda=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos\mu=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\ &\cos\nu=\pm\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(10)}\quad \cos\lambda=\pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu=\pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu=\mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

dove i radicali si intendono presi tutti positivamente, e i segni devono essere i superiori o gli inferiori a seconda della direzione della normale che si sceglie come positiva.

Coordinate curvilinee sulle superficie.

374. — Bene spesso accade che una superficie invece di rappresentarla con una equazione della forma

$$f(x, y, z)=0, \quad \text{o} \quad z=z(x, y) \tag{1}$$

si rappresenta colle tre equazioni

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \tag{2}$$

che determinano le coordinate x, y, z dei suoi punti, o almeno dei punti della porzione di superficie che si considera, in funzione di due variabili indipendenti u e v, eliminando le quali si troverebbe la equazione della superficie sotto la solita forma (1).

Evidentemente le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ qualunque siano u e v soddisfano identicamente alla equazione $f(x,y,z)=0$ della superficie, giacchè i loro valori sono sempre coordinate dei punti di questa; talchè quando, anche inversamente, ad ogni punto (x,y,z) della porzione di superficie che si considera corrisponda un sistema di valori per le variabili u e v, non vi sarà affatto bisogno di tenere conto della equazione della superficie, la quale equazione potrà anche non essere data.

E così, come per le curve spesso si usa di determinare le coordinate x, y, z dei loro punti colla introduzione di una variabile indipendente ω rappresentando le curve per mezzo delle equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ e $z=z(\omega)$, si ha ora una estensione di questo processo di rappresentazione anche alle superficie introducendo due variabili indipendenti invece che una, e rappresentando le superficie per mezzo delle equazioni (2).

Analiticamente ciò equivale a individuare i punti di una superficie per mezzo di due variabili indipendenti u e v invece che colle solite tre x, y, z legate fra loro da una equazione $f(x,y,z)=0$; e ciò semplicizza ordinariamente gli studii che devono farsi, oltre a portare il vantaggio già rilevato sopra che, avendo le equazioni (2), non ci è più bisogno di trascinarsi dietro nei calcoli la ordinaria equazione $f(x,y,z)=0$ della superficie la quale viene soddisfatta da sè, e che in ogni modo, quando si voglia, potrà sempre ritrovarsi colla eliminazione di u e v fra le (2).

375. — Rispetto poi a questo metodo di rappresentazione delle superficie sono di grande importanza le considerazioni seguenti.

Osserviamo che quando si dà per es. a v un valore speciale fra quelli che essa può avere e poi si fa variare u in modo che i valori di u e v restino nel campo ad essi corrispondente, le equazioni (2) vengono sempre a rappresentare, almeno ordinariamente, una curva determinata della superficie; e immaginando attribuiti successivamente a v gl'infiniti valori che può avere, e per ogni valore che così si attribuisce a v facendo variare u, si ottiene un sistema di curve della superficie ciascuna delle quali è individuata dal valore che per avere i punti di essa si attribuisce a v; come attribuendo infiniti valori ad u, e per ognuno di questi valori di u facendo variare v, si ottiene un altro sistema di linee ciascuna delle quali è individuata dal valore che si prende per u sopra di essa.

Da ciò apparisce che u e v possono considerarsi come parametri di un doppio sistema di linee tracciate sulla superficie lungo le quali è costante l'uno o l'altro di questi parametri respettivamente, e colla loro intersezione queste

linee determinano i varii punti della superficie; talchè quando una superficie si rappresenti per mezzo delle equazioni (2), ciò equivarrà geometricamente a determinare i punti di essa, o almeno di quella porzione che si ha da considerare, per mezzo della intersezione di due sistemi di linee tracciate sulla superficie delle quali le variabili u e v sono i parametri.

Questi parametri u e v dunque possono dirsi le coordinate del punto sulla superficie e per essi si esprimeranno gli elementi relativi alla superficie medesima.

In particolare la equazione di una curva tracciata sulla superficie verrà ad essere della forma $f(u,v)=0$, o lungo di essa u e v si esprimeranno per una sola variabile indipendente ω, restando poi le coordinate x, y e z dei suoi punti determinate dalle formole (2) per ogni sistema di valori che allora si avranno per u e v dipendentemente dalla equazione data $f(u,v)=0$ della linea o corrispondentemente ad ogni valore di ω.

Con ciò lo studio delle superficie viene a farsi per mezzo di elementi non estranei ad essa, come sono spesso gli assi coordinati, ma con elementi del tutto inerenti alla superficie medesima precisamente come si fa nel piano, che d'altronde non è che una superficie particolare (*), e le linee di parametri u e v con le quali viene a farsi un tale studio possono anche essere un doppio sistema qualunque di linee che potranno scegliersi nel modo che si troverà migliore in relazione allo studio da fare; come ad es. potranno scegliersi i sistemi dei meridiani e dei paralleli sulle superficie di rivoluzione, od altri doppii sistemi particolari di linee su queste o su altre superficie.

E le linee di questi sistemi dovranno avere in ogni punto una tangente determinata, e dar luogo a funzioni (2) che almeno ordinariamente non presentino singolarità onde potervi applicare il calcolo delle derivate; e dovranno anche essere linee tali che per ogni punto della porzione di superficie che si vuole considerare ne passi una di ciascun sistema; salvo, come ben s'intende, a variare corrispondentemente le equazioni (2) quando si varia questo doppio sistema di linee.

Queste linee, lungo le quali u e v vengono ad avere, come si è detto, un valore costante, hanno così una parte importante nello studio delle superficie e si dicono respettivamente le linee $u=$cost. e $v=$cost., o semplicemente le linee u e v. Prese insieme poi si dicono le *linee coordinate* o *coordinate curvilinee* dei punti della superficie che si considera.

Aggiungiamo che quando sia data la equazione di una superficie sotto la solita forma $z=z(x,y)$, chiamando u e v i valori particolari che si daranno

(*) Queste considerazioni appunto non sono che l'estensione alle superficie di quanto dicemmo pel piano nella nota alla pag. 432 e seg.

successivamente a x e y la superficie si potrà sempre considerare come rappresentata anche dal sistema delle tre equazioni

$$x=u\ ,\ y=v\ ,\ z=z(u\,,v)$$

che sono un caso particolare delle (2); e di qui si vede che la ordinaria determinazione dei punti di una superficie mediante la equazione $z=z(x\,,y)$ corrisponde al caso in cui i suoi punti si determinano mediante il doppio sistema di linee piane tracciate su essa (coordinate curvilinee) che è costituito dalle linee d'intersezione della superficie coi due sistemi di piani paralleli ai piani coordinati yz e xz; e i parametri di quelle linee sono le distanze x e y dei loro piani dagli stessi piani coordinati.

376. — Volendo ora dare la equazione del piano tangente e quelle della normale alla superficie anche nel caso in cui questa superficie sia rappresentata colle coordinate curvilinee u e v per mezzo delle equazioni (2), procederemo come segue.

Osserveremo che se, come supporremo sempre, le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u\,,v)$ che figurano nelle (2), oltre essere finite e continue nel campo nel quale si considerano le u e v, hanno finite e continue anche le loro derivate parziali del prim'ordine, allora per una curva qualunque condotta sulla superficie pel punto $(u\,,v)$ che si considera, avremo le equazioni

$$(3)\qquad dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\ ,\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\ ,\ dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\,,$$

dove du e dv sono legati fra loro dalla equazione che si ottiene differenziando la equazione $f(u\,,v)=0$ della curva, o si esprimono pel differenziale della variabile indipendente per mezzo delle due equazioni $u=u(\omega)$ e $v=v(\omega)$ che saranno quelle della curva; supponendo sempre che le funzioni $f(u\,,v)$, $u(\omega)$ e $v(\omega)$ siano finite e continue esse e le loro derivate del prim'ordine, e nel caso della $f(u\,,v)=0$ non siano zero ad un tempo $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Nel campo nel quale u e v verranno considerate, uno almeno di questi differenziali du e dv sarà sempre diverso da zero se una di queste quantità u e v sarà la variabile indipendente, mentre se questa variabile sarà un'altra ω allora du e dv potranno anche essere zero insieme; ma noi ammetteremo che questo possa avvenire soltanto per valori speciali di ω in numero finito, cioè per punti speciali delle linee considerate, e escluderemo questi punti o considereremo altre linee che pure passando pei punti medesimi non presentino in essi la detta particolarità.

Con queste esclusioni, dx, dy e dz non potranno esser contemporaneamente zero altro che nei punti pei quali si annullino contemporaneamente i tre determinanti di second'ordine

$$(4)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

della matrice

$$(5)\qquad \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{matrix}\right\|\ ;$$

cioè i punti pei quali questa matrice non sia di caratteristica 2; quindi fuori di questi punti speciali, che dipenderanno soltanto dalla superficie, e non dalla curva presa a considerare, questa curva ammetterà una tangente determinata le cui equazioni saranno $\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$; e, indicando con λ il valore comune di questi rapporti che evidentemente sarà diverso da zero, le equazioni stesse potranno anche porsi sotto la forma

$$X-x=\lambda\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\ ,\ Y-y=\lambda\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\ ,\ Z-z=\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right),$$

dalle quali eliminando λdu e λdv si vede subito che, per le curve dotate di tangente che possono condursi pei punti $(u\,,v)$ della superficie pei quali non sono zero i tre determinanti (4), le coordinate dei punti delle loro tangenti sodisfano alla equazione

$$(6)\qquad \begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=0\,,$$

ovvero all'altra

$$(7)\quad (X-x)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+(Y-y)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+(Z-z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=0;$$

e questa equazione è sempre la stessa qualunque sia la curva presa a considerare; talchè, mentre si torna per questo a concludere l'esistenza del piano tangente per tutti i punti (u, v) di una superficie pei quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono ad un sol valore finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, e purchè non siano zero contemporaneamente i tre determinanti (4), si trova così anche l'equazione del piano tangente colle coordinate u e v — cioè nel punto di coordinate curvilinee u, v della superficie — e questa equazione viene ad essere la (6) o la (7).

È da notare che alle stesse equazioni (6) e (7) saremmo potuti giungere anche osservando che, se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione della superficie in coordinate cartesiane e soddisfa alle solite condizioni di continuità ecc., colla introduzione delle coordinate u e v per mezzo delle formole (2) la equazione stessa diviene identica, e quindi si hanno le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0;$$

e queste, unite alla equazione del piano tangente data sotto la forma (4) alla pag. 503, collo eliminare le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ avrebbero subito condotto alla equazione (6); però allora, oltre ai punti (u, v) nei quali $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ presentano qualche singolarità loro o le loro derivate, e ai punti pei quali si annullano contemporaneamente i determinanti (4), si trovava l'esclusione anche pei punti pei quali fosse $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$, e non si vedeva facilmente come questi ultimi venissero compresi fra i primi.

Rispetto poi a questi punti di esclusione non si deve lasciare di osservare che in certi casi può darsi benissimo che anche per essi esista il piano tangente alla superficie, e che l'eccezione trovata debba attribuirsi soltanto ad una singolarità delle formole di rappresentazione o delle linee coordinate u e v.

377. — Trovata ora la equazione del piano tangente (7) in coordinate curvilinee u e v, si vede subito che quelle della normale quando si hanno queste coordinate sono le seguenti

$$(8) \qquad \frac{X-x}{\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

escludendo qui pure i casi in cui i tre determinanti (4) siano tutti uguali allo zero.

E i coseni degli angoli λ, μ, ν che la normale fa coi tre assi coordinati ora saranno dati dalle formole

$$(9)\ \cos\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right), \cos\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \cos\nu=\pm\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

dove i radicali s'intendono presi tutti positivamente e i segni devono essere i superiori o gl'inferiori a seconda della direzione della normale che si sceglie come positiva, e Δ_1 rappresenta la somma dei quadrati dei tre numeratori, cioè

$$(10) \qquad \Delta_1=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,$$

cioè il quadrato della matrice (5); per modo che quando, seguendo le notazioni di Gauss che primo ha introdotto nella Geometria le coordinate curvilinee, si ponga

$$(11) \qquad \begin{cases} E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \\ F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

per una proprietà dei determinanti si ha anche

$$(12) \qquad \Delta_1=EG-F^2,$$

e quindi si escludono i punti pei quali $EG-F^2=0$.

Queste formole sono di applicazione continua. Supponendovi $x(u, v)=u$ e $y(u, v)=v$ e poi cambiando u e v in x e y portano naturalmente a quelle dei §§. 372 e 373 (pag. 504 e 505).

XXVIII.

Archi delle curve nello spazio. Elemento lineare delle superficie e dello spazio.

Archi delle curve.

378. — Come nel caso delle curve piane, la lunghezza di un arco di una curva qualsiasi nello spazio si definisce dicendo che essa è il limite del perimetro di una linea poligonale iscritta nella porzione di curva che si considera, quando i lati di questa linea poligonale diminuiscono indefinitamente; e anche ora, come nel caso suddetto si ammette che, se $y=y(x)$ e $z=z(x)$, o $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$ e $z=z(\omega)$ sono le equazioni della curva, le funzioni che qui figurano, nel tratto di curva che si considera, siano a un sol valore, finite e continue insieme alle loro derivate del prim'ordine, e nel secondo caso $x'(\omega)$, $y'(\omega)$ e $z'(\omega)$ non siano contemporaneamente tutte zero; cioè si ammette che la tangente alla curva esista in ogni punto di essa e varii di posizione con continuità al muoversi con continuità del punto di contatto.

Con questi dati nel calcolo integrale si dimostra rigorosamente la esistenza del limite indicato, e così noi, ammettendo ora questa esistenza, scriveremo $s=\lim\sum\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$; e poichè, partendo per es. dal supposto che le equazioni della curva siano le due $y=y(x)$ e $z=z(x)$ — con che però, a causa della ipotesi che $y'(x)$ e $z'(x)$ siano finite, rimarrà per ora escluso che la tangente possa essere parallela al piano yz — potremo ora ripetere quei ragionamenti stessi che si fecero pel caso delle curve piane, non essendovi altra differenza che invece dei radicali $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ e $\Delta x\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ si hanno gli altri $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ e $\Delta x\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}$ pei quali sono soddisfatte

le stesse condizioni, potremo senz'altro asserire che nel caso attuale si avrà

(1) $$s=\lim\sum dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}},$$

e pel differenziale di s si avrà

(2) $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\,;$$

e *il limite del rapporto dell'arco alla corda sarà ancora l'unità*, talchè nei quozienti d'infinitesimi all'arco potrà sostituirsi la corda, ecc...

Volendo poi considerare anche i punti nei quali la tangente alla curva è parallela al piano yz, si osserverà che, quando la tangente è sempre determinata e la sua posizione varia con continuità al variare al modo stesso del punto di contatto, si può fare un cangiamento di assi coordinati o della variabile indipendente x in y o in z; e da questo si dedurrà subito che pei punti speciali nei quali la tangente è parallela al piano yz non si avrà più propriamente la espressione precedente (1) di s, ma si avrà ancora la (2) e continuerà ancora a sussistere la proprietà ora indicata intorno al rapporto fra l'arco e la corda corrispondente.

E del resto sia per le formole del cangiamento della variabile indipendente, sia partendo subito dalle equazioni $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, $z=z(\omega)$ si trova che la (2) vale qualunque sia la variabile indipendente.

379. — Osserviamo poi che quando su una curva da un punto $M(x, y, z)$ si passa ad un altro punto $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, qualunque sia la variabile indipendente gli accrescimenti $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ potranno riguardarsi come le proiezioni sugli assi x, y, z della corda c che riunisce i punti M e M', e quindi si avrà $\cos\widehat{cx}=\frac{\Delta x}{c}$, $\cos\widehat{cy}=\frac{\Delta y}{c}$, $\cos\widehat{cz}=\frac{\Delta z}{c}$, quando per la direzione positiva della corda si prenda quella che dal punto M va al punto M'.

Osservando dunque che nel passare al limite a c può sostituirsi l'arco ds supposto positivo, come a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ possono sostituirsi dx, dy, dz, e a questo limite la corda diviene la tangente, si trova subito che anche per le curve gobbe sussistono le formole

(3) $$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}\quad,\quad\cos\beta=\frac{dy}{ds}\quad,\quad\gamma=\frac{dz}{ds},$$

essendo α, β e γ i coseni degli angoli che la tangente nella direzione secondo cui cresce s fa cogli assi delle x, y, z.

E in queste formole, se la variabile indipendente non è fissata, i secondi membri si riguarderanno senz'altro come quozienti di differenziali; mentre se la variabile indipendente è fissata ed è l'arco s della curva per modo che siano $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$ le equazioni della curva stessa, allora i secondi membri delle medesime formole (3) si potranno riguardare come derivate, rispetto all'arco s, delle funzioni $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$.

Elemento lineare delle superficie e dello spazio.

380. — Fermandoci ora sulla formola che dà il quadrato del differenziale dell'arco della linea che si considera, osserviamo che quando le equazioni della curva sono le seguenti

$$(1)\qquad x=x(\omega)\ ,\ y=y(\omega)\ ,\ z=z(\omega)$$

essendo ω la variabile indipendente, e $x(\omega)$, $y(\omega)$ e $z(\omega)$ essendo funzioni finite e continue insieme alle loro derivate prime per le quali nel tratto di curva che si considera si esclude che le tre derivate siano contemporaneamente zero, si avrà

$$(2)\qquad ds^2=dx^2+dy^2+dz^2\ ,\ ds=d\omega\sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2}\,.$$

Se poi la curva sarà rappresentata da tre equazioni della forma

$$(3)\qquad x=x(u\,,v)\ ,\ y=y(u\,,v)\ ,\ z=z(u\,,v)\,,$$

con u e v funzioni di una stessa variabile indipendente ω, o legate fra loro da una equazione della forma $f(u\,,v)=0$ — come avviene per es. quando la curva è situata sopra una superficie sulla quale deve essere considerata e studiata, e di questa superficie u e v sono le coordinate curvilinee (§ 375 [pag. 506 e seg.]) e le (3) ne sono le equazioni — allora ammesso che le funzioni che qui figurano siano finite e continue insieme alle loro derivate prime, il differenziale dell'arco s della linea che si considera sarà dato dalla formola

$$(4)\qquad ds^2=\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2$$

dove, secondo le notazioni di Gauss che già introducemmo al § 377 (pag. 511), si ha

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{F}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \mathrm{G}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

e si escludono i punti pei quali $\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2=0$; e nella (4) pei differenziali du e dv s'intende che essi debbano esser dedotti dalle formole che legano u e v alla variabile indipendente ω, o debbano esser legati fra loro dalla equazione differenziale della curva che si ottiene differenziando l'equazione che lega fra loro u e v.

Le quantità poi che abbiamo indicato con E, F, G sono funzioni di u e v, e in esse u e v per il punto che si considera sulla curva hanno i valori corrispondenti al punto stesso considerato sulla superficie; però, volendo che possano riferirsi ai varii punti della curva data, devono intendersi espressi per la variabile indipendente ω o per una sola fra esse mediante l'equazione della curva $f(u\,,v)=0$.

381. — A proposito poi della espressione $\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2$, che *per la forma* è la stessa qualunque sia la linea che si considera sulla superficie (3), è da osservare che essa deve riguardarsi anche come un elemento proprio della stessa superficie (3) su cui la linea che si considera s'intende o può intendersi tracciata, poichè la sua forma dipende solo dalle equazioni della superficie (3) alla quale corrisponde. E per qualunque linea che s'immagini condotta pel punto $\mathrm{M}(u\,,v)$ di questa superficie purchè dotata di tangente determinata e variabile con continuità nella sua posizione in tutto un intorno di M, il quadrato del differenziale del suo arco nel punto stesso M, o, come si dice, il quadrato del suo elemento lineare sarà sempre della forma $\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2$, dove E, F e G per lo stesso punto $(u\,,v)$ hanno sempre uno stesso valore indipendente dalla linea che si considera, e soltanto du e dv varieranno da linea a linea dipendentemente dalla relazione che (come equazione della linea stessa) le lega fra loro o da quelle che le legano colla variabile indipendente.

In altri termini può dirsi che l'espressione $\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2$ dà *la forma* che si conviene al quadrato dell'elemento di *qualunque* linea situata sulla superficie che passa per lo stesso punto $(u\,,v)$ e che in tutto un intorno di questo punto ha sempre una tangente determinata che varia di posizione in modo continuo al variare al modo stesso del punto di contatto, ed è per questa ragione che la espressione stessa viene detta *quadrato dell'elemento lineare della superficie.*

E si può notare che per ogni curva speciale di quelle ora indicate che passano pel punto $(u\,,v)$ l'espressione stessa, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, dà anche la distanza rettilinea fra i due punti $(u\,,v)$ e $(u+du\,,v+dv)$ della superficie, il secondo dei quali, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, può anche riguardarsi come appartenente in tutti i casi alla curva corrispondente; mentre la retta che riunisce i due punti $(u\,,v)$ e $(u+du\,,v+dv)$ può riguardarsi come situata sulla superficie.

382. — Fondandosi su queste osservazioni, se si vorrà l'elemento delle linee coordinate u e v o $u=$cost. e $v=$cost. su una superficie S di cui l'elemento lineare generale ds è dato dalla formola

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2, \tag{6}$$

s'intende che basterà supporre in questa formola $du=0$ o $dv=0$ respettivamente.

Si troverà così

$$ds_u = \sqrt{\mathrm{G}}\,dv \quad , \quad ds_v = \sqrt{\mathrm{E}}\,du, \tag{7}$$

essendo ds_u e ds_v questi archi elementari delle linee u e v contati nelle direzioni secondo cui crescono v e u.

E poichè lungo la linea u, essendo $du=0$, si ha $dx_u = \frac{\partial x}{\partial v}dv$, $dy_u = \frac{\partial y}{\partial v}dv$, $dz_u = \frac{\partial z}{\partial v}dv$, e lungo la linea v, essendo $dv=0$, si ha invece $dx_v = \frac{\partial x}{\partial u}du$, $dy_v = \frac{\partial y}{\partial u}du$, $\partial z_v = \frac{\partial z}{\partial u}du$, per le formole (3) del § 379 [pag. 513] si concluderà subito che i coseni degli angoli che le tangenti alle linee u e v fanno cogli assi x, y, z, quando queste tangenti siano prese nelle direzioni secondo cui crescono u e v, sono dati respettivamente dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\widehat{ux} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \cos\widehat{uy} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial y}{\partial v}\,,\ \cos\widehat{uz} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial z}{\partial v}\,,\\ &\cos\widehat{vx} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial x}{\partial u}\,,\ \cos\widehat{vy} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial y}{\partial u}\,,\ \cos\widehat{vz} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial z}{\partial u}\,; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

talchè, osservando che per una linea qualunque s, la cui tangente fa cogli assi x, y, z gli angoli α, β, γ, si ha per le ricordate formole (3) del § 379

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}\,,\quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}\,,\quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}\,,$$

e osservando anche che per l'angolo i che questa linea fa colla linea v si ha

$$\cos i = \cos\alpha\cos\widehat{vx} + \cos\beta\cos\widehat{vy} + \cos\gamma\cos\widehat{vz}\,,$$

si conclude che quest'angolo i sarà dato dalla formola

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\left(\mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}\right), \tag{9}$$

essendo du e dv i differenziali di u e v per le linee il cui elemento lineare è ds.

Similmente, se indichiamo con ω l'angolo delle linee u e v, per l'angolo $\omega - i$ che la stessa linea s fa colla linea u si ha

$$\cos(\omega - i) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\left(\mathrm{F}\frac{du}{ds} + \mathrm{G}\frac{dv}{ds}\right), \tag{10}$$

e da queste, supponendo che la linea s sia quella per la quale $du=0$ o $dv=0$ respettivamente, come anche dalle (8) si trova che per l'angolo ω delle linee coordinate u e v si ha

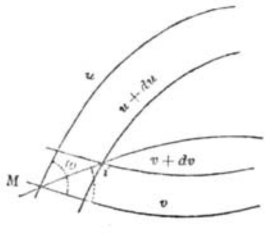
$$\cos\omega = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,,\quad \text{e quindi}\quad \mathrm{sen}\,\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\,; \tag{11}$$

e di qui si conclude evidentemente che: *Onde su una superficie le linee coordinate u e v siano ortogonali nel punto (u, v), nel quale le derivate di x, y, z sono finite e continue, è necessario e sufficiente che nel punto stesso sia zero il coefficiente* F *del rettangolo $du\,dv$ che figura nell'elemento lineare della superficie; e quindi onde nella porzione di superficie che si considera queste linee coordinate u e v siano sempre ortogonali è necessario e sufficiente che si abbia sempre*

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2. \tag{12}$$

È come caso particolare di questa proprietà che per le coordinate cartesiane ortogonali x, y del piano si ha $ds^2 = dx^2 + dy^2$, per quelle polari ρ, θ si ha $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, ecc. ...

383. — Aggiungiamo poi che, immaginando tracciate sulla superficie le linee u e v che corrispondono al punto (u, v) e quelle $u+du$ e $v+dv$ che all'infuori di infinitesimi di ordine superiore corrispondono all'estremità dell'arco ds della linea considerata sopra, si forma sulla superficie un quadrilatero curvilineo che, all'infuori delle solite quantità infinitesime di ordine superiore al primo, può riguardarsi come rettilineo e anche come un parallelogrammo del quale i lati sono ds_u e ds_v, l'angolo nel punto (u, v) è ω, e la diagonale è ds e fa l'angolo i col lato che corrisponde alla linea v.



E quindi, considerando in esso uno dei triangoli in cui è diviso da questa diagonale, si trovano subito le formole $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{ds_u}{ds}$, $\frac{\operatorname{sen}(\omega - i)}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{ds_v}{ds}$, ovvero

$$(13) \qquad \operatorname{sen} i = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}\operatorname{sen}\omega \quad , \quad \operatorname{sen}(\omega - i) = \sqrt{E}\frac{du}{ds}\operatorname{sen}\omega\,;$$

e queste danno gli angoli i e $\omega - i$ della linea s colle linee u e v respettivamente; e nel caso in cui le linee u e v sulla superficie siano ortogonali danno luogo alle altre più semplici

$$(14) \qquad \operatorname{sen} i = \sqrt{G}\frac{dv}{ds} \quad , \quad \cos i = \sqrt{E}\frac{du}{ds} \quad , \quad \operatorname{tang} i = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}\,.$$

Non si deve dimenticare però che qui ci si riferisce sempre a punti della superficie pei quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ sono ad un sol valore, finite e continue esse e le loro derivate parziali del prim'ordine, e si escludono i punti pei quali si ha $EG - F^2 = 0$; poichè in questi punti, come si disse nel capitolo precedente, l'esistenza del piano tangente alla superficie è per lo meno incerta; e d'altra parte la formola che ci dà $\operatorname{sen}\omega$ ci mostra che in essi le linee u e v, quando pure sia ancora il caso di considerarle, non sono più pienamente distinte, ma hanno la stessa tangente.

384. — È ora il caso di aggiungere che, come si rappresentano i punti di una superficie con due variabili indipendenti, determinandoli geometricamente per mezzo della intersezione di due sistemi di linee tracciate sulla superficie stessa e delle quali le indicate variabili sono i parametri, così al modo stesso si possono rappresentare i punti dello spazio ordinario col mezzo di tre variabili indipendenti, che possono non essere le solite coordinate cartesiane, determinandoli geometricamente colla intersezione di tre sistemi di superficie *(superficie coordinate)* di cui le tre variabili corrispondono ai parametri.

Allora le rappresentazioni per mezzo delle coordinate cartesiane e polari vengono ad essere casi particolarissimi di questa, poichè per le prime coordinate le superficie che colla loro intersezione determinano i varii punti dello spazio sono tre sistemi di piani paralleli a tre piani fissi (piani coordinati) e le coordinate x, y, z sono i parametri degli stessi piani; e nel caso delle coordinate polari ρ, θ, φ i tre sistemi di superficie sono:

1.° sfere concentriche aventi per centro il polo e per raggio il raggio vettore ρ;

2.° coni circolari dello stesso asse e col vertice nel centro delle sfere aventi per apertura la colatitudine θ;

3.° piani condotti per l'asse dei coni e inclinati su un piano fisso di un angolo uguale alla longitudine φ; e le coordinate ρ, θ, φ sono evidentemente i parametri di queste superficie.

In quest'ultimo caso poi, scritte le formole

$$(15) \qquad x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = \rho\cos\theta\,,$$

che servono ad esprimere le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z per le polari ρ, θ, φ, si vede subito che le equazioni delle superficie coordinate polari ρ, θ, φ, si ottengono da queste formole attribuendo a ρ, θ e φ i respettivi valori costanti che sulle superficie corrispondenti devono avere.

Nel caso generale poi si porrà

$$(16) \qquad x = x(u, v, w) \quad , \quad y = y(u, v, w) \quad , \quad z = z(u, v, w)\,,$$

dove per le funzioni dei secondi membri si suppone sempre che esse siano a un sol valore, e finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine almeno, per tutti i valori di u, v, w in un dato campo; e si suppone inoltre che facendo variare u, v, w in questo campo, le x, y, z vengano a prendere tutti i valori corrispondenti ai varii punti dello spazio finito o infinito S che si vuole considerare; e allora a ogni sistema di valori di u, v, w corrisponderà un punto dello spazio stesso, come viceversa, almeno ordinariamente e sotto certe condizioni, ad ogni punto (x, y, z) di questo spazio corrisponderà almeno un sistema determinato di valori per u, v, w; talchè u, v, w potranno come x, y, z considerarsi come variabili adatte alla determinazione dei punti dello spazio che si considera, e le formole (16) potranno riguardarsi come quelle che servono a passare dalle coordinate cartesiane ortogonali x, y, z alle variabili coordinate generali u, v, w.

Osservando poi che, per ogni valore speciale che si attribuisce ad una delle variabili coordinate u, v, w, le equazioni (16) si riducono fra due sole variabili e, almeno generalmente, rappresentano una superficie o porzione di superficie nello spazio dato S, s'intende che in questo sistema generale di coordinate si avranno le superficie per le quali u ha un valore costante, quelle per le quali v ha un valore costante, e quelle per le quali w ha un valore costante; e questi tre sistemi di superficie, restando pienamente determinate dai valori che via via si attribuiscono alle variabili coordinate u, v, w potranno riguardarsi come aventi per parametri queste variabili u, v, w respettivamente; e i punti dello spazio S che si considera potranno riguardarsi come determinati geometricamente dalla intersezione di questi tre sistemi di superficie.

Questi sistemi di superficie potranno essere tre sistemi di superficie qualunque dotate almeno generalmente in ogni loro punto di un piano tangente determinato ecc. onde siano possibili le derivazioni delle funzioni che verranno a essere introdotte nei calcoli, e tali inoltre che per ogni punto dello spazio S che si considera ne passi una di ciascun sistema onde possano effettivamente servire a determinare colla loro intersezione i varii punti di questo spazio; e quando s'introducano nei calcoli i parametri u, v, w di queste superficie, una superficie qualunque verrà rappresentata in coordinate u, v, w da una equazione della forma $f(u, v, w) = 0$, o da tre equazioni che esprimeranno u, v, w per due variabili indipendenti che potranno essere coordinate curvilinee della superficie stessa, o anche dalle (16) quando però s'intenda che in esse u, v, w siano legate dalla indicata relazione $f(u, v, w) = 0$ o siano espresse per due variabili indipendenti.

In particolare poi una qualunque delle superficie coordinate, per es. una delle w, risulterà rappresentata semplicemente dalla equazione $w=$cost.; e le coordinate x, y, z dei suoi punti verranno date dalle (16) col mezzo delle due sole variabili indipendenti u e v dopo avervi posto per w il valore speciale che w deve avere; talchè su questa superficie le u e v verranno così ad essere i parametri di un doppio sistema di linee coordinate le quali evidentemente saranno le linee d'intersezione della superficie stessa colle superficie degli altri sistemi $u=$cost., $v=$cost.

Per una linea invece avremo fra u, v e w due relazioni della forma $F(u, v, w) = 0$ e $\varphi(u, v, w) = 0$, o u, v e w si esprimeranno per una medesima variabile indipendente ω che può anche essere una delle stesse variabili u, v, w; e quando sia per es. $u=$cost., e $v=$cost. con w variabile, allora la linea corrispondente sarà una linea coordinata tanto sulla superficie $u=$cost. quanto sulla superficie $v=$cost. e risulterà dalla intersezione di queste due superficie.

385. — Volendo ora la distanza rettilinea fra due punti infinitamente vicini dello spazio (u, v, w) e $(u+du, v+dv, w+dw)$ all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, o, come si dice, *l'elemento lineare ds* dello spazio in coordinate curvilinee u, v, w, si osserverà che, sotto l'ipotesi che sempre ammettiamo della esistenza di derivate determinate e finite per le funzioni $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ e $z(u, v, w)$, le variazioni delle coordinate cartesiane x, y, z corrispondenti agli accrescimenti du, dv e dw di u, v e w, all'infuori d'infinitesimi di ordine superiore al primo, sono precisamente i differenziali dx, dy, dz pei quali si ha

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw\,,\quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw\,,\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw\,;$$

e quindi, osservando che il quadrato della distanza fra due punti di coordinate (x, y, z) e $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ è sempre $\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$, si troverà subito che l'elemento lineare dello spazio in coordinate u, v, w è dato dalla formola

$$ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2 + C\,dw^2 + 2H\,du\,dv + 2K\,dv\,dw + 2L\,du\,dw, \tag{17}$$

dove

$$\begin{cases} A = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad B = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad C = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2, \\ H = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad K = \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad L = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}, \end{cases} \tag{18}$$

intendendo qui che $\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ rappresenti la somma $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ dei tre termini $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2, \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ che sono finiti nel punto (x, y, z), ecc..

386. — Di qui poi si vede subito che per avere l'elemento ds di una linea qualunque dotata di tangente determinata e variabile di posizione in modo continuo, basta tener conto delle relazioni $f(u, v, w) = 0$, $\varphi(u, v, w) = 0$ che allora sussistono fra u, v e w, e stabilire al tempo stesso fra du, dv e dw le relazioni $df = 0$, $d\varphi = 0$ che si ottengono differenziando queste equazioni; o basta esprimere u, v, w e i loro differenziali per la variabile indipendente relativa alla linea e pel suo differenziale; e finchè resta lo stesso il punto dello spazio (u, v, w) pel quale passa la linea che si considera, i coefficienti A, B, C, H, K, L conservano uno stesso valore indipendente dalla linea che passa per quel punto, e soltanto da linea a linea variano i differenziali du, dv e dw.

387. — Similmente per avere dalla (17) l'elemento lineare di una superficie qualunque basterà tener conto della sua equazione in coordinate u, v, w e della equazione differenziale che le corrisponde, o tenere conto delle formole che esprimono u, v, w per due variabili indipendenti che potranno essere le coordinate curvilinee della superficie stessa ecc.; e in particolare per avere gli elementi lineari delle superficie coordinate u, v, w basterà fare nella formola (17) $u=$cost., $v=$cost., $w=$cost., o $du=0, dv=0, dw=0$ rispettivamente.

Si ottengono così per gli elementi lineari rispettivi ds_u, ds_v, ds_w delle superficie u, v, w le formole seguenti

$$(19)\qquad \begin{cases} ds_u^2 = B\,dv^2 + 2K\,dv\,dw + C\,dw^2, \\ ds_v^2 = A\,du^2 + 2L\,du\,dw + C\,dw^2, \\ ds_w^2 = A\,du^2 + 2H\,du\,dv + B\,dv^2, \end{cases}$$

e queste ci mostrano che onde nel punto (u, v, w) le linee coordinate delle varie superficie siano fra loro ortogonali, per modo che i piani tangenti a questa superficie o le superficie stesse siano fra loro ortogonali, è necessario e sufficiente che nello stesso punto (u, v, w) si abbiano le tre equazioni $H=0$, $K=0$ e $L=0$.

E in seguito a questo può dirsi che, onde avere la ortogonalità delle superficie coordinate u, v, w in ogni punto, cioè, come si dice, onde queste superficie costituiscano *un sistema triplo ortogonale*, è necessario e sufficiente che siano sempre soddisfatte le tre equazioni differenziali del prim'ordine

$$(20)\qquad \begin{cases} H = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \\[2ex] K = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial w} = 0, \\[2ex] L = \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

o che nel quadrato dell'elemento lineare dello spazio manchino i termini che contengono i rettangoli dei differenziali du, dv, dw per modo che si abbia semplicemente

$$(21)\qquad ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2 + C\,dw^2.$$

388. — E si può notare che alle equazioni (20) saremmo pur giunti cercando colle formole note e per mezzo della (16) i coseni degli angoli che le normali alle superficie coordinate u, v, w fanno cogli assi x, y, z, e poi esprimendo che queste normali sono due a due ad angolo retto; come si può notare altresì che l'essere in coordinate cartesiane

$$(22)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e l'essere in coordinate polari

$$(23)\qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2,$$

come si trova subito servendosi delle (15), dipende appunto dalla ortogonalità delle superficie coordinate corrispondenti.

389. — A proposito poi dell'elemento lineare (23) in coordinate polari merita pure di esser notato che esso dà luogo alle formole seguenti

$$ds_\rho^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\ ,\quad ds_\theta^2 = d\rho^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\ ,\quad ds_\varphi^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2;$$

e di queste la prima dà il quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio ρ quando le linee coordinate sulla sfera sono i meridiani $\varphi = \text{cost.}$ e i paralleli $\theta = \text{cost.}$ (linee e variabili coordinate geografiche); la seconda dà il quadrato dell'elemento lineare del cono circolare retto il cui angolo d'apertura è θ quando le linee coordinate sul cono sono le generatrici $\varphi = \text{cost}$ e i paralleli $\rho = \text{cost.}$; e la terza infine dà l'elemento di un piano qualunque in coordinate polari ρ e θ.

390. — Aggiungiamo che oltre alle coordinate cartesiane e polari se ne usano anche altre; e qui accenneremo alle coordinate cilindriche e alle coordinate ellittiche.

Nelle *coordinate cilindriche* le variabili corrispondenti ad un punto di coordinate cartesiane (x, y, z), sono le coordinate polari (ρ, θ) della sua proiezione sul piano xy e la sua distanza da questo piano, cioè l'antica coordinata z; per modo che le equazioni che legano le x, y, z alle nuove coordinate ρ, θ, z sono le tre

$$(24)\qquad x = \rho\cos\theta\ ,\quad y = \rho\operatorname{sen}\theta\ ,\quad z = z\ ;$$

e le superficie coordinate sono:

1.° cilindri circolari che hanno per asse comune l'asse delle z e il cui parametro viene ad essere il raggio ρ della loro base;

2.° piani condotti pel detto asse il cui parametro viene ad essere l'angolo θ che essi fanno con un piano fisso (preso fra loro) che è il piano xz;

3.° piani paralleli a un piano fisso perpendicolare all'asse dei cilindri cioè paralleli al piano xy e il cui parametro viene ad essere la loro distanza z da quest'ultimo piano xy.

L'elemento lineare dello spazio in queste coordinate (ρ, θ, z) si trova subito colla differenziazione delle equazioni precedenti (24), ed è

$$(25)\qquad ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\theta^2\ ;$$

e manca anch'esso dei rettangoli dei differenziali delle variabili perchè le superficie coordinate sono evidentemente ortogonali fra loro.

Supponendo in questa $\rho=$cost. si ha

$$ds^2 = dx^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{26}$$

per l'elemento lineare del cilindro circolare di raggio ρ in coordinate curvilinee sulla sua superficie che sono le generatrici (linee $\theta=$cost.) e le sezioni rette del cilindro (linee $x=$cost.).

391. — Nel sistema di *coordinate ellittiche* le superficie coordinate sono ellissoidi, iperboloidi a una falda e iperboloidi a due falde, tutte omofocali.

Indicando con λ, μ, ν i semi-assi variabili di queste superficie posti sull'asse delle x, e con b e c due costanti che supporremo positive con $b<c$, le equazioni dei tre sistemi di superficie, quando siano presi i loro assi per assi coordinati, saranno tutte della stessa forma, e saranno le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1\,, \\ &\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2-b^2} + \frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1\,, \\ &\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2-b^2} + \frac{z^2}{\nu^2-c^2} = 1\,, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

nella prima delle quali λ varierà da c a $+\infty$, nella seconda μ varierà fra b e c, e nella terza ν varierà fra 0 e b (i limiti estremi sempre inclusi); per modo che le superficie del primo sistema (superficie λ) saranno ellissoidi, quelle del secondo sistema (superficie μ) saranno iperboloidi a una falda, e quelle del terzo sistema (superficie ν) saranno iperboloidi a due falde; e evidentemente queste superficie saranno tutte omofocali.

Per ogni punto (x, y, z) dello spazio passa una superficie di ciascuno dei tre sistemi, perchè se si riduce la prima delle equazioni precedenti a forma intera, scrivendola cioè nel modo seguente

$$\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - x^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2) - y^2(\lambda^2-c^2)\lambda^2 - z^2\lambda^2(\lambda^2-b^2) = 0\,,$$

si ottiene una equazione del terzo grado in λ^2, che ha le tre radici reali e positive qualunque siano i valori scelti per x, y, z, perchè il suo primo membro pei valori $0, b^2, c^2, +\infty$ di λ^2 viene ad avere i segni $-, +, -, +$ respettivamente, e quindi le stesse radici sono reali e comprese fra 0 e b^2, fra b^2 e c^2 e fra c^2 e $+\infty$, e per ogni punto (x, y, z) queste radici vengono ad essere i valori di λ^2, μ^2 e ν^2 corrispondenti alla superficie di ciascun sistema

che passa per quel punto; e i valori positivi delle loro radici quadrate sono i parametri λ, μ, ν delle superficie coordinate corrispondenti a quel punto.

Viceversa, immaginando lo spazio infinito diviso nei soliti otto triedri trirettangoli per mezzo dei piani coordinati, per ogni sistema di valori dei parametri λ, μ, ν scelti nel modo indicato — cioè fra 0 e b, fra b e c, e fra c e $+\infty$ respettivamente — si hanno otto punti d'incontro delle superficie corrispondenti a quei valori λ, μ, ν — uno per ogni triedro —, e le coordinate di ciascuno di questi punti potrebbero trovarsi risolvendo rispetto a x^2, y^2 e z^2 le equazioni (27) considerate come equazioni di primo grado rispetto a queste quantità.

Si possono però avere più semplicemente e sotto forma più semplice questi valori di x^2, y^2 e z^2 mediante l'artifizio seguente.

Si suppongano trovati questi valori di x^2, y^2 e z^2 corrispondenti a un sistema qualunque dato di valori λ, μ, ν presi fra i limiti indicati, e si considerino le equazioni (27) portando tutti i termini nei primi membri e cambiandovi λ^2, μ^2 e ν^2 in θ.

In tutti i primi membri verrà ad esservi la espressione

$$-1 + \frac{x^2}{\theta} + \frac{y^2}{\theta-b^2} + \frac{z^2}{\theta-c^2}\,, \tag{28}$$

e a causa delle (27) questa espressione, nella quale si intenderà che x^2, y^2, z^2 siano i valori cercati, considerata come funzione di θ avrà evidentemente la particolarità di annullarsi pei valori λ^2, μ^2 e ν^2 di questa variabile.

Evidentemente poi, siccome nella stessa espressione (28) i denominatori sono di primo grado in θ, essa ha anche l'altra particolarità che può essere riguardata come l'espressione che risulta dalla scomposizione in frazioni semplici di una funzione razionale fratta di θ il cui denominatore è il prodotto di quei denominatori cioè $\theta(\theta-b^2)(\theta-c^2)$, e il numeratore è un'altra funzione di terzo grado in θ che ha per primo termine $-\theta^3$ (perchè la parte intera del quoziente venga ad essere -1) e che per la prima particolarità anzidetta si annulla pei valori λ^2, μ^2 e ν^2 di θ, per modo che il detto numeratore è precisamente $-(\theta-\lambda^2)(\theta-\mu^2)(\theta-\nu^2)$.

Lo stesso risultato, anche senza ricorrere alla teoria della scomposizione delle funzioni razionali fratte in frazioni semplici, può ottenersi ugualmente riducendo tutti i termini della espressione precedente allo stesso denominatore e facendo poi le stesse considerazioni; quindi si può evidentemente affermare che coi valori cercati di x^2, y^2 e z^2 si avrà l'identità

$$-\frac{(\theta-\lambda^2)(\theta-\mu^2)(\theta-\nu^2)}{\theta(\theta-b^2)(\theta-c^2)} = -1 + \frac{x^2}{\theta} + \frac{y^2}{\theta-b^2} + \frac{z^2}{\theta-c^2}\,, \tag{29}$$

ovvero

$$\frac{\theta(\theta-b^2)(\theta-c^2)-(\theta-\lambda^2)(\theta-\mu^2)(\theta-\nu^2)}{\theta(\theta-b^2)(\theta-c^2)}=\frac{x^2}{\theta}+\frac{y^2}{\theta-b^2}+\frac{z^2}{\theta-c^2}\ ;$$

e ora da questa, o valendosi delle formole che danno i coefficienti dei singoli termini degli sviluppi delle frazioni razionali in frazioni semplici quando, come nel caso attuale, il denominatore uguagliato a zero ha soltanto radici semplici, o anche, più semplicemente, riducendo la stessa formola a forma intera e poi facendo una volta $\theta=0$, un'altra $\theta=b^2$ e una terza $\theta=c^2$ si troveranno subito le formole seguenti

$$(30)\quad x^2=\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2}\ ,\ y^2=\frac{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}\ ,\ z^2=\frac{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)};$$

e quand'anche si volesse fare l'obiezione che, non avendo dimostrato sopra che il determinante del sistema di equazioni (27) è sempre diverso da zero, non poteva dirsi certa l'esistenza in ogni caso di valori per x^2, y^2 e z^2 che soddisfano alle (27) medesime, ora si può affermare che questi valori esistono e sono quelli che si hanno dalle formole precedenti, perchè *con essi* tutte le equazioni precedenti divengono identità, e quindi la espressione (28) viene zero quando per x^2, y^2 e z^2 vi si pongono questi valori e per θ vi si pone una volta λ^2, un'altra μ^2 e una terza ν^2.

392. — Differenziando ora le formole (30) dopo di averne presi i logaritmi, si trovano le altre

$$dx=\left(\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{d\mu}{\mu}+\frac{d\nu}{\nu}\right)x\ ,$$

$$dy=\left(\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2-b^2}+\frac{\mu\,d\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\nu\,d\nu}{\nu^2-b^2}\right)y\ ,$$

$$dz=\left(\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2-c^2}+\frac{\mu\,d\mu}{\mu^2-c^2}+\frac{\nu\,d\nu}{\nu^2-c^2}\right)z\ ;$$

e da queste, quadrando e sommando, potremo ottenere subito con tutta facilità il valore $dx^2+dy^2+dz^2$ di ds^2.

Osservando infatti che la identità (29) derivata rispetto a θ dà luogo all'altra

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{(\theta-\lambda^2)(\theta-\mu^2)(\theta-\nu^2)}{\theta(\theta-b^2)(\theta-c^2)}=\frac{x^2}{\theta^2}+\frac{y^2}{(\theta-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\theta-c^2)^2}\,,$$

e confrontando il secondo membro di questa coi coefficienti di $d\lambda^2$, $d\mu^2$ e $d\nu^2$ in ds^2, si vede che gli stessi coefficienti si otterranno da questa identità – dopo

eseguita la derivazione nel primo membro – facendovi successivamente $\theta=\lambda^2$, $\theta=\mu^2$ e $\theta=\nu^2$; quindi, osservando inoltre che combinando due a due per sottrazione le (27) si ottengono altre tre formole le quali ci mostrano che i coefficienti dei rettangoli $d\lambda\,d\mu$, $d\mu\,d\nu$ e $d\nu\,d\lambda$ in ds^2 sono zero, si trova immediatamente la formola seguente

$$(31)\quad ds^2=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)}\,d\lambda^2+\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\lambda^2)}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}\,d\mu^2+\frac{(\nu^2-\lambda^2)(\nu^2-\mu^2)}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}\,d\nu^2$$

pel quadrato dell'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche.

Questa formola dimostra che le superficie delle coordinate ellittiche costituiscono un sistema triplo ortogonale.

Ponendovi $\lambda=$ cost., $\mu=$ cost. o $\nu=$ cost., dalla formola stessa si hanno quelle che dànno i quadrati degli elementi lineari dell'ellissoide, dell'iperboloide a una falda e dell'iperboloide a due falde in coordinate ellittiche sulla superficie.

In particolare la formola

$$ds^2=(\mu^2-\nu^2)\left\{\frac{\mu^2-\lambda^2}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}\,d\mu^2+\frac{\lambda^2-\nu^2}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}\,d\nu^2\right\}$$

che corrisponde a $\lambda=$ cost. dà il quadrato dell'elemento lineare dell'ellissoide di semi-assi λ, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$.

XXIX.

Piano osculatore di una curva. — Normale principale e binormale

Piano osculatore.

393. — Quando è data una curva a doppia curvatura, i suoi punti non sono tutti in un piano; però s'intende che, almeno in molti casi, per ogni punto di essa potrà esistere un piano che passi per quel punto e che nei punti di un intorno sufficientemente piccolo del punto stesso, si discosti dalla curva meno di qualunque altro piano condotto pel punto medesimo. Questo piano, quando esiste, si dice *piano osculatore* della curva; e qui vogliamo mostrare che, esclusi certi punti eccezionali che poi indicheremo pei quali rimarrà incerto, e che saranno da noi considerati più tardi, esso esiste effettivamente per tutti i punti della curva pei quali le derivate prime e seconde delle tre coordinate x, y, z espresse per una stessa variabile indipendente sono determinate e finite; e in questi casi vogliamo trovarne al tempo stesso l'equazione.

Siano perciò $M(x, y, z)$, $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ due punti vicinissimi della curva data e sia

$$(1) \qquad a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0,$$

dove a, b, c sono coefficienti costanti, la equazione di un piano condotto pel primo di questi punti M.

La distanza δ del punto M' da questo piano sarà come è noto

$$(2) \qquad \delta=\frac{a\Delta x+b\Delta y+c\Delta z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

e quindi per la questione che vogliamo trattare ci occorrerà di vedere se e

come possano essere determinate le costanti a, b e c onde far sì che pei punti M' posti in un piccolo intorno di M questa distanza sia sempre minore di quella che corrisponde agli altri sistemi di valori di a, b e c.

Per questo indichiamo con ω la variabile indipendente per la quale si esprimono le coordinate x, y, z dei punti della curva in modo da avere $x=x(\omega)$, $y=y(\omega)$, $z=z(\omega)$ per le equazioni della curva; e pel punto M che noi consideriamo supponiamo che ω sia il valore corrispondente della stessa variabile, e in esso le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$, $z(\omega)$ siano finite e continue insieme alle loro derivate prime e abbiano determinate e finite anche le derivate seconde; e in ω le derivate indichiamole semplicemente con $x', x'', \ldots$

Allora se $\omega+h$ è il valore della variabile ω che corrisponde al punto $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, per la formola di Taylor abbreviata data nella nota alla pag. 87, quando h sia sufficientemente piccolo in valore assoluto, avremo

$$(3) \qquad \Delta x=x'h+x''\frac{h^2}{2}+\sigma_1 h^2,\ \Delta y=y'h+y''\frac{h^2}{2}+\sigma_2 h^2,\ \Delta z=z'h+z''\frac{h^2}{2}+\sigma_3 h^2,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ essendo tre quantità che quando il valore assoluto $|h|$ di h sia inferiore a un certo numero saranno sempre minori in valore assoluto di un numero dato piccolo a piacere; quindi la distanza suindicata δ del punto M' dal piano (1) potrà anche porsi sotto la forma

$$(4) \qquad \frac{(ax'+by'+cz')h+(ax''+by''+cz'')\frac{h^2}{2}+\sigma\frac{h^2}{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

dove $\sigma=a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3$ è un'altra quantità che quando $|h|$ è inferiore ad un certo numero si manterrà sempre inferiore a un numero dato piccolo anch'esso a piacere.

Questo ci permette evidentemente di dire che pel piano cercato insieme alla (1) dovremo avere le due equazioni

$$(5) \qquad ax'+by'+cz'=0 \quad , \quad ax''+by''+cz''=0,$$

in forza delle quali la distanza dei punti della curva dal piano corrispondente viene ad essere di ordine superiore al secondo; e evidentemente non potremo porre altre condizioni, perchè queste due equazioni unite alla (1) determinano già perfettamente un piano la cui equazione è la seguente

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,$$

ovvero

(7) $(X-x)(y'z''-z'y'')+(Y-y)(z'x''-x'z'')+(Z-z)(x'y''-y'x'')=0$;

e ciò però a meno che non siano contemporaneamente zero i tre determinanti

(8) $$y'z''-z'y'' \quad , \quad z'x''-x'z'' \quad , \quad x'y''-y'x''$$

cioè i minori di second'ordine della matrice

(9) $$\begin{Vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix} ,$$

perchè altrimenti le condizioni precedenti si ridurrebbero ad una sola e la equazione (4) non definirebbe più un piano, e occorrerebbe aggiungere altre condizioni simili alle (5) fra le derivate di ordine superiore al secondo quando esistano.

In seguito a questo noi possiamo dunque ora evidentemente concludere che pei punti della curva corrispondenti ai valori di ω pei quali le funzioni $x(\omega)$, $y(\omega)$, $z(\omega)$ che rappresentano le coordinate sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e hanno determinate e finite anche le derivate seconde, esiste sempre un piano la cui equazione è data dalla (6) o dalla (7) a meno che nei punti stessi non siano zero contemporaneamente i tre determinanti (8), e questo sarà quello che abbiamo chiamato *piano osculatore*, perchè evidentemente, per ogni altro piano pel quale non siano soddisfatte le condizioni (5), i punti degli intorni del punto M della curva finiscono per essere distanti da questi piani più di quello che lo siano dal piano (6) o (7).

394. — Coi differenziali poi la equazione del piano osculatore può evidentemente porsi sotto la forma seguente

(10) $$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 ,$$

o sotto l'altra

(10) $(X-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(Y-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(Z-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0$,

a meno che non siano zero contemporaneamente i tre determinanti

(12) $$dy\,d^2z - dz\,d^2y \ , \ dz\,d^2x - dx\,d^2z \ , \ dx\,d^2y - dy\,d^2x ,$$

cioè i minori del second'ordine della matrice

(13) $$\begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{Vmatrix} ;$$

e questi risultati valgono qualunque sia la variabile indipendente e dimostrano che *il piano osculatore in un punto* M *di una curva passa per la tangente in questo punto,* perchè, essendo

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-x}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

le equazioni della tangente quando dx, dy, dz non sono contemporaneamente zero — il che viene escluso ora anche colla ipotesi che facciamo che non siano zero insieme i tre determinanti (12) —, si vede subito che la equazione (10) del piano osculatore è identicamente soddisfatta dalle coordinate X, Y, Z dei punti della tangente.

395. — Riservandoci di esaminare poi in un capitolo a parte il caso di quei punti speciali delle curve pei quali i tre determinanti (8) o (12) sono contemporaneamente zero, per ora escluderemo sempre questi punti dalle nostre considerazioni, per quanto anche in essi, come poi vedremo, bene spesso esista un piano osculatore.

Con questa esclusione, per avere la distanza δ dei punti della curva vicinissimi ad M dal piano osculatore in questo punto basterà porre nella espressione (4) di δ per le quantità a, b, c i determinanti (8) o (12), per es. i determinanti (8); e da questo risulterà subito intanto che la quantità sotto il radicale nel denominatore non sarà altro che il quadrato della matrice (9).

Il numeratore poi sarà evidentemente il determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix} h^2 ,$$

dove σ_1, σ_2, σ_3 sono i tre infinitesimi che figurano come coefficienti di h^2 nelle espressioni (3) di Δx, Δy e Δz; quindi si può dire evidentemente che la distanza δ dei punti della curva vicinissimi ad M dal piano osculatore in questo punto è sempre infinitesima di ordine superiore al secondo.

E se le coordinate x, y, z dei punti della nostra curva nel punto M che si considera avranno anche le derivate terze x''', y''', z''' determinate e finite, qualunque cosa accada per queste derivate fuori di questo punto, allora, valendoci ancora della formola di Taylor abbreviata data nella nota a pag. 87, e osservando che per questa formola alle espressioni (3) di Δx, Δy e Δz si potranno sostituire le altre

$$(14)\quad \Delta x = x'h + x''\frac{h^2}{2} + x'''\frac{h^3}{6} + \sigma'_1 h^3\,,\quad \Delta y = y'h + y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{6} + \sigma'_2 h^3\,,\quad \Delta z = z'h + z''\frac{h^2}{2} + z'''\frac{h^3}{6} + \sigma'_3 h^3\,,$$

con σ_1', σ_2' e σ_3' nuove quantità infinitesime con h, si vede che il numeratore della detta distanza δ si potrà scrivere sotto la forma

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \frac{h^3}{6} + \Omega\,,$$

essendo Ω una quantità infinitesima di ordine superiore al terzo, per modo che quando per x, y, z esistono anche le derivate terze *nel punto* M che si considera e sono determinate e finite, la distanza medesima δ dei punti della curva dal piano osculatore del punto M è sempre del terz'ordine, a meno che non sia zero il determinante

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \text{ o l'altro coi differenziali } \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix};$$

mentre se questo determinante è zero la detta distanza sarà di ordine superiore al terzo, e in questo caso se nel punto M saranno determinate e finite anche le derivate del quart'ordine di x, y e z essa sarà almeno del quart'ordine, ecc.

Nel caso più comune questo determinante non è zero, e allora *la parte principale della detta distanza è del terz'ordine ed è precisamente* $\frac{1}{6}\frac{\Delta}{D}$ quando, come di solito si usa, s'indichi con D^2 il quadrato della matrice (13) e con Δ il detto determinante espresso coi differenziali.

396. — Nei punti speciali nei quali il determinante Δ è zero la detta distanza δ dei punti della curva negli intorni di M dal piano osculatore in M, invece di essere del terz'ordine come negli altri casi, è come abbiamo detto di ordine superiore al terzo e ordinariamente è del quart'ordine. Oltre a ciò, come vedremo in seguito trattando dei raggi di torsione, le deviazioni del piano osculatore nel passare dal punto M ai punti vicini, che ordinariamente sono del prim'ordine, in quei punti speciali sono di ordine superiore per modo che in tale passaggio dal punto M ai punti vicini il piano osculatore rimarrà come invariabile in confronto a quello che avviene negli altri punti.

Per questo i detti punti speciali, nei quali il determinante Δ è zero, vengono detti punti dei *piani osculatori stazionarii* comprendendo fra questi punti anche quelli pei quali sono zero i tre determinanti (8) o (12) che rendono zero essi pure il Δ, quando, come spesso accade, anche in essi esista il piano osculatore.

E così volendo trovare i punti di una curva $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $z = z(\omega)$ che corrispondono a questi piani osculatori stazionarii bisognerà trovare i valori di ω pei quali si ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0\,,$$

verificando poi se nei punti corrispondenti esisteranno effettivamente i piani osculatori quando si tratterà di punti pei quali risultino zero anche i tre determinanti (8) o (12).

Questi ultimi punti pei quali i tre determinanti (8) o (12) sono nulli, quando in essi le tangenti esistono, per una ragione relativa alle tangenti che è del tutto simile a quella indicata sopra pei piani osculatori, si dicono i punti delle *tangenti stazionarie.*

397. — I punti speciali nei quali i tre determinanti (8) o (12) sono zero, cioè i punti delle tangenti stazionarie, già abbiamo detto di escluderli per ora dalle nostre considerazioni, riservandoci di occuparcene poi in un capitolo a parte.

Per essi però ci giova di dimostrare fin d'ora che quando i tre determinanti (8) o (12) saranno zero contemporaneamente non in punti speciali isolati, ma in tutto un tratto della curva in ogni punto del quale anche le derivate seconde di x, y, z siano sempre determinate e finite, allora la curva nel tratto medesimo sarà necessariamente rettilinea, o almeno composta di parti rettilinee, e quindi il piano osculatore sarà del tutto indeterminato.

Si osservi infatti dapprima che non potranno essere zero contemporaneamente x', y' e z' in tutto il tratto o in una porzione determinata di esso, altrimenti x, y, z sarebbero sempre costanti (§. 41 pag. 48), e la linea o porzione corrispondente di essa si ridurrebbe ad un punto.

Ne segue che una almeno delle stesse derivate per es. x' dovrà in certi punti di quel tratto essere diversa da zero; e essendo diversa da zero in un punto, a causa della continuità (poichè esistono e sono finite le derivate seconde di x) esisterà almeno una porzione determinata i del tratto di curva che si considera nel quale x' sarà sempre diversa da zero.

Considerando dunque il secondo e terzo dei determinanti (8) dopo di averli divisi per x'^2, si vede che in tutti i punti del tratto i sarà $\frac{d}{d\omega}\left(\frac{z'}{x'}\right)=0$ e $\frac{d}{d\omega}\left(\frac{y'}{x'}\right)=0$, e conseguentemente in tutto il tratto stesso i i rapporti $\frac{z'}{x'}$ e $\frac{y'}{x'}$ avranno valori costanti c_1 e c_2, e quindi sarà $z'-c_1x'=0$, $y'-c_2x'=0$, ciò che mostra che le funzioni $z-c_1x$ e $y-c_2x$ avendo la derivata sempre zero saranno due costanti c'_1 e c'_2.

Da ciò risulta che in tutto il tratto i avremo $z=c_1x+c'_1$, $y=c_2x+c'_2$, e il primo dei determinanti (8) risulterà allora zero da sè; e questo evidentemente dimostra che nel tratto i la nostra linea sarà la retta intersezione dei due piani $z=c_1x+c'_1$, $y=c_2x+c'_2$, e resta così pienamente provato quanto affermammo sopra.

398. — Aggiungiamo che se in un certo tratto una curva è piana *senza essere mai rettilinea,* il suo piano osculatore, per la definizione, sarà naturalmente il piano della curva in quel tratto; e ciò del resto risulta subito anche dall'osservare che in questo caso, per quanto ora abbiamo dimostrato, i tre determinanti (8) non potranno essere tutti zero su nessuna porzione di quel tratto di curva; mentre se si suppone che il piano della curva in quel tratto sia il piano xy e quindi sia sempre $z=0$, allora saranno certamente zero il primo e il secondo dei determinanti (8) senza che lo sia il terzo, e quindi la equazione (7) del piano osculatore si ridurrà appunto a $Z=0$.

Facilmente anche si potrebbe vedere che se in un tratto di linea fosse sempre zero il determinante Δ, cioè se i piani osculatori fossero sempre stazionarii, la linea stessa in quel tratto sarebbe piana o almeno sarebbe composta di parti di curve piane, ecc..

Questo del resto risulterà subito al Cap. XXXI dagli studii generali che allora faremo.

399. — Fra le proprietà più notevoli del piano osculatore di una curva vi è quella che *esso può essere considerato come il piano limite delle posizioni successive di un piano che passa pel punto che si considera e per due altri punti della curva quando quest'ultimi punti si avvicinano indefinitamente al primo, ammettendo però che i due ultimi punti nel loro indefinito avvicinarsi al punto dato debbano sempre necessariamente riguardarsi come distinti fra loro quand'anche si trascurino gli infinitesimi di ordine superiore al primo,* per modo cioè che la differenza delle loro coordinate non sia infinitesima di ordine superiore al primo rispetto agli accrescimenti della variabile indipendente.

Questa proprietà del piano osculatore che dimostra al tempo stesso l'esistenza nei casi ordinarii dell'indicato piano limite, si prende bene spesso anche come sua definizione e si dimostra nel modo seguente.

Sia al solito

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0 \tag{19}$$

l'equazione di un piano che passa pel punto dato $M(x, y, z)$, e siano $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ e $M''(x+\Delta_1 x, y+\Delta_1 y, z+\Delta_1 z)$ due punti della curva vicinissimi ad M.

Se il piano (19) dovrà passare anche per questi ultimi punti, insieme alla (19) dovremo avere le due equazioni

$$a\,\Delta x+b\,\Delta y+c\,\Delta z=0 \quad , \quad a\,\Delta_1 x+b\,\Delta_1 y+c\,\Delta_1 z=0\,,$$

e quindi la equazione di un piano che passi pei tre punti M, M', M'' potrà porsi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ \Delta_1 x & \Delta_1 y & \Delta_1 z \end{vmatrix}=0\,,$$

ovvero

$$(X-x)(\Delta y\,\Delta_1 z-\Delta z\,\Delta_1 y)+(Y-y)(\Delta z\,\Delta_1 x-\Delta x\,\Delta_1 z)+(Z-z)(\Delta x\,\Delta_1 y-\Delta y\,\Delta_1 x)=0\,. \tag{20}$$

Ma per le ipotesi fatte intorno alle derivate prime e seconde di x, y, z nel punto che si considera, indicando con h e h_1 gli accrescimenti della variabile indipendente ω corrispondenti agli accrescimenti Δ e Δ_1 di x, y, z, e applicando la solita formola della nota a pag. 87 avremo le formole

$$\Delta x=x'h+x''\frac{h^2}{2}+\sigma_1 h^2\,, \qquad \Delta_1 x=x'h_1+x''\frac{h_1^2}{2}+\sigma'_1 h_1^2\,,$$

$$\Delta y=y'h+y''\frac{h^2}{2}+\sigma_2 h^2\,, \qquad \Delta_1 y=y'h_1+y''\frac{h_1^2}{2}+\sigma'_2 h_1^2\,,$$

$$\Delta z=z'h+z''\frac{h^2}{2}+\sigma_3 h^2\,, \qquad \Delta_1 z=z'h_1+z''\frac{h_1^2}{2}+\sigma'_3 h_1^2\,,$$

essendo $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \sigma_3, \sigma'_3$ quantità che quando h e h_1 siano sufficientemente piccole in valore assoluto saranno numericamente inferiori a quel numero che più ci piace; quindi, poichè queste formole ci danno l'altra

$$\Delta y\,\Delta_1 z-\Delta z\,\Delta_1 y=\frac{1}{2}hh_1(h_1-h)\left\{(y'z''-y''z')+\varepsilon\frac{h}{h_1-h}+\varepsilon'\frac{h_1}{h_1-h}\right\}\,,$$

dove ε e ε' sono quantità arbitrariamente piccole, e due formole analoghe si hanno per i determinanti $\Delta z \Delta_1 x - \Delta x \Delta_1 z$, $\Delta x \Delta_1 y - \Delta y \Delta_1 x$, si vede subito che la equazione (20) può porsi sotto la forma

$$(X-x)(y'z''-z'y'')+(Y-y)(z'x''-x'z'')+(Z-z)(x'y''-y'x'')+\sigma=0,$$

dove σ è una quantità che, in forza delle nostre ipotesi sulle derivate prime e seconde di x, y, z, ha per limite zero quando h e h_1 tendono a zero in modo che h_1-h non sia infinitesimo di ordine superiore nè a quello di h nè a quello di h_1; e questo evidentemente, quando siano ancora esclusi i punti nei quali si annullano contemporaneamente i tre determinanti (8) o (12), dimostra quanto abbiamo enunciato sopra.

400. — Nella dimostrazione precedente nulla c'impedisce di far prima tendere a zero una sola delle due quantità h e h_1, per es. h, e poi farvi tendere l'altra h_1.

Allora il piano limite si viene a presentare come limite di un piano che passa per la posizione limite della retta MM' cioè per la tangente in M e per un punto M'' che si avvicina indefinitamente al punto di contatto; e quindi noi possiamo anche affermare che *il piano osculatore in un punto di una curva nel quale sono soddisfatte le solite condizioni per le derivate prime e seconde di x, y, z può considerarsi come il limite delle posizioni di un piano che passa per la tangente nel punto che si considera e per un punto che si avvicina indefinitamente al punto di contatto.*

Questo teorema del resto poteva dimostrarsi subito anche direttamente.

401. — Aggiungiamo che, fermandoci al solito ai punti M di una curva pei quali i tre determinanti (8) o (12) non sono contemporaneamente zero, *il piano osculatore può anche riguardarsi come il limite del piano condotto per la tangente alla curva nel punto* M *parallelamente alla tangente in un punto infinitamente vicino.*

E infatti essendo al solito la (19) la equazione di un piano condotto pel punto M, perchè esso passi per la tangente in questo punto la quale ha per equazioni

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'},$$

dovrà intanto essere soddisfatta la prima delle condizioni (5); e perchè sia anche parallelo alla tangente in un punto M' infinitamente vicino ad M corrispondente al valore $\omega+h$ di ω dovremo avere anche

$$a x'(\omega+h)+b y'(\omega+h)+c z'(\omega+h)=0, \tag{21}$$

perchè le equazioni della tangente in questo punto sono le seguenti

$$\frac{X-x(\omega+h)}{x'(\omega+h)}=\frac{Y-y(\omega+h)}{y'(\omega+h)}=\frac{Z-z(\omega+h)}{z'(\omega+h)}.$$

Sviluppando dunque nella precedente (21) i valori di $x'(\omega+h)$, $y'(\omega+h)$ e $z'(\omega+h)$ colla solita formola della nota a pag. 87, e tenendo conto della circostanza che già si suppone soddisfatta la prima delle (5) e che si può dividere tutto per h, si vede che pel piano che passa per la tangente nel punto M ed è parallelo alla tangente nel punto M', insieme alla equazione (1) e alla prima delle (5) dovremo avere l'altra

$$a(x''+\varepsilon_1)+b(y''+\varepsilon_2)+c(z''+\varepsilon_3)=0,$$

essendo ε_1, ε_2 e ε_3 quantità che divengono infinitesime con h; e perciò il piano stesso avrà la equazione seguente

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x''+\varepsilon_1 & y''+\varepsilon_2 & z''+\varepsilon_3 \end{vmatrix}=0$$

che al limite per $h=0$ si riduce alla equazione (6) del piano osculatore.

Normale principale e binormale.

402. — Abbiamo già notato in altra occasione (§. 498 [pag. 368]) che in un punto di una curva esistono infinite normali tutte situate in un piano perpendicolare alla tangente che è quello che dicesi *piano normale* alla curva.

Fra queste normali se ne considerano due in modo speciale, l'una delle quali è quella che è situata nel piano osculatore e che dicesi *normale principale,* e l'altra è quella perpendicolare al piano osculatore e che dicesi *binormale* perchè pel teorema del paragrafo precedente essa è perpendicolare a due tangenti infinitamente vicine della curva, nel senso che essa è il limite della retta perpendicolare a due tangenti condotte l'una nel punto che si considera e l'altra in un punto che si avvicina indefinitamente a questo.

Per trovare le equazioni della normale principale a una curva basta evidentemente osservare che essa è la retta d'intersezione del piano osculatore col piano normale; mentre per trovare le equazioni della binormale basta prendere quelle della retta perpendicolare al piano osculatore che passa pel punto che si considera.

Servendoci dunque delle equazioni nelle quali figurano i differenziali, si trova subito così che le equazioni della normale principale a una curva nel punto (x, y, z) sono le due

$$(1)\quad \begin{cases} (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0, \\ (X-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(Y-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(Z-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0, \end{cases}$$

delle quali la prima rappresenta il piano normale, e la seconda rappresenta il piano osculatore; e quelle della binormale sono invece le seguenti

$$(2)\qquad \frac{X-x}{dy\,d^2z-dz\,d^2y}=\frac{Y-y}{dz\,d^2x-dx\,d^2z}=\frac{Z-z}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},$$

e naturalmente debbono ancora escludersi i punti pei quali i tre determinanti minori

$$(3)\qquad dy\,d^2z-dz\,d^2y\quad,\quad dz\,d^2x-dx\,d^2z\quad,\quad dx\,d^2y-dy\,d^2x$$

della solita matrice

$$(4)\qquad \begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{Vmatrix}$$

sono contemporaneamente uguali allo zero.

Si può poi osservare che le equazioni (1) della normale principale mostrano che le differenze $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ sono respettivamente proporzionali ai determinanti di second' ordine

$$\begin{vmatrix} dy & dz \\ dz\,d^2x-dx\,d^2z & dx\,d^2y-dy\,d^2x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} dz & dx \\ dx\,d^2y-dy\,d^2x & dy\,d^2z-dz\,d^2y \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} dx & dy \\ dy\,d^2z-dz\,d^2y & dz\,d^2x-dx\,d^2z \end{vmatrix},$$

e siccome, indicando con s l'arco della curva per modo che sia $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, si ha evidentemente

$$(5)\ \begin{vmatrix} dy & dz \\ dz\,d^2x-dx\,d^2z & dx\,d^2y-dy\,d^2x \end{vmatrix}=dy\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)-dz\,(dz\,d^2x-dx\,d^2z)=$$

$$=dx\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)-d^2x\,(dx^2+dy^2+dz^2)=dx\,ds\,d^2s-d^2x\,ds^2=-ds^3\,d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

e similmente si ha

$$\begin{vmatrix} dz & dx \\ dx\,d^2y-dy\,d^2x & dy\,d^2z-dz\,d^2y \end{vmatrix}=-ds^3\,d\left(\frac{dy}{ds}\right),\quad \begin{vmatrix} dx & dy \\ dy\,d^2z-dz\,d^2y & dz\,d^2x-dx\,d^2z \end{vmatrix}=-ds^3\,d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

si vede subito che le equazioni della normale principale a una curva quando i tre determinanti (3) non sono zero contemporaneamente possono anche porsi

sotto la forma semplice

$$(6)\qquad \frac{X-x}{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}=\frac{Y-y}{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}=\frac{Z-z}{d\left(\frac{dz}{ds}\right)},$$

che è quella sotto la quale ordinariamente si prendono e nella quale come si vedrà fra breve i denominatori non potranno mai essere zero insieme quando non lo sono tutti i determinanti (3).

E si può notare che in tutte queste formole la variabile indipendente può esser qualunque; e quando per questa variabile si prende l'arco s, le equazioni della normale principale possono porsi sotto la forma

$$(7)\qquad \frac{X-x}{x''}=\frac{Y-y}{y''}=\frac{Z-z}{z''},$$

dove i denominatori non sono che le derivate seconde di x, y, z prese rispetto all'arco.

403. — Volendo ora i coseni degli angoli che la normale principale e la binormale in un punto di una curva fanno coi tre assi coordinati, basta servirsi delle formole (6) e (2) respettivamente.

Si trova così che per gli angoli ξ, η, ζ della normale principale cogli assi x, y, z si hanno le formole

$$(8)\qquad \cos\xi=\pm\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{P}\quad,\quad \cos\eta=\pm\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{P}\quad,\quad \cos\zeta=\pm\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{P},$$

che sono relative a qualsiasi variabile indipendente, e nelle quali il segno deve essere il superiore o l'inferiore secondochè si prende per positiva l'una o l'altra delle due direzioni della normale principale, e P è un numero positivo definito dalla formola

$$(9)\qquad P^2=\left\{d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right\}^2+\left\{d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right\}^2+\left\{d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right\}^2,$$

per modo che si ha anche

$$(10)\qquad P^2=\frac{1}{ds^4}\left\{(ds\,d^2x-dx\,d^2s)^2+(ds\,d^2y-dy\,d^2s)^2+(ds\,d^2z-dz\,d^2s)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{ds^4}\left\{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-ds^2\,(d^2s)^2\right\},$$

ovvero per essere $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, $ds\,d^2s=dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z$, e per un noto teorema

$$(11) \qquad P^2 = \frac{1}{ds^4} \{ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 \};$$

come si sarebbe trovato subito anche quadrando e sommando la espressione (5) e le altre due simili; e di qui si riscontra quanto già avvertimmo sopra, cioè che P e quindi i tre denominatori delle (6) non possono essere zero insieme senza che lo siano tutti i determinanti (3), e si vede inoltre che, ponendo, come già dicemmo di fare in fine del § 395 [pag. 532],

$$(12) \qquad D^2 = (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2,$$

si può anche scrivere

$$(13) \qquad P^2 = \frac{D^2}{ds^4} \quad , \quad P = \frac{D}{ds^2},$$

e quindi

$$(14) \quad \cos\xi = \pm \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{D} \quad , \quad \cos\eta = \pm \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{D} \quad , \quad \cos\zeta = \pm \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{D}$$

dove D s'intende preso positivamente, e pei segni vale la regola data sopra.

Invece pei coseni degli angoli λ, μ, ν della binormale cogli assi x, y, z, qualunque sia la variabile indipendente le (2) ci danno subito le formole seguenti

$$(15) \quad \cos\lambda = \pm \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{D} \quad , \quad \cos\mu = \pm \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{D} \quad , \quad \cos\nu = \pm \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{D},$$

dove D s'intende ancora preso positivamente, e i segni devono essere i superiori o gl'inferiori, secondochè si prende come positiva l'una o l'altra delle due direzioni della binormale.

Nel caso poi che la variabile indipendente sia l'arco s della curva, queste formole si trasformano nelle altre

$$(16) \qquad \cos\xi = \pm \frac{x''}{D_1} \quad , \quad \cos\eta = \pm \frac{y''}{D_1} \quad , \quad \cos\zeta = \pm \frac{z''}{D_1},$$

$$(17) \quad \cos\lambda = \pm \frac{y'z'' - z'y''}{D_1} \quad , \quad \cos\mu = \pm \frac{z'x'' - x'z''}{D_1} \quad , \quad \cos\nu = \pm \frac{x'y'' - y'x''}{D_1},$$

dove

$$(18) \qquad D_1^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2;$$

e in queste ultime formole le derivate s'intendono prese tutte rispetto all'arco s.

404. — Le tre rette *tangente, normale principale e binormale* in un punto M di una curva costituiscono un sistema di tre rette ortogonali, e danno luogo quindi a un triedro trirettangolo che si chiama *il triedro fondamentale* relativo al punto M della curva.

In questo triedro dunque gli spigoli sono le tre rette ora indicate, e le faccie sono il *piano osculatore*, il *piano normale* e il piano formato dalla tangente e dalla binormale che si chiama il *piano rettificante* per una ragione che indicheremo più oltre.

Se si chiamano α, β, γ gli angoli che la tangente fa coi tre assi, e si continuano a chiamare ξ, η, ζ quelli della normale principale, e λ, μ, ν quelli della binormale (*), a causa della ortogonalità di queste rette, fra i coseni di questi angoli si verificheranno le note relazioni date dalla Geometria Analitica.

Oltre a queste poi possono aversi altre relazioni notevoli fra i coseni di questi angoli e i loro differenziali relativi a qualsiasi variabile indipendente, sempre sotto la solita ipotesi che si escludano i punti delle tangenti stazionarie pei quali sono zero insieme i determinanti (3); e noi ne daremo intanto alcune, riservandoci di darne altre in seguito.

Osserviamo perciò che qualunque sia la variabile indipendente si hanno le formole

$$(19) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

e quindi per le (8) avremo subito le altre

$$(20) \qquad \cos\xi = \pm \frac{d\cos\alpha}{P} \quad , \quad \cos\eta = \pm \frac{d\cos\beta}{P} \quad , \quad \cos\zeta = \pm \frac{d\cos\gamma}{P},$$

con

$$(21) \qquad P = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

dove per quanto già osservammo i differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ e $d\cos\gamma$ non potranno essere tutti insieme zero, e il radicale s'intende preso positivamente.

Si osservi poi che la prima delle (15) può scriversi sotto la forma

$$\cos\lambda = \pm \frac{\frac{dy}{ds}(d^2z\,ds - dz\,d^2s) - \frac{dz}{ds}(d^2y\,ds - dy\,d^2s)}{D} = \pm \left\{ \frac{dy}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) - \frac{dz}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) \right\} \frac{ds^2}{D},$$

(*) Come perpendicolare al piano osculatore, la binormale è parallela a quella retta che, come diremo in seguito, viene chiamata *asse del piano osculatore*; e quindi λ, μ, ν sono anche gli angoli che l'asse del piano osculatore fa cogli assi coordinati.

e similmente per $\cos\mu$ e $\cos\nu$; e quindi, mentre a causa delle (13) si hanno le formole seguenti

$$(22)\quad \cos\lambda = \pm\frac{\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)-\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{P},\quad \cos\mu = \pm\frac{\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)-\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{P},\quad \cos\nu = \pm\frac{\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)-\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{P},$$

per le (19) si ottengono anche le altre

$$(23)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \pm\frac{1}{P}(\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta),\\ \cos\mu = \pm\frac{1}{P}(\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma),\\ \cos\nu = \pm\frac{1}{P}(\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha),\end{cases}$$

venendo così anche $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ espressi per $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ e pei loro differenziali relativi a qualsiasi variabile indipendente, non che per la solita quantità P che si esprime essa pure per questi differenziali colla formola (21), e della quale vedremo fra breve il significato geometrico.

405. — A queste formole poi possono aggiungersene anche altre che esprimono i coseni degli angoli ξ, η, ζ pei differenziali dei coseni degli angoli λ, μ, ν *quando questi differenziali esistono e non sono tutti zero* (*) ciò che porta che anche le derivate terze di x, y, z siano determinate e finite.

Si osservi per ciò che avendosi

$$(24)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

si ottiene subito differenziando

$$(25)\quad \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0;$$

e poichè le (20) o le (23) ci danno anche evidentemente

$$(26)\quad \cos\lambda\, d\cos\alpha + \cos\mu\, d\cos\beta + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0,$$

(*) Si vedrà poi al § 415 che la condizione che i tre differenziali $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$ non siano tutti insieme zero corrisponde a quella che il punto che si considera sulla curva non sia un punto di piani osculatori stazionarii.

Questa condizione non fu posta esplicitamente nelle lezioni del 1877, ma essa è necessaria, e quando non sia soddisfatta le formole (32) che qui vogliamo determinare perdono ogni significato e ad esse conviene sostituire le formole (34) che ora aggiungiamo.

e come già sappiamo i differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ e $d\cos\gamma$ non sono contemporaneamente zero, per queste equazioni (25) e (26) si vede subito che i differenziali stessi $d\cos\alpha, d\cos\beta, d\cos\gamma$ sono proporzionali ai determinanti

$$(27)\quad \begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ \cos\mu & \cos\nu\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ \cos\nu & \cos\lambda\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \cos\lambda & \cos\mu\end{vmatrix}.$$

D'altra parte, avendo anche $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, si ha differenziando

$$(28)\quad \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0;$$

e per essere $\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = 0$ perchè la tangente e la binormale sono fra loro perpendicolari, si ottiene pure colla differenziazione e a causa della (26)

$$(29)\quad \cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos\beta\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0;$$

e questa unita alla precedente ci mostra che anche i differenziali $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$, quando non sono tutti zero sono proporzionali ai determinanti (27); talchè si può ora concludere che si hanno le eguaglianze

$$(30)\quad \frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \pm\frac{\sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}} = \pm\frac{Q}{P},$$

quando insieme al valore di P dato dalla (18) s'introduca in calcolo una quantità analoga Q definita dalla formola

$$(31)\quad Q = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2},$$

e ora, sostituendo nei secondi membri delle (20) i valori che risultano da questa formola si otterranno le altre

$$(32)\quad \cos\xi = \pm\frac{d\cos\lambda}{Q},\quad \cos\eta = \pm\frac{d\cos\mu}{Q},\quad \cos\zeta = \pm\frac{d\cos\nu}{Q},$$

che sono quelle che volevamo stabilire sotto le fatte ipotesi fra le quali quelle che $d\cos\nu$, $d\cos\mu$ e $d\cos\nu$ abbiano un significato, e non siano tutti insieme zero.

Non si deve però lasciare di osservare che questa dimostrazione cesserebbe di esser giusta quando i tre determinanti (27) fossero contemporaneamente eguali allo zero; ma se si osserva che calcolando questi determinanti per mezzo delle formole (23) e tenendo conto delle (24) e (25) si trova che essi sono uguali a $\pm\frac{1}{P}d\cos\alpha$, $\pm\frac{1}{P}d\cos\beta$, $\pm\frac{1}{P}d\cos\gamma$, si vedrà subito che essi non possono esser zero contemporaneamente non essendo zero insieme i tre differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ e $d\cos\gamma$.

406. — Aggiungiamo che nel caso che nel punto che si considera siano zero i tre differenziali $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$ e $d\cos\nu$ le equazioni (28) e (29) *in quel punto* divengono identiche e non danno più luogo alle (30) e alle (32); però se nel punto stesso esisteranno anche le derivate quarte di x , y , z e saranno finite, le stesse equazioni (28) e (29) differenziate daranno luogo alle seguenti

$$\cos\alpha\, d^2\cos\lambda + \cos\beta\, d^2\cos\mu + \cos\gamma\, d^2\cos\nu = 0\,,$$

$$\cos\lambda\, d^2\cos\lambda + \cos\mu\, d^2\cos\mu + \cos\nu\, d^2\cos\nu = 0\,,$$

le quali, quando non siano insieme zero, anche $d^2\cos\lambda$, $d^2\cos\mu$ e $d^2\cos\nu$ collo stesso processo precedente condurranno alle altre

$$\frac{d^2\cos\lambda}{d\cos\alpha}=\frac{d^2\cos\mu}{d\cos\beta}=\frac{d^2\cos\nu}{d\cos\gamma}=\pm\frac{\sqrt{(d^2\cos\lambda)^2+(d^2\cos\mu)^2+(d^2\cos\nu)^2}}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}\,,$$

e queste ponendo

$$Q_1=\sqrt{(d^2\cos\lambda)^2+(d^2\cos\mu)^2+(d^2\cos\nu)^2}\,, \tag{33}$$

daranno luogo alle seguenti

$$\cos\xi=\pm\frac{d^2\cos\lambda}{Q_1}\,,\quad \cos\eta=\pm\frac{d^2\cos\mu}{Q_1}\,,\quad \cos\zeta=\pm\frac{d^2\cos\nu}{Q_1}\,, \tag{34}$$

che saranno quelle da sostituirsi alle formole (30) in questo caso in cui $d\cos\lambda=d\cos\mu=d\cos\nu=0$, supposto che esistano e non siano zero insieme anche i differenziali secondi $d^2\cos\lambda$, $d^2\cos\mu$ e $d^2\cos\nu$.

Se poi anche questi differenziali secondi saranno zero insieme, allora al modo stesso si troveranno per $\cos\xi$, $\cos\eta$ e $\cos\zeta$ altre formole del tutto simili nelle quali figureranno i differenziali di terz'ordine di $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, supposto che esistano e non siano insieme zero, ecc. Tutto ciò, bene inteso, sempre escludendo da queste considerazioni i punti delle tangenti stazionarie, cioè quelli pei quali la solita matrice (4) ha la caratteristica inferiore a 2.

407. — Per dare una applicazione degli studi che abbiamo fatti, cerchiamo le equazioni della tangente, del piano normale, del piano osculatore, della normale principale e della binormale all'elica cilindrica.

Si chiama *elica cilindrica* la curva le cui tangenti fanno uno stesso angolo con una direzione fissa; per modo che, potendo sempre immaginare un cilindro che contenga l'elica e le cui generatrici siano parallele a quella direzione fissa, l'elica potrà anche riguardarsi (come si fa ordinariamente) come una curva tracciata su un cilindro (a base qualunque) che taglia sempre sotto lo stesso angolo le generatrici del cilindro.

Prenderemo l'asse delle z parallelo alle generatrici del cilindro e, indicando con σ la variabile indipendente, intenderemo che le equazioni dell'elica siano poste sotto la forma

$$x=x(\sigma)\,,\quad y=y(\sigma)\,,\quad z=z(\sigma)\,; \tag{35}$$

allora $x(\sigma)$ e $y(\sigma)$ saranno evidentemente anche le coordinate del punto della sezione retta del cilindro che è situato sulla generatrice che passa pel punto dell'elica che si vuol considerare; e siccome il differenziale dell'arco ds dell'elica verrà ad essere $d\sigma\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, mentre il coseno dell'angolo γ che essa fa coll'asse delle z è $\frac{dz}{ds}$, si vede subito che onde le equazioni (35) rappresentino un'elica tracciata su un cilindro parallelo all'asse delle z sarà necessario e sufficiente che il rapporto $\frac{dz}{ds}=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{z'^2}+1}}$ sia una quantità costante, cioè sia costante il rapporto $\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

Ora supponendo per semplicità che la variabile indipendente σ sia l'arco della curva piana $x=x(\sigma)$, $y=y(\sigma)$, che non è altro che la sezione retta del cilindro, avremo $x'^2+y'^2=1$, e allora z' dovrà essere una costante m, e quindi dovremo avere $z=m\sigma+c$, essendo c una costante che può sempre supporsi nulla prendendo convenientemente l'origine sull'asse delle z; talchè le equazioni dell'elica potranno sempre porsi sotto la forma

$$x=x(\sigma)\,,\quad y=y(\sigma)\,,\quad z=m\sigma\,, \tag{36}$$

essendo σ l'arco della sezione retta del cilindro, ciò che porta che sia $x'^2+y'^2=1$, ed essendo m la cotangente dell'angolo γ che l'elica fa colle generatrici del cilindro, giacchè per essere $ds=\sqrt{1+m^2}\,d\sigma$ e $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, si ha appunto $\cot\gamma=m$.

Ora da queste formole si deducono subito le altre $dx=x'\,d\sigma$, $dy=y'\,d\sigma$, $dz=m\,d\sigma$, $d^2x=x''\,d\sigma^2$, $d^2y=y''\,d\sigma^2$, $d^2z=0$, essendo sempre $ds=\sqrt{1+m^2}\,d\sigma$

quindi le equazioni della tangente all'elica nel punto $(x = x(\sigma), y = y(\sigma), z = m\sigma)$ saranno le seguenti

$$\frac{X - x(\sigma)}{x'} = \frac{Y - y(\sigma)}{y'} = \frac{Z - m\sigma}{m} ;$$

quella del piano normale sarà

$$\left(X - x(\sigma)\right) x' + \left(Y - y(\sigma)\right) y' + \left(Z - m\sigma\right) m = 0 ,$$

quella del piano osculatore sarà

$$m\left(X - x(\sigma)\right) y'' - m\left(Y - y(\sigma)\right) x'' + \left(Z - m\sigma\right)(y'x'' - x'y'') = 0 ;$$

quelle della normale principale saranno le due

$$\frac{X - x(\sigma)}{x''} = \frac{Y - y(\sigma)}{y''} , \quad Z = m\sigma ,$$

e quelle della binormale saranno le altre

$$\frac{X - x(\sigma)}{my''} = \frac{Y - y(\sigma)}{-mx''} = \frac{Z - m\sigma}{y'x'' - x'y''} ;$$

e evidentemente il trovare $Z = m\sigma$ per la normale principale mostra che questa retta è parallela al piano xy, e conseguentemente è perpendicolare oltre che alla tangente all'elica anche alla generatrice del cilindro che passano per quel punto e perciò al piano tangente al cilindro; ciò che porta che *la normale principale all'elica coincide colla normale al cilindro che contiene quest'elica, e quindi anche colla normale alla sezione retta del cilindro.*

Del resto, osservando che si ha $x'^2 + y'^2 = 1$ e quindi anche $x'x'' + y'y'' = 0$, si vede che le equazioni della normale principale possono ridursi alle altre $\frac{X - x(\sigma)}{-y'} = \frac{Y - y(\sigma)}{x'}$, $Z = m\sigma$, la prima delle quali vale anche per la normale alla curva piana $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ che forma la sezione retta del cilindro, e di qui pure apparisce la proprietà che ora abbiamo enunciata.

XXX.

Le due curvature delle linee gobbe

408. — Nelle linee gobbe si considerano due curvature, delle quali l'una serve a indicare lo spostamento dalla linea retta e dicesi *prima curvatura*, o anche *curvatura* semplicemente, o *flessione;* e l'altra serve a indicare lo spostamento della linea dall'esser piana e dicesi *seconda curvatura* o *torsione;* ed è appunto per l'esistenza di queste due curvature che le linee gobbe si dicono anche linee a doppia curvatura.

In seguito a considerazioni del genere di quelle che facemmo in principio del cap. XXII [pag. 441 e seg.] quando incominciammo a trattare della curvatura delle linee piane, *per prima curvatura delle linee gobbe in un punto* M *si prende il limite del rapporto dell'angolo di due tangenti all'arco compreso, quando un estremo di quest'arco si avvicina indefinitamente all'altro estremo* M *che è il punto che si considera; e per la seconda curvatura o torsione si prende il limite del rapporto dell'angolo di due piani osculatori, condotti agli estremi dello stesso arco, diviso per quest'arco;* e nei casi ordinarii questi limiti, e quindi anche le due curvature, hanno valori determinati e finiti.

E poichè negli stessi casi l'angolo delle tangenti colla tangente condotta pel punto M che si considera ammette un differenziale $d\sigma$ il quale in conseguenza, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, può riguardarsi come l'angolo di due tangenti infinitamente vicine condotte agli estremi di un arco elementare ds che incomincia da M; e similmente l'angolo che i varii piani osculatori fanno con quello dello stesso punto M ammette un differenziale $d\tau$ che all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo può riguardarsi come l'angolo dei due piani osculatori infinitamente vicini condotti alle estremità di ds; così, senza più parlare di limiti, si vede che *la prima curvatura di una linea in un punto M e la sua seconda curvatura o torsione sono uguali respettivamente ai rapporti* $\frac{d\sigma}{ds}$ e $\frac{d\tau}{ds}$ *dei detti differenziali* $d\sigma$ *e* $d\tau$ *al differenziale* ds *dell'arco quando,* come ordinariamente accade, *i detti differenziali* ds *e* $d\tau$ *esistono.*

E fatta astrazione dalle quantità di ordine superiore al primo, si può anche dire che *la prima curvatura di una linea in un punto M è il rapporto* $\frac{d\sigma}{ds}$ *dell'angolo* $d\sigma$ *di due tangenti infinitamente vicine, condotte all'estremità di un arco elementare* ds *che incomincia da M, diviso per quest'arco; e la seconda curvatura o torsione è il rapporto* $\frac{d\tau}{ds}$ *fra l'angolo* $d\tau$ *di due piani osculatori infinitamente vicini condotti alle estremità di* ds *diviso per quest'arco.*

Aggiungiamo che la quantità $d\sigma$, che noi consideriamo come angolo di due tangenti infinitamente vicine condotte alle estremità di ds, viene detta *angolo di contingenza* della curva nel punto M, come nel caso delle curve piane; e la quantità $d\tau$, che consideriamo come angolo di due piani osculatori infinitamente vicini e che può quindi considerarsi anche come l'angolo di due binormali infinitamente vicine, viene detta *angolo di torsione;* e in conseguenza di queste denominazioni *la prima curvatura di una linea in un punto viene ad essere il rapporto dell'angolo di contingenza* $d\sigma$ *all'arco corrispondente* ds, *e la seconda curvatura o torsione il rapporto* $\frac{d\tau}{ds}$ *dell'angolo di torsione* $d\tau$ *all'arco corrispondente* ds.

Il rapporto inverso della prima curvatura, cioè $\frac{ds}{d\sigma}$, viene detto *raggio di prima curvatura* o semplicemente *raggio di curvatura* della linea, per la ragione che si può considerare anche come raggio di un cerchio che ha la stessa curvatura (prima) della linea; invece il rapporto inverso della seconda curvatura $\frac{ds}{d\tau}$ viene detto *raggio di seconda curvatura* o *raggio di torsione;* e evidentemente nelle curve piane questo raggio di seconda curvatura sarà sempre infinito.

Il raggio di prima curvatura sarà da noi indicato sempre con ρ e quello di seconda curvatura con r, come l'angolo di contingenza sarà sempre indicato con $d\sigma$ e quello di torsione con $d\tau$; e così nelle curve piane si avrà $d\tau=0$ e $r=\infty$.

409. — Per trovare il valore delle due curvature $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{r}$ di una linea in un punto M e i loro raggi di curvatura ρ e r, è utile premettere la nozione della *indicatrice sferica di una linea*, e quella di due altre indicatrici.

Immaginiamo perciò le varie tangenti di una linea prese sempre in una direzione determinata, e pel centro di una sfera di raggio uno conduciamo altrettanti raggi paralleli a queste tangenti.

Osservando che ad ogni punto della linea che consideriamo corrisponde una tangente determinata, e quindi un raggio della sfera e un punto d'incontro di questo raggio colla sfera stessa, s'intende subito che alla linea data verrà a corrispondere sulla sfera una linea determinata (luogo degli estremi dei raggi condotti parallelamente alle tangenti nella direzione che abbiamo scelta); e questa linea sferica si dirà l'*indicatrice sferica delle tangenti* della linea data, o anche, più semplicemente, l'*indicatrice sferica* della stessa linea.

Questa indicatrice sferica avrà, come vedremo, in ogni suo punto una tangente determinata la cui posizione varierà con continuità al variare al modo stesso del punto di contatto, tutte le volte che le coordinate x, y, z dei punti della curva data siano finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde e non si tratti di punti della curva corrispondenti a tangenti stazionarie, cioè di punti pei quali siano zero insieme i tre determinanti (8) o (12) dei §§ 393 e 394 [pag. 530]; e ben s'intende che le proprietà di essa corrisponderanno ad altrettante proprietà della linea data.

Così, osservando che l'angolo di due tangenti qualunque della linea data sarà uguale a quello dei raggi corrispondenti della sfera, e quindi potrà misurarsi coll'arco di cerchio massimo che passa per gli estremi di questi raggi, s'intende subito che l'angolo delle tangenti *in due punti qualunque* della curva data sarà misurato dall'arco di cerchio massimo della sfera condotto pei due punti corrispondenti della indicatrice; e così in particolare l'angolo di due tangenti infinitamente vicine della linea data condotte alle estremità di un arco elementare ds verrà misurato dall'arco di cerchio massimo che passa pei due punti infinitamente vicini della indicatrice che corrispondono agli estremi di ds.

D'altra parte, per le ipotesi che abbiamo detto di fare, questa indicatrice avrà sempre una tangente determinata ecc...., e per questo e perchè l'arco elementare di essa e quello del cerchio massimo condotto pei suoi estremi vengono naturalmente ad avere la stessa corda, questi due archi, all'infuori di infinitesimi di ordine superiore al primo, potranno riguardarsi come uguali alla corda corrispondente, e quindi anche come uguali fra loro; dunque resta evidente intanto che l'angolo di contingenza della linea data in un suo punto qualunque verrà misurato dall'arco elementare $d\sigma$ (differenziale dell'arco) della indicatrice sferica che corrisponde all'arco ds della linea data; e la prima curvatura della linea in quel punto sarà uguale al rapporto $\frac{d\sigma}{ds}$ dei due archi corrispondenti della indicatrice e della linea stessa.

410. — Insieme poi alla linea sferica che abbiamo chiamata indicatrice sferica delle tangenti della linea data, o anche semplicemente indicatrice sferica di questa linea, giova ora considerare due altre linee sferiche che possono dirsi *indicatrici* l'una *delle normali principali* e l'altra *delle binormali* della linea data.

La prima di queste indicatrici è il luogo degli estremi dei raggi della sfera condotti parallelamente alle normali principali della linea data prese sempre in una direzione determinata; la seconda invece è il luogo degli estremi dei raggi della sfera condotti parallelamente alle binormali prese anche queste in una direzione determinata; e i punti delle tre indicatrici che corrispondono ad uno stesso punto della linea primitiva saranno situati sulla sfera a distanze di 90° l'uno dall'altro contate su archi di circoli massimi.

Le due nuove indicatrici avranno anch'esse, come vedremo, una tangente determinata e variabile di posizione con continuità al variare al modo stesso del punto di contatto tutte le volte che, nel punto corrispondente della linea primitiva, siano finite e continue anche le derivate terze di x, y, z, e non si tratti di punti corrispondenti a piani osculatori stazionarii, con che restano esclusi anche in questo caso i punti delle tangenti stazionarie.

In queste ipotesi l'arco elementare della indicatrice sferica delle normali principali misurerà l'angolo $d\omega$ di due normali principali infinitamente vicine della linea data all'infuori sempre di quantità di ordine superiore; e l'arco elementare della indicatrice sferica delle binormali misurerà l'angolo di torsione $d\tau$ della curva; per modo che la torsione di questa curva risulterà dal dividere l'arco della indicatrice delle binormali per l'arco corrispondente della curva stessa.

411. — Ciò premesso, passiamo a trovare le equazioni delle varie indicatrici sferiche di una linea onde valercene poi per determinare i loro archi e quindi le due curvature della linea data.

Osserviamo perciò che in una sfera di raggio R le coordinate di un punto, quando l'origine è nel centro della sfera, sono le proiezioni del raggio corrispondente della sfera sui rispettivi assi, e quindi sono date dai prodotti $R\cos\widehat{Rx}$, $R\cos\widehat{Ry}$, $R\cos\widehat{Rz}$, essendo $\widehat{Rx}$, $\widehat{Ry}$, $\widehat{Rz}$ gli angoli che il detto raggio fa coi tre assi.

Si vedrà subito da ciò che, indicando con X_t, Y_t, Z_t le coordinate dei

punti della indicatrice sferica delle tangenti della linea data quando il centro della sfera si pone nell'origine delle coordinate, con X_n, Y_n, Z_n quelle dei punti della indicatrice delle normali principali, e con X_b, Y_b, Z_b quelle dei punti della indicatrice delle binormali, e riprendendo le notazioni del capitolo precedente per indicare gli angoli della tangente, della normale principale e della binormale a una curva coi tre assi, prese queste rette in una direzione determinata, le equazioni della indicatrice sferica delle tangenti saranno le seguenti

$$(1) \qquad X_t = \cos\alpha \;,\quad Y_t = \cos\beta \;,\quad Z_t = \cos\gamma \;;$$

quelle della indicatrice sferica delle normali principali saranno le altre

$$(2) \qquad X_n = \cos\xi \;,\quad Y_n = \cos\eta \;,\quad Z_n = \cos\zeta \;;$$

e quelle della indicatrice sferica delle binormali saranno le tre

$$(3) \qquad X_b = \cos\lambda \;,\quad Y_b = \cos\mu \;,\quad Z_b = \cos\nu \;,$$

dove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ... sono dati dalle formole del capitolo precedente.

In seguito a queste, quando si abbiano le condizioni stesse che si avevano nei §§ 404 e 405 a pag. 541 e seg., cioè che non siano zero contemporaneamente i tre differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ e $d\cos\gamma$, nè i tre $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$ e $d\cos\nu$ — il che, come vedremo, corrisponde ad escludere non solo i punti delle tangenti stazionarie ma anche quelli dei piani osculatori stazionarii — basterà osservare che, per quanto si disse nei paragrafi stessi, i coseni $\cos\xi$, $\cos\eta$ e $\cos\zeta$ sono proporzionali ai differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$ e agli altri $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$, e ricordare al tempo stesso che i coseni degli angoli che una tangente a una linea fa cogli assi coordinati sono proporzionali ai differenziali delle coordinate corrispondenti, per vedere subito intanto per le (1), (2), (3) *che la indicatrice delle tangenti e quella delle binormali nel punto che corrisponde a uno stesso punto della linea data hanno le tangenti parallele fra loro e alla normale principale della linea data stessa.*

412. — E a proposito dei punti di esclusione che qui tornano a presentarsi giova fare le considerazioni seguenti.

Ricordiamo che, come regola generale, per essere sicuri che esistano le tangenti a una curva e varino con continuità di posizione al variare al modo stesso del punto di contatto, basta che le derivate prime delle coordinate dei suoi punti esistano e siano finite e continue, e che queste loro derivate o i loro differenziali primi non siano zero contemporaneamente; per questo, dalle equazioni del paragrafo precedente si vedrà subito che saremo certi che la indicatrice sferica delle tangenti soddisfa alla condizione di avere le sue tangenti determinate e variabili di posizione in modo continuo tutte le volte che oltre ad esistere ed essere finite e continue le derivate prime e seconde di x, y, z non saranno contemporaneamente zero i differenziali $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ e $d\cos\gamma$; e questa condizione per quanto dicemmo al § 403 [pag. 539 e seg.] sarà soddisfatta se ci limiteremo a considerare la indicatrice delle tangenti pei punti che non corrispondono a quelli delle tangenti stazionarie.

Invece trattandosi delle indicatrici sferiche delle normali principali e delle binormali, siccome queste rette dipendono dai piani osculatori, la condizione stessa la intendiamo già posta perchè per gli studii che per ora stiamo facendo sui piani osculatori dicemmo appunto di escludere i punti delle tangenti stazionarie (§ 395) [pag. 531]; ma ora oltre a questa condizione, gioverà porre anche l'altra che esistano e siano finite e continue anche le derivate terze delle coordinate e non siano zero insieme i differenziali di $\cos\xi$, $\cos\eta$ e $\cos\zeta$, e quelli di $\cos\lambda$, $\cos\mu$ e $\cos\nu$ respettivamente.

Nel caso quindi che a noi più interessa, cioè quello della indicatrice delle binormali, si avranno quelle stesse condizioni che si posero per le formole del § 405 [pag. 542]; e con queste vedremo fra breve che si viene a supporre che non si tratti neppure di quei punti (quando esistono) che, pure non corrispondendo a tangenti stazionarie, corrispondono a piani osculatori stazionarii.

Così dunque quando si tratterà soltanto di raggi di prima curvatura, i quali oltre che dal differenziale dell'arco della curva dipendono soltanto dall'angolo delle tangenti successive, i punti di esclusione sono soltanto quelli delle tangenti stazionarie; e quando si tratterà di raggi di torsione, i quali oltre che dal differenziale dell'arco dipendono dall'angolo dei piani osculatori successivi, i punti di esclusione saranno quelli dei piani osculatori stazionarii.

Queste esclusioni però si presentano soltanto a causa delle considerazioni che abbiamo fatto intorno alle tangenti alle indicatrici sferiche delle tangenti e delle binormali, in quanto pei punti delle tangenti stazionarie si avrebbe $dX_t = dY_t = dZ_t = 0$, e pei punti dei piani osculatori stazionarii si avrebbe $dX_b = dY_b = dZ_b = 0$; ma non è escluso che anche in questi punti le tangenti alle dette indicatrici sferiche possano ancora esistere; colla differenza però che allora le loro equazioni e i loro archi elementari non si presentano più sotto la forma ordinaria.

Evidentemente dunque le indicate esclusioni non portano di necessità che nei punti esclusi non si possa ancora parlare di raggio di prima curvatura, o di raggio di torsione, quand'anche pei raggi di torsione che richiedono l'esistenza dei piani osculatori si resti nei soli casi che consideriamo in questo

capitolo (cioè escludendo sempre, nel trattare dei piani osculatori, i punti delle tangenti stazionarie).

E difatti se si suppone di essere in punti pei quali i differenziali delle coordinate x, y, z non sono tutti zero per modo che l'accrescimento $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ dell'arco della curva sia ancora infinitesimo del prim'ordine si comprende che l'essere *in punti di tangenti stazionarie* pei quali cioè $dX_t = dY_t = dZ_t = 0$ porta che l'accrescimento dell'arco corrispondente della indicatrice sferica delle tangenti sia infinitesimo di ordine superiore al primo, e conseguentemente nel punto corrispondente della curva data *il raggio di prima curvatura è infinito;* mentre se si suppone di essere *in punti che non sono di tangenti stazionarie ma sono di piani osculatori stazionarii*, pei quali come vedremo si ha $dX_b = dY_b = dZ_b = 0$, la stessa considerazione porta a dire che *in quei punti il raggio di torsione è infinito.*

413. — Intesi ora sulle condizioni che per ora si pongono nei respettivi casi, se ci riportiamo alle equazioni (1), (2), (3) delle indicatrici sferiche delle tangenti e delle binormali, si vede subito che, sotto le condizioni ora respettivamente indicate, i loro archi elementari $d\sigma$ e $d\tau$ sono dati dalle formole

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}\,, \tag{4}$$

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2}\,, \tag{5}$$

e per quanto si disse ai paragrafi precedenti, la prima di queste formole dà l'angolo di contingenza e la seconda dà l'angolo di torsione della linea data.

Segue di qui che le quantità che indicammo con P e Q nei §§ 404 e 405 [pag. 541 e seg.] non sono altro respettivamente che gli angoli di contingenza e di torsione nel punto che si considera della linea data; e quindi per quanto si disse sopra ai §§ 409 e 410, si hanno le formole seguenti

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}} = \frac{ds}{P}\,, \tag{6}$$

$$r = \frac{ds}{\sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2}} = \frac{ds}{Q}\,, \tag{7}$$

che danno i raggi di curvatura e di torsione espressi pei differenziali dei coseni degli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$; talchè per averli espressi pei differenziali di x, y, z o per le loro derivate basta valersi delle varie formole del capitolo precedente che danno P, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ...

414. — Servendosi infatti delle formole (9), (10), (11) e (12) del § 403 [pag. 539] si trovano subito pel raggio di prima curvatura di una linea le

espressioni seguenti

$$(8)\qquad \rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

o anche

$$(9)\qquad \rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}} =$$

$$= \frac{ds^3}{\sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2}} = \frac{ds^3}{\mathrm{D}},$$

e queste valgono qualunque sia la variabile indipendente, e richiedono soltanto che x, y, z siano finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, e che i punti che si considerano non siano punti di tangenti stazionarie; e tenuto conto di quanto si disse sopra nel § 412 si vede che valgono anche in questi punti delle tangenti stazionarie quando in essi non sia $dx = dy = dz = 0$, perchè per questi punti danno $\rho = \infty$ come appunto deve essere.

Se poi si prende per variabile indipendente l'arco s della curva, allora si ha la formola più semplice

$$(10)\qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}},$$

che è analoga a quella che si dette pel caso delle curve piane, e nella quale le derivate seconde si intendono prese rispetto all'arco s della curva.

415. — Per trovare ora anche il raggio di torsione espresso pei differenziali di x, y, z procederemo come segue.

Si ponga per abbreviare

$$\mathrm{L} = dy\,d^2z - dz\,d^2y\ ,\quad \mathrm{M} = dz\,d^2x - dx\,d^2z\ ,\quad \mathrm{N} = dx\,d^2y - dy\,d^2x\,,$$

con che $\mathrm{D}^2 = \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2$; e si osservi che quando, come noi supponiamo, D non è zero, i coseni di direzione della binormale sono dati dalle (15) del ricordato § 403 cioè si ha $\cos\lambda = \pm\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}$, $\cos\mu = \pm\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{D}}$, $\cos\nu = \pm\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$.

Differenziando si troverà subito

$$\pm d\cos\lambda = \frac{\mathrm{D}d\mathrm{L} - \mathrm{L}d\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2}\ ,\quad \pm d\cos\mu = \frac{\mathrm{D}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2}\ ,\quad \pm d\cos\nu = \frac{\mathrm{D}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{D}}{\mathrm{D}^2}\,;$$

e quindi, quadrando e sommando coll'osservare che $\mathrm{D}d\mathrm{D} = \mathrm{L}d\mathrm{L} + \mathrm{M}d\mathrm{M} + \mathrm{N}d\mathrm{N}$, avremo

$$\mathrm{D}^4\{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2\} = (\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)(d\mathrm{L}^2+d\mathrm{M}^2+d\mathrm{N}^2) - (\mathrm{L}d\mathrm{L}+\mathrm{M}d\mathrm{M}+\mathrm{N}d\mathrm{N})^2 =$$

$$= (\mathrm{L}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{L})^2 + (\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M})^2 + (\mathrm{N}d\mathrm{L} - \mathrm{L}d\mathrm{N})^2.$$

Ora avendo riguardo ai valori scritti sopra di L, M, N e ai loro differenziali $d\mathrm{L}, d\mathrm{M}, d\mathrm{N}$ si vede subito che

$$\mathrm{L}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{L} = \begin{vmatrix} dy\,d^2z - dz\,d^2y & dy\,d^3z - dz\,d^3y \\ dz\,d^2x - dx\,d^2z & dz\,d^3x - dx\,d^3z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} dy\,d^2z & dy\,d^3z - dz\,d^3y \\ dz\,d^2x & dz\,d^3x - dx\,d^3z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dz\,d^2y & dy\,d^3z - dz\,d^3y \\ dx\,d^2z & dz\,d^3x - dx\,d^3z \end{vmatrix},$$

ovvero sviluppando

$$\mathrm{L}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{L} = dy\,d^2z\,(dz\,d^3x - dx\,d^3z) - dz\,\{d^2x\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y) + d^2y\,(dz\,d^3x - dx\,d^3z)\} +$$
$$+ dx\,d^2z\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y),$$

o anche sviluppando il primo e l'ultimo termine e riducendo

$$\mathrm{L}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{L} = -dz\,\{d^2x\,(dy\,d^3z - dz\,d^3y) + d^2y\,(dz\,d^3x - dx\,d^3z) + d^2z\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)\} =$$

$$= dz \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix},$$

e similmente si avranno $\mathrm{M}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{M}$ e $\mathrm{N}d\mathrm{L} - \mathrm{L}d\mathrm{N}$; e quindi, quadrando e sommando, e indicando come in fine del § 395 [pag. 532] con Δ il determinante che qui figura e con D^2 il quadrato della solita matrice formata dalle prime due linee di questo determinante, avremo la formola

$$(11)\qquad (d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2 = \frac{\Delta^2\,ds^2}{\mathrm{D}^4},$$

la quale ci mostra intanto quello che più volte abbiamo detto sopra, cioè che i punti della curva — diversi da quelli che già abbiamo escluso delle tangenti stazionarie perchè portano $\mathrm{D} = 0$ — nei quali i differenziali $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$ e $d\cos\nu$ sono zero insieme, sono gli altri punti pei quali il determinante Δ è zero e viceversa; per modo che si può dire ora che i punti che restano esclusi in questi studi sul raggio di torsione sono *tutti* quelli dei piani osculatori stazionarii.

Con questa esclusione, sostituendo nella formola (7) troveremo pel raggio r di torsione

$$(12)\quad r=\pm\frac{\mathrm{D}^2}{\Delta}=\pm\frac{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2}{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)\,d^3z+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)\,d^3x+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)\,d^3y},$$

o anche

$$(13)\qquad r=\pm\frac{\{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\}\,ds^2}{(dx\,d^2y-dy\,d^2x)\,d^3z+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)\,d^3x+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)\,d^3y}$$

qualunque sia la variabile indipendente, e sotto le ipotesi che più volte abbiamo indicate, quelle cioè che nei punti che si considerano le x, y, z abbiano le derivate determinate e finite almeno fino a quelle del terz'ordine, e non si tratti di punti corrispondenti a piani osculatori stazionarii; e propriamente se si ha riguardo a quanto si disse nel § 412 si può dire che le formole stesse valgono anche nei punti dei piani osculatori stazionarii che non corrispondono al tempo stesso a punti di tangenti stazionarie (che darebbero $\mathrm{D}=0$), perchè allora le formole stesse ci danno $r=\infty$ come appunto deve essere.

416. — E ricordando ora che nel ricordato § 395 si trovò che la distanza δ dei punti della curva dal piano osculatore nei punti pei quali questo piano non è stazionario è infinitesima del terz'ordine e la sua parte principale è $\frac{1}{6}\frac{\Delta}{\mathrm{D}}$, basterà avere riguardo alle formole (9) e (12) che abbiamo trovato pei due raggi di curvatura ρ ed r per potere dire che la *detta distanza δ dei punti di una curva dai suoi piani osculatori non stazionarii ha la sua parte principale uguale a* $\frac{1}{6}\frac{ds^3}{\rho r}$.

417. — Per dare qualche applicazione di queste formole, cerchiamo i raggi di prima e seconda curvatura dell'elica.

Ammettendo che l'elica debba essere tracciata su un cilindro parallelo all'asse z, la cui sezione retta abbia per equazioni le due $x=x(\sigma)$, $y=y(\sigma)$, si vide al § 407 [pag. 545] che quando la variabile indipendente σ è l'arco di questa sezione retta, le equazioni dell'elica vengono ad esser le tre

$$x=x(\sigma)\ ,\ y=y(\sigma)\ ,\ z=m\sigma,$$

dove m è la cotangente dell'angolo che essa fa colle generatrici del cilindro, e il suo arco ds è dato dalla formola $ds=\sqrt{1+m^2}\,d\sigma$.

Da questa si deducono subito le altre

$$\begin{array}{llll} dx=x'd\sigma\ , & dy=y'd\sigma\ , & dz=m\,d\sigma\ , & ds=\sqrt{1+m^2}\,d\sigma \\ d^2x=x''d\sigma^2\ , & y^2d=y''d\sigma^2\ , & d^2z=0\ , & d^2s=0 \\ d^3x=x'''d\sigma^3\ , & d^3y=y'''d\sigma^3\ , & d^3z=0\ , & d^3s=0\ , \end{array}$$

le derivate intendendosi prese rispetto a σ; e quindi, sostituendo in una delle espressioni (9) del raggio di prima curvatura, si troverà subito pel raggio di prima curvatura ρ dell'elica

$$(14)\qquad \rho=\frac{1+m^2}{\sqrt{x''^2+y''^2}}=\frac{1}{\mathrm{sen}^2 i\sqrt{x''^2+y''^2}},$$

essendo i l'angolo che l'elica fa colle generatrici del cilindro; e sostituendo poi nella espressione (13) di r, si troverà subito pel raggio di seconda curvatura dell'elica

$$(15)\qquad r=\pm\frac{1+m^2}{m}\frac{x''^2+y''^2}{y''x'''-x''y'''}=\pm\frac{1}{\mathrm{sen}\,i\cos i}\frac{x''^2+y''^2}{y''x'''-x''y'''}.$$

Osservando poi che dall'essere $x'^2+y'^2=1$ si deducono le formole $x'x''+y'y''=0$, $x''^2+y''^2=-(x'x'''+y'y''')$, si vede subito che se nel punto che si considera nessuna delle derivate prime e seconde di x e y è uguale a zero, avremo

$$\frac{x''^2+y''^2}{y''x'''-x''y'''}=\frac{(x''^2+y''^2)y'}{y'y''x'''-x''y'y'''}=-\frac{(x''^2+y''^2)\,y'}{x'x''x'''+x''y'y'''}=\frac{y'}{x''}=-\frac{x'}{y''},$$

e quindi

$$(16)\qquad r=\pm\frac{1+m^2}{m}\frac{y'}{x''}=\mp\frac{1+m^2}{m}\frac{x'}{y''};$$

e perciò sarà anche

$$(17)\qquad r=\pm\frac{1+m^2}{m}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x''^2+y''^2}}=\pm\frac{1+m^2}{m}\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2}}=\pm\frac{\rho}{m},$$

talchè, osservando ora che questa formola potrebbe estendersi anche ai punti che abbiamo esclusi quando non siano punti di tangenti stazionarie o di piani osculatori stazionarii, si conclude che *nelle eliche cilindriche il rapporto fra i due raggi di curvatura è una quantità costante.*

Se l'elica è circolare, vale a dire se è tracciata su un cilindro retto a base circolare, allora avendosi

$$x=a\cos\frac{\sigma}{a}\ ,\ y=a\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a}\ ,\ x''=-\frac{1}{a}\cos\frac{\sigma}{a}\ ,\ y''=-\frac{1}{a}\,\mathrm{sen}\frac{\sigma}{a},$$

dove a è il raggio del cilindro, si trova subito che

$$(18)\qquad \rho=a\,(1+m^2)=\frac{a}{\mathrm{sen}^2 i}\ ,\ r=\pm\frac{a}{\mathrm{sen}\,i\cos i},$$

e si conclude quindi che *nell'elica circolare i raggi di curvatura sono ambedue costanti*.

Farò notare che si potrebbe anche dimostrare che le eliche cilindriche generali sono le sole linee nelle quali il rapporto fra i due raggi di curvatura è costante; mentre le eliche circolari sono le sole linee nelle quali i due raggi di curvatura sono ambedue costanti. Ciò, ben inteso, quando si richiede che siano finite e continue anche le derivate terze delle coordinate, ecc...

418. — Merita ora di esser notato che, colla introduzione dei raggi di curvatura ρ e r le formole che abbiamo dato ai § 403 e seg. (pag. 539 e seg.) intorno ai coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale coi tre assi si trasformano in altre che sono di applicazione continua.

Fissiamo perciò di prendere la direzione della normale principale e quella della binormale in modo che nelle formole dei citati §§ 403 e seg. si abbiano sempre i segni superiori.

Allora, qualunque sia la variabile indipendente, le formole (19), (20) e (23) del § 404, quando si tenga conto del valore di ρ dato sopra dalla formola (7) ci daranno intanto le seguenti

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}\ ,\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}\ ,\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}\ , \tag{19}$$

$$\cos\xi=\rho\frac{d\cos\alpha}{ds}\ ,\quad \cos\eta=\rho\frac{d\cos\beta}{ds}\ ,\quad \cos\zeta=\rho\frac{d\cos\gamma}{ds}\ , \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned}\cos\lambda &= \frac{\rho}{ds}(\cos\beta\, d\cos\gamma-\cos\gamma\, d\cos\beta)\ ,\\ \cos\mu &= \frac{\rho}{ds}(\cos\gamma\, d\cos\alpha-\cos\alpha\, d\cos\gamma)\ ,\\ \cos\nu &= \frac{\rho}{ds}(\cos\alpha\, d\cos\beta-\cos\beta\, d\cos\alpha)\ ,\end{aligned}\right. \tag{21}$$

le quali, nel caso particolare in cui s è la variabile indipendente, indicando con $x', y', z', x'', y'', z''$ le derivate prime e seconde di x, y, z ci daranno le altre

$$\left\{\begin{array}{lll}\cos\alpha=x'\ , & \cos\beta=y'\ , & \cos\gamma=z'\ ,\\ \cos\xi=\rho x''\ , & \cos\eta=\rho y''\ , & \cos\zeta=\rho z''\ ,\\ \cos\lambda=\rho(y'z''-z'y'')\ , & \cos\mu=\rho(z'x''-x'z'')\ , & \cos\nu=\rho(x'y''-y'x'')\ ,\end{array}\right. \tag{22}$$

essendo

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\ ; \tag{23}$$

e in queste, non figurandovi altro che il raggio di prima curvatura ρ, s'intendono esclusi soltanto i punti corrispondenti alle tangenti stazionarie.

419. — Continuando poi a lasciare indeterminata la variabile indipendente si trovano facilmente anche alcune formole notevoli pei differenziali dei coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale, intendendo che per quelle di queste formole nelle quali figura anche il raggio di torsione r siano esclusi anche i punti dei piani osculatori stazionarii.

Le (20) infatti ci danno subito le seguenti

$$d\cos\alpha=\frac{ds}{\rho}\cos\xi\ ,\quad d\cos\beta=\frac{ds}{\rho}\cos\eta\ ,\quad d\cos\gamma=\frac{ds}{\rho}\cos\zeta\ , \tag{24}$$

e così si hanno intanto i differenziali dei coseni degli angoli α, β, γ della tangente cogli assi.

Siccome poi dalle formole (32) del § 405 (pag. 543) si hanno anche le altre

$$d\cos\lambda=Q\cos\xi\ ,\quad d\cos\mu=Q\cos\eta\ ,\quad d\cos\nu=Q\cos\zeta\ ,$$

ponendo in queste per Q il suo valore $\frac{ds}{r}$ quale si ha dalla (7) di questo capitolo, si trovano subito anche le formole

$$d\cos\lambda=\frac{ds}{r}\cos\xi\ ,\quad d\cos\mu=\frac{ds}{r}\cos\eta\ ,\quad d\cos\nu=\frac{ds}{r}\cos\zeta \tag{25}$$

che sono quelle che danno i differenziali dei coseni degli angoli λ, μ, ν della binormale (o dell'asse del piano osculatore) coi tre assi.

Per trovare infine i differenziali anche dei coseni degli angoli ξ, η, ζ della normale principale coi tre assi, osserviamo che siccome le tre rette tangente, normale principale e binormale sono ortogonali fra loro, e l'asse delle x fa con queste rette (riguardate come assi coordinati) gli angoli α, ξ, λ, avremo la formola $\cos^2\alpha+\cos^2\xi+\cos^2\lambda=1$, che differenziata ci darà l'altra $\cos\alpha\, d\cos\alpha+\cos\xi\, d\cos\xi+\cos\lambda\, d\cos\lambda=0$.

Questa, risoluta rispetto a $d\cos\xi$, coll'osservare alle (24) e (25) ci conduce subito alla formola $d\cos\xi=-ds\left(\frac{\cos\alpha}{\rho}+\frac{\cos\lambda}{r}\right)$, alla quale ne corrispondono due analoghe per $\cos\eta$ e $\cos\zeta$; quindi possiamo ora affermare che i differenziali dei coseni degli angoli ξ, η, ζ della normale principale coi tre assi sono dati dalle formole seguenti

$$(26)\quad d\cos\xi = -ds\left(\frac{\cos\alpha}{\rho}+\frac{\cos\lambda}{r}\right),\ d\cos\eta = -ds\left(\frac{\cos\beta}{\rho}+\frac{\cos\mu}{r}\right),\ d\cos\zeta = -ds\left(\frac{\cos\gamma}{\rho}+\frac{\cos\nu}{r}\right),$$

e così sono trovati tutti i differenziali cercati.

Osservando poi che $\rho = \frac{ds}{d\sigma}$ e $r = \frac{ds}{d\tau}$, le formole ottenute si trasformano anche nelle seguenti

$$(27)\qquad d\cos\alpha = d\sigma\cos\xi\ ,\ d\cos\beta = d\sigma\cos\eta\ ,\ d\cos\gamma = d\sigma\cos\zeta\ ;$$

$$(28)\qquad d\cos\lambda = d\tau\cos\xi\ ,\ d\cos\mu = d\tau\cos\eta\ ,\ d\cos\nu = d\tau\cos\zeta\ ;$$

$$(29)\quad d\cos\xi = -d\sigma\cos\alpha - d\tau\cos\lambda\ ,\ d\cos\eta = -d\sigma\cos\beta - d\tau\cos\mu\ ,\ d\cos\zeta = -d\sigma\cos\gamma - d\tau\cos\nu\ ;$$

e in queste gli angoli di contingenza e di torsione $d\sigma$ e $d\tau$ si suppongono positivi, o almeno dello stesso segno di ds.

Le varie formole qui ottenute pei differenziali dei coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale sono conosciute col nome di *formole del Frenet* (*).

Le (29) poi, quadrate e sommate, conducono all'altra che porta il nome di formola di *Lancret*

$$(30)\qquad d\omega = \sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2} = ds\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}$$

che dà l'angolo infinitesimo $d\omega$ di due normali principali infinitamente vicine.

Le (27) e (28) poi divise l'una per l'altra, coll'osservare che $\frac{\rho}{r} = \frac{d\tau}{d\sigma}$ danno luogo alle altre pure notevoli

$$(31)\qquad d\cos\lambda = \frac{\rho}{r}d\cos\alpha\ ,\ d\cos\mu = \frac{\rho}{r}d\cos\beta\ ,\ d\cos\nu = \frac{\rho}{r}d\cos\gamma\,.$$

E si deve ricordare che mentre le formole (24) e (27) richiedono soltanto che siano finite e continue anche le derivate prime e seconde di x, y e z

(*) Queste formole furono dapprima attribuite al SERRET, e come del SERRET furono indicate nelle lezioni del 1877; ma effettivamente si devono al FRENET che le dette un paio d'anni prima nel 1847 (V. Nouvelles Annales de Mathématiques par GERONO et PROUHET, deuxième série, tome troisième 1864, pag. 284).

e che non si tratti di punti di tangenti stazionarie, le altre formole richiedono inoltre che siano finite e continue anche le derivate terze e che non si tratti di punti di piani osculatori stazionarii; però quando si tratterà di punti che non sono di tangenti stazionarie ma sono di piani osculatori stazionarii si potrebbe vedere facilmente che queste ultime formole continuano a sussistere facendovi $d\cos\lambda = d\cos\mu = d\cos\nu = 0$ e $r = \infty$.

420. — Non si deve poi lasciare di osservare che, sotto le condizioni che abbiamo poste, le formole di Frenet permettono di esprimere successivamente le derivate delle coordinate di una curva qualunque rispetto all'arco in funzione dei soliti coseni degli angoli della tangente, normale principale e binormale, e in funzione delle due curvature della linea e delle loro derivate; nell'ipotesi, s'intende, che le derivate che occorre di considerare siano tutte finite e continue, salvo le ultime che basterà che siano determinate e finite, nel punto che si considera ecc.

Le formole precedenti infatti ci danno subito le altre

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha\ ,\quad \dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{d\cos\alpha}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\cos\xi\ , \\[2ex] \dfrac{d^3x}{ds^3} = \cos\xi\,\dfrac{d\frac{1}{\rho}}{ds} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\cos\xi}{ds} = \cos\xi\,\dfrac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\cos\alpha}{\rho}+\dfrac{\cos\lambda}{r}\right), \end{cases}$$

e così continuando con successive derivazioni e sostituzioni si avranno tutte quelle derivate di x che può occorrere di considerare espresse per i soliti coseni, per ρ, r e per le derivate di ρ e r. Formole analoghe si hanno per y e z.

421. — Mantenendo ora per la direzione della normale principale in un punto M di una curva quella che siamo venuti a stabilire nel § 418, e a partire da M su questa direzione prendendo una lunghezza uguale al valore positivo ρ del raggio di curvatura corrispondente, si otterrà un punto C che è quello che dicesi *centro di curvatura*, perchè, facendo centro in esso e con un raggio uguale a ρ descrivendo un cerchio nel piano osculatore, questo cerchio sarà tangente alla curva nel punto M che si considera, e avrà la stessa curvatura della curva.

Il cerchio così descritto si dice perciò *cerchio di curvatura* della curva.

Le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro di curvatura C relativo al punto M si avranno dunque dalle formole

$$(33)\qquad x_1 = x + \rho\cos\xi\ ,\quad y_1 = y + \rho\cos\eta\ ,\quad z_1 = z + \rho\cos\zeta\,,$$

le quali, quando si prenda l'arco per variabile indipendente e vi si sostituiscano per $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ e ρ i loro valori (22) e (23), si riducono alle altre

$$(34)\quad x_1=x+\frac{x''}{x''^2+y''^2+z''^2}\,,\quad y_1=y+\frac{y''}{x''^2+y''^2+z''^2}\,,\quad z_1=z+\frac{z''}{x''^2+y''^2+z''^2}\,;$$

e, com'è naturale, queste formole valgono per tutti i punti della curva pei quali le derivate prime e seconde di x, y, z sono finite e continue, e nei quali le tangenti non sono stazionarie.

422. — Il luogo dei centri di curvatura (x_1, y_1, z_1) di una curva costituisce come nel caso delle curve piane una nuova curva che viene detta *linea dei centri di curvatura*, e per le sue equazioni possono prendersi evidentemente le (33) o le (34).

Questa linea però nelle curve gobbe presenta una differenza notevole dalla linea dei centri di curvatura nelle curve piane, poichè si può dimostrare che, fatta solo eccezione pei punti corrispondenti ai piani osculatori stazionarii quando ve ne siano, le normali principali di una curva gobba non sono mai tangenti alla linea dei centri di curvatura corrispondente.

Se si osserva infatti che colla differenziazione le (33) danno luogo alle formole seguenti

$dx_1=dx+\rho d\cos\xi+\cos\xi d\rho$, $dy_1=dy+\rho d\cos\eta+\cos\eta d\rho$, $dz_1=dz+\rho d\cos\zeta+\cos\eta d\rho$,

quadrando e sommando, coll'avere riguardo alle (26) e alle solite formole $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\cos\beta$, $\frac{dz}{ds}=\cos\gamma$, si trova subito per l'arco σ_1 della linea dei centri di curvatura la formola notevole

$$(35)\qquad d\sigma_1^2=d\rho^2+\frac{\rho^2}{r^2}ds^2\,,$$

mentre moltiplicandole per $\cos\xi$, $\cos\eta$ e $\cos\zeta$ si ottiene l'altra

$$\cos\xi dx_1+\cos\eta dy_1+\cos\zeta dz_1=d\rho\,;$$

e da questa dividendo per $d\sigma_1$ si trova subito per l'angolo θ della tangente in un punto alla linea dei centri di curvatura colla normale principale che passa per quel punto l'altra formola pure notevole

$$(36)\qquad \cos\theta=\frac{d\rho}{d\sigma_1}=\frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2+\frac{\rho^2}{r^2}ds^2}}\,,$$

la quale, per essere ρ finito perchè, come sempre, noi supponiamo di escludere i punti delle tangenti stazionarie, ci mostra che θ non può essere zero

e le due rette non possono coincidere altro che quando sia $r=\infty$ cioè pei punti di quei piani osculatori stazionarii che ora si ammette che possano esservi (*).

423. — La linea dei centri di curvatura delle linee gobbe ha anche altre proprietà notevoli, poichè vedremo, per es. che ogni suo punto, o, il che è lo stesso, il centro di curvatura in una linea qualunque è il limite del punto d'incontro della normale principale col piano normale nei punti vicinissimi a quello che si considera, ed è anche il limite del punto di incontro del piano osculatore e della retta che risulta dalla intersezione del piano normale corrispondente col piano normale in punti vicinissimi, o, in altri termini, all'infuori di infinitesimi di ordine superiore, il centro di curvatura è il punto d'incontro della normale principale col piano normale infinitamente vicino, ed è anche il punto d'incontro del piano osculatore colla retta d'intersezione di due piani normali infinitamente vicini, cioè colla retta che dicesi *retta polare* o *asse del piano osculatore* e che, come vedremo, è parallela alla binormale, ecc.

Però, riservandoci a dare in seguito queste ed altre proprietà del centro di curvatura di una linea, è utile conoscere fin d'ora come esso si trovi situato rispetto ai punti della curva vicinissimi a quello che si considera, ciò che equivale a determinare quale delle due direzioni della normale principale è stata presa sopra come positiva al § 417.

Immaginiamo perciò condotto un piano P per la tangente alla curva data e per la binormale nel punto che si considera M, cioè quel piano che dicesi *piano rettificante* (§ 404 [pag. 541]), e pel centro di curvatura (33) sia condotto un altro piano P′ parallelo a P. Sarà facile vedere che la curva in un piccolo intorno di M sarà tutta situata fra i due piani P e P′; o in altri termini la direzione della normale principale che è stata presa come positiva verrà ad esser quella che partendo da M va verso la parte di P dalla quale, per le nostre ipotesi, verranno a trovarsi tutti i punti della curva vicinissimi ad M.

Osserviamo infatti che la equazione del piano P′ che deve passare pel punto $C(x_1, y_1, z_1)$ ed essere perpendicolare alla normale principale, a causa delle (33) sarà evidentemente la seguente

$$(37)\qquad (X-x)\cos\xi+(Y-y)\cos\eta+(Z-z)\cos\zeta=\rho\,;$$

e quindi la distanza δ del punto $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ della curva da

(*) Quando r sia infinito in ogni punto della curva questa curva è piana, e allora le formole date sopra si riducono, come è naturale, a quelle delle sviluppate delle curve piane.

questo piano sarà $\delta=\rho-(\Delta x\cos\xi+\Delta y\cos\eta+\Delta z\cos\zeta)$, mentre quella del punto $\mathrm{M}(x, y, z)$ è evidentemente ρ.

Ora prendendo per semplicità l'arco s della curva come variabile indipendente e indicando con h l'accrescimento che viene a ricevere s quando si passa da M in M', avremo

$$\Delta x=\frac{dx}{ds}h+\frac{d^2x}{ds^2}\frac{h^2}{2}+\sigma_1=\cos\alpha\, h+\frac{d\cos\alpha}{ds}\frac{h^2}{2}+\sigma_1,$$

$$\Delta y=\cos\beta\, h+\frac{d\cos\beta}{ds}\frac{h^2}{2}+\sigma_2,$$

$$\Delta z=\cos\gamma\, h+\frac{d\cos\gamma}{ds}\frac{h^2}{2}+\sigma_3,$$

essendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ quantità che in forza delle nostre ipotesi sono infinitesime di ordine superiore a quello di h^2, quindi servendosi delle (24) e sostituendo nel valore di δ, si troverà $\delta=\rho-\frac{h^2}{2\rho}+\sigma$, essendo σ una nuova quantità che è anch'essa di ordine superiore al secondo; e questa formola, mostrandoci che pei punti M' abbastanza vicini ad M si ha $\delta<\rho$, prova evidentemente quanto abbiamo detto sopra.

È da notare che questa formola mostra anche che i punti della curva infinitamente vicini a quello che si considera (sotto le solite ipotesi) sono distanti dal piano rettificante P per una quantità di second'ordine la cui parte principale è $\frac{ds^2}{2\rho}$ o $\frac{h^2}{2\rho}$.

XXXI.

Estensione degli studii dei capitoli precedenti (*)

424. — A complemento degli studii che abbiamo fatto sui piani osculatori, sulle normali principali e binormali e sulle due curvature delle linee, troviamo ora opportuno di esporre le considerazioni seguenti che valgono per qualsiasi punto della curva pel quale possa dirsi certa la esistenza della tangente. Esse comprendono quindi anche gli studii che abbiamo fatto, e più specialmente hanno interesse per quei punti che potrebbero dirsi punti *critici* delle linee, nei quali, colla variabile indipendente scelta, i differenziali delle coordinate fino a quelli di un certo ordine $i-1$ inclusive sono tutti uguali a zero, mentre dei tre d^ix, d^iy, d^iz di ordine i uno almeno è diverso da zero, come è necessario che avvenga (§ 364 [pag. 494]) per potere essere sicuri che in quei punti esiste la tangente.

Supponiamo perciò in modo generale che x, y, z siano le coordinate di un punto di una curva espresse in funzione di una variabile indipendente ω, e queste funzioni nel punto che si considera M abbiano le derivate determinate e finite, e quindi anche i differenziali, almeno fino a quell'ordine superiore ad i che occorrerà di considerare.

Allora la tangente alla curva nel punto M esisterà (§ 364 [pag. 494]) e avrà le equazioni seguenti

$$\frac{X-x}{d^ix}=\frac{Y-y}{d^iy}=\frac{Z-z}{d^iz}, \tag{1}$$

e ripetendo le considerazioni dei §§ 393 e 394 (pag. 528 e seg.) si vede che quando formando le matrici

$$\left\| \begin{matrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^sx & d^sy & d^sz \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

(*) Questo capitolo non si trova nelle Lezioni autografate del 1877.

coi differenziali di ordine i e con quelli di uno stesso ordine successivo s corrispondenti a $s=i+1$, $i+2$,... si finirà per arrivare ad una matrice

(3) $$\left\| \begin{matrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \end{matrix} \right\|$$

che sia di caratteristica 2, esisterà anche un piano osculatore che sarà quello di equazione

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

(4) $$(X-x)(d^i y\, d^k z - d^i z\, d^k y) + (Y-y)(d^i z\, d^k x - d^i x\, d^k z) + (Z-z)(d^i x\, d^k y - d^i y\, d^k x) = 0;$$

e dovremo quindi ammettere che ci sia la indicata matrice (3) di caratteristica 2 se vorremo essere sicuri della esistenza del piano osculatore della curva nel detto punto M.

Completando poi la stessa matrice (3) coll'aggiungere una linea di differenziali di x, y, z degli ordini $k+1$, $k+2$,... che seguono k, se si finirà per trovare un determinante

(5) $$\Delta_{i,k,l} = \begin{vmatrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \\ d^l x & d^l y & d^l z \end{vmatrix}$$

che sia diverso da zero in M (*), allora la parte principale della distanza del piano osculatore dai punti della curva nell'intorno di M sarà $\dfrac{1}{\pi(l)} \dfrac{\Delta_{i,k,l}}{D_{i,k}}$, quando s'indichi con $D^2_{i,k}$ il quadrato della matrice (3) che abbiamo supposta di caratteristica (2); e i casi più specialmente contemplati nei due capitoli precedenti saranno quelli di $i=1$, $k=2$, $l \geq 3$ pei quali trovammo anche che

---

(*) Notiamo che, colle condizioni poste per ciò che riguarda i differenziali di x, y, z e le matrici (2) e (3), nel punto M tutte le matrici

(λ) $$\begin{vmatrix} d^\alpha x & d^\alpha y & d^\alpha z \\ d^\beta x & d^\beta y & d^\beta z \end{vmatrix},$$

dove α e β sono inferiori a k, sono di caratteristica inferiore a 2; e sotto le stesse condizioni unite all'altra relativa al determinante (5) ogni determinante

(μ) $$\begin{vmatrix} d^\alpha x & d^\alpha y & d^\alpha z \\ d^\beta x & d^\beta y & d^\beta z \\ d^\gamma x & d^\gamma y & d^\gamma z \end{vmatrix}$$

dove α, β e γ sono inferiori a l sarà uguale a zero.

Supponiamo infatti nella matrice (λ) $\alpha < \beta$, e osserviamo che se $\alpha < i$ la prima linea della matrice stessa sarà zero, e quindi basterà considerare il caso in cui $\alpha \geq i$.

Allora, poichè $d^i x, d^i y$ e $d^i z$ non sono tutti zero e la matrice (3) è la prima delle matrici (2) che col farvi $s=i+1$, $i+2$,... risulta di caratteristica 2, è certo che se per es. $d^i x$ fosse zero nel punto M lo stesso dovrebbe avvenire pei differenziali seguenti $d^{i+1} x$, $d^{i+2} x$,... della x fino a quello dell'ordine $k-1$ inclusive, altrimenti fra le indicate matrici (2) se ne troverebbe una di caratteristica 2 prima di arrivare a quella corrispondente a $s=k$.

Considerando quindi per es. il determinante

(ν) $$\begin{vmatrix} d^\alpha x & d^\alpha y \\ d^\beta x & d^\beta y \end{vmatrix}$$

che si ha dalla matrice (λ), con $i \leq \alpha < \beta < k$, se sarà $d^i x = 0$ o $d^i y = 0$ avremo anche $d^\alpha x = d^\beta x = 0$ o $d^\alpha y = d^\beta y = 0$, e quindi esso sarà certamente zero; mentre se per es. $d^i x$ non sarà zero, allora poichè per le nostre ipotesi sono zero i due determinanti

$$\begin{vmatrix} d^i x & d^i y \\ d^\alpha x & d^\alpha y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^i x & d^i y \\ d^\beta x & d^\beta y \end{vmatrix},$$

e quindi si hanno le due equazioni

$$d^i x\, d^\alpha y - d^i y\, d^\alpha x = 0, \quad d^i x\, d^\beta y - d^i y\, d^\beta x = 0,$$

se ne deduce subito che il determinante (ν) è zero; e poichè lo stesso può dirsi per gli altri due determinanti del second'ordine della matrice (λ), resta così dimostrato quanto abbiamo enunciato intorno a questa matrice.

Con ragionamenti simili si dimostra anche quanto abbiamo detto pel determinante (μ), perchè evidentemente venendo ora zero in ogni caso i tre determinanti

$$\begin{vmatrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \\ d^\alpha x & d^\alpha y & d^\alpha z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \\ d^\beta x & d^\beta y & d^\beta z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \\ d^\gamma x & d^\gamma y & d^\gamma z \end{vmatrix},$$

si hanno le tre equazioni

$$A\, d^\alpha x + B d^\alpha y + C d^\alpha z = 0, \quad A d^\beta x + B d^\beta y + C d^\beta z = 0, \quad A d^\gamma x + B d^\gamma y + C d^\gamma z = 0,$$

dove A, B, C sono i minori del second'ordine della matrice (3) che non sono tutti zero, e quindi il determinante di queste equazioni che è appunto il determinante (μ) sarà zero nel punto M per tutti i valori di α, β e γ inferiori a l.

quando $l>3$ il raggio di torsione r è infinito, come trovammo pure che se insieme ad $i=1$ si ha $k>2$ sarà infinito il raggio di prima curvatura ρ, e se questo avverrà lungo un tratto della linea questa sarà composta di una o più parti rettilinee.

425. — Noi studieremo ora il caso generale testè indicato; ma prima, fermandoci per un momento alla considerazione di quelle linee speciali (che sono però quelle che più comunemente si presentano) che nell'intorno di un loro punto M hanno il carattere di linee *analitiche*, ricorderemo che, come già dimostrammo al § 364 [pag. 494], per esse nel detto punto M è sempre soddisfatta la condizione che assicura della esistenza della loro tangente; e ora dimostreremo che, quando la linea che si considera è analitica senza essere rettilinea negli intorni comunque piccoli dello stesso punto, allora è soddisfatta anche la condizione che assicura della esistenza di un piano osculatore completamente determinato nel punto stesso.

In altri termini si dimostrerà dunque che *le linee che in un intorno comunque piccolo di un punto* M *sono analitiche e non sono rettilinee, in quel punto oltre alla tangente ammettono sempre anche il piano osculatore;* e oltre a ciò poi si potrà anche vedere che per le stesse linee, *quando non siano piane in quell' intorno*, esisterà sempre anche un determinante $\Delta_{i,k,l}$ che nello stesso punto M non sarà zero.

Osserviamo infatti che trattandosi di una linea che è analitica nell' intorno del nostro punto M nel quale supporremo che ω abbia il valore ω_0, per quanto dimostrammo nel ricordato § 364 si dovrà finire per trovare un ordine i pel quale i tre differenziali d^ix, d^iy e d^iz o le tre derivate $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ e $z^{(i)}$ non siano contemporaneamente zero nel punto M; e indicando con $x_0^{(i)}$, $y_0^{(i)}$, $z_0^{(i)}$ i valori di queste derivate nello stesso punto, se ad es. $x_0^{(i)}$ non sarà zero, le due funzioni $x_0^{(i)}y-y_0^{(i)}x$, $x_0^{(i)}z-z_0^{(i)}x$ negli intorni sufficientemente piccoli di M non saranno identicamente zero ma, se nel punto M_0 o ω_0 la matrice (2) per alcuni valori di s sarà di caratteristica uno, le derivate di questi ordini s di quelle funzioni saranno zero nel punto M perchè esse all'infuori del fattore $d\omega^{s+i}$ corrisponderanno a due determinanti della matrice stessa (2).

Se dunque questa matrice, che per la nostra ipotesi è di caratteristica 1 per $s\leq i$, fosse *sempre* di caratteristica 1 anche per $s>i$, le funzioni ora indicate avrebbero zero le loro derivate di qualunque ordine nel punto M, e quindi, essendo anch'esse come x, y, z sviluppabili in serie di Taylor, sarebbero di necessità due costanti γ_1 e γ_2.

Per la nostra linea dunque nell'intorno di M sarebbero soddisfatte le due equazioni $x_0^{(i)}y-y_0^{(i)}x=\gamma_1$, $x_0^{(i)}z-z_0^{(i)}x=\gamma_2$ che rappresentano due piani distinti, e quindi la stessa linea in quell'intorno verrebbe a trovarsi alla

intersezione di questi due piani, e conseguentemente sarebbe rettilinea; e questo evidentemente dimostra quanto abbiamo enunciato in quanto, sotto le condizioni poste, assicura la esistenza del piano osculatore.

Similmente poi, quando avvenisse che pel punto M i determinanti

$$\begin{vmatrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^kx & d^ky & d^kz \\ d^sx & d^sy & d^sz \end{vmatrix},$$

che per $s\leq k$ sono sempre zero in seguito alle nostre ipotesi, fossero zero anche per qualunque valore di s superiore a k, la funzione di primo grado in x, y, z

$$\begin{vmatrix} x_0^{(i)} & y_0^{(i)} & z_0^{(i)} \\ x_0^{(k)} & y_0^{(k)} & z_0^{(k)} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

senza essere identicamente zero negli intorni del punto M avrebbe le sue derivate sempre zero in questo punto, essendo ancora sviluppabile in serie di Taylor negli stessi intorni; quindi essa sarebbe una costante γ, e la nostra curva in questi intorni sarebbe tutta situata nel piano rappresentato dalla equazione che si ottiene uguagliando a γ il determinante precedente; e questo completa la dimostrazione che volevamo fare.

426. — A queste osservazioni aggiungiamo anche il teorema seguente che è pure notevole: *Se in un punto* M *di una curva che corrisponde al valore* ω_0 *della variabile indipendente le coordinate* x, y, z *ammettono le derivate almeno fino a un certo ordine, e considerando i loro differenziali degli ordini successivi* 1, 2, 3... *si finisce per arrivare a un ordine* i *pel quale essi non sono più tutti zero, allora*

1.° *se vi sarà una matrice*

$$(6)\qquad \begin{Vmatrix} d^jx & d^jy & d^jz \\ d^{j+1}x & d^{j+1}y & d^{j+1}z \end{Vmatrix},$$

con $j\leq i$, *che sia di caratteristica inferiore a* 2 *in tutto un intorno di* ω_0, *la curva in un certo intorno sufficientemente piccolo di* M *sarà rettilinea:*

2.° *se considerando successivamente le matrici* (2) *per* $s=i+1$, $i+2$,... *si arriverà a trovarne una corrispondente a* $s=k$

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^kx & d^ky & d^kz \end{Vmatrix},$$

con $k>i$, che nel punto ω_0 sia di caratteristica 2, allora quando vi sia un determinante

$$\begin{Vmatrix} d^jx & d^jy & d^jz \\ d^{j+1}x & d^{j+1}y & d^{j+1}z \\ d^{j+2}x & d^{j+2}y & d^{j+2}z \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

con $j\leq i$, che sia zero in tutto un intorno di ω_0, la curva in un certo intorno sufficientemente piccolo di M sarà piana. (*)

Nel primo caso infatti se $j=i$ uno almeno dei tre differenziali della prima linea della matrice (6), per es. d^jx, sarà diverso da zero in ω_0 e quindi, a causa della continuità, si manterrà diverso da zero anche in tutto un intorno sufficientemente piccolo di ω_0; e se $j<i$, siccome delle tre derivate $x^{(i)}, y^{(i)}$ e $z^{(i)}$ una almeno per es. $x^{(i)}$ è diversa da zero per $\omega=\omega_0$, per l'osservazione fatta nella nota alle pag. 494 e 495 vi sarà pure un intorno sufficientemente piccolo di ω_0 in ogni punto del quale, all'infuori del punto ω_0, il differenziale d^jx sarà diverso da zero.

Ne segue che pei punti di uno stesso intorno sufficientemente piccolo di M (questo punto M al più escluso) i due determinanti $d^jx\, d^{j+1}y-d^jy\, d^{j+1}x$ e $d^jx\, d^{j+1}z-d^jz\, d^{j+1}x$ saranno zero e il differenziale d^jx sarà diverso da zero, quindi nello stesso intorno di M (M ancora al più escluso) avremo $d\dfrac{d^jy}{d^jx}=0$, $d\dfrac{d^jz}{d^jx}=0$, e per conseguenza $d^jy=\gamma\, d^jx$, $d^jz=\gamma_1 d^jx$, ovvero $y^{(j)}=\gamma x^{(j)}$, $z^{(j)}=\gamma_1 x^{(j)}$ con γ e γ_1 costanti; e poichè queste formole sussisteranno per tutti i punti dello stesso intorno vicini quanto si vuole a ω_0, e per $\omega=\omega_0$ le derivate $x^{(j)}$, $y^{(j)}$, $z^{(j)}$ sono finite e continue, evidentemente le formole stesse sussisteranno anche per $\omega=\omega_0$ e quindi in tutto il detto intorno di M (anche ω_0 ora incluso).

Da questa si dedurranno subito le altre $y^{(j-1)}=\gamma x^{(j-1)}+\gamma'$, $z^{(j-1)}=\gamma_1 x^{(j-1)}+\gamma'_1$, con γ' e γ'_1 nuove costanti; e poichè per le nostre ipotesi per $\omega=\omega_0$ le derivate $x^{(j-1)}$, $y^{(j-1)}$, $z^{(j-1)}$ sono tutte zero, queste nuove costanti saranno zero, e avremo quindi le formole $y^{(j-1)}=\gamma x^{(j-1)}$, $z^{(j-1)}=\gamma_1 x^{(j-1)}$.

Al modo stesso troveremo le altre $y^{(j-2)}=\gamma x^{(j-2)}$, $z^{(j-2)}=\gamma_1 x^{(j-2)}$; e quindi così continuando giungeremo infine alle due $y=\gamma x+\delta$, $z=\gamma_1 x+\delta_1$ le quali ci mostrano che nell'intorno considerato di M la curva è situata sui

(*) Questo teorema nella sua prima parte estende quello che dimostrammo al § 397 a pag. 533, e nella seconda parte dimostra, generalizzandolo, quello al quale accennammo in fine del § 398 a pag. 534.

due piani $y=\gamma x+\delta$, $z=\gamma_1 x+\delta_1$, e quindi essa è la retta intersezione di questi piani; e così è completamente dimostrata la prima parte del teorema enunciato.

427. — Con tutta facilità si dimostra anche la seconda parte dello stesso teorema, ma per questo gioverà premettere due osservazioni generali sui determinanti che si troveranno utili anche per ciò che segue. Queste osservazioni sono le seguenti.

a) Essendo u e v, u_1 e v_1 quattro funzioni, se in un punto ω_0 esse sono differenziabili almeno fino a certi ordini, e in questo punto le due prime u e v e i loro differenziali sono zero fino a quelli di un certo ordine $p-1$ mentre dei due d^pu e d^pv uno almeno è diverso da zero, e al tempo stesso in quel punto ω_0 sono zero i determinanti $\begin{vmatrix} d^pu & d^pv \\ d^{p+r}u & d^{p+r}v \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} d^pu & d^pv \\ d^ru_1 & d^rv_1 \end{vmatrix}$ per tutti i valori $0,1,2\ldots,p_1-1$ di r, allora nello stesso punto ω_0 il determinante

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

e i suoi differenziali (o derivate) fino a quelli dell'ordine $p+p_1-1$ inclusive saranno tutti zero, e il differenziale d'ordine $p+p_1$ sarà uguale a

$$(p+p_1)_p \begin{vmatrix} d^pu & d^pv \\ d^{p_1}u_1 & d^{p_1}v_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d^{p+p_1}u & d^{p+p_1}v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

essendo $(p+p_1)_p$ il solito coefficiente binomiale.

Si osservi infatti che, per la nota formola di Leibnitz sui differenziali dei prodotti, ogni differenziale d'ordine t del determinante (9) sarà una somma di termini tutti della forma

$$t_\alpha \begin{vmatrix} d^\alpha u & d^\alpha v \\ d^\beta u_1 & d^\beta v_1 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

dove $\alpha+\beta=t$ e t_α è il coefficiente binomiale; e quindi poichè nel punto ω_0 per $\alpha<p$ i differenziali $d^\alpha u$ e $d^\alpha v$ sono zero, non ci resteranno altro che i determinanti nei quali $\alpha\geq p$; per il che riferendoci al caso che a noi più interessa di $t\leq p+p_1$, insieme ad $\alpha\geq p$ dovremo avere naturalmente $\alpha<p+p_1$ e $\beta<p_1$ se $t<p+p_1$, e $\alpha\leq p+p_1$ e $\beta\leq p_1$ se $t=p+p_1$.

Ora per le nostre ipotesi, con $\alpha < p + p_1$ e $\beta < p_1$ i due determinanti

$$\begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^\alpha u & d^\alpha v \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^\beta u_1 & d^\beta v_1 \end{vmatrix}$$

sono zero, cioè si hanno le formole

$$d^p v\, d^\alpha u - d^p u\, d^\alpha v = 0 \;, \quad d^p v\, d^\beta u_1 - d^p u\, d^\beta v_1 = 0 \;,$$

senza che siano zero ambedue i differenziali $d^p u$ e $d^p v$; quindi in questo caso anche il determinante (11) sarà zero, e questo mostra intanto che nel punto ω_0 i differenziali (o le derivate) di ordine t inferiore a $p + p_1$ del determinante (9) saranno tutti zero.

Se poi $t = p + p_1$, dovendo essere allora $\alpha + \beta = p + p_1$ e $\alpha \geq p$, evidentemente, per la osservazione che ora abbiamo fatta sui determinanti (11) nel caso di $p \leq \alpha < p + p_1$ e $\beta < p_1$, non rimarranno altro che il determinante pel quale $\alpha = p$ e $\beta = p_1$ e quello pel quale $\alpha = p + p_1$, $\beta = 0$, e con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Di qui segue dunque anche che, se la somma (10) nel punto ω_0 sarà diversa da zero, tale sarà pure la derivata d'ordine $p + p_1$ del determinante (9); e quindi per la osservazione fatta nella ricordata nota delle pag. 494-95 si può anche affermare che *allora sotto le condizioni poste questo determinante e le sue prime $p + p_1 - 1$ derivate mentre saranno zero nel punto ω_0 saranno necessariamente diverse da zero negli altri punti di un intorno sufficientemente piccolo di ω_0.*

In particolare sotto le condizioni poste nel § 424 pei differenziali delle coordinate x, y, z del punto M della curva che si considera si può dire subito intanto che i determinanti

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} d^j x & d^j y \\ d^{j+1} x & d^{j+1} y \end{vmatrix} \;, \quad \begin{vmatrix} d^j y & d^j p \\ d^{j+1} y & d^{j+1} z \end{vmatrix} \;, \quad \begin{vmatrix} d^j z & d^j x \\ d^{j+1} z & d^{j+1} x \end{vmatrix} \;,$$

nei quali $0 < j \leq i$ e $2j + 1 < i + k$ e si suppone naturalmente che se $k = i + 1$ non sia $j = i$, sono tutti zero insieme ai loro differenziali nel punto ω_0 fino a quelli dell'ordine $i + k - (2j + 2)$ inclusive; mentre pei loro differenziali dell'ordine seguente $i + k - (2j + 1)$ per quanto abbiamo dimostrato ora in generale sarà facile vedere che uno almeno è diverso da zero in tutto un intorno sufficientemente piccolo dello stesso punto se in esso la matrice (3) è di caratteristica 2; e i determinanti di second'ordine di questa matrice saranno i differenziali dell'ordine $i + k - (2j + 1)$ dei determinanti precedenti all'infuori

del fattore numerico $k - i$ quando $j = i - 1$, e dell'altro $(i + k - 2j - 1)_{i-j}$ quando $j < i - 1$ o $j = i$.

Si osservi infatti che pel primo dei determinanti precedenti la derivata del detto ordine $i + k - (2j + 1)$ a causa della (10) sarà data dalla somma

$$(i + k - 2j - 1)_{i-j} \begin{vmatrix} d^i x & d^i y \\ d^k x & d^k y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d^{i+k-(j+1)} x & d^{i+k-(j+1)} y \\ d^{j+1} x & d^{j+1} y \end{vmatrix} ,$$

e due somme simili si avranno per gli altri due determinanti.

Di qui si vede che se $j + 1 = i$ il secondo termine si riduce al determinante che figura nel primo col segno cangiato, e quindi la somma stessa si riduce a questo determinante moltiplicato per $k - i$.

Se poi $j < i - 1$ il secondo termine della somma stessa e così quelli delle somme simili corrispondenti alle derivate degli altri due determinanti (12) saranno zero perchè allora $d^{j+1} x = d^{j+1} y = d^{j+1} z = 0$; e per quanto si disse nella nota al § 424 [pag. 565 e seg.] lo stesso avverrà se $j = i$ senza che sia $k = i + 1$; e così resta dimostrato pienamente quanto abbiamo detto.

b). La seconda osservazione che ora abbiamo bisogno di fare è la seguente. Si considerino le due matrici

$$(13) \qquad \begin{Vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \end{Vmatrix} \;, \quad \begin{Vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \end{Vmatrix} ,$$

nelle quali le quantità che vi figurano possono anche essere differenziali o composte con differenziali di certe funzioni; e con due determinanti della prima matrice e coi due corrispondenti della seconda formiamo il determinante

$$\begin{vmatrix} uv_1 - u_1 v & UV_1 - U_1 V \\ vw_1 - v_1 w & VW_1 - V_1 W \end{vmatrix} .$$

Sviluppandolo si potrà porre sotto la forma

$$V[(uv_1 - u_1 v) W_1 + (vw_1 - v_1 w) U_1] - V_1[(uv_1 - u_1 v) W + (vw_1 - v_1 w) U];$$

e aggiungendo e togliendo il prodotto $VV_1(wu_1 - w_1 u)$ si troverà subito la formola

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} uv_1 - u_1 v & UV_1 - U_1 V \\ vw_1 - v_1 w & VW_1 - V_1 W \end{vmatrix} = V \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ U_1 & V_1 & W_1 \end{vmatrix} - V_1 \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ U & V & W \end{vmatrix} ,$$

che ci sarà utile anche in seguito, e che nel caso particolare di $U = u$, $V = v$,

$W=w$ dà luogo all'altra

$$\begin{vmatrix} uv_1-u_1v & uV_1-vU_1 \\ vw_1-v_1w & vW_1-wV_1 \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ U_1 & V_1 & W_1 \end{vmatrix};$$

che cambiandovi U_1, V_1, W_1 in du_1, dv_1, dw_1 ci dà anche la seguente

$$\begin{vmatrix} uv_1-u_1v & udv_1-vdu_1 \\ vw_1-v_1w & vdw_1-wdv_1 \end{vmatrix} = v \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ du_1 & dv_1 & dw_1 \end{vmatrix}$$

che risulta anche come caso particolare da una nota proprietà dei determinanti.

Da questa poi quando si suppone che la prima delle matrici (13) sia la (6), e si pone

$$(15) \quad a=d^jx\,d^{j+1}y-d^jy\,d^{j+1}x\ ,\quad b=d^jy\,d^{j+1}z-d^jz\,d^{j+1}y\ ,\quad c=d^jz\,d^{j+1}x-d^jx\,d^{j+1}z\,,$$

si ottiene la formola

$$(16) \qquad adb-bda=d^jy \begin{vmatrix} d^jx & d^jy & d^jz \\ d^{j+1}x & d^{j+1}y & d^{j+1}z \\ d^{j+2}x & d^{j+2}y & d^{j+2}z \end{vmatrix},$$

che è quella che a noi occorreva per la dimostrazione della seconda parte del teorema del paragrafo precedente.

428. — Questa dimostrazione si fa subito valendosi dei risultati che abbiamo ottenuti.

Si supponga perciò che nelle ultime formole (15) e (16) j sia il numero che figura nell'enunciato della seconda parte del teorema del § 426 che ancora abbiamo da dimostrare; se ne dedurrà intanto a causa della (16) che in tutto l'intorno di ω_0 dovrà essere $adb-bda=0$, e poichè possiamo sempre mutare x, y, z in y, z, x, ecc. dovrà essere anche $bdc-cdb=0$ e $cda-adc=0$.

Ora poichè la matrice (7) nel punto ω_0 è di caratteristica 2, uno almeno dei suoi tre determinanti per es. il determinante $\begin{vmatrix} d^ix & d^iy \\ d^kx & d^ky \end{vmatrix}$ sarà diverso da zero nello stesso punto, e quindi lo stesso dovrà allora avvenire almeno per uno dei due differenziali che vi figurano d^ix e d^iy, per es. per d^ix.

Per questo e perchè $j \leq i$, in seguito a quanto dimostrammo in fine della prima parte del paragrafo precedente, almeno il primo a dei determinanti (15) se anche sarà zero nel punto ω_0 sarà sempre diverso da zero in ogni altro

punto di un intorno sufficientemente piccolo di ω_0, come avverrà anche per d^jx; quindi in questo intorno (il punto ω_0 al più escluso) avremo $\dfrac{adc-cda}{a^2}=0$ ovvero $d\dfrac{c}{a}=0$.

Ne segue che nello stesso intorno (ω_0 al più escl.) sarà $c=\gamma a$, ovvero

$$d^jz\,d^{j+1}x-d^jx\,d^{j+1}z=\gamma\,(d^jx\,d^{j+1}y-d^jy\,d^{j+1}x)$$

essendo γ una costante che *rimane la stessa* in ogni intervallo compreso in quell'intorno che non termini al punto ω_0 ma che con uno dei suoi estremi si accosti ad ω_0 quanto si vuole.

Da questa poi dividendo per $(d^jx)^2$ — il che può sempre farsi perchè per ora si esclude il punto ω_0 — avremo l'altra $d\dfrac{d^jz}{d^jx}=-\gamma\, d\dfrac{d^jy}{d^jx}$ che ci darà $\dfrac{d^jz}{d^jx}=-\gamma\dfrac{d^jy}{d^jx}+\gamma_1$ ovvero $z^{(j)}=-\gamma y^{(j)}+\gamma_1 x^{(j)}$, essendo γ_1 un'altra costante, e questa pure varrà in ogni intorno sufficientemente piccolo di ω_0 (questo punto ω_0 ancora al più escluso).

D'altra parte osservando che le derivate di x, y, z fino a quelle dell'ordine $j+1$ almeno sono finite e continue in ω_0, necessariamente questa formola dovrà valere anche per ω_0 poichè essa vale per valori di ω vicini quanto si vuole a ω_0; dunque essa varrà in tutti gli intorni sufficientemente piccoli di ω_0 (ω_0 ora incluso).

Ne segue che avremo anche $z^{(j-1)}=-\gamma y^{(j-1)}+\gamma_1 x^{(j-1)}+\gamma_2$ essendo γ_2 una nuova costante per la quale però si vede subito che dovrà essere presa senz'altro uguale allo zero perchè in ω_0 le derivate $x^{(j-1)}, y^{(j-1)}, z^{(j-1)}$ sono tutte zero; quindi sarà $z^{(j-1)}=-\gamma y^{(j-1)}+\gamma_1 x^{(j-1)}$; e ora così continuando successivamente si vede che nello stesso intorno di ω_0 avremo di necessità $z=-\gamma y+\gamma_1 x+\delta$ essendo δ un'altra costante, e così anche la seconda parte del nostro teorema è completamente dimostrata.

429. — Notiamo che dal processo di dimostrazione tenuto risulta pure che il teorema dimostrato continuerebbe a sussistere in tutte e due le sue parti anche se, sapendo che nel punto M le derivate di ordine inferiore a i di x, y, z sono tutte zero, e che negli intorni dello stesso punto M la matrice (6) è di caratteristica inferiore a 2 o è zero il determinante (8), non si sapesse nulla neppure per l'esistenza delle derivate di ordine superiore a quelle che figurano nella detta matrice o nel detto determinante, purchè però per la prima parte del teorema si sapesse che una delle derivate di ordine p di x, y, z per es. la $x^{(p)}$ *non è zero* nel punto M *o almeno non prende infinite volte il valore zero nelle vicinanze di* M, e per la seconda parte del

teorema si sapesse anche che almeno per uno dei due determinanti $x^{(j)}y^{(j+1)}-y^{(j)}x^{(j+1)}$, $x^{(j)}z^{(j+1)}-z^{(j)}x^{(j+1)}$ si ha l'una o l'altra delle stesse particolarità, cioè si sapesse che non è zero in M, o che non prende infinite volte il valore zero nelle vicinanze di questo punto M.

430. — Premessi questi risultati, torniamo a considerare una curva nello spazio, per la quale supporremo che sia analitica o no nell' intorno di un suo punto M che corrisponde al valore ω_0 della variabile indipendente ω, ma che in questo punto soddisfi alle condizioni che secondo quanto dicemmo sopra nel § 424 assicurano l'esistenza della tangente e quella del piano osculatore; e per lo stesso punto $d^i x$, $d^i y$, $d^i z$ siano i primi differenziali delle coordinate x, y, z che non sono tutti zero, e la matrice (3)' sia la prima delle matrici (2) che è di caratteristica 2.

Allora, per quanto già osservammo al § 424, in questo punto M le equazioni della tangente alla curva saranno le seguenti

$$\frac{X-x}{d^i x}=\frac{Y-y}{d^i y}=\frac{Z-z}{d^i z}, \tag{17}$$

e quella del piano osculatore sarà

$$(X-x)(d^i y\, d^k z-d^i z\, d^k y)+(Y-y)(d^i z\, d^k x-d^i x\, d^k z)+(Z-z)(d^i x\, d^k y-d^i y\, d^k x)=0 \tag{18}$$

e quindi la equazione del piano normale nello stesso punto sarà l'altra

$$(X-x)\, d^i x+(Y-y)\, d^i y+(Z-z)\, d^i z=0. \tag{19}$$

Le equazioni della normale principale dunque si avranno da quelle di questi due piani (18) e (19) dei quali essa è la intersezione, e quindi si potranno porre sotto la forma seguente

$$\frac{X-x}{A_{i,k}}=\frac{Y-y}{B_{i,k}}=\frac{Z-z}{C_{i,k}}, \tag{20}$$

dove $A_{i,k}$, $B_{i,k}$, $C_{i,k}$ sono i minori di second'ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^i y\, d^k z-d^i z\, d^k y & d^i z\, d^k x-d^i x\, d^k z & d^i x\, d^k y-d^i y\, d^k x \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

per modo che si ha

$$A_{i,k}=d^i x(d^i x\, d^k x+d^i y\, d^k y+d^i z\, d^k z)-d^k x\{(d^i x)^2+(d^i y)^2+(d^i z)^2\}, \tag{22}$$

e similmente si hanno $B_{i,k}$ e $C_{i,k}$; e le equazioni della binormale saranno le altre

$$\frac{X-x}{d^i y\, d^k z-d^i z\, d^k y}=\frac{Y-y}{d^i z\, d^k x-d^i x\, d^k z}=\frac{Z-z}{d^i x\, d^k y-d^i y\, d^k x}. \tag{23}$$

431. — E indicando con $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $(\xi_{i,k}, \eta_{i,k}, \zeta_{i,k})$, $(\lambda_{i,k}, \mu_{i,k}, \nu_{i,k})$ gli angoli della tangente, della normale principale e della binormale nel punto M coi tre assi ortogonali x, y, z, pei coseni di direzione di queste rette avremo respettivamente le formole seguenti

$$\cos\alpha_i=\frac{d^i x}{d_i s}, \quad \cos\beta_i=\frac{d^i y}{d_i s}, \quad \cos\gamma_i=\frac{d^i z}{d_i s}, \tag{24}$$

$$\cos\xi_{i,k}=\frac{A_{i,k}}{P_{i,k}}, \quad \cos\eta_{i,k}=\frac{B_{i,k}}{P_{i,k}}, \quad \cos\zeta_{i,k}=\frac{C_{i,k}}{P_{i,k}}, \tag{25}$$

$$\cos\lambda_{i,k}=\frac{d^i y\, d^k z-d^i z\, d^k y}{D_{i,k}}, \quad \cos\mu_{i,k}=\frac{d^i z\, d^k x-d^i x\, d^k z}{D_{i,k}}, \quad \cos\nu_{i,k}=\frac{d^i x\, d^k y-d^i y\, d^k x}{D_{i,k}}, \tag{26}$$

quando si ponga

$$d_i s=\sqrt{(d^i x)^2+(d^i y)^2+(d^i z)^2}, \quad P_{i,k}=\sqrt{A_{i,k}^2+B_{i,k}^2+C_{i,k}^2}, \tag{27}$$

e s'indichi con $D_{i,k}^2$ il quadrato della matrice (3), mentre $P_{i,k}^2$ è il quadrato della matrice (21) e a causa dei valori di $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ e $C_{i,k}$ si trova subito che $P_{i,k}=d_i s\, D_{i,k}$; e quindi, come del resto è naturale che sia perchè le equazioni (18) del piano osculatore e (20) della normale principale hanno un significato, $P_{i,k}$ sarà come $D_{i,k}$ diverso da zero. E quanto a $d_i s$ si vedrà poi rigorosamente che esso non è altro che il differenziale di ordine i o $d^i s$ di s nel punto M.

432. — Determinando poi l'angolo $\Delta\sigma$ della tangente nel punto M con quella nel punto M' all'estremità di un arco piccolissimo Δs e l'angolo $\Delta\tau$ delle due binormali negli stessi punti, avremo i raggi di curvatura e di torsione ρ_i e $r_{i,k}$ della nostra curva nel punto M per mezzo delle formole $\rho_i=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$, $r_{i,k}=\lim\frac{\Delta s}{\Delta\tau}$, quando questi limiti esistono.

Ora quanto a Δs che, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore, è dato dalla formola $\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, essendo $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ gli accrescimenti che ricevono x, y, z nel passaggio dal punto M al punto M', si osserverà che per le nostre ipotesi, potendo applicare a x, y, z negli intorni del punto M la solita formola di Taylor abbreviata della nota a pag. 87, si ha

$$\Delta x = \frac{1}{\pi(i)} d^i x + \varepsilon_x \ , \ \Delta y = \frac{1}{\pi(i)} d^i y + \varepsilon_y \ , \ \Delta z = \frac{1}{\pi(i)} d^i z + \varepsilon_z \ ,$$

essendo $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ quantità infinitesime di ordine superiore ad i, e quindi

$$\Delta s = \frac{1}{\pi(i)} \sqrt{(d^i x)^2 + (d^i y)^2 + (d^i z)^2} + \varepsilon_s = \frac{d_i s}{\pi(i)} + \varepsilon_s \, .$$

essendo ε_s un'altra quantità di ordine superiore ad i.

433. — E per ciò che riguarda $\Delta\sigma$ e $\Delta\tau$, osserveremo prima in modo generale che quando da ogni punto di una curva parta una retta con una legge qualsiasi, ma che varii con continuità di direzione al variare del punto della curva, se (a, b, c) saranno i coseni di direzione della retta corrispondente al punto M e $(a+\Delta a, b+\Delta b, c+\Delta c)$ quelli della retta corrispondente al punto vicinissimo M′, le quantità $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ tenderanno a zero all'avvicinarsi indefinito di M′ ad M, e siccome la somma dei quadrati di questi coseni è sempre l'unità, sarà $a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c = -\frac{1}{2}(\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2)$; e quindi pel coseno dell'angolo V delle due rette avremo

$$\cos V = a(a+\Delta a) + b(b+\Delta b) + c(c+\Delta c) = 1 + (a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c) = 1 - \frac{1}{2}(\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2),$$

e da questa pel seno dello stesso angolo V avremo l'altra

$$\text{sen}\, V = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 - \frac{1}{4}(\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2)^2},$$

ovvero

$$\text{sen}\, V = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}(\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2)};$$

e poichè V sarà infinitesima come lo sono $\Delta a, \Delta b$ e Δc, avremo infine all'infuori di infinitesimi di ordine superiore

$$V = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2} \tag{28}$$

per l'angolo che la retta corrispondente al punto M i cui coseni di direzione sono a, b, c fa colla retta infinitamente vicina; come avremmo potuto trovare anche colla considerazione della indicatrice sferica delle direzioni medesime (a, b, c).

434. — Supponendo dunque che queste direzioni siano una volta la tangente e l'altra la binormale nei varii punti della nostra curva, *quando,* come

fra poco faremo, *si giunga a provare che queste rette variano con continuità di posizione anche pel punto* M, si vede che pei raggi di prima curvatura e di torsione ρ_i e $r_{i,k}$ avremo le formole

$$\begin{cases} \pi(i)\rho_i = \lim \dfrac{\sqrt{(d^i x)^2 + (d^i y)^2 + (d^i z)^2}}{\sqrt{(\Delta\cos\alpha_i)^2 + (\Delta\cos\beta_i)^2 + (\Delta\cos\gamma_i)^2}}, \\ \pi(i) r_{i,k} = \lim \dfrac{\sqrt{(d^i x)^2 + (d^i y)^2 + (d^i z)^2}}{\sqrt{(\Delta\cos\lambda_{i,k})^2 + (\Delta\cos\mu_{i,k})^2 + (\Delta\cos\nu_{i,k})^2}}, \end{cases} \tag{29}$$

quando i limiti dei secondi membri esistono; e quindi per trovare questi raggi occorrerà determinare le variazioni dei coseni di direzione della tangente e della binormale nel passare dal punto M al punto vicinissimo M′.

435. — Per questo osserviamo che per le ipotesi che noi abbiamo intorno ai differenziali $d^i x, d^i y, d^i z$ e alla matrice (3), e per quanto trovammo nella nota alle pag. 494 e 495, e sopra al § 427 *a*), nei punti *fuori di* M in intorni sufficientemente piccoli di questo stesso punto, uno almeno dei differenziali di prim'ordine dx, dy, dz e uno almeno dei tre determinanti di second'ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{Vmatrix}$$

saranno sempre diversi da zero.

Conseguentemente nei punti dello stesso intorno *fuori* di M la nostra curva avrà sempre la tangente e il piano osculatore, e le loro equazioni saranno quelle che si hanno nei punti ordinarii delle curve; quindi siccome alle derivate x', y', z' e ai determinanti di second'ordine della matrice $\begin{Vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix}$ negli intorni di ω_0 a partire da questo punto è applicabile la formola di Taylor abbreviata della nota alla pag. 87, le equazioni della tangente pel punto $(\omega_0 + h)$, *quando h è diverso da zero,* potranno scriversi sotto la forma

$$\frac{X - x(\omega_0 + h)}{x^{(i)} + \varepsilon_1} = \frac{Y - y(\omega_0 + h)}{y^{(i)} + \varepsilon_2} = \frac{Z - z(\omega_0 + h)}{z^{(i)} + \varepsilon_3},$$

e quella del piano osculatore sotto l'altra

$$\Big(X - x(\omega_0+h)\Big)\Big(y^{(i)}z^{(k)} - z^{(i)}y^{(k)} + \varepsilon'_1\Big) + \Big(Y - y(\omega_0+h)\Big)\Big(z^{(i)}x^{(k)} - x^{(i)}z^{(k)} + \varepsilon'_2\Big) +$$
$$+ \Big(Z - z(\omega_0+h)\Big)\Big(x^{(i)}y^{(k)} - y^{(i)}x^{(k)} + \varepsilon'_3\Big) = 0,$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ sono quantità che divengono infinitesime con h e le derivate si intendono prese tutte nel punto ω_0; e ciò perchè negli sviluppi suddetti di Taylor per le x', y', z' verranno a mancare tutti i termini fino a quelli che contengono le derivate d'ordine $i-2$ inclusive di queste quantità, e in quelli dei determinanti della detta matrice mancheranno (§ 427 a)) tutti i termini fino a quelli che contengono le derivate d'ordine $i+k-4$, e le derivate dell'ordine seguente di questi determinanti a meno di un fattore numerico sono $x^{(i)}y^{(k)} - y^{(i)}x^{(k)}$, ecc.

Di qui tenendo conto delle equazioni (17) e (18) che si dettero al § 430 per la tangente e pel piano osculatore nel punto M, si vede subito che, sotto le nostre ipotesi del § 424 rispetto ai differenziali di x, y, z e alle matrici (2), la *tangente e il piano osculatore nello stesso punto* M *sono i limiti delle tangenti e dei piani osculatori nei punti vicini della curva;* e da questo, come anche direttamente al modo stesso (*), si vede che *lo stesso è pel piano normale, per la normale principale e per la binormale.* E da queste considerazioni risulta pure evidentemente che, anche senza ricorrere alle formole del § 430, si potranno avere le equazioni di queste rette o piani relativi al punto M, e basterà per questo nei denominatori o nei coefficienti delle equazioni che si hanno per le stesse rette o piani nei punti ordinarii sostituire le loro prime derivate (o differenziali) che non sono tutte eguali a zero in quel punto.

Similmente i coseni di direzione della normale principale e della binormale nel punto M, come quelli della tangente, anzichè per mezzo delle formole del § 431, si potranno avere prendendo per essi i limiti — che ora siamo certi che esisteranno — dei coseni di direzione delle rette corrispondenti relative ai punti vicini.

436. — Così resta provato quanto dicemmo sopra che sarebbe avvenuto pei coseni di direzione delle stesse rette, e resta posto altresì in evidenza che per avere le variazioni che subiscono questi coseni nel passaggio dal punto M della curva ai punti vicini M', basterà cercare le differenze fra i loro valori ordinarii *fuori di questi punti* e i loro valori limiti che sono precisamente i valori dei coseni di direzione che già trovammo sopra al § 431 per le rette relative al punto M.

(*) Volendo giungere direttamente a questo resultato per la binormale coll'applicare le considerazioni del § 427 a), conviene prendere pel determinante (9) dello stesso paragrafo ciascuno di quelli della matrice

$$\left\| \begin{matrix} dx & dy & dz \\ dy\,d^2z - dz\,d^2y & dz\,d^2x - dx\,d^2z & dx\,d^2y - dy\,d^2x \end{matrix} \right\| .$$

Queste variazioni potrebbero dunque trovarsi calcolandole effettivamente poichè si hanno le formole che danno i due termini delle differenze corrispondenti, ma i calcoli sarebbero molto complicati specialmente per le variazioni dei coseni delle binormali e per la successiva determinazione del raggio di torsione; e giova meglio perciò valersi di alcune considerazioni d'ordine generale che ora esporremo, che presentano un certo interesse anche di per sè, e dalle quali poi risulteranno rigorosamente e in modo semplicissimo le variazioni cercate dei coseni di direzione della tangente e della binormale (e volendo anche di qualsiasi altra retta), e i raggi di curvatura e di torsione nel punto M sotto le loro varie espressioni.

437. — Incominciamo perciò col premettere una osservazione generale che poi ci tornerà utile; quella cioè che se si ha una funzione $f(x)$ di x che in un intorno di un punto x_0 per es. a destra è finita e continua, e in questo punto x_0 ammette le derivate determinate e finite fino a quelle di un certo ordine n, mentre le derivate degli ordini seguenti possono anche non esistere, e quelle dell'ultimo ordine che si considera, cioè dell'ordine n, possono essere discontinue nel punto x_0 e anche non esistere affatto fuori di x_0, allora per tutti i punti x_0+h di un certo intorno (x_0, x_0+h_n) del punto x_0, che potrà essere piccolissimo ma che certo esisterà, *varrà la formola della nota della pag. 87* e avremo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{1\,.\,2}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}h^n + \sigma_n ,$$

essendo σ_n una quantità che diviene infinitesima con h e di ordine superiore ad n; e ciò perchè l'esistenza di $f^{(n)}(x_0)$ porta di necessità che per $f(x)$ esistano le derivate degli ordini precedenti in tutti i punti di un certo intorno (x_0, x_0+h_n) di x_0 che dipenderà da n e potrà essere piccolissimo ma che certo esisterà, e saranno soddisfatte tutte le condizioni di validità della formola della stessa nota (*).

Indipendentemente da questo sviluppo, se con un processo qualsiasi si sarà trovato pei punti x_0+h di un certo intorno di x_0 uno sviluppo di $f(x_0+h)$

(*) Propriamente nella nota della pag. 87 è detto che si richiede anche la continuità delle derivate $(n-1)^e$ di $f(x)$ nei punti dell'intorno (x_0, x_0+h_n) *fuori di* x_0, mentre questa condizione non può dirsi che qui risulti come conseguenza della esistenza della derivata n^a di $f(x)$ nel punto x_0; però riguardando la dimostrazione che fu data della formola stessa, e dell'altra della nota a pag. 83 dalla quale quella della pag. 87 fu dedotta, si riscontra che la *continuità delle derivate* $(n-1)^e$ *nei punti fuori di* x_0 *non è necessaria.*

per potenze intere e positive di h della forma

$$f(x_0+h)=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1 h+\mathrm{A}_2 h^2+\ldots+\mathrm{A}_m h^m+\sigma_m\,,$$

essendo σ_m una quantità che divenga infinitesima con h di ordine superiore ad m, si potrà senz'altro affermare che *questo sviluppo dovrà combinare collo sviluppo precedente e i coefficienti* A_r *dovranno essere uguali a* $\frac{f^{(r)}(x_0)}{\pi(r)}$ *per tutti i valori di* r *non superiori nè ad* m *nè ad* n*; cioè in altri termini i due sviluppi dovranno farne uno solo per la parte di potenze di* h *comuni che si abbiano nei due sviluppi;* e ciò perchè uguagliando i due sviluppi si avrà una equazione fra le potenze di uno stesso infinitesimo h, e per un teorema noto sugli infinitesimi (§ 13 [pag. 13]) i coefficienti delle stesse potenze di h dovranno essere uguali (*).

438. — Tornando ora alla questione che ci interessa relativa alle variazioni dei nostri coseni di direzione, osserviamo che per ogni terna di essi le loro espressioni sono sempre della forma $\frac{u}{g}, \frac{v}{g}, \frac{w}{g}$ dove $g=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, e noi dobbiamo cercarne le variazioni quando ci si muove nell'intorno di un punto ω_0 nel quale le funzioni che vi figurano divengono tutte infinitesime e hanno le altre particolarità che risultano dalle condizioni poste nei paragrafi precedenti. E ci gioverà perciò di fare prima uno studio generale sulle variazioni dei quozienti e dei radicali quando le funzioni di ω che vi figurano ammettono le derivate determinate e finite nel punto ω_0 almeno fino a quelle di un certo ordine, e al tempo stesso una almeno delle derivate del denominatore nel caso dei quozienti, o della funzione sotto il radicale nel caso dei radicali, è diversa da zero; e inoltre nel caso dei quozienti il numeratore ammette le derivate determinate e finite almeno fino a quelle dell'ordine della prima derivata diversa da zero che si trovi pel denominatore per la quale ammetteremo anche che sia di ordine uguale o inferiore alla prima derivata diversa da zero che si trovi pel numeratore, ciò che porterà che il limite esista effettivamente senza essere infinito.

439. — Ci occuperemo dapprima dei quozienti perchè poi lo studio dei

---

(*) Il risultato ottenuto è notevole in sè per la semplicità colla quale si ottiene e per la sua generalità, e anche perchè per esso si dimostra in modo semplicissimo che se una funzione $f(x)$ è sviluppabile nell'intorno di un punto x_0 in *serie* di Taylor per potenze di $x-x_0$, ogni altro sviluppo in serie di queste potenze sarà lo sviluppo di Taylor stesso; bastando per vedere questo arrestare i due sviluppi a un punto qualunque e applicare poi agli sviluppi così arrestati il risultato ottenuto sopra.

radicali si ridurrà a quello dei quozienti; e preso perciò un quoziente $\frac{u}{v}$ di due funzioni u e v di ω che si annullano insieme per $\omega=\omega_0$ e in questo punto hanno le derivate determinate e finite fino a quelle di un certo ordine t, ammetteremo che la prima derivata del denominatore v che non si annulla sia quella dell'ordine $p\leq t$, e la prima derivata di u che pure non si annulla, se vi sarà, sia di ordine uguale o superiore a p.

Essendo, come già notammo in generale, u e v sviluppabili colla solita formola di Taylor della nota della pag. 87 fino a un certo ordine t, il valore limite $\left(\frac{u}{v}\right)_0$ di $\frac{u}{v}$ per $\omega=\omega_0$ sarà $\frac{u^{(p)}}{v^{(p)}}$ e quindi la differenza cercata $\frac{u(\omega)}{v(\omega)}-\left(\frac{u}{v}\right)_0$ sarà

$$\frac{u^{(p)}+\frac{u^{(p+1)}}{p+1}(\omega-\omega_0)+\frac{u^{(p+2)}}{(p+1)(p+2)}(\omega-\omega_0)^2+\ldots+\frac{u^{(t)}}{(p+1)(p+2)\ldots t}(\omega-\omega_0)^{t-p}+\sigma_t}{v^{(p)}+\frac{v^{(p+1)}}{p+1}(\omega-\omega_0)+\frac{v^{(p+2)}}{(p+1)(p+2)}(\omega-\omega_0)^2+\ldots+\frac{v^{(t)}}{(p+1)(p+2)\ldots t}(\omega-\omega_0)^{t-p}+\sigma'_t}-\frac{u^{(p)}}{v^{(p)}},$$

le derivate nel secondo membro intendendosi prese nel punto ω_0, e σ_t e σ'_t essendo quantità infinitesime di ordine superiore a $(\omega-\omega_0)^{t-p}$; quindi nell'intorno di ω_0 pel quoziente $\frac{u(\omega)}{v(\omega)}$ che si considera avremo

$$\begin{aligned}(30)\qquad \frac{u(\omega)}{v(\omega)}-\left(\frac{u}{v}\right)_0 &= \frac{1}{(v^{(p)})^2+\varepsilon_1}\Big\{\frac{1}{p+1}\left(u^{(p+1)}v^{(p)}-u^{(p)}v^{(p+1)}\right)(\omega-\omega_0)+\\ &+\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left(u^{(p+2)}v^{(p)}-u^{(p)}v^{(p+2)}\right)(\omega-\omega_0)^2+\ldots+\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots t}\left(u^{(t)}v^{(p)}-u^{(p)}v^{(t)}\right)(\omega-\omega_0)^{t-p}+\varepsilon_2\Big\}\end{aligned}$$

essendo ε_1 e ε_2 nuove quantità infinitesime; e quindi, se considerando i determinanti di second'ordine $\begin{vmatrix} u^{(p)} & v^{(p)} \\ u^{(r)} & v^{(r)} \end{vmatrix}$ pei valori $p+1$, $p+2,\ldots,p+q$ di r si trova che quello che corrisponde a $r=p+q$ è il primo che sia diverso da zero, avremo

$$(31)\ \frac{u(\omega)}{v(\omega)}-\left(\frac{u}{v}\right)_0=-\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)(v^{(p)})^2}\left\{u^{(p)}v^{(p+q)}-v^{(p)}u^{(p+q)}\right\}(\omega-\omega_0)^q+\sigma,$$

essendo σ un infinitesimo di ordine superiore a q; e così in questo caso la parte principale $\Delta\frac{u}{v}$ della variazione del quoziente $\frac{u}{v}$ corrispondente all'accrescimento $d\omega$ di ω sarà

$$\Delta \frac{u}{v} = - \frac{1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)\,(v^{(p)})^2} \left\{ u^{(p)} v^{(p+q)} - v^{(p)} u^{(p+q)} \right\} d\omega^q ,$$

ovvero

$$\Delta \frac{u}{v} = - \frac{1}{(p+q)_q \pi(q) (d^p v)^2} \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix} . \tag{32}$$

D'altra parte se si osserva che le derivate di $\frac{u}{v}$ nei *punti fuori di* M si determinano successivamente colla regola dei quozienti e hanno le espressioni $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, $\frac{(u''v - uv'')v - 2(u'v - uv')v'}{v^3}$, ... nelle quali i numeratori e i denominatori separatamente sono sviluppabili in formole di Taylor negli intorni del punto ω_0, si vede subito che queste derivate di $\frac{u}{v}$ hanno limiti determinati e finiti per $\omega = \omega_0$, e quindi esse esistono tutte fino a un certo ordine anche *in questo punto* ω_0; e ora, per questo e per quanto si disse sopra in generale nel § 437, avendo riguardo alla espressione (31) di $\frac{u(\omega)}{v(\omega)} - \left(\frac{u}{v}\right)_0$ si conclude subito che il rapporto $\frac{u}{v}$, quando s'intenda di prendere per suo valore nel punto ω_0 quello del suo limite, cioè $\frac{u^{(p)}}{v^{(p)}}$, ha i primi $q-1$ differenziali zero in questo punto, e il suo differenziale q^0 è dato dalla formola

$$d^q \frac{u}{v} = - \frac{\pi(q)}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)(d^p v)^2} \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix} = \tag{33}$$

$$= - \frac{1}{(p+q)_q (d^p v)^2} \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix} ,$$

quando $\begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix}$ sia il primo dei determinanti di second'ordine

$$\begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+m} u & d^{p+m} v \end{vmatrix} \tag{34}$$

corrispondenti ai valori successivi $1, 2, \dots, q\dots$ di m che sia diverso da zero; e si ha

$$\Delta \frac{u}{v} = \frac{1}{\pi(q)} d^q \frac{u}{v} . \tag{35}$$

E viceversa dalla espressione (30) di $\frac{u(\omega)}{v(\omega)} - \left(\frac{u}{v}\right)_0$ con considerazioni successive si vede che, se i differenziali successivi di $\frac{u}{v}$ nel punto ω_0 sono tutti zero fino a quello d'ordine $q-1$ inclusive, e il q^0 è diverso da zero, i determinanti (34) corrispondenti a $m = 1, 2, \dots, q-1$ saranno zero, e quello corrispondente a $m = q$ sarà diverso da zero, e si avrà la formola (33).

440. — Considerati ora i quozienti $\frac{u}{v}$, si studiano con tutta facilità i radicali $\sqrt[m]{\psi(\omega)}$ quando $\psi(\omega)$ sia una funzione come la v del quoziente precedente, cioè che si annulla per $\omega = \omega_0$ e ivi ammette le derivate determinate e finite fino a un certo ordine t, e queste derivate non sono tutte zero, e la prima diversa da zero è la p^a.

Osservando infatti che questo radicale potrà scriversi sotto la forma

$$\sqrt[m]{\psi(\omega)} = (\omega - \omega_0)^{\frac{p}{m}} \sqrt[m]{\frac{\psi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^p}} ,$$

e in questa il quoziente che figura sotto il radicale si potrà sviluppare coi processi del paragrafo precedente, si vede subito che pei valori di ω negli intorni di ω_0 avremo la formola

$$\sqrt[m]{\psi(\omega)} = \sqrt[m]{\frac{\psi^{(p)}(\omega_0)}{\pi(p)}} (\omega - \omega_0)^{\frac{p}{m}} + \varepsilon ,$$

essendo ε un infinitesimo di ordine superiore a quello di $(\omega - \omega_0)^{\frac{p}{m}}$; e se $\frac{p}{m}$ sarà un numero intero p_0, ripetendo i ragionamenti precedenti e tenendo conto della osservazione generale del § 437 si troverà che i differenziali di $\sqrt[m]{\psi(\omega)}$ nel punto ω_0 sono tutti zero fino a quello di ordine $p_0 - 1$, e quello di ordine p_0^0 è diverso da zero e per esso si ha

$$d^{p_0} \sqrt[m]{\psi(\omega)} = \pi(p_0) \sqrt[m]{\frac{\psi^{(p)}(\omega_0)}{\pi(p)}} \, d\omega_0^{p_0} .$$

441. — Trovate queste formole, e specialmente le (32) e (35), avremmo già tutto quello che occorre per determinare le variazioni dei coseni di direzione della tangente e della binormale e quindi i raggi di prima curvatura e di torsione della nostra curva nel punto M; ma per le trasformazioni che poi sono necessarie è utile fare ancora una digressione esponendo altri studii generali che pure potranno giovare in altre occasioni.

Prendiamo perciò in generale a studiare i quozienti $\frac{u_1}{g}, \frac{u_2}{g}, \ldots, \frac{u_n}{g}$ dove $g^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$, essendo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ funzioni finite e continue di una variabile ω, o anche differenziali o composte con differenziali di certe funzioni; e le stesse $u_1, u_2, \ldots, u_n$ siano tutte differenziabili almeno fino a un certo ordine.

Indichiamo i detti quozienti con $a_1, a_2, \ldots, a_n$, intendendo che quando $u_1, u_2, \ldots, u_n$ siano contemporaneamente zero nel punto ω_0, pei valori degli stessi quozienti si debbano prendere i valori limiti che si hanno per essi andando verso quel punto; e per la ipotesi fatta della differenziabilità di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, alla quale aggiungeremo anche l'altra che a un certo ordine p si trovi che i differenziali di quest'ordine di $u_1, u_2, \ldots, u_n$ non sono più tutti zero (*), i detti limiti di $a_1, a_2, \ldots, a_n$ saranno determinati e finiti, e non potranno essere tutti zero perchè la somma dei loro quadrati dovrà essere l'unità, tale essendo quella dei quadrati di $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Per $n=2$ e $n=3$ queste quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si ridurranno ai soliti coseni di direzione di una retta rispetto a due o a tre assi ortogonali.

Prendendo a considerare una qualunque delle quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e la corrispondente delle altre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e indicandole per semplicità di scrittura con u e a, colla soppressione cioè degli indici, le n formole che le definiscono rientreranno tutte nell'unica

$$(36) \qquad a g = u;$$

e a questa negli intorni sufficientemente piccoli di ω_0 (ω_0 incluso) potremo applicare più differenziazioni successive colla formola di Leibniz.

Facendone dunque il differenziale r^0, troveremo la formola

$$(37) \qquad a\, d^r g + r_1\, da\, d^{r-1} g + r_2 d^2 a\, d^{r-2} g + \ldots + g\, d^r a = d^r u\,,$$

nella quale $r_1, r_2 \ldots$ sono i soliti coefficienti binomiali; e questa come le altre che ora otterremo in a e u daranno sempre luogo a altrettante formole simili cambiandovi u in $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e contemporaneamente a in $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si tenga conto ora della ipotesi che già facemmo, cioè che nel punto ω_0 le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e i loro primi $p-1$ differenziali siano tutti zero, mentre di quelli dell'ordine p uno almeno sia diverso da zero.

(*) Questa condizione negli studii sulle curve ai quali poi applicheremo i risultati di questi paragrafi viene soddisfatta da sè a causa delle condizioni che poniamo pei differenziali di x, y, z nel punto ω_0 e per le matrici e determinanti formati con questi differenziali.

Naturalmente poichè $g = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$ si vede subito che nel punto ω_0 si ha $g=0$; e considerando poi successivamente la (36) e le prime p equazioni che si hanno dalle (37) col farvi $r = 1, 2, \ldots, p-1$, si troverà che per $\omega = \omega_0$ insieme a g dovranno essere zero $dg, d^2g, d^3g, \ldots, d^{p-1}g$, e $d^p g$ sarà diverso da zero; per il che facendo $r = p, p+1, p+2, \ldots, p+m, \ldots$ nelle stesse (37) si troverà che per $\omega = \omega_0$ si hanno anche le altre

$$(38) \quad \begin{cases} a d^p g & = d^p u\,, \\ a d^{p+1} g + (p+1)_1\, da\, d^p g & = d^{p+1} u\,, \\ a d^{p+2} g + (p+2)_1\, da\, d^{p+1} g + (p+2)_2\, d^2 a\, d^p g & = d^{p+2} u\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a d^{p+m} g + (p+m)_1 da d^{p+m-1} g + (p+m)_2 d^2 a d^{p+m-2} g + \ldots + (p+m)_m d^m a d^p g & = d^{p+m} u\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \end{cases}$$

e quindi se le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avranno tutti i loro differenziali zero fino a quelli dell'ordine $q-1$ inclusive, queste formole ci daranno le seguenti

$$(39) \quad a d^p g = d^p u\,,\ a d^{p+1} g = d^{p+1} u\,,\ a d^{p+2} g = d^{p+2} u\,, \ldots,\ a d^{p+q-1} g = d^{p+q-1} u\,,$$

insieme alle quali si avrà anche l'altra

$$(40) \qquad a d^{p+q} g + (p+q)_q\, d^q a\, d^p g = d^{p+q} u\,,$$

che viene dalla m^a delle precedenti facendovi $m=q$.

Queste formole varranno per tutte le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$; e quindi se per ciascuna delle (39) immagineremo scritte le n formole corrispondenti a tutte queste funzioni, quadrandole poi e sommandole otterremo le altre formole

$$(41) \quad (d^p g)^2 = \sum (d^p u)^2\,,\ (d^{p+1} g)^2 = \sum (d^{p+1} u)^2\,,\ (d^{p+2} g)^2 = \sum (d^{p+2} u)^2, \ldots, (d^{p+q-1} g)^2 = \sum (d^{p+q-1} u)^2$$

nelle quali s'intende che le somme dei secondi membri siano estese a tutte le $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Per le (39) poi combinando ciascuna di esse colla prima si vede anche che, colla nostra ipotesi di $da = da^2 = \ldots = d^{q-1} a = 0$ nel punto ω_0, saranno zero in questo punto anche tutti i determinanti del second'ordine

$$(42) \qquad \begin{vmatrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+m} u & d^{p+m} g \end{vmatrix}$$

per $m=1, 2, \dots q-1$ per le funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$, come del resto risulta anche da quanto dicemmo nel § 439 studiando il rapporto $\frac{u}{v}$; mentre dalla (40) combinata colla prima delle (39) si vede che si ha l'altra

$$(43)\qquad d^q a = -\frac{1}{(p+q)_q (d^p g)^2} \begin{vmatrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+q} u & d^{p+q} g \end{vmatrix},$$

che concorda pienamente colla (33) del detto § 439, e ci dà la variazione Δa di a o del rapporto $\frac{u}{g}$ all'infuori del fattore $\frac{1}{\pi(q)}$.

442. — Indicando poi con a e b due qualunque delle $a_1, a_2, \dots, a_n$ e con u e v le corrispondenti delle $u_1, u_2, \dots, u_n$, dalle (39) per $m<q$ avremo le formole

$$(44)\qquad \begin{cases} d^p u = a d^p g , & d^p v = b d^p g , \\ d^{p+m} u = a d^{p+m} g , & d^{p+m} v = b d^{p+m} g , \end{cases}$$

le quali ci mostrano subito che nel punto ω_0 il determinante

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+m} u & d^{p+m} v \end{vmatrix}$$

per $m<q$ è sempre zero; talchè si può anche affermare che quando nel punto ω_0 i differenziali $da, d^2a, \dots, d^{q-1}a$ delle $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono tutti zero, nello stesso punto ω_0 saranno zero tanto i determinanti (42) quanto i determinanti (45) per tutti i valori $1, 2, 3, \dots q-1$ di m.

E come per la determinazione del determinante (42) per $m=q$ nel punto ω_0 dalla (43) si ha la formola

$$(46)\qquad \begin{vmatrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+q} u & d^{p+q} g \end{vmatrix} = -(p+q)_q (d^p g)^2 d^q a ,$$

che vale qualunque valore abbiano i differenziali d'ordine q delle $a_1, a_2, \dots, a_n$, così osservando che a causa della (40) quando $m=q$ invece delle due ultime delle (44) si hanno le altre

$$d^{p+q} u = a d^{p+q} g + (p+q)_q d^q a d^p g , \quad d^{p+q} v = b d^{p+q} g + (p+q)_q d^q b d^p g ,$$

si vede subito che per $m=q$ il determinante (45) è dato dalla formola

$$(47)\qquad \begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix} = (p+q)_q (d^p g)^2 (a d^q b - b d^q a) .$$

443. — D'altra parte considerando il quadrato a^2 come un prodotto aa, e facendone la derivata r^a, ancora colla formola di Leibnitz, si trova che

$$\frac{1}{2} d^r a^2 = a d^r a + r_1 da\, d^{r-1} a + r_2 d^2 a\, d^{r-2} a + \dots ,$$

l'ultimo termine in questa formola dovendo essere $r_{\frac{r-1}{2}} d^{\frac{r-1}{2}} a\, d^{\frac{r+1}{2}} a$ nel caso di r dispari, e $\frac{1}{2} r_{\frac{r}{2}} \left(d^{\frac{r}{2}} a\right)^2$ nel caso di r pari; e quindi, supponendo sempre che nel solito punto ω_0 siano zero i primi $q-1$ differenziali delle $a_1, a_2, \dots, a_n$, e facendo nella formola trovata $r=q, q+1, q+2, \dots, 2q-1, 2q$, si trovano subito le seguenti

$$\frac{1}{2} d^q a^2 = a d^q a , \ \frac{1}{2} d^{q+1} a^2 = a d^{q+1} a , \dots , \ \frac{1}{2} d^{2q-1} a^2 = a d^{2q-1} a , \ \frac{1}{2} d^{2q} a^2 = a d^{2q} a + \frac{1}{2} (2q)_q (d^q a)^2 ,$$

e queste, quando s'immaginino scritte per tutte le $a_1, a_2, \dots, a_n$ e si sommino le corrispondenti, danno subito le altre

$$(48)\quad \sum a d^q a = 0 , \ \sum a d^{q+1} a = 0 , \dots , \ \sum a d^{2q-1} a = 0 , \ \sum a d^{2q} a = -\frac{1}{2} (2q)_q \sum (d^q a)^2 ;$$

talchè $\Sigma a d^{2q} a$ sarà la prima delle somme $\Sigma a d^m a$ che sarà diversa da zero pei valori successivi $1, 2, 3 \dots$ di m se i differenziali dell'ordine q delle $a_1, a_2, \dots, a_n$ saranno i primi che non saranno tutti eguali allo zero.

Per queste formole poi le (38) ne danno altre assai notevoli, poichè moltiplicando membro a membro per la prima delle (38) stesse ciascuna delle seguenti fino a quella che corrisponde a $m=2q-1$, e per ogni equazione che così si ottiene facendo la somma di tutte quelle simili corrispondenti ai varii valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ di a, basterà avere riguardo alla $\Sigma a^2 = 1$ e alle (48) per concluderne subito che pel punto ω_0 avremo anche le formole seguenti

$$(49)\quad d^p g d^{p+1} g = \sum d^p u d^{p+1} u , \ d^p g d^{p+2} g = \sum d^p u d^{p+2} u , \dots , d^p g d^{p+2q-1} g = \sum d^p u d^{p+2q-1} u .$$

444. — Tutte queste formole si hanno quando, essendo $d^p u_1, d^p u_2, \dots, d^p u_n$ i primi differenziali delle $u_1, u_2, \dots, u_n$ che non sono tutti zero nel solito punto ω_0, e quindi essendo diverso da zero $d^p g$, risultano invece uguali a zero i primi $q-1$ differenziali di tutte le $a_1, a_2, \dots, a_n$; ed è notevole che allora vengono ad essere zero contemporaneamente tanto i $q-1$ determinanti (42) quanto i $q-1$ determinanti (45) corrispondenti agli stessi valori $1, 2, \dots, q-1$ di m per ciascuna coppia di funzioni u e v; mentre, se i differenziali di

ordine q delle $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non saranno tutti zero nel detto punto ω_0, per la (46) non lo saranno neppure tutti gli n determinanti (42) corrispondenti a $m=q$, come non lo saranno gli $\frac{n(n-1)}{2}$ determinanti (45) corrispondenti pure a $m=q$, perchè per la (47) la somma dei loro quadrati all'infuori del fattore $(p+q)_q^2\,(d^p g)^4$ viene ad essere il quadrato della matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ d^q a_1 & d^q a_2 & \ldots & d^q a_n \end{matrix} \right\| , \tag{50}$$

e questo quadrato, per essere $\Sigma a^2 = 1$ e per l'altra $\Sigma a\, d^q a = 0$ che si ha dalle (48), è uguale a $\Sigma (d^q a)^2$.

Che anzi per la (46) di qui apparisce già che la somma dei quadrati dei determinanti (46) e quella dei quadrati dei determinanti (47) sono uguali fra loro e quindi si ha la formola che ci gioverà fra breve

$$\sum \left| \begin{matrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+q} u & d^{p+q} g \end{matrix} \right|^2 = \sum \left| \begin{matrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{matrix} \right|^2 , \tag{51}$$

nella quale il valore comune delle due somme di quadrati dei due membri è $(p+q)_q^2\,(d^p g)^4\,\Sigma (d^q a)^2$, essendo $\Sigma (d^q a)^2$ il quadrato $\Sigma (a_r d^q a_s - a_s d^q a_r)^2$ della matrice (50).

Viceversa se si troverà che nel punto ω_0 sussistono le formole (39), dalle (38) si dedurrà successivamente che i differenziali $da, d^2 a, \ldots, d^{q-1} a$ sono zero per tutte le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e quindi si avranno ancora tutte le altre formole e i risultati indicati sopra pei determinanti (42) o (45); e lo stesso accadrà se troveremo zero i $q-1$ determinanti (42) corrispondenti a $m=1, 2, \ldots, q-1$, o i $q-1$ determinanti (45) corrispondenti pure a $m=1, 2, \ldots, q-1$, perchè valendosi ancora delle formole (46) e (47) pei successivi casi corrispondenti ai valori $1, 2, 3, \ldots, q-1$ di q si trova successivamente che l'essere zero gli uni o gli altri di quei determinanti porta che debbano essere zero tutti i differenziali degli ordini $1, 2, \ldots, q-1$ delle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e quando si giunga a uno di quei determinanti (42) o (45) corrispondenti a un certo valore q di m che sia diverso da zero, diversi da zero saranno pure tutti o alcuni degli altri determinanti (45) o (42) corrispondenti allo stesso valore q di m e dei differenziali dell'ordine q delle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e si avrà la formola (51).

In altri termini dunque si può dire che il primo valore da darsi ad m perchè cessino di essere zero tutti o alcuni dei differenziali successivi delle $a_1, a_2, \ldots, a_2$, o i determinanti (42) o i determinanti (45), è lo stesso per tutte queste quantità.

445. — Aggiungiamo che la formola (51) può anche essere assai estesa, perchè valendosi delle formole trovate si dimostra con tutta facilità che si ha la formola seguente

$$\sum \left| \begin{matrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+m} u & d^{p+m} g \end{matrix} \right|^2 = \sum \left| \begin{matrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+m} u & d^{p+m} v \end{matrix} \right|^2 \tag{52}$$

per tutti i valori $q, q+1, q+2, \ldots, 2q-1$ di m (*).

Considerando infatti i determinanti che figurano nel primo membro di questa formola, e facendo la somma dei loro quadrati, si vede subito che questa somma può scriversi sotto la forma

$$(d^{p+m} g)^2 \sum (d^p u)^2 + (d^p g)^2 \sum (d^{p+m} u)^2 - 2\, d^p g\, d^{p+m} g \sum d^p u\, d^{p+m} u ,$$

e per la prima della (41) e per la m^a delle (49) quando $m \leqq 2q-1$ si trasforma nell'altra

$$(d^p g)^2 \sum (d^{p+m} u)^2 - (d^p g\, d^{p+m} g)^2 = \sum (d^p u)^2 \sum (d^{p+m} u)^2 - \left(\sum d^p u\, d^{p+m} u \right)^2$$

che è il quadrato della matrice

$$\left\| \begin{matrix} d^p u_1 & d^p u_2 & \ldots & d^p u_n \\ d^{p+m} u_1 & d^{p+m} u_2 & \ldots & d^{p+m} u_n \end{matrix} \right\| ; \tag{53}$$

e questo dimostra appunto la formola (52) per tutti i valori $q, q+1, q+2, \ldots, 2q-1$ di m, per modo che colle condizioni poste non solo si avrà la formola (51) che dimostrammo sopra e che corrisponde a quella che viene dalla (52) col farvi $m=q$, ma si avranno sempre anche altre $q-1$ formole simili che saranno quelle che si ottengono dalla (52) col farvi $m=q+1$, $q+2, \ldots, 2q-1$. *E tutte queste formole potranno evidentemente servire anche alla trasformazione di somme di* $\frac{n(n-1)}{2}$ *quadrati in somme di altri* n *quadrati, e viceversa.*

446. — I risultati generali che abbiamo ottenuto hanno importanza anche in sè indipendentemente dalla questione che forma l'oggetto principale dei nostri studii attuali sulle curve, inquantochè si riferiscono a un sistema qualunque di n funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di una variabile che soddisfano alle condizioni che per esse abbiamo poste; e da essi se ne potrebbero dedurre anche altri pure notevoli.

(*) La stessa formola (52) vale anche pei valori di m inferiori a q poichè allora tutti i determinanti che figurano nei due membri della formola stessa sono uguali a zero per quanto si disse sopra.

Volendo ora valercene per la nostra questione, cioè per la determinazione dei raggi di prima curvatura e di torsione ρ_i e $r_{i,k}$ di una curva in un punto M o ω_0, nel quale per le coordinate x, y, z siano soddisfatte le condizioni che ponemmo al § 424, bisognerà supporre $n=3$, e particolarizzare le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ col prendere per le tre che loro corrisponderanno e che indicheremo con u, v, w una volta i tre differenziali dx, dy, dz ai quali sono proporzionali i coseni di direzione della tangente in un punto generico, e un'altra i tre determinanti di second'ordine $dy\, d^2z - dz\, d^2y$, $dz\, d^2x - dx\, d^2z$, $dx\, d^2y - dy\, d^2x$ ai quali sono proporzionali i coseni di direzione della binormale.

Ora indicando in generale con a, b, c i coseni di direzione di una retta relativa al punto M ai quali corrispondono tre funzioni u, v, w con $g=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, per quanto si disse al § 439 o in fine al § 441, le parti principali delle variazioni $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ di questi coseni quando si passa a una retta infinitamente vicina sono $\frac{1}{\pi(q)} d^q a$, $\frac{1}{\pi(q)} d^q b$, $\frac{1}{\pi(q)} d^q c$, i differenziali $d^q a, d^q b, d^q c$ essendo dati dalla (43) e dalle sue analoghe in v e w; e la parte principale dell'angolo infinitesimo che quella retta fa colla sua infinitamente vicina, che per quanto dicemmo al § 433 non è altro che la parte principale del radicale $\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}$, sarà

$$\frac{1}{\pi(q)} \sqrt{(d^q a)^2+(d^q b)^2+(d^q c)^2}. \tag{54}$$

Ricordando quindi quanto dicemmo in generale nel § 444, si vede che lo stesso angolo infinitesimo sarà anche la radice quadrata della somma dei quadrati dei tre determinanti

$$\begin{vmatrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+q} u & d^{p+q} g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p v & d^p g \\ d^{p+q} v & d^{p+q} g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p w & d^p g \\ d^{p+q} w & d^{p+q} g \end{vmatrix}, \tag{55}$$

o dei tre

$$\begin{vmatrix} d^p u & d^p v \\ d^{p+q} u & d^{p+q} v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p v & d^p w \\ d^{p+q} v & d^{p+q} w \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p w & d^p u \\ d^{p+q} w & d^{p+q} u \end{vmatrix}, \tag{56}$$

all'infuori del fattore $\frac{1}{(p+q)_q\, \pi(q) (d^p g)^2}$, essendo p il primo numero pel quale i differenziali $d^p u, d^p v, d^p w$ non sono più tutti zero insieme, e q il primo valore di m pel quale non saranno zero insieme i tre determinanti

$$\begin{vmatrix} d^p u & d^p g \\ d^{p+m} u & d^{p+m} g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p v & d^p g \\ d^{p+m} v & d^{p+m} g \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^p w & d^p g \\ d^{p+m} w & d^{p+m} g \end{vmatrix}, \tag{57}$$

o pel quale sarà di caratteristica 2 la matrice

$$\begin{Vmatrix} d^p u & d^p v & d^p w \\ d^{p+m} u & d^{p+m} v & d^{p+m} w \end{Vmatrix}, \tag{58}$$

o anche infine il primo valore di m pel quale i differenziali $d^m a$, $d^m b$, $d^m c$ non sono tutti e tre zero.

447. — Nel caso dunque in cui avendosi le condizioni del § 424 si vuole determinare il raggio di prima curvatura della linea nel punto M, dovendo prendere, come dicemmo sopra, $u=dx$, $v=dy$, $w=dz$, $g=ds$, sarà $p=i-1$, $q=k-i$, e quindi per la prima delle (29) e per quanto ora abbiamo osservato si vede subito che *se colle condizioni poste al § 424 si avrà $k<2i$ sarà $\rho_i=0$; se si avrà $k>2i$ sarà $\rho_i=\infty$; e se sarà $k=2i$ e quindi $q=i$, il raggio ρ_i sarà determinato finito e diverso da zero, e sarà dato dalle varie formole seguenti*

$$\left\{\begin{aligned} \rho_i &= \frac{d^i s}{\sqrt{\left(d^i \frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^i \frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^i \frac{dz}{ds}\right)^2}}, \\ \rho_i &= (2i-1)_i \frac{(d^i s)^3}{\sqrt{\sum (d^i x\, d^{2i} s - d^i s\, d^{2i} x)^2}}, \\ \rho_i &= (2i-1)_i \frac{(d^i s)^3}{\sqrt{\sum (d^i x\, d^{2i} y - d^i y\, d^{2i} x)^2}}, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

dalla seconda delle quali, eseguendo i quadrati sotto il radicale e osservando che, per essere ora $p=i-1$, $q=i$, la q^a delle (49) ci dà $d^i s\, d^{2i} s = \Sigma\, d^i x\, d^{2i} x$, si trova anche

$$\rho_i = (2i-1)_i \frac{(d^i s)^2}{\sqrt{(d^{2i} x)^2+(d^{2i} y)^2+(d^{2i} z)^2-(d^{2i} s)^2}}. \tag{60}$$

Infine, *senza supporre ora che sia $k=2i$*, osservando che la q^a delle (49) cioè la formola $\Sigma\, d^p u\, d^{p+q} u = d^p g\, d^{p+q} g$, per essere ora $p=i-1$, $q=k-i$, $u=dx$, $v=dy$, $w=dz$, ci dà $\Sigma\, d^i x\, d^k x = d^i s\, d^k s$, si vede per le (22) che i denominatori delle equazioni della normale principale sono proporzionali ai determinanti

$$\begin{vmatrix} d^i x & d^i s \\ d^k x & d^k s \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^i y & d^i s \\ d^k y & d^k s \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d^i z & d^i s \\ d^k z & d^k s \end{vmatrix},$$

che per la (43) sono proporzionali ai differenziali di ordine q o $k-i$ dei coseni di direzioni della tangente, e si conclude quindi che, qualunque siano i e k, le equazioni della normale principale possono porsi sotto la forma

$$(61)\qquad \frac{X-x}{d^{k-i}\dfrac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{d^{k-i}\dfrac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{d^{k-i}\dfrac{dz}{ds}},$$

come risulta anche dalla osservazione fatta in fine del § 435 [pag. 579-80]; e nel caso di $k=2i$ queste equazioni si riducono alle altre

$$(62)\qquad \frac{X-x}{d^{i}\dfrac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{d^{i}\dfrac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{d^{i}\dfrac{dz}{ds}},$$

e allora pei coseni di direzione della stessa normale principale si hanno le formole

$$(63)\qquad \cos\xi_i=\rho_i\frac{d^i\dfrac{dx}{ds}}{d^is}\ ,\ \cos\eta_i=\rho_i\frac{d^i\dfrac{dy}{ds}}{d^is}\ ;\ \cos\zeta_i=\rho_i\frac{d^i\dfrac{dz}{ds}}{d^is}\ .$$

448. — Passiamo ora a trovare anche il raggio di torsione $r_{i,k}$ della nostra curva nel punto M.

Come già dicemmo converrà prendere ora

$$(64)\quad u=dy\,d^2z-dz\,d^2y\ ,\ v=dz\,d^2x-dx\,d^2z\ ,\ w=dx\,d^2y-dy\,d^2x\,,$$

e bisognerà incominciare a trovare i numeri più bassi p e q pei quali non sono zero insieme nel punto M nè i differenziali d^pu, d^pv e d^pw nè i tre determinanti (56).

Avendosi ancora le ipotesi del § 424, basterà ricordare quanto si disse al § 427 a) per vedere subito che il primo valore di p pel quale d^pu, d^pv e d^pw non sono tutti zero nel punto M è $p=i+k-3$, e allora si ha

$$(65)\ d^pu=\theta(d^iy\,d^kz-d^iz\,d^ky)\,,\ d^pv=\theta(d^iz\,d^kx-d^ix\,d^kz)\,,\ d^pw=\theta(d^ix\,d^ky-d^iy\,d^kx),$$

essendo θ un fattore numerico pel quale, in seguito a quanto si disse in fine della prima parte del § 427, nel caso di $i=1$, $k>2$ si ha $\theta=1$, nel caso di $i=2$, $k>2$ si ha $\theta=k-2$ e nel caso di $i>2$, $k\geq i+1$ si ha $\theta=(i+k-3)_{i-1}$, non considerando il caso di $i=1$, $k=2$ che corrisponde al caso ordinario del Capitolo precedente, e pel quale del resto si avrebbe $p=0$ senz'altro, e $\theta=1$.

Per trovare q si osserverà che $d^{p+m}u$ sarà una somma di termini tutti della forma $\theta_{r,s}(d^ry\,d^sz-d^rz\,d^sy)$ nei quali $r+s-3=p+m$, e r può

supporsi inferiore ad s, e $\theta_{r,s}$ è il fattore numerico $(p+m)_{r-1}$; e somme simili si avranno per $d^{p+m}v$ e $d^{p+m}w$; e quindi nel punto M ogni determinante (57), o

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} d^pu & d^{p+m}u \\ d^pv & d^{p+m}v \end{vmatrix},$$

sarà una somma di termini tutti della forma

$$\theta\theta_{r,s}\begin{vmatrix} d^iy\,d^kz-d^iz\,d^ky & d^ry\,d^sz-d^rz\,d^sy \\ d^iz\,d^kx-d^ix\,d^kz & d^rz\,d^sx-d^rx\,d^sz \end{vmatrix}$$

nei quali per la (14) del § 427 b) i determinanti si trasformano nella differenza

$$d^rz\begin{vmatrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^kx & d^ky & d^kz \\ d^sx & d^sy & d^sz \end{vmatrix}-d^sz\begin{vmatrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^kx & d^ky & d^kz \\ d^rx & d^ry & d^rz \end{vmatrix}.$$

Di qui, tenendo conto delle condizioni che si posero al § 424 che si suppongono soddisfatte, si vede che sono zero tutti i termini nei quali $r<i$, e anche quelli che con $r\geq i$ corrispondono a $r+s<i+l$, come quelli che corrispondono a $r+s=i+l$ senza che sia $r=i$, $s=l$; dunque evidentemente i primi ordini $p+m$ di derivazione nei determinanti (66) che possono portare a termini diversi da zero saranno quelli pei quali $r+s=i+l$ e quindi $p+m=i+l-3$ e $m=l-k$; e con questi ordini di derivazione a calcoli eseguiti non potranno restare che i termini corrispondenti a $r=i$, $s=l$; talchè allora i tre determinanti (66) a meno del fattore numerico $\theta\theta_{r,s}$ o $\theta(i+k-3)_{i-1}$ si ridurranno al determinante

$$(67)\qquad \Delta_{i,k,l}=\begin{vmatrix} d^ix & d^iy & d^iz \\ d^kx & d^ky & d^kz \\ d^lx & d^ly & d^lz \end{vmatrix}$$

— che per ipotesi è diverso da zero nel punto M — moltiplicato respettivamente per d^iz, d^ix e d^iy, e quindi effettivamente non potranno essere tutti zero, e la somma dei loro quadrati sarà $(d^is)^2\,\theta^2(i+k-3)^2_{i-1}\Delta^2_{i,k,l}$.

D'altra parte, in questo caso g^2 sarà la somma dei quadrati dei determinanti (64), e $(d^pg)^2$ sarà quella dei quadrati dei determinanti (65), cioè sarà il quadrato $D^2_{i,k}$ della matrice

$$(68)\qquad \left\| \begin{matrix} d^i x & d^i y & d^i z \\ d^k x & d^k y & d^k z \end{matrix} \right\| ;$$

quindi pel punto M della nostra curva il raggio di torsione $r_{i,k}$ a causa della seconda delle (29) sarà il limite della espressione $\frac{(i+l-3)_{l-k}\pi((l-k)}{\pi(i)\theta(i+k-3)_{i-1}}\frac{D^2_{i,k}}{\Delta_{i,k,l}}$, e conseguentemente *questo raggio di torsione* $r_{i,k}$ *se* $l<i+k$ *sarà zero se* $l>i+k$ *sarà infinito; e se* $l=i+k$ *sarà determinato finito e diverso da zero e sarà dato dalla formola*

$$(69)\qquad r_{i,k}=\frac{(2i+k-3)_i}{\theta(i+k-3)_{i-1}}\frac{D^2_{i,k}}{\Delta_{i,k,i+k}} ;$$

essendo θ il coefficiente numerico del quale fu dato il valore sopra pei varii casi; e valendosi delle formole dei paragrafi precedenti questo raggio di torsione $r_{i,k}$ potrà porsi anche sotto altre forme come si fece pel raggio di prima curvatura.

449. — Osservando poi che la parte principale della distanza δ dei punti dell'intorno di M della nostra curva dal piano osculatore in generale è $\frac{\Delta_{i,k,l}}{\pi(l)D_{i,k}}$, e avendo riguardo alla terza delle formole (59) e alla precedente (69) si vede anche che nel caso di $k=2i$ e $l=3i$ la parte principale della detta distanza δ diviene uguale a $\frac{(2i-1)_i(4i-3)_i}{\pi(3i)\theta(3i-3)_{i-1}}\frac{(d^i s)^3}{\rho_i r_{i,2i}}$ e si riduce a quella $\frac{1}{6}\frac{ds^3}{\rho r}$ dei casi ordinarii (§ 416 [pag. 556]) nel caso di $i=1$.

450. — Aggiungiamo infine che valendosi delle formole trovate per ρ_i e $r_{i,k}$ e di quelle generali dei §§ 441 e seg. si potrebbero trovare anche le formole che corrispondono a quelle di Frenet pei punti M che abbiamo considerato in questo capitolo; ma non troviamo opportuno il fermarci ora anche su questo.

XXXII.

Sfera osculatrice di una curva gobba

451. — Fra le sfere che passano per un punto dato di una curva a doppia curvatura ve n'è ordinariamente una che si discosta meno di qualunque altra delle stesse sfere da ogni punto della curva che sia situato in un intorno sufficientemente piccolo del punto che si considera. Questa sfera, quando esiste, viene detta *sfera osculatrice della curva;* e noi ci proponiamo ora di dimostrarne la effettiva esistenza almeno nei casi ordinarii, determinandone al tempo stesso il raggio e le coordinate del centro.

S'indichino perciò con R il raggio di una sfera condotta pel punto $M(x,y,z)$ che si considera sulla nostra curva e con x_0, y_0, z_0 le coordinate del centro. La equazione di questa sfera sarà la seguente

$$(1)\qquad (X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2=R^2,$$

e siccome essa deve passare pel punto (x,y,z) della curva, dovremo avere

$$(2)\qquad R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

e quindi quando sieno determinate x_0, y_0, z_0, anche R rimarrà determinato.

Ora si osservi che il quadrato della distanza δ dal centro della sfera a un punto $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ vicinissimo ad M sarà

$$\delta^2=(x+\Delta x-x_0)^2+(y+\Delta y-y_0)^2+(z+\Delta z-z_0)^2$$

ovvero per la (2)

$$\delta^2=R^2+2\{(x-x_0)\Delta x+(y-y_0)\Delta y+(z-z_0)\Delta z\}+\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2 ;$$

e poichè se δ' è la più corta distanza da M' alla sfera, δ' sarà situata su δ e si avrà $\pm\delta' = \delta - R = \dfrac{\delta^2 - R^2}{\delta + R}$, si vede subito che sarà

$$\pm\delta' = \frac{2\{(x - x_0)\Delta x + (y - y_0)\Delta y + (z - z_0)\Delta z\} + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\delta + R},$$

e $\delta + R$ col tendere a zero di Δx, Δy, Δz tenderà verso $2R$.

Ora se ω è la variabile indipendente per la quale si esprimono le coordinate x, y, z della curva, e se x, y, z come funzioni di ω, almeno pel valore di ω che corrisponde al punto M, sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde e le derivate terze sono determinate e finite, allora indicando queste derivate nel punto M con $x', y', z', x'', y'', z''$, ... e indicando con h l'accrescimento che riceve ω quando si passa da M a M', quando questo accrescimento h sia abbastanza piccolo avremo le formole

$$(3)\quad \Delta x = x'h + x''\frac{h^2}{2} + x'''\frac{h^3}{6} + \sigma_1 h^3,\ \Delta y = y'h + y''\frac{h^2}{2} + y'''\frac{h^3}{6} + \sigma_2 h^3,\ \Delta z = z'h + z''\frac{h^2}{2} + z'''\frac{h^3}{6} + \sigma_3 h^3,$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono quantità che dipendentemente dalla piccolezza di h sono arbitrariamente piccole; e quindi sostituendo si troverà

$$(4)\quad \pm\delta' = \frac{1}{\delta + R}\Big[2\{(x - x_0)x' + (y - y_0)y' + (z - z_0)z'\}h + \{(x - x_0)x'' + (y - y_0)y'' + (z - z_0)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2\}h^2 +$$
$$+ \{(x - x_0)x''' + (y - y_0)y''' + (z - z_0)z''' + 3(x'x'' + y'y'' + z'z'')\}\frac{h^3}{3} + \sigma h^3\Big],$$

essendo σ una nuova quantità che dipendentemente dalla piccolezza di h sarà essa pure inferiore a quel numero che più ci piace.

Segue da ciò che per la sfera che noi cerchiamo i coefficienti di h, h^2 e h^3 nella formola precedente devono esser nulli; e quindi, introducendo invece delle derivate i differenziali e osservando che

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,d\omega^2, \quad \text{e} \quad ds\,d^2s = (x'x'' + y'y'' + z'z'')\,d\omega^3,$$

si troveranno intanto le equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} (x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0, \\ (x - x_0)\,d^2x + (y - y_0)\,d^2y + (z - z_0)\,d^2z + ds^2 = 0, \\ (x - x_0)\,d^3x + (y - y_0)\,d^3y + (z - z_0)\,d^3z + 3\,ds\,d^2s = 0; \end{cases}$$

le quali determinano già completamente i valori di x_0, y_0, z_0 a meno che

non sia zero il determinante

$$(6)\quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix};$$

e con ciò resta determinata completamente anche la sfera, perchè allora R viene dato dalle (2); dal che si conclude intanto che *nei punti della curva pei quali* x, y, z *sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde e hanno le derivate terze determinate e finite, e inoltre tutte queste derivate hanno valori tali da non annullare il determinante* (6), *esiste sempre una sfera osculatrice, e questa è la sfera per la quale le coordinate del centro* (x_0, y_0, z_0) *sono determinate dalle equazioni* (5) *ed il raggio è determinato dalla formola* (2).

452. — I punti nei quali il determinante (6) è zero, sono quelli che al § 396 [pag. 532-33] dicemmo punti dei *piani osculatori stazionarii*, e comprendono naturalmente quelli delle tangenti stazionarie.

Noi li intenderemo ora sempre esclusi dalle nostre considerazioni, e osserveremo che allora, con questa esclusione, le differenze $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ non vengono certamente tutte uguali a zero, e quindi R è pure differente da zero; dopo di che basterà avere riguardo alla (4) per vedere subito che pei punti M della curva che noi considereremo, la distanza dei punti della curva vicini ad M dalla sfera osculatrice sarà sempre di ordine superiore al terzo; e quando negli stessi punti M, oltre alle derivate terze di x, y, z, siano determinate e finite anche le derivate quarte, allora questa distanza sarà per lo meno del quart'ordine.

453. — Ammesso come abbiamo detto di escludere i punti dei piani osculatori stazionarii quando ve ne siano, osserviamo che potremo applicare le formole di Frenet date al § 419 [pag. 559 e 560], le quali quando si prenda s come variabile indipendente, si riducono a quelle che già trovammo al § 420

$$dx = \cos\alpha\,ds,\ d^2x = \frac{\cos\xi}{\rho}\,ds^2,\ d^3x = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right)ds^3 + \cos\xi\, d\frac{1}{\rho}\,ds^2,$$

con altre tre simili pei differenziali di y come per quelli di z; e quindi sostituendo nelle formole (5) che danno le coordinate del centro della sfera osculatrice e facendo delle riduzioni semplici nella terza equazione per mezzo delle due prime, otterremo le altre

$$(7)\quad \begin{cases} (x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma=0\,, \\ (x-x_0)\cos\xi+(y-y_0)\cos\eta+(z-z_0)\cos\zeta=-\rho\,, \\ (x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu=r\dfrac{d\rho}{ds}\,, \end{cases}$$

che, quadrate e sommate con tener conto delle relazioni che sussistono fra i coseni degli angoli di tre rette ortogonali cogli assi, ci danno subito

$$(8)\qquad R=\sqrt{\rho^2+r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$$

pel valore del *raggio della sfera osculatrice.*

Considerando poi nelle equazioni precedenti x_0, y_0, z_0 come coordinate variabili, e osservando che allora la prima di esse rappresenta il piano normale alla curva nel punto (x, y, z), la seconda rappresenta quel piano P' che considerammo nel § 423 [pag. 563], che è parallelo al piano rettificante ed è condotto pel centro di curvatura, e la terza rappresenta un piano parallelo al piano osculatore, si conclude che il centro della sfera osculatrice è sopra una retta parallela alla binormale condotta pel centro di curvatura della curva; e la sua posizione su questa retta è determinata dall'incontro di essa con un piano parallelo al piano osculatore che è rappresentato dalla terza delle equazioni (7), ed è determinata anche da uno dei due punti d'incontro della stessa retta con una sfera di raggio uguale a $\sqrt{\rho^2+r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$ che ha il centro nel punto che si considera sulla curva.

454 — Del resto poi, moltiplicando le equazioni (7) una volta per $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$, una per $\cos\beta$, $\cos\eta$, $\cos\mu$ e una terza per $\cos\gamma$, $\cos\zeta$, $\cos\nu$, e sommandole ogni volta si trovano subito le formole

$$(9)\quad x_0=x+\rho\cos\xi-r\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda\,,\quad y_0=y+\rho\cos\eta-r\frac{d\rho}{ds}\cos\mu\,,\quad z_0=z+\rho\cos\zeta-r\frac{d\rho}{ds}\cos\nu\,,$$

e queste danno le coordinate del centro della sfera osculatrice sotto una forma semplicissima; e mostrano in particolare che *nelle linee per le quali ρ è costante e in queste sole il centro della sfera osculatrice coincide sempre col centro di curvatura della linea data,* quando, come supponiamo, si faccia astrazione dai punti dei piani osculatori stazionarii oltre che da quelli nei quali si avessero singolarità nelle solite derivate.

E così chiamando *linea dei centri delle sfere osculatrici* il luogo di questi centri, noi possiamo dire che le sue equazioni sono date dalle formole (9) e *le sole linee per le quali la linea dei centri di curvatura coincide con quella dei centri delle sfere osculatrici sono le linee nelle quali il raggio di prima curvatura ρ è costante*, quando si richiedano le solite condizioni rispetto alle derivate di x, y, z ecc.

In particolare dunque *nelle eliche circolari la linea dei centri di curvatura coincide con quella dei centri delle sfere osculatrici.*

455. — Anche per la sfera osculatrice si ha un teorema analogo a quello che si dette pel piano osculatore al § 399 [pag. 534 e seg.] poichè si dimostra che *colla solita esclusione dei punti dei piani osculatori stazionarii la sfera osculatrice è il limite delle posizioni successive di una sfera condotta pel punto che si considera sulla curva e per altri tre punti della curva stessa quando questi punti si fanno avvicinare indefinitamente al primo; ammesso, ben inteso, che questi tre punti siano tali da doversi riguardare come distinti anche quando si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al primo*, per modo cioè che le differenze almeno di una delle loro coordinate debbano riguardarsi sempre come infinitesime di un ordine non superiore al primo rispetto agli accrescimenti della variabile indipendente.

Continuiamo infatti a rappresentare colla equazione (1) una sfera di raggio R e col centro nel punto (x_0, y_0, z_0), condotta pel punto M (x, y, z) della curva.

Allora si avrà ancora la (2); e se $M'(x+\Delta_1 x\,,\ y+\Delta_1 y\,,\ z+\Delta_1 z)$, $M''(x+\Delta_2 x\,, y+\Delta_2 y\,, z+\Delta_2 z)$, $M'''(x+\Delta_3 x\,, y+\Delta_3 y\,, z+\Delta_3 z)$ sono tre punti vicinissimi ad M e per questi punti deve passare la sfera (1), le coordinate x_0, y_0, z_0 del centro di questa sfera dovranno soddisfare alle tre equazioni

$$(x-x_0)\Delta_1 x+(y-y_0)\Delta_1 y+(z-z_0)\Delta_1 z+\frac{1}{2}(\Delta_1 x^2+\Delta_1 y^2+\Delta_1 z^2)=0\,,$$

$$(x-x_0)\Delta_2 x+(y-y_0)\Delta_2 y+(z-z_0)\Delta_2 z+\frac{1}{2}(\Delta_2 x^2+\Delta_2 y^2+\Delta_2 z^2)=0\,,$$

$$(x-x_0)\Delta_3 x+(y-y_0)\Delta_3 y+(z-z_0)\Delta_3 z+\frac{1}{2}(\Delta_3 x^2+\Delta_3 y^2+\Delta_3 z^2)=0\,.$$

Ma essendo ancora ω la variabile indipendente, e indicando con h_1, h_2, h_3 gli accrescimenti che essa riceve quando da M si passa rispettivamente in M', M'', M''', avremo subito formole analoghe alle (3) per determinare i valori di $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots$; quindi sostituendo nelle equazioni precedenti, e indicando per brevità con A, B, C le espressioni $\Sigma(x-x_0)x'$,

$\frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x_0, y_0, z_0)$; dunque se x_0+h_0, y_0+k_0, z_0+i_0 soddisfano alle equazioni (11), dovremo avere le equazioni

$$f(\omega, x_0, y_0, z_0) + \varepsilon' = 0 \;, \quad \frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x_0, y_0, z_0) + \varepsilon'' + \varepsilon_1 = 0 \;,$$

dove ε_1 è il valore di ε nel punto $(\omega, x_0+h_0, y_0+k_0, z_0+i_0)$ e ε' e ε'' sono quantità arbitrariamente piccole; e ora, poichè di qui apparisce evidentemente che $f(\omega, x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x_0, y_0, z_0)$ devono essere zero, si potrà intanto affermare che se esiste una curva limite delle intersezioni (supposte esistenti) della superficie (10) che corrisponde al valore che si considera di ω con quelle che corrispondono ai valori vicinissimi $\omega+h$ di ω, questa curva limite sarà rappresentata dalle due equazioni

$$(12) \qquad f(\omega, x, y, z) = 0 \;, \quad \frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x, y, z) = 0 \,.$$

457. — Viceversa se si ammette ora che la funzione $f(\omega, x, y, z)$ nel campo nel quale si considerano ω, x, y, z, oltre alla derivata parziale del prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial\omega}$ abbia finite e continue anche le altre derivate parziali del prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ e le tre derivate del second'ordine $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z}$, sarà facile vedere che quando le equazioni (12) sono soddisfatte dal sistema di valori ω, x_0, y_0, z_0 di ω, x, y, z, e per questi valori di ω, x, y, z uno almeno dei tre determinanti

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} \end{vmatrix} \,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} \end{vmatrix} \,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} \end{vmatrix} \,,$$

che sono i minori del second'ordine della matrice

$$(14) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} \end{Vmatrix} \,,$$

è differente da zero — ciò che corrisponde a dire che questa matrice sia di caratteristica 2 —, esiste sempre una porzione di curva che passa pel punto (x_0, y_0, z_0) ed ha per equazioni le (12). E inoltre questa curva è anche il limite delle successive intersezioni della superficie (10) corrispondente al valore di ω che si considera colle superficie vicinissime corrispondenti ai valori $\omega+h$ di ω, le quali intersezioni vengono allora sempre ad esistere.

Incominciamo infatti dall'osservare che se le indicate ipotesi sono soddisfatte, una almeno delle derivate che figurano nella prima linea della matrice (14) sarà diversa da zero; e noi ora per fissare le idee, ammetteremo che $\frac{\partial f}{\partial z}$ e il secondo dei determinanti precedenti (13) siano diversi da zero nel punto (ω, x_0, y_0, z_0); e allora, ricordando quanto si disse trattando delle funzioni implicite, si conclude subito che pel valore ω che si considera le equazioni (12) definiscono due funzioni y e z di x a un sol valore, finite e continue insieme alle loro derivate prime in tutto un intervallo che comprende il punto x_0, e queste funzioni per $x=x_0$ si riducono a y_0 e z_0. E questo per quanto si disse al § 366 [pag. 496-97] basta intanto a provare la prima parte di quanto volevamo, cioè che le equazioni (12) rappresenteranno un pezzo di curva che passa pel punto (x_0, y_0, z_0) e ivi ha sempre una tangente determinata, ecc....; e tutto quello che diremo pel punto (x_0, y_0, z_0) di questa curva, a causa della continuità che supponiamo nelle derivate di $f(\omega, x, y, z)$ che qui si considerano, varrà per tutti i punti di un certo tratto della curva stessa che comprende il punto (x_0, y_0, z_0).

Con questi dati poi sarà facile di dimostrare anche la seconda parte di quanto abbiamo detto sopra, poichè si potrà facilmente vedere che la superficie (10) che corrisponde al valore ω di ω è incontrata dalle superficie vicinissime che corrispondono ai valori $\omega+h$ pure di ω; e la curva C ora indicata è il limite delle successive linee d'intersezione che così si hanno.

Si osservi infatti che avendosi

$$(15) \qquad f(\omega, x_0, y_0, z_0) = 0 \,,$$

e nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) la $\frac{\partial f}{\partial z}$ essendo diversa da zero, questa equazione pel valore di ω che si considera, e pei valori di x e y in un piccolo intorno di (x_0, y_0) definirà una funzione z di x e y che per $x=x_0$, $y=y_0$ è eguale a z_0 e che in tutti i punti dell'intorno ha le sue derivate parziali del prim'ordine finite e continue.

Queste derivate parziali saranno determinate dalle equazioni $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0$, essendo p e q le solite notazioni di Monge; e se $x_0+\alpha$, $y_0+\beta$ sono un sistema qualunque di valori di x e y nell'intorno di (x_0, y_0), e $z_0+\gamma$ è il valore corrispondente di z, insieme alla equazione

$$(16)\qquad f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=0$$

avremo anche per la formola di Taylor abbreviata a più variabili (§ 224 [pag. 310])

$$z_0+\gamma=z_0-\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)_1\alpha-\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)_1\beta,$$

ovvero

$$(17)\qquad \gamma=-\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)_1\alpha-\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)_1\beta,$$

gli indici alle parentesi indicando che le derivate devono esser prese in un punto intermedio di un certo intorno piccolissimo di (x_0, y_0, z_0) e pel valore ω che si considera.

D'altra parte si ha

$$f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)+\frac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)\,h+\sigma h,$$

essendo σ una quantità che, *dipendentemente dalla piccolezza di h* e — qualunque siano α, β, γ —, è minore di quel numero che più ci piace; quindi poichè si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\frac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0, y_0, z_0)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial x}\right)_2\alpha+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}\right)_2\beta+\left(\frac{\partial f}{\partial\omega\,\partial z}\right)_2\gamma,$$

dove l'indice alle derivate seconde indica che devono esser prese pel valore ω che si considera e in un punto intermedio dell'intorno (x_0, y_0, z_0), sostituendo nella precedente, coll'aver riguardo alla (16) e all'essere $\frac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0, y_0, z_0)=0$, si concluderà che, essendo α, β, γ quantità tali da rendere soddisfatta la (16) si ha la formola seguente

$$\frac{1}{h}f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial x}\right)_2\alpha+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}\right)_2\beta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}\right)_2\gamma+\sigma,$$

la quale col sostituirvi il valore di γ dato dalla (17), si trasforma nell'altra

$$(18)\qquad \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial x}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}\right)_2\right\}\alpha+$$
$$+\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}\right)_2-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}\right)_2\right\}\beta+\sigma;$$

e ora da questa si dedurrà subito quanto abbiamo enunciato sopra.

Si supponga infatti che h sia numericamente inferiore a un numero arbitrariamente piccolo δ, e α e β non si facciano variare respettivamente altro che fra $-\sigma_1$ e σ_1 e fra $-\sigma_2$ e σ_2 essendo σ_1 e σ_2 quantità piccole a piacere; con che γ, essendo determinato dalla (17), verrà anch'esso a variare in un intervallo ristrettissimo.

Allora $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$ e il coefficiente di β nella formola precedente differiranno tanto poco quanto si vuole dai valori di $\frac{\partial f}{\partial z}$ e dal secondo dei determinanti (13) nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) e quindi saranno discosti da zero più di una quantità determinata; talchè ricordando che la piccolezza di σ non dipende che da quella di h, si vede subito che prendendo α e h sufficientemente piccoli, si potrà fare in modo che il secondo membro della formola precedente (18) cangi segno nel passare di β da $-\sigma_2$ a σ_2, e ciò per ogni sistema di valori sufficientemente piccoli di α e h e senza che β esca dall'intervallo $(-\sigma_2, \sigma_2)$.

Questo evidentemente, a causa della continuità delle varie funzioni che qui compariscono, porta che per ogni valore di h compreso fra $-\delta$ e δ, quando δ è sufficientemente piccolo, e per ogni valore di α compreso fra $-\sigma_1$ e σ_1, essendo anche σ_1 sufficientemente piccolo, esista un valore di β compreso fra $-\sigma_2$ e σ_2 che unito al valore di γ, che è determinato dalla (17), soddisfa alla equazione $f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=0$; e questo valore di β e quindi anche quello di γ saranno unici per ogni valore di α e di h, perchè altrimenti la derivata rispetto a β di $f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ dopo che per γ vi è stato messo il suo valore (17), — o quella rispetto ad y di $f(\omega, x, y, z)$ dopo che per z vi è stato messo il suo valore $z_0+\gamma$ — sarebbe zero in un punto dell'intorno di (ω, x_0, y_0, z_0) che qui si viene in sostanza a considerare, e ciò non può avvenire perchè questa derivata è pochissimo differente dal rapporto del secondo dei determinanti (13) a $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Dunque per ogni valore di h compreso fra $-\delta$ e δ e per ogni valore $x_0+\alpha$ di x fra $x_0-\sigma_1$ e $x_0+\sigma_1$ esisterà un sistema di valori $y_0+\beta$, $z_0+\gamma$ per le y e z che soddisferanno ad un tempo le due equazioni $f(\omega, x, y, z)=0$ e

$f(\omega+h, x, y, z)=0$, e i sistemi di valori di x, y, z che così si avranno si manterranno tutti in un intorno piccolo a piacere del punto (x_0, y_0, z_0), perchè anche l'intervallo $(-\sigma_2, \sigma_2)$ nel quale varia β e il corrispondente nel quale varia γ sono piccoli a piacere nostro.

Questo mostra evidentemente non solo che la superficie (10) corrispondente al valore che si considera di ω è incontrata almeno in piccoli tratti dalle superficie corrispondenti ai valori sufficientemente prossimi $\omega+h$ di ω ma anche che le curve d'intersezione hanno per limite la curva rappresentata dalle equazioni (12) in tutto un intervallo che racchiude il punto (x_0, y_0, z_0), tutte le volte che pel valore ω che si considera i determinanti (13) non sono tutti eguali a zero; e con ciò resta dimostrato quanto abbiamo enunciato sopra.

E si può notare che, invece della condizione che i determinanti (13) non siano tutti zero, si potrebbe porre l'altra che le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ non siano tutte eguali a zero nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) e neppure siano tutte eguali a zero le derivate prime rispetto a ω di quelli fra i quozienti di queste quantità prese due a due che hanno un significato; giacchè se per es. $\frac{\partial f}{\partial z}$ e il secondo dei determinanti (13) non sono zero, questo determinante si potrà porre sotto la forma $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)$, e quindi anche la derivata rispetto a ω del rapporto $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ sarà diversa da zero; e viceversa se per es. questo rapporto nel solito punto ha un significato e la sua derivata rispetto a ω non è zero, allora non saranno zero nè $\frac{\partial f}{\partial z}$, nè il secondo dei determinanti (13).

458. — Considerazioni analoghe valgono pel caso in cui si cerchi il limite del punto d'incontro delle superficie (10) corrispondenti ai valori $\omega, \omega+h$ e $\omega+h_1$ di ω quando h e h_1 impiccoliscono indefinitamente in modo però che $h-h_1$ sia infinitesimo di ordine non superiore al primo rispetto a h e h_1 e ammesso dapprima che l'indicato punto limite esista.

Si osservi infatti che anche in questo caso, se un punto limite (x_0, y_0, z_0) esiste, e la funzione $f(\omega, x, y, z)$ in un certo campo relativo a ω, x, y, z è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}$ il punto limite (x_0, y_0, z_0) dovrà soddisfare alle tre equazioni

$$f(\omega, x, y, z)=0 \ , \ \frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega, x, y, z)=0 \ , \ \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f(\omega, x, y, z)=0 \, ;$$

giacchè, se insieme a $f(\omega, x, y, z)=0$ sarà $f(\omega+h, x, y, z)=0$ e $f(\omega+h_1, x, y, z)=0$, avremo le equazioni

$$f(\omega, x, y, z)=0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \omega}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\frac{h}{2}+\sigma_1 h=0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \omega}+\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}\frac{h_1}{2}+\sigma_2 h_1=0 \, ,$$

e quindi anche le altre

$$f(\omega, x, y, z)=0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \omega}+\varepsilon_1=0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}+2\sigma_1\frac{h}{h-h_1}+2\sigma_2\frac{h_1}{h-h_1}=0 \, ,$$

l'ultima delle quali si trova sottraendo le due ultime delle precedenti, e in esse σ_1, σ_2 e ε_1 sono quantità che impiccoliscono indefinitamente con h e h_1; e ora queste equazioni, con considerazioni analoghe a quelle fatte in principio del paragrafo precedente, ci mostrano subito che se pel valore ω che si considera esiste un punto limite (x_0, y_0, z_0) delle successive intersezioni delle superficie corrispondenti ai valori ω, $\omega+h$ e $\omega+h_1$ di ω, le sue coordinate (x_0, y_0, z_0) dovranno soddisfare alle equazioni

$$f=0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial \omega}=0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}=0 \, . \tag{19}$$

459. — Viceversa, se si ammette inoltre che pei valori di ω, x, y, z che si considerano tutte le derivate parziali di primo e second'ordine di $f(\omega, x, y, z)$ e anche le derivate terze $\frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial z}$ siano finite e continue, sarà facile vedere che quando pel solito valore di ω che si è preso a considerare esiste un punto (x_0, y_0, z_0) pel quale queste tre equazioni sono soddisfatte, e il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial z} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial y} & \frac{\partial^3 f}{\partial \omega^2 \partial z} \end{vmatrix} \tag{20}$$

non è zero, questo punto (x_0, y_0, z_0) è il limite dei punti d'incontro successivi (che allora vengono sempre ad esistere) della superficie ω colle superficie $\omega+h$ e $\omega+h_1$, quando h e h_1 impiccoliscono indefinitamente nel modo suindicato.

Si osservi infatti che se le condizioni ora indicate sono soddisfatte, lo saranno pure quelle poste nel paragrafo precedente intorno ai determinanti (13); e quindi, supposto di essere per es. nel caso in cui $\frac{\partial f}{\partial z}$ e il secondo degli stessi determinanti nel punto (ω, x_0, y, z_0) sono diversi da zero, per ogni valore di h compreso fra $-\delta$ e δ e per ogni valore di x compreso fra $x_0-\sigma_1$ e $x_0+\sigma_1$ esisterà un sistema unico di valori di y e z che saranno funzioni di x e che soddisfaranno alla equazione $f(\omega, x, y, z)=0$ e all'altra $f(\omega+h, x, y, z)=0$, per modo che, chiamando $x_0+\alpha$, $y_0+\beta$, $z_0+\gamma$ i valori così corrispondenti di x, y, z, avremo per la (18) e per la (17)

$$(21)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}}\alpha+\delta_1\alpha+\delta'_1\beta+\sigma', \\[3ex] \gamma = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\alpha-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\beta+\varepsilon_1\alpha+\varepsilon'_1\beta=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\omega\,\partial z}}\alpha+\delta_2\alpha+\delta'_2\beta+\sigma'', \end{cases}$$

quando invece delle derivate in punti intermedii dell'intorno di (x_0, y_0, z_0) s'introducano subito quelle nel punto (x_0, y_0, z_0) coll'aggiungere in compenso le quantità $\delta_1\alpha, \delta'_1\beta, \sigma', \ldots$ nelle quali i coefficienti $\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2$ di α e β dipendentemente dalla piccolezza di α saranno arbitrariamente piccoli e le σ', σ'' saranno pure piccolissime dipendentemente dal valore di h e qualunque siano i valori (naturalmente piccolissimi) di α, β e γ.

Si supponga ora di avere determinate le funzioni y e z o le quantità precedenti $y_0+\beta$ e $z_0+\gamma$ che per ogni valore $x_0+\alpha$ di x fra $x_0-\sigma_1$ e $x_0+\sigma_1$ e pei valori che si considerano di h soddisfano le due equazioni

$$(22)\qquad f(\omega, x, y, z)=0\ ,\quad f(\omega+h, x, y, z)=0\ ,$$

e si consideri la funzione $f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ dove $x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma$ hanno questi valori, nei quali β e γ sono legati ad α dalle equazioni (21) per ogni valore di α fra $-\sigma_1$ e σ_1. Avremo

$$(23)\quad \begin{cases} f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=0, \\ f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\dfrac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)h+\dfrac{\partial^2}{\partial\omega^2}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)\dfrac{h^2}{2}+\sigma'_1 h^2 = \end{cases}$$

mentre sarà

$$f(\omega+h_1, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\frac{\partial}{\partial\omega}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)h_1+\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)\frac{h_1^2}{2}+\sigma''_1 h_1^2,$$

dove σ'_1 e σ''_1 sono arbitrariamente piccole dipendentemente da h e da h_1 e non da α, β, γ; e poichè h e h_1 non sono zero e non sono uguali fra loro questa formola per mezzo della seconda delle (23) si trasforma nell'altra

$$(24)\quad \frac{2}{h_1(h_1-h)}f(\omega+h_1, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)-2\sigma'_1\frac{h}{h_1-h}+2\sigma''_1\frac{h_1}{h_1-h}\,.$$

Ma, siccome nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^2}=0$, sarà

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\,\partial x}\alpha+\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\,\partial y}\beta+\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\,\partial z}\gamma+\delta_4\alpha+\delta'_5\beta+\delta''_5\gamma\ ,$$

essendo $\delta_4, \delta'_5, \delta''_5$ nuove quantità che dipendentemente dalla piccolezza di α sono arbitrariamente piccole; quindi sostituendo per β e γ i valori (21) e indicando con D il determinante (20), otterremo la formola

$$\frac{2}{h_1(h_1-h)}f(\omega+h_1, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)=D\alpha+\delta''_1\alpha+\delta''_2\beta+\delta''_3\gamma+\sigma'''+2\sigma'_1\frac{h}{h_1-h}+2\sigma''_1\frac{h_1}{h_1-h}$$

dove per le nostre ipotesi i rapporti $\frac{h}{h_1-h}$, $\frac{h_1}{h_1-h}$ non superano mai un numero finito, e mentre α varia da $-\sigma_1$ a σ_1 le quantità $\delta''_1, \delta''_2, \delta''_3$ si mantengono arbitrariamente piccole, e similmente, se h e h_1 sono abbastanza piccoli, anche $\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma'''_1$ sono piccolissime dipendentemente però dai valori di h e di h_1 e non da quelli di α, β, γ.

Questo, per la ipotesi fatta che D sia diverso da zero, mette in evidenza al solito un cangiamento di segno che avverrà in $f(\omega+h_1, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ quando, avendo h e h_1 i valori scelti, e β e γ essendo i valori (21) legati ad α e ad h in modo che per $x=x_0+\alpha$, i valori $y_0+\beta$, $z_0+\gamma$ presi come valori di y e z soddisfino alle equazioni (22), si farà variare α da $-\sigma_1$ a σ_1; quindi è certo ora che per un valore particolare di α fra $-\sigma_1$ e σ_1 anche la funzione $f(\omega+h_1, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$ dovrà annullarsi, e questo evidentemente dimostra quanto abbiamo enunciato sopra.

460. — Un processo simile dimostra che sotto le stesse condizioni il punto (x_0, y_0, z_0) determinato dalle (19) può riguardarsi come limite della intersezione della superficie $f(\omega+h, x, y, z)=0$ colla curva limite ottenuta colle prime considerazioni cioè colla curva di equazioni $f(\omega, x, y, z) = 0$, $\frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x, y, z) = 0$; giacchè allora se $y_0+\beta$ e $z_0+\gamma$ sono le funzioni y e z di ω che corrispondono a questa curva, la formola di Taylor abbreviata, per quanto si disse trattando delle funzioni implicite, ci darà le due

$$\beta = y'_0\alpha + \sigma'\alpha \ , \ \gamma = z'_0\alpha + \sigma''\alpha \ ,$$

dove y'_0 e z'_0 sono precisamente le quantità che figurano come coefficienti di α nelle espressioni (21) di β e γ che avevamo nel paragrafo precedente; e ora invece delle (23) si avranno le altre più semplici

$$f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial\omega} f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma) = 0 \ ,$$

e si avrà la formola

$$f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma) = \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} f(\omega, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)\frac{h^2}{2} + \sigma''' h^2 = 0 \ ,$$

nella quale σ''' è una quantità piccolissima dipendente dalla piccolezza di h e non da quella di α, β, γ; per modo che evidentemente, dividendo quest'ultima equazione per h^2 e riducendola allora nelle condizioni stesse della (24), si concluderà subito senz'altro quanto testè abbiamo detto.

461. — E così riassumendo e sostituendo ora alle derivate $\frac{\partial f}{\partial\omega}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^2}$ i differenziali df e d^2f presi rispetto a ω col considerare x, y, z come quantità costanti, noi possiamo affermare che quando è data una equazione della forma

$$f(\omega, x, y, z) = 0 \tag{25}$$

dove ω è un parametro variabile (che però è costante per ognuna delle equazioni $f(\omega, x, y, z) = 0$ che così si considerano) la curva limite delle intersezioni della superficie corrispondente al valore ω di ω con quelle corrispondenti ai valori vicinissimi di ω esisterà e sarà rappresentata dalle equazioni

$$f = 0 \ , \ df = 0 \tag{26}$$

tutte le volte che queste equazioni coesistono pel valore che si considera di ω e per un sistema di valori x_0, y_0, z_0 di x, y, z; e che al tempo stesso in un intorno del punto (ω, x_0, y_0, z_0) la funzione f è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial\omega}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z}$; e sup-

posto che nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) non siano zero insieme i tre determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} \end{vmatrix} , \tag{27}$$

ciò che equivale a richiedere che nel punto (ω, x_0, y_0, z_0) la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} \end{Vmatrix} \tag{28}$$

sia di caratteristica 2; o anche, il che è lo stesso, non siano zero contemporaneamente tutte le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ e tutte le derivate prime rispetto ad ω di quelli fra i rapporti di queste derivate che hanno un significato.

E se sarà finita e continua anche la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial\omega^2}$ insieme alle derivate terze $\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial z}$ in un intorno dello stesso punto (ω, x_0, y_0, z_0), e in questo punto saranno soddisfatte le equazioni

$$f = 0 \ , \ df = 0 \ , \ d^2f = 0 \ , \tag{29}$$

e il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\omega\partial z} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial y} & \frac{\partial^3 f}{\partial\omega^2\partial z} \end{vmatrix} \tag{30}$$

sarà diverso da zero, allora questo punto (x_0, y_0, z_0) pel valore ω che si considera potrà riguardarsi come il limite dei punti d'intersezione (che allora verranno sempre ad esistere) fra la superficie (ω) e le superficie vicinissime $(\omega+h)$ e $(\omega+h_1)$, o anche come il limite del punto d'incontro fra la curva limite (26) e la superficie $(\omega+h)$; intendendo però al solito che h e h_1 abbiamo valori tali da doversi riguardare come distinti anche quando si trascurano gl'infinitesimi di ordime superiore al primo rispetto agli accrescimenti stessi.

A queste conclusioni poi si deve aggiungere che le linee e i punti pei quali fossero zero i determinanti (27) o (30) devono essere esaminati accuratamente a parte potendo anch'essi dar luogo a curve limiti o punti limiti, ecc... e in ogni caso per la curva limite, come per il punto limite di cui sopra è parola, quando questa curva e questo punto esistono, e le derivate prime e seconde di f respettivamente sono finite e continue, si devono aver sempre le equazioni (26) o le (29).

Oltracciò osserviamo che, come si disse al principio del § 456, invece di partire da una equazione come la (25), si può partire da una equazione della forma $f(x, y, z, X, Y, Z) = 0$, nella quale ora X, Y, Z rappresentino le coordinate dei punti della superficie che finora avevamo indicato con x, y, z, e le attuali x, y, z siano funzioni di ω che determinano le coordinate dei punti di una curva, riferendosi così ad una superficie che dipende dal punto (x, y, z) di questa curva.

E aggiungiamo infine che considerazioni analoghe possono farsi per le equazioni $f(\omega, x, y) = 0$ relative alle curve piane, tornando così a ottenere con un processo di dimostrazione leggermente diverso i risultati che ottenemmo ai §§ 339 e 340 [pag. 463 e seg.] per gli inviluppi delle curve piane.

462. — I risultati generali che ora abbiamo ottenuto trovano subito la loro applicazione per lo studio delle sfere osculatrici delle curve.

Ricordiamo perciò che se $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $z = z(\omega)$ sono le equazioni di una curva, le coordinate del centro della sfera osculatrice in un punto (x, y, z) nel quale il determinante

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

non è zero, sono le seguenti

$$(32) \qquad \begin{cases} (x-x_0)\,dx + (y-y_0)\,dy + (z-z_0)\,dz = 0\,, \\ (x-x_0)\,d^2x + (y-y_0)\,d^2y + (z-z_0)\,d^2z + ds^2 = 0\,, \\ (x-x_0)\,d^3x + (y-y_0)\,d^3y + (z-z_0)\,d^3z + 3\,ds\,d^2s = 0\,, \end{cases}$$

e rappresentando con Λ il primo membro della prima equazione, possiamo prenderle sotto la forma

$$(33) \qquad \Lambda = 0\ ,\ d\Lambda = 0\ ,\ d^2\Lambda = 0\ ,$$

dove i differenziali sono presi rispetto ad x, y, z o rispetto ad ω.

Ora la prima delle equazioni (32), o $\Lambda = 0$, quando in essa vi si considerino x_0, y_0, z_0 come coordinate variabili, rappresenta il piano normale della curva nel punto (x, y, z). Essa poi unita alla seconda delle stesse equazioni (32)

rappresenta una retta quando i tre determinanti

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}$$

non siano contemporaneamente zero cioè quando il punto $(x, y\ z)$ non sia un punto di tangenti stazionarie.

E infine le tre equazioni prese insieme determinano un punto (contro della sfera osculatrice) quando il determinante

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

non sia zero, cioè quando il punto (x, y, z) non sia un punto di piani osculatori stazionarii, il che è già stato da noi sempre escluso.

Dunque poichè, essendo $\Lambda = (x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz$, i determinanti (34) e (35), all'infuori di un fattore $d\omega^2$ o $d\omega^5$, non sono altro che i determinanti (27) e (30) del paragrafo precedente, noi possiamo senz'altro concludere che pei punti (x, y, z) delle curve che non sono punti di tangenti stazionarie esiste una retta limite delle intersezioni del piano normale coi piani normali vicinissimi, e questa retta limite è rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$(36) \qquad (x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0$$

$$(37) \qquad (x - x_0)\,d^2x + (y - y_0)\,d^2y + (z - z_0)\,d^2z + ds^2 = 0$$

quando in esse vi si considerino x_0, y_0, z_0 come coordinate variabili.

E similmente quando il punto (x, y, z) della curva non è un punto di piani osculatori stazionarii, esiste un punto limite delle intersezioni del piano normale nel punto (x, y, z) coi piani normali relativi a due punti vicinissimi a questo, e sempre distinti fra loro; e le coordinate x_0, y_0, z_0 di questo punto limite sono determinate dalle equazioni (32), e quindi lo stesso punto è il centro della sfera osculatrice.

463. — La retta limite delle intersezioni del piano normale coi piani normali vicinissimi è quella che dicesi *retta polare della curva* (§ 423 [pag. 563]); e poichè combinando le (36) e (37) si vede che questa retta si presenta come intersezione del piano normale (36) con un piano di equazione

$$(x - x_0)\,d\frac{dx}{ds} + (y - y_0)\,d\frac{dy}{ds} + (z - z_0)\,d\frac{dz}{ds} + ds = 0\,,$$

che evidentemente è quel piano P′ che considerammo al detto § 423 e che è perpendicolare alla normale principale, se ne deduce senz'altro che questa retta polare è perpendicolare alla normale principale, e quindi è parallela alla binormale.

Da ciò segue anche evidentemente che la retta polare passa pel centro di curvatura della curva, oltre a contenere per quanto dicemmo il centro della sfera osculatrice.

Inoltre, come pure dicemmo sopra, il punto limite delle intersezioni del piano normale nel punto (x, y, z) coi piani normali relativi a due punti vicinissimi è il centro della sfera osculatrice, e per quanto dicemmo nei paragrafi precedenti può anche riguardarsi come limite del punto d'incontro della retta polare col piano normale in un punto che si avvicina indefinitamente a quello dato, ecc....

Così riassumendo può dirsi che esiste una retta (retta polare) che è l'incontro di due piani normali infinitamente vicini; e esiste un punto che è al tempo stesso il punto d'incontro di tre piani normali infinitamente vicini e il punto d'incontro della polare col piano normale alla curva in un punto infinitamente vicino, ed è il centro della sfera osculatrice, ecc...

464. — La curva luogo dei centri delle sfere osculatrici può dunque riguardarsi anche come il luogo dei punti d'intersezione di tre piani normali infinitamente vicini; e la superficie luogo delle rette condotte parallelamente alla binormale pel centro di curvatura o pel centro della sfera osculatrice può riguardarsi come la superficie luogo delle rette d'intersezione di due piani normali infinitamente vicini.

Quest'ultima superficie è quella conosciuta col nome di *superficie polare*, e può evidentemente rappresentarsi col sistema delle due equazioni (36) e (37) quando in esse si considerino x_0, y_0, z_0 come coordinate variabili e ω si consideri come un parametro variabile da eliminarsi fra queste equazioni. Quando poi questo parametro ω non venga eliminato e si rappresenti la superficie polare col sistema delle due equazioni (36) e (37), allora ω sarà costante lungo le rette polari e varierà passando dall'una di queste rette all'altra, talchè potrà anche considerarsi come parametro di queste rette.

Aggiungiamo infine che in tutti questi studii sulla sfera osculatrice nei punti delle curve, abbiamo sempre escluso che si tratti di punti di piani osculatori stazionarii, ma con considerazioni simili a quelle che facemmo nel capitolo precedente potremmo considerare anche il caso in cui si tratti di questi punti.

XXXIII.

Superficie inviluppi

Studii generali su queste superficie.

465. — I risultati generali ottenuti nel capitolo precedente ai §§ 456 e seg. giovano grandemente per la teoria delle superficie inviluppi, e anzi possono riguardarsi come relativi più specialmente a questa teoria.

Sia ora

$$(1) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

nella quale α è un parametro variabile, l'equazione di un sistema di superficie ciascuna delle quali si ottiene dando ad α valori particolari fra quelli che può avere in un certo intervallo.

Queste superficie, che evidentemente avranno tutte una proprietà comune espressa dalla equazione (1), al variare con continuità di α potranno successivamente incontrarsi; e se esistono delle curve limiti per queste successive intersezioni, il luogo geometrico di queste curve limiti formerà generalmente una nuova superficie.

Questa nuova superficie è quella che dicesi *l'inviluppo* delle superficie (1), le quali alla lor volta diconsi *superficie inviluppate*; e le curve limiti che allora successivamente si ottengono, dietro una denominazione attribuita loro da Monge, diconsi le *caratteristiche dell'inviluppo*. E se, come ordinariamente accade, per ognuno dei valori di α che si considerano esiste un punto limite per la intersezione della superficie (1) che corrisponde a questo valore di α colle superficie che corrispondono ai valori vicinissimi $\alpha+h$ e $\alpha+h_1$ di α dove h e h_1 devono essere sempre distinti fra loro nel senso più volte indicato, allora la curva luogo di questi punti viene ad essere situata sulla superficie inviluppo, e dicesi lo *spigolo di regresso* dell'inviluppo.

E così, per es. la superficie polare di una curva viene ad essere *l'inviluppo* dei piani normali di questa curva; la retta polare è la *caratteristica* di questo inviluppo; e la curva dei centri delle sfere osculatrici è lo *spigolo di regresso.*

466. — Dato un sistema di superficie (1) non sempre esisterà il loro inviluppo perchè non sempre esisteranno le curve d'intersezione della superficie corrispondente al valore di α che si vuole considerare colle superficie corrispondenti ai valori vicini $\alpha+h$ di α; o non esisteranno le curve limiti.

Però ammesso che la funzione $f(x, y, z, \alpha)$ sia finita e continua insieme alla sua derivata parziale del prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in un certo campo, e ammesso che l'inviluppo esista, ogni curva limite delle intersezioni successive, o il che è lo stesso, ogni caratteristica dell'inviluppo, secondo quanto dicemmo nel capitolo precedente, sarà rappresentata dalle due equazioni

$$(2) \qquad f(x, y, z, \alpha)=0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha)=0,$$

quando s'intenda che α in quest'equazione abbia un valore costante che sarà variabile soltanto da caratteristica a caratteristica; quindi evidentemente la superficie inviluppo, nella ipotesi già da noi ammessa che effettivamente esista, potrà anch'essa riguardarsi come rappresentata dal sistema delle due equazioni (2), intendendo però allora che α dev'essere eliminata fra queste equazioni o dev'essere un parametro al quale possono venire attribuiti tutti i valori possibili in un certo intervallo. E allora questo parametro sarà costante lungo un sistema di linee della superficie inviluppo, cioè lungo le caratteristiche, e varierà soltanto passando da una di queste caratteristiche all'altra, talchè potrà considerarsi come parametro delle stesse linee.

Ammesso poi che sia finita e continua anche la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$, lo spigolo di regresso della superficie inviluppo, quando esiste, sarà la curva rappresentata dal sistema delle tre equazioni

$$(3) \qquad f(x, y, z, \alpha)=0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha)=0 \ , \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x, y, z, \alpha)=0 \ ,$$

dove α ora è un parametro variabile da punto a punto della curva; e almeno ordinariamente le coordinate x, y, z dei punti di questa curva si esprimeranno per questo parametro α.

467 — Ciò come abbiamo detto, quando in qualche modo si sia potuto sapere che l'inviluppo delle superficie (1) pei valori di α compresi in un certo intervallo esiste.

Però quand'anche non si sappia nulla intorno alla esistenza della superficie inviluppo delle (1), se si troverà che le equazioni (2) rappresentano effettivamente una superficie pei varii valori di α compresi in un certo intervallo (a, b), e se si riscontrerà che pei valori di x, y, z corrispondenti ai punti della stessa superficie, la funzione $f(x, y, z, \alpha)$ — considerata come funzione delle quattro variabili x, y, z, α in un campo che abbia nel suo interno i punti (x, y, z) di questa superficie — è finita e continua insieme alle sue quattro derivate parziali di prim'ordine e alle tre del second'ordine $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z}$, e al tempo stesso la matrice

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} \end{matrix} \right\|$$

è di caratteristica 2, per modo che i suoi tre determinanti minori del second'ordine

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} \end{vmatrix} ,$$

non siano mai tutti zero contemporaneamente, allora per quanto si disse nel capitolo precedente, si potrà affermare che la superficie inviluppo delle (1), almeno pei valori di α compresi fra a e b, esiste ed è rappresentata dal sistema delle equazioni (2) considerate pei valori di α fra a e b; e queste equazioni per ogni valore speciale che si attribuisca ad α pure fra a e b rappresentano la caratteristica corrispondente a questo valore di α.

E se inoltre le equazioni (3) rappresenteranno una curva, e si riscontrerà che pei valori di x, y, z, α corrispondenti ai punti della stessa curva la funzione $f(x, y, z, \alpha)$ ha finite e continue anche la derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ e le tre derivate del terz'ordine $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial z}$, e il determinante

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial y} & \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial z} \end{vmatrix}$$

è differente da zero, allora, sempre per quanto si disse nel capitolo precedente, la superficie inviluppo delle (1) ammetterà anche uno spigolo di regresso che sarà appunto rappresentato dalle equazioni (3) e pei punti di questo spigolo le coordinate x, y, z si esprimeranno pel parametro α.

468. — Se poi le equazioni (2) invece di una superficie rappresenteranno una curva, essendo però ancora soddisfatte tutte le altre condizioni indicate sopra, l'inviluppo delle superficie (1) si ridurrà ad una curva che sarà quella rappresentata dalle equazioni (2) stesse; come se le equazioni (3) non corrisponderanno che a un punto, essendo ancora soddisfatte le condizioni indicate sopra, lo spigolo di regresso dell'inviluppo si ridurrà a un punto.

Si deve però notare che quando pei valori di x, y, z, α che soddisfano alle (3) siano verificate le condizioni testè indicate, e la derivata terza di f $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}$ sia anch'essa finita e continua, lo spigolo di regresso non potrà mai ridursi ad un punto a meno che non sia sempre $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = 0$; perchè le equazioni (3), quando si verificano le solite condizioni, definiscono tre funzioni $x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)$ per y, x, z, le cui derivate x', y', z' risultano dalle tre equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \, \partial x} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \, \partial z} z' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial x} x' + \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial y} y' + \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial z} z' + \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = 0$$

e queste non possono darci contemporaneamente $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ e quindi $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ e $z = \text{cost.}$ a meno che non sia sempre $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = 0$.

Aggiungiamo inoltre che se in alcuni dei punti le cui coordinate soddisfano alle equazioni (2) o alle (3) non si verificheranno tutte le condizioni indicate sopra, converrà fare un esame speciale pei punti stessi, i quali potranno ancora appartenere all'inviluppo o allo spigolo di regresso, essendo però ordinariamente punti singolari. E anzi si può notare che quando, come talvolta accade, l'inviluppo delle superficie (1) si riduce ad un punto unico — le cui coordinate (x_0, y_0, z_0) dovranno ancora soddisfare alle equazioni (2) — allora naturalmente alcune delle condizioni poste sopra dovranno cessare di essere soddisfatte perchè altrimenti, pei risultati del capitolo precedente, l'inviluppo dovrebbe per lo meno ridursi a una porzione di curva condotta per questo punto, ecc...

469. — A proposito dello spigolo di regresso dell'inviluppo di un sistema di superficie (1) si può anche osservare che, per quanto si dimostrò nel capitolo precedente, ogni suo punto può considerarsi come il luogo dei punti limiti di intersezione della caratteristica (2) che corrisponde al valore α del parametro colle superficie $(\alpha + h)$ vicinissime a quella (α) che dà luogo a questa caratteristica.

Oltre a questo poi è facile di vedere che lo spigolo di regresso può anche riguardarsi come il luogo dei punti d'incontro delle caratteristiche successive nel senso che ogni suo punto, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, può riguardarsi come situato, oltrechè sulla caratteristica (α) che passa per quel punto, anche sulla caratteristica $(\alpha + h)$ che corrisponde al punto infinitamente vicino.

E difatti, se effettivamente le equazioni (3) rappresentano una curva, e x_0, y_0, z_0 sono le coordinate del punto che corrisponde alla caratteristica α o al valore α del parametro, avremo le equazioni

$$f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0 \ , \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0 \ ,$$

le quali per la solita formola di Taylor abbreviata portano che si abbiano le due

$$f(x_0, y_0, z_0, \alpha + h) = \sigma_1 h^2 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_0, y_0, z_0, \alpha + h) = \sigma_2 h \ ,$$

essendo σ_1 e σ_2 quantità che tendono a zero con h; e questo mostra appunto che, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, il punto (x_0, y_0, z_0) può considerarsi come situato anche sulla curva

$$f(x, y, z, \alpha + h) = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha + h) = 0 \ ,$$

che non è altro che la caratteristica $(\alpha + h)$.

Se poi le equazioni (3) dello spigolo di regresso sono soddisfatte dalle coordinate di uno stesso punto (x_0, y_0, z_0) per tutti i valori di α che cadono in un dato intervallo, allora evidentemente le varie caratteristiche corrispondenti a questi valori vengono a passare tutte per quel punto.

470. — Aggiungiamo ora che *quando sono soddisfatte le condizioni che si avevano nel* § 467, *la superficie inviluppo delle superficie* (1) *e le varie superficie inviluppate sono tangenti fra loro* (cioè hanno il piano tangente comune) *in tutti i punti delle caratteristiche corrispondenti ad esclusione tutt' al più di quelli che si trovano sullo spigolo di regresso; e inoltre le varie*

caratteristiche dell' inviluppo sono tangenti allo spigolo di regresso nei punti corrispondenti quando questi punti non sono di quelli pei quali si ha $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}=0$.

Si osservi infatti che se le superficie (1) ammettono una superficie inviluppo, questa superficie verrà rappresentata dalle equazioni (2); e se (x_0, y_0, z_0) è un punto di questo inviluppo che appartiene alla caratteristica α_0 e non è un punto dello spigolo di regresso, allora, siccome la derivata rispetto ad α $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ del primo membro della seconda delle equazioni (2) non sarà zero, e si suppone che questa derivata insieme alle altre $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z}$ soddisfi alle solite condizioni di continuità, ecc., la seconda delle stesse equazioni (2) nei punti (x, y, z) di un intorno di (x_0, y_0, z_0) definisce per α una funzione $\alpha(x, y, z)$ che è a un sol valore, finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine, e che nel punto (x_0, y_0, z_0) ha il valore α_0, e quindi almeno in quest'intorno la superficie inviluppo potrà considerarsi come rappresentata dalla equazione

$$F(x, y, z) = f(x, y, z, \alpha(x, y, z)) = 0$$

dove $\alpha(x, y, z)$ è la funzione che soddisfa alla equazione $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha) = 0$, e alle altre condizioni ora indicate.

Allora, avendosi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

le derivate parziali del primo membro della equazione dell'inviluppo $F=0$ nel punto (x_0, y_0, z_0) saranno uguali ai valori di $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ di $f(x, y, z, \alpha)$ nel punto (x_0, y_0, z_0) quando $\alpha = \alpha_0$, precisamente come quelle che si hanno nello stesso punto (x_0, y_0, z_0) per la superficie inviluppata $f(x, y, z, \alpha_0)=0$ che corrisponde al valore α_0 di α; quindi considerando tutti i punti della caratteristica (α_0) che non appartengono allo spigolo di regresso, e osservando che le nostre ipotesi rispetto alla matrice (4) escludono che nei punti che si considerano $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ possano essere contemporaneamente zero, noi potremo dire che i coefficienti dei piani tangenti in questi punti alla superficie inviluppo, e quelli dei piani tangenti nei punti stessi alla superficie inviluppata (α_0) saranno uguali fra loro. E questo mostra appunto che la

superficie inviluppata (α_0) e l'inviluppo sono tangenti fra loro nei punti della caratteristica (α_0) che non appartengono nello stesso tempo allo spigolo di regresso, e resta così dimostrata la prima parte del teorema enunciato.

Passando poi a considerare lo spigolo di regresso (3) in un punto (x_0, y_0, z_0) che corrisponde alla caratteristica (α_0) e nella ipotesi che per questo punto sieno soddisfatte le condizioni del § 467 e non si abbia $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}=0$, osserveremo che allora in un piccolo intorno di (x_0, y_0, z_0) la terza delle equazioni (3) definisce una funzione $\alpha(x, y, z)$ che nel punto (x_0, y_0, z_0) ha il valore α_0, ed è a un sol valore, e finita e continua essa e le sue derivate parziali del prim'ordine, e quindi almeno in un piccolo tratto che comprende il punto (x_0, y_0, z_0) lo spigolo di regresso stesso potrà rappresentarsi colle due equazioni

$$f(x, y, z, \alpha(x, y, z)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha(x, y, z)) = 0.$$

Se ne dedurrà che per questo spigolo di regresso nel punto (x_0, y_0, z_0) i valori di dx, dy, dz soddisfaranno alle equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z}dz = 0,$$

nelle quali per $\alpha(x_0, y_0, z_0)$ può intendersi posto α_0; e quindi poichè queste equazioni stesse si hanno anche per la caratteristica (α_0), le cui equazioni sono le due

$$f(x, y, z, \alpha_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, y, z, \alpha_0) = 0,$$

e i tre determinanti (5) non sono zero, perchè altrimenti sarebbe zero anche il determinante (6), si conclude che, sotto le nostre ipotesi, lo spigolo di regresso e la caratteristica (α_0) ammettono una tangente determinata nel punto comune (x_0, y_0, z_0) quando in esso non sia $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}=0$, e questa tangente è la stessa per le due curve; talchè resta così dimostrata anche la seconda parte del teorema enunciato sopra.

471. — È da notare che per la prima parte del teorema dimostrato basterebbe richiedere che la superficie inviluppo esista, e su essa siano finite e continue la funzione $f(x, y, z, \alpha)$ e le sue derivate parziali del prim'ordine, e richiedere al tempo stesso che la seconda delle equazioni (2) dell'inviluppo definisca una delle solite funzioni $\alpha(x, y, z)$ finita, continua, ecc. e pei punti

che si considerano non si abbia $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$; mentre per la seconda parte dello stesso teorema basterebbe richiedere che lo spigolo di regresso esista e almeno pei punti che si considerano su esso siano finite e continue anche le derivate parziali del second'ordine $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z}$, e non siano zero contemporaneamente i tre determinanti (5), e oltracciò richiedere che l'ultima delle equazioni (3) definisca una delle solite funzioni $\alpha(x,y,z)$ finita, continua, ecc.... Però ordinariamente, onde esser sicuri che tutte queste condizioni sono soddisfatte, converrà ricorrere a quelle che abbiamo posto nell'enunciato, riservandosi tutt'al più di fare un esame speciale per quei punti pei quali queste ultime condizioni non fossero tutte soddisfatte.

Merita poi di essere notato in modo generale che quando si sia trovata una equazione a derivate parziali del prim'ordine $\mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$, indipendente da α, e a cui soddisfano le superficie inviluppate (1) qualunque sia α, allora anche la superficie inviluppo soddisfarà a questa equazione giacchè in ogni punto (x, y, z) della superficie inviluppo passa una superficie inviluppata, e in essa le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ vengono ad avere lo stesso valore per le due superficie purchè si tratti di punti nei quali queste superficie non hanno singolarità, ecc.

472. — Aggiungiamo che come caso particolare del teorema dimostrato si può affermare che *nelle curve il piano normale* (avendo per piano tangente sè stesso) *è tangente alla superficie polare in tutti i punti della retta polare diversi dai centri delle sfere osculatrici; e le varie rette polari sono tangenti allo spigolo di regresso della superficie, cioè alla curva luogo dei centri delle sfere osculatrici*, quando però si intendano esclusi i punti che corrispondono alle eccezioni che vengono dalla teoria generale.

E poichè se

$$\xi=\xi(\alpha) \quad , \quad \eta=\eta(\alpha) \quad , \quad \zeta=\zeta(\alpha)$$

sono le equazioni della curva data, colle notazioni generali precedenti si viene ora ad avere

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \alpha) &= (x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta', \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= (x-\xi)\xi'' + (y-\eta)\eta'' + (z-\zeta)\zeta'' - \sum \xi'^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} &= (x-\xi)\xi''' + (y-\eta)\eta''' + (z-\zeta)\zeta''' - 3\sum \xi'\xi'', \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} &= (x-\xi)\xi^{\mathrm{iv}} + (y-\eta)\eta^{\mathrm{iv}} + (z-\zeta)\zeta^{\mathrm{iv}} - \sum(4\xi'\xi''' + 3\xi''^2), \end{aligned}$$

evidentemente si può dire che, come per la prima parte del teorema si escludono o almeno si considerano a parte i punti della retta polare che sono centri della sfera osculatrice corrispondente, e si devono escludere o almeno esaminare a parte quelle rette polari per le quali si avesse qualche singolarità nel piano osculatore corrispondente, così nella seconda parte del teorema, oltre ad escludere o almeno esaminare a parte i punti della curva dei centri delle sfere osculatrici pei quali si avesse qualche singolarità in queste sfere, si devono pure escludere o almeno esaminare a parte quei punti pei quali insieme a $f=0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0$ si avesse anche $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}=0$, cioè quelli che corrispondono a punti α della curva data, pei quali fosse zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' & 0 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta''' & \sum \xi'^2 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 3\sum \xi'\xi'' \\ \xi^{\mathrm{iv}} & \eta^{\mathrm{iv}} & \zeta''' & \sum(4\xi'\xi''' + 3\xi''^2) \end{vmatrix},$$

S'intende che si suppone che le derivate di ξ, η, ζ che figurano in queste formole siano finite e continue.

473. — Le superficie inviluppi delle quali ci siamo occupati finora sono relative al caso in cui le superficie (1) che le producono contengono un solo parametro.

Talvolta però le superficie che danno luogo all'inviluppo contengono due parametri α e β, come avviene ad es. quando si cerca l'inviluppo del piano tangente a una sfera o a un ellissoide o in generale ad una superficie non sviluppabile, nel qual caso il piano tangente, variando sempre al variare del punto di contatto, dipende dalle due variabili indipendenti che determinano la posizione di questo punto.

Per dare un cenno anche di questo caso (*), supponiamo che sia

$$f(x, y, z, \alpha, \beta)=0 \tag{7}$$

la equazione delle superficie dalle quali si parte, essendo α e β due parametri del tutto indipendenti fra loro e variabili in un certo campo.

Si consideri la superficie (7) corrispondente a un sistema di valori speciali di α e β, e si diano a questi parametri due accrescimenti qualsiansi $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$.

(*) Questo caso non fu affatto trattato nelle lezioni autografate del 1877.

La nuova superficie avrà la equazione

$$(8)\qquad f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta)=0,$$

e la linea d'intersezione delle due superficie che si considerano, quando effettivamente esista, oltre che per mezzo del sistema delle equazioni (7) e (8) potremo intenderla come rappresentata anche dal sistema formato dalla equazione (7) e dall'altra

$$f(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta)-f(x, y, z, \alpha, \beta)=0,$$

che può anche scriversi sotto la forma

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial f}{\partial\beta}\Delta\beta+\varepsilon=0,$$

essendo $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ e $\frac{\partial f}{\partial\beta}$ le derivate parziali del primo membro della (7), e ε una quantità che all'impiccolire indefinito con una legge qualsiasi di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ diviene infinitesima di ordine superiore a queste quantità, e propriamente se, come supporremo senz'altro, $f(x,y,z,\alpha,\beta)$ ammette anche le derivate parziali di second'ordine rispetto alle variabili α e β finite e continue nell'intorno dei valori α e β che si considerano, sarà

$$\varepsilon=\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial\alpha^2}\Delta\alpha^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial\alpha\partial\beta}\Delta\alpha\Delta\beta+\frac{\partial^2 f_1}{\partial\beta^2}\Delta\beta^2\right),$$

l'indice ad f stando ad indicare che le derivate s'intendono prese nel punto intermedio $(\alpha+\theta\Delta\alpha, \beta+\theta\Delta\beta)$, essendo θ un numero positivo compreso fra 0 e 1 (§ 225 [pag 312]).

Ora se $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ si facessero tendere a zero sottoponendoli ad una certa legge, per es. fissando che dovesse sempre aversi $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\varphi(\alpha,\beta)+\varepsilon_1$, essendo $\varphi(\alpha,\beta)$ una funzione determinata e finita di α e β, e ε_1 una quantità che diviene infinitesima con $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, allora ammettendo che la funzione $f(x,y,z,\alpha,\beta)$ avesse finite e continue le varie derivate parziali di primo e second'ordine rispetto alle cinque variabili x, y, z, α e β, evidentemente la curva limite delle intersezioni successive delle superficie (7) quando esiste sarebbe rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$f(x, y, z, \alpha, \beta)=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\varphi(\alpha,\beta)=0,$$

e varierebbe quindi, almeno generalmente, al variare del legame stabilito fra le variazioni infinitesime di α e β.

E quando più particolarmente si supponesse $\beta=\varphi(\alpha)$, con φ funzione arbitraria di α che ha la derivata prima determinata e finita e che pel valore che si considera di α si riduce al valore che si considera di β, allora, avendosi $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}=\varphi'(\alpha)+\varepsilon_1$, per ogni funzione $\varphi(\alpha)$ che si scegliesse si cadrebbe nel caso degli inviluppi di superficie $f(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))=0$ aventi un solo parametro α, e potremmo allora ottenere infiniti inviluppi coi processi precedenti, variabili questi inviluppi al variare della funzione $\varphi(\alpha)$.

E per ognuna di queste funzioni $\varphi(\alpha)$ la caratteristica dell'inviluppo corrispondente sarebbe rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$(10)\qquad f(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\varphi'(\alpha)=0,$$

nelle quali dopo eseguite le derivazioni si intende che dovrebbe essere fatto $\beta=\varphi(\alpha)$, e la superficie risulterebbe dall'eliminare α fra queste due equazioni nelle quali fosse fatto, come abbiamo detto, $\beta=\varphi(\alpha)$.

Al variare della funzione $\varphi(\alpha)$, insieme all'inviluppo varierebbe anche la caratteristica (10) sulla superficie (7) corrispondente al sistema considerato di valori α e β, per modo che su una stessa superficie (7) corrispondente a ciascuno di questi sistemi di valori di α e β si avrebbero, almeno ordinariamente, infinite caratteristiche ciascuna in dipendenza delle varie funzioni $\varphi(\alpha)$ che possono scegliersi; e per ognuno di questi sistemi speciali di valori di α e β tutte queste infinite caratteristiche, come gli infiniti inviluppi corrispondenti alle varie funzioni $\varphi(\alpha)$, avrebbero evidentemente uno o più punti comuni (x, y, z) determinati dalla equazione (7) e dalle due

$$(11)\qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\beta}=0.$$

Più generalmente poi, quando si lascino gli accrescimenti $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ del tutto indipendenti fra loro nel loro avvicinarsi indefinitamente a zero, ogni punto limite che esista delle intersezioni delle superficie (7) e (8) o delle (7) e (9) dovrà soddisfare oltre che alla (7) alle due equazioni (11), perchè dovremo in particolare avere questo punto limite anche quando sia supposto $\Delta\alpha=0$ e si faccia tendere $\Delta\beta$ a zero in un modo qualsiasi, e viceversa; talchè, anche indipendentemente dalle considerazioni precedenti, i punti limiti delle intersezioni successive della superficie (7) corrispondente ai valori scelti delle α e β colle superficie che corrispondono ai valori vicinissimi delle stesse α e β comunque scelti, saranno quelli (x, y, z) comuni a tutte le suddette caratteristiche o ai suddetti inviluppi, cioè saranno i punti determinati dal sistema di equazioni

$$(12) \qquad f=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0\ ,\ \ \frac{\partial f}{\partial \beta}=0\ ,$$

essendo f la funzione $f(x, y, z, \alpha, \beta)$ che figura nella equazione data (7).

Il luogo di questi punti limiti — quando esistono per ogni sistema di valori α e β in tutto o parte del campo nel quale (α, β) possono prendersi e costituiscono una superficie — è la superficie S che chiamasi *l'inviluppo delle superficie a due parametri* (7). E questa superficie si presenta così anche come il luogo dei punti comuni agli infiniti inviluppi di superficie a un sol parametro ai quali accennammo sopra corrispondenti ad ogni funzione $\varphi(\alpha)$.

Per l'esistenza di questa superficie S bisogna dunque che le superficie (7) s'incontrino successivamente e inoltre che il sistema di equazioni (12) dia luogo per x, y, z a un sistema di funzioni di α e β che determinino i punti della superficie stessa; e quest'ultima particolarità avverrà sempre quando siano soddisfatte le condizioni della teoria delle funzioni implicite che valgono ad assicurare che dalle (12) si hanno le formole

$$(13) \qquad x=x(\alpha, \beta)\ ,\ y=y(\alpha, \beta)\ ,\ z=z(\alpha, \beta)\ ,$$

e che queste rappresentano effettivamente una superficie; nel qual caso esse potranno essere riguardate come quelle che determinano i punti della superficie inviluppo S in coordinate curvilinee α e β.

Volendo poi rappresentare questa superficie per mezzo di una equazione in coordinate cartesiane $f(x, y, z)=0$, occorrerà eliminare α e β fra le tre equazioni (12), e questo in particolare potrà sempre farsi valendosi delle due ultime equazioni $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial \beta}=0$, quando queste siano tali da potere servire a determinare due funzioni $\alpha(x, y, z)$ e $\beta(x, y, z)$ da sostituirsi per α e β nella prima $f=0$.

E si può ricordare che le indicate condizioni della teoria delle funzioni implicite per le quali si è certi della possibilità di avere le formole (13), con $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ e $z(\alpha, \beta)$ funzioni che ammettono le derivate parziali finite e continue almeno fino a quelle di un certo ordine i, saranno soddisfatte quando conoscendosi un punto (x_0, y_0, z_0) della superficie inviluppo corrispondente ai valori α_0 e β_0 di α e β si riscontri che pei valori di x, y, z, α e β nell'intorno di x_0, y_0, z_0, α_0 e β_0 la funzione $f(x, y, z, \alpha, \beta)$ ammette le varie derivate parziali rispetto a tutte le variabili almeno fino a quelle dell'ordine $i+1$, e che il determinante

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero pei detti valori x_0, y_0, z_0, α_0 e β_0 di x, y, z, α e β.

E per essere certi inoltre che le (13) rappresentino effettivamente una superficie e non corrispondano soltanto ad una curva o ad un punto bisognerà che esse siano tali che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|$$

risulti di caratteristica 2, onde x, y, z non siano funzioni l'una dell'altra (§ 189 [pag. 164-65 in nota]); ciò che, coll'eguagliare a zero le derivate delle tre equazioni (12) rispetto ad α e a β quando s'intende che x, y, z siano date dalla (13), porta che debba essere diverso da zero il determinante

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha} & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \end{vmatrix},$$

o $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2$ per gli stessi valori x_0, y_0, z_0, α_0 e β_0 di x, y, z, α e β.

E in questo caso, sempre per la teoria delle funzioni implicite, saremo pure certi che la seconda e terza delle (12) definiscono le due funzioni $\alpha(x, y, z)$ e $\beta(x, y, z)$ sopra indicate che siano finite e continue e abbiano le derivate parziali ancora fino a quelle dell'ordine i.

474. — *Quando poi tutte queste condizioni siano soddisfatte*, la superficie inviluppo S in ogni suo punto (x_0, y_0, z_0) che provenga dalla superficie (7) corrispondente ai valori α_0 e β_0 di α e β, — e che quindi appartenga anche a questa superficie —, avrà lo stesso piano tangente di questa; cioè *la superficie inviluppo e la inviluppata avranno sempre un contatto nei punti corrispondenti.*

Riducendosi infatti la equazione della superficie inviluppo alla seguente

$$f\big(x, y, z, \alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)\big) = 0,$$

e il differenziale del suo primo membro essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta,$$

si osserverà che nel punto (x_0, y, z_0) le funzioni $\alpha(x, y, z)$ e $\beta(x, y, z)$, oltre ad avere le derivate parziali del prim'ordine determinate e finite, vengono ad avere i valori α_0 e β_0 e si ha $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, mentre $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ non saranno tutte zero perchè il determinante (14) è diverso da zero.

Se ne dedurrà che la equazione differenziale dello stesso inviluppo nel punto (x_0, y_0, z_0) si riduce a quella stessa $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$ che si ha per la superficie inviluppata $f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0$ nello stesso punto; e questo per quanto si disse al § 371 [pag. 503] sul modo di costruire la equazione del piano tangente alle superficie basta appunto per poter dire che la superficie inviluppo e la inviluppata hanno il piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0), e questo piano è lo stesso per le due superficie.

È da notare che mentre, per ciò che precede, gli inviluppi delle superficie (1) a un solo parametro toccano ogni inviluppata *lungo tutta la caratteristica* corrispondente, nel caso degli inviluppi delle superficie a due parametri il contatto fra l'inviluppo e ciascuna inviluppata ha luogo soltanto in quei *punti* che per ogni sistema speciale di valori di α e β provengono — come punti dell'inviluppo — dalla inviluppata medesima, e che bene spesso si riducono a uno solo.

475. — Tutto questo è nel supposto che in qualche modo si sappia che le superficie a due parametri (7) s'incontrano successivamente e che il loro inviluppo esiste.

Ma se, come il più spesso avverrà nei casi comuni, si conosce un sistema di valori $x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0$ che soddisfano alle equazioni (12), cioè si conosce un punto (x_0, y_0, z_0) di quella superficie che deve essere l'inviluppo, — supposto che questo punto corrisponda ai valori α_0, β_0 dei due parametri α e β —, e se nel punto $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0)$ corrispondente alle cinque variabili x, y, z, α, β e nel suo intorno sono soddisfatte le varie condizioni della teoria delle funzioni implicite che si indicarono in fine del § 473, allora si può inversamente provare

che vengono soddisfatte di per sè le particolarità testè indicate relative alla esistenza delle intersezioni successive delle superficie (7) e all'esistenza della superficie inviluppo, e quindi è inutile di occuparsene.

È chiaro infatti che quando pel punto $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0)$ e pel suo intorno siano soddisfatte le condizioni indicate in fine del § 473, per la teoria delle funzioni implicite — come del resto già facemmo notare nel paragrafo stesso — le equazioni (12) definiranno un sistema di funzioni *fra loro distinte* $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ che sono finite e continue insieme ad alcune delle loro derivate parziali nell'intorno del punto (α_0, β_0) e che in questo punto si riducono a x_0, y_0, z_0, per modo che le (13) determineranno effettivamente una superficie S per tutti i valori di α e β nell'intorno del detto punto (α_0, β_0), e a questa superficie apparterrà il punto (x_0, y_0, z_0).

Osserviamo poi che per essere soddisfatta la condizione posta pel determinante (15) o $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2$, questa superficie S potrà essere rappresentata anche dalla equazione

$$f\big(x, y, z, \alpha(x, y, z), \beta(x, y, z)\big) = 0,$$

essendo $\alpha(x, y, z)$ e $\beta(x, y, z)$ due funzioni che verranno definite dalla seconda e terza delle (12) nell'intorno del punto (x_0, y_0, z_0); e poichè potremo ripetere le considerazioni del paragrafo precedente, questa superficie S risulterà tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) alla superficie (7) che corrisponde ai valori α_0 e β_0, e lo stesso avverrà per gli altri punti (x, y, z) della superficie (12) o (13) corrispondenti agli altri valori di α e β nelle vicinanze di α_0 e β_0 e per la superficie (7) che corrisponde a questi stessi valori di α e β; talchè se, come talvolta si fa, la superficie inviluppo fosse definita come quella superficie (13) che in ogni suo punto tocca la inviluppata (7), già sarebbe dimostrato quanto a noi in tal caso occorrerebbe di sapere, almeno per tutti i punti pei quali i determinanti (14) e (15) fossero diversi da zero.

476. — Volendo però provare — come la nostra definizione d'inviluppo richiede — che esistono anche le intersezioni successive della superficie (7), e che queste intersezioni quando si parte ad es. dalla superficie che corrisponde ai valori α_0 e β_0 di α e β conducono al punto limite (x_0, y_0, z_0), basterà fare ragionamenti del tutto simili a quelli del § 457 [pag. 604].

Osservando prima che, per essere il determinante (14) diverso da zero nel punto $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0)$, una almeno delle tre derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ per es. $\frac{\partial f}{\partial z}$ è diversa da zero, se ne deduce subito che la equazione $f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0$

definirà una funzione $z(x, y, \alpha_0, \beta_0)$ che per $x = x_0, y = y_0$ si riduce a z_0 ed è finita e continua insieme alle sue derivate parziali rispetto ad x e ad y fino a quelle di un certo ordine, per modo che la equazione $z = z(x, y, \alpha_0, \beta_0)$ potrà riguardarsi anche come la equazione della superficie (7) che corrisponde ai valori α_0 e β_0 di α e β nell'intorno del punto (x_0, y_0); e le solite derivate parziali p e q di z risulteranno determinate dalle formole $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$ che si deducono dalla equazione $f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0$.

Movendosi x e y di quantità piccolissime h e k nell'intorno del punto (x_0, y_0), la z sulla superficie (α_0, β_0) che ora consideriamo muterà di una quantità pure piccolissima l e, come al § 457, insieme a $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0, \beta_0) = 0$ avremo

$$(17) \qquad l = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}} h - \frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}} k,$$

dove coll'indice posto ad f si intende di indicare che le derivate di $f(x, y, z, \alpha_0, \beta_0)$ sono prese in un punto intermedio (x_1, y_1, z_1) della superficie nell'intorno del punto (x_0, y_0, z_0).

Prendendo ora a considerare la funzione

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0+\Delta\alpha, \beta_0+\Delta\beta),$$

essendo (x_0+h, y_0+k, z_0+l) il punto della superficie (α_0, β_0) ora considerato, e applicandole i processi stessi che seguimmo nel § 457 per trasformare la funzione che allora si aveva $f(\omega+h, x_0+\alpha, y_0+\beta, z_0+\gamma)$, si osserverà prima che, per essere ora $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0, \beta_0) = 0$, si ha

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0+\Delta\alpha, \beta_0+\Delta\beta) = f'_\alpha \Delta\alpha + f'_\beta \Delta\beta + \sigma,$$

indicando con f'_α e f'_β le derivate di $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha, \beta)$ rispetto ad α e a β per $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$, e indicando con σ una quantità che dipendentemente dalla piccolezza di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, e qualunque siano h e k e quindi l, è di un ordine di piccolezza superiore a quello di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, e propriamente è almeno di second'ordine rispetto a $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$.

Applicando poi anche a f'_α e f'_β lo sviluppo di Taylor, coll'osservare che nel punto $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0)$ sono soddisfatte anche la seconda e terza delle (12), si troverà

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0+\Delta\alpha, \beta_0+\Delta\beta) = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial\alpha\partial x} h + \frac{\partial^2 f_2}{\partial\alpha\partial y} k + \frac{\partial^2 f_2}{\partial\alpha\partial z} l\right)\Delta\alpha +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial\beta\partial x} h + \frac{\partial^2 f_3}{\partial\beta\partial y} k + \frac{\partial^2 f_3}{\partial\beta\partial z} l\right)\Delta\beta + \sigma,$$

gli indici a f stando a indicare che le derivate sono prese in punti intermedii dell'intorno di (x_0, y_0, z_0) sulla solita superficie (α_0, β_0).

Ponendo ora per l nel secondo membro il valore che si ha dalla (17), e alle derivate nei punti intermedii sostituendo le derivate corrispondenti nel punto (x_0, y_0, z_0), che ne differiranno tanto poco quanto si vuole dipendentemente dalla piccolezza di h e k e quindi di l, si otterrà la formola seguente

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial z} f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \alpha_0+\Delta\alpha, \beta_0+\Delta\beta) = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z}\right)\Delta\beta\right\} h +$$
$$+ \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z}\right)\Delta\beta\right\} k + \sigma_1\Delta\alpha + \sigma_2\Delta\beta + \sigma,$$

essendo σ_1 e σ_2 nuove quantità piccolissime la cui piccolezza dipende solo da quella di h e k e che sono di ordine superiore al primo rispetto a queste quantità h e k.

Trovata ora questa formola, prendiamo ad esaminare le espressioni

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z}\right)\Delta\beta,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial z}\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial z}\right)\Delta\beta,$$

che sono i coefficienti di h e k nella formola stessa.

In queste espressioni il determinante dei coefficienti di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ sarà diverso da zero perchè a causa delle formole generali che si dettero al § 427 *b*) [pag. 573-74] esso è il prodotto di $\frac{\partial f}{\partial z}$ pel determinante (14); quindi, poichè $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ non possono essere zero insieme, neppure le espressioni stesse potranno venire contemporaneamente zero.

Segue da ciò che per ogni sistema di valori comunque piccoli di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ nel secondo membro della formola precedente (18), nella quale per z potremo intendere posto il valore $z(x, y, \alpha_0, \beta_0)$ o $z(x_0+h, y_0+k, \alpha_0, \beta_0)$ del quale parlammo sopra, uno almeno dei coefficienti di h e k dovrà risultare diverso da zero, e supposto quindi ad es. che per un sistema di valori di $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ che si consideri il coefficiente di k sia diverso da zero, è chiaro che, per ogni valore di h arbitrariamente piccolo che si prenda, col variare di k fra numeri pure piccolissimi $-\sigma'$ e σ' (che dipenderanno dai valori che si considerano di h, $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$) il primo membro della stessa formola (17) cambierà di segno, e quindi per un valore conveniente di k fra gli stessi limiti $-\sigma'$ e σ' dovrà annullarsi.

Osservando dunque che nel punto (x_0, y_0, z_0) e nel suo intorno per

$\alpha=\alpha_0$ e $\beta=\beta_0$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial z}$ è diversa da zero, di qui risulta subito che per ogni valore di x nelle vicinanze di x_0 esisteranno valori di y e z che oltre a soddisfare alla equazione $f(x,y,z,\alpha_0,\beta_0)=0$ soddisfaranno anche all'altra $f(x, y, z, \alpha_0+\Delta\alpha, \beta_0+\Delta\beta)=0$ e saranno vicinissimi a y_0 e z_0 come x lo è a x_0, e questo dimostra completamente quanto volevamo.

477. — Così dunque data una superficie a due parametri (7), per trovarne l'inviluppo e assicurarsi della esistenza di questo, basterà combinare la (7) colle due $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial \beta}=0$, e accertarsi che siano soddisfatte le condizioni poste in fine del § 473; e allora saremo sicuri anche che vi è contatto fra la superficie inviluppata e l'inviluppo nei punti corrispondenti.

In particolare quindi, volendo ad es. l'inviluppo dei piani

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{19}$$

pei quali A, B, C, D dipendono da due parametri α e β, se indicheremo con A'_α, A'_β, $A''_{\alpha,\alpha}$, $A''_{\alpha,\beta}$, $A''_{\beta,\beta}$, B'_α, ... le derivate parziali di A, B, C, D si potrà dire che l'inviluppo cercato sarà rappresentato dal sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'_\alpha x+B'_\alpha y+C'_\alpha z+D'_\alpha=0, \\ A'_\beta x+B'_\beta y+C'_\beta z+D'_\beta=0, \end{array}\right. \tag{20}$$

per tutti i sistemi di valori di α e β pei quali il determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A'_\alpha & B'_\alpha & C'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta & C'_\beta \end{vmatrix} \tag{21}$$

non sia zero; e per gli stessi sistemi di valori di α e β le formole corrispondenti alle (13) che danno le coordinate x, y, z dei punti dell'inviluppo espresse per i parametri α e β, — che figureranno come parametri di coordinate curvilinee sull'inviluppo quando questo sia effettivamente una superficie —, saranno quelle che si ottengono colla risoluzione del precedente sistema di equazioni di primo grado (20).

Questo inviluppo poi sarà effettivamente una superficie e non si ridurrà nè ad una curva nè ad un punto ed avrà per piano tangente il piano inviluppato (19) in tutti i suoi punti (x, y, z), quando non risulti zero il determinante che ora corrisponde al determinante (15), cioè quando non si abbia la relazione

$$(A''_{\alpha,\alpha}x+B''_{\alpha,\alpha}y+C''_{\alpha,\alpha}z+D''_{\alpha,\alpha})(A''_{\beta,\beta}x+B''_{\beta,\beta}y+C''_{\beta,\beta}z+D''_{\beta,\beta})-$$
$$-(A''_{\alpha,\beta}x+B''_{\alpha,\beta}y+C''_{\alpha,\beta}z+D''_{\alpha,\beta})^2=0,$$

che avendo riguardo ai valori che si hanno per x, y, z dalle (20) quando il determinante (21) non è zero, può evidentemente scriversi sotto la forma

$$LM-N^2=0, \tag{22}$$

essendo

$$L=\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A'_\alpha & B'_\alpha & C'_\alpha & D'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta & C'_\beta & D'_\beta \\ A''_{\alpha,\alpha} & B''_{\alpha,\alpha} & C''_{\alpha,\alpha} & D''_{\alpha,\alpha} \end{vmatrix}, \quad M=\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A'_\alpha & B'_\alpha & C'_\alpha & D'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta & C'_\beta & D'_\beta \\ A''_{\beta,\beta} & B''_{\beta,\beta} & C''_{\beta,\beta} & D_{\beta,\beta} \end{vmatrix},$$

$$N=\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A'_\alpha & B'_\alpha & C'_\alpha & D'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta & C'_\beta & D'_\beta \\ A''_{\alpha,\beta} & B''_{\alpha,\beta} & C''_{\alpha,\beta} & D''_{\alpha,\beta} \end{vmatrix};$$

per modo cioè che vengono tutt'al più esclusi i valori dei parametri α e β pei quali è zero il determinante (21) e quelli pei quali è soddisfatta la relazione (22).

Superficie sviluppabili.

478. — La superficie polare di una curva, da noi considerata nei §§ 463 e 464 [pag. 615-16], appartiene alla classe delle superficie *inviluppo di un piano.*

Queste superficie, che vengono dette *sviluppabili* perchè si dimostra che possono distendersi esattamente su di un piano, vengono rappresentate dal sistema delle due equazioni

$$\varphi_1(\alpha)x+\varphi_2(\alpha)y+\varphi_3(\alpha)z+\varphi_4(\alpha)=0, \tag{1}$$

$$\varphi'_1(\alpha)x+\varphi'_2(\alpha)y+\varphi'_3(\alpha)z+\varphi'_4(\alpha)=0, \tag{2}$$

la prima delle quali rappresenta un piano e la seconda è la derivata di questa presa rispetto al parametro α.

Però, secondo quanto si disse al § 467 [pag. 618 e seg.]) onde essere sicuri che queste equazioni rappresentino effettivamente una superficie che possa riguardarsi come inviluppo del piano (1), oltre ad essere certi che esse rappresentano una superficie e non una linea, conviene essere certi che le funzioni $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$, $\varphi_4(\alpha)$ sono finite e continne insieme alle loro derivate del prim'ordine pei valori di α che si considerano, e inoltre, fatta tutt'al più eccezione per un numero finito di valori di α, sono tali che non annullano contemporaneamente i determinanti che corrispondono ora ai determinanti (5) del § 467 stesso, cioè i tre seguenti

$$\varphi_1\varphi'_2-\varphi_2\varphi'_1 \quad , \quad \varphi_2\varphi'_3-\varphi_3\varphi'_2 \quad , \quad \varphi_3\varphi'_1-\varphi_1\varphi'_3$$

che sono i minori del second'ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \end{Vmatrix}$$

formata dai coefficienti di x, y, z nelle (1) e (2), la quale perciò deve essere di caratteristica 2.

Quando queste condizioni siano soddisfatte, la caratteristica della superficie inviluppo che evidentemente sarà una linea retta, per ogni valore speciale di α sarà rappresentata dal sistema delle due equazioni (1) e (2); e lungo ognuna di queste rette, tranne tutt'al più pei punti dello spigolo di regresso, il piano tangente (dovendo essere tangente al piano inviluppato corrispondente) sarà sempre lo stesso e sarà quello rappresentato dalla equazione (1); per modo che chiamando rette generatrici della superficie le rette caratteristiche, si può dire che *nelle sviluppabili il piano tangente è lo stesso per tutti i punti della medesima generatrice, fatta tutt'al più eccezione pei punti dello spigolo di regresso; e questo piano è il piano inviluppato.*

Perchè poi esista uno spigolo di regresso si richiede almeno ordinariamente (§ 467 [pag. 618 e seg.]) che le funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 abbiano finite e continue anche le derivate seconde e che il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

E se questa condizione è soddisfatta, lo spigolo di regresso può rappresentarsi col sistema delle tre equazioni

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha)x+\varphi_2(\alpha)y+\varphi_3(\alpha)z+\varphi_4(\alpha)&=0\,, \\ \varphi'_1(\alpha)x+\varphi'_2(\alpha)y+\varphi'_3(\alpha)z+\varphi'_4(\alpha)&=0\,, \\ \varphi''_1(\alpha)x+\varphi''_2(\alpha)y+\varphi''_3(\alpha)z+\varphi''_4(\alpha)&=0\,; \end{aligned}$$

e pei valori di α pei quali esistono anche le derivate quarte di φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 e sono finite e continue, e il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & \varphi'_4 \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi''_3 & \varphi''_4 \\ \varphi'''_1 & \varphi'''_2 & \varphi'''_3 & \varphi'''_4 \end{vmatrix}$$

non è uguale a zero, *le generatrici della sviluppabile sono tangenti allo spigolo di regresso* (§ 470 [pag. 621 e seg.]).

479. — Si può osservare che, eliminando fra le (1) e (2) il parametro α e le funzioni φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 col mezzo delle derivazioni parziali, si trova subito la equazione a derivate parziali delle superficie sviluppabili.

Derivando infatti parzialmente la (1) col tener conto della (2) che almeno in generale può riguardarsi come la equazione che determina α in fumzione di x, y, z, si trovano le due equazioni

$$\varphi_1(\alpha)+\varphi_3(\alpha)p=0 \quad , \quad \varphi_2(\alpha)+\varphi_3(\alpha)q=0\,,$$

talchè ammesso che non sia $\varphi_3(\alpha)=0$, si avrà

$$p=-\frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)} \quad , \quad q=-\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)}\,,$$

e più semplicemente

$$p=F(\alpha) \quad , \quad q=F_1(\alpha)\,,$$

essendo $F(\alpha)$, $F_1(\alpha)$ i simboli di due funzioni di α che se φ_1, φ_2, φ_3 hanno le derivate, come supponiamo, avranno esse pure le derivate.

Da queste poi si otterranno le altre

$$r=F'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x} \quad , \quad s=F'_1(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,,$$

$$s=F'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y} \quad , \quad t=F'_1(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}\,,$$

e si concluderà quindi che per le sviluppabili si ha sempre la equazione a derivate parziali $rt-s^2=0$ a meno che non sia $\varphi_3(\alpha)=0$.

Se poi fosse *sempre* $\varphi_3(\alpha)=0$, allora i piani inviluppati sarebbero paralleli all'asse delle x, e la superficie inviluppo si ridurrebbe a un cilindro che avrebbe una equazione della forma $F_1(x, y) = 0$, e in tal caso è naturale che venga a mancare l'equazione a derivate parziali in z.

480. — Le superficie sviluppabili possono anche inversamente, almeno nei casi ordinarii, ritenersi sempre come le superficie generate dalle varie tangenti a una curva gobba.

Sia infatti s l'arco di una curva, e siano

$$(3) \qquad \xi = \xi(s) \quad , \quad \eta = \eta(s) \quad , \quad \zeta = \zeta(s)$$

le sue equazioni per le quali ammetteremo che, almeno pel tratto di curva che si considera, le funzioni $\xi(s)$, $\eta(s)$, $\zeta(s)$ siano finite e continue insieme alle loro derivate prime, seconde e terze almeno.

Immaginando la superficie luogo delle sue tangenti, e chiamando t la lunghezza della tangente compresa fra la curva e un punto della superficie, è chiaro che per le coordinate x, y, z di questo punto avremo

$$(4) \qquad x = \xi + t\xi' \quad , \quad y = \eta + t\eta' \quad , \quad z = \zeta + t\zeta'$$

e queste evidentemente saranno le equazioni della superficie generata dalla tangente alla curva (3) in funzione di due variabili indipendenti s e t.

Escludendo ora i punti della superficie (4) che si trovano sulla curva (3) che sono quelli pei quali si ha $t = 0$, e escludendo inoltre i punti situati sulle tangenti stazionarie della stessa curva (3) quando di queste tangenti ce ne siano, cioè quelli pei quali siano zero contemporaneamente i tre determinanti

$$(5) \qquad \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' \quad , \quad \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' \quad , \quad \xi'\eta'' - \eta'\xi''$$

e applicando le formole note del § 376 [pag. 508 e seg.], si trova subito che la equazione del piano tangente alla superficie (4) è la seguente

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X - \xi & Y - \eta & Z - \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0 ,$$

ovvero

$$(7) \qquad (X - \xi)(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'') + (Y - \eta)(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'') + (Z - \zeta)(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') = 0 ,$$

e quindi, poichè questa equazione è indipendente da t, si conclude intanto che il piano tangente alla superficie (4) è lo stesso in tutti i punti di ciascuna generatrice che non si trovano sulla curva data (3) nè sulle tangenti stazionarie della stessa curva quando ve ne sono.

D'altra parte, uguagliando a zero la derivata rispetto ad s del primo membro della equazione (6) o (7) si ottiene l'altra

$$(8) \qquad (X - \xi)(\eta'\xi''' - \zeta'\eta''') + (Y - \eta)(\zeta'\xi''' - \xi'\zeta''') + (Z - \zeta)(\xi'\eta''' - \eta'\xi''') = 0$$

e sì questa che la (6) o (7) sono soddisfatte dalle coordinate x, y, x della superficie (4), talchè il sistema di queste equazioni (7) e (8) rappresenta effettivamente una superficie che è appunto la superficie (4) e che, per quanto si disse nel § 467 [pag. 618], viene ad essere precisamente l'inviluppo del piano (6) o (7) almeno per tutti i valori di s compresi in intervalli nei quali non sono zero contemporaneamente i tre determinanti minori del second'ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' & \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' & \xi'\eta'' - \eta'\xi'' \\ \eta'\zeta''' - \zeta'\eta''' & \zeta'\xi''' - \xi'\zeta''' & \xi'\eta''' - \eta'\xi''' \end{Vmatrix} ,$$

la quale dovrà essere di caratteristica 2, e quindi la proprietà enunciata sopra può dirsi ora dimostrata.

481. — È da notare che la curva (3) viene ad essere lo spigolo di regresso dell'inviluppo del piano (6) o (7) almeno nei punti che non sono punti di piani osculatori stazionarii della stessa curva (3), giacchè — come ora mostreremo — fuori di questi punti il sistema di equazioni formato dalla (7), dalla (8) e da quella che risulta dalla (8) con una nuova derivazione rispetto ad s è soddisfatto soltanto da $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta$.

Si osservi infatti che il determinante dei coefficienti di $X - \xi$, $Y - \eta$, $Z - \zeta$ delle tre equazioni ora indicate è la somma dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' & \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' & \xi'\eta'' - \eta'\xi'' \\ \eta'\zeta''' - \zeta'\eta''' & \zeta'\xi''' - \xi'\zeta''' & \xi'\eta''' - \eta'\xi''' \\ \eta'\zeta^{\text{iv}} - \zeta'\eta^{\text{iv}} & \zeta'\xi^{\text{iv}} - \xi'\zeta^{\text{iv}} & \xi'\eta^{\text{iv}} - \eta'\xi^{\text{iv}} \end{vmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' & \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' & \xi'\eta'' - \eta'\xi'' \\ \eta''\zeta''' - \zeta''\xi''' & \zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' & \xi''\eta''' - \eta''\xi''' \\ \eta'\zeta''' - \zeta'\eta''' & \zeta'\eta''' - \xi'\zeta''' & \xi'\eta''' - \eta'\xi''' \end{vmatrix} ,$$

e sviluppando questi determinanti rispetto agli elementi della ultima linea, e applicando le formole del § 427 b) [pag. 573-74] partendo dalle due matrici

$$\begin{Vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{Vmatrix} \quad , \quad \begin{Vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{Vmatrix} ,$$

si vede subito che il primo di questi determinanti è identicamente nullo, e il secondo è il quadrato del determinante

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix}$$

che è zero soltanto nei punti dei piani osculatori stazionarii (§ 396 [pag. 532]).

Oltre a ciò poi, siccome la equazione (6) del piano tangente alla superficie (4), pei punti nei quali non sono zero contemporaneamente i determinanti (5), è precisamente quella del piano osculatore della curva (3), si potrà anche asserire che *nelle superficie sviluppabili il piano tangente nei punti di una stessa generatrice che non appartengono allo spigolo di regresso è sempre il piano osculatore dello spigolo di regresso della superficie nel punto corrispondente a quella generatrice, quando questa generatrice non è una tangente stazionaria dello stesso spigolo di regresso. E perciò in particolare la linea dei centri delle sfere osculatrici di una curva gobba ha per piano osculatore il piano normale della curva*, ecc.

E viceversa da queste stesse considerazioni apparisce che *la superficie sviluppabile inviluppo dei piani osculatori* (7) *di una curva* (3) *è sempre una superficie il cui spigolo di regresso è la curva stessa* (9), *supposto naturalmente che la curva non abbia tratti rettilinei, o almeno fatta astrazione da questi tratti quando ci siano*, ecc.

482. — Aggiungiamo che come abbiamo considerato le superficie sviluppabili che sono l'inviluppo dei piani osculatori di una curva e quelle che sono l'inviluppo dei piani normali, si possono considerare anche quelle che sono l'inviluppo di quei piani che al § 404 [pag. 541] si chiamarono *piani rettificanti* della curva — cioè dei piani che passano per la tangente e per la binormale alla curva — e che si dicono *superficie rettificanti*.

Osserviamo perciò che se la curva ha le equazioni

$$(9)\qquad \xi=\xi(\omega)\ ,\quad \eta=\eta(\omega)\ ,\quad \zeta=\zeta(\omega)\ ,$$

essendo ω una variabile indipendente qualsiasi, la equazione del piano rettificante nel punto corrispondente al valore ω di ω potrà prendersi sotto la forma

$$(10)\qquad (X-\xi)\,d\frac{d\xi}{ds}+(Y-\eta)\,d\frac{d\eta}{ds}+(Z-\zeta)\,d\frac{d\zeta}{ds}=0\ ,$$

perchè il detto piano è perpendicolare alla normale principale per la quale i coseni di direzione sono proporzionali ai differenziali $d\dfrac{d\xi}{ds}$, $d\dfrac{d\eta}{ds}$, $d\dfrac{d\zeta}{ds}$, essendo ds il differenziale dell'arco della curva, e si escludono naturalmente i punti nei quali questi differenziali sono zero, cioè i punti delle tangenti stazionarie (§ 402 e seg. [pag. 537 e seg.]).

Ne segue che la superficie sviluppabile inviluppo dei piani rettificanti sarà quella rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$(11)\qquad \begin{cases} (X-\xi)\,d\dfrac{d\xi}{ds}+(Y-\eta)\,d\dfrac{d\eta}{ds}+(Z-\zeta)\,d\dfrac{d\zeta}{ds}=0\ ,\\[2mm] (X-\xi)\,d^2\dfrac{d\xi}{ds}+(Y-\eta)\,d^2\dfrac{d\eta}{ds}+(Z-\zeta)\,d^2\dfrac{d\zeta}{ds}=0\ ,\end{cases}$$

la seconda delle quali si ottiene differenziando la prima e osservando che, per essere $\left(\dfrac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{d\zeta}{ds}\right)^2=1$, si ha $d\xi\, d\dfrac{d\xi}{ds}+d\eta\, d\dfrac{d\eta}{ds}+d\zeta\, d\dfrac{d\zeta}{ds}=0$; supposto al solito che salvo alcuni punti eccezionali la matrice dei coefficienti

$$(12)\qquad \left\|\begin{matrix} d\dfrac{d\xi}{ds} & d\dfrac{d\eta}{ds} & d\dfrac{d\zeta}{ds}\\[3mm] d^2\dfrac{d\xi}{ds} & d^2\dfrac{d\eta}{ds} & d^2\dfrac{d\zeta}{ds}\end{matrix}\right\|$$

sia di caratteristica 2; e la generatrice (caratteristica) della superficie per ogni valore speciale di ω sarà la retta rappresentata dallo stesso sistema di equazioni (11).

Lo spigolo di regresso di questa sviluppabile sarà rappresentato dal sistema delle tre equazioni che si ottengono unendo alle due precedenti quella che se ne deduce con una nuova differenziazione rispetto ad ω, e che con calcoli facilissimi si pone sotto la forma seguente

$$(13)\qquad (X-\xi)\,d^3\frac{d\xi}{ds}+(Y-\eta)\,d^3\frac{d\eta}{ds}+(Z-\zeta)\,d^3\frac{d\zeta}{ds}+ds\,\Sigma\left(d\frac{d\xi}{ds}\right)^2=0\ ,$$

esclusi ora i punti pei quali il determinante dei coefficienti di $X-\xi$, $Y-\eta$ e $Z-\zeta$ è uguale a zero.

483. — Aggiungiamo anche l'osservazione che, oltre a quelli delle tangenti stazionarie della curva data (9), i punti da escludere sono ora anche quelli (che comprendono i primi) pei quali la matrice (12) è di caratteristica inferiore a 2 e quelli pei quali è zero il determinante

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} d\dfrac{d\xi}{ds} & d\dfrac{d\eta}{ds} & d\dfrac{d\zeta}{ds}\\[3mm] d^2\dfrac{d\xi}{ds} & d^2\dfrac{d\eta}{ds} & d^2\dfrac{d\zeta}{ds}\\[3mm] d^3\dfrac{d\xi}{ds} & d^3\dfrac{d\eta}{ds} & d^3\dfrac{d\zeta}{ds}\end{vmatrix}\ ,$$

Osservando dunque che $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}$ sono le coordinate dei punti della linea che al § 409 [pag. 549 e seg.] chiamammo *indicatrice sferica delle tangenti* della curva stessa (9) sulla sfera di raggio uno col centro all'origine delle coordinate, si vede subito che i punti che si escludono, trattando delle generatrici o dello spigolo di regresso della nostra sviluppabile rettificante della curva data (9) sono i punti che corrispondono respettivamente a quelli delle tangenti stazionarie o a quelli dei piani osculatori stazionarii della indicatrice sferica delle tangenti della stessa curva.

E poichè, quando s'indichino con $\xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \ldots$ le derivate di ξ, η, ζ prese rispetto all'arco s, i determinanti di second'ordine della matrice (12) sono proporzionali a quelli della matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \eta''' \end{Vmatrix},$$

si vede che nei punti pei quali la matrice (12) è di caratteristica inferiore a 2 il determinante

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix}$$

sarà zero, e quindi ricordando quanto si disse al § 412 [pag. 551 e seg.] si può anche affermare che fra i punti che non corrispondono a tangenti stazionarie della curva (9) quelli che dobbiamo escludere trattando delle generatrici della sviluppabile rettificante sono i punti della curva stessa nei quali il raggio di torsione è infinito.

484. — Si osservi ora che la curva data (9) sarà situata sulla sviluppabile rettificante perchè le equazioni (11) di questa superficie sono soddisfatte da $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta$; ma, fatta astrazione dai punti già esclusi delle tangenti stazionarie, cioè da quelli pei quali si annullano i tre differenziali $d\frac{d\xi}{ds}, d\frac{d\eta}{ds}, d\frac{d\zeta}{ds}$, i punti della stessa curva (9) non apparterranno allo spigolo di regresso perchè le loro coordinate ξ, η, ζ non soddisfaranno alla equazione (13).

Per questo e per quanto dicemmo sopra al § 478, nei punti della nostra curva (9) pei quali la matrice (12) è di caratteristica 2 il piano tangente della nostra sviluppabile sarà il piano rettificante, e quindi la normale a questa

superficie negli stessi punti della curva (9) sarà la normale principale di questa curva.

Ora quando si prendono a studiare sulle superficie quelle linee che chiamansi *geodetiche,* cioè le linee che fra due loro punti qualsiansi, almeno quando questi punti siano sufficientemente vicini, sono le più corte fra tutte le altre linee che possono condursi sulla superficie fra quei due punti, si dimostra, che per le linee stesse la normale principale coincide colla normale alla superficie in ogni punto e viceversa; quindi per questa particolarità si può dire che la curva data (9) sarà una linea geodetica sulla superficie sviluppabile rettificante, e conseguentemente quando questa superficie venga a distendersi su di un piano la linea stessa si trasformerà in linea retta o in pezzi di linee rette.

Da questa particolarità viene il nome di *piano rettificante* dato al piano che passa per la tangente e per la binormale a una curva, come ne viene quello di *superficie rettificante* dato alla superficie inviluppo di questo piano.

485. — Non lasciamo di dire che le superficie sviluppabili costituiscono una delle due classi di superficie nelle quali si dividono le superficie conosciute sotto il nome di *superficie rigate,* cioè le superficie a generatrici rettilinee. Le superficie dell'altra classe vengono dette gobbe; e queste sono superficie generate da una retta che non si mantiene tangente a nessuna curva, e per esse il piano tangente non è lo stesso lungo ogni generatrice; e noi ne faremo uno studio speciale in un altro capitolo.

XXXIV.

Linee di curvatura delle superficie

486. — Presa una linea su una superficie e in un suo punto M condotta la normale a questa superficie, s' intende che almeno ordinariamente non avverrà che le normali alla superficie nei punti di essa vicinissimi ad M incontrino la normale relativa a questo punto M, e onde questo accada bisognerà che per la linea siano soddisfatte certe condizioni speciali.

In questo caso la linea si dice linea di curvatura della superficie; e più propriamente si chiamano *linee di curvatura* di una superficie le linee dotate della proprietà che le normali condotte alla superficie nei punti infinitamente vicini di esse s' incontrano effettivamente, o almeno possono riguardarsi come incontrantesi quando si fa astrazione dalle quantità infinitesime di ordine superiore al primo; e noi ci proponiamo ora di mostrare l'esistenza delle linee di curvatura per ogni superficie e trovarne al tempo stesso la equazione differenziale quando, essendo $z=z(x,y)$ la equazione della superficie medesima, si ammette che la funzione $z(x,y)$, almeno nella porzione di superficie che si considera, sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali di primo e second' ordine almeno.

487. — Siano perciò x, y, z le coordinate di un punto M della porzione di superficie $z=z(x,y)$ nella quale si verificano le condizioni ora indicate.

Le equazioni della normale alla superficie in questo punto M saranno le seguenti

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1},$$

ovvero

$$X-x+p(Z-z)=0 \quad , \quad Y-y+q(Z-z)=0, \tag{1}$$

dove p e q sono le solite caratteristiche di Monge per rappresentare le derivate parziali del prim'ordine di z; e se $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ sono le coordinate di un altro punto vicinissimo M' della superficie, e $p+\Delta p$ e $q+\Delta q$ sono i valori di p e q in questo punto M', le equazioni della normale alla superficie nello stesso punto saranno le due

$$X-x-\Delta x+(p+\Delta p)(Z-z-\Delta z)=0 \ , \ Y-y-\Delta y+(q+\Delta q)(Z-z-\Delta z)=0;$$

e quindi onde questa normale in M' incontri la normale in M in un punto (X, Y, Z), sarà necessario e sufficiente che insieme alle due equazioni (1) si abbiano le altre

$$\Delta x+p\,\Delta z-\Delta p(Z-z-\Delta z)=0 \ , \ \Delta y+q\,\Delta z-\Delta q(Z-z-\Delta z)=0. \tag{2}$$

Questo porta evidentemente che gli accrescimenti $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta p, \Delta q$, oltre a soddisfare alle equazioni che vengono da quella della superficie, soddisfino anche all'altra $(\Delta x+p\,\Delta z)\Delta q-(\Delta y+q\,\Delta z)\Delta p=0$, ovvero

$$(\Delta x\,\Delta q-\Delta y\,\Delta p)+\Delta z(p\,\Delta q-q\,\Delta p)=0; \tag{3}$$

e quando questo accada, le due normali in M e M' s'incontreranno, e le coordinate X, Y, Z del punto d'incontro saranno date dalle equazioni (1) e da una delle (2).

Supponendo dunque che il punto M' si avvicini indefinitamente ad M su una linea dotata di tangente determinata (quali vogliamo che siano le varie linee di curvatura che noi ci proponiamo di considerare (*)), e limitandoci a richiedere che l'incontro delle normali in M e M' debba farsi all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, si vede subito che per le linee di curvatura, quando esistono, si avrà la equazione

$$(dx\,dq-dy\,dp)+dz(p\,dq-q\,dp)=0; \tag{4}$$

e viceversa se movendosi su una linea sulla superficie questa condizione risulterà soddisfatta, la linea stessa sarà linea di curvatura.

In questo caso poi le coordinate X, Y, Z del punto d'incontro delle due normali in M e M', o almeno del punto da considerarsi come tale sulla normale in M, saranno date dalle equazioni

$$X-x+p(Z-z)=0, \quad Y-y+q(Z-z)=0, \tag{5}$$

(*) Per questo noi supporremo sempre senz'altro che nel punto M che si considera sulla curva i differenziali dx e dy, e quindi dz, non siano insieme zero.

di questa normale insieme a una delle due

$$(6) \qquad dx + p\,dz - dp\,(Z - z) = 0 \quad , \quad dy + q\,dz - dq\,(Z - z) = 0\,.$$

che vengono dalle (2) tralasciando le quantità infinitesime di ordine superiore.

Esprimendo ora nella (4) le dz, dp, dq pei differenziali dx e dy colle note formole

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad , \quad dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad dq = s\,dx + t\,dy\,,$$

che si hanno dalla equazione $z = z\,(x, y)$ della superficie, si trova che per le linee di curvatura i differenziali dx e dy devono soddisfare alla equazione

$$s\,(dx^2 - dy^2) + (t - r)\,dx\,dy + (p\,dx + q\,dy)\,\{(ps - qr)\,dx + (pt - qs)\,dy\} = 0\,,$$

ovvero

$$(7) \quad \{p\,q\,r - (1+p^2)\,s\}\,dx^2 + \{(1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t\}\,dx\,dy + \{(1+q^2)\,s - p\,q\,t\}\,dy^2 = 0;$$

e questa evidentemente è la equazione differenziale dalla quale deve dedursi la corrispondente relazione in termini finiti fra x e y che, unita alla equazione $z = z\,(x, y)$ della superficie, determina le linee di curvatura che passano pel punto $\mathrm{M}\,(x, y)$.

Questa equazione differenziale (7), quando i coefficienti di dx^2, $dx\,dy$ e dy^2 non sono tutti zero, per ogni punto (x, y, z) della superficie nel quale p, q, r, s, t sono finite e continue, ci dà due valori per $\dfrac{dy}{dx}$, e quindi poichè si vedrà fra poco che questi valori sono sempre reali, si conclude che *per ogni punto di una superficie passeranno sempre due e due sole linee di curvatura, a meno che in quel punto non siano verificate ad un tempo le tre equazioni*

$$pqr - (1+p^2)\,s = 0 \quad , \quad (1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t = 0 \quad , \quad (1+q^2)\,s - pqt = 0\,.$$

488. — I punti però nei quali queste ultime equazioni sono verificate, a meno che non si tratti del piano o della sfera, nel qual caso esse sono sempre soddisfatte, sono soltanto punti eccezionali della superficie, e sono quelli conosciuti sotto il nome di *ombilichi* della superficie (*).

(*) *La sfera e il piano sono le sole superficie reali i cui punti siano tutti ombilichi*, e questo può provarsi facilmente nel modo seguente.

Si osservi che dovendo per le superficie i cui punti sono tutti ombilichi essere sempre soddisfatte le equazioni

$$(\alpha) \qquad pqr - (1+p^2)\,s = 0 \quad , \quad (1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t = 0 \quad , \quad (1+q^2)\,s - pqt = 0\,,$$

basta avere riguardo alla prima per dedurne che, fatta astrazione dalle funzioni z (im-

Per essi, la equazione (7) diviene identica e quindi invece di due vi passano evidentemente un numero infinito di linee di curvatura considerate soltanto per tratti infinitesimi; nel senso cioè che per ciascuno di tali punti movendosi da esso in qualunque direzione sulla superficie le normali nei punti vicini incontrano sempre la normale in quel punto all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo.

Però anche per questi punti ordinariamente avremo soltanto un numero *finito* di linee di curvatura, sempre per tratti infinitesimi, quando si consi-

---

maginarie) per le quali sia $1+p^2=0$ e $q=0$, dovremo avere $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log(1+p^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial \log q}{\partial x}$, ovvero $\dfrac{\partial \log(1+p^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial \log q^2}{\partial x}$.

Segue di qui che le funzioni $\log(1+p^2)$ e $\log q^2$ non potranno differire fra loro altro che per una quantità che sia costante quando si fa la derivazione rispetto ad x, cioè non potranno differire che per una funzione della sola y che potremo indicare con $\log \mathrm{Y}^2$, essendo Y funzione di y soltanto, e conseguentemente dovrà essere

$$(\beta) \qquad 1 + p^2 = q^2\,\mathrm{Y}^2\,.$$

Similmente, escludendo le funzioni z (pure immaginarie) per le quali sia $1+q^2=0$ e $p=0$, avremo

$$(\gamma) \qquad 1 + q^2 = p^2\,\mathrm{X}^2\,,$$

essendo X una funzione della sola x, e ora con queste equazioni troveremo

$$(\delta) \qquad p^2 = \frac{1+\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 - 1} \quad , \quad q^2 = \frac{1+\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 - 1}$$

quando non sia $\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 = 1$.

Sostituendo nella seconda delle (α) avremo $p^2 r\,\mathrm{X}^2 = q^2 t\,\mathrm{Y}^2$; quindi, osservando che le (δ) ci dànno colla derivazione

$$pr = -\frac{(1+\mathrm{Y}^2)\,\mathrm{Y}^2\mathrm{X}\mathrm{X}'}{(\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 - 1)^2} \quad , \quad qt = -\frac{(1+\mathrm{X}^2)\,\mathrm{X}^2\mathrm{Y}\mathrm{Y}'}{(\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2 - 1)^2}\,,$$

e tenendo conto delle (δ) stesse, troveremo subito la formola

$$\frac{\mathrm{X}\mathrm{X}'}{(1+\mathrm{X}^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{\mathrm{Y}\mathrm{Y}'}{(1+\mathrm{Y}^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

e questa, poichè il primo membro non può contenere che x e il secondo non può contenere che y, per potere sussistere richiede che, salvo il segno, i rapporti $\dfrac{\mathrm{X}\mathrm{X}'}{(1+\mathrm{X}^2)^{\frac{3}{2}}}$ e $\dfrac{\mathrm{Y}\mathrm{Y}'}{(1+\mathrm{Y}^2)^{\frac{3}{2}}}$ siano uguali a una stessa costante c.

Ora questi rapporti sono le derivate rispetto ad x e ad y di $-(1+\mathrm{X}^2)^{-\frac{1}{2}}$ e $-(1+\mathrm{Y}^2)^{-\frac{1}{2}}$ respettivamente, e c è la derivata rispetto ad x di cx e rispetto ad derino come linee di curvatura uscenti da quei punti soltanto quelle linee speciali per le quali le normali alla superficie condotte nei punti di essa infinitamente vicini a quello M che si considera possono riguardarsi come rette che incontrano la normale in M *all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al secondo.*

489. — Restando ora nel caso generale, prendiamo per piano delle xy il piano tangente alla superficie nel punto M che si considera e per asse delle z la normale.

---

y di cy; quindi indicando con d e d_1 due nuove costanti potremo scrivere

$$-(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}=cx+d \quad , \quad -(1+Y^2)^{-\frac{1}{2}}=\pm(cy+d_1) \,,$$

ovvero

$$\frac{1}{1+X^2}=(cx+d)^2 \,,\; \frac{1}{1+Y^2}=(cy+d_1)^2 \,,$$

e

$$X^2=\frac{1-(cx+d)^2}{(cx+d)^2} \,,\; Y^2=\frac{1-(cy+d_1)^2}{(cy+d_1)^2} \,,\; X^2Y^2-1=\frac{1-(cx+d)^2-(cy+d_1)^2}{(cx+d)^2(cy+d_1)^2} \,,$$

e quindi per le (δ)

$$p=\frac{cx+d}{\sqrt{1-(cx+d)^2-(cy+d_1)^2}} \,, \quad q=\frac{cy+d_1}{\sqrt{1-(cx+d)^2-(c_1y+d_1)^2}} \,,$$

il radicale, se c non è zero, dovendo essere preso collo stesso segno nelle due formole perchè possa essere $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$; e di qui, sempre nel supposto che c non sia zero, si vede che z non può differire che per una costante d_2 da $\frac{1}{c}\sqrt{1-(cx+d)^2-(cy+d_1)^2}$ e quindi si ha l'equazione

$$\left(x+\frac{d}{c}\right)^2+\left(y+\frac{d_1}{c}\right)^2+\left(z+d_2\right)^2=\frac{1}{c^2} \,,$$

dalla quale risulta che quando c non è zero la superficie cercata è appunto una sfera di raggio qualsiasi $\frac{1}{c}$ e col centro in un punto qualsiasi.

Se poi fosse $c=0$, p e q sarebbero costanti e la superficie si ridurrebbe a un piano che può considerarsi come una sfera di raggio infinito.

Resterebbe poi a considerarsi il caso di $X^2Y^2=1$ che darebbe $X^2=\frac{1}{a}$, $Y^2=a$ essendo a una costante; e in questo caso perchè le (β) e (γ) potessero coesistere senza che fosse $1+p^2=0$ e $q=0$, o $1+q^2=0$ e $p=0$ si vede subito che dovrebbe essere $a=-1$, ciò che per le stesse (β) e (γ) darebbe $1+p^2+q^2=0$; e le superficie corrispondenti — che comprendono anche quelle ora indicate per le quali fosse $1+p^2=0$ e $q=0$, o $1+q^2=0$ e $p=0$ e che, come è facile a vedersi, sodisfano effettivamente alle condizioni (α) — sono tutte immaginarie.

Allora, quand'anche occorra per questo fare una trasformazione di coordinate, ricordando quanto si disse trattando delle funzioni implicite, e ricordando pure che in generale i coseni degli angoli della normale a una superficie coi tre assi delle x, delle y e delle z sono respettivamente $\frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, si vedrà subito che nell'intorno del punto M la nuova funzione z sarà ancora finita e continua insieme alle sue derivate parziali di primo e second'ordine; e colle nuove coordinate x, y, z, in questo punto M insieme a $x=0$, $y=0$, $z=0$ si avrà anche $p=0$, $q=0$.

Ne segue che per lo stesso punto M i valori di $\frac{dy}{dx}$ relativi alle linee di curvatura che passano pel punto M, a causa della (7) verranno dati dalla equazione

$$sdy^2+(r-t)\,dx\,dy-sdx^2=0 \,; \tag{8}$$

e di qui risulta subito intanto che se $s=0$ senza che sia $r=t$ (il che viene ad essere escluso quando non si tratta di un ombilico) le linee di curvatura che passano per M saranno tali che per una di esse si avrà $dx=0$, e per l'altra $dy=0$; cioè queste linee saranno effettivamente reali e avranno respettivamente per tangenti l'asse delle y e delle x.

Se poi s è diverso da zero, allora i due valori di $\frac{dy}{dx}$ che si ottengono risolvendo la (8) avranno un prodotto negativo e eguale a -1, e quindi essi saranno reali e corrisponderanno ai coefficienti angolari di due rette ortogonali, ciò che a causa della posizione speciale del piano xy porta che le linee di curvatura che escono da M, oltre ad esser reali, abbiano le loro tangenti ad angolo retto. Dunque noi possiamo ora concludere che *in ogni punto della superficie che si considera, che non sia un ombilico, passano sempre due linee di curvatura reali e queste linee sono fra loro ortogonali.*

490. — Dimostrata così l'ortogonalità di queste linee, noi possiamo osservare che quando gli assi x e y, che ancora supponiamo nel piano tangente in M, sieno presi tangenti alle linee di curvatura corrispondenti, dovendo la (8) essere soddisfatta per $dx=0$ e per $dy=0$, si avrà $s=0$, e questo ci mostra che *per ogni superficie può farsi sempre in modo che in un suo punto qualunque p, q e s si annullino contemporaneamente,* poichè basta per questo prendere gli assi x, y, z nel modo indicato o almeno prenderli parallelamente a questi.

Viceversa, avendo riguardo alle equazioni generali (7) delle linee di curvatura e a quella del piano tangente o alle espressioni dei coseni di direzione della normale alle superficie, si può affermare che se in un punto M si ha $p=q=s=0$, il piano xy sarà il piano tangente o un piano parallelo a questo, gli assi x e y saranno tangenti alle linee di curvatura o saranno paralleli a queste tangenti, e l'asse z sarà la normale in M alla superficie o sarà parallelo a questa normale, e ciò naturalmente anche se il punto M è un ombilico della superficie, cioè se insieme a $s=0$ si ha $r=t$, perchè allora ogni linea uscente da quel punto nei suoi piccoli intorni può considerarsi come linea di curvatura.

S'intende che noi parliamo sempre di punti pei quali z è finita e continua insieme alle sue derivate parziali di primo e secondo ordine.

491. — Le distanze del punto della superficie ai due punti (X, Y, Z) della normale nei quali secondo quanto dicemmo sopra al § 487 questa normale può riguardarsi come incontrata dalle normali infinitamente vicine condotte lungo le due linee di curvatura che passano pel punto (x, y, z) che si considera diconsi *i raggi di curvatura principali della superficie*, sebbene, come diremo più oltre, essi non siano ordinariamente i raggi ordinarii di prima curvatura delle linee di curvatura corrispondenti.

A questi raggi di curvatura principali si attribuiscono dei segni, e si prendono tutti e due dello stesso segno quando i due punti d'incontro delle normali sono dalla stessa parte della superficie; e si prendono invece di segni contrarii quando questi punti sono uno da una parte e uno dall'altra della superficie.

Per trovare i valori di uno qualunque ρ di questi raggi, si può osservare che si ha sempre

$$Z-z=\pm\rho\cos\widehat{Nz}=\frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{9}$$

quando, prendendo sempre il radicale positivamente, si fissa di prendere pel segno di ρ quello di $Z-z$; e quindi in forza delle (6) si troverà che i raggi di curvatura principali della superficie devono soddisfare alle equazioni

$$dx+p\,dz-\frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dp=0\ ,\quad dy+q\,dz-\frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dq=0\,,$$

ovvero alle altre

$$\left(1+p^2-\frac{r\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)dx+\left(pq-\frac{s\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)dy=0\,,$$

$$\left(pq-\frac{s\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)dx+\left(1+q^2-\frac{t\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)dy=0\,,$$

dalle quali risulta che la equazione che determina i due raggi di curvatura principali sarà la seguente

$$\left(1+p^2-\frac{r\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1+q^2-\frac{t\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)-\left(pq-\frac{s\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2=0\,, \tag{10}$$

ovvero

$$(rt-s^2)\rho^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,\{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)\}\,\rho+(1+p^2+q^2)^2=0\,. \tag{11}$$

492. — Da questa si vede che la somma dei due raggi di curvatura principali di una superficie in un punto $M(x,y,z)$ è $\dfrac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{rt-s^2}$ e il loro prodotto è $\dfrac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$; e quindi si può dire che le superficie nelle quali i due raggi di curvatura principali sono sempre uguali fra loro ma diretti in senso contrario (*) sono quelle per le quali si ha

$$r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0\,,$$

e le superficie nelle quali il prodotto dei due raggi di curvatura principali è lo stesso in tutti i punti ed è uguale a $\pm a^2$, o, come si dice, *le superficie di curvatura costante positiva o negativa* $\pm\dfrac{1}{a^2}$, sono quelle per le quali si ha $\dfrac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}=\pm a^2$.

Fra le superficie di curvatura costante positiva $\dfrac{1}{a^2}$ si trova naturalmente la sfera di raggio a.

Osservando poi che nelle superficie sviluppabili il piano tangente è lo stesso lungo la generatrice, si conclude che in esse le generatrici costituiscono uno dei sistemi di linee di curvatura, e che uno dei raggi di curvatura principali è sempre infinito; e da questo avuto riguardo alla (11) si ritrova che per le superficie sviluppabili deve aversi in ogni punto $rt-s^2=0$.

Infine, tornando a supporre che gli assi x e y siano nel piano tangente al punto M che si considera sulla superficie e tangenti alle linee di curvatura,

(*) Le superficie nelle quali i due raggi di curvatura principali sono uguali e di segno contrario (cioè uguali in lunghezza ma volti in senso contrario) sono quelle che diconsi *di area minima*, perchè per certe linee tracciate su esse godono della particolarità che per ogni altra superficie che passi per le linee medesime l'area da esse determinata su questa superficie è maggiore di quella corrispondente delle dette superficie.

e osservando che allora si ha $p = q = s = 0$, si vede subito dalla (11) che con questi assi coordinati i due raggi di curvatura, coi segni che per essi abbiamo fissati, vengono uguali uno ad $\frac{1}{r}$ e l'altro ad $\frac{1}{t}$, e quindi nei punti ombilicali e in questi soli essi sono eguali fra loro. E avendo riguardo al tempo stesso alle (9), si vede anche che il raggio di curvatura principale relativo alla linea tangente all'asse delle x (per la quale cioè si ha $dy = 0$ nel punto M) è $\frac{1}{r}$, e quello relativo alla linea tangente all'asse delle y è $\frac{1}{t}$.

493. — Chiamando *centri di curvatura principali* i punti che possono riguardarsi come punti d'incontro della normale in M colle normali infinitamente vicine condotte lungo le linee di curvatura che escono da M, si può anche dire per le (5) e (9) che le coordinate (X, Y, Z) di questi centri di curvatura vengono dati dalle formole

$$(12)\quad X - x = -\frac{p\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad Y - y = -\frac{q\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad Z - z = \frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Il luogo di questi punti costituisce in generale una superficie a due falde che diconsi le *superficie dei centri di curvatura* o anche le *evolute* della superficie data, e per esse si hanno le tre equazioni

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} (X - x)^2(rt - s^2) + p(X - x)\{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)\} + p^2(1+p^2+q^2) = 0, \\ (Y - y)^2(rt - s^2) + q(Y - y)\{r(1+q^2) - 2pq \ + t(1+p^2)\} + q^2(1+p^2+q^2) = 0, \\ (Z - z)^2(rt - s^2) - \ (Z - z)\{r(1+q^2) - 2pq \ + t(1+p^2)\} + \ (1+p^2+q^2) = 0, \end{array}\right.$$

che si ottengono dalla (11) ponendovi per ρ i valori tratti dalle (12); e queste, quando le coordinate x, y, z dei punti della superficie data vengono espresse per due variabili indipendenti u e v (coordinate curvilinee), ci dànno le coordinate X, Y, Z dei punti delle superficie dei centri di curvatura espresse anch'esse per queste variabili u e v.

494. — Quando il punto (x, y, z) si muove sulle superficie lungo una linea C di curvatura, è facile vedere che il punto (X, Y, Z) sulla falda corrispondente della superficie evoluta, cioè il centro di curvatura corrispondente, descrive una linea L alla quale la normale della superficie si mantiene tangente, per modo che *la superficie rigata formata dalle normali lungo ogni linea di curvatura costituisce una superficie sviluppabile della quale la linea* L *dei centri di curvatura è lo spigolo di regresso* (§§ 480-81 [pag. 638 e seg.]).

Ciò è conseguenza di una proprietà generale dei sistemi di rette che dipendono da un parametro e che s'incontrano successivamente all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, come dimostreremo nel cap. XXXVI; ma risulta subito anche dalle formole del § 487 che determinano le coordinate X, Y, Z del punto della evoluta.

Avendo infatti riguardo alle (5) si trova che differenziandole esse danno luogo alle altre

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} dX - dx + dp\,(Z - z) + p\,(dZ - dz) = 0\ , \\ dY - dy + dq\,(Z - z) + q\,(dZ - dz) = 0\ ; \end{array}\right.$$

e quando la differenziazione si faccia movendosi lungo una linea di curvatura, cioè rispetto al parametro che determina i punti di questa linea, allora venendo ad aversi le (6) si vede subito che saranno di necessità soddisfatte le equazioni seguenti

$$(15)\quad dX + p\,dZ = 0\ ,\quad dY + q\,dZ = 0\ ,$$

ovvero

$$(16)\quad \frac{dX}{p} = \frac{dY}{q} = \frac{dZ}{-1}\ ;$$

le quali pongono in evidenza che i coseni di direzione della tangente alla linea L sono, come quelli della normale alla superficie data proporzionali a p, q e -1, e quindi dimostrano appunto la proprietà enunciata.

Viceversa se per una linea C della superficie data si ha questa particolarità, per modo cioè che per una linea L luogo di certi punti (X, Y, Z) della normale si abbiano le (16), allora siccome si avranno ancora le (5) e quindi le (14), risulteranno di necessità soddisfatte anche le equazioni (6), e quindi la linea considerata C sarà una linea di curvatura; talchè *le linee di curvatura di una superficie potranno anche essere considerate come quelle linee per le quali le normali alla superficie lungo di esse costituiscono altrettante superficie sviluppabili.*

E di qui segue in particolare che *se in una superficie una linea di curvatura è di quelle che al* § 484 [pag. 642-43] *dicemmo chiamarsi linee geodetiche, essa dovrà necessariamente essere piana,* giacchè in questo caso le normali principali della linea dovendo coincidere colle normali alla superficie dovranno formare una superficie sviluppabile, e questo per quanto vedremo al § 518 [pag. 679-80] non potrà avvenire altro che quando la curva è piana.

E così *le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura geodetiche saranno quelle che le hanno piane, e col piano sempre normale alla superficie.*

495. — Dalla proprietà generale che abbiamo dimostrata risultano immediatamente alcune formole notevoli che sono caratteristiche per le linee di curvatura delle superficie e sono conosciute sotto il nome di formole di *Olindo Rodrigues*.

Indichiamo per questo con l, m, n i coseni di direzione della normale alla superficie presa in un senso conveniente, e osserviamo che le (12) ci dànno le formole

$$X-x=l\rho\ ,\ Y-y=m\rho\ ,\ Z-z=n\rho\ , \tag{17}$$

essendo ρ il raggio di curvatura corrispondente per la linea di curvatura che si considera.

Da queste movendosi lungo la linea stessa avremo le altre

$$dX-dx=ld\rho+\rho dl\ ,\ dY-dy=md\rho+\rho dm\ ,\ dZ-dz=nd\rho+\rho dn\ , \tag{18}$$

ovvero

$$\frac{dX}{l}-d\rho=\frac{dx}{l}+\rho\frac{dl}{l}\ ,\ \frac{dY}{m}-d\rho=\frac{dy}{m}+\rho\frac{dm}{m}\ ,\ \frac{dZ}{m}-d\rho=\frac{dz}{n}+\rho\frac{dn}{n}\ ; \tag{19}$$

talchè, osservando che a causa delle (16) i primi membri di queste formole avranno un valore comune k, potremo scrivere

$$dx+\rho dl=lk\ ,\ dy+\rho dm=k\ ,\ dz+\rho dn=nk\ .$$

Moltiplicando ora queste equazioni per l, m, n e osservando che $l^2+m^2+n^2=1$, $ldl+mdm+ndn=0$ e $ldx+mdy+ndz=0$, si vede subito che dovrà essere $k=0$; quindi, quando non sia $dl=dm=dn=0$, avremo le formole

$$\frac{dx}{dl}=\frac{dy}{dm}=\frac{dz}{dn}\ ; \tag{20}$$

e queste sono appunto le formole di Rodrigues che volevamo dimostrare.

Nelle linee di curvatura dunque i differenziali dx, dy, dz sono proporzionali ai differenziali dei coseni di direzione della normale alla superficie dl, dm, dn quando questi ultimi differenziali non siano tutti zero; e il valore comune dei rapporti $\frac{dx}{dl}$, $\frac{dy}{dm}$, $\frac{dz}{dn}$ è il raggio di curvatura corrispondente cambiato di segno, quando la direzione positiva della normale e i segni di questi raggi di curvatura sono determinati nel modo da noi indicato sopra al § 491.

Viceversa le formole

$$\frac{dx}{dl}=\frac{dy}{dm}=\frac{dz}{dn} \tag{21}$$

quando dl, dm e dn non sono tutti zero sono caratteristiche delle linee di curvatura, perchè quando sono soddisfatte, indicando con $-\rho$ il valore comune dei rapporti $\frac{dx}{dl}$, $\frac{dy}{dm}$ e $\frac{dz}{dn}$, si hanno le formole

$$dx+\rho dl=0\ ,\ dy+\rho dm=0\ ,\ dz+\rho dn=0\ ,$$

e conseguentemente per la linea luogo dei punti (X, Y, Z) della normale alla superficie pei quali si hanno le formole (17) e quindi anche le (18) e (19), si avranno le altre $\frac{dX}{l}=\frac{dY}{m}=\frac{dZ}{n}$ le quali, per quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, provano appunto che le linee per le quali sono soddisfatte le condizioni (21) sono linee di curvatura della superficie.

Si può osservare che, per essere $l=-\lambda p$, $m=-\lambda q$, $n=\lambda$ con $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, si trova subito che i punti che abbiamo escluso, pei quali $dl=dm=dn=0$, sono quelli pei quali si ha $dp=0$, $dq=0$, ovvero

$$r\,dx+s\,dy=0\ \ ,\ \ s\,dx+t\,dy=0\ ,$$

e quindi sono soltanto quei punti speciali pei quali $rt-s^2=0$, cioè quelli che, per una ragione che indicheremo nel capitolo seguente, si dicono i *punti parabolici* della superficie.

496. — Aggiungiamo che le formole di Rodrigues conducono con tutta facilità a determinare tanto la equazione delle linee di curvatura delle superficie in coordinate curvilinee u e v, quanto quella che dà i raggi di curvatura con queste coordinate.

Supposto infatti che

$$x=x(u, v)\ \ ,\ \ y=y(u, v)\ \ ,\ \ z=z(u, v)$$

siano le equazioni della superficie in coordinate curvilinee u e v, si osserverà che dalle formole di Rodrigues si hanno subito le altre

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=-\rho\left(\frac{\partial l}{\partial u}du+\frac{\partial l}{\partial v}dv\right),$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=-\rho\left(\frac{\partial m}{\partial u}du+\frac{\partial m}{\partial v}dv\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=-\rho\left(\frac{\partial n}{\partial u}du+\frac{\partial n}{\partial v}dv\right);$$

le quali moltiplicate una volta per $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, un'altra per $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ e una terza per l, m, n e sommate ogni volta conducono a due sole equazioni perchè la terza risulta una identità; e fra le due equazioni che così si ottengono eliminando il ρ si ottiene la equazione in du e dv delle linee di curvatura, mentre eliminando invece du e dv si ottiene la equazione in ρ che determina i raggi di curvatura.

Per l, m, n poi potranno prendersi i valori dati dalle formole del § 377 [pag. 510-11]; e potranno anche farsi molte semplicizzazioni introducendo come nello stesso § 377 i coefficienti E, F, G del quadrato dell'elemento lineare della superficie, e quelli analoghi E_1, F_1, G_1 della sfera *di raggio uno* per la quale le coordinate cartesiane x_1, y_1, z_1 sono rappresentate in coordinate curvilinee u e v dalle formole

$$x_1 = l \quad , \quad y_1 = m \quad , \quad z_1 = n \ ,$$

intendendo che l, m e n siano espresse per u e v colle ricordate formole del § 377.

497. — Diamo anche la formola che serve alla determinazione del raggio di curvatura di una *sezione normale* qualunque in un punto di una superficie, cioè delle curve piane che si ottengono tagliando la superficie con un piano qualunque che passi per la normale.

Sia perciò al solito $z = z(x, y)$ la equazione della superficie che si considera, e ammettiamo che almeno nell'intorno del punto M nel quale si fa quella sezione normale di cui si vuol determinare il raggio di curvatura nel punto stesso, siano soddisfatte le solite condizioni rispetto alle derivate prime e seconde di z.

Si prenda per piano xy il piano tangente in M e per asse delle z la normale in questo punto; gli assi x, y essendo tangenti alle linee di curvatura o, se il punto M è un ombilico, essendo diretti comunque purchè ortogonali.

Allora, per quanto dicemmo sopra al § 490, nel punto M che si considera avremo $x = y = z = p = q = s = 0$, e una sezione normale in M prodotta da un piano che faccia col piano xz l'angolo α, avrà per equazioni le due

$$y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad , \quad z = z(x, y) \ ;$$

e quindi, almeno nei punti di un certo intorno di M, questa funzione ammetterà una tangente determinata la cui posizione varierà con continuità, ecc..; e questa tangente nel punto M farà l'angolo α coll'asse delle x o colla linea di curvatura tangente a quest'asse.

Ne segue che potremo introdurre in calcolo l'arco σ di questa sezione normale contato a partire da M, e potremo rappresentare la sezione stessa con tre equazioni della forma $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$, $z = z(\sigma)$ essendo $x(\sigma)$, $y(\sigma)$, $z(\sigma)$ funzioni finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde almeno; e queste funzioni dovranno soddisfare alla equazione $z = z(x, y)$ della superficie e dovranno essere tali che per $\sigma = 0$ si abbia $x = y = z = 0$, $\frac{dx}{d\sigma} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{d\sigma} = \operatorname{sen}\alpha$, $\frac{dz}{d\sigma} = 0$.

Oltre a questo poi, osservando che in generale per ogni linea tracciata sulla nostra superficie si ha

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y \ ,$$

si vede che pel punto M della nostra sezione normale sarà

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} = r \cos^2\alpha + t \operatorname{sen}^2\alpha \ ;$$

quindi, escludendo per ora dalle nostre considerazioni il caso delle sezioni normali per le quali nel punto M si abbia $r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha = 0$, i tre determinanti

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} \ ,$$

calcolati nel punto M della nostra sezione normale, non saranno zero tutti e tre poichè, per essere $dz = 0$ in M, i due ultimi sono uguali rispettivamente a $\operatorname{sen}\alpha(r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha)\, d\sigma^3$, e a $-\cos\alpha(r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha)\, d\sigma^3$, e perciò non si avrà alcuna singolarità nelle formole relative al piano osculatore e al raggio di curvatura nel punto M della stessa sezione normale.

Ciò premesso, osserviamo che il piano osculatore di una sezione normale è il piano stesso su cui è situata, e quindi la sua normale principale nel punto M coincide colla normale alla superficie, cioè coll'asse delle z.

Da questo per le formole che danno i coseni degli angoli della normale principale a una curva coi tre assi e in particolare coll'asse delle z, oltre a dedurne che per le sezioni normali che ora si considerano nel punto M si ha $x'' = 0$, $y'' = 0$, se ne deduce subito che $1 = R_\alpha z''$, e si ha quindi intanto immediatamente $\frac{1}{R_\alpha} = r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha$ pel raggio di curvatura R_α nel punto M che si considera della sezione normale che fa l'angolo α colla linea presa per asse delle x, nel supposto, come abbiamo detto, che per questa sezione nello stesso punto M non si abbia $r\cos^2\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha = 0$.

Se poi la sezione normale nel punto M sarà tangente alle linee per le quali $r\cos^2\alpha + t\,\mathrm{sen}^2\alpha = 0$, che noi considereremo più oltre (§ 503 [pag. 663 e seg.]) designandole col nome di *asintotiche* della superficie, e che non sempre sono reali, allora siccome i determinanti (14) sono tutti zero in M, mentre si suppone che non siano zero tutti e tre i differenziali dx, dy e dz, per quanto si disse al § 414 [pag. 553-54], si vede subito che sarà $R_\alpha = \infty$; talchè si può dire ora che la formola trovata varrà anche per queste sezioni normali speciali.

498. — Chiamando dunque *sezioni normali principali* di una superficie in un punto quelle sezioni, corrispondenti agli angoli $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$, che sono tangenti alle linee di curvatura, coll'osservare che nel caso degli ombilichi ogni sezione normale può esser presa come sezione principale, e chiamando R_1 e R_2 i raggi di curvatura di queste sezioni normali principali, si vede subito che *i raggi di curvatura principali di una superficie* $\frac{1}{r}$ *e* $\frac{1}{t}$ *non sono altro che i raggi di curvatura* R_1 *e* R_2 *delle sezioni normali principali corrispondenti*, e in ogni punto di una superficie il raggio di curvatura R_α della sezione normale che fa l'angolo α colla sezione principale di raggio R_α è dato dalla formola

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\,\mathrm{sen}^2\alpha\,, \tag{23}$$

che è dovuta ad *Eulero*, e che ha una importanza grandissima.

Da questa formola, coll'osservare che negli *ombilichi* si ha $r = t$ e quindi $R_1 = R_2$, si deduce che *in questi punti le sezioni normali hanno tutte lo stesso raggio di curvatura;* e in generale poi, osservando che la formola stessa può porsi sotto la forma

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\mathrm{sen}^2\alpha\,,$$

si vede che nei punti che non sono ombilichi della superficie le due sezioni normali principali possono anche considerarsi come le sezioni le cui curvature algebricamente (cioè tenuto conto anche dei segni) sono massime e minime fra quelle delle altre sezioni che passano per lo stesso punto.

E considerando anche la sezione normale corrispondente all'angolo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ e applicandovi la formola di Eulero (23) se ne deduce che *la somma* $\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_{\alpha+\frac{\pi}{2}}}$ *delle curvature di due sezioni normali ortogonali qualunque relative a uno stesso punto è costante e uguale a quella* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ *delle curvature delle sezioni principali.*

499. — Un processo analogo a quello che abbiamo seguito pel caso delle sezioni normali ci conduce anche a trovare il raggio di prima curvatura di una linea qualunque condotta per un punto M di una superficie, quando questa linea ha un piano osculatore in M pel quale non si hanno singolarità nelle formole corrispondenti, e questo piano osculatore non è tangente alla superficie nello stesso punto M.

Prendiamo infatti i soliti assi nel piano tangente in M coi quali in questo punto M si ha $p = q = s = 0$, e chiamiamo σ_1 l'arco della linea che si considera contato da M, R il suo raggio di curvatura in M, e α l'angolo che la sua tangente pure in M fa coll'asse delle x; e inoltre indichiamo con z'' la derivata di z presa rispetto all'arco σ_1 della curva, e con ζ l'angolo che la normale principale a questa curva fa coll'asse delle z, e che per le nostre ipotesi sarà diverso da $\frac{\pi}{2}$.

Ricordando le formole generali del § 418 [pag. 558] che dànno i coseni di direzione della normale principale a una curva, si vede subito che sarà $\cos\zeta = Rz''$ ovvero $R = \frac{\cos\zeta}{z''}$ quand'anche sia $z'' = 0$ (e quindi $R = \infty$) perchè $\cos\zeta$ non è zero; e poichè l'essere ancora, nel punto M, $p = q = s = 0$ porta che si abbia $d^2z = r\,dx^2 + t\,dy^2$, e quindi $\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma_1^2} = z'' = r\cos^2\alpha + t\,\mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{R_\alpha}$, dove R_α è il raggio di curvatura della sezione normale tangente alla curva che si considera nel punto M, si trova subito la formola semplice $R = \pm R_\alpha \cos\zeta$ che vale anche quando R_α è infinito (*); e da questa, osservando anche che l'angolo ζ può riguardarsi come l'angolo del piano osculatore della nostra

---

(*) Per quanto osservammo sopra al § 494, R_α e quindi R saranno infiniti quando la linea data, senza avere il piano osculatore tangente alla superficie, sarà tangente a una di quelle linee per le quali si abbia $\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\,\mathrm{sen}^2\alpha = 0$ che, come dicemmo già, sono le linee che si chiamano *asintotiche* della superficie e saranno da noi studiate nel capitolo seguente.

Il piano osculatore delle asintotiche quando non sono rettilinee, è appunto, come vedremo, il piano tangente alla superficie, e per esse quindi il raggio di curvatura deve essere trovato con processi speciali.

linea col piano della sezione normale tangente si concluderà subito che: *Il raggio di prima curvatura in un punto di una linea tracciata su una superficie, quando in questo punto non si hanno singolarità nè rispetto al piano osculatore della linea nè rispetto alla superficie e questo piano non è tangente alla superficie, è la proiezione del raggio di curvatura della sezione normale tangente, fatta questa proiezione sul piano osculatore della linea.*

Questo teorema importante è dovuto a *Meusnier*, e per mezzo di esso, quando siano conosciuti i raggi di curvatura delle varie sezioni normali, si hanno quelli di una linea qualunque priva di singolarità, il cui piano osculatore non sia tangente alla superficie, e in particolare quelli delle varie *sezioni oblique* della superficie (cioè delle curve prodotte dalla intersezione di un piano qualunque colla superficie, quando questo piano non sia il piano tangente).

Da questo teorema poi si capisce subito ciò che dicemmo senza dimostrazione al § 491, vale a dire che i raggi di curvatura principali di una superficie non sono ordinariamente i raggi di curvatura delle linee di curvatura, poichè ordinariamente i piani osculatori di queste linee non sono normali alla superficie, e quindi essi non coincidono con quelli delle sezioni normali tangenti.

XXXV.

Indicatrice di Dupin. Tangenti coniugate. Linee asintotiche

500. — Torniamo ora a considerare un punto M di una superficie $z = z(x, y)$ pel quale siano soddisfatte le solite condizioni per $z(x, y)$ e per le sue derivate parziali di primo e second'ordine, e negli intorni del punto M riferiamo la superficie ai soliti assi condotti per quel punto, essendo gli assi x e y sul piano tangente e tangenti alle linee di curvatura o, se il punto M è un ombilico, diretti comunque ma sempre ortogonali fra loro.

Consideriamo una sezione normale qualunque relativa al punto M che in questo punto faccia l'angolo α colla linea di curvatura tangente all'asse delle x; e indicando con σ il suo arco a partire da M introduciamo le variabili α e σ per determinare i punti della superficie negli intorni piccolissimi di M.

In seguito a quanto dicemmo sopra al § 497, e colle notazioni dello stesso paragrafo, pel punto M della sezione normale che corrisponde all'angolo α avremo $x = y = z = 0$, $x' = \cos\alpha$, $y' = \operatorname{sen}\alpha$, $z' = 0$, $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = \dfrac{1}{R_\alpha}$,
e quindi pei punti della stessa sezione vicinissimi ad M la formola di Taylor col trascurarvi le quantità di ordine superiore al secondo ci darà le altre

$$x = \sigma \cos\alpha \;,\; y = \sigma \operatorname{sen}\alpha \;,\; z = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) = \frac{\sigma^2}{2R_\alpha} \;,$$

che valgono pei punti di qualunque sezione normale uscente da M, e quindi all'infuori di infinitesimi di ordine superiore al secondo possono anche considerarsi come equazioni della superficie in un piccolo intorno di M colle variabili σ e α.

L'ultima di queste poi a causa delle due prime ci dà l'altra

$$2z = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} ;$$

e questa si sarebbe potuta ottenere subito anche coll'osservare che lo sviluppo di Taylor per le funzioni di più variabili, all'infuori d'infinitesimi di ordine superiore al secondo, ci dà sempre qualunque siano gli assi x, y, z

$$z = z_0 + p(x-x_0) + q(y-y_0) + \frac{1}{2}\left\{r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2\right\},$$

dove $x_0, y_0, z_0, p, q, r, s, t$ sono i valori delle coordinate e delle derivate di z nel punto M, e quindi, per essere coi nostri assi $x_0 = y_0 = z_0 = p = q = s = 0$, si ha appunto $2z = rx^2 + ty^2$, ovvero $2z = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}$.

501. – Di qui poi apparisce che all'infuori di infinitesimi di ordine superiore al secondo, la superficie in un piccolo intorno di M può considerarsi come una superficie di secondo grado; e un piano $z = h$, parallelo al piano tangente e a distanza infinitesima h dalla superficie, la taglia secondo una curva infinitesima del second'ordine

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2h$$

che è un'ellisse quando i raggi R_1 e R_2 sono dello stesso segno e una iperbola quando sono di segno contrario, e si riduce a due rette parallele quando uno di questi raggi è infinito.

E i semi-assi di questa curva quando essa è un'ellisse o un'iperbola sono proporzionali alle radici quadrate di R_1 e R_2; e un suo semi-diametro qualunque ρ che sia inclinato dell'angolo α sull'asse delle x è proporzionale alla radice quadrata del raggio di curvatura della sezione normale che fa colla linea di curvatura tangente all'asse delle x lo stesso angolo α, giacchè passando alle coordinate polari col porre $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$, si ha appunto

$$\frac{2h}{\rho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{R_2} = \frac{1}{R_\alpha} .$$

Immaginando dunque nel piano tangente una curva di secondo grado omotetica a quella di cui qui parliamo, e cogli assi tangenti alle linee di curvatura, questa curva coi suoi diametri potrà servire a darci tutti i raggi di curvatura delle sezioni normali tangenti, poichè questi raggi saranno proporzionali ai quadrati dei diametri corrispondenti; e ben s'intende che potrà servire a mettere in evidenza anche altre proprietà della curvatura delle linee tracciate sulla superficie. Essa perciò, dal nome del suo scopritore, viene detta *indicatrice di Dupin* (*).

E i punti della superficie nei quali, per essere i raggi di curvatura principali dello stesso segno, l'indicatrice è una ellisse vengono detti punti *ellittici;* quelli nei quali essendo i raggi di curvatura principali di segni diversi l'indicatrice viene ad essere una iperbola si dicono punti *iperbolici* o anche a *curvature opposte;* e infine i punti nei quali, essendo uno dei raggi di curvatura principali infinito e l'altro finito, l'indicatrice si riduce a due rette parallele si dicono punti *parabolici.*

Quando i due raggi di curvatura sono uguali i punti della superficie si dicono anche punti circolari, e questi evidentemente sono gli ombilichi delle superficie.

Nei punti parabolici, a causa della formola (11) del § 491 che dà i raggi di curvatura della superficie, si ha $rt - s^2 = 0$ qualunque siano gli assi coordinati, e quindi le superficie i cui punti sono tutti parabolici sono soltanto le superficie sviluppabili.

502. — L'introduzione della curva indicatrice negli studii sulle superficie porta naturalmente alla considerazione per ogni punto di esse delle coppie di direzioni (sulla superficie) che diconsi *conjugate*, cioè di quelle che corrispondono ai diametri conjugati della indicatrice medesima.

Indicando con θ l'angolo di una direzione colla tangente alla sezione normale principale che corrisponde al raggio di curvatura R_1 e con θ_1 quello della direzione coniugata, per le note formole della Geometria analitica avremo

$$(1) \qquad \mathrm{tang}\,\theta\,\mathrm{tang}\,\theta_1 = -\frac{R_2}{R_1} ;$$

e per ogni punto di ogni curva dotata di tangente che si prenda sulla superficie esisterà evidentemente una direzione conjugata a quella della tangente alla curva nel punto stesso.

503. — Per uno stesso punto due direzioni conjugate saranno sempre distinte fra loro a meno che esse non siano tangenti a uno degli asintoti (reali o immaginarii) della indicatrice, perchè soltanto in questo caso i diametri conjugati della indicatrice vengono a coincidere.

(*) Tutto quello che segue in questo volume non trovasi affatto nelle lezioni autografate del 1877.

Le linee che in ogni loro punto sono tangenti a un asintoto della indicatrice si dicono *asintotiche* della superficie. Per ogni punto di esse la tangente ha per direzione coniugata se stessa; e l'angolo θ che le tangenti fanno colla sezione principale alla quale corrisponde il raggio di curvatura R_1 è determinato dalla formola $\tang^2\theta = -\frac{R_2}{R_1}$; talchè per quelle porzioni di superficie i cui punti sono tutti di quelli che abbiamo chiamato *iperbolici*, o *a curvature opposte*, delle asintotiche ne passeranno sempre due per ogni punto che saranno reali e distinte e giaceranno simmetricamente rispetto alle linee di curvatura; mentre nelle porzioni di superficie i cui punti sono di quelli che abbiamo chiamati *ellittici* le asintotiche saranno ancora due per ogni punto ma saranno immaginarie.

E nelle porzioni di superficie i cui punti saranno tutti *parabolici* (superficie sviluppabili) per essere in essi un raggio di curvatura per es. R_1 infinito (l'altro R_2 supposto finito) le asintotiche si ridurranno a una sola che sarà al tempo stesso linea di curvatura, e sarà la generatrice (rettilinea) della superficie medesima.

504. — Preso un sistema di linee su una superficie, distinte dalle asintotiche, se ne formeremo un altro le cui tangenti in ogni punto siano conjugate con quelle delle linee del sistema dato, si dirà che le linee dei due sistemi costituiscono una *rete conjugata;* è quindi evidente che i due sistemi di linee di curvatura costituiranno una rete di linee conjugate ortogonali. E fuori che pei punti ombilichi, e per quelli nei quali le funzioni che figurano nelle equazioni delle superficie hanno qualche singolarità esse o le loro derivate prime o seconde, *il doppio sistema formato dalle linee di curvatura sarà il solo doppio sistema di linee conjugate ortogonali,* perchè nella ellisse e nella iperbola i diametri conjugati ortogonali sono soltanto quelli diretti secondo gli assi di queste linee.

505. — Presa una linea C su una superficie, e immaginati i piani tangenti alla superficie nei varii punti della linea stessa, questi piani dipenderanno da un solo parametro (cioè dalla variabile che determina i punti della linea), e *almeno in generale* (§ 478 [pag. 635]) col loro inviluppo produrranno una superficie che sarà una superficie sviluppabile S; e ora sarà facile vedere che *le generatrici di questa sviluppabile saranno le direzioni conjugate delle tangenti alla linea stessa* C.

S'intenda infatti che ora gli assi coordinati ortogonali siano qualunque, e s'indichino con $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $z = z(\omega)$ le equazioni della linea C, e con a, b, c quantità proporzionali ai coseni di direzione della normale alla superficie nei punti di questa linea; la equazione del piano tangente alla superficie nel punto $M(x, y, z)$ di C potrà porsi sotto la forma

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0\,, \tag{2}$$

e in essa a, b, c saranno come x, y, z funzioni di ω (*); e quindi indicando con a', b', c', x', y', z' le derivate di queste funzioni rispetto ad ω, la superficie sviluppabile S inviluppo dello stesso piano tangente, per quanto dicemmo al citato § 478 sarà rappresentata dalla equazione precedente unita all'altra

$$a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)=0\,, \tag{3}$$

che si ottiene derivando la equazione stessa (2) rispetto ad ω e tenendo conto della circostanza che per essere x', y', z' proporzionali ai coseni di direzione della tangente alla linea C si ha

$$ax'+by'+cz'=0\,; \tag{4}$$

e non si potranno avere eccezioni altro che pei punti di C pei quali i tre determinanti

$$bc'-b'c\,,\quad ca'-c'a\,,\quad ab'-a'b \tag{5}$$

siano tutti zero, cioè pei punti pei quali la matrice

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} \tag{6}$$

sia di caratteristica inferiore a 2.

La generatrice G di S per ogni punto $M(x, y, z)$ di C o per ogni valore speciale di ω sarà dunque rappresentata dal sistema delle due equazioni (2) e (3), e conseguentemente i suoi coseni di direzione saranno proporzionali ai determinanti (5); talchè se, essendo $z = z(x, y)$ la equazione della superficie che si considera, prenderemo $a = p$, $b = q$, $c = -1$, avendosi allora

$$da = rdx + sdy\,,\quad db = sdx + tdy\,,\quad dc = 0\,,$$

(*) Naturalmente occorre escludere il caso in cui a, b, c sono indipendenti da ω, perchè questo porterebbe che il piano tangente alla superficie fosse lo stesso lungo tutta la curva C, e non si potrebbe parlare di superficie inviluppo di questo piano.

Con ciò oltre a lasciare da parte, come è ben naturale, il caso in cui la superficie data è un piano, si lasciano da parte quello in cui essendo la superficie sviluppabile la linea C è una delle sue generatrici, quello in cui essendo la superficie di rivoluzione la linea C è una linea di massimo o di minimo di essa, ecc.

Del resto questi casi di eccezione vengono poi tutti compresi in quelli che si indicano dopo riferendosi alla matrice (6), quando cioè si escludono i punti nei quali questa matrice è di caratteristica inferiore a 2.

i coseni di direzione della generatrice G di S saranno proporzionali a

(7) $$-(sx'+ty')\ ,\ (rx'+sy')\ ,\ p(sx'+ty')-q(rx'+sy')\ ;$$

e poichè quando x', y' e $z'=px'+qy'$ non sono tutte zero le due prime di queste quantità (7) non potranno essere zero insieme a meno che non sia $rt-s^2=0$, così è certo che, fuori dei punti della curva pei quali fosse $x'=y'=z'=0$, non si potranno avere eccezioni altro che pei punti della superficie pei quali sia $rt-s^2=0$, cioè pei punti parabolici della superficie.

Ne segue che quando si prenderà per piano xy il piano tangente alla superficie nel punto M e per asse delle z la normale, e inoltre si prenderà l'asse delle x tangente alla sezione normale principale che corrisponde al raggio di curvatura R_1, siccome con questi assi coordinati nel punto M sarà $p=q=s=0$, i coseni di direzione delle tangenti a C e a G nel punto M saranno proporzionali respettivamente a

$$x', y', 0\ ,\quad \text{e a}\quad -ty', rx', 0\ ;$$

e quindi, indicando con θ e θ_1 gli angoli delle tangenti nel punto M a C e a G coll'asse delle x, si vede subito che $\cos\theta_1$ e $\operatorname{sen}\theta_1$ saranno proporzionali a $-ty'$ e rx', e quindi avremo $\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta_1=-\frac{r}{t}$; e siccome nel punto M si ha $R_1=\frac{1}{r}$ e $R_2=\frac{1}{t}$, avremo anche $\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}\theta_1=-\frac{R_2}{R_1}$, ciò che mostra appunto come volevamo che le linee C e G sono a tangenti conjugate; e queste linee C e G avranno la stessa tangente quando sarà $\theta=\theta_1$, cioè quando la linea C sarà una asintotica e viceversa.

506. — Tornando dunque ad ammettere che gli assi coordinati siano qualunque, di qui risulta subito che, sempre colle esclusioni fatte, le linee asintotiche saranno quelle linee per le quali i coseni di direzione saranno proporzionali ai determinanti (5), cioè le linee per le quali si avrà

$$x'=k(bc'-b'c)\ ,\ y'=k(ca'-a'c)\ ,\ z'=k(ab'-a'b)\ ,$$

essendo k un coefficiente che non sarà zero altro che nei punti pei quali si abbia $x'=y'=z'=0$; quindi, osservando che moltiplicando per a', b', c' i tre determinanti (5) e sommandoli la somma viene zero, si vede subito che per le asintotiche dovremo avere la equazione

(8) $$a'x'+b'y'+c'z'=0\ ,$$

essendo le a, b, c quantità proporzionali ai coseni di direzione della normale alla superficie nei punti delle linee stesse, e a', b', c' le loro derivate rispetto al parametro corrispondente ω; e viceversa se questa equazione sarà soddisfatta la linea sarà una asintotica a meno che non si sia in punti nei quali x', y', z' o i tre determinanti (5) sono tutti zero, perchè avendosi sempre anche

(9) $$ax'+by'+cz'=0\ ,$$

dall'insieme di queste due equazioni si deduce che, fuori dei casi d'eccezione ora indicati, x', y', z' sono proporzionali ai tre determinanti (5).

Prendendo dunque ancora $a=p$, $b=q$, $c=-1$, con che $da=dp$, $db=dq$ e $dc=0$, si vede subito che la equazione delle asintotiche in coordinate cartesiane ortogonali è la seguente

(10) $$dp\,dx+dq\,dy=0\ ,$$

ovvero

(11) $$(r\,dx+s\,dy)\,dx+(s\,dx+t\,dy)\,dy=0\ ,$$

o anche

(12) $$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0\ .$$

507. — Osservando poi che derivando la (9) e tenendo conto della (8) si ottiene l'altra

(13) $$ax''+by''+cz''=0\ ,$$

basterà avere riguardo a questa e alla stessa (9) per dedurne che i coefficienti a, b, c sono proporzionali in ogni punto delle asintotiche ai coefficienti del loro piano osculatore; e questo mostra che *il piano osculatore delle asintotiche è il piano tangente alla superficie.*

Viceversa le linee il cui piano osculatore è il piano tangente alla superficie sono le asintotiche, perchè dall'essere i coefficienti a, b, c del piano tangente proporzionali a quelli $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ del piano osculatore se ne deducono subito la (9) e la (13), e quindi derivando la (9) e tenendo conto della (13) si trova subito anche la (8).

Del resto che il piano tangente alla superficie lungo le asintotiche sia il loro piano osculatore risulta anche dall'osservare che la sviluppabile S, che abbiamo considerata sopra, quando la linea C è una asintotica è quella generata dalle tangenti a questa linea, e quindi il suo piano tangente lungo ogni generatrice che è pure il piano tangente alla superficie data è il piano osculatore della linea C (§ 481 [pag. 639 e seg.]), fatta tutt'al più eccezione per le generatrici corrispondenti ai punti delle tangenti stazionarie di C, ecc.

508. — E notiamo anche che scritta la equazione (8) sotto la forma $da\,dx + db\,dy + dc\,dz = 0$, si vede subito come si possa avere la equazione delle asintotiche anche in coordinate curvilinee u e v, quando per la superficie data si hanno le equazioni

$$x = x(u, v) \;,\quad y = y(u, v) \;,\quad z = z(u, v) \;;$$

poichè evidentemente, per quanto si disse al § 377 [pag. 510] basterà prendere per le quantità a, b, c i determinanti

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \;,\quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \;,\quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \;,$$

e sostituire poi nella equazione precedente per dx, dy, dz, da, db, dc i valori che si ottengono da queste espressioni colla differenziazione.

XXXVI.

Sui sistemi di rette nello spazio

Generalità.

509. — Una retta qualunque nello spazio potendo essere rappresentata dalle due equazioni

$$(1) \qquad x = \alpha z + \beta \;,\quad y = \alpha_1 z + \beta_1 \;,$$

risulta determinata dai valori che si danno ai quattro parametri $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$; e quando si ammetta che questi parametri variino con certe leggi si avranno sistemi di rette determinati da queste leggi.

Quando questi parametri $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ dipendano respettivamente da una, da due, o da tre variabili, o siano legati respettivamente da tre, da due o da una equazione, si dice che i sistemi di rette corrispondenti costituiscono respettivamente una *superficie rigata*, una *congruenza*, o un *complesso di rette* restando la superficie rigata, la congruenza o il complesso determinati dalle relazioni che legano gli stessi parametri alle variabili o fra loro.

Esempii di superficie rigate si hanno nelle superficie generate dalle tangenti a una curva, o dalle normali principali o dalle binormali pure ad una curva; esempii di congruenze di rette si hanno dai sistemi delle rette normali ad una superficie, e esempii di complessi si hanno dai sistemi di rette condotte da ciascun punto di una curva ai varii punti di una superficie data.

510. — Sopra queste varie categorie di sistemi di rette si hanno studii che presentano un grande interesse; e già ad es. noi venimmo a dare un saggio della importanza delle congruenze quando per trattare delle linee di curvatura delle superficie considerammo le congruenze formate dalle normali, e dimostrammo l'esistenza di quei doppii sistemi di normali che s'incon-

trano successivamente all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore e dànno origine alle superficie che sono il luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili formate da quei sistemi di normali e che chiamammo evolute della superficie data.

Ma, malgrado l'interesse che presentano gli studii sui varii sistemi di rette, noi per la necessità di por fine a questo Volume ormai già grandemente esteso, siamo costretti a rimandare per la maggior parte di essi alle opere di Geometria infinitesimale o di analisi che ne trattano diffusamente (*), e qui ci limiteremo ad esporre gli elementi principali della teoria delle superficie rigate e delle congruenze perchè sì queste che quelle si presentano in tante questioni di Geometria e di meccanica e nelle applicazioni alla fisica, e non possiamo quindi fare a meno di trattarne alquanto.

511. — Premettiamo perciò alcune considerazioni generali relative ai sistemi di rette nelle equazioni delle quali potranno figurare sì uno che più parametri, per modo che i risultati che otterremo potranno giovare tanto per le superficie rigate quanto per le congruenze e pei complessi.

Osserviamo in modo generale che una retta qualsiasi, anzichè per mezzo delle equazioni (1), potrà essere sempre rappresentata da tre equazioni della forma

(2)
$$x = \xi + la \ , \ y = \eta + lb \ , \ z = \zeta + lc \ ,$$

indicando con (ξ, η, ζ) le coordinate di un punto P di questa retta, con a, b, c i suoi coseni di direzione, presa questa direzione in un certo senso che verrà fissato, e con l la distanza presa positivamente o negativamente del punto generico (x, y, z) della retta dal punto iniziale $P(\xi, \eta, \zeta)$ che, secondo una denominazione adottata, dicesi il piede delle distanze l, come quelle distanze diconsi le *ascisse sulla retta* dei punti di essa contate dal loro piede, e prese positive nel senso scelto come direzione positiva della retta e negative nell'altro.

Quando, come noi appunto faremo, invece di una sola retta se ne considera un sistema, le quantità $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ saranno funzioni di uno o più parametri variabili, per le ultime tre delle quali si avrà sempre la relazione $a^2+b^2+c^2=1$; e noi negli studii che vogliamo fare ammetteremo che, esclusi soltanto certi valori speciali di questi parametri, per tutti gli altri valori che si considereranno le stesse quantità, oltre ad essere funzioni finite e continue, ammet-

(*) V. ad es. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*. (Pisa, Enrico Spoerri 1902) — Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1902) e molti altri.

tano anche le derivate (ordinarie o parziali) determinate e finite almeno fino a quell'ordine pel quale avremo bisogno di considerarle.

512. — Ciò premesso prendiamo a considerare insieme a una retta (2) corrispondente a un determinato valore dei parametri che figurano nelle sue equazioni anche un'altra retta vicinissima del sistema che corrisponda a valori leggermente variati di tutti o di alcuni degli stessi parametri, e siano $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta, \Delta a, \Delta b, \Delta c$ gli accrescimenti che ricevono $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ nel passaggio dall'una retta all'altra.

Per una nota formola della Geometria analitica, la minima distanza δ fra queste due rette sarà data in valore assoluto dalla formola

(3)
$$\delta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a & \Delta a & \Delta\xi \\ b & \Delta b & \Delta\eta \\ c & \Delta c & \Delta\xi \end{vmatrix} ,$$

essendo θ l'angolo piccolissimo delle due rette, per modo che $\operatorname{sen}^2\theta$ è il quadrato della matrice

(4)
$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \Delta a & \Delta b & \Delta c \end{Vmatrix} ,$$

cioè $(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2 - (a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c)^2$ ovvero

$$\left\{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2\right\}\left\{1 - \frac{1}{4}\left[(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2\right]\right\} ,$$

perchè dalla formola $(a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2 + (c+\Delta c)^2 = 1$ si ha

$$a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c = -\frac{1}{2}\left\{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2\right\} .$$

E le ascisse l_1, l_2 dei piedi della minima distanza sulla prima e sulla seconda retta saranno respettivamente

(5)
$$l_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a+\Delta a & g & \Delta\xi \\ b+\Delta b & h & \Delta\eta \\ c+\Delta c & k & \Delta\zeta \end{vmatrix} \ , \ l_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a & g & \Delta\xi \\ l & h & \Delta\eta \\ c & k & \Delta\zeta \end{vmatrix} ,$$

essendo g, h, k i coseni di direzione della minima distanza δ che sono dati dalle formole

(6)
$$g = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} b & \Delta b \\ c & \Delta c \end{vmatrix} \ , \ h = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} c & \Delta c \\ a & \Delta a \end{vmatrix} \ , \ k = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a & \Delta a \\ b & \Delta b \end{vmatrix} .$$

513. — Ricordiamo ora che se f è una funzione dei parametri (uno o più) che figurano nelle equazioni (2) delle nostre rette, ed è finita e continua insieme alle sue derivate (ordinarie o parziali) almeno fino a quelle del terz'ordine, per la formola di Taylor abbreviata, a una o più variabili, avremo sempre

$$\Delta f = df + \frac{1}{2} d^2 f + \frac{1}{6} d^3 f + \varepsilon \,,$$

essendo ε una quantità che sarà piccola quanto si vuole dipendentemente dalla piccolezza degli accrescimenti dati ai parametri che figurano in f.

Indicando con P il determinante che figura in δ, avremo

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} a & da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{6} d^3 a + \varepsilon_1 & d\xi + \frac{1}{2} d^2\xi + \frac{1}{6} d^3\xi + \varepsilon'_1 \\ b & db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{6} d^3 b + \varepsilon_2 & d\eta + \frac{1}{2} d^2\eta + \frac{1}{6} d^3\eta + \varepsilon'_2 \\ c & dc + \frac{1}{2} d^2 c + \frac{1}{6} d^3 c + \varepsilon_3 & d\zeta + \frac{1}{2} d^2\zeta + \frac{1}{6} d^3\zeta + \varepsilon'_3 \end{vmatrix} ,$$

e quindi sviluppando questo determinante fino ai termini del quart'ordine e ponendo

$$\text{(7)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & da & d\xi \\ b & db & d\eta \\ c & dc & d\zeta \end{vmatrix} ,$$

e poi calcolando colle regole note $d\Delta$ e $d^2\Delta$ si troverà con tutta facilità

$$\text{(8)} \quad \mathrm{P} = \Delta + \frac{1}{2} d\Delta + \frac{1}{6} d^2\Delta - \frac{1}{12} \begin{vmatrix} a & d^2 a & d^2\xi \\ b & d^2 b & d^2\eta \\ c & d^2 c & d^2\zeta \end{vmatrix} - \frac{1}{6} \begin{vmatrix} da & d^2 a & d\xi \\ db & d^2 b & d\eta \\ dc & d^2 c & d\zeta \end{vmatrix} + \bar{\varepsilon},$$

essendo $\bar{\varepsilon}$ una quantità infinitesima di ordine superiore al quarto; per modo che si avrà $\delta = \dfrac{\mathrm{P}}{\operatorname{sen}\theta}$ essendo P dato dall'ultima formola (8); e così quando Δ non sia zero — ciò che escluderà in particolare il caso che siano zero insieme da, db e dc, o $d\xi$, $d\eta$ e $d\zeta$ — la distanza δ sarà infinitesima del prim'ordine, e all'infuori di quantità di second'ordine avremo

$$\text{(9)} \qquad \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{\Sigma\, da^2}} \,;$$

mentre, nel caso particolare in cui il determinante Δ è zero per tutti i valori che si considerano dei parametri che figurano nelle equazioni (2) delle rette, per tutti punti pei quali da, db e dc non saranno zero insieme avremo

$$\text{(10)} \qquad \delta = -\frac{1}{12\sqrt{\Sigma\, da^2}} \left\{ \begin{vmatrix} a & d^2 a & d^2\xi \\ b & d^2 b & d^2\eta \\ c & d^2 c & d^2\zeta \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} d\xi & da & d^2 a \\ d\eta & db & d^2 b \\ d\zeta & dc & d^2 c \end{vmatrix} \right\} + \bar{\varepsilon}_1 \,,$$

indicando per abbreviare con $\Sigma\, da^2$ la somma $da^2 + db^2 + dc^2$, e intendendo che $\bar{\varepsilon}_1$ sia un nuovo infinitesimo d'ordine superiore al terzo; per modo che si può dire che *quando la condizione $\Delta = 0$ è soddisfatta per tutti i valori che si considerano dei parametri, e per gli stessi valori i differenziali da, db e dc non sono zero insieme, la distanza infinitesima fra le rette successive è sempre del terz'ordine almeno.*

Osserviamo poi che, escluso il caso in cui sia *sempre* $da = db = dc = 0$ (*), — che corrisponderebbe a quello in cui le rette (2) sono tutte parallele a una direzione fissa —, l'essere $\Delta = 0$ porta che si possano determinare due quantità g_0 e h_0 (delle quali la prima sarà infinitesima) per modo che si abbiano le tre equazioni

$$\text{(11)} \quad d\xi + g_0 a + h_0 da = 0 \;,\; d\eta + g_0 b + h_0 db = 0 \;,\; d\zeta + g_0 c + h_0 dc = 0 \,,$$

poichè, moltiplicandole una volta per a, b, c e un'altra per da, db, dc si vede che basta prendere

$$\text{(12)} \qquad g_0 = -\Sigma\, a\, d\xi \;,\; h_0 = -\frac{\Sigma\, da\, d\xi}{\Sigma\, da^2}\ (**) \,.$$

Per questo, osservando che dalle formole precedenti avremo anche colla differenziazione

$$d^2\xi + a\, dg_0 + (g_0 + dh_0)\, da + h_0 d^2 a = 0 \;,\; d^2\eta + b\, dg_0 + (g_0 + dh_0)\, db + h_0 d^2 b = 0 \,,$$
$$d^2\zeta + c\, dg_0 + (g_0 + dh_0)\, dc + h_0 d^2 c = 0 \,,$$

e sostituendo in δ pei differenziali di ξ, η e ζ i valori che vengono da queste

---

(*) Il caso di $da = db = dc = 0$ comprende anche quello in cui a, b, c fossero proporzionali a da, db, dc perchè, a causa della relazione $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ che dà $a\,da + b\,db + c\,dc = 0$, le equazioni $\dfrac{da}{a} = \dfrac{db}{b} = \dfrac{dc}{c}$ porterebbero ancora $da = db = dc = 0$.

(**) Per semplicizzare, come abbiamo indicato con $\Sigma\, da^2$ la somma $da^2 + db^2 + dc^2$, così in generale indichiamo con $\Sigma\mathrm{L}$ la somma $\mathrm{L} + \mathrm{M} + \mathrm{N}$ di tre quantità simili $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ dipendenti ciascuna nello stesso modo dagli assi x, y, z respettivamente.

formole, avremo subito l'altra

$$(13)\qquad \delta = \frac{g_0 - dh_0}{12\sqrt{\Sigma da^2}} \begin{vmatrix} a & da & d^2a \\ b & db & d^2b \\ c & dc & d^2c \end{vmatrix} + \bar{\varepsilon}_1 ,$$

che ci dà un'altra forma semplice del δ sempre pel caso di $\Delta = 0$.

E si può notare che il determinante che figura in questa formola come il determinante Δ mutano soltanto per fattori che passano fuori a moltiplicarli quando ai coseni a, b, c si sostituiscono quantità proporzionali; come si può notare anche che gli stessi determinanti possono porsi sotto varie forme facendone il quadrato colla regola del prodotto dei determinanti e poi estraendo la radice.

Così ad esempio si trova

$$(14)\qquad \Delta^2 = \Sigma da^2 \Sigma d\xi^2 - (\Sigma da\, d\xi)^2 - \Sigma da^2 (\Sigma a\, d\xi)^2 ,$$

e quindi anche $\Delta^2 = \Sigma da^2 \left\{ \Sigma d\xi^2 - (\Sigma a\, d\xi)^2 \right\} - (\Sigma da\, d\xi)^2$, ovvero

$$(15)\qquad \Delta^2 = D^2 \Sigma da^2 - (\Sigma da\, d\xi)^2 ,$$

e si ha pure evidentemente

$$(16)\qquad \Delta^2 = D_1^2 - \Sigma da^2 (\Sigma a\, d\xi)^2 ,$$

essendo D e D_1 i quadrati delle matrici

$$(17)\qquad \begin{Vmatrix} a & b & c \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} da & db & dc \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{Vmatrix} .$$

Superficie rigate.

514. — Premesse queste considerazioni generali, passiamo a studiare il caso in cui le nostre rette costituiscono *una superficie rigata*, supponendo cioè che nelle loro equazioni

$$(1)\qquad x = \xi + la \ , \ y = \eta + lb \ , \ z = \zeta + lc$$

le funzioni che vi figurano contengano una sola variabile ω.

Queste equazioni rappresenteranno allora la superficie in coordinate curvilinee l e ω, e su essa le linee $\omega = \text{cost.}$ saranno le *generatrici*, mentre la linea $l = 0$ sarà la curva di equazioni $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ che si dirà la *direttrice*, e le linee $l = \text{cost.}$ saranno curve i cui punti distano della lunghezza

l sulla generatrice dal punto corrispondente della direttrice in un senso o nell'altro secondochè l sarà positiva o negativa.

Escludendo il caso che $d\xi$, $d\eta$ e $d\zeta$ siano contemporaneamente zero, il radicale $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$ rappresenterà il differenziale $d\sigma$ dell'arco della direttrice, e i rapporti $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\eta}{d\sigma}$, $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ rappresenteranno i coseni di direzione della tangente a questa curva, e se, indicando cogli apici le derivate di ξ, η, ζ, a, b, c, σ, porremo

$$(2)\qquad \Sigma a'^2 = L^2 \ , \ \Sigma a'\xi' = M \ , \ \Sigma a\xi' = N \ , \ \Sigma \xi'^2 = \sigma'^2 ,$$

$\frac{N}{\sigma'}$ o $N\frac{d\omega}{d\sigma}$ rappresenterà il coseno dell'angolo τ della generatrice colla direttrice.

Per la (9) del paragrafo precedente, quando il determinante Δ, al quale ora può sostituirsi l'altro Δ_1 colle derivate, cioè

$$(3)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a' & \xi' \\ b & b' & \eta' \\ c & c' & \zeta' \end{vmatrix} ,$$

non è zero, la minima distanza δ fra le generatrici successive sarà del primo ordine, e all'infuori di quantità d'ordine superiore al primo verrà data dalla formola

$$(4)\qquad \delta = \frac{\Delta_1}{L} d\omega ;$$

e nel caso di $\Delta_1 = 0$ avremo invece per la (13) dello stesso paragrafo all'infuori di quantità di quart'ordine

$$(5)\qquad \delta = \frac{l_0 - h'_0}{12\,L} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} d\omega^3 ,$$

essendo $l_0 = \frac{g_0}{d\omega}$.

L'angolo di queste generatrici che è $\sqrt{\Sigma da^2}$ sarà $L\,d\omega$; e il valore l_1 di l al punto limite della minima distanza sulla generatrice che si considera, a causa della prima delle (5) del § 512 sarà dato dalla formola

$$l_1 = \frac{1}{L} \begin{vmatrix} a & g & \xi' \\ b & h & \eta' \\ c & k & \zeta' \end{vmatrix} ,$$

dove g, h e k sono dati dalle (6) dello stesso paragrafo nelle quali a Δa, Δb, Δc siano sostituite a', b', c'; e da queste quadrando il determinante e tenendo conto della formola (14) del paragrafo precedente nella quale ai differenziali siano ancora sostituite le derivate, si troverà $l_1 = -\frac{M}{L^2}$, e quindi la linea che sarà il luogo dei limiti dei piedi delle minime distanze sulle varie generatrici, e che potrà anche ridursi ad un punto, sarà quella di equazione

$$L^2 l + M = 0 \tag{6}$$

in coordinate curvilinee l e ω.

Questa linea viene detta la *linea di stringimento* della superficie, e i suoi punti vengono detti i *punti centrali* delle singole generatrici. Quando essa si riduca ad un punto la superficie rigata sarà naturalmente una superficie conica.

515. — Calcolando dx, dy, dz per mezzo delle (1) e poi quadrando e sommando, si ha pel quadrato dell'elemento lineare della superficie

$$ds^2 = dl^2 + 2N\,dl\,d\omega + (l^2L^2 + 2lM + \sigma'^2)\,d\omega^2,$$

ovvero

$$ds^2 = dl^2 + 2N\,dl\,d\omega + \left\{\left(Ll + \frac{M}{L}\right)^2 + \sigma'^2 - \frac{M^2}{L^2}\right\} d\omega^2,$$

o anche per la (14) del § 513

$$ds^2 = dl^2 + 2N\,dl\,d\omega + \left\{\left(Ll + \frac{M}{L}\right)^2 + \frac{\Delta_1^2 + L^2N^2}{L^2}\right\} d\omega^2,$$

o anche infine

$$ds^2 = dl^2 + 2\frac{N}{L}\,dl\,d\omega_1 + \left\{\left(l + \frac{M}{L^2}\right)^2 + \frac{\Delta_1^2 + L^2N^2}{L^4}\right\} d\omega_1^2,$$

quando s'introduca una nuova variabile ω_1 col porre $L\,d\omega = d\omega_1$.

E quando s'indichi con G^2 il quadrato della matrice

$$\left\|\begin{matrix} a' & b' & c' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{matrix}\right\|,$$

in queste espressioni di ds^2 a $\Delta_1^2 + L^2N^2$ potremo anche sostituire G^2.

Quando poi la direttrice sia ortogonale alle generatrici, allora avendosi $N = 0$, se indicheremo con α l'ascissa $-\frac{M}{L^2}$ del punto centrale, e porremo

$\beta = \frac{\Delta_1}{L^2}$ avremo sotto forma più semplice

$$ds^2 = dl^2 + \left\{(l-\alpha)^2 + \beta^2\right\} L^2 d\omega^2, \tag{7}$$

o anche

$$ds^2 = dl^2 + \left\{(l-\alpha)^2 + \beta^2\right\} d\omega_1^2. \tag{8}$$

E se vorremo il differenziale dell'arco s_1 della linea di stringimento $l = -\frac{M}{L^2}$ basterà prendere

$$ds_1^2 = dl^2 + \frac{\Delta_1^2}{L^2} d\omega^2, \quad \text{o} \quad ds_1^2 = dl^2 + 2N\,dl\,d\omega + \frac{\Delta_1^2 + L^2N^2}{L^2} d\omega^2,$$

secondochè la direttrice sarà o no perpendicolare alle generatrici, intendendo che in queste espressioni dl venga determinato per mezzo della equazione $l = -\frac{M}{L^2}$ colla differenziazione.

516. — Supponendo ora che la direttrice sia una vera e propria curva nello spazio (*), consideriamo in particolare il caso in cui le generatrici sono tangenti alla direttrice, nel qual caso, esclusi i punti speciali nei quali ξ', η', ζ' fossero zero insieme, le a, b, c saranno sempre proporzionali a ξ', η', ζ' e si avrà $\Delta_1 = 0$ in tutti i tratti di curva che si considerano.

Ammesso allora per semplicità che ω sia l'arco σ di questa direttrice, sarà precisamente $a = \xi'$, $b = \eta'$, $c = \zeta'$ con $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$, e quindi per la (10) del § 513 avremo subito

$$\delta = -\frac{1}{12\sqrt{\Sigma\xi''^2}} \begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix} d\sigma^3 + \bar{\varepsilon}_1,$$

fatta solo eccezione pel caso di $\xi'' = \eta'' = \zeta'' = 0$; il qual caso quando, come supponiamo, la direttrice non sia rettilinea neppure in piccoli tratti, corrisponde ai punti delle tangenti stazionarie (§§ 396-97 [pag. 532 e seg.]), perchè, quando la variabile indipendente è l'arco, il quadrato della matrice

$$\left\|\begin{matrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{matrix}\right\|$$

(*) S'intende con ciò di escludere il caso in cui la direttrice si riduca ad un punto o ad una linea retta o a tratti di linee rette.

non può essere zero — e quindi la matrice stessa non può avere una caratteristica inferiore a 2 — altro che quando si abbia $\xi''=\eta''=\zeta''=0$.

Con queste ipotesi, δ sarà sempre infinitesimo del terz'ordine, e per le formole dei §§ 414-15 [pag. 553 e seg.] si avrà $\delta=\frac{d\sigma^3}{12\rho r}$ all'infuori di quantità d'ordine superiore al terzo, tutte le volte che il determinante

$$\begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix}$$

non sia zero, ciò che porta che r sia finito; dunque, osservando che se questo determinante fosse zero in tutto un tratto la curva sarebbe piana (§§ 398 e 426 [pag. 534 e 569 e seg.]), e se fosse zero soltanto in punti speciali questi sarebbero punti di piani osculatori stazionarii, che comprendono anche quelli già esclusi delle tangenti stazionarie quando vi siano, si può ora enunciare un teorema dovuto a *Bonnet* che si enuncia col dire che *per le curve nello spazio che non sono nè rettilinee nè piane le minime distanze* δ *delle tangenti successive, nei punti che non sono punti di piani osculatori stazionarii, sono sempre del terz'ordine e la loro parte principale è* $\frac{d\sigma^3}{12\rho r}$.

Invece nei punti dei piani osculatori stazionarii che non siano al tempo stesso punti di tangenti stazionarie le dette distanze minime sono di ordine superiore al terzo.

517. — Nel caso ora considerato la superficie rigata, essendo il luogo delle tangenti a una curva, è una superficie sviluppabile (§ 480 [pag. 638]).

In generale però è facile anche di vedere che la condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie rigata (1) sia una sviluppabile è appunto quella che il solito determinante Δ, o Δ_1, sia zero, cioè, in altri termini, che le distanze fra le rette (1) successive siano sempre di ordine superiore al primo (e quindi del terz'ordine almeno).

Se infatti la superficie (1) avrà le generatrici tangenti a una curva che non si riduca ad un punto (sia questa curva o no la direttrice $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$), questa curva sarà rappresentata in coordinate curvilinee sulla superficie da una equazione $l=f(\omega)$, e quindi per essa avremo le equazioni

$$(9)\qquad x=\xi+f(\omega)a\ ,\quad y=\eta+f(\omega)b\ ,\quad z=\zeta+f(\omega)c,$$

e a, b, c dovranno essere proporzionali alle derivate dei secondi membri di

queste formole, cioè alle quantità

$$(10)\qquad \xi'+f'(\omega)a+f(\omega)a'\ ,\quad \eta'+f'(\omega)b+f(\omega)b'\ ,\quad \zeta'+f'(\omega)c+f(\omega)c',$$

che ora non potranno essere tutte zero altro che per valori speciali di ω; e questo basta per potere dire che in questo caso sarà sempre $\Delta_1=0$.

Lo stesso poi avverrà se questa curva si riduce ad un punto perchè allora le coordinate di questo punto saranno ancora date dalle (9), e le loro derivate che saranno ancora le tre quantità precedenti (10) saranno sempre tutte zero.

Viceversa se $\Delta_1=0$, allora per quanto si disse nel § 513, se le rette (1) non saranno parallele a una direzione fissa, — il che del resto porterebbe che la superficie fosse cilindrica e quindi ancora sviluppabile —, avremo le formole

$$(11)\qquad \xi'+g'_0a+h_0a'=0\ ,\quad \eta'+g'_0b+h_0b'=0\ ,\quad \zeta'+g'_0c+h_0c'=0\,,$$

che vengono dalle (11) e (12) del § 513 cambiandovi g_0 in $g'_0 d\omega$, e nelle quali sarà $g'_0=-\Sigma a\xi'$ e $h_0=-\frac{\Sigma a'\xi'}{\Sigma a'^2}=-\frac{M}{L^2}$, talchè, se si prende a considerare sulla superficie la linea che in coordinate curvilinee ha per equazione $l=h_0=-\frac{M}{L^2}$, e che potrà talvolta ridursi anche ad un punto, cioè la linea di equazioni

$$x=\xi+h_0a\ ,\quad y=\eta+h_0b\ ,\quad z=\zeta+h_0c\,,$$

con $h_0=-\frac{M}{L^2}$, per le (11) stesse, quando questa linea non si riduca ad un punto, i coseni a, b, c saranno proporzionali ai valori di x', y', z' che si hanno da queste formole, e quindi le generatrici della nostra superficie saranno appunto le tangenti a questa linea e la superficie sarà sviluppabile; e lo stesso avverrà se questa linea si ridurrà ad un punto, perchè allora la superficie verrà ad essere una superficie conica. E in ogni caso questo punto, o questa linea alla quale le generatrici risultano tangenti sono il punto o la linea che abbiamo trovato come punto o linea di stringimento della superficie nel caso generale.

E per quanto dicemmo al § 513 si può notare che nei determinanti Δ o Δ_1 invece dei coseni a, b, c si potranno sempre intendere poste anche altre quantità ad essi proporzionali.

518. — Come nei due paragrafi precedenti abbiamo considerato la superficie rigata formata dalle tangenti a una curva, consideriamo ora anche la

superficie rigata delle normali principali a una curva e quelle delle binormali.

Nel caso della superficie rigata delle normali principali alla curva $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ che prenderemo ancora come direttrice, supponiamo sempre che la variabile indipendente sia l'arco σ della stessa curva C, e osserviamo che i coseni a, b, c delle rette che costituiscono la nostra superficie saranno proporzionali alle derivate seconde ξ'', η'', ζ''.

Ne segue che il determinante Δ_1 corrispondente sarà proporzionale all'altro

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix}$$

che non può essere sempre zero (§§ 398 e 426 [pag. 354 e 569 e seg.]) altro che nel caso in cui la curva C è piana; quindi per quanto dicemmo nel paragrafo precedente si può ora affermare che *le normali principali di una curva non possono costituire una superficie sviluppabile altro che quando la curva sia piana.*

Per le curve gobbe adunque la superficie delle normali principali sarà sempre una superficie gobba, e di questa superficie potremmo determinare con tutta facilità la linea di stringimento, l'elemento lineare ecc. mediante le formole dei §§ 514 e 515.

519. — Al modo stesso e con uguale facilità si dimostra che anche *la superficie delle binormali di una curva non è mai sviluppabile a meno che la curva non sia piana.*

In questo caso infatti, qualunque sia la variabile indipendente ω che figurerà nelle equazioni $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ della curva data che si prenderà ancora come direttrice, i coseni a, b, c saranno proporzionali ai determinanti

$$\eta'\zeta''-\zeta'\eta'' \ ,\quad \zeta'\xi''-\xi'\zeta'' \ ,\quad \xi'\eta''-\eta'\xi'',$$

e quindi il determinante Δ_1 corrispondente sarà proporzionale all'altro

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta'\zeta''-\zeta'\eta'' & \eta'\zeta'''-\zeta'\eta''' \\ \eta' & \zeta'\xi''-\xi'\zeta'' & \zeta'\xi'''-\xi'\zeta''' \\ \zeta' & \xi'\eta''-\eta'\xi'' & \xi'\eta'''-\eta'\xi''' \end{vmatrix}$$

che, sviluppato secondo gli elementi della prima colonna col ricordare la formola (16) della pag. 574 nella quale sia fatto $j=1$, si riduce al prodotto di $\Sigma\xi'^2$ pel determinante (12) nel quale ora le derivate s'intenderanno prese rispetto

alla variabile ω; e questo mostra subito che lo stesso determinante non può essere zero sempre, e quindi la nostra superficie non può essere sviluppabile, altro che quando la curva data sia piana.

Anche della superficie gobba delle binormali a una curva si potrebbero determinare subito la linea di stringimento, l'elemento lineare ecc. valendosi delle formole dei §§ 514 e 515.

520. — Tornando al caso delle superficie rigate in generale, troviamo la equazione del piano tangente in un loro punto qualunque (l, ω) o (x, y, z).

Ricordando che in generale per una superficie qualunque rappresentata in coordinate curvilinee dalle equazioni $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ la equazione del piano tangente nel punto (x, y, z) è data dalla formola (§ 376 [pag. 508 e seg.])

$$\begin{vmatrix} X-x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ Y-y & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ Z-z & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

si vede subito che nel caso della superficie rigata (1) la equazione del piano tangente nel punto (l, ω) sarà la seguente

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} X-\xi & a & \xi'+la' \\ Y-\eta & b & \eta'+lb' \\ Z-\zeta & c & \zeta'+lc' \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

ovvero

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} X-\xi & a & \xi' \\ Y-\eta & b & \eta' \\ Z-\zeta & c & \zeta' \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} X-\xi & a & a' \\ Y-\eta & b & b' \\ Z-\zeta & c & c' \end{vmatrix} = 0 \, ;$$

e poichè nel caso delle superficie sviluppabili insieme a $\Delta_1=0$ si hanno le (11), ponendo nel primo dei due determinanti che figurano in questa equazione (14), o in quello della (13), per ξ', η' e ζ' i valori che si deducono dalle (11) stesse, si vede subito che la equazione trovata del piano tangente sarà indipendente da l, ciò che prova che questo piano tangente nel caso delle superficie sviluppabili viene ad essere lo stesso in ogni punto di una stessa generatrice, come naturalmente doveva essere.

Invece, se la superficie rigata (1) non è sviluppabile, le equazioni (13) o (14) dipendono da l, e il piano tangente varia al variare del punto di contatto lungo ogni generatrice, e all'allontanarsi all'infinito di questo punto il piano stesso tende verso il piano limite di equazione

$$\begin{vmatrix} X-\xi & a & a' \\ Y-\eta & b & b' \\ Z-\zeta & c & c' \end{vmatrix} = 0 . \tag{15}$$

521. — Per la (13) o per le (1) i coseni di direzione X_l, Y_l, Z_l della normale alla superficie nel punto (l, ω) saranno proporzionali ai determinanti del second'ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \xi'+la' & \eta'+lb' & \zeta'+lc' \end{vmatrix} ,$$

o alle somme di quelli corrispondenti delle due matrici

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{Vmatrix} , \quad l \begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix} ;$$

e il quadrato del coefficiente di proporzionalità sarà l'inversa del quadrato di questa matrice cioè $\dfrac{1}{\sqrt{\Sigma(\xi'+la')^2-(\Sigma a\xi')^2}}$, e si potrà anche scrivere $\dfrac{1}{\sqrt{L^2l^2+2Ml+\sigma'^2-N^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(Ll+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}}}$; quindi per l'angolo Θ dei piani tangenti o delle normali nei punti (l, ω) e (l_1, ω) della stessa generatrice avremo

$$\cos\Theta = \Sigma X_l X_{l_1} = \frac{\Sigma\left\{\begin{vmatrix} a & b \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right\}\left\{\begin{vmatrix} a & b \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} + l_1 \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right\}}{\sqrt{\left\{\left(Ll+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}\right\}\left\{\left(Ll_1+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}\right\}}}$$

ovvero

$$\cos\Theta = \frac{\Sigma\begin{vmatrix} a & b \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix}^2 + (l+l_1)\,\Sigma\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} + ll_1\,\Sigma\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2}{\sqrt{\left\{\left(Ll+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta^2}{L^2}\right\}\left\{\left(Ll_1+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}\right\}}} ;$$

talchè osservando che la prima e l'ultima somma corrispondono ai quadrati

delle solite matrici (17) del § 513 nelle quali ai differenziali siano sostituite le derivate e osservando inoltre che

$$\Sigma\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} = \Sigma\begin{vmatrix} a^2+b^2 & a\xi'+b\eta' \\ aa'+bb' & a'\xi'+b'\eta' \end{vmatrix} = \Sigma\begin{vmatrix} 1-c^2 & N-c\zeta' \\ -cc' & M-c'\zeta' \end{vmatrix} = M ,$$

si troverà

$$\cos\Theta = \frac{\dfrac{\Delta_1^2+M^2}{L^2} + (l+l_1)\,M + ll_1L^2}{\sqrt{\left\{\left(Ll+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}\right\}\left\{\left(Ll_1+\dfrac{M}{L}\right)^2+\dfrac{\Delta_1^2}{L^2}\right\}}} .$$

ovvero

$$\cos\Theta = \frac{(M+lL^2)(M+l_1L^2)+\Delta_1^2}{\sqrt{\{(L^2l+M)^2+\Delta_1^2\}\{(L^2l_1+M)^2+\Delta_1^2\}}} \tag{16}$$

per l'angolo cercato Θ dei due piani tangenti ai punti l e l_1 della stessa generatrice.

522. — Supposto $l_1 = -\dfrac{M}{L^2}$ quando Δ_1 non è zero, cioè quando la superficie non è sviluppabile, si avrà per l'angolo Θ_l del piano tangente al punto l di una generatrice con quello nel punto centrale

$$\cos\Theta_l = \frac{\Delta_1}{\sqrt{(L^2l+M)^2+\Delta_1^2}} ,$$

e quindi anche $\tang\Theta_l = \dfrac{L^2l+M}{\Delta_1}$, o $\tang\Theta_l = k\left(l+\dfrac{M}{L^2}\right)$, o anche

$$\tang\Theta_l = k(l-l_1)$$

ponendo $k = \dfrac{L^2}{\Delta_1}$ e indicando con l_1 l'ascissa del punto centrale sulla generatrice; e da questa si vede che *per le superficie gobbe il piano tangente* (15) *nel punto all'infinito di una generatrice è perpendicolare a quello nel punto centrale della generatrice stessa;* e si vede pure che *movendosi lungo una generatrice a partire dal punto centrale il piano tangente passando sempre per la generatrice ruota attorno a questa di un angolo* Θ_l *la cui tangente trigonometrica è proporzionale alla distanza del punto di contatto dal punto centrale.*

Questo teorema è dovuto a *Chasles.* Il coefficiente k si chiama *coefficiente di distribuzione* del piano tangente.

Nel caso delle superficie sviluppabili la (16) dà sempre come è naturale $\Theta=0$ e si ha $k=\infty$.

523. — Nelle superficie rigate, per quanto dicemmo al § 505, la equazione delle asintotiche avrà la forma $\Sigma dx\, d\overline{X}=0$, essendo x, y, z date dalle (1), e per $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ potendo prendere le quantità proporzionali ai coseni di direzione della normale alle quali accennammo nel § 521.

Avremo dunque per le stesse linee

$$\Sigma\left[\left\{(\xi'+la')d\omega+a\,dl\right\}\left\{\begin{vmatrix} b' & c' \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix} d\omega+\begin{vmatrix} b & c \\ \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} d\omega+l\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} d\omega+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} dl\right\}\right]=0,$$

ovvero sviluppando e riducendo

$$2\Delta_1\, dl\, d\omega+\begin{vmatrix} \xi'+la' & \eta'+lb' & \zeta'+lc' \\ a & b & c \\ \xi''+la'' & \eta''+lb'' & \zeta''+lc'' \end{vmatrix} d\omega^2=0,$$

per modo che le linee asintotiche di un sistema saranno (come era ben naturale che si trovasse) le linee $d\omega=0$ o $\omega=\text{cost.}$, — cioè le generatrici delle superficie —, e le altre quando Δ_1 non è zero, cioè quando la superficie non è sviluppabile, saranno determinate dalla equazione

$$(17)\quad 2\Delta_1\frac{dl}{d\omega}-\begin{vmatrix} a & c & b \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}-\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix}\right\} l-\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} l^2=0$$

che è una equazione differenziale del prim'ordine in l che rientra fra quelle conosciute col nome di equazioni di *Riccati,* e che noi considereremo in modo speciale nel calcolo integrale.

524. — Similmente volendo trovare le equazioni delle linee di curvatura nelle superficie rigate basta osservare che le equazioni delle normali saranno le seguenti

$$x_1=x+l_1 X_l\ ,\quad y_1=y+l_1 Y_l\ ,\quad z_1=z+l_1 Z_l$$

essendo x, y, z le coordinate dei punti della superficie rigata data dalle (1), e se queste rette devono costituire una superficie sviluppabile dovremo avere la equazione

$$\begin{vmatrix} dx & X_l & dX_l \\ dy & Y_l & dY_l \\ dz & Z_l & dZ_l \end{vmatrix}=0,$$

o anche l'altra

$$\begin{vmatrix} dx & \overline{X} & d\overline{X} \\ dy & \overline{Y} & d\overline{Y} \\ dz & \overline{Z} & d\overline{Z} \end{vmatrix}=0,$$

che si ottiene sostituendo alle X_l, Y_l, Z_l le quantità proporzionali $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ che avevamo poc'anzi; e ora sostituendo per $dx, dy, dz, d\overline{X}, d\overline{Y}, d\overline{Z}$ i loro valori come abbiamo fatto sopra, e sviluppando si trova subito la equazione differenziale cercata delle linee di curvatura in coordinate curvilinee l e ω.

Congruenze di rette.

525. — Lasciando ora di trattare delle superficie rigate passiamo a occuparci alquanto anche delle congruenze di rette (o di raggi).

Per questo basterà supporre che nelle solite equazioni

$$(1)\qquad x=\xi+la\ ,\quad y=\eta+lb\ ,\quad z=\zeta+lc$$

delle nostre rette le quantità $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ contengano due parametri indipendenti u e v; e allora le equazioni

$$(2)\qquad x_1=\xi(u,v)\ ,\quad y_1=\eta(u,v)\ ,\quad z_1=\zeta(u,v)$$

rappresenteranno in generale una superficie in coordinate curvilinee u e v (*), e questa superficie potrà chiamarsi la *direttrice* del sistema delle rette (1) che partiranno dai punti di essa coi coseni di direzione a, b, c.

Incominciamo dall'osservare che onde le minime distanze delle rette (1) considerate successivamente siano *sempre* di un ordine superiore al primo, nel qual caso, per quanto mostrammo al § 513, a meno che da, db e dc non siano insieme zero, queste distanze saranno sempre almeno del terz'or-

(*) Come già avemmo occasione di notare in fine del § 473 [pag. 629] i punti (x_1, y_1, z_1) determinati dalle (2) costituiranno una curva o un unico punto invece di una superficie quando la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} & \dfrac{\partial\eta}{\partial u} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial\xi}{\partial v} & \dfrac{\partial\eta}{\partial v} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} \end{matrix}\right\|$$

sarà di caratteristica inferiore a 2.

dine, bisognerà che sia soddisfatta la solita condizione $\Delta=0$, cioè che si abbia la equazione

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a & da & d\xi \\ b & db & d\eta \\ c & dc & d\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

la quale si scriverà sotto la forma

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ b & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ c & \frac{\partial c}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} du^2 + \left\{ \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ b & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ b & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \right\} du\,dv + \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ b & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} dv^2 = 0,$$

quando pei differenziali da, db, dc, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ si pongano le loro espressioni $\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial u}du + \frac{\partial \xi}{\partial v}dv, \ldots$; e se questa condizione (3) o (4) risulterà soddisfatta identicamente, allora qualunque superficie rigata che si estragga dal medesimo sistema di rette (1) collo stabilire fra u e v una relazione qualsiasi sarà sviluppabile; e viceversa, se questo avverrà, la (3) e quindi la (4) risulteranno identicamente soddisfatte qualunque siano u, v, du e dv.

526. — Per trovare i casi nei quali questa circostanza si presenterà, incominciamo ad escludere quello in cui sia $da=db=dc=0$ per qualunque sistema di valori di u e v nel campo che si considera per queste variabili, il qual caso porterebbe che le rette (1) fossero parallele a una direzione fissa, e ogni superficie rigata estratta da esse sarebbe cilindrica e quindi sviluppabile.

Con ciò, per le stesse considerazioni che facemmo nella prima nota della pag. 673, verrà ad essere escluso anche il caso di da, db e dc proporzionali ad a, b, c, cioè quello degli elementi della seconda colonna del determinante (3) proporzionali a quelli della prima; e così per gli altri casi che rimangono a considerarsi perchè la (3) risulti soddisfatta bisognerà che si abbiano tre equazioni della forma

$$(5)\qquad d\xi = \mathrm{M}a + \mathrm{N}da, \quad d\eta = \mathrm{M}b + \mathrm{N}db, \quad d\zeta = \mathrm{M}c + \mathrm{N}dc,$$

essendo M una espressione differenziale della forma $\mathrm{P}du + \mathrm{Q}dv$, e essendo P e Q come N funzioni di u e v che dipenderanno dalla congruenza che si vuole considerare.

Ora queste equazioni si possono scrivere sotto la forma

$$d\xi = \mathrm{M}a + d(\mathrm{N}a) - a d\mathrm{N}, \quad d\eta = \mathrm{M}b + d(\mathrm{N}b) - b d\mathrm{N}, \quad d\zeta = \mathrm{M}c + d(\mathrm{N}c) - c d\mathrm{N},$$

ovvero

$$d(\xi - \mathrm{N}a) = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})a, \quad d(\eta - \mathrm{N}b) = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})b, \quad d(\zeta - \mathrm{N}c) = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})c;$$

e quindi si può dire intanto che, se si prendono a considerare i punti (x_2, y_2, z_2) pei quali si ha

$$(6)\qquad x_2 = \xi - \mathrm{N}a, \quad y_2 = \eta - \mathrm{N}b, \quad z_2 = \zeta - \mathrm{N}c,$$

che sono i punti delle rette (1) della congruenza che corrispondono a $l=-\mathrm{N}$, per questi punti avremo

$$(7)\qquad dx_2 = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})a, \quad dy_2 = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})b, \quad dz_2 = (\mathrm{M} - d\mathrm{N})c.$$

Di qui risulta che se $\mathrm{M} - d\mathrm{N}$ che corrisponde a $\left(\mathrm{P} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)du + \left(\mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right)dv$ sarà identicamente zero, cioè se sarà $\mathrm{P} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u} = 0$, $\mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v} = 0$, avremo sempre $dx_2 = 0$, $dy_2 = 0$, $dz_2 = 0$, e quindi il punto (x_1, y_2, z_2) sarà fisso, e saremo nel caso in cui le rette (1) della congruenza passano tutte per un punto fisso (c_1, c_2, c_3) che potrà essere qualsiasi.

Se poi $\mathrm{M} - d\mathrm{N}$ non sarà identicamente nullo, allora poichè le formole precedenti (7) ci daranno le altre

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \left(\mathrm{P} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)a, \quad \frac{\partial y_2}{\partial u} = \left(\mathrm{P} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}\right)b, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u} = \left(\mathrm{P} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right)c,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = \left(\mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right)a, \quad \frac{\partial y_2}{\partial v} = \left(\mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right)b, \quad \frac{\partial z_2}{\partial v} = \left(\mathrm{Q} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right)c,$$

evidentemente la matrice

$$(8)\qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial z_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial y_2}{\partial v} & \frac{\partial z_2}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

avrà la caratteristica inferiore a 2, e quindi per quanto ricordammo anche ultimamente nella nota alla pag. 685, le equazioni (6) definiranno una curva per la quale, a causa delle (7), i coseni di direzioni delle tangenti saranno appunto $\frac{dx_3}{\mathrm{M} - d\mathrm{N}}, \frac{dy_2}{\mathrm{M} - d\mathrm{N}}, \frac{dz_2}{\mathrm{M} - d\mathrm{N}}$, cioè a, b, c.

Ne segue che in questo caso la congruenza anzichè essere una vera e propria congruenza si riduce alla superficie rigata sviluppabile formata dalle tangenti alla curva (6) (*), e quindi il caso stesso è naturalmente da escludersi dalle nostre considerazioni; e così noi possiamo ora evidentemente affermare che i soli casi nei quali pei sistemi di rette si verificano le condizioni poste sopra sono quello che già escludemmo delle rette parallele a una direzione fissa, e quello delle rette che escono da un punto arbitrario (c_1, c_2, c_3).

527. — Fuori di questi casi la equazione (3) non potrà essere soddisfatta altro che quando fra u e v sussistano relazioni speciali per le quali i diffe-

---

(*) Si spiega facilmente come nel caso considerato le equazioni (1), pure contenendo in $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$ due parametri arbitrarii u e v, conducono a una superficie rigata sviluppabile anzichè ad una congruenza.

Risultando infatti la matrice (8) di caratteristica inferiore a 2, e le (6) venendo per questo a definire una curva, le x_2, y_2, z_2 verranno ad essere funzioni tali di u e v da potersi scrivere sotto la forma

$$(\alpha) \qquad x_2 = \varphi_1(\theta), \quad y_2 = \varphi_2(\theta), \quad z_2 = \varphi_3(\theta)$$

essendo θ una funzione di u e v che verrà a figurare come il parametro variabile da punto a punto della curva.

E a causa delle (7) avremo $\Sigma \varphi'_1(\theta)^2 d\theta^2 = (M - dN)^2$, e quindi per le (7) stesse potremo scrivere

$$a = \frac{\varphi'_1(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}}, \quad b = \frac{\varphi'_2(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}}, \quad c = \frac{\varphi'_3(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}};$$

e le equazioni della superficie direttrice $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$, $z_1 = \zeta$ saranno le seguenti

$$x_1 = \varphi_1(\theta) - N \frac{\varphi'_1(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}}, \quad y_1 = \varphi_2(\theta) - N \frac{\varphi'_2(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}}, \quad z_1 = \varphi_3(\theta) - N \frac{\varphi'_3(\theta)}{\sqrt{\Sigma \varphi'_1(\theta)^2}},$$

le quali danno luogo alle altre

$$\frac{x_1 - \varphi_1(\theta)}{\varphi'_1(\theta)} = \frac{y_1 - \varphi_2(\theta)}{\varphi'_2(\theta)} = \frac{z_1 - \varphi_3(\theta)}{\varphi'_3(\theta)},$$

e queste per ogni valore speciale di θ, quando vi si considerino x_1, y_1, z_1 come coordinate correnti rappresentano appunto la tangente alla curva (6) o (α) nel punto corrispondente a quel valore di θ.

Segue da ciò che la curva (6) e le sue tangenti giacciono sulla superficie direttrice la quale perciò viene ad essere la sviluppabile generata dalle tangenti medesime, che sono le rette stesse alle quali ora si riduce la congruenza; e i punti di ognuna di queste tangenti sono i punti della superficie che corrispondono ai sistemi di valori di u e v che conducono a uno stesso valore di θ. In altri termini la superficie direttrice in questo caso è una superficie sviluppabile che viene ad essere come la superficie rigata limite cui si riduce la congruenza quando le rette della congruenza medesima tendono verso le generatrici della direttrice, venendo così ogni generatrice ad essere come la riunione di infinite rette della congruenza che partono ciascuna da ogni punto della generatrice medesima e coincidono con essa.

renziali du e dv vengono legati fra loro dalla stessa equazione differenziale (3) o (4); e poichè questa equazione è omogenea e del secondo grado in du e dv, per ogni sistema di valori di u e v, fatta solo eccezione per quei sistemi speciali che annullino contemporaneamente i coefficienti di du^2, $du dv$ e dv^2 nella (4), si avranno due valori (reali o complessi) per $\frac{du}{dv}$ che, per quanto vedremo nel calcolo integrale, condurranno a due relazioni fra u e v che conterranno ciascuna una costante arbitraria; e quando fra u e v siano stabilite queste relazioni le rette corrispondenti della congruenza che si considera costituiranno due sistemi di superficie rigate ciascuna delle quali sarà sviluppabile.

Gli spigoli di regresso delle superficie di ciascuno di questi due sistemi di superficie sviluppabili, — i quali spigoli in generale non si ridurranno a punti e saranno altrettante curve —, costituiscono le due falde di una superficie che si dice la *superficie focale* della congruenza; e i due punti nei quali ogni retta (raggio) incontra queste due falde della superficie focale si dicono i *fuochi* (reali o immaginarii) di quel raggio della congruenza.

528. — Questi fuochi potrebbero trovarsi colle formole che si dettero nei paragrafi precedenti, ma possono anche trovarsi con maggiore facilità nel modo seguente.

S'indichino ad esempio con $f(u, v) = 0$ la relazione fra u e v che conduce a una delle sviluppabili della congruenza, con (ξ_1, η_1, ζ_1) le coordinate del fuoco corrispondente pel sistema (u, v) di valori di u e v, e con ρ l'ascissa di questo fuoco sul raggio corrispondente, cioè la distanza (positiva o negativa) dal punto (ξ, η, ζ) al detto punto (ξ_1, η_1, ζ_1).

Avremo

$$(9) \qquad \xi_1 = \xi + \rho a, \quad \eta_1 = \eta + \rho b, \quad \zeta_1 = \zeta + \rho c,$$

e se u e v varieranno in modo da soddisfare alla relazione scritta sopra $f(u, v) = 0$, il punto (ξ_1, η_1, ζ_1) descriverà lo spigolo di regresso della sviluppabile.

Le tangenti a questo spigolo di regresso, quando questo non si riduca ad un punto, essendo le generatrici della sviluppabile avranno per coseni di direzioni a, b, c; quindi questi coseni a, b, c saranno proporzionali a $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ e conseguentemente avremo le equazioni

$$d\xi + \rho da = ka, \quad d\eta + \rho db = kb, \quad d\zeta + \rho dc = kc,$$

essendo k un coefficiente di proporzionalità infinitesimo; e queste equazioni si avranno pure quando le (9) si riducano ad un punto perchè allora i differenziali dei secondi membri delle (9) stesse sono tutti zero.

Da queste ponendovi per $d\xi, d\eta, d\zeta, da, db, dc$ le loro espressioni, e moltiplicando poi le espressioni stesse una volta per $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial b}{\partial u}$ e $\frac{\partial c}{\partial u}$, e un'altra per $\frac{\partial a}{\partial v}$, $\frac{\partial b}{\partial v}$ e $\frac{\partial c}{\partial v}$ e sommando ogni volta, si otterranno le equazioni seguenti

$$\left[\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\rho\sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2\right]du+\left[\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\rho\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right]dv=0\,,$$

$$\left[\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\rho\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right]du+\left[\sum\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\rho\sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)^2\right]dv=0\,;$$

e ora se da queste si elimina il ρ si trova sotto altra forma la equazione (4) che determina le relazioni differenziali fra du e dv che conducono a quelle fra u e v alle quali corrispondono le superficie sviluppabili della congruenza, e se si eliminano du e dv si trova la equazione di secondo grado in ρ

$$\left\{\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\rho\sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\sum\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\rho\sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)^2\right\}-$$
$$-\left\{\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\rho\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right\}\left\{\sum\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\rho\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v}\right\}=0 \tag{10}$$

che determina i due valori di ρ che cercavamo.

Ponendo questi valori di ρ nelle (9) si avranno evidentemente le equazioni in coordinate curvilinee u e v delle due falde della superficie focale.

529. — La proprietà dimostrata della esistenza, in ogni congruenza di rette, dei due sistemi di sviluppabili che conducono alle superficie focali è l'estensione di quella che condusse a trovare le linee di curvatura delle superficie; poichè, avendo una superficie (2), basta prendere a considerare la congruenza di rette formata dalle sue normali, col supporre che nelle (1) le a, b, c siano i coseni di direzione di queste normali, per tornare a concludere in forza dei risultati precedenti la esistenza delle linee che abbiamo chiamato di curvatura della superficie stessa (2), e per trovare anche la loro equazione sotto la forma (3) o (4) e quella che determina i due raggi di curvatura sotto la forma (10).

Malgrado questo però non si deve credere che ogni congruenza di rette (1) costituisca un sistema di rette normali a una superficie, cioè sia, come si dice, una *congruenza normale*.

È chiaro infatti che i casi nei quali questo può avvenire sono soltanto quelli nei quali esiste una funzione speciale $\varphi(u, v)$ che posta per l nelle (1) dà luogo a una superficie di equazioni

$$x=\xi+\varphi a\,,\quad y=\eta+\varphi b\,,\quad z=\eta+\varphi c\,, \tag{11}$$

per la quale la retta di coseni di direzione a, b, c è perpendicolare ad ogni linea tracciata sulla superficie stessa, per modo cioè che si abbia sempre $\Sigma a dx=0$, o $\Sigma a d\xi+d\varphi=0$ qualunque siano gli accrescimenti du e dv che si diano ad u e a v.

Questo porta che debbano aversi le due equazioni

$$\sum a\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}=0\,,\qquad \sum a\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}=0\,,$$

e quindi l'altra $\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum a\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum a\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)$, ovvero

$$\sum\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}=\sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\,, \tag{12}$$

e evidentemente questa non sarà sempre soddisfatta quando si diano comunque $\xi, \eta, \zeta, a, b, c$.

Quando però questa condizione risulti soddisfatta, allora venendo ad essere soddisfatta anche l'altra $\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum a\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum a\frac{\partial \xi}{dv}\right)$, e dimostrandosi in calcolo integrale che in tal caso esistono infinite funzioni φ, tutte diverse fra loro per quantità costanti, le cui derivate parziali $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sono $-\sum a\frac{\partial \xi}{\partial u}$ e $-\sum a\frac{\partial \xi}{\partial v}$ o il cui differenziale è $-\sum a\frac{\partial \xi}{\partial u}du-\sum a\frac{\partial \xi}{\partial v}dv$, le infinite superficie (parallele) rappresentate dalle equazioni (11) nelle quali φ abbia uno qualunque di questi valori saranno effettivamente normali alle rette della congruenza data (1); talchè quando la condizione (12) sia soddisfatta, trovata la funzione φ — ciò che il calcolo integrale insegna a fare — si avranno per mezzo delle (11) anche le superficie alle quali le rette date sono normali.

530. — Notiamo che da questi risultati apparisce subito che trovata una superficie normale alle rette di una congruenza, le altre superficie normali saranno soltanto tutte quelle parallele a questa, cioè quelle che si otterranno da questa portando lunghezze costanti sulle varie rette.

È chiaro infatti che se le rette di una congruenza i cui coseni di direzione sono a, b, c saranno normali a una superficie di equazioni

$$x = \xi(u, v) \ , \ y = \eta(u, v) \ , \ z = \zeta(u, v) ,$$

la condizione (12) sarà naturalmente soddisfatta perchè avremo di necessità le due equazioni $\sum a \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0$, $\sum a \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$, e queste porteranno subito che la funzione indicata con φ che dovrà figurare nelle equazioni (11) che danno tutte le superficie normali alle rette della congruenza sarà necessariamente una quantità costante.

Di qui segue evidentemente in particolare che le superficie normali alle congruenze formate dalle rette che escono da un punto sono soltanto le sfere che hanno questo punto per centro, e le superficie normali alle congruenze formate da rette tutte parallele fra loro sono soltanto i piani perpendicolari a queste rette. E questo, tenuto conto di quanto si dimostrò al § 526, torna a mettere in piena evidenza il teorema dimostrato nella nota alle pag. 646 e seg., cioè quello che dice che le superficie i cui punti sono tutti ombilichi non sono che le sfere e i piani; giacchè per le superficie che hanno una tale particolarità la congruenza formata dalle normali è tale che qualunque superficie rigata estratta da essa costituisce una superficie sviluppabile, e quindi per quanto dimostrammo nel § 526 le rette che compongono la congruenza devono passare tutte per un punto fisso (qualsiasi) o essere tutte parallele a una direzione fissa.

531. — La condizione (12) che abbiamo trovata come condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza sia normale conduce a risultati importantissimi.

Supponiamo che sia data una superficie Σ, e avendo su essa un sistema di curve C che risultino determinate dai valori che si attribuiscono ad un certo parametro che è variabile da una curva all'altra, prendiamo a considerare la congruenza formata dalle tangenti a tutte queste curve; e cerchiamo la condizione cui le curve stesse devono soddisfare perchè la congruenza sia normale, cioè perchè esista una superficie alla quale quelle rette sono tutte normali.

Sulla superficie Σ prendiamo un sistema di coordinate curvilinee u e v scelte in modo che uno dei sistemi di coordinate per es. quello delle $v = \text{cost}$ sia costituito dalle linee alle quali le rette della congruenza sono tangenti; con chè il parametro che varierà nel passare da una linea C ad un'altra sarà v, mentre u varierà da punto a punto di ognuna di queste linee.

Essendo allora

$$x = \xi(u, v) \ , \ y = \eta(u, v) \ , \ z = \zeta(u, v) \tag{13}$$

le equazioni delle superficie Σ, il quadrato $d\sigma^2$ del suo elemento lineare (§ 380 e seg. [pag. 514 e seg.]) sarà

$$d\sigma^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2 , \tag{14}$$

essendo colle notazioni di Gauss

$$\mathrm{E} = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \ , \ \mathrm{F} = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} \ , \ \mathrm{G} = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 ; \tag{15}$$

e poichè i coseni di direzione delle tangenti alle linee v sono

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \xi}{\partial u} \ , \ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \eta}{\partial u} \ , \ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \zeta}{\partial u} , \tag{16}$$

le equazioni delle rette della nostra congruenza saranno le seguenti

$$x = \xi + \frac{l}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \xi}{\partial u} \ , \ y = \eta + \frac{l}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \eta}{\partial u} \ , \ z = \zeta + \frac{l}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \zeta}{\partial u} , \tag{17}$$

e per quanto dicemmo nel paragrafo precedente, onde questa congruenza sia una congruenza normale sarà necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) - \sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0 ,$$

ovvero

$$\mathrm{E}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0 ,$$

la quale, per essere $\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}$, si riduce subito all'altra assai semplice

$$\mathrm{F}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0 . \tag{18}$$

Ora per interpretare il significato di questa condizione, si consideri la normale principale a una qualsiasi delle curve C e si osservi che, essendo i coseni di direzione delle tangenti a queste linee dati dalle (16), quelli della normale principale saranno proporzionali alle loro derivate rispetto ad u, cioè alle quantità

$$(19)\qquad \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\,,\quad \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\,,\quad \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\,,$$

quando queste quantità non siano tutto zero; e quindi, fuori di questo caso, questa normale principale mentre — come è naturale, e come potrebbe facilmente riscontrarsi — sarà perpendicolare alle linee C, farà colle linee $u=$ cost. un angolo θ il cui coseno sarà proporzionale alla quantità che si ottiene moltiplicando le (19) per $\frac{\partial \xi}{\partial v}$, $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ e $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$ e sommando, cioè sarà proporzionale alla quantità

$$F\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\sum\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$$ che è appunto il primo membro della (18).

Ne segue che se questa condizione (18) sarà soddisfatta l'angolo θ sarà di 90°, e quindi la normale principale alle linee v oltre ad essere perpendicolare a queste linee sarà perpendicolare anche alle linee $u=$ cost e conseguentemente verrà ad essere perpendicolare anche al piano tangente e coinciderà colla normale alla superficie; e viceversa se questo accadrà sarà soddisfatta la condizione (18).

A ciò si aggiunge che quando le tre quantità (19) sono zero contemporaneamente per tutte o per alcune linee v (o C), queste linee sono linee rette perchè allora i tre coseni (16) sono costanti e facendone i rapporti si vede subito che per le stesse linee le coordinate ξ, η, ζ vengono legate da due relazioni di primo grado; dunque, poichè questo caso è naturalmente da escludersi, evidentemente si può ora affermare che *onde le tangenti a un sistema di linee* C *non rettilinee tracciate su una superficie* Σ *costituiscano una congruenza normale è necessario e sufficiente che per le stesse linee* C *la normale principale coincida per ogni punto colla normale alla superficie* Σ, *o* — il che è lo stesso — *che il piano osculatore sia normale alla superficie;* cioè *le dette linee dovranno essere tutte di quelle che* al § 484 [pag. 642-43] *dicemmo chiamarsi linee geodetiche della superficie.*

532. — Si può notare che la condizione (18) che esprime tanto la condizione perchè la congruenza (17) delle tangenti alle linee v sulla superficie data Σ sia una congruenza normale, quanto l'altra che queste linee v costituiscano un sistema di geodetiche della superficie stessa Σ, può ridursi a dipendere soltanto dai coefficienti del quadrato dell'elemento lineare (14) della

superficie stessa; perchè, se si osserva che derivando rispetto ad u la seconda delle (15), cioè F, si trova

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\sum\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\sum\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}=\sum\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\,,$$

basta sostituire nella (18) per vedere subito che essa può porsi sotto la forma

$$F\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}=0\,,\ \text{ovvero}$$

$$(20)\qquad \frac{\partial \frac{F}{\sqrt{E}}}{\partial u}-\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}=0\,;$$

e ora da questa si vede che se le linee u e v sulla superficie Σ costituiscono un doppio sistema ortogonale, allora avendosi $F=0$, quest'ultima equazione (18) si ridurrà all'altra $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}=0$, la quale mostra che in tal caso E non può contenere che la variabile u, e quindi il quadrato (14) dell'elemento lineare della superficie stessa deve ridursi alla forma

$$d\sigma^2=E\,du^2+G\,dv^2\,,$$

con E funzione della sola u.

E cambiando il parametro u in un altro u_1 che sia funzione di u soltanto e per modo da avere $\sqrt{E}\,du=du_1$, e poi al posto di u_1 tornando a scrivere u, cioè chiamando ancora u la nuova variabile, il quadrato dello stesso elemento lineare si ridurrà alla forma

$$d\sigma^2=du^2+G\,dv^2$$

nella quale $E=1$; e questa è la forma sotto cui si pone ordinariamente il quadrato dell'elemento lineare di una superficie in coordinate curvilinee ortogonali u e v quando le linee v sono geodetiche.

533. — Aggiungiamo che se la superficie data Σ di equazioni (13) o almeno una sua porzione, considerata come se fosse un velo flessibile e inestendibile, cambierà forma senza però che avvengano rotture o duplicazioni, per modo da ridursi ad un'altra Σ_1 le cui equazioni saranno diverse dalle (13) ma per la quale la forma (14) del quadrato dell'elemento lineare resti invariata, allora anche la congruenza (17) verrà a cambiare, ma la condizione (20) perchè questa sia una congruenza normale rimarrà pure invariata.

Conseguentemente se su una superficie Σ s'immaginano condotte le tangenti a un sistema C di geodetiche, e si considerano queste tangenti come aderenti a queste linee, si può affermare che *deformando la superficie nel modo indicato e nella deformazione le curve geodetiche* C *trascinandosi dietro le loro tangenti, queste in ogni posizione successiva si manterranno sempre normali a certe superficie* che varieranno naturalmente esse pure insieme alla prima con certe leggi.

Questo teorema è dovuto a *Beltrami.*

Le superficie nelle quali una superficie data o una sua porzione, considerata come se fosse un velo flessibile e inestendibile, può trasformarsi senza che avvengano rotture o duplicazioni si dicono superficie *applicabili* sulla superficie data. E poichè si dimostra che in questa deformazione le linee geodetiche si mantengono geodetiche, il teorema enunciato si può dire conseguenza immediata anche di questa particolarità.

534. — Infine osserviamo anche che i risultati ottenuti, insieme a quelli del § 529, oltre a permetterci di dire che partendo da una superficie qualunque Σ e prendendo su essa un sistema qualunque C di geodetiche non rettilinee le rette tangenti a queste linee C costituiscono una congruenza normale, ci danno anche un modo facile (coi processi del calcolo integrale) di costruire effettivamente le infinite superficie (parallele) S alle quali le rette della congruenza sono normali.

E su queste superficie S ad ogni linea C di quelle che si considerano sulla superficie data Σ corrisponderà una linea c la quale verrà ad essere linea di curvatura delle stesse superficie S; talchè evidentemente ora si può anche affermare che data una superficie qualunque Σ questa si potrà considerare come evoluta di infiniti sistemi di superficie, ciascuno dei quali corrisponderà ad un sistema speciale di geodetiche della stessa superficie data Σ; e ognuno di questi sistemi di superficie sarà costituito da infinite superficie parallele.

535. — Un altro risultato notevolissimo, che si trova con tutta facilità come conseguenza della condizione (12) che abbiamo data nel § 529 perchè una congruenza sia normale, si ha nel teorema che è conosciuto sotto il nome di teorema di *Malus-Dupin* e che ha molto interesse per la Fisica.

Questo teorema si enuncia col dire che: *Avendo un sistema di raggi che sono normali a una superficie, se questi incontrando una superficie di separazione di due mezzi omogenei subiscono una refrazione o una riflessione ordinaria, i raggi refratti o riflessi continuano ad essere normali ad un'altra superficie; e lo stesso avverrà poi pei nuovi raggi e qualunque sia il numero di refrazioni o riflessioni che si faranno successivamente.*

Si abbia infatti una congruenza normale di raggi i cui coseni di direzione siano a, b, c, e siano

$$x = \xi_1(u, v), \quad y = \eta_1(u, v), \quad z = \zeta_1(u, v) \tag{21}$$

le equazioni della superficie per la quale avviene la rifrazione o la riflessione e che naturalmente supporremo non essere ortogonale ai raggi della congruenza.

Ora, sia perchè potremo sempre intendere che i raggi della congruenza data partano da questa superficie (21) come superficie direttrice, sia perchè quando le equazioni delle rette della congruenza siano le solite tre

$$x = \xi + la, \quad y = \eta + lb, \quad z = \zeta + lc$$

la superficie (21) incontrata da queste rette verrà a corrispondere a quella che si ha da queste equazioni ponendovi per l una funzione speciale $l(u, v)$ di u e v, è certo che per la condizione (12) trovata nel § 529 avremo sempre la equazione

$$\sum \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0, \tag{22}$$

se, come supponiamo, i raggi primitivi costituiscono una congruenza normale.

I raggi refratti o riflessi dalla superficie (21) avranno nuovi coseni di direzione a_1, b_1, c_1, e i coseni di direzione $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ della normale alla superficie stessa saranno proporzionali ai soliti determinanti di second'ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{matrix} \right\|;$$

e poichè una delle leggi sì della refrazione che della riflessione porta che i nuovi raggi e gli antichi siano nello stesso piano colla normale alla superficie (21), dovrà essere soddisfatta la condizione

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo, insieme alla condizione posta che i raggi incidenti non siano normali alla superficie (21) e quindi non si abbia $\frac{a}{\alpha_1} = \frac{b}{\beta_1} = \frac{c}{\gamma_1}$, porta che fra le tre terne di coseni (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ dovranno sussistere le relazioni

$$(23) \qquad a_1 = La + M\alpha_1 \ , \ b_1 = Lb + M\beta_1 \ , \ c_1 = Lc + M\gamma_1 \ ,$$

essendo L e M certe funzioni di u e v da determinarsi; e ora calcolando per mezzo di queste formole la espressione del primo membro della (22) applicata ai raggi refratti o riflessi invece che ai raggi incidenti, col tenere conto della (22) stessa e delle due $\sum \alpha_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0$, $\sum \alpha_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = 0$ che esprimono che la retta di coseni di direzione $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ è normale alla superficie (21), troveremo subito la equazione

$$\sum \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial a_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = M\left(\sum \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial L}{\partial u}\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\sum a \frac{\partial \xi_1}{\partial u};$$

e quindi osservando che per essere le rette di coseni di direzione $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ normali alla superficie (21) è soddisfatta naturalmente anche per esse la condizione $\sum \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0$, come del resto può verificarsi anche direttamente, avremo la formola seguente

$$(24) \qquad \sum \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial a_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u}\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u} \ ,$$

la quale mostra già subito che se L risulterà una quantità costante sarà soddisfatta la condizione perchè anche i raggi refratti o riflessi costituiscano una congruenza normale.

D'altra parte, per essere soddisfatta la condizione (22) ne viene che si avrà anche $\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right)$; e questo come osservammo in fine del § 529 porta che esistano infinite funzioni φ_1 tutte diverse fra loro soltanto per una costante additiva, e che il Calcolo integrale dà il modo di determinare, il cui differenziale è $\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u} du + \sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u} dv$, per modo che per esse si ha $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial v}$, e queste funzioni φ_1 non saranno costanti perchè per le ipotesi fatte $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}$ non saranno ambedue zero; quindi introducendo in calcolo queste funzioni φ_1 avremo dalla precedente

$$\sum \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial a_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \ ,$$

e di qui ne segue che, non solo quando L risulti una quantità costante, ma anche, più generalmente, quando L risulti una funzione qualsiasi $F(\varphi_1)$ di φ_1 che abbia la derivata prima, avremo $\sum \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \sum \frac{\partial a_1}{\partial v}\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0$, cioè sarà soddisfatta la condizione perchè i raggi rifratti o riflessi siano anch'essi normali a una superficie.

Ora evidentemente combinando due a due le (23) si hanno subito le altre

$$a_1\beta_1 - b_1\alpha_1 = L(a\beta_1 - b\alpha_1) \ , \ b_1\gamma_1 - c_1\beta_1 = L(b\gamma_1 - c\beta_1) \ , \ c_1\alpha_1 - a_1\gamma_1 = L(c\alpha_1 - a\gamma_1) \ ;$$

e quindi indicando con i l'angolo d'incidenza dei primi raggi e con r quello di refrazione o riflessione, e quadrando e sommando avremo subito la formola $L^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 r}{\operatorname{sen}^2 i}$ che determina il valore di L, e ci mostra che nei casi della refrazione o riflessione ordinaria L risulta appunto una quantità costante, e con ciò resta ora completamente dimostrato il teorema di *Malus-Dupin* che abbiamo enunciato sopra.

536. — Notiamo che il processo di dimostrazione che abbiamo tenuto mette altresì in evidenza che il teorema sussiste *in certi casi* anche quando essendo verificata la prima legge della refrazione o della riflessione non lo è la seconda; bastando, perchè il teorema sussista, che il rapporto dei seni degli angoli di refrazione o riflessione e d'incidenza anzichè essere costante come nei casi ordinarii risulti variabile da punto a punto della superficie (21) di separazione dei due sistemi di raggi, e questa variabilità abbia luogo per modo che lo stesso rapporto corrisponda ai valori di una funzione $F(\varphi_1)$ di quella funzione φ_1 che abbiamo detto esistere sempre che ha per differenziale la espressione $\sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial u} du + \sum a\frac{\partial \xi_1}{\partial v} dv$, e che si determina in calcolo integrale. E per quanto risulterà dalla teoria della integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali del prim'ordine nel calcolo integrale, è questo il caso più generale pel quale il teorema stesso sussiste.

Applicazioni ai sistemi tripli di superficie.

537. — Diamo infine un'altra applicazione dei risultati ottenuti in questo capitolo dimostrando un teorema importantissimo dovuto a *Dupin*, quello cioè che si enuncia col dire che *nei sistemi tripli ortogonali di superficie le linee d'intersezione delle varie superficie* — cioè le linee coordinate sulle superficie, delle quali trattammo ai §§ 384 e seg. [pag. 518 e seg.] — *sono sempre le loro linee di curvatura.*

E insieme dimostriamo il teorema *inverso* dovuto a *Darboux* che permette di dire che *avendo un doppio sistema infinito di superficie che s'incontrano ortogonalmente secondo linee che sono di curvatura per uno dei due sistemi (e quindi per ambedue) esiste sempre un terzo sistema di superficie che insieme ai due primi costituisce un sistema triplo ortogonale.*

Dopo di che riunendo questi due teoremi si potrà evidentemente affermare che *la condizione necessaria e sufficiente perchè due sistemi di superficie fra loro ortogonali possano fare parte di un sistema triplo di superficie ortogonali è che esse s'incontrino secondo linee che sono linee di curvatura per uno dei due sistemi di superficie.*

538. — Per dimostrare questi teoremi premettiamo le considerazioni generali seguenti.

Avendosi un doppio sistema $f_1(x,y,z,v)=0$, $f_2(x,y,z,w)=0$ di superficie S_1 e S_2 di parametri v e w, immaginiamo un terzo sistema qualsiasi $f(x,y,z,u)=0$ di superficie distinto da questi e di parametro u; e siano

$$(1) \qquad x=x(u,v,w)\ ,\quad y=y(u,v,w)\ ,\quad z=z(u,v,w)$$

le formole alle quali ammetteremo che diano luogo le equazioni dei tre sistemi suddetti di superficie (*) e che determinano le coordinate x,y,z in funzione dei parametri u,v,w pei varii punti dello spazio o almeno della porzione di spazio che si considera. L'eliminazione di u e w, o di u e v, o di v e w fra queste formole ricondurrà alle equazioni scritte sopra $f_1=0$, $f_2=0$, $f=0$ dei tre sistemi di superficie v , w e u.

Il quadrato dell'elemento lineare dello spazio sarà

$$(2) \qquad ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2 + C\,dw^2 + 2H\,du\,dv + 2K\,dv\,dw + 2L\,dw\,du,$$

con

$$(3) \quad A=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\ B=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\ C=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2,\ H=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\ K=\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\ L=\sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}\ ;$$

e considerando i sistemi di linee d'intersezione delle superficie S_1 e S_2 o $v=$ cost. e $w=$ cost. — lungo le quali linee varierà solo il parametro u — incominciamo dal cercare la condizione necessaria e sufficiente perchè le stesse superficie s'incontrino sempre ortogonalmente lungo quelle linee.

(*) Perchè le equazioni $f=0$, $f_1=0$, $f_2=0$ possano dare luogo alle (1) basterà che siano soddisfatte le note condizioni che vengono dalla teoria delle funzioni implicite.

Osserviamo perciò che indicando con α_v , β_v , γ_v i coseni di direzione della normale alle superficie v e con α_w , β_w , γ_w quelli della normale alle superficie w, questi coseni saranno respettivamente proporzionali ai determinanti di second'ordine delle matrici

$$(4) \qquad \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right\| \ ,\quad \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix}\right\| ,$$

e avremo le formole $\sum \alpha_v \frac{\partial x}{\partial u}=0$, $\sum \alpha_v \frac{\partial x}{\partial w}=0$, $\sum \alpha_w \frac{\partial x}{\partial u}=0$ e $\sum \alpha_w \frac{\partial x}{\partial v}=0$, mentre $\sum \alpha_v \frac{\partial x}{\partial v}$ e $\sum \alpha_w \frac{\partial x}{\partial w}$ saranno diverse da zero.

Dovendo le superficie v e w essere ortogonali fra loro, le normali alle superficie v dovranno trovarsi nei piani tangenti delle w e quelle delle superficie w nei piani tangenti delle v; e quindi in particolare la normale alle superficie w e le tangenti alle linee w e u sulle superficie v, le quali tangenti hanno per coseni di direzione respettivamente $\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\partial z}{\partial w}$, dovranno essere nello stesso piano, ciò che porta che dovremo avere la equazione

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_w & \beta_w & \gamma_w \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = 0\ ;$$

e moltiplicando questo determinante linea per linea per l'altro

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} ,$$

che è diverso da zero perchè in esso gli elementi di ciascuna delle tre linee corrispondono ai coseni di direzione delle tre linee coordinate, si vede subito che onde vi sia l'ortogonalità fra le superficie v e w sarà necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione

$$AK - HL = 0 \tag{7}$$

fra i coefficienti del quadrato (2) dell'elemento lineare dello spazio.

539. — Senza più richiedere ora che i doppii sistemi infiniti di superficie v e w siano fra loro ortogonali, si richieda invece che le loro intersezioni (v, w) siano linee che soddisfano a condizioni speciali, come ad es. quella che esse siano linee di curvatura delle superficie w.

Allora le normali a queste superficie lungo le stesse linee dovranno costituire superficie sviluppabili e viceversa, e quindi come condizione necessaria e sufficiente perchè le dette linee (v, w) siano linee di curvatura delle superficie w avremo la equazione

$$\begin{vmatrix} \alpha_w & \beta_w & \gamma_w \\ \frac{\partial \alpha_w}{\partial u} & \frac{\partial \beta_w}{\partial u} & \frac{\partial \gamma_w}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0 \ (*) \tag{8}$$

che moltiplicata pel determinante (6) linea per linea si trasforma nell'altra $H \sum \frac{\partial \alpha_w}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - A \sum \frac{\partial \alpha_w}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$; e questa, valendosi delle formole che vengono dalle due $\sum \alpha_w \frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\sum \alpha_w \frac{\partial x}{\partial v} = 0$ colla derivazione rispetto ad u, si riduce all'altra $H \sum \alpha_w \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - A \sum \alpha_w \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0$, che tenendo conto dei valori di $\alpha_w, \beta_w, \gamma_w$ può anche scriversi sotto la forma

$$H \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0 ;$$

(*) Moltiplicando in questo determinante i termini della prima colonna per α_w, e aggiungendovi quelli della seconda moltiplicati per β_w e quelli della terza moltiplicati per γ_w, e operando in modo simile sulle altre colonne si ritrovano subito le formole di Rodrigues che abbiamo date al § 495 [pag. 654].

talchè moltiplicando ancora pel determinante (6) si avrà

$$H \begin{vmatrix} A & H & L \\ H & B & K \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial u} & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} A & H & L \\ H & B & K \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial v} & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \sum \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0 ,$$

ovvero

$$H \left\{ (HK - BL) \frac{\partial A}{\partial u} - 2(AK - HL) \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2(AB - H^2) \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right\} -$$
$$- A \left\{ (HK - BL) \frac{\partial A}{\partial v} - 2(AK - HL) \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + 2(AB - H^2) \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right\} = 0.$$

e infine osservando che colla derivazione delle (3) si hanno con facilità i valori di $\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, si trova, come condizione necessaria e sufficiente perchè le intersezioni (v, w) delle superficie v e w siano linee di curvatura delle superficie w, la equazione seguente

$$\left\{ \begin{aligned} & H \left\{ (HK - BL) \frac{\partial A}{\partial u} - (AK - HL) \left(2 \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) + (AB - H^2) \left(2 \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial w} \right) \right\} - \\ & - A \left\{ (HK - BL) \frac{\partial A}{\partial v} - (AK - HL) \frac{\partial B}{\partial u} + (AB - H^2) \left(\frac{\partial K}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial w} + \frac{\partial L}{\partial v} \right) \right\} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{9}$$

tutta espressa pei coefficienti del quadrato (2) dell'elemento lineare.

E osservando che si può scrivere

$$H(HK - BL) = - \frac{HL}{A} (AB - H^2) + \frac{H^2}{A} (AK - HL) ,$$

$$A(HK - BL) = - L (AB - H^2) + H (AK - HL),$$

la stessa condizione (9) potrà anche porsi sotto la forma

$$\left\{ \begin{aligned} & (AB - H^2) \left\{ \left(L \frac{\partial A}{\partial v} - A \frac{\partial L}{\partial v} \right) + 2H \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{HL}{A} \frac{\partial A}{\partial u} - A \frac{\partial K}{\partial u} + A \frac{\partial H}{\partial w} - H \frac{\partial A}{\partial w} \right\} + \\ & \qquad + A(AK - HL) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{AB - H^2}{A} \right) = 0 . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Tutto questo quando non si richieda anche che i due sistemi di superficie v e w siano fra loro ortogonali.

Quando poi (come nel caso del teorema di Darboux) si richieda che i detti sistemi v e w di superficie siano anche ortogonali fra loro, allora dovendo essere soddisfatta anche la condizione di ortogonalità $AK - HL = 0$, la precedente condizione — cioè quella necessaria e sufficiente perchè le linee d'intersezione (v, w) di questi sistemi di superficie siano linee di curvatura delle superficie w — si ridurrà all'altra più semplice

$$(11) \qquad \left(L\frac{\partial A}{\partial v} - A\frac{\partial L}{\partial v}\right) + 2H\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{HL}{A}\frac{\partial A}{\partial u} - A\frac{\partial K}{\partial u} + A\frac{\partial H}{\partial w} - H\frac{\partial A}{\partial w} = 0 .$$

ovvero

$$(12) \qquad L\frac{\partial A}{\partial v} - K\frac{\partial A}{\partial u} + 2H\frac{\partial L}{\partial u} - A\left(\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial v}\right) + A\frac{\partial H}{\partial w} - H\frac{\partial A}{\partial w} = 0 ,$$

e allora le stesse linee (v, w) saranno linee di curvatura anche per le superficie $v =$ cost. perchè se s'immaginano le normali lungo queste linee alle superficie w, esse costituiranno una superficie sviluppabile e saranno situate sul piano tangente alle superficie v e quindi pel teorema del § 505 [pag. 664] saranno le direzioni coniugate sopra queste superficie delle tangenti alle linee considerate (v, w); e essendo queste direzioni ortogonali le stesse linee saranno di curvatura anche per la superficie v.

540. — Premesse queste considerazioni generali resta facilissimo dimostrare tanto il teorema di Dupin quanto quello di Darboux che abbiamo enunciati sopra.

Per giungere al teorema di Dupin basta osservare che se i tre sistemi di superficie u, v, w che costituiscono un sistema triplo sono fra loro ortogonali, nella formola (2) del quadrato dell'elemento lineare dello spazio avremo sempre $H = K = L = 0$, e quindi le equazioni (9) o (10), che esprimono la condizione necessaria e sufficiente perchè le intersezioni delle superficie v e w siano linee di curvatura di queste superficie e le equazioni analoghe per le intersezioni degli altri sistemi di superficie sono tutte identicamente soddisfatte, e questo porta appunto che tutte queste intersezioni sono linee di curvatura delle superficie corrispondenti.

541. — Per dimostrare anche il teorema di Darboux si osservi prima che, avendosi un sistema triplo qualsiasi di superficie u, v, w che pel quadrato dell'elemento lineare diano luogo alla formola (2), se cambieremo la variabile u in un'altra u_1 facendo una trasformazione mediante la formola

$$(13) \qquad u = f(u_1, v, w) ,$$

le superficie di parametri v e w rimarranno le stesse, e così rimarranno le

stesse anche le loro linee d'intersezione, perchè la eliminazione di u_1 e w e quella di u_1 e v fra le equazioni (1) dopo di averle trasformate col farvi la sostituzione (13) equivarranno a quelle di $f(u_1, v, w)$ e w, o di $f(u_1, v, w)$ e v fra le stesse equazioni così trasformate, e quindi porteranno alle stesse equazioni $f_1(x, y, z, v) = 0$ e $f_2(x, y, z, w) = 0$ alle quali portavano le eliminazioni di u e w, o di u e v fra le stesse formole (1) prima di fare la trasformazione per mezzo della (13); e poichè dal quadrato dell'elemento lineare (2) si passerà al nuovo in u_1, v, w, du_1, dv e dw ponendovi per u la funzione f e per du la sua nuova espressione $du = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial v} \partial v + \frac{\partial f}{\partial w} dw$, evidentemente basterà che la funzione f nella formola di trasformazione (13) sia scelta in modo che si abbia $L + A\frac{\partial f}{\partial w} = 0$ per far sì che nel nuovo quadrato dell'elemento lineare venga a mancare il termine in $du_1 dw$ (*).

Ora in calcolo integrale si dimostra che sotto certe condizioni di continuità e di esistenza delle derivate di A e L considerate come funzioni di u, v e w esiste sempre una relazione fra queste quantità e una costante arbitraria che soddisfa alla condizione $L + A\frac{\partial u}{\partial w} = 0$ che viene dalla precedente $L + A\frac{\partial f}{\partial w} = 0$ scrivendovi u al posto di f; e quindi presa la costante arbitraria come nuovo parametro u_1, la indicata relazione, che sarà della forma $\varphi(u, v, w, u_1) = 0$, risoluta rispetto ad u determinerà la funzione $f(u_1, v, w)$ colla quale la trasformazione (13) porterà ad essere $L + A\frac{\partial f}{\partial w} = 0$ qualunque sia u_1; e questo assicura che esiste la trasformazione indicata, per la quale cioè nel quadrato dell'elemento lineare verrà a mancare il termine che contiene il prodotto $du_1 dw$.

Ne segue che, indicando ora con u invece che con u_1 il nuovo parametro, qualunque siano i due sistemi di superficie date v e w siamo certi che si avrà sempre un terzo sistema di superficie u che insieme a quelli dati costituirà un sistema triplo di superficie per le quali nel quadrato dell'elemento lineare (2) si ha $L = 0$, e potremo sempre intendere di partire da questo sistema triplo di superficie; quindi se, come si richiede nell'enunciato del teorema di Darboux, si suppone anche che i due sistemi di superficie dati siano

(*) Il termine indicato in $du_1 dw$ mancherebbe sempre anche se fosse $\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$, ma questo caso è da escludersi perchè allora la f non conterrebbe la nuova variabile u_1, e la (13) non lascerebbe più indipendenti le variabili u, v, w.

fra loro ortogonali, allora per la condizione (7) di ortogonalità, non potendo essere $A=0$, dovrà essere anche $K=0$, e pel quadrato dell'elemento lineare si avrà

$$ds^3 = A\,du^2 + B\,dv^2 + C\,dw^2 + 2H\,du\,dv.$$

Posta anche l'altra condizione che si ha nel teorema di Darboux, cioè che le linee d'intersezione dei sistemi dati di superficie ortogonali v e w siano linee di curvatura delle superficie di un sistema (e quindi anche del-l'altro) dovrà essere soddisfatta la condizione corrispondente (11) o (12) la quale ora si ridurrà alla seguente più semplice $A\frac{\partial H}{\partial w} - H\frac{\partial A}{\partial w} = 0$ ovvero $\frac{\partial \frac{H}{A}}{\partial w} = 0$, ciò che porta che $\frac{H}{A}$ non possa contenere che le variabili u e v; e quindi, poichè la espressione precedente di ds^2 può porsi sotto la forma

$$ds^2 = A\left(du + \frac{H}{A}\,dv\right)^2 + \left(B - \frac{H^2}{A}\right)dv^2 + C\,dw^2,$$

nella espressione $du + \frac{H}{A}\,dv$ che figura nel primo termine del secondo membro non compariranno altro che le variabili u e v insieme ai loro differenziali du e dv.

Ma nel calcolo integrale si dimostra anche che, avendosi una tale espressione $du + \frac{H}{A}\,dv$, esistono sempre infinite funzioni μ di u e v tali che il prodotto $\mu\left(du + \frac{H}{A}\,dv\right)$ risulti il differenziale esatto di una funzione $\varphi(u,v)$ di u e v; quindi fatto un cambiamento di variabili col sostituire alla variabile u un'altra variabile $\overline{u}$ mediante la formola $\overline{u} = \varphi(u,v)$ la quale darà luogo all'altra $u = \psi(\overline{u}, v)$, le superficie v e w non verranno a mutarsi, e si avrà la formola

$$ds^2 = \frac{A}{\mu^2}\,d\overline{u}^2 + \left(B - \frac{H^2}{A}\right)dv^2 + C\,dw^2,$$

nella quale ad u nei coefficienti dovrà intendersi sostituita la funzione $\psi(\overline{u}, v)$; e questo mostra appunto che esisterà sempre un terzo sistema di superficie $\overline{u}$ che insieme ai due dati v e w costituisce un sistema triplo ortogonale; e così anche il teorema di Darboux è completamente dimostrato.

Fine del Calcolo differenziale.

INDICE

CALCOLO DIFFERENZIALE

APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Superficie rigate.

Formole generali. Linea di stringimento [§ 514]. — Quadrato dell'elemento lineare [§ 515]. — Le minime distanze delle tangenti successive delle curve gobbe nei punti che non sono di piani osculatori stazionarii sono infinitesime del terzo ordine (teorema di Bonnet) [§ 516]. — Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie rigata sia sviluppabile [§ 517]. — Superficie delle normali principali e delle binormali ad una curva gobba [§ 518-519]. — Piano tangente alle superficie rigate [§ 520]. — Angolo dei piani tangenti nei punti di una stessa generatrice. Coefficiente di distribuzione del piano tangente. Teorema di Chasles per le superficie gobbe [§ 521-522]. — Equazioni delle asintotiche e delle linee di curvatura nelle superficie rigate [§ 523-524].

Congruenze di rette.

Considerazioni generali [§ 525]. Le congruenze per le quali ogni superficie rigata estratta da esse è sviluppabile sono soltanto quelle le cui rette sono parallele a una direzione fissa o passano tutte per un punto [§ 526]. — Le due falde della superficie focale nelle congruenze. I due fuochi su ogni raggio [§ 527-528]. — Congruenze normali. Condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza sia normale. Si ritrova il teorema dato in nota al § 488 sulle superficie i cui punti sono tutti ombilichi [§ 529-530]. — Perchè le tangenti a un sistema di curve tracciate su una superficie costituiscano una congruenza normale è necessario e sufficiente che quelle curve siano un sistema di geodetiche non rettilinee della superficie [§ 531]. — Conseguenze che se ne deducono per la deformazione delle superficie. Superficie applicabili. Forma del quadrato dell'elemento lineare di una superficie in coordinate curvilinee ortogonali quando uno dei due sistemi di linee coordinate è formato da geodetiche [§ 532-534]. — Teorema di Malus-Dupin sui raggi che sono normali a una superficie e che subiscono refrazioni o riflessioni [§ 535-536].

Applicazioni ai sistemi tripli di superficie.

Enunciato dei teoremi di Dupin e di Darboux sui sistemi tripli di superficie [§ 537]. — Condizione perchè due sistemi di superficie in un sistema triplo siano fra loro ortogonali [§ 538] — perchè s'incontrino secondo le linee di curvatura di uno di quei sistemi di superficie. Altra dimostrazione delle formole di Rodrigues relative alle linee di curvatura [§ 539]. Dimostrazione dei teoremi ricordati sopra di Dupin e di Darboux [§ 540-541].